Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

Ocaña

EL AXIOMA DE SAKAI EN JV-ALGEBRAS

Memoria que, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matematicas, presenta D. Francisco Gabriel Ocaña Ocaña.

Esta memoria ha sido realizada en el Departamento de Teoria de Funciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Dr. D. Angel Rodriguez Palacios.

EL DIRECTOR

Angel Rodriguez

Francisco Ocaña

Vº Bº EL PONENTE

GRANADA - 7 de OCTUBRE 1977

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

EL AXIOMA DE SAKAI EN JW*-ALGEBRAS

FRANCISCO G. OCAÑA OCAÑA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1977

A Leonor

INDICE

CAPITULO I

CAPITULO II

C A P I T U L O   III

ooooooooooooooo

INTRODUCCION

Sea H un espacio de Hilbert complejo, y sea A una subálgebra de BL(H), autoadjunta, cerrada para la topologia débil de operadores y que contiene a la unidad de BL(H). Un álgebra A en esas condiciones se conoce con el nombre de álgebra de Von Neumann (ó W^*-álgebra), y es por supuesto cerrada para la topologia de la norma.

La teoría de las W^*-álgebras, desde este punto de vista concreto, ha sido desarrollada a partir de 1929 por el propio Von Neumann y otros autores, siendo (27) una extensa monografia sobre el tema es esta dirección.

Ya, desde sus comienzos, la teoría de las álgebras de Von Neumann adquiere un explendido desarrollo, si bien, los métodos de trabajo en ella eran completamente ajenos a los de la teoría general de las álgebras de Banach, por no haberse encontrado una caracterización intrinseca de aquellas.

En 1943, Gelfand y Neumark (29), consiguen un primer resultado en la linea de la caracterización intrinseca de las W^*-álgebras, que a la larga sería definitiva con la posterior aportación de Sakai. Concretamente consiguen caracterizar las subálgebras autoadjuntas uniformemente cerradas de BL(H) como aquellas álgebras de Banach con involución en las que se verifica $\|a^*a\| = \|a\|^2$ (junto con otros axiomas que posteriormente se han visto supérfluos).

En 1950 (28) Dixmier demuestra que toda álgebra de Von Neumann es el dual topológico de un espacio de Banach, y en 1956 se termina definitivamente la axiomatización de las W^*-álgebras con un teorema de Sakai (31) afirmando el recíproco del resultado anterior de Dixmier.

En consecuencia, las W^*álgebras se pueden considerar abstractamente como las álgebras de Banach con involución satisfaciendo $\|a^*a\| = \|a\|^2$ (B^*-álgebras) y que son el dual topológico de un espacio de Banach (axioma de Sakai).

En 1976 (16) Juan Martinez Moreno aborda el problema de conseguir unos axiomas que diesen lugar a un tipo de álgebras de Jordan análogas a las B^*-álgebras asociativas, y que incluyesen en particular las álgebras de Jordan del tipo A^+, con A B^*-álgebra asociativa.

Como quiera que el axioma de Gelfand-Neumark no se verifica ni tan siquiera en estas últimas, J. Martinez se basa en una caracterización geométrica de las B^*-álgebras conseguida por Vidav y Palmer en 1968, (32) (30) (3), según la cual las B^*-álgebras asociativas coinciden con las álgebras de Banach complejas unitales A que verifican

$$A = H(A) + iH(A)$$

$$H(A) = \{a \in A: \langle a,a' \rangle \in \mathbb{R}, \forall a' \in A': \|a'\| = \langle I,a' \rangle = 1\}$$

(donde I es la unidad de A y A' el dual topológico de A).

siendo la única involución que satisface el teorema de Gelfand-Neumark la dada intrinsecamente por a + ib → a - ib.

En la terminología de (16), una JV-álgebra es un álgebra de Jordan J, compleja, normada, completa y unital que verifica

$$J = H(J) + iH(J)$$

siendo evidente, con esta definición, que toda álgebra de Jordan A^+, con A B^*-álgebra, es una JV-álgebra. En (16) se demuestra que la aplicación a + ib → a - ib, de J en J, es una involución de álgebra continua.

Con estos precedentes, una teoría de álgebras de Jordan análoga a la de las W^*-álgebras se consigue sin más que exigir a una JV-álgrbra ser el dual topológico de un espacio de Banach. A las JV-álgebras en estas condiciones las hemos llamado JW^*-álgebras, y es claro que el estudio de las mismas engloba en particular el de las álgebras de Jordan subyacentes a las W^*-álgebras asociativas.

....

Sentado el concepto de JW^*-álgebra, nos propusimos como problemas básicos para el pasterior desarrollo de la teoría, el establecer en una JW^*-álgebra M la continuidad de la involución y la continuidad separada del producto, cuando en M se considera la topologia débil $\sigma(M,M_*)$, donde M_* es "predual" de M.

A la solución de estos problemas hemos dedicado, en esencia, la memoria que ahora presentamos. En ella (teoremas II.5.4 y III.3.7) resolvemos afirmativamente los dos problemas propuestos.

El metodo utilizado ha sido, fundamentalmente, una adaptación a nuestro caso del empleado en (22), si bien hemos tenido que introducir algunas variantes de consideración, como han sido el establecer previamente (y por métodos distintos) el concepto y propiedades del soporte de un elemento positivo, y la resolución espectral de los elementos hermitianos (III.2 y III.3).

En la memoria conseguimos tambien teoremas de estabilidad de la estructura (teorema II.4.5 y corolario III.4.5), caracterización de ideales debilmente cerrados (corolario III.4.6), habiendo sido necesario previamente hacer un estudio del conjunto de las proyecciones de una JW^*-álgebra, para el que hemos demostrado ser un retículo completo.

Como puede sospecharse, la consecución de los resultados antes mencionados, nos ha obligado a desarrollar en algunos puntos la teoría de las JV-álgebras; asi, por ejemplo, se obtiene la caracterización de los funcionales lineales positivos (teoremas II.3.10 y II.3.11), la existencia y unicidad de raices n-esimas positivas de elementos positivos (teorema II.3.2) y en consecuencia la descomposición ortogonal de los elementos hermitianos (teorema II.3.4).

Queremos destacar también que esta memoria contiene una importante aportación a la teoría general de las álgebras normadas no asociativas (que creemos es original).

El problema, que hemos resuelto afirmativamente (teorema I.4.3), consiste en: dado un álgebra no asociativa con unidad I, cuyo espacio subyacente es normado de manera que el producto resulta continuo, renormar equivalentemente el álgebra de modo que se tenga $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ y $\|I\| = 1$.

....

Quiero, por último, expresar mi agradecimiento:

Al profesor Angel Rodriguez Palacios, bajo cuya dirección he trabajado, por las certeras orientaciones que han hecho posible la elaboración de la presente memoria.

Al profesor D. José Ramón Fuentes Miras, Catedrático y Director del Departamento de Teoría de Funciones, por el apoyo prestado en todo momento.

Finalmente a mis compañeros de Departamento, y muy especialmente al profesor Juan Martinez Moreno que inició el camino que después yo he seguido.

Granada, Octubre de 1977

Francisco Gabriel Ocaña Ocaña

CAPITULO I

1. ALGEBRAS DE JORDAN.

Sea A un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo K. Un producto de álgebra sobre A es una aplicación bilineal $(a,b) \rightarrow ab$, de $A \times A$ en A, y un álgebra sobre K es el par formado por un espacio vectorial A, sobre el cuerpo K, y un producto de álgebra sobre A. Un álgebra se dice que es asociativa (conmutativa) cuando el producto de A es asociativo (conmutativo).

En cuanto a notación, en toda álgebra A notaremos mediante simple yuxtaposición ab al producto de los elementos a y b de A. Cuando en A consideremos algún otro producto, distinto del inicial, notaremos a.b al nuevo producto de los elementos a y b de A.

DEFINICION 1.1.- Se llama álgebra de Jordan a todo espacio vectorial $\mathfrak{J}$, sobre un cuerpo conmutativo K de caracteristica distinta de 2, dotado de un producto de álgebra $(a,b) \rightarrow ab$ que verifica los axiomas

A.1.- $ab = ba$

A.2.- $a^2(ba) = (a^2b)a$

para todo $a,b \in J$, y donde $a^2 = aa$.

Si A es un álgebra asociativa, sobre un cuerpo K, conmutativo y de característica distinta de 2, podemos definir un nuevo producto a.b en A, llamado producto Jordan, mediante:

$$(1.1) \qquad a.b = \frac{1}{2}(ab+ba)$$

que satisface los axiomas A.1 y A.2. Vemos pues que subyacente a toda álgebra A, en las condiciones citadas, existe una estructura de álgebra de Jordan que representaremos por A^+. Es claro que si el álgebra asociativa A es además conmutativa, el producto Jordan coincide con el producto inicial asociativo, aunque en cualquier caso se verifica $a^2 = aa = a.a$ para cada $a \in A$.

DEFINICION 1.2.- Un álgebra de Jordan J diremos que es especial si existe un álgebra asociativa A y un monomorfismo de álgebras de J en A^+. Llamaremos álgebra de Jordan excepcional a toda álgebra de Jordan que no sea especial.

Cuando A es un álgebra asociativa con elemento unidad I, dicho elemento es tambien unidad en A^+. Por otra parte, dos elementos $a,b \in A$ son inversos en A si y solo si verifican en A^+ $a.b = I$ y $a^2.b = a$, lo que motiva la definición de elementos inversos en un álgebra de Jordan cualquiera.

DEFINICION 1.3.- Sea J un álgebra de Jordan con elemento unidad I. Un elemento $a \in J$ es inversible, con $b \in J$ como inverso, si se verifica:

1) $ab = I$

2) $a^2b = a$

Representaremos por inv.(J) al conjunto de los elementos de J que poseen inverso en J. Como veremos más adelante, al caracterizar los elementos inversibles mediante propiedades de los operadores U_a, si a es inversible su inverso es único.

DEFINICION 1.4.- Una subálgebra de un álgebra de Jordan J es un subespacio vectorial de J estable para el producto. Si B es una parte no vacia de J, la intersección de todas las subálgebras de J que contienen a B es una nueva subálgebra de J llamada subálgebra engendrada por B.

Puesto que en toda álgebra conmutativa A el producto de dos elementos se puede expresar mediante cuadrados, en virtud de la relación:

$$(1.2) \qquad 2ab = (a+b)^2-a^2-b^2$$

deducimos que una condición necesaria y suficiente para que un subespacio L, de un álgebra de Jordan J, sea una subálgebra es que $a^2 \in L$ para todo $a \in L$.

Si J es un álgebra de Jordan sobre K, y $B \subset J$ es una parte no vacia, notaremos mediante $K(B)$ la subálgebra de J engendrada por B.

DEFINICION 1.5.- Un ideal N de un álgebra de Jordan J es un subespacio de J que verifica $ab \in N$, para todo $a \in N$ y todo $b \in J$. Un ideal N de J se dice propio si $N \neq J$.

Como en el caso de las álgebras asociativas, la suma y la intersección de ideales es un nuevo ideal. Si J posee unidad entonces el conjunto de los ideales propios está ordenado, mediante la inclusión, con un orden inductivo, por lo que podemos asegurar que todo ideal propio de J esta contenido en un ideal maximal propio de J.

Sea J un álgebra de Jordan sobre K. El espacio vectorial $L(J)$, de las aplicaciones lineales de J en J, es automáticamente un álgebra asociativa con unidad si consideramos como producto en $L(J)$ la composición de aplicaciones. Para cada $a \in J$, la aplicación R_a: $x \to ax$ es un elemento de $L(J)$ en virtud de la bilinealidad del producto. Por igual razón, la aplicación R: $a \to R_a$, de J en $L(J)$, es lineal y constituye una representación del álgebra de Jordan J en el álgebra asociativa $L(J)$, en el sentido de (13),(II.1).

Un aspecto importante de la teoría de las álgebras de Jordan lo constituyen las identidades que se pueden establecer con sus elementos. Para su exposición utilizaremos la siguiente notación, general en toda álgebra A con producto ab:

$$[a,b] = ab - ba$$

$$[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$$

para todo $a,b,c \in A$. Definimos ademas por inducción a^k, para cada $a \in A$ y cada $k \in \mathbb{N}^*$ mediante $a^1 = a$ y $a^{k+1} = a^k a$.

En un álgebra de Jordan J, el axioma A.2 (axioma de Jordan) nos proporciona la primera identidad, que se expresa en terminos de los operadores R_a mediante:

(1.3) $$[R_a, R_{a^2}] = 0$$

para todo $a \in J$. De la linealidad de la aplicación $R: a \to R_a$ se pueden deducir sucesivamente:

(1.4) $$[R_{ab}, R_c] + [R_{ac}, R_b] + [R_{bc}, R_a] = 0$$

(1.5) $$[[R_c, R_a], R_b] = R_{[a,b,c]}$$

(1.6) $$R_{a^{k+2}} = 2R_a R_{a^{k+1}} - (2R_a^2 - R_{a^2}) R_{a^k}$$

para todo $a,b,c \in J$ y todo $n \in \mathbb{N}^*$.

La demostración de estas identidades, que omitimos por apartarse del objeto de la presente memoria, puede verse en (13)(I, p.41). La identidad (1.5) nos muestra, mediante un sencillo cálculo, que la aplicación: $x \to [a,x,b]$, de J en J y con $a,b \in J$, es una derivación, de modo que $[a, xy, b] = x[a, y, b] + y[a, x, b]$; y la identidad (1.6) nos pone de manifiesto que el elemento $R_{a^{k+2}}$, para $K \in \mathbb{N}^*$, pertenece a la subálgebra de $L(J)$ engendrada por R_a y R_{a^2}. Destacamos, ademas el siguiente teorema, versión practica e inmediata de los teoremas de Macdonald ((13), I, p. 41) y de Shirshov ((13), I, p. 48).

TEOREMA 1.6.- *Toda identidad en tres elementos, de grado cero o uno en uno de ellos, que sea válida en toda álgebra de Jordan especial, es válida en toda álgebra de Jordan.*

Otro camino distinto al de la representación de J en $L(J)$, pero que alcanza el mismo objetivo de trasladar ciertos problemas en un álgebra de Jordan J a otra álgebra de estructura más potente, consiste en estudiar localmente algunas identidades, considerando a los elementos que figuran en ellas como pertenecientes a subálgebras de J que sean más ricas en propiedades.

DEFINICION 1.7.- Un álgebra no asociativa A diremos que es de potencias asociativas si la subálgebra engendrada por cada elemento de A es asociativa. Una subálgebra B de un álgebra conmutativa A se dice que es fuertemente asociativa si $[R_a, R_b] = 0$ para todo $a,b \in B$.

Cuando A es un álgebra de potencias asociativas se verifica, para todo $a \in A$ y todo $h, k \in \mathbb{N}^*$, la relación:

$$a^k a^h = a^{k+h} \qquad (1.7)$$

y también es evidente que siendo $\mathcal{B}$ fuertemente asociativa, entonces $\mathcal{B}$ es asociativa. En el caso de un álgebra de Jordan, podemos disponer de los siguientes resultados:

TEOREMA 1.8.- *Sea J un álgebra de Jordan. Entonces se verifica:*

1) Toda subálgebra de J engendrada por un único elemento es fuertemente asociativa.

2) J es de potencias asociativas.

3) Si J posee unidad, la subálgebra engendrada por un elemento de J y la unidad es fuertemente asociativa. ((13), I. 8.4).

TEOREMA 1.9. (Shirshov-Cohn).- *Toda álgebra de Jordan (con unidad) engendrada por dos elementos (y la unidad) es un álgebra de Jordan especial.* ((13), I, p.48)

En el caso en que en las identidades intervienen elementos inversibles y sus inversos, podemos disponer del teorema.

TEOREMA 1.10. (Shirsohv-Cohn con inversos).- *Toda álgebra de Jordan (con unidad), engendrada por dos elementos y sus inversos (y la unidad) es especial.* ((17))

2. LOS OPERADORES U_a.

En toda álgebra de Jordan J se define el triple producto mediante la relación:

(2.1) $$\{ abc \} = (ab)c + (bc)a - (ac)b$$

para todo $a,b,c \in J$, que es lineal en las tres variables.

Cuando el álgebra de Jordan es un álgebra A^+, A asociativa, el triple producto admite la siguiente expresión, en terminos del producto asociativo:

(2.2) $$\{ abc \} = \frac{1}{2}(abc + cba)$$

y si hacemos en esta relación $a = c$ se obtiene:

(2.3) $$\{ aba \} = aba$$

Utilizando el triple producto, se definen dos nuevos elementos del álgebra $L(J)$.

DEFINICION 2.1.- Para cada pareja a,b de elementos de un álgebra de Jordan J, llamaremos $U_{a,b}$ a la aplicación de J en J tal que

$$U_{a,b}: x \to \{ axb \}.$$

Para cada $a \in J$ el operador U_a es por definición $U_{a,a}$.

Tanto $U_{a,b}$ como U_a son elementos de $L(J)$, que por su definición se pueden expresar en terminos de los operadores R_a mediante las relaciones:

(2.4) $$U_{a,b} = R_a R_b + R_b R_a - R_{ab}$$

(2.5) $$U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}$$

por lo que de (2.5) y de (1.6) se deduce que U_{a^k}, $k \in \mathbb{N}^*$, es un elemento de la subálgebra de $L(J)$ engendrada por R_a y R_{a^2}.

La aplicación $(a,b) \to U_{a,b}$ de $J{\times}J$ en $L(J)$ es bilineal y la aplicación $U: a \to U_a$, de J en $L(J)$, es cuadrática y canónicamente asociada a ella, por lo que ambas estan relacionadas mediante la expresión:

(2.6) $$2\,U_{a,b} = U_{a+b} - U_a - U_b$$

La teoría cuadrática en las álgebras de Jordan, originada por el operador U_a, tiene una identidad fundamental:

(2.7) $$U_a U_b U_a = U_{U_a(b)}$$

para todo $a,b \in J$, como consecuencia de que la identidad

$$\{a\,\{\,b\,\{\,axa\,\}\,b\,\}\,a\,\} = \{\,\{\,aba\,\}\,x\,\{\,aba\,\}\,\}$$

es válida en toda álgebra de Jordan especial. ((13), I, p.37)

Utilizando el operador U_a se puede dar una información más completa sobre los elementos inversibles, y sus inversos, en un álgebra de Jordan.

TEOREMA 2.2.- *Sea J un álgebra de Jordan con elemento unidad I. Entonces:*

1) *Si $a \in J$ es inversible, con $b \in J$ como inverso, b es inversible y a es su inverso.*

2) *Las tres proposiciones siguientes equivalen:*

   a) *$d \in J$ es inversible.*

   b) *$I \in U_d\ (J)$.*

   c) *U_d es inversible en $L\ (J)$.*

3) *Si $a \in J$ es inversible, su inverso a^{-1} es único y se verifica $a^{-1} = U_a^{-1}\ (a)$.*

4) *Si a y b son inversos entonces $U_b = U_a^{-1}$ y $R_b = U_a^{-1}\ R_a$.*

5) *Si a y b son inversos entonces $[\ R_{a^k}, R_{b^h}\ ] = 0$ para todo $k, h \in \mathbb{N}$, y si definimos $a^{-h} = b^h$ para $h \in \mathbb{N}$, se tiene $a^k\ a^h = a^{k+h}$ para todo $h, k \in Z$.* ((13), I. Teorema 13)

El apartado 5) del teorema anterior nos dice que la subálgebra de J, engendrada por un elemento inversible, su inverso, y la unidad del álgebra, es fuertemente asociativa.

DEFINICION 2.3.- Se dice que una subálgebra B, de un álgebra de Jordan J, con unidad, es plena si contiene a los inversos de todos sus elementos inversibles.

El teorema siguiente, comunicado por N. Jacobson y que puede verse en (16) (I. Teorema 5.8), completa la información sobre álgebras fuertemente asociativas en las que intervienen elementos de J y sus inversos.

TEOREMA 2.4.- (Jacobson). *Sea J un álgebra de Jordan con unidad, B una subálgebra fuertemente asociativa que contiene a la unidad de J, $H = B \cap inv(J)$, $H^{-1} = \{ h^{-1} : h \in H \}$. Entonces la subálgebra B' engendrada por $B \cup H^{-1}$ es fuertemente asociativa.*

Despues del teorema de Jacobson, y recordando la definición de subálgebra plena, junto con el hecho de que las subálgebras propias de J forman un conjunto orden-inductivo con la relación de inclusión, se deduce:

COROLARIO 2.5.- *En un álgebra de Jordan con unidad, toda subálgebra fuertemente asociativa maximal es plena.*

COROLARIO 2.6.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad y sea $a \in J$. Existe una subálgebra B de J, plena y fuertemente asociativa tal que $a \in B$.*

Veamos finalmente la estructura de $U_a(J)$, imagen de J mediante el operador U_a. Como este es un elemento de $L(J)$, $U_a(J)$ es un subespacio vectorial de J, y el siguiente teorema completa el resultado:

TEOREMA 2.7.- *Para cada $a \in J$, $U_a(J)$ es una subálgebra de J.*

Demostración: Sea un álgebra de Jordan A^+, A asociativa. Para toda pareja a,b de elementos de A se verifica $(aba)(aba) = a(ba^2b)a$ por la asociatividad del producto. Luego en A^+ se verifica:

$$U_a(b).\,U_a(b) = U_a[\,U_b(a^2)\,] \tag{2.8}$$

para todo $a,b \in A^+$. Luego (2.8) es valida en toda álgebra de Jordan, por lo que $U_a(J)$ contiene a los cuadrados de todos sus elementos.

3. ELEMENTOS IDEMPOTENTES EN UN ALGEBRA DE JORDAN

DEFINICION 3.1.- Un elemento e de un álgebra de Jordan se dice que es idempotente si $e^2 = e$. Si el álgebra posee unidad I, para cada idempotente e, el elemento $e' = I - e$ es el idempotente complementario de e.

El siguiente lema nos introduce en el estudio de los elementos idempotentes de un álgebra de Jordan, que nos dará las bases algebraicas para el posterior estudio de las proyecciones.

LEMA 3.2.- *Sea J un álgebra de Jordan, y sea B una subálgebra fuertemente asociativa de J. Entonces se verifica:*

1) $U_{aa',a} = U_a R_{a'}$

2) $U_a U_{a'} = U_{aa'}$

3) $U_b R_a = 2 R_b U_{a,b} - U_{a,b^2}$

para todo $a, a' \in B$ *y todo* $b \in J$. ((13), I, p.35)

TEOREMA 3.3.- *Sea J un álgebra de Jordan y* $e \in J$ *un elemento idempotente. Entonces:*

1) U_e *es idempotente de* $L(J)$.

2) $e \in U_e(J)$ *y es unidad de* $U_e(J)$

y si además J posee elemento unidad I, entonces:

3) $U_e\ (I) = e$ y $U_e\ (e') = 0$

4) $U_e\ R_{e'} = 0$

Demostración: Puesto que la subálgebra engendrada por e (y la unidad) es fuertemente asociativa, se tiene, sucesivamente:

1) Del lema 3.3 apartado 2) con $a = a' = e$

2) Al ser e idempotente es $U_e = 2\ R_e^2 - R_e$ luego $U_e\ (e) = e$.

La segunda parte se sigue del lema 3.3 apartado 1) con $a = a' = e$ que daría $U_e = U_e\ R_e$, y para todo $a \in J$ seria $e\ U_e\ (a) = U_e\ (a)$.

3) Es inmediato

4) Del lema 3.3 apartado 1) pon $a = e$, $a' = e'$, y ser $ee' = 0$.

Para un idempotente $e \in J$, la relación $U_e = 2\ R_e^2 - R_e$ nos dice que U_e pertenece a la subálgebra de $L\ (J)$ engendrada por R_e , que es asociativa y conmutativa. Cuando J posee además elemento unidad, entonces U_e, $U_{e'}$ y $R_{e'}$ pertenecen a la subálgebra de $L\ (J)$ engendrada por R_e y la unidad de $L\ (J)$.

Si consideramos, para un idempotente e, la relación:

$$R_e\ (I - R_e)(I - 2\ R_e) = 0 \qquad (3.1)$$

que no es más que una formulación equivalente del apartado 4) del teorema 3.3, podemos afirmar:

TEOREMA 3.4.- *Sea J un álgebra de Jordan, real o compleja, con elemento unidad, y sea* $e \in J$ *un elemento idempotente. Entonces:*

1) $R_e = 2 R_e R_{e'} + U_e$.

2) $U_e^2 = U_e$; $U_{e'}^2 = U_{e'}$; $(4R_e R_{e'})^2 = 4R_e R_{e'}$.

3) $U_e U_{e'} = 4R_e R_{e'} U_e = 4R_e R_{e'} U_{e'} = 0$

4) $I = U_e + U_{e'} + 4R_e R_{e'}$.

Demostración: Puesto que R_e pertenece a la subálgebra, asociativa y commutativa, de $L(J)$ engendrada por R_e y la unidad; y verifica la relación (3.1), un cálculo elemental nos proporciona las tres proyecciones U_e, $U_{e'}$ y $4R_e R_{e'}$ en que se descompone el operador R_e, y cuyas propiedades son las que se postulan en el teorema.

En consecuencia J es la suma algebraica directa de $U_e(J)$, $U_{e'}(J)$ y $4R_e R_{e'}(J)$; y a la descomposición de J en dicha suma directa se le llama descomposición de Peirce de J relativa al idempotente e. ((13), III, 1.1).

TEOREMA 3.5.- *Sea J un álgebra de Jordan y* $e \in J$ *un idempotente. Son equivalentes las proposiciones:*

1) $U_e(a) = a$

2) $a \in U_e(J)$

3) $R_e(a) = a$

Demostración: 1) $\Leftrightarrow$ 2). Es trivial por ser U_e idempotente de $L(J)$ 1) $\Leftrightarrow$ 3). Puesto que $I - U_e = (I - R_e)(I + 2R_e)$, y la relación (3.1) que muestra que $I + 2R_e \in$ inv. $(L(J))$, se tiene que $\ker(I - U_e) = \ker(I - R_e)$, proposición equivalente a la que queriamos probar.

DEFINICION 3.6.- Dos elementos a,b de un álgebra de Jordan, se dice que conmutan como operadores si $[R_a, R_b] = 0$

LEMA 3.7.- *Sea J un álgebra de Jordan, e un idempotente y a un elemento cualquiera de J. Las proposiciones:*

1) $[R_a, R_e] = 0$

2) $R_e(a) = U_e(a)$

son equivalentes.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2). De $[R_a, R_b](e) = 0$ se sigue $e(ea) = ea$ luego $R_e(a) = R_e^2(a)$ y en consecuencia $U_e(a) = R_e(a)$.

2) $\Rightarrow$ 1). De la identidad general (1.4), se tiene:

(3.2) $$2 [R_{ex} , R_e] + [R_e , R_x] = 0$$

si hacemos b=c=e y a=x. Sea $r = ea$ y $s = a - ea$. Suponiendo que se verifica 2) entonces $er = r$ y $es = 0$, luego si en (3.2) sustituimos x por r y s, sucesivamente, obtenemos: $[R_r , R_e] = [R_s , R_e] = 0$ por lo que al ser $a = r + s$ es $[R_a , R_e] = [R_r + R_s , R_e] = 0$

DEFINICION 3.8.- Se llama núcleo de un álgebra de Jordan J al conjunto $N(J) = \{ x \in J : [x,a,b] = [a,x,b] = 0 , \forall a,b \in J \}$.

Se sabe ((13), I, p.18) que el núcleo de J es una subálgebra asociativa. Veremos a continuación algunas propiedades de los idempotentes relacionadas con el núcleo de J, y con el conjunto $R_e(J) = eJ$.

TEOREMA 3.9.- *Sea J un álgebra de Jordan, y $e \in J$ un elemento idempotente. Las proposiciones siguientes son equivalentes:*

1) $R_e = R_e^2$

2) $U_e = R_e$

3) $[R_e , R_a] = 0$ *para todo* $a \in J$

4) eJ *es un ideal de* J, *con unidad* e.

5) $e \in N(J)$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2).- Es inmediata.

2) $\Rightarrow$ 3).- Consecuencia del lema anterior.

3) $\Rightarrow$ 4).- Supuesto 3), para todo $b \in J$ se tiene $e(ab) - (ea)b = 0$ luego eJ es un ideal. Si tomamos $a = e$ entonces $e(eb) = eb$ y e es unidad de eJ.

4) $\Rightarrow$ 1) Pues si $e(ea) = ea$ para todo $a \in J$ entonces $R_e = R_e^2$.

5) $\Rightarrow$ 1) Si $e \in N(J)$ es $[e,e,b] = 0$ para todo $b \in J$ luego $R_e = R_e^2$.

1) $\Rightarrow$ 5) Por ser e idempotente y por la identidad (1.5) se tiene

$[a,e,b] = [a,e^2,b] = 2e[a,e,b]$ lo que implica que

$(I - 2R_e)[a,e,b] = 0$. Si suponemos 1) entonces $I - 2R_e \in \mathrm{inv}(L(J))$, por lo que $[a,e,b] = 0$. Como 1) $\Rightarrow$ 3) se tiene para todo $a,b \in J$ que $[R_e, R_a](b) = e(ab) - a(be) = 0$ luego $[a,b,e] = [e,b,e] = 0$.

4. ALGEBRAS NORMADAS. UNITALIZACION.

En todo lo que sigue, salvo mención contraria, las álgebras que consideraremos seran siempre reales o complejas. De entre las posibles normas que se pueden definir sobre la estructura lineal de un álgebra A, solo consideraremos aquellas para las cuales el producto es una aplicación continua de $A \times A$ en A.

En tales condiciones, la norma de A verifica

(4.1) $\quad \| ab \| \leq k \| a \| \| b \|$ para todo $a,b \in A$ y algun $k \in \mathbb{R}^+$

y es de comprobación inmediata que, tal norma, se puede sustituir por otra equivalente, definida mediante $| a | = k \| a \|$ para todo $a \in A$, que verifica $| ab | \leq | a | | b |$ para todo $a,b \in A$.

DEFINICION 4.1.- Una norma sobre un álgebra A diremos que es una norma de álgebra si verifica:

(4.2) $\quad \| ab \| \leq \| a \| \| b \|$

para todo $a,b \in A$. Llamaremos álgebra normada a toda álgebra A dotada de una norma de álgebra.

Cuando A es un álgebra normada, también lo es el álgebra $BL(A)$ de los operadores lineales acotados de A en A, considerando en ella la norma usual $\| T \| = \sup \| Tx \|$ para $\| x \| \leq 1$, por lo que la condición (4.2) nos dice que, para cada $a \in A$, los operadores R_a y U_a pertenecen a BL(A), siendo además $\| R_a \| \leq \| a \|$. Cuando A posee unidad I, la condición (4.2) aplicada a I nos da $\| I \| \geqslant 1$, y de la definición de norma de R_a obtenemos:

(4.3) $$\frac{\| a \|}{\| I \|} \leqslant \| Ra \| \leqslant \| a \|$$

por lo que se deduce que la aplicación $R : a \rightarrow R_a$ es un homeomorfismo lineal de A en un subespacio de BL(A); homeomorfismo que sería una isometría si $\| I \| = 1$.

DEFINICION 4.2.- Se llama álgebra unital a toda álgebra A, normada y con unidad I, en la que se verifica $\| I \| = 1$.

Dada un álgebra A, normada y con unidad, que no sea unital, el problema de la unitalización de A consiste en determinar la existencia de una norma de álgebra sobre A, equivalente a la norma inicial, con la cual A sea un álgebra unital.

La respuesta, en sentido afirmativo, es clásica en la teoría de álgebras normadas asociativas. Dos ejemplos diferentes para determinar tal norma pueden verse en (9) (p.18, teorema 1), y en (3) (p.18, teorema 1 y corolario 4). A pesar de las diferencias, los dos tienen algo en común: de una parte, utilizan las normas de los operadores R_a, y de otra, la asociatividad del producto es fundamental en el método de demostración, por lo que este es inaplicable al caso Jordan, lo que motivó que en (16) (p.101) el problema de la unitalización de un álgebra de Jordan quedara abierto.

El siguiente teorema nos proporciona una solución del problema al nivel general de álgebras normadas con unidad, asociativas o no asociativas.

TEOREMA 4.3.- *Sea A un álgebra normada con unidad. Existe una norma de álgebra sobre A, equivalente a la norma inicial, tal que con ella A es un álgebra unital.*

Para la demostración del teorema veamos previamente unos lemas.

LEMA 4.4.- *Sea A un álgebra, real o compleja, y sea B una parte, no vacía, de A estable para el producto. Entonces $|co|(B)$, envolvente absolutamente convexa de B, es estable para el producto.*

Demostración: Sean $x,y \in |co|(B)$. De las expresiones:

$$x = \sum_1^n \alpha_i u_i \quad , \text{ con } \quad \sum_1^n |\alpha_i| \leq 1 \quad y \quad \alpha_i \in K; \quad u_i \in B \qquad i=1,2..n$$

$$y = \sum_1^m \beta_j v_j \quad , \text{ con } \quad \sum_1^m |\beta_j| \leq 1 \quad y \quad \beta_j \in K \quad v_j \in B \qquad j=1,2..m$$

se sigue que:

$$xy = \sum_{i,j} \alpha_i \beta u_i v_j \text{ con } u_i v_j \in B \quad i=1,2..n, \quad j=1,2..m \quad \text{y que}$$

$$\sum_{i,j} |\alpha_i \beta| = \sum_{i,j} |\alpha_i||\beta| = (\sum_i |\alpha_i|)(\sum_j |\beta_j|) \leqslant 1$$

por lo que $xy \in |co|(B)$.

LEMA 5.5.- *Sea E un espacio normado y sea V un entorno de cero, equilibrado, convexo, y acotado. Entonces, el funcional de Miukowski, p_V, de V es una norma sobre E equivalente a la norma inicial.*

Demostración: Consecuencia inmediata de ser E bornológico.

En cuanto a las relaciones que ligan a la norma inicial $\|\cdot\|$ con el funcional p_V,si notamos mediante B_r la bola cerrada de centro cero y radio r, con la norma inicial, y si $B_m \subset V \subset B_M$ entonces:

(5.4) $$\frac{\| x \|}{M} \leqslant p_V(x) \leqslant \frac{\| x \|}{m} \quad y \quad p_V(z) \leqslant 1$$

para todo $x \in E$ y para todo $z \in V$, respectivamente.

Demostración del Teorema 4.3: Sea A el álgebra, $\| \cdot \|$ la norma inicial de A, I el elemento unidad de A, B_1 la bola unidad cerrada y tomemos entonces $V = |co|(B_1 \cup \{ I \})$. Puesto que $B_1 \subset V$, y para cada $x \in V$ es:

$$\| x \| = \| \sum_1^n \alpha_i U_i \| \leqslant \sum_1^n |\alpha_i| \cdot \| U_i \| \leqslant \sum_1^n |\alpha_i| \cdot \|I\| \leqslant \| I \|$$

V es un entorno de cero, equilibrado, convexo y acotado, luego según el lema 5.5, p_V es una norma sobre la estructura lineal de A, equivalente a la unicial y que ademas verifica:

(5.5)
$$\frac{\| a \|}{\| I \|} \leqslant p_V\ (a) \leqslant \| a \| \quad y \quad p_V\ (I) \leqslant 1$$

para cada $a \in A$, de donde es inmediato $p_V\ (I) = 1$.

En virtud del lema 5.4, al ser $B_1 \cup \{ I \}$ estable para el producto, V es estable para el producto. Por tanto, para cada pareja $x,y \in A$ y cada pareja $\lambda,\mu \in \mathbb{R}^+$ que verifiquen $x \in \lambda V$ e $y \in \mu V$ se tiene $x,y \in \lambda\mu V$, por lo que de la definición de p_V se tiene $p_V(xy) \leqslant p_V(x).p_V(y)$, lo que concluye la prueba.

Como consecuencia del teorema, siempre que trabajemos con un álgebra normada con unidad, podemos suponer que el álgebra es unital.

Veamos seguidamente la relación que existe entre la norma inicial de A, y la norma unital p_V introducida en el teorema.

TEOREMA 5.6.- *Sea A un álgebra normada con unidad I, $\| \cdot \|$ la norma de A, $V = |co|\ (B_1 \cup \{ I \})$ y p_V el funcional de Miukowski de V. Para toda norma sobre A, $| \cdot |$, que verifique $|a| \leqslant \| a \|$, para todo $a \in A$, y $|I| = 1$, se sigue que $|a| \leqslant p_V\ (a)$ para todo $a \in A$.*

Demostración: Si llamamos B_1' a la bola unidad cerrada con la norma $| \cdot |$, las relaciones $|a| \leqslant \|a\|$ para todo $a \in A$ y $|I| = 1$ implican $B_1 \cup \{I\} \subset B_1'$, por lo que $V = |co|(B_1 \cup \{I\}) \subset B_1'$, de donde se sigue que, para todo $a \in A$, es $p_V(a) \geqslant p_{B_1'}(a) = | a |$.

LEMA 5.7.- *Sea A un álgebra sobre K* ($\mathbb{R}$, *o* $\mathbb{C}$), *normada y con elemento unidad I. La aplicación*

$$N: x \to \inf_{\lambda \in K} \{ |\lambda| + \|x - \lambda I\| \}$$

es una norma sobre la estructura lineal de A, equivalente a la norma inicial de A.

Demostración: Para $\lambda=0$ obtenemos $N(x) \leqslant \|x\|$, y de la relación $x=\lambda I + (x-\lambda I)$, para todo $\lambda \in K$, se obtiene:

$$\|x\| \leqslant |\lambda| . \|I\| + \|x - \lambda I\| \leqslant |\lambda| \cdot \|I\| + \|x - \lambda I\| \cdot \|I\| = (|\lambda| + \|x - \lambda I\|)\|I\|$$

por lo que se sigue: $\frac{\|x\|}{\|I\|} \leqslant N(x) \leqslant \|x\|$ para todo $x \in A$, por lo que basta probar que $N(x)$ es una seminorma. De las relaciones:

$$|\lambda+\mu| + \|x+y-(\lambda+\mu)\| \leqslant |\lambda| + \|x-\lambda I\| + |\mu| + \|y-\mu I\|$$

$$|\rho\lambda| + \|\rho x - \rho\lambda I\| = |\rho| \cdot (|\lambda| + \|x - \lambda I\|)$$

válidas para todo $x,y \in A$ y todo $\lambda,\mu,\rho \in K$, y de la definición de $N(x)$ se sigue $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ y $N(\rho x) = |\rho| \cdot N(x)$ con lo que se concluye la prueba.

TEOREMA 5.8.- *Sea A un álgebra normada con unidad I,* p_V *la norma unital introducida en el teorema 4.3, y sea N la norma definida en el lema 5.7. Entonces* p_V *y N coinciden.*

Demosración: Para todo $\lambda \in K$ y todo $x \in A$ se tiene:

$x \in (|\lambda| + \|x - \lambda I\|)V$, pues si $x=0$ es trivial, y si $x \neq 0$ se sigue de la identidad

$$x = (|\lambda| + \|x - \lambda I\|)\left(\frac{\lambda I}{|\lambda| + \|x - I\|} + \frac{x - \lambda I}{|\lambda| + \|x - I\|} \right)$$

por lo que de las definiciones de p_V y N se sigue que $p_V(x) \leqslant N(x)$ para todo $x \in A$ .Pero en el lema 5.7 se vió que $N(x) \leqslant \|x\|$ para todo $x \in A$ y como $N(I) = \inf_{\lambda \in K}\{|\lambda| + |1-\lambda| . \|I\| \} = 1$ se tiene, aplicando el teorema 5.6 que es $N(x) \leqslant p_V(x)$ para todo $x \in A$ con lo que se concluye la demostración.

5. ALGEBRAS DE JORDAN NORMADAS.

DEFINICION 5.1.- Se llama álgebra de Jordan normada a toda álgebra de Jordan J, real o compleja, dotada de una norma de álgebra. Si el espacio normado subyacente es completo, se dice que J es un álgebra de Jordan normada y completa.

En virtud del teorema 4.3, si J es un álgebra de Jordan normada con unidad, supondremos que J es unital. Cuando A es un álgebra asociativa normada, el álgebra A^+ es de Jordan normada, no siendo cierto el reciproco. No obstante, si A es semiprima (el único ideal de A de cuadrado nulo es el $\{0\}$) y si A^+ es normada y completa, entonces A es normada, y por supuesto completa. ((16), II. 1.5)

LEMA 5.2.- *Sea J un álgebra de Jordan normada. Entonces:*

1) R_a, $U_a \in BL(J)$ *para todo* $a \in J$.

2) *La aplicación* $R: a \to R_a$ *es continua, y si J tiene unidad es una isometría.*

3) *La aplicación* $U: a \to U_a$ *es continua.*

Demostración: 1) y 2) son evidentes. Como por otra parte, las aplicaciones $f: a \to a^2$, de J en J; y $\phi : T \to T^2$, de $BL(J)$ en $BL(J)$, son continuas, entonces la aplicación $U = 2\phi \circ R - R \circ f$ es continua

TEOREMA 5.3.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y $e \in J$ un idempotente. Entonces la subálgebra $U_e(J)$ es cerrada.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $U_e(J)$ que converge hacia un elemento $x \in J$. Como U_e es continua y además es idempotente (teorema 3.3, apartado 1). Se tiene que la sucesión $\{U_e(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia $U_e(x)=x$ y por tanto $x \in U_e(J)$.

LEMA 5.4.- *Sea J un álgebra de Jordan normada, y sea B una subálgebra fuertemente asociatica de J. Entonces $\overline{B}$, cierre de B en J, es una subálgebra fuertemente asociativa.*

Demostración: Como es sabido $\overline{B}$ es una subálgebra, y para cada pareja $a,b \in \overline{B}$ sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de B convergentes hacia a y b, respectivamente. Por la continuidad de R se tiene que $\{[R_{a_n}, R_{b_n}]\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia $[R_a , R_b]$ en $BL(J)$, por lo que al ser $[R_{a_n} , R_{b_n}] = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se concluye la prueba.

Como consecuencia de este lema, y de los corolarios 2.5 y 2.6 del teorema de Jordan, se tiene:

COROLARIO 5.5.- *Sea J un álgebra de Jordan normada. Entonces toda subálgebra de J, fuertemente asociativa maximal es cerrada.*

COROLARIO 5.6.- *Sea J un álgebra de Jordan normada con unidad, y sea $a \in J$. Existe una subálgebra B de J que es plena, cerrada, y fuertemente asociativa, tal que $a \in J$.*

Sobre estas bases pasamos a resumir las propiedades principales del conjunto inv(J), de un álgebra de Jordan normada y con unidad.

LEMA 5.7.- *Sea J un álgebra de Jordan, normada y con unidad I, y sea $a \in J$ tal que la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n$ es convergente. Entonces el elemento $I-a \in inv(J)$ y su inverso es $b = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n$.*

Demostración: La prueba de que $(I - a)b = I$ es análoga al caso asociativo. Como c, e(I - a) pertenecen a K {I,a}, cierre del álgebra engendrada por a y la unidad, que es asociativa se tiene entonces $c^2(I-a) = c[c(I-a)] = 0$ y es inverso de (I-a).

En consecuencia, el resultado clasico en álgebras de Banach con unidad de que la bola abierta de centro la unidad y radio 1 está contenida en el conjunto de los elementos inversibles, es válido en el caso de álgebras de Jordan normadas, completas y con unidad. Como puede verse en (16)(p.65, ejemplos (1) y (2)), los metodos usados para probar que inv(A) es abierto, cuando A es un álgebra de Banach, no son aplicables al caso Jordan. No obstante, en (16) se consigue tal resultado, utilizando la caracterización de los elementos inversibles de J a traves del operador U_a como se estableció en el teorema 2.2, mediante el siguiente teorema.

TEOREMA 5.8.- *Sea J un álgebra de Jordan, normada, completa y con unidad I. Entonces se verifica.*

1) $Inv(J)$ es abierto.

2) La aplicación $g: a \to a^{-1}$ es un homeomorfismo de $inv(J)$ en si mismo.

3) g es diferenciable y $Dg(a_0) = -U_{a_0^{-1}}$, para todo $a_0 \in inv(J)$.

Demostración: Si $U_a \in BL(J)$ y es inversible, su inverso es $U_{a^{-1}}$, ya que $a \in J$ en inversible, y $U_a^{-1} \in BL(J)$. Como $inv(BL(J))$ es abierto e $inv(J)$ es $U^{-1}(inv(BL(J)))$ se sigue, por la continuidad de U, que $inv(J)$ es abierto, con lo que se prueba 1). Como g es biyectiva y coincide con su inversa, si probamos que es continua será un homeomorfismo. Pero g es la composición: $g = g_4 \circ (g_3 \circ g_2 \circ U + g_1)$ donde $g_1 : a \to (0,a)$, de J en $L(J) \times J$;

$g_2 : T \to T^{-1}$, de $inv(BL(J))$ en si mismo;

$g_3 : T \to (T,0)$, de $L(J)$ en $L(J) \times J$;

$g_4 : (T,a) \to T(a)$, de $L(J) \times J$ en J, y

$U: a \to U_a$, de J en $BL(J)$.

Como todas son continuas g es continua. Para probar 3) consideremos un álgebra A^+, con A asociativa y con elemento unidad. Se tiene:

$$g(a)-g(a_0)+U_{a_0^{-1}}(a-a_0) = a^{-1}-a_0^{-1} + U_{a_0^{-1}}(a-a_0) = U_{a_0^{-1}} \circ U_{(a-a_0)}(a^{-1})$$

que, en virtud del teorema de Macdonald con inversos, se verificará en J.
Como además $\|U_a\| = \|2R_a^2 - R_{a^2}\| \leq 3\|a\|^2$ se tiene

$$\|g(a)-g(a_0) + U_{a_0^{-1}}(a-a_0)\| = \|U_{a_0^{-1}} \circ U_{(a-a_0)}(a^{-1})\| \leq 3\|U_{a_0^{-1}}\| \cdot \|a-a_0\|^2 \cdot \|a^{-1}\|$$

de donde dividiendo por $\|a-a_0\|$ y tomando limites cuando $a \to a_0$ se concluye la prueba. ((16), I. 3.4)

6. EL ESPECTRO DE UN ELEMENTO.

DEFINICION 6.1.- Sea J un álgebra de Jordan compleja y con elemento unidad I. Se llama espectro de un elemento $a \in J$ al conjunto de los números complejos λ tales que $\lambda I - a \notin inv(J)$.

Si $a \in J$, notaremos mediante Sp(J,a) al espectro del elemento a. Cuando no haya posibilidad de confusión utilizaremos la notación más simple Sp(a).

Cuando $B \subset J$ es una subálgebra plena, que contiene por tanto a los inversos de todos sus elementos inversibles en J, es claro que para todo elemento $a \in B$ se verifica $Sp(B,a) = Sp(J,a)$. En general, para dos álgebras de Jordan se puede establecer el siguiente teorema:

TEOREMA 6.2.- *Sean J_1 y J_2 dos álgebras de Jordan complejas y con unidad. Si ϕ es un homomorfismo de J_1 en J_2 que conserva la unidad, entonces:*

$$Sp(J_2,\phi(a)) \subset Sp(J_1,a), \text{ para todo } a \in J_1.$$

Demostración: Si $a-\lambda I \in inv(J_1)$ entonces $\phi(a-\lambda I) = \phi(a-\lambda I) = \phi(a)-\lambda\phi(I) \in inv(J_2)$, por lo que $\lambda \in Sp(J_2,\phi(a)) \Rightarrow \lambda \in Sp(J_1,a)$.

DEFINICION 6.3.- Sea J un álgebra de Jordan normada y sea a un elemento de J. Se llama radio espectral de a al número real $r(a)=\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \{\|a^n\|^{1/n}\}$.

De la definición de r(a) se sigue rapidamente que $r(a) \leqslant \|a\|$, y mediante una demostración similar a la del caso asociativo ((3),I.p.11) se obtiene la siguiente caracterización de r(a):

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \tag{6.1}$$

con la cual se puede establecer:

LEMA 6.4.- *Sea J un álgebra de Jordan normada, completa, y con unidad I, y sea $a \in J$ tal que $r(a) < 1$. Entonces el elemento I-a es inversible.*

Demostración: Al ser $r(a) < 1$ se sigue que la serie de termino general a^n es convergente, por lo que se sigue el lema aplicando el lema 5.7.

El teorema siguiente se mantiene en la linea de relacionar los conceptos establecidos en el álgebra de Jordan J, con los conceptos análogos en el álgebra asociativa BL(J).

TEOREMA 6.5.- *Sea J un álgebra de Jordan normada, completa, y con unidad I. Para cada elemento $a \in J$ se verifica:*

1) $Sp(R_a) \subset 1/2\ [Sp(a) + Sp(a)]$

2) $Sp(U_a) \subset Sp(a) \cdot Sp(a)$

Demostración: Como R_a conmuta con R_{a^2} se puede determinar una subálgebra H de $BL(J)$, conmutativa, plena y cerrada de modo que $\{R_a, R_{a^2}\} \subset H \subset BL(J)$, por lo que para todo elemento $h \in H$ se tiene que $Sp(H,h) = Sp(BL(J),h)$; y de la teoría general de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas se sigue que los elementos de $Sp(h)$ son precisamente los valores que toman en h los funcionales lineales multiplicativos de H ((26),II.p.47). Sea ϕ un funcional lineal multiplicativo no nulo y arbitrario de H; como es: $U_{a-zI} = U_a - 2zR_a + z^2 I$, para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $U_{a-zI} \in H$, por lo que si z_1 y z_2 son las raices de la ecuación:

$$\phi(U_{a-zI}) = \phi(U_a)-2z\phi(R_a)+z^2 = 0 \text{ se tiene:}$$

$$\phi(R_a) = 1/2\ (z_1 + z_2) \quad y \quad \phi(U_a) = z_1 \cdot z_2$$

como U_{a-z_iI} (i=1,2) es no inversible por ser $0 \in Sp(U_{a-z_iI})$ (i=1,2) se tiene (teorema 2.2) que $a-z_iI$ no es inversible, o sea, z_1 y z_2 pertenecen al $Sp(a)$.

TEOREMA 6.6.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja, normada, completa y con unidad I. Para cada $a \in J$, $Sp(a)$ es un compacto de $\mathbb{C}$, siendo además $|z| \leqslant r(a)$ para todo $z \in Sp(a)$.*

Demostración: Puesto que la aplicación $f: z \to a-zI$, de $\mathbb{C}$ en J, es trivialmente continua, se sigue que $f^{-1}(inv(J))$ es abierto.

Pero $f^{-1}(inv(J)) = \{z \in \mathbb{C} : a-zI \in inv(J)\} = \mathbb{C} - Sp(a)$, luego Sp(a) es cerrado. Si $z \in Sp(a)$ y verifica $|z| > r(a)$ entonces $r(az^{-1}) < 1$ implica que $az^{-1}-I \in inv(J)$, según el lema 6.4, por lo que $z \notin Sp(a)$, en contradicción con la hipótesis hecha sobre z.

COROLARIO 6.7.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja, normada, completa y con unidad I. Para cada $a \in J$ se verifica $r(R_a) = r(a)$.*

Demostración: Por ser BL(J) un álgebra de Banach se sabe ((3),p.23) que $r(R_a) = \lim\limits_{n=\infty} \|R_a^n\|^{1/n}$ equivale a $r(R_a)=\max\{|z| : z \in Sp(R_a)\}$ por lo que $|z| \leqslant r(a)$ para todo $z \in Sp(R_a)$, aplicando el teorema 6.5 apartado 1), y en consecuencia $r(R_a) \leqslant r(a)$. La relación $r(a) \leqslant r(R_a)$ se sigue de ser $a^{n+1} = R_a^n(a)$ y en consecuencia $\|a^{n+1}\| \leqslant \|R_a^n\| \cdot \|a\|$; por lo que

$$(\|a^{n-1}\|^{\frac{1}{n+1}})^{n+1/n} \leqslant \|R_a^n\|^{1/n} \cdot \|a\|^{1/n}$$

y tomando limites se sigue la desigualdad.

Siguiendo las lineas generales marcadas en (11) y en (16) se desarrolla una teoría de funciones de $\mathbb{C}$ en J, álgebra de Jordan compleja, normada, completa y con unidad, partiendo del concepto de función holomorfa siguiente:

DEFINICION 6.8.- Una función f, que aplica un abierto $D \subset \mathbb{C}$ en un álgebra de Jordan J, compleja, normada, completa y con unidad, se dice que es holomorfa en D si f es diferenciable, en el sentido de Fréchet, en cada punto de D.

LEMA 6.9.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja, normada, completa y con unidad I, y sea $a \in J$. Entonces, la aplicación*

$$g: z \to (a-zI)^{-1}$$

de $\mathbb{C}$-$Sp(a)$ en J, es holomorfa. ((16),II.4.11)

TEOREMA 6.10.- *Sea J en las condiciones del lema anterior. Para cada $a \in J$ se verifica* ((16), II.4.12)

1) $Sp(a) \neq \emptyset$

2) $|z_0| = r(a)$ *para algun* $z_0 \in Sp(a)$

Como en el caso asociativo, al cual se puede reducir mediante el teorema de Jacobson, si es J un álgebra de Jordan en las condiciones citadas, si $a \in J$, si D es un entorno abierto de Sp(a) y si $\mathcal{H}$(D) es el álgebra de las funciones complejas holomorfas en D, se puede definir el elemento $f(a) \in J$ mediante:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} f(z)(zI-a)^{-1}\, dz \qquad (6.2)$$

donde ∂W es la frontera de una envolvente W del par (Sp(a),D); verificandose:

TEOREMA 6.11.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja, normada, completa, y con unidad I. Sea $a \in J$ y sea D un entorno abierto de Sp(a). Entonces:*

1) *Para cada $f \in \mathcal{H}(D)$, el elemento $f(a)$ es independiente de la envolvente W.*

2) *La aplicación $f \to f(a)$ es un hemomorfismo de $\mathcal{H}(D)$ en J.*

3) *Dado un entorno compacto K, de Sp(a), con $K \subset D$, la aplicación $f \to f(a)$ es continua para la topología de la convergencia uniforme sobre K.*

4) $Sp(f(a)) = \{f(z) : z \in Sp(a)\}$ *para toda* $f \in \mathcal{H}(D)$.((16)II,6.7)

CAPITULO II

1. RANGO NUMERICO.

En todo lo que sigue consideraremos unicamente espacios vectoriales sobre K ($\mathbb{R}$, o, $\mathbb{C}$).

DEFINICION 1.1.- Se llama espacio de rango numérico a toda pareja (X, u) formada por un espacio normado X, y un elemento $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$.

Los subespacios de (X,u) seran las parejas (L,u), con $u \in L \subset X$, y siendo L un subespacio cerrado de X. Cuando X sea complejo, si X_0 es el espacio normado real subyacente, diremos que (X_0,u) es el espacio de rango numérico real subyacente a (X,u).

En un espacio de rango numérico (X,u) utilizaremos la siguiente notación.

X' dual topológico de X

$B(X') = \{x' \in X' : \|x'\| \leqslant 1\}$

$S(X') = \{x' \in X' : \|x'\| = 1\}$

$D(X,u) = \{x' \in S(X') : \langle u,x' \rangle = \|x'\| = 1\}$

donde $<,>: (x,x') \to <x,x'>$ es la forma bilineal canónica asociada a la pareja dual (X,X'). Los elementos del conjunto $D(X,u)$ se llaman estados normalizados, y es bien conocido ((3) , I, p.52) que $D(X,u)$ es una parte no vacia, convexa y $\sigma(X',X)$-compacta, de X'.

DEFINICION 1.2.- Se llama rango numérico de un elemento $x \in X$, y lo notaremos $V(X,x)$, al subconjunto de K.

$$V(X,x) = \{ <x,x'> : x' \in D(X,u)\}$$

Las propiedades del rango numérico de un elemento se pueden resumir en el siguiente teorema ((4), p.15):

TEOREMA 1.3.- *Sea (X,u) un espacio de rango numérico sobre K. Para todo $x,y \in X$ y todo $\lambda \in K$ se verifican:*

1) *$V(X,x)$ es una parte no vacía, convexa y compacta.*

2) $V(X,x+y) \subset V(X,x) + V(X,y)$.

3) $V(X,\lambda x) = \lambda V(X,x)$.

4) $V(X,x + \lambda u) = V(X,x) + \lambda$.

5) $\lambda \in V(X,x) \Rightarrow |\lambda| \leqslant \|x\|$.

Si (X,u) es un espacio de rango numérico y (L,u) un subespacio, entonces:

(1.1) $$V(X,x) = V(L,x) \qquad \forall\, x \in L$$

puesto que, de una parte, la restricción a L de un elemento de $D(X,u)$ es un elemento de $D(L,u)$; y de otra, el teorema de Hahn-Banach nos permite extender cualquier elemento de $D(L,u)$ a un elemento de $D(X,u)$.

Con caracter más general, si (X,u) e (Y,v) son dos espacios de rango numérico sobre el mismo cuerpo K, y si $\phi \in BL(X,Y)$ verifica $\|\phi\| \leq 1$ y $\phi(u)=v$, entonces:

(1.2) $$V(Y,\phi(x)) \subset V(X,x) \quad \forall\, x \in X$$

puesto que la aplicación ${}^t\phi$: $Y' \to X'$, transpuesta de ϕ, aplica $D(Y,v)$ en $D(X,u)$. Si ϕ verifica $\phi(u) = v$ y además es una isometría, entonces, identificando X con $\phi(X) \subset Y$ se tendría:

(1.3) $$V(Y,\phi(x) = V(X,x) \quad \forall\, x \in X.$$

Cuando X es complejo, siendo X_o el espacio real subyacente, para cada elemento $x' \in X'$ la aplicación Rex': $x \to Re < x,x' >$, para todo $x \in X$, es un elemento de $(X_o)'$, y la aplicación $Re:x' \to Rex'$ es un isomorfismo lineal isometrico de las estructuras reales $(X')_o$ y $(X_o)'$ ((10),p.62 Proposición 1, y((5) p.3, lema 3). En consecuencia $x' \in D(X,u)$ si y solo si $Re\, x' \in D(X_o, u)$, por lo que:

(1.4) $$Re\, V(X,x) = V(X_o, x) \qquad \forall\, x \in X.$$

DEFINICION 1.4.- Se llama radio numérico de un elemento $x \in X$ al número real $v(x)$.

$$v(x) = \max \{|\lambda| : \lambda \in V(X,x)\}.$$

De la definición de $v(x)$ y del teorema 1.3 se deduce que la aplicación $v: x \to v(x)$ es una seminorma sobre X que verifica

$$v(x) \leqslant \|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

Cuando el conjunto $D(X,u)$ separa puntos en X (en cuyo caso se dice que u es un vertice de $B(X)$) la seminorma v es una norma sobre X.

DEFINICION 1.5.- Un elemento x, de un espacio de rango numérico (X,u) complejo, se llama hermitiano si $V(X,x) \subset \mathbb{R}$.

El conjunto $H(X)$, formado por los elementos hermitianos de X, es un subespacio vectorial cerrado de X_o, siendo inmediata la caracterización:

(1.5) $$x \in H(X) \Leftrightarrow V(X_o, ix) = 0$$

Resumidos los conceptos básicos de la teoría de rango numérico en espacios normados, consideremos ahora el caso de un espacio de rango numérico (J,I) formado por un álgebra de Jordan J, compleja, unital y completa, y la unidad I de J, en el que se desarrolla una teoría de rango numérico análoga a la de las álgebras de Banach unitales, ((16), IV.2). Exponemos a continuación los principales resultados que en la citada obra se alcanzan, y que seran necesarios más adelante, indicando para orientación del lector, que las tecnicas empleadas para lograrlas son fundamentalmente las dos siguientes: la primera se basa en la relación (1.1) y en el corolario I.5.6, que permite localizar los problemas en ciertas subálgebras de J que son álgebras de Banach conmutativas; la segunda se apoya en la relación (1.3) y en el lema I.5.1, apartado 2), trasladando a $BL(J)$ los problemas en J.

TEOREMA 1.6.- *Sea (J,I) el espacio de rango numérico formado por un álgebra de Jordan J, compleja, unital, y completa, y la unidad I. Entonces, para todo $a \in J$, se verifica:*

1) $Sp(a) \subset V(J,a)$

2) $\max\{Re\ \lambda : \lambda \in V(J,a)\} = \sup\{\frac{1}{\alpha} \log\|\exp(\alpha a)\| : \alpha \in \mathbb{R}^+\} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} \log\|\exp(\alpha a)\|$

3) $\frac{1}{e}\|a\| \leqslant v(a) \leqslant \|a\|$

Para los elementos hermitianos de J, podemos disponer de los resultados siguientes.

TEOREMA 1.7.- *Sea (J,I) en las condiciones del teorema anterior. Entonces se verifica:*

1) $a \in H(J)$ *si y solo si* $R_a \in H(BL(J))$.

2) $r(a) = \|a\| = v(a)$ *si* $a \in H(J)$.

3) *max*$\{\|a\|,\|b\|\} \leq \|a+ib\|$ *si* $a,b \in H(J)$.

4) $V(J,a) = co\ Sp(a)$ *si* $a \in H(J)$.

5) *Si* $a,b,c \in H(J)$ *y* $a^2=b+ic$ *entonces* $a^2 \in H(J)$.

Destacando del teorema el apartado 5) por su trascendencia posterior y por no ser un resultado fácil de conseguir ((16) IV.2.18).

DEFINICION 1.8.- Un elemento $a \in J$ diremos que es positivo, y lo notaremos $a \geqslant 0$, si $V(J,a) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Representaremos por $P(J)$ al conjunto de los elementos positivos de J.

Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $P(J)$, que converge hacia $a \in J$, para cada $x' \in D(J,I)$ se tiene que $\{< a_n,x'>\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, no negativos, convergente hacia $< a,x'> \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, por lo que $P(J)$ es cerrado. Esta consideración, los teoremas 1.3 y 1.7 ap.2) y el ser $P(J) \cap (-P(J)) = \{0\}$, como consecuencia del teorema 1.6,ap.3), nos dice que:

TEOREMA 1.9.- *El conjunto* $P(J)$ *es un cono convexo y cerrado de* J. *La relación* $a \leqslant b$ *si y solo si* $b-a \in P(J)$ *es una relación de orden en* J *compatible con la estructura de espacio normado de* J.

En consecuencia se verifica:

(1.6) Si $a,b,c \in J$ y $a \leqslant b$ entonces $a+c \leqslant b+c$.

(1.7) Si $a,b \in J$ y $a \leqslant b$ y $c \leqslant d$ entonces $a+c \leqslant b+d$.

(1.8) Si $a,b \in J$ y $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ y $a \leqslant b$ entonces $\alpha a \leqslant \alpha b$.

(1.9) Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to a$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to b$ y $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leqslant b$.

(1.10) $0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow \|a\| \leqslant \|b\|$.

2. JV-ALGEBRAS

DEFINICION 2.1.- Un álgebra de Jordan J, compleja, unital y completa, diremos que es una JV-álgebra si verifica:

$$J = H(J) + iH(J) \tag{2.1}$$

Si J es un JV-álgebra, todo elemento $c \in J$ se puede escribir de forma única $c = a+ib$, con $a,b \in H(J)$. La aplicación $p: a+ib \to a$, de J en $H(J)$, es continua según se desprende del teorema 1.7, apartado 3), y en consecuencia la suma expresada en (2.1) es suma topologica directa.

Tambien es inmediato, como consecuencia del apartado 5) del teorema 1.7, que, al ser $H(J)$ cerrado para cuadrados, $H(J)$ es cerrado para el producto de J, por lo que en toda JV-álgebra el conjunto $H(J)$ es una subálgebra real, unital y cerrada.

DEFINICION 2.2.- Sea A un álgebra compleja. Una aplicación $*: a \to a^*$, de A en A, se dice que es una involución de álgebra si verifica:

1) $(a+b)^* = a^* + b^*$

2) $(\alpha a)^* = \bar{\alpha}\, a^*$

3) $(a^*)^* = a$

4) $(ab)^* = b^*\, a^*$

para todo a,b $\in A$ y todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Se llama álgebra con involución a toda álgebra compleja A dotada de una involución de álgebra. Si $x \in A$ y $x^* = x$ diremos que x es simetrico, y notaremos Sim(A) al conjunto de los elementos simétricos de A. Si $B \subset A$ y $x \in B \Rightarrow x^* \in B$ diremos que B es autoadjunta.

Para toda JV-álgebra J, la aplicación:

$$* : a + ib \rightarrow a - ib$$

de J en J, verifica trivialmente las condiciones 1), 2) y 3) de la definición 2.2, por lo que en J existe una involución lineal natural.

Este hecho se completa con el siguiente teorema, consecuencia directa del apartado 5) del teorema 1.7:

TEOREMA 2.3.- *La aplicación* $* : a + ib \rightarrow a - ib$, *de una* JV-*álgebra* J *en sí misma, es una involución de álgebra, continua, y que verifica:*

$$Sim(J) = H(J). \quad ((16\ ),IV.5.3).$$

Si A es una B^*-álgebra (álgebra de Banach compleja y unital, dotada de una involución de álgebra que verifica $\|xx^*\| = \|x\|^2$ para todo $x \in A$) entonces A^+ es una JV-álgebra. Toda subálgebra cerrada, autoadjunta, y que contenga a la unidad, de una JV-álgebra es una nueva JV-álgebra. Si a es un elemento normal de una JV-álgebra J(es decir, la subálgebra $\overline{\mathbb{C}\{a,a^*\}}$ es asociativa), entonces la subálgebra $\overline{\mathbb{C}\{I,a\}}$ es una B^*-álgebra conmutativa, por lo que como caso particular, el cierre de la subálgebra engendrada por la unidad y un elemento hermitiano de J es una B^*-álgebra conmutativa. ((16),IV.5)

En cuanto al cociente de una JV-álgebra respecto de un ideal cerrado se tiene:

TEOREMA 2.4.- *Sea J una JV-álgebra y sea B un ideal cerrado de J, distinto de J. Entonces J/B es una JV-álgebra y B es autoadjunto.*

Demostración: Es de comprobación inmediata que J/B, con la norma canónica:

$$\|[x]\| = \inf_{b \in B} \{\|x + b\|\}$$

es un álgebra de Jordan, compleja, unital y completa. Puesto que para todo $x \in J$ se verifica $\|[x]\| \leq \|x\|$, el epimorfismo natural $\phi: x \to [x]$ achica las normas y verifica además $\phi(I)=[I]$, por lo que la relación (1.2) nos asegura que $[a] \in H(J/B)$ para todo elemento $a \in H(J)$, y en consecuencia, para cada $[x] \in J/B$ se tiene que $[x]=[a]+ i[d]$ con $[a],[d] \in H(J/B)$, y J/B es una JV-álgebra. Veamos que B es autoadjunto:

Si $b \in B$ supongamos $b=a + id$ con $a,d \in H(J)$ entonces $[0]=[a]+i[d]$, con $[a],[d] \in H(J/B)$ lo que implica que $[a]=[d]=[0]$; por lo que $a \in B$ y $d \in B$ y en consecuencia $b^* = a-id$ es un elemento de B.

DEFINICION 2.5.- Un álgebra de Jordan J, real, unital, y completa es una JB-álgebra si verifica:

1) $\|a^2\| = \|a\|^2$

2) $\|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|$

para todo $a,b \in J$. ((1), 2)

La relación entre las estructuras de JB-álgebra y JV-álgebra se establece facilmente, si consideramos el siguiente lema, consecuencia inmediata de los apartados 4) y 5) del teorema 1.7 y del teorema de la aplicación espectral I.6.11:

LEMA 2.6.- *Sea J una JV-álgebra. Entonces, para todo $a \in H(J)$ el elemento $a^2 \in P(J)$.* ((16) IV.5.14)

A partir de este lema, y considerando que si $a \in H(J)$ entonces $\overline{\mathbb{C}\{I,a\}}$ es una B^*-álgebra, se tiene:

TEOREMA 2.7.- *Sea J una JV-álgebra. Entonces $H(J)$ es una JB-álgebra.* ((16) IV.5.16)

Según esto, para cada elemento $a \in H(J)$ se tiene:

(2.2) $$\| a \| = \inf \{ \lambda \geqslant 0 : -\lambda I \leqslant a \leqslant \lambda I \}$$

DEFINICION 2.8.- Un elemento e de una JV-álgebra J es una proyección si $e^2 = e$ y $e \in H(J)$. Al elemento $e'=I-e$ lo llamaremos proyección complementaria de e.

LEMA 2.9.- *Sea J una JV-álgebra y sea $e \neq 0$ una proyección de J. Entonces*

$$\|e\| = \|U_e\| = 1.$$

Demostración: Como e y U_e son idempotentes entonces $\|e\| \geqslant 1$ y $\|U_e\| \geqslant 1$. De la relación $I-e = (I-e)^2 \geqslant 0$ obtenemos $0 \leqslant e \leqslant I$ por lo que $\|e\| \leqslant 1$ y en consecuencia $\|e\| = 1$.

Para U_e se tiene:

$$\|U_e\|=\|2R_e^2-R_e\|=\|R_e(2R_e-I)\| \leqslant \|e\|\cdot\|2e-I\|$$

y como $0 \leqslant e \leqslant I \Rightarrow -I \leqslant 2e-I \leqslant I$ tenemos que $\|2e-I\| \leqslant 1$ por lo que $\|U_e\| \leqslant 1$ y en consecuencia $\|U_e\| = 1$, con lo que se concluye la prueba.

TEOREMA 2.10.- *Sea J una JV-álgebra y sea B una subálgebra de J, cerrada, autoadjunta, y con unidad. Entonces B es una nueva JV-álgebra.*

Demostración: Sea $e=a+ib \in B \subset J$ la unidad de B. Entonces $e^2 = e$ y $a-ib = e^* = ee^* \in P(J)$ por lo que $b=0$ y $e \in H(J)$. En consecuencia e es una proyección, y aplicando el teorema I.3.5 $B \subset U_e(J)$. Como $U_e(J)$ es cerrado (vease teorema I.5.3) se sigue que B es cerrada en $U_e(J)$, y al ser $\|e\| = 1$ se tiene que B es una subálgebra de Jordan unital cerrada del álgebra de Jordan unital $U_e(J)$, ambas con la misma unidad e.

Si consideramos los espacios de rango numérico (B,e),$(U_e(J),e)$ y (J,I)

observamos que (B,e) es un subespacio de rango numérico de $(U_e(J), e)$; y como U_e: $J \to U_e(J)$ conserva las unidades (teorema I.3.3) y achica las normas se tiene:

$$V(B,a) = V(U_e(J), a) \subset V(J,a)$$

para todo $a \in \mathcal{B}$ donde aplicamos las relaciones (1.1) y (1.2) y la propiedad $U_e(a)=a$ para todo $a \in \mathcal{B}$. Consecuencia $H(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \cap H(J)$ y $\mathcal{B}$ es una JV-álgebra.

3. ELEMENTOS POSITIVOS Y FORMAS LINEALES POSITIVAS EN UNA JV-ALGEBRA.

Toda JV-álgebra J está automaticamente ordenada mediante el cono de los elementos positivos de J. Esta relación de orden basta considerarla en $H(J)$, puesto que para dos elementos $x,y \in J$, tales que $x=a + ib$, $y = c + id$ con $a,b,c,d \in H(J)$, la relación $x \leqslant y$ es equivalente a las relaciones $a \leqslant c$ y $b=d$.

Por otra parte, la relación (1.1) nos muestra que para toda subálgebra B, cerrada, autoadjunta y que contenga a la unidad de J, se verifica $P(B) = P(J) \cap B$, por lo que la relación de orden que se podría establecer en B, siguiendo el mismo camino que para la establecida en J, es la relación de orden que J subordina en B, con la consiguiente ventaja de poder resolver localmente muchos de los problemas relacionados con el orden en una JV-álgebra.

LEMA 3.1.- *Sea A una B^*-álgebra y sea $h \in P(A)$. Para cada número natural $n \geqslant 1$, existe un, único elemento $k \in P(A)$, tal que $k^n = h$.* ((22)1.4.1)

TEOREMA 3.2.- *Sea J una JV-álgebra y sea $h \in P(J)$. Para todo número natural $n \geqslant 1$ existe un único elemento $k \in P(J)$ tal que $k^n = h$. Dicho elemento se llama raiz n-esima de h y se representa por $h^{1/n}$.*

Demostración: En virtud del lema anterior, la existencia y unicidad de k está garantizada, con caracter local, en el álgebra $\overline{\mathbb{C}\{I,h\}}$. Veamos que k es único en J. Sea $k' \in P(J)$, $k' \neq k$ y de modo que $k'^n = h$; puesto que $h \in \overline{\mathbb{C}\{I,k'\}}$ se tiene entonces que $\overline{\mathbb{C}\{I,h\}} \subset \overline{\mathbb{C}\{I,k'\}}$ por lo que en la B^*-álgebra $\overline{\mathbb{C}\{I,k'\}}$ el elemento positivo h tiene dos raices n-esimas distintas, en contradicción con el lema 3.1.

LEMA 3.3.- *Sea A una B^*-álgebra y sea $a \in H(A)$. Existen dos únicos elementos $a^+, a^- \in P(A)$, tales que $a=a^+-a^-$ y $a^+a^- = a^-a^+ = 0$.* ((22),p.8)

TEOREMA 3.4.- *Todo elemento hermitiano a, de una JV-álgebra J, se puede expresar de forma unica como $a = a^+-a^-$, siendo $a^+, a^- \in P(J)$ y $a^+a^-=0$.*

Demostración: El lema 3.3 garantiza la existencia y unicidad con caracter local, en $\overline{\mathbb{C}\{I,a\}}$, y la unicidad en J se sigue como en el caso asociativo de las expresiones:

$$a^+ = \frac{1}{2}[(a^2)^{1/2} + a] \text{ y } a^- = \frac{1}{2}[(a^2)^{1/2} - a]$$

y de la unicidad de las raices.

DEFINICION 3.5.- La expresión $a = a^+-a^-$ de un elemento $a \in H(J)$ se llama descomposición ortogonal de a. El elemento a^+(resp. a^-) se llama parte positiva (resp. negativa) de a, y la suma $a^+ + a^-=|a|= (a^2)^{1/2}$ es el valor absoluto de a.

Es interesante, por su posterior aplicación, el hecho de que tanto a^+ como a^- pertenecen al cierre uniforme de la subálgebra que genera a, sin la unidad. Completamos el estudio de los elementos positivos con la siguiente caracterización:

TEOREMA 3.6.- *Sea J una JV-álgebra. Son equivalentes las dos proposiciones siguientes:*

1) $h \in P(J)$.

2) $h = xx^*$ *para algún* $x \in J$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2). Trivial, tomando $x = x^* = (h)^{1/2}$.
2) $\Rightarrow$ 1). Pues si $x = a + ib$, con $a,b \in H(J)$ entonces $xx^*=a^2+b^2 \in P(J)$.

DEFINICION 3.7.- Un elemento u, de una JV-álgebra J, se llama unitario si $u \in inv(J)$ y $u^{-1} = u^*$.

Puesto que todo elemento de una JV-álgebra es combinación lineal finita de elementos positivos, y a su vez todo elemento positivo lo es de elementos unitarios, se tiene:

COROLARIO 3.8.- *Todo elemento de una JV-álgebra se puede escribir como combinación lineal finita de elementos unitarios.*

Sea ahora J una JV-álgebra y sea J^{δ} el dual algebraico de J. La involución de J determina una involución en J^{δ}, que llamaremos involución transpuesta, si definimos, para cada $f \in J^{\delta}$, f^* como la forma lineal que a cada $x \in J$ le hace corresponder $\overline{f(x^*)}$. Al funcional f^* lo llamaremos adjunto de f, y diremos que f es autoadjunto si $f=f^*$.

Todo elemento $f \in J^{\delta}$ se puede escribir como combinación lineal de dos elementos f_1 y f_2 autoadjuntos si tomamos $f_1 = \frac{1}{2}(f+f^*)$ y $f_2 = \frac{1}{2i}(f-f^*)$, lo que nos daría en consecuencia $f = f_1 + if_2$.

Puesto que una JV-álgebra J es un espacio normado ordenado, lo mismo que el cuerpo $\mathbb{C}$, siendo $P(J)$ y $\mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$ los respectivos conos de elementos positivos, se puede establecer en J^{δ} una ordenación compatible con la estructura lineal si consideramos los elementos $\phi \in J^{\delta}$ que aplican $P(J)$ en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. ((23), p.225)

DEFINICION 3.9.- Una forma lineal ϕ sobre J diremos que es positiva si $\phi(xx^*) \geqslant 0$ para todo $x \in J$. Notaremos $\phi \geqslant 0$ cuando la forma lineal ϕ sea positiva. Para dos elementos $f,g \in J^{\delta}$ diremos que $f \leqslant g$ si y solo sí $g - f \geqslant 0$.

Si ϕ es una forma lineal positiva, entonces $\phi(a) \in \mathbb{R}$ para todo $a \in H(J)$, ya que $\phi(a) = \phi(a^+) - \phi(a^-)$. Como consecuencia de esto se tendra $\phi^*(a+ib) = \overline{\phi(a-ib)} = \overline{\phi(a)-i\phi(b)} = \phi(a)+i\phi(b) = \phi(a+ib)$ por lo que toda forma lineal positiva es autoadjunta. Además si ϕ es positiva verifica la desigualdad de Schwartz:

$$(3.1) \qquad |\phi(xy^*)|^2 \leqslant \phi(xx^*)\ \phi(yy^*)$$

para todo $x,y \in J$, que se obtiene como consecuencia de ser:

$$\phi((x + \lambda y)(x^* + \lambda y^*)) \geqslant 0$$

para todo $x,y \in J$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si la desigualdad (3.1) hacemos $y=I$ se obtiene:

$$(3.2) \qquad |\phi(x)|^2 \leqslant \phi(I)\cdot\phi(xx^*)$$

para todo $x \in J$, por lo que deducimos que la única forma lineal positiva sobre J, que toma el valor cero sobre la unidad de J es la forma identicamente nula.

También en (3.2) está el germen de una demostración de la continuidad de las formas lineales positivas si consideramos que, al ser $xx^* \geqslant 0$, entonces es $xx^* \leqslant \|xx^*\|\cdot I$. No obstante, seguiremos otro camino que nos proporciona resultados más amplios.

Consideremos pues el dual topológico $J' \subset J^{\acute{o}}$ de la JV-álgebra J. Puesto que para toda forma lineal f, su adjunta f^* es la composición de la involución de J, con la aplicación f, y con la conjugación de $\mathbb{C}$, se tiene que $f^* \in J'$ siempre que $f \in J'$. Por otra parte, se puede establecer la abundancia de formas lineales positivas sobre J, mediante el siguiente teorema que en último término viene a decir que las formas lineales positivas son los elementos del cono convexo que en J' genera el conjunto de los estados normalizados.

TEOREMA 3.10.- *Sea J una JV-álgebra, I la unidad de J, y sea a' una forma lineal sobre J. Entonces, las dos proposiciones siguientes son equivalentes:*

1) a' es positiva

2) $a' \in J'$ y $a'(I) = < I,a' > = \|a'\|$

Demostración: Consideremos $a' \neq 0$, pués en otro caso la demostración es trivial. 2) $\Rightarrow$ 1): Evidente al ser $\frac{a'}{\| a' \|}$ un estado normalizado.

1) $\Rightarrow$ 2): Sea a' una forma lineal positiva y sea $< I,a'> = r > 0$, como hemos deducido de (3.2). La forma lineal $b' = \frac{a'}{r}$ es positiva y verifica $< I,b' > = 1$. Ademas si $a \in H(J)$ y llamamos $M(a)$ al máximo del rango numérico $V(J,a)$ de a, se tiene que, al ser $M(a)I - a \geqslant 0$, entonces es: $< a,b' > \leqslant M(a) \leqslant v(a)$. Esto, junto con el hecho de que siendo $z=x+iy$, con $x,y \in H(J)$ entonces $v(x) \leqslant v(z)$, nos permite demostrar nuestra proposición. Sea pués $a \in J$: existe un número real t tal que $e^{it} < a,b'> \geqslant 0$, y sea entonces $e^{it} a = x + iy$. Se tiene:

$$|< a,b'> | = e^{it} < a,b'> = < e^{it} a,b'> = < x,b'> \leqslant v(x)$$

y por otra parte:

$$v(x) \leqslant v(e^{it} a) = v(a) \leqslant \| a \|$$

por lo que b' es continua y $\| b' \| \leqslant 1$, que junto con $< I,b' > = 1$ nos proporciona $\|b'\| = 1$. En consecuencia $a' = b'r$ es continua y verifica:

$\|a'\| = r = < I,a' >$.

Otra caracterización interesante de las formas lineales positivas es la siguiente:

TEOREMA 3.11.- *Sea a' una forma lineal continua sobre una JV-álgebra J. Las dos proporciones siguientes son equivalentes:*

1) a' es positiva

2) $< h,a' > = \|h\| \cdot \|a'\|$ para algún $h \in P(J)$ con $h \neq 0$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2). Es consecuencia directa del teorema anterior.

2) $\Rightarrow$ 1). Si $a'=0$ es trivial, y si $a' \neq 0$ sea $b' = \dfrac{a'}{\|a'\|}$ y $k = \dfrac{h}{\| h \|}$.

En estas condiciones se tiene $< k,b' > = 1$, y probaremos sucesivamente que $< I,b' > \in \mathbb{R}$ y que $< I,b' > = 1$.

Sea $< I,b' > = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En el álgebra $\overline{\mathbb{C}\{I,k\}}$ se tiene:

$$\|I + i\lambda k\|^2 = \|I + \lambda^2 k^2\| \leqslant 1 + \lambda^2 \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}$$

y además $|< I+i\lambda k, b' >|^2 = |\alpha+i(\beta+\lambda)|^2 = \alpha^2+(\beta+\lambda)^2 \leqslant 1+\lambda^2$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que $\beta = 0$ y $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Por otra parte se tiene $0 \leqslant k \leqslant I$ por lo que $-\frac{1}{2}I \leqslant k - \frac{1}{2} I \leqslant \frac{1}{2} I$

y en consecuencia $\|k-\frac{1}{2}I\| \leqslant \frac{1}{2}$. Pero al ser $<k,b'> = 1$ se tiene

$$1 = <k,b'> = <k-\frac{1}{2}I,b'> + \frac{1}{2}<I,b'> \leqslant \|k-\frac{1}{2}I\|$$

$$\leqslant \|k-\frac{1}{2}I\| + \frac{1}{2}<I,b'> = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}<I,b'>$$

por lo que $<I,b'> \geqslant 1$ y en consecuencia $<I,b'> = 1$, b' es positiva y lo mismo es $a' = \|a'\| \cdot b'$, con lo que se concluye la prueba.

4. JW^*- ALGEBRAS.

DEFINICION 4.1.- Llamaremos JW^*-álgebra a toda JV-álgebra M que sea dual topológico de un espacio de Banach M_*. A dicho espacio M_* lo llamaremos predual de M.

Si M es una JW^*-álgebra, de predual M_*, la norma de M viene dada por:

(4.1) $$\|x\| = \sup_{\|x_*\| \leq 1} | < x_*, x > |$$

en terminos de la forma bilineal canónica $(x_*,x) \to < x_*,x >$ sobre la pareja dual (M_*,M). A la topología de la norma en M la llamaremos topología uniforme, y es la topología $\beta(M,M_*)$ de la convergencia uniforme sobre todos los acotados de M_*.

Consideraremos tambien es toda JW^*-álgebra M la topología débil $\sigma(M,M_*)$, menos fina que la topología uniforme, para la cual la bola unidad $B(M)$ es compacta, según el teorema de Banach-Alaoglu.

DEFINICION 4.2.- Se llama W^*-álgebra a toda B^*-álgebra A que es el dual topolğico de un espacio de Banach.

Puesto que para toda B^*-álgebra unital A el álgebra A^+ es una JV-álgebra, se tiene, trivialmente, el resultado siguiente:

TEOREMA 4.3.- *Sea A una W^*-álgebra unital. Entonces A^+ es una JW^*-álgebra.*

LEMA 4.4.- *Sea E un espacio de Banach, E' su dual, sea F un subespacio cerrado de E, y sea $F^\circ \subset E'$ el subespacio ortogonal de F. Entonces el dual de E/F y el dual de F se identifican con F° y E'/F° respectivamente.*
((6). IV. 5.4)

TEOREMA 4.5.- *Sea M una JW^*-álgebra; sea N una subálgebra de M, debilmente cerrada, autoadjunta y que contiene a la unidad; sea B un ideal de M, debilmente cerrado y $B \neq \{0\}$. Entonces N es una JW^*-álgebra y M/B es una JW^*-álgebra.*

Demostración: Tanto N como B son uniformemente cerradas, luego según hemos visto N y M/B son JV-álgebras. Sea M_* el predual de M. N^o y B^o son cerrados en la topologia $\sigma(M_*,M)$ por lo que seran también cerrados para la topología de la norma, por ser esta compatible con la dualidad (M_*,M). Aplicando el lema 4.4 a M_* *y* N^o, y a M_* y B^o, se tiene que el dual del espacio de Banach M_*/N^o es N y el dual del B^o es M/B, puesto que en virtud del teorema de los bipolares se tiene que $B^{oo} = B$ y $N^{oo} = N$.

LEMA 4.6. (Teorema de Banach-Smulian).- *Sea E un espacio de Banach, E' su dual y $B_1' = \{x' \in E' : \|x'\| \leq 1\}$ la bola unidad de E'. Una parte convexa A de E' es debilmente cerrada si y solo si lo es la intersección $A \cap B_1'$.*

Es teorema de Banach-Smulian, como el mencionado anteriormente de

Banach-Alaoglu, desempeñaran, como veremos, un papel importante en la teoría de JW^*-álgebras.

TEOREMA 4.7.- *Sea M una JW^*-álgebra y sea $H(M)$ el conjunto de los elementos hermitianos de M. Entonces $H(M)$ es debilmente cerrado.*

Demostración: Puesto que $H(M)$ es convexo, bastará demostrar que es debilmente cerrado el conjunto $B(M) \cap H(M)$. Suponiendo que no es así, existe un conjunto dirigido $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en $B(M) \cap H(M)$ que converge debilmente hacia un elemento $a + ib$, con $a,b \in H(M)$ y $b \neq 0$.

Para cada $\alpha \in A$, considerando la B^*-álgebra $\overline{\mathbb{C}\{ I,x_\alpha\}}$ se verifica:

$$(4.2) \qquad \| x_\alpha + inI \| \leq (1 + n^2)^{1/2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que existe un número real positivo λ en el rango numérico de b. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene entonces:

$$(4.3) \qquad \lambda + n \leq \|b + nI\| \leq \|a + ib + inI\|$$

en virtud de los teoremas 1.3 y 1.7.

De (4.2) y (4.3) se deduce:

$$(4.4) \qquad \|x_\alpha+inI\| \leq (1+n^2)^{1/2} < \lambda+n \leq \|b+nI\| \leq \|a+ib+inI\|$$

para todo $\alpha \in A$, y todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{1 - \lambda^2}{2\lambda}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto dirigido $\{x_\alpha + inI\}_{\alpha \in A}$ está incluido en la bola $(1+n^2)^{1/2} \cdot B(M)$, que es debilmente compacta, y converge debilmente hacia el elemento $a+ib+inI$, por lo que se tiene:

$\|a+ib+inI\| \leq (1+n^2)^{1/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en contradicción con (4.4). Si existe algún númereo real menor que cero en el rango numérico de b, las consideraciones anteriores, hechas ahora a partir de $\{-x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nos llevarian a la misma contradicción, luego $V(M,b)=\{0\}$ por lo que $b=0$.

LEMA 4.8.- *Sea J una JV-álgebra, y sean P(J), H(J) y B(J) los conjuntos de elementos positivos, elementos hermitianos, y bola unidad de J, respectivamente.* Entonces:

(4.5) 1) $P(J) \cap B(J)=\{H(J) \cap B(J)\} \cap \{H(J) \cap B(J) + I\}$

(4.6) 2) $H(J) \cap B(J)=P(J) \cap B(J) - P(J) \cap B(J)$

Demostración: Puesto que H(J) es una JB-álgebra se tiene ((6),2.1) $\|a\|=\inf \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ : -\lambda I \leq a \leq \lambda I\}$ para todo $a \in H(J)$. En consecuencia tenemos:

$$P(J) \cap B(J) = \{a \in J: 0 \leq a \leq I\}$$

$$H(J) \cap B(J) = \{a \in J: -I \leq a \leq I\}$$

$$H(J) \cap B(J) + I = \{a \in J: 0 \leq a \leq 2I\}$$

de donde se sigue inmediatamente la primera parte del lema.

Para la segunda tenemos:

$$a - b \in P(J) \cap B(J) - P(J) \cap B(J) \quad \text{entonces}$$

$$-I \leq -\|b\| \cdot I \leq -b \leq a - b \leq \|a\| . I \leq I$$

y en consecuencia: $a - b \in H(J) \cap B(J)$.

Si $a \in H(J) \cap B(J) \Rightarrow a=a^+ - a^- \quad a^+,a^- \in P(J) \quad a^+.a^- = 0$

y en consecuencia:

$$a^2=(a^+)^2 + (a^-)^2 \Rightarrow (a^+)^2 \leq a^2 \text{ y } (a^-)^2 \leq a^2 \Rightarrow \|a^+\| \leq \|a\| \leq 1 \quad \text{y}$$

$$\|a^-\| \leq \|a\| \leq 1 \quad \text{luego} \quad a \in P(J) \cap B(J) - P(J) \cap B(J).$$

TEOREMA 4.9.- *Sea M una JW*-álgebra. El conjunto P(M) de los elementos positivos de M es debilmente cerrado.*

Demostración: Puesto que $P(M)$ es convexo basta probar que $P(M) \cap B(M)$ es debilmente cerrado, lo cual es inmediato a partir del lema 4.8 y del teorema 4.7.

COROLARIO 4.10.- *En toda JW*-álgebra M, la relación de orden definida a partir del cono convexo P(M) es compatible con la topología débil de M.*

5. LA CONTINUIDAD DEBIL DE LA INVOLUCION.

Sea M una JW^*-álgebra, M_* el predual de M y M_o el espacio real subyacente a M. La involución $a + ib \to a - ib$ de M es continua cuando se considera M con la topología de la norma, y en consecuencia M_o es la suma topológica directa, para la topologia de la norma, de los subespacios $H(M)$ e $iH(M)$.

Al considerar en M la topologia débil $\sigma(M,M_*)$, se plantea inmediatamente el problema de la continuidad débil de la involución, o lo que es equivalente, la continuidad débil de la proyección :

$$p: a + ib \to a, \text{ de } M \text{ en } H(M).$$

Desde un punto de vista más amplio lo que necesitamos es establecer condiciones que garanticen, en general, la continuidad de ciertas aplicaciones entre duales, E', F', de espacios de Banach E,F, cuando dichos duales se dotan de las topologias débiles $\sigma(E',E)$ y $\sigma(F',F)$. En este sentido van encaminadas las proposiciones siguientes, en las que como norma general $B(X)$ representará la bola unidad cerrada del espacio de Banach X.

LEMA 5.1.- *Sean E y F dos espacios de Banach, E' y F' sus duales, dotados de las topologias débiles $\sigma(E',E)$ y $\sigma(F',F)$. Una aplicación lineal $f:E'\to F'$ es continua si y solo si $f|_{B(E')}$ es continua.*

Hemos escogido este enunciado por ser el más práctico, aunque en realidad es una refundición de dos proposiciones que aparecen en ((10),p.106) y en ((12), p.250). Para el siguiente teorema consideraremos ademas el producto $E' \times F'$ con la topologia producto de las $\sigma(E',E)$ y $\sigma(F',F)$, a lo que seguiremos llamando topologia débil de $E' \times F'$ por un disculpable abuso de lenguaje.

TEOREMA 5.2.- *Sean E y F dos espacios de Banach, E' y F' sus duales y sea f una aplicación lineal de E' en F'. Entonces las dos proposiciones siguientes son equivalentes:*

1) f es continua para las topologias débiles.

2) La gráfica de f es debilmente cerrada en $E' \times F'$.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) es trivial.

2) $\Rightarrow$ 1). Según se desprende del lema 5.1 probaremos que $f|_{B(E')}$ es continua. En primer lugar encontramos que la gráfica de f es cerrada cuando en $E' \times F'$ se considera la topologia producto de las topologias de la norma en E' y F'; por lo que, en virtud del teorema de la gráfica cerrada, f es continua para las topologias uniformes de E' y F'. Al ser la gráfica de f debilmente cerrada, y ser $B(E')$ debilmente compacto se tiene que $f(B(E'))$ es una parte debilmente cerrada de F' ((15), 7.1.2) y en consecuencia es debilmente compacta, ya que además está acotada en norma por ser f uniformemente continua.

En resumen, $f|_{B(E')}$ aplica $B(E')$ sobre $f(B(E'))$, y ambos son compactos débiles. Si $G(f) \subset E' \times F'$ es la gráfica de f se tiene que la gráfica de $f|_{B(E')}$ es $G(f) \cap [B(E') \times f(B(E'))]$, que resulta ser debilmente cerrada (e incluso compacta) como intersección del cerrado $G(f)$ y del compacto $B(E') \times f(B(E'))$. Por tanto se concluye que $f|_{B(E')}$ es debilmente continua por ser una aplicación, de gráfica debilmente cerrada, entre dos espacios topológicos compactos con la topología débil.

En una JW^*-álgebras M juegan un papel destacado ciertas proyecciones de $BL(M)$. Para estas el teorema 5.2 se aplica apoyandose previamente en el siguiente lema:

LEMA 5.3.- *Sea E un espacio de Banach, E' su dual dotado de la topología débil $\sigma(E',E)$, y sea $T \in L(E')$ una proyección. Si $\ker(T)$ e $im(T)$ son cerradas entonces la gráfica de T es cerrada.*

Demostración: Sea $G \subset E' \times E'$ la gráfica de T, y sea $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un conjunto dirigido de G, convergente hacia $(x,y) \in E' \times E'$, para la topología producto de la $\sigma(E', E)$. En consecuencia $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge debilmente hacia $x \in E'$ y $\{ y_\alpha \}_{\alpha \in A}$ converge hacia $y \in im(T)$ por ser esta debilmente cerrada. Pero $T(x_\alpha - y_\alpha)=0$ para todo $\alpha \in A$, y el conjunto dirigido $\{x_\alpha - y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge debilmente hacia $x-y$, luego $x-y \in \ker(T)$ por ser este debilmente cerrado. En consecuencia $0=T(x-y) = T(x)-y$, por lo que

$(x,y) \in G$ y G es cerrada.

Al aplicar estos resultados a una JW^*-álgebra M, disponemos previamente de que $H(M)$ e $iH(M)$ son subespacios reales debilmente cerrados, y que la involución se puede expresar $* = p - q$, siendo $p:M \to H(M)$ y $q:M \to iH(M)$ las proyecciones correspondientes a la suma $M = H(M) + iH(M)$. Todo esto, junto con la observación de que tanto p como q son lineales de M_o en M_o, nos permiten afirmar:

TEOREMA 5.4.- *Sea M una JW^*-álgebra dotada de la topología débil $\sigma(M,M_*)$. Entonces se verifican las tres propiedades siguientes, que son equivalentes entre sí:*

1) *Las proyecciones p,q son continuas.*

2) *La suma $M_o = H(M) + iH(M)$ es topológica.*

3) *La involución de M es continua.*

Cumplido este primer objetivo vamos a hacer algunas consideraciones sobre el orden que existe en toda JW^*-álgebra relacionandolo con la topología débil $\sigma(M,M_*)$.

DEFINICION 5.5.- Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un conjunto dirigido de una JW^*-álgebra M. Se dice que es creciente si $x_\alpha \leqslant x_\beta$ para todo $\alpha,\beta \in A$ tales que

$\alpha \leqslant \beta$. Se dice que es de Canchy, para una cierta topología vectorial sobre M, si para cada entorno de cero U, existe $\alpha_o \in A$ tal que $x_\alpha - x_\beta \in U$ para todo $\alpha, \beta \geqslant \alpha_o$.

Para el estudio de la convergencia débil de conjuntos dirigidos crecientes de una JW^*-álgebra M, vamos a introducir en M una nueva topología a partir de los elementos positivos de M_*, o formas lineales debilmente continuas sobre M que aplican $P(M)$ en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

LEMA 5.6.- *Sea M una JW^*-álgebra y sea $T \subset M_*$ el conjunto de todas las formas lineales sobre M que son debilmente continuas y positivas. Entonces, para todo $a \in H(M)$, tal que $a \notin P(M)$ existe un elemento $x_* \in T$ tal que $< x_*, a > < 0$. En particular, si $b \in M$ y $< z_*, b > = 0$ para todo $z_* \in T$ entonces $b=0$.*

Demostración: Como consecuencia de los teoremas de separación de conjuntos convexos debilmente cerrados, como $P(M)$, existe una forma lineal real en $H(M)$, debilmente continua, y_*, tal que:

$$< y_*, a > < \inf_{x \in P(M)} \{< y_*, x >\} , \quad < y_*, x > \geqslant 0 \quad \text{por todo } x \in P(M)$$

y como $0 \in P(M)$ se sigue que $< y_*, a > < 0$. Sea entonces x_* la forma lineal sobre M definida mediante:

$$< x_*, c + id > = < y_*, c > + i < y_*, d >$$

para todo $c,d \in H(M)$ se tiene que $< x_*,a > = < y_*,a > < 0$; y al ser $< x_*,x > = < y_*,x >$ para todo $x \in P(M)$ y $x_* = y_* \circ p - iy_* \circ (iq)$ se tiene que $x_* \in T$. En cuanto a la segunda parte del lema basta considerarla cuando $b \in H(M)$, en cuyo caso, si $0 \neq b \notin P(M)$ y $< z_*,b > = 0$ para todo $z_* \in T$ se contradice la primera parte del lema, y si $0 \neq b \in P(M)$ entonces:

$$0 \neq -b \notin P(M) \text{ y ocurre lo mismo, luego } b = 0.$$

Despues de establecer estas propiedades de T, se puede definir una topología localmente convexa en M_* como sigue:

DEFINICION 5.7.- Sea M una JW^*-álgebra. La topología $\sigma(M,E)$ es la topología débil en M relativa a la dualidad (E,M), donde E es el espacio vectorial engendrado por $T \subset M_*$.

LEMA 5.8.- *La topología $\sigma(M,E)$, sobre la JW^*-álgebra M, es separada, menos fina que la topología $\sigma(M,M_*)$ y equivalente a esta en las bolas*

$$r.B(M) = \{x \in M : \|x\| \leqslant r\}$$

Demostración: Al ser $E \subset M_*$ se tiene que $\sigma(M,E)$ es menos fina que $\sigma(M,M_*)$. Por el lema 5.6 sabemos que T, y en consecuencia E, separa puntos en M, y por último como las bolas B_r son $\sigma(M,M_*)$-compactas, las dos topologias incluidas en ellas por las topologías $\sigma(M,E)$ y $\sigma(M,M_*)$ coinciden.

Con la ayuda de esta nueva topología podemos establecer el siguiente resultado:

TEOREMA 5.9.- *Sea M una JW*-álgebra. Todo conjunto dirigido* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de M, creciente y uniformemente acotado, converge debilmente hacia su extremo superior.*

Demostración: Es claro que se puede suponer $x_\alpha \in H(M)$, para todo $\alpha \in A$, sin pérdida de generalidad. Como existe $k > 0$ tal que $\|x_\alpha\| \leq k$ para todo $\alpha \in A$, trabajaremos en la bola $k.B(M)$ donde coinciden las topologias $\sigma(M,E)$ y $\sigma(M,M_*)$. Para cada $x_* \in T$ se tiene que $\{ < x_*, x_\alpha > \}_{\alpha \in A}$ es un conjunto dirigido, creciente y acotado de números reales, y por tanto, convergente hacia su extremo superior, y en consecuencia de Canchy. De aquí que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sea de Canchy en $k.B(M)$ y por tanto convergente hacia un elemento $x \in H(M) \cap k.B(M)$. Como además se tiene $\{< x_*, x_\alpha > \}_{\alpha \in A}$ converge hacia $< x_*, x > = \sup_{\alpha \in A} \{ < x_*, x_\alpha >\}$ para todo $x_* \in T$, entonces $x = \sup_{\alpha \in A}\{x_\alpha\}$.

C A P I T U L O   III

1. LA CONTINUIDAD DEBIL DEL PRODUCTO POR UNA PROYECCION.

En el último parrafo del Capitulo II se establecieron las bases para probar la continuidad débil de ciertas aplicaciones lineales de una JW^*-álgebra M en si misma. Probada la continuidad débil de la involución de M, el paso obligado es tratar de establecer la continuidad débil de los operadores R_a, para cada $a \in M$, siendo el camino más fácil el establecerla previamente para los operadores R_e cuando $e \in M$ es una proyección.

Referente a la notación que emplearemos, recordaremeos que, siendo M una JW^*-álgebra y $e \in M$ una proyección, eran: $e' = I - e$ la proyección complementaria, $P(M)$, $H(M)$ y $B(M)$ los conjuntos de elementos positivos, hermitianos, y la bola unidad, respectivamente de M.

LEMA 1.1.- *Sea M una JW^*-álgebra y sea $e \in M$ una proyección. Entonces se verifica:*

1) $U_e(P(M) \cap B(M)) = \{ x \in M: 0 \leqslant x \leqslant e \}$

2) $U_e(H(M) \cap B(M)) = U_e(P(M) \cap B(M)) - U_e(P(M) \cap B(M))$

Demostración: Por ser $H(M)$ una JB-álgebra se sabe que U_e es un operador positivo ((1),2.7), por lo que se tiene, a partir del lema II. 4.8:

$$x \in U_e(P(M) \cap B(M)) \Leftrightarrow x = U_e(y) \quad \text{con} \quad 0 \leqslant y \leqslant I$$

de donde aplicando U_e obtenemos:

$$0 \leqslant U_e(y) = x \leqslant e$$

En sentido contrario, si $0 \leqslant x \leqslant e$ se tiene en primer lugar $\|x\| \leqslant 1$, y si aplicamos $U_{e'}$, tenemos $0 \leqslant U_{e'}(x) \leqslant 0$, en virtud del teorema I.3.3. Al ser $U_{e'}(x) = 0$ y $x \in P(M)$ se tiene $U_e(x) = x$ ((1).2.10) por lo que se verifica $x \in U_e(P(M) \cap B(M))$, y se concluye la prueba de 1). El apartado 2) se sigue directamente del lema II.4.8 y de la linealidad de U_e

TEOREMA 1.2.- *Sea M una JW^*-álgebra y sea $e \in M$ una proyección. Entonces, $U_e(P(M))$, $U_e(H(M))$ y $U_e(M)$ son debilmente cerradas.*

Demostración: Puesto que $U_e(P(M))$, $U_e(H(M))$ y $U_e(M)$ son conos convexos, probaremos que son debilmente cerradas las intersecciones co $B(M)$.

Sea $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un conjunto dirigido cuyos elementos pertenen al conjunto $U_e(P(M) \cap B(M))$, convergente debilmente hacia un elemento $h \in M$. En virtud del lema anterior se tiene $0 \leqslant h_\alpha \leqslant e$ para todo $\alpha \in A$ por lo que en virtud del corolario II.4.10 se tiene que $0 \leqslant h \leqslant e$ y en consecuencia $U_e(P(M) \cap B(M))$ es debilmente cerrado. Ahora bien, como $\|U_e\| = 1$

se tiene que $U_e(P(M) \cap B(M)) \subset U_e(P(M)) \cap B(M)$ y al ser U_e un idempotente es $U_e(P(M)) \cap B(M) \subset U_e(P(M) \cap B(M))$ por lo que este conjunto $U_e(P(M)) \cap B(M)$ es debilmente cerrado.

Por la misma razón es $U_e(H(M)) \cap B(M) = U_e(H(M) \cap B(M))$ y como esta última se expresa, según el lema 1.1 de la forma:

$$U_e(H(M) \cap B(M)) = U_e(P(M) \cap B(M)) - U_e(P(M) \cap B(M))$$

se sigue facilmente que es debilmente cerrada por ser la suma de dos conjuntos debilmente compactos.

Para el último caso, probar que $U_e(M) \cap B(M)$ es debilmente cerrado, tenemos que $U_e(M) \cap B(M)$ coinciden con $U_e(B(M))$ y además:

$$(1.1) \qquad U_e(B(M)) \subset U_e(H(M) \cap B(M)) + U_e(iH(M) \cap B(M))$$

no verificandose la identidad porque en el segundo miembro puede haber elementos de norma mayor que 1. Ahora bien si en (1.1) tomamos las intersecciones con $B(M)$ se tiene:

$$(1.2) \qquad U_e(B(M)) = [U_e(H(M) \cap B(M) + iU_e(H(M) \cap B(M))] \cap B(M)$$

que prueba que $U_e(B(M))$, y en consecuencia $U_e(M)$, es debilmente cerrado como intersección de partes debilmente compacta

COROLARIO 1.3.- *Sea M una JW*-álgebra y sea $e \in M$ una proyección. Entonces $U_e(M)$ es una JW*-álgebra.*

Demostración: Se sigue inmediatamente del teorema anterior y de los teoremas II.2.10 y II.4.5.

TEOREMA 1.4.- *Sea M una JW*-álgebra y sea $e \in M$ una proyección. Entonces $R_e R_{e'}(M)$ es debilmente cerrado.*

Demostración: Probaremos en primer lugar que $R_e R_{e'}(H(M))$ es cerrado. Sea $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un conjunto dirigido, cuyos elementos pertenecen al conjunto $R_e R_{e'}(H(M)) \cap B(M)$, y que converge debilmente hacia un elemento $a \in H(M) \cap B(M)$. Para todo $\alpha \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(1.1) \qquad \|a_\alpha - n(\frac{1}{2} I - e)\|^2 \leqslant \|a_\alpha^2 + \frac{n^2}{4} I\| \leqslant 1 + \frac{n^2}{4}$$

por ser elementos hermitianos y ser $a_\alpha \in \ker R_{\frac{1}{2} I - e}$ según se desprende del teorema I.3.3; de donde se deduce que:

$$(1.2) \qquad \|a - n(\frac{1}{2} I - e)\| \leqslant (1 + \frac{n^2}{4})^{1/2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

por la convergencia débil de $\{a_\alpha - n(\frac{1}{2} I - e)\}_{\alpha \in A}$ hacia $a - n(\frac{1}{2}I-e)$

Ahora bien, como $\|U_e\| = 1$ se tiene que:

(1.3) $\quad \|a - n(\frac{1}{2}I - e)\| \geqslant \|U_e[a - n(\frac{1}{2}I - e)]\| = \|U_e(a) + \frac{n}{2} e\|$

y si existiera un número $\lambda > 0$ en el rango numérico $V(U_e(M), U_e(a))$ se tendría:

(1.4) $\quad \lambda + \frac{n}{2} \leqslant \|U_e(a) + \frac{n}{2} e\| \leqslant (1 + \frac{n^2}{4})^{1/2}$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual no es posible. Igualmente si existiera algún $\lambda < 0$ en el rango numérico de $U_e(a)$, las mismas consideraciones (referidas a $\{-a_\alpha\}_{\alpha \in A}$) nos llevarian a la misma contradicción, por lo que

$$V(U_e(J), U_e(a)) = \{0\} \quad y \quad U_e(a) = 0.$$

Si repetimos el razonamiento empezando con $\{a_\alpha \mp n(\frac{1}{2} I - e)\}_{\alpha \in A}$ y considerando $U_{e'}$ llegamos al mismo resultado, a que $U_{e'}(a) = 0$. En consecuencia se tiene que $a = 4R_eR_{e'}(a) = R_eR_{e'}(4a)$ en virtud de la descomposición de Peirce relativa a $e \in M$, por lo que se deduce que $a \in R_eR_{e'}(H(M)) \cap B(M)$ y dicho conjunto es debilmente cerrado. Consecuentemente se tiene que $R_eR_{e'}(H(M))$ es debilmente cerrado.

Como $\|R_eR_{e'}\| \leq \|R_e\|.\|R_{e'}\| = \|e\|.\|e'\| = 1$, salvo en los casos triviales de ser $e = 0$, o bien $e = I$, se tiene, de la identidad:

$$R_eR_{e'}(M) \cap B(M) = [R_eR_{e'}(H(M)) \cap B(M) + iR_eR_{e'}(H(M)) \cap B(M)] \cap B(M)$$

que $R_eR_{e'}(M) \cap B(M)$ es debilmente cerrado, lo que con el teorema de Banach-Smulian prueba que $R_eR_{e'}(M)$ es debilmente cerrado, como queriamos demostrar.

Resumimos en un corolario los resultados obtenidos, con un enunciado que indica claramente el fin que se persigue:

COROLARIO 1.5.- *Sea M una JW*-álgebra y sea $e \in M$ una proyección. Entonces, los rangos de las proyecciones U_e , $U_{e'}$ y $4R_eR_{e'}$, asociadas al operador R_e , son debilmente cerrados.*

TEOREMA 1.6.- *Sea M una JW*-álgebra y sea $e \in M$ una proyección. Entonces, $\ker(U_e)$ es debilmente cerrado.*

Demostración: Teniendo en cuenta la descomposición de Peirce relativa a la proyección e, se tiene:

$$\ker(U_e) = U_{e'}(M) + 4R_eR_{e'}(M)$$

por lo que de la identidad:

$$\ker(U_e) \cap B(M) = [U_{e'}(M) \cap B(M) + 4R_eR_{e'}(M) \cap 4.B(M)] \cap B(M)$$

se sigue que es $\ker(U_e)$ debilmente cerrado.

COROLARIO 1.7.- *Sea M una JW*-álgebra y sea* $e \in M$ *una proyección. Entonces, las aplicaciones* U_e , $U_{e'}$ *y* $R_eR_{e'}$ *son debilmente continuas.*

Demostración: Del corolario 1.5, del teorema 1.6, del lema II.5.3 y del teorema II.5.2 se sigue la continuidad débil de las aplicaciones U_e y $U_{e'}$. Aplicando entonces el apartado 4) del teorema I.3.4 se sigue la continuidad de $R_eR_{e'}$.

Todos estos resultados nos permiten entonces enunciar el siguiente teorema, objeto fundamental de este parrafo:

TEOREMA 1.8.- *Sea M una JW*-álgebra. Para cada proyección* $e \in M$, *el operador* $R_e : a \to ea$ *es debilmente continuo.*

2. *EL SOPORTE DE UN ELEMENTO POSITIVO.*

Sea M una JW^*-álgebra. A cada elemento positivo $a \in M$ le vamos a asociar una proyección, a la que llamaremos soporte del elemento a, que entre otras propiedades tiene la de ser la más pequeña proyección $e \in M$ tal que $ea = a$. Para probar la existencia de tal proyección, y establecer sus propiedades, consideraremos previamente unos lemas.

LEMA 2.1.- *Sea J una JV-álgebra, $e \in J$ una proyección y $a \in J$ un elemento positivo. Entonces son equivalentes las proposiciones siguientes:*

1) $a \leqslant ke$ *para algún* $k \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 0$.

2) $a = U_e(a)$.

3) $a \leqslant \|a\|.e$

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2). De la relación $0 \leqslant a \leqslant ke$ se obtiene, aplicando el operador positivo $U_{e'}$, $0 \leqslant U_{e'}(a) \leqslant 0$, por lo que $U_e(a) = a$.

2) $\Rightarrow$ 3). De la relación $0 \leqslant a \leqslant \|a\|.I$ se tiene como en el caso anterior $0 \leqslant U_e(a) \leqslant \|a\|.e$ luego si $a = U_e(a)$ se sigue $a \leqslant \|a\|.e$.

3) $\Rightarrow$ 1). Es evidente.

LEMA 2.2.- *Sea J una JV-álgebra y sea* $a \in J$ *un elemento que verifica:*

$$0 \leqslant a \leqslant I.$$

Entonces la sucesión $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *es monotona decreciente.*

Demostración: Puesto que $Sp(a) \subset [0,1]$ y se sabe que el álgebra $\overline{\mathbb{C}\{I,a\}}$ se identifica con el álgebra de funciones $\mathcal{C}(Sp(a), \mathbb{C})$ ((8).1.5.5) se sigue sin dificultad el lema.

TEOREMA 2.3.- *Sea M una JW*-álgebra, y sea* $a \in P(M) \cap B(M)$. *Entonces, la sucesión* $\{I - (I - a)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge debilmente hacia un elemento*

$S(a) \in P(M) \cap B(M)$.

Demostración: La sucesión $\{I - (I-a)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monotona creciente, y sus elementos pertenecen a $P(M) \cap B(M)$, luego en virtud del teorema II.5.9 converge debilmente hacia un elemento, que notaremos $s(a)$, y que pertenece a $P(M) \cap B(M)$ ya que este es debilmente cerrado.

DEFINICION 2.4.- Sea M una JW^*-álgebra y sea $a \in P(M) \cap B(M)$. Se llama soporte de a al elemento $s(a)$ límite débil de la sucesión $\{I - (I-a)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Como se desprende del teorema II.5.9, el soporte de un elemento $a \in P(M) \cap B(M)$ se puede caracterizar mediante:

$$(2.1) \qquad s(a) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{I - (I - a)^n\}$$

El siguiente lema, que establece nuevos resultados sobre la convergencia débil de conjuntos dirigidos, crecientes y uniformemente acotados, será de gran utilidad para establecer las propiedades del soporte de un elemento $a \in P(M) \cap B(M)$.

LEMA 2.5.- *Sea M una JW^*-álgebra, y sean $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y $\{b_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dos conjuntos dirigidos, crecientes y uniformente acotados de M, cuyos límites débiles representaremos por a y b, respectivamente. Entonces se verifica:*

1) $\{a_\alpha^2\}_{\alpha \in A}$ *converge debilmente hacia* a^2.

2) $\{a_\alpha b_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *converge debilmente hacia* ab.

Demostración: Supongamos que $a_\alpha \in H(M)$ y $b_\alpha \in H(M)$ para todo $\alpha \in A$. Sean $k, h \in \mathbb{R}$ tales que $\|a_\alpha\| \leq k$ y $\|b_\alpha\| \leq h$ para todo $\alpha \in A$. Para cada $x_* \in T$, conjunto de las formas lineales positivas y debilmente continuas sobre M, se tiene:

$$|< x_*, a^2 - a_\alpha^2 >| = |< x_*, (a+a_\alpha)(a-a_\alpha) >| \leq < x_*, (a+a_\alpha)^2 >^{1/2} . < x_*, (a-a_\alpha)^2 >^{1/2}$$

Pero $a - a_\alpha \geq 0$ por lo que ((1)(2.28)) es $(a-a_\alpha)^2 \leq \|a-a_\alpha\| \cdot (a-a_\alpha)$ luego:

$$|\langle x_*,\ a^2 - a_\alpha^2\rangle| \leq \|x_*\|^{1/2}(\|a\|+k)^{3/2}\ \langle x_*, a-a_\alpha\rangle^{1/2}$$

de donde se sigue la convergencia de $\{a_\alpha^2\}_{\alpha\in A}$ hacia a^2, para la topología débil $\sigma(M,E)$, y en consecuencia para la topología débil $\sigma(M, M_*)$ por estar en conjuntos uniformemente acotados y debilmente cerrados. Con esto se prueba 1).

Para probar 2) basta considerar que $\{a_\alpha + b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ está en las condiciones de 1) y que el producto se puede expresar en términos de cuadrados.

Finalmente, para el caso general hay que considerar lo demostrado hasta ahora y la observación hecha en el primer parrafo de II.3.

TEOREMA 2.6.- *Sea M una JW*-álgebra, sea a $P(M)\cap B(M)$ y sea $s(a)$ el soporte de a. Entonces se verifica:*

1) *$s(a)$ pertenece al cierre débil de la subálgebra $\mathbb{C}(a)$.*

2) *$s(a)$ es una proyección.*

3) *$s(a)$ es la menor proyección e tal que ea=a.*

Demostración: 1) se sigue de que s(a) es el límite débil de la sucesión $\{I-(I-a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos términos son polinomios en a, sin la unidad, y que en consecuencia pertenecen a $\mathbb{C}(a)$.

2) La sucesión $\{(I-a)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debilmente hacia I-s(a), y la sucesión

parcial $\{(I-a)^{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, en virtud del lema anterior, hacia $(I-s(a))^2$ por lo que $I-s(a) = (I-s(a))^2$, de donde se deduce que $s(a) = s(a)^2$. Como el elemento s(a) es hermitiano entonces es una proyección.

3). Como $(I - a)^n$ converge debilmente hacia $I-s(a)$, aplicando el lema 2.5 se tiene que:

$$\{(I - a)^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \to (I-a)(I-s(a)) \quad \text{debilmente}$$

y por la misma razón que en la demostración de 2) se tiene:

$$I - s(a) = (I - a)(I - s(a))$$

de donde se deduce $a = a\, s(a)$.

Sea ahora $e \in M$ una proyección que verifica $a = ea$.

Como se deduce del teorema I.3.5, entonces $a \in U_e(M)$ por lo que el elemento $I-(I-a)^n \in U_e(M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que $U_e(M)$ es una subálgebra y el elemento $I-(I-a)^n$ es un polinomio en a sin termino en la unidad I. En consecuencia se tendrá:

$$e[I - (I - a)^n] = I - (I - a)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y aplicando de nuevo el lema 2.5 se obtiene $e\,s(a)=s(a)$, equivalente a $U_e(s(a)) = s(a)$, que junto con $\|s(a)\| \leqslant 1$ nos proporciona $s(a) \leqslant e$ si tenemos en cuenta el lema 2.1.

Consideremos ahora un elemento positivo $a \in M$, sin que necesariamente sea $\|a\| \leq 1$.

DEFINICION 2.7.- Sea M una JW^*-álgebra y sea $a \in M$ un elemento positivo. Se llama soporte de a al elemento $S(a)$ definido por:

$$S(a) = s\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \quad \text{si} \quad a \neq 0$$

$$S(0) = 0$$

Para un elemento positivo a, con $\|a\| \leq 1$, en principio parece ser que tiene dos soportes, el definido en 2.7 y el previamente definido en 2.4. El siguiente teorema aclara la situación.

TEOREMA 2.8.- *Para todo elemento* $a \in P(M) \cap B(M)$ *se tiene que* $S(a) = s(a)$.

Demostración: $aS(a) = s\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \frac{a}{\|a\|} \|a\| = \frac{a}{\|a\|} \|a\| = a$, luego $S(a) \geq s(a)$.

Pero $s(a) \frac{a}{\|a\|} = \frac{a}{\|a\|}$, luego $s\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = S(a) \leq s(a)$.

Es inmediato comprobar que se mantienen las propiedades del teorema 2.6 para el elemento $S(a)$ asociado a todo $a \in P(M)$. Para elementos hermitianos podemos obtener el siguiente resultado.

TEOREMA 2.9.- *Sea* M *una* JW^**-álgebra y sea* a *un elemento hermitiano de* M. *Entonces se verifica:* $a^- S(a^+) = 0$.

Demostración: Es inmediata si consideramos que para todo $n \in \mathbb{N}$, y si $a^+ \neq 0$, se tiene que:

$$a^-[I-(I-\frac{a^+}{\|a^{\pm}\|})^n] = 0$$

por lo que de la definición de $s(\frac{a^+}{\|a^+\|})$ y del lema 2.5 se tiene que

$a^- s(a^+) = 0$.

Si fuese $a^+ = 0$ la demostración es trivial.

TEOREMA 2.10.- *El soporte de un elemento positivo e inversible de M es la unidad.*

Demostración: Sea $b \in P(M) \cap inv(M)$. Para toda proyección $e \in M$ que verifique $eb = b$, en particular para $S(b)$, se tiene que $U_e(b) = b$, por lo que $U_e U_b U_e = U_{U_e(b)} = U_b$ y multiplicando por $U_{e'}$ tenemos:

$$U_b U_{e'} = 0$$

y como U_b es inversible es $U_{e'} = 0$ luego:

$$I - e = U_{e'}(I) = 0 \qquad y \qquad e = I.$$

3. *RESOLUCION ESPECTRAL DE LOS ELEMENTOS SIMETRICOS EN UNA JW*-ALGEBRA.*

Sea M una JW^*-álgebra. Puesto que en el parrafo 1 probamos la continuidad débil del operador R_e, cuando $e \in M$ era una proyección, vamos a establecer ahora que todo elemento hermitiano de M se puede aproximar uniformemente mediante combinaciones lineales finitas de proyecciones.

DEFINICION 3.1.- Sea M una JW^*-álgebra y sea $Pr(M)$ el conjunto de las proyecciones de M. Para cada $a \in H(M)$ se define una aplicación:

$$e: \mathbb{R} \rightarrow Pr(M) \quad \text{mediante} \quad e(\lambda) = S((\lambda I - a)^+).$$

Con objeto de simplificar la notación, escribiremos $\lambda - a$ en lugar de $\lambda I - a$. Las propiedades de la aplicación $\lambda \rightarrow e(\lambda)$ se establecen en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2.- *Sea M una JW^*-álgebra, y $a \in H(M)$. Entonces:*

1) $\lambda \leqslant \mu \Rightarrow e(\lambda) \leqslant e(\mu)$

2) $\lambda \leqslant \mu \Rightarrow \lambda[e(\mu)-e(\lambda)] \leqslant a[e(\mu)-e(\lambda)] \leqslant \mu[e(\mu)-e(\lambda)]$

Demostración: 1). $\lambda \leqslant \mu \Rightarrow \lambda - a \leqslant \mu - a$ por lo que:

$$(3.1) \qquad (\lambda - a)^+ \leqslant (\mu - a)^+ \leqslant \|(\mu - a)^+\| \, e(\mu)$$

en virtud del lema 2.1, pues $(\mu-a)^+ = U_{e(\mu)}((\mu-a)^+)$. Pero la relación (3.1) muestra también, por el mismo lema, que :

$$(\lambda - a)^+ = U_{e(\mu)}((\lambda - a)^+)$$

luego $(\lambda - a)^+ = e(\mu)(\lambda - a^+)$ y en consecuencia $e(\lambda) \leqslant e(\mu)$.

2). Probemos que $(a - \lambda)[e(\mu) - e(\lambda)] \geqslant 0$. Para ello, tenemos:

$$(a - \lambda)[e(\mu) - e(\lambda)] = (a - \lambda)\, e(\mu) + (\lambda - a)\, e(\lambda)$$

pero de $\lambda - a = (\lambda - a)^+ - (\lambda - a)^-$ y del teorema 2.9 se sigue:

$$(a - \lambda)[e(\mu) - e(\lambda)] = (a - \lambda)\, e(\mu) + (\lambda - a)^+\, e(\lambda) =$$

$$= - (\mu - a)\, e(\mu) + (\mu - \lambda)\, e(\mu) + (\lambda - a)^+\, e(\lambda)$$

y en consecuencia:

(3.2) $$(a - \lambda)[e(\mu) - e(\lambda)] = -(\mu - a)^+\, e(\mu) + (\mu - \lambda)\, e(\mu) + (\lambda - a)^+\, e(\lambda) =$$

$$= -U_{e(\mu)}((\mu - a)^+) + (\mu - \lambda)\, U_{e(\mu)}(I) + (\lambda - a)^+\, e(\lambda).$$

Ahora bien: $(\lambda - a)^+\, e(\lambda) = (\lambda - a)^+$ y las relaciones:

$(\lambda - a)^+ \leqslant \|(\lambda - a)^+\|\, e(\lambda) \leqslant \|(\lambda - a)^+\|\, e(\mu)$ implican, según el lema 2.1,

$$(\lambda - a)^+ = U_{e(\mu)}((\lambda - a)^+)$$

por lo que se tiene finalmente.

$$(3.3) \qquad (\lambda - a)^{+}[e(\mu) - e(\lambda)] = U_{e(\mu)}[(\mu - \lambda)I - ((\mu - a)^{+} - (\lambda - a)^{+})]$$

Si identificamos el álgebra $\overline{\mathbb{C}\{I,a\}}$ con $C(Sp(a), \mathbb{C})$ álgebra de funciones continuas definidas sobre $Sp(a)$ y con valores complejos ((8)1.5.5) se tiene que

$$\lambda \leqslant \mu \Rightarrow (\mu - \lambda)I - [(\mu - a)^{+} - (\lambda - a)^{+}] \geqslant 0$$

ya que la función $f \in C(Sp(a), \mathbb{C})$ tal que

$$f: x \to (\mu - \lambda) - [(\mu - x)^{+} - (\lambda - x)^{+}]$$

verifica $f \geqslant 0$ cuando $\lambda \leqslant \mu$, como se comprueba facilmente.

Por tanto, el elemento $(\mu - \lambda)I - [(\mu - a)^{+} - (\lambda - a)^{+}]$ es positivo, y siendo $U_{e(\mu)}$ un operador positivo se tiene que

$$(a - \lambda)[e(\mu) - e(\lambda)] \geqslant 0$$

Los mismos razonamientos, partiendo del elemento $(\mu - a)[e(\mu) - e(\lambda)]$ nos llevan a que este es positivo por lo que se tendria

$$\lambda[e(\mu) - e(\lambda)] \leqslant a[e(\mu) - e(\lambda)] \leqslant \mu[e(\mu) - e(\lambda)]$$

como queriamos demostrar.

LEMA 3.3.- *Sea* M *una* JW^**-álgebra y sea* $a \in H(M)$. *Entonces*

(3.4) $$kI \leqslant a \leqslant KI$$

donde $k = min(Sp(a))$ *y* $K = max(Sp(a))$.

Demostración: Puesto que $Sp(a) \subset \mathbb{R}$ es no vacio y compacto, se sigue la existencia de k y K. El resto es inmediato si consideramos que

$Sp(a + \lambda I) = Sp(a) + \lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, y que se tiene $b \geqslant 0$ si y solo si $Sp(b) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

TEOREMA 3.4.- *Sea* M *una* JW^**-álgebra, sea* $a \in H(M)$ *y sean* $k, K \in \mathbb{R}$, *como en el lema anterior. Entonces:*

1) $e(\lambda) = 0$ *si* $\lambda \leqslant k$

2) $e(\lambda) = I$ *si* $\lambda > K$

Demostración: Si $\lambda \leqslant k$ entonces $\lambda - a \leqslant \lambda - k \leqslant 0$ por lo que $(\lambda - a)^+ = 0$ y en consecuencia $e(\lambda) = 0$.

Si es $\lambda > K$ entonces $\lambda - a > \lambda - K > 0$ por lo que se tiene $(\lambda - a)^+ = \lambda - a \in inv(J)$, puesto que $\lambda \notin Sp(a)$, y en consecuencia, aplicando el teorema 2.10, se tiene $e(\lambda) = I$

Como sabemos ((11),1.3.3) la integral de Rieman-Stieltjes se puede extender a funciones valuadas en un espacio de Banach E, cuando una de las funciones, integrando o integrador, tome valores en E, y la otra los toma en el cuerpo sobre el que se define el espacio E.

TEOREMA 3.5.- *Sea M una JW*-álgebra, sea $a \in H(M)$ y sean k y K los valores mínimo y máximo, respectivamente, del $Sp(a)$. Entonces*

$$a = \int_{k-0}^{K+0} \lambda de(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda de(\lambda)$$

para la topología de la norma en M.

Demostración: Para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$ consideremos el intervalo $I_\delta=[k-\delta,K+\delta]$. Sea $P = \{\lambda_0,\lambda_1, \ldots ,\lambda_n\}$ una partición del intervalo I_δ y sea $|P| = \max \{|\lambda_i - \lambda_{i-1}|\}$. Definimos, como es habitual, las sumas inferiores y superiores, relativas a la partición P, de la función $\lambda \to \lambda$ de I_δ en I_δ:

$$L(\lambda,P) = \sum_1^n \lambda_{i-1}[e(\lambda_i) - e(\lambda_{i-1})]$$

$$U(\lambda,P) = \sum_1^n \lambda_i[e(\lambda_i) - e(\lambda_{i-1})]$$

El crecimiento de las funciones $\lambda \to \lambda$ y $\lambda \to e(\lambda)$, nos proporciona, elementalmente las relaciones:

(3.5) $$L(\lambda,P) \leqslant U(\lambda,P).$$

(3.6) $$L(\lambda,P) \leqslant L(\lambda,P') \leqslant U(\lambda,P') \leqslant (\lambda,P) \quad \text{si} \quad P' \measuredangle P$$

y como consecuencia del apartado 2) del teorema 3.2 se tiene:

(3.7) $$L(\lambda,P) \leqslant a[e(\lambda_n) - e(\lambda_0)] \leqslant U(\lambda,P)$$

pero siendo $\lambda_0 = k-\delta$ y $\lambda_n = K+\delta$ es $e(\lambda_n)=I$ y $e(\lambda_0)=0$ según se estableció en el teorema 3.4, por lo que:

(3.8) $$L(\lambda,P) \leqslant a \leqslant U(\lambda,P)$$

para toda partición P de I_δ. En consecuencia tenemos:

$$0 \leqslant U(\lambda,P)-L(\lambda,P) = \sum_1^n (\lambda_i - \lambda_{i-1})[e(\lambda_i) - e(\lambda_{i-1})] \leqslant$$

$$\leqslant |P| \sum_1^n [e(\lambda_i) - e(\lambda_{i-1})] = |P|.I.$$

y también:

$$0 \leqslant a-L(\lambda,P) \leqslant |P|.I \quad \text{y} \quad 0 \leqslant U(\lambda,P) - a \leqslant |P|.I$$

y al pasar a las normas, puesto que son elementos positivos, (3.9) $\|U(\lambda,P) - L(\lambda,P)\| \leqslant |P|$

(3.10) $\|a - L(\lambda,P)\| \leqslant |P|$

(3.11) $\|U(\lambda,P) - a\| \leqslant |P|$

relaciones que garantizan

$$a = \int_{k-\delta}^{K+\delta} \lambda de(\lambda)$$

integral que se extiende a todo $\mathbb{R}$, sin más que considerar la arbitrariedad del $\delta > 0$, con lo que se concluye la prueba.

COROLARIO 3.6.- *Sea M una JW*-álgebra y sea* $a \in H(M)$. *Para todo* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *, existe un elemento* $a' \in M$ *tal que:* a' *es combinación lineal finita y con coeficientes reales de proyecciones y verifica* $\|a - a'\| < \varepsilon$.

Demostración: Tomando una partición P de un intervalo cerrado $[k-\delta,K+\delta] \supset \supset Sp(a)$, y tal que $|P| < \varepsilon$ el elemento $a' = U(\lambda,P)$ verifica las condiciones del corolario.

TEOREMA 3.7.- *Sea M una JW*-álgebra. Para cada $a \in M$ el operador R_a es debilmente contínuo.*

Demostración: Es claro que basta demostrarlo para elementos hermitianos, y que en virtud del lema II.5.1 es suficiente probar que $R_a|_{B(M)}$ es debilmente contínua.

Sea pués $a \in H(M)$ y sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos hermitianos convergente hacia a en la topología de la norma, y tal que cada término es combinación lineal finita y con coeficientes reales de proyecciones.

Puesto que $\|R_a - R_{a_n}\| = \|a - a_n\|$ la sucesión $\{R_{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia R_a en $BL(M)$ y todos sus términos son operadores debilmente contínuos. Si consideramos sus restricciones a $B(M)$ entonces, para cada $x_* \in M_*$, la sucesión $\{x_* \circ R_{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones debilmente contínuas, definidas en el compacto débil $B(M)$ y con valores en $\mathbb{C}$, que converge uniformemente hacia la función $x_* \circ R_a|_{B(M)}$, por lo que esta es debilmente contínua, y en consecuencia R_a es debilmente contínua.

4. EL CONJUNTO DE LAS PROYECCIONES DE UNA JW*-ALGEBRA.

Sea M una JW^*-álgebra y sea $Pr(M)$ el conjunto de las proyecciones de M. Hemos visto en el parrafo anterior, corolario 3.6, que el subespacio vectorial engendrado por $Pr(M)$ está densamente contenido en M, para la topología uniforme de M.

Si en $Pr(M)$ consideramos el orden inducido por el orden de M, nos encontramos en primer lugar que existen el elemento maximo y el elemento minimo de $Pr(M)$, que son, respectivamente, la unidad I y el 0. Por otra parte cada proyección $e \in Pr(M)$ tiene asociada la proyección complementaria $e' = I - e$, verificandose para e_1, $e_2 \in Pr(M)$:

(4.1) $$e_1 \leqslant e_2 \Leftrightarrow e_2' \leqslant e_1'$$

TEOREMA 4.1.- *Sea M una JW^*-álgebra y sean e_1 y e_2 dos proyecciones. Entonces:*

1) $Sup\ (e_1, e_2) = S(e_1 + e_2) \in Pr(M)$.

2) $Inf\ (e_1, e_2) = I - Sup(e_1', e_2') = (S(e_1' + e_2'))'$

Demostración: Probaremos unicamente 1) ya que a partir de el, mediante la relación (4.1), se demuestra 2).

De la definición de $S(e_1 + e_2)$ se tiene que este es una proyección y verifica:

$$e_1 + e_2 \leq \|e_1 + e_2\| S(e_1 + e_2)$$

por lo que de $e_1 \leq e_1 + e_2$ y $e_2 \leq e_1 + e_2$ y del lema 2.1, se sigue

$$e_1 \leq S(e_1 + e_2) \quad \text{y} \quad e_2 \leq S(e_1 + e_2) \tag{4.2}$$

Sea $e \in Pr(M)$ tal que $e_1 \leq e$ y $e_2 \leq e$, entonces

$$e_1 e = e_1 \quad \text{y} \quad e_2 e = e_2$$

como se sigue del lema 2.1 y del teorema I.3.5 por lo que se deduce $(e_1 + e_2)e = e_1 + e_2$ y en virtud del teorema 2.6, se tiene que $S(e_1 + e_2) \leq e$.

COROLARIO 4.2.- *El conjunto de las proyecciones de una JW*-álgebra es un retículo.*

TEOREMA 4.3.- *El retículo Pr(M) de las proyecciones de una JW*-álgebra M es completo.*

Demostración: Sea $B \subset Pr(M)$ una parte vacia. Sea $B' \subset Pr(M)$ el conjunto de los minorantes de B. B' no es vacio, puesto que $0 \in B'$.

Probaremos que B' tiene elemento máximo. Si e_1 y e_2 son dos elementos de B' se tiene $\sup(e_1,e_2) = S(e_1 + e_2) \in B'$ como consecuencia del teorema 4.1. En consecuencia B' es filtrante superiormente, luego si B' es finito tiene elemento máximo.

Si B' no es finito, B' se puede considerar como un conjunto dirigido creciente, que al estar acotado converge debilmente hacia un elemento $e = \sup(B')$ que es una proyección, según se deduce del teorema II.5.9, y del lema 2.5, y de la relación $h' \leqslant h$ para todo $h' \in B'$ y todo $h \in B$ se tiene $e \leqslant h$ para todo $h \in B$, por lo que $e \in B'$ y es en consecuencia elemento máximo de B'.

Como $e = \inf(B)$, se sigue que $Pr(M)$ es un semirreticulo inferior completo, por lo que, en vista de (4.1), es un retículo completo.

Vamos a aplicar estos resultados para determinar la existencia de unidades en las subálgebras de una JW^*-álgebra.

TEOREMA 4.4.- *Sea M una JW^*-álgebra y sea B una subálgebra autoadjunta de M, debilmente cerrada. Entonces existe una proyección e tal que $e \in B$ y es la unidad de B.*

Demostración: Sea $a \geqslant 0$ un elemento de $\mathcal{B}$. De la definición de soporte, y por ser $\mathcal{B}$ debilmente cerrada, se sigue que $S(a) \in \mathcal{B}$. Si e_1 y e_2 son dos proyecciones de $\mathcal{B}$ entonces $\sup(e_1, e_2) = S(e_1 + e_2) \in \mathcal{B}$, por lo que el supremo del conjunto $Pr(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B}$ es el límite débil del conjunto dirigido $Pr(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B}$ y al ser $\mathcal{B}$ debilmente cerrada pertenece a $\mathcal{B}$.

Sea pués $e = \max(Pr(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B})$. Para todo $a \geqslant 0$ con $a \in \mathcal{B}$ se tiene:

$$S(a) \leqslant e \qquad \text{y} \qquad a \leqslant \|a\| \cdot S(a)$$

por lo que deducimos

$$a \leqslant \|a\| e$$

Demostración: La primera afirmación se sigue del teorema anterior y los teoremas II.2.10 y II.4.5. Para la segunda basta considerar el teorema I.3.5.

COROLARIO 4.6.- *Sea M una JW^*-álgebra y sea B un ideal debilmente cerrado. Entonces $B = eM$ para alguna proyección e perteneciente al núcleo de M.*

DEMOSTRACIÓN: El ideal B es debilmente cerrado, luego es autoadjunto como se sigue del teorema II.2.4. Puesto que B es entonces subálgebra autoadjunta y debilmente cerrada se sigue que B es un ideal con unidad. Sea $e \in B$ la unidad, entonces $e \in N(M)$ como se vió en el teorema I.3.9.

Los conjuntos de la forma eM, con e proyección del núcleo de M, son trivialmente ideales débilmente cerrados.

B I B L I O G R A F I A

(1) E.M. ALFSEN, F.W. SHULTZ and E.T. STØRMER. A Gelfan-Neumard Theorem for Jordan Algebras. Preprint Series. Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo. Mathematics n°19 (1975).

(2) H.F. BOHNENBLUST-S. KARLIN. Geometrical properties of the unit sphere of Banach Algebras. Annals of Mathematics, Vol. 62, n°2, (1955), 217-229.

(3) F.F. BONSALL-J. DUNCAN. Complete Normed Algebras. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York; 1973.

(4) F.F. BONSALL-J. DUNCAN. Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras. Cambridge at the University Press; (1971).

(5) F.F. BONSALL-J. DUNCAN. Numerical Ranges II.
Cambridge University Press; (1973).

(6) N. BOURBAKI. Espaces vectoriels topologiques. Chapitres III, IV et V. Hermann. Paris.

(7) N. BOURBAKI. Topologie generale. Chapitres I et II. Hermann. Paris.

(8) J. DIXMIER. Les C*-Algebres et leurs representations. Gauthier-Villars, Paris 1969.

(9) I. GELFAND, D. RAIKOV and G. SHILOV. Conmutative normed Rings. Chelsea Publishiny Company. Bronx, New York; 1964.

(10) A. GROTHENDIECK. Espaces vectoriels topologiques, 3°Ediçao. Publiçacão da Sociedade de Matemática de S. Paulo. São Paulo; 1964.

(11) E. HILLE - R. S. PHILLIPS. Funtional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island; 1957.

(12) J. HORVATH. Topological vector spaces and distributions. Addison-Wesley Publishing Company Reading, Mass. 1966.

(13) N. JACOBSON. Structure and representations of Jordan Algebras. Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 39. Providence; 1968.

(14) C.E. KENIG and H. PORTA. Weak continuity of Banach Algebra Products. Bull of the Amer. Math. Soc. Vol. 81, n° 3, Mayo 1975.

(15) R. LARSEN. Functional Anakysis, an introduction. Marcel Dekker, Inc. New-York; 1973.

(16) J. MARTINEZ MORENO. Sobre Algebras de Jordan normadas y completas. Dto. Publicaciones, Universidad de Granada; 1976.

(17) K. McCRIMMON. Macdonald's Theorem with inverses. Pacific Journal of Mathematics. Vol. 21, nº2 (1967), 315-325.

(18) A. MOTJAR KAIDI. Bases para una teoría de las álgebras no asociativas normadas. Memoria de Doctorado(por aparecer).

(19) A.P. ROBERTSON and W.J. ROBERTSON. Topológical Vector Spaces. Cambridge University Press. 2ª edición; 1973.

(20) A. RODRIGUEZ. Contribución a la teoría de las C*-Algebras con unidad. Tesis doctoral. Universidad de Granada; 1974.

(21) A. RODRIGUEZ. Rango numérico en álgebras normadas no asociativas. (Por aparecer).

(22) S. SAKAI. C*-álgebras and W*-álgebras. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York; 1971.

(23) H.H. SCHAEFER. Topological Vector Spaces. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York; 1970.

(24) R.D. SCHAFER. An Introductión to Nonassociative algebras. Academic Press. New York and London; 1966.

(25) K. YOSIDA. Functional Analysis. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, New York; 1971.

(26) W. ŻELAZKO. Banach Algebras. Elsevier Publishing Company. Amsterdam, London, New York; 1973.

B I B L I O G R A F I A

A D I C I O N A L

(27) DIXMIER, 3. Les algebres d'opérateurs dans L'espace hibertien. (Algebres de von Neumann). GAUTIER-VILLARS. Editeur. Paris (1969).

(28) DIXMIER, 5. Les anneaux d'opérateurs de classe finie. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 66, 209-261 (1949).

(29) NEUMARK, M. On the imbdding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Mat. USSR-Sb 12, 197-213 (1943).

(30) PALMER, T.W. Characterizations of C*-álgebras. Bull. Amer. Math. Soc. 74, 538-540 (1968).

(31) SAKAI, S. A characterization of W*-álgebras. Pacific, J. Math 6, 763-773 (1956).

(32) VIDAV, I. Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren. Math. Z. 66, 121-128 (1956).

DILIGENCIA:

Reunido el Tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

D. JOSE RAMÓN FUENTES MIRAS

D. MARIANO GASCA GONZÁLEZ

D. JOSE Mª ISIDRO GOMEZ

D. PABLO BOBILLO GUERRERO

D. MANUEL ANTONIO FUGAROLAS VILLAMARÍN

para juzgar la Tesis Doctoral del Licenciado Don FRANCISCO OCAÑA OCAÑA

se acordó por unanimidad otorgar la calificación de Sobresaliente "cum laude"

y para que conste, se extiende firmada por los componentes del Tribunal, la presente diligencia.

Granada, a 29 de octubre de 1977.

El Secretario,

El Presidente,

El Vocal, El Vocal, El Vocal,