

SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA  
PARALELA EN  $S^2 \times S^2$  Y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  Y  
SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA  
CONSTANTE EN ESPACIOS  
HOMOGÉNEOS

FRANCISCO TORRALBO TORRALBO



**Universidad de Granada**

TESIS DOCTORAL

Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de Ciencias

Enero 2010

Francisco Torralbo Torralbo: *Superficies de curvatura media paralela en  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  y superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos*, TESIS DOCTORAL, © 2010

DIRECTOR DE TESIS:  
Francisco Urbano Pérez-Aranda

SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA PARALELA EN  
 $S^2 \times S^2$  Y  $H^2 \times H^2$  Y SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA  
CONSTANTE EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS

Memoria presentada por el Licenciado Francisco Torralbo Torralbo, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Francisco Urbano Pérez-Aranda, Catedrático de dicho departamento, con objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Granada, 19 de enero de 2010.

Prof. Francisco Urbano Pérez-Aranda	Ldo. Francisco Torralbo Torralbo
Director de la memoria.	Aspirante al grado de Doctor.

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: Francisco Torralbo Torralbo  
D.L.: GR 2403-2010  
ISBN: 978-84-693-1309-1



# ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	v
ABSTRACT AND CONCLUSIONS	xxi
<b>I ESPACIOS AMBIENTE</b>	<b>1</b>
1 PRODUCTO DE SUPERFICIES	3
1.1 Definiciones y notación básica . . . . .	3
1.2 Curvaturas e isometrías . . . . .	6
1.3 Subvariedades . . . . .	8
2 ESPACIOS HOMOGÉNEOS RIEMANNIANOS	11
2.1 Introducción . . . . .	11
2.2 Espacios proyectivo e hiperbólico complejos .	16
2.3 Las esferas de Berger . . . . .	20
2.4 El grupo especial lineal . . . . .	24
2.5 El grupo de Heisenberg . . . . .	27
<b>II SUPERFICIES EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS</b>	<b>31</b>
3 SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE	33
3.1 Introducción . . . . .	33
3.2 Toros llanos de curvatura media constante . .	37
3.2.1 Toros llanos CMC en $S_b^3$ . . . . .	38
3.2.2 Toros llanos CMC en $Sl_2(\mathbb{R})$ . . . . .	39
3.3 Ejemplos de rotación . . . . .	41
3.3.1 Superficies de rotación en las esferas de Berger . . . . .	43
3.3.2 Superficies de rotación en $Sl_2(\mathbb{R})$ . . . .	58
3.3.3 Área de las esferas CMC . . . . .	68
3.4 Superficies mínimas en las esferas de Berger. .	72
4 CURVATURA DE GAUSS CONSTANTE	79
4.1 Superficies de Hopf . . . . .	79

4.2	Superficies compactas llanas . . . . .	80
4.3	Resultados de no existencia . . . . .	84
<b>III SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA PARALELA</b>		<b>89</b>
5	DIFERENCIALES HOLOMORFAS	91
5.1	Definición y ecuaciones de compatibilidad . .	91
5.2	Diferenciales holomorfas . . . . .	97
5.3	Ejemplos de superficies PMC . . . . .	98
5.3.1	Superficies CMC de $S^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .	98
5.3.2	Producto de curvas . . . . .	101
5.3.3	Familia con $\bar{K}^\perp = 0$ . . . . .	104
5.4	Algunas propiedades interesantes . . . . .	109
6	RESULTADOS PRINCIPALES	113
6.1	Relación entre CMC y PMC . . . . .	113
6.2	Superficies PMC lagrangianas . . . . .	117
6.3	Superficies PMC con $\bar{K}^\perp = 0$ . . . . .	121
6.4	Superficies PMC con diferenciales de Hopf nulas	128
6.5	Nuevos ejemplos de superficies CMC en productos	132
6.6	Superficies PMC compactas . . . . .	141
<b>IV ESTABILIDAD DE SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE</b>		<b>145</b>
7	ESTABILIDAD DE LAS ESFERAS Y LOS TOROS DE HOPF	147
7.1	Introducción . . . . .	147
7.2	Estabilidad de las esferas CMC . . . . .	150
7.3	Estabilidad de los toros de Hopf . . . . .	155
7.3.1	Estabilidad de toros de Hopf en las esferas de Berger . . . . .	156
7.3.2	Estabilidad de toros llanos CMC en $Sl_2(\mathbb{R})$	158
8	SUPERFICIES COMPACTAS ESTABLES	161
8.1	Resultados principales . . . . .	161
8.2	Aplicación al problema isoperimétrico . . . . .	177
GLOSARIO		183

ÍNDICE	189
BIBLIOGRAFÍA	191



## INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más clásicos en Geometría Diferencial, que se remonta casi a su origen, es el estudio de las superficies del espacio euclídeo que tienen curvatura media constante (para abreviar utilizaremos a veces el acrónimo CMC). Explicitar los resultados más relevantes obtenidos en dicho problema se sale del contexto de esta introducción y pueden encontrarse en textos de Geometría Diferencial de superficies (cf. Do Carmo [dC76] o Montiel y Ros [MR09]). No obstante, desde nuestro punto de vista es interesante resaltar algunos por sus repercusiones científicas posteriores o por su conexión con los temas tratados en esta memoria.

H. Hopf [Hop83] en 1951 probó que *cualquier esfera de curvatura media constante  $H$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  es, de hecho, una esfera redonda de radio  $1/|H|$* . La herramienta fundamental en la demostración de este resultado es la existencia de una diferencial cuadrática holomorfa sobre toda superficie de curvatura media constante de  $\mathbb{R}^3$  y el hecho de que en las esferas dichas diferenciales han de anularse.

Posteriormente Alexandrov [Ale56] en 1956 probó que *las únicas superficies compactas de curvatura media constante de  $\mathbb{R}^3$  que no tienen autointersecciones son las esferas redondas*. Su ingeniosa demostración, basada en el uso del principio del máximo y de las simetrías del espacio  $\mathbb{R}^3$ , ha sido estandarizada posteriormente bajo el nombre de *principio de reflexión de Alexandrov*.

Tras estos dos resultados, la existencia de superficies compactas de curvatura media constante de  $\mathbb{R}^3$  con topología más complicada se convirtió en un problema interesante. Una respuesta al mismo no se produjo hasta 1986, cuando Wente *construyó una inmersión de un toro en  $\mathbb{R}^3$  de curvatura media constante*. La importancia del ejemplo de Wente no solo reside en dar una respuesta al anterior problema, si no que su idea ha permitido *clasificar* todas las inmersiones de curvatura media constante de un toro en  $\mathbb{R}^3$  (cf. Pinkall y Sterling [PS89]).

Las superficies de curvatura media constante de  $\mathbb{R}^3$ , conocidas como pompas de jabón, aparecen como puntos críticos de un problema variacional. En 1984, Barbosa y Do Carmo [BdC84] probaron que *las superficies de curvatura media constante de  $\mathbb{R}^3$  son los puntos críticos del funcional área con la ligadura de que el volumen encerrado por la superficie sea constante*. En este contexto es razonable estudiar que puntos críticos, esto es que superficies de curvatura media constante, tienen menor área o que superficies son estables, esto es son mínimos locales del área. El primer problema de encontrar las superficies compactas de menor área de entre las que encierran un volumen fijo, se conoce con el nombre de *problema isoperimétrico* y ya los griegos probaron que las esferas redondas son las soluciones. Respecto al segundo problema, clasificar las superficies compactas estables de  $\mathbb{R}^3$ , Barbosa y Do Carmo también demostraron que las únicas son las esferas.

Muchos de los resultados mencionados y no mencionados han sido extendidos con mayor o menor dificultad al caso en que el espacio ambiente en donde está inmersa la superficie sea la esfera de dimensión tres  $S^3$  o el espacio hiperbólico de dimensión tres  $\mathbb{H}^3$  o incluso a algún cociente de ellos. En todos estos casos, el que la variedad ambiente tenga curvatura

constante y una gran cantidad de isometrías ha sido a veces fundamental para la demostración de los resultados.

Muy recientemente, en 2004, Abresch y Rosenberg [AR04] estudiaron superficies de curvatura media constante en variedades de dimensión tres que no tienen curvatura constante, concretamente en  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Estas variedades son espacios homogéneos riemannianos con un grupo de isometrías de dimensión cuatro. Al igual que en el caso de  $\mathbb{R}^3$ , consiguieron construir sobre cualquier superficie de curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  una diferencial cuadrática holomorfa. En dicho trabajo los autores clasificaron aquellas superficies cuya diferencial cuadrática es nula, y en particular, clasificaron las esferas de curvatura media constante probando que son los ejemplos rotacionalmente invariantes obtenidos previamente por Hsiang y Pedrosa y Ritoré [PR99].

Un año más tarde, los mismos autores en [AR05, Teorema 5] anunciaron la existencia de una diferencial cuadrática holomorfa para superficies de curvatura media constante en cualquier espacio homogéneo riemanniano de dimensión 3 con grupo de isometrías de dimensión cuatro. Aparte de los dos ejemplos citados anteriormente, de entre dichos espacios homogéneos caben destacar las esferas de Berger ( $S^3$  con una familia 2-paramétrica de métricas, ver sección 2.3 [p.20]), el grupo lineal especial ( $Sl_2(\mathbb{R})$  con una familia 2-paramétrica de métricas, ver sección 2.4 [p.24]) y el grupo de Heisenberg. No obstante, la primera vez que dicha diferencial aparece escrita explícitamente en la literatura es en el trabajo de Berdinskiĭ y Taĭmanov [BT05, Corolarios 2 y 4] cuando el espacio ambiente es el grupo de Heisenberg y el grupo especial lineal y, más generalmente cuando el espacio ambiente es cualquier espacio homogéneo riemanniano con grupo

de isometrías de dimensión 4, en el trabajo de Fernández y Mira [FM07].

Durante los últimos cinco años las superficies de curvatura media constante en los espacios homogéneos han sido profundamente estudiadas. No vamos a exponer detalladamente los principales resultados obtenidos, aunque a lo largo de la memoria mencionaremos aquellos que están relacionados con el contenido de la misma (para una recopilación de los mismos ver el libro de Daniel, Hauswirth y Mira [DHM09]).

Cuando la dimensión de la variedad ambiente donde está inmersa la superficie es mayor que uno, la generalización natural del concepto de superficie de curvatura media constante es la superficie de *curvatura media paralela*, esto es, superficies cuyo vector curvatura media es paralelo en el fibrado normal. Aunque hay resultados para codimensión mayor que dos, los más relevantes han sido obtenidos para el caso de codimensión dos. En 1971, Ferus [Fer71] extendió el teorema de Hopf probando que *una esfera con curvatura media paralela no nula inmersa en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^4$ , la esfera  $S^4$  o el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^4$  es necesariamente una esfera geodésica*. Dos años más tarde Chen [Che73] y Yau [Yau74] clasificaron, de forma independiente, todas las superficies de curvatura media paralela en dichas variedades de dimensión cuatro, probando que *cualquier superficie de curvatura media paralela de  $\mathbb{R}^4$ ,  $S^4$  y  $\mathbb{H}^4$  es una superficie de curvatura media constante en alguna hipersuperficie totalmente umbilical de dichas 4-variedades*. Como las hipersuperficies totalmente umbilicales de estas variedades vuelven a ser espacios de curvatura constante, el estudio de las superficies de curvatura media paralela de estas variedades de dimensión cuatro es trivial. Ambos resultados se basan en el siguiente hecho: si  $H$  es el vector curvatura media de la superficie, puesto que el fibrado nor-

mal es de dimensión dos, es posible considerar otro vector paralelo en dicho fibrado,  $\tilde{H}$ , ortogonal a  $H$  y de la misma longitud y definir dos diferenciales cuadráticas holomorfas de Hopf asociadas a  $H$  y a  $\tilde{H}$ .

En este caso, en el que la variedad ambiente es de dimensión cuatro, y teniendo en cuenta el comportamiento de la curvatura, la generalización natural de los espacios de curvatura constante, son la superficies de Kähler de curvatura seccional holomorfa constante, esto es el plano proyectivo complejo y el plano hiperbólico complejo. En 2000, Kenmotsu y Zhou [KZ00] clasificaron las superficies con vector curvatura media paralelo en los espacios proyectivo e hiperbólico complejo. En este caso, es bien conocido que no existen hipersuperficies totalmente umbilicales en estas 4-variedades (ver [TT63]), por tanto no existe un método parecido al usado en los espacios de curvatura seccional constante para construir superficies de curvatura media paralela. Los autores no usan la existencia de una diferencial de Hopf. En su lugar, reducen el teorema de clasificación, usando un resultado de Ogata [Oga95], a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre la superficie. Usando un método analítico, clasifican estas superficies, probando que la familia de ejemplos es reducida y tiene un buen comportamiento respecto de la estructura compleja del espacio ambiente.

Una primera familia de superficies que pretendemos estudiar en esta tesis doctoral son las superficies con vector curvatura media paralelo en las variedades de dimensión cuatro producto de dos esferas o dos planos hiperbólicos con la misma curvatura, que normalizaremos como 1 en el primer caso y  $-1$  en el segundo. Estas variedades son espacios simétricos y desde el punto de vista de su curvatura, las más simples después de las mencionadas anteriormente.

En este caso, aunque existen hipersuperficies totalmente umbilicales, sólo las totalmente geodésicas (salvo congruencias,  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) tienen curvatura media constante (ver Proposición 1.1 [p.8]). Por tanto, las superficies de curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  son superficies con vector curvatura media paralelo en  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  respectivamente.

Una de las herramientas fundamentales que hemos usado en esta memoria para su estudio es la *construcción de dos diferenciales cuadráticas holomorfas sobre cualquier superficie de curvatura media paralela de  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$*  (cf. Definición 5.3 [p.97]) que generalizan a la diferencial de Abresch-Rosenberg en el sentido siguiente: si una superficie con curvatura media paralela de  $S^2 \times S^2$  (respectivamente de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ) factoriza a través de una superficie de curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  (respectivamente de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ), entonces ambas diferenciales son iguales y además coinciden (salvo una constante) con la diferencial de Abresch-Rosenberg (ver Lema 5.1 [p.99]). Para la construcción de estas dos diferenciales se ha usado fuertemente las dos estructuras de variedad de Kähler que estas variedades de dimensión cuatro poseen. (cf. Capítulo 1). Conviene poner de manifiesto que el producto de dos superficies de Riemann de curvaturas constantes diferentes no es una variedad Einstein lo cual es un gran obstáculo a la hora de estudiar sus superficies de curvatura media paralela. Siguiendo las mismas ideas, es posible construir sobre una superficie de curvatura media paralela en el producto de dos superficies de curvaturas constantes diferentes una diferencial cuadrática holomorfa. Cuando las curvaturas son opuestas, esta diferencial holomorfa fue definida por de Lira y Vitorio [dLV08].

Siguiendo el esquema anterior, en Teorema 6.4 [p.128] y Corolario 6.1 [p.131], clasificamos las superficies con curvatura

media paralela de  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  cuyas diferenciales cuadráticas se anulan idénticamente, y por tanto las inmersiones de una esfera en  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  que tienen curvatura media paralela. Estos resultados pueden resumirse en

*Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow S^2 \times S^2$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ) una inmersión de curvatura media paralela  $H$  con diferenciales cuadráticas asociadas nulas. Entonces ocurre una de las siguientes posibilidades:*

1.  $\Phi(\Sigma)$  es una superficie de curvatura media constante en  $S^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) con diferencial de Abresch-Rosenberg nula,
2.  $4|H|^2 = 1$  y  $\Phi(\Sigma) \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  es el producto de dos hiperciclos de  $\mathbb{H}^2$ ,
3.  $4|H|^2 < 1$  y  $\Phi$  es un embebimiento del plano hiperbólico con curvatura  $4|H|^2 - 1$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

*Por tanto, si  $\Sigma$  es una esfera de curvatura media paralela en  $S^2 \times S^2$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ), entonces  $\Phi(\Sigma)$  es una esfera de curvatura media constante en  $S^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ).*

Una segunda propiedad importante de las superficies de curvatura media paralela que abre las puertas de su clasificación es su estrecha relación con las superficies de curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , como ya se ha puesto de manifiesto en el resultado anterior. Esta propiedad, recogida en el Teorema 6.1<sub>[p.113]</sub> puede resumirse así:

*Dada una superficie riemanniana simplemente conexa  $(\Sigma, g)$  y salvo congruencias, existe una correspondencia biunívoca entre inmersiones isométricas  $\Phi$  de curvatura media paralela de  $(\Sigma, g)$  en  $S^2 \times S^2$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ) y pares de inmersiones isométricas*

*con curvatura media constante  $\{\Phi_1, \Phi_2\}$  de  $(\Sigma, g)$  en  $S^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) con  $|H| = |H_1| = |H_2|$ , siendo  $H$  el vector curvatura media de  $\Phi$  y  $H_j, j = 1, 2$  las curvaturas medias de  $\Phi_j, j = 1, 2$ .*

*Además,  $\Phi$  factoriza a través de una inmersión con curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) si y sólo si  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son congruentes.*

Por tanto encontrar ejemplos no triviales de superficies de curvatura media paralela de  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  (esto es que no factoricen a través de superficies de curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) equivale a encontrar ejemplos no rígidos de superficies de curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Es claro que los ejemplos 2. y 3. dados anteriormente no factorizan a través de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , pero no es difícil comprobar que las correspondientes inmersiones  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  de curvatura media constante asociadas son débilmente congruentes, esto es existe una isometría  $G$  de  $(\Sigma, g)$  tal que  $\Phi_1 \circ G$  y  $\Phi_2$  son congruentes.

En el Teorema 6.3<sup>[p.121]</sup> y Corolario 6.3<sup>[p.135]</sup>, *clasificamos las inmersiones de curvatura media constante débilmente congruentes en  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  que cumplen la hipótesis adicional de tener las mismas curvaturas seccionales extrínsecas*. Estas parejas producen superficies *no triviales* de curvatura media paralela de  $S^2 \times S^2$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  caracterizadas por tener la curvatura normal extrínseca nula. En la clasificación aparece una familia 3-paramétrica de nuevos ejemplos que son descritos en las Propositiones 5.3<sup>[p.104]</sup>, 6.1<sup>[p.133]</sup> y 6.2<sup>[p.140]</sup> y en los ejemplos 6.1<sup>[p.137]</sup>, 6.2<sup>[p.137]</sup> y 6.3<sup>[p.138]</sup>.

Los resultados expuestos anteriormente produjeron un cambio de rumbo en la línea de investigación induciendo a estudiar superficies de curvatura media constante, no solo en las variedades  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , sino también en las de

cualquier espacio homogéneo con grupo de isometrías de dimensión 4.

El primer problema interesante que fue abordado fue el encontrar ejemplos de superficies de curvatura media constante en las esferas de Berger y el grupo lineal especial, que eran los espacios ambientes menos estudiados. El capítulo 3 de esta memoria está dedicado a ello. En la sección 3.2<sup>[p.37]</sup> se describen explícitamente *todos los toros llanos de curvatura media constante de las esferas de Berger y del grupo lineal especial*. La sección 3.3<sup>[p.41]</sup> está dedicada a *construir las superficies de rotación con curvatura media constante de las esferas de Berger y del grupo especial lineal* (Teoremas 3.1<sup>[p.48]</sup> y 3.2<sup>[p.62]</sup>), dando una descripción explícita de las esferas (Corolarios 3.1<sup>[p.58]</sup> y 3.2<sup>[p.68]</sup>) y obteniendo el área de las mismas (Proposición 3.5<sup>[p.71]</sup>). Como resultados singulares cabe destacar que, en algunas esferas de Berger y en algunas métricas homogéneas del grupo lineal especial, existen ejemplos de esferas de curvatura media constante que tienen autointersecciones. Así mismo, en algunas esferas de Berger existen ejemplos de toros mínimos (esto es que tienen curvatura media nula) diferentes del toro de Clifford y que no poseen autointersecciones. Esto prueba el distinto comportamiento de estas esferas con relación a la esfera usual, en donde a excepción del toro de Clifford, todos los toros mínimos tienen autointersecciones (cf. Kilian y Schmidt [KS09]).

Los ecuadores y el toro de Clifford (convenientemente situados en  $S^3$ ) no sólo son ejemplos de superficies mínimas en la esfera usual, sino que también son superficies mínimas en cualquier esfera de Berger. En la sección 3.4<sup>[p.72]</sup> *caracterizamos aquellas superficies mínimas de  $S^3$  que son también mínimas en cualquier esfera de Berger*. La familia obtenida es no trivial y proporciona nuevos ejemplos de superficies mínimas en las esferas de Berger (cf. Teorema 3.3<sup>[p.74]</sup>).

Un segundo problema que se abordó fue la clasificación de las superficies de curvatura media constante estables y el problema isoperimétrico. Los primeros resultados de estabilidad para superficies de curvatura media constante se deben a Barbosa, do Carmo y Eschenburg [BdC84, BdCE88] donde mostraron que las únicas superficies compactas estables del espacio euclídeo, la esfera y el espacio hiperbólico son las esferas geodésicas (de hecho probaron dicho resultado para hipersuperficies en cualquier dimensión). Más tarde, Ritoré y Ros [RR92] trataron el mismo problema para superficies con curvatura media constante de 3-variedades de curvatura constante mostrando que los toros de curvatura media constante estables son necesariamente llanos y clasificando las superficies orientables compactas de curvatura media constante estables en dicho espacio. Esto les permitió resolver el problema isoperimétrico en el espacio proyectivo. Además Ros [Ros07] estudió la estabilidad de superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , siendo  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  un subgrupo discreto de traslaciones de rango  $k$ , probando que el género de una superficie compacta con curvatura media constante estable en dicho ambiente es menor o igual que  $k$ . Finalmente Ros [Ros06] mejoró muchos resultados previos probando que el género de una superficie compacta orientable con curvatura media constante estable de cualquier 3-variedad orientable con curvatura de Ricci no negativa es siempre menor o igual que 3.

Souam [Sou08] estudió la estabilidad de las superficies compactas con curvatura media constante de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . En el caso de  $S^2 \times \mathbb{R}$  las clasificó, probando que son ciertas esferas de curvatura media constante.

En los capítulos 7 y 8 de la memoria estudiamos estabilidad de superficies compactas con curvatura media constante de las esferas de Berger, el grupo lineal especial y el grupo

de Heisenberg. Cuando se intentan abordar problemas de estabilidad es necesario disponer de apropiadas funciones test para ser usadas en la forma cuadrática de la segunda variación del área, así como un control de la integral del cuadrado de la curvatura media. A veces estas funciones son restricciones a la superficie de funciones del espacio ambiente, por lo que cuanto más bondadoso sea el espacio ambiente mayores posibilidades de éxito tendremos. Por tanto es interesante ver a nuestras 3-variedades ambiente como hipersuperficies naturales de 4-variedades con buenas propiedades geométricas. Aunque más o menos esto era un hecho conocido, no estaba bien escrito en la literatura y por tanto en el capítulo 2 probamos que *las esferas de Berger son las esferas geodésicas del plano proyectivo complejo y del plano hiperbólico complejo, que el grupo lineal especial con sus diferentes métricas homogéneas son los tubos sobre hiperplanos complejos del plano hiperbólico complejo y que el grupo de Heisenberg es la horoesfera del plano hiperbólico complejo* (cf. Propositiones 2.2[p.22], 2.3[p.26] y 2.4[p.29]). Estas hipersuperficies de los planos proyectivo e hiperbólico complejos son exactamente las llamadas hipersuperficies pseudo-umbilicales (en estos espacios no existen hipersuperficies umbilicales). Como se pondrá de manifiesto más adelante, esta manera de ver a los espacios homogéneos anteriormente citados será fundamental para obtener los resultados de estabilidad del capítulo 8.

El capítulo 7 se encarga de estudiar la estabilidad de las superficies compactas de curvatura media constante más regulares, entendiendo por tal las que deberían ser las candidatas a ser las únicas estables. En concreto en el Teorema 7.1[p.152] se prueba que *todas las esferas con curvatura media constante del grupo lineal especial y del grupo de Heisenberg son estables, mientras que hay esferas de Berger en las que no todas sus esferas de curvatura media constante son estables*. Esto no resulta sorprendente, pues Souam [Sou08] ya probó que una propiedad

similar ocurre con las esferas de curvatura media constante de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Es interesante destacar que la demostración de estos resultados pasa por probar una propiedad general que dice que *la forma cuadrática de la segunda variación del área de cualquier esfera con curvatura media constante de un espacio homogéneo riemanniano con grupo de isometrías de dimensión 6 o 4 es siempre la misma*. En particular el índice y la nulidad de estas formas cuadráticas es siempre 1 y 3 respectivamente (cf. Proposición 7.1<sub>[p.150]</sub>).

En las Proposiciones 7.2<sub>[p.157]</sub> y 7.3<sub>[p.160]</sub>, se estudia la estabilidad de los toros llanos con curvatura media constante de las esferas de Berger y del grupo lineal especial construidos en las Proposiciones 3.2<sub>[p.39]</sub> y 3.3<sub>[p.40]</sub>. En este caso el operador de Jacobi de la segunda variación es un operador de Schrödinger con función potencial constante, y por tanto el estudio de la estabilidad equivale al ejercicio de conocer el primer valor propio del Laplaciano de estos toros llanos. Como novedad más importante se tiene que *hay esferas de Berger en las que algunos toros llanos son estables*, poniéndose de nuevo de manifiesto la diferencia entre la esfera estándar y las de Berger. *En el caso del grupo lineal especial es interesante constatar que en todas sus métricas homogéneas existen toros llanos de curvatura media constante estables*.

En el capítulo 8 se estudian las superficies compactas estables de las esferas de Berger, del grupo lineal especial y del grupo de Heisenberg. Una primera idea para ello es usar como función test sobre nuestra superficie compacta una función meromorfa sobre ella (en realidad tres funciones valuadas reales) cuyo grado es controlado por el género de la superficie y que proporciona la teoría de Brill-Noether. Por supuesto esta idea ha sido explotada en diferentes situaciones y en nuestro caso no aportaría ningún resultado nuevo sino fuese por el control que se tiene de la integral

del cuadrado de la curvatura media. Este control nos lo proporciona el poder considerar a nuestras superficies como superficies de los planos proyectivo e hiperbólico complejos y un resultado de Montiel y Urbano [MU02, Teorema 4] que acota el funcional de Willmore de estas superficies. Todas estas herramientas y manipulaciones de la segunda fórmula de variación nos conducen al siguiente resultado (ver Teorema 8.1<sub>[p.162]</sub> para más detalles):

1. *En ciertas esferas de Berger, cualquier superficie compacta con curvatura media constante estable es una esfera o un toro sin autointersecciones.*
2. *En el grupo de Heisenberg y en el grupo lineal especial, existe una constante  $\alpha$  (dependiente de la curvatura del ambiente), tal que las superficies compactas con curvatura media constante  $H$  estables con  $H^2 \geq \alpha$  han de ser esferas o toros sin autointersecciones.*

La segunda idea para estudiar estabilidad ha sido usada muy recientemente por Ros [Ros06, Ros07]. Las funciones test usadas se construyen a partir de los campos armónicos de la superficie (que siempre existen si el género de la superficie es mayor que cero), viendo estos como funciones vectoriales en el espacio euclídeo, para lo cual necesitamos que nuestra 3-variedad ambiente admita una razonable inmersión isométrica en algún espacio euclídeo. Usando estas ideas, en la Proposición 8.1<sub>[p.171]</sub>, damos el siguiente criterio general de estabilidad:

*Sea  $\Sigma$  una superficie compacta, orientable de género mayor o igual que uno y con curvatura media constante  $H$  de una 3-variedad riemanniana  $M$  y  $X$  un campo armónico sobre  $\Sigma$ . Supongamos que  $M$  admite*

*una inmersión isométrica en un cierto espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\Sigma$  es estable en  $M$  entonces*

$$\int_{\Sigma} (4H^2 + \bar{\rho}) |\chi|^2 \, dA \leq \int_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 |\chi|^2 \, dA$$

*donde  $\bar{\rho}$  es la curvatura escalar de  $M$ ,  $\tilde{\sigma}$  la segunda forma fundamental de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal sobre  $\Sigma$ .*

Particularizando este criterio al caso en que  $M$  es el espacio euclídeo o la esfera estándar (viéndola como hipersuperficie umbilical de  $\mathbb{R}^4$ ), se obtiene una nueva demostración de los resultados de Barbosa, Do Carmo y Eschenburg mencionados anteriormente. Usando este criterio cuando  $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , viéndola como hipersuperficie pseudo-umbilical de  $\mathbb{R}^4$ , se obtiene una nueva demostración del resultado de Souam mencionado anteriormente.

Nuestras 3-variedades son hipersuperficies de los planos proyectivo o hiperbólico complejos. Pero el plano proyectivo complejo admite un embebimiento isométrico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^8$  (el conocido como primer embebimiento estándar) con un buen comportamiento de su segunda forma fundamental (ver [Ros84] para un estudio de las propiedades geométricas de dicho embebimiento). Esto nos permite obtener un resultado óptimo de estabilidad para ciertas esferas de Berger que son esferas geodésicas del plano proyectivo complejo (ver Teorema 8.2<sub>[p.173]</sub> para más detalles).

*En una familia de esferas de Berger clasificamos las superficies compactas con curvatura media constante estables, demostrando que siempre son las esferas, excepto en una esfera de Berger en la que además de las esferas aparece como única superficie estable el toro de Clifford.*

Es de destacar que la familia de esferas de Berger a las que hace referencia este resultado es una subfamilia de la referida en el apartado primero del resultado de estabilidad dado en la página xvii.

Este resultado de estabilidad permite resolver el problema isoperimétrico en dicha familia de esferas de Berger, provando que las soluciones son las esferas.

Finalmente, en esta memoria también se ha tratado otro problema clásico de la geometría diferencial como es el estudio de las superficies con curvatura de Gauss constante. Los teoremas clásicos de Liebmann [Lie00], Hilbert [Hil01] y Hartman-Nirenberg [HN59] clasifican las superficies completas de  $\mathbb{R}^3$  con curvatura de Gauss constante. Esta clasificación es conocida en la esfera y en el espacio hiperbólico (ver, por ejemplo, Spivak [Spi79]) y muy recientemente Aledo, Espinar y Gálvez [AEG07a, AEG07b] clasificaron las superficies completas de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  que tienen curvatura de Gauss constante para todos los valores de la curvatura de Gauss excepto para algunos de ellos en donde la clasificación permanece aún abierta.

La contribución que se hace en esta memoria a este problema es pequeña, y básicamente consiste en estudiar superficies *compactas* de curvatura de Gauss constante en espacios homogéneos riemannianos con grupo de isometrías de dimensión cuatro. En primer lugar se obtiene una fórmula integral (4.1) que involucra a la curvatura de Gauss de la superficie compacta y que es válida incluso en los espacios de curvatura constante. No obstante en estos últimos dicha fórmula es irrelevante, mientras que en los espacios homogéneos cuyo grupo de isometrías tiene dimensión cuatro permite clasificar sus superficies compactas llanas (cf. Teorema 4.1). Concretamente:

1. *Las superficies compactas llanas de las esferas de Berger son los toros de Hopf, esto es las preimágenes en  $S^3$  de curvas cerradas de la 2-esfera  $S^2$  por la fibración de Hopf  $\Pi : S^3 \rightarrow S^2$ .*
2. *Las superficies compactas llanas del grupo lineal especial (con sus métricas homogéneas) son los toros de Hopf, esto es las preimágenes en  $Sl_2(\mathbb{R})$  de curvas cerradas en el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  por la fibración de Hopf  $\Pi : Sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$ .*
3. *No existen superficies compactas llanas en el grupo de Heisenberg.*

Este resultado pone de manifiesto una vez más la diferencia entre la esfera estándar y las esferas de Berger, ya que en la primera existen superficies compactas llanas que no son toros de Hopf (ver [Wei91])

Finalmente, usando argumentos de naturaleza topológica, en el Teorema 4.3 y el Corolario 4.2, estudiamos el comportamiento de la curvatura de Gauss de esta clase de superficies y probamos resultados de no-existencia para superficies compactas con curvatura de Gauss constante en estos espacios homogéneos riemannianos.

## ABSTRACT AND CONCLUSIONS

One of the most classic problems in Differential Geometry since its origin is the study of the constant mean curvature surfaces of the Euclidean space (we sometimes will use the acronym CMC for short). Give a detail list of the most relevant results obtained in this topic is out of the scope of this monograph (see, for example, Do Carmo [dC76] or Montiel and Ros [MR09]). However, we are going to point out some of them that, from our point of view, are closely related with the topics treated in this monograph.

In 1951 H. Hopf [Hop83] proved that *any constant mean curvature  $H$  sphere immersed in  $\mathbb{R}^3$  is, in fact, a round sphere of radius  $1/|H|$* . The main tool used in his proof is the existence of a holomorphic quadratic differential on any constant mean curvature surface of  $\mathbb{R}^3$  and the fact that on a sphere such differential must vanish.

Later, in 1956, Alexandrov [Ale56] proved that *any compact constant mean curvature surface without self-intersections must be a round sphere*. His innovative proof uses the maximal principle and the symmetries of the space  $\mathbb{R}^3$ . In fact, the method developed in his proof was named *Alexandrov reflection principle* and it have been a fruitful tool in many other results.

The construction of compact constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with arbitrary topology became an interested problem. The first answer appeared in 1986 in the work of Wente. He constructed *an immersion of a constant mean*

*curvature torus* in  $\mathbb{R}^3$ . The Wente's example was important because his idea has allowed to classify all the constant mean curvature tori in  $\mathbb{R}^3$  (cf. Pinkall and Sterling [PS89]).

The constant mean curvature surfaces of  $\mathbb{R}^3$ , known as "soup bubbles", appear as critical points of a variational problem. In 1984, Barbosa and Do Carmo [BdC84] determined that constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are the critical points of the area functional for variations that leave constant the volume enclosed by the surface. It is natural to study, among these critical points, what are the less area or what surfaces are *stable*, i.e., are local minima of the area. The first problem, that is, to found the less area compact surface among all the surface that enclosed a fixed volume, is referred to as the *isoperimetric problem*. The solution to this problem is the round sphere, as the ancient Greek mathematicians verified. With respect to the second one, that is, to classify the compact stable constant mean curvature surfaces of  $\mathbb{R}^3$ , Barbosa and Do Carmo also proved that the solutions are the round spheres.

Most of the results that we have mentioned have been extended to the ambient spaces  $S^3$ , the round 3-sphere, and  $\mathbb{H}^3$ , the hyperbolic space, or even some of their quotients. In every case, the fact that the ambient manifold has constant sectional curvature and a big amount of isometries have been essential for the proof.

Very recently, in 2004, Abresch and Rosenberg [AR04] look into constant mean curvature surfaces in non constant sectional curvature 3-manifolds, more precisely, in the product spaces  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . These manifolds are examples of homogeneous Riemannian manifolds with isometry group of dimension four. As in the  $\mathbb{R}^3$  case, they constructed a holomorphic quadratic differential on every constant mean curvature surface of  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . The authors classified

those constant mean curvature surfaces with vanishing differential and, in particular, classified the constant mean curvature spheres showing that they are the rotationally examples previously obtained by Hsiang and Hsiang [HH89] and Pedrosa and Ritoré [PR99].

One year later, the same authors in [AR05, Theorem 5] announced the existence of a holomorphic quadratic differential over constant mean curvature surfaces immersed in every homogeneous Riemannian 3-manifold with isometry group of dimension four. Besides the two examples cited above, the Berger spheres (i.e., the round sphere  $S^3$  endowed with a 2-parametric family of metrics, cf. section 2.3<sub>[p.20]</sub>), the special linear group ( $Sl_2(\mathbb{R})$  endowed with a 2-parametric family of metrics, cf. section 2.4<sub>[p.24]</sub>) and the Heisenberg group are the most relevant examples of homogeneous Riemannian 3-manifolds. However, the first time that the Abresch-Rosenberg differential appeared in the literature for a homogeneous Riemannian 3-manifold, apart from the product spaces  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , is in the work of Berdinskiĭ and Taĭmanov [BT05, Corollaries 2 and 4] for the Heisenberg group and the special linear group and, more generally, in the work of Fernández and Mira [FM07].

During the last five years the study of constant mean curvature surfaces in the homogeneous Riemannian manifolds has been extensively improved. We are not going to give here a detail list of results. However, along this monograph, we will mention those results that are closely related with our work (see the book of Daniel, Hauswirth and Mira [DHM09] for an up to date compilation of results).

In codimension bigger than one, the natural generalization of the constant mean curvature surfaces are the *parallel mean curvature surfaces*, i.e., surfaces with parallel mean curvature vector in the normal bundle. Although there exist results

for codimension bigger than two the most relevant ones have been obtained in the codimension two case. In 1971, Ferus [Fer71] extended Hopf's result proving that *every parallel mean curvature sphere in the Euclidean space  $\mathbb{R}^4$ , the sphere  $\mathbb{S}^4$  or the hyperbolic space  $\mathbb{H}^4$  must be a geodesic sphere*. Two years later, Chen [Che73] and Yau [Yau74] independently classified all the surfaces with parallel mean curvature vector in space forms, proving that they are constant mean curvature surfaces of three dimensional umbilical hypersurfaces. Now, as the totally umbilical hypersurfaces of the space forms are again manifolds with constant sectional curvature, the study of the parallel mean curvature surfaces in these spaces is trivial. Both results are based on the following fact: *if  $H$  is the mean curvature vector of the surface, as the dimension of the normal bundle is two, it is possible to consider another parallel vector field in the normal bundle  $\tilde{H}$  orthogonal to  $H$  with the same length and to define two holomorphic Hopf differentials associated to  $H$  and  $\tilde{H}$ .*

The natural generalization of the space forms are the Kähler surfaces of constant holomorphic sectional curvature, that is, the complex projective and hyperbolic plane. In 2000, Kenmotsu and Zhou [KZ00] classified surfaces with parallel mean curvature vector in the complex projective and the complex hyperbolic planes. In this case, it is well known that there are not umbilical hypersurfaces of these 4-manifolds (cf. [TT63]), therefore there is not a method like in space forms to construct surfaces of parallel mean curvature vector. The authors did not use the existence of Hopf differentials. Instead, they reduced the classification theorem, using a result by Ogata [Oga95], to solve an O.D.E. system on the surface. Using an analytic method, they classified these surfaces, proving that there are few of them and they have a good behaviour with respect to the complex structure of the ambient space.

One of the problem that we treat in this monograph is the study of the parallel mean curvature surfaces in the four dimensional manifolds product of two spheres or two hyperbolic planes with the same curvature 1 or  $-1$  respectively. This manifolds are symmetric spaces and, from the point of view of the curvature, the simplest ones apart from the mentioned above. In this case, although there exist totally umbilical hypersurfaces, only the totally geodesic (up to congruences,  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) has constant mean curvature (cf. Proposition 1.1[p.8]). Thus, the constant mean curvature surfaces of  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  are surfaces with parallel mean curvature vector in  $S^2 \times S^2$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  respectively.

One of the main tools used in this monograph for its study is the construction of *two holomorphic quadratic differentials on any parallel mean curvature surface of  $S^2 \times S^2$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$*  (cf. Definition 5.3[p.97]) that generalized the Abresch-Rosenberg differential in the following sense: if a parallel mean curvature surface of  $S^2 \times S^2$  (respectively  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ) factorizes throughout a constant mean curvature surface of  $S^2 \times \mathbb{R}$  (respectively  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) then both differentials coincide and, up to a constant, are equal to the Abresch-Rosenberg differential (cf. Lemma 5.1[p.99]). The main idea for the construction of such two differentials is to use the two Kähler structures that these 4-manifolds have (cf. Chapter 1). The product of two Riemannian surfaces with different constant curvatures is not an Einstein manifold and this is a big problem in order to study its parallel mean curvature surfaces. Following the same ideas, it is possible to define a holomorphic 2-differential on any parallel mean curvature surface of the product of two Riemannian surfaces with constant curvatures. When these curvatures are opposite, this holomorphic differential was defined by de Lira and Vitorio [dLVo8].

Theorem 6.4<sup>[p.128]</sup> and Corollary 6.1<sup>[p.131]</sup> classifies the parallel mean curvature surfaces of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  whose holomorphic quadratic differentials vanish. In particular, the parallel mean curvature spheres. Those result can be sum up as

*Let  $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ) a parallel mean curvature  $H$  immersion with vanishing quadratic differentials. Then one of the following possibilities happens:*

1.  $\Phi(\Sigma)$  is a constant mean curvature surface of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) with vanishing Abresch-Rosenberg differential,
2.  $4|H|^2 = 1$  and  $\Phi(\Sigma) \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  is the product of two hypercycles of  $\mathbb{H}^2$ ,
3.  $4|H|^2 < 1$  and  $\Phi$  is an embedded of an hyperbolic plane with curvature  $4|H|^2 - 1$  in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

*Hence, if  $\Sigma$  is a parallel mean curvature sphere of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ), then  $\Phi(\Sigma)$  is a constant mean curvature sphere of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ).*

Another important property of the parallel mean curvature surfaces that allows us to classify them is their closely relation with the constant mean curvature surfaces of  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Theorem 6.1<sup>[p.113]</sup> state this property in the following way:

*Given a Riemannian simply connected surface  $(\Sigma, g)$  there exist, up to congruences, a one to one correspondence between isometric immersions  $\Phi$  with parallel mean curvature of  $(\Sigma, g)$  in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ ) and pair of isometric immersion with constant mean curvature  $\{\Phi_1, \Phi_2\}$  of  $(\Sigma, g)$  in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) with  $|H| = |H_1| = |H_2|$ , where  $H$  is the mean curvature*

vector of  $\Phi$  and  $H_j$ ,  $j = 1, 2$ , the mean curvature of  $\Phi_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Furthermore,  $\Phi$  factorizes throughout a constant mean curvature immersion of  $S^2 \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) if and only if  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  are congruent.

Hence, to find non trivial examples of parallel mean curvature surfaces of  $S^2 \times S^2$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  (i.e., which do not factorize throughout constant mean curvature surfaces of  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) is equivalent to find non rigid examples of constant mean curvature surfaces of  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . It is clear that examples 2. and 3. given above do not factorize throughout  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , but it is not difficult to check that the corresponding constant mean curvature immersions  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  are weakly congruent, that is, there exist an isometry  $G$  of  $(\Sigma, g)$  such that  $\Phi_1 \circ G$  and  $\Phi_2$  are congruent.

Theorem 6.3<sup>[p.121]</sup> and Corollary 6.3<sup>[p.135]</sup> classifies *the constant mean curvature immersions that are weakly congruent in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  which satisfies the additional condition of having the same extrinsic sectional curvature*. This pairs of surfaces produce *non trivial* parallel mean curvature surfaces of  $S^2 \times S^2$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  characterized by having vanishing normal extrinsic curvature. In this classification a 3-parametric family of new examples appears that are described in Propositions 5.3<sup>[p.104]</sup>, 6.1<sup>[p.133]</sup> and 6.2<sup>[p.140]</sup> and examples 6.1<sup>[p.137]</sup>, 6.2<sup>[p.137]</sup> and 6.3<sup>[p.138]</sup>.

The previous results produced a change in our research line inducing us to study constant mean curvature surfaces, not only in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , but also in any homogeneous Riemannian space with isometry group of dimension 4.

The first interested problem that we inquired into was to find examples of constant mean curvature surfaces in the Berger spheres and in the special linear group, that were

the ambient space not treated in the literature. Chapter 3 is devoted to that. Section 3.2<sup>[p.37]</sup> describes explicitly *all the flat constant mean curvature tori in the Berger spheres and in the special linear group*.

Section 3.3<sup>[p.41]</sup> is devoted to the construction of *rotationally constant mean curvature surfaces in the Berger spheres and the special linear group* (cf. Theorems 3.1<sup>[p.48]</sup> and 3.2<sup>[p.62]</sup>). We give an explicit description of the constant mean curvature sphere (cf. Corollaries 3.1<sup>[p.58]</sup> and 3.2<sup>[p.68]</sup>) and we obtain the area of them (cf. Proposition 3.5<sup>[p.71]</sup>). As a consequence we show that, in some Berger spheres and for some homogeneous metrics in the special linear group, there exist constant mean curvature spheres with self-intersections. Besides, in some Berger spheres, there exist examples of minimal tori (that is, zero mean curvature), different from the Clifford tori, without self-intersections. This shows the different behaviour of the Berger spheres and the usual sphere, where all the minimal tori, except the Clifford one, have self-intersections (cf. Kilian and Schmidt [KS09]).

The great spheres and the Clifford tori (properly immersed in  $S^3$ ) are examples of minimal surfaces not only in the usual sphere, but also minimal in any Berger sphere. Section 3.4<sup>[p.72]</sup> *characterizes those minimal surfaces of  $S^3$  that are also minimal in any Berger sphere*. The family obtained is not trivial and produces new examples of minimal surfaces in the Berger spheres (cf. Theorem 3.3<sup>[p.74]</sup>).

Another problem that we treated was the classification of the stable constant mean curvature surfaces and the isoperimetric problem. The first stability results for constant mean curvature surfaces are due to Barbosa, Do Carmo and Eschenburg [BdC84, BdCE88] where they showed that the stable constant mean curvature surfaces of the Euclidean space, the sphere and the hyperbolic space are the geodesic

spheres (in fact, they prove this result for hypersurfaces in any dimension). Later, Ritoré and Ros [RR92] considered the same problem in 3-manifolds with constant sectional curvature showing that stable constant mean curvature tori are necessarily flat and classifying the orientable compact stable constant mean curvature surfaces in those spaces. This classification allows them to solve the isoperimetric problem in the real projective space. In addition, Ros [Ros07] looked upon stability of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{R}^3/\Gamma$ , where  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  is a discrete subgroup of translations of range  $k$ , showing that the genus of a compact stable constant mean curvature surface must be less or equal to  $k$ . Finally, Ros [Ros06] improved many previous results proving that the genus of any stable compact constant mean curvature surface in any oriented 3-manifold with non-negative Ricci curvature is always less or equal to 3.

Souam [Sou08] studied stability of compact constant mean curvature surfaces of  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . In the case of  $S^2 \times \mathbb{R}$  he classified the compact stable constant mean curvature surfaces, proving that they are certain constant mean curvature spheres.

Chapters 7 and 8 deal with stability of compact constant mean curvature surfaces of the Berger spheres, the special linear group and the Heisenberg group. In any stability problem is very important to get suitable test functions to use in the quadratic form of the second variation of the area besides any kind of control of the integral of the square of the mean curvature. Sometimes these functions are the restriction to the surfaces of functions of the ambient space. Hence, it is very interesting to immerse our ambient manifolds as hypersurfaces of 4-manifolds with good geometric properties.

In chapter 2 we show that *the Berger spheres are the geodesic spheres of the complex projective plane and the complex hyperbolic plane, the special linear group with its 2-parametric family of homogeneous metrics are the tubes over a complex hyperplanes of the complex hyperbolic plane and the Heisenberg group is the horosphere of the complex hyperbolic plane* (cf. Propositions 2.2<sup>[p.22]</sup>, 2.3<sup>[p.26]</sup> y 2.4<sup>[p.29]</sup>).

Those hypersurfaces of the complex projective and hyperbolic plane are called pseudo-umbilical because the behaviour of its second fundamental form is the best possible (in these spaces there are not umbilical hypersurfaces). As we will point out lately, this embeddings of the homogeneous Riemannian spaces cited above will be fundamental in order to obtain the stability results of chapter 8.

Chapter 7 deal with the study of the most regular compact stable constant mean curvature surfaces. More precisely, Theorem 7.1<sup>[p.152]</sup> shows that *any constant mean curvature sphere of the special linear group and the Heisenberg group is stable, while there exist Berger spheres where some constant mean curvature spheres are unstable*. This must not be surprising because Souam [Sou08] proved a similar property with the constant mean curvature spheres in  $S^2 \times \mathbb{R}$ .

The proof of these results is possible because we show that *the quadratic form of the second variation of the area of any constant mean curvature sphere in any homogeneous Riemannian space with isometry group of dimension 6 or 4 is always the same*. In particular, the index and the nullity of these quadratic forms is always 1 and 3 respectively (cf. Proposition 7.1<sup>[p.150]</sup>).

Propositions 7.2<sup>[p.157]</sup> and 7.3<sup>[p.160]</sup> study the stability of the flat constant mean curvature tori of the Berger spheres and the special linear group constructed in Propositions 3.2<sup>[p.39]</sup> and 3.3<sup>[p.40]</sup>. In this case the Jacobi operator associated to

the second variation is a Schrödinger operator with constant potential function. Hence, the study of the stability is equivalent to the exercise of computing the first eigenvalue of the Laplacian of these flat tori. We establish that *there exist Berger spheres where some flat constant mean curvature tori are stable*. This states again the differences between the standard sphere and the Berger spheres. In the special linear group case we prove that, with respect to any of its homogeneous metrics, *there exist stable flat constant mean curvature tori*.

Chapter 8 analyses the stable compact constant mean curvature surfaces of the Berger spheres, the special linear group and the Heisenberg group. We use as test function a meromorphic function, providing by the Brill-Noether theory, whose degree is controlled by the genus of the surface. This idea has been used in many other situations and it would say nothing in our case if we did not have a control of the integral of the square of the mean curvature. This control is provided by considering our surfaces immersed in the complex projective and hyperbolic plane and a previous result by Montiel and Urbano [MU02, Theorem 4] that bound the Willmore functional of these surfaces. All these tools and manipulations of the second fundamental form allow us to prove the following result (cf. Theorem 8.1<sub>[p.162]</sub>),

1. *In some Berger spheres, every compact stable constant mean curvature surface must be a sphere or a torus without self-intersections.*
2. *In the Heisenberg group and the special linear group, there exists a constant  $\alpha$  (that depends on the curvature of the ambient space), such that every compact stable constant mean curvature  $H$  surface with  $H^2 \geq \alpha$  must be a sphere or a torus without self-intersections.*

The second approach to the stability problem has been used very recently by Ros [Ros06, Ros07]. The idea is the construction of the test functions using harmonic vector fields over the surface (that always exists if the genus is greater than zero), and consider those test functions as a vectorial function in the Euclidean space. In order to apply this technique we have to immerse our ambient space in some Euclidean space. Proposition 8.1<sub>[p.171]</sub> gives the following general stability criterion

*Let  $\Sigma$  a compact oriented surface of genus greater or equal to one with constant mean curvature  $H$  immersed in a 3-manifold  $M$  and  $X$  a harmonic vector field over  $\Sigma$ . Suppose that  $M$  admits an isometric immersion in the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ . If  $\Sigma$  is stable on  $M$  then*

$$\int_{\Sigma} (4H^2 + \bar{\rho}) |X|^2 \, dA \leq \int_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 |X|^2 \, dA$$

*where  $\bar{\rho}$  is the scalar curvature of  $M$ ,  $\tilde{\sigma}$  is the second fundamental form of  $M$  in  $\mathbb{R}^n$  and  $\{e_1, e_2\}$  is a orthonormal reference over  $\Sigma$ .*

Using this criterion in the particular case that  $M$  is the Euclidean space or the standard sphere (as a umbilical hypersurface of  $\mathbb{R}^4$ ) we get a new proof of the Barbosa, Do Carmo and Eschenburg's result mentioned previously. Moreover, using this criterion for  $M = S^2 \times \mathbb{R}$  as a pseudo-umbilical hypersurface of  $\mathbb{R}^4$  we get a new proof of Souam's result.

We showed that certain Berger spheres are embedded in the complex projective plane. In addition, the complex projective plane admits an isometric embedding in the Euclidean space  $\mathbb{R}^8$  (known as the first standard embedding) with a good behaviour with respect to its second fundamental form

(see [Ros84] for a detailed study of the geometric properties of that embedding). This allows us, with the help of the previous criterion, to get an optimal stability result for certain Berger spheres (see Theorem 8.2<sub>[p.173]</sub> for more details)

*We classify, in certain family of Berger spheres, the compact stable constant mean curvature surfaces showing that they must be spheres, except in a particular Berger sphere where, besides the spheres, the Clifford torus is also stable.*

It is important to remark that the above family of Berger spheres is a subfamily of the referred one in the first item of the stability result given in page xxxi.

This stability result allows to solve the isoperimetric problem in that family of Berger sphere, showing that the solutions are the rotationally constant mean curvature spheres.

Finally we also treat in this monograph another classical problem in Differential Geometry: the study of the constant Gaussian surfaces. The classical theorems of Liebmann [Lie00], Hilbert [Hil01] and Hartman-Nirenberg [HN59] classify the complete constant Gaussian curvature surfaces of  $\mathbb{R}^3$ . This classification is well known in the sphere and the hyperbolic space (see, for example, Spivak [Spi79]). Very recently, Aledo, Espinar and Gálvez [AEG07a, AEG07b] classified the complete constant Gaussian curvature in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  for every value of the Gauss curvature except several special values where the classification is still open.

The contribution that we made in this monograph to this problem is small and it basically consists in the study of the compact constant Gaussian curvature surfaces in homogeneous Riemannian spaces with isometry group of dimension four. Firstly, we obtain an integral formula (4.1)<sub>[p.80]</sub> that involves the Gaussian curvature of the compact surface and

that it is valid even in the constant sectional curvature spaces. However, in the space forms the formula is irrelevant, while in the homogeneous spaces with isometry group of dimension four it allows to classify the compact flat surfaces (cf. Teorema 4.1 [p.82]). More precisely,

1. *The flat compact surfaces of the Berger spheres are the Hopf tori, i.e., the preimage in  $\mathbb{S}^3$  of closed curves in the 2-sphere by the Hopf fibration  $\Pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ .*
2. *The flat compact surfaces of the special linear group (with its 2-parametric family of homogeneous metrics) are the Hopf tori, i.e., the preimage in  $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R})$  of closed curves in the hiperbolic plane by the Hopf fibration  $\Pi : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$ .*
3. *There are no compact flat surfaces in the Heisenberg group.*

This result states one more time the differences between the Berger spheres and standard sphere, where there exist flat compact surfaces that they are not Hopf tori (cf. [Wei91]).

Finally, using arguments of topological nature, in Theorem 4.3 [p.84] and Corollary 4.2 [p.87] we study the behaviour of the Gauss curvature of this class of surfaces proving non-existence results for compact surfaces with constant Gaussian curvature in these homogeneous Riemannian spaces.

Parte I

ESPACIOS AMBIENTE



# PRODUCTO DE SUPERFICIES



*Nunca te fies de las cosas  
que no veas demostradas.*

## 1.1 DEFINICIONES Y NOTACIÓN BÁSICA

$M^2(\kappa)$  representará una superficie orientable simplemente conexa de curvatura de Gauss constante  $\kappa$ . Denotaremos por  $\langle , \rangle$  a la métrica y  $\nabla$  a la conexión de Levi-Civita. De esta manera  $M^2(1) = S^2$  es la esfera unidad con su métrica estándar de curvatura 1,  $M^2(0) = \mathbb{R}^2$  es el plano euclídeo y  $M^2(-1) = \mathbb{H}^2$  es el plano hiperbólico con su métrica estándar de curvatura  $-1$ .

Podemos considerar a  $M^2(\kappa)$ ,  $\kappa \neq 0$  embebida isométricamente en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  o en el espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  (espacio euclídeo dotado de la métrica  $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3$ ), según sea el signo de  $\kappa$ , de la forma

$$M^2(\kappa) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\kappa} \right\}, \quad \kappa > 0$$
$$M^2(\kappa) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = \frac{1}{\kappa} \right\}, \quad \kappa < 0$$

Por ser  $M^2(\kappa)$  una superficie orientable, sobre ella podemos definir una *estructura compleja*, que vamos a denotar por  $J$ , de

la siguiente forma: dada  $\{e_1, e_2\} \subset T_p M^2(\kappa)$  base ortonormal orientada positiva se define

$$J(e_1) = e_2, \quad J(e_2) = -e_1$$

Geoméricamente  $J$  representa el giro de ángulo recto en el sentido que indica la orientación. Las propiedades más destacables de  $J$  son:

- $J : T_p M^2(\kappa) \rightarrow T_p M^2(\kappa)$  es una isometría,
- $J^2 = -\text{Id}$ ,
- Como consecuencia de lo anterior  $\langle Ju, v \rangle = -\langle u, Jv \rangle$
- $J$  define un tensor de tipo  $(1, 1)$  paralelo, esto es,  $\nabla J = 0$ .

La 2-forma de Kähler de  $M^2(\kappa)$ , i.e.,  $\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle$ , coincide con la forma de volumen de la superficie.

Vamos a considerar la variedad riemanniana  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ , con  $\epsilon = \pm 1$ , con la métrica producto (que seguiremos denotando por  $\langle, \rangle$ ) y la conexión de Levi-Civita asociada a dicha métrica que denotaremos por  $\bar{\nabla}$ . Sobre  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  fijamos la orientación dada por la 4-forma  $\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \omega$ , siendo  $\pi_j : M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon)$ ,  $j = 1, 2$ , las proyecciones sobre cada uno de los factores.

Conviene recordar que  $T_{(p,q)} M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  se identifica con  $T_p M^2(\epsilon) \times T_q M^2(\epsilon)$  de la forma

$$w \longmapsto (d(\pi_1)_{(p,q)}(w), d(\pi_2)_{(p,q)}(w))$$

Esta identificación nos permite definir un tensor  $P$  de tipo  $(1, 1)$  sobre  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  llamado *estructura producto*, mediante

$$P(u, v) = (u, -v), \quad \text{para todo } (u, v) \in T_{(p,q)} M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$$

Conviene observar que

- $P^2 = \text{Id}$ ,
- $P$  es una isometría de  $T_{(p,q)}M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  para cada  $(p, q) \in M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ ,
- Como consecuencia de lo anterior  $\langle Pu, v \rangle = \langle u, Pv \rangle$
- $P$  es paralelo, esto es,  $\bar{\nabla}P = 0$

Sobre dicha variedad vamos a considerar dos estructuras complejas diferentes,  $J_1$  y  $J_2$ , definidas por

$$J_1(u, v) = (Ju, Jv), \quad J_2(u, v) = (Ju, -Jv) \quad (1.1)$$

para cualesquiera  $(u, v) \in T_{(p,q)}M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Las 2-formas de Kähler asociadas a cada una de estas estructuras complejas vienen dadas por:

$$\omega_1 = \pi_1^* \omega + \pi_2^* \omega, \quad \omega_2 = \pi_1^* \omega - \pi_2^* \omega$$

Es fácil ver que

$$\omega_1 \wedge \omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_2 = 2(\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \omega)$$

luego, considerando como orientación asociada a  $J_j$  la 4-forma  $\omega_j \wedge \omega_j$ , se tiene que  $J_1$  y  $J_2$  definen orientaciones opuestas y la orientación asociada a  $J_1$  coincide con la orientación escogida.

La estructura producto  $P$  conmuta con dichas estructuras complejas y además permite relacionarlas mediante la igualdad

$$J_2 = PJ_1 = J_1 P, \quad J_1 = PJ_2 = J_2 P, \quad P = -J_1 J_2 = -J_2 J_1$$

Finalmente no es difícil comprobar que  $J_1$  y  $J_2$  son paralelas, esto es,  $\bar{\nabla}J_j = 0$  para  $j = 1, 2$ . De esta manera obtenemos que:

$(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon), \langle, \rangle, J_j)$  es una variedad de Kähler, para  $j = 1, 2$

Además es claro que si  $\text{Id} : M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon)$  es la aplicación identidad y  $F : M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon)$  es una isometría anti-holomorfa, entonces

$$(\text{Id}, F) : M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$$

es una isometría holomorfa de  $(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon), \langle, \rangle, J_1)$  sobre  $(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon), \langle, \rangle, J_2)$ , es decir, ambas estructuras complejas son equivalentes.

*Observación 1.1.* Consideraremos, cuando sea necesario,  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  embebida isométricamente en  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^6$  o bien  $\mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \equiv \mathbb{R}_2^6$  si  $\epsilon = 1$  o  $\epsilon = -1$  respectivamente. La métrica de dichos espacios  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}_1^3$  así como la de  $\mathbb{R}^6$  y  $\mathbb{R}_2^6$  la denotaremos igualmente por  $\langle, \rangle$ . Además, los campos  $X, \hat{X} : M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^6$  dados por

$$X(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(p, q), \quad \hat{X}(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2}}(p, -q)$$

forman una referencia global ortonormal del fibrado normal de dichos embebimientos.

## 1.2 CURVATURAS E ISOMETRÍAS

Denotemos por  $\bar{R}$  el tensor de curvatura,  $\bar{S}$  el tensor de Ricci y  $\bar{\rho}$  la curvatura escalar de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Así, para cualesquiera  $X, Y, Z$  y  $W$  campos diferenciables en  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y; Z, W) = \frac{\epsilon}{2} & \left[ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \right. \\ & \left. + \langle X, PW \rangle \langle Y, PZ \rangle - \langle X, PZ \rangle \langle Y, PW \rangle \right] \end{aligned}$$

De esta manera  $\bar{S}(X, Y) = \epsilon \langle X, Y \rangle$  luego  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  es una variedad Einstein y la curvatura escalar es constante  $\bar{\rho} = 4\epsilon$ .

Por otro lado, el grupo de isometrías de  $M^2(\epsilon)$  es  $\text{Iso}(M^2(\epsilon)) = O(3)$  (respectivamente  $O^1(3)$ ) si  $\epsilon = 1$  (respectivamente  $\epsilon = -1$ ). Así, si  $F_j \in \text{Iso}(M^2(\epsilon))$ ,  $j = 1, 2$ , entonces  $(F_1, F_2) : M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  definida por  $(p, q) \mapsto (F_1(p), F_2(q))$  es una isometría de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . También es claro que  $S : M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  dada por  $S(p, q) = (q, p)$  es una isometría de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Finalmente, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} \text{Iso}(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)) = \left\{ (F_1, F_2), S \circ (F_1, F_2) : \right. \\ \left. F_j \in \text{Iso}(M^2(\epsilon)), j = 1, 2 \right\} \end{aligned}$$

Es interesante notar que las isometrías de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  tienen un buen comportamiento respecto a las estructuras complejas  $J_j$ ,  $j = 1, 2$ , en el sentido de que cualquier isometría de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  es o holomorfa o antiholomorfa respecto a  $J_1$  o a  $J_2$ . Para ello basta comprobar que:

- $(F_1, F_2)$  es holomorfa (resp. antiholomorfa) respecto a  $J_1$  si ambas  $F_j$ ,  $j = 1, 2$ , son holomorfas (resp. antiholomorfas).
- $(F_1, F_2)$  es holomorfa (resp. antiholomorfa) respecto de  $J_2$  si  $F_1$  es holomorfa y  $F_2$  antiholomorfa (resp.  $F_1$  antiholomorfa y  $F_2$  holomorfa).

- $S$  es holomorfa respecto de  $J_1$  pero antiholomorfa respecto de  $J_2$ .

### 1.3 SUBVARIEDADES

Como se pondrá de manifiesto en el Capítulo 5<sub>[p.91]</sub> conocer las hipersuperficies totalmente umbilicales de curvatura media constante de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  será imprescindible para construir los primeros ejemplos sencillos de superficies con curvatura media paralela. El siguiente resultado clasifica dicho tipo de hipersuperficies.

**Proposición 1.1.** *Sea  $\Psi : N \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una hipersuperficie totalmente umbilical con curvatura media constante. Entonces  $\Psi$  es totalmente geodésica y es localmente congruente a la inmersión totalmente geodésica:*

$$\begin{array}{ll} \epsilon = 1 & \epsilon = -1 \\ \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 & \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \\ (p, t) \mapsto (p, (\cos t, \sin t, 0)) & (p, t) \mapsto (p, (0, \sinh t, \cosh t)). \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $\eta$  un vector normal unitario de  $N$  en  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ ,  $\hat{\sigma}$  la segunda forma fundamental de  $\Psi$  y  $\hat{H}$  la curvatura media. Puesto que  $\Psi$  es totalmente umbilical

$$\hat{\sigma}(v, w) = \hat{H} \langle v, w \rangle \eta, \quad \text{para cualesquiera } v, w \in TN.$$

Al ser  $\hat{H}$  constante obtenemos

$$(\nabla \hat{\sigma})(x, v, w) = 0, \quad \text{para cualesquiera } x, v, w \in TN.$$

Por tanto la ecuación de Codazzi de  $\Psi$  nos asegura, al ser  $\bar{\nabla} \sigma = 0$ , que

$$\bar{R}(x, v, w, \eta) = 0, \quad \text{para cualesquiera } x, v, w \in TN.$$

Sea  $p \in N$  y  $\eta_p = (a, b)$ . Puesto que la diferencial en  $p$  de cualquier componente de  $\Psi$  tiene rango menor o igual que 2, existe en  $p$  una referencia ortonormal de la forma  $\{e_1 = (e_1^1, 0), e_2, e_3\}$ . Entonces, la ecuación anterior se transforma en

$$0 = \epsilon \langle e_j^1, a \rangle, \quad j = 1, 2, 3$$

Veamos que dicha ecuación implica que alguna de las dos componentes de  $\eta_p = (a, b)$  ha de ser necesariamente nula. Si  $a \neq 0$  entonces  $\{a, e_1^1\}$  es una referencia ortonormal de  $T_{\Psi_1(p)}M^2(\epsilon)$  y la última expresión dice que  $e_j^1 = 0$  para  $j = 2, 3$ , i.e.,  $e_j = (0, e_j^2)$ ,  $j = 2, 3$ . Así  $0 = \langle \eta, e_j \rangle = \langle b, e_j^2 \rangle$ ,  $j = 2, 3$ , lo cual implica que  $b = 0$ . De esta manera en cualquier punto una de las dos componentes de  $\eta$  se anula y, por tanto, localmente y salvo isometrías de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ , podemos suponer que  $\eta = (0, \eta_2)$ .

Si  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ , entonces  $\{\Psi, \hat{\Psi} = (\Psi_1, -\Psi_2)\}$  son una referencia ortogonal del fibrado normal de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  en  $\mathbb{R}^6$  o  $\mathbb{R}_2^6$ . Así para cualquier  $v \in TN$ , teniendo en cuenta que  $\langle \hat{\Psi}_*(v), \eta \rangle = -\langle v, \eta \rangle = 0$ , obtenemos

$$D_v \eta = -\hat{A}_\eta v = -\hat{H}v.$$

donde  $D$  representa la conexión de Levi-Civita de  $\mathbb{R}^6$  o  $\mathbb{R}_2^6$ . Así la aplicación  $\eta + \hat{H}\Psi : N \rightarrow \mathbb{R}^6$  es constante  $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$ , y por tanto  $\hat{H}\Psi_1 = A_1$  y  $\eta_2 + \hat{H}\Psi_2 = A_2$ . Puesto que  $N$  es una 3-variedad y  $\Psi$  una inmersión,  $\Psi_1$  no puede ser constante luego  $\hat{H} = 0$  lo cual implica que  $\Psi$  es totalmente geodésica. La segunda ecuación afirma que  $\eta_2 = A_2$  con lo cual  $\langle \Psi_2, A_2 \rangle = \langle \Psi, \eta \rangle = 0$  con  $|A_2| = |\eta_2| = 1$ . Esto prueba que  $\Psi_2(N)$  es una geodésica de  $S^2$  o  $\mathbb{H}^2$  lo que finaliza la prueba. ■



# ESPACIOS HOMOGÉNEOS RIEMANNIANOS DE DIMENSIÓN TRES

# 2

*Para hacer una cuenta  
no es necesario repetirla varias veces  
sino hacerla una sólo vez, pero bien.*

## 2.1 INTRODUCCIÓN

Una variedad riemanniana se dice *homogénea* si el grupo de isometrías actúa transitivamente sobre ella, esto es, para cada par de puntos existe una isometría que mueve uno en el otro. El espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , la 3-esfera  $S^3$  y el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  son ejemplos bien conocidos de este tipo de variedades. Ahora bien, estos son los ejemplos más regulares posibles pues, además de homogeneidad, poseen *isotropía*: las isometrías transforman una referencia ortonormal en el espacio tangente a un punto en cualquier otra referencia ortonormal en dicho punto. Además, entre las variedades simplemente conexas, son las únicas que verifican estas dos propiedades puesto que la isotropía implica que la curvatura seccional en un punto es igual para cualquier plano y la homogeneidad, que ésta no depende del punto, esto es, la variedad posee curvatura seccional constante. Al eliminar la isotropía permitimos de alguna manera que halla direcciones distinguidas.

Los espacios homogéneos de dimensión tres simplemente conexos están clasificados y, salvo algunos ejemplos excepcionales, son grupos de Lie con métricas invariantes a izquierda. La clasificación ha sido una labor de varios autores, entre los que hay que destacar el trabajo de Milnor [Mil76] sobre métricas invariante a izquierda sobre grupos de Lie. La descripción explícita puede encontrarse en [Pat96] y puede resumirse así.

**Teorema** ([Pat96, Corolario 2.3]). *Un espacio homogéneo riemanniano de dimensión 3 simplemente conexo es isométrico a uno de los siguientes:*

1. *El producto riemanniano de una 2-esfera y de la recta euclídea.*
2. *El producto riemanniano de un plano hiperbólico real y la recta euclídea.*
3. *Un grupo de Lie no unimodular con una familia 2-paramétrica de métricas invariantes a izquierda.*
4.  *$SU(2)$  con una familia 3-paramétrica de métricas invariantes a izquierda.*
5.  *$\widetilde{Sl}_2(\mathbb{R})$ , el recubridor universal de  $Sl_2(\mathbb{R})$ , con una familia 2-paramétrica de métricas invariantes a izquierda.*
6.  *$Nil_3$ , el grupo de Heisenberg con una familia 1-paramétrica de métricas invariantes a izquierda.*
7.  *$Sol_3$ , el recubridor universal del grupo de transformaciones del plano de Minkowski que preservan la orientación temporal, con una familia 2-paramétrica de métricas invariantes a izquierda.*
8.  *$\widetilde{E}(2)$ , el recubridor universal del grupo de isometrías del plano euclídeo, con una familia 2-paramétrica de métricas invariantes a izquierda.*

*Observación 2.1.*

- Salvo  $SU(2)$  y  $S^2 \times \mathbb{R}$ , todos los demás espacios son difeomorfos a  $\mathbb{R}^3$ .
- El espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  es un ejemplo excepcional de 8, mientras que el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  es un caso límite de 3.
- Los ejemplos 1 y 2 son los únicos que no son grupos de Lie y sus grupos de isometrías tienen dimensión 4.
- Los grupos de Lie no unimodulares simplemente conexos de dimensión tres están parametrizados por  $\mathbb{R}$ , cada uno de ellos tiene una familia 2-paramétrica de métricas invariante a izquierda y sus grupos de isometrías son de dimensión 3.
- Las métricas sobre  $SU(2)$  incluyen la familia 1-paramétrica de métricas estándar cuyos grupos de isometrías son de dimensión 6, la familia 2-paramétrica de métricas de Berger, cuyos grupos de isometrías son de dimensión 4. El resto tienen grupo de isometrías de dimensión 3.
- Las métricas sobre  $\tilde{Sl}_2(\mathbb{R})$  incluyen una familia 2-paramétrica de métricas con grupo de isometrías de dimensión 4 y el resto tienen grupo de isometrías de dimensión 3.
- Las métricas de  $Nil_3$  son homotéticas y con grupo de isometrías de dimensión 4.
- Todas las métricas en  $Sol_3$  y  $\tilde{E}(2)$  tienen grupo de isometrías de dimensión 3.

Los espacios homogéneos riemannianos aparecen también en la clasificación de *modelos de geometrías* hecha por William P. Thurston (cf. [Thu97, Teorema 3.8.4]). En dicha clasificación aparecen los espacios simplemente conexos de curvatura seccional constante  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^3$  y  $\mathbb{H}^3$  cuyo grupo de

isometrías es de dimensión 6; los espacios producto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  cuyo grupo de isometrías es de dimensión 4; el grupo de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  y el recubridor universal del grupo  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  cuyo grupo de isometrías es de dimensión 4 también y finalmente el grupo  $\text{Sol}_3$  cuyo grupo de isometrías es de dimensión 3.

Los espacios homogéneos anteriores cuyo grupo de isometrías tiene dimensión 4 tienen la propiedad de que admiten una submersión riemanniana sobre  $M^2(\kappa)$  con fibra totalmente geodésica y con curvatura del fibrado  $\tau \in \mathbb{R}$ . Además estos números clasifican al espacio homogéneo en el sentido que se indica en la Tabla 1.

	$\kappa > 0$	$\kappa = 0$	$\kappa < 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	—	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
$\tau \neq 0$	$\mathbb{S}_b^3$	$\text{Nil}_3$	$\tilde{\text{Sl}}_2(\mathbb{R})$

**Tabla 1:** Espacios homogéneos riemannianos de dimensión 3 simplemente conexos con grupo de isometrías de dimensión 4

La clasificación de los espacios homogéneos riemannianos de dimensión 3 no simplemente conexos es un problema complejo, pues aunque son cocientes de los simplemente conexos, no todo subgrupo del grupo de isometrías de un espacio homogéneo que actúe de forma propia y discontinua sobre él produce un espacio homogéneo, y aún produciéndolo la dimensión del grupo de isometrías puede disminuir.

No obstante, de entre los cocientes de los ejemplos de la Tabla 1 hay algunos espacios homogéneos interesantes pues siguen teniendo grupo de isometrías de dimensión 4 y como la submersión anterior se factoriza a través de ellos, admi-

ten también una submersión riemanniana sobre  $M^2(\kappa)$  con curvatura del fibrado  $\tau$ . Estos son  $S^2 \times S^1$ ,  $\mathbb{H}^2 \times S^1$ , el espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^3 = S_b^3/\mathbb{Z}_2$ , o más generalmente los espacios lente  $S_b^3/\mathbb{Z}_n$ ,  $n \geq 3$ ,  $Sl_2(\mathbb{R})$  o más generalmente  $Sl_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_n$ ,  $n \geq 2$ .

**Definición 2.1.**  $E(\kappa, \tau)$  representará un espacio homogéneo riemanniano simplemente conexo de dimensión 4 con grupo de isometrías de dimensión 4 con curvatura de la base  $\kappa$  y curvatura de la fibra  $\tau$  o bien uno de los cocientes que hemos considerado en el párrafo anterior.

Como se ha puesto de manifiesto anteriormente existe una fibración  $\Pi : E(\kappa, \tau) \rightarrow M^2(\kappa)$  cuyas fibras son geodésicas. Denotaremos por  $\xi$  al campo de Killing unitario y vertical a dicha fibración. Puesto que  $E(\kappa, \tau)$  es orientable podemos definir un producto vectorial  $\wedge$ , de manera que si  $\{e_1, e_2\}$  son dos vectores unitarios y ortogonales en el tangente a un punto entonces  $\{e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}$  es una base ortonormal orientada. Si  $\bar{\nabla}$  denota la conexión de Levi-Civita sobre  $E(\kappa, \tau)$ , las propiedades de  $\xi$  implican (cf. [Dano7])

$$\bar{\nabla}_V \xi = \tau(V \wedge \xi),$$

siendo  $V$  cualquier campo diferenciable sobre  $M$ . Además, teniendo en cuenta la información que se tiene sobre la fibración es fácil obtener las curvaturas de cualquier  $E(\kappa, \tau)$ .

**Proposición 2.1** ([Dano7]). *Para cualesquiera campos  $X, Y, Z$  y  $W$  tangentes a  $E(\kappa, \tau)$  el tensor de curvatura de Riemann  $\bar{R}$  de  $E(\kappa, \tau)$  viene dado por:*

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\kappa - 3\tau^2) \{ \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \} + \\ &+ (\kappa - 4\tau^2) \{ \langle X, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle \langle X, W \rangle + \\ &\langle X, Z \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle \xi, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, \xi \rangle \langle \xi, W \rangle \} \end{aligned}$$

La curvatura seccional de cualquier plano  $\Pi$  con normal  $N$  viene dada por:

$$K(\Pi) = \langle N, \xi \rangle^2 (\kappa - 3\tau^2) + (1 - \langle N, \xi \rangle^2) \tau^2,$$

la curvatura de Ricci sobre un campo unitario  $X$  como

$$\overline{\text{Ric}}(X) = \kappa - 2\tau^2 + \langle X, \xi \rangle^2 (4\tau^2 - \kappa) \quad (2.1)$$

y la curvatura escalar por  $\bar{\rho} = 2(\kappa - \tau^2)$ .

A continuación vamos a describir en detalle modelos para las esferas de Berger  $S_b^3$ , el grupo especial lineal  $Sl_2(\mathbb{R})$  y el grupo de Heisenberg  $Nil_3$ . En todos casos obtendremos embebimientos isométricos de dichas 3-variedades en los espacios proyectivo e hiperbólico complejo como hipersuperficie pseudo-umbilicales.

En primer lugar, y para fijar la notación, vamos a definir brevemente los espacios proyectivo e hiperbólico complejo.

## 2.2 ESPACIOS PROYECTIVO E HIPERBÓLICO COMPLEJOS

Espacio proyectivo complejo

Consideramos en  $\mathbb{C}^3$  el producto hermítico

$$(z, w) = z_0 \bar{w}_0 + z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$$

cuyo producto escalar asociado es  $\langle z, w \rangle = \text{Re}(z, w)$  y la estructura compleja  $Jz = iz$ . Dado  $c > 0$  sea  $S^5(2/\sqrt{c}) \subseteq \mathbb{C}^3$  la esfera de radio  $2/\sqrt{c}$ . Sobre ella actúa el grupo  $S^1$  de la forma  $e^{i\theta}(z_0, z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_0, e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$ .

Definimos el *espacio proyectivo complejo* como el cociente  $S^5/S^1$  dotado de la métrica cociente de Fubini-Study. Llamaremos  $\Pi : S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  la proyección al cociente y denotaremos por  $[z_0, z_1, z_2] = \{e^{i\theta}(z_0, z_1, z_2) : \theta \in \mathbb{R}\}$  a la clase de equivalencia de un punto  $(z_0, z_1, z_2) \in S^5$ . Es fácil comprobar que  $\ker d\Pi_z = \{i\lambda z : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Así el espacio tangente a  $\mathbb{C}P^2$  en un punto  $[z]$  se identifica con

$$\begin{aligned} T_{[z]}\mathbb{C}P^2 &= \{v \in \mathbb{C}^3 : \langle v, z \rangle = \langle v, iz \rangle = 0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{C}^3 : (v, z) = 0\}. \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}P^2, J)$ , donde  $J$  es la estructura compleja inducida en el cociente, i.e.,  $Jv = iv$ , es una variedad de Kähler con curvatura seccional holomorfa constante  $c$ , con lo cual su tensor de curvatura viene dado por

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z, W) &= \frac{c}{4} \left\{ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle X, JW \rangle \langle Y, JZ \rangle - \langle X, JZ \rangle \langle Y, JW \rangle - 2 \langle X, JY \rangle \langle Z, JW \rangle \right\} \end{aligned}$$

La curvatura seccional de un plano  $P \subseteq T_{[z]}\mathbb{C}P^2$  generado por dos vectores ortonormales  $\{e_1, e_2\}$  viene dada por  $K(P) = \frac{c}{4}(1 + 3\langle e_1, Je_2 \rangle^2)$  y el tensor de Ricci  $S = \frac{c}{2}(n+1)\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Espacio hiperbólico complejo

Consideramos en  $\mathbb{C}^3$  el producto hermítico

$$((z, w)) = -z_0\bar{w}_0 + z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2$$

cuyo producto escalar asociado es  $\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}((z, w))$ .

Dado  $c < 0$  sea

$$H_1^5 \left( \frac{2}{\sqrt{-c}} \right) = \left\{ z \in \mathbb{C}^3 : \langle z, z \rangle = \frac{4}{c} \right\}$$

Sobre dicha hipersuperficie<sup>1</sup> actúa el grupo  $S^1$  de la forma  $e^{i\theta}(z_0, z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_0, e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2)$ .

Definimos el *espacio hiperbólico complejo* como el cociente  $H_1^5/S^1$  dotado de la métrica cociente que es definida positiva. Llamaremos  $\Pi : S^5 \rightarrow \mathbb{C}H^2$  la proyección al cociente y denotaremos por  $[z_0, z_1, z_2] = \{e^{i\theta}(z_0, z_1, z_2) : \theta \in \mathbb{R}\}$  a la clase de equivalencia de un punto  $(z_0, z_1, z_2) \in H_1^5$ . Es fácil comprobar que  $\ker d\Pi_z = \{i\lambda z : \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Así el espacio tangente a  $\mathbb{C}H^2$  en un punto  $[z]$  se identifica con

$$\begin{aligned} T_{[z]}\mathbb{C}H^2 &= \{v \in \mathbb{C}^3 : \langle v, z \rangle = \langle v, iz \rangle = 0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{C}^3 : \langle v, z \rangle = 0\} \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}H^2, J)$ , donde  $J$  es la estructura compleja inducida, i.e.,  $Jv = iv$ , es una variedad de Kähler con curvatura seccional holomorfa constante  $c$ , con lo cual su tensor de curvatura viene dado por

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y, Z, W) &= \frac{c}{4} \left\{ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle X, JW \rangle \langle Y, JZ \rangle - \langle X, JZ \rangle \langle Y, JW \rangle - 2 \langle X, JY \rangle \langle Z, JW \rangle \right\}. \end{aligned}$$

La curvatura seccional de un plano  $P \subseteq T_{[z]}\mathbb{C}H^2$  generado por dos vectores ortonormales  $\{e_1, e_2\}$  viene dada por  $K(P) = \frac{c}{4}(1 + 3\langle e_1, Je_2 \rangle^2)$  y el tensor de Ricci  $S = \frac{c}{2}(n+1)\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

<sup>1</sup> A  $H_1^5(1)$  se le conoce como espacio anti-De Sitter. Se trata de una variedad lorentziana de curvatura constante  $-1$

En general denotaremos por  $\mathbb{C}M^2(c)$ ,  $c \neq 0$ , al plano proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^2(c)$  de curvatura seccional holomorfa constante  $c$  si  $c > 0$  y al plano hiperbólico complejo  $\mathbb{C}H^2(c)$  de curvatura seccional holomorfa constante  $c$  si  $c < 0$ , i.e.

$$\mathbb{C}M^2(c) = \left\{ [z_0, z_1, z_2] : z_j \in \mathbb{C}, \frac{c}{|c|} |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{4}{c} \right\}.$$

### Superficies pseudo-umbilicales

Es bien conocido que los espacios proyectivo e hiperbólico complejo no poseen hipersuperficies umbilicales (ver, por ejemplo, [TT63]). Es natural preguntarse entonces por aquellas hipersuperficies cuya segunda forma fundamental tenga el comportamiento más parecido al de las hipersuperficies umbilicales: éstas son las llamadas pseudo-umbilicales

En general una hipersuperficie de  $\mathbb{C}M^2(c)$  se llama *pseudo-umbilical* si el operador de Weingarten asociado a un campo normal y unitario  $\eta$  a la hipersuperficie tiene dos curvaturas principales constantes  $\lambda$  y  $\mu$  de multiplicidades 2 y 1 respectivamente y  $J\eta$  es un vector propio asociado a  $\mu$ , siendo  $J$  la estructura compleja de  $\mathbb{C}M^2(c)$ . Takagi [Tak75], cuando el ambiente es  $\mathbb{C}P^n$ , y Montiel [Mon85], cuando el ambiente es  $\mathbb{C}H^n$ , clasificaron las hipersuperficies umbilicales obteniendo el siguiente resultado, que enunciamos para  $n = 2$ .

**Teorema** ([Mon85, Tak75]). *Las esferas geodésicas en  $\mathbb{C}P^2(c)$ , las esferas geodésicas, las horoesferas y los tubos sobre hiperplanos complejos en  $\mathbb{C}H^2(c)$  son las únicas hipersuperficies pseudo-umbilicales de  $\mathbb{C}M^2(c)$ . Además, en todos los casos,  $J\eta$  es un campo de Killing unitario sobre la hipersuperficie, siendo  $\eta$  un vector normal unitario y  $J$  la estructura compleja de  $\mathbb{C}M^2(c)$ .*

Conviene destacar que, al igual que ocurre en el espacio hiperbólico, todas las horoesferas de  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2(c)$  son congruentes.

### 2.3 LAS ESFERAS DE BERGER

Las esferas de Berger se obtienen deformando la métrica usual de la 3-esfera de manera que la fibración de Hopf siga siendo una submersión riemanniana sobre la 2-esfera pero modificando la longitud de la fibra.

Sea  $\mathbb{C}^2 = \{(z, w) : z, w \in \mathbb{C}\}$  el plano complejo con su producto escalar usual y consideramos  $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  la esfera unidad. Como sabemos existe una base global de campos sobre  $\mathbb{S}^3$  que viene dada, en cada punto  $(z, w) \in \mathbb{S}^3$ , por

$$V = (iz, iw), \quad E_1 = (-\bar{w}, \bar{z}), \quad E_2 = (-i\bar{w}, i\bar{z}).$$

Sean  $\kappa, \tau > 0$ , definimos sobre la esfera la siguiente métrica:

$$g(X, Y) = \frac{4}{\kappa} \left[ \langle X, Y \rangle + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle X, V \rangle \langle Y, V \rangle \right], \quad (2.2)$$

donde  $X, Y \in T\mathbb{S}^3$ .

*Observación 2.2.*

1. Con esta definición:

$$\begin{aligned} g(E_i, E_j) &= \frac{4}{\kappa} \delta_{ij}, & i, j &= 1, 2, \\ g(V, V) &= \frac{16\tau^2}{\kappa^2}, & g(E_j, V) &= 0, & j &= 1, 2 \end{aligned}$$

2. Si  $\kappa = 4\tau^2$  la métrica  $g$  coincide con las métricas estándar de la esfera. Puesto que estamos considerando espacios homogéneos riemannianos con grupo de isometrías de dimensión 4 vamos a considerar en adelante  $\kappa \neq 4\tau^2$ .
3. Aunque la familia de métricas de Berger es dos paramétrica, salvo homotecias es posible considerar únicamente un parámetro.

$(S^3, g)$  es un espacio homogéneo riemanniano cuyo grupo de isometrías es el grupo unitario  $U(2)$  (siempre que  $4\tau^2 \neq \kappa$ ). Denotaremos por  $S_b^3(\kappa, \tau)$  o simplemente  $S_b^3$  a  $(S^3, g)$  y la llamaremos *esfera de Berger*.

La aplicación  $\Pi : (S^3, g) \rightarrow S^2(\kappa)$  (esfera de radio  $1/\sqrt{\kappa}$ ) dada por

$$\Pi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \left( z\bar{w}, \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2) \right)$$

es una submersión riemanniana llamada *fibración de Hopf*. Las fibras son círculos totalmente geodésicos y el campo vertical de la fibración es  $V$ , con lo cual el campo de Killing vertical unitario viene dado por  $\xi = (\kappa/4\tau)V$ .

Si  $\bar{\nabla}$  denota la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica  $g$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= 0, & \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= V, & \bar{\nabla}_V E_1 &= \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 2 \right) E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= -V, & \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= 0, & \bar{\nabla}_V E_2 &= - \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 2 \right) E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_1} V &= \frac{4\tau^2}{\kappa} E_2, & \bar{\nabla}_{E_2} V &= -\frac{4\tau^2}{\kappa} E_1, & \bar{\nabla}_V V &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Gracias a que tenemos expresada la métrica  $g$  en términos de la métrica usual de la esfera podemos relacionar las conexión de ambas variedades riemannianas fácilmente obteniendo, para cualesquiera campos diferenciables  $X$  e  $Y$  sobre  $S^3$ ,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) [\langle Y, V \rangle (JX)^T + \langle X, V \rangle (JY)^T], \quad (2.4)$$

donde  $\bar{\nabla}$  es la conexión asociada a la métrica  $g$ ,  $\nabla$  es la conexión asociada a la métrica estándar de  $S^3$  de curvatura constante 1,  $J$  es la estructura compleja de  $\mathbb{C}^2$  y  $()^T$  representa la parte tangente a  $S^3$ .

La esfera de Berger como esfera geodésica

En esta sección vamos a ver un modelo para las esferas de Berger como hipersuperficies de los espacios proyectivo e hiperbólico complejo.

**Proposición 2.2.** Sea  $F : S_b^3(\kappa, \tau) \rightarrow \mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2)$  la aplicación dada por

$$F(z, w) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \left[ \frac{2\tau}{\sqrt{|\kappa - 4\tau^2|}}, z, w \right].$$

Entonces  $F$  es un embebimiento isométrico de la esfera de Berger  $S_b^3$  en  $\mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2)$  y

$$F(S_b^3) = \left\{ [z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2) : |z_0|^2 = \frac{16\tau^2}{\kappa |\kappa - 4\tau^2|} \right\}$$

es la esfera geodésica de  $\mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2)$  de centro  $[2/\sqrt{|\kappa - 4\tau^2|}, 0, 0]$  y radio  $r$ , siendo

$$r = \frac{2 \arccos(2\tau/\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa - 4\tau^2}} \quad \text{o} \quad r = \frac{2 \operatorname{arccosh}(2\tau/\sqrt{\kappa})}{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}},$$

según sea  $\kappa - 4\tau^2$  positivo o negativo respectivamente.

Además  $JF_*\xi$  es un campo normal y unitario a  $F$  y las curvaturas principales respecto de dicho normal, con multiplicidades 2 y 1 respectivamente, vienen dadas por  $\tau$  y  $(8\tau^2 - \kappa)/4\tau$ . Así, si  $\hat{\sigma}$  representa la segunda forma fundamental de la inmersión  $F$  entonces

$$\langle \hat{\sigma}(v, w), JF_*\xi \rangle = \tau g(v, w) + \frac{4\tau^2 - \kappa}{4\tau} g(v, \xi)g(w, \xi), \quad (2.5)$$

para cualesquiera vectores  $v, w$  tangentes a  $\mathbb{S}_b^3$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota la métrica en  $\mathbb{C}\mathbb{M}^2(\kappa - 4\tau^2)$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $F$  está bien definida y es inyectiva. Por otro lado, teniendo en cuenta la identificación hecha del espacio tangente a  $\mathbb{C}\mathbb{M}^2(\kappa - 4\tau^2)$ , tenemos que la diferencial de  $F$  en un punto  $(z, w)$  sobre un vector tangente  $(u, v) \in T_{(z, w)}\mathbb{S}_b^3$  viene dada por:

$$(F_*)_{(z, w)}(u, v) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \left\{ (0, u, v) - \frac{\kappa - 4\tau^2}{\kappa} \operatorname{Im}(u\bar{z} + v\bar{w}) \left( \frac{2i\tau}{\sqrt{|\kappa - 4\tau^2|}}, iz, iw \right) \right\}$$

de donde se deduce fácilmente que  $F$  es una inmersión isométrica. Finalmente

$$JF_*\xi = \frac{2\tau}{\sqrt{\kappa}} \left( \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{2\tau\sqrt{|\kappa - 4\tau^2|}}, -z, -w \right) = X_{F(z, w)},$$

es un campo normal a  $F(\mathbb{S}_b^3)$ , siendo  $X$  el campo en  $\mathbb{C}\mathbb{M}^2(\kappa - 4\tau^2)$  dado por  $X_{(z_0, z_1, z_2)} = \tau \left( \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{4\tau^2} z_0, -z_1, -z_2 \right)$ . No es difícil comprobar entonces que el operador de Weingarten respecto de  $JF_*\xi$  se escribe en la referencia ortonormal

$\{\frac{\sqrt{\kappa}}{2}F_*E_1 = \frac{\sqrt{\kappa}}{2}[0, -\bar{z}_2, \bar{z}_1], \frac{\sqrt{\kappa}}{2}F_*E_2 = i\frac{\sqrt{\kappa}}{2}[0, -\bar{z}_2, \bar{z}_1], F_*\xi\}$  de la forma

$$A_{JF_*\xi} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8\tau^2 - \kappa}{4\tau} \end{pmatrix}$$

lo que finaliza la demostración. ■

Observemos que las esferas de Berger  $S_b^3$  con  $\kappa - 4\tau^2 > 0$  son esferas geodésicas del plano proyectivo complejo, mientras que las esferas de Berger con  $\kappa - 4\tau^2 < 0$  son esferas geodésicas del plano hiperbólico complejo. En algunos textos se hace una distinción entre ambos casos nombrándolas *esferas de Berger de primer y segundo tipo*, respectivamente.

## 2.4 EL GRUPO ESPECIAL LINEAL

Para nuestros propósitos va a ser más conveniente dar la siguiente descripción del grupo especial lineal

$$Sl_2(\mathbb{R}) \equiv \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 - |w|^2 = 1\}$$

Es fácil comprobar que la transformación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}((a+d) + i(b-c), (b+c) + i(a-d)),$$

con  $ad - bc = 1$ , es un difeomorfismo de  $Sl_2(\mathbb{R})$  sobre la hipersuperficie de  $\mathbb{C}^2$  dada por  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 - |w|^2 = 1\}$ .

Sobre  $Sl_2(\mathbb{R})$  vamos a considerar una referencia global de su fibrado tangente que viene dada, en cada punto  $(z, w) \in Sl_2(\mathbb{R})$ , por:

$$V = (iz, iw), \quad E_1 = (\bar{w}, \bar{z}), \quad E_2 = (i\bar{w}, i\bar{z})$$

Definimos entonces una familia 2-paramétrica de métricas sobre  $Sl_2(\mathbb{R})$  mediante:

$$g(E_i, E_j) = \frac{-4}{\kappa} \delta_{ij}, \quad g(V, V) = \frac{16\tau^2}{\kappa^2}, \quad g(V, E_j) = 0,$$

para  $i, j = 1, 2$ , donde  $\kappa < 0$ .

$(Sl_2(\mathbb{R}), g)$ , que denotaremos por  $Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$  o simplemente  $Sl_2(\mathbb{R})$ , es una 3-variedad riemanniana homogénea cuyo grupo de isometrías es el grupo unitario indefinido  $U^1(2)$ .

La aplicación  $\Pi : Sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2(\kappa)$ , definida por

$$\Pi(z, w) = \frac{2}{\sqrt{-\kappa}} \left( z\bar{w}, \frac{|z|^2 + |w|^2}{2} \right),$$

es una submersión riemanniana por círculos de  $(Sl_2(\mathbb{R}), g)$  sobre el plano hiperbólico de curvatura constante  $\kappa$ . Por analogía al caso de las esferas de Berger llamaremos a dicha aplicación la *fibración de Hopf* de  $Sl_2(\mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{H}^2(\kappa)$ . El campo vertical de la fibración es  $V$ , con lo cual el campo de Killing vertical y unitario viene dado por  $\xi = (-\kappa/4\tau)V$ .

La conexión de Levi-Civita asociada a la métrica  $g$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_1 &= 0, & \nabla_{E_2} E_1 &= -V, & \nabla_V E_1 &= \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 2 \right) E_2 \\ \nabla_{E_1} E_2 &= V, & \nabla_{E_2} E_2 &= 0, & \nabla_V E_2 &= - \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 2 \right) E_1 \\ \nabla_{E_1} V &= \frac{4\tau^2}{\kappa} E_2, & \nabla_{E_2} V &= -\frac{4\tau^2}{\kappa} E_1, & \nabla_V V &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

El grupo especial lineal como hipersuperficie del plano hiperbólico complejo

Al igual que ocurre con las esferas de Berger es posible embeber isométricamente el grupo especial lineal en el espacio hiperbólico complejo.

**Proposición 2.3.** Sea  $G : (Sl_2(\mathbb{R}), g) \rightarrow \mathbb{C}H^2(\kappa - 4\tau^2)$  la aplicación dada por

$$G(z, w) = \frac{2}{\sqrt{-\kappa}} \left[ z, w, \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}} \right],$$

Entonces  $G$  es un embebimiento isométrico de  $Sl_2(\mathbb{R})$  en  $\mathbb{C}H^2(\kappa - 4\tau^2)$  y

$$G(Sl_2(\mathbb{R})) = \left\{ [z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}H^2(\kappa - 4\tau^2) : |z_2|^2 = \frac{16\tau^2}{\kappa(\kappa - 4\tau^2)} \right\}$$

es el tubo de radio  $r = 2 \operatorname{arcsinh}(2\tau/\sqrt{-\kappa})/\sqrt{4\tau^2 - \kappa}$  sobre el hiperplano complejo  $\{[z_0, z_1, 0] \in \mathbb{C}H^2(\kappa - 4\tau^2)\}$ .

Además  $JG_*\xi$  es un campo normal y unitario a  $G$  y las curvaturas principales respecto de dicho normal, con multiplicidades 2 y 1 respectivamente, son  $\tau$  y  $(8\tau^2 - \kappa)/4\tau$ . Así la segunda forma fundamental  $\hat{\sigma}$  de  $G$  viene dada por

$$\langle \hat{\sigma}(v, w), JG_*\xi \rangle = \tau g(v, w) + \frac{4\tau^2 - \kappa}{4\tau} g(v, \xi)g(w, \xi) \quad (2.7)$$

para cualesquiera vectores tangentes  $v$  y  $w$  a  $Sl_2(\mathbb{R})$ , siendo  $\langle , \rangle$  la métrica sobre  $\mathbb{C}H^2(\kappa - 4\tau^2)$

*Demostración.* Es inmediato que la aplicación  $G$  está bien definida y es inyectiva. Además, teniendo en cuenta la identificación hecha del espacio tangente a  $\mathbb{C}H^2(\kappa - 4\tau^2)$ ,

su diferencial en un punto  $(z, w)$  sobre un vector  $(u, v) \in T_{(z,w)}\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  viene dada por:

$$(G_*)_{(z,w)}(u, v) = \frac{2}{\sqrt{-\kappa}} \left\{ (u, v, 0) + \frac{\kappa - 4\tau^2}{\kappa} \text{Im}(-u\bar{z} + v\bar{w}) \left( iz, iw, \frac{2i\tau}{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}} \right) \right\}$$

de donde se deduce fácilmente que  $G$  es una inmersión isométrica. Finalmente

$$JG_*\xi = \frac{2\tau}{\sqrt{-\kappa}} \left( z, w, \frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{2\tau} \right) = X_{G(z,w)}$$

es un campo normal unitario a  $G(\text{Sl}_2(\mathbb{R}))$ , siendo  $X$  el campo en  $\text{CH}^2(\kappa - 4\tau^2)$  dado por  $X_{(z_0, z_1, z_2)} = \tau \left( z_0, z_1, \frac{4\tau^2 - \kappa}{4\tau^2} z_2 \right)$ . No es difícil comprobar entonces que el operador de Weingarten respecto de  $JG_*\xi$  se escribe en la referencia ortonormal  $\left\{ \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} G_*E_1 = \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} [\bar{z}_1, \bar{z}_0, 0], \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} G_*E_2 = i \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} [\bar{z}_1, \bar{z}_0, 0], G_*\xi \right\}$  de la forma

$$A_{JG_*\xi} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8\tau^2 - \kappa}{4\tau} \end{pmatrix}$$

lo que finaliza la demostración. ■

## 2.5 EL GRUPO DE HEISENBERG

Como hemos puesto de manifiesto en la introducción el grupo de Heisenberg, esto es, el grupo de Lie de las matrices  $3 \times 3$  nilpotentes con una familia uniparamétrica de métricas invariantes a izquierda, es un espacio homogéneo

riemanniano con grupo de isometrías de dimensión 4. Dicho grupo es difeomorfo a  $\mathbb{R}^3$  y la familia de métricas, que denotaremos por  $g_\tau$ , se expresa, en términos de la curvatura de la fibra  $\tau$ , como

$$g_\tau = dx^2 + dy^2 + (\tau(xdy - ydx) + dt)^2$$

siendo  $(x, y, t)$  las coordenadas usuales de  $\mathbb{R}^3$ . Así denotaremos a  $(\mathbb{R}^3, g_\tau)$  por  $\text{Nil}_3(\tau)$  o simplemente  $\text{Nil}_3$ .

Sobre  $\mathbb{R}^3$  vamos a considerar los campos

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \tau y \frac{\partial}{\partial t}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial y} - \tau x \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial t}$$

Es fácil comprobar que

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle E_j, \xi \rangle = 0, \quad j = 1, 2 \quad \text{y} \quad |\xi|^2 = 1.$$

La aplicación  $\Pi : \text{Nil}_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(x, y, t) \mapsto (x, y)$  es una submersión riemanniana cuyas fibras son líneas rectas. El campo vertical a dicha submersión es  $\xi$ , que es un campo de Killing.

Dadas dos constantes  $\tau$  y  $\hat{\tau}$  y los correspondientes grupos de Heisenberg con métricas asociadas  $g_\tau$  y  $g_{\hat{\tau}}$  la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda : \left( \mathbb{R}^3, \frac{\tau^2}{\hat{\tau}^2} g_\tau \right) &\rightarrow (\mathbb{R}^3, g_{\hat{\tau}}) \\ (x, y, t) &\mapsto \frac{\tau}{\hat{\tau}}(x, y, t) \end{aligned}$$

es una isometría. De esta forma, salvo una homotecia y una isometría, podemos fijar la constante  $\tau$ . Usualmente se usa la normalización  $\tau = 1/2$ .

El grupo de Heisenberg como hipersuperficie del plano hiperbólico complejo

Al igual que ocurre con las esferas de Berger y el grupo especial lineal,  $\text{Nil}_3$  puede identificarse con una hipersuperficie pseudo-umbilical de  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2$ , en este caso con la horoesfera.

**Proposición 2.4.** Sea  $H : \text{Nil}_3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{H}^2(-4\tau^2)$  la aplicación dada por

$$H(x, y, t) = \left[ \frac{1}{\tau} + \frac{\tau}{2} |z|^2 - it, \frac{\tau}{2} |z|^2 - it, z \right],$$

donde  $z = x + iy$ . Entonces  $H$  es un embebimiento isométrico de  $\text{Nil}_3$  en  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2(-\tau^2)$  y

$$H(\text{Nil}_3) = \left\{ [z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}\mathbb{H}^2(-\tau^2) : |z_0 - z_1|^2 = \frac{1}{\tau^2} \right\}$$

es la horoesfera de radio  $r = 1/\tau$ .

Además  $JH_*\xi$  es un campo normal y unitario a  $H$  y las curvaturas principales respecto de dicho normal, con multiplicidades 2 y 1 respectivamente, son  $\tau$  y  $2\tau$ . Así, la segunda forma fundamental  $\hat{\sigma}$  de  $G$  viene dada por

$$\langle \hat{\sigma}(v, w), JH_*\xi \rangle = \tau \langle v, w \rangle + \tau \langle v, \xi \rangle \langle w, \xi \rangle \quad (2.8)$$

para cualesquiera vectores tangentes  $v$  y  $w$  a  $\text{Nil}_3$ .

*Demostración.* Es inmediato que la aplicación  $H$  es inyectiva y está bien definida. Además, teniendo en cuenta la identificación hecha del espacio tangente a  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2(-4\tau^2)$ , su diferencial en un punto  $(z, t)$  sobre un vector  $(w = u + iv, \lambda)$  viene dada por:

$$\begin{aligned} (H_*)_{(z,t)}(w, \lambda) = & (\tau \operatorname{Re}(z\bar{w}) - i\lambda, \tau \operatorname{Re}(z\bar{w}) - i\lambda, w) + \\ & - i\tau^2 \left( \frac{\lambda}{\tau} - \operatorname{Im}(z\bar{w}) \right) H(z, t) \end{aligned}$$

con lo cual la métrica inducida en  $\text{Nil}_3$  por  $H$  viene dada por

$$g_{(z,t)}((w, \lambda), (v, \mu)) = \text{Re}(w\bar{v}) + \tau^2 \left( \frac{\lambda}{\tau} - \text{Im}(z\bar{w}) \right) \left( \frac{\mu}{\tau} - \text{Im}(z\bar{v}) \right)$$

Ahora es fácil comprobar que dicha métrica coincide con la definida en  $\text{Nil}_3$  luego  $H$  es un embebimiento isométrico.

Finalmente el campo

$$JH_*(\xi) = \left[ -\frac{\tau^2}{2} |z|^2 + i\tau t, 1 - \frac{\tau^2}{2} |z|^2 + i\tau t, -\tau z \right] = X_{H(z,t)}$$

es un campo normal y unitario a  $H(\text{Nil}_3)$ , siendo  $X$  el campo en  $H(\text{Nil}_3)$  dado por  $X_{[z_0, z_1, z_2]} = -\tau[z_1, 2z_1 - z_0, z_2]$ . No es difícil comprobar entonces que el operador de Weingarten respecto a  $JH_*\xi$  se escribe en la referencia ortormal  $\{H_*E_1 = \tau[\bar{z}_2, \bar{z}_2, \bar{z}_0 - \bar{z}_1], H_*E_2 = JH_*E_1, H_*\xi = i\tau[z_1, 2z_1 - z_0, z_2]\}$  de la forma

$$A_{JH_*\xi} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau \end{pmatrix}$$

lo que finaliza la demostración. ■

Parte II

SUPERFICIES EN ESPACIOS  
HOMOGÉNEOS



# SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

# 3

*¡Pues no haberte metido a matemático,  
haberte metido a historiador!*

## 3.1 INTRODUCCIÓN

Nuestro propósito es presentar de forma muy breve las propiedades básicas de una superficie de curvatura media constante inmersa en un espacio homogéneo con grupo de isometrías de dimensión 4,  $E(\kappa, \tau)$  (véase [DHMo9] para una visión más amplia y puesta al día).

Sea entonces  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie orientable  $\Sigma$  y  $N$  un vector normal unitario a dicha inmersión. Denotaremos por  $H$  la función curvatura media asociada al normal  $N$ . Definimos la *función ángulo*  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\nu = \langle N, \xi \rangle.$$

*Observación 3.1.*

- $\nu^2 \leq 1$  y  $\{p \in \Sigma : \nu^2(p) = 1\} = \{p \in \Sigma : \xi(p) = \pm N(p)\}$  tiene interior vacío siempre que  $\tau \neq 0$  pues en dicho caso la distribución ortogonal a  $\xi$  en  $E(\kappa, \tau)$  no es integrable.

- $\arccos \nu$  es el ángulo que forman el vector normal  $N$  a la superficie con la dirección vertical  $\xi$ .
- En los casos  $S_b^3$ ,  $Sl_2(\mathbb{R})$  y  $Nil_3$  la función ángulo  $\nu$  no es más que la función de Kähler de la superficie  $\Sigma$  en  $\mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2)$  (o la opuesta, según la orientación fijada). En efecto, la función de Kähler de una superficie orientable  $\Sigma$  en  $\mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2)$  viene dada por  $C = \langle Je_1, e_2 \rangle$ , siendo  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal orientada  $o$ , equivalentemente, por  $\langle JN, \eta \rangle$ , siendo  $\{N, \eta\}$  una base ortonormal orientada del fibrado normal. Puesto que en dichos tres casos  $\eta = J\xi$  es el normal a  $S_b^3$ ,  $Sl_2(\mathbb{R})$  y  $Nil_3$  en  $\mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2)$  (cf. Propositiones 2.2 [p.22], 2.3 [p.26], 2.4 [p.29]) tenemos que  $\nu = \langle N, \xi \rangle = \langle JN, J\xi \rangle = \langle JN, \eta \rangle = C$  como afirmábamos.

Por otro lado, la ecuación de Gauss de  $\Phi$  viene dada por (cf. [Dano7])

$$K = 2H^2 - \frac{|\sigma|^2}{2} + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \quad (3.1)$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss de la superficie  $\Sigma$  y  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de la inmersión  $\Phi$ .

Consideremos sobre  $\Sigma$  un parámetro conforme  $z = x + iy$  de manera que la métrica inducida sobre  $\Sigma$  por  $\Phi$  se escribe de la forma  $e^{2u} |dz|^2$ . Denotaremos por  $\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$  y  $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$ .

**Definición 3.1.** La 2-diferencial de Abresch-Rosenberg,  $\Theta_{AR}$ , asociada a una inmersión de curvatura media constante  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  respecto de un parámetro conforme  $z$  viene dada por:

$$\Theta_{AR}(z) = \left( \langle \sigma(\partial_z, \partial_z), N \rangle - \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{2(H + i\tau)} \langle \Phi_z, \xi \rangle^2 \right) (dz)^2 \quad (3.2)$$

siempre que  $H \neq 0$  o  $\tau \neq 0$ .

*Observación 3.2.*

- Podríamos haber definido la diferencial de Abresch-Rosenberg como  $2(H + i\tau)\Theta_{\mathbb{A}\mathbb{R}}$  de manera que fuese válida incluso para el caso  $H = \tau = 0$  pero, puesto que no trataremos dicho caso, nos será más útil la definición dada.
- Si bien aquí hemos definido la diferencial de Abresch-Rosenberg para inmersiones de curvatura media constante es posible hacerlo para cualquier inmersión  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$ , aunque en dicho caso dicha diferencial no es necesariamente holomorfa. En ciertos espacios homogéneos, dicha diferencial es holomorfa si, y sólo si, la inmersión tiene curvatura media constante. En concreto dicho resultado es cierto para el grupo de Heisenberg y fue probado por Berdinskiĭ y Taĭmanov [BT05]. Más tarde Fernández y Mira [FM07, Teorema 1.1] probaron que también es cierto en las esferas de Berger verificando  $\kappa - 8\tau^2 \leq 0$  y además, en el caso de  $S^2(\mathbb{R})$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , mostraron que aparecen nuevos ejemplos de inmersiones con diferencial de Abresch-Rosenberg holomorfa que no son de curvatura media constante. El problema permanece abierto en  $S^2 \times \mathbb{R}$  y en las esferas de Berger con  $\kappa - 8\tau^2 > 0$ .

Para comprobar fácilmente que la diferencial de Abresch-Rosenberg es holomorfa vamos a introducir en la siguiente proposición las *ecuaciones de compatibilidad* de una inmersión de curvatura media constante. Éstas fueron deducidas por Daniel en [Dan07]. Ahora bien, las que presentamos aquí son la versión conforme de las mismas obtenidas por Fernández y Mira [FM07].

**Proposición 3.1** ([Dano7, FMo7]). *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie orientable  $\Sigma$  con curvatura media constante  $H$  y  $z = x + iy$  un parámetro conforme con factor conforme asociado  $e^{2u}$ . Entonces se verifican las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned} p_{\bar{z}} &= \frac{e^{2u}}{2}(\kappa - 4\tau^2)\nu A, & \nu_z &= -(H - i\tau)A - 2e^{-2u}\bar{A}p \\ A_{\bar{z}} &= \frac{e^{2u}}{2}(H + i\tau)\nu, & |A|^2 &= \frac{e^{2u}}{4}(1 - \nu^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $p = \langle \sigma(\partial_z, \partial_z), N \rangle$  y  $A = \langle \Phi_z, \xi \rangle$ .

Recíprocamente si  $u, \nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\nu^2 \leq 1$  y  $p, A : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones diferenciables sobre una superficie simplemente conexa  $\Sigma$  cumpliendo (3.3) entonces existe, salvo congruencias, esto es, salvo isometrías de  $E(\kappa, \tau)$ , una única inmersión  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  de curvatura media constante  $H$ .

A la vista de esta definición es lícito llamar a la tupla  $(u, \nu, H, A, p)$  los *datos fundamentales* de una inmersión  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  de curvatura media constante  $H$ .

Por otro lado, teniendo en cuenta la notación introducida en la Proposición 3.1, la diferencial de Abresch-Rosenberg asociada a una inmersión de curvatura media constante puede escribirse como

$$\Theta_{AR}(z) = \left( p - \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{2(H + i\tau)} A^2 \right) (dz)^2 \quad (3.4)$$

De esta manera, usando (3.3), se deduce fácilmente que  $\Theta_{AR}$  es holomorfa.

### 3.2 TOROS LLANOS DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE

Como hemos puesto de manifiesto en el Capítulo 2<sup>[p.11]</sup> las esferas de Berger y el grupo de Lie  $Sl_2(\mathbb{R})$  son hiper-superficies pseudo-umbilicales de los espacios proyectivo e hiperbólico complejo. Es bien conocido que en dichas variedades existe una familia 2-paramétrica de toros lagrangianos llanos de curvatura media paralela que vienen dados por

$$\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2} = \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{C}M^2(c) : |z_0|^2 = r_0^2, \\ |z_1|^2 = r_1^2, |z_2|^2 = r_2^2\},$$

con  $r_0, r_1$  y  $r_2$  números reales positivos cumpliendo

$$\frac{c}{|c|} r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 = \frac{4}{c} \quad (3.5)$$

Más adelante vamos a comprobar (cf. secciones 3.2.1 y 3.2.2) que, en virtud de las Proposiciones 2.2<sup>[p.22]</sup> y 2.3<sup>[p.26]</sup>, cada toro de dicha familia de  $\mathbb{C}P^2(c)$  está embebido en una esfera de Berger apropiada y cada toro de dicha familia de  $\mathbb{C}H^2(c)$  está embebido simultáneamente en una esfera de Berger y un  $Sl_2(\mathbb{R})$  para parámetros  $\kappa$  y  $\tau$  apropiados.

Por ser  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  lagrangiano en  $\mathbb{C}M^2(\kappa - 4\tau^2)$  tenemos que la función de Kähler es idénticamente nula. Ahora bien, dicha función coincide con la función ángulo  $\nu$  (cf. Observación 3.1) visto el toro como superficie de la esfera de Berger o el grupo especial lineal. Así  $\nu = 0$ , i.e., el campo de Killing es tangente al toro. Por tanto, el toro  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  es la preimagen por la submersión riemanniana  $\Pi : E(\kappa, \tau) \rightarrow M^2(\kappa)$  de una curva cerrada (a este tipo de superficies las llamaremos toros de Hopf, cf. Definición 4.1<sup>[p.79]</sup>). Además dicha curva es un círculo geodésico puesto que el toro es una superficie

de curvatura media constante de  $\mathbb{S}_b^3$  o  $Sl_2(\mathbb{R})$  al ser una superficie de curvatura media paralela en  $CM^2(c)$ .

A continuación vamos a describir en detalle esta familia de toros embebidos en  $\mathbb{S}_b^3$  y  $Sl_2(\mathbb{R})$ .

### 3.2.1 Toros llanos de curvatura media constante en $\mathbb{S}_b^3$

Dado un toro  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  en  $CM^2(c)$  podemos escoger un único número positivo  $r$  de manera que dicho toro esté contenido en una esfera geodésica de radio  $r$ . Ahora bien, la Proposición 2.2<sub>[p.22]</sub> identificaba las esferas geodésicas de  $CM^2(c)$  con las esferas de Berger. De esta manera podemos elegir de forma apropiada  $\kappa$  y  $\tau$  tales que el toro  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  esté contenido en  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  vía la identificación hecha. Más concretamente, fijados  $\kappa$  y  $\tau$  cumpliendo

$$c = \kappa - 4\tau^2, \quad r_0^2 = \frac{16\tau^2}{\kappa |\kappa - 4\tau^2|} \quad (3.6)$$

tenemos que  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  está contenido en  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  (vista como esfera geodésica de  $CM^2(\kappa - 4\tau^2)$ ).

Ahora bien, la curvatura media constante de dicho toro como superficie de  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  viene dada, en términos de los radios  $r_0$ ,  $r_1$  y  $r_2$ , por

$$H^2 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{4r_1^2 r_2^2 (r_1^2 + r_2^2)}$$

pero, puesto que  $r_0$ ,  $r_1$  y  $r_2$  están sujetos a la restricción (3.5) y teniendo en cuenta las relaciones (3.6) resulta que

$$r_1^2 = \frac{4}{\kappa} \left( \frac{1}{2} + \frac{H}{\sqrt{\kappa + 4H^2}} \right), \quad r_2^2 = \frac{4}{\kappa} - r_1^2$$

De esta manera, teniendo siempre presente la identificación entre  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  y la esfera geodésica de  $\text{CM}^2(\kappa - 4\tau^2)$  hecha en la Proposición 2.2 [p.22], podemos enunciar el resultado siguiente.

**Proposición 3.2.** *Para  $H \geq 0$  existe, salvo congruencias, un único toro llano embebido de curvatura media constante  $H$  en  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  que viene descrito por:*

$$\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H) = \{(z, w) \in \mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau) : |z|^2 = r_H^2, |w|^2 = 1 - r_H^2\}$$

donde

$$r_H^2 = \frac{1}{2} + \frac{H}{\sqrt{\kappa + 4H^2}}$$

*Observación 3.3.*

- La unicidad de dicho toro será demostrada en el Teorema 4.1 [p.82].
- Fijado  $\kappa$  y para cualquier  $\tau$  el toro  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  es el mismo subconjunto de  $\mathbb{S}^3$  y como tal tiene curvatura media constante  $H$  en cualquier esfera de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$ . Además, para  $H = 0$  todos los toros  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(0)$  son el toro de Clifford

$$\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(0) = \left\{ (z, w) \in \mathbb{S}^3 : |z|^2 = |w|^2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

que es, por tanto, una superficie mínima en cualquier esfera de Berger.

### 3.2.2 Toros llanos de curvatura media constante en $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$

Dado un toro  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  podemos considerar un tubo de radio  $r$  sobre un hiperplano apropiado de  $\text{CH}^2(c)$  de manera

que dicho toro esté contenido en él. Puesto que la Proposición 2.3<sup>[p.26]</sup> nos ha permitido identificar tal hipersuperficie de  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2(\kappa - 4\tau^2)$  con el grupo especial lineal deducimos entonces que es posible elegir  $\kappa$  y  $\tau$  de manera que  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  esté contenido en  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  vía dicha identificación. En concreto, basta seleccionar  $\kappa$  y  $\tau$  de forma que

$$c = \kappa - 4\tau^2, \quad r_2^2 = \frac{16\tau^2}{\kappa(\kappa - 4\tau^2)} \quad (3.7)$$

Ahora bien la curvatura media  $H$  del toro  $\mathcal{T}_{r_0, r_1, r_2}$  como hipersuperficie de  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  viene dada, en términos de los radios  $r_0, r_1$  y  $r_2$ , por:

$$H^2 = \frac{(r_0^2 + r_1^2)^2}{4r_0^2 r_1^2 (r_0^2 - r_1^2)}$$

Puesto que  $r_0, r_1$  y  $r_2$  están sujetos a la restricción (3.5) y teniendo en cuenta las relaciones (3.7) resulta que

$$r_0^2 = \frac{4}{-\kappa} \left( \frac{1}{2} + \frac{H}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \right), \quad r_1^2 = r_0^2 + \frac{4}{\kappa}$$

De esta manera, teniendo siempre presente la identificación entre  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  y el tubo sobre un hiperplano en  $\mathbb{C}\mathbb{H}^2(\kappa - 4\tau^2)$  hecha en la Proposición 2.3<sup>[p.26]</sup>, y las consideraciones anteriores obtenemos:

**Proposición 3.3.** *Para  $H > \sqrt{-\kappa}/2$  existe, salvo congruencias, un único toro llano embebido de curvatura media constante  $H$  en  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  que viene descrito por:*

$$\hat{\mathcal{T}}_{(\kappa, \tau)}(H) = \{(z, w) \in \text{Sl}_2(\mathbb{R}) : |z|^2 = r_H^2, |w|^2 = r_H^2 - 1\}$$

donde

$$r_H^2 = \frac{1}{2} + \frac{H}{\sqrt{\kappa + 4H^2}}$$

*Observación 3.4.* La unicidad de dicho toro será demostrada en el Teorema 4.1 [p.82].

### 3.3 EJEMPLOS DE ROTACIÓN

En esta sección vamos a estudiar las superficies de curvatura media constante más simples, esto es, aquellas que son invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías de la variedad ambiente. Este tipo de superficies suelen tener buenas propiedades geométricas y entre ellas se suelen encontrar las superficies más regulares desde un punto de vista geométrico. Abresch y Rosenberg [AR04] probaron que una superficie completa de curvatura media constante en  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  con diferencial de Abresch-Rosenberg nula debe ser invariante por un grupo 1-paramétrico de isometrías de  $E(\kappa, \tau)$ . Más aún, Do Carmo y Fernández [FDC09, Teorema 2.1] mostraron que, incluso localmente, cualquier superficie CMC in  $S^2 \times \mathbb{R}$  o  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  con diferencial de Abresch-Rosenberg nula debe ser invariante por un grupo 1-paramétrico de isometrías. Finalmente, Espinar y Rosenberg [ER09] para cualquier  $E(\kappa, \tau)$ , probaron que cualquier superficie CMC con diferencial de Abresch-Rosenberg nula debe ser invariante por un grupo 1-paramétrico de isometrías.

Las superficies de curvatura media constante invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías han sido estudiadas en los espacios producto  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  por Hsiang and Hsiang [HH89] y Pedrosa y Ritoré [PR99]. También, en el grupo de Heisenberg, el estudio fue llevado a cabo por Tomter [Tom93], Figueroa, Mercuri y Pedrosa [FMP99] y Caddeo, Piu y Ratto [CPR95]. Tomter describió explícitamente en [Tom93] las esferas de curvatura media constante calculando su volumen y área para dar una cota superior

al perfil isoperimétrico del grupo de Heisenberg. Los autores en [FMP99] estudiaron no sólo el caso invariante por *rotación*, sino las superficies invariante por cualquier grupo 1-paramétrico de isometrías del grupo de Heisenberg, y organizaron la mayoría de los resultados que habían aparecido en la literatura. En el grupo especial lineal  $Sl_2(\mathbb{R})$  la clasificación fue obtenida por Gorodski [Gor01] y, muy recientemente, la clasificación ha sido hecha en el recubridor universal del grupo especial lineal por Espinoza [Esp09].

A continuación vamos a clasificar (cf. Teorema 3.1) las superficies de curvatura media constante invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías que deja fija una curva, esto es, superficies *invariantes por rotación*, en las esferas de Berger. En esta clasificación pondremos de manifiesto que las esferas CMC no siempre son embebidas (ver figura 2) contradiciendo el resultado anunciado por Abresch y Rosenberg en [AR05, Teorema 6]. Además, obtenemos nuevos ejemplos de superficies CMC similares a las superficies de Delaunay en  $\mathbb{R}^3$ . Finalmente veremos que algunas superficies de tipo Delaunay dan lugar, en algunas esferas de Berger, a toros mínimos embebidos que no son el toro de Clifford, probando que la conjetura de Lawson no es cierta en algunas esferas de Berger (ver Observación 3.6)

Usando las mismas técnicas clasificamos igualmente las superficies CMC invariantes por rotación en  $Sl_2(\mathbb{R})$ , obteniendo una descripción explícita de las esferas CMC que muestra que no siempre son embebidas. Aunque la clasificación en  $Sl_2(\mathbb{R})$  fue hecha por Gorodski, existe un error en [Gor01, Teorema 2.(b)] donde se afirma que para cualquier  $H > 0$  existe una esfera de curvatura media constante  $H$ , algo que he hecho es falso (ver Observación 3.7).

## 3.3.1 Superficies de rotación en las esferas de Berger

Como ya pusimos de manifiesto al hablar de las esferas de Berger su grupo de isometrías es  $U(2)$ . Puesto que estamos interesados en clasificar las superficies de curvatura media constante invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías es necesario en primer lugar conocer cuántos tipos distintos de esta clase de grupos existen en  $U(2)$ . El siguiente resultado clasifica, salvo conjugación y reparametrización, los grupos 1-paramétricos de  $U(2)$ .

**Proposición 3.4.** *Un grupo 1-paramétrico de  $U(2)$ , salvo conjugación y reparametrización, debe ser de uno de los siguientes tipos:*

- (i)  $\text{Rot} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$
- (ii)  $\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

*Demostración.* Todos los grupos 1-paramétricos de  $U(2)$  están generados, vía la aplicación exponencial, por un elemento de su álgebra de Lie

$$\mathfrak{u}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & xe^{iy} \\ -xe^{-iy} & ib \end{pmatrix} : a, b, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Vamos a reducir los posibles grupos 1-paramétricos por conjugación. Es claro que dada  $A \in \mathfrak{u}(2)$  y  $D \in U(2)$  entonces  $A$  y  $DAD^{-1}$  son conjugados. Así, si  $A = \begin{pmatrix} ia & xe^{iy} \\ -xe^{-iy} & ib \end{pmatrix}$ , Entonces tomando  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{iy} \end{pmatrix}$  se sigue que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{iy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ia & xe^{iy} \\ -xe^{-iy} & ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & x \\ -x & ib \end{pmatrix}$$

Luego podemos suponer que, salvo conjugación,  $y = 0$ , i.e.,  $A = \begin{pmatrix} ia & x \\ -x & ia \end{pmatrix}$ . En primer lugar, si  $a = b$ , considerando  $D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$  deducimos que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ia & x \\ -x & ia \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a-x) & 0 \\ 0 & i(a+x) \end{pmatrix}$$

Por otro lado si  $a \neq b$  entonces tomando  $D = \begin{pmatrix} -\lambda & i\mu \\ -i\mu & \lambda \end{pmatrix}$  donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  son tales que  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$  y  $\lambda\mu(a-b) = x(\lambda^2 - \mu^2)$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\lambda & i\mu \\ -i\mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ia & x \\ -x & ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & i\mu \\ -i\mu & \lambda \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} i(a\lambda^2 + b\mu^2 + 2x\lambda\mu) & 0 \\ 0 & i(a\mu^2 + b\lambda^2 - 2x\lambda\mu) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta forma, podemos siempre suponer que, salvo conjugación, cualquier grupo 1-paramétrico de  $U(2)$  está generado por  $\begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix}$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Observemos que podemos intercambiar  $\alpha$  y  $\beta$  por conjugación. vía la aplicación exponencial este grupo se transforma en  $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{it\alpha} & 0 \\ 0 & e^{it\beta} \end{pmatrix}$ .

Finalmente si  $\alpha = \beta = 0$  entonces obtenemos el grupo trivial, si  $\beta \neq 0$  podemos reparametrizar por  $t \mapsto t/\beta$  obteniendo (i) si  $\alpha = 0$  y (ii) si  $\alpha \neq 0$ . Ambos grupos (i) y (ii) no son conjugados puesto que sus determinantes no coinciden. ■

De entre los dos tipos de grupos descritos en la anterior proposición el único que deja fija una curva es Rot. Concretamente deja fijo el círculo máximo  $\ell = \{(z, 0) \in \mathbb{S}^3\}$  que llamaremos en lo que sigue el *eje de rotación*. El otro tipo de grupo (i) es, para  $\alpha = 1$ , la traslación a lo largo de la fibra y, para  $\alpha \neq 1$ , la composición de una rotación y una traslación a lo largo de la fibra.

Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie orientable de curvatura media constante  $\Sigma$  invariante por Rot. Entonces podemos identificar  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)/\text{Rot}$  con  $\mathbb{S}^2$  y, por tanto,  $\Sigma$  es  $\pi^{-1}(\gamma)$  para cierta curva diferenciable  $\gamma \subseteq \mathbb{S}^2$ . Es suficiente considerar que  $\gamma$  está en el hemisferio superior de la esfera y que está parametrizada por el arco en  $\mathbb{S}^2$ , i.e.,  $\gamma(s) = (\cos x(s)e^{iy(s)}, \sin x(s))$ , con  $\cos x(s) > 0$  y  $x'(s)^2 + y'(s)^2 \sin^2 x(s) = 1$  para todo  $s \in I$ . Entonces podemos escribir la inmersión como  $\Phi(s, t) = (\cos x(s)e^{iy(s)}, \sin x(s)e^{it})$ . Un vector normal unitario a lo largo de  $\Phi$  viene dado por

$$N = \nu \left\{ -\tau \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\tan \alpha}{\cos x} + i \tan x \right) e^{i(t+y)} \right] E_\Phi^1 + \right. \\ \left. -\tau \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{\tan \alpha}{\cos x} + i \tan x \right) e^{i(t+y)} \right] E_\Phi^2 + \frac{\kappa}{4\tau} V_\Phi \right\},$$

donde  $\alpha$  es una función auxiliar definida por  $\cos \alpha(s) = x'(s)$ , y

$$\nu(s) = \frac{\cos x(s) \cos \alpha(s)}{\sqrt{\cos^2 \alpha(s) [\cos^2 x(s) + \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 x(s)] + \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 \alpha(s)}},$$

es la función ángulo de la inmersión  $\Phi$ . Observemos que los puntos singulares de  $\Sigma$ , si los hay, aparecen en el eje de rotación  $\ell$ .

Ahora, mediante un cálculo directo teniendo presente cómo se escribe la conexión de la esfera de Berger en términos de la base  $\{E_1, E_2, V\}$  (cf. (2.3)<sub>[p.21]</sub>), obtenemos la curvatura media  $H$  de  $\Sigma$  respecto al normal  $N$  definido anteriormente:

$$\frac{2 \cos^3 \alpha \cos^3 x}{\tau \nu^3} H = \left( \cos^2 x + \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 x \right) \alpha' + \\ + \frac{\sin \alpha}{\tan x} \left[ \left( 1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \right) \cos^2 x \cos^2 \alpha + \frac{4\tau^2}{\kappa} (1 - \tan^2 x) \right]$$

Así tenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.1.** La curva generatriz  $\gamma(s) = (\cos x(s)e^{iy(s)}, \sin x(s))$  de una superficie  $\Sigma$  de  $S_b^3$  invariante por el grupo Rot satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \alpha, \\ y' &= \frac{\sin \alpha}{\cos x}, \\ \alpha' &= \frac{1}{(\cos^2 x + \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 x)} \left\{ \frac{2 \cos^3 \alpha \cos^3 x}{\tau \nu^3} H + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \alpha}{\tan x} \left[ \left( 1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \right) \cos^2 x \cos^2 \alpha + \frac{4\tau^2}{\kappa} (1 - \tan^2 x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde  $H$  es la curvatura media de  $\Sigma$  con respecto al normal definido anteriormente. Además, si  $H$  es constante entonces la función:

$$\tau \nu \sin x \tan \alpha - H \sin^2 x \quad (3.9)$$

es una constante  $E$  que llamaremos la energía de la solución.

*Observación 3.5.* De la unicidad de la solución de (3.8) para una condición inicial dada es posible probar que si  $(x, y, \alpha)$  es una solución entonces:

- (i) Podemos trasladar la solución a lo largo del eje  $y$ , i.e.,  $(x, y + y_0, \alpha)$  es una solución para cualquier  $y_0 \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Reflejar la curva solución a lo largo de una recta  $y = y_0$  es una solución con signo opuesto de  $H$ , esto es,  $(x, 2y_0 - y, -\alpha)$  es una solución para  $-H$ .
- (iii) Cambiar el parámetro arco de orientación produce una nueva solución con signo opuesto de  $H$ , esto es,  $(x(2s_0 - s), y(2s_0 - s), \alpha(2s_0 - s) + \pi)$  es una solución para  $-H$ .
- (iv) Si  $(x, y, \alpha)$  está definida para  $s \in ]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$  con  $x'(s_0) = 0$  entonces la solución puede continuarse reflejando a lo largo de  $y = y(s_0)$ .

Así, gracias a las anteriores propiedades, siempre podemos considerar una solución  $(x, y, \alpha)$  con curvatura media positiva y condiciones iniciales  $(x_0, 0, \alpha_0)$  en  $s = 0$ .

**Lema 3.2.** *Sea  $(x(s), y(s), \alpha(s))$  una solución de (3.8) con energía  $E$ . Entonces la energía  $E$  satisface*

$$-H - \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + \kappa} \leq 2E \leq -H + \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + \kappa} \quad (3.10)$$

y  $x(s) \in [x_1, x_2]$  donde  $x_j = \arcsin \sqrt{t_j}$ ,  $j = 1, 2$ , siendo

$$t_1 = \frac{\kappa - 8HE - \sqrt{\kappa^2 - 16\kappa E(H + E)}}{2(4H^2 + \kappa)},$$

$$t_2 = \frac{\kappa - 8HE + \sqrt{\kappa^2 - 16\kappa E(H + E)}}{2(4H^2 + \kappa)}.$$

Además  $x'(s) = \cos \alpha(s) = 0$  si, y sólo si,  $x(s)$  es exactamente  $x_1$  o  $x_2$ .

*Demostración.* En primer lugar de (3.9) obtenemos

$$\sin \alpha = \frac{1}{\rho}(E + H \sin^2 x) \sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\kappa} \tan^2 x},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\rho} \tau \sin x \sqrt{1 - \frac{4(E + H \sin^2 x)^2}{\kappa \sin^2 x \cos^2 x}} \quad (3.11)$$

donde  $\rho = \sqrt{\tau^2 \sin^2 x + \left(1 - \frac{4\tau^2}{\kappa}\right) (E + H \sin^2 x)^2}$ . Para que  $\cos \alpha$  esté bien definido debe ser

$$\frac{4}{\kappa}(E + H \sin^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x \leq 0,$$

esto es,  $p(\sin^2 x) \leq 0$ , donde  $p$  es el polinomio

$$p(t) = \left(1 + \frac{4H^2}{\kappa}\right) t^2 - \left(1 - \frac{8H}{\kappa}E\right) t + \frac{4}{\kappa}E^2$$

Puesto que  $p(t)$  debe ser negativo o nulo, el vértice de dicha parábola debe ser negativo o cero también, lo cual se traduce en que

$$\left(1 - \frac{8}{\kappa}E\right)^2 - \frac{16}{\kappa}E^2 \left(1 + \frac{4H^2}{\kappa}\right) \geq 0 \quad (3.12)$$

lo que prueba (3.10) y además  $\sin^2 x(s) \in [t_1, t_2]$  donde  $t_1$  y  $t_2$  son las raíces de  $p$ . Finalmente, ya que  $\cos x(s) \geq 0$  puesto que hemos supuesto que la curva  $\gamma$  está contenida en el hemisferio norte, debe ser  $x(s) \in [0, \pi/2]$  y, por tanto,  $x(s) \in [x_1, x_2]$  donde  $x_j = \arcsin \sqrt{t_j}$ ,  $j = 1, 2$ . ■

Ahora describimos las soluciones completas de (3.8) en términos de  $H$  y  $E$ .

**Teorema 3.1.** *Sea  $\Sigma$  una superficie conexa, completa, invariante por rotación con curvatura media constante  $H$  y energía  $E$  en  $S_b^3(\kappa, \tau)$ . Entonces  $\Sigma$  debe ser uno de los siguientes tipos:*

- (i) *Si  $E = 0$  entonces  $\Sigma$  es una 2-esfera  $S_{(\kappa, \tau)}(H)$  (posiblemente inmersa, ver Corolario 3.1). Además, si  $H = 0$  también entonces  $\Sigma$  es la esfera ecuatorial  $\{(z, w) \in S^3 : \text{Im}(z) = 0\}$  que es siempre embebida.*
- (ii) *Si  $E = \frac{1}{4}(-2H \pm \sqrt{4H^2 + \kappa})$  entonces  $\Sigma$  es el toro de Hopf de radio  $r_H^2 = \frac{1}{2} + \frac{H}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}$ , esto es,  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H) = \{(z, w) \in S^3 : |z|^2 = r_H^2, |w|^2 = 1 - r_H^2\}$  (cf. Proposición 3.2).*
- (iii) *Si  $E > 0$  o  $E < -H$  (y diferente del caso (ii)) entonces  $\Sigma$  es una superficie de tipo unduloide (ver figura 3).*
- (iv) *Si  $-H < E < 0$  entonces  $\Sigma$  es una superficie de tipo nodoide (ver figura 4).*
- (v) *Si  $E = -H$  entonces  $\Sigma$  está generada por una unión de círculos que se cortan en el polo norte (ver figura 5).*

Las superficies de tipo (iii)–(v) son compactas si, y sólo si,

$$T(H, E) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{(E + H \sin^2 x) \sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\kappa} \tan^2 x}}{\tau \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x - \frac{4}{\kappa} (E + H \sin^2 x)^2}} dx \quad (3.13)$$

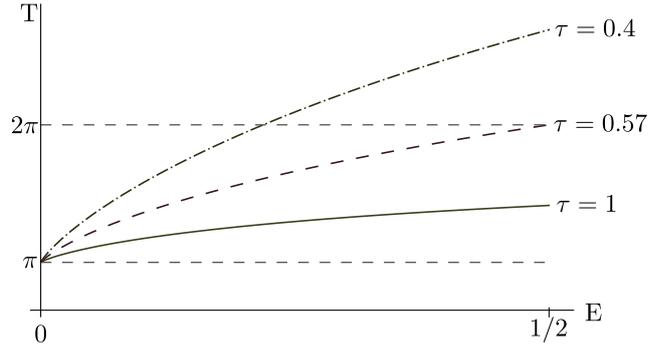
es un múltiplo racional de  $\pi$  (ver Lema 3.2 para la definición de  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ ). Además, las superficies del tipo (iii) son compactas y embebidas si, y sólo si,  $T = 2\pi/k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Observación 3.6.*

1. El anterior resultado también es válido para el caso  $\kappa = 4\tau^2$ , i.e., en la esfera redonda. El estudio de este tipo de superficies fue hecho por Hsiang [Hsi82, Teorema 3]. El caso subriemanniano, que puede considerarse al fijar  $\kappa = 4$  y tomar  $\tau \rightarrow \infty$ , fue estudiado por Hurtado y Rosales [HRo8, Teorema 6.4].
2. Puesto que  $T(H, E)$  es una función continua no constante sobre un conjunto no vacío de  $\mathbb{R}^2$  (ver (3.10) para las restricciones de  $E$ ), existen valores de  $H$  y  $E$  tales que  $T(H, E)$  es un múltiplo racional de  $\pi$  y, por tanto, las correspondientes superficies de tipo (iii)–(v) son compactas.

De entre todos estos ejemplos compactos, las superficies mínimas sólo aparecen en el tipo (iii) y, de (3.10), para  $0 < E^2 \leq \kappa/16$ . Para  $\kappa = 4$  y  $\tau = 0,4$ , la figura 1 muestra que existe un valor de  $E$  tal que  $T(0, E) = 2\pi$ , esto es, la correspondiente superficie es embebida y compacta luego se trata de un toro mínimo embebido que no es el toro de Clifford. Esta superficie es un contraejemplo a la conjetura de Lawson en la esfera de Berger  $S_b^3(4, 0, 4)$ .

Parece existir un valor límite  $\tau_0 \approx 0,57$  tal que para  $\tau \leq \tau_0$  siempre existen ejemplos de toros mínimos embebidos (superficies de tipo unduloide) mientras que para  $\tau > \tau_0$  no existen. Estas superficies serían contraejemplos a la conjetura de Lawson en las esferas de Berger con  $\kappa = 4$  y  $\tau \leq \tau_0$ .



**Figura 1:** El periodo  $T(0, E)$  (cf. (3.19)) de una superficie mínima de tipo unduloide en términos de la energía  $E$  para tres valores diferentes de  $\tau$  fijando  $\kappa = 4$ . Hemos dibujado únicamente el periodo para  $0 < E \leq 1/2$ .

*Demostración.* En primer lugar vamos a obtener algunas fórmulas útiles. Sustituyendo (3.11) en la tercera ecuación de (3.8) obtenemos

$$\alpha'(s) = \frac{\tau^2 \tan x(s) q(\sin^2 x(s))}{\rho^3 \cos x(s) \sqrt{\cos^2 x(s) + \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 x(s)}} \quad (3.14)$$

donde  $\rho$  es la función dada en la demostración del Lema 3.2 y  $q(t)$  es el polinomio dado por:

$$\begin{aligned}
 q(t) = & \frac{H}{\kappa^2}(\kappa - 4\tau^2)(4H^2 + \kappa)t^3 + \\
 & + \frac{1}{\kappa}(\kappa - 4\tau^2) \left( \frac{12EH^2}{\kappa} - (E + 2H) \right) t^2 + \\
 & + \left( \frac{12HE^2(\kappa - 4\tau^2)}{\kappa^2} + 2E + H \right) t + \\
 & + \frac{4E^3(\kappa - 4\tau^2)}{\kappa^2} - E
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

(i) En primer lugar si  $H = 0$  entonces por (3.11) obtenemos que  $\sin \alpha = 0$ , i.e.,  $x(s) = s + x_0$  y  $y(s) = 0$ . Así la superficie  $\Sigma$  es la 2-esfera ecuatorial  $\{(z, w) \in \mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau) : \text{Im}(z) = 0\}$ . En segundo lugar, si  $H > 0$  entonces, gracias al Lema 3.2,  $\sin^2 x(s) \in [0, \kappa/(4H^2 + \kappa)]$ , i.e.,  $\tan^2 x(s) \in [0, \kappa/4H^2]$  y podemos asumir que  $\tan x(s) \in [0, \sqrt{\kappa}/2H]$ . Por (3.11)  $\cos \alpha > 0$  en dicho intervalo con lo cual podemos expresar  $y$  como función de  $x$ . Teniendo en cuenta (3.8) y (3.11) un cálculo sencillo muestra que

$$y'(x) = \frac{H}{\tau} \tan x \frac{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\kappa} \tan^2 x}}{\sqrt{1 - \frac{4H^2}{\kappa} \tan^2 x}}, \quad x \in \left] 0, \arctan \frac{\sqrt{\kappa}}{2H} \right[$$

Podemos integrar la anterior ecuación haciendo el cambio de variable dado por

$$u = \frac{\sqrt{1 - \frac{4H^2}{\kappa} \tan^2 x}}{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\kappa} \tan^2 x}}.$$

Finalmente obtenemos que

$$y(x) = -\arctan\left(\frac{\tau}{\lambda}\lambda(x)\right) + \omega(x) \quad (3.16)$$

donde

$$\omega(x) = \begin{cases} -\frac{H}{\tau} \frac{\sqrt{\kappa - 4\tau^2}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{\kappa - 4\tau^2}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}\lambda(x)\right) \\ \frac{H}{\tau} \frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \operatorname{arctan}\left(\frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}\lambda(x)\right) \end{cases}$$

según  $\kappa - 4\tau^2$  sea positivo o negativo y

$$\lambda(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{4H^2}{\kappa} \tan^2 x}}{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\kappa} \tan^2 x}}.$$

Observemos que  $y(\arctan(\sqrt{\kappa}/2H)) = 0$  donde se encuentra con el eje de rotación  $\ell$  ortogonalmente e  $y$  es una función de  $x$  estrictamente creciente para  $x$  en  $]0, \arctan(\sqrt{\kappa}/2H)[$ . Entonces  $y$  alcanza su mínimo en  $x = 0$ . La función  $y$  sólo genera la mitad de la esfera, pero se puede obtener la otra mitad reflejando la solución a lo largo de la recta  $x = 0$ . Entonces es fácil ver que la esfera es embebida si, y sólo si,  $y(0) > -\pi$ . En otro caso la esfera es inmersa (ver figura 2).

**(ii)** Si  $E = \frac{1}{4}(-2H \pm \sqrt{4H^2 + \kappa})$  el lema previo afirma entonces que  $t_1 = t_2$  y por tanto  $x(s)$  debe ser constante  $x_1 = x_2 = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2}(1 \mp \frac{2H}{\sqrt{4H^2 + \kappa}})}$ . Podemos integrar la solución para obtener que  $\Phi(s, t) = (r_H e^{is/r_H}, \sqrt{1 - r_H^2} e^{it})$  donde

$$r_H^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{H}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}$$

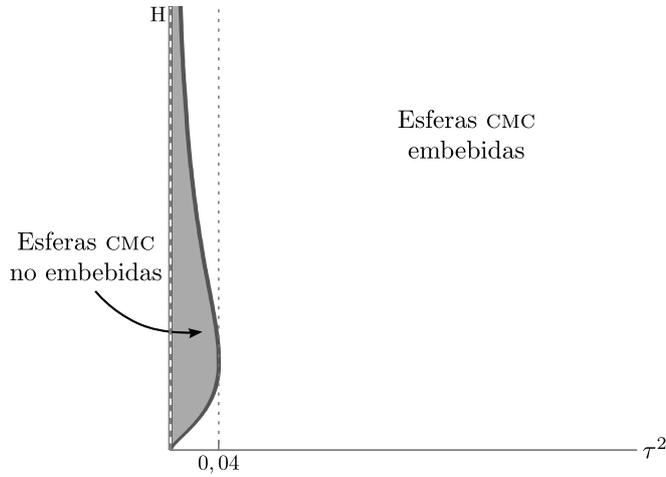


Figura 2: Región de esferas CMC no embebidas en  $S_b^3(4, \tau)$  en términos de su curvatura media  $H$

i.e.,  $\Sigma$  es un toro de Hopf.

[(iii), caso  $E > 0$ ]. Supongamos ahora que no se da la igualdad en (3.12) y que  $E > 0$ . Consideremos la solución maximal de (3.8) con condiciones iniciales  $(x_1, 0, \pi/2)$  (veremos más adelante que esto no supone ninguna restricción) y podemos suponer, por la condición de maximalidad, que existe  $s_2$  tal que  $\alpha(s_2) = \pi/2$ .

Vamos a analizar el signo de  $\alpha'$  usando (3.14). Para ello es suficiente estudiar el signo del polinomio  $q$  en (3.15) entre  $t_1$  y  $t_2$  (ver Lema 3.2). Una computación directa muestra que  $q$  es estrictamente creciente y que  $q(t_1)q(t_2) \leq 0$ . Así existe un único  $s_1$  tal que  $\alpha'(s_1) = 0$ . De esta manera  $\alpha$  es una función estrictamente creciente en  $]0, s_1[$ , estrictamente decreciente en  $]s_1, s_2[$  y  $s_1$  es un máximo absoluto. Ahora bien, puesto

que  $\sin \alpha > 0$  podemos expresar  $x$  como función de  $y$  y, por tanto, de (3.8) tenemos

$$\frac{dx}{dy} = \cos x \cot \alpha > 0 \quad (3.17)$$

luego  $x(y)$  es una función estrictamente creciente y, al ser  $\cos \alpha(s_2) = 0$ , debe ser  $x(y(s_2)) = x_2$ . En particular, la solución  $x$  toma todos los valores en el intervalo  $[x_1, x_2]$  luego, por la unicidad de solución, cualquier solución maximal con condiciones iniciales  $(x_0, 0, \alpha_0)$  con  $x_0$  necesariamente en  $[x_1, x_2]$  debe ser una reparametrización de ésta. Finalmente, teniendo en cuenta la anterior ecuación, la tercera fórmula en (3.8) y (3.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dy^2} = & \frac{-\tau^2 \sin x \cos x}{\left(\cos^2 x + \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 x\right)^2 (E + H \sin^2 x)^3} \cdot \\ & \left[ \cos^2 x q(\sin^2 x) + \left(\cos^2 x + \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 x\right) (E + H \sin^2 x) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left(\cos^2 x \sin^2 x - \frac{4}{\kappa} (E + H \sin^2 x)^2\right) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Es inmediato comprobar que  $d^2x/dy^2$  tiene un único cero  $y_1$  en el intervalo  $]0, y(s_2)[$  y que  $x$  es convexa en  $]0, y(s_1)[$  y cóncava en  $]y_1, y(s_2)[$ . Mediante sucesivas reflexiones a lo largo de las líneas verticales donde  $x(y)$  alcanza sus puntos críticos, obtenemos la solución completa que es similar a un unduloide (ver figura 3).

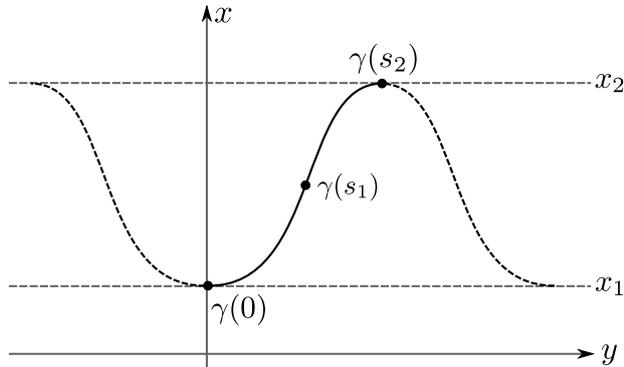


Figura 3: Curva  $\gamma(s)$  para  $E > 0$

El periodo de este unduloide viene dado por

$$\begin{aligned}
 T(H, E) &= 2y(s_2) = 2 \int_{x_1}^{x_2} y'(x) \, dx \\
 &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{(E + H \sin^2 x) \sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\kappa} \tan^2 x}}{\tau \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x - \frac{4}{\kappa} (E + H \sin^2 x)^2}} \, dx \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Así, si (3.19) es un múltiplo racional de  $\pi$  entonces la superficie es compacta. Más aún, la superficie es embebida si, y sólo si,  $T = 2\pi/m$  para  $m \in \mathbb{N}$ .

**[(iii), caso  $E < -H$ ].** En este caso  $\sin \alpha < 0$  luego podemos expresar  $x$  como función de  $y$  y un argumento similar al del caso previo es suficiente para comprobar que la superficie debe de ser un unduloide (ver figura 3).

**(iv)** Si  $-H < E < 0$  consideremos la solución maximal con condiciones iniciales  $(x_2, 0, \pi/2)$ . Observemos que en este caso  $\sin \alpha$  puede cambiar de signo:  $\sin \alpha < 0$  para  $\sin^2 x \in [t_1, -E/H]$  y  $\sin \alpha > 0$  para  $\sin^2 x \in [-E/H, t_2[$ .

Por (3.14)  $\alpha' > 0$  luego  $\alpha$  es una función estrictamente creciente. Sean  $0 < s_1 < s_2$  tal que  $\alpha(s_1) = \pi$  y  $\alpha(s_2) = 3\pi/2$  (luego  $x(s_2) = x_1$ ). Entonces  $\alpha \in ]\pi/2, \pi[$  sobre  $]0, s_1[$  y  $\alpha \in ]\pi, 3\pi/2[$  sobre  $]s_1, s_2[$ . Ahora podemos expresar la solución  $\gamma$  en  $]0, s_2[$  como dos grafos de la función  $x(y)$  que se encuentran en la recta  $y = y(s_1)$ . En primer lugar usando (3.17) obtenemos que  $x(y)$  es una función estrictamente decreciente sobre  $]0, y(s_1)[$  y estrictamente creciente sobre  $]y(s_2), y(s_1)[$ . En segundo lugar teniendo presente (3.18)  $x(y)$  es estrictamente cóncava en  $]0, y(s_1)[$  y estrictamente convexa en  $]y(s_2), y(s_1)[$ . Puesto que  $y = 0$  e  $y = y(s_2)$  son líneas de simetría al ser  $x'(0) = x'(s_2) = 0$ , podemos reflejar sucesivamente  $\gamma$  para obtener la solución completa, que es similar a un nodoide (ver figura 4). También en este caso la solución produce una superficie compacta si (3.19) es un múltiplo racional de  $\pi$  aunque en este caso la superficie siempre es inmersa.

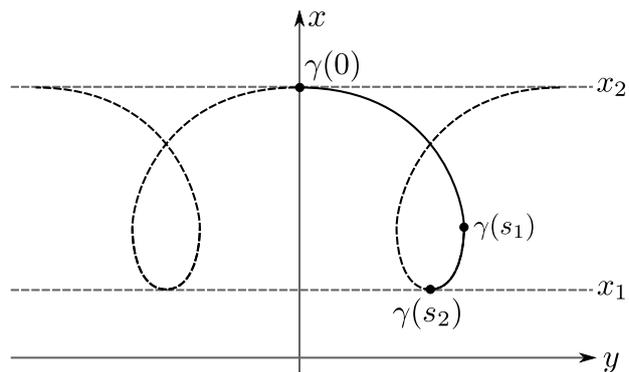


Figura 4: Curva  $\gamma(s)$  para  $E < 0$  y  $E \neq -H$

(v) Finalmente vamos a estudiar el caso  $E = -H \neq 0$ . Ahora  $\sin x \in [2H/\sqrt{4H^2 + \kappa}, 1]$  luego la curva puede aproximarse al polo norte  $p_N$  de la 2-esfera. Consideremos la solución maximal con condiciones iniciales  $(\arcsin(2H/\sqrt{4H^2 + \kappa}), 0, 3\pi/2)$

y sea  $s_1$  el primer número tal que  $\alpha(s_1) = 2\pi$ , esto es, la primera vez que la curva  $\gamma$  pasa por el polo norte. Podemos expresar  $x$  como una función de  $y$  sobre cada componente conexa de  $\gamma \setminus \{p_N\}$  puesto que  $\sin \alpha < 0$  fuera de  $p_N$ . Usando (3.14) obtenemos que  $\alpha' > 0$  y, por tanto,  $\alpha \in [3\pi/2, 2\pi]$ . Así, teniendo presente (3.17) y (3.18), deducimos que  $x(y)$  es una función estrictamente decreciente y convexa en  $]y(s_1), 0[$ .

Continuamos la curva solución para obtener otra rama del grafo de la función  $x(y)$  que se corta en el polo norte. Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \hat{x}(s) &= x(2s_1 - s), & \hat{y}(s) &= 2y(s_1) + \pi - y(2s_1 - s), \\ \hat{\alpha}(s) &= 3\pi - \alpha(2s_1 - s), & s &\in [s_1, 2s_1] \end{aligned}$$

es una solución de (3.8) con energía  $E = -H$ . Esto es, la otra rama de la solución se obtiene simplemente reflejando la función  $x(y)$  con respecto a la recta  $y = y(s_1) + \pi/2$ . Mediante sucesivas reflexiones en cada punto crítico de  $x$  obtenemos la solución completa (ver figura 5).

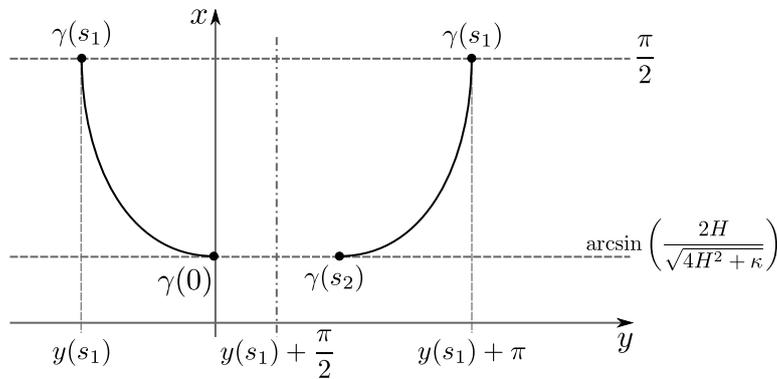


Figura 5: Curva  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  para  $E = -H$

Ahora bien, si  $y(s_1) = -\pi/2$  entonces la recta de reflexión correspondiente al punto crítico coincide con la recta de reflexión que produce la nueva rama de la solución con lo cual la solución será embebida. Usando la siguiente expresión

$$\begin{aligned} y(s_1) &= \int_{\frac{2H}{\sqrt{4H^2+\kappa}}}^{\pi/2} y'(x) dx = \\ &= \int_{\frac{2H}{\sqrt{4H^2+\kappa}}}^{\pi/2} \frac{(E + H \sin^2 x) \sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{\kappa} \tan^2 x}}{\tau \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x - \frac{4}{\kappa} (E + H \sin^2 x)^2}}, \end{aligned}$$

es posible comprobar numéricamente que para  $\tau$  suficiente pequeño y  $H$  apropiado se tiene que  $y(s_1) = -\pi/2$  y, por tanto, la solución es un toro embebido. Más aún,  $\gamma$  es cerrada (con lo cual la superficie  $\Sigma$  que genera es compacta) si, y sólo si,  $y(s_1)$  es un múltiplo racional de  $2\pi$ . ■

**Corolario 3.1.** Sea  $\Phi : ]-a, a[ \times ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  la inmersión dada por:

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} (\cos(x+a)e^{iy(x+a)}, \sin(x+a)e^{it}), & \text{si } x < 0 \\ (\cos(a-x)e^{-iy(a-x)}, \sin(a-x)e^{it}), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $a = \arctan(\sqrt{\kappa}/2H)$  e  $y$  es la función definida en (3.16). Entonces  $\Phi$  define una inmersión de una esfera con curvatura media constante  $H$ . Además  $\Phi$  es un embebimiento si, y sólo si,  $y(0) > -\pi$  (ver figura 2).

### 3.3.2 Superficies de rotación en $Sl_2(\mathbb{R})$

Al igual que en la sección precedente estamos interesados en clasificar las superficies de curvatura media constante invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías que deje

fija una curva en el grupo especial lineal  $Sl_2(\mathbb{R})$ . Para ello nos valdremos de las técnicas desarrolladas anteriormente con lo cual muchas de las demostraciones serán simplemente un esquema.

Definimos entonces, en analogía con el caso de las esferas de Berger, el grupo 1-paramétrico Rot dado por

$$\text{Rot} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Entonces Rot deja fija la curva  $\ell = \{(z, 0) \in Sl_2(\mathbb{R})\}$  que es un círculo al que llamaremos eje de rotación y podemos identificar  $Sl_2(\mathbb{R})/\text{Rot}$  con el conjunto  $O = \{(z, a) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 - a^2 = 1\}$ .

Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie orientada  $\Sigma$  de curvatura media constante invariante por Rot. Entonces  $\Sigma = \pi^{-1}(\gamma)$  para cierta curva diferenciable  $\gamma \subset O$  siendo  $\Pi : Sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow O$  la proyección al cociente.

Sea  $\gamma(s) = (\cosh x(s)e^{iy(s)}, \sinh x(s))$ , podemos suponer que

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 \cosh^2 x(s) = 1$$

y llamaremos  $\alpha$  a la función auxiliar definida por  $x'(s) = \cos \alpha(s)$ .

Entonces podemos escribir la inmersión  $\Phi$  de la forma

$$\Phi(s, t) = (\cosh x(s)e^{iy(s)}, \sinh x(s)e^{it}).$$

Un vector normal a lo largo de  $\Phi$  viene dado por

$$\mathbf{N} = \nu \left\{ -\tau \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{\tan \alpha}{\cosh x} - i \tanh x \right) e^{i(t+y)} \right] \mathbf{E}_\Phi^1 + \right. \\ \left. -\tau \operatorname{Im} \left[ \left( \frac{\tan \alpha}{\cosh x} - i \tanh x \right) e^{i(t+y)} \right] - \frac{\kappa}{4\tau} \mathbf{V}_\Phi \right\}$$

donde

$$\nu(s) = \frac{\cos \alpha(s) \cosh x(s)}{\sqrt{\cos^2 \alpha(s) [\cosh^2 x(s) - \frac{4\tau^2}{\kappa} \sinh^2 x(s)] - \frac{4\tau^2}{\kappa} \sin^2 \alpha(s)}}$$

es la función ángulo de la inmersión  $\Phi$ .

Ahora, mediante un cálculo directo teniendo presente la conexión de  $Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$  con respecto a la base  $\{E_1, E_2, V\}$  (cf. (2.6)), obtenemos la curvatura media  $H$  de  $\Sigma$  respecto del normal  $N$  definido anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos^3 \alpha \cosh^3 x}{\tau \nu^3} H = & \left( \cosh^2 x - \frac{4\tau^2}{\kappa} \sinh^2 x \right) \alpha' + \\ & + \frac{\sin \alpha}{\tanh x} \left[ \left( 1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \right) \cos^2 \alpha \cosh^2 x + \right. \\ & \left. + \frac{4\tau^2}{\kappa} (2 \cos^2 \alpha - 1)(1 + \tanh^2 x) \right] \end{aligned}$$

Así, obtenemos el siguiente resultado

**Lema 3.3.** *La curva generatriz  $\gamma(s) = (\cosh x(s)e^{iy(s)}, \sinh x(s))$  de una superficie  $\Sigma$  invariante por el grupo Rot satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \cos \alpha, \\ y' = \frac{\sin \alpha}{\cosh x}, \\ \alpha' = \frac{1}{\left( \cosh^2 x - \frac{4\tau^2}{\kappa} \sinh^2 x \right)} \left\{ \frac{2 \cos^3 \alpha \cosh^3 x}{\tau \nu^3} H + \right. \\ \quad \left. - \frac{\sin \alpha}{\tanh x} \left[ \left( 1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \right) \cos^2 \alpha \cosh^2 x + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{4\tau^2}{\kappa} (2 \cos^2 \alpha - 1)(1 + \tanh^2 x) \right] \right\} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

donde  $H$  es la curvatura media de  $\Sigma$  con respecto al normal definido anteriormente. Además, si  $H$  es constante entonces la función

$$\tau\nu \sinh x \tan \alpha - H \sinh^2 x \quad (3.21)$$

es una constante  $E$  que llamaremos energía de la solución.

La Observación 3.5 es también cierta para este sistema luego siempre es posible considerar una solución  $(x, y, \alpha)$  con curvatura media positiva y condición inicial  $(x_0, 0, \alpha_0)$ .

**Lema 3.4.** Sea  $(x(s), y(s), \alpha(s))$  una solución de (3.20) con energía  $E$ . Entonces:

- (i) Si  $4H^2 + \kappa > 0$  entonces debe ser  $4E < 2H - \sqrt{4H^2 + \kappa}$ . Además  $\sinh^2 x(s) \in [t_1, t_2]$  donde

$$t_1 = \frac{-8HE - \kappa - \sqrt{16\kappa E(H - E) + \kappa^2}}{2(4H^2 + \kappa)},$$

$$t_2 = \frac{-8HE - \kappa + \sqrt{16\kappa E(H - E) + \kappa^2}}{2(4H^2 + \kappa)}.$$

Más aún,  $x'(s) = \cos \alpha(s) = 0$  si, y sólo si,  $\sinh^2 x(s)$  es exactamente  $t_1$  o  $t_2$ .

- (ii) Si  $4H^2 + \kappa < 0$  entonces  $\sinh^2 x(s) \in [t_1, +\infty[$ . Además,  $x'(s) = \cos \alpha(s) = 0$  si, y sólo si,  $\sinh^2 x(s) = t_1$ .
- (iii) Si  $4H^2 + \kappa = 0$  entonces  $E < H/2$  y  $\sinh^2 x(s) \in [E^2/H(H - 2E), +\infty[$ . Además,  $x'(s) = \cos \alpha(s) = 0$  si, y sólo si,  $\sinh^2 x(s) = E^2/H(H - 2E)$ .

*Demostración.* Usando (3.21) se tiene que

$$\sin \alpha = \frac{1}{\mu} (E + H \sinh^2 x) \sqrt{1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \tanh^2 x},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\mu} \tau \sinh x \sqrt{1 + \frac{4}{\kappa} \frac{(E + H \sinh^2 x)^2}{\cosh^2 x \sinh^2 x}}, \quad (3.22)$$

donde

$$\mu^2 = \tau^2 \sinh^2 x + (E + H \sinh^2 x)^2 \left[ 1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \left( \tanh^2 x - \frac{1}{\cosh^2 x} \right) \right].$$

De la fórmula anterior para  $\cos \alpha$  se deduce que  $p(\sinh^2 x) \geq 0$ , donde

$$p(t) = \left( 1 + \frac{4H^2}{\kappa} \right) t^2 + \left( 1 + \frac{8HE}{\kappa} \right) t + \frac{4E^2}{\kappa}.$$

El resultado se sigue del estudio del signo del polinomio para  $t \geq 0$ . ■

Ahora describimos las soluciones completas de (3.20) en términos de la curvatura media  $H$  y la energía  $E$ .

**Teorema 3.2.** *Sea  $\Sigma$  una superficie conexa, completa, invariante por rotación con curvatura media constante  $H$  y energía  $E$  en  $Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$ . Entonces  $\Sigma$  debe ser uno de los siguientes tipos:*

1. Si  $4H^2 + \kappa > 0$  entonces
  - (a) Si  $E = 0$  entonces  $\Sigma$  es una 2-esfera  $\hat{S}_{(\kappa, \tau)}(H)$  (posiblemente inmersa, ver Corolario 3.2).
  - (b) Si  $E > 0$  entonces  $\Sigma$  es una superficie de tipo unduloide.
  - (c) Si  $E < 0$  entonces  $\Sigma$  es una superficie de tipo nodoide, que es siempre inmersa.

Además, las superficies de los tipos 1.(b) y 1.(c) son compactas si, y sólo si,

$$T(H, E) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{(E + H \sinh^2 x) \sqrt{1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \tanh^2 x}}{\tau \sqrt{\sinh^2 x \cosh^2 x + \frac{4}{\kappa} (E + H \sinh^2 x)^2}}$$

es un múltiplo racional de  $\pi$ , donde  $x_j = \operatorname{arcsinh} \sqrt{t_j}$ ,  $j = 1, 2$  (ver Lema 3.4.(i)). Más aún, las superficies de tipo 1.(b) son compactas y embebidas si, y sólo si,  $T = 2\pi/m$  con  $m \in \mathbb{Z}$ .

2. Si  $4H^2 + \kappa \leq 0$  entonces  $\Sigma$  es inmersa y no compacta. Además la curva  $\gamma$  que genera la superficie  $\Sigma$  es uno de los tipos de la figura 7 si  $E = 0$ , figura 8 si  $E > 0$  y figura 9 si  $E < 0$ .

*Observación 3.7.*

1. Este teorema fue enunciado por primera vez por Gorodski [Goro1] para  $\kappa = -4$  y  $\tau = 1$ . Sin embargo, no tuvo en cuenta que para  $4H^2 + \kappa \leq 0$  no existen esferas de curvatura media constante (en otro caso, por la correspondencia de Daniel [Dano7], sería posible construir una esfera CMC en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  con  $4H^2 - 1 \leq 0$  lo cual es una contradicción por [NRo6, Corolario 5.2]).
2. Todos los ejemplos descritos en el anterior teorema pueden ser levantados al recubridor universal. Puesto que la fibra en el recubridor universal es una recta, no un círculo, todas las esferas de curvatura media constante son embebidas allí. Más aún, para  $E \geq 0$  las superficies son embebidas también por la misma razón. Esta clasificación ha sido obtenida recientemente por Espinoza [Esp09].

*Demostración.* En primer lugar vamos a analizar el caso  $4H^2 + \kappa > 0$  puesto que es muy similar al estudio hecho para las esferas de Berger. En este caso, teniendo en cuenta el anterior lema y que  $H \geq 0$ ,  $x(s)$  se mueve entre dos valores  $x_1 = -\operatorname{arcsinh} \sqrt{t_2}$  y  $x_2 = -\operatorname{arcsinh} \sqrt{t_1}$ . Si  $E = 0$  entonces  $x_2 = 0$  y, por tanto, la curva  $\gamma$  podría cortar al eje de rotación  $\ell$ . Puesto  $\cos \alpha > 0$  para  $x(s) \in ]x_1 = -\operatorname{arctanh}(\sqrt{-\kappa}/2H), 0[$

podemos expresar  $y$  como función de  $x$ . Usando ahora (3.22) deducimos

$$y'(x) = \frac{H \tanh x \sqrt{1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \tanh^2 x}}{\tau \sqrt{1 + \frac{4H^2}{\kappa} \tanh^2 x}}$$

Podemos integrar explícitamente dicha ecuación para obtener

$$y(x) = \arctan\left(\frac{\tau}{H}\rho(x)\right) + \frac{H}{\tau} \frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}\rho(x)\right) \quad (3.23)$$

donde

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{4H^2}{\kappa} \tanh^2 x}}{\sqrt{1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \tanh^2 x}}.$$

Observemos que  $y(x_1) = 0$  donde corta ortogonalmente el eje de rotación e  $y(x)$  es estrictamente creciente y estrictamente convexa. La función  $y(x)$  sólo describe la mitad de la esfera, pero podemos obtener la otra mitad reflejando la solución a lo largo de la recta  $x = 0$ . Es fácil ver que la esfera es embebida si, y sólo si,  $y(0) > -\pi$  (ver figura 6).

Ahora, si  $E > 0$  entonces  $\sin \alpha > 0$  gracias a (3.22) lo que nos permite expresar  $x$  como función de  $y$ . Un argumento similar al usado en el caso de las esferas de Berger para  $E > 0$  es suficiente para comprobar que la superficie debe de ser de tipo unduloide (ver figura 3). Finalmente, si  $E < 0$  entonces  $\sin \alpha$  puede cambiar de signo. Razonando como en el caso de las esferas de Berger para  $-H < E < 0$  podemos expresar la curva  $(x(s), y(s))$  como dos grafos de la función  $x(y)$ . Así, es inmediato comprobar que la situación es la

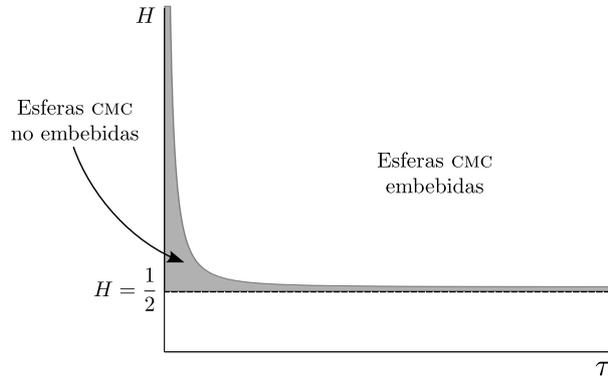


Figura 6: Región para las esferas CMC no embebidas en  $Sl_2(\mathbb{R})$ .

misma que en la figura 4 y que la superficie debe de ser de tipo nodoide. En ambos casos la superficies compacta si, y sólo si,

$$\begin{aligned}
 T(H, E) &= 2 \int_{x_1}^{x_2} y'(x) dx = \\
 &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{(E + H \sinh^2 x) \sqrt{1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \tanh^2 x}}{\tau \sqrt{\sinh^2 x \cosh^2 x + \frac{4}{\kappa} (E + H \sinh^2 x)^2}} dx
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

es un múltiplo racional de  $\pi$ , donde  $x_j = \operatorname{arcsinh} \sqrt{t_j}$ ,  $j = 1, 2$  (ver Lema 3.4).

Por otro lado la situación para  $4H^2 + \kappa \leq 0$  es diferente de la anterior y no tiene un análogo en el caso de las esferas de Berger. En primer lugar observemos, en virtud del Lema anterior, que en este caso  $\chi(s)$  no se mueve entre dos valores reales. Únicamente está acotado superiormente por una constante que depende de  $H$  y sólo se anula cuando  $E = 0$  luego la solución corta al eje de rotación sólo en dicho

caso. Además, puesto que  $x'(s) = \cos \alpha(s)$  sólo se anula una única vez la solución no puede ser periódica. Vamos a distinguir entre  $E = 0$ ,  $E > 0$  y  $E < 0$  y definimos para los tres casos  $x_1 = -\operatorname{arcsinh} \sqrt{t_1}$  cuando  $4H^2 + \kappa < 0$  y  $x_1 = -\operatorname{arcsinh}(|E|/\sqrt{H(H-2E)})$  cuando  $4H^2 + \kappa = 0$ . Puesto que hemos elegido  $H \geq 0$  debe ser  $x(s) \in ]-\infty, x_1]$ .

Si  $E = 0$  entonces consideremos la solución maximal con condición inicial  $(0, 0, \pi)$ . En este caso  $\cos \alpha(s) < 0$  para cualquier  $s$  luego podemos expresar  $y$  como función de  $x$ . De esta manera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H \sinh x \sqrt{1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \tanh^2 x}}{\sqrt{1 + \frac{4H^2}{\kappa} \tanh^2 x}} < 0$$

luego la función  $y$  es estrictamente decreciente. Además  $d^2y/dx^2 > 0$  luego la función  $y$  es estrictamente convexa. En la figura 7 podemos ver las dos posibles situaciones para  $E = 0$ .

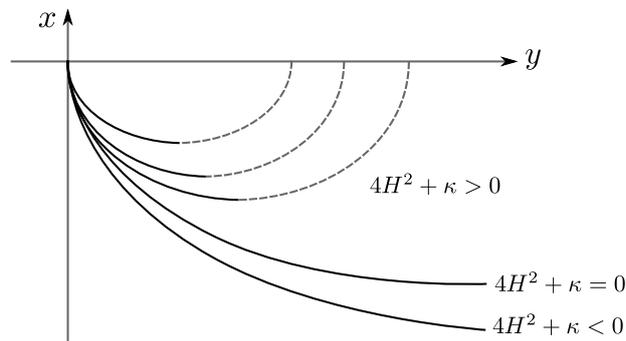


Figura 7: Diferentes soluciones para  $E = 0$  dependiente del signo de  $4H^2 + \kappa$

En el segundo caso, esto es para  $E > 0$ , consideremos la solución maximal con datos iniciales  $(x_1, 0, \pi/2)$ . Entonces

existe  $s_1 > 0$  tal que  $\alpha'(s_1) = 0$ ,  $\alpha'$  es positiva para  $s < s_1$  y negativa para  $s > s_1$ . Así, usando que  $\cos \alpha < 0$  y  $\sin \alpha > 0$  por (3.22), obtenemos que  $\alpha(s) \in ]\pi/2, \pi[$ . Podemos expresar  $x$  en función de  $y$  puesto que  $\sin \alpha > 0$  por (3.22) y

$$\frac{dx}{dy} = \cot \alpha \cosh x < 0 \quad (3.25)$$

deducimos que  $x$  es una función estrictamente decreciente de  $y$  (ver figura 8).

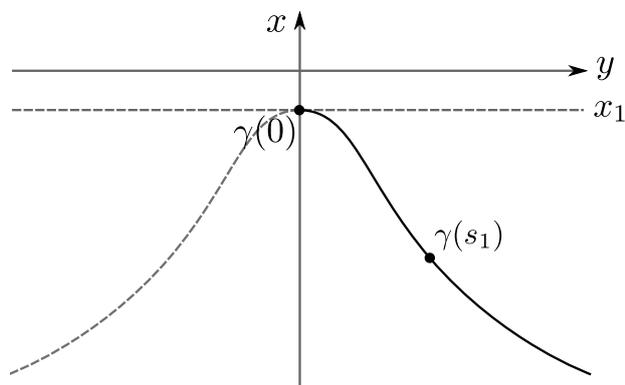


Figura 8: Curva  $\gamma(s)$  para  $4H^2 + \kappa \leq 0$  y  $E > 0$

Finalmente cuando  $E < 0$  consideremos la solución maximal con condición inicial  $(x_1, 0, 3\pi/2)$ . En este caso  $\sin \alpha$  puede anularse luego no podemos expresar  $x$  como función de  $y$ . Puesto que  $\alpha'$  es siempre negativa sea  $s_1 > 0$  tal que  $\alpha(s_1) = \pi$ . Entonces  $\alpha \in ]\pi, 3\pi/2[$  si  $s \in ]0, s_1[$  y  $\alpha \in ]\pi/2, \pi[$  si  $s > s_1$  puesto que  $\cos \alpha(s)$  no se anula nunca más. Vamos a expresar la solución  $\gamma$  como dos grafos de la función  $x(y)$  que se encuentran en la recta  $y = y(s_1)$ . En primer lugar usando (3.25)  $x(y)$  es una función estrictamente creciente en el intervalo  $]y(s_1), 0[$  y estrictamente decreciente en el intervalo  $]y(s_1), +\infty[$ . Así la solución debe ser similar a la curva mostrada en la figura 9. ■

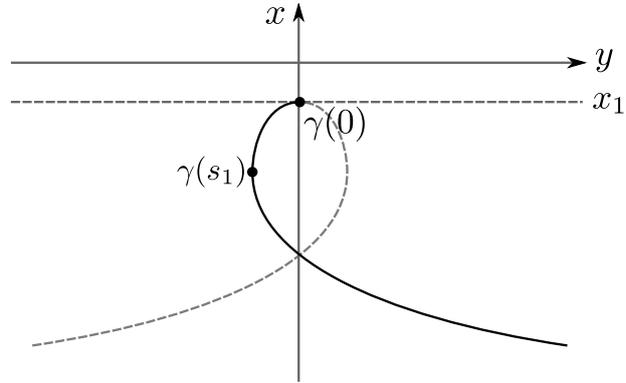


Figura 9: Curva  $\gamma(s)$  para  $4H^2 + \kappa \leq 0$  y  $E < 0$

**Corolario 3.2.** Sea  $4H^2 + \kappa > 0$  y  $\Phi : ] - a, a[ \times ] - \pi, \pi[ \rightarrow \text{Sl}_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$  la inmersión dada por:

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} (\cosh(x + a)e^{iy(x+a)}, \sinh(x + a)e^{it}), & \text{si } x < 0 \\ (\cosh(a - x)e^{-iy(a-x)}, \sinh(a - x)e^{it}), & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde  $a = \text{arctanh}(\sqrt{-\kappa}/2H)$  e  $y$  es la función definida en (3.23). Entonces  $\Phi$  define una inmersión de una esfera de curvatura media constante  $H$ . Más aún,  $\Phi$  es un embebimiento si, y sólo si,  $y(0) > -\pi$  (ver figura 6).

### 3.3.3 Área de las esferas CMC

Las parametrizaciones explícitas para las esferas de curvatura media constante inmersas en  $S_b^3$  y  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  dadas en los Corolarios 3.1 y 3.2 nos permiten calcular el área de dichas superficies. Ahora bien, es posible, utilizando un argumento más general, obtener el área de cualquier esfera CMC inmersa en cualquier  $E(\kappa, \tau)$ . Para ello precisaremos el siguiente

lema, de interés por sí sólo y que nos será de utilidad más adelante (cf. Proposición 7.1 [p.150]).

**Lema 3.5.** *Sea  $\Phi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una esfera de curvatura media constante  $H$ . Entonces existe un parámetro conforme global  $z$  sobre  $\bar{\mathbb{C}}$  tal que la función ángulo  $\nu$  puede escribirse como*

$$\nu(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}}$$

Además, los datos fundamentales de dicha inmersión son:

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{-2(H + i\tau)\bar{z}}{(\kappa - 4\tau^2)|z|^2 + (H^2 + \tau^2)(|z|^2 + 1)^2}, \\ p(z) &= \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{2(H + i\tau)} A^2(z), \\ e^{2u(z)} &= \frac{(|z|^2 + 1)^2}{|z|^2} |A(z)|^2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

*Demostración.* Sea  $\Phi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una esfera con curvatura media constante  $H$  y  $z$  un parámetro conforme cualquiera. Entonces la diferencial de Abresch-Rosenberg se anula y por tanto, de las ecuaciones (3.3), es fácil obtener

$$\begin{aligned} \nu_z &= \frac{-A}{4(H + i\tau)} [4(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)], \\ \nu_{z\bar{z}} &= \frac{-e^{2u}\nu}{32(H^2 + \tau^2)} [4(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)]^2 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Puesto que  $[4(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)] > 0$  (es inmediato si  $\kappa - 4\tau^2 > 0$  y en otro caso, i.e.,  $\kappa - 4\tau^2 < 0$ , tenemos que  $[4(H^2 + \tau^2) + (\kappa - 4\tau^2)(1 - \nu^2)] > 4H^2 + \kappa > 0$  ya que se trata de una esfera) los únicos puntos críticos de la función ángulo  $\nu$  son aquellos en los que  $A$  se anula, esto es,  $\nu^2(p) = 1$ .

Además el Hessiano de  $C$  viene dado por  $(H^2 + \tau^2)^2$  el cual (excepto para las esferas mínimas en  $S^2 \times \mathbb{R}$ ) es siempre positivo. De esta manera todos los puntos críticos son no degenerados y  $\nu$  es una función de Morse sobre  $\bar{C}$  con lo cual tiene sólo dos puntos críticos  $p$  y  $q$  que son el máximo y el mínimo absolutos de dicha función. Usando de nuevo las ecuaciones de integrabilidad (3.3) es posible comprobar que la función  $\log \sqrt{(1+\nu)/(1-\nu)}$  es armónica con singularidades en  $p$  y  $q$ . Así existe un parámetro conforme global, que seguiremos llamando  $z$ , sobre la esfera tal que

$$\log \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} = \log |z|$$

con lo cual la función  $\nu$  se escribe, para cualquier esfera de curvatura media constante inmersa en cualquier espacio homogéneo con grupo de isometrías de dimensión 4, como

$$\nu(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad z \in \bar{C}$$

Además esta función  $\nu$  es suficiente para recuperar la inmersión, esto es, dada  $\nu : \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}$  por la fórmula anterior,  $H$  una constante real no negativa definimos las funciones  $A, p : \bar{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $u : \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}$  por (3.26). Entonces dichas funciones satisfacen las condiciones de integrabilidad (3.3) y, por tanto, existe una inmersión conforme  $\Phi : \bar{C} \rightarrow E(\kappa, \tau)$  con curvatura media constante  $H$ . ■

Sea  $\Phi : \bar{C} \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una esfera de curvatura media constante y  $z$  el parámetro conforme dado en el Lema 3.5. Consideramos entonces el nuevo parámetro conforme  $w = x + iy$  dado por  $e^w = z$ . Así la función  $\nu$

se transforma en  $v(x, y) = \tanh x$  y la métrica induce en  $e^{2u} |dw|^2$ , donde

$$e^{2u(x)} = \frac{16(H^2 + \tau^2) \cosh^2 x}{\left[ (\kappa - 4\tau^2) + 4(H^2 + \tau^2) \cosh^2 x \right]^2}.$$

Ahora, para obtener el área de las esferas de curvatura media constante basta con integrar la anterior función para  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in [0, T]$ , donde  $T$  debe ser  $2\pi$  puesto que, por el Teorema de Gauss–Bonnet,

$$4\pi = \int_{\bar{C}} K dA = T \int_{\mathbb{R}} e^{2u(x)} K dx = -T \int_{\mathbb{R}} u''(x) dx = 2T.$$

Así, el área de cualquier esfera  $S$  de curvatura media constante viene dada por:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{2u(x)} dx dy = 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{2u(x)} dx$$

y una computación directa nos permite obtener el siguiente resultado.

**Proposición 3.5.** *El área de una esfera  $S$  de curvatura media constante  $H$  inmersa en  $E(\kappa, \tau)$  viene dada por:*

$$A(S) = \begin{cases} \frac{8\pi}{4H^2 + \kappa} \left[ 1 + \frac{4(H^2 + \tau^2)}{\sqrt{4H^2 + \kappa}\sqrt{\kappa - 4\tau^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{\kappa - 4\tau^2}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \right) \right], \\ \frac{8\pi}{4H^2 + \kappa} \left[ 1 + \frac{4(H^2 + \tau^2)}{\sqrt{4H^2 + \kappa}\sqrt{4\tau^2 - \kappa}} \operatorname{arctan} \left( \frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \right) \right], \end{cases}$$

según sea  $\kappa - 4\tau^2$  positivo o negativo respectivamente.

*Observación 3.8.* La misma fórmula fue obtenida para esferas de curvatura media constante en el grupo de Heisenberg

con  $\kappa = 0$  y  $\tau = 1$  por Tomter [Tom93, Proposición 5] y en  $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$  por Pedrosa [Pedo4] cuando  $\kappa = 1$  y por Hsiang y Hsiang [HH89] cuando  $\kappa = -1$ . Es importante notar que en [Tom93, Pedo4] la curvatura media es la traza de la segunda forma fundamental mientras que aquí la curvatura media es la mitad de ella.

### 3.4 SUPERFICIES MÍNIMAS EN LAS ESFERAS DE BERGER.

Como hemos puesto de manifiesto en la Observación 3.3 y en el Teorema 3.1 el toro de Clifford  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 = |w|^2 = 1/2\}$  y la esfera  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im}(z) = 0\}$  son superficies mínimas en cualquier esfera de Berger  $S_b^3(\kappa, \tau)$ . Este hecho, además de resultar sorprendente, nos hace preguntarnos si éstas son las dos únicas superficies que cumplen dicha propiedad o bien existe una clase más amplia de superficies que la verifican.

En esta sección vamos a dar respuesta a dicha cuestión. Para ello, dada una superficie  $\Sigma \subseteq S^3$ , el siguiente lema trata de relacionar las curvaturas medias considerando en  $S^3$  la métrica estándar y cualquier métrica de Berger.

**Lema 3.6.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow S^3$  una inmersión de una superficie  $\Sigma$ . Entonces las curvaturas medias  $H$  y  $H^b$  de  $\Phi$  en la esfera redonda  $(S^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $S_b^3(\kappa, \tau)$  están relacionadas mediante la fórmula:*

$$H^b = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\kappa}{4\tau^2}) \nu_0^2}} \left[ H + \frac{(1 - \frac{\kappa}{4\tau^2}) \langle \nabla \nu_0, V \rangle}{2 [1 - (1 - \frac{\kappa}{4\tau^2}) \nu_0^2]} \right]$$

donde  $\nu_0 = \langle N, V \rangle$ .

*Demostración.* En primer lugar es fácil comprobar que si  $N$  y  $N^b$  son dos normales a  $\Phi$  en  $S^3$  y  $S^3_b$  respectivamente entonces están relacionados mediante la igualdad:

$$N^b = \frac{\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\kappa}{4\tau^2}\right)\nu_0^2}} \left[ N - \nu_0 \left(1 - \frac{\kappa}{4\tau^2}\right) V \right]$$

donde  $\nu_0 = \langle N, V \rangle$ .

Teniendo en cuenta la relación existente entre las conexiones  $\nabla$  de la esfera redonda y  $\bar{\nabla}$  de la esfera de Berger (cf. (2.4)<sub>[p.22]</sub>) y la relación entre los vectores normales deducimos que:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{4f} g(\bar{\nabla}_{e_i} N^b, e_j) &= \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle e_i, V \rangle \langle e_j, JN \rangle + \\ &\quad - \lambda_i \left[ \delta_{ij} + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle e_i, V \rangle \langle e_j, V \rangle \right] + \\ &\quad - \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) \langle e_j, V \rangle e_i(\nu_0), \end{aligned}$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal para  $\langle, \rangle$  que diagonaliza a  $A_N$ ,  $\lambda_i$  son las curvaturas principales y hemos llamado por comodidad

$$f = \frac{\sqrt{\kappa}}{2\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\kappa}{4\tau^2}\right)\nu_0^2}}$$

Así, puesto que  $-2H^b = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} g(\bar{\nabla}_{e_i} N^b, e_j)$ , mediante un cálculo directo obtenemos el resultado. ■

A la vista de dicho resultado, una superficie de  $S^3$  es mínima respecto de cualquier métrica de Berger (en particular respecto de la métrica usual de la 3-esfera) si, y sólo si,

$\langle \nabla v_0, V \rangle = 0$ . Es fácil ver que el toro de Clifford  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(0)$  (cf. Proposición 3.2) cumple dicha propiedad luego es, como ya sabíamos, mínima en cualquier esfera de Berger. Por otro lado la esfera  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im}(z) = 0\}$  también verifica dicha propiedad. Como vamos a ver a continuación no son las únicas superficies, sino que existe una familia 2-paramétrica de superficies que son mínimas en cualquier esfera de Berger.

**Teorema 3.3.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$  una inmersión de una superficie simplemente conexa. Supongamos dicha inmersión es mínima con respecto a cualquier métrica de Berger, en particular es mínima respecto a la métrica usual de la esfera. Entonces  $\Phi$  es congruente a una de las inmersiones  $\Phi_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$  dadas por*

$$\Phi_{a,b}(s, t) = \left( \cos(s)e^{iat}, \sin(s)e^{ibt} \right)$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  no simultáneamente nulas.

*Observación 3.9.*

- Para  $a = 0$  obtenemos la esfera mínima  $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \text{Im}(z) = 0\}$ .
- Las superficies  $\Phi_{a,b}$  son invariantes por el grupo 1-paramétrico de isometrías de  $U(2)$  dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{iat} & 0 \\ 0 & e^{ibt} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Para  $a, b \in \mathbb{Z}$  obtenemos los ejemplos compactos  $\tau_{a,b}$  construidos por Lawson [Law70, Sección 7, p. 350]. Conviene observar que (cf. [Law70, Teorema 3]):
  - A cada par de enteros positivos  $a, b$  primos relativos le corresponde una superficie compacta distinta de característica de Euler cero.
  - $\tau_{a,b}$  es una botella de Klein si, y sólo si,  $ab$  es un número par.

- $\tau_{1,1}$  es el toro de Clifford y es la única superficie de este tipo que es embebida. En efecto, salvo un movimiento de  $U(2)$ , tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \Phi_{1,1}(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{i(t+s)}, e^{i(t-s)} \right)$$

*Demostración.* Sea  $\Sigma$  una superficie mínima en cualquier esfera de Berger. En virtud del Lema 3.6 debe ser  $\langle \nabla \nu_0, V \rangle = 0$  donde recordemos que  $\nu_0 = \langle N, V \rangle$  con  $N$  un normal a  $\Sigma$  en la esfera redonda. Vamos a renombrar  $\nu_0 = \nu$  pues en este caso no hay posibilidad de confusión.

Ahora bien, sea  $z = x + iy$  un parámetro conforme sobre  $\Sigma$  con factor conforme asociado  $e^{2u}$ . Usando las ecuaciones de compatibilidad (3.3) para  $\kappa = 4$  y  $\tau = 1$  (caso que corresponde con el de la esfera redonda) tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{\bar{z}} &= 0, & \nu_z &= iA - 2e^{-2u}\bar{A}p \\ A_{\bar{z}} &= i\frac{e^{2u}}{2}\nu, & |A|^2 &= \frac{e^{2u}}{4}(1 - \nu^2) \end{aligned}$$

Puesto que la 2-diferencial  $\Theta = p(dz)^2$  es holomorfa podemos normalizarla por  $\lambda i$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La condición  $\langle \nabla \nu, V \rangle = 0$  se transforma entonces en

$$0 = \nu_z \bar{A} + \nu_{\bar{z}} A = -4\lambda e^{-2u} \operatorname{Im}(A^2)$$

Ahora bien, si  $\lambda = 0$  entonces  $\Sigma$  es una superficie mínima totalmente umbilical en  $S^3$ , lo que implica que debe ser una esfera totalmente geodésica, que se corresponde con el caso particular  $\alpha = 0$  (ver observación anterior).

Supongamos entonces que  $\lambda \neq 0$ . La última ecuación nos permite suponer que  $A$  es imaginario puro y, usando la ecuación de compatibilidad para el módulo de  $A$ , debe ser

$$A = i\frac{e^u}{2}\sqrt{1 - \nu^2}$$

En dicho caso de la ecuación para  $\nu_z$  tenemos

$$\nu_z = -\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2}(e^u + 2\lambda e^{-u})$$

de donde deducimos que  $\nu_y = 0$ , esto es,  $\nu = \nu(x)$ . Así, usando de nuevo la anterior ecuación debe ser también  $u = u(x)$ .

Es bien conocido que las superficies mínimas de la esfera redonda están controladas por la ecuación de sinh-Gordon. Puesto que en este caso hemos probado que el factor conforme puede escribirse en una sola variable tenemos que debe verificar la ecuación

$$u'' + (e^{2u} - 4\lambda^2 e^{-2u}) = 0, \quad (3.28)$$

cuya integral primera es

$$(u')^2 + (e^{2u} - 4\lambda^2 e^{-2u}) = E \quad (3.29)$$

La ecuación (3.28) ha sido estudiada profundamente en la literatura. Sus soluciones pueden escribirse en términos de funciones elípticas de Jacobi. En concreto en [Cas] puede encontrarse una descripción de todas ellas así como una integración explícita de las inmersiones mínimas como sigue:

$$\Psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left( \frac{\sqrt{e^{2u(x)} - b^2} e^{i(bF(x) + ay)}}{\sqrt{a^2 - e^{2u(x)}} e^{i(aG(x) + by)}} \right)$$

donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{P(e^{2u(t)})}}{e^{2u(t)} - b^2} dt, \quad G(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{P(e^{2u(t)})}}{a^2 - e^{2u(t)}} dt,$$

$$P(e^{2u(t)}) = (a^2 - e^{2u(t)})(e^{2u(t)} - b^2) - e^{2u(t)} u'(t)^2$$

y  $u(x)$  es una solución de (3.28) para  $\lambda^2 = a^2b^2/4$  y energía  $E = a^2 + b^2$ .

Ahora bien, de entre todas las soluciones de dicha ecuación las únicas que cumplen la condición  $\langle \nabla v, V \rangle = 0$  son precisamente  $\Phi_{a,b}$  lo que finaliza la demostración. ■



## CURVATURA DE GAUSS CONSTANTE

# 4

*¡Yo para que quiero un programa  
de ordenador que lo único que  
integra es lo que yo sé hacer a mano!*

### 4.1 SUPERFICIES DE HOPF

Nuestro principal objetivo en este capítulo es estudiar las superficies compactas de curvatura de Gauss constante inmersas en un espacio homogéneo riemanniano con grupo de isometrías de dimensión 4,  $E(\kappa, \tau)$ .

Puesto que existe una submersión riemanniana  $\Pi : E(\kappa, \tau) \rightarrow M^2(\kappa)$ , podemos construir superficies llanas en  $E(\kappa, \tau)$  de la siguiente manera: dada una curva regular  $\gamma$  en  $M^2(\epsilon)$ ,  $\Pi^{-1}(\gamma)$  es una superficie en  $E(\kappa, \tau)$  que tiene al campo vertical  $\xi$  como vector tangente, i.e.,  $\nu = 0$ . Puesto que  $\xi$  es un campo de Killing en  $E(\kappa, \tau)$  se sigue que  $\xi$  restringido a la superficie  $\Pi^{-1}(\gamma)$  es un campo paralelo y, por tanto, la superficie es llana.

**Definición 4.1.** Llamaremos a  $\Pi^{-1}(\gamma)$  una *superficie de Hopf*. Si  $\gamma$  es una curva cerrada, entonces  $\Pi^{-1}(\gamma)$  es un cilindro llano y, más aún, si  $\Pi$  es una submersión por círculos, entonces  $\Pi^{-1}(\gamma)$  es un toro llano, que llamaremos *toro de Hopf*.

## 4.2 SUPERFICIES COMPACTAS LLANAS

Comenzamos clasificando las superficies compactas llanas. Para ello sera crucial la siguiente fórmula integral para superficies compactas inmersas en  $E(\kappa, \tau)$ .

**Proposición 4.1.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie compacta  $\Sigma$ . Entonces*

$$\int_{\Sigma} K(1 - 3\nu^2) dA + 2(\kappa - 4\tau^2) \int_{\Sigma} \nu^4 dA = 0. \quad (4.1)$$

*Demostración.* Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie orientable y compacta  $\Sigma$ ,  $N$  un normal a  $\Sigma$  y  $X$  la componente tangente a  $\Sigma$  del campo de Killing  $\xi$ , i.e.,

$$X = \xi - \nu N$$

Entonces, puesto que  $\nabla_u \xi = \tau(u \wedge \xi)$  y para cualquier vector tangente  $u$  sobre  $\Sigma$  obtenemos:

$$\nabla_u X = \tau\nu(u \wedge N) + \nu A u, \quad (4.2)$$

donde  $\nabla$  representa la conexión sobre  $\Sigma$ . De la anterior ecuación se tiene que

$$\operatorname{div} X = 2\nu H, \quad d(X^\sharp)(u, w) = 2\tau\nu \langle u \wedge N, w \rangle, \quad (4.3)$$

donde  $\operatorname{div}$  es el operador divergencia y  $X^\sharp$  es la 1-forma asociada a  $X$ , i.e.,  $X^\sharp(u) = \langle X, u \rangle$ .

La fórmula de Bochner nos asegura que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla_X X) &= K|X|^2 + \langle \nabla(\operatorname{div} X), X \rangle + |\nabla X|^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^2 d(X^\sharp)(\nabla_{e_i} X, e_i), \end{aligned}$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal en  $T\Sigma$ . Usando (4.2) y (4.3) esta ecuación se convierte en

$$\operatorname{div}(\nabla_X X) = K(1 - \nu^2) + \langle \nabla(\operatorname{div} X), X \rangle + \nu^2 |\sigma|^2 - 2\tau^2 \nu^2.$$

De nuevo usando (4.3) deducimos

$$\operatorname{div}(2\nu HX) = \operatorname{div}(\operatorname{div} X) = \langle \nabla(\operatorname{div} X), X \rangle + (\operatorname{div} X)^2.$$

Las dos últimas ecuaciones junto a (4.3) producen

$$\operatorname{div}(\nabla_X X - 2\nu HX) = K(1 - \nu^2) - 4H^2 \nu^2 + \nu^2 |\sigma|^2 - 2\tau^2 \nu^2.$$

Usando la ecuación de Gauss (3.1)<sub>[p.34]</sub> en la fórmula anterior, tenemos que

$$\operatorname{div}(\nabla_X X - 2\nu HX) = K(1 - 3\nu^2) + 2(\kappa - 4\tau^2)\nu^4.$$

En último lugar, aplicando el teorema de la divergencia en la última ecuación obtenemos (4.1) para cualquier superficie compacta y orientable de  $E(\kappa, \tau)$ .

Finalmente, aunque la función  $\nu$  sólo está bien definida para superficies orientables, es claro que  $\nu^2$  está bien definida siempre. Así la fórmula (4.1) es cierta para cualquier superficie compacta de  $E(\kappa, \tau)$ . ■

*Observación 4.1.* La fórmula (4.1) es cierta también para superficies compactas en otras 3-variedades. De hecho, supongamos que  $\Sigma$  es una superficie compacta de  $M^2 \times \mathbb{R}$  o bien  $M^2 \times S^1$ , donde  $M^2$  es cualquier superficie orientable. En este caso  $\Pi : M^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M^2$  es la submersión trivial y, por tanto,  $\xi = (0, 1)$  es un campo paralelo. Siguiendo la demostración de la Proposición 4.1, si  $X$  es la parte tangente de  $\xi$  en  $\Sigma$ , i.e.,  $X = \xi - \nu N$ , entonces  $\operatorname{div} X = 2\nu H$ ,  $dX^\sharp = 0$  y  $\operatorname{div}(\nabla_X X - 2\nu HX) = K(1 - 3\nu^2) + 2\bar{K}\nu^4$ , donde  $\bar{K}$  es la

curvatura de Gauss de la superficie  $M^2$ . El teorema de la divergencia nos asegura ahora que:

$$\int_{\Sigma} (\kappa(1 - 3\nu^2) + 2\bar{\kappa}\nu^4) dA = 0.$$

Esta fórmula nos permitirá (cf. Observación 4.2) obtener un resultado para superficies compactas llanas de  $M^2 \times \mathbb{R}$  siguiendo el mismo espíritu que en el Teorema 4.1.

**Teorema 4.1.** *Las únicas superficies compactas llanas de  $E(\kappa, \tau)$  son los toros de Hopf. En particular:*

- En  $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,  $\kappa \neq 0$ , el grupo de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  y  $\tilde{\text{Sl}}_2(\mathbb{R})$ , no existen superficies compactas llanas.
- En  $M^2(\kappa) \times S^1$ ,  $\kappa \neq 0$  las únicas superficies compactas llanas son los productos  $\gamma \times S^1$ , donde  $\gamma$  es cualquier curva cerrada de  $M^2(\kappa)$ .
- En las esferas de Berger,  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  y sus cocientes  $L_n$  y  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_n$ , las superficies compactas llanas son los toros de Hopf (cf. Proposiciones 3.2<sub>[p.39]</sub> y 3.3<sub>[p.40]</sub>).

*Observación 4.2.* Este resultado para el caso de las esferas de Berger contrasta con el caso de la esfera redonda donde, además de los toros de Hopf, existen más toros llanos (ver [Wei91]).

*Demostración.* Si  $\kappa = 0$ , (4.1) se transforma en

$$(\kappa - 4\tau^2) \int_{\Sigma} \nu^4 dA = 0,$$

lo que implica que la función ángulo  $\nu = 0$  sobre  $\Sigma$ . Esto implica que el campo de Killing  $\xi$  es tangente a  $\Sigma$ . Así, por ser  $\xi$  el campo vertical a la fibración  $\Pi : E(\kappa, \tau) \rightarrow M^2(\kappa)$  y  $\Sigma$  compacta tenemos que  $\Pi(\Sigma)$  es una curva  $\gamma$  cerrada en  $M^2(\kappa)$  y, por tanto,  $\Pi^{-1}(\gamma) \supset \Sigma$ , lo que prueba que  $\Sigma$  es el toro de Hopf  $\Pi^{-1}(\gamma)$ . ■

Teniendo en cuenta la Observación 4.1 y siguiendo la demostración del Teorema 4.1 es posible probar el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.** *Sea  $M^2$  una superficie orientable con curvatura de Gauss  $\bar{K} > 0$  o  $\bar{K} < 0$ . Entonces:*

1. *No existen superficies compactas llanas en  $M^2 \times \mathbb{R}$ .*
2. *Las únicas superficies compactas llanas de  $M^2 \times S^1$  son los productos  $\gamma \times S^1$  donde  $\gamma$  es una curva cerrada en  $M^2$ .*

**Corolario 4.1.** *Las únicas superficies compactas en  $E(\kappa, \tau)$  con  $\nu$  constante y  $\nu^2 < 1$  son los toros de Hopf, para los cuales  $\nu = 0$ .*

*Observación 4.3.*

1. Este resultado no es cierto para superficies no compactas. De hecho, Leite [Lei07] construyó para cada  $K_0 \in ]-1, 0[$  un embebimiento de curvatura media constante del plano hiperbólico con su métrica estándar de curvatura constante negativa  $K_0$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , con función ángulo constante  $\nu = -K_0$ .
2. Para  $\nu^2 = 1$  es bien conocido, incluso sin la hipótesis de compacidad, que  $\tau = 0$  y que la superficie es el embebimiento totalmente geodésico de  $M^2(\kappa)$  como  $M^2(\kappa) \times \{t_0\} \subseteq M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Puesto que  $\nu^2 < 1$ , la componente tangente del campo de Killing  $\xi$  es un campo de vectores sobre  $\Sigma$  sin ceros. Así, la característica de Euler-Poincaré  $\chi(\Sigma) = 0$  y, por tanto,  $\int_{\Sigma} K \, dA = 0$ . Ahora bien, puesto que  $\nu$  es constante, la fórmula (4.1) se transforma en

$$(\kappa - 4\tau^2)\nu^4 \text{Área}(\Sigma) = 0,$$

y, como conclusión,  $\nu = 0$ . Para finalizar usamos el mismo argumento que en la demostración del Teorema 4.1. ■

## 4.3 RESULTADOS DE NO EXISTENCIA

**Teorema 4.3.**

- a) No existen superficies compactas en  $E(\kappa, \tau)$  con curvatura de Gauss  $K < \min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$ .
- b) Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie compacta  $\Sigma$  con curvatura de Gauss  $K$ .
- (1) Si  $\kappa - 4\tau^2 > 0$  y  $0 \leq K < \max\{\kappa - 4\tau^2, \tau^2\}$  entonces  $K = 0$  y  $\Sigma$  es un toro de Hopf.
  - (2) Si  $\kappa - 4\tau^2 < K \leq 0$  entonces  $K = 0$  y  $\Sigma$  es un toro de Hopf.
  - (3) Si  $\kappa - 4\tau^2 < 0 \leq K < \kappa - 3\tau^2$  ( $\kappa$  debe ser positivo) entonces  $K = 0$  y  $\Sigma$  es un toro de Hopf.

*Demostración.* Considerando el recubridor orientable de dos hojas si fuese necesario, podemos asumir que  $\Sigma$  es orientable. Supongamos entonces que  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  es una inmersión de una superficie orientable y compacta,  $N$  es un campo normal a  $\Sigma$  y  $X$  es la parte tangente a  $\Sigma$  del campo de Killing  $\xi$ , i.e.,  $X = \xi - \nu N$ .

En primer lugar probaremos (a). Supongamos entonces que  $\Sigma$  tiene curvatura de Gauss  $K < \min\{0, \kappa - 4\tau^2\}$ . De  $\nabla_u \xi = \tau(u \wedge \xi)$  deducimos que:

$$\tau(u \wedge X) = \sigma(u, X) + \langle \nabla \nu, u \rangle N,$$

y, por tanto,

$$\nabla \nu = \tau(X \wedge N) - AX. \quad (4.4)$$

Es claro que los puntos  $p$  con  $\nu^2(p) = 1$ , esto es,  $X_p = 0$ , son puntos críticos de  $\nu$ . Supongamos que  $p$  es un punto crítico

de  $\nu$  con  $\nu^2 < 1$ . Como en este caso  $X_p \neq 0$ , la ecuación (4.4) nos asegura que  $\Lambda X_p = \tau(X_p \wedge N_p)$  y así  $\det A(p) = -\tau^2$ .

La ecuación de Gauss (3.1)<sub>[p.34]</sub> implica que  $K(p) = (\kappa - 4\tau^2)\nu^2(p)$ . Puesto que  $0 \leq \nu^2(p) \leq 1$  la hipótesis hecha sobre la curvatura de Gauss afirma que tal punto crítico  $p$  de  $\nu$  no puede existir. Así todos los puntos críticos de  $\nu$  con aquellos con  $\nu^2(p) = 1$ .

De (4.2) y (4.4) no es difícil comprobar que el hessiano de  $\nu$  en un punto crítico  $p$ , donde  $\nu^2(p) = 1$  y  $X_p = 0$ , viene dado por:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \nu)(u, w) = & -\nu(p) \langle A^2 u, w \rangle - \tau^2 \nu(p) \langle u \wedge N_p, w \wedge N_p \rangle \\ & - \tau \nu(p) \langle \Lambda u \wedge w + \Lambda w \wedge u, N_p \rangle, \end{aligned}$$

donde  $v, w$  son vectores tangentes sobre  $\Sigma$  en  $p$ . Así, si  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de  $T_p \Sigma$  con  $\Lambda e_j = \lambda_j e_j$ ,  $j = 1, 2$ , el determinante del hessiano de  $\nu$  en  $p$  es

$$\det(\nabla^2 \nu)(p) = (\lambda_1 \lambda_2 + \tau^2)^2 = (K(p) - (\kappa - 4\tau^2))^2 > 0.$$

Lo que significa que  $\nu$  es una función de Morse sobre  $\Sigma$  que sólo tiene máximos y mínimos absolutos como puntos críticos. La teoría elemental de Morse nos asegura entonces que  $\Sigma$  debe de ser una esfera. Puesto que  $K$  es negativa esto contradice el teorema de Gauss-Bonnet lo que prueba (a).

Vamos a ver ahora la prueba de (b).

Supongamos en primer lugar que o bien  $\kappa - 4\tau^2 < K \leq 0$  o  $0 \leq K < \kappa - 4\tau^2$ .

Sea  $p$  un cero del campo  $X$  definido por  $X = \xi - \nu N$ . Entonces, siguiendo [Mil65, Capítulo 6], si  $(\nabla X)_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$  denota la derivada de  $X$  en el punto  $p$ , entonces  $p$  es un cero no degenerado de  $X$  si  $\det(\nabla X)_p \neq 0$ .

De (4.2), si  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de  $T_p\Sigma$ , entonces

$$\langle \nabla_{e_i} X, e_j \rangle = \nu(p) \langle Ae_i, e_j \rangle - \tau\nu(p) \langle e_i \wedge e_j, N(p) \rangle,$$

y, por tanto, teniendo en cuenta la ecuación de Gauss (3.1)<sup>[p.34]</sup>,  $\det(\nabla X)_p = \det A(p) + \tau^2 = K(p) - (\kappa - 4\tau^2)$ . Usando la hipótesis hecha para la curvatura de Gauss, esto prueba que tal cero  $p$  de  $X$  es no degenerado y por tanto aislado. Como  $\Sigma$  es compacta,  $X$  tiene un número finito de ceros.

Puesto que el índice de  $X$  en cualquier cero no degenerado es 1 (respectivamente  $-1$ ) si  $\det(\nabla X)_p > 0$  (respectivamente  $\det(\nabla X)_p < 0$ ), tenemos que si  $K > \kappa - 4\tau^2$  todos los ceros de  $X$  (si existen) tienen índice 1, y entonces el teorema de Poincare-Hopf afirma que la característica de Euler-Poincare  $\chi(\Sigma)$  es 2 si  $X$  tiene ceros o  $\chi(\Sigma) = 0$  si  $X$  no tiene ningún cero. Puesto que en este caso  $K \leq 0$ , el teorema de Gauss-Bonnet afirma que debe ser  $K = 0$  y el Teorema 4.1 prueba que  $\Sigma$  es un toro de Hopf. Esto finaliza (2).

Si  $K < \kappa - 4\tau^2$ , entonces todos los ceros de  $X$  (si existen) tienen índice  $-1$ , y como consecuencia el teorema de Poincare-Hopf afirma que  $\chi(\Sigma)$  es negativa si  $X$  tiene ceros o  $\chi(\Sigma) = 0$  si  $X$  no tiene ceros. Puesto que en este caso  $K \geq 0$ , el teorema de Gauss-Bonnet nos asegura de nuevo que  $K = 0$  y así  $\Sigma$  es un toro de Hopf gracias al Teorema 4.1.

Supongamos ahora que  $\kappa - 4\tau^2 > 0$  y  $0 \leq K < \tau^2$ .

La ecuación de Gauss de  $\Phi$  afirma que

$$\tau^2 > K = \det A + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \geq \det A + \tau^2.$$

Así  $\det A < 0$  sobre  $\Sigma$  y por tanto si  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  son las curvaturas principales de  $\Sigma$  asociadas a  $N$ , entonces  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  y así el fibrado tangente  $T\Sigma$  es la suma directa de dos sub-fibrados de rango 1 sobre  $\Sigma$ ,  $T\Sigma = D_1 \oplus D_2$  definidos por  $D_j(p) = \{v \in T_p\Sigma : Av = \lambda_j(p)v\}$ ,  $j = 1, 2$ . Puesto que la

esfera no admite campos de vectores sin ceros ni recubridores de dos hojas, tal descomposición no es posible si  $\Sigma$  es una esfera. Así,  $\chi(\Sigma) \leq 0$ . Puesto que  $K \geq 0$ , el teorema de Gauss-Bonnet nos dice que  $\Sigma$  es llana y el Teorema 4.1 que  $\Sigma$  debe de ser un toro de Hopf. Esto prueba (1).

Finalmente supongamos que  $\kappa - 4\tau^2 < 0 \leq K < \kappa - 3\tau^2$ . En este caso, puesto que  $v^2 \leq 1$ , tenemos

$$\kappa - 3\tau^2 > K = \det A + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)v^2 \geq \det A + \kappa - 3\tau^2.$$

Así  $\det A < 0$  sobre  $\Sigma$  y el anterior razonamiento prueba de nuevo que  $K = 0$  y  $\Sigma$  es un toro de Hopf. Esto prueba (3). ■

**Corolario 4.2.** Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una superficie compacta  $\Sigma$  con curvatura de Gauss constante  $K$ .

1. Si  $\kappa - 4\tau^2 > 0$  y  $K \in ]-\infty, \max\{\kappa - 4\tau^2, \tau^2\}[$ , entonces  $K = 0$  y  $\Sigma$  es un toro de Hopf.
2. Si  $\kappa - 4\tau^2 < 0 < \kappa - 3\tau^2$  y  $K \in ]-\infty, \kappa - 3\tau^2[$ , entonces o bien  $K = 0$  y  $\Sigma$  es un toro de Hopf o bien  $K = \kappa - 4\tau^2$ .
3. Si  $\kappa - 4\tau^2 < 0$  y  $K \in ]-\infty, 0]$ , entonces o bien  $K = 0$  y  $\Sigma$  es un toro de Hopf o bien  $K = \kappa - 4\tau^2$ .

*Observación 4.4.* Cuando  $\tau = 0$ , este corolario fue probado en [AEGo7a, AEGo7b]. De hecho, los autores clasifican las superficies completas de curvatura de Gauss constante de  $M^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ ,  $\kappa \neq 0$ , excepto para ciertos valores de la curvatura  $K$ .



Parte III

SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA  
PARALELA



## DIFERENCIALES HOLOMORFAS

# 5

*Si tú tienes esperanza,  
la tenemos los dos.*

### 5.1 DEFINICIÓN Y ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión de una superficie orientable  $\Sigma$ . Si  $T^\perp \Sigma$  representa el fibrado normal a  $\Phi$ , entonces podemos descomponer ortogonalmente

$$\Phi^*T(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)) = T\Sigma \oplus T^\perp \Sigma.$$

Representaremos también por  $\bar{\nabla}$  a la conexión sobre  $\Phi^*T(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon))$  inducida por la conexión de Levi-Civita de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  y sea  $\bar{\nabla} = \nabla + \nabla^\perp$  la correspondiente descomposición. Si  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  es una referencia local ortonormal orientada sobre  $\Phi^*T(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon))$  de manera que  $\{e_1, e_2\}$  es una referencia orientada sobre  $T\Sigma$ , entonces definimos la *curvatura normal*  $K^\perp$  de la inmersión  $\Phi$  por

$$K^\perp = R^\perp(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

donde  $R^\perp$  es el tensor de curvatura de la conexión normal  $\nabla^\perp$ . También definimos la *curvatura normal extrínseca*  $\bar{K}^\perp$  como la función sobre  $\Sigma$  dada por

$$\bar{K}^\perp = \bar{R}(e_1, e_2, e_3, e_4),$$

donde  $\bar{R}$  es el tensor de curvatura asociado a  $\bar{\nabla}$ .

**Definición 5.1.** Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión. Diremos que  $\Phi$  tiene *vector curvatura media paralelo no nulo* o también que  $\Phi$  es una *inmersión con curvatura media paralela*, en adelante escribiremos simplemente que  $\Phi$  es una inmersión PMC<sup>1</sup>, si  $\nabla^\perp H = 0$  y  $H$  es no nulo. En dicho caso,  $|H|$  es una constante positiva.

Sea  $\Phi = (\phi, \psi) : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión PMC de una superficie orientable  $\Sigma$ . Las *funciones de Kähler* sobre  $\Sigma$  asociadas a cada una de las estructuras complejas  $J_1$  y  $J_2$ , que denotaremos por  $C_1, C_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , se definen como

$$\Phi^* \omega_j = C_j \omega_\Sigma, \quad j = 1, 2,$$

donde  $\omega_\Sigma$  es la 2-forma de área de  $\Sigma$ . Es inmediato que  $C_j^2 \leq 1$  y los puntos donde  $C_j^2 = 1$  son los puntos complejos de  $\Phi$  con respecto a la estructura compleja  $J_j$ ,  $j = 1, 2$ . Además el conjunto  $\{p \in \Sigma : C_j^2(p) = 1\}$ ,  $j = 1, 2$ , tiene interior vacío puesto que en caso contrario su interior es una superficie compleja no vacía y por tanto es mínima, lo cual contradice que  $|H|$  sea una constante positiva (ver definición 5.1). Así

$$\Sigma_0^j = \{p \in \Sigma : C_j^2(p) < 1\} \text{ es un abierto denso sobre } \Sigma, \quad j = 1, 2. \quad (5.1)$$

Es interesante observar que  $C_j^2$  está bien definido incluso si la superficie  $\Sigma$  no es orientable.

Es fácil comprobar que el jacobiano de  $\phi$  y  $\psi$  viene dado por:

$$\text{Jac}(\phi) = \frac{C_1 + C_2}{2}, \quad \text{Jac}(\psi) = \frac{C_1 - C_2}{2}, \quad (5.2)$$

<sup>1</sup> de las siglas en inglés *Parallel Mean Curvature*

y que la *curvatura seccional extrínseca*, definida por  $\bar{K} = \bar{R}(e_1, e_2, e_2, e_1)$  siendo  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal sobre  $T\Sigma$ , y la curvatura normal extrínseca vienen dadas, en términos de las funciones de Kähler, por:

$$\bar{K} = \epsilon \frac{C_1^2 + C_2^2}{2}, \quad \bar{K}^\perp = \epsilon \frac{C_1^2 - C_2^2}{2}. \quad (5.3)$$

Consideremos sobre  $\Sigma$  un parámetro conforme  $z = x + iy$  cuyo factor conforme asociado sea  $e^{2u}$ . Así tenemos que

$$\langle \Phi_z, \Phi_z \rangle = \langle \phi_z, \phi_z \rangle + \langle \psi_z, \psi_z \rangle = 0, \quad |\Phi_z|^2 = \frac{e^{2u}}{2}.$$

Podemos definir otro vector normal paralelo  $\tilde{H}$  como el único que verifica  $|\tilde{H}| = |H|$  y  $\{\tilde{H}, H\}$  define la misma orientación en el fibrado normal que  $\{e_3, e_4\}$ . Puesto que  $H$  es paralelo,  $K^\perp = 0$  y por tanto la ecuación de Ricci de  $\Phi$  viene dada por:

$$|H|^2 \bar{K}^\perp = \langle [A_H, A_{\tilde{H}}]e_1, e_2 \rangle,$$

siendo  $A_\xi$  el endomorfismo de Weingarten asociado a un vector normal  $\xi$ . Con la orientación escogida en  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ ,  $\{\Phi_x, \Phi_y, \tilde{H}, H\}$  es una referencia orientada en el fibrado tangente. Denotemos por

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}|H|} (H - i\tilde{H}),$$

luego se cumple que  $|\xi|^2 = 1$ ,  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ ,  $\nabla^\perp \xi = 0$  y  $\{\xi, \bar{\xi}\}$  es una *referencia global* del fibrado normal complexificado. Además, es claro que,

$$J_1 \Phi_z = iC_1 \Phi_z + \gamma_1 \xi + \delta_1 \bar{\xi}$$

con  $\gamma_1 = \delta_1 = 0$  sobre  $\Sigma \setminus \Sigma_0^1$  (cf. (5.1)). Ahora bien, sobre  $\Sigma_0^1$  podemos definir una referencia local ortonormal  $\{e_3, e_4\}$  del fibrado normal mediante la igualdad:

$$\begin{aligned} J_1 \Phi_x &= C_1 \Phi_y + e^u \sqrt{1 - C_1^2} e_4, \\ J_1 \Phi_y &= -C_1 \Phi_x + e^u \sqrt{1 - C_1^2} e_3, \end{aligned}$$

que define la misma orientación que  $\{\tilde{H}, H\}$  puesto que  $J_1$  respeta la orientación elegida y, por tanto,  $e_4 - ie_3 = e^{i\theta}(H - i\tilde{H})/\sqrt{|H|}$  para cierta función  $\theta$ . De esta manera las anteriores ecuaciones se transforman en

$$J_1 \Phi_z = iC_1 \Phi_z + \frac{e^u \sqrt{1 - C_1^2}}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \xi.$$

Así  $\delta_1 = 0$  sobre  $\Sigma_0^1$  también y, por tanto,  $\delta_1 = 0$  sobre  $\Sigma$ . Un argumento similar para la otra estructura compleja nos permite obtener

$$\begin{aligned} J_1 \Phi_z &= iC_1 \Phi_z + \gamma_1 \xi, & J_1 \xi &= -2e^{-2u} \bar{\gamma}_1 \Phi_z - iC_1 \xi, \\ J_2 \Phi_z &= iC_2 \Phi_z + \gamma_2 \bar{\xi}, & J_2 \xi &= -2e^{-2u} \gamma_2 \Phi_z + iC_2 \xi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

para ciertas funciones complejas  $\gamma_j$ ,  $j = 1, 2$  las cuales satisfacen  $|\gamma_j|^2 = e^{2u}(1 - C_j^2)/2$ .

Si  $\hat{\Phi} := (\phi, -\psi)$ , entonces  $\{\Phi, \hat{\Phi}\}$  es una referencia ortogonal a lo largo de  $\Phi$  del fibrado normal de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  en  $\mathbb{R}^6$  si  $\epsilon = 1$  y en  $\mathbb{R}_2^6$  si  $\epsilon = -1$ , con  $|\Phi|^2 = |\hat{\Phi}|^2 = 2\epsilon$ . Además, de (5.4), se sigue que

$$\hat{\Phi}_z = -J_1 J_2 \Phi_z = C_1 C_2 \Phi_z + 2e^{-2u} \gamma_1 \gamma_2 \Phi_z - iC_2 \gamma_1 \xi - iC_1 \gamma_2 \bar{\xi}.$$

Usando la anterior información es posible deducir las ecuaciones de Frenet de la inmersión PMC  $\Phi$ :

$$\begin{aligned}\Phi_{zz} &= 2u_z \Phi_z + f_1 \xi + f_2 \bar{\xi} - \epsilon \frac{\gamma_1 \gamma_2}{2} \hat{\Phi}, \\ \Phi_{z\bar{z}} &= \frac{|H|e^{2u}}{2\sqrt{2}} \xi + \frac{|H|e^{2u}}{2\sqrt{2}} \bar{\xi} - \epsilon \frac{e^{2u}}{4} \Phi - \epsilon \frac{e^{2u}}{4} C_1 C_2 \hat{\Phi}, \\ \xi_z &= -\frac{|H|}{\sqrt{2}} \Phi_z - 2e^{-2u} f_2 \Phi_{\bar{z}} + \epsilon \frac{iC_1 \gamma_2}{2} \hat{\Phi}, \\ \bar{\xi}_z &= -\frac{|H|}{\sqrt{2}} \Phi_{\bar{z}} - 2e^{-2u} f_1 \Phi_z + \epsilon \frac{iC_2 \gamma_1}{2} \hat{\Phi},\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde  $f_j$ ,  $j = 1, 2$ , son las funciones complejas dadas por

$$f_1 = \langle \Phi_{zz}, \bar{\xi} \rangle, \quad f_2 = \langle \Phi_{zz}, \xi \rangle.$$

**Definición 5.2.** Llamaremos los *datos fundamentales* de la inmersión  $\Phi$  a la upla  $(u, C_j, \gamma_j, f_j : j = 1, 2)$ .

Esta nomenclatura quedará clara a la luz de la Proposición 5.1. Estas funciones satisfacen ciertas ecuaciones que vamos a deducir a continuación.

Derivando con respecto a  $z$  y  $\bar{z}$  en (5.4) y teniendo en cuenta las anteriores ecuaciones obtenemos fácilmente que

$$(C_j)_z = 2ie^{-2u} f_j \bar{\gamma}_j - i \frac{|H|}{\sqrt{2}} \gamma_j, \quad (\gamma_j)_{\bar{z}} = -\frac{i|H|C_j e^{2u}}{\sqrt{2}}.$$

Ahora, de la componente en  $\xi$ , de la ecuación  $\Phi_{z\bar{z}\bar{z}} = \Phi_{z\bar{z}z}$  obtenemos

$$(f_j)_{\bar{z}} = i\epsilon \frac{e^{2u} C_j \gamma_j}{4}, \quad j = 1, 2.$$

De forma recíproca tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 5.1.** Sea  $\Sigma$  una superficie de Riemann simplemente conexa,  $\lambda$  una constante positiva,  $u, C_j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  con  $C_j^2 \leq 1$  y  $\gamma_j, f_j : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ , funciones diferenciables verificando:

$$\begin{aligned} (C_j)_z &= 2ie^{-2u}f_j\bar{\gamma}_j - i\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\gamma_j, & (f_j)_{\bar{z}} &= \frac{ie^{2u}}{4}C_j\gamma_j, \\ (\gamma_j)_{\bar{z}} &= -\frac{i\lambda C_j e^{2u}}{\sqrt{2}}, & |\gamma_j|^2 &= \frac{e^{2u}(1 - C_j^2)}{2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Entonces existe, salvo congruencias, una única inmersión PMC  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  con  $|H| = \lambda$  cuyos datos fundamentales son  $(u, C_j, \gamma_j, f_j : j = 1, 2)$ .

*Demostración.* Puesto que  $\{p \in \Sigma : \gamma_j(p) \neq 0\}$  es un abierto denso de  $\Sigma$  gracias a las ecuaciones (5.6), podemos trabajar en aquellos puntos donde  $\gamma_j$  no es cero,  $j = 1, 2$ . La existencia de una inmersión  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  está garantizada siempre que exista una solución a (5.5) lo que equivale a que se verifiquen las ecuaciones de integrabilidad de dicho sistema  $\Phi_{zz\bar{z}} = \Phi_{z\bar{z}z}$  y  $\xi_{z\bar{z}} = \xi_{\bar{z}z}$ . Ahora bien, mediante un cálculo directo dichas condiciones pueden escribirse como

$$4u_{z\bar{z}} + e^{2u}(|H|^2 + \epsilon \frac{C_1^2 + C_2^2}{2}) - 4e^{-2u}(|f_1|^2 + |f_2|^2) = 0, \quad (\text{Gauss})$$

$$\epsilon e^{2u}(|\gamma_2|^2 C_1^2 - |\gamma_1|^2 C_2^2) - 4(|f_1|^2 - |f_2|^2) = 0, \quad (\text{Ricci})$$

$$\begin{aligned} (\gamma_1\gamma_2)_{\bar{z}} + i(\bar{\gamma}_1 C_2 f_1 + \bar{\gamma}_2 C_1 f_2) &= \\ = \frac{e^{2u}}{2} \left( (C_1 C_2)_z + \frac{i|H|}{\sqrt{2}}(\gamma_2 C_1 + \gamma_1 C_2) \right), & \quad (\text{I1}) \end{aligned}$$

$$(\gamma_1\gamma_2\bar{f}_1 - \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 f_2) = \frac{ie^{2u}}{2} \left( (\bar{\gamma}_1 C_2)_z + (\gamma_2 C_1)_{\bar{z}} \right), \quad (\text{I2})$$

$$(\gamma_j)_z = 2u_z \gamma_j - 2iC_j f_j, \quad j = 1, 2. \quad (\text{I3})$$

a las que hay que añadir además las ecuaciones (5.6). Basta comprobar, por tanto, que (5.6) son suficientes. En primer lugar (I1) e (I2) son consecuencia inmediata de (5.6). Ahora bien derivando respecto de  $z$  en la ecuación para el módulo de  $\gamma_j$  y usando únicamente (5.6) obtenemos

$$|\gamma_j|^2 (\gamma_j)_z = |\gamma_j|^2 (2u_z \gamma_j - 2iC_j f_j)$$

de donde podemos simplificar  $|\gamma_j|$ , como hemos puesto de manifiesto al inicio de la demostración, y deducir (I3). Ahora derivando respecto de  $\bar{z}$  en la ecuación que acabamos de deducir y usando nuevamente (5.6) obtenemos las ecuaciones

$$\gamma_j \left( 2u_{z\bar{z}} + \frac{e^{2u}}{2} (H^2 + \epsilon C_j^2) - 4e^{-2u} |f_j|^2 \right) = 0, \quad j = 1, 2,$$

de donde, tras simplificar  $\gamma_j$ , sumando para  $j = 1, 2$  deducimos la ecuación de Gauss y restando obtenemos la ecuación de Ricci sin más que tener en cuenta la ecuación para el módulo de  $\gamma_j$ . ■

## 5.2 DIFERENCIALES HOLOMORFAS

**Definición 5.3.** Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión PMC de una superficie orientable  $\Sigma$ . Definimos dos diferenciales de Hopf como:

$$\begin{aligned} \Theta_1(z) &= \left( 2\langle \sigma(\partial_z, \partial_z), H + i\tilde{H} \rangle + \frac{\epsilon}{4|H|^2} \langle J_1 \Phi_z, H + i\tilde{H} \rangle^2 \right) (dz)^2 \\ \Theta_2(z) &= \left( 2\langle \sigma(\partial_z, \partial_z), H - i\tilde{H} \rangle + \frac{\epsilon}{4|H|^2} \langle J_2 \Phi_z, H - i\tilde{H} \rangle^2 \right) (dz)^2, \end{aligned}$$

donde  $\sigma$  representa la segunda forma fundamental de  $\Phi$  y  $z$  es un parámetro conforme de  $\Sigma$ .

Es claro que  $\Theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , están bien definidas, i.e., son invariantes por un cambio conforme de parámetro. Además ambas 2-diferenciales son holomorfas como asegura el siguiente resultado

**Proposición 5.2.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión PMC de una superficie orientable  $\Sigma$ . Entonces  $\Theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , son holomorfas.*

*Demostración.* Usando los datos fundamentales de la inmersión  $\Phi$ , podemos escribir las diferenciales de Hopf  $\Theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , como

$$\Theta_j = \left( 2\sqrt{2}|H|f_j + \frac{\epsilon}{2}\gamma_j^2 \right) (dz)^2, \quad j = 1, 2. \quad (5.7)$$

Un cálculo directo teniendo en cuenta (5.6) nos permite obtener  $\left( 4\sqrt{2}|H|f_j + \epsilon\gamma_j^2 \right)_{\bar{z}} = 0$ , lo que concluye la demostración. ■

*Observación 5.1.* De (5.4) se tiene que  $\langle J_1 \Phi_z, \xi \rangle = \langle J_2 \Phi_z, \bar{\xi} \rangle = 0$ , y por tanto las diferenciales de Hopf pueden escribirse también como

$$\begin{aligned} \Theta_1(z) &= \left( 2\langle \sigma(\partial_z, \partial_z), H + i\tilde{H} \rangle - \frac{\epsilon}{|H|^2} \langle J_1 \Phi_z, \tilde{H} \rangle^2 \right) (dz)^2, \\ \Theta_2(z) &= \left( 2\langle \sigma(\partial_z, \partial_z), H - i\tilde{H} \rangle - \frac{\epsilon}{|H|^2} \langle J_2 \Phi_z, \tilde{H} \rangle^2 \right) (dz)^2. \end{aligned}$$

### 5.3 EJEMPLOS DE SUPERFICIES PMC

#### 5.3.1 Superficies cmc de $S^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Para obtener los primeros ejemplos sencillos de superficies PMC basta tener en cuenta el siguiente hecho trivial:

si  $\Sigma$  es una superficie CMC de una hipersuperficie totalmente umbilical con curvatura media constante de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ , entonces  $\Sigma$  tiene vector curvatura media paralelo como superficie de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Ahora bien, gracias a la Proposición 1.1<sub>[p.8]</sub>, sabemos que la únicas hipersuperficies de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  totalmente umbilicales y de curvatura media constante son, salvo congruencias,  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

Como consecuencia de lo anterior obtenemos

*Las superficies de curvatura media constante de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  son superficies de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  con vector curvatura media paralelo.*

Vamos a obtener ahora los datos fundamentales de cualquier inmersión de este tipo en términos de sus datos fundamentales como superficie CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  y así relacionar las dos diferenciales de Hopf con la diferencial de Abresch-Rosenberg que dichas superficies poseen.

**Lema 5.1.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R} \hookrightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión de curvatura media constante. Entonces:*

- Dado un parámetro conforme  $z$  sobre  $\Sigma$  los datos fundamentales de  $\Phi$  como inmersión PMC de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  (cf. Definición 5.2) vienen dados por

$$\left( \mathbf{u}, H, C_j = \nu, \gamma_j = -i\sqrt{2}A, f_j = \frac{p}{\sqrt{2}} : j = 1, 2 \right)$$

siendo  $(\mathbf{u}, H, \nu, A, p)$  los datos fundamentales de  $\Sigma$  como superficie CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  (cf. Proposición 3.1<sub>[p.36]</sub>). En particular las funciones de Kähler  $C_1$  y  $C_2$  de la inmersión coinciden con la función ángulo  $\nu$ , luego, en virtud de (5.3),  $\bar{K}^\perp = 0$ .

- $\Theta_1 = \Theta_2 = 2\Theta_{AR}$ , siendo  $\Theta_{AR}$  la diferencial de Abresch-Rosenberg asociada a  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Es claro que, en este caso,  $\zeta = (0, (0, 0, 1))$  (respectivamente  $\zeta = (0, (1, 0, 0))$ ) si  $\epsilon = 1$  (respectivamente  $\epsilon = -1$ ) es un vector normal a la inmersión totalmente geodésica  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R} \hookrightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  dada en la Proposición 1.1. Así  $\tilde{H} = |H|\zeta$ . Si  $\tilde{\sigma}$  es la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , entonces  $\tilde{\sigma} = \sigma$  y por tanto

$$\langle \sigma(\partial_z, \partial_z), H + i\tilde{H} \rangle = \langle \sigma(\partial_z, \partial_z), H - i\tilde{H} \rangle = \langle \tilde{\sigma}(\partial_z, \partial_z), H \rangle.$$

de donde  $f_j = p/\sqrt{2}$ ,  $j = 1, 2$ . Además, si  $\Phi = (\phi, \eta) : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  entonces, teniendo en cuenta la Proposición 1.1, la correspondiente inmersión  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  es  $\Phi = (\phi, \psi)$  donde

$$\begin{aligned} \psi &= (\cos \eta, \sin \eta, 0), & \text{si } \epsilon = 1, \\ \psi &= (0, \sinh \eta, \cosh \eta), & \text{si } \epsilon = -1. \end{aligned}$$

Ahora, mediante un cálculo directo, deducimos que  $\langle J_1 \Phi_z, \tilde{H} \rangle = |H|\eta_z$  y  $\langle J_2 \Phi_z, \tilde{H} \rangle = -|H|\eta_z$ , luego  $\gamma_j = -i\sqrt{2}\eta_z = -i\sqrt{2}A$ ,  $j = 1, 2$

Finalmente, de la segunda expresión de  $\Theta_j$  (ver observación 5.1) y (3.4)<sub>[p.36]</sub>, deducimos

$$\Theta_1 = \Theta_2 = (2\langle \tilde{\sigma}(\partial_z, \partial_z), H \rangle - \epsilon(\eta_z)^2) (dz)^2 = 2\Theta_{AR}.$$

Conviene observar que, en este caso, las funciones que aparecen en las ecuaciones de Frenet satisfacen  $f_1 = f_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Además, puesto que  $\gamma_j = -i\sqrt{2}A$  tenemos que

$$\frac{e^{2u}}{2}(1 - C_j^2) = |\gamma_j|^2 = 2|A|^2 = \frac{e^{2u}}{2}(1 - \nu^2),$$

y, por tanto, eligiendo convenientemente el normal,  $C_1 = C_2 = \nu$ . ■

## 5.3.2 Producto de curvas

Otros ejemplos de superficies PMC de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  pueden construirse de la siguiente manera: dadas dos curvas regulares  $\alpha : I \rightarrow M^2(\epsilon)$  y  $\beta : I' \rightarrow M^2(\epsilon)$  entonces

$$\begin{aligned}\Phi : I \times I' &\rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon) \\ \Phi(t, s) &= (\alpha(t), \beta(s))\end{aligned}$$

es una inmersión de la superficie  $I \times I'$  cuyo vector curvatura media viene dado por

$$H = \frac{k_\alpha}{2}(J\alpha', 0) + \frac{k_\beta}{2}(0, J\beta'),$$

siendo  $'$  (respectivamente  $\dot{\phantom{x}}$ ) la derivada con respecto a  $t$  (respectivamente  $s$ ),  $k_\alpha$  y  $k_\beta$  las curvaturas de las curvas  $\alpha$  y  $\beta$  y donde hemos asumido que  $|\alpha'| = |\beta'| = 1$ . Así obtenemos que  $\Phi$  tiene vector curvatura media paralelo si, y sólo si,  $\alpha$  y  $\beta$  son curvas de curvatura constante. En dicho caso,  $4|H|^2 = k_\alpha^2 + k_\beta^2$ , y por tanto  $\Phi$  es una inmersión mínima, esto es,  $H = 0$  si, y sólo si,  $\alpha$  y  $\beta$  son ambas geodésicas de  $M^2(\epsilon)$ . Es interesante remarcar que la métrica inducida sobre  $I \times I'$  es llana.

Teniendo en cuenta cuales son las curvas de curvatura constante de  $S^2$  y  $\mathbb{H}^2$ , los ejemplos anteriores son, salvo congruencias, trozos abiertos de la siguiente familia de superficies PMC completas y embebidas:

**Ejemplo 5.1.** Si  $\epsilon = 1$ , el toro producto de dos círculos geodésicos

$$T_{a,\hat{a}} = \{(x, y) \in S^2 \times S^2 : x_3 = a, y_3 = \hat{a}\},$$

con  $0 \leq a \leq \hat{a} < 1$  y  $a^2 + \hat{a}^2 > 0$ , cuya curvatura media satisface  $4|H|^2 = \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{\hat{a}^2}{1-\hat{a}^2}$ .

Si  $\epsilon = -1$  obtenemos tres familias de ejemplos topológicamente distintos:

(i) el toro producto de dos círculos geodésicos

$$\hat{T}_{a,\hat{a}} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : x_3 = a, y_3 = \hat{a}\}, \quad 1 < a \leq \hat{a},$$

cuya curvatura media cumple  $4|H|^2 = \frac{a^2}{a^2-1} + \frac{\hat{a}^2}{\hat{a}^2-1}$  y  $|H|^2 > 1/2$ ,

(ii) el cilindro producto de un círculo geodésico y un hiperciclo

$$C_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : x_3 = a, y_1 = b\}, \quad b \geq 0, a > 1,$$

cuya curvatura media satisface  $4|H|^2 = \frac{a^2}{a^2-1} + \frac{b^2}{b^2+1}$  y  $|H|^2 > 1/4$ ,

y el cilindro producto de un círculo geodésico y un horociclo

$$\hat{C}_a = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : x_3 = a, y_1 - y_3 = 1\}, \quad a > 1,$$

cuya curvatura media satisface  $4|H|^2 = \frac{2a^2-1}{a^2-1}$  y  $|H|^2 > 1/2$ .

(iii) y finalmente el plano producto de dos hiperciclos

$$P_{b,\hat{b}} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : x_1 = b, y_1 = \hat{b}\}, \quad b, \hat{b} \geq 0, b\hat{b} \neq 0$$

cuya curvatura media verifica  $4|H|^2 = \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{\hat{b}^2}{\hat{b}^2+1}$  y  $|H|^2 < 1/2$ ,

el plano producto de un hiperciclo y un horociclo

$$\hat{P}_b = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : x_1 = b, y_1 - y_3 = 1\}, \quad b \geq 0,$$

cuya curvatura media cumple  $4|H|^2 = \frac{2b^2+1}{b^2+1}$  y  $1/4 \leq |H|^2 < 1/2$ ,

y el plano producto de dos horociclos

$$\tilde{P} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : x_1 - x_3 = 1, y_1 - y_3 = 1\},$$

cuya curvatura media satisface  $|H|^2 = 1/2$ .

**Lema 5.2.** Sea  $\Phi : I \times I' \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  el producto de dos curvas  $\Phi(t, s) = (\alpha(t), \beta(s))$  de curvaturas constantes  $k_\alpha$  y  $k_\beta$  respectivamente. Entonces:

- Dado el parámetro conforme  $z = t + is$ , los datos fundamentales de la inmersión  $\Phi$  vienen dados por:

$$\left( \begin{aligned} u = 0, C_j = 0, \gamma_1 = \bar{\gamma}_2 = \frac{(k_\alpha - ik_\beta)}{2\sqrt{2}|H|}, \\ f_1 = \bar{f}_2 = \frac{(k_\alpha - ik_\beta)^2}{8\sqrt{2}|H|}, j = 1, 2 \end{aligned} \right)$$

- Las diferenciales de Hopf vienen dadas por:

$$\Theta_j = \frac{\epsilon + 4|H|^2}{16|H|^2} (k_\alpha + (-1)^j i k_\beta)^2 (dz)^2, \quad j = 1, 2.$$

*Demostración.* Es inmediato que  $z = t + is$ , con  $t$  y  $s$  el parámetro arco de las curvas  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, es un parámetro conforme con factor conforme asociado  $e^{2u} = 1$ , luego  $u = 0$ . Así, teniendo en cuenta que la curvatura media es  $2H = (k_\alpha J\alpha', k_\beta J\beta)$ , luego  $2\tilde{H} = (k_\beta J\alpha', -k_\alpha J\beta)$ , es fácil deducir el primer punto. El segundo punto es consecuencia inmediata del primero y la expresión (5.7). ■

*Observación 5.2.* A la vista de este resultado los dos tipos de ejemplos de inmersiones de curvatura media paralela presentados hasta ahora tienen ambas diferenciales nulas,  $\Theta_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , si, y sólo si, o bien se trata de una superficie CMC con  $\Theta_{AR} = 0$  en el primer caso o bien se trata de un producto de curvas con  $4|H|^2 + \epsilon = 0$  (ya que no pueden ser simultáneamente  $k_\alpha = k_\beta = 0$  pues en dicho caso la inmersión sería mínima, caso que no estamos considerando). Esto implica que  $\epsilon = -1$  y  $4|H|^2 = 1$ . Ahora bien, teniendo presente el Ejemplo 5.1, tenemos dos posibilidades:

- la inmersión debe ser producto de un horociclo y una geodésica, con lo cual factorizaría a través de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  como una inmersión de curvatura media constante o bien
- el producto de dos hiperciclos apropiados.

### 5.3.3 Familia con $\bar{K}^\perp = 0$

En la siguiente proposición vamos a definir, en términos de las soluciones de cierta ecuación diferencial, una nueva familia de inmersiones de curvatura media paralela. La principal característica de dicha familia es que la curvatura normal extrínseca de cada ejemplo es siempre cero. La importancia de esta familia se verá más adelante (ver Teorema 6.3<sub>[p.121]</sub>).

**Proposición 5.3.** Sean  $a, b, c$  números reales con  $b > 0$  y  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una solución no constante de la E.D.O.

$$(h')^2(x) = (a - h^2(x)) \left( (a - h^2(x)) - \epsilon b(1 + (h(x) - c)^2) \right), \quad (5.8)$$

cumpliendo  $\epsilon(a - h^2(x)) > 0$ , para cualquier  $x \in I$ .

Sea  $\psi(x, y) = \psi(x)$  la curva en  $M^2(\epsilon)$  tal que

$$|\psi'(x)|^2 = b(1 + (h(x) - c)^2) \quad \text{y} \quad k_\psi(x) = -\frac{\epsilon b(a - h^2(x))}{|\psi'(x)|^3}$$

siendo  $k_\psi$  la curvatura. Definimos  $\phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M^2(\epsilon)$  por

1. Si  $a > 0$ ,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \sqrt{\epsilon(a - h^2(x))} \cos(\sqrt{a}y), \right. \\ \left. \sqrt{\epsilon(a - h^2(x))} \sin(\sqrt{a}y), h(x) \right),$$

2. Si  $a < 0$  (lo que implica que  $\epsilon = -1$ ),

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-a}} \left( h(x), \sqrt{h^2(x) - a} \sinh(\sqrt{-a}y), \sqrt{h^2(x) - a} \cosh(\sqrt{-a}y) \right),$$

3. Si  $a = 0$  (lo que implica que  $\epsilon = -1$ ),

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2h(x)} \left( (y^2 - 1)h^2(x) + 1, 2yh^2(x), (y^2 + 1)h^2(x) + 1 \right).$$

Entonces  $\Phi = (\phi, \psi) : I \times \mathbb{R} \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  es una inmersión de curvatura media paralela.

Todos los ejemplos descritos anteriormente satisfacen que  $4|H|^2 = b$ ,  $C_1 = C_2$  con  $C_1^2 = \frac{h'^2}{(a-h^2)^2}$ , son inmersiones conformes cuya métrica inducida es  $\epsilon(a - h(x)^2)(dx^2 + dy^2)$  y las diferenciales de Hopf vienen dadas por:

$$\Theta_j = \frac{\epsilon b}{4} (a + 1 - c^2 + 2(-1)^j ic)(dz)^2, \quad j = 1, 2.$$

*Observación 5.3.*

1. Siguiendo la Proposición 5.3, las soluciones constantes de la ecuación (5.8) que satisfacen  $\epsilon(a - h^2) > 0$  producen inmersiones PMC de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  con  $C_1 = C_2 = 0$  i.e., gracias a (5.2), el jacobiano de cada una de las componentes de la inmersión es nula y, por tanto, la inmersión es un producto de curvas que está descrito en el Ejemplo 5.1.
2. Todas las inmersiones descritas en la proposición anterior son invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías  $\{I(\theta) \times \text{Id}, \theta \in \mathbb{R}\}$  de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ , donde  $I(\theta) : M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon)$  es la isometría dada, según el signo de  $a$ , por:

$$\begin{array}{cc}
\alpha > 0 & \alpha < 0 \\
\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \\
\alpha = 0 & \\
\begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & 1 & \theta \\ -\frac{\theta^2}{2} & \theta & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} & 
\end{array}$$

*Demostración.* En primer lugar es fácil comprobar que, en los tres casos,

$$\begin{aligned}
|\phi_x|^2 &= \epsilon[(\alpha - h^2) - \epsilon b(1 + (h - c)^2)], & |\phi_y|^2 &= \epsilon(\alpha - h^2) \\
\langle \phi_x, \phi_y \rangle &= 0, & \langle \phi_x, \phi_{xy} \rangle &= 0, & \langle \phi_y, \phi_{xy} \rangle &= -\epsilon h h'
\end{aligned}$$

y, por tanto,  $|\Phi_x|^2 = |\Phi_y|^2 = \epsilon(\alpha - h^2)$  y  $\langle \Phi_x, \Phi_y \rangle = 0$ , lo cual nos asegura que  $\Phi$  es una inmersión conforme. Ahora, mediante un cálculo directo, tenemos

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = -\frac{bh'(h-c)}{|\phi_x|^2} \phi_x - \epsilon(|\phi_x|^2 + |\phi_y|^2)\phi.$$

Además, la descripción de la curva  $\psi$  nos asegura que

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \psi_{xx} = \frac{bh'(h-c)}{|\psi_x|^2} \psi_x - \frac{\epsilon b(\alpha - h^2)}{|\psi_x|^2} J\psi_x - \epsilon|\psi_x|^2 \psi.$$

Ahora bien, ya que  $\Phi$  es conforme, podemos expresar

$$H = \frac{(\Phi_{xx} + \Phi_{yy})^T}{2\epsilon(\alpha - h^2)},$$

donde  $( )^T$  denota la parte tangente a  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Usando las fórmulas anteriores obtenemos

$$H = \frac{1}{2\epsilon(\alpha - h^2)} \left( -\frac{bh'(h-c)}{|\phi_x|^2} \phi_x, \frac{bh'(h-c)}{|\psi_x|^2} \psi_x - \frac{\epsilon b(\alpha - h^2)}{|\psi_x|^2} J\psi_x \right).$$

De esta ecuación la norma de  $H$  es  $|H|^2 = b/4$  y, tras un cálculo directo, obtenemos

$$\bar{\nabla}_{\partial_x} H = -\frac{b(a-ch)}{2(a-h^2)} \Phi_x, \quad \bar{\nabla}_{\partial_y} H = \frac{bh(h-c)}{2(a-h^2)} \Phi_y,$$

lo que prueba que  $H$  es paralelo en el fibrado normal.

Finalmente, para calcular las diferenciales de Hopf de la inmersión  $\Phi$ , lo único que necesitamos es que

$$\tilde{H} = \frac{1}{2\epsilon(a-h^2)} \left( \frac{bh'}{|\Phi_x|^2} \Phi_x, -\frac{bh'}{|\Psi_x|^2} \Psi_x - \frac{b\epsilon(a-h^2)(h-c)}{|\Psi_x|^2} J\Psi_x \right)$$

■

Ahora vamos a analizar las soluciones de la ecuación (5.8). Puesto que el grado del polinomio que aparece en ella es menor que 5, las soluciones son funciones elípticas que pueden ser obtenidas conociendo las raíces del polinomio. Es claro que cualquier solución  $h$  de (5.8) no tiene por qué cumplir la condición  $\epsilon(a-h^2) > 0$ , qué es necesaria para definir la inmersión PMC (sin singularidades).

Si denotamos por

$$p(t) = a-t^2, \quad q(t) = -(1+\epsilon b)t^2 + 2\epsilon bct - \epsilon b(1+c^2) + a,$$

la ecuación (5.8) se transforma en  $(h')^2 = p(h)q(h)$ . La condición  $\epsilon(a-h^2) > 0$  implica que  $\epsilon p(h) > 0$  y, por tanto, debe ser  $\epsilon q(h) \geq 0$  al menos en cierto intervalo de  $\mathbb{R}$ . Esta desigualdad del polinomio  $q(h)$  nos proporciona las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} (1+b)(a-b) &\geq bc^2 && \text{si } \epsilon = +1 \\ bc^2 &\geq (b-1)(a+b) && \text{si } \epsilon = -1 \text{ y } 4|H|^2 = b > 1 \\ c \neq 0 \text{ or } a &\leq -1 && \text{si } \epsilon = -1 \text{ y } 4|H|^2 = b = 1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

sobre los parámetros  $a, b$  y  $c$ . Por otro lado, es posible obtener todas las soluciones de la ecuación (5.8) en términos de funciones elípticas de Jacobi (ver [BF71]) y un profundo análisis de las mismas muestra que las condiciones que aparecen en (5.9) son también suficientes para obtener soluciones de la ecuación (5.8) cumpliendo  $\epsilon(a - h^2) > 0$ . Así

*Las soluciones  $h$  de la ecuación (5.8) verifican  $\epsilon(a - h^2) > 0$  si, y sólo si, los parámetros  $a, b$  y  $c$  de dicha ecuación satisfacen las restricciones (5.9).*

La integración de la ecuación (5.8) no es complicada pero da lugar a muchos tipos distintos de soluciones puesto que las raíces del polinomio que aparece en ella son de diferente naturaleza dependiendo de los valores de los parámetros  $a, b$  y  $c$ . Para ilustrar la integración vamos a hacerla en un caso particular puesto que la solución producirá una bella familia 1-paramétrica de inmersiones PMC de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ .

**Ejemplo 5.2.** Consideremos, en la ecuación (5.8),  $\epsilon = -1$ ,  $c = 0$ ,  $b = 1$  y, de (5.9)  $a \leq -1$ . En este caso (5.8) se transforma en

$$(h')^2(x) = (a + 1)(a - h^2(x))$$

cuya solución con  $h(0) = 0$  es

$$h(x) = \sqrt{-a} \sinh(\sqrt{-(1+a)}x).$$

Así  $\epsilon(a - h^2) = -a \cosh^2(\sqrt{-(1+a)}x) > 0$  para todo  $x, y$  denotando por  $\lambda = \sqrt{-(1+a)}$  se obtiene, de la Proposición 5.3, que para cualquier  $\lambda \geq 0$ ,  $\Phi_\lambda = (\phi, \psi) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  dada por

$$\phi(x, y) = \left( \sinh(\lambda x), \cosh(\lambda x) \sinh(\sqrt{1 + \lambda^2}y), \right. \\ \left. \cosh(\lambda x) \cosh(\sqrt{1 + \lambda^2}y) \right)$$

y  $\psi(x, y) = \psi(x)$  la curva en  $\mathbb{H}^2$  parametrizada por

$$|\psi'|^2 = 1 + (1 + \lambda^2) \sinh^2(\lambda x)$$

y con curvatura  $k_\psi = -\sqrt{1 + \lambda^2} \cosh^2(\lambda x) / |\psi'|^3$  es un *embalamiento conforme PMC de la superficie completa*  $(\mathbb{R}^2, (1 + \lambda^2) \cosh^2(\lambda x)(dx^2 + dy^2))$  con  $4|H|^2 = 1$ ,  $\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\lambda^2}{4}(dz)^2$ . La curvatura de Gauss viene dada por  $K(x) = -\lambda^2 / \cosh^4(\lambda x)$ . Cuando  $\lambda = 0$ , esto es,  $\alpha = -1$ ,  $\Phi_0$  es el producto de una geodésica y un horociclo, i.e.  $\hat{P}_0$  en el Ejemplo 5.1.

## 5.4 ALGUNAS PROPIEDADES INTERESANTES

De (5.6) y las ecuaciones de Gauss y Ricci podemos obtener algunas propiedades y fórmulas acerca de las inmersiones PMC que nos serán de utilidad más adelante.

Primero, de las ecuaciones de Gauss y Ricci junto con  $4u_{z\bar{z}} = -Ke^{2u}$  es fácil deducir

$$|f_j|^2 = \frac{e^{4u}}{8} (|H|^2 - K + \epsilon C_j^2), \quad j = 1, 2. \quad (5.10)$$

Esta ecuación nos asegura además que

$$K \leq |H|^2 + 1, \quad \text{si } \epsilon = 1$$

y la igualdad se alcanza en un punto  $p$  si, y sólo si, ocurre que  $f_j(p) = 0$  y  $C_j^2(p) = 1$ ,  $j = 1, 2$ . Además

$$K \leq |H|^2, \quad \text{si } \epsilon = -1$$

y la igualdad se alcanza en un punto  $p$  si, y sólo si, ocurre que  $f_j(p) = 0$  y  $C_j(p) = 0$ ,  $j = 1, 2$ .

En segundo lugar, usando (5.6), Gauss, Ricci y (5.10) obtenemos la siguiente relación entre  $|\Theta_j|^2$  and  $|\nabla C_j|^2$

$$\begin{aligned} |\nabla C_j|^2 + 4\epsilon e^{-4u} |\Theta_j|^2 &= \\ &= (1 - C_j^2 + 4\epsilon|H|^2) \left( \frac{\epsilon(1 - C_j^2)}{4} + |H|^2 + \epsilon C_j^2 - K \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

para  $j = 1, 2$ .

Por otro lado, de (5.6), Gauss y Ricci, es fácil calcular el laplaciano de las funciones de Kähler  $C_j$ , obteniendo

$$\Delta C_j = -C_j \left( 4|H|^2 - 2K + \epsilon(1 + C_j^2) \right), \quad j = 1, 2. \quad (5.12)$$

Esta última ecuación quiere decir que  $C_j$  satisface  $(\Delta + F)C_j = 0$  siendo  $F = 4|H|^2 - 2K + \epsilon(1 + C_j^2)$ . De esta manera, usando resultados clásicos de la teoría elíptica (véase, por ejemplo, [Che76]), deducimos que o bien  $C_j = 0$  o el conjunto  $\{p \in \Sigma : C_j(p) = 0\}$  es una unión de curvas. En particular su interior es vacío.

Bajo ciertas restricciones de la curvatura de la superficie, podemos obtener más propiedades de los conjuntos  $\Sigma_0^j$ ,  $j = 1, 2$ , (cf. (5.1)).

**Proposición 5.4.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión PMC. Si  $K(p) \neq \epsilon$  para cualquier  $p \in \Sigma$ , entonces  $\Sigma \setminus \Sigma_0^j = \{p \in \Sigma : C_j^2(p) = 1\}$ ,  $j = 1, 2$ , son conjuntos de puntos aislados.*

*Demostración.* Puesto que los puntos  $p$  con  $C_j^2(p) = 1$  son puntos críticos de la función  $C_j$ , vamos a estudiar cuando son degenerados.

Sea entonces  $p_0$  un punto con  $C_j(p_0)^2 = 1$ , con  $j \in \{1, 2\}$ . Entonces  $\gamma_j(p_0) = 0$  y, de las ecuaciones (5.6), Gauss y Ricci, se obtiene

$$\begin{aligned} (C_j)_{zz}(p_0) &= -2\sqrt{2}|H|f_j(p_0)C_j(p_0), \\ (C_j)_{z\bar{z}}(p_0) &= -\frac{C_j(p_0)e^{2u(p_0)}|H|^2}{2} - \\ &\quad -4C_j(p_0)e^{-2u(p_0)}|f_j|^2(p_0). \end{aligned}$$

Un cálculo directo nos muestra que el determinante del hessiano de  $C_j$  en  $p_0$  es

$$e^{-4u(p_0)}(e^{2u(p_0)}H^2 - 8e^{-2u(p_0)}|f_j(p_0)|^2)^2$$

lo cual, por (5.10), es igual a  $(K(p_0) - \epsilon)^2$  y, por tanto,  $p_0$  es degenerado si, y sólo si,  $K(p_0) = \epsilon$ . Puesto que los puntos críticos no degenerados son aislados finalizamos la demostración. ■



## RESULTADOS PRINCIPALES

# 6

*Hay veces que es mejor tener poca fe  
por si las cosas no salen.*

### 6.1 RELACIÓN ENTRE CMC Y PMC

Las condiciones de integrabilidad dadas en el capítulo anterior (ver Proposición 5.1<sub>[p.96]</sub>) nos permiten relacionar, al menos en el caso simplemente conexo, inmersiones de curvatura media paralela de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  con pares de inmersiones de curvatura media constante en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  con la misma métrica inducida y el mismo módulo de la curvatura media. Puesto que esta relación sólo depende de la clase de congruencia de una inmersión es conveniente denotar por  $[\Phi]$  al conjunto de inmersiones congruentes a  $\Phi$ , esto es,  $\tilde{\Phi} \in [\Phi]$  si existe una isometría del espacio ambiente  $F$  tal que  $F \circ \Phi = \tilde{\Phi}$ .

**Teorema 6.1.** *Dada una superficie riemanniana simplemente conexa  $(\Sigma, g)$ , existe una correspondencia biunívoca,  $[\Phi] \leftrightarrow ([\Phi_1], [\Phi_2])$ , entre clases congruentes de inmersiones isométricas de curvatura media paralela  $\Phi : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  y pares de clases de congruencia de inmersiones isométricas de curvatura media constante  $\Phi_1, \Phi_2 : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  con  $|H| = |H_1| = |H_2|$ , siendo  $H$  el vector curvatura media de  $\Phi$  y  $H_j$ ,  $j = 1, 2$ , son respectivamente las curvaturas medias de  $\Phi_j$ ,  $j = 1, 2$ .*

Las diferenciales de Abresch-Rosenberg  $\Theta_{\mathbb{A}\mathbb{R}}^j$  asociadas al par de inmersiones CMC  $\Phi_j$ ,  $j = 1, 2$ , y las dos diferenciales de Hopf  $\Theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , asociadas a la inmersión PMC  $\Phi$  están relacionadas por  $2\Theta_{\mathbb{A}\mathbb{R}}^j = \Theta_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Además,  $[\Phi_1] = [\Phi_2]$  si, y sólo si, existe una inmersión en la clase de equivalencia de  $[\Phi]$  que factoriza de la forma

$$\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R} \hookrightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$$

a través de una inmersión CMC en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Para probar el resultado vamos a usar las ecuaciones de integrabilidad (5.6)<sub>[p.96]</sub> para inmersiones conformes de curvatura media paralela dadas en el capítulo anterior y las correspondientes ecuaciones de integrabilidad para inmersiones conformes de curvatura media constante en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  descritas en (3.3)<sub>[p.36]</sub>.

Sea  $\Phi : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión isométrica de una superficie orientable simplemente conexa  $\Sigma$  y  $z$  un parámetro conforme de manera que la métrica inducida se escriba de la forma  $e^{2u} |dz|^2$ . Consideramos entonces el par de datos fundamentales

$$(u, H_j = |H|, \nu_j = C_j, A_j = \frac{i\gamma_j}{\sqrt{2}}, p_j = \sqrt{2}f_j), \quad j = 1, 2. \quad (6.1)$$

De (5.6)<sub>[p.96]</sub>, se sigue que estos datos satisfacen (3.3)<sub>[p.36]</sub> para  $\kappa = \epsilon$  y  $\tau = 0$ , y por tanto existen dos inmersiones de curvatura media constante  $\Phi_j : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  con  $|H_j| = |H|$ ,  $j = 1, 2$ .

Más aún, si  $\Phi$  es congruente a  $\Psi$ , entonces las correspondientes inmersiones asociadas  $\Phi_j$  y  $\Psi_j$ ,  $j = 1, 2$ , son también congruentes ya que tienen los mismos datos fundamentales.

Recíprocamente, sea  $\Phi_j = (\phi_j, \eta_j) : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  dos inmersiones CMC con  $|H_1| = |H_2|$  y  $z$  un parámetro conforme con  $g = e^{2u}|dz|^2$ . Podemos suponer, componiendo con una isometría apropiada si fuese necesario, que  $H_1 = H_2 > 0$ . Consideramos entonces los datos

$$\left( u, |H| = H_1 = H_2, C_j = \nu_j, \gamma_j = -i\sqrt{2}A, f_j = \frac{p_j}{\sqrt{2}} : j = 1, 2 \right) \quad (6.2)$$

donde en este caso  $A = \langle \Phi_z, \xi \rangle = \eta_z$ . De (3.3)<sub>[p.36]</sub>, se sigue que estos datos satisfacen (5.6)<sub>[p.96]</sub>, y, por tanto, existe una inmersión de curvatura media paralela  $\Phi : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  con  $|H| = |H_1| = |H_2|$ .

Al igual que antes, si  $\Phi_j$  son congruentes a  $\Psi_j$ ,  $j = 1, 2$ , entonces las correspondientes inmersiones PMC  $\Phi$  y  $\Psi$  son también congruentes pues tienen los mismos datos fundamentales.

Por otro lado, puesto que la diferencial de Abresch-Rosenberg para superficies de curvatura media constante puede expresarse, gracias a (3.4)<sub>[p.36]</sub>, como  $\Theta_{AR}^j = (|H_j|p_j - \frac{\epsilon}{2}((\eta_j)_z)^2)(dz)^2$  y las diferenciales de Hopf para superficies PMC como  $\Theta_j = \left( 2\sqrt{2}|H|f_j + \frac{\epsilon}{2}\gamma_j^2 \right) (dz)^2$ , usando las anteriores relaciones entre los datos fundamentales de las inmersiones se obtiene que  $2\Theta_{AR}^j = \Theta_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Finalmente, supongamos que  $[\Phi_1] = [\Phi_2]$ , esto es,  $\Phi_1, \Phi_2 : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  son dos inmersiones isométricas cumpliendo  $\Phi_2 = F \circ \Phi_1$  para cierta isometría  $F$  de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ . Entonces, dado un parámetro conforme  $z$  podemos considerar, posiblemente salvo congruencias, que los datos fundamentales de  $\Phi_j$  cumplen  $|H_1| = |H_2|$ ,  $p_1 = p_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$  and  $\eta_1 = \eta_2$ . De esta manera la inmersión PMC  $\Phi =$

$(\phi, \psi) : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  asociada a dicho par cumple  $f_1 = f_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$  y  $C_1 = C_2$ . Ahora bien, puesto que  $-i\sqrt{2}\tilde{H} = |H|(\xi - \bar{\xi})$ , de las ecuaciones de Frenet (5.5)<sup>[p.95]</sup> obtenemos que la derivada de la función  $\tilde{H} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^6$  (o  $\mathbb{R}_2^6$ ) viene dada por

$$\tilde{H}_z = \frac{i|H|}{\sqrt{2}}(\xi_z - \bar{\xi}_z) = 0.$$

Por tanto  $\tilde{H} = W$  para cierto vector fijo  $W \in \mathbb{R}^6$  (o  $\mathbb{R}_2^6$ ) con  $|W| = |H| > 0$  con lo cual  $0 = \langle \Phi, \tilde{H} \rangle = \langle \Phi, W \rangle$  y  $0 = \langle \hat{\Phi}, \tilde{H} \rangle = \langle \hat{\Phi}, W \rangle$ . Ahora si llamamos  $\Phi = (\phi, \psi)$  y  $W = (W_1, W_2)$ , obtenemos finalmente que  $\langle \phi, W_1 \rangle = \langle \psi, W_2 \rangle = 0$ . Si  $W_2 = 0$ , tenemos que  $W_1 \neq 0$  y, por tanto,  $\text{Jac}(\phi) = 0$ , i.e.,  $C_1 = -C_2$ . Así  $C_1 = C_2 = 0$  con lo cual  $\text{Jac}(\phi) = \text{Jac}(\psi) = 0$ , esto es, la inmersión es producto de dos curvas  $\alpha$  y  $\beta$ . Teniendo en cuenta la demostración del Lemma 5.2<sup>[p.103]</sup>.(2) y que, en este caso,  $\gamma_1 = \gamma_2$  deducimos que  $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1$ , esto es,  $\text{Im } \gamma_1 = 0$ , pero

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}|H|}(k_\alpha - ik_\beta),$$

lo cual implica que  $k_\beta = 0$ , i.e.,  $\psi$  está contenida en una geodésica de  $M^2(\epsilon)$ . Si  $W_2 \neq 0$ , puesto  $\langle \psi, W_2 \rangle = 0$ ,  $\psi$  está contenida en una geodésica de  $M^2(\epsilon)$  también.

De esta manera la inmersión  $\Phi$  factoriza a través de una hipersuperficie totalmente geodésica de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  como una superficie de curvatura media constante.

Recíprocamente, dada una inmersión PMC  $\Phi : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  tal que  $\Phi$  factorice a través de una hipersuperficie totalmente geodésica de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  entonces, de la demostración del Lema 5.2<sup>[p.103]</sup>.(1), tenemos que sus datos fundamentales satisfacen  $f_1 = f_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$  y  $C_1 = C_2$ . Así, los correspondientes datos fundamentales de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son

los mismos y, por tanto, son inmersiones congruentes, i.e.,  $[\Phi_1] = [\Phi_2]$ . ■

*Observación 6.1.* Consideremos una inmersión  $\Phi : I \times I' \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  producto de dos curvas  $\Phi(t, s) = (\alpha(t), \beta(s))$  de curvaturas constante  $k_\alpha$  y  $k_\beta$  con  $|\alpha'| = |\beta'| = 1$ . Siguiendo la demostración del Teorema 6.1 y del Lema 5.2 [p.103], los datos fundamentales de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  vienen dados por

$$u_j = 0, \quad 2H_j = \sqrt{k_\alpha^2 + k_\beta^2}, \quad \nu_j = 0, \quad p_2 = \bar{p}_1$$

$$A_j = \frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_j = \frac{i(k_\alpha + (-1)^j i k_\beta)}{2\sqrt{k_\alpha^2 + k_\beta^2}}, \quad j = 1, 2.$$

Puesto que  $A_2 = -\bar{A}_1$ ,  $p_2 = \bar{p}_1$  y la aplicación  $G(x, y) = (-x, y)$  es una isometría de la métrica inducida  $g = dx^2 + dy^2$  entonces es fácil convencerse que  $\Phi_1 \circ G$  es una inmersión CMC con los mismos datos de Frenet que  $\Phi_2$  y, por tanto,  $\Phi_1 \circ G$  y  $\Phi_2$  son congruentes. Además, ya que la función ángulo  $\nu_1$  asociada a  $\Phi_1$  es idénticamente cero sabemos que la inmersión debe ser un cilindro sobre una curva en  $M^2(\epsilon)$  de curvatura constante  $\sqrt{k_\alpha^2 + k_\beta^2}$  al ser  $\Phi_1$  una inmersión CMC con  $2H = \sqrt{k_\alpha^2 + k_\beta^2}$ .

## 6.2 SUPERFICIES PMC LAGRANGIANAS

Los ejemplos 5.1 [p.101] de productos de curvas de curvaturas constantes satisfacen que  $C_1 = C_2 = 0$ . En particular se trata de superficies lagrangianas respecto de las dos estructuras complejas  $J_1$  y  $J_2$  que  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  posee (véase (1.1) [p.5]). Conviene recordar que una superficie lagrangiana de una 4-variedad compleja es una superficie para la cual la función

de Kähler es idénticamente nula o, equivalentemente, que  $J$  define un isomorfismo entre el plano tangente y el normal a la superficie.

El siguiente resultado clasifica, incluso localmente, aquellas superficies de curvatura media paralela de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  que son lagrangianas con respecto a alguna de las estructuras complejas.

**Teorema 6.2.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión con curvatura media paralela de una superficie  $\Sigma$ . Si  $\Phi$  es lagrangiana con respecto a alguna de las estructuras complejas  $J_1$  o  $J_2$ , entonces  $\Phi(\Sigma)$  es un conjunto abierto de alguna de las superficies descritas en el Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub>.*

*Observación 6.2.* Este resultado es una generalización de [CU07, Teorema 1], donde los autores lo prueban para  $\epsilon = 1$ , i.e., cuando el espacio ambiente es  $S^2 \times S^2$  y la superficie es compacta.

*Demostración.* Tomando el recubridor orientable de dos hojas si fuese necesario podemos asumir que  $\Sigma$  es orientable. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\Phi$  es lagrangiana con respecto a  $J_1$ , i.e.,  $C_1 = 0$ . Así  $J_1 H$  es un campo paralelo tangente a  $\Sigma$  con lo cual  $\Sigma$  es llana, i.e.,  $K = 0$ .

Nuestro objetivo es probar que la otra función de Kähler  $C_2$  se anula igualmente y para ello vamos a considerar la diferencial holomorfa  $\Theta_2$ . Distinguiremos entonces dos casos: que  $\Theta_2$  sea idénticamente cero o bien que  $\Theta_2$  tenga ceros aislados.

En el primer caso de (5.11)<sub>[p.110]</sub>, (5.12)<sub>[p.110]</sub> y puesto que  $K = 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} |\nabla C_2|^2 &= (1 - C_2^2 + 4\epsilon|H|^2) \left( \frac{\epsilon(1 - C_2^2)}{4} + |H|^2 + \epsilon C_2^2 \right), \\ \Delta C_2 &= -C_2(4|H|^2 + \epsilon(1 + C_2^2)). \end{aligned}$$

Dichas ecuaciones afirman que la función  $C_2$  es isoparamétrica, esto es,  $|\nabla C_2|^2 = f(C_2)$  y  $\Delta C_2 = g(C_2)$  para ciertas funciones reales  $f, g$ . Seguimos entonces un argumento estándar: vamos a trabajar en el abierto  $U$  donde  $\nabla C_2 \neq 0$  y nuestro objetivo es probar entonces que  $U = \emptyset$  luego  $C_2$  sería constante. Puesto que  $K = 0$ , la fórmula de Bochner afirma que

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla C_2|^2 = \langle \nabla C_2, \nabla(\Delta C_2) \rangle + \sum_{i=1}^2 |\nabla_{e_i} \nabla C_2|^2,$$

siendo  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal sobre  $U$ . Teniendo ahora en cuenta que  $C_2$  es isoparamétrica y tomando  $e_1 = \nabla C_2 / |\nabla C_2|$  no es difícil comprobar que la fórmula de Bochner se transforma en

$$0 = (4|H|^2 + \epsilon(1 - C_2^2))(3\epsilon(\epsilon + 4|H|^2)^2 - 18(\epsilon + 4|H|^2)C_2^2 - \epsilon C_2^4)$$

Así  $C_2$  satisface sobre  $U$  un polinomio no trivial y, por tanto, debe ser constante en cada componente conexa de  $U$  lo cual es una contradicción puesto que  $\nabla C_2 \neq 0$  sobre  $U$ . Hemos probado entonces que  $U = \emptyset$  con lo cual  $C_2$  es constante. Pero la ecuación  $(C_2)_z = 0$  implica que  $\sqrt{2}(1 - C_2^2)f_2 = |H|\gamma_2^2$ . De ahí y (5.10)<sub>[p.109]</sub> se obtiene que  $C_2^2 = \epsilon K = 0$ . Así nuestra inmersión es también lagrangiana con respecto a  $J_2$ .

En el segundo caso, i.e., si  $\Theta_2$  tiene sus ceros aislados, de las ecuaciones de integrabilidad (5.6)<sub>[p.96]</sub> se sigue que la 1-diferencial

$$\Upsilon(z) = \gamma_1(z)(dz) = \frac{1}{\sqrt{2}|H|} \langle J_1 \Phi_z, H + i\tilde{H} \rangle dz,$$

que está bien definida puesto que es invariante por un cambio conforme de parámetro, es también holomorfa y sin ceros. Así  $\Theta_2/\Upsilon^2$  es una función holomorfa. Sea  $p$  un punto con  $\Theta_2(p) \neq 0$ . Entonces en un entorno conexo  $U$  del punto  $p$  podemos normalizar dicha función holomorfa de la forma

$$\frac{\Theta_2}{\Upsilon^2} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Así  $|\Theta_2|^2 = \lambda^2|\Upsilon|^4$ . Ahora, gracias a las ecuaciones de integrabilidad (5.6)<sub>[p.96]</sub>, (5.11)<sub>[p.110]</sub>, (5.12)<sub>[p.110]</sub> y el hecho de que  $C_1 = 0$  y  $K = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} |\nabla C_2|^2 &= (1 - C_2^2 + 4\epsilon|H|^2) \left( \frac{\epsilon(1 - C_2^2)}{4} + |H|^2 + \epsilon C_2^2 \right) - \epsilon\lambda^2, \\ \Delta C_2 &= -C_2(4|H|^2 + \epsilon(1 + C_2^2)). \end{aligned}$$

En este segundo caso las dos ecuaciones anteriores nos aseguran también que la función  $C_2$  es también isoparamétrica sobre  $U$ .

Así, siguiendo un argumento similar al del primer caso, obtenemos que  $C_2 = 0$  sobre  $U$ . Puesto que esto se cumple en cualquier punto de  $\Sigma$  excepto sobre los ceros de  $\Theta_2$ , que sabemos que son aislados, deducimos en este segundo caso que nuestra inmersión  $\Phi$  es también lagrangiana con respecto a  $J_2$ .

Como consecuencia de (5.2)<sub>[p.92]</sub> tenemos que  $\text{Jac}(\phi) = \text{Jac}(\psi) = 0$  y la inmersión  $\Phi$  es el producto de dos curvas. Puesto que la curvatura media es paralela obtenemos el resultado. ■

### 6.3 SUPERFICIES PMC CON CURVATURA NORMAL EXTRÍNSECA NULA

Como se estableció en la demostración del Lema 5.2<sup>[p.103]</sup>, las superficies PMC de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  que provienen de superficies CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  tienen  $C_1 = C_2$  y, en particular, su curvatura normal extrínseca  $\bar{K}^\perp = \epsilon(C_1^2 - C_2^2)/2$  se anula. Por otro lado los ejemplos 5.1<sup>[p.101]</sup> de productos de curvas de curvaturas constantes satisfacen que  $C_1 = C_2 = 0$  luego también tienen su curvatura normal extrínseca es nula. Es por tanto natural preguntarse si éstas son las únicas superficies PMC cumpliendo dicha propiedad. El Teorema 6.3 las clasifica mostrando que, además de los anteriores ejemplos, aparece únicamente la familia de superficies PMC descrita en la Proposición 5.3<sup>[p.104]</sup>.

**Teorema 6.3.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión de curvatura media paralela de una superficie  $\Sigma$ . Entonces la curvatura normal extrínseca se anula,  $\bar{K}^\perp = 0$ , si, y sólo si,  $\Phi$  es localmente congruente a:*

1. una superficie de curvatura media constante de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ ,
2. uno de las superficies descritas en el Ejemplo 5.1<sup>[p.101]</sup>,
3. uno de las superficies descritas en la Proposición 5.3<sup>[p.104]</sup>.

*Observación 6.3.* Aunque  $\bar{K}^\perp$  sólo está bien definida para superficies orientables, la ecuación  $\bar{K}^\perp = 0$ , que se traduce en la igualdad  $C_1^2 = C_2^2$ , tiene sentido incluso para superficies no orientables.

*Demostración.* En primer lugar, es claro que los ejemplos dados en (1) y (2) cumplen  $\bar{K}^\perp = 0$ . Además, de la Proposición 5.3<sup>[p.104]</sup>, los ejemplos dados en (3) también cumplen  $\bar{K}^\perp = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\bar{K}^\perp = 0$ , i.e.,  $C_1^2 = C_2^2$ . Tomando, si fuese necesario, el recubridor de dos hojas orientable de  $\Sigma$ , podemos asumir que  $\Sigma$  es orientable.

De (5.12)<sub>[p.110]</sub> tenemos que

$$(\Delta + F)(C_1 - C_2) = 0,$$

donde  $F = 4|H|^2 - 2K + \epsilon(1 + C_1^2) = 4|H|^2 - 2K + \epsilon(1 + C_2^2)$ . Ahora, usando resultados clásicos de la teoría de funciones elípticas (ver, por ejemplo, [Che76]), obtenemos que o bien  $C_1 = C_2$  o  $A = \{p \in \Sigma : C_1(p) = C_2(p)\}$  es un conjunto de curvas en  $\Sigma$ . Así, puesto que  $C_1^2 = C_2^2$  deducimos que  $C_1 + C_2 = 0$  sobre  $\Sigma \setminus A$  y por tanto sobre  $\Sigma$ . De nuevo tenemos dos posibilidades:  $C_1 = C_2$  o  $C_1 = -C_2$ . Es claro que las superficies con  $C_1 = -C_2$  pueden obtenerse como imagen de las superficies con  $C_1 = C_2$  mediante la isometría  $F : M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  dada por  $F(p, q) = (q, p)$ .

De esta manera, podemos asumir que  $C_1 = C_2$ . Así, usando las ecuaciones de integrabilidad (5.6)<sub>[p.96]</sub> obtenemos que la 1-diferencial

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= (\gamma_2(z) - \gamma_1(z))(dz) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}|H|} \left( \langle (J_2 - J_1)\Phi_z, H \rangle - i \langle (J_2 + J_1)\Phi_z, \tilde{H} \rangle \right) (dz), \end{aligned}$$

que está bien definida puesto que es invariante por cambios conformes del parámetro, es holomorfa. Por tanto, o bien  $\Omega \equiv 0$  o  $\Omega$  tiene sus ceros aislados. En el primer caso tenemos que  $\gamma_1 = \gamma_2$  y usando que  $(C_1)_z = (C_2)_z$  y (5.1)<sub>[p.92]</sub> obtenemos  $f_1 = f_2$ . Ahora, usando el mismo argumento que en la demostración del Teorema 6.1, se sigue que  $\Phi$  factoriza a través de una inmersión CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , con lo cual obtenemos el caso (1).

Veamos qué ocurre si la diferencial  $\Omega$  no es idénticamente nula. Fuera de sus ceros podemos normalizarla como  $\gamma_2 - \gamma_1 = 2\sqrt{2}|H|$ . Puesto que  $C_1 = C_2$  tenemos entonces que  $|\gamma_1|^2 = |\gamma_2|^2$  y por tanto  $\text{Re}(\gamma_1) = -\sqrt{2}|H|$ . Así

$$\gamma_1 = -\sqrt{2}|H| + ig, \quad \gamma_2 = -\bar{\gamma}_1,$$

para cierta función  $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora, usando las ecuaciones de integrabilidad (5.6)<sub>[p.96]</sub> obtenemos que  $g_{\bar{z}} = -\frac{e^{2u}}{\sqrt{2}}|H|C_1$ , lo que implica que  $g(x, y) = g(x)$  y además que

$$g' = -\sqrt{2}e^{2u}|H|C_1,$$

donde  $'$  representa  $\partial/\partial x$ . Así, de esta ecuación junto con  $e^{2u}(1 - C_1^2) = 2(2|H|^2 + g^2)$  se deduce que  $u$  y  $C_1$  también satisfacen  $u(x, y) = u(x)$  y  $C_1(x, y) = C_1(x)$ .

Puesto que  $(\gamma_j)_z = (\gamma_j)_{\bar{z}}$ ,  $j = 1, 2$ , teniendo en cuenta de nuevo las ecuaciones de integrabilidad obtenemos que  $u'\gamma_j - 2iC_j f_j = -\frac{ie^{2u}}{\sqrt{2}}|H|C_j$ ,  $j = 1, 2$ . Además de  $C_1 = C_2$  y  $\gamma_2 = -\bar{\gamma}_1$ , las anteriores ecuaciones implican que  $C_1(\bar{f}_1 - f_2) = 0$ . Por tanto tenemos que o bien  $C_1 = C_2 = 0$  y  $\Phi$  es el producto de dos curvas de curvaturas constantes y obtenemos (2) o bien  $C_1^{-1}(\{0\})$  es un conjunto de curvas y, por tanto,  $\bar{f}_1 = f_2$  sobre  $\Sigma \setminus C_1^{-1}(\{0\})$  de donde también es cierto sobre  $\Sigma$ .

Estudiemos finalmente el tercer caso, i.e.,  $C_1 = C_2$  no nula y  $\bar{f}_1 = f_2$ . Puesto que  $C_1$  depende sólo de  $x$  y  $(\Delta + F)(C_1) = 0$ , los ceros de  $C_1$  son aislados. Además ya que  $\bar{\gamma}_1^2 = \gamma_2^2$ ,  $\bar{f}_1 = f_2$  y las diferenciales de Hopf son holomorfas, se deduce que  $\Theta_1 = \mu(dz)^2$  y  $\Theta_2 = \bar{\mu}(dz)^2$  para cierto número complejo  $\mu$ . Esto nos asegura que

$$2\sqrt{2}|H|f_1 + \frac{\epsilon}{2}\gamma_1^2 = \mu.$$

En esta situación, no es difícil comprobar que, a partir de (I3)<sub>[p.96]</sub>,

$$\begin{aligned} u' &= C_1 \left( \frac{\text{Im}(\mu)}{2|H|^2} + \frac{\epsilon g}{\sqrt{2}|H|} \right), \\ e^{2u}(1 - C_1^2) &= 4|H|^2 + 2g^2, \quad g' = -\sqrt{2}e^{2u}|H|C_1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Procedemos ahora a integrar las ecuaciones de Frenet en este caso. En primer lugar, de (5.4)<sub>[p.94]</sub> se tiene que  $J_1 \Phi_z - J_2 \Phi_z = 2 \text{Re}(\gamma_1 \xi)$  y  $J_1 \Phi_z + J_2 \Phi_z = 2iC_1 \Phi_z + 2i \text{Im}(\gamma_1 \xi)$ . Así, teniendo en cuenta las definiciones de  $J_j$ , se tiene que  $(0, J\psi_z) = \text{Re}(\gamma_1 \xi)$  y  $(J\phi_z, 0) = iC_1 \Phi_z + i \text{Im}(\gamma_1 \xi)$ . De esta manera

$$J\psi_y = 0, \text{ i.e. } \psi(x, y) = \psi(x), \text{ y } J\phi_x = C_1 \phi_y. \quad (6.4)$$

Por otro lado, puesto que  $\bar{f}_1 = f_2$ , de las ecuaciones de Frenet se tiene

$$\Phi_{zz} = u' \Phi_z + 2\Re(f_1 \xi) + \epsilon \frac{e^{2u}(1 - C_1^2)}{4} \hat{\Phi},$$

lo cual implica, considerando la parte imaginaria de dicha ecuación, que  $\Phi_{xy} = u' \Phi_y$ . Esta ecuación es irrelevante para la componente  $\psi$ , pero para la componente  $\phi$ , la ecuación  $\phi_{xy} = u' \phi_y$  puede ser integrada para obtener

$$\phi(x, y) = e^{u(x)} F(y) + G(x), \quad (6.5)$$

para ciertas funciones vectoriales  $F$  y  $G$ .

De (6.4) y puesto que  $\Phi$  es conforme se sigue que

$$|\phi_x|^2 = C_1^2 e^{2u}, \quad |\phi_y|^2 = e^{2u} \quad \text{y} \quad \langle \phi_x, \phi_y \rangle = 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que  $\phi_{xy} = u'\phi_y$ , es fácil obtener

$$\phi_{yy} + \frac{u'}{C_1^2} \phi_x + \epsilon e^{2u} \phi = 0.$$

Esta ecuación junto a (6.5) asegura que la función  $F$  satisface la siguiente E.D.O.

$$F''(y) + \left( \frac{u'(x)^2}{C_1(x)^2} + \epsilon e^{2u(x)} \right) F(y) + \tilde{G}(x) = 0,$$

para cierta función vectorial  $\tilde{G}$ . De aquí, y derivando respecto a  $y$  y a  $x$ , se obtiene que  $0 = \left( \frac{u'(x)^2}{C_1(x)^2} + \epsilon e^{2u(x)} \right) F'(y)$ . Pero  $e^{2u} = |\Phi_y|^2 = |\phi_y|^2 = e^{2u} |F'|^2$ , lo que implica que  $|F'|^2 = 1$ . De las anteriores ecuaciones obtenemos finalmente que

$$\frac{u'(x)^2}{C_1(x)^2} + \epsilon e^{2u(x)} = a \in \mathbb{R}, \quad \tilde{G}(x) = -\tilde{G}_0 \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}_1^3), \quad (6.6)$$

para todo  $(x, y) \in \Sigma$ , con lo cual  $F$  cumple la siguiente E.D.O.

$$F''(y) + aF(y) - \tilde{G}_0 = 0.$$

La solución a dicha ecuación viene dada, en términos de la constante  $a$ , por

$$\begin{aligned} F(y) &= \cos(\sqrt{a}y)H_1 + \sin(\sqrt{a}y)H_2 + \frac{\tilde{G}_0}{a}, & a > 0, \\ F(y) &= \cosh(\sqrt{-a}y)H_1 + \sinh(\sqrt{-a}y)H_2 + \frac{\tilde{G}_0}{a}, & a < 0, \\ F(y) &= \frac{y^2}{2}\tilde{G}_0 + yH_1 + H_2, & a = 0. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} |H_1|^2 = |H_2|^2 = 1/a, & \quad \langle H_1, H_2 \rangle = 0, & a > 0, \\ |H_1|^2 = -|H_2|^2 = 1/a, & \quad \langle H_1, H_2 \rangle = 0, & a < 0, \\ |H_1|^2 = 1, |\tilde{G}_0| = 0, & \quad \langle H_1, \tilde{G}_0 \rangle = 0, & a = 0. \end{aligned}$$

Observemos que esto implica que el caso  $a < 0$  sólo es posible si  $\epsilon = -1$ . Usando esta información en (6.5) se obtiene

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= e^{u(x)} \cos(\sqrt{a}y)H_1 + e^{u(x)} \sin(\sqrt{a}y)H_2 + \hat{G}(x), \\ \phi(x, y) &= e^{u(x)} \cosh(\sqrt{-a}y)H_1 + e^{u(x)} \sinh(\sqrt{-a}y)H_2 + \hat{G}(x), \\ \phi(x, y) &= e^{u(x)} \frac{y^2}{2} \tilde{G}_0 + e^{u(x)} y H_1 + \hat{G}(x),\end{aligned}$$

dependiendo de si  $a$  es positivo, negativo o nulo respectivamente y para cierta función vectorial  $\hat{G}$ .

Ya que  $\langle \phi, \phi_y \rangle = 0$ , se deduce de las anteriores ecuaciones que

- $\langle \hat{G}(x), H_j \rangle = 0$ ,  $j = 1, 2$  si  $a \neq 0$ ,
- $\langle \hat{G}(x), H_1 \rangle = 0$  y  $\langle \hat{G}(x), \tilde{G}_0 \rangle = -e^{u(x)}$  si  $a = 0$ .

Observemos que el caso  $a = 0$  es sólo posible si  $\epsilon = -1$  puesto que  $|\tilde{G}_0|^2 = 0$  y  $\langle \hat{G}(x), \tilde{G}_0 \rangle \neq 0$ .

Ahora bien, salvo isometrías de  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{R}_1^3$  podemos elegir  $H_1 = (1/\sqrt{a}, 0, 0)$ ,  $H_2 = (0, 1/\sqrt{a}, 0)$  y  $\hat{G} = h(x)(0, 0, 1/\sqrt{a})$  si  $a > 0$ ,  $H_1 = (0, 0, 1/\sqrt{-a})$ ,  $H_2 = (0, 1/\sqrt{-a}, 0)$  y  $\hat{G} = h(x)(1/\sqrt{-a}, 0, 0)$  si  $a < 0$ , y  $H_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\tilde{G}_0 = (1, 0, 1)$  y  $\hat{G} = (\frac{1-h^2(x)}{2h(x)}, 0, \frac{1-h^2(x)}{2h(x)} + e^{u(x)})$  si  $a = 0$ , para cierta función  $h$ . En consecuencia, las anteriores ecuaciones se transforman en

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left( e^{u(x)} \cos(\sqrt{a}y), e^{u(x)} \sin(\sqrt{a}y), h(x) \right), \\ \phi(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \left( h(x), e^{u(x)} \sinh(\sqrt{-a}y), e^{u(x)} \cosh(\sqrt{-a}y) \right), \\ \phi(x, y) &= \left( \frac{e^{u(x)}}{2} y^2 + \frac{1-h^2(x)}{2h(x)}, e^{u(x)} y, \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{u(x)}}{2} y^2 + \frac{1-h^2(x)}{2h(x)} + e^{u(x)} \right),\end{aligned}$$

donde  $h(x)^2 + \epsilon e^{2u(x)} = a$  y según sea  $a$  positivo, negativo o cero respectivamente.

Para estudiar la curva  $\psi(x)$ , de (6.4) y puesto que  $|\phi_y|^2 = e^{2u}$  se tiene

$$\begin{aligned} |\psi_x|^2 &= e^{2u} - |\phi_x|^2 = e^{2u} - |J\phi_x|^2 = e^{2u} - C_1^2 |\phi_y|^2 = \\ &= e^{2u}(1 - C_1^2) = 4|H|^2 + 2g^2. \end{aligned}$$

De hecho, teniendo en cuenta la ecuación de Frenet para  $\Phi_{z\bar{z}}$  y (5.4)<sub>[p.94]</sub> se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{xx}, J\psi_x \rangle &= \langle 4\Phi_{z\bar{z}}, (0, J\psi_x) \rangle = 2e^{2u} \langle H, (0, J\psi_x) \rangle = \\ &= \sqrt{2}e^{2u}|H| \langle \xi + \bar{\xi}, (0, J\psi_x) \rangle = \frac{e^{2u}|H|}{\sqrt{2}|\gamma_1|^2} (\gamma_1 + \bar{\gamma}_1) \langle J\psi_x, J\psi_x \rangle = \\ &= \frac{1}{|\gamma_1|^2} (-2|H|^2 e^{2u}) |\psi_x|^2 = -\frac{4|H|^2}{1 - C_1^2} |\psi_x|^2 = -4|H|^2 e^{2u} \end{aligned}$$

con lo cual  $k_\psi(x) = -4|H|^2 e^{2u} / |\psi_x|^3$ .

Para comprobar que estos ejemplos son los dados en la Proposición 5.3<sub>[p.104]</sub>, basta con obtener la E.D.O. que cumple  $h$ . De (6.6) y ya que  $h^2 + \epsilon e^{2u} = a$ , se deduce que  $h = \pm \frac{\epsilon u'}{C_1}$  con lo cual (6.3) implica que  $h = \pm \left( \frac{\epsilon \mathfrak{J}(\mu)}{2|H|^2} + \frac{g}{\sqrt{2}|H|} \right)$ . De (6.3) de nuevo se tiene que  $h' = \mp e^{2u} C_1$  y usando una vez más (6.3) se deduce

$$\begin{aligned} (h')^2 &= C_1^2 e^{4u} = e^{2u} (e^{2u} - 4|H|^2 - 2g^2) = \\ &= (a - h^2) \left[ a - h^2 - \epsilon 4|H|^2 \left( 1 + \left( h \mp \epsilon \frac{\mathfrak{J}(\mu)}{2|H|^2} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, si definimos  $b = 4|H|^2$  y  $c = \pm \epsilon \frac{\mathfrak{J}(\mu)}{2|H|^2}$ , obtenemos que  $h$  satisface la ecuación (5.8)<sub>[p.104]</sub> y la curva  $\psi(x)$  cumple

$$|\psi'|^2 = |\psi_x|^2 = b(1 + (h - c)^2) \quad \text{y} \quad k_\psi = -\frac{\epsilon b(a - h^2)}{|\psi'|^3}.$$

Así, en este tercer caso la superficie es uno de los ejemplos descriptor en la Proposición 5.3<sub>[p.104]</sub> lo que concluye la demostración. ■

## 6.4 SUPERFICIES PMC CON DIFERENCIALES DE HOPF NULAS

**Teorema 6.4.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión de curvatura media paralela de una superficie orientable  $\Sigma$ . Las diferenciales de Hopf se anulan, i.e.  $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ , si, y sólo si, ocurre una de las tres posibilidades siguientes:*

1.  $\Phi(\Sigma)$  está contenida en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  como superficie de curvatura media constante con diferencial de Abresch-Rosenberg nula,
2.  $\epsilon = -1$ ,  $4|H|^2 = 1$  y localmente  $\Phi$  es el producto de dos hiperciclos  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{H}^2$  con curvaturas  $k_\alpha^2 + k_\beta^2 = 1$ ,
3.  $\epsilon = -1$ ,  $4|H|^2 < 1$  y localmente  $\Phi$  es  $\Phi_0 = (\phi_0, \psi_0) : ]-\pi/2, \pi/2[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ , donde

$$\phi_0(x, y) = \frac{1}{\cos x} (\sin x, \sinh y, \cosh y),$$

y  $\psi_0$  es la curva en  $\mathbb{H}^2$  dada por  $|\psi_0'(x)| = \frac{2|H|}{\sqrt{1-4|H|^2} \cos x}$   
y con curvatura  $k_0(x) = -\frac{\cos x}{2|H|}$ .

*Observación 6.4.*  $\Phi_0$  es un embebimiento conforme y la métrica inducida

$$\frac{1}{\cos^2 x} \left( \frac{1}{(1-4|H|^2)} dx^2 + dy^2 \right)$$

es completa y con curvatura  $4|H|^2 - 1$ . Además  $C_1^2 = C_2^2 = 1 - 4|H|^2$ .

En [ARo4, Leio7] Abresch, Rosenberg y Leite describieron, para  $|H|^2 < 1/4$ , un embebimiento  $\Phi_{ARL}$  de una inmersión isométrica de curvatura media constante de una superficie completa simplemente conexa con curvatura constante  $4|H|^2 - 1$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  y con diferencial de Abresch-Rosenberg nula. Así  $\Phi_0$  y  $\Phi_{ARL}$ , consideradas como superficies PMC en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ , son dos embebimientos isométricos de curvatura media paralela no congruentes (ya que la segunda componente de  $\Phi_0$  no es una geodésica) de una superficie completa simplemente conexa con curvatura constante  $4|H|^2 - 1$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ . Entonces tenemos que  $32|H|^2|f_j|^2 = |\gamma_j|$ ,  $j = 1, 2$ , lo que significa que

$$|H|^2 + \epsilon C_j^2 - K = \frac{(1 - C_j^2)^2}{16|H|^2}, \quad j = 1, 2. \quad (6.7)$$

De esta ecuación se sigue que

$$(C_1^2 - C_2^2)(16\epsilon|H|^2 + (1 - C_1^2) + (1 - C_2^2)) = 0.$$

Si  $\epsilon = 1$ , de la ecuación anterior se obtiene que  $C_1^2 = C_2^2$ . Si  $\epsilon = -1$ , sobre el conjunto abierto  $O = \{p \in \Sigma : C_1^2(p) \neq C_2^2(p)\}$ , se tiene

$$C_1^2 + C_2^2 = 2(1 - 8|H|^2). \quad (6.8)$$

Pero sobre  $O$ ,  $C_1 \nabla C_1 = -C_2 \nabla C_2$ , luego usando (5.11)<sub>[p.110]</sub> y (6.7) obtenemos

$$C_1^2(1 - C_1^2)(1 - C_1^2 - 4|H|^2)^2 = C_2^2(1 - C_2^2)(1 - C_2^2 - 4|H|^2)^2.$$

Usando ahora (6.8) se deduce que  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ , son las raíces de un polinomio no trivial de grado 8, lo que implica que  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ , son constantes en cada componente conexa de

O. Pero, usando de nuevo (5.11)<sub>[p.110]</sub>, se obtiene que o bien  $C_j^2 = 1$  o  $1 - C_j^2 = 4|H|^2$  sobre cada componente conexas de O. Esto contradice (6.8) sobre O, y por tanto  $O = \emptyset$  con lo cual, en este caso ( $\epsilon = -1$ ), también tenemos que  $C_1^2 = C_2^2$ .

En consecuencia  $\bar{K}^\perp = 0$  y del Teorema 6.3 se tienen tres posibilidades. En el primer caso,  $\Phi(\Sigma)$  está contenido en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  como superficie CMC y, del Lema 5.2<sub>[p.103]</sub>, tiene diferencial de Abresch-Rosenberg nula.

En el segundo caso,  $C_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , y  $\Phi$  es localmente uno de las superficies del Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub>. Puesto que  $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$ , la Observación 5.2<sub>[p.103]</sub> nos asegura que la inmersión es o bien un producto de dos hiperciclos apropiados o el producto de un horociclo y una geodésica, pero lo último es un caso particular de (1). Así tenemos (2).

Finalmente, en el tercer caso se tiene una de las superficies PMC descritas en la Proposición 5.3<sub>[p.104]</sub> con  $\Theta_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ . Pero entonces debe ser  $a = -1$  y  $c = 0$ , lo que implica que  $\epsilon = -1$ . En este caso, la ecuación (5.8)<sub>[p.104]</sub> se convierte en

$$(h')^2 = (1 - 4|H|^2)(1 + h^2)^2,$$

de donde  $4|H|^2 \leq 1$ .

Si  $4|H|^2 = 1$ , entonces  $h$  es constante y  $\Phi$  es congruente o bien al producto de una geodésica y un horociclo si  $h = 0$  o al producto de dos hiperciclos apropiados si  $h \neq 0$ . El primer caso, salvo congruencias, está incluido en (1) y el segundo, en (2).

Si  $4|H|^2 < 1$ , la solución de la anterior ecuación viene dada por  $h(x) = \tan(\sqrt{1 - 4|H|^2}x)$  con  $-\frac{\pi}{2} < \sqrt{1 - 4|H|^2}x < \frac{\pi}{2}$ . Ahora bien, reparametrizando la inmersión por  $(x, y) \rightarrow \sqrt{1 - 4|H|^2}(x, y)$ , la inmersión PMC asociada a  $h$  en la Proposición 5.3<sub>[p.104]</sub> es precisamente  $\Phi_0$ . Por tanto obtenemos (3).

El recíproco es claro. ■

**Corolario 6.1.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión de curvatura media paralela de una esfera  $\Sigma$ . Entonces, salvo congruencias,  $\Phi$  es una esfera de curvatura media constante CMC en  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .*

Los ejemplos descritos en el Teorema 6.4.(3) y los ejemplos obtenidos por [ARo4, Leio7] pueden caracterizarse de la siguiente forma:

**Corolario 6.2.** *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión de curvatura media paralela de una superficie orientable  $\Sigma$ . Entonces la curvatura extrínseca y normal extrínseca  $\bar{K}$  y  $\bar{K}^\perp$  son constantes si, y sólo si, ocurre una de las dos siguientes posibilidades:*

1.  $\bar{K} = \bar{K}^\perp = 0$  y  $\Phi$  es localmente congruente a alguna de las superficies descritas en el Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub>,
2.  $\bar{K} = 4|H|^2 - 1$ ,  $\bar{K}^\perp = 0$ , y  $\Phi$  es localmente congruente o bien al ejemplo dado en el Teorema 6.4.(3) o el ejemplo descrito por Leite en [Leio7].

*Demostración.* En primer lugar  $\bar{K}$  y  $\bar{K}^\perp$  son constantes si, y sólo si, en virtud de (5.3)<sub>[p.93]</sub>,  $C_j$  son constantes,  $j = 1, 2$ . Además, las superficies del Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub> cumplen que  $C_j = 0$ ,  $j = 1, 2$  y los ejemplos del Teorema 6.4.(3) y el dado por Leite satisfacen  $C_j^2 = 1 - 4|H|^2$  y  $\epsilon = -1$ .

Por otro lado, si  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ , son constantes, de las ecuaciones de integrabilidad (5.6)<sub>[p.96]</sub> deducimos que  $\sqrt{2}(1 - C_j^2)f_j = |H|\gamma_j^2$ ,  $j = 1, 2$ , y en consecuencia, calculando módulos y teniendo en cuenta (5.10)<sub>[p.109]</sub>,  $C_1^2 = C_2^2 = \epsilon K$ . Así o bien  $C_j = 0$ ,  $j = 1, 2$  y obtenemos (1) o  $C_1 = C_2$  es una constante no nula. En el segundo caso, de (5.12)<sub>[p.110]</sub> se tiene que  $\epsilon = -1$  y  $C_j^2 = 1 - 4|H|^2$ ,  $j = 1, 2$ . Usando toda esta información

podemos comprobar que  $\Theta_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ . El resultado es entonces consecuencia del Teorema 6.4 y [Leio7]. ■

## 6.5 NUEVOS EJEMPLOS DE SUPERFICIES CMC EN PRODUCTOS

Siguiente el Teorema 6.1, los ejemplos de superficies de curvatura media paralela de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  descritos en la Proposición 5.3<sub>[p.104]</sub> tienen asociados pares de superficies de curvatura media constantes de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ . Puesto que dichas superficies PMC no factorizan a través de superficies CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , los pares de superficies CMC no son congruentes.

Sea  $\Phi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una superficie CMC asociada a la solución  $h$  de (5.8)<sub>[p.104]</sub> en la Proposición 5.3<sub>[p.104]</sub>. Siguiendo la demostración del Teorema 6.3, los datos fundamentales asociados a esta inmersión son

$$\begin{aligned} u(z) &= \log \sqrt{\epsilon(\alpha - h^2(x))}, & C_1(z) &= C_1(\bar{z}) = C_2(z), \\ & & f_2(z) &= f_2(\bar{z}) = \bar{f}_1(z), \\ \gamma_1(z) &= -\bar{\gamma}_2(z) = \sqrt{2}|H|(1 + i(h(x) - c)). \end{aligned}$$

Así los datos fundamentales del par  $(\Phi_1, \Phi_2)$  de superficies CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  (ver la demostración del Teorema 6.1) vienen dados por

$$\begin{aligned} u(z), & \quad \nu_1(z) = \nu_1(\bar{z}) = \nu_2(z), \\ p_2(z) &= p_2(\bar{z}) = \bar{p}_1(z), \quad A_1(z) = \bar{A}_2(z) \end{aligned}$$

Puesto que la aplicación  $G : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \times \mathbb{R}$  definida por  $G(z) = \bar{z}$  es una isometría de la métrica inducida  $g = \epsilon(\alpha -$

$h^2(x))(dx^2 + dy^2)$ , es fácil comprobar que  $\Phi_1 \circ G$  es una superficie CMC con los mismos datos fundamentales que  $\Phi_2$ , y por tanto  $\Phi_1 \circ G$  y  $\Phi_2$  son inmersiones congruentes, i.e.,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son débilmente congruentes. De esta manera sólo hay una inmersión CMC asociada a cada inmersión PMC de la Proposición 5.3<sub>[p.104]</sub>. En este caso también es posible integrar las ecuaciones de Frenet de dichas inmersiones, obteniendo la siguiente familia de ejemplos.

**Proposición 6.1.** Sean  $a, b, c$  números reales con  $b > 0$  y  $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una solución no constante de la ecuación (5.8)<sub>[p.104]</sub> cumpliendo  $\epsilon(a - h^2(x)) > b$ , para cualquier  $x \in I$ .

Sea  $\eta(x, y) = \sqrt{b} \left( y + \int_{x_0}^x (h(t) - c) dt \right)$  y  $\psi : I \times \mathbb{R} \rightarrow M^2(\epsilon)$  dada por

1. Si  $E = a - \epsilon b > 0$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \sqrt{\epsilon(E - h(x)^2)} \cos(\sqrt{E}f), \right. \\ \left. \sqrt{\epsilon(E - h(x)^2)} \sin(\sqrt{E}f), h(x) \right)$$

2. Si  $E < 0$  (lo que implica que  $\epsilon = -1$ )

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-E}} \left( h(x), \sqrt{h(x)^2 - E} \sinh(\sqrt{-E}f), \right. \\ \left. \sqrt{h(x)^2 - E} \cosh(\sqrt{-E}f) \right)$$

3. Si  $E = 0$  (lo que implica que  $\epsilon = -1$ )

$$\psi(x, y) = h(x) \left( f^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{h(x)^2}, f, f^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{h(x)^2} \right)$$

Entonces  $\Psi = (\psi, \eta) : I \times \mathbb{R} \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  es una inmersión CMC, donde en los tres casos

$$f(x, y) = y + \int_{x_0}^x \frac{b(c - h(t))}{\epsilon(E - h^2(t))} dt$$

Todos los ejemplos descritos anteriormente satisfacen  $4|H|^2 = b$ , son inmersiones conformes con métrica inducida dada por  $\epsilon(a - h^2(x))(dx^2 + dy^2)$  y su diferencial de Abresch-Rosenberg está dada por

$$\Theta_{AR} = \frac{\epsilon b}{8} (a + 1 - c^2 - 2ic) (dz)^2$$

Observación 6.5.

1. Puesto que  $\epsilon(a - h^2(x)) > b > 0$  los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  deben de cumplir (5.9)<sub>[p.107]</sub>. Recíprocamente, si  $a$ ,  $b$  y  $c$  verifican (5.9)<sub>[p.107]</sub> entonces existe una solución no constante  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\epsilon(a - h^2(x)) > 0$ . De (5.8)<sub>[p.104]</sub>  $\epsilon(a - h^2(x)) - b \geq 0$  con lo cual, puesto que  $h$  no es constante, existe  $I' \subseteq I$  tal que  $\epsilon(a - h^2(x)) - b > 0$ . Como consecuencia  $\epsilon(a - h^2(x)) > b$  (para cierto intervalo  $I'$  apropiado) si, y sólo si,  $a$ ,  $b$  y  $c$  cumplen (5.9)<sub>[p.107]</sub>.
2. Todos estos ejemplos son invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías  $\{I(\theta) \times \tau_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$  de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , donde  $\tau_\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\tau_\theta(t) = t + \theta\sqrt{b}$  (para  $a \neq 0$ ),  $\tau_\theta(t) = t + \theta\frac{\sqrt{b}}{2}$  (para  $a = 0$ ) e  $I(\theta) : M^2(\epsilon) \rightarrow M^2(\epsilon)$  es la isometría descrita en la observación 5.3<sub>[p.105]</sub>.(2), i.e., se trata de ejemplos helicoidales, esto es, invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  que no deja fijo punto a punto el factor  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* En primer lugar, es fácil comprobar que, en los tres casos,

$$\begin{aligned} |\psi_x|^2 &= \epsilon(\alpha - h^2(x)) - b(h(x) - c)^2, \\ |\psi_y|^2 &= \epsilon(\alpha - h^2(x)) - b, \\ \langle \psi_x, \psi_y \rangle &= -b(h(x) - c), \\ \langle \psi_x, \psi_{xy} \rangle &= 0, \quad \langle \psi_y, \psi_{xy} \rangle = -\epsilon h(x)h'(x). \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta la definición de  $\eta$  y que  $\Psi = (\psi, \eta)$ , se deduce

$$|\Psi_x|^2 = |\Psi_y|^2 = \epsilon(\alpha - h^2(x)), \quad \langle \Psi_x, \Psi_y \rangle = 0,$$

esto es,  $\Psi$  es una inmersión conforme con factor conforme  $\epsilon(\alpha - h^2(x))$ . Por tanto su vector curvatura media viene dado por  $H = (\Psi_{xx} + \Psi_{yy})^T / 2\epsilon(\alpha - h^2(x))$ , siendo  $()^T$  la parte tangente a  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ . De esta manera, mediante un cálculo directo se tiene

$$H(x, y) = \frac{\sqrt{b}}{2} \left( \frac{\sqrt{b}}{h'(x)} ((c - h(x))\psi_x - \psi_y), \frac{h'(x)}{\epsilon(\alpha - h^2(x))} \right)$$

De ahí se deduce que  $\Psi$  es una inmersión CMC con  $|H|^2 = b/4$  y es inmediato comprobar que la diferencial de Abresch-Rosenberg es:

$$2\Theta_{AR}(z) = \frac{\epsilon b}{4} (\alpha + 1 - c^2 - 2ic)(dz)^2$$

■

Del Teorema 6.1 y el Teorema 6.3 se obtiene el siguiente resultado de rigidez para superficies CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .

**Corolario 6.3.** Sean  $\Phi_1, \Phi_2 : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  dos inmersiones isométricas de curvatura media constante no congruentes

de una superficie simplemente conexa  $\Sigma$  con la misma curvatura media  $H_1 = H_2$  y las mismas curvaturas seccionales extrínsecas  $\bar{K}_1 = \bar{K}_2$ . Entonces  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son débilmente congruentes, i.e., existe una isometría  $G$  de  $(\Sigma, g)$  tal que  $\Phi_1 \circ G$  y  $\Phi_2$  son congruentes, y

- $\Phi_1$  es uno de los ejemplos de la Proposición 6.1 o bien
- $\Phi_1$  es un cilindro sobre una curva de curvatura constante de  $M^2(\epsilon)$ .

*Demostración.* Del Teorema 6.1, sea  $\Phi : (\Sigma, g) \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión isométrica PMC asociada al par  $(\Phi_1, \Phi_2)$ . Entonces su curvatura normal extrínseca viene dada por  $2\bar{K}^\perp = \epsilon(C_1^2 - C_2^2) = (\bar{K}_1 - \bar{K}_2) = 0$ . Así, puesto que  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  no son congruentes, el Teorema 6.3 afirma que  $\Phi$  es o bien uno de los ejemplos de la Proposición 5.3<sup>[p.104]</sup> o el producto de dos curvas de curvaturas constantes. Al inicio de esta sección se ha probado que, en el primer caso,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son débilmente congruentes y  $\Phi_1$  es uno de los ejemplos de la Proposición 6.1. En el segundo caso, la observación 6.1 finaliza la demostración ■

*Observación 6.6.* El problema de rigidez para superficies inmersas en los espacios homogéneos riemannianos con grupo de isometrías de dimensión 4 fue tratado en un contexto más general del presentado en el anterior resultado por Gálvez, Martínez y Mira [GMMo8]. La principal contribución en este caso particular de superficies de curvatura media constante es la clasificación de las superficies de la Proposición 6.1 que, como se afirma en la Observación 6.5, se trata de superficies de tipo helicoidal, i.e., invariantes por un grupo 1-paramétrico de isometrías de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  que no deja fijo el eje vertical punto a punto.

De entre los ejemplos descritos en la Proposición 6.1 existen unos que son de interés particular y que vamos a describir a continuación.

**Ejemplo 6.1.** Consideremos la familia 1-paramétrica de inmersiones CMC de la Proposición 6.1 asociada a la inmersión PMC dada en el Ejemplo 5.2 ( $\epsilon = -1$ ,  $c = 0$ ,  $b = 1$ ). Siguiendo la misma notación, para cada  $\lambda > 0$ ,  $\Psi_\lambda = (\psi_\lambda, \eta_\lambda) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , donde:

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x, y) &= \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} \left( \sinh x, \cosh x \sinh y + \frac{\cosh y}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \right. \\ &\quad \left. \cosh x \cosh y + \frac{\sinh y}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \\ \eta_\lambda(x, y) &= \frac{1}{\lambda} (y + \sqrt{1 + \lambda^2} \cosh x), \end{aligned}$$

es un *embebimiento isométrico conforme CMC de la superficie completa*

$$\left( \mathbb{R}^2, \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \cosh^2 x (dx^2 + dy^2) \right)$$

en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  con  $H = 1/2$ . Su diferencial de Abresch-Rosenberg viene dada por  $\Theta_{AR} = (dz)^2/8$ .

**Ejemplo 6.2.** Consideremos la inmersión CMC de la Proposición 6.1 asociada al ejemplo  $\Phi_0$  del Teorema 6.4. Siguiendo la misma notación, para cada número real  $0 < H < 1/2$ ,  $\Psi_0 = (\psi_0, \eta_0) : ]-\pi/2, \pi/2[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - 4H^2}} \left( \tan x, \frac{\sinh y}{\cos x} + 2H^2 e^{-y} \cos x, \right. \\ &\quad \left. \frac{\cosh y}{\cos x} - 2H^2 e^{-y} \cos x \right) \\ \eta_0(x, y) &= \frac{2H}{\sqrt{1 - 4H^2}} (y - \log \cos x), \end{aligned}$$

es un *embebimiento isométrico conforme CMC con curvatura media*  $H$  del plano hiperbólico  $(]-\pi/2, \pi/2[ \times \mathbb{R}, 1/(1-4H^2) \cos^2 x)$  con curvatura  $4H^2 - 1$  en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Su diferencial de Abresch-Rosenberg es nula y se trata de una reparametrización conforme del ejemplo de Leite [Leio7].

**Ejemplo 6.3.** Vamos a obtener ahora ejemplos de toros de curvatura media constante en  $S^2 \times S^1$ . Para ello, es preciso obtener en primer lugar soluciones periódicas de la E.D.O. (5.8)<sub>[p.104]</sub>. Sea  $\epsilon = 1$ ,  $c = 0$  y, de (5.9)<sub>[p.107]</sub>,  $a > b$ . Entonces la ecuación (5.8)<sub>[p.104]</sub> se transforma en

$$(h')^2(x) = (a - h^2(x)) (a - b - (1 + b)h^2(x)) = q(h).$$

Puesto que las raíces del polinomio  $q$  son

$$\pm\sqrt{a}, \quad \pm\sqrt{\frac{a-b}{1+b}},$$

la fórmula 219.00 en [BF71] afirma que la solución  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la anterior ecuación con  $h(0) = 0$  es

$$h(x) = \sqrt{\frac{a-b}{1+b}} \operatorname{sn}(\sqrt{a(1+b)}x)$$

donde  $\operatorname{sn}$  es la función de Jacobi *seno amplitud* de módulo  $m^2 = (a-b)/a(1+b)$ . Estas soluciones son periódicas con periodo  $4K(m)/\sqrt{a(1+b)}$  siendo  $K(m)$  la integral elíptica completa de primera especie.

En este caso

$$\begin{aligned} \epsilon(a - h^2(x)) &= a(1 - m^2 \operatorname{sn}^2(\sqrt{a(1+b)}x)) \\ &= a \operatorname{dn}^2(\sqrt{a(1+b)}x) > 0, \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $\operatorname{dn}$  es la función de Jacobi *delta amplitud*. Más aún,  $\epsilon(a - h^2(x)) > b$  puesto que el mínimo

de la función  $\text{dn}$  es  $\sqrt{1-m^2}$  y es fácil comprobar que  $a(1-m^2) > b$  si, y sólo si,  $a > b$ .

Ahora bien, la función  $f$  que aparece en la Proposición 6.1 viene dada por

$$f(x, y) = y + \frac{1}{\sqrt{a-b}} \arctan \left( \frac{\text{cn}(\sqrt{a(1+b)}x)}{\sqrt{a} \text{dn}(\sqrt{a(1+b)}x)} \right),$$

donde  $\text{cn}$  es la función de Jacobi *coseno amplitud*. Así, salvo la reparametrización  $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{a(1+b)}}(x, y)$ , la inmersión CMC asociada  $\Phi_{a,b} = (\phi_{a,b}, \eta_{a,b}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  viene dada por:

$$\begin{aligned} \phi_{a,b}(x, y) &= \left( \frac{\sqrt{a} \text{dn} x \cos(my) - \text{cn} x \sin(my)}{\sqrt{1+a}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{a} \text{dn} x \sin(my) + \text{cn} x \cos(my)}{\sqrt{1+a}}, \frac{\text{sn} x}{\sqrt{1+b}} \right) \\ \eta_{a,b}(x, y) &= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1+b}} \log(\text{dn} x - m \text{cn} x) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a(1+b)}} y. \end{aligned}$$

Consideremos la isometría local  $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}} e^{i \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b}} t} \in \mathbb{S}^1(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}})$  y la inmersión CMC

$$\hat{\Phi}_{a,b} = (\phi_{a,b}, \hat{\eta}_{a,b}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}\right),$$

donde  $\hat{\eta}_{a,b}(x, y) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}} e^{i \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{1+b}} \log(\text{dn} x - m \text{cn} x)} e^{i m y}$ .

Es claro que  $\hat{\Phi}$  es invariante bajo el grupo  $G_{a,b}$  de transformaciones de  $\mathbb{R}^2$  generado por

$$(x, y) \mapsto (x + 4K(m), y), \quad (x, y) \mapsto \left(x, y + \frac{2\pi}{m}\right).$$

Si  $T_{a,b} = \mathbb{R}^2/G_{a,b}$  es el toro asociado y  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{a,b}$  la proyección, entonces la inmersión inducida

$$\tilde{\Phi}_{a,b} : T_{a,b} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}\right), \quad P(x, y) \mapsto \hat{\Phi}_{a,b}(x, y),$$

define una inmersión conforme CMC del toro  $T_{a,b}$  en  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}\right)$ .

Vamos a ver que  $\tilde{\Phi}_{a,b}$  es un embebimiento. De hecho, si  $\tilde{\Phi}_{a,b}(P(x, y)) = \tilde{\Phi}_{a,b}(P(\hat{x}, \hat{y}))$ , con  $x, \hat{x} \in [0, 4K(m)[$ ,  $y, \hat{y} \in [0, 2\pi/m[$ , entonces se tiene que  $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn} \hat{x}$  y por tanto o bien  $x = \hat{x}$  or  $x, \hat{x} \in [0, 2K(m)]$  y  $x + \hat{x} = 2K(m)$  o  $x, \hat{x} \in [2K(m), 4K(m)]$  y  $x + \hat{x} = 6K(m)$ . En el primer caso, teniendo en cuenta cómo es la inmersión obtenemos que  $y = \hat{y}$ . En los otros dos casos,  $\operatorname{cn} \hat{x} = -\operatorname{cn} x$  y  $\operatorname{dn} \hat{x} = \operatorname{dn} x$ . Así, teniendo en cuenta de nuevo cómo es la inmersión obtenemos fácilmente que

$$\begin{aligned} \cos(m\hat{y} - my) &= \frac{a \operatorname{dn}^2 x - \operatorname{cn}^2 x}{a \operatorname{dn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x}, \\ \cos(m\hat{y} - my) &= \cos \log \left( \left( \frac{\operatorname{dn} x - k \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x + k \operatorname{cn} x} \right)^{\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{1+b}}} \right). \end{aligned}$$

De estas ecuaciones obtenemos  $x = K(m)$  o  $x = 3K(m)$ , lo que implica que  $\hat{x} = x$ . De nuevo,  $y = \hat{y}$ , y así la inmersión es de hecho un embebimiento.

El anterior argumento queda recogido en la siguiente proposición

**Proposición 6.2.** *Para cada par de números reales  $a$  y  $b$  con  $0 < b < a$ , la inmersión  $\hat{\Phi}_{a,b} : T_{a,b} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}\right)$  descrita anteriormente es un embebimiento conforme CMC de un toro*

rectangular  $T_{a,b}$  con curvatura media  $H = \sqrt{b}/2$ . Su diferencial Abresch-Rosenberg es

$$\Theta_{AR} = \frac{b(1+a)}{8a(1+b)}(dz)^2.$$

*Observación 6.7.* Es claro que  $\tau : T_{a,b} \rightarrow T_{a,b}$  definida por

$$\tau(P(x, y)) = P\left(-x, y + \frac{\pi}{m}\right)$$

es una isometría de  $T_{a,b}$  con  $\tau^2 = \text{Id}$ . Ya que

$$\tilde{\Phi}_{a,b}(\tau P(x, y)) = -\tilde{\Phi}_{a,b}(P(x, y))$$

para cualesquiera  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{\Phi}_{a,b}$  induce un embebimiento CMC de la botella de Klein  $B_{a,b} = T_{a,b}/\langle \tau \rangle$  en  $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^1(\sqrt{b}/\sqrt{a-b})$ , donde  $\mathbb{RP}^2$  denota el plano proyectivo real de curvatura constante 1 y  $\mathbb{RP}^1(\sqrt{b}/\sqrt{a-b})$  denota la recta proyectiva real de curvatura constante  $\sqrt{a-b}/\sqrt{b}$ .

## 6.6 SUPERFICIES PMC COMPACTAS

En esta sección vamos a probar algunas propiedades de las superficies de curvatura media paralela *compactas* de  $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión PMC de una superficie orientable  $\Sigma$ . Definimos dos campos de vectores  $X_j$ ,  $j = 1, 2$ , tangentes a  $\Sigma$  como las componentes tangentes de  $J_j \tilde{H}$ ,

$$J_1 \tilde{H} = X_1 + C_1 H, \quad J_2 \tilde{H} = X_2 - C_2 H.$$

En particular tenemos que  $|X_j|^2 = |H|^2(1 - C_j^2)$ ,  $j = 1, 2$ . Derivando en dichas ecuaciones y tomando parte tangente se sigue que

$$\nabla_\nu X_1 = C_1 A_{H\nu} - C_1 J^\Sigma A_{\tilde{H}\nu}, \quad \nabla_\nu X_2 = -C_2 A_{H\nu} - C_2 J^\Sigma A_{\tilde{H}\nu}$$

para cualquier vector tangente  $v$ , donde  $J^\Sigma$  es la estructura compleja de la superficie de Riemann  $\Sigma$ . De ahí, obtenemos que la divergencia de  $X_j$  y la diferencial exterior de la 1-forma  $\alpha^{X_j}(v) = \langle X_j, v \rangle$  vienen dadas por

$$\operatorname{div} X_j = (-1)^{j+1} 2C_j |H|^2, \quad d\alpha^{X_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (6.9)$$

Usando las anteriores propiedades junto con  $|X_j|^2 = |H|^2(1 - C_j^2)$ , la fórmula de Bochner se transforma en

$$\frac{1}{2} \Delta(1 - C_j^2) = K(1 - C_j^2) + (-1)^{j+1} 2 \langle \nabla C_j, X_j \rangle + \frac{|\nabla X_j|^2}{|H|^2},$$

para  $j = 1, 2$ . Finalmente, teniendo en cuenta la expresión para la derivada covariante de  $X_j$  se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta(1 - C_j^2) = K(1 - C_j^2) + (-1)^{j+1} 2 \langle \nabla C_j, X_j \rangle + \\ + 2C_j^2 (\epsilon C_j^2 + 2|H|^2 - K), \end{aligned} \quad (6.10)$$

Por otro lado, puesto que  $\Delta(1 - C_j^2) = -2C_j \Delta C_j - 2|\nabla C_j|^2$ ,  $j = 1, 2$ , de (5.12)<sub>[p.110]</sub> y (6.10), obtenemos

$$|\nabla C_j|^2 = (1 - C_j^2)(\epsilon C_j^2 - K) + (-1)^j 2 \langle \nabla C_j, X_j \rangle, \quad j = 1, 2. \quad (6.11)$$

De estas fórmulas es posible deducir las siguientes consecuencias cuando la superficie es compacta.

**Proposición 6.3.** *Sea  $\Phi = (\phi, \psi) : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$  una inmersión con curvatura media paralela de una superficie compacta y orientable. Entonces:*

1.  $\int_\Sigma C_j \, dA = 0$ ,  $j = 1, 2$ .
2. Si  $\epsilon = 1$ , entonces los grados de  $\phi$  y  $\psi$  son cero.

3. Si  $K \geq 0$ , entonces o bien  $\Phi(\Sigma)$  es una esfera CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$  con  $4|H|^2 \geq 1$  cuando  $\epsilon = 1$  y  $|H|^2 \geq 1$  si  $\epsilon = -1$ , o  $\Phi(\Sigma)$  es un toro del Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub>.
4. Existe un punto  $p$  con  $K(p) \geq 0$  si  $\epsilon = 1$  y  $K(p) \geq -1$  si  $\epsilon = -1$ .
5. Si alguna de las diferenciales de Hopf  $\Theta_j$ ,  $j = 1, 2$ , se anula, entonces también se anula la otra y, por tanto,  $\Phi(\Sigma)$  es una esfera CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Integrando la primera ecuación de (6.9) se prueba (1). Si  $\epsilon = 1$ , entonces  $\phi, \psi : \Sigma \rightarrow S^2$  son aplicaciones tales que (ver (5.2)<sub>[p.92]</sub>)

$$\phi^* \omega = \frac{C_1 + C_2}{2} \omega_\Sigma, \quad \psi^* \omega = \frac{C_1 - C_2}{2} \omega_\Sigma,$$

lo que prueba (2) usando (1).

Si  $K \geq 0$ , entonces o bien  $\Sigma$  es una esfera y el Corolario 6.1 prueba que es una esfera CMC de  $M^2(\epsilon) \times \mathbb{R}$ , o  $\Sigma$  es un toro llano. En el primer caso (6.7) se transforma en

$$K = H^2 + \epsilon v^2 - \frac{1}{16H^2} (1 - v^2)^2.$$

Pero de (3.3)<sub>[p.36]</sub> y usando que  $\eta$  tiene un máximo y un mínimo obtenemos que  $v$  siempre toma los valores 1 y  $-1$ . Si  $\epsilon = 1$  y  $p$  un punto con  $v(p) = 0$  entonces, teniendo en cuenta la anterior ecuación,  $K(p) \geq 0$  implica  $4H^2 \geq 1$ . Si  $\epsilon = -1$  y  $p$  un punto con  $v^2(p) = 1$  entonces, teniendo en cuenta la anterior ecuación,  $K(p) \geq 0$  implica  $H^2 \geq 1$ . Recíprocamente, si  $4H^2 \geq 1$  si  $\epsilon = 1$  y  $H^2 \geq 1$  si  $\epsilon = -1$ , la ecuación previa afirma que  $K \geq 0$ .

En el segundo caso, de (6.9) tenemos que

$$0 = \int_{\Sigma} \operatorname{div}(C_j X_j) \, dA = \int_{\Sigma} \langle \nabla C_j, X_j \rangle \, dA + (-1)^{j+1} 2|H|^2 \int_{\Sigma} C_j^2 \, dA, \quad (6.12)$$

lo cual, junto con la integración de (6.10), produce

$$0 = \int_{\Sigma} (K(1 - 3C_j^2) + 2\epsilon C_j^4) \, dA. \quad (6.13)$$

Puesto que  $\Sigma$  es llana, obtenemos que  $C_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , y por tanto  $\Phi(\Sigma)$  es un toro del Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub>.

Ahora probaremos (4). De (6.11), si  $p$  es un punto crítico de  $C_j$  entonces o bien  $C_j^2(p) = 1$  o  $K(p) = \epsilon C_j^2(p)$ . Si  $\epsilon = 1$  y  $K < 0$  o  $\epsilon = -1$  y  $K < -1$  la segunda posibilidad no puede ocurrir con lo cual todos los puntos críticos cumplen  $C_j^2(p) = 1$ . Teniendo en cuenta la Proposición 5.4<sub>[p.110]</sub>, la función  $C_j$  es una función de Morse sólomente con máximos y mínimos como puntos críticos. Así la superficie debe de ser una esfera, pero el teorema de Gauss-Bonnet produce en dicho caso una contradicción lo que prueba (4).

Finalmente si alguna de las diferenciales de Hopf se anulan, i.e.,  $\Theta_1 = 0$ , entonces de (5.11)<sub>[p.110]</sub>, (6.11) y (6.12) se tiene que

$$16|H|^2 \int_{\Sigma} K \, dA = \int_{\Sigma} (4|H|^2 + \epsilon(1 - C_1^2))^2 \, dA.$$

En particular  $\int_{\Sigma} K \, dA \geq 0$  y de nuevo o bien  $\Sigma$  es una esfera y, por tanto,  $\Theta_2 = 0$  o  $\Sigma$  es un toro llano y de (6.13)  $C_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , luego se trata de uno de los toros del Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub>. Pero en dicho caso la ecuación anterior implica que  $4|H|^2 + \epsilon = 0$  lo cual, en virtud del Ejemplo 5.1<sub>[p.101]</sub>, es imposible. ■

## Parte IV

### ESTABILIDAD DE SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE



## ESTABILIDAD DE LAS ESFERAS Y LOS TOROS DE HOPF

# 7

*Las cosas se escriben  
como son.*

### 7.1 INTRODUCCIÓN

Las superficies de curvatura media constante y más concretamente las superficies mínimas aparecen de forma natural como puntos críticos de un problema variacional. En concreto, una inmersión  $\Phi : \Sigma \rightarrow (M^3, g)$  de una superficie<sup>1</sup> compacta  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H$  si, y sólo si, es punto crítico del funcional área  $A$  para cualquier variación de soporte compacto que *preserve* el volumen. Por variación entendemos una aplicación diferenciable  $\Phi : \Sigma \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow M^3$  tal que  $\Phi_t = \Phi(-, t) : \Sigma \rightarrow M^3$  es inmersión para todo  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  y  $\Phi_0 = \Phi(-, 0)$  es la inmersión original. La condición *preservar el volumen* se traduce en términos de la variación en la propiedad

$$\int_{\Sigma} f \, dA = 0$$

---

<sup>1</sup> Aunque la exposición que presentamos aquí es cierta para hipersuperficies de variedades de dimensión arbitraria no necesariamente compacta nos hemos ceñido, con el fin de clarificar, al caso de superficies compactas puesto que es el que nos ocupa.

siendo  $f$  la parte normal del campo variacional  $\partial\Phi_t/\partial t|_{t=0}$ , esto es,

$$f = \left\langle \frac{\partial\Phi_t}{\partial t} \Big|_{t=0}, N \right\rangle$$

donde  $N$  es un normal unitario a la superficie.

Cuando la superficie está embebida en  $\mathbb{R}^3$  este concepto equivale a que el volumen *encerrado* por cualquier superficie de la variación permanece constante. En el caso general dicha interpretación no tiene sentido. Ahora bien, la diferencia de volumen encerrado por la inmersión  $\Phi_0$  y  $\Phi_t$  podemos calcularla mediante la integral

$$V(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \Phi^* \omega \, dA,$$

siendo  $\omega$  la 3-forma de volumen de  $M$ . Es posible comprobar entonces que

$$V'(0) = \int_{\Sigma} f \, dA,$$

Observemos que dicha expresión tiene sentido incluso si la superficie no está embebida en  $\mathbb{R}^3$  con lo cual es natural tomarla como definición en este caso.

**Definición 7.1.** Una superficie de curvatura media constante diremos que es *estable* si es un mínimo local del funcional área para variaciones que preservan el volumen, esto es,  $A''(0)$  es no negativa para variaciones  $\Phi_t : \Sigma \rightarrow M^3$  tales que  $\int_{\Sigma} f = 0$ , siendo  $A(t)$  el área de  $(\Sigma, \Phi_t^*g)$ , ' la derivada respecto de  $t$  y  $f$  la parte normal del campo variacional asociado a  $\Phi_t$ .

Ahora bien, es bien conocido que

$$A''(0) = - \int_{\Sigma} f \Delta f + (|\sigma|^2 + \overline{\text{Ric}} N) f^2 \, dA$$

siendo  $\Delta$  el laplaciano de la métrica inducida sobre  $\Sigma$ ,  $\sigma$  la segunda forma fundamental de la inmersión,  $\overline{\text{Ric}}$  el tensor de Ricci de  $M^3$ ,  $N$  un vector normal unitario y  $f$  la parte normal del campo de variación. Al operador

$$L = \Delta + |\sigma|^2 + \overline{\text{Ric}}(N)$$

se le llama *operador de Jacobi*. Representaremos por  $Q$  a la forma cuadrática asociada a  $L$ , esto es,

$$Q(f) = - \int_{\Sigma} fLf = A''(0).$$

Así

$\Sigma$  es estable si  $Q(f) \geq 0$  para cualquier función diferenciable  $f$  con  $\int_{\Sigma} f dA = 0$ .

Nuestro estudio va a centrarse en la estabilidad de las superficies de curvatura media constante inmersas en ciertos espacio homogéneo riemanniano con grupo de isometrías de dimensión 4. En este caso particular el operador de estabilidad  $L$  se escribe, gracias a la ecuación de Gauss (3.1)<sub>[p.34]</sub> y a la expresión del tensor de Ricci (2.1)<sub>[p.16]</sub>, como:

$$L = \Delta - 2K + 4H^2 + \kappa + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2 \quad (7.1)$$

donde  $H$  representa la curvatura media y  $K$  la curvatura de Gauss de la superficie.

En este capítulo vamos a estudiar la estabilidad de las esferas de curvatura media constante de las esferas de Berger, el grupo de Heisenberg  $\text{Nil}_3$  y el grupo  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  (Teorema 7.1). La idea principal de la demostración es constatar que la forma cuadrática de la segunda variación del área de cualquier esfera con curvatura media constante de un espacio homogéneo riemanniano con grupo de isometrías de dimensión 6 o 4 es siempre la misma (Proposición 7.1). Además vamos a estudiar la estabilidad de los toros de Hopf (cf. Sección 3.2<sub>[p.37]</sub>).

## 7.2 ESTABILIDAD DE LAS ESFERAS CMC

Como se puso de manifiesto en el Capítulo 3 (cf. Teoremas 3.1<sub>[p.48]</sub> y 3.2<sub>[p.62]</sub>) las esferas de curvatura media constante inmersas en las esferas de Berger y en  $Sl_2(\mathbb{R})$  son superficies invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías. Además mostramos que:

- Para cualquier número real  $H \geq 0$  existe, salvo congruencias, una única esfera de curvatura media constante  $H$ ,  $\mathcal{S}_{(\kappa, \tau)}(H)$ , inmersa en  $S_b^3(\kappa, \tau)$  (cf. Teorema 3.1<sub>[p.48]</sub>).
- Para cada número real  $H$  tal que  $4H^2 + \kappa > 0$  existe, salvo congruencias, una única esfera de curvatura media  $H$ ,  $\hat{\mathcal{S}}_b(\kappa, \tau)$ , inmersa en  $Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$  (cf. Teorema 3.2<sub>[p.62]</sub>).
- Para cada número real  $H > 0$  existe, salvo congruencias, una única esfera  $\tilde{\mathcal{S}}_\tau(H)$  inmersa en  $Nil_3(\tau)$  (cf. [Tom93]).

La siguiente proposición relaciona las formas cuadráticas asociadas a la segunda variación del funcional área de cualquier esfera CMC de cualquier espacio  $E(\kappa, \tau)$ .

**Proposición 7.1.** *La forma cuadrática asociada al operador de Jacobi de cualquier esfera de curvatura media constante  $H$  inmersa en  $E(\kappa, \tau)$  (cf. Definición 2.1<sub>[p.15]</sub>) es independiente de  $\kappa$ ,  $\tau$  y  $H$ . En particular su índice es uno, su nulidad es tres y  $\int f dA = 0$  para cualquier función de Jacobi.*

*Demostración.* Sean  $\Phi : \bar{C} \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una esfera de curvatura media constante  $H$  en  $E(\kappa, \tau)$ . Consideremos para esta inmersión el parámetro conforme  $z$  dado en

el Lema 3.5<sub>[p.69]</sub>. Respecto de dicho parámetro el operador de Jacobi  $L$  se escribe de la forma

$$L = \Delta + q, \quad \text{siendo } q(z) = \frac{8e^{-2u(z)}}{(|z|^2 + 1)^2},$$

sin más que tener presente la descripción de  $L$  dada en (7.1), la expresión para el factor conforme  $e^{2u}$  en dicho sistema de coordenadas (3.26)<sub>[p.69]</sub> y que  $K = -e^{-2u}u_{z\bar{z}}$ .

Supongamos entonces que  $\hat{\Phi} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow E(\hat{\kappa}, \hat{\tau})$  es otra inmersión con curvatura media constante  $\hat{H}$ . Entonces, gracias a lo anterior, su operador de Jacobi puede escribirse como  $\hat{L} = \hat{\Delta} + \hat{q}$ , donde  $\hat{q}(z) = 8e^{-2\hat{u}(z)}/(|z|^2 + 1)^2$ . Puesto que  $\hat{q}e^{2\hat{u}} = qe^{2u}$  y  $e^{2u}\Delta = \Delta_0 = e^{2\hat{u}}\hat{\Delta}$ , siendo  $\Delta_0$  el laplaciano asociado a la métrica estándar de  $\mathbb{R}^2$ , las formas cuadráticas  $\hat{Q}$  y  $Q$  de  $\hat{\Phi}$  y  $\Phi$  cumplen

$$\begin{aligned} \hat{Q}(f) &= \int_{\bar{\mathbb{C}}} -f(\hat{\Delta}f + \hat{q}f)e^{2\hat{u}} dz = \int_{\bar{\mathbb{C}}} -f(e^{2\hat{u}}\hat{\Delta}f + qe^{2u}f) dz \\ &= \int_{\bar{\mathbb{C}}} -f(e^{2u}\Delta f + qe^{2u}f) dz = Q(f), \end{aligned}$$

para cualquier función diferenciable  $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ . Así cualquier esfera de curvatura media constante inmersa en cualquier  $E(\kappa, \tau)$  tiene asociada la misma forma cuadrática para la segunda variación del funcional área. En particular, todas tienen el mismo índice y la misma nulidad. Puesto que la anterior propiedad se mantiene para una esfera de curvatura media constante inmersa en la esfera redonda  $S^3$ , cuyo índice es 1 y su nulidad es 3 obtenemos la primera afirmación de la proposición.

Para finalizar la demostración, puesto que  $E(\kappa, \tau)$  tiene 4 campos de Killing linealmente independientes y las esferas de curvatura media constante son invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías, entonces todas las funciones

de Jacobi provienen de campos de Killing del ambiente, i.e., si  $Lf = 0$  entonces existe un campo de Killing  $X$  en  $E(\kappa, \tau)$  tal que  $f = \langle N, X \rangle$ , siendo  $N$  el normal a la esfera. Ahora es claro que si  $X^\top$  denota la componente tangente de  $X$ , entonces  $\operatorname{div} X^\top = 2Hf$  y por tanto  $\int f \, dA = 0$  si la esfera no es mínima. En el caso mínimo es fácil probar la misma propiedad. Esto finaliza la demostración. ■

Ahora bien, de entre las superficies CMC con índice 1, Koiso en [Koio2, Teorema 1.3, afirmación (III-B)] (ver también [Souo8, Teorema 2.1]) obtuvo el siguiente criterio de estabilidad:

**Teorema** ([Koio2, Souo8]). *Sea  $\Phi : \Sigma \rightarrow M^3$  una inmersión CMC de una superficie compacta y orientable  $\Sigma$  en una 3-variedad riemanniana  $M^3$ . Supongamos que  $\Sigma$  tiene índice 1 y  $\int_\Sigma f \, dA = 0$  para cualquier función de Jacobi  $f$ , i.e., cualquier función cumpliendo  $Lf = 0$ . Entonces existe una única función  $w \in \ker L^\perp$  con  $Lw = 1$ . Más aún  $\Sigma$  es estable si, y sólo si,  $\int_\Sigma w \geq 0$ .*

Puesto que, en virtud de la proposición anterior, las esferas CMC inmersas en cualquier  $E(\kappa, \tau)$  satisfacen las hipótesis del anterior resultado, podemos aplicar dicho criterio para probar el siguiente teorema.

**Teorema 7.1.**

1. Existe una constante  $\alpha_0 \in ]0, 1[$  ( $\alpha_0 \approx 0,121$ ) tal que:
  - para  $4\tau^2/\kappa \geq \alpha_0$  las esferas  $\{\mathcal{S}_{(\kappa, \tau)}(H) : H \geq 0\}$  son estables en  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$ ,
  - para  $4\tau^2/\kappa < \alpha_0$ , existe  $H(\kappa, \tau) > 0$  tal que  $\mathcal{S}_{(\kappa, \tau)}(H)$  es estable en  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  si y sólo si,  $H \geq H(\kappa, \tau)$ . (ver figura 10).
2. Para cada  $H$  tal que  $4H^2 + \kappa > 0$  la única esfera de curvatura media  $H$  en  $\operatorname{Sl}_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$  es estable.

3. Para cada  $H > 0$  la única esfera de curvatura media constante  $H$  en el grupo de Heisenberg  $\text{Nil}_3(\tau)$  es estable.

*Demostración.* Sea  $\Phi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow E(\kappa, \tau)$  una inmersión de una esfera de curvatura media constante  $H$  y  $L$  su operador de jacobí asociado a la segunda variación del funcional área. Gracias al resultado de Koiso y la Proposición 7.1 existe  $w \in (\ker L)^\perp$  con  $Lw = 1$ . Es claro que cualquier otra función  $f$  con  $Lf = 1$  viene dada por  $f = w + f_0$  con  $f_0 \in \ker L$  y por tanto  $\int_\Sigma f \, dA = \int_\Sigma w \, dA$ . Así, para el criterio de estabilidad podemos usar cualquier función  $f$  con  $Lf = 1$ .

Para obtener una solución explícita de la ecuación  $Lf = 1$ , es conveniente considerar sobre la esfera el parámetro conforme  $z$  dado en el Lema 3.5 [p.69] y reparametrizar por  $e^{\hat{z}} = z$ . Así, si  $\hat{z} = x + iy$ , la función  $v$  se transforma en  $v(x, y) = \tanh x$  y la métrica inducida en  $e^{2u} |d\hat{z}|^2$ , donde

$$e^{2u(x)} = \frac{16(H^2 + \tau^2) \cosh^2 x}{\left[ (\kappa - 4\tau^2) + 4(H^2 + \tau^2) \cosh^2 x \right]^2}.$$

Un cálculo sencillo muestra que la ecuación  $Lf = 1$  se escribe de la forma

$$f''(x) + \frac{2f(x)}{\cosh^2 x} - \frac{(H^2 + \tau^2) \cosh^2(x)}{\left[ (H^2 + \tau^2) \cosh^2(x) + \frac{1}{4} (\kappa - 4\tau^2) \right]^2} = 0$$

Es inmediato comprobar que si

$$h(x) = \frac{\sqrt{|\kappa - 4\tau^2|}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \tanh x,$$

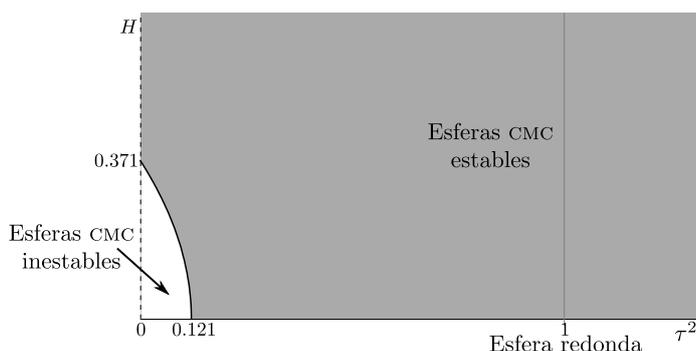
entonces una solución a dicha ecuación viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{4H^2 + \kappa} [1 - h(x) \operatorname{arctanh} h(x)], & \text{si } \kappa - 4\tau^2 > 0 \\ \frac{2}{4H^2 + \kappa} [1 + h(x) \operatorname{arctan} h(x)], & \text{si } \kappa - 4\tau^2 < 0 \end{cases}$$

La integral de dicha función sobre la superficie viene dada por:

$$\int_{\Sigma} f = \begin{cases} \frac{8\pi}{(4H^2 + \kappa)^2} \left[ 3 + \frac{2(2(H^2 + \tau^2) - (\kappa - 4\tau^2))}{\sqrt{4H^2 + \kappa} \sqrt{\kappa - 4\tau^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{\kappa - 4\tau^2}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \right) \right] \\ \frac{8\pi}{(4H^2 + \kappa)^2} \left[ 3 + \frac{2(2(H^2 + \tau^2) - (\kappa - 4\tau^2))}{\sqrt{4H^2 + \kappa} \sqrt{4\tau^2 - \kappa}} \operatorname{arctan} \left( \frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \right) \right] \end{cases}$$

según sea  $\kappa - 4\tau^2$  positivo o negativo respectivamente.



**Figura 10:** Región de estabilidad de las esferas CMC inmersas en  $S^3(4, \tau)$

Observemos que para el caso  $\kappa - 4\tau^2 < 0$  dicha integral es siempre positiva lo que prueba (1) y (2) gracias al resultado de Koiso; mientras que para  $\kappa - 4\tau^2 > 0$  dicha integral cambia de signo, siendo positiva en la región mostrada en la figura 10 (donde hemos normalizado  $\kappa = 4$ ) donde la curva frontera tiene por ecuación  $\int_{\Sigma} f dA = 0$ . Fijada la esfera

$S_b^3(4, \alpha)$ , el valor especial  $\alpha_0$  es la solución de  $\alpha$  a la anterior ecuación para  $H = 0$ . Ahora bien, puesto que  $S_b^3(\kappa, \tau)$  y  $S_b^3(4, \alpha)$  poseen métricas homotéticas cuando elegimos  $\alpha = 4\tau^2/\kappa$  y la estabilidad es invariante por homotecias de la métrica obtenemos el resultado. ■

*Observación 7.1.*

- Aunque hemos enunciado el anterior resultado para las esferas CMC inmersas en las esferas de Berger,  $Nil_3$  y  $Sl_2(\mathbb{R})$  la demostración presentada es válida para cualquier  $E(\kappa, \tau)$ . En particular redemuestra el resultado de estabilidad obtenido por Souam [Sou08, Teorema 2.2] para las esferas CMC de  $S^2 \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .
- Puesto que hemos obtenido explícitamente en la Proposición 3.5[p.71] el área de cualquier esfera CMC inmersa en  $E(\kappa, \tau)$  podríamos dar una prueba alternativa al anterior resultado simplemente estudiando cuando  $dA/dH \leq 0$ . Esto se debe a que (cf. [Sou08, Demostración del Teorema 2.2, p. 6])

$$\frac{dA}{dH}(H) = -2H \int_{S(\kappa, \tau)(h)} w \, dA$$

donde  $w$  es una función que verifica que  $Lw = 1$ , y al criterio de Koiso junto con la Proposición 7.1.

### 7.3 ESTABILIDAD DE LOS TOROS DE HOPF

Como pusimos de manifiesto en el Capítulo 3[p.33] (cf. Proposiciones 3.2[p.39] y 3.3[p.40]) existe una familia 1-paramétrica de toros llanos de curvatura media constante inmersos en las esferas de Berger y  $Sl_2(\mathbb{R})$ . Dichos toros son toros de

Hopf (cf. Definición 4.1<sub>[p.79]</sub>), i.e., preimagen mediante la proyección  $\Pi : E(\kappa, \tau) \rightarrow M^2(\kappa)$  de una curva cerrada de curvatura constante. En esta sección pretendemos estudiar la estabilidad de dicha familia de toros. Puesto que  $K = 0$  y  $\nu = 0$  tenemos, de (7.1), que el operador de Jacobi de  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H) \subset S_b^3(\kappa, \tau)$  y  $\hat{\mathcal{T}}_{(\kappa, \tau)}(H) \subset Sl_2(\mathbb{R})$  se escribe como

$$L = \Delta + 4H^2 + \kappa. \quad (7.2)$$

Al ser  $4H^2 + \kappa$  constante, el estudio de la estabilidad equivale a calcular el primer valor propio no nulo del laplaciano  $\Delta$ .

Para calcular el espectro del laplaciano de un toro llano, seguiremos un método estándar que puede encontrarse en [BGM71]. Vamos a tratar el caso de las esferas de Berger y  $Sl_2(\mathbb{R})$  por separado.

### 7.3.1 Estabilidad de toros de Hopf en las esferas de Berger

Vamos a estudiar el espectro del laplaciano del toro  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  (cf. Proposición 3.2<sub>[p.39]</sub>). Para ello consideremos la siguiente parametrización de dicho toro  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_\alpha^3$  dada por  $\Phi(t, s) = (r_H e^{it}, \sqrt{1 - r_H^2} e^{is})$ . La métrica inducida viene dada por  $g = (g_{ij})$  con

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{4}{\kappa} r_H^2 \left[ 1 + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) r_H^2 \right], \\ g_{22} &= \frac{4}{\kappa} (1 - r_H^2) \left[ 1 + \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) (1 - r_H^2) \right], \\ g_{12} &= g_{21} = \frac{4}{\kappa} \left( \frac{4\tau^2}{\kappa} - 1 \right) r_H^2 (1 - r_H^2). \end{aligned}$$

Así, el toro  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  viene dado intrínsecamente como  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ , donde  $\Lambda$  es el retículo en  $\mathbb{R}^2$  generado por  $2\pi v_1$  y  $2\pi v_2$  donde

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2}{\sqrt{\kappa}} r_H \left( \frac{2\tau}{\sqrt{\kappa}} r_H, \sqrt{1 - r_H^2} \right), \\ v_2 &= \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{1 - r_H^2} \left( \frac{2\tau}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{1 - r_H^2}, -r_H \right). \end{aligned}$$

Ahora la base dual está generada por

$$v_1^* = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \left( \frac{\sqrt{\kappa}}{2\tau}, \frac{\sqrt{1 - r_H^2}}{r_H} \right), \quad v_2^* = \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \left( \frac{\sqrt{\kappa}}{2\tau}, \frac{-r_H}{\sqrt{1 - r_H^2}} \right),$$

y por tanto el espectro de  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  viene dado por

$$\{|mv_1^* + nv_2^*|^2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observemos que uno de los valores propios, el correspondiente a  $m = 1$  y  $n = -1$ , es  $4H^2 + \kappa$ . Puesto que el primer valor propio de  $L$ , en virtud de (7.2), es  $\lambda - (4H^2 + \kappa)$ , siendo  $\lambda$  el primer valor propio no nulo del Laplaciano, tenemos que el toro  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  será estable si, y sólo si, el primer valor propio no nulo del laplaciano es precisamente  $4H^2 + \kappa$ . Es fácil comprobar que esto ocurre sólo si

$$\kappa - 12\tau^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad H \leq \frac{\sqrt{\kappa(\kappa - 12\tau^2)}}{8\tau\sqrt{\kappa - 8\tau^2}}$$

Obtenemos así el siguiente resultado:

**Proposición 7.2.**

1. En las esferas de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  con  $\kappa - 12\tau^2 < 0$  todos los toros llanos de curvatura media constante  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  (cf. Proposición 3.2<sub>[p.39]</sub>) son inestables.

2. En las esferas de Berger  $S_b^3(\kappa, \tau)$  con  $\kappa - 12\tau^2 \geq 0$  un toro llano de curvatura media constante  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  (cf. Proposición 3.2 [p.39]) es estable si, y sólo si,

$$H \leq \frac{\sqrt{\kappa}(\kappa - 12\tau^2)}{8\tau\sqrt{\kappa - 8\tau^2}}$$

En la figura 11 se encuentra representada la región de estabilidad para los toros  $\mathcal{T}_{(4, \tau)}(H)$  en términos de  $\tau$  y  $H$ .

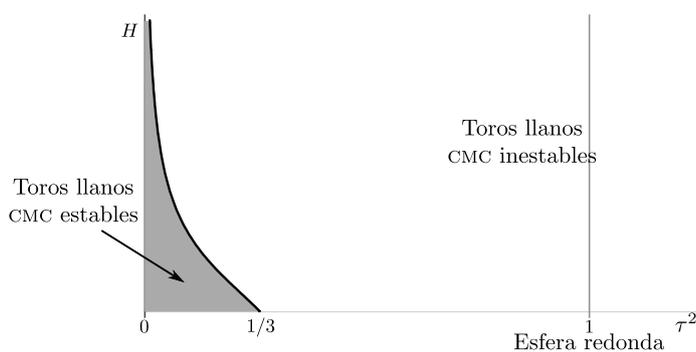


Figura 11: Región de estabilidad para los toros  $\mathcal{T}_{(4, \tau)}(H)$

*Observación 7.2.* Para cada esfera de Berger  $S_b^3(\kappa, \tau)$  con  $\kappa - 12\tau^2 \geq 0$ , el toro de Clifford  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(0)$  es estable y en  $S_b^3(12\tau^2, \tau)$  es el único toro llano de curvatura media constante estable.

### 7.3.2 Estabilidad de toros llanos cmc en $Sl_2(\mathbb{R})$

Al igual que en la sección precedente vamos a estudiar el espectro del laplaciano del toro  $\hat{\mathcal{T}}_{(\kappa, \tau)}(H)$  (cf. Proposición 3.3 [p.40]). Para ello consideremos la siguiente parametrización de dicho toro  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Sl_2(\mathbb{R})$  dada por

$\Phi(t, s) = (r_H e^{it}, \sqrt{r_H^2 - 1} e^{is})$ . La métrica inducida viene dada por  $g = (g_{ij})$  donde:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{-4}{\kappa} r_H^2 \left[ r_H^2 - 1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} r_H^2 \right], \\ g_{22} &= \frac{-4}{\kappa} (r_H^2 - 1) \left[ r_H^2 - \frac{4\tau^2}{\kappa} (r_H^2 - 1) \right], \\ g_{12} &= g_{21} = \frac{4}{\kappa} \left( 1 - \frac{4\tau^2}{\kappa} \right) r_H^2 (r_H^2 - 1). \end{aligned}$$

Así, el toro  $\hat{\mathcal{J}}_{(\kappa, \tau)}(H)$  viene dado intrínsecamente como  $\mathbb{R}^2/\Lambda$ , donde  $\Lambda$  es el retículo en  $\mathbb{R}^2$  generado por  $2\pi v_1$  y  $2\pi v_2$  donde

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2r_H}{\sqrt{-\kappa}} \left( \frac{2\tau}{\sqrt{-\kappa}} r_H, \sqrt{r_H^2 - 1} \right), \\ v_2 &= \frac{-2\sqrt{r_H^2 - 1}}{\sqrt{-\kappa}} \left( \frac{2\tau}{\sqrt{-\kappa}} \sqrt{r_H^2 - 1}, r_H \right). \end{aligned}$$

La base dual de dicho retículo está generada por

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} \left( \frac{\sqrt{-\kappa}}{2\tau}, \frac{-\sqrt{r_H^2 - 1}}{r_H} \right), \\ v_2^* &= \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} \left( \frac{\sqrt{-\kappa}}{2\tau}, \frac{-r_H}{\sqrt{r_H^2 - 1}} \right). \end{aligned}$$

Puesto que el espectro del laplaciano de  $\hat{\mathcal{J}}_{(\kappa, \tau)}(H)$  viene dado por  $\{|mv_1^* + nv_2^*| : m, n \in \mathbb{Z}\}$  tenemos que, para  $m = -n = 1$ ,  $4H^2 + \kappa$  es un valor propio de  $\Delta$ . Así, puesto que el primer valor propio de  $L$  es  $\lambda - (4H^2 + \kappa)$  gracias a (7.2), siendo  $\lambda$  el primer valor propio no nulo del laplaciano, tenemos que el toro  $\hat{\mathcal{J}}_{(\kappa, \tau)}(H)$  será estable si, y sólo si, el

primer valor propio no nulo del laplaciano es precisamente  $4H^2 + \kappa$ . Es inmediato comprobar que esto ocurre sólomente si

$$H \leq \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} \frac{12\tau^2 - \kappa}{4\tau\sqrt{8\tau^2 - \kappa}}$$

Obtenemos así el resultado siguiente.

**Proposición 7.3.** *Para cada  $H$  tal que*

$$H \leq \frac{\sqrt{-\kappa}}{2} \frac{12\tau^2 - \kappa}{4\tau\sqrt{8\tau^2 - \kappa}}$$

*el toro  $\hat{\mathcal{J}}_{(\kappa,\tau)}(H)$  es estable en  $Sl_2(\mathbb{R})$  como superficie CMC. En cualquier otro caso es inestable.*

En la figura 12 se encuentra representada la región de estabilidad para los toros  $\hat{\mathcal{J}}_{(4,\tau)}(H)$  en términos de  $\tau$  y  $H$ .

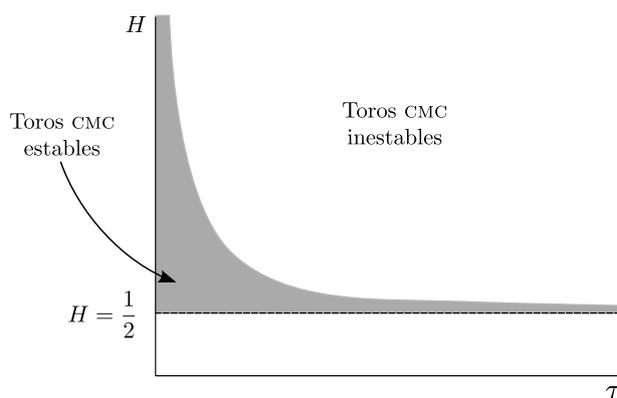


Figura 12: Región de estabilidad para los toros  $\hat{\mathcal{J}}_{(4,\tau)}(H)$

## SUPERFICIES COMPACTAS ESTABLES

# 8

*Esto es el  
Totum Revolutum.*

### 8.1 RESULTADOS PRINCIPALES

En este capítulo vamos a presentar dos resultados de estabilidad para superficies compactas de curvatura media constante de las esferas de Berger, el grupo especial lineal y el grupo de Heisenberg. Los resultados óptimos serán obtenidos en ciertas esferas de Berger (cf. Teorema 8.2), en donde clasificaremos completamente las superficies compactas CMC estables. El presentar dos resultados se debe fundamentalmente a que las técnicas usadas para sus demostraciones son diferentes.

En el primer resultado vamos a probar que, bajo ciertas restricciones, las superficies compactas de curvatura media constante estables de las esferas de Berger, el grupo especial lineal  $Sl_2(\mathbb{R})$  y el grupo de Heisenberg han de ser esferas o toros embebidos. Las herramientas clave para ello será la existencia de ciertas funciones meromorfas  $\phi : \Sigma \rightarrow S^2$  con grado controlado, el hecho de que dichas 3-variedades están embebidas isométricamente en los espacios proyectivo e hiperbólico complejo y la siguiente fórmula integral obtenida por Montiel y Urbano en [MU02].

**Teorema** ([MU02, Teorema 4]). *Sea  $\tilde{\Phi} : \Sigma \rightarrow \mathbf{CM}^2(c)$  una inmersión de una superficie compacta y  $\mu$  su máxima multiplicidad. Si  $\tilde{H}$  es el vector curvatura media de  $\tilde{\Phi}$  y  $C$  la función de Kähler, entonces*

$$\int_{\Sigma} (|\tilde{H}|^2 + \frac{c}{2} + \frac{|c|}{2}|C|) dA \geq 4\pi\mu \quad (8.1)$$

*Además la igualdad se cumple sólo para ciertas superficies de género cero.*

*Observación 8.1.* Aunque en [MU02] los autores sólo probaron explícitamente dicho resultado cuando el espacio ambiente es el plano proyectivo complejo, pequeñas modificaciones de la demostración, como se indica en dicho artículo, permiten probarlo también en el plano hiperbólico complejo.

**Teorema 8.1.**

- (i) *Sea  $\Sigma$  una superficie orientable, compacta de curvatura media constante  $H$  estable inmersa en  $S_b^3(\kappa, \tau)$ . Existe una constante  $\alpha_0 \approx 0,217$  tal que si  $\alpha_0 < 4\tau^2/\kappa < 4/3$  entonces  $\Sigma$  es una esfera o un toro embebido.*
- (ii) *Sea  $\Sigma$  una superficie orientable, compacta de curvatura media constante  $H$  estable inmersa en  $Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$ . Existe una constante  $\beta_0 \approx 0,1$  tal que*

$$\begin{cases} \text{si } -4\tau^2/\kappa > \beta_0 \text{ y } H^2 \geq 3\tau^2 - \kappa \text{ o} \\ \text{si } -4\tau^2/\kappa \leq \beta_0 \text{ y } H^2 \geq H_0 \end{cases}$$

donde

$$H_0 = \frac{\kappa^2}{128\tau^2} \left[ 1 + \frac{88\tau^2}{\kappa} + \frac{80\tau^4}{\kappa^2} + \left( 1 - \frac{28\tau^2}{\kappa} \right) \sqrt{1 - \frac{24\tau^2}{\kappa} - \frac{112\tau^4}{\kappa^2}} \right]$$

entonces  $\Sigma$  es una esfera o un toro embebido.

(iii) Sea  $\Sigma$  una superficie orientable, compacta de curvatura media constante  $H$  estable inmersa en una  $\text{Nil}_3(\tau)$ . Si  $H^2 \geq 3\tau^2$ , entonces  $\Sigma$  es o bien una esfera o bien es un toro embebido.

*Observación 8.2.* En el caso (ii) la hipótesis sobre la curvatura media se hace cada vez más restrictiva al hacer  $\tau \rightarrow 0$  puesto que en dicho caso  $H_0 \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Vamos a usar un argumento conocido, proveniente de la teoría de Brill–Noether (cf. [GH78]), para obtener funciones test con el objetivo de estudiar la estabilidad. Usando dicha teoría, podemos obtener una aplicación meromorfa no constante  $\phi : \Sigma \rightarrow S^2$  de grado  $d \leq 1 + [(g+1)/2]$ , donde  $[\ ]$  representa la función parte entera y  $g$  el género de la superficie  $\Sigma$ . Aunque la aplicación  $\phi$  no tenga media cero, usando un argumento de Yang y Yau [YY80], podemos encontrar un aplicación holomorfa  $F : S^2 \rightarrow S^2$  tal que  $\int_{\Sigma} (F \circ \phi) dA = 0$  y, por tanto, la estabilidad de  $\Sigma$  implica que  $0 \leq Q(F \circ \phi) = \sum_{j=1}^3 Q([F \circ \phi]_j)$ , donde  $[F \circ \phi]_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , son cada una de sus componentes. Así, de (7.1)<sub>[p.149]</sub> y puesto que  $|F \circ \phi|^2 = 1$  se sigue que

$$\int_{\Sigma} |\nabla(F \circ \phi)|^2 dA \geq \int_{\Sigma} (4H^2 + \kappa - K + (\kappa - 4\tau^2)v^2) dA,$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla(F \circ \phi)|^2 dA &= 8\pi \deg(F \circ \phi) = 8\pi \deg(\phi) \leq \\ &\leq 8\pi \left( 1 + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta lo anterior y usando el teorema de Gauss–Bonnet, la desigualdad previa se transforma en

$$2\pi \left( 2 - g + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right) \geq \int_{\Sigma} \left( H^2 + \frac{\kappa}{4} + \left( \frac{\kappa}{4} - \tau^2 \right) v^2 \right) dA.$$

(8.2)

Por otro lado, consideremos, en virtud de las Proposiciones 2.2[p.22], 2.3[p.26] y 2.4[p.29], los espacios homogéneos riemannianos  $\mathbb{S}_b^3$ ,  $\text{Sl}_2(\mathbb{R})$  y  $\text{Nil}_3$ , que vamos a representar conjuntamente por  $M^3$ , embebidos isométricamente en  $\mathbb{C}\mathbb{M}^2(\kappa - 4\tau^2)$ . Sea  $\tilde{H}$  la curvatura media de  $\Sigma$  como superficie de  $\mathbb{C}\mathbb{M}^2(\kappa - 4\tau^2)$ . Puesto que en los tres casos la segunda forma fundamental  $\hat{\sigma}$  de  $M^3$  en  $\mathbb{C}\mathbb{M}^2(\kappa - 4\tau^2)$  se escribe como (cf. (2.5)[p.23], (2.7)[p.26] y (2.8)[p.29])

$$\hat{\sigma}(v, w) = \left[ \tau g(v, w) + \frac{4\tau^2 - \kappa}{4\tau} g(v, \xi) g(w, \xi) \right] J\xi$$

es fácil comprobar entonces que  $\tilde{H}$  y  $H$  están relacionadas mediante la igualdad

$$|\tilde{H}|^2 = H^2 + \frac{1}{64\tau^2} \left( 12\tau^2 - \kappa - (4\tau^2 - \kappa)\nu^2 \right)^2$$

De esta manera la desigualdad (8.1) se transforma en

$$\int_{\Sigma} \left[ H^2 + \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{2} (1 + \epsilon|\nu|) + \frac{1}{64\tau^2} \left( 12\tau^2 - \kappa - (4\tau^2 - \kappa)\nu^2 \right)^2 \right] dA \geq 4\pi\mu \quad (8.3)$$

donde  $\epsilon$  representa el signo de  $\kappa - 4\tau^2$ ,  $\mu$  la máxima multiplicidad de  $\Sigma$  y además hemos tenido en cuenta que la función de Kähler  $C$  de  $\Sigma$  en  $\mathbb{C}\mathbb{M}^2(\kappa - 4\tau^2)$  coincide con la función ángulo  $\nu$  de  $\Sigma$  en  $M^3$  (cf. Observación 3.1[p.33]).

De esta manera, la ecuación (8.2) se transforma en

$$\begin{aligned} 2\pi \left( 2 - g + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right) &\geq \int_{\Sigma} \left( H^2 + \frac{\kappa}{4} + \left( \frac{\kappa}{4} - \tau^2 \right) \nu^2 \right) dA \geq \\ &\geq \int_{\Sigma} \left[ \frac{H^2}{2} + \frac{\kappa}{4} + \left( \frac{\kappa}{4} - \tau^2 \right) \nu^2 \right] - \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{4} (1 + \epsilon |\nu|) - \\ &\quad - \frac{1}{128\tau^2} \left( 12\tau^2 - \kappa - (4\tau^2 - \kappa)\nu^2 \right)^2 \Big] dA + 2\pi\mu \end{aligned}$$

donde hemos usado (8.3) previamente dividida por 2.

Reordenando dicha expresión llegamos a

$$\begin{aligned} 2\pi \left( 2 - g - \mu + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right) &\geq \int_{\Sigma} \left[ \frac{H^2}{2} + \frac{\kappa}{4} + \left( \frac{\kappa}{4} - \tau^2 \right) \nu^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\kappa - 4\tau^2)}{4} (1 + \epsilon |\nu|) - \frac{1}{128\tau^2} \left( 12\tau^2 - \kappa - (4\tau^2 - \kappa)\nu^2 \right)^2 \right] dA \end{aligned} \quad (8.4)$$

desigualdad válida para cualquier superficie CMC estable en uno de los espacios homogéneos  $S_b^3$ ,  $Sl_2(\mathbb{R})$  o  $Nil_3$ . Conviene observar que si la parte de la derecha de dicha desigualdad no es negativa entonces  $2 - g - \mu + [(g+1)/2] \geq 0$ . Esta última desigualdad implica que, además de género cero, sólo las siguientes posibilidades pueden ocurrir:  $g = 1, \mu \leq 2$  o  $g = 2, 3, \mu = 1$ . Pero excepto en el caso  $g = 1$  y  $\mu = 1$ , en el resto de posibilidades se alcanza la igualdad, en particular, se alcanza la igualdad en la desigualdad de Montiel-Urbano lo cual es imposible puesto que en dichos casos el género debe ser cero. Así, si  $\Sigma$  no es una esfera debe ser un toro embebido.

A continuación vamos a tratar por separado cada uno de dicho espacios y, en cada caso, daremos condiciones para las que la parte de la derecha de la desigualdad (8.4) no sea negativa y podamos aplicar entonces el anterior razonamiento.

**Caso (i):**  $S_b^3(\kappa, \tau)$ . Podemos considerar la esfera de Berger  $S_b^3(4, \alpha)$  puesto que basta hacer una homotecia de la métrica por  $4/\kappa$  y tomar  $\alpha = 4\tau^2/\kappa$  para recuperar el caso general  $S_b^3(\kappa, \tau)$ . En dicho caso la desigualdad (8.4) se transforma en

$$2\pi \left( 2 - g - \mu + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right) \geq \int_{\Sigma} \left( \frac{H^2}{2} + \frac{F_\nu(\alpha)}{8\alpha} \right) dA \quad (8.5)$$

donde  $F_\nu(\alpha)$  es el polinomio dado por:

$$F_\nu(\alpha) = A(\nu)\alpha^2 + B(\nu)\alpha + C(\nu)$$

con  $A$ ,  $B$  y  $C$  los polinomios dados por  $A(t) = -(t^4 + 2t^2 - 8\epsilon|t| + 1)$ ,  $B(t) = 2(t^4 - 4\epsilon|t| + 3)$  y  $C(t) = -(1 - t^2)^2$ .

A continuación vamos a ver para qué valores de  $\alpha$  el polinomio  $F_t$  es positivo para cualquier  $t \in [0, 1]$  (recordemos que  $0 \leq \nu^2 \leq 1$ ).

El polinomio  $F_t$  tiene dos propiedades importantes:

1.  $F_t(1) = 4$  para cualquier  $t \in [0, 1]$ ,
2. el discriminante de  $F_t$  es  $32(t - \epsilon)^2(1 + t^2)$  y, por tanto, para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $F_t$  tiene dos raíces excepto cuando  $t = 1$  y  $\epsilon = 1$ .

En primer lugar trataremos el caso  $\epsilon = -1$ , i.e.,  $\alpha > 1$ . En este caso  $A(t) < 0$  para cualquier  $t \in [0, 1]$  y la raíz  $r(t)$  del anterior polinomio dada por

$$r(t) = \frac{t^4 + 4t + 3 + 2(1+t)\sqrt{2(1+t^2)}}{t^4 + 2t^2 + 8t + 1}$$

es siempre mayor que 1. Así, para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $F_t \geq 0$  si  $1 < \alpha \leq r(t)$ . De esta manera si  $\alpha \leq \min_{t \in [0, 1]} r(t) = 4/3$  entonces  $F_t \geq 0$  para cualquier  $t \in [0, 1]$ .

En segundo lugar consideremos  $\epsilon = 1$ , i.e.,  $\alpha < 1$ . En este caso tenemos que existe un único  $t_0 \in ]0, 1[$  ( $t_0 \approx 0,1292$ ) con  $A(t_0) = 0$ . Más aún, si  $0 \leq t < t_0$  (respectivamente  $t_0 < t \leq 1$ ) entonces  $A(t) < 0$  (respectivamente  $A(t) > 0$ ). Las raíz  $r(t)$ ,  $t \neq t_0$  de  $F_t$  dada por

$$r(t) = \frac{t^4 - 4t + 3 - 2(1-t)\sqrt{2(1+t^2)}}{t^4 + 2t^2 - 8t + 1}$$

satisface  $0 < r(t) < 1$ . Así, para cada  $0 \leq t < t_0$ , y puesto que en este caso  $A(t) < 0$ , se sigue que  $F_t \geq 0$  si  $r(t) \leq \alpha < 1$ . Además, si  $t_0 < t \leq 1$  es fácil ver que la otra raíz de dicho polinomio

$$s(t) = \frac{t^4 - 4t + 3 + 2(1-t)\sqrt{2(1+t^2)}}{t^4 + 2t^2 - 8t + 1}$$

cumple  $s(t) \leq r(t)$  y, por tanto, puesto que en este caso  $A(t) > 0$ , se sigue también que  $F_t \geq 0$  si  $r(t) \leq \alpha < 1$ .

Así  $F_t \geq 0$  para cualquier  $t \in [0, 1]$  siempre que  $\alpha \geq \max_{t \in [0, 1]} r(t) \approx 0,217$ .

El análisis anterior nos permite afirmar que  $F_\nu(\alpha) \geq 0$  para  $\alpha_0 \approx 0,217 \leq \alpha \leq 4/3$ , esto es, considerando el caso general  $S_b^3(\kappa, \tau)$ ,  $F_\nu(4\tau^2/\kappa) \geq 0$  para  $\alpha_0 \leq 4\tau^2/\kappa \leq 4/3$ . En dicho caso la fórmula (8.5) nos asegura que  $2 - g - \mu + [(g+1)/2] \geq 0$ . Un razonamiento anterior nos permite concluir que o bien  $\Sigma$  es una esfera o es un toro embebido.

**Caso (ii):**  $Sl_2(\mathbb{R})$ . Al igual que en el caso anterior podemos considerar  $Sl_2(\mathbb{R})(-4, \beta)$  y recuperar el caso general tomando  $\beta = -4\tau^2/\kappa$  y haciendo una homotecia a la métrica de razón  $-4/\kappa$ . En dicho caso la desigualdad (8.4) se transforma en

$$2\pi \left( 2 - g - \mu + \left[ \frac{g+1}{2} \right] \right) \geq \int_{\Sigma} \left( \frac{H^2}{2} + \frac{G_\beta(\nu)}{8\beta} \right) dA \quad (8.6)$$

donde  $G_\beta(t)$  es el polinomio dado por:

$$G_\beta(t) = -(1 + \beta)^2 t^4 - 2(\beta^2 - 1)t^2 - 8\beta(\beta + 1)t - (1 + 6\beta + \beta^2)$$

En este caso vamos a seguir un razonamiento diferente al hecho en (ii). Vamos a calcular el valor mínimo  $G_{\min}$  del polinomio  $G_\beta$  en el intervalo  $t \in [0, 1]$ . Así, para  $H$  tal que  $H^2 + G_\beta(v)/4\beta \geq H^2 + G_{\min}/4\beta \geq 0$  tendremos que, en virtud de (8.6), la superficie  $\Sigma$  es o bien una esfera o bien un toro embebido.

Los puntos críticos de  $G_\beta$  son

$$t_0 = -1, \quad t_\pm = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{1 - 6\beta - 7\beta^2}}{(1 + \beta)} \right)$$

Ahora bien, si  $1 - 6\beta - 7\beta^2 < 0$ , i.e.,  $\beta > 1/7$  entonces  $G_\beta$  no tiene ningún punto crítico en  $[0, 1]$ . Así, puesto que en dicho caso,  $G'_\beta(t) \leq 0$  tenemos que el mínimo de  $G_\beta$  se alcanza en el extremo superior del intervalo, i.e.,  $G_{\min} = G_\beta(1) = -4\beta(4 + 3\beta)$  para  $\beta > 1/7$ .

Por otro lado, si  $\beta \leq 1/7$  entonces  $G_\beta$  tiene dos puntos críticos  $t_+$  y  $t_-$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Basta comparar entonces los valores del polinomio  $G_\beta$  en dichos puntos y los extremos de dicho intervalo para determinar que el valor mínimo en este caso es  $G_{\min} = G_\beta(1) = -4\beta(4 + 3\beta)$  si  $\beta_0 \approx 0,0991064 < \beta \leq 1/7$  o bien

$$G_{\min} = G_\beta(t_-) = \frac{-1}{2} \left( 1 + 22\beta + 5\beta^2 + (1 - 7\beta)\sqrt{1 - 6\beta - 7\beta^2} \right)$$

si  $\beta < \beta_0$ . De esta manera obtenemos finalmente que

$$G_{\min} = \begin{cases} -4\beta^2(4 + 3\beta), & \text{si } \beta_0 < \beta \\ G_\beta(t_-), & \text{si } \beta \leq \beta_0 \end{cases}$$

Si  $H^2 \geq -G_{\min}/4\beta$  obtenemos el resultado. Ahora bien, para recuperar el caso general  $Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$  debemos elegir  $\beta = -4\tau^2/\kappa$  y hacer una homotecia de razón  $4/\kappa$ . De esta manera la condición anterior se transforma en  $H^2 \geq -(\kappa^2/16)G_{\min}/4\tau^2$ .

**Caso (iii):**  $Nil_3$ . En este caso  $\kappa = 0$  luego la desigualdad (8.4) se transforma en

$$\begin{aligned} 2\pi \left( 2 - g - \mu + \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil \right) &\geq \int_{\Sigma} \frac{H^2}{2} - \frac{\tau^2}{8} (1 + 8|\nu| + 2\nu^2 + \nu^4) \\ &\geq \frac{1}{2} \text{Área}(\Sigma) (H^2 - 3\tau^2), \end{aligned}$$

donde hemos acotado  $\nu$  por su valor máximo 1. De esta manera si  $H^2 \geq 3\tau^2$  y gracias a un razonamiento anterior o bien  $g = 0$  y  $\Sigma$  es una esfera o bien  $g = 1$  y  $\mu = 1$  y  $\Sigma$  es un toro embebido. ■

En el segundo resultado se clasifican las superficies orientables compactas de curvatura media constante estables de ciertas esferas de Berger. Obviamente esta familia de esferas de Berger está contenida en la correspondiente al Teorema 8.1. Como mencionamos en la introducción la idea es usar funciones test que provienen de campos armónicos de la superficie, técnica ya usada por Ros en [Ros06, Ros07].

La idea que vamos a aplicar nos va a permitir dar una nueva demostración de los teoremas de Barbosa y Do Carmo [BdC84] para  $\mathbb{R}^3$ , Barbosa, Do Carmo y Eschenburg [BdCE88] para  $S^3$  y de Souam [Sou08] para  $S^2 \times \mathbb{R}$ . Antes de abordar el resultado vamos a dar una breve descripción de los campos armónicos sobre una superficie de Riemann  $\Sigma$  y sus propiedades más importantes pues serán la clave de la demostración.

Dada una superficie riemanniana  $\Sigma$  el laplaciano para 1-formas se define como

$$\Delta = \delta d + d\delta,$$

donde  $d$  es la diferencial exterior y  $\delta$  es la codiferencial, esto es, el operador adjunto de  $d$ . Pues bien, una 1-forma  $\alpha$  se dice *armónica* si está en el núcleo de  $\Delta$ . Esta propiedad equivale, cuando la superficie es compacta, a que  $d\alpha = \delta\alpha = 0$ . Además, cuando la superficie es también orientable y  $J$  es la estructura compleja de  $\Sigma$ ,  $J\alpha$  es otra 1-forma armónica y

$$\dim \ker \Delta = 2g,$$

donde  $g$  representa el género de  $\Sigma$ .

Puesto que sobre  $\Sigma$  existe una métrica riemanniana tenemos una forma de relacionar los campos con las 1-formas. Así un campo  $X$  se dice *armónico* si la 1-forma asociada a él  $X^\sharp$ , i.e.,  $X^\sharp(V) = \langle V, X \rangle$ , es armónica. En concreto, usando dicha identificación y la definición anterior, un campo  $X$  es armónico si, y sólo si,

$$\operatorname{div} X = 0 \quad \text{y} \quad \langle \nabla_V X, W \rangle = \langle \nabla_W X, V \rangle$$

para cualesquiera  $V$  y  $W$  campos tangentes a  $\Sigma$ .

Finalmente si  $X$  es un campo armónico y  $\Delta^\Sigma$  el laplaciano actuando sobre campos, i.e.,

$$\Delta^\Sigma X = \sum_{i=1}^2 \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} X,$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de  $T\Sigma$  de las propiedades anteriores es fácil deducir que

$$\Delta^\Sigma X = KX, \tag{8.7}$$

siendo  $K$  la curvatura de Gauss de la superficie  $\Sigma$ .

**Proposición 8.1.** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta, orientable de género mayor o igual que uno y con curvatura media constante  $H$  de una 3-variedad riemanniana  $M$  y  $X$  un campo armónico sobre  $\Sigma$ . Supongamos que  $M$  admite una inmersión isométrica en un cierto espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\Sigma$  es estable en  $M$  entonces*

$$\int_{\Sigma} (4H^2 + \bar{\rho}) |X|^2 \, dA \leq \int_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 |X|^2 \, dA \quad (8.8)$$

donde  $\bar{\rho}$  es la curvatura escalar de  $M$ ,  $\tilde{\sigma}$  la segunda forma fundamental de  $M$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal sobre  $\Sigma$ .

*Demostración.* Sea  $X$  un campo armónico sobre  $\Sigma$  (tenemos garantizada su existencia puesto que el género de  $\Sigma$  es mayor o igual que 1 por hipótesis). Consideremos  $\Sigma$  inmersa en  $\mathbb{R}^n$  via  $\hat{\Phi}$ . De esta manera, dado un vector fijo  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\operatorname{div}(\langle \hat{\Phi}, a \rangle X) = \langle X, a \rangle$  al ser  $X$  armónico. Así, la función  $\langle X, a \rangle$  cumple

$$\int_{\Sigma} \langle X, a \rangle \, dA = 0,$$

luego podemos considerar dichas funciones como test para la estabilidad, i.e., vamos a usar  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  como función vectorial test.

Nuestro objetivo es entonces calcular

$$Q(X) = \sum_{j=1}^n Q(\langle X, a_j \rangle) = - \int_{\Sigma} \langle X, \Delta_0 X \rangle + (|\sigma|^2 + \overline{\operatorname{Ric}}(N)) |X|^2$$

donde  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es una referencia ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  y

$$\Delta_0 X = \sum_{i=1}^2 D_{e_i} D_{e_i} X - D_{D_{e_i} e_i} X$$

siendo  $D$  la conexión en  $\mathbb{R}^n$  y  $\{e_1, e_2\}$  es una referencia ortonormal de  $T\Sigma$ .

En primer lugar, dada  $\{e_1, e_2\}$  una referencia ortonormal sobre  $\Sigma$  tenemos que

$$D_{e_i}X = \nabla_{e_i}X + \sigma(e_i, X) + \tilde{\sigma}(e_i, X)$$

donde  $\nabla$  la conexión sobre  $\Sigma$  y  $\sigma$  la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  en  $M^3$ . Usando la anterior ecuación, y gracias a (8.7), es fácil ver que

$$\begin{aligned} \langle \Delta_0 X, X \rangle &= \langle \Delta^\Sigma X, X \rangle - \sum_{i=1}^2 [|\sigma(e_i, X)|^2 + |\tilde{\sigma}(e_i, X)|^2] \\ &= K|X|^2 - \sum_{i=1}^2 [|\sigma(e_i, X)|^2 + |\tilde{\sigma}(e_i, X)|^2]. \end{aligned}$$

Por otro lado,  $X^* = JX$  es otro campo armónico con  $|X^*| = |X|$  y, fuera de los ceros de  $X$ ,  $\{X/|X|, X^*/|X|\}$  forman una base ortonormal de  $T\Sigma$ . Usando el cálculo anterior para  $X^*$  obtenemos fácilmente que

$$\langle \Delta_0 X, X \rangle + \langle \Delta_0 X^*, X^* \rangle = 2K|X|^2 - |\sigma|^2|X|^2 - |X|^2 \sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} Q(X) + Q(X^*) &= - \int_{\Sigma} |X|^2 \left( 2K + |\sigma|^2 + 2\overline{\text{Ric}}(N) + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 \right) dA \end{aligned}$$

Finalmente, usando la ecuación de Gauss de  $\Sigma$  en  $M^3$ ,

$$K = \overline{K}(e_1, e_2, e_2, e_1) + 2H^2 - \frac{|\sigma|^2}{2}$$

y que  $2\overline{\text{Ric}}(e_1, e_2, e_2, e_1) + 2\overline{\text{Ric}}(\mathbf{N}) = \overline{\rho}$ , representando  $\overline{\rho}$  la curvatura escalar de  $M^3$ , se deduce que

$$Q(X) + Q(X^*) = \int_{\Sigma} \left( \sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 - 4H^2 - \overline{\rho} \right) |X|^2.$$

Puesto que  $Q(X) + Q(X^*) \geq 0$  ya que  $\Sigma$  es estable obtenemos el resultado. ■

**Teorema 8.2.** *Sea  $\Sigma$  una superficie orientable, compacta de curvatura media constante  $H$  inmersa en una 3-variedad riemanniana  $M$ . Entonces:*

- (i) [BdC84] Si  $M = \mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma$  es estable si, y sólo si, es una esfera geodésica.
- (ii) [BdCE88] Si  $M = \mathbb{S}^3$ ,  $\Sigma$  es estable si, y sólo si, es una esfera geodésica.
- (iii) [Sou08] Si  $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\Sigma$  es estable si, y sólo si, es  $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , si  $H = 0$  o bien una esfera de revolución con  $H \geq H_0$ , siendo  $H_0$  una constante positiva ( $H_0 \approx 0,18$ ).
- (iv) Si  $M = \mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  con  $1/3 \leq 4\tau^2/\kappa < 1$ ,  $\Sigma$  es estable si, y sólo si, es o bien una esfera  $\mathcal{S}_{(\kappa, \tau)}(H)$  o bien el toro de Clifford  $\mathcal{T}_{(12\tau^2, \tau)}(0)$ .

*Demostración.* Vamos a aplicar la proposición anterior a cada uno de los casos y mantendremos la notación usada en la misma.

**[Caso (i)]** Es claro que una esfera geodésica de  $\mathbb{R}^3$  es estable como superficie de curvatura media constante. Recíprocamente, si el género de  $\Sigma$  es cero entonces el teorema de Hopf nos dice que  $\Sigma$  es una esfera geodésica. Por otro lado, si el género de  $\Sigma$  es mayor o igual que 1, considerando  $\mathbb{R}^3$

embebido en sí mismo  $\tilde{\sigma} = 0$  y usando la Proposición 8.1 deducimos entonces

$$\int_{\Sigma} -4H^2 |X|^2 \geq 0$$

lo que nos conduce a que  $H^2 |X|^2 = 0$ , lo cual es imposible al ser  $X$  no nulo y no existir superficies compactas minimales.

**[Caso (ii)]** Al igual que en el caso anterior es claro que una esfera geodésica de  $S^3$  es estable como superficie de curvatura media constante. Recíprocamente, si el género de  $\Sigma$  es cero el teorema de Hopf afirma de nuevo que la superficie es una esfera geodésica. Supongamos entonces que el género es mayor o igual que 1 y consideramos la esfera  $S^3$  embebida de forma totalmente umbilical en  $\mathbb{R}^4$ . Es fácil comprobar entonces que

$$\bar{\rho} = 6, \quad \sum_{i,j=1} |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 = 2$$

de donde la desigualdad (8.8) se transforma en

$$\int_{\Sigma} -4(1 + H^2) |X|^2 \geq 0$$

lo que nos lleva a una contradicción.

**[Caso (iii)]** En virtud de [Souo8, Teorema 2.2] una esfera de curvatura media constante en  $S^2 \times \mathbb{R}$  es estable si, y sólo si, o bien es una esfera mínima  $S^2 \times \{t_0\}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , o bien es una esfera de revolución con curvatura media  $H \geq H_0$ , donde  $H_0$  es una constante positiva ( $H_0 \approx 0,18$ ).

Supongamos entonces que el género es mayor o igual que 1 y consideramos  $S^2 \times \mathbb{R}$  embebida en  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^4$ . El normal a dicha inmersión en el punto  $(p, t)$  viene dado por  $\hat{N} = (p, 0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ . En este caso  $\bar{\rho} = 2$  y

$$\langle \tilde{\sigma}(e_i, e_j), \hat{N} \rangle = \delta_{ij} - \langle e_i, \xi \rangle \langle e_j, \xi \rangle$$

siendo  $\xi$  el campo de Killing vertical en  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Así

$$\sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 = 1 + \nu^4$$

donde  $\nu$  es la función ángulo. De esta manera la desigualdad (8.8) se transforma en este tercer caso en

$$\int_{\Sigma} (-(1 - \nu^4) - 4H^2) |X|^2 \geq 0$$

lo que implica que  $[(1 - \nu^4) + 4H^2] |X|^2 = 0$  y así,  $H = 0$  y  $\nu^2 = 1$ , esto es,  $\Sigma$  es  $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$  lo cual es imposible.

**Caso (iv)** De nuevo si  $\Sigma$  tiene género cero debe ser una esfera CMC de rotación que es estable (cf. Teorema 7.1 [p.152]). Supongamos entonces que la superficie tiene género mayor o igual que 1. En dicho caso consideramos  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  embebida isométricamente en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$  mediante la aplicación  $F$  dada en la Proposición 2.2 [p.22] y  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$  embebido a su vez en  $\mathbb{R}^8$  mediante el primer embebimiento estándar. En este caso sabemos que  $\bar{\rho} = 2(\kappa - \tau^2)$  y  $\tilde{\sigma} = \hat{\sigma} + \bar{\sigma}$ , donde  $\hat{\sigma}$  es la segunda forma fundamental de  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$  y  $\bar{\sigma}$  es la segunda forma fundamental del primer embebimiento estándar de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$  en  $\mathbb{R}^8$ . Así

$$\sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \left\{ |\hat{\sigma}(e_i, e_j)|^2 + |\bar{\sigma}(e_i, e_j)|^2 \right\}$$

Ahora bien, en virtud de la Proposición 2.2 [p.22],

$$\sum_{i,j=1}^2 |\hat{\sigma}(e_i, e_j)|^2 = 2\tau^2 + \frac{(4\tau^2 - \kappa)^2}{16\tau^2} (1 - \nu^2)^2 + \frac{4\tau^2 - \kappa}{2} (1 - \nu^2).$$

Por otro lado, las propiedades geométricas del primer embebimiento estándar de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$  en  $\mathbb{R}^8$  fueron estudiadas

por Ros [Ros84]. En concreto, la segunda forma fundamental de dicho embebimiento cumple:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\sigma}(x, y), \bar{\sigma}(v, w) \rangle &= 2\left(\frac{\kappa}{4} - \tau^2\right) \langle x, y \rangle \langle v, w \rangle + \\ &+ \left(\frac{\kappa}{4} - \tau^2\right) \left[ \langle x, w \rangle \langle y, v \rangle + \langle x, v \rangle \langle y, w \rangle + \right. \\ &\left. + \langle x, Jw \rangle \langle y, Jv \rangle + \langle x, Jv \rangle \langle y, Jw \rangle \right], \end{aligned}$$

para cualesquiera vectores tangentes  $x, y, v, w$  a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$ , donde  $J$  es la estructura compleja de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa la métrica en  $\mathbb{R}^8$ . De esta manera

$$\sum_{i,j=1}^2 |\bar{\sigma}(e_i, e_j)|^2 = 2\left(\frac{\kappa}{4} - \tau^2\right) [5 - \nu^2]$$

donde hemos tenido en cuenta que la función ángulo coincide con la función de Kähler de  $\Sigma$  en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2(\kappa - 4\tau^2)$  (cf. Observación 3.1 [p.33]). Con lo cual obtenemos finalmente que

$$\sum_{i,j=1}^2 |\tilde{\sigma}(e_i, e_j)|^2 = -6\tau^2 + 2\kappa + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{16\tau^2} (1 - \nu^2)^2$$

Usando ahora la Proposición 8.1 tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} \left( -4H^2 - 4\tau^2 + \frac{(\kappa - 4\tau^2)^2}{16\tau^2} (1 - \nu^2) \right) |X|^2 dA \leq \\ &\leq \int_{\Sigma} \left[ -4H^2 + \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{\kappa}{4} - 3\tau^2 \right) \left( \frac{\kappa}{4} + \tau^2 \right) \right] |X|^2 dA \leq \\ &\leq \int_{\Sigma} -4H^2 |X|^2 \end{aligned}$$

ya que  $\nu^2 \geq 0$  y, por hipótesis,  $\frac{\kappa}{4} - 3\tau^2 < 0$ . Esta cadena de desigualdades implica que  $H = 0$ ,  $\kappa/4 - 3\tau^2 = 0$  y  $\nu = 0$ , lo que en particular nos asegura que  $\Sigma$  es llana. Así, gracias a la Proposición 3.2 [p.39],  $\Sigma$  debe ser el toro de Clifford  $\mathcal{T}_{(12\tau^2, \tau)}(0)$  en la esfera de Berger  $S_b^3(12\tau^2, \tau)$ . ■

## 8.2 APLICACIÓN AL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO EN LAS ESFERAS DE BERGER

El problema isoperimétrico puede enunciarse de la forma

*Dada una esfera de Berger  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  y un número  $V$  con  $0 < V < \text{vol}(\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)) = 32\tau\pi^2/\kappa^2$ , encontrar la superficie compacta y embebida de menor área que encierra un dominio de volumen  $V$ .*

En este ambiente ( $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  es compacta) el problema tiene siempre una solución diferenciable y compacta, que se trata de una superficie de curvatura media constante estable.

Puesto que en el Teorema 8.2 hemos clasificado las superficies orientables, compactas y estables de curvatura media constante en ciertas esferas de Berger, podemos resolver el problema isoperimétrico en dicho caso.

**Corolario 8.1.** *Las soluciones del problema isoperimétrico en  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  con  $\frac{\kappa}{12} \leq \tau^2 \leq \frac{\kappa}{4}$  son las esferas de curvatura media constante.*

*Demostración.* En primer lugar, del Teorema 8.2 y el comentario anterior se desprende que para  $\frac{\kappa}{12} < \tau^2 \leq \frac{\kappa}{4}$  el resultado es cierto. Ahora bien, si  $12\tau^2 = \kappa$  entonces, además de las esferas de curvatura media constante, el toro de Clifford es también estable. Dicho toro divide a la esfera en dos dominios del mismo volumen  $16\tau^2\pi^2/\kappa$ . De entre las esferas CMC de  $\mathbb{S}_b^3(12\tau^2, \tau)$  únicamente la esfera mínima determina dos dominios de igual volumen. Finalmente, puesto que el área del toro de Clifford es  $A_1 = 2\pi^2/3\sqrt{3}\tau^2$ , el área de la esfera mínima es

$$A_2 = \frac{8\pi}{12\tau^2} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

y  $A_1 > A_2$ , obtenemos el resultado en este caso. ■

Para  $\kappa - 4\tau^2 < 0$  creemos que las esferas CMC no son sólo las soluciones al problema isoperimétrico sino las únicas superficies compactas estables de curvatura media constante de  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$ .

Cuando  $\kappa - 12\tau^2 > 0$  el problema parece ser muy diferente, puesto que por un lado existen esferas de curvatura media constante inestables y por otro lado hay ejemplos de toros de curvatura media constante estables. Para ilustrar el problema isoperimétrico en este caso vamos a comparar el área de las esferas CMC con el área de los toros en términos del volumen.

Por una parte, el área y el menor volumen encerrado por el toro  $\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)$  vienen dados por

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)) &= \frac{4\tau}{\kappa} \frac{4\pi^2}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}, \\ \text{vol}(\mathcal{T}_{(\kappa, \tau)}(H)) &= \frac{16\pi^2\tau}{\kappa^2} \left( 1 - \frac{2H}{\sqrt{4H^2 + \kappa}} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, ya conocemos cuál es el área de las esferas CMC en cualquier  $E(\kappa, \tau)$  (cf. Proposición 3.5<sub>[p.71]</sub>), en particular en las esferas de Berger y además la parametrización de la esfera de curvatura media constante  $H$  inmersa en  $\mathbb{S}_b^3(\kappa, \tau)$  dada en el Corolario 3.1<sub>[p.58]</sub> nos va a permitir calcular el volumen encerrado por ella. En efecto, usando dicha parametrización, definimos el dominio interior de  $\mathcal{S}_{(\kappa, \tau)}(H)$  como

$$\Omega_H = \{(z, w) \in \mathbb{S}^3 : -y(\arccos |z|) < \arg(z) < y(\arccos |z|)\}$$

De esta manera, uno de los volúmenes determinado por  $\mathcal{S}_{(\kappa, \tau)}(H)$  es  $\text{vol}(\Omega_H)$  (observemos que no tiene por qué ser el menor).

**Lema 8.1.** *El volumen de  $\Omega_H$  viene dado por:*

$$\text{vol}(\Omega_H) = \begin{cases} \frac{16\pi\tau}{\kappa^2} \left( 2 \arctan\left(\frac{\tau}{H}\right) - \frac{\kappa H}{\tau(4H^2 + \kappa)} + \right. \\ \quad \left. + \mu \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{\kappa - 4\tau^2}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}\right) \right), \\ \frac{16\pi\tau}{\kappa^2} \left( 2 \arctan\left(\frac{\tau}{H}\right) - \frac{\kappa H}{\tau(4H^2 + \kappa)} + \right. \\ \quad \left. + \mu \arctan\left(\frac{\sqrt{4\tau^2 - \kappa}}{\sqrt{4H^2 + \kappa}}\right) \right), \end{cases}$$

según sea  $\kappa - 4\tau^2$  positivo o negativo y donde

$$\mu = \frac{2H(\kappa - 4\tau^2)(2H^2 + \kappa) - 2\tau^2(4H^2 + \kappa)}{\tau \sqrt{|4\tau^2 - \kappa|}(4H^2 + \kappa)^{3/2}}.$$

*Demostración.* En primer lugar, debido a la simetría de la esfera, podemos restringirnos al dominio  $\Omega_H^+ = \{(z, w) \in S^3 : \arg(z) < y(\arccos|z|)\}$  luego  $\text{vol}(\Omega_H) = 2\text{vol}(\Omega_H^+)$ . En segundo lugar, la forma de volumen  $\omega_b$  de  $S_b^3(\kappa, \tau)$  y  $\omega$  de  $S^3$  están relacionadas de la forma  $\omega_b = \frac{16\tau}{\kappa^2}\omega$ . Así, basta calcular el volumen de  $\Omega_H^+$  con respecto a la métrica estándar de la esfera.

Vamos a aplicar la fórmula de la co-área para la función  $f(z, w) = \arccos|z|$  que asigna al punto  $(z, w)$  la distancia a la curva  $\ell = \{(z, 0) \in S^3\}$ , que recordemos es el *eje de rotación* del grupo 1-paramétrico de isometrías que deja invariante a la esfera (cf. Sección 3.3.1 [p.43]). Así

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega_H) &= 2 \int_{\Omega_H^+} \omega_b = \frac{32\tau}{\kappa^2} \int_{\Omega_H^+} \omega = \\ &= \frac{32\tau}{\kappa^2} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\Gamma_t \cap \Omega_H^+} \omega_t \right) dt \end{aligned}$$

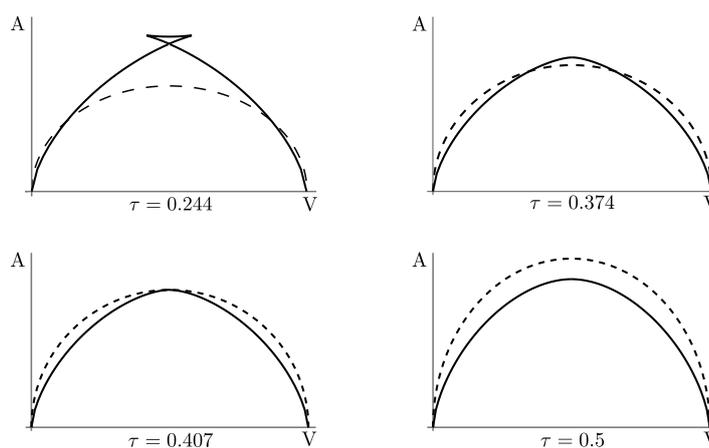
donde  $\omega_t$  es la restricción de la forma  $\omega$  al conjunto  $\Gamma_t = f^{-1}(\{t\})$  y donde hemos tenido en cuenta que  $|\nabla f| = 1$ . Ahora, podemos parametrizar  $\Gamma_t \cap \Omega_H^+$  mediante  $\varphi : [0, y(t)] \times$

$[0, 2\pi] \rightarrow \Gamma_t \cap \Omega_H^+$ , dada por  $\varphi(u, \theta) = (\cos te^{iu}, \sin te^{i\theta})$ . Observemos que  $\Gamma_t \cap \Omega_H^+ = \phi$  para  $t > \arctan(\sqrt{\kappa}/2H)$  o  $t < 0$ . De esta manera, la anterior integral puede reescribirse como sigue

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega_H) &= \frac{32\tau}{\kappa^2} \int_0^{\arctan(\sqrt{\kappa}/2H)} \left( \int_{[0, y(t)] \times [0, 2\pi]} \varphi^*(\omega_t) \right) dt \\ &= \frac{16\pi\tau}{\kappa^2} 4 \int_0^{\arctan(\sqrt{\kappa}/2H)} \sin t \cos t y(t) dt \end{aligned}$$

Finalmente, un cálculo directo nos permite obtener el resultado. ■

En la figura 13 hemos dibujado el área de las esferas  $\mathcal{S}_{(4,\tau)}(H)$  y los toros  $\mathcal{T}_{(4,\tau)}(H)$  en  $\mathbb{S}_b^3(4, \tau)$  en términos del volumen encerrado por dichas superficies para cuatro esferas de Berger diferentes.



**Figura 13:** Área de las esferas (línea continua) y los toros (línea discontinua) de curvatura media constante en términos del volumen en las esferas de Berger  $\mathbb{S}_b^3(4, \tau)$  para diferentes valores de  $\tau$ .

Para simplificar hemos fijado en todos los casos  $\kappa = 4$ . Así, a la vista de la figura 13 podemos afirmar que, para  $\tau = 0,5$ , las esferas  $\mathcal{S}_{(4;0,5)}(\mathbb{H})$  son los mejores candidatos a ser solución del problema isoperimétrico. Pero podemos encontrar una esfera de Berger, la correspondiente a  $\tau \approx 0,407$ , de manera que la esfera mínima  $\mathcal{S}_{(4;0,407)}(0)$  y el toro de Clifford  $\mathcal{T}_{(\kappa,\tau)}(0)$ , que dividen a la esfera en dos dominios de igual volumen, tienen la misma área. Así ambos son candidatos a ser solución del problema isoperimétrico correspondiente al volumen mitad. Para  $\tau = 0,374$  todas las esferas CMC son estables (cf. Teorema 7.1 [p.152]), pero existe un intervalo de volúmenes centrado en el volumen mitad  $\pi^2\tau$  para el cual los toros  $\mathcal{T}_{(4,\tau)}(\mathbb{H})$  son los candidatos a ser solución del problema isoperimétrico. Finalmente, para  $\tau = 0,244$  (en este caso existen esferas inestables), los toros  $\mathcal{T}_{(4,\tau)}(\mathbb{H})$  son de nuevo candidatos a ser solución del problema isoperimétrico para volúmenes cercanos a la mitad. En este último caso existen esferas CMC no congruentes que encierran el mismo volumen.



## GLOSARIO

<b>Notación</b>	<b>Descripción</b>
$A$	$= \langle \Phi_z, \xi \rangle$ , siendo $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$ una inmersión isométrica y $z$ un parámetro conforme sobre $\Sigma$ , 36
$A_\xi$	Endomorfismo de Weingarten asociado a un vector normal $\xi$ , 93
$\mathbb{C}H^2(c)$	Plano hiperbólico complejo de curvatura seccional holomorfa constante $c < 0$ , 18
$C_j$	Funciones de Kähler asociadas a una inmersión $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ relativas a cada una de las estructuras complejas $J_j$ , $j = 1, 2$ , 92
$\mathbb{C}M^2(c)$	Plano proyectivo complejo o plano hiperbólico complejo de curvatura seccional holomorfa constante $c$ , según $c$ sea positivo y negativo, 18
CMC	Superficies de curvatura media constante, $v$
cn	Función de Jacobi coseno amplitud, 139
$\mathbb{C}P^2(c)$	Plano proyectivo complejo de curvatura seccional holomorfa constante $c > 0$ , 18
$D$	Conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^6$ o $\mathbb{R}_2^6$ , 9
$d$	Diferencial exterior, 170
$\delta$	Codiferencial, 170
dn	Función de Jacobi delta amplitud, 138

<b>Notación</b>	<b>Descripción</b>
$E(\kappa, \tau)$	Espacio homogéneo riemanniano con grupo de isometría de dimensión 4 simplemente conexo o bien ciertos cocientes de éstos que respetan la fibración sobre $M^2(\kappa)$ , 15
$\tilde{E}(2)$	Recubridor universal del grupo de isometrías del plano euclídeo, 12
$\mathbb{H}^2$	Plano hiperbólico real con su métrica estándar de curvatura constante $-1$ , 3
$\mathbb{H}^3$	Espacio hiperbólico real con su métrica de curvatura seccional constante $-1$ , 11
Id	Aplicación identidad, 4
$\text{Im}(z)$	Parte imaginaria del número complejo $z$ , 23
J	Estructura compleja sobre una superficie orientable, 3
$J_1$	Estructura compleja sobre $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ dada por $J_1(u, v) = (Ju, Jv)$ , 5
$J_2$	Estructura compleja sobre $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ dada por $J_2(u, v) = (Ju, -Jv)$ , 5
$\bar{K}$	Curvatura seccional extrínseca de una inmersión $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Se define como $\bar{K} = \bar{R}(e_1, e_2, e_2, e_1)$ , siendo $\{e_1, e_2\}$ una referencia ortonormal de $T\Sigma$ , 92
$K^\perp$	Curvatura normal de una inmersión $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Se define como $K^\perp = R^\perp(e_1, e_2, e_3, e_4)$ , siendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una referencia ortonormal orientada de $\Phi^*T(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon))$ , donde $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal orientada de $T\Sigma$ , 91

<b>Notación</b>	<b>Descripción</b>
$\bar{K}^\perp$	Curvatura normal extrínseca de una inmersión $\Phi : \Sigma \rightarrow M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ . Se define como $\bar{K}^\perp = \bar{R}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ , siendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una referencia ortonormal orientada de $\Phi^*T(M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon))$ , donde $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal orientada de $T\Sigma$ , 91
L	Operador de Jacobi de una superficie $\Sigma$ CMC estable en una 3-variedad riemanniana $M$ . Se define como $L = \Delta +  \sigma ^2 + \bar{\text{Ric}}(N)$ , siendo $\Delta$ el laplaciano sobre $\Sigma$ , $\sigma$ la segunda forma fundamental, $N$ un normal unitario y $\bar{\text{Ric}}$ el tensor de Ricci de $M$ , 149
$M^2(\kappa)$	Superficie orientable simplemente conexa de curvatura de Gauss constante $\kappa$ , 3
$\text{Nil}_3$	Grupo de las matrices nilpotentes de orden 3, también conocido con grupo de Heisenberg, 12
$\nu$	Función ángulo. Para una inmersión de una superficie orientable en $E(\kappa, \tau)$ con normal $N$ se define como $\nu = \langle N, \xi \rangle$ , 33
$\omega_j$	Forma de Kähler asociada a la estructura compleja $J_j$ sobre $M^2(\epsilon) \times M^2(\epsilon)$ , 5
P	Estructura producto, 4
p	$= \langle \sigma(\partial_z, \partial_z), N \rangle$ , siendo $\sigma$ la segunda forma fundamental, $N$ un normal a una inmersión $\Phi : \Sigma \rightarrow E(\kappa, \tau)$ y $z$ un parámetro conforme sobre la superficie $\Sigma$ , 36
$\partial_{\bar{z}}$	Operador diferencial definido por $= (\partial_x + i\partial_y)/2$ siendo $z = x + iy$ un parámetro conforme sobre una superficie de Riemann $\Sigma$ , 34

<b>Notación</b>	<b>Descripción</b>
$\partial_z$	Operador diferencial definido por $\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$ siendo $z = x + iy$ un parámetro conforme sobre una superficie de Riemann $\Sigma$ , 34
PMC	Superficies de curvatura media paralela, 91
$\langle , \rangle$	Métrica, 3
$R, \bar{R}$	Tensor de curvatura, 6
$\mathbb{R}^3$	Espacio euclídeo, 11
$\text{Re}(z)$	Parte real de un número complejo $z$ , 16
$\bar{\text{Ric}}$	Curvatura de Ricci de un espacio homogéneo riemanniano $E(\kappa, \tau)$ , 16
$R^\perp$	Tensor de curvatura asociado a la conexión normal $\nabla^\perp$ , 91
$S, \bar{S}$	Tensor de Ricci, 6
$S^2$	Esfera unidad con su métrica estándar de curvatura constante 1, 3
$S^3$	3-esfera con su métrica estándar de curvatura seccional constante 1, 11
$S_b^3$	Esfera de Berger, 21
$S_b^3(\kappa, \tau)$	Esfera de Berger con curvatura de la base $\kappa > 0$ y curvatura de la fibra $\tau$ , 21
$\rho, \bar{\rho}$	Curvatura escalar, 6
$S_{(\kappa, \tau)}(H)$	Esfera de curvatura media $H$ inmersa en el espacio homogéneo $E(\kappa, \tau)$ . Debe ser $4H^2 + \kappa > 0$ , 48, 62
$Sl_2(\mathbb{R})$	Grupo especial lineal de orden 2, 12
$Sl_2(\mathbb{R})(\kappa, \tau)$	Grupo especial lineal con una métrica homogénea que depende de $\kappa < 0$ y $\tau \neq 0$ , 25
$Sl_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_n$	Análogo a los espacios lente para $Sl_2(\mathbb{R})$ , 14
sn	Función de Jacobi seno amplitud, 138
Sol <sub>3</sub>	Recubridor universal del grupo de transformaciones del plano de Minkowski que preservan la orientación temporal, 12

<b>Notación</b>	<b>Descripción</b>
$S_b^3/\mathbb{Z}_n$	Espacio lente con la métrica de Berger inducida, 14
$SU(2)$	Grupo especial unitario de orden 2, 12
$\Theta_{AR}$	Diferencial de Abresch-Rosenberg, 34
$\hat{\mathcal{T}}_{(\kappa,\tau)(H)}$	Toro de Hopf de curvatura media constante $H$ embebido en $Sl_2(\mathbb{R})$ , 40
$\mathcal{T}_{(\kappa,\tau)(H)}$	Toro de Hopf de curvatura media constante $H$ embebido en la esfera de Berger $S_b^3(\kappa,\tau)$ , 39
$T^\perp \Sigma$	Fibrado normal a una superficie $\Sigma$ , 91
$T_p M$	Tangente a una variedad $M$ en un punto $p$ , 3
$\wedge$	Producto vectorial en una 3-variedad orientable, 15
$\xi$	Campo de Killing unitario y vertical a la fibración de un espacio homogéneo sobre $M^2(\kappa)$ , 15
$X^\sharp$	Dado un campo diferenciable $X$ , $X^\sharp$ representa la 1-forma asociada al campo, i.e., $X^\sharp(u) = \langle u, X \rangle$ , 80



## ÍNDICE ALFABÉTICO

- campo
  - armónico, 170
- cilindro
  - producto de un círculo geodésico y un hiperciclo, 102
  - producto de un círculo geodésico y un horociclo, 102
- conexión
  - normal, 91
- coseno amplitud, 139
- curvatura
  - media paralela, 92
  - normal, 91
  - normal extrínseca, 91
  - seccional extrínseca, 93
- datos fundamentales
  - de una inmersión CMC, 36
  - de una inmersión PMC, 95
- delta amplitud, 138
- diferencial
  - de Abresch-Rosenberg, 34
- ecuaciones de compatibilidad, 35
- esfera, 3
  - de Berger, 20, 21
- espacio
  - proyectivo real, 15
- estructura
  - compleja, 3
  - producto, 4
- fibración de Hopf, 21
- forma
  - armónica, 170
- función
  - isoparamétrica, 119
  - función ángulo, 33
  - función de Jacobi
    - coseno amplitud, 139
    - delta amplitud, 138
    - seno amplitud, 138
  - función de Kähler, 92
- grupo
  - de Heisenberg, 12
  - especial lineal, 12
  - especial unitario, 12
  - grupo de Lie
    - no unimodular, 12
- hiperciclo, 102
- hipersuperficie
  - pseudo-umbilical, 19
- homogeneidad, 11
- horociclo, 102

invariantes por rotación,  
42

toro

de Hopf, 79, 155

producto de dos círcu-  
los geodésicos, 101

toros

lagrangianos, 37

variedad riemanniana ho-  
mogénea, 11

vector curvatura media pa-  
ralelo, 92

## BIBLIOGRAFÍA

- [AEGo7a] Juan A. Aledo, José M. Espinar, and José A. Gálvez. Complete surfaces of constant curvature in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbf{R}$  and  $\mathbb{S}^2 \times \mathbf{R}$ . *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 29(3):347–363, 2007. (Citado en las páginas xix, xxxiii y 87.)
- [AEGo7b] Juan A. Aledo, José M. Espinar, and José A. Gálvez. Surfaces with constant curvature in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Height estimates and representation. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(4):533–554, 2007. (Citado en las páginas xix, xxxiii y 87.)
- [Ale56] A. D. Alesandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large. I. *Vestnik Leningrad. Univ.*, 11(19):5–17, 1956. (Citado en las páginas v y xxi.)
- [ARo4] Uwe Abresch and Harold Rosenberg. A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Acta Math.*, 193(2):141–174, 2004. (Citado en las páginas vii, xxii, 41, 129 y 131.)
- [ARo5] Uwe Abresch and Harold Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.*, 28:1–28, 2005. (Citado en las páginas vii, xxiii y 42.)
- [BdC84] João Lucas Barbosa and Manfredo do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, 185(3):339–353, 1984. (Citado en las páginas vi, xiv, xxii, xxviii, 169 y 173.)

- [BdCE88] J. Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo, and Jost Eschenburg. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197(1):123–138, 1988. (Citado en las páginas xiv, xxviii, 169 y 173.)
- [BF71] Paul F. Byrd and Morris D. Friedman. *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 67. Springer-Verlag, New York, 1971. Second edition, revised. (Citado en las páginas 108 y 138.)
- [BGM71] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d'une variété riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971. (Citado en la página 156.)
- [BT05] D. A. Berdinskiĭ and I. A. Taĭmanov. Surfaces in three-dimensional Lie groups. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 46(6):1248–1264, 2005. (Citado en las páginas vii, xxiii y 35.)
- [Cas] Ildefonso Castro. Superficies mínimas en  $S^3$  que admiten un campo de Killing. Comunicación personal. (Citado en la página 76.)
- [Che73] Bang-yen Chen. *Geometry of submanifolds*. Marcel Dekker Inc., New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, No. 22. (Citado en las páginas viii y xxiv.)
- [Che76] Shiu Yuen Cheng. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv.*, 51(1):43–55, 1976. (Citado en las páginas 110 y 122.)

- [CPR95] Renzo Caddeo, Paola Piu, and Andrea Ratto.  $SO(2)$ -invariant minimal and constant mean curvature surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces. *Manuscripta Math.*, 87(1):1–12, 1995. (Citado en la página 41.)
- [CU07] Ildefonso Castro and Francisco Urbano. Minimal lagrangian surfaces in  $S^2 \times S^2$ . *Comm. Analy. and Geom.*, 15:217–248, 2007. (Citado en la página 118.)
- [Dan07] Benoît Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 82(1):87–131, 2007. (Citado en las páginas 15, 34, 35, 36 y 63.)
- [dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese. (Citado en las páginas v y xxi.)
- [DHM09] Benoît Daniel, Laurent Hauswirth, and Pablo Mira. *Lectures notes on homogeneous 3-manifolds*. Korea Institute for Advanced Study, 2009. 4<sup>th</sup> Kias workshop on Differential Geometry. (Citado en las páginas viii, xxiii y 33.)
- [dLV08] Jorge de Lira and Feliciano A. Vitorio. Surfaces with constant mean curvature in Riemannian products. *Quart. J. Math.*, 00:1–9, 2008. (Citado en las páginas x y xxv.)
- [ER09] Jose María Espinar and Harold Rosenberg. Complete CMC surfaces in homogeneous spaces. To appear in *Comm. Math. Helvetici*, 2009. (Citado en la página 41.)

- [Esp09] Carlos Espinoza. Rotational and Parabolic surfaces in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}, \tau)$  and applications. arXiv:0911.2213v1 [Math.DG], November 2009. (Citado en las páginas 42 y 63.)
- [FDC09] Isabel Fernández and Manfredo Do Carmo. A Hopf theorem for open surfaces in product spaces. *Forum Math.*, 21:951–963, 2009. (Citado en la página 41.)
- [Fer71] Dirk Ferus. The torsion form of submanifolds in  $E^n$ . *Math. Ann.*, 193:114–120, 1971. (Citado en las páginas viii y xxiv.)
- [FM07] Isabel Fernández and Pablo Mira. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Differential Geom. Appl.*, 25(3):281–289, 2007. (Citado en las páginas viii, xxiii, 35 y 36.)
- [FMP99] Christiam B. Figueroa, Francesco Mercuri, and Renato H. L. Pedrosa. Invariant surfaces of the Heisenberg groups. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 177:173–194, 1999. (Citado en las páginas 41 y 42.)
- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics. (Citado en la página 163.)
- [GMM08] José A. Gálvez, Antonio Martínez, and Pablo Mira. The Bonnet problem for surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 16(5):907–935, 2008. (Citado en la página 136.)
- [Gor01] Claudio Gorodski. Delaunay-type surfaces in the  $2 \times 2$  real unimodular group. *Ann. Mat. Pura*

- Appl. (4)*, 180(2):211–221, 2001. (Citado en las páginas 42 y 63.)
- [HH89] Wu-teh Hsiang and Wu-Yi Hsiang. On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in noncompact symmetric spaces. i. *Invent. Math.*, 98(1):39–58, 1989. (Citado en las páginas vii, xxiii, 41 y 72.)
- [Hil01] David Hilbert. Ueber Flächen von constanter Gausscher Krümmung. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2(1):87–99, 1901. (Citado en las páginas xix y xx-xiii.)
- [HN59] Philip Hartman and Louis Nirenberg. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign. *Amer. J. Math.*, 81:901–920, 1959. (Citado en las páginas xix y xxxiii.)
- [Hop83] Heinz Hopf. *Differential geometry in the large*, volume 1000 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Notes taken by Peter Lax and John Gray, With a preface by S. S. Chern. (Citado en las páginas v y xxi.)
- [HR08] Ana Hurtado and César Rosales. Area-stationary surfaces inside the sub-Riemannian three-sphere. *Math. Ann.*, 340(3):675–708, 2008. (Citado en la página 49.)
- [Hsi82] Wu-yi Hsiang. On generalization of theorems of A. D. Alexandrov and C. Delaunay on hypersurfaces of constant mean curvature. *Duke Math. J.*, 49(3):485–496, 1982. (Citado en la página 49.)
- [Koi02] Miyuki Koiso. Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Math. J. (2)*, 54(1):145–159, 2002. (Citado en la página 152.)

- [KS09] Martin Kilian and Martin U. Schmidt. On infinitesimal deformations of cmc surfaces of finite type in the 3-sphere. arXiv:0910.2096v1 [math.DG], October 2009. (Citado en las páginas xiii y xxviii.)
- [KZ00] Katsuei Kenmotsu and Detang Zhou. The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms. *Amer. J. Math.*, 122(2):295–317, 2000. (Citado en las páginas ix y xxiv.)
- [Law70] H. Blaine Lawson, Jr. Complete minimal surfaces in  $S^3$ . *Ann. of Math. (2)*, 92:335–374, 1970. (Citado en la página 74.)
- [Lei07] Maria Luiza Leite. An elementary proof of the Abresch-Rosenberg theorem on constant mean curvature immersed surfaces in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Q. J. Math.*, 58(4):479–487, 2007. (Citado en las páginas 83, 129, 131, 132 y 138.)
- [Lie00] Heinrich Liebmann. Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. *Math. Ann.*, 53(1-2):81–112, 1900. (Citado en las páginas xix y xxxiii.)
- [Mil65] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Based on notes by David W. Weaver. The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965. (Citado en la página 85.)
- [Mil76] John W. Milnor. Curvature of left invariant metrics on lie groups. *Adv. in Math.*, 21:239–329, 1976. (Citado en la página 12.)

- [Mon85] Sebastián Montiel. Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space. *J. Math. Soc. Japan*, 37(3):515–535, 1985. (Citado en la página 19.)
- [MR09] Sebastián Montiel and Antonio Ros. *Curves and surfaces*, volume 69 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2009. Translated from the 1998 Spanish original by Montiel and edited by Donald Babbitt. (Citado en las páginas v y xxi.)
- [MU02] Sebastián Montiel and Francisco Urbano. A willmore functional for compact surfaces in the complex projective plane. *J. Reine Angew. Math.*, 546:139–154, 2002. (Citado en las páginas xvii, xxxi, 161 y 162.)
- [NR06] Barbara Nelli and Harold Rosenberg. Global properties of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Pacific J. Math.*, 226(1):137–152, 2006. (Citado en la página 63.)
- [Oga95] Takashi Ogata. Surfaces with parallel mean curvature vector in  $P^2(\mathbb{C})$ . *Kodai Math. J.*, 18(3):397–407, 1995. (Citado en las páginas ix y xxiv.)
- [Pat96] Victor Patrangenaru. Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples. *Pac. J. Math.*, 173(2):511–532, 1996. (Citado en la página 12.)
- [Ped04] Renato H. L. Pedrosa. The isoperimetric problem in spherical cylinders. *Ann. Global Anal. Geom.*, 26(4):333–354, 2004. (Citado en la página 72.)
- [PR99] Renato H. L. Pedrosa and Manuel Ritoré. Isoperimetric domains in the Riemannian product of

- a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 48(4):1357–1394, 1999. (Citado en las páginas vii, xxiii y 41.)
- [PS89] U. Pinkall and I. Sterling. On the classification of constant mean curvature tori. *Ann. of Math. (2)*, 130(2):407–451, 1989. (Citado en las páginas vi y xxii.)
- [Ros84] Antonio Ros. On spectral geometry of Kaehler submanifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 36(3):433–448, 1984. (Citado en las páginas xviii, xxxiii y 176.)
- [Ros06] Antonio Ros. One-sided complete stable minimal surfaces. *J. Differential Geom.*, 74(1):69–92, 2006. (Citado en las páginas xiv, xvii, xxix, xxxii y 169.)
- [Ros07] Antonio Ros. Stable periodic constant mean curvature surfaces and mesoscopic phase separation. *Interfaces Free Bound.*, 9(3):355–365, 2007. (Citado en las páginas xiv, xvii, xxix, xxxii y 169.)
- [RR92] Manuel Ritoré and Antonio Ros. Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms. *Comment. Math. Helv.*, 67(2):293–305, 1992. (Citado en las páginas xiv y xxix.)
- [Sou08] Rabah Souam. On stable constant mean curvature surfaces in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . arXiv:0709.4204v2 [math.DG], Abril 2008. (Citado en las páginas xiv, xv, xxix, xxx, 152, 155, 169, 173 y 174.)
- [Spi79] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. III.* Publish or Perish Inc.,

Wilmington, Del., second edition, 1979. (Citado en las páginas xix y xxxiii.)

- [Tak75] Ryoichi Takagi. Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures. i, ii. *J. Math. Soc. Japan*, 27(4):507–516, 1975. (Citado en la página 19.)
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy. (Citado en la página 13.)
- [Tom93] Per Tomter. Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group. In *Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990)*, volume 54, chapter Proc. Sympos. Pure Math., pages 485–495. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. (Citado en las páginas 41, 72 y 150.)
- [TT63] Yoshihiro Tashiro and Shun-ichi Tachibana. On Fubinian and C-Fubinian manifolds. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 15:176–183, 1963. (Citado en las páginas ix, xxiv y 19.)
- [Wei91] Joel L. Weiner. Flat tori in  $S^3$  and their gauss maps. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 62(1):54–76, 1991. (Citado en las páginas xx, xxxiv y 82.)
- [Yau74] Shing Tung Yau. Submanifolds with constant mean curvature. i, ii. *Amer. J. Math.*, 96:346–366, 1974. (Citado en las páginas viii y xxiv.)
- [YY80] Paul C. Yang and Shing-Tung Yau. Eigenvalues of the laplacian of compact Riemann surfaces and

minimal submanifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 7(1):56–63, 1980. (Citado en la página 163.)