

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS



Departamento de Matemática Aplicada

**ESQUEMAS LOCALES DE
INTERPOLACION DE LAGRANGE Y
HERMITE. SU EXTENSION
A DOS VARIABLES**

TESIS DOCTORAL

DOMINGO BARRERA ROSILLO

Granada, 1997



Biblioteca Universitaria de Granada



01533882

*Barrera Rosillo, Domingo
Año 96. 97*

T. PROV 16/144

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha ...11-6-97...
ENTRADA NUM. ...1863...

UNIVERSIDAD DE GRANADA
27 MAYO 1997
COMISION DE DOCTORADO

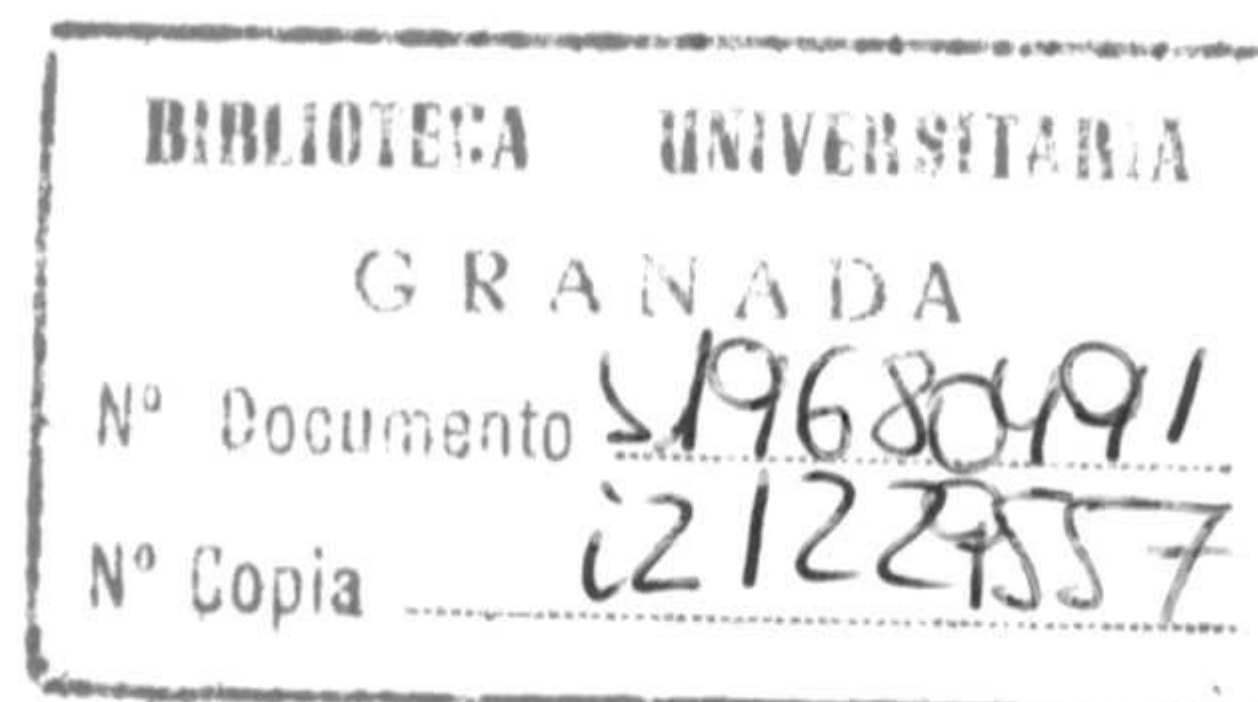
T
15
98

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemática Aplicada

**ESQUEMAS LOCALES DE
INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE Y
HERMITE. SU EXTENSIÓN
A DOS VARIABLES**

TESIS DOCTORAL

realizada por
Domingo Barrera Rosillo
para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas




Granada, Julio de 1997

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

La presente memoria ha sido realizada en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los Doctores Antonio López Carmona (Profesor de la Universidad de Granada) y Paul Sablonnière (Profesor del I.N.S.A. de Rennes -Francia-).

El Autor:

A complex, cursive handwritten signature consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke at the bottom.

Fdo.: Domingo Barrera Rosillo

V.^o B.^o de los directores:

A handwritten signature starting with a tall vertical stroke, followed by a loop and a long horizontal stroke extending to the right.

Fdo.: Antonio López Carmona

A handwritten signature with a large, sweeping initial 'P' and a long, horizontal stroke extending across the page.

Fdo.: Paul Sablonnière

Deseo expresar mi más sincera gratitud a cuantas personas han colaborado, de una u otra forma, en la realización de esta memoria.

A los directores, Professeur Paul Sablonnière, del I.N.S.A. de Rennes, y profesor Dr. D. Antonio López Carmona, del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, quienes con sus ideas, crítica, apoyo y paciencia han hecho posible que este trabajo llegue a buen término.

Al profesor Dr. D. Victoriano Ramírez González, Director del Departamento de Matemática Aplicada, por la confianza en mí depositada y por haber puesto en todo momento a mi disposición cuantos medios materiales han sido necesarios.

Al Laboratorio L.A.N.S. del I.N.S.A. de Rennes, por su magnífica acogida cada una de las ocasiones en que he tenido la oportunidad de trabajar durante unas semanas en un ambiente realmente grato.

A los compañeros del Departamento y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, por su estímulo y ánimo, decisivos muchas veces para continuar la tarea iniciada.

A María José, que ha vivido todo el proceso: los sinsabores, las desilusiones, las alegrías, ... y que me ha apoyado en todo momento a costa de su propio trabajo; a Alberto, que ha visto cómo en muchas ocasiones no podía dedicarle el tiempo que los hijos merecen; y a Pablo, que estará con nosotros poco antes de que esta memoria sea defendida y que, aunque no lo sepa, también ha sufrido esta última etapa.

Y finalmente, aunque no en último lugar, a toda mi familia, y en particular a mis padres, a quienes debo en última instancia poder dedicarme a lo que me gusta y siempre me ha gustado, algo que nunca les agradeceré suficientemente.

A María José, Alberto y Pablo

Índice

Introducción	iii
1 Esquemas de Lagrange sobre una subdivisión uniforme	1
1.1 El B-spline de Schoenberg	1
1.1.1 Introducción y preliminares	1
1.1.2 El problema lagrangiano para el B-spline de Schoenberg	5
1.1.3 Determinación de los coeficientes	15
1.1.4 Ejemplos	18
1.2 Una nueva familia de funciones spline	34
1.2.1 Preliminares	34
1.2.2 El problema lagrangiano para el S-spline	40
2 Esquemas de Hermite sobre una subdivisión arbitraria	55
2.1 Interpolación de Hermite de clase máxima	55
2.1.1 El problema de interpolación	55
2.1.2 Ejemplos	60
2.2 El problema de interpolación de Hermite de orden uno	68
2.2.1 El caso impar	69
2.2.2 El caso par	72
2.2.3 Ejemplos	79
2.3 Sobre el error en la interpolación spline cúbica	89
2.3.1 El problema de interpolación de Hermite de orden dos	89
2.3.2 Error de interpolación para \mathcal{H}^2	93
2.3.3 El problema de interpolación de ^{Hermite de} orden uno	99
2.3.4 Error de interpolación para \mathcal{H}^1	101
2.3.5 Un esquema global de Hermite de orden uno	105
2.3.6 Ejemplos numéricos	111

3	Interpolación spline de Hermite sobre regulares del plano	119
3.1	Introducción	119
3.1.1	Interpolación spline de Lagrange y elemento finito HCT	120
3.1.2	Interpolación spline de Lagrange y elemento finito PS	126
3.1.3	Interpolación spline de Lagrange y elemento finito FVS	128
3.2	Interpolación spline de Hermite de orden uno	131
3.2.1	Interpolación spline de Hermite vía elementos finitos HCT	131
3.2.2	Elementos finitos PS y FVS	138
3.2.3	Un ejemplo	141
3.3	El caso general	141
3.3.1	Elementos finitos HCT y FVS	142
3.3.2	El elemento finito PS	147
3.3.3	Operadores escalados	149
3.4	Consideraciones acerca de las configuraciones	149
3.4.1	Clasificación de configuraciones admisibles	150
3.4.2	Configuraciones unisolventes e interpolación de bajo grado	154
4	Spline de Lagrange de soporte hexagonal: un problema abierto	169
4.1	Introducción	169
4.2	El caso del box-spline cuártico de clase dos	170
4.3	El problema de interpolación en el caso general	180
4.4	Reducción del problema vía transformada de Fourier	182
4.5	Argumentos a favor de la unisolvencia	188
	Bibliografía	201

Introducción

Al estudiar problemas de interpolación de Lagrange o de Hermite en una o dos variables surgen de manera natural diversas cuestiones, la primera de las cuales se refiere a la naturaleza de aquéllos. Si el problema es global, podemos vernos conducidos a resolver un sistema de ecuaciones lineales de un orden muy elevado, aunque frecuentemente con pocos elementos no nulos, hecho que se traduce en que las funciones fundamentales asociadas al problema puedan tener un soporte no acotado -baste recordar los operadores de interpolación spline cardinal considerados por Schoenberg-, y que tiene consecuencias tanto desde el punto de vista teórico como práctico, pues se dificulta la obtención de estimaciones del error, de una parte, y el diseño de algoritmos eficientes, de la otra.

Una situación diferente consiste en que el problema sea de naturaleza puramente local: subdividido su conjunto de definición en diferentes partes, el interpolante global se construye *ensamblando* los interpolantes locales definidos sobre dichas partes. La naturaleza local tiene su reflejo en la estructura de las funciones de base del problema; en particular, en el carácter compacto del soporte. En lugar de resolver un sistema de un orden elevado, habrá que resolver gran cantidad de sistemas de tamaño moderado, con matrices de coeficientes diferentes en cada caso, en general. El que el soporte de las funciones fundamentales sea compacto implicará que haya que considerar un número finito de términos de la expresión que define al interpolante para evaluarlo en un punto.

En el caso univariado, dado un conjunto de nodos de interpolación, se puede considerar en cada uno de los macro-intervalos inducidos un cierto número de nodos secundarios, que determinan los correspondientes micro-intervalos. Al aumentar el número de intervalos en los que hay que calcular el interpolante, crece el de grados de libertad, lo que brinda una mayor flexibilidad y ofrece diferentes alternativas. Si hablamos de una situación bivariada, se puede partir de una partición del conjunto de definición del problema en triángulos o cuadriláteros, por ejemplo, lo que origina un cierto número de puntos que jugarán el papel de nodos de interpolación. Si

subdividimos cada una de dichas macro-estructuras, volvemos a disponer de una determinada cantidad de grados de libertad.

En los dos casos citados, la *unión* de los interpolantes locales conducirá a un interpolante global, con una cierta clase también global, que puede ser diferente de la de aquéllos.

El que haya grados de libertad a nuestra disposición hace que sea preciso decidir una estrategia para asignarles valores con un objetivo preciso. Una posibilidad es lograr que se preserven ciertas propiedades de forma y otra elección consiste en que ciertos polinomios se representen de una manera exacta, es decir, que, si los datos que se pretende interpolar son los que un polinomio toma en los nodos de interpolación, entonces el interpolante global es dicho polinomio. Ésta es la opción por la que nos inclinamos, y tiene como consecuencia un alto orden de aproximación, prefijable.

La memoria que presentamos consta de cuatro capítulos, dos en los que se tratan problemas univariados (primero y segundo) y los dos restantes dedicados a la interpolación spline bivariada. Esta división a partes iguales entre problemas en una y dos variables se completa con una cierta simetría en los capítulos: los problemas tratados en los capítulos primero y cuarto son similares, del mismo modo que lo son los analizados en el segundo y el tercero.

En el primer capítulo consideramos la construcción de operadores de interpolación spline de Lagrange definidos a partir de una subdivisión uniforme de la recta real cuyas funciones fundamentales sea de soporte compacto. Para ello, en cada intervalo definido por enteros consecutivos hacemos uso del punto medio y construimos la función fundamental como combinación lineal de un número finito de trasladadas de una función spline según los nodos de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. La función spline elegida inicialmente es el B-spline definido por Schoenberg, con nodos en \mathbb{Z} o $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, según la paridad de su grado. Esta situación es considerada por Qi y, posteriormente, por Dahmen, Goodman y Micchelli, pero la técnica que empleamos para construir la función fundamental es diferente de la de estos autores. El primero prueba la unicidad del problema mediante el teorema de Schoenberg-Whitney y determina los coeficientes de la combinación lineal que proporciona la función fundamental imponiendo los valores de interpolación, lo que da lugar a un sistema lineal y requiere conocer los valores que el B-spline toma en los puntos de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ que pertenecen a su soporte. Los segundos toman este problema como precedente para tratar uno más general, ya que consideran particiones de \mathbb{R} no uniformes.

En nuestro caso, volvemos la mirada a resultados ya establecidos por Schoenberg al construir operadores de interpolación con funciones fundamentales de soporte no compacto, y hacemos uso de la transformada de Fourier dado que gran cantidad de información relevante se concentra en la transformada del B-spline, de expre-

sión fácilmente manejable. Con este procedimiento reducimos el problema a uno puramente algebraico: a comprobar que dos polinomios que se calculan de forma recurrente, y para los que no se necesita conocer valor alguno del B-spline, son primos relativos. Supuesto probado que lo son, los coeficientes de la combinación lineal a la que es igual la función fundamental se calculan resolviendo dos sistemas triangulares superiores, cuyas matrices de coeficientes se calculan a partir de los polinomios de Chebyshev y que tienen como términos independientes los coeficientes de los polinomios proporcionados por el teorema de Bezout asociados a los dos primos referidos anteriormente. Finalizamos el apartado probando de forma directa que los polinomios involucrados en la unisolvencia son siempre primos relativos, objetivo que perseguíamos desde el principio, pues de forma indirecta era conocido que debían serlo. De este modo, la unisolvencia del problema de interpolación quedaba *desligada* del teorema de Schoenberg-Whitney. Los operadores construidos preservan el espacio de los polinomios de grado igual al del B-spline considerado.

La segunda parte de este primer capítulo se dedica a plantear y analizar un problema similar al anterior para una nueva función spline que definimos. Dado que el B-spline de Schoenberg de orden k (grado $k - 1$) es la convolución de k copias de la función característica del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, definimos la función S-spline como la convolución del r -ésimo polinomio de Bernstein relativo al intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ con k copias de la función característica citada. La estructura del S-spline hace que su transformada de Fourier sea fácil de calcular y emplear, a fin de establecer un resultado similar al de la primera parte. Tras dar las relaciones de recurrencia que permite hallar la expresión exacta de su transformada y los coeficientes de los coeficientes polinómicos que en ella intervienen, planteamos el problema de interpolación y lo reducimos a una condición de coprimalidad. Para $r = 1$ y k arbitrario probamos que tal condición se satisface si y sólo si las derivadas de los polinomios que determinan la unisolvencia en el caso del B-spline son polinomios primos relativos, y demostramos seguidamente que siempre lo son, para lo que utilizamos las relaciones de recurrencia satisfechas por dichos polinomios. El capítulo se cierra probando, con una técnica debida a Micchelli, que el caso $k = y$ y r arbitrario también es unisolviente, lo que se traduce en el cumplimiento de una propiedad de coprimalidad por parte de los polinomios involucrados en el problema.

En el segundo capítulo generalizamos el método constructivo de Dahmen, Goodman y Micchelli para construir operadores de interpolación de Hermite que preserven un espacio de polinomios predeterminado. Inicialmente nos planteamos un método completamente local que produzca clase máxima para un grado fijado, lo que implica considerar un determinado número de nodos secundarios, inferior en una unidad

al grado de los polinomios con los que se forma el interpolante. El resultado básico para conseguirlo está relacionado con el teorema de Schoenberg-Shitney y se debe a los autores antes citados. Los valores de los grados de libertad intrínsecos al problema, debidos a la introducción de los nodos secundarios y al consiguiente aumento del número de subintervalos en los que hay que calcular el interpolante, se hallan exigiendo que el operador de interpolación sea exacto en un cierto espacio de polinomios. Fijados los soportes de las funciones fundamentales, cuyas amplitudes están directamente relacionadas con el grado de los polinomios preservados, los grados de libertad se calculan a partir de los polinomios de Hermite que resuelven diversos problemas de interpolación.

El segundo problema analizado se refiere a la interpolación spline de Hermite de primer orden, de especial interés debido a las aplicaciones que tiene. La clase global del interpolante será ahora inferior en una unidad a la máxima posible y se preservará directamente el mayor espacio de polinomios, en lugar de considerar uno prefijable. La clase del interpolante local será una unidad mayor que la del interpolante global. En el caso de grado impar los soportes de las dos funciones fundamentales serán iguales, y no sucede lo mismo si es par. Introducimos una modificación del método utilizado hasta ese momento para conseguir igualdad de los soportes también si el grado es par, y ello conduce a considerar no polinomios de interpolación al efecto sino unos splines de Hermite definidos al efecto. La construcción y uso de las correspondientes funciones fundamentales comportará un mayor esfuerzo computacional, y serán las aplicaciones las que determinen su idoneidad.

La tercera parte del capítulo se dedica a analizar el error asociado a la interpolación spline de Hermite cúbica, de clase dos, con nodos secundarios equidistantes del centro del macro-intervalo. El caso cúbico es, obviamente, muy empleado en la práctica dada su simplicidad y la introducción de nodos adicionales hace posible que la construcción del interpolante sea local. Se acota en primer lugar el error para la interpolación de Hermite de orden dos, cúbica y de clase dos, obteniendo cotas óptimas, y se utilizan éstas para estimar el de la interpolación spline de Hermite de orden uno. Concluye el capítulo con la presentación de un esquema global de Hermite de orden uno, también cúbico de clase dos, y se estudia su error.

En el tercer capítulo pasamos a tratar un problema bivariado, manteniendo presente el procedimiento local seguido en el precedente. Se parte de dos particiones regulares del plano, una triangular y otra en cuadriláteros, y se subdividen, del mismo modo que los nodos secundarios producían una partición en subintervalos de los macro-intervalos a que dan lugar los nodos primarios. Para la triangular se consideran dos tipos de subtriangulaciones, una en tres triángulos y otra en seis, y para la partición en cuadriláteros se utiliza la inducida por las diagonales. Surgen así los

elementos finitos de tipos Hsieh-Clough-Tocher, Powell-Sabin y Fraeijs de Veubeke-Sander, respectivamente. Mucho se ha estudiado acerca de elementos finitos en general, y de los anteriores, en particular, y son fundamentalmente los trabajos de P. Sablonnière y M. Laghchim-Lahlou los que nos permiten construir de un modo completamente local los operadores de interpolación, tanto de Lagrange como de Hermite. Los grados de libertad de los problemas que trataremos corresponde, para los elementos HCT y FVS, a los valores de las derivadas parciales hasta un cierto orden en los nodos de interpolación y de determinadas derivadas direccionales en conjuntos de puntos interiores a los lados de los macro-triángulos, y sólo a derivadas parciales si el elemento finito es de tipo PS. Se hallan sus valores exigiendo exactitud en un espacio de polinomios. En el caso concreto del elemento finito HCT cúbico y de clase uno, el problema lagrangiano se reduce al considerado por Dahmen, Goodman y Micchelli, y el operador de interpolación preserva los polinomios de grado total menor o igual que tres. Si se consideran los elementos HCT y FVS en general y se impone exactitud en el mayor espacio de polinomios posible el problema resultante es el tratado simultánea y recientemente por M. Laghchim-Lahlou.

El capítulo se inicia tratando justo el problema antes citado, es decir, la interpolación spline de Lagrange, partiendo de los elementos finitos HCT, PS y FVS, que preserva el espacio de polinomios que se establezca de antemano. Se resuelve el problema considerando un determinado subconjunto triangular de vértices de la triangulación y empleando para dar valores a los grados de libertad ciertos polinomios de interpolación asociados a subconjuntos de nodos construidos a partir de subconjunto inicial de vértices. Continúa aplicando el método descrito a la interpolación spline de Hermite de orden uno, para lo que es necesario emplear ciertas configuraciones de puntos del plano elegidos entre los vértices de la triangulación que den lugar a problemas de interpolación polinómica de Hermite de orden uno unisolvente en el espacio de polinomios prefijado en el que se impone la exactitud. En una tercera fase se generalizan los resultados establecidos a la interpolación spline de Hermite de orden arbitrario, con las limitaciones que oportunamente se indican.

La construcción de las funciones fundamentales de los operadores de interpolación definidos se basa en la asignación de valores a los grados de libertad que restan tras imponer las condiciones de interpolación, de modo que quede garantizada la exactitud en un espacio de polinomios. Para imponer dicha exactitud es preciso partir de lo que hemos denominado anteriormente configuración unisolvente. Es, pues, necesario hacer algunas observaciones sobre dichas configuraciones. En el caso lagrangiano disponemos de una triangular que es la que se ha empleado, pero en el de Hermite no. A fin de buscar configuraciones unisolventes elegiremos un subconjunto de vértices, que denominaremos sistema de puntos, con cuyos términos

se formarán configuraciones válidas a priori aunque no sean unisolventes. Conocer el número de tales configuraciones es importante a la hora, por ejemplo, de diseñar algoritmos de búsqueda automática, y es consecuencia básica de los resultados de la teoría de la enumeración. Sin embargo, lo que se necesita es una configuración unisolvente y, dada la regularidad de las particiones consideradas, la unisolvencia es preservada por las isometrías del sistema de puntos fijado inicialmente. En consecuencia, tiene interés establecer una relación de equivalencia en el conjunto de las configuraciones admisibles -unisolventes o no- y conocer el número de clases de equivalencia. La unisolvencia del problema de interpolación polinómica planteado para una configuración perteneciente a una clase implica la de las restantes. Se reduce, por tanto, el problema a buscar representantes de clases unisolventes.

Como los casos de más interés práctico son los correspondientes a la construcción de interpolantes spline de Hermite de órdenes uno y dos que sean de clase global moderada, los elementos finitos precisos serán de bajo grado. Por tanto, completamos el capítulo proporcionando algunos resultados sobre los casos citados, poniendo de manifiesto que es imprescindible diseñar códigos de ordenador para encontrar todas las configuraciones unisolventes relevantes para el caso que se esté considerando.

En el cuarto y último capítulo de esta memoria volvemos al problema planteado en el primero, pero referido a funciones de dos variables. Basándonos en el método utilizado en ese primer capítulo, ya considerado por Qi -y por Micchelli en un contexto más general-, seleccionamos el box-spline definido sobre la red-tridireccional regular del plano para formar, con un número de trasladadas suyas con centros en puntos de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$, una combinación lineal que sea la función fundamental de un operador de interpolación de Lagrange.

En la primera parte del capítulo, tomamos el box-spline cuártico de clase dos y con él formulamos el problema de interpolación necesario. Al no disponer de un teorema tipo Schoenberg-Whitney aplicable, construimos directamente el sistema lineal asociado a las condiciones de interpolación, lo que requiere evaluar el box-spline en los puntos de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$. Aunque se dispone de una fórmula recurrente para calcular el valor del box-spline en cualquier punto de soporte, es el algoritmo de subdivisión el elegido para efectuar las evaluaciones requeridas. Una vez construido el sistema, se comprueba que es regular y se halla su solución, apreciando una determinada regularidad en ella. Queda probada, pues, la unisolvencia del problema lagrangiano definido, aunque no mediante un procedimiento aplicable en una situación general. Antes de formular ese problema general, y para confirmar la regularidad, se considera el box-spline de grado siete y clase tres y se utiliza el mismo procedimiento para determinar si el problema es unisolvente. La respuesta es afirmativa y aparece de nuevo la regularidad en la solución. Esta regularidad, debida en última instancia a

las simetrías del box-spline elegido, de los conjuntos de puntos que desempeñan el papel de centros de las trasladadas del box-spline y de los coeficientes de la igualdad a que da lugar el algoritmo de subdivisión, es aprovechada para formular el problema general, cuya solución se aborda nuevamente utilizando la transformada de Fourier del box-spline.

La formulación y reducción del problema de interpolación vía la transformada de Fourier es el tema de la segunda parte de este capítulo, logrando establecer la equivalencia de aquél con el cumplimiento de una identidad en la que intervienen cuatro funciones que juegan un papel similar a los polinomios cuya coprimidad se estudiaba y establecía en el primer capítulo. Ya el título dado al capítulo muestra que el problema sigue abierto; pensamos que hay buenas razones para creer en la unisolvencia del mismo en el caso general, y constituye una evidente línea de investigación para el futuro inmediato. De ser cierto lo que intuimos, dispondríamos, para cada natural k , de un operador de interpolación de Lagrange exacto en \mathbb{P}_{2k+1} y que proporcionaría interpolantes de grado $3k + 1$ y de clase $2k$.

La última parte del capítulo se dedica a dar argumentos a favor de la unisolvencia del problema considerado. Los dos casos probados inicialmente mediante un procedimiento de fuerza bruta proporcionan resultados aplicables en la práctica.

Capítulo 1

Esquemas de Lagrange sobre una subdivisión uniforme

1.1 El B-spline de Schoenberg

1.1.1 Introducción y preliminares

En [69] Schoenberg aborda el problema de aproximación de datos equidistantes por funciones analíticas y proporciona una teoría general sobre fórmulas de interpolación de tipo cardinal. Concretamente, a una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de ordenadas y a una función par, L , les asocia una fórmula del tipo

$$F(x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} y_v L(x - v)$$

y plantea definiciones que agrupa de la siguiente manera:

Definición 1.1.1 ([69], pp. 60-61) *Consideremos la fórmula precedente.*

1. *Diremos que es una fórmula de interpolación ordinaria si $F(x)$ interpola exactamente las ordenadas, es decir, si*

$$L(0) = 1, \quad L(v) = 0 \quad v \neq 0$$

2. *Diremos que es una fórmula exacta de grado $k - 1$ si la relación*

$$P(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(n) L(x - n)$$

es una identidad para todo polinomio $P(x)$ de grado a lo sumo $k - 1$.

3. Diremos que preserva el grado $k-1$ si para cualquier polinomio $P(x)$ de grado $\nu \leq k-1$ tenemos una identidad

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} P(n) L(x-n) = P(x) + Q(x)$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de grado menor que ν .

4. Diremos que es de grado m y de clase C^μ si la función $L(x)$ es polinómica a trozos de grado a lo sumo m y globalmente de clase C^μ .
5. Diremos que es una fórmula de interpolación polinómica si L es polinómica a trozos y que tiene soporte $\left[-\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right]$ si la función par $L(x)$ se anula idénticamente para $x > \frac{s}{2}$ pero no para $x > s'$ con $0 < s' < \frac{s}{2}$.

Restringe su atención a las funciones L continuas en todo punto a excepción de posibles discontinuidades de primera especie que oscilen exponencialmente, es decir, para las que existan dos constantes positivas A y B tales que, para todo número x real, se cumpla la desigualdad

$$|L(x)| < Ae^{-B|x|}$$

Al ser L una función par, su función característica

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x) e^{iux} dx$$

es analítica en la banda $|\Im u| < B$ del plano complejo.

Al ser L una función par, la función característica de L coincide con su transformada de Fourier.

El resultado general sobre las fórmulas tratadas lo expresa como sigue:

Teorema 1.1.2 Sean L una función del tipo considerado y

$$F(x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} y_v L(x-v)$$

su fórmula asociada.

1. Es una fórmula de interpolación ordinaria si y sólo si

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} g(u + 2\pi v) \equiv 1$$

2. Es exacta de grado $k - 1$ si las siguientes dos condiciones se satisfacen:

- $g(u) - 1$ tiene un cero de orden k en $u = 0$.
- $g(u)$ tiene ceros de orden k en todo múltiplo no nulo de 2π .

3. Preserva el grado $k - 1$ si $g(u)$ tiene ceros de orden k en todo múltiplo no nulo de 2π y se satisface la condición $g(0) = 1$.

Realmente, la condición necesaria y suficiente expresada como primer resultado del teorema anterior se puede obtener vía la transformada de Fourier y es válida para una familia muy extensa de funciones ([27]).

Por otra parte, en [47], Qi plantea un problema concreto de interpolación spline lagrangiana en los términos que describimos a continuación.

Para $k \geq 2$, nota por M_k el B-spline centrado de Schoenberg de orden k sobre una partición uniforme ([69], [70], [71]), es decir,

$$M_k(x) = k \left[-\frac{k}{2}, -\frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k-2}{2}, \frac{k}{2} \right] (\bullet - x)_+^{k-1}$$

donde se han empleado las notaciones habituales para la diferencia dividida y para la potencia truncada. Si definimos el conjunto $I_k = \{i \in \mathbb{Z} : -(k-2) \leq i \leq k-2\}$, el Teorema de Schoenberg-Whitney ([5], [28]) prueba que existe una única elección $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$ tal que la función

$$q_k = \sum_{j \in I_k} \gamma_j M_k \left(\bullet - \frac{j}{2} \right)$$

satisface

$$q_k(i) = \delta_{0,i} \quad i \in \mathbb{Z}$$

La función q_k es, evidentemente, de soporte compacto.

En la terminología de Schoenberg, la fórmula

$$Q_k(x) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} y_v q_k(x - v)$$

es una fórmula de interpolación ordinaria exacta de grado $k - 1$, lo que demuestra a posteriori.

También Dahmen, Goodman y Micchelli, [17], se interesan por el problema concreto anterior y lo extienden posteriormente al caso de nodos arbitrarios, estableciendo las elecciones precisas de ciertos parámetros intrínsecos para asegurar la exactitud que se desee, lo que genera el desarrollo posterior de ideas en este sentido que se trata en [24].

En [43] Micchelli vuelve al problema de Qi pero con una visión más amplia, tanto en lo que se refiere a su carácter multivariado como a la mayor generalidad de la función considerada. Concretamente, plantea encontrar una función de cierto tipo muy general, L , tal que

$$L(\alpha) = \delta_{0,\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{Z}^s, \quad s \in \mathbb{N}$$

Sus resultados se resumen en el siguiente teorema, en el que emplearemos las notaciones que se dan a continuación:

- Si ϕ es una función de soporte compacto le asociamos el polinomio

$$\Phi(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^s} \phi(\gamma) z^\gamma, \quad z \in (\mathbb{C} - \{0\})^s, \quad s \in \mathbb{N}$$

- E_s es el conjunto de puntos extremos del hipercubo $[0, 1]^s$.
- A cada sucesión $(d_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^s)$ de soporte finito le asociamos el polinomio

$$d(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} d_\alpha z^\alpha$$

Teorema 1.1.3 ([43], p. 292) *Sea ϕ una función de soporte compacto. Existe una función fundamental de soporte compacto del tipo*

$$L(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} m_\alpha \phi\left(x - \frac{1}{2}\alpha\right)$$

si y sólo si los polinomios de Laurent

$$q^e(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \phi\left(\alpha - \frac{1}{2}e\right) z^\alpha, \quad e \in E_s$$

no tienen ceros comunes en $(\mathbb{C} - \{0\})^s$. Además, en este caso, cualquier sucesión $(m_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}^s)$ que satisfaga la ecuación

$$\sum_{e \in E_s} m^e(z) q^e(z) = 1, \quad z \in (\mathbb{C} - \{0\})^s$$

proporciona una función fundamental, donde

$$m^e(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} m_{2\alpha+e} z^\alpha, \quad z \in (\mathbb{C} - \{0\})^s$$

Finaliza considerando el caso en que la función ϕ satisface una ecuación de refinamiento del tipo

$$\phi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} a_\alpha \phi(2x - \alpha),$$

y funciones L con una estructura diferente.

1.1.2 El problema lagrangiano para el B-spline de Schoenberg

Notemos por χ_A la función característica del conjunto A . Para cualquier número natural k el B-spline M_k de orden k sobre la partición uniforme de \mathbb{R} inducida por el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros se define de forma inductiva como sigue:

$$M_1(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$$

$$M_k(x) = M_{k-1} * M_1(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} M_{k-1}(x-t) dt, \quad k \geq 2$$

Resumimos sus propiedades en el siguiente resultado:

Proposición 1.1.4 ([8], p. 2) *El B-spline M_k presenta las siguientes propiedades:*

1. $M_k \in C^{k-2}(\mathbb{R})$
2. Para cualquier k par, $M_k|_{[j, j+1]} \in \mathbb{P}_{k-1}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.
Para cualquier k impar, $M_k|_{[j-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}]} \in \mathbb{P}_{k-1}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.
3. $\text{sop } M_k = \left[-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right]$.
4. $M_k(x) > 0$ para $-\frac{k}{2} < x < \frac{k}{2}$.
5. Las trasladadas enteras de M_k constituyen una partición de la unidad, es decir,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_k(x-j) = 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

6. La transformada de Fourier de M_k es

$$\widehat{M}_k(u) = \left(\frac{\text{sen } \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^k$$

7. $M_k(x) = k \left[-\frac{k}{2}, -\frac{k-2}{2}, \dots, \frac{k-2}{2}, \frac{k}{2} \right] (\bullet - x)_+^{k-1}$

Consideremos los conjuntos I_k y $J_k = \{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq k-2\}$. Vamos a construir un spline, q_k , de orden k , clase $k-2$ y soporte $[-(k-1), k-1]$, función fundamental para el problema de interpolación de Lagrange; entonces,

$$q_k(i) = \delta_{0,i} \quad i \in \mathbb{Z} \quad (1.1.1)$$

Pedimos que q_k sea una combinación lineal de las trasladadas de M_k sobre $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, es decir,

$$q_k = \sum_{j \in I_k} \gamma_j M_k \left(\bullet - \frac{j}{2} \right) \quad (1.1.2)$$

lo que corresponde al problema de Qi o al segundo caso abordado por Micchelli en una situación univariada concreta.

A causa de la simetría se tiene que $\gamma_j = \gamma_{-j}$, $j \in J_k$.

Asociado a q_k disponemos del operador \mathcal{L}_k definido por

$$\mathcal{L}_k(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f(\alpha) q_k(\bullet - \alpha) \quad (1.1.3)$$

Queremos que \mathcal{L}_k sea un operador de interpolación exacto en \mathbb{P}_{k-1} , espacio de polinomios de grado menor o igual que $k-1$, lo que significa que

$$\mathcal{L}_k(p) = p, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}. \quad (1.1.4)$$

Antes de enunciar el resultado de existencia y unicidad debemos considerar algunas definiciones.

Definición 1.1.5 ([69], p. 114) Definimos las funciones periódicas ρ_k y σ_k como

$$\begin{aligned} \rho_k(u) &= \left(2 \text{sen } \frac{u}{2} \right)^k \sum_{v \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(u + 2\pi v)^k} \\ \sigma_k(u) &= \left(2 \text{sen } \frac{u}{2} \right)^k \sum_{v \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^v}{(u + 2\pi v)^k} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Proposición 1.1.6 ([69], p. 115) *Las funciones ρ_k y σ_k satisfacen las ecuaciones diferenciales en diferencias*

$$\begin{aligned}\rho_{k+1}(u) &= \cos \frac{u}{2} \rho_k(u) - \frac{2}{k} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \rho'_k(u) \\ \sigma_{k+1}(u) &= \operatorname{sen} \frac{u}{2} \sigma_k(u) - \frac{2}{k} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \sigma'_k(u)\end{aligned}$$

con valores iniciales $\rho_2(u) = 1$ y $\sigma_1(u) = 1$.

En la variable $x = \cos \frac{u}{2}$ son polinomios de grados $k-2$ y $k-1$, respectivamente. Si notamos $\rho_k(u) = U_{k-2}(x)$ y $\sigma_k(u) = V_{k-1}(x)$, los polinomios U_{k-2} y V_{k-1} satisfacen las ecuaciones dífero-diferenciales

$$\begin{aligned}U_{r+1}(x) &= xU_r(x) + \frac{1}{r+2} (1-x^2) U'_r(x) \\ V_{r+1}(x) &= xV_r(x) + \frac{1}{r+1} (1-x^2) V'_r(x)\end{aligned}$$

con $U_0(x) = 1$ y $V_0(x) = 1$.

Los polinomios U_k están relacionados con los polinomios de Euler-Frobenius, que juegan un papel destacado en la teoría de *ondelettes* y en la interpolación spline cardinal ([9]).

Ya estamos en condiciones de abordar el problema de interpolación propuesto.

Proposición 1.1.7 *Para cada $k \geq 2$ existe una única función q_k que verifica (1.1.1), (1.1.2) y (1.1.3) si y sólo si los polinomios U_{k-2} y V_{k-1} son primos relativos.*

Demostración

Según el teorema 1.1.2, la existencia y unicidad de q_k equivale al cumplimiento de la identidad $\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_k(u + 2\pi v) \equiv 1$, para lo que precisamos la transformada de Fourier de q_k .

Se tiene que

$$\begin{aligned}q_k(x) &= \sum_{j \in I_k} \gamma_j M_k \left(x - \frac{j}{2} \right) \\ &= \gamma_0 M_k(x) + \sum_{j \in J_k} \gamma_j \left(M_k \left(x + \frac{j}{2} \right) + M_k \left(x - \frac{j}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

Entonces, de la definición de transformada de Fourier de q_k ,

$$\hat{q}_k(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} q_k(u) du,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \hat{q}_k(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \left[\gamma_0 M_k(x) + \sum_{j \in J_k} \gamma_j \left(M_k\left(x + \frac{j}{2}\right) + M_k\left(x - \frac{j}{2}\right) \right) \right] dx \\ &= \gamma_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} M_k(x) dx + \\ &\quad \sum_{j \in J_k} \gamma_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \left(M_k\left(x + \frac{j}{2}\right) + M_k\left(x - \frac{j}{2}\right) \right) dx \end{aligned}$$

Pero la transformada de Fourier de M_k , según la proposición 1.1.4, viene dada por

$$\widehat{M}_k(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} M_k(x) dx = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^k,$$

y la de $M_k\left(x + \frac{j}{2}\right) + M_k\left(x - \frac{j}{2}\right)$ es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \left(M_k\left(x + \frac{j}{2}\right) + M_k\left(x - \frac{j}{2}\right) \right) dx = \left(e^{ui\frac{j}{2}} + e^{-ui\frac{j}{2}} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^k.$$

En consecuencia,

$$\hat{q}_k(u) = \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^k.$$

Debemos calcular $\hat{q}_k(u + 2\pi v)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{q}_k(u + 2\pi v) &= \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_k} \gamma_j \cos \frac{j(u + 2\pi v)}{2} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{u + 2\pi v}{2}}{\frac{u + 2\pi v}{2}} \right)^k \\ &= \frac{(-1)^{vk}}{(u + 2\pi v)^k} 2^k \left(\operatorname{sen} \frac{u}{2} \right)^k \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_k} \gamma_j (-1)^{vj} \cos \frac{ju}{2} \right) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi_k(u) &= \sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_k(u + 2\pi v) \\ &= \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left[\frac{(-1)^{vk}}{(u + 2\pi v)^k} 2^k \left(\operatorname{sen} \frac{u}{2} \right)^k \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_k} \gamma_j (-1)^{vj} \cos \frac{ju}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Para simplificar la expresión anterior debemos considerar la paridad de k . Definamos los siguientes subconjuntos de J_k :

$$J_{k,p} = J_k \cap (2\mathbb{N}) \quad , \quad J_{k,i} = J_k \cap (2\mathbb{N} + 1)$$

Supongamos, en primer lugar, que k es par. En este caso $(-1)^{vk} = 1$ y podemos escribir

$$\varphi_k(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2^k}{(u + 2\pi v)^k} \left(\operatorname{sen} \frac{u}{2} \right)^k \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j (-1)^v \cos \frac{ju}{2} + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) \right],$$

lo que conduce, por (1.1.5), a

$$\varphi_k(u) = \rho_k(u) \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) + \sigma_k(u) \left(2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right),$$

Si, por el contrario, k es impar, entonces $(-1)^{vk} = (-1)^v$ y, tras las simplificaciones oportunas, disponemos de la igualdad

$$\varphi_k(u) = \sigma_k(u) \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) + \rho_k(u) \left(2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right).$$

En resumen,

$$\varphi_k(u) = \begin{cases} \rho_k(u) \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) + \sigma_k(u) \left(2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right), & k \text{ par} \\ \sigma_k(u) \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) + \rho_k(u) \left(2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right), & k \text{ impar} \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Por otro lado, si denotamos por T_j a los polinomios de Chebychev, es conocido que

$$T_j \left(\cos \frac{u}{2} \right) = \cos j \frac{u}{2}, \quad j \geq 0. \quad (1.1.7)$$

En consecuencia, por (1.1.6) y (1.1.7), podemos escribir

$$\varphi_k(u) = \begin{cases} A_{k-2}(x)U_{k-2}(x) + B_{k-3}(x)V_{k-1}(x), & k \text{ par} \\ \tilde{A}_{k-2}(x)U_{k-2}(x) + \tilde{B}_{k-3}(x)V_{k-1}(x), & k \text{ impar} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

con

$$A_{k-2}(x) = \gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j T_j(x), \quad B_{k-3}(x) = 2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j T_j(x), \quad (1.1.9)$$

$$\tilde{A}_{k-2}(x) = 2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j T_j(x), \quad \tilde{B}_{k-3}(x) = \gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j T_j(x) \quad (1.1.10)$$

y $x = \cos \frac{u}{2}$.

Las igualdades (1.1.8) implican que $\varphi_k(u)$ es constantemente uno si y sólo si los polinomios U_{k-2} y V_{k-1} son primos entre sí. \square

Dado que en [47] Qi prueba que el problema que hemos planteado admite una única solución, de una manera indirecta queda demostrado que los polinomios U_{k-2} y V_{k-1} , $k \geq 2$, son primos relativos. Sin embargo, estamos interesados en demostrar de forma directa ese resultado. Si $2 \leq k \leq 5$ es inmediato (véanse los datos de las tablas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4), por lo que nos centraremos, en lo que sigue, en el caso $k \geq 6$.

Proposición 1.1.8 *Para cada número natural $r \geq 1$, si p_n y q_n denotan polinomios de grado n que se escriben como*

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n P_{n-i}^n x^{n-i}, \quad P_n^n = 1, \quad P_{n-i}^n > 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^n Q_{n-i}^n x^{n-i}, \quad Q_n^n = 1, \quad Q_{n-i}^n > 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

se cumplen las igualdades

$$V_{4r+1}(x) + U_{4r}(x) = \frac{(x+1)^{2r+1}}{(4r+1)!} p_{2r}(x) \quad (1.1.11)$$

$$V_{4r+1}(x) - U_{4r}(x) = \frac{(x-1)^{2r+1}}{(4r+1)!} p_{2r}(-x) \quad (1.1.12)$$

$$V_{4r+2}(x) + U_{4r+1}(x) = \frac{(x+1)^{2r+2}}{(4r+2)!} q_{2r}(x) \quad (1.1.13)$$

$$V_{4r+2}(x) - U_{4r+1}(x) = \frac{(x-1)^{2r+2}}{(4r+2)!} q_{2r}(-x) \quad (1.1.14)$$

$$V_{4r+3}(x) + U_{4r+2}(x) = \frac{(x+1)^{2r+2}}{(4r+3)!} p_{2r+1}(x) \quad (1.1.15)$$

$$V_{4r+3}(x) - U_{4r+2}(x) = \frac{(x-1)^{2r+2}}{(4r+3)!} (-p_{2r+1}(-x)) \quad (1.1.16)$$

$$V_{4r+4}(x) + U_{4r+3}(x) = \frac{(x+1)^{2r+3}}{(4r+4)!} q_{2r+1}(x) \quad (1.1.17)$$

$$V_{4r+4}(x) - U_{4r+3}(x) = \frac{(x+1)^{2r+3}}{(4r+4)!} (-q_{2r+1}(-x)) \quad (1.1.18)$$

con

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2 + 13x + 16, & p_3(x) &= x^3 + 60x^2 + 297x + 272 \\ q_2(x) &= x^2 + 28x + 61, & q_3(x) &= x^3 + 123x^2 + 1011x + 1385 \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

En consecuencia, los polinomios U_m y V_{m+1} , $m \geq 4$, son primos relativos.

Demostración

Que las igualdades (1.1.11)-(1.1.18) son ciertas para $r = 1$ es inmediato. Supongamos que se cumplen para $r = n$. Veamos que se satisfacen para $r = n + 1$.

1.

Hagamos $V_{4(n+1)+1} + U_{4(n+1)} = W_{4n+5}^+$. Por la relación de recurrencia de la proposición 1.1.6 se tiene que

$$W_{4n+5}^+(x) = x(V_{4n+4}(x) + U_{4n+3}(x)) + \frac{1-x^2}{4n+5} (V'_{4n+4}(x) + U'_{4n+3}(x))$$

Aplicando la hipótesis de inducción, por (1.1.17) podemos escribir

$$\begin{aligned} W_{4n+5}^+(x) &= x \frac{(x+1)^{2n+3}}{(4n+4)!} q_{2n+1}(x) + \\ &\quad \frac{1-x^2}{4n+5} \left[\frac{(2n+3)(x+1)^{2n+2}}{(4n+4)!} q_{2n+1}(x) + \frac{(x+1)^{2n+3}}{(4n+4)!} q'_{2n+1}(x) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(x+1)^{2n+3}}{(4n+5)!} \left\{ [(2n+2)x + (2n+3)] q_{2n+1}(x) + (1-x^2) q'_{2n+1}(x) \right\}$$

Como q_{2n+1} es un polinomio de grado $2n+1$ y $(1-x^2) q'_{2n+1}$ lo es de grado $2n+2$, consideremos el polinomio

$$p_{2n+2}(x) = [(2n+2)x + (2n+3)] q_{2n+1}(x) + (1-x^2) q'_{2n+1}(x) \quad (1.1.20)$$

Al ser

$$q_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} Q_{2n+1-i}^{2n+1} x^{2n+1-i}, \quad Q_{2n+1}^{2n+1} = 1, \quad Q_{2k+1-i} > 0, \quad 1 \leq i \leq 2n+1,$$

se tiene que

$$p_{2n+2}(x) = \sum_{i=0}^{2n+2} P_{2n+2-i}^{2n+2} x^{2n+2-i}$$

con

$$\begin{aligned} P_{2n+2}^{2n+2} &= Q_{2n+1}^{2n+1} = 1 \\ P_{2n+1}^{2n+2} &= 2Q_{2n}^{2n+1} + (2n+3)Q_{2n+1}^{2n+1} \\ P_{2n+1-i}^{2n+2} &= (i+2)Q_{2n-i}^{2n+1} + (2n+3)Q_{2n-i+1}^{2n+1} + (2n+2-i)Q_{2n-i+2}^{2n+1}, \quad 1 \leq i \leq 2n \\ P_0^{2n+2} &= (2n+3)Q_0^{2n+1} + Q_1^{2n+1} \end{aligned}$$

En consecuencia, p_{2n+2} es un polinomio de grado $2n+2$ y tiene coeficiente director unidad y el resto de los coeficientes positivos, lo que prueba que (1.1.11) es cierta para $r = n+1$.

2.

En lo que se refiere a (1.1.12), sea $V_{4(n+1)+1} - U_{4(n+1)} = W_{4n+5}^-$. Se cumple, por la proposición 1.1.6 y (1.1.18) para $r = n$, que

$$W_{4n+5}^- = \frac{(x-1)^{2n+3}}{(4n+5)!} \left\{ [(2n+2)(-x) + (2n+3)] q_{2n+1}(-x) + (1-x^2) q'_{2n+1}(x) \right\}$$

Entonces, por (1.1.20), se tiene que

$$W_{4n+5}^- = p_{2n+2}(-x)$$

y (1.1.12) es cierta para $r = n+1$.

Las restantes expresiones para $r = n + 1$ se prueban de manera similar, por lo que sólo daremos a continuación los resultados necesarios:

3.

La igualdad (1.1.13) para $r = n + 1$ se prueba a partir de la proposición 1.1.6 y de (1.1.11) para $r = n + 1$, que ya ha sido probada, encontrando que

$$V_{4(n+1)+2} + U_{4(n+1)+1} = \frac{(x+1)^{2n+4}}{(4n+6)!} q_{2n+2}(x)$$

donde

$$q_{2n+2}(x) = (2n+3)p_{2n+2}(x) + (1-x)p'_{2n+2}(x) \quad (1.1.21)$$

y, en consecuencia,

$$q_{2n+2}(x) = \sum_{i=0}^{2n+2} Q_{2n+2-i}^{2n+2} x^{2n+2-i}$$

con

$$\begin{aligned} Q_{2n+2}^{2n+2} &= P_{2n+2}^{2n+2} = 1 \\ Q_{2n+1-i}^{2n+2} &= (i+2)P_{2n+1-i}^{2n+2} + (2n+2-i)P_{2n+2-i}^{2n+2}, \quad 0 \leq i \leq 2n+1 \end{aligned}$$

lo que garantiza la positividad de los coeficientes de q_{2n+2} y el que su coeficiente director sea igual a la unidad.

4.

La igualdad (1.1.14) para $r = n + 1$ se obtiene de la ley de recurrencia de la proposición 1.1.6, junto con (1.1.12) para $r = n + 1$, y (1.1.21).

5.

En lo que concierne a (1.1.15) para $r = n + 1$, se verifica, empleando dicha relación de recurrencia y (1.1.13) para $r = n + 1$ (ya probada), que

$$V_{4(n+1)+3} + U_{4(n+1)+2} = \frac{(x+1)^{2n+4}}{(4n+7)!} p_{2n+3}(x)$$

con

$$p_{2n+3}(x) = [(2n+3)x + (2n+4)]q_{2n+2}(x) + (1-x^2)q'_{2n+2}(x) \quad (1.1.22)$$

que, además, se expresa como

$$p_{2n+3}(x) = \sum_{i=0}^{2n+3} P_{2n+3-i}^{2n+3} x^{2n+3-i}$$

siendo

$$\begin{aligned} P_{2n+3}^{2n+3} &= Q_{2n+2}^{2n+2} = 1 \\ P_{2n+2}^{2n+3} &= 2Q_{2n+1}^{2n+2} + (2n+4)Q_{2n+2}^{2n+2} \\ P_{2n+1-i}^{2n+3} &= (i+3)Q_{2n-i}^{2n+2} + (2n+4)Q_{2n-i+1}^{2n+2} + (2n+2-i)Q_{2n-i+2}^{2n+2}, \quad 0 \leq i \leq 2n \\ P_0^{2n+3} &= (2n+4)Q_0^{2n+2} + Q_1^{2n+2} \end{aligned}$$

6.

Para (1.1.16) procedemos de modo similar, a partir de la recurrencia, (1.1.14) para $r = n+1$ (también probada ya) y (1.1.22), encontrando que

$$V_{4(n+1)+3} - U_{4(n+1)+2} = \frac{(x-1)^{2n+4}}{(4n+7)!} (-p_{2n+3}(-x))$$

7.

La penúltima igualdad para $r = n+1$ se demuestra con la relación de recurrencia y (1.1.15) para $r = n+1$, lo que da lugar a

$$V_{4(n+1)+4} + U_{4(n+1)+3} = \frac{(x+1)^{2n+5}}{(4n+8)!} q_{2n+3}(x)$$

siendo

$$q_{2n+3}(x) = (2n+4)p_{2n+3}(x) + (1-x)p'_{2n+3}(x) \quad (1.1.23)$$

por lo que

$$q_{2n+3}(x) = \sum_{i=0}^{2n+3} Q_{2n+3-i}^{2n+3} x^{2n+3-i}$$

con

$$\begin{aligned} Q_{2n+3}^{2n+3} &= P_{2n+3}^{2n+3} = 1 \\ Q_{2n+2-i}^{2n+3} &= (i+2)P_{2n+2-i}^{2n+3} + (2n+3-i)P_{2n+3-i}^{2n+3}, \quad 0 \leq i \leq 2n+2 \end{aligned}$$

8.

Finalizamos señalando que la igualdad (1.1.18) para $r = n+1$ se prueba mediante la recurrencia, (1.1.16) con $r = n+1$ (probada anteriormente) y (1.1.23).

Una vez probadas las igualdades (1.1.11)-(1.1.18), resta demostrar que los polinomios V_{4r+i} y U_{4r+i-1} , $1 \leq i \leq 4$, son primos. Para ello, observemos que, para cada $1 \leq i \leq 4$, los polinomios $V_{4r+i} + U_{4r+i-1}$ y $V_{4r+i} - U_{4r+i-1}$ son productos de potencias de $x + 1$ y $x - 1$, respectivamente, por un mismo polinomio, evaluado en x , en el primer caso, y en $-x$ en el segundo (en (1.1.16) y (1.1.18) interviene, además, un signo menos). Los dos polinomios resultantes no pueden tener ninguna raíz común, pues en ese caso, si α lo fuese, $-\alpha$ también debería serlo, y ello no es posible pues los coeficientes de ambos son positivos. En consecuencia, los polinomios $V_{4r+i} + U_{4r+i-1}$ y $V_{4r+i} - U_{4r+i-1}$ no tienen factores comunes y, por tanto, son primos relativos. Se deduce, pues, que los polinomios U_{4r+i-1} y V_{4r+i} también son primos relativos. \square

En [47] se prueba directamente la exactitud del interpolante asociado a la función fundamental q_k , lo que, de hecho, es una consecuencia del teorema 1.1.2. Como $\hat{q}_k(0) = 1$, pues las trasladadas del B-spline M_k forman una partición de la unidad, y la transformada de Fourier de q_k tiene ceros de orden k en $u = 2\pi n$, $n \neq 0$, la función $\hat{q}_k(u) - 1$ tiene en $u = 0$ un cero de orden k , lo que implica, finalmente, que el interpolante es exacto en \mathbb{P}_{k-1} .

Proposición 1.1.9 *Para cada $k \geq 2$ el interpolante asociado a q_k definido por (1.1.3) satisface (1.1.4), es decir, es exacto en \mathbb{P}_{k-1} .*

1.1.3 Determinación de los coeficientes

Aunque en [47] Qi reduce el problema a probar que un sistema lineal tiene matriz de coeficientes no singular, hay que resolverlo si se pretende utilizar esa vía para hallar los coeficientes de la combinación lineal que proporciona la función fundamental, lo que obliga a calcular el valor que el B-spline toma en los puntos de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. El procedimiento que hemos desarrollado evita el cálculo de dichos valores, pues toda la información relevante es retenida por la transformada de Fourier del B-spline y se refleja en los polinomios U_{k-1} y V_{k-1} , y conduce a dos sistemas triangulares superiores, como vamos a probar.

Las igualdades (1.1.9) y (1.1.10) proporcionan información acerca de la estructura de los polinomios A_{k-2} , B_{k-3} , \tilde{A}_{k-2} y \tilde{B}_{k-3} ,

Supongamos que k es par, concretamente, que $k = 2m$, $m \geq 1$. En este caso

$$A_{2m-2}(x) = \gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{2m,p}} \gamma_j T_j(x) = \gamma_0 + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \gamma_{2r} T_{2r}(x). \quad (1.1.24)$$

Los polinomios T_{2r} , $0 \leq r \leq m-1$, se pueden escribir como

$$T_{2r}(x) = \sum_{i=0}^r t_{2i}^{2r} x^{2i}, \quad (1.1.25)$$

determinándose los valores $\{t_{2i}^{2r}\}_{0 \leq i \leq m-1}$ mediante la relación de recurrencia satisfecha por los polinomios de Chebychev. Las igualdades (1.1.24) y (1.1.25) conducen a la representación

$$A_{2m-2}(x) = \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_{2j} t_0^{2j} \right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{j=i}^{m-1} \gamma_{2j} t_{2i}^{2j} \right) x^{2i}$$

Por otra parte, A_{2m-2} será conocido gracias a la aplicación del teorema de Bezout, y admitirá un desarrollo del tipo

$$A_{2m-2}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} A_{2i}^{2m-2} x^{2i}$$

Igualando los coeficientes de las dos expresiones de A_{2m-2} , podemos escribir el siguiente sistema lineal para los coeficientes γ_j :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2t_0^2 & 2t_0^4 & \cdots & 2t_0^{2m-6} & 2t_0^{2m-4} & 2t_0^{2m-2} \\ 0 & 2t_2^2 & 2t_2^4 & \cdots & 2t_2^{2m-6} & 2t_2^{2m-4} & 2t_2^{2m-2} \\ & 0 & 2t_4^4 & \cdots & 2t_4^{2m-6} & 2t_4^{2m-4} & 2t_4^{2m-2} \\ & & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 2t_{2m-6}^{2m-6} & 2t_{2m-6}^{2m-4} & 2t_{2m-6}^{2m-2} \\ & & & & 0 & 2t_{2m-4}^{2m-4} & 2t_{2m-4}^{2m-2} \\ & & & & & 0 & 2t_{2m-2}^{2m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_2 \\ \gamma_4 \\ \vdots \\ \gamma_{2m-6} \\ \gamma_{2m-4} \\ \gamma_{2m-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{2m-2} \\ A_2^{2m-2} \\ A_4^{2m-2} \\ \vdots \\ A_{2m-6}^{2m-2} \\ A_{2m-4}^{2m-2} \\ A_{2m-2}^{2m-2} \end{bmatrix}$$

En lo que se refiere a los coeficientes de índice impar, si los polinomios de Chebychev T_{2r+1} , $0 \leq r \leq m-2$, los representamos por

$$T_{2r+1}(x) = \sum_{i=0}^r t_{2i+1}^{2r+1} x^{2i+1},$$

y el polinomio $B_{2m-3}(x) = 2 \sum_{j \in J_{2m,i}} \gamma_j T_j(x)$ se escribe como

$$B_{2m-3}(x) = \sum_{i=0}^{m-2} B_{2i+1}^{2m-3} x^{2i+1},$$

un procedimiento similar al anterior conduce al sistema

$$\begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^3 & t_1^3 & \cdots & t_1^{2m-5} & t_1^{2m-3} \\ 0 & t_3^3 & t_3^5 & \cdots & t_3^{2m-5} & t_3^{2m-3} \\ & 0 & t_5^5 & \cdots & t_5^{2m-5} & t_5^{2m-3} \\ & & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & t_{2m-5}^{2m-5} & t_{2m-5}^{2m-3} \\ & & & & 0 & t_{2m-3}^{2m-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \\ \vdots \\ \gamma_{2m-5} \\ \gamma_{2m-3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_1^{2m-3} \\ B_3^{2m-3} \\ B_5^{2m-3} \\ \vdots \\ B_{2m-5}^{2m-3} \\ B_{2m-3}^{2m-3} \end{bmatrix}$$

El caso k impar lleva a resultados análogos para \tilde{A}_{k-2} y \tilde{B}_{k-3} , pero "intercambiados". Veámoslo.

Supongamos que $k = 2m + 1$, $m \geq 1$. Entonces debe cumplirse la igualdad

$$\tilde{A}_{2m-1}U_{2m-1} + \tilde{B}_{2m-2}V_{2m} = 1,$$

donde

$$\tilde{A}_{2m-1} = 2 \sum_{j \in J_{2m+1,i}} \gamma_j T_j$$

y

$$\tilde{B}_{2m-2} = \gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{2m+1,p}} \gamma_j T_j.$$

Entonces, A_{2m-1} requiere la intervención de los polinomios T_{2j-1} , $1 \leq j \leq m$, y B_{2m-2} la de T_{2j} , $1 \leq j \leq m-1$. Un tratamiento totalmente análogo al del caso par conduce a los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2t_0^2 & 2t_0^4 & \cdots & 2t_0^{2m-6} & 2t_0^{2m-4} & 2t_0^{2m-2} \\ 0 & 2t_2^2 & 2t_2^4 & \cdots & 2t_2^{2m-6} & 2t_2^{2m-4} & 2t_2^{2m-2} \\ & 0 & 2t_4^4 & \cdots & 2t_4^{2m-6} & 2t_4^{2m-4} & 2t_4^{2m-2} \\ & & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & 2t_{2m-6}^{2m-6} & 2t_{2m-6}^{2m-4} & 2t_{2m-6}^{2m-2} \\ & & & & 0 & 2t_{2m-4}^{2m-4} & 2t_{2m-4}^{2m-2} \\ & & & & & 0 & 2t_{2m-2}^{2m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_2 \\ \gamma_4 \\ \vdots \\ \gamma_{2m-6} \\ \gamma_{2m-4} \\ \gamma_{2m-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_0^{2m-2} \\ \tilde{B}_2^{2m-2} \\ \tilde{B}_4^{2m-2} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{2m-6}^{2m-2} \\ \tilde{B}_{2m-4}^{2m-2} \\ \tilde{B}_{2m-2}^{2m-2} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^3 & t_1^3 & \cdots & t_1^{2m-3} & t_1^{2m-1} \\ 0 & t_3^3 & t_3^5 & \cdots & t_3^{2m-3} & t_3^{2m-1} \\ & 0 & t_5^5 & \cdots & t_5^{2m-3} & t_5^{2m-1} \\ & & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & t_{2m-3}^{2m-3} & t_{2m-3}^{2m-1} \\ & & & & 0 & t_{2m-1}^{2m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \\ \vdots \\ \gamma_{2m-3} \\ \gamma_{2m-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^{2m-1} \\ \tilde{A}_3^{2m-1} \\ \tilde{A}_5^{2m-1} \\ \vdots \\ \tilde{A}_{2m-3}^{2m-1} \\ \tilde{A}_{2m-1}^{2m-1} \end{bmatrix}$$

1.1.4 Ejemplos

En primer lugar, damos las expresiones explícitas de los polinomios U_k , $0 \leq k \leq 14$, y V_k , $0 \leq k \leq 15$, en las tablas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, respectivamente. Es suficiente con indicar los coeficientes no nulos de los mismos, dado que conocemos la paridad de los polinomios que intervienen en cada uno de los casos considerados.

$2r$	U_{2r}
0	$\{1\}$
2	$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$
4	$\left\{\frac{2}{15}, \frac{11}{15}, \frac{2}{15}\right\}$
6	$\left\{\frac{17}{315}, \frac{4}{7}, \frac{38}{105}, \frac{4}{315}\right\}$
8	$\left\{\frac{62}{2835}, \frac{1072}{2835}, \frac{484}{945}, \frac{247}{2835}, \frac{2}{2835}\right\}$
10	$\left\{\frac{1382}{155925}, \frac{35396}{155925}, \frac{83021}{155925}, \frac{34096}{155925}, \frac{2026}{155925}, \frac{4}{155925}\right\}$
12	$\left\{\frac{21844}{6081075}, \frac{258887}{2027025}, \frac{16976}{36855}, \frac{424772}{1216215}, \frac{4660}{81081}, \frac{2722}{2027025}, \frac{4}{6081075}\right\}$
14	$\left\{\frac{929569}{638512875}, \frac{43800104}{638512875}, \frac{6819044}{19348875}, \frac{54604376}{127702575}, \frac{17790298}{127702575}, \frac{203512}{19348875}, \frac{65476}{638512875}, \frac{8}{638512875}\right\}$

Tabla 1.1: Polinomios U_{2r} , $0 \leq r \leq 7$

En el desarrollo que hemos efectuado intervienen los polinomios de Chebychev, de los que incluimos hasta el grado 12 en la tabla 1.5, por ser los que vamos a utilizar en los ejemplos de esta sección.

Detallamos el proceso constructivo de las funciones fundamentales hasta $k = 6$; para $7 \leq k \leq 12$ indicamos sólo los diferentes elementos que intervienen en la determinación de las mismas. Se trata, en consecuencia, de recoger un número suficiente de casos para, con un moderado esfuerzo de computación posterior, poder encontrar el valor exacto de la constante de Lebesgue del operador de interpolación.

Para explicitar las diferentes funciones fundamentales indicaremos sus B-coeficientes ([19]). En lo que respecta a los de los B-splines que intervienen en aquéllas, los daremos en forma de matriz: la fila i -ésima corresponde a los B-coeficientes en el i -ésimo intervalo del soporte (de izquierda a derecha); para las funciones fundamentales operamos de igual modo, pero especificando los B-coeficientes en cada uno de los subintervalos en que se divide cada intervalo de los citados anteriormente y haciendo uso de dos matrices.

$2r - 1$	U_{2r-1}
1	$\{1\}$
3	$\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$
5	$\left\{\frac{17}{45}, \frac{26}{45}, \frac{2}{45}\right\}$
7	$\left\{\frac{62}{315}, \frac{64}{105}, \frac{4}{21}, \frac{1}{315}\right\}$
9	$\left\{\frac{1382}{14175}, \frac{7192}{14175}, \frac{1699}{4725}, \frac{502}{14175}, \frac{2}{14175}\right\}$
11	$\left\{\frac{21844}{467775}, \frac{171511}{467775}, \frac{217186}{467775}, \frac{55196}{467775}, \frac{2036}{467775}, \frac{2}{467775}\right\}$
13	$\left\{\frac{929569}{42567525}, \frac{3420682}{14189175}, \frac{1358452}{2837835}, \frac{1978688}{8513505}, \frac{6602}{257985}, \frac{5452}{14189175}, \frac{4}{42567525}\right\}$

Tabla 1.2: Polinomios U_{2r-1} , $1 \leq r \leq 7$.

$2r$	V_{2r}
0	$\{1\}$
2	$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
4	$\left\{\frac{5}{24}, \frac{3}{4}, \frac{1}{24}\right\}$
6	$\left\{\frac{61}{720}, \frac{479}{720}, \frac{179}{720}, \frac{1}{720}\right\}$
8	$\left\{\frac{277}{8064}, \frac{4757}{10080}, \frac{29}{64}, \frac{409}{10080}, \frac{1}{40320}\right\}$
10	$\left\{\frac{50521}{3628800}, \frac{357839}{1209600}, \frac{974881}{1814400}, \frac{270121}{1814400}, \frac{4919}{1209600}, \frac{1}{3628800}\right\}$
12	$\left\{\frac{540553}{95800320}, \frac{41056259}{239500800}, \frac{241595239}{479001600}, \frac{149311}{518400}, \frac{14494859}{479001600}, \frac{66427}{239500800}, \frac{1}{479001600}\right\}$
14	$\left\{\frac{199360981}{87178291200}, \frac{1640109743}{17435658240}, \frac{439215949}{1076275200}, \frac{6918230591}{17435658240}, \frac{1647228491}{17435658240}, \frac{41488721}{9686476800}, \frac{239147}{17435658240}, \frac{1}{87178291200}\right\}$

Tabla 1.3: Polinomios V_{2r} , $0 \leq r \leq 7$

$2r - 1$	V_{2r-1}
1	$\{1\}$
3	$\left\{\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right\}$
5	$\left\{\frac{61}{120}, \frac{29}{60}, \frac{1}{120}\right\}$
7	$\left\{\frac{277}{1008}, \frac{1037}{1680}, \frac{181}{1680}, \frac{1}{5040}\right\}$
9	$\left\{\frac{50521}{362880}, \frac{7367}{12960}, \frac{16861}{60480}, \frac{1229}{90720}, \frac{1}{362880}\right\}$
11	$\left\{\frac{540553}{7983360}, \frac{17460701}{39916800}, \frac{8444893}{19958400}, \frac{1409633}{19958400}, \frac{44281}{39916800}, \frac{1}{39916800}\right\}$
13	$\left\{\frac{199360981}{6227020800}, \frac{103867703}{345945600}, \frac{66714163}{138378240}, \frac{54085121}{311351040}, \frac{1640063}{138378240}, \frac{671}{10483200}, \frac{1}{6227020800}\right\}$
15	$\left\{\frac{3878302429}{261534873600}, \frac{248913100771}{1307674368000}, \frac{199629442763}{435891456000}, \frac{75441903247}{261534873600}, \frac{2455479283}{52306974720}, \frac{125422751}{87178291200}, \frac{3587219}{1307674368000}, \frac{1}{1307674368000}\right\}$

Tabla 1.4: Polinomios V_{2r-1} , $1 \leq r \leq 8$

r	T_r
0	1
1	x
2	$-1 + 2x^2$
3	$-3x + 4x^3$
4	$1 - 8x^2 + 8x^4$
5	$5x - 20x^3 + 16x^5$
6	$-1 + 18x^2 - 48x^4 + 32x^6$
7	$-7x + 56x^3 - 112x^5 + 64x^7$
8	$1 - 32x^2 + 160x^4 - 256x^6 + 128x^8$
9	$9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9$
10	$-1 + 50x^2 - 400x^4 + 1120x^6 - 1280x^8 + 512x^{10}$
11	$-11x + 220x^3 - 1232x^5 + 2816x^7 - 2816x^9 + 1024x^{11}$
12	$1 - 72x^2 + 840x^4 - 3584x^6 + 6912x^8 - 6144x^{10} + 2048x^{12}$

Tabla 1.5: Polinomios de Chebyshev

1. Spline cuadrático de Lagrange

En este caso $k = 3$, $I_3 = \{-1, 0, 1\}$, $J_3 = J_{3,i} = \{1\}$.

Los polinomios $U_1(x) = x$ y $V_2(x) = 1$ son primos entre sí, satisfaciéndose la relación

$$\tilde{A}_1(x)U_1(x) + \tilde{B}_0(x)V_2(x) = 1$$

con $\tilde{A}_1(x) = -x$ y $\tilde{B}_0(x) = 2$, lo que conduce a las igualdades

$$\begin{cases} 2 = \tilde{B}_0(x) = \gamma_0 \\ -x = \tilde{A}_1(x) = 2\gamma_1 T_1(x) = 2\gamma_1 x \end{cases}$$

que tienen como solución única $\gamma_0 = 2$ y $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$.

En consecuencia,

$$q_3(x) = -\frac{1}{2}M_3\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2M_3(x) - \frac{1}{2}M_3\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Los B-coeficientes del B-spline M_3 se indican a continuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Su gráfica se indica en la fig. 1.1.

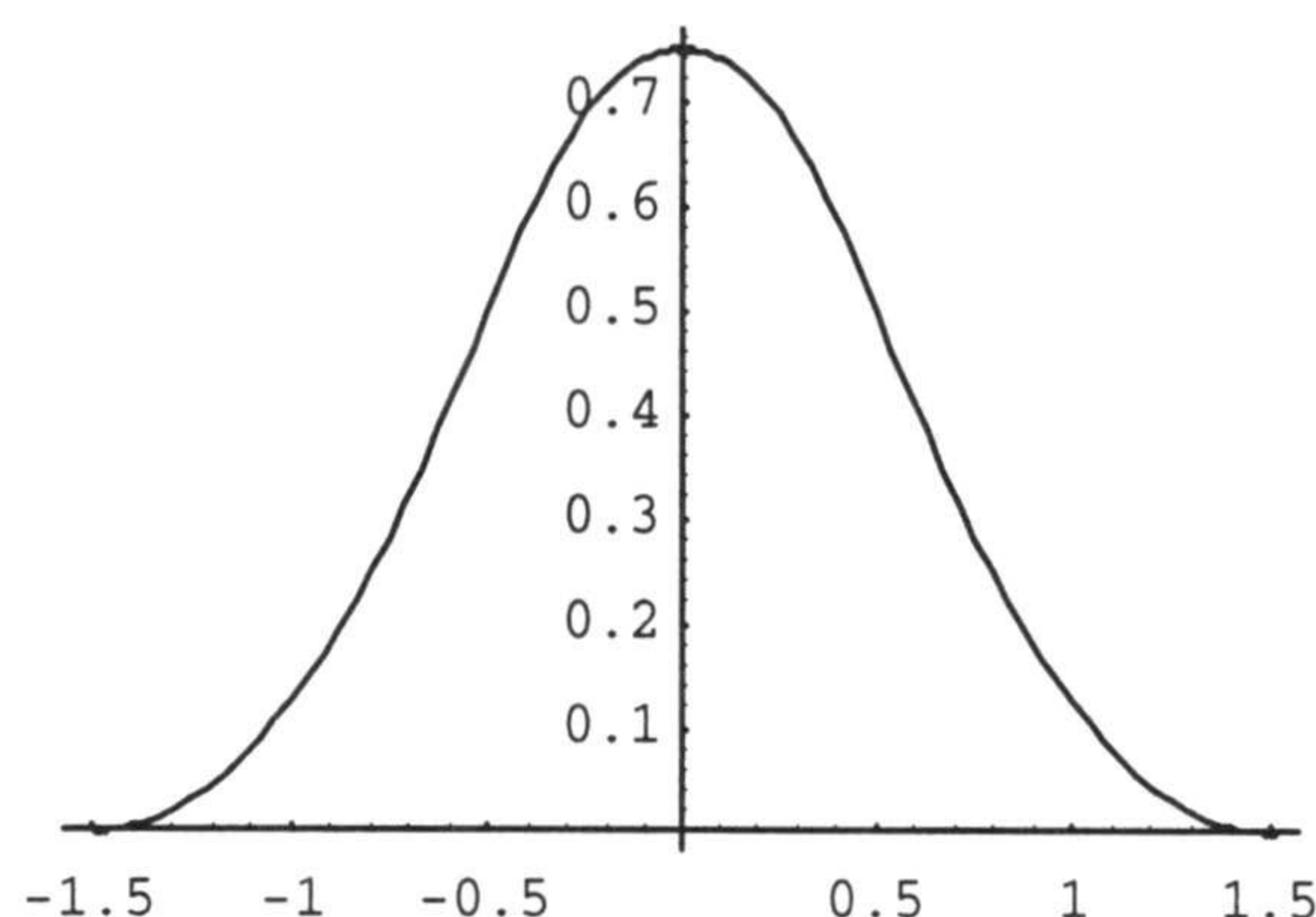
Los B-coeficientes de los seis polinomios obtenidos al subdividir por el punto medio los que determinan M_3 son los siguientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Indicamos seguidamente los B-coeficientes de la función fundamental de este problema de interpolación.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{9}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Su gráfica aparece en la fig. 1.2

Figura 1.1: Gráfica del B-spline M_3 .

2. Spline cúbico de Lagrange

Ahora $k = 4$, $I_4 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $J_4 = \{1, 2\}$, $J_{4,i} = \{1\}$ y $J_{4,p} = \{2\}$. Además, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $U_2(x) = \frac{1}{3}(1 + 2x^2)$ y $V_3(x) = \frac{1}{6}(5x + x^3)$. Los polinomios U_2 y V_3 son primos entre sí, cumpliéndose la igualdad

$$A_2(x)U_2(x) + B_1(x)V_3(x) = 1$$

con $A_2(x) = \frac{1}{3}(9 + 2x^2)$ y $B_1(x) = -\frac{8}{3}x$, lo que permite escribir las identidades

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(9 + 2x^2) = A_2(x) = \gamma_0 + 2\gamma_2 T_2(x) = 4\gamma_2 x^2 + (\gamma_0 - 2\gamma_2) \\ -\frac{8}{3}x = B_1(x) = 2\gamma_1 T_1(x) = 2\gamma_1 x \end{cases}$$

que son satisfechas por los valores $\gamma_0 = \frac{10}{3}$, $\gamma_1 = -\frac{4}{3}$ y $\gamma_2 = \frac{1}{6}$. Encontramos, por tanto, que el spline cúbico de Lagrange es

$$q_4(x) = \frac{1}{6}M_4(x+1) - \frac{4}{3}M_4\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{3}M_4(x) - \frac{4}{3}M_4\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}M_4(x-1)$$

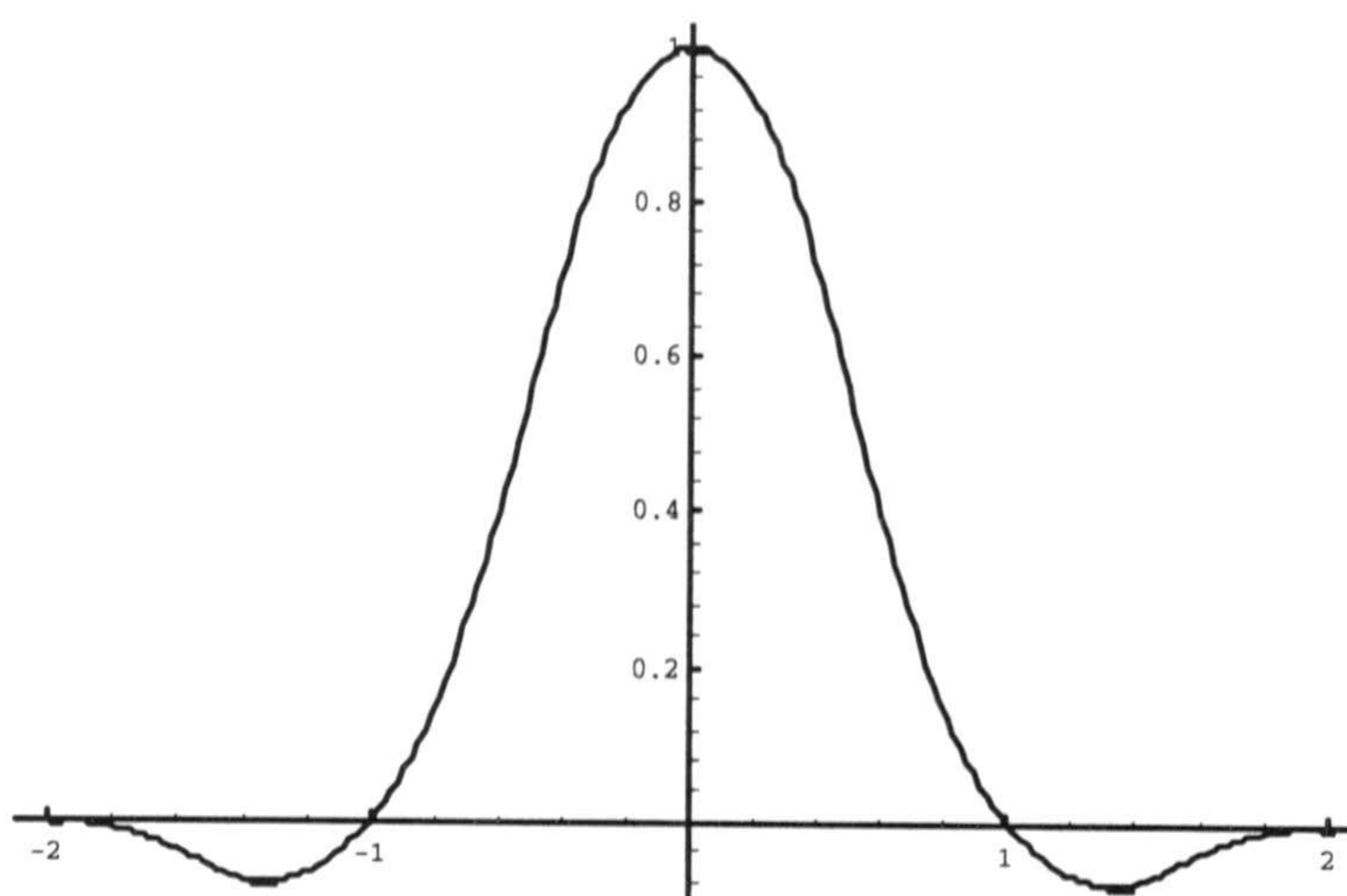


Figura 1.2: Gráfica de la función fundamental q_3 .

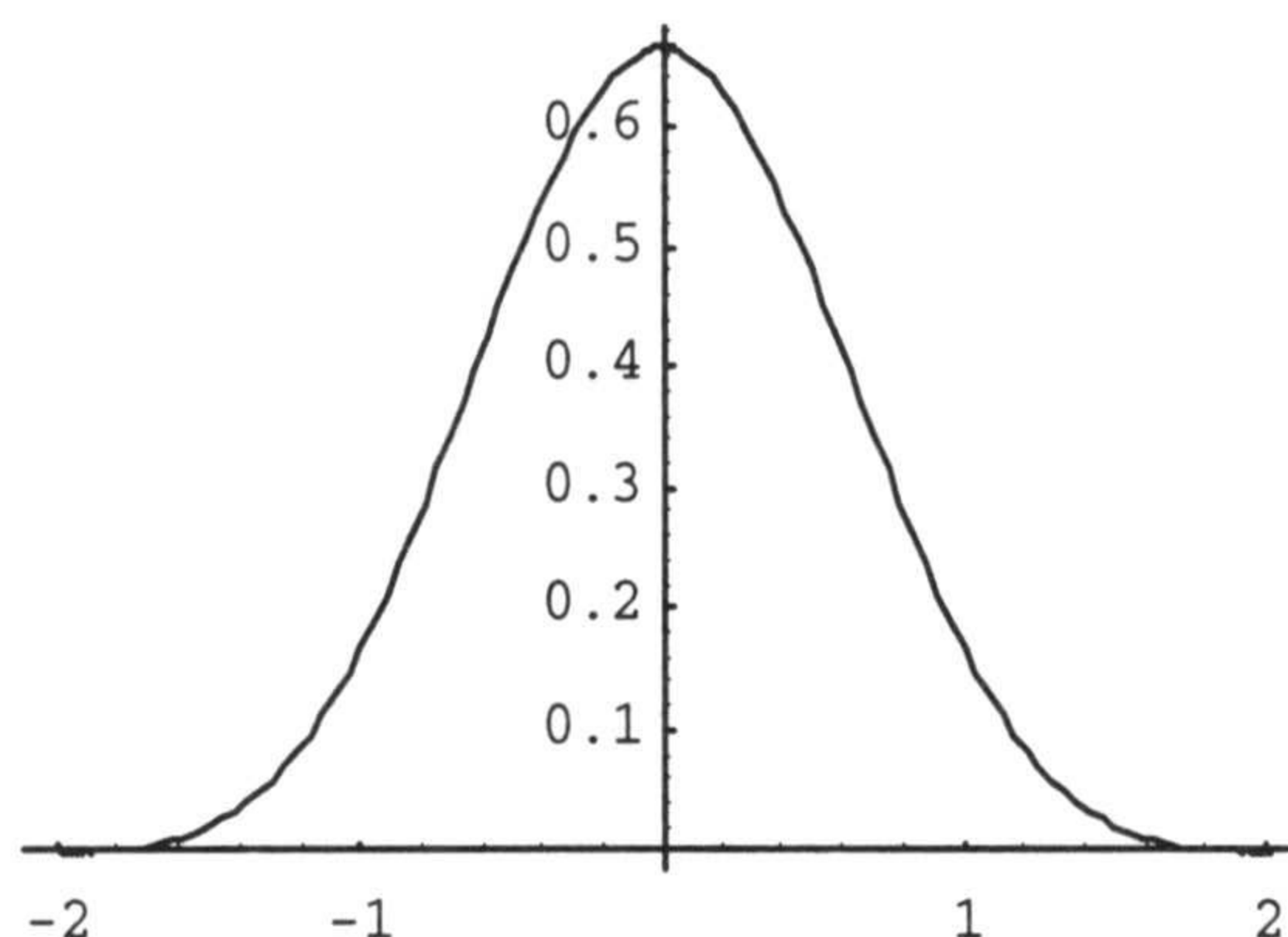
Los B-coeficientes de M_4 son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y en la fig. 1.3 aparece su gráfica.

Subdividiendo por el punto medio, los B-coeficientes son

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{23}{48} & \frac{23}{48} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{12} & \frac{23}{48} & \frac{23}{48} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & \frac{1}{48} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Figura 1.3: Gráfica del B-spline centrado M_4 .

La función fundamental tiene los B-coeficientes que aparecen en las matrices

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{288} & \frac{1}{288} & \frac{1}{144} & \frac{1}{72} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{72} & -\frac{7}{144} & -\frac{7}{96} & -\frac{7}{96} & -\frac{7}{72} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{25}{72} & \frac{41}{72} & \frac{41}{72} & \frac{19}{24} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{19}{24} & \frac{41}{72} & \frac{41}{72} & \frac{25}{72} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{7}{72} & -\frac{7}{96} & -\frac{7}{96} & -\frac{7}{144} & -\frac{1}{72} & 0 \\ 0 & \frac{1}{72} & \frac{1}{144} & \frac{1}{288} & \frac{1}{288} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y su gráfica se representa en la fig. 1.4

3. Spline cuártico de Lagrange

Los parámetros son $k = 5$, $I_5 = \{i : -3 \leq i \leq 3\}$, $J_5 = \{1, 2, 3\}$, $J_{5,p} = \{2\}$, $J_{5,i} = \{1, 3\}$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $U_3(x) = \frac{1}{3}(2x + x^3)$ y $V_4(x) = \frac{1}{24}(5 + 18x^2 + x^4)$. Los polinomios U_3 y V_4 son primos entre sí y cumplen la identidad

$$\tilde{A}_3(x)U_3(x) + \tilde{B}_2(x)V_4(x) = 1$$

con $\tilde{A}_3(x) = -\frac{x}{45}(283 + 16x^2)$ y $\tilde{B}_2(x) = \frac{8}{45}(27 + 16x^2)$. Por tanto, se

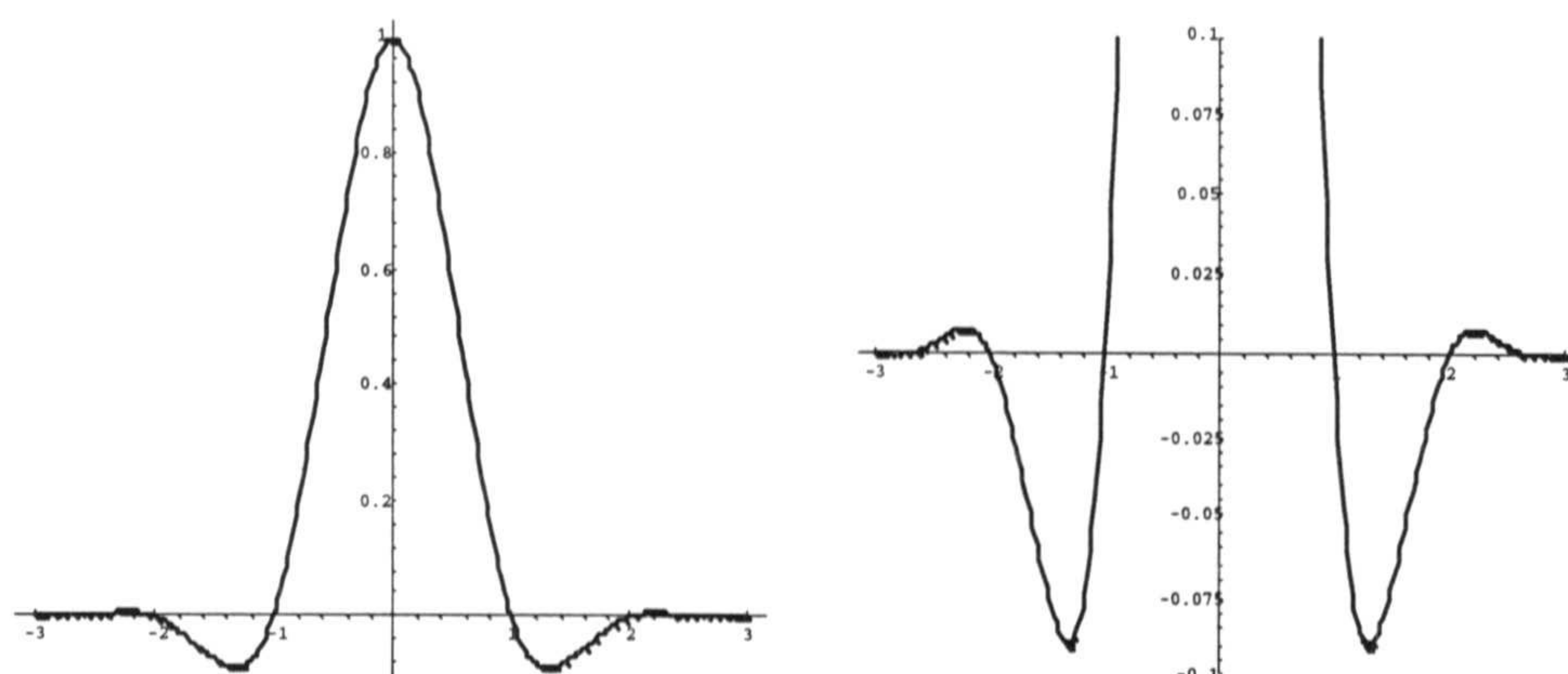


Figura 1.4: Gráfica de la función fundamental q_4 y un detalle de la misma.

dispone de las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{x}{45} (283 + 16x^2) = \tilde{A}_3(x) = 2\gamma_1 T_1(x) + 2\gamma_3 T_3(x) \\ \qquad \qquad \qquad = (2\gamma_1 - 6\gamma_3)x + 8\gamma_3 x^3 \\ \\ \frac{8}{45} (27 + 16x^2) = \tilde{B}_2(x) = \gamma_0 + 2\gamma_2 T_2(x) \\ \qquad \qquad \qquad = (\gamma_0 - 2\gamma_2) + 4\gamma_2 x^2 \end{array} \right.$$

que tienen solución única $\gamma_0 = \frac{56}{9}$, $\gamma_1 = -\frac{59}{18}$, $\gamma_2 = \frac{32}{45}$ y $\gamma_3 = -\frac{2}{45}$.

El spline cuártico de Lagrange es

$$q_5(x) = -\frac{2}{45} \left[M_5 \left(x + \frac{3}{2} \right) + M_5 \left(x - \frac{3}{2} \right) \right] + \frac{32}{45} [M_5(x+1) + M_5(x-1)] \\ - \frac{59}{18} \left[M_5 \left(x + \frac{1}{2} \right) + M_5 \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{56}{9} M_5(x)$$

Los B-coeficientes de M_5 los agrupamos en la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{24} \\ \frac{11}{24} & \frac{7}{12} & \frac{2}{3} & \frac{7}{12} & \frac{11}{24} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la fig. 1.5 se representa la gráfica de M_5 .

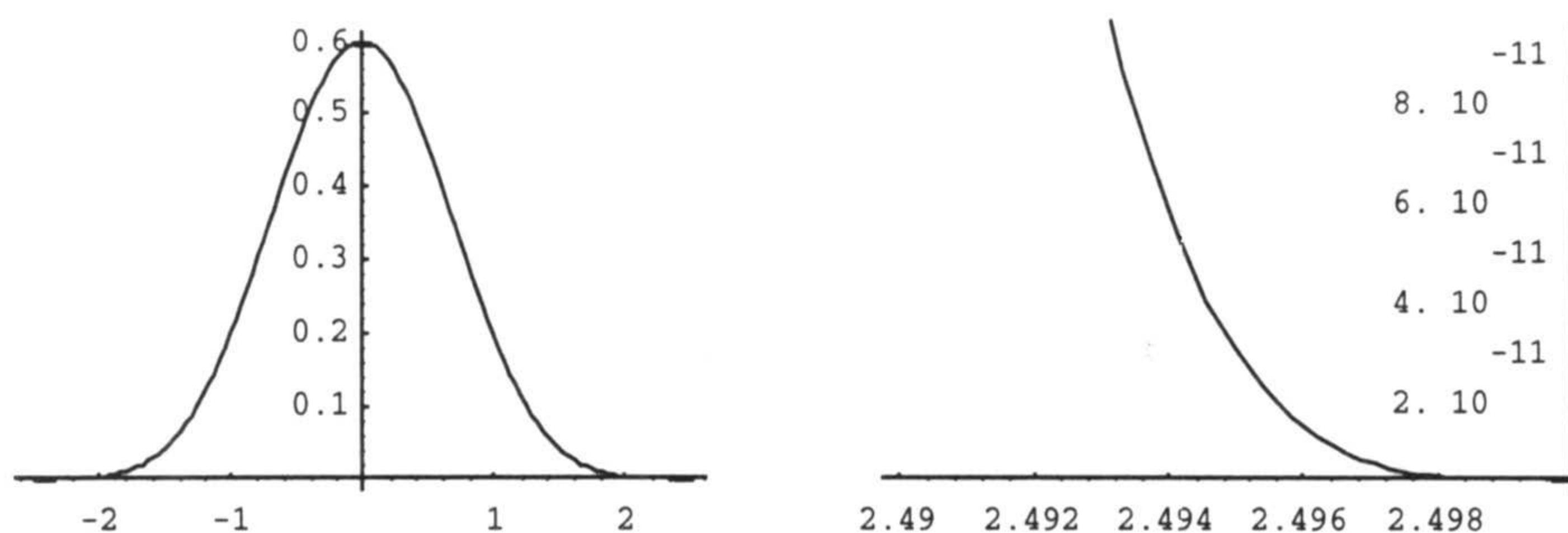


Figura 1.5: El B-spline M_5 y un detalle del mismo.

Al subdividir por el punto medio obtenemos los B-coeficientes

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{384} & \frac{1}{384} & \frac{1}{192} & \frac{1}{96} & \frac{1}{48} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{9}{64} & \frac{19}{96} & \frac{19}{96} & \frac{49}{192} & \frac{31}{96} & \frac{19}{48} & \frac{11}{24} \\ \frac{11}{24} & \frac{25}{48} & \frac{55}{96} & \frac{115}{192} & \frac{115}{192} & \frac{115}{192} & \frac{115}{192} & \frac{55}{96} & \frac{25}{48} & \frac{11}{24} \\ \frac{11}{24} & \frac{19}{48} & \frac{31}{96} & \frac{49}{192} & \frac{19}{96} & \frac{19}{96} & \frac{9}{64} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{48} & \frac{1}{96} & \frac{1}{192} & \frac{1}{384} & \frac{1}{384} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En la siguiente matriz incluimos los B-coeficientes de la función fundamental. La gráfica de la función fundamental, q_5 , aparece en la fig. 1.6.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8640} \\ 0 & \frac{1}{1080} & \frac{7}{2160} & \frac{37}{4320} & \frac{85}{6912} \\ 0 & -\frac{61}{4320} & -\frac{331}{8640} & -\frac{1321}{17280} & -\frac{379}{3840} \\ 0 & \frac{19}{216} & \frac{97}{432} & \frac{713}{1728} & \frac{2027}{3456} \\ 1 & 1 & \frac{265}{288} & \frac{73}{96} & \frac{2027}{3456} \\ 0 & -\frac{19}{216} & -\frac{55}{432} & -\frac{209}{1728} & -\frac{379}{3840} \\ 0 & \frac{61}{4320} & \frac{157}{8640} & \frac{277}{17280} & \frac{85}{6912} \\ 0 & -\frac{1}{1080} & -\frac{1}{2160} & -\frac{1}{4320} & -\frac{1}{8640} \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8640} & -\frac{1}{4320} & -\frac{1}{2160} & -\frac{1}{1080} & 0 \\ \frac{85}{6912} & \frac{277}{17280} & \frac{157}{8640} & \frac{61}{4320} & 0 \\ -\frac{379}{3840} & -\frac{209}{1728} & -\frac{55}{432} & -\frac{19}{216} & 0 \\ \frac{2027}{3456} & \frac{73}{96} & \frac{265}{288} & 1 & 1 \\ \frac{2027}{3456} & \frac{713}{1728} & \frac{97}{432} & \frac{19}{216} & 0 \\ -\frac{379}{3840} & -\frac{1321}{17280} & -\frac{331}{8640} & -\frac{61}{4320} & 0 \\ \frac{85}{6912} & \frac{37}{4320} & \frac{7}{2160} & \frac{1}{1080} & 0 \\ -\frac{1}{8640} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

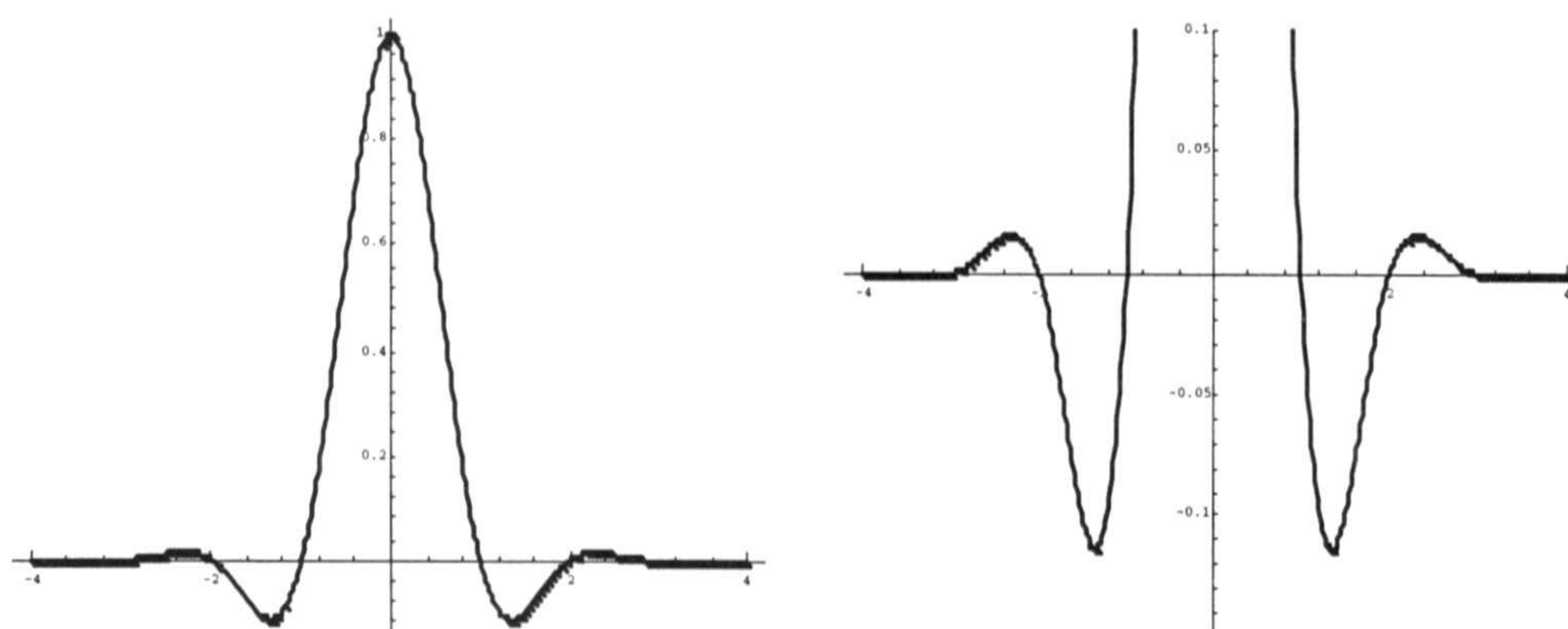


Figura 1.6: La gráfica de q_5 y un detalle de la misma.

4. Spline quintico de Lagrange

En esta ocasión $k = 6$, $I_6 = \{i : -4 \leq i \leq 4\}$, $J_6 = \{1, 2, 3, 4\}$, $J_{6,p} = \{2, 4\}$, $J_{6,i} = \{1, 3\}$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $U_4(x) = \frac{1}{15}(2 + 11x^2 + 2x^4)$ y $V_5(x) = \frac{1}{120}(61x + 58x^3 + x^5)$. Los polinomios U_4 y V_5 son primos entre sí y cumplen la identidad

$$A_4(x)U_4(x) + B_3(x)V_5(x) = 1$$

con $A_4(x) = \frac{1}{390}(2925 + 3524x^2 + 61x^4)$ y $B_3(x) = -\frac{4}{195}(643x + 122x^3)$. Las

igualdades que se obtienen son

$$\begin{cases} \frac{1}{390} (2925 + 3524x^2 + 61x^4) = A_4(x) = \gamma_0 + 2\gamma_2 T_2(x) + 2\gamma_4 T_4(x) \\ -\frac{4}{195} (643x + 122x^3) = B_2(x) = 2\gamma_1 T_1(x) + 2\gamma_3 T_3(x) \end{cases}$$

Dan lugar dos sistemas lineales cuyas soluciones dan los siguientes valores: $\gamma_0 = \frac{37679}{3120}$, $\gamma_1 = -\frac{113}{15}$, $\gamma_2 = \frac{239}{104}$, $\gamma_3 = -\frac{61}{195}$ y $\gamma_4 = \frac{61}{6240}$.

La función fundamental de Lagrange es

$$\begin{aligned} q_6(x) = & \frac{61}{6240} [M_6(x+4) + M_6(x-4)] - \frac{61}{195} [M_6(x+\frac{3}{2}) + M_6(x-\frac{3}{2})] \\ & + \frac{239}{104} [M_6(x+1) + M_6(x-1)] - \frac{113}{15} [M_6(x+\frac{1}{2}) + M_6(x-\frac{1}{2})] \\ & + \frac{37679}{3120} M_6(x) \end{aligned}$$

Los B-coeficientes de M_6 son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{13}{60} \\ \frac{13}{60} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{11}{20} & \frac{11}{20} \\ \frac{11}{20} & \frac{11}{20} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{13}{60} \\ \frac{13}{60} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la fig. 1.7 se muestra la gráfica del B-spline M_6 .

La subdivisión por el punto medio produce los siguientes B-coeficientes, agrupados manteniendo la misma presentación que en el caso precedente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3840} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{80} & \frac{3}{160} & \frac{9}{320} & \frac{27}{640} & \frac{79}{1280} \\ \frac{13}{60} & \frac{31}{120} & \frac{73}{240} & \frac{169}{480} & \frac{191}{480} & \frac{841}{1920} \\ \frac{11}{20} & \frac{11}{20} & \frac{43}{80} & \frac{41}{80} & \frac{153}{320} & \frac{841}{1920} \\ \frac{13}{60} & \frac{7}{40} & \frac{11}{80} & \frac{17}{160} & \frac{13}{160} & \frac{79}{1280} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{240} & \frac{1}{480} & \frac{1}{960} & \frac{1}{1920} & \frac{1}{3840} \end{pmatrix}$$

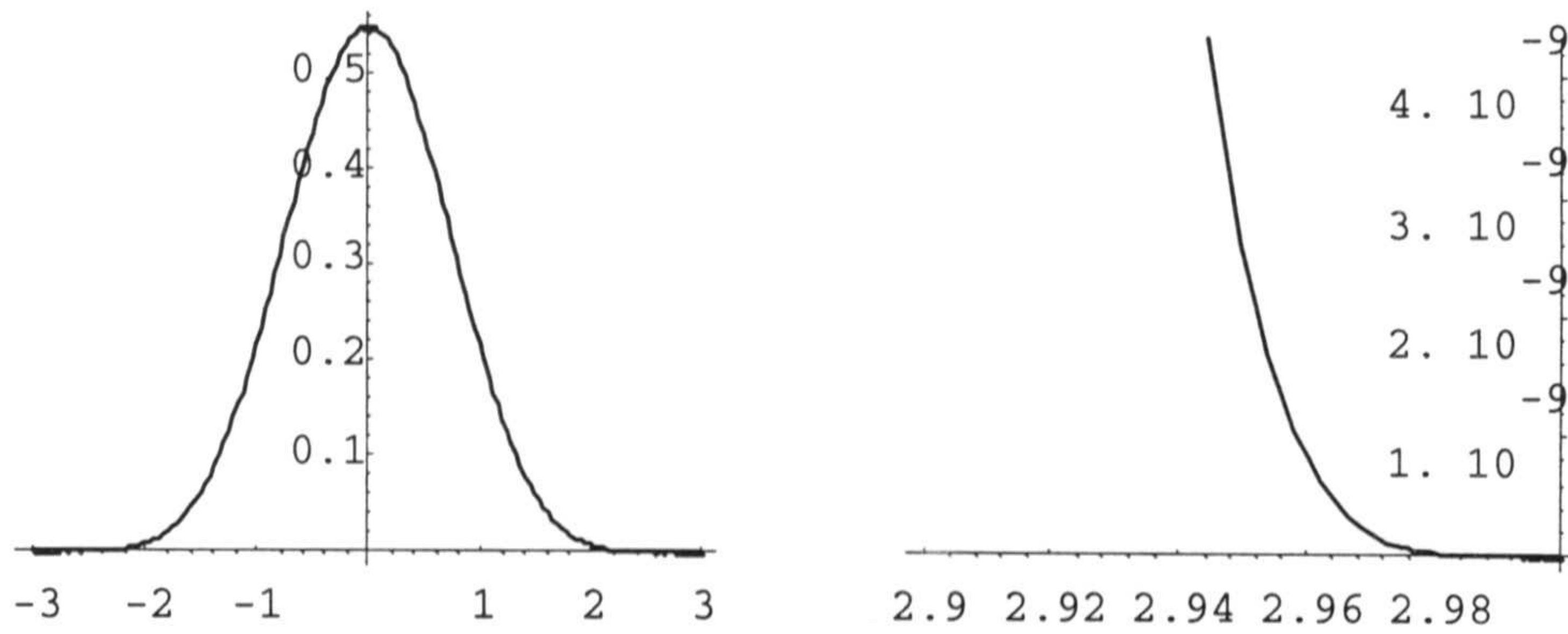


Figura 1.7: Gráfica del B-spline M_6 y detalle de la misma.

$\frac{1}{3840}$	$\frac{1}{1920}$	$\frac{1}{960}$	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{120}$
$\frac{79}{1280}$	$\frac{13}{160}$	$\frac{17}{160}$	$\frac{11}{80}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{13}{60}$
$\frac{841}{1920}$	$\frac{153}{320}$	$\frac{41}{80}$	$\frac{43}{80}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{11}{20}$
$\frac{841}{1920}$	$\frac{191}{480}$	$\frac{169}{480}$	$\frac{73}{240}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{13}{60}$
$\frac{79}{1280}$	$\frac{27}{640}$	$\frac{9}{320}$	$\frac{3}{160}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{120}$
$\frac{1}{3840}$	0	0	0	0	0

Los B-coeficientes de la función fundamental se indican a continuación en la misma forma:

0	0	0	0	0	$\frac{61}{23961600}$
0	$-\frac{61}{1497600}$	$-\frac{427}{2995200}$	$-\frac{2257}{5990400}$	$-\frac{427}{479232}$	$-\frac{33667}{23961600}$
0	$\frac{159}{83200}$	$\frac{497}{99840}$	$\frac{9353}{998400}$	$\frac{3671}{249600}$	$\frac{22411}{1198080}$
0	$-\frac{11659}{748800}$	$-\frac{3547}{93600}$	$-\frac{15181}{230400}$	$-\frac{279077}{2995200}$	$-\frac{660217}{5990400}$
0	$\frac{56587}{748800}$	$\frac{271417}{1497600}$	$\frac{942307}{2995200}$	$\frac{26393}{57600}$	$\frac{7103527}{11980800}$
1	1	$\frac{94961}{99840}$	$\frac{28401}{33280}$	$\frac{96859}{133120}$	$\frac{7103527}{11980800}$
0	$-\frac{56587}{748800}$	$-\frac{181279}{1497600}$	$-\frac{30883}{230400}$	$-\frac{19057}{149760}$	$-\frac{660217}{5990400}$
0	$\frac{11659}{748800}$	$\frac{913}{37440}$	$\frac{75961}{2995200}$	$\frac{5231}{230400}$	$\frac{22411}{1198080}$
0	$-\frac{159}{83200}$	$-\frac{1331}{499200}$	$-\frac{2429}{998400}$	$-\frac{479}{249600}$	$-\frac{33667}{23961600}$
0	$\frac{61}{1497600}$	$\frac{61}{2995200}$	$\frac{61}{5990400}$	$\frac{61}{11980800}$	$\frac{61}{23961600}$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \frac{61}{23961600} & \frac{61}{11980800} & \frac{61}{5990400} & \frac{61}{2995200} & \frac{61}{1497600} & 0 \\ -\frac{33667}{23961600} & -\frac{479}{249600} & -\frac{2429}{998400} & -\frac{1331}{499200} & -\frac{159}{83200} & 0 \\ \frac{22411}{1198080} & \frac{5231}{230400} & \frac{75961}{2995200} & \frac{913}{37440} & \frac{11659}{748800} & 0 \\ -\frac{660217}{5990400} & -\frac{19057}{149760} & -\frac{30883}{230400} & -\frac{181279}{1497600} & -\frac{56587}{748800} & 0 \\ \frac{7103527}{11980800} & \frac{96859}{133120} & \frac{28401}{33280} & \frac{94961}{99840} & 1 & 1 \\ \frac{7103527}{11980800} & \frac{26393}{57600} & \frac{942307}{2995200} & \frac{271417}{1497600} & \frac{56587}{748800} & 0 \\ -\frac{660217}{5990400} & -\frac{279077}{2995200} & -\frac{15181}{230400} & -\frac{3547}{93600} & -\frac{11659}{748800} & 0 \\ \frac{22411}{1198080} & \frac{3671}{249600} & \frac{9353}{998400} & \frac{497}{99840} & \frac{159}{83200} & 0 \\ -\frac{33667}{23961600} & -\frac{427}{479232} & -\frac{2257}{5990400} & -\frac{427}{2995200} & -\frac{61}{1497600} & 0 \\ \frac{61}{23961600} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Su gráfica es típica. La mostramos junto a un detalle en la fig. 1.8.

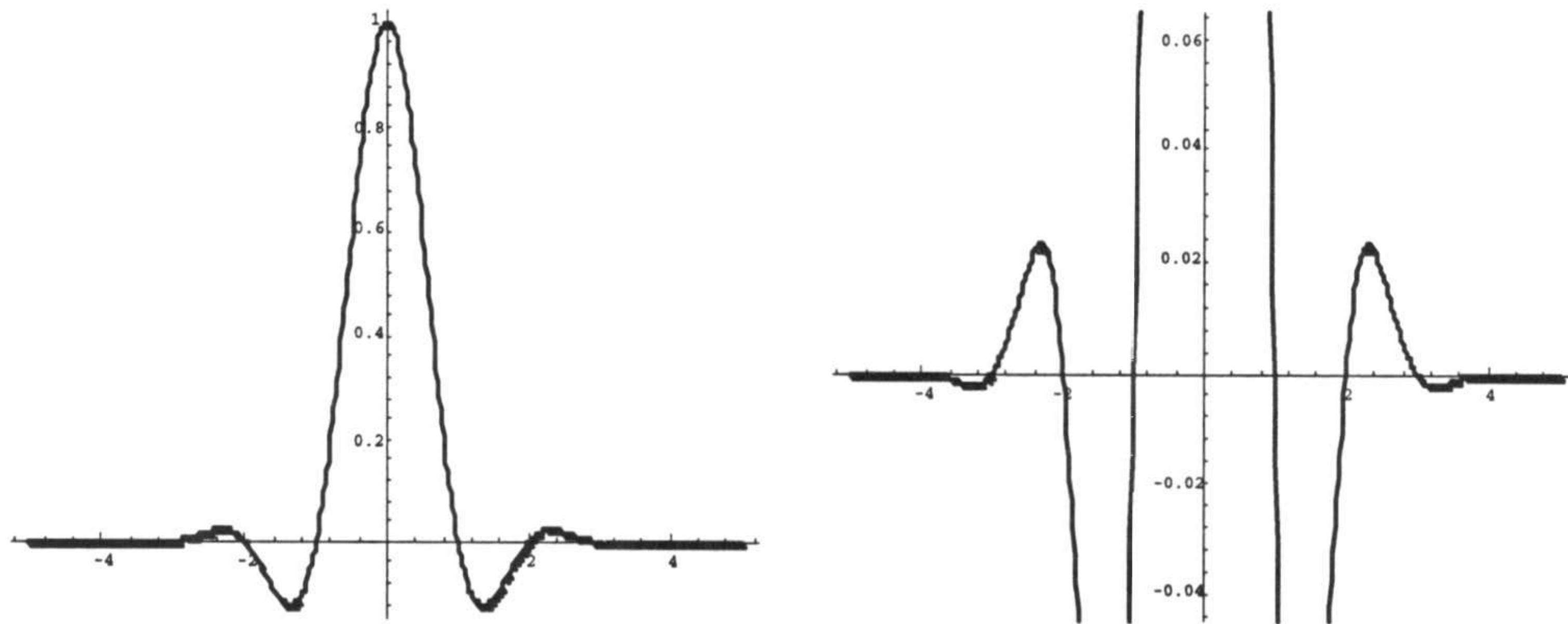


Figura 1.8: Gráfica de q_6 y detalle de la misma.

5. Spline de Lagrange de orden 7

$$k = 7$$

$$I_7 = \{i : -5 \leq i \leq 5\}, J_7 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, J_{7,p} = \{2, 4\}, J_{7,i} = \{1, 3, 5\}$$

$$\tilde{A}_5(x) = -\frac{x}{57645} (1508881 + 603873x^2 + 3377x^4)$$

$$\tilde{B}_4(x) = \frac{16}{57645} (42525 + 86582x^2 + 6754x^4)$$

Los valores de los coeficientes de la combinación lineal que proporciona el spline de Lagrange son

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{40388}{1647} & \gamma_1 &= -\frac{748151}{43920} \\ \gamma_2 &= \frac{124448}{19215} & \gamma_3 &= -\frac{2432377}{1844640} \\ \gamma_4 &= \frac{6754}{57645} & \gamma_5 &= -\frac{3377}{1844640} \end{aligned}$$

6. Spline de Lagrange de orden 8

$$k = 8$$

$$I_8 = \{i : -6 \leq i \leq 6\}, J_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, J_{8,p} = \{2, 4, 6\}, J_{8,i} = \{1, 3, 5\}$$

$$A_6(x) = \frac{1}{70477155} (1305900225 + 4075433800x^2 + 730095610x^4 + 1344928x^6)$$

$$B_5(x) = -\frac{64}{70477155} (54935815 + 38130154x^2 + 1344928x^4)$$

Los coeficientes γ_j son los siguientes:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{2894258615}{56381724} & \gamma_1 &= -\frac{2699968336}{70477155} \\ \gamma_2 &= \frac{240339514}{14095431} & \gamma_3 &= -\frac{6244912}{1381905} \\ \gamma_4 &= \frac{366056501}{563817240} & \gamma_5 &= -\frac{2689856}{70477155} \\ \gamma_6 &= \frac{42029}{140954310} \end{aligned}$$

7. Spline de Lagrange de orden 9

$$k = 9$$

$$I_9 = \{i : -7 \leq i \leq 7\}, J_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, J_{9,p} = \{2, 4, 6\}, J_{9,i} = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\tilde{A}_7(x) = -\frac{x}{6705983025} (620009167855 + 665951528854x^2 + 60312151634x^4 + 36868472x^6)$$

$$\tilde{B}_6(x) = \frac{128}{6705983025} (1525187475 + 6800939446x^2 + 2207439762x^4 + 36868472x^6)$$

Los valores de los coeficientes de la combinación lineal que proporciona el spline de Lagrange son

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{3279626528}{29804369} & \gamma_1 &= -\frac{9257504573699}{107295728400} \\ \gamma_2 &= \frac{15230220464}{352946475} & \gamma_3 &= -\frac{19510266007}{1411785900} \\ \gamma_4 &= \frac{402265328}{149021845} & \gamma_5 &= -\frac{431261939}{1532796120} \\ \gamma_6 &= \frac{73736944}{6705983025} & \gamma_7 &= -\frac{4608559}{107295728400}\end{aligned}$$

8. Spline de Lagrange de orden 10

$$k = 10$$

Los coeficientes γ_j son los siguientes:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{419458864563690143}{1746863198099712} & \gamma_1 &= -\frac{1331099560276763}{6823684367577} \\ \gamma_2 &= \frac{232922314673960591}{2183578997624640} & \gamma_3 &= -\frac{7117321204607}{180520750465} \\ \gamma_4 &= \frac{41843277851938807}{4367157995249280} & \gamma_5 &= -\frac{9696757489385}{6823684367577} \\ \gamma_6 &= \frac{238171403117689}{2183578997624640} & \gamma_7 &= -\frac{96859185097}{34118421837885} \\ \gamma_8 &= \frac{96859185097}{17468631980997120}\end{aligned}$$

9. Spline de Lagrange de orden 11

$$k = 11$$

Los valores de los coeficientes de la combinación lineal que da el spline de Lagrange son

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{279670510835683468}{526382355886821} & \gamma_1 &= -\frac{298590188257448266783}{673769415535130880} \\ \gamma_2 &= \frac{7524297606842266832}{28951029573775155} & \gamma_3 &= -\frac{56905497174322444823}{529390355063317120} \\ \gamma_4 &= \frac{892524287682362168}{28951029573775155} & \gamma_5 &= -\frac{21705478004746793881}{3705731785443219840} \\ \gamma_6 &= \frac{19444088350261936}{28951029573775155} & \gamma_7 &= -\frac{567369167387091343}{14822927141772879360} \\ \gamma_8 &= \frac{3844185252646}{5790205914755031} & \gamma_9 &= -\frac{1922092626323}{2964585428354575872}\end{aligned}$$

10. Spline de Lagrange de orden 12

$$k = 12$$

Los coeficientes γ_j son los siguientes:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{1982252245880812530853429}{1667687980843939084800} & \gamma_1 &= -\frac{395470301036253555404}{390864370510298223} \\ \gamma_2 &= \frac{18838326947812016384185309}{30018383655190903526400} & \gamma_3 &= -\frac{8329228456198919010326}{29314827788272366725} \\ \gamma_4 &= \frac{696933916654344868496573}{7504595913797735881600} & \gamma_5 &= -\frac{623436533550540524042}{29314827788272366725} \\ \gamma_6 &= \frac{64417333302928165673851}{20012255770127269017600} & \gamma_7 &= -\frac{1208939604970055809}{4187832541181766675} \\ \gamma_8 &= \frac{368369662995469554607}{30018383655190903526400} & \gamma_9 &= -\frac{4159228486491349}{29314827788272366725} \\ \gamma_{10} &= \frac{4159228486491349}{60036767310381807052800}\end{aligned}$$

11. Spline de Lagrange de orden 13

$$k = 13$$

Los valores de los coeficientes de la combinación lineal que proporciona el spline de Lagrange son

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{7288707835091563238154446704}{2716569495084634768049625} & \gamma_1 &= -\frac{146884255300766306229481672357399}{63285202957491651556484064000} \\ \gamma_2 &= \frac{440243272847521484355444648416}{292154701153192993691155125} & \gamma_3 &= -\frac{151135329939323151155494200346471}{205676909611847867558573208000} \\ \gamma_4 &= \frac{171647326163708094910383437216}{642740342537024586120541275} & \gamma_5 &= -\frac{11659064199336898589343176577431}{164541527689478294046858566400} \\ \gamma_6 &= \frac{93232533533773772574208112}{7063080687220050396929025} & \gamma_7 &= -\frac{9715144186082455408230551029}{6027162186427776338712768000} \\ \gamma_8 &= \frac{1506761048533565883352328}{13225109928745361854332125} & \gamma_9 &= -\frac{5958880844163471100845750973}{1645415276894782940468585664000} \\ \gamma_{10} &= \frac{89703901276231143363664}{3213701712685122930602706375} & \gamma_{11} &= -\frac{5606493829764446460229}{822707638447391470234292832000}\end{aligned}$$

12. Spline de Lagrange de orden 14

$$k = 14$$

Los coeficientes γ_j son

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{2036063216367193457022078823038029962776091993}{333699721644742041379600507369735844352000} \\ \gamma_2 &= \frac{4211574618378506970367438772250416704297521269}{1167949025756597144828601775794075455232000} \\ \gamma_4 &= \frac{1387252366238037578044177483934884662634052459}{1868718441210555431725762841270520728371200} \\ \gamma_6 &= \frac{1516390363455949103568636224124160655411971}{31145307353509257195429380687842012139520} \\ \gamma_8 &= \frac{266979812612477266673544890981805431771389}{359368931002029890716492854090484755456000} \\ \gamma_{10} &= \frac{2312671645000393063364823981788003011637}{2335898051513194289657203551588150910464000} \\ \gamma_{12} &= \frac{5802321921925840089419857504601689}{9343592206052777158628814206352603641856000}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{435678642986937013733650585159148338233463}{81469658604673349946191530119564415125} \\
\gamma_3 &= -\frac{213368239354662230481472931691972763537901}{114057522046542689924668142167390181175} \\
\gamma_5 &= -\frac{2025857998227140687885570994651742033801}{9124601763723415193973451373391214494} \\
\gamma_7 &= -\frac{1917813122971313465046288442837901129}{256597349935979054948634740534061150} \\
\gamma_9 &= -\frac{47443907655417586587687923520630471289}{1140575220465426899246681421673901811750} \\
\gamma_{11} &= -\frac{5802321921925840089419857504601689}{1140575220465426899246681421673901811750}
\end{aligned}$$

1.2 Una nueva familia de funciones spline

1.2.1 Preliminares

En la sección anterior hemos considerado un problema de interpolación lagrangiana basado en el B-spline de Schoenberg desde un punto de vista distinto al adoptado por Qi y Dahmen, Goodman y Micchelli. A continuación vamos a definir una nueva función polinómica a trozos y la emplearemos en la construcción de interpolantes de Lagrange utilizando una técnica similar a la usada con el B-spline.

La definición que consideramos hace uso de la convolución con la función característica del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de una función polinómica a trozos de soporte $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, de grado impar, que presenta la máxima suavidad posible (clase global $r - 1$). Concretamente, se trata del r -ésimo polinomio de Bernstein.

El caso $k = 2$, por ejemplo, proporcionará un spline de Lagrange de grado $2r + 2$ a trozos, de clase global $r + 1$ y de soporte $[-2, 2]$, el mismo que el spline de Lagrange obtenido en la sección anterior para el B-spline cuadrático. El B-spline de orden $2r + 3$ daría lugar a un spline de Lagrange de soporte $[-(2r + 2), 2r + 2]$. Para un mismo grado, la nueva función que vamos a definir origina un spline de Lagrange con el mínimo soporte posible, aunque menor clase global (y menor exactitud, como veremos). En definitiva, dispondremos de una mayor flexibilidad a la hora de seleccionar un elemento concreto en función de nuestras necesidades.

Definición 1.2.1 *Para cualesquiera números naturales r y k , el S -spline centrado de tipo (r, k) asociado a la partición uniforme, $S_{r,k}$, se define como*

$$S_{r,k} = \chi_r * \overbrace{\chi * \dots * \chi}^k, \quad (1.2.1)$$

donde

$$\chi_r(x) = \begin{cases} (2r+1) \binom{2r}{r} \left(\frac{1}{2} - x\right)^r \left(\frac{1}{2} + x\right)^r & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \quad (1.2.2)$$

y χ es la función característica del intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Las propiedades de $S_{r,k}$ se resumen a continuación.

Proposición 1.2.2 *La función $S_{r,k}$ satisface los siguientes resultados:*

1. $S_{r,k} \in C^{r+k-1}(\mathbb{R})$.
2. Para cualquier entero impar k , $S_{r,k} |_{[j,j+1]} \in \mathbb{P}_{2r+k}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.
3. Para cualquier entero par k , $S_{r,k} |_{[j-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}]} \in \mathbb{P}_{2r+k}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$.
4. $\text{sop } S_{r,k} = \left[-\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$.
5. $S_{r,k}(x) > 0$ para $-\frac{k+1}{2} < x < \frac{k+1}{2}$.
6. La transformada de Fourier de $S_{r,k}$ es

$$\widehat{S}_{r,k}(u) = \widehat{\chi}_r(u) \left(\frac{\text{sen } \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^k \quad (1.2.3)$$

En particular, $\widehat{S}_{r,k}(0) = 1$ y las trasladadas enteras de $S_{r,k}$ constituyen una partición de la unidad, es decir,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{r,k}(x-j) = 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

Abordar el problema de interpolación lagrangiana para el S-spline con la técnica empleada en el caso del B-spline de Schoenberg requiere estudiar la transformada de Fourier de χ_r .

Lema 1.2.3 *La transformada de Fourier de χ_r satisface la ecuación diferencial en diferencias*

$$\widehat{\chi}_r(u) = -4(2r+1) \frac{1}{u} \widehat{\chi}'_{r-1}(u), \quad r \geq 2 \quad (1.2.4)$$

con valor inicial

$$\widehat{\chi}_1(u) = -\frac{12}{u^2} \left(\cos \frac{u}{2} - \frac{2}{u} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right). \quad (1.2.5)$$

Demostración.

Sea $r \geq 2$. Tenemos que

$$\widehat{\chi}_r(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \chi_r(x) dx = (2r+1) \binom{2r}{r} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-iux} \left(\frac{1}{4} - x^2 \right)^r dx.$$

Integrando por partes encontramos

$$\widehat{\chi}_r(u) = -2r(2r+1) \binom{2r}{r} \frac{1}{iu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-iux} x \left(\frac{1}{4} - x^2 \right)^{r-1} dx.$$

Para cada entero $s \geq 1$ se cumple que

$$\widehat{\chi}'_s(u) = \frac{d}{du} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \chi_s(x) dx = -i(2s+1) \binom{2s}{s} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-iux} x \left(\frac{1}{4} - x^2 \right)^s dx.$$

En particular,

$$\widehat{\chi}'_{r-1}(u) = -i(2r-1) \binom{2r-2}{r-1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-iux} x \left(\frac{1}{4} - x^2 \right)^{r-1} dx,$$

lo que implica que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-iux} x \left(\frac{1}{4} - x^2 \right)^{r-1} dx = -\frac{1}{i} \frac{1}{(2r-1) \binom{2r-2}{r-1}} \widehat{\chi}'_{r-1}(u).$$

En consecuencia,

$$\widehat{\chi}_r(u) = -4(2r+1) \frac{1}{u} \widehat{\chi}'_{r-1}(u).$$

El valor de $\widehat{\chi}_1$ se obtiene de forma inmediata. □

Lema 1.2.4 Para cada entero $r \geq 1$ se cumple que

$$\hat{\chi}_r(u) = P_r\left(\frac{1}{u}\right) \cos \frac{u}{2} + Q_r\left(\frac{1}{u}\right) \operatorname{sen} \frac{u}{2}, \quad (1.2.6)$$

donde P_r y Q_r son polinomios de grados $2r$ y $2r + 1$, respectivamente, que satisfacen las ecuaciones diferenciales en diferencias

$$P_{r+1}\left(\frac{1}{u}\right) = -4(2r + 3) \frac{1}{u} \left[-\frac{1}{u^2} P_r'\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2} Q_r\left(\frac{1}{u}\right) \right] \quad (1.2.7)$$

y

$$Q_{r+1}\left(\frac{1}{u}\right) = 4(2r + 3) \frac{1}{u} \left[\frac{1}{2} P_r\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{u^2} Q_r'\left(\frac{1}{u}\right) \right], \quad (1.2.8)$$

con condiciones iniciales

$$P_1\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{12}{u^2}, \quad Q_1\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{24}{u^3} \quad (1.2.9)$$

Demostración.

Para $r = 1$ se cumple (1.2.9) a la vista de (1.2.5). Supongámoslo cierto para r . Por (1.2.4) y la hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{r+1}(u) &= -4(2r + 1) \frac{1}{u} \hat{\chi}'_{r-1}(u) \\ &= -\frac{4}{u} (2r + 3) \left[-\frac{1}{u^2} P_r'\left(\frac{1}{u}\right) \cos \frac{u}{2} - \frac{1}{2} P_r\left(\frac{1}{u}\right) \operatorname{sen} \frac{u}{2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{u^2} Q_r'\left(\frac{1}{u}\right) \operatorname{sen} \frac{u}{2} + Q_r\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} \right] \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} -\frac{u}{4(2r + 3)} \hat{\chi}_{r+1}(u) &= \cos \frac{u}{2} \left[-\frac{1}{u^2} P_r'\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2} Q_r\left(\frac{1}{u}\right) \right] - \\ &\quad \operatorname{sen} \frac{u}{2} \left[\frac{1}{2} P_r\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{u^2} Q_r'\left(\frac{1}{u}\right) \right], \end{aligned}$$

lo que prueba que

$$\hat{\chi}_{r+1}(u) = P_{r+1}\left(\frac{1}{u}\right) \cos \frac{u}{2} + Q_{r+1}\left(\frac{1}{u}\right) \operatorname{sen} \frac{u}{2}$$

con $P_{r+1}\left(\frac{1}{u}\right)$ y $Q_{r+1}\left(\frac{1}{u}\right)$ satisfaciendo las relaciones (1.2.7) y (1.2.8), respectivamente. \square

Lema 1.2.5 *Los polinomios coeficientes P_r y Q_r admiten las siguientes expresiones:*

1. Para $\alpha = 0, 1$,

$$P_{2m+\alpha} \left(\frac{1}{u} \right) = \sum_{j=1-\alpha}^m p_{2m+2j+2\alpha}^{2m+\alpha} \frac{1}{u^{2m+2j+2\alpha}}, \quad m \geq 1 - \alpha, \quad (1.2.10)$$

2. Para $\alpha = 0, 1$,

$$Q_{2m+\alpha} \left(\frac{1}{u} \right) = \sum_{j=0}^m q_{2m+2j+2\alpha+1}^{2m+\alpha} \frac{1}{u^{2m+2j+2\alpha+1}}, \quad m \geq 1 - \alpha. \quad (1.2.11)$$

Los coeficientes de las anteriores representaciones satisfacen, con las condiciones iniciales

$$p_2^1 = -12, \quad q_3^1 = 24, \quad p_4^2 = -720, \quad q_3^2 = -120, \quad q_5^2 = 1440, \quad (1.2.12)$$

las siguientes relaciones de recurrencia:

1. Para $1 \leq j \leq m + 1$,

$$p_{2m+2j+2}^{2m+2} = -4(4m+5) \left[\frac{1}{2} q_{2m+2j+1}^{2m+1} - (2m+2j) p_{2m+2j}^{2m+1} \right]. \quad (1.2.13)$$

2. Si $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} q_{2m+3}^{2m+2} &= 4(4m+5) \frac{1}{2} p_{2m+2}^{2m+1} \\ q_{2m+2j+3}^{2m+2} &= 4(4m+5) \left[\frac{1}{2} p_{2m+2j+2}^{2m+1} + (2m+2j+1) q_{2m+2j+1}^{2m+1} \right] \\ q_{4m+5}^{2m+2} &= 4(4m+3)(4m+5) q_{4m+3}^{2m+1} \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

3. Con $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} p_{2m+2}^{2m+1} &= -4(4m+3) \frac{1}{2} q_{2m+1}^{2m} \\ p_{2m+2j+2}^{2m+1} &= -4(4m+3) \left[-(2m+2j) p_{2m+2j}^{2m} + \frac{1}{2} q_{2m+2j+1}^{2m} \right] \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

4. Para $0 \leq j \leq m-1$,

$$\begin{aligned} q_{4m+3}^{2m+1} &= 4(4m+1)(4m+3)q_{4m+1}^{2m} \\ q_{2m+2j+3}^{2m+1} &= 4(4m+3) \left[\frac{1}{2}p_{2m+2j+2}^{2m} + (2m+2j+1)q_{2m+2j+1}^{2m} \right] \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Demostración.

Las relaciones (1.2.4) y (1.2.5) proporcionan (1.2.12), lo que prueba las representaciones de $P_1\left(\frac{1}{u}\right)$, $Q_1\left(\frac{1}{u}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{u}\right)$ y $Q_2\left(\frac{1}{u}\right)$. Consideremos el caso impar.

Supongamos cierta la igualdad para $2m+1$ y probémosla para $2m+2$.

Las igualdades (1.2.7), para $r = 2m+2$, y (1.2.10) y (1.2.11), para $\alpha = 1$, permiten escribir

$$\begin{aligned} P_{2m+2}\left(\frac{1}{u}\right) &= -\frac{4(4m+5)}{u} \sum_{j=0}^m \left[\frac{1}{2}q_{2m+2j+3}^{2m+1} - (2m+2j+2)p_{2m+2j+2}^{2m+1} \right] \frac{1}{u^{2m+2j+3}} \\ &= -4(4m+5) \sum_{j=1}^{m+1} \left[\frac{1}{2}q_{2m+2j+1}^{2m+1} - (2m+2j)p_{2m+2j}^{2m+1} \right] \frac{1}{u^{2m+2j+2}} \end{aligned}$$

lo que prueba la representación para $P_{2m+2}\left(\frac{1}{u}\right)$ y proporciona (1.2.13).

Las mismas referencias empleadas anteriormente muestran que

$$\begin{aligned} Q_{2m+2}\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{4(4m+5)}{u} \left[\frac{1}{2}p_{2m+2}^{2m+1} \frac{1}{u^{2m+2}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m p_{2m+2j+2}^{2m+1} \frac{1}{u^{2m+2j+2}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=0}^{m-1} (2m+2j+3) q_{2m+2j+3}^{2m+1} \frac{1}{u^{2m+2j+4}} + (4m+3) q_{4m+3}^{2m+1} \frac{1}{u^{4m+4}} \right] \end{aligned}$$

Un cambio de índice produce la igualdad

$$\begin{aligned} Q_{2m+2}\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{4(4m+5)}{u} \left\{ \frac{1}{2}p_{2m+2}^{2m+1} \frac{1}{u^{2m+2}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{2}p_{2m+2j+2}^{2m+1} + (2m+2j+1)q_{2m+2j+1}^{2m+1} \right] \frac{1}{u^{2m+2j+2}} + \right. \\ &\quad \left. (4m+3) q_{4m+3}^{2m+1} \frac{1}{u^{4m+4}} \right\} \end{aligned}$$

quedando probada la representación de $Q_{2m+2}\left(\frac{1}{u}\right)$ y las relaciones (1.2.14).

De la misma manera se trabaja para probar las correspondientes relaciones cuando el subíndice de $P_r \left(\frac{1}{u}\right)$ y de $Q_r \left(\frac{1}{u}\right)$ es par, obteniendo, además de las correspondientes representaciones incluidas en (1.2.10) y (1.2.11), las relaciones de recurrencia (1.2.15) y (1.2.16), respectivamente. \square

Las tablas 1.6 y 1.7 proporcionan los coeficientes de algunos coeficientes polinómicos.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
u^{-2}	-12					
u^{-4}		-720	1680			
u^{-6}			-100800	604800	-665280	
u^{-8}				-25401600	279417600	-726485760
u^{-10}					-10059033600	174356582400
u^{-12}						-5753767219200
	P_7		P_8		P_9	
u^{-8}	518918400					
u^{-10}	-784604620800		1270312243200		-670442572800	
u^{-12}	143844180480000		978140427264000		2654952588288000	
u^{-14}	-4487938430976000		152589906652184000		1449604113205248000	
u^{-16}			-4577697199595520000		202944575848734720000	
u^{-18}					-5914384781877411840000	

Tabla 1.6: Polinomios P.

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
u^{-3}	24	-120				
u^{-5}		1440	-20160	30240		
u^{-7}			201600	-5443200	19958400	-17297280
u^{-9}				50803200	-2235340800	14529715200
u^{-11}					20118067200	-1307674368000
u^{-13}						11507534438400
	Q_7		Q_8		Q_9	
u^{-9}	-29059430400		17643225600			
u^{-11}	13076743680000		-44460928512000		60339831552000	
u^{-13}	-1035678099456000		14672106408960000		-74338672472064000	
u^{-15}	8975876861952000		9155394399191040000		20294457584873472000	
u^{-17}			-4577697199595520000		-1391619948677038080000	
u^{-19}					11828769563754823680000	

Tabla 1.7: Polinomios Q.

1.2.2 El problema lagrangiano para el S-spline

Una vez establecidos los resultados sobre la transformada de Fourier de χ_r , podemos plantear el problema de interpolación de Lagrange correspondiente a $S_{r,k}$.

Definimos los conjuntos $I_k = \{i \in \mathbb{Z} : -(k-1) \leq i \leq k-1\}$ y $J_k = I_k \cap \mathbb{N}$. Pretendemos construir una función spline $q_{r,k}$, de orden $2r+k+1$, clase $r+k-1$ y soporte $[-k, k]$, que sea la función fundamental para el problema de interpolación de Lagrange, es decir, tal que

$$q_{r,k}(i) = \delta_{0,i} \quad i \in \mathbb{Z} \quad (1.2.17)$$

Concretamente, la función $q_{r,k}$ debe ser una combinación lineal de las trasladadas de $S_{r,k}$ sobre $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, lo que significa que se expresa en la forma

$$q_{r,k} = \sum_{j \in I_k} \gamma_j S_{r,k} \left(\bullet - \frac{j}{2} \right) \quad (1.2.18)$$

Esta función nos permite definir un operador $\mathcal{L}_{r,k}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{r,k}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f(\alpha) q_{r,k}(\bullet - \alpha) \quad (1.2.19)$$

Exigiremos que sea exacto en el espacio \mathbb{P}_{k-1} .

Antes de enunciar el resultado de existencia y unicidad de solución del problema (1.2.17), (1.2.18) y (1.2.19) conviene efectuar las siguientes definiciones:

Definición 1.2.6 1. Para $m \geq 0$, definimos

$$\Sigma^{(1)}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} (-1)^v \left(P_{2m+1} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \cos \frac{u}{2} + Q_{2m+1} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \quad (1.2.20)$$

y

$$\Sigma^{(2)}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left(P_{2m+1} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \cos \frac{u}{2} + Q_{2m+1} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \quad (1.2.21)$$

2. Para $m \geq 1$, se definen

$$\Sigma^{(3)}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} (-1)^v \left(P_{2m} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \cos \frac{u}{2} + Q_{2m} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \quad (1.2.22)$$

y

$$\Sigma^{(4)}(u) = \sum_{v \in \mathbb{Z}} \left(P_{2m} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \cos \frac{u}{2} + Q_{2m} \left(\frac{1}{u+2\pi v} \right) \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \quad (1.2.23)$$

El siguiente resultado muestra que $\Sigma^{(i)}(u)$, $1 \leq i \leq 4$, son funciones racionales en x .

Lema 1.2.7 *El cambio de variable $x = \cos \frac{u}{2}$ proporciona las siguientes representaciones de $\Sigma^{(i)}(u)$, $1 \leq i \leq 4$, como funciones racionales en x , siendo los coeficientes los considerados en (1.2.10) y (1.2.11):*

1.

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(x) = & (1-x^2)^{-(2m+1)} \sum_{s=0}^m \left[p_{2m+2s+2}^{2m+1} x V_{2m+2s+k+1}(x) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} q_{2m+2s+3}^{2m+1} V_{2m+2s+k+2}(x) \right] 4^{-(m+s+1)} (1-x^2)^{m-s} \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

2.

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(x) = & (1-x^2)^{-(2m+1)} \sum_{s=0}^m \left[p_{2m+2s+2}^{2m+1} x U_{2m+2s+k}(x) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} q_{2m+2s+3}^{2m+1} U_{2m+2s+k+1}(x) \right] 4^{-(m+s+1)} (1-x^2)^{m-s} \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

3.

$$\begin{aligned} \Sigma^{(3)}(x) = & (1-x^2)^{-2m} \left[\sum_{s=1}^m p_{2m+2s}^{2m} x V_{2m+2s+k-1}(x) 4^{-(m+s)} (1-x^2)^{m-s} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m q_{2m+2s+1}^{2m} V_{2m+2s+k}(x) 4^{-(m+s)} (1-x^2)^{m-s} \right] \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

4.

$$\begin{aligned} \Sigma^{(4)}(x) = & (1-x^2)^{-2m} \left[\sum_{s=1}^m p_{2m+2s}^{2m} x U_{2m+2s+k-2}(x) 4^{-(m+s)} (1-x^2)^{m-s} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sum_{s=0}^m q_{2m+2s+1}^{2m} U_{2m+2s+k-1}(x) 4^{-(m+s)} (1-x^2)^{m-s} \right] \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Demostración.

Inmediata. □

Ya estamos en condiciones de caracterizar la unisolvencia del problema que hemos formulado.

Proposición 1.2.8 *Para cualesquiera números naturales r , impar (resp. par), y k existe una única solución del problema definido por (1.2.17) y (1.2.18) si y sólo si el máximo común divisor de los polinomios $\Sigma^{(1)}(x)(1-x^2)^r$ y $\Sigma^{(2)}(x)(1-x^2)^r$ (resp. $\Sigma^{(3)}(x)(1-x^2)^r$ y $\Sigma^{(4)}(x)(1-x^2)^r$) es $(1-x^2)^r$.*

Demostración.

Debemos probar que $\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{r,k}(u + 2\pi v)$ es idénticamente igual a 1.

Se tiene que, como

$$q_{r,k} = \sum_{j \in I_k} \gamma_j S_{r,k} \left(\bullet - \frac{j}{2} \right),$$

y la función $S_{r,k}$ es par, se verifica la igualdad

$$\hat{q}_{r,k}(u) = \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_k} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) \hat{S}_{r,k}(u)$$

Las relaciones (1.2.3) y (1.2.6) conducen a

$$\hat{q}_{r,k}(u) = \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_k} \gamma_j \cos \frac{ju}{2} \right) \left(P_r \left(\frac{1}{u} \right) \cos \frac{u}{2} + Q_r \left(\frac{1}{u} \right) \sen \frac{u}{2} \right) \left(\frac{\sen \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \right)^k$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{r,k}(u + 2\pi v) &= \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_k} \gamma_j \cos \frac{j(u + 2\pi v)}{2} \right) \left(\frac{\sen \frac{(u + 2\pi v)}{2}}{\frac{u + 2\pi v}{2}} \right)^k \\ &\quad \left(P_r \left(\frac{1}{u + 2\pi v} \right) \cos \frac{u + 2\pi v}{2} + Q_r \left(\frac{1}{u + 2\pi v} \right) \sen \frac{u + 2\pi v}{2} \right) \\ &= \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_k} \gamma_j (-1)^{jv} \cos \frac{ju}{2} \right) \frac{2^k}{(u + 2\pi v)^k} (-1)^{vk} \left(\sen \frac{u}{2} \right)^k \\ &\quad \left(P_r \left(\frac{1}{u + 2\pi v} \right) (-1)^v \cos \frac{u}{2} + Q_r \left(\frac{1}{u + 2\pi v} \right) (-1)^v \sen \frac{u}{2} \right) \end{aligned}$$

Utilizaremos en lo que sigue las siguientes notaciones:

$$\Sigma_{k,p}(u) = \gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2}, \quad \Sigma_{k,i}(u) = 2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j \cos \frac{ju}{2}$$

1. Supongamos que r es impar y, en concreto, $r = 2m + 1$, $m \geq 0$. Debemos considerar, a su vez, dos casos diferentes, dependiendo de la paridad de k .

(a) La primera posibilidad es que k sea par. En ese caso, $(-1)^{vk} = 1$ y, tras las operaciones oportunas, podemos escribir

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{r,k}(u + 2\pi v) = \Sigma_{k,p}(u) \cdot \Sigma^{(1)}(u) + \Sigma_{k,i}(u) \cdot \Sigma^{(2)}(u),$$

donde $\Sigma^{(1)}(u)$ y $\Sigma^{(2)}(u)$ están dados por (1.2.20) y (1.2.21), respectivamente.

Por otra parte, el cambio de variable $x = \cos \frac{u}{2}$ proporciona los polinomios

$$\Sigma_{k,p}(x) = \gamma_0 + 2 \sum_{j \in J_{k,p}} \gamma_j T_j(x)$$

y

$$\Sigma_{k,i}(u) = 2 \sum_{j \in J_{k,i}} \gamma_j T_j(x),$$

donde T_j es, de nuevo, el j -ésimo polinomio de Chebychev.

Entonces, las relaciones (1.2.24) y (1.2.25) implican que $\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{r,k}(u + 2\pi v)$

será idénticamente 1 si y sólo si los polinomios $\Sigma^{(1)}(x)(1-x^2)^{2m+1}$ y $\Sigma^{(2)}(x)(1-x^2)^{2m+1}$ tienen máximo común divisor igual a $(1-x^2)^{2m+1}$.

(b) Si k es impar, entonces $(-1)^{vk} = (-1)^v$ y, de nuevo tras las simplificaciones correspondientes, llegamos a la igualdad

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{r,k}(u + 2\pi v) = \Sigma_{k,p}(u) \cdot \Sigma^{(2)}(u) + \Sigma_{k,i}(u) \cdot \Sigma^{(1)}(u),$$

lo que nos permite enunciar la misma conclusión que en el caso anterior.

2. Si r es par se procede como en el caso anterior. Haciendo uso de (1.2.22) y (1.2.23), establecemos

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{r,k}(u + 2\pi v) = \Sigma_{k,p}(u) \cdot \Sigma^{(3)}(u) + \Sigma_{k,i}(u) \cdot \Sigma^{(4)}(u)$$

y si, por el contrario, es impar, resulta

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{r,k}(u + 2\pi v) = \Sigma_{k,p}(u) \cdot \Sigma^{(4)}(u) + \Sigma_{k,i}(u) \cdot \Sigma^{(3)}(u)$$

En ambas situaciones (1.2.26) y (1.2.27) nos permiten concluir que el problema de interpolación lagrangiana considerado tendrá solución única si y sólo si los polinomios $\Sigma^{(3)}(x)(1-x^2)^{2m}$ y $\Sigma^{(4)}(x)(1-x^2)^{2m}$ tienen máximo común divisor $(1-x^2)^{2m}$. \square

Un caso particularmente simple se obtiene cuando $r = 1$.

Corolario 1.2.9 *Para cualquier número natural k , el problema de interpolación correspondiente a $r = 1$ tiene solución única, $q_{1,k}$, si y sólo si los polinomios U'_k y V'_{k+1} son primos entre sí.*

Demostración.

El caso considerado corresponde a r impar con $m = 0$. Entonces, una vuelta a la demostración de la proposición 1.2.8 y la consideración de (1.2.6) y (1.2.9) permite escribir, si k es impar,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{1,k}(u + 2\pi v) = & \Sigma_{k,p}(u) \cdot \frac{1}{2 \left(1 - \cos^2 \frac{u}{2}\right)} \left[\rho_{k+3}(u) - \cos \frac{u}{2} \rho_{k+2}(u) \right] + \\ & \Sigma_{k,i}(u) \cdot \frac{1}{2 \left(1 - \cos^2 \frac{u}{2}\right)} \left[\sigma_{k+3}(u) - \cos \frac{u}{2} \sigma_{k+2}(u) \right] \end{aligned}$$

y, si es par,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{1,k}(u + 2\pi v) = & \Sigma_{k,i}(u) \cdot \frac{1}{2 \left(1 - \cos^2 \frac{u}{2}\right)} \left[\rho_{k+3}(u) - \cos \frac{u}{2} \rho_{k+2}(u) \right] + \\ & \Sigma_{k,p}(u) \cdot \frac{1}{2 \left(1 - \cos^2 \frac{u}{2}\right)} \left[\sigma_{k+3}(u) - \cos \frac{u}{2} \sigma_{k+2}(u) \right] \end{aligned}$$

Con el cambio $x = \cos \frac{u}{2}$, se tiene que, para k impar,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{1,k}(u + 2\pi v) = & \frac{1}{2} \left\{ \Sigma_{k,p}(x) [U_{k+1}(x) - xU_k(x)] \frac{1}{(1-x^2)} + \right. \\ & \left. \Sigma_{k,i}(x) [V_{k+2}(x) - xV_{k+1}(x)] \frac{1}{(1-x^2)} \right\} \end{aligned}$$

y

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{1,k}(u + 2\pi v) = \frac{1}{2} \left\{ \Sigma_{k,i}(x) [U_{k+1}(x) - xU_k(x)] \frac{1}{(1-x^2)} + \right. \\ \left. \Sigma_{k,p}(x) [V_{k+2}(x) - xV_{k+1}(x)] \frac{1}{(1-x^2)} \right\}$$

para k par. Finalmente, la proposición 1.1.6 permite escribir

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{1,k}(u + 2\pi v) = \frac{1}{2(k+2)} [\Sigma_{k,p}(x) U'_k(x) + \Sigma_{k,i}(x) V'_{k+1}(x)]$$

y

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}} \hat{q}_{1,k}(u + 2\pi v) = \frac{1}{2(k+2)} [\Sigma_{k,i}(x) U'_k(x) + \Sigma_{k,p}(x) V'_{k+1}(x)]$$

para k impar y par, respectivamente, lo que prueba la afirmación sobre la unisol-
vencia. \square

Vamos a probar a continuación que los polinomios U'_k y V'_{k+1} son primos relativos, lo que garantizará la unisolvencia del problema que hemos considerado para el S-spline $S_{1,k}$. De nuevo consideramos sólo los casos correspondientes a $k \geq 4$, siendo inmediato comprobar que lo son si $k \leq 3$.

Proposición 1.2.10 *Para cada $r \geq 1$, los polinomios U'_{4r} y V'_{4r+1} son primos relativos.*

Demostración

La relación de recurrencia (1.1.6) nos permite escribir, para cada k , las igualdades

$$(V_{k+1} + U_k)' = [(V_{k+2} + U_{k+1}) - x(V_{k+1} + U_k)] \frac{k+2}{1-x^2}$$

$$(V_{k+1} - U_k)' = [(V_{k+2} - U_{k+1}) - x(V_{k+1} - U_k)] \frac{k+2}{1-x^2}$$

Sea $r \geq 1$. A partir de ellas, (1.1.13) y (1.1.11) implican que

$$(V_{4r+1} + U_{4r})' = [(V_{4r+2} + U_{4r+1}) - x(V_{4r+1} + U_{4r})] \frac{4r+2}{1-x^2}$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{2r+2}}{(4r+2)!} q_{2r}(x) - x \frac{(x+1)^{2r+1}}{(4r+1)!} p_{2r}(x) \right] \frac{4r+2}{1-x^2}$$

Entonces, haciendo uso de (1.1.21) para $n = r - 1$, se cumple que

$$\begin{aligned} (V_{4r+1} + U_{4r})' &= \frac{(x+1)^{2r}}{(4r+2)!} \{[(2r+1)p_{2r}(x) + (1-x)p'_{2r}(x)](x+1) - \\ &\quad (4r+2)xp_{2r}(x)\} \frac{4r+2}{1-x} \\ &= \frac{(x+1)^{2r}}{(4r+1)!} \bar{p}_{2r}(x) \end{aligned}$$

con

$$\bar{p}_{2r}(x) = (2r+1)p_{2r}(x) + (x+1)p'_{2r}(x)$$

De un modo completamente análogo, pero utilizando (1.1.6), (1.1.14), (1.1.12) y (1.1.21) para $-x$, establecemos también que

$$(V_{4r+1} + U_{4r})' = \frac{(x-1)^{2r}}{(4r+1)!} \bar{p}_{2r}(-x)$$

En lo que respecta a $(V_{4r+2} + U_{4r+1})'$, (1.1.6), (1.1.15), (1.1.13) y (1.1.22) para $n = r - 1$, conducen a

$$(V_{4r+2} + U_{4r+1})' = \frac{(x+1)^{2r+1}}{(4r+2)!} \bar{q}_{2r}(x)$$

donde

$$\bar{q}_{2r}(x) = (2r+2)q_{2r}(x) + (1+x)q'_{2r}(x)$$

Para $(V_{4r+2} - U_{4r+1})'$ disponemos de la igualdad

$$(V_{4r+2} - U_{4r+1})' = \frac{(x-1)^{2r+1}}{(4r+2)!} \bar{q}_{2r}(-x)$$

para lo que hemos utilizado (1.1.6), (1.1.16), (1.1.14) y (1.1.22) para $-x$.

La situación es similar para $(V_{4r+3} + U_{4r+2})'$. Con (1.1.6), (1.1.17), (1.1.15) y (1.1.23) para $n = r - 1$, encontramos que

$$(V_{4r+3} + U_{4r+2})' = \frac{(x+1)^{2r+1}}{(4r+3)!} \bar{p}_{2r+1}(x)$$

siendo

$$\bar{p}_{2r+1}(x) = (2r+2)p_{2r+1}(x) + (x+1)p'_{2r+1}(x)$$

Además,

$$(V_{4r+3} - U_{4r+2})' = \frac{(x-1)^{2r+1}}{(4r+3)!} \left(-\bar{p}_{2r+1}(-x) \right)$$

Por último, (1.1.6), (1.1.11) para $n = r + 1$, (1.1.17) y (1.1.20) para $n = r$, implican que

$$(V_{4r+4} + U_{4r+3})' = \frac{(x+1)^{2r+2}}{(4r+4)!} \bar{q}_{2r+1}(x)$$

con

$$\bar{q}_{2r+1}(x) = (2r+3) q_{2r+1}(x) + (1+x) q'_{2r+1}(x)$$

y

$$(V_{4r+4} - U_{4r+3})' = \frac{(x-1)^{2r+2}}{(4r+4)!} \left(-\bar{q}_{2r+1}(-x) \right)$$

Los pares de polinomios $\bar{p}_{2r+i}(x)$ y $\bar{p}_{2r+i}(-x)$, $\bar{q}_{2r+i}(x)$ y $\bar{q}_{2r+i}(-x)$, $0 \leq i \leq 1$, no tienen factores comunes; en consecuencia, los polinomios $(V_{4r+1+i} + U_{4r+i})'$ y $(V_{4r+1+i} - U_{4r+i})'$, $0 \leq i \leq 3$, son primos relativos, y, por tanto, V'_{4r+1+i} y U'_{4r+i} también lo son. En definitiva, para $k \geq 4$, U'_k y V'_{k+1} son primos relativos. \square

Vamos a probar ahora que el problema de interpolación lagrangiano considerado correspondiente a $k = 2$, es decir, aquél que emplea las trasladadas en $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ de $S_{r,2}$, es unisolvante.

El teorema 1.1.3 hace posible estudiar la unisolvencia de este problema, es decir, la existencia y unicidad del operador $\mathcal{L}_{r,2}$, y quedará probado que los correspondientes polinomios satisfacen la condición expresada en la proposición.

Proposición 1.2.11 *Existe un único spline de Lagrange $q_{r,2}$.*

Demostración

Sea ϕ es una función continua de soporte $[-1, 2]$ tal que

$$\phi\left(-\frac{1}{2}\right) = \phi\left(\frac{3}{2}\right) = a, \quad \phi\left(\frac{1}{2}\right) = b, \quad \phi(0) = \phi(1) = \frac{1}{2},$$

siendo a y b valores tales que $2a + b = 1$. Consideremos los polinomios

$$q^0(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \phi(\alpha) z^\alpha = \phi(0) + \phi(1)z = \frac{1}{2}(1+z)$$

$$q^1(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \phi\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) z^\alpha = \phi\left(-\frac{1}{2}\right) + \phi\left(\frac{1}{2}\right)z + \phi\left(\frac{3}{2}\right)z^2 = a + bz + az^2$$

El único cero de q^0 , $z = -1$, será cero de q^1 si y sólo si $2a - b = 0$. Entonces, si se verifica que $2a - b \neq 0$, los polinomios q^0 y q^1 serán primos relativos, y existirán polinomios de Laurent $m^0(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} m_{2\alpha} z^\alpha$ y $m^1(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} m_{2\alpha+1} z^\alpha$ tales que

$$m^0 q^0 + m^1 q^1 = 1$$

Pero

$$\begin{aligned} m^0(z) q^0(z) + m^1(z) q^1(z) &= \frac{1}{2} (1+z) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} m_{2\alpha} z^\alpha + (a + bz + az^2) \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} m_{2\alpha+1} z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \left[am_{2\alpha-3} + \left(\frac{1}{2} m_{2\alpha} + am_{2\alpha+1} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2} m_{2\alpha-2} + bm_{2\alpha-1} \right) \right] z^\alpha \end{aligned}$$

Identificando los coeficientes de $m^0 q^0 + m^1 q^1$ y 1 obtenemos un sistema de ecuaciones cuya única solución corresponde a todos los valores de m_α nulos, excepto m_{-2} , m_{-1} y m_0 , que vienen dados por

$$m_{-2} = -\frac{2a}{b-2a}, \quad m_{-1} = \frac{1}{b-2a}, \quad m_0 = -\frac{2a}{b-2a}$$

Por el teorema 1.1.3, esta única solución produce una única función, q_ϕ , de soporte $[-2, 2]$, engendrada por las trasladadas $\phi(\bullet - \frac{1}{2}\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, de ϕ tal que $q_\phi(\alpha) = \delta_{0\alpha}$. Además,

$$q_\phi(x) = -\frac{2a}{b-2a} \phi(x+1) + \frac{1}{b-2a} \phi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{2a}{b-2a} \phi(x)$$

Consideremos como función ϕ el S-spline $S_{r,2}$. Su soporte es $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Formamos una nueva función:

$$\bar{S}_{r,2}(x) = S_{r,2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Su soporte es $[-1, 2]$. Si $\{a(i), 0 \leq i \leq 2r+2\}$ representan los B-coeficientes de $\bar{S}_{r,2}$ en $[-1, 0]$, y $\{b(i), 0 \leq i \leq 2r+2\}$ denotan los relativos a $[0, 1]$, se tiene que sus valores son los siguientes:

$$\begin{aligned} a(i) &= 0, \quad 0 \leq i \leq r+1 \\ a(i) &= \frac{i - (r+1)}{2r+2}, \quad r+2 \leq i \leq 2r+2 \\ b(i) &= \frac{i+r+1}{2r+2}, \quad 0 \leq i \leq r+1 \\ b(i) &= \frac{3r+3-i}{2r+2}, \quad r+2 \leq i \leq 2r+2 \end{aligned}$$

Conocidos los B-coeficientes de $S_{r,2}$, el algoritmo de De Casteljaou ([19]) nos permite calcular $a_r = \bar{S}_{r,2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \bar{S}_{r,2}\left(\frac{3}{2}\right)$ y $b_r = \bar{S}_{r,2}\left(\frac{1}{2}\right)$, obteniendo

$$a_r = \frac{1}{2^{2r+2}} \sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \frac{i - (r+1)}{2r+2}$$

y

$$b_r = \frac{1}{2^{2r+2}} \left[\sum_{i=0}^{r+1} \binom{2r+2}{i} \frac{i + (r+1)}{2r+2} + \sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \frac{3r+3-i}{2r+2} \right]$$

Estimemos a_r :

$$\begin{aligned} 2a_r &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2r+2}} \sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \frac{i - (r+1)}{2r+2} \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 4^{r+1}} \sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \\ &< \frac{1}{2 \cdot 4^{r+1}} \left[\sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} + \frac{1}{2} \binom{2r+2}{r+1} \right] \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4^{r+1}} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier r , $2a_r < \frac{1}{2}$.

Acotemos ahora b_r :

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{1}{2^{2r+2}} \left[\sum_{i=0}^{r+1} \binom{2r+2}{i} \frac{i + (r+1)}{2r+2} + \sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \frac{3r+3-i}{2r+2} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2r+2}} \left[\sum_{i=0}^{r+1} \binom{2r+2}{i} \frac{i + (r+1)}{2r+2} + \binom{2r+2}{r+1} + \sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \frac{3r+3-i}{2r+2} \right] \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=0}^{r+1} \binom{2r+2}{i} \frac{i + (r+1)}{2r+2} = \sum_{i=r+2}^{2r+2} \binom{2r+2}{i} \frac{3r+3-i}{2r+2}$$

y, para $0 \leq i \leq r$, se cumple que

$$\frac{i + (r+1)}{2r+2} \geq \frac{1}{2},$$

además de

$$\frac{3r + 3 - i}{2r + 2} \geq \frac{1}{2}$$

para $r + 2 \leq i \leq 2r + 2$, se encuentra que

$$\begin{aligned} b_r &\geq \frac{1}{4^{r+1}} \left\{ \frac{1}{2} 2 \sum_{i=0}^{r+1} \binom{2r+2}{i} + \binom{2r+2}{r+1} \right\} \\ &> \frac{1}{4^{r+1}} \left\{ \sum_{i=0}^{r+1} \binom{2r+2}{i} + \frac{1}{2} \binom{2r+2}{r+1} \right\} \\ &= \frac{1}{4^{r+1}} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{2r+2}{i} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así pues, $b_r - 2a_r > 0$, por lo que existe un único pline de Lagrange, $q_{r,2}$, de soporte $[-2, 2]$ tal que $q_{r,2}(\alpha) = \delta_{0,\alpha}$ para $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Además,

$$\begin{aligned} q_{r,2}(x) &= -\frac{2a_r}{b_r - 2a_r} \bar{S}_{r,2}(x+1) + \frac{1}{b_r - 2a_r} \bar{S}_{r,2}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{2a_r}{b_r - 2a_r} \bar{S}_{r,2}(x) \\ &= -\frac{2a_r}{b_r - 2a_r} S_{r,2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{b_r - 2a_r} S_{r,2}(x) - \frac{2a_r}{b_r - 2a_r} S_{r,2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Queda probado, pues, la proposición. □

El siguiente resultado se refiere a la exactitud del operador $\mathcal{L}_{r,k}$.

Proposición 1.2.12 *El operador $\mathcal{L}_{r,k}$ es exacto en \mathbb{P}_{k-1} .*

Demostración.

La exactitud de $\mathcal{L}_{r,k}$ en \mathbb{P}_{k-1} queda garantizada al tener $\hat{S}_{r,k}$ ceros de orden k en los valores $2\pi n$, $n \neq 0$. □

Aunque ha quedado probado, vamos a dar una demostración directa de la misma, que hace uso de los polinomios de Appell y de una representación tipo Marsden ([10], [6]).

Definición 1.2.13 *Se definen los polinomios de Appell asociados al S-spline $S_{r,k}$ mediante la relación de recurrencia*

$$g_s(x) = x^s - \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{r,k}(j) \sum_{\nu=0}^{s-1} \binom{s}{\nu} (-j)^{s-\nu} g_\nu(x) \quad , \quad s \geq 1$$

inicializada con

$$g_0(x) = 1$$

Lema 1.2.14 ([10]) Sea $\{g_s\}_{s \geq 0}$ la sucesión de polinomios de Appell asociados al S -spline $S_{r,k}$. Entonces, para cualquier natural m se cumple que

$$g_m(i) = \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} i^{m-\nu} g_\nu(0)$$

Lema 1.2.15 Sean m un número natural fijo menor o igual que $k-1$ y $\{g_s\}_{0 \leq s \leq m}$ el conjunto formado por los $m+1$ primeros polinomios de Appell asociados al S -spline $S_{r,k}$. Definamos

$$\rho_\mu(x) = \sum_{j \in I_k} \gamma_j \left(x + \frac{j}{2}\right)^\mu, \quad 1 \leq \mu \leq m$$

y

$$\eta_\mu(i) = g_\mu(i) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} i^{\mu-\nu} \rho_\nu(0), \quad 1 \leq \mu \leq m$$

Entonces

$$\eta_\mu(i) = i^\mu, \quad \mu = 1, \dots, m$$

Demostración.

En primer lugar debemos observar que, para $1 \leq \mu \leq m$,

$$\begin{aligned} \rho_\mu(x) &= \sum_{j \in I_k} \gamma_j \left(x + \frac{j}{2}\right)^\mu = \sum_{j \in I_k} \gamma_j \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} x^{\mu-\nu} \left(\frac{j}{2}\right)^\nu \\ &= \sum_{j \in I_k} \gamma_j \left(x^\mu + \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} x^{\mu-\nu} \left(\frac{j}{2}\right)^\nu\right) \\ &= \left(\sum_{j \in I_k} \gamma_j\right) x^\mu + \sum_{j \in I_k} \sum_{\nu=1}^{\mu} \gamma_j \binom{\mu}{\nu} x^{\mu-\nu} \left(\frac{j}{2}\right)^\nu \\ &= x^\mu + \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \left[\sum_{j \in I_k} \gamma_j \left(\frac{j}{2}\right)^\nu\right] x^{\mu-\nu} \end{aligned}$$

es decir,

$$\rho_\mu(x) = x^\mu + \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \rho_\nu(0) x^{\mu-\nu} \quad (1.2.28)$$

Además, como se cumple que

$$x^s = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_s(i) S_{r,k}(x-i), \quad s = 0, \dots, m,$$

si definimos

$$q_{i,r,k}(x) = q_{r,k}(x-i), \quad i \in \mathbb{Z}$$

tendremos que

$$q_{i,r,k}(x) = \sum_{j \in I_k} \gamma_j S_{r,k}\left(x - \frac{j}{2} - i\right) = \sum_{j \in I_k} \gamma_j S_{r,k}\left(x + \frac{j}{2} - i\right)$$

lo que implica que

$$\left(x + \frac{j}{2}\right)^s = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_s(i) S_{r,k}\left(x + \frac{j}{2} - i\right)$$

y, en consecuencia,

$$\rho_\mu(x) = \sum_{j \in I_k} \left(\gamma_j \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_\mu(i) S_{r,k}\left(x + \frac{j}{2} - i\right) \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_\mu(i) q_{i,r,k}(x) \quad (1.2.29)$$

Por tanto,

$$\rho_\mu(0) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_\mu(i) q_{i,r,k}(0) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_\mu(i) \delta_{i0} = g_\mu(0)$$

Esta igualdad, junto al lema 1.2.14, conduce a

$$\begin{aligned} \eta_\mu(i) &= g_\mu(i) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} i^{\mu-\nu} \rho_\nu(0) \\ &= g_\mu(i) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} i^{\mu-\nu} g_\nu(0) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} i^{\mu-\nu} g_\nu(0) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} i^{\mu-\nu} g_\nu(0) \\ &= i^\mu g_0(0) \\ &= i^\mu \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración. \square

Demostración directa de la proposición 1.2.12

Vamos a demostrar de forma directa que el interpolante construido para el S-spline es exacto en \mathbb{P}_{k-1} . Lo haremos por inducción.

Si $k = 1$ el resultado es inmediato, pues para la función $e_0(x) = 1$ se cumple que $\mathcal{L}_{r,k}(e_0) = e_0$, es decir,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} q_{r,k}(x-i) \equiv 1$$

Para $k > 1$ se cumple de entrada la misma igualdad anterior. Hay que probar ahora que se cumple para $e_s(x) = x^s$, $1 \leq s \leq k-1$. Lo lograremos si probamos que, supuesta cierta para $0, 1, \dots, \mu-1$, es cierta para μ .

Por (1.2.28), podemos escribir

$$x^\mu = \rho_\mu(x) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \rho_\nu(0) x^{\mu-\nu}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, es decir,

$$x^{\mu-\nu} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{\mu-\nu} q_{i,r,k}(x), \quad \nu = 1, \dots, \mu,$$

la igualdad (1.2.29) y el lema 1.2.14, se deduce que

$$\begin{aligned} x^\mu &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_\mu(i) q_{i,r,k}(x) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} \left[\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^{\mu-\nu} q_{i,r,k}(x) \right] \rho_\nu(0) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[g_\mu(i) - \sum_{\nu=1}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} i^{\mu-\nu} \rho_\nu(0) \right] q_{i,r,k}(x) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_\mu(i) q_{i,r,k}(x) \end{aligned}$$

Por el lema previo se tiene que $\eta_\mu(i) = i^\mu$, por lo que hay exactitud para e_μ . \square

Capítulo 2

Esquemas de Hermite sobre una subdivisión arbitraria

En [17] Dahmen, Goodman y Micchelli se plantean el problema de la construcción de funciones fundamentales de soporte compacto para la interpolación spline de Lagrange y construyen interpolantes en diferentes situaciones que son exactos en un cierto espacio de polinomios, uno de cuyos casos aparece tratado previamente en [47] con una técnica diferente y, con posterioridad, en [76]. Los resultados de [47] son generalizados a la interpolación de Hermite en [48].

En este capítulo vamos a obtener resultados en la línea de [17] para la interpolación de Hermite. En primer lugar trataremos la interpolación de Hermite de orden arbitrario fijo con la máxima clase global posible, dependiente del orden que consideremos; posteriormente, nos centraremos en la interpolación de Hermite de orden uno con clase global inferior en una unidad a la máxima posible. En cualquier caso, al exigir que el operador de interpolación sea exacto en un determinado espacio de polinomios, el error de interpolación será del orden de la potencia del máximo de las amplitudes de los intervalos definidos por los nodos de interpolación de exponente igual a la dimensión de dicho espacio.

2.1 Interpolación de Hermite de clase máxima

2.1.1 El problema de interpolación

Consideremos una sucesión biinfinita estrictamente creciente

$$X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

a cuyos elementos denominaremos nodos primarios. Si $n \geq 3$, sea

$$Y_n = \{y_{i,j}\}_{i \in \mathbb{Z}, j=1, \dots, n-1}$$

una sucesión de nodos secundarios tal que

$$x_i < y_{i,1} < \dots < y_{i,n-1} < x_{i+1} \quad i \in \mathbb{Z}$$

Notaremos por $\mathbb{P}_n^{n-1}(X \cup Y_n)$ al espacio de las funciones polinómicas a trozos con nodos en $X \cup Y_n$, de grado menor o igual que n y clase global $n - 1$.

Sean r y m números naturales menores o iguales que $n - 2$ y n , respectivamente, y \mathbb{P}_m el espacio de los polinomios de grado menor o igual que m . Para cada entero, k , entre 0 y r , sea I_k^r un subconjunto ordenado de \mathbb{Z} y supongamos que $0 \in I_k^r$. Notaremos por c_k^r al cardinal de I_k^r .

Para cada entero i , asociado a I_k^r , $0 \leq k \leq r$, consideremos el subconjunto $X_{i,k}^r$ de X definido por

$$X_{i,k}^r = \{x_{i+l}, l \in I_k^r\} = \{x_l, l \in I_{i,k}^r\} \quad (2.1.1)$$

donde

$$I_{i,k}^r = \{i + l, l \in I_k^r\} \quad (2.1.2)$$

Asimismo, definimos la $r + 1$ -upla X_i^r como

$$X_i^r = (X_{i,0}^r, X_{i,1}^r, \dots, X_{i,r}^r) \quad (2.1.3)$$

A partir de I_k^r , sea $\bar{I}_k^r = \bigcup_{s=k}^r I_s^r$, $0 \leq k \leq r$. Entonces, para cada entero i , definimos

$$\bar{I}_{i,k}^r = \{x_{l+i}, l \in \bar{I}_k^r\} \quad (2.1.4)$$

Asociada a X_i^r , haremos uso de la $r + 1$ -upla

$$\bar{X}_i^r = (\bar{X}_{i,0}^r, \bar{X}_{i,1}^r, \dots, \bar{X}_{i,r}^r) \quad (2.1.5)$$

donde

$$\bar{X}_{i,k}^r = \{x_l, l \in \bar{I}_{i,k}^r\}, \quad 0 \leq k \leq r, \quad (2.1.6)$$

Definición 2.1.1 Sea $i \in \mathbb{Z}$. Diremos que la $r + 1$ -upla X_i^r definida por (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3) es una configuración de Hermite de orden m \mathbb{P}_m -admisibile de tipo $[c_0^r, c_1^r, \dots, c_r^r]$ asociada a x_i si se verifican las siguientes condiciones:

1. Los subconjuntos $X_{i,k}^r$, $0 \leq k \leq r$, son disjuntos.
2. Los cardinales de los conjuntos I_k^r , $0 \leq k \leq r$, satisfacen la igualdad

$$c_0^r + 2c_1^r + \cdots + (r+1)c_r^r = m+1 \quad (2.1.7)$$

3. Cada conjunto $\overline{X}_{i,k}^r$, $0 \leq k \leq r$, definido por (2.1.4), (2.1.5) y (2.1.6) está formado por puntos consecutivos de X .

Por ejemplo, para $r = 1$, podemos emplear $I_0^1 = \{-2, 2\}$ e $I_1^1 = \{-1, 0, 1\}$, lo que da lugar a los conjuntos $X_{i,0}^1 = \{x_{i-2}, x_{i+2}\}$ y $X_{i,1}^1 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$. Entonces,

$$\overline{I}_0^1 = I_0^1 \cup I_1^1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad \overline{I}_1^1 = I_1^1 = \{-1, 0, 1\}$$

y

$$\overline{X}_{i,0}^1 = X_{i,0}^1 \cup X_{i,1}^1 = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}, \quad \overline{X}_{i,1}^1 = X_{i,1}^1 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$$

Se tiene que $m = 7$ a la vista de los cardinales de los conjuntos I_0^1 e I_1^1 .

Necesitamos aún alguna notación adicional antes de enunciar el problema de interpolación.

Si I es un subconjunto de \mathbb{Z} e i uno de sus elementos, notaremos por $\sigma_i(I)$ al conjunto

$$\sigma_i(I) = \{2i - j, j \in I\}$$

y, si P es un subconjunto de X indizado en I y x_i pertenece a P , el conjunto $\sigma_i(P)$ se define como

$$\sigma_i(P) = \{x_l, l \in \sigma_i(I)\} = \{x_{2i-j}, j \in I\}$$

Si $X_i^r = (X_{i,0}^r, X_{i,1}^r, \dots, X_{i,r}^r)$ es una configuración \mathbb{P}_m -admisibles, tiene sentido considerar los conjuntos $\sigma_i(\overline{I}_{i,k}^r)$ y $\sigma_i(\overline{X}_{i,k}^r)$, $0 \leq k \leq r$, además de $\sigma_i(\overline{X}_i^r) = (\sigma_i(\overline{X}_{i,0}^r), \sigma_i(\overline{X}_{i,1}^r), \dots, \sigma_i(\overline{X}_{i,r}^r))$.

Dado un entero i , para cualquier conjunto de escalares

$$\bigcup_{s=0}^r \{f_{k,s}, k \in \sigma_i(\overline{I}_{i,s}^r)\}$$

el problema de interpolación de Hermite consistente en encontrar un polinomio p de \mathbb{P}_m tal que

$$p_i^{(j)}(x_k) = f_{k,j}, \quad k \in \sigma_i(\overline{I}_{i,j}^r), \quad 0 \leq j \leq r$$

tiene una única solución. Sea $0 \leq k \leq r$. Para cada $x_j \in \sigma_i(\overline{X}_{i,k})$ existe un único polinomio $p_{j,k}(\bullet; \sigma_i(\overline{X}_i^r))$ en \mathbb{P}_m tal que

$$\begin{aligned} p_{j,k}^{(k')} (x_{j'}; \sigma_i(\overline{X}_i^r)) &= \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} \\ x_{j'} &\in \sigma_i(\overline{X}_{i,k}), \quad 0 \leq k' \leq r \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Cualquier polinomio p de P_m admite la representación

$$p = \sum_{k=0}^r \sum_{j \in \sigma_i(\overline{I}_{i,k}^r)} p^{(k)}(x_j) p_{j,k}(\bullet; \sigma_i(\overline{X}_i^r)) \quad (2.1.9)$$

Por otra parte, asociamos a cada conjunto $X_{i,k}^r$, $0 \leq k \leq r$, los enteros

$$\alpha_{i,k} = \min \overline{I}_{i,k}^r - 1, \quad \beta_{i,k} = \max \overline{I}_{i,k}^r + 1 \quad (2.1.10)$$

y el intervalo $[x_{\alpha_{i,k}}, x_{\beta_{i,k}}]$.

Enunciamos un resultado que será básico en la determinación de la existencia y unicidad de solución del problema de interpolación que estamos considerando.

Proposición 2.1.2 ([17], p. 642) *Supongamos que para algún $p \leq k - 2$*

$$a = \tau_0 < \tau_1 \leq \dots \leq \tau_p < \tau_{p+1} = b$$

Notemos por μ_i a la multiplicidad de τ_i . Entonces, para cualesquiera datos

$$f_{a,m}, \quad m = 0, \dots, s \quad f_{b,m}, \quad m = 0, \dots, k - 2 + p - s$$

donde $p - 1 \leq s \leq k - 1$, existe una única función polinómica a trozos, S , de grado $k - 1$ definida en $[a, b]$ con nodos en τ_i que tiene $k - 1 - \mu_i$ derivadas continuas en τ_i , $i = 1, \dots, p$, tal que

$$\begin{aligned} S^{(m)}(a) &= f_{a,m}, \quad m = 0, \dots, s \\ S^{(m)}(b) &= f_{b,m}, \quad m = 0, \dots, k - 2 + p - s \end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de enunciar el problema de interpolación.

Proposición 2.1.3 *Sea X_i^r una configuración de Hermite de orden r \mathbb{P}_m -admisibles de tipo $[c_0^r, c_1^r, \dots, c_r^r]$, donde r y m son números naturales que cumplen las condiciones establecidas inicialmente.*

Entonces, existe una única familia $\{H(\bullet; X_{i,k}^r), 0 \leq k \leq r\}_{i \in \mathbb{Z}}$ cuyos elementos satisfacen las siguientes propiedades:

1. $H(\bullet; X_{i,k}^r) \in \mathbb{P}_n^{n-1}(X \cup Y_n)$, $0 \leq k \leq r$.
2. $\text{sop } H(\bullet; X_{i,k}^r) = [x_{\alpha_{i,k}}, x_{\beta_{i,k}}]$, $0 \leq k \leq r$, donde $\alpha_{i,k}$ y $\beta_{i,k}$ están dados por (2.1.10).
3. Para $0 \leq k \leq r$, se cumplen las condiciones

$$H^{(k')} (x_j; X_{i,k}^r) = \delta_{i,j} \delta_{k,k'}, \quad x_j \in \overline{X}_{i,k}^r, \quad 0 \leq k' \leq r \quad (2.1.11)$$

4. Se satisfacen las igualdades

$$\begin{aligned} H^{(\alpha)} (x_{i+h}; X_{i,k}^r) &= p_{i,k}^{(\alpha)} (x_{i+h}; \sigma_{i+h}(\overline{X}_{i+h}^r)) \\ h \in \overline{I}_k^r, \quad r+1 \leq \alpha \leq n-1, \quad 0 \leq k \leq r \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

En estas condiciones, el interpolante de Hermite de orden r definido por

$$\mathcal{H}^r f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^r f^{(k)}(x_i) H(\bullet; X_{i,k}^r) \quad (2.1.13)$$

asociado a (I_0^r, \dots, I_r^r) es exacto en \mathbb{P}_m .

Demostración

Para cada entero i , la aplicación de la proposición (2.1.2), con $k = p + 1$ y $p = n - 1$, a cada uno de los macrointervalos $[x_j, x_{j+1}]$ que formarán los soportes de la funciones de la familia $\{H(\bullet; X_{i,k}^r), 0 \leq k \leq r\}$ implica que éstas quedarán determinadas si se conocen los valores y los de sus derivadas hasta el orden $n - 1$ en los puntos interiores a los correspondientes soportes. Como las igualdades (2.1.11) y (2.1.12) proporcionan los valores de dichas derivadas hasta el orden r , sólo resta demostrar que el operador de interpolación definido por (2.1.13) es exacto en \mathbb{P}_m .

Sea j un entero cualquiera. El nodo x_j es interior al soporte de $H(\bullet; X_{i,k}^r)$, $0 \leq k \leq r$, si y sólo si $i \in \sigma_j(\overline{I}_{j,k}^r)$, por lo que, para cualquier polinomio p de grado menor o igual que m se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^r p)^{(\alpha)}(x_j) &= \sum_{k=0}^r \sum_{i \in \sigma_j(\overline{I}_{j,k}^r)} p^{(k)}(x_i) H^{(\alpha)}(x_j; X_{i,k}^r) \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{i \in \overline{I}_{j,k}^r} p^{(k)}(x_{2j-i}) H^{(\alpha)}(x_j; X_{2j-i,k}^r) \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{i \in \overline{I}_k^r} p^{(k)}(x_{j-i}) H^{(\alpha)}(x_j; X_{j-i,k}^r) \end{aligned}$$

Por (2.1.12), para todo entero j se cumplen las igualdades

$$H^{(\alpha)}(x_{j+i}; X_{j,k}^r) = p_{j,k}^{(\alpha)}(x_{j+i}; \sigma_{j+i}(\overline{X}_{j+i}^r)), \quad i \in \overline{I}_k^r, \quad 0 \leq k \leq r$$

que equivalen a

$$H^{(\alpha)}(x_j; X_{j-i,k}^r) = p_{j-i,k}^{(\alpha)}(x_j; \sigma_j(\overline{X}_j^r)), \quad i \in I_k^r, \quad 0 \leq k \leq r$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^r p)^{(\alpha)}(x_j) &= \sum_{k=0}^r \sum_{i \in \overline{I}_k^r} p^{(k)}(x_{j-i}) p_{j-i,k}^{(\alpha)}(x_j; \sigma_j(\overline{X}_j^r)) \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{i \in \overline{I}_{j,k}^r} p^{(k)}(x_{2j-i}) p_{2j-i,k}^{(\alpha)}(x_j; \sigma_j(\overline{X}_j^r)) \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{i \in \sigma(\overline{I}_{j,k}^r)} p^{(k)}(x_i) p_{i,k}^{(\alpha)}(x_j; \sigma_j(\overline{X}_j^r)) \end{aligned}$$

y, por (2.1.9) (intercambiando los papeles de i y j), concluimos queda garantizado que

$$(\mathcal{H}^r p)^{(\alpha)}(x_j) = p^{(\alpha)}(x_j)$$

para $r+1 \leq \alpha \leq n-1$.

En definitiva, para cada j de \mathbb{Z} y cada polinomio p de \mathbb{P}_m disponemos de las igualdades

$$(\mathcal{H}^r p)^{(\alpha)}(x_j) = p^{(\alpha)}(x_j), \quad 0 \leq \alpha \leq n-1$$

y, en consecuencia, la proposición 2.1.2 implica que

$$\mathcal{H}^r p = p$$

con lo que concluye la demostración. □

2.1.2 Ejemplos

Interpolante de Hermite de orden uno cúbico de clase dos exacto en \mathbb{P}_3

Comenzamos detallando la construcción de un interpolante de Hermite de orden uno exacto en \mathbb{P}_3 , cuyas funciones fundamentales de soporte compacto son funciones cúbicas a trozos de clase dos.

Entonces, $r = 1$ y $m = 3$. Partimos de los conjuntos de índices

$$I_0^1 = \emptyset, I_1^1 = \{0, 1\}$$

cuyos cardinales satisfacen la igualdad (2.1.7). Entonces, para cada entero i ,

$$I_{i,0}^1 = \emptyset, I_{i,1}^1 = \{i, i+1\}$$

y

$$X_{i,0}^1 = \emptyset, X_{i,1}^1 = \{x_i, x_{i+1}\}$$

Además,

$$\bar{I}_0^1 = I_0^1 \cup I_1^1 = \{0, 1\}, \bar{I}_1^1 = I_1^1 = \{0, 1\}$$

y

$$\bar{X}_{i,0}^1 = \{x_i, x_{i+1}\}, \bar{X}_{i,1}^1 = \{x_i, x_{i+1}\}$$

Las funciones fundamentales para el operador de interpolación de Hermite de orden uno que vamos a construir asociadas al nodo x_i , $H(\bullet; X_{i,0}^1)$ y $H(\bullet; X_{i,1}^1)$, tienen soportes iguales a $[x_{i-1}, x_{i+2}]$.

La relación (2.1.11) se traduce en

$$H(x_j; X_{i,0}^1) = \delta_{i,j}, H'(x_j; X_{i,0}^1) = 0, j \in \mathbb{Z}$$

$$H(x_j; X_{i,1}^1) = 0, H'(x_j; X_{i,1}^1) = \delta_{i,j}, j \in \mathbb{Z}$$

Sólo queda determinar los valores de la segunda derivada de estas funciones en los dos nodos interiores al soporte. Siguiendo la notación de la proposición anterior, para $k = 0$ y $h = 0 \in \bar{I}_0^1 = \{0, 1\}$, y haciendo $h_j = x_{j+1} - x_j$, la igualdad (2.1.12) da lugar a

$$\begin{aligned} H''(x_i; X_{i,0}^1) &= p''_{i,0}(x_i; \sigma_i(\bar{X}_i^1)) \\ &= p''_{i,0}(x_i; \sigma_i(\bar{X}_{i,0}^1), \sigma_i(\bar{X}_{i,1}^1)) \\ &= p''_{i,0}(x_i; \sigma_i(\{x_i, x_{i+1}\}), \sigma_i(\{x_i, x_{i+1}\})) \\ &= p''_{i,0}(x_i; \{x_{i-1}, x_i\}, \{x_i, x_{i+1}\}) \\ &= -\frac{6}{h_{i-1}^2} \end{aligned}$$

mientras que $h = 1$ conduce a

$$\begin{aligned}
 H''(x_{i+1}; X_{i,0}^1) &= p''_{i,0}(x_{i+1}; \sigma_{i+1}(\bar{X}_{i+1}^1)) \\
 &= p''_{i,0}(x_{i+1}; \sigma_{i+1}(\bar{X}_{i+1,0}^1), \sigma_{i+1}(\bar{X}_{i+1,1}^1)) \\
 &= p''_{i,0}(x_{i+1}; \sigma_{i+1}(\{x_{i+1}, x_{i+2}\}), \sigma_{i+1}(\{x_{i+1}, x_{i+2}\})) \\
 &= p''_{i,0}(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}\}, \{x_i, x_{i+1}\}) \\
 &= \frac{6}{h_i^2}
 \end{aligned}$$

Para $k = 1$ y $h \in \bar{I}_1^1 = \{0, 1\}$, se llega a

$$H''(x_i; X_{i,1}^1) = p''_{i,1}(x_i; \{x_{i-1}, x_i\}, \{x_{i-1}, x_i\}) = \frac{4}{h_{i-1}}$$

y

$$H''(x_{i+1}; X_{i,1}^1) = p''_{i,1}(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}\}, \{x_i, x_{i+1}\}) = \frac{2}{h_i}$$

El interpolante

$$\mathcal{H}^1 f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) H(\bullet; X_{i,0}^1) + f'(x_i) H(\bullet; X_{i,1}^1))$$

es exacto en \mathbb{P}_3 .

Para describir la función $H(\bullet; X_{i,0}^1)$ en cada macro-intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ podemos emplear, por ejemplo, sus B-coeficientes ([19]). Si se denotan por $b_{i,j}$, $0 \leq j \leq 9$, y los nodos secundarios son $y_{j,1} = x_j + \alpha_j h_j$ e $y_{j,2} = x_{j+1} - \beta_j h_j$, $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_j < 1$, $0 < \alpha_j + \beta_j < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 b_{i-1,0} &= b_{i-1,1} = b_{i-1,2} = 0 \\
 b_{i-1,3} &= \alpha_{i-1}^2 \frac{1 - \beta_{i-1}(1 - \alpha_{i-1})}{1 - \beta_{i-1}} \\
 b_{i-1,4} &= \alpha_{i-1} [1 - \beta_{i-1}(1 - \alpha_{i-1})] \\
 b_{i-1,5} &= (1 - \beta_{i-1}) [1 - \beta_{i-1}(1 - \alpha_{i-1})] \\
 b_{i-1,6} &= \left(1 - \alpha_{i-1} + \beta_{i-1} - \alpha_{i-1}\beta_{i-1} - 2\beta_{i-1}^2 + \alpha_{i-1}\beta_{i-1}^2\right) \frac{1 - \beta_{i-1}}{1 - \alpha_{i-1}} \\
 b_{i-1,7} &= 1 - \beta_{i-1}^2 \\
 b_{i-1,8} &= b_{i-1,9} = 1
 \end{aligned}$$

son los correspondientes al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, los relativos a $[x_i, x_{i+1}]$ son

$$\begin{aligned}
 b_{i,0} &= b_{i,1} = 1 \\
 b_{i,2} &= 1 - \frac{\alpha_i h_i^2}{h_{i-1}^2} \\
 b_{i,3} &= \frac{h_{i-1}^2 (1 - \alpha_i^2 - \beta_i + \alpha_i^2 \beta_i - \alpha_i^3 \beta_i) + h_i^2 (\alpha_i^3 (2 - \beta_i) - 2\alpha_i^2 (1 - \beta_i))}{(1 - \beta_i) h_{i-1}^2} \\
 b_{i,4} &= (1 - \alpha_i) \frac{h_{i-1}^2 (1 + \alpha_i \beta_i) - h_i^2 \alpha_i (1 + \beta_i)}{h_{i-1}^2} \\
 b_{i,5} &= \beta_i \frac{h_{i-1}^2 (2 - \alpha_i - \beta_i + \alpha_i \beta_i) - h_i^2 \alpha_i (1 - \beta_i)}{h_{i-1}^2} \\
 b_{i,6} &= \beta_i^2 \frac{h_{i-1}^2 (3 - 2\alpha_i - 2\beta_i + \alpha_i \beta_i) - h_i^2 \alpha_i (1 - \beta_i)}{(1 - \alpha_i) h_{i-1}^2} \\
 b_{i,7} &= \beta_i^2 \\
 b_{i,8} &= b_{i,9} = 0
 \end{aligned}$$

y los de $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ son

$$\begin{aligned}
 b_{i+1,0} &= b_{i+1,1} = 0 \\
 b_{i+1,2} &= \alpha_{i+1}^2 \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2} \\
 b_{i+1,3} &= \alpha_{i+1}^2 h_{i+1}^2 \frac{2 - 2\alpha_{i+1} - 2\beta_{i+1} + \alpha_{i+1} \beta_{i+1}}{(1 - \beta_{i+1}) h_i^2} \\
 b_{i+1,4} &= \alpha_i (1 - \alpha_{i+1}) (1 - \beta_{i+1}) \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2} \\
 b_{i+1,5} &= \alpha_{i+1} \beta_{i+1} (1 - \beta_{i+1}) \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2} \\
 b_{i+1,6} &= \alpha_{i+1} \beta_{i+1}^2 \frac{1 - \beta_{i+1}}{1 - \alpha_{i+1}} \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2} \\
 b_{i+1,7} &= b_{i+1,8} = b_{i+1,9} = 0
 \end{aligned}$$

Los B-coeficientes de $H(\bullet; X_{i,1}^1)$ en el macro-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ son

$$\begin{aligned}
 b_{i-1,0} &= b_{i-1,1} = b_{i-1,2} = 0 \\
 b_{i-1,3} &= -\frac{1}{3} h_{i-1} \alpha_{i-1}^2 \frac{1 - \alpha_{i-1} - \beta_{i-1} + 2\alpha_{i-1} \beta_{i-1}}{1 - \beta_{i-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{i-1,4} &= -\frac{1}{3}h_{i-1}\alpha_{i-1}(1 - \alpha_{i-1} - \beta_{i-1} + 2\alpha_{i-1}\beta_{i-1}) \\
b_{i-1,5} &= -\frac{1}{3}h_{i-1}(1 - \beta_{i-1})(1 - \alpha_{i-1} - \beta_{i-1} + 2\alpha_{i-1}\beta_{i-1}) \\
b_{i-1,6} &= -\frac{1}{3}h_{i-1}\beta_{i-1}(1 - \beta_{i-1})\frac{(3 - 3\alpha_{i-1} - 3\beta_{i-1} + 2\alpha_{i-1}\beta_{i-1})}{1 - \alpha_{i-1}} \\
b_{i-1,7} &= -\frac{2}{3}\beta_{i-1}(1 - \beta_{i-1})h_{i-1} \\
b_{i-1,8} &= -\frac{1}{3}\beta_{i-1}h_{i-1} \\
b_{i-1,9} &= 0
\end{aligned}$$

mientras que en $[x_i, x_{i+1}]$ son

$$\begin{aligned}
b_{i,0} &= 0 \\
b_{i,1} &= \frac{1}{3}\alpha_i h_i \\
b_{i,2} &= \frac{2}{3}\alpha_i \frac{h_i(h_{i-1} + \alpha_i h_i)}{h_{i-1}} \\
b_{i,3} &= \frac{2\alpha_i^2(1 - \alpha_i - \beta_i)h_i(h_{i-1} + h_i)}{3(1 - \beta_i)h_{i-1}} + \frac{(1 - \alpha_i)\alpha_i h_i [h_{i-1}(3 - \alpha_i) - 2\alpha_i h_i]}{3h_{i-1}} \\
b_{i,4} &= (1 - \alpha_i)h_i \frac{h_{i-1}(1 + \alpha_i - \beta_i + \alpha_i\beta_i) + 2h_i\alpha_i(1 - \beta_i)}{3h_{i-1}} \\
b_{i,5} &= \beta_i h_i \frac{h_{i-1}(2 - 2\beta_i + \alpha_i\beta_i) + 2\alpha_i h_i(1 - \beta_i)}{3h_{i-1}} \\
b_{i,6} &= (1 - \beta_i)\beta_i^2 h_i \frac{(3 - \alpha_i)h_{i-1} + 2\alpha_i h_i}{3(1 - \alpha_i)h_{i-1}} \\
b_{i,7} &= \frac{1}{3}\beta_i^2 h_i \\
b_{i,8} &= b_{i,9} = 0
\end{aligned}$$

y en $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ son

$$\begin{aligned}
b_{i+1,0} &= b_{i+1,1} = 0 \\
b_{i+1,2} &= \frac{1}{3}\alpha_{i+1}^2 \frac{h_{i+1}^2}{h_i} \\
b_{i+1,3} &= \frac{1}{3}\alpha_{i+1}^2 h_{i+1}^2 \frac{2 - 2\alpha_{i+1} - 2\beta_{i+1} + \alpha_{i+1}\beta_{i+1}}{(1 - \beta_{i+1})h_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{i+1,4} &= \frac{1}{3}\alpha_{i+1}(1-\alpha_{i+1})(1-\beta_{i+1})\frac{h_{i+1}^2}{h_i} \\
b_{i+1,5} &= \frac{1}{3}\alpha_{i+1}(1-\beta_{i+1})\beta_{i+1}\frac{h_{i+1}^2}{h_i} \\
b_{i+1,6} &= \frac{1}{3}\alpha_{i+1}\beta_{i+1}^2\frac{(1-\beta_{i+1})h_{i+1}^2}{(1-\alpha_{i+1})h_i} \\
b_{i+1,7} &= b_{i+1,8} = b_{i+1,9} = 0
\end{aligned}$$

En la figura 2.1 se representan las gráficas de las funciones fundamentales relativas a los nodos primarios $-4, 0, 2$ y 7 , con nodos secundarios $-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}, -1, \frac{3}{2}$ y $\frac{23}{4}$.

Una segunda posibilidad consiste en tomar $I_0^1 = \emptyset$ y $I_1^1 = \{-1, 0\}$. Las funciones fundamentales asociadas correspondientes a un nodo primario x_i tienen ambas soporte igual a $[x_{i-2}, x_{i+1}]$. Los valores de la derivada segunda de $H(\bullet; X_{i,0}^1)$ en los nodos interiores al soporte son

$$H''(x_{i-1}; X_{i,0}^1) = \frac{6}{h_{i-1}^2}, \quad H''(x_i; X_{i,0}^1) = -\frac{6}{h_i^2}$$

y los de $H(\bullet; X_{i,1}^1)$

$$H''(x_{i-1}; X_{i,1}^1) = -\frac{2}{h_{i-1}}, \quad H''(x_i; X_{i,1}^1) = -\frac{4}{h_i}$$

En la figura 2.2 se muestran las gráficas con los mismos datos que en el ejemplo anterior.

Consideraremos aún una tercera posibilidad cuando tratemos al final de este capítulo el error de interpolación.

Interpolante de Hermite de orden dos quíntico de clase cuatro exacto en \mathbb{P}_4

Si deseamos construir un operador de interpolación de Hermite de orden dos quíntico de clase cuatro que sea exacto en \mathbb{P}_4 , entonces $n = 5$, $r = 2$ y las derivadas que deben ser calculadas para las tres funciones fundamentales son las correspondientes a $\alpha = 3, 4$, pues hasta la derivada segunda son conocidas.

Vamos a considerar $I_0^2 = \emptyset$, $I_1^2 = \{1\}$ y $I_2^0 = \{0\}$. Entonces, $c_0^2 = 0$, $c_1^2 = c_2^2 = 1$

y

$$c_0^2 + 2c_1^2 + 3c_2^2 = 5 = \dim \mathbb{P}_4$$

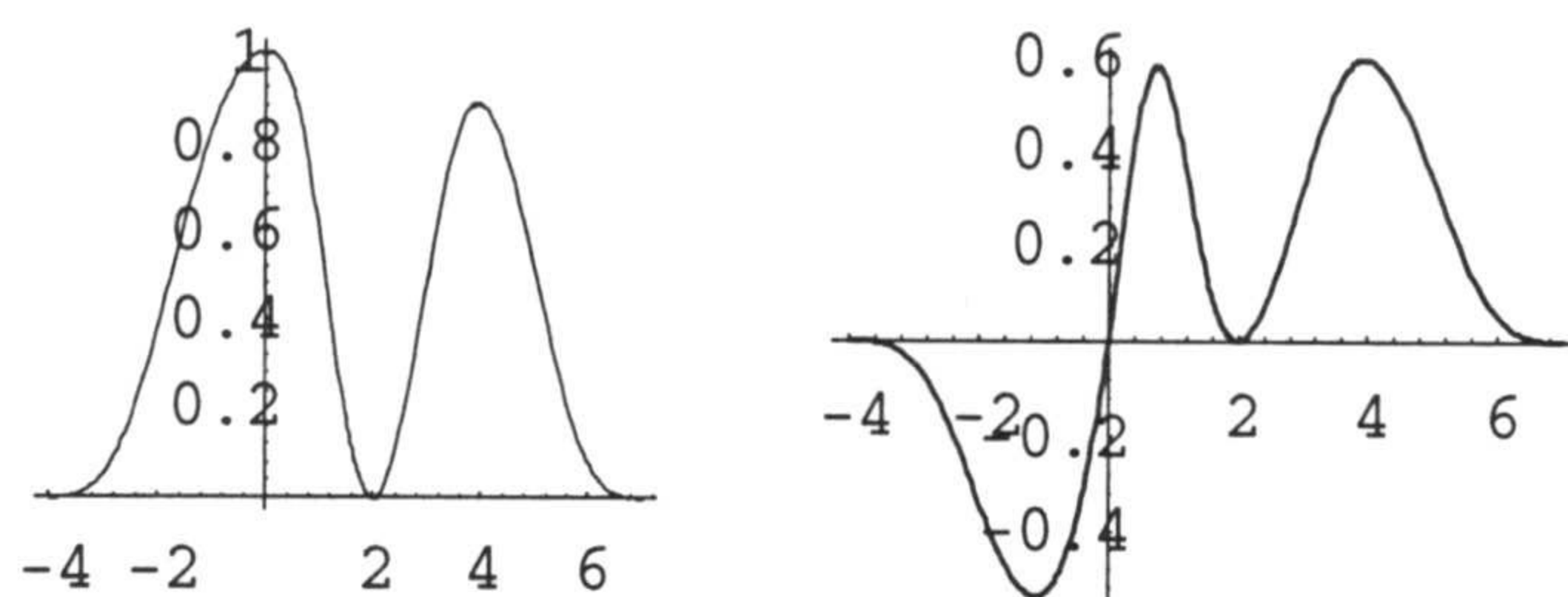


Figura 2.1: Funciones fundamentales para la interpolación spline de Hermite de orden uno, cúbica de clase dos. Los nodos primarios son $-4, 0, 2$ y 7 , y los parámetros α_i que fijan los nodos secundarios son iguales a $\frac{1}{3}$.

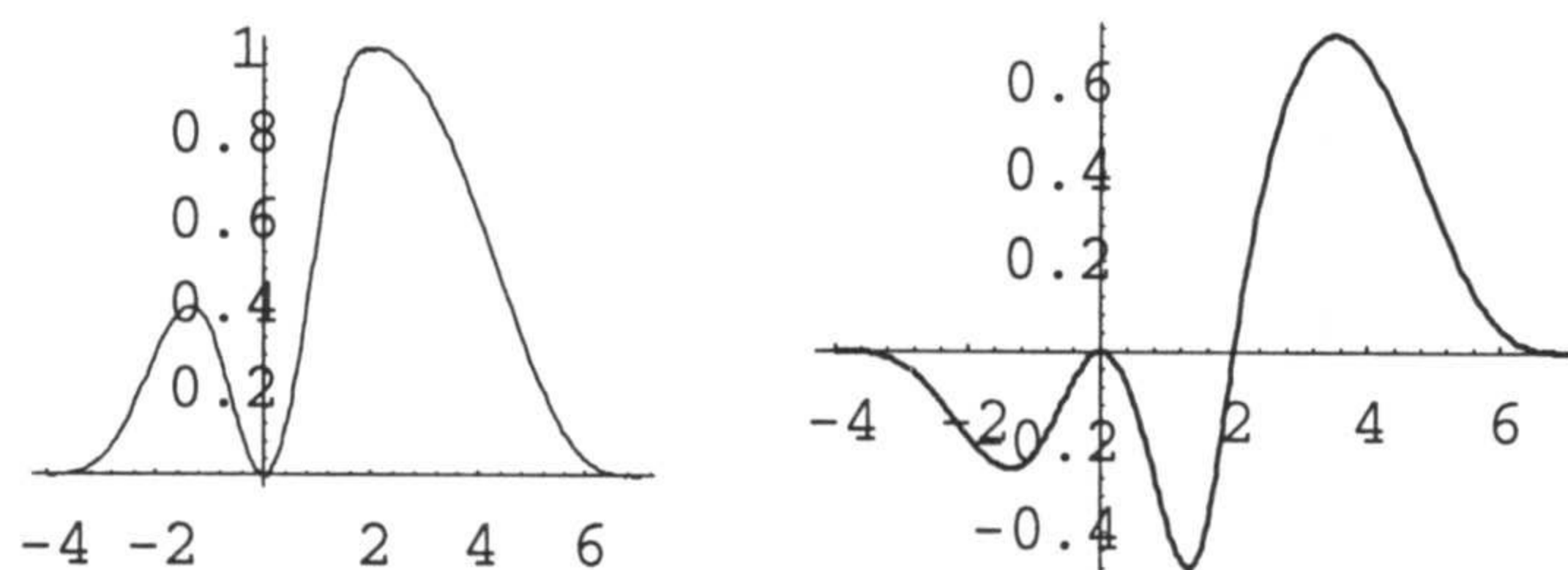


Figura 2.2: Funciones fundamentales con idénticos nodos primarios y secundarios que el caso precedente. Varían los soportes y, en consecuencia, el nodo al que corresponden.

Además, para cada entero i ,

$$X_{i,0}^2 = \emptyset, \quad X_{i,1}^2 = \{x_{i+1}\}, \quad X_{i,2}^2 = \{x_i\}$$

y, mediante los conjuntos de índices

$$I_0^2 = \{0, 1\}, \quad I_1^2 = \{0, 1\}, \quad I_2^0 = \{0\},$$

disponemos de los conjuntos de nodos

$$X_{i,0}^2 = \{x_i, x_{i+1}\}, \quad X_{i,1}^2 = \{x_i, x_{i+1}\}, \quad X_{i,2}^2 = \{x_i\}$$

Las funciones fundamentales $H(\bullet; X_{i,0}^2)$ y $H(\bullet; X_{i,1}^2)$ tienen el mismo soporte, $[x_{i-1}, x_{i+2}]$, mientras que el de $H(\bullet; X_{i,2}^2)$ es $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Para $k = 0$, $h = 0 \in \bar{I}_0^2 = \{0, 1\}$ y $\alpha = 3, 4$, se cumple que

$$\begin{aligned} H^{(\alpha)}(x_i; X_{i,0}^2) &= p_{i,0}^{(\alpha)}(x_i; \sigma_i(\bar{X}_i^2)) \\ &= p_{i,0}^{(\alpha)}(x_i; \sigma_i(\bar{X}_{i,0}^2), \sigma_i(\bar{X}_{i,1}^2), \sigma_i(\bar{X}_{i,1}^2)) \\ &= p_{i,0}^{(\alpha)}(x_i; \sigma_i(\{x_i, x_{i+1}\}), \sigma_i(\{x_i, x_{i+1}\}), \sigma_i(\{x_i\})) \\ &= p_{i,0}^{(\alpha)}(x_i; \{x_{i-1}, x_i\}, \{x_{i-1}, x_i\}, \{x_i\}) \end{aligned}$$

por lo que

$$H'''(x_i; X_{i,0}^2) = -\frac{48}{h_{i-1}^3}$$

y

$$H^{(4)}(x_i; X_{i,0}^2) = \frac{72}{h_{i-1}^4}$$

Análogamente, para $h = 0 \in \bar{I}_0^2 = \{0, 1\}$ y $\alpha = 3, 4$,

$$H^{(\alpha)}(x_{i+1}; X_{i,0}^2) = p_{i,0}^{(\alpha)}(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}\}, \{x_i, x_{i+1}\}, \{x_{i+1}\})$$

y, entonces,

$$H'''(x_{i+1}; X_{i,0}^2) = \frac{48}{h_i^3}$$

y

$$H^{(4)}(x_{i+1}; X_{i,0}^2) = -\frac{72}{h_i^4}$$

Para la función fundamental $H(\bullet; X_{i,1}^2)$ se opera de igual modo, obteniendo los valores

$$H'''(x_i; X_{i,1}^2) = \frac{30}{h_{i-1}^2}, \quad H^{(4)}(x_i; X_{i,1}^2) = -\frac{6}{h_{i-1}^3}$$

y

$$H'''(x_{i+1}; X_{i,1}^2) = \frac{18}{h_i^2}, \quad H^{(4)}(x_{i+1}; X_{i,1}^2) = -\frac{24}{h_i^3}$$

En lo que respecta a $H(\bullet; X_{i,2}^2)$, sólo hay que considerar el nodo x_i , encontrando que

$$H'''(x_i; X_{i,2}^2) = -\frac{6}{h_{i-1}}$$

y

$$H^{(4)}(x_i; X_{i,2}^2) = \frac{12}{h_{i-1}^2}$$

2.2 El problema de interpolación de Hermite de orden uno

Hemos estudiado previamente la existencia y unicidad de funciones polinómicas a trozos de soporte compacto de grado n y clase global máxima, $n - 1$, fundamentales para la interpolación de Hermite de orden prefijado, cuando a una sucesión de nodos primarios se le asocia una de secundarios de manera que entre cada dos nodos primarios hay exactamente $n - 1$ secundarios. El carácter local de proceso constructivo se debe a la inclusión del número preciso de nodos secundarios, de modo que la determinación de dichas funciones se realiza paso a paso entre cada dos nodos primarios. En el caso estudiado hasta el momento, la imposición de clase global máxima ha tenido como efecto el que sea preciso considerar $n - 1$ nodos secundarios y calcular los valores en los nodos primarios interiores al soporte de las derivadas de orden superior al establecido para la interpolación de Hermite. Si la clase global no tiene por qué ser máxima, precisaremos un menor número de nodos secundarios y tendremos que calcular los valores de un número más pequeño de derivadas. Aunque la clase global se vea reducida, en cada macro-intervalo será óptima.

A continuación vamos a centrarnos en la interpolación de Hermite de orden uno mediante funciones spline de grado n y clase $n - 2$, sin perder de vista que deseamos construir operadores de interpolación de un modo local; veremos cómo los soportes de las funciones fundamentales dependen de la paridad de n .

El cálculo de los valores de los grados de libertad inherentes se hace exigiendo, como hasta ahora, que el operador de interpolación sea exacto en algún espacio de polinomios. El espacio que se considere incidirá en el tamaño de los soportes de las funciones fundamentales. En lugar de dejar libertad en su elección, vamos a exigir exactitud en el mayor espacio de polinomios posible.

El proceso que seguiremos es perfectamente aplicable para obtener operadores de interpolación spline de Lagrange, sin más que estimar las derivadas a partir del orden uno. Como es una simple e inmediata variación, omitimos su inclusión.

La notación que emplearemos será más simple que la utilizada anteriormente.

2.2.1 El caso impar.

Suponemos dada una sucesión biinfinita estrictamente creciente de nodos

$$X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

Para $r \geq 3$, sea $Y_{2r-1} = \{y_{i,j}\}_{i \in \mathbb{Z}, j=1, \dots, 2r-4}$ un conjunto de nodos que verifican, para cada entero i , las relaciones

$$x_i < y_{i,1} < y_{i,2} < \dots < y_{i,2r-4} < x_{i+1} \quad (2.2.1)$$

Notaremos por $\overline{\mathbb{P}}_{2r-1}^{2r-3}(X \cup Y_{2r-1})$ al espacio de las funciones polinómicas a trozos con nodos en $X \cup Y_{2r-1}$ de grado menor o igual que $2r-1$, clase global $2r-3$, cuyas restricciones a los intervalos definidos por los nodos primarios son de clase $2r-2$.

Si v es un entero fijo entre 1 y r , la condición (2.2.1) implica que cualquier función de $\overline{\mathbb{P}}_{2r-1}^{2r-3}(X \cup Y_{2r-1})$ de soporte $[x_{i-v}, x_{i-v+r+1}]$ queda determinada unívocamente por sus valores y los de sus derivadas hasta el orden $2r-3$ en los nodos x_j interiores al soporte (proposición 2.1.2, $s = 2r-3$, $p = 2r-4$ y $k = 2r$).

Sea $1 \leq v \leq r$. Para cada entero i , sean $\{f_{i+v-r}^m, f_{i+v-r+1}^m, \dots, f_{i+v-1}^m\}$, $m = 0, 1$, dos conjuntos de escalares; el problema consistente en encontrar un polinomio, p , de \mathbb{P}_{2r-1} tal que

$$p^{(\alpha)}(x_{i+v-r+k-1}) = f_{i+v-r+k-1}^\alpha, \quad 1 \leq k \leq r, \quad \alpha = 0, 1$$

es unisolvante y, en consecuencia, existen polinomios $Q_l(\bullet; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\})$ y $R_l(\bullet; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\})$, $1 \leq l \leq r$, definidos unívocamente por las igualdades

$$\begin{aligned} Q_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= \delta_{l,l'} \\ Q'_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= 0, \quad 1 \leq l, l' \leq r \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= 0 \\ R'_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= \delta_{l,l'}, \quad 1 \leq l, l' \leq r \end{aligned}$$

respectivamente. Además, todo polinomio de \mathbb{P}_{2r-1} , p , se escribe de forma única como

$$p = \sum_{k=1}^r [p(x_{i+v-r+k-1}) Q_k(\bullet; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) + p'(x_{i+v-r+k-1}) R_k(\bullet; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\})]$$

Proposición 2.2.1 *Para $r \geq 3$, $1 \leq v \leq r$ e Y_{2r-1} satisfaciendo (2.2.1) existe una única familia $\{M_{i,2r-1,v}, N_{i,2r-1,v}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de funciones de $\overline{\mathbb{P}}_{2r-1}^{2r-3}(X \cup Y_{2r-1})$ que, para cada entero i , satisfacen las siguientes condiciones:*

1.

$$\text{sop } M_{i,2r-1,v} = \text{sop } N_{i,2r-1,v} = [x_{i-v}, x_{i-v+r+1}] \quad (2.2.2)$$

2.

$$\begin{aligned} M_{i,2r-1,v}(x_j) &= \delta_{i,j}, & M'_{i,2r-1,v}(x_j) &= 0, & j \in \mathbb{Z} \\ N_{i,2r-1,v}(x_j) &= 0, & N'_{i,2r-1,v}(x_j) &= \delta_{i,j}, & j \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

3. Para cada α entre 2 y $2r - 3$ y cada k entre 1 y r ,

$$\begin{aligned} M_{i,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= Q_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\}) \\ N_{i,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= R_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\}) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

En estas condiciones, el interpolante de Hermite de orden uno definido por

$$\mathcal{H}_{2r-1,v} f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) M_{i,2r-1,v} + f'(x_i) N_{i,2r-1,v}) \quad (2.2.5)$$

es exacto en \mathbb{P}_{2r-1} .

Demostración

La existencia y unicidad de las funciones $M_{i,2r-1,v}$ y $N_{i,2r-1,v}$ es consecuencia de la proposición 2.1.2: quedarán unívocamente determinadas si conocemos sus valores y los de sus derivadas hasta el orden $2r - 3$ en los nodos interiores a sus soportes, y éstos vienen dados por (2.2.3) y (2.2.4). Queda por probar, pues, la exactitud del interpolante construido.

Sea $j \in \mathbb{Z}$ fijo. La condición (2.2.2) implica que x_j es interior a los soportes de las funciones $M_{i,2r-1,v}$ y $N_{i,2r-1,v}$ indizadas en $\{j+v-r, \dots, j+v-1\}$. En consecuencia, si p es un polinomio de \mathbb{P}_{2r-1} , para cada α entre 2 y $2r-3$, de (2.2.5) se tiene que

$$(\mathcal{H}_{2r-1,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} \left(p(x_i) M_{i,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_j) + p'(x_i) N_{i,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_j) \right)$$

Por (2.2.4), que son válidas para cada entero i , podemos escribir

$$M_{j,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_{j-v+i}) = Q_{r-i+1}^{(\alpha)}(x_{j-v+i}; \{x_{j+i-r}, \dots, x_{j+i-1}\})$$

y

$$N_{j,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_{j-v+i}) = R_{r-i+1}^{(\alpha)}(x_{j-v+i}; \{x_{j+i-r}, \dots, x_{j+i-1}\})$$

para cada i , $1 \leq i \leq r$. Éstas, válidas para cada entero j , se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} M_{i,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_j) &= Q_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \\ N_{j,2r-1,v}^{(\alpha)}(x_j) &= R_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \end{aligned}$$

con $j+v-r+1 \leq i \leq j+v-1$, sin más que efectuar los cambios de índices oportunos.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{2r-1,v}p)^{(\alpha)}(x_j) &= \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} \left(p(x_i) Q_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_i) R_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \left(p(x_{i+j+v-r-1}) Q_i^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_{i+j+v-r-1}) R_i^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \\ &= \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \sum_{i=1}^r \left(p(x_{i+j+v-r-1}) Q_i(t; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_{i+j+v-r-1}) R_i(t; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \Big|_{t=x_j} \end{aligned}$$

Pero

$$p = \sum_{i=1}^r \left(p(x_{i+j+v-r-1}) Q_i(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& p'(x_{i+j+v-r-1}) R_i(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \\
= & \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} (p(x_i) Q_{i-j-v+r+1}(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \\
& p'(x_i) R_{i-j-v+r+1}(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}))
\end{aligned}$$

por lo que

$$(\mathcal{H}_{2r-1,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = p^{(\alpha)}(x_j), \quad 0 \leq \alpha \leq 2r-3$$

Estas relaciones, junto con (2.2.3), implican que $(\mathcal{H}_{2r-1,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = p^{(\alpha)}(x_j)$, $0 \leq \alpha \leq 2r-3$, para cada nodo primario x_j , lo que conduce a la exactitud de $\mathcal{H}_{2r-1,v}$ en \mathbb{P}_{2r-1} aplicando la proposición 2.1.2. \square

2.2.2 El caso par

Si continuamos designando por $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a una sucesión estrictamente creciente de nodos primarios, podemos plantearnos la construcción de un interpolante de Hermite de orden uno exacto en \mathbb{P}_{2r-2} definido a partir de funciones del espacio $\overline{\mathbb{P}}_{2r-2}^{2r-4}(X \cup Y_{2r-2})$, análogo a $\overline{\mathbb{P}}_{2r-1}^{2r-3}(X \cup Y_{2r-1})$, con $r \geq 3$, donde Y_{2r-2} será un conjunto de nodos secundarios tal que la construcción sea local. Impondremos, además, que el operador de interpolación sea exacto en el mayor espacio posible de polinomios, es decir \mathbb{P}_{2r-2} .

La aplicación de la proposición 2.1.2, con $s = 2r-4$ y $k = 2r$, implica que entre cada dos nodos primarios debemos considerar $p = 2r-5$ nodos secundarios. En consecuencia, supongamos que $Y_{2r-2} = \{y_{i,j}\}_{i \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,2r-5}$ es una sucesión tal que

$$x_i < y_{i,1} < y_{i,2} < \dots < y_{i,2r-5} < x_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (2.2.6)$$

Cualquier función de $\overline{\mathbb{P}}_{2r-2}^{2r-4}(X \cup Y_{2r-2})$ de soporte compacto determinado por nodos de X queda definida de manera única a partir de sus valores y de los de sus derivadas hasta el orden $2r-4$ en los nodos primarios interiores al soporte.

Como la dimensión de \mathbb{P}_{2r-2} es impar, los soportes minimales de las funciones fundamentales que se van a construir no van a tener igual número de macro-intervalos, al contrario de lo que ocurría en el caso impar. Ello origina dos posibilidades. Estudiemos la primera.

Sea $1 \leq v \leq r$. Consideremos el subconjunto $\{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}$ de X para un $i \in \mathbb{Z}$ fijo. Dados subconjuntos de números reales $\{f_{i+v-r}^m, \dots, f_{i+v-1}^m\}$, $m = 0, 1$, el problema consistente en encontrar un polinomio p de grado menor o igual que $2r-2$

tal que

$$\begin{aligned} p(x_{i+v-r+k-1}) &= f_{i+v-r+k-1}^0, \quad 1 \leq k \leq r \\ p'(x_{i+v-r+k}) &= f_{i+v-r+k-1}^1, \quad 1 \leq k \leq r-1 \end{aligned}$$

es unisolvante. En \mathbb{P}_{2r-2} consideremos, pues, la base

$$\{Q_l(\bullet; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}), 1 \leq l \leq r\} \cup \{R_l(\bullet; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}), 2 \leq l \leq r\}$$

formada por los polinomios definidos por las condiciones

$$\begin{aligned} Q_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= \delta_{l,l'} \\ Q_{l'}(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= 0, \quad 1 \leq l, l' \leq r \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= 0 \\ R_{l'}(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= \delta_{l,l'}, \quad 2 \leq l, l' \leq r \end{aligned}$$

respectivamente.

Proposición 2.2.2 Para $r \geq 3$, $1 \leq v \leq r$ e Y_{2r-2} satisfaciendo (2.2.6), existe una única familia $\{M_{i,2r-2,v}, N_{i,2r-2,v}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de funciones de $\overline{\mathbb{P}}_{2r-2}^{2r-4}(X \cup Y_{2r-2})$ que, para cada entero i , satisfacen las siguientes condiciones:

1.

$$\begin{aligned} \text{sop } M_{i,2r-2,v} &= [x_{i-v}, x_{i-v+r+1}] \\ \text{sop } N_{i,2r-2,v} &= [x_{i-v}, x_{i-v+r}] \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

2.

$$\begin{aligned} M_{i,2r-2,v}(x_j) &= \delta_{i,j}, \quad M'_{i,2r-2,v}(x_j) = 0, \quad j \in \mathbb{Z} \\ N_{i,2r-2,v}(x_j) &= 0, \quad N'_{i,2r-2,v}(x_j) = \delta_{i,j}, \quad j \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

3. Para cada α entre 2 y $2r-4$,

$$\begin{aligned} M_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= Q_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\}), \quad 1 \leq k \leq r \\ N_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= R_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\}), \quad 1 \leq k \leq r-1 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Además, en estas condiciones, el interpolante de Hermite de orden uno definido por

$$\mathcal{H}_{2r-2,v}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) M_{i,2r-2,v} + f'(x_i) N_{i,2r-2,v}) \quad (2.2.10)$$

es exacto en \mathbb{P}_{2r-2} .

Demostración

Operamos como en el caso impar. La existencia y unicidad de las funciones $M_{i,2r-2,v}$ y $N_{i,2r-2,v}$ es consecuencia de la proposición 2.1.2, y sólo debemos probar que el interpolante definido en (2.2.10) es exacto en el espacio indicado.

Sea $j \in \mathbb{Z}$. Por (2.2.7) el nodo x_j es interior a los soportes de aquellas funciones $M_{i,2r-2,v}$ para las que $i - v + 1 \leq j \leq i + v - r$, es decir, las que satisfacen las desigualdades $j + v - r \leq i \leq j + v - 1$. Análogamente, x_j es interior a los soportes de las funciones $N_{i,2r-2,v}$ con $j + v - r \leq i \leq j + v - 1$. Entonces, para cada polinomio p de \mathbb{P}_{2r-2} y cada α entre 2 y $2r - 4$, se cumple que

$$(\mathcal{H}_{2r-2,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} p(x_i) M_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_j) + \sum_{i=j+v-r+1}^{j+v-1} p'(x_i) N_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_j)$$

Las relaciones (2.2.9), que son válidas para todo entero i , se pueden escribir alternativamente como

$$\begin{aligned} M_j^{(\alpha)}(x_{j-v+i}) &= Q_{r-i+1}^{(\alpha)}(x_{j-v+i}; \{x_{j+i-r}, \dots, x_{j+i-1}\}), \quad 1 \leq i \leq r \\ N_j^{(\alpha)}(x_{j-v+i}) &= R_{r-i+1}^{(\alpha)}(x_{j-v+i}; \{x_{j+i-r}, \dots, x_{j+i-1}\}), \quad 1 \leq i \leq r-1 \end{aligned}$$

Efectuando un cambio de índice para cada i , vemos que las primeras, válidas para todo entero j , son equivalentes a

$$\begin{aligned} M_i^{(\alpha)}(x_j) &= Q_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \\ j+v-r &\leq i \leq j+v-1 \end{aligned}$$

mientras que las restantes lo son a

$$\begin{aligned} N_i^{(\alpha)}(x_j) &= R_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \\ j+v-r+1 &\leq i \leq j+v-1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$(\mathcal{H}_{2r-2,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} p(x_i) Q_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) +$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=j+v-r+1}^{j+v-1} p'(x_i) R_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \\
 = & \sum_{i=1}^r p(x_{i+j+v-r-1}) Q_i^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \\
 & \sum_{i=2}^r p'(x_{i+j+v-r-1}) R_i^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \\
 = & \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \left(\sum_{i=1}^r p(x_{i+j+v-r-1}) Q_i(t; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\
 & \left. \sum_{i=2}^r p'(x_{i+j+v-r-1}) R_i(t; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \Big|_{t=x_j}
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 p = & \sum_{i=1}^r p(x_{i+j+v-r-1}) Q_i(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \\
 & \sum_{i=2}^r p'(x_{i+j+v-r-1}) R_i(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\})
 \end{aligned}$$

queda probado que $(\mathcal{H}_{2r-2,v} p)^{(\alpha)}(x_j) = p^{(\alpha)}(x_j)$, $2 \leq \alpha \leq 2r - 4$. Esto, junto con (2.2.8) y la proposición 2.1.2, prueba la exactitud del operador en \mathbb{P}_{2r-2} . \square

La segunda posibilidad es similar y la incorporamos a continuación omitiendo la demostración.

Proposición 2.2.3 *Para $r \geq 3$, $1 \leq v \leq r$ e Y_{2r-2} satisfaciendo (2.2.6), existe una única familia $\{M_{i,2r-2,v}, N_{i,2r-2,v}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de funciones de $\overline{\mathbb{P}}_{2r-2}^{2r-4}(X \cup Y_{2r-2})$ que, para cada entero i , satisfacen las siguientes condiciones:*

1.

$$\begin{aligned}
 \text{sop } M_{i,2r-2,v} &= [x_{i-v}, x_{i-v+r+1}] \\
 \text{sop } N_{i,2r-2,v} &= [x_{i-v+1}, x_{i-v+r+1}]
 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

2.

$$\begin{aligned}
 M_{i,2r-2,v}(x_j) &= \delta_{i,j}, & M'_{i,2r-2,v}(x_j) &= 0, & j \in \mathbb{Z} \\
 N_{i,2r-2,v}(x_j) &= 0, & N'_{i,2r-2,v}(x_j) &= \delta_{i,j}, & j \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

3. Para cada α entre 2 y $2r - 4$,

$$\begin{aligned} M_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= Q_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\}), 1 \leq k \leq r \\ N_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= R_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\}), 2 \leq k \leq r \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Además, en estas condiciones, el interpolante de Hermite de orden uno definido por

$$\mathcal{H}_{2r-2,v}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) M_{i,2r-2,v} + f'(x_i) N_{i,2r-2,v}) \quad (2.2.14)$$

es exacto en \mathbb{P}_{2r-2} .

El que las funciones fundamentales del operador de interpolación spline de Hermite asociadas a un nodo tengan diferentes soportes ha supuesto que sea posible elegir entre dos soluciones diferentes. Si el coste de computación no es un obstáculo, se puede conseguir que las funciones fundamentales tengan iguales soportes, lo que implica aumentar el de $N_{i,2r-2,v}$ en un macro-intervalo. Veremos cómo, sin embargo, hay que adoptar una estrategia diferente para encontrar los valores concretos de los grados de libertad que proporcionan la exactitud máxima que estamos exigiendo.

Lema 2.2.4 Sean $r \geq 3$, $1 \leq v \leq r$ e $i \in \mathbb{Z}$. Si $\{f_{i-v-r}^m, \dots, f_{i-v-1}^m\}$, $m = 0, 1$, son dos conjuntos dados, existe una única función real, S , definida en $[x_{i-v-r}, x_{i-v-1}]$ que verifica las siguientes condiciones:

1. $S|_{[x_{i-v-r}, x_i]}, S|_{[x_i, x_{i-v-1}]} \in \mathbb{P}_{2r-2}$.
2. $S \in C^{2r-3}([x_{i-v-r}, x_{i-v-1}])$.
3. $S^{(\alpha)}(x_k) = f_k^\alpha$, $i - v - r \leq k \leq i - v - 1$, $\alpha = 0, 1$.

El lema anterior nos permite considerar la familia

$$\{\tilde{Q}_k(\bullet; \{x_{i-v-r}, \dots, x_{i-v-1}\}), \tilde{R}_k(\bullet; \{x_{i-v-r}, \dots, x_{i-v-1}\}), 1 \leq k \leq r\}$$

de funciones definidas por

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= \delta_{l,l'} \\ \tilde{Q}'_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= 0, 1 \leq l, l' \leq r \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{R}_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= 0 \\ \tilde{R}'_l(x_{i+v-r+l'-1}; \{x_{i+v-r}, \dots, x_{i+v-1}\}) &= \delta_{l,l'}, \quad 1 \leq l, l' \leq r\end{aligned}$$

es decir, asociadas a elecciones concretas de los datos f_k^m . Podemos enunciar ya el resultado anunciado.

Proposición 2.2.5 *Para $r \geq 3$, $1 \leq v \leq r$ e Y_{2r-2} satisfaciendo (2.2.6) existe una única familia $\{M_{i,2r-2,v}, N_{i,2r-2,v}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de funciones de $\overline{\mathbb{P}}_{2r-2}^{2r-4}(X \cup Y_{2r-2})$ que, para cada entero i , satisfacen las siguientes condiciones:*

1.

$$\text{sop } M_{i,2r-2,v} = \text{sop } N_{i,2r-2,v} = [x_{i-v}, x_{i-v+r+1}] \quad (2.2.15)$$

2.

$$\begin{aligned}M_{i,2r-2,v}(x_j) &= \delta_{i,j}, & M'_{i,2r-2,v}(x_j) &= 0, & j \in \mathbb{Z} \\ N_{i,2r-2,v}(x_j) &= 0, & N'_{i,2r-2,v}(x_j) &= \delta_{i,j}, & j \in \mathbb{Z}\end{aligned} \quad (2.2.16)$$

3. Para cada α entre 2 y $2r - 4$ y cada entero k entre 1 y r ,

$$\begin{aligned}M_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= \tilde{Q}_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\}) \\ N_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}) &= \tilde{R}_{r-k+1}^{(\alpha)}(x_{i-v+k}; \{x_{k+i-r}, \dots, x_{k+i-1}\})\end{aligned} \quad (2.2.17)$$

En estas condiciones, el interpolante de Hermite de orden uno definido por

$$\mathcal{H}_{2r-2,v}f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) M_{i,2r-2,v} + f'(x_i) N_{i,2r-2,v}) \quad (2.2.18)$$

es exacto en \mathbb{P}_{2r-2} .

Demostración

La existencia y unicidad de las funciones $M_{i,2r-2,v}$ y $N_{i,2r-2,v}$ es, de nuevo, consecuencia de la proposición 2.1.2, pues (2.2.16) y (2.2.17) dan sus valores y los de sus derivadas en hasta el orden $2r - 4$ en los nodos interiores a sus soportes, especificados por (2.2.15). Sólo queda probar que el interpolante definido por (2.2.18) es exacto en \mathbb{P}_{2r-2} .

La condición (2.2.15) implica que el nodo x_j es interior a los soportes de las funciones $M_{i,2r-2,v}$ y $N_{i,2r-2,v}$ indizadas en el conjunto $\{j + v - r, \dots, j + v - 1\}$.

Supongamos que p es un polinomio de \mathbb{P}_{2r-2} . Para cada α entre 2 y $2r - 4$, de (2.2.18) se deduce que

$$(\mathcal{H}_{2r-2,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} \left(p(x_i) M_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_j) + p'(x_i) N_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_j) \right)$$

Pero (2.2.17) permite escribir, como ya hemos indicado en varios casos anteriores, las igualdades

$$\begin{aligned} M_{i,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_j) &= \tilde{Q}_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \\ N_{j,2r-2,v}^{(\alpha)}(x_j) &= \tilde{R}_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \end{aligned}$$

con $j + v - r + 1 \leq i \leq j + v - 1$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{2r-2,v}p)^{(\alpha)}(x_j) &= \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} \left(p(x_i) \tilde{Q}_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_i) \tilde{R}_{i-j-v+r+1}^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \left(p(x_{i+j+v-r-1}) \tilde{Q}_i^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_{i+j+v-r-1}) \tilde{R}_i^{(\alpha)}(x_j; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \\ &= \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \sum_{i=1}^r \left(p(x_{i+j+v-r-1}) \tilde{Q}_i(t; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_{i+j+v-r-1}) \tilde{R}_i(t; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \Big|_{t=x_j} \end{aligned}$$

Por otra parte, localmente, podemos escribir

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^r \left(p(x_{i+j+v-r-1}) \tilde{Q}_i(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_{i+j+v-r-1}) \tilde{R}_i(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \\ &= \sum_{i=j+v-r}^{j+v-1} \left(p(x_i) \tilde{Q}_{i-j-v+r+1}(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) + \right. \\ &\quad \left. p'(x_i) \tilde{R}_{i-j-v+r+1}(\bullet; \{x_{j+v-r}, \dots, x_{j+v-1}\}) \right) \end{aligned}$$

pues $\{\tilde{Q}_k(\bullet; \{x_{i-v-r}, \dots, x_{i-v-1}\}), \tilde{R}_k(\bullet; \{x_{i-v-r}, \dots, x_{i-v-1}\}), 1 \leq k \leq r\}$ constituye una base de las funciones polinómicas a trozos definidas en $[x_{i-v-r}, x_{i-v-1}]$ con el único nodo x_i , de clase $2r - 4$ (lema 2.2.4). En consecuencia,

$$(\mathcal{H}_{2r-2,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = p^{(\alpha)}(x_j), \quad 0 \leq \alpha \leq 2r - 4$$

Estas relaciones, junto con (2.2.16), implican que $(\mathcal{H}_{2r-2,v}p)^{(\alpha)}(x_j) = p^{(\alpha)}(x_j)$, $0 \leq \alpha \leq 2r - 4$, para cada nodo primario x_j , lo que conduce a la exactitud de $\mathcal{H}_{2r-2,v}$ en \mathbb{P}_{2r-2} aplicando la proposición 2.1.2. \square

La proposición 2.1.2 nos ha permitido construir, de modo local, interpolantes de Hermite de orden uno mediante la determinación de los valores de los grados de libertad intrínsecos al problema, para lo que hemos considerado en cada nodo primario un cierto orden máximo de derivación, que proporciona la clase global del interpolante. Si ésta no es lo más importante, es decir, si es suficiente para el problema concreto que se quiera abordar fijar un orden de derivación inferior al que hemos empleado, se reduce considerablemente el número de nodos secundarios y el de grados de libertad, como dijimos, lo que se traduce en un menor número de subintervalos en los que calcular las funciones fundamentales. Por otra parte, si se desea exactitud en un espacio de polinomios de grado menor que el especificado en los diferentes resultados, esto redundará en una disminución del tamaño de los soportes, algo que resulta también interesante.

2.2.3 Ejemplos

Vamos a considerar a continuación algunos casos concretos de cada una de las situaciones tratadas con anterioridad. Indicaremos sólo los valores que toman cada una de los parámetros necesarios, respetando en todo caso la notación empleada.

Caso impar: $r = 3$

Consideraremos el conjunto de nodos secundarios $Y_5 = \{y_{i,1}, y_{i,2}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y $v \in \{1, 2, 3\}$. Las funciones fundamentales $M_{i,5,v}$ y $N_{i,5,v}$ son quinticas de clase global tres, de clase cuatro en cada macro-intervalo y tienen igual soporte, $[x_{i-v}, x_{i-v+4}]$, es decir, tres nodos interiores, y deben producir un interpolante que preserve el espacio \mathbb{P}_5 . Los valores que definen a estas funciones fundamentales dependen de v . Si v es igual a uno, entonces

$$\text{sop } M_{i,5,1} = \text{sop } N_{i,5,1} = [x_{i-1}, x_{i+3}]$$

Los valores de $M_{i,5,1}$, $M'_{i,5,1}$, $M''_{i,5,1}$ y $M'''_{i,5,1}$ son los siguientes:

- $M_{i,5,1}(x_{i-1}) = 0$, $M_{i,5,1}(x_i) = 1$.
 $M_{i,5,1}(x_{i+1}) = M_{i,5,1}(x_{i+2}) = M_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0$.
- $M'_{i,5,1}(x_{i-1}) = M'_{i,5,1}(x_i) = M'_{i,5,1}(x_{i+1}) = M'_{i,5,1}(x_{i+2}) = M'_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0$.
- $M''_{i,5,1}(x_{i-1}) = 0$.

$$M''_{i,5,1}(x_i) = Q''_3(x_i; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = -2 \frac{3h_{i-2}^2 + 10h_{i-2}h_{i-1} + 10h_{i-1}^2}{h_{i-1}^2(h_{i-2} + h_{i-1})^2}.$$

$$M''_{i,5,1}(x_{i+1}) = Q''_2(x_{i+1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = 2 \frac{(3h_{i-1} - 2h_i)(h_{i-1} + h_i)^2}{h_{i-1}^3 h_i^2}.$$

$$M''_{i,5,1}(x_{i+2}) = Q''_1(x_{i+2}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 2 \frac{h_{i+1}^2(5h_i + 2h_{i+1})}{h_i^3(h_i + h_{i+1})^2}.$$

$$M''_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0.$$

- $M'''_{i,5,1}(x_{i-1}) = 0$.

$$M'''_{i,5,1}(x_i) = Q'''_3(x_i; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = -12 \frac{(h_{i-2} + 2h_{i-1})(h_{i-2}^2 + 5h_{i-2}h_{i-1} + 5h_{i-1}^2)}{h_{i-1}^3(h_{i-2} + h_{i-1})^3}.$$

$$M'''_{i,5,1}(x_{i+1}) = Q'''_2(x_{i+1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{-36}{h_{i-1}^3} + \frac{12}{h_i^3} + \frac{48}{h_{i-1}h_i^2}.$$

$$M'''_{i,5,1}(x_{i+2}) = Q'''_1(x_{i+2}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 12 \frac{h_{i+1}(5h_i^2 + 9h_i h_{i+1} + 3h_{i+1}^2)}{h_i^3(h_i + h_{i+1})^3}.$$

$$M'''_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0.$$

En lo que respecta a $N_{i,5,1}$, $N'_{i,5,1}$, $N''_{i,5,1}$ y $N'''_{i,5,1}$ se dan a continuación:

- $N_{i,5,1}(x_{i-1}) = N_{i,5,1}(x_i) = N_{i,5,1}(x_{i+1}) = N_{i,5,1}(x_{i+2}) = N_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0$.
- $N'_{i,5,1}(x_{i-1}) = 0$, $N'_{i,5,1}(x_i) = 1$.
 $N'_{i,5,1}(x_{i+1}) = N'_{i,5,1}(x_{i+2}) = N'_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0$.
- $N''_{i,5,1}(x_{i-1}) = 0$.

$$N''_{i,5,1}(x_i) = R''_3(x_i; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = \frac{4}{h_{i-1}} + \frac{4}{h_{i-2} + h_{i-1}}.$$

$$N''_{i,5,1}(x_{i+1}) = R''_2(x_{i+1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = 2 \frac{(h_{i-1} + h_i)^2}{h_{i-1}^2 h_i}.$$

$$N''_{i,5,1}(x_{i+2}) = R''_1(x_{i+2}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 2 \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})}.$$

$$N''_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0.$$

- $N'''_{i,5,1}(x_{i-1}) = 0.$

$$N'''_{i,5,1}(x_i) = R'''_3(x_i; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = \frac{6}{h_{i-1}^2} + \frac{6}{(h_{i-2} + h_{i-1})^2} + \frac{24}{h_{i-1}(h_{i-2} + h_{i-1})}.$$

$$N'''_{i,5,1}(x_{i+1}) = R'''_2(x_{i+1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{18}{h_{i-1}^2} + \frac{6}{h_i^2} + \frac{24}{h_{i-1}h_i}.$$

$$N'''_{i,5,1}(x_{i+2}) = R'''_1(x_{i+2}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 6 \frac{h_{i+1}(2h_i + 3h_{i+1})}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})^2}.$$

$$N'''_{i,5,1}(x_{i+3}) = 0.$$

El caso $\nu = 2$ conduce a una situación más simétrica, siendo los soportes de las funciones $M_{i,5,2}$ y $N_{i,5,2}$ iguales a $[x_{i-2}, x_{i+2}]$. Los valores de $M_{i,5,2}$, $M'_{i,5,2}$, $M''_{i,5,2}$ y $M'''_{i,5,2}$ son los siguientes:

- $M_{i,5,2}(x_{i-2}) = M_{i,5,2}(x_{i-1}) = 0, \quad M_{i,5,2}(x_i) = 1.$

$$M_{i,5,2}(x_{i+1}) = M_{i,5,2}(x_{i+2}) = 0.$$

- $M'_{i,5,2}(x_{i-2}) = M'_{i,5,2}(x_{i-1}) = M'_{i,5,2}(x_i) = M'_{i,5,2}(x_{i+1}) = M'_{i,5,2}(x_{i+2}) = 0.$

- $M''_{i,5,2}(x_{i-2}) = 0.$

$$M''_{i,5,2}(x_{i-1}) = Q''_3(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = 2 \frac{h_{i-2}^2 (3h_{i-2} + 5h_{i-1})}{h_{i-1}^2 (h_{i-2} + h_{i-1})^3}.$$

$$M''_{i,5,2}(x_i) = Q''_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = -\frac{6}{h_{i-1}^2} - \frac{6}{h_i^2} + \frac{8}{h_{i-1}h_i}.$$

$$M''_{i,5,2}(x_{i+1}) = Q''_1(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 2 \frac{h_{i+1}^2 (5h_i + 3h_{i+1})}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})^3}.$$

$$M''_{i,5,2}(x_{i+2}) = 0.$$

- $M_{i,5,2}'''(x_{i-2}) = 0.$

$$M_{i,5,2}'''(x_{i-1}) = Q_3'''(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = 12 \frac{h_{i-2}(-h_{i-2}^2 + h_{i-2}h_{i-1} + 5h_{i-1}^2)}{h_{i-1}^3(h_{i-2} + h_{i-1})^3}.$$

$$M_{i,5,2}'''(x_i) = Q_2'''(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{-12}{h_{i-1}^3} + \frac{12}{h_i^3} - \frac{48}{h_{i-1}h_i^2} + \frac{48}{h_{i-1}^2h_i}.$$

$$M_{i,5,2}'''(x_{i+1}) = Q_1'''(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 12 \frac{h_{i+1}(-5h_i^2 - h_ih_{i+1} + h_{i+1}^2)}{h_i^3(h_i + h_{i+1})^3}.$$

$$M_{i,5,2}'''(x_{i+2}) = 0.$$

A continuación se reseñan los de $N_{i,5,2}$, $N'_{i,5,2}$, $N''_{i,5,2}$ y $N'''_{i,5,2}$.

- $N_{i,5,2}(x_{i-2}) = N_{i,5,2}(x_{i-1}) = N_{i,5,2}(x_i) = N_{i,5,2}(x_{i+1}) = N_{i,5,2}(x_{i+2}) = 0.$

- $N'_{i,5,2}(x_{i-2}) = N'_{i,5,2}(x_{i-1}) = 0, N'_{i,5,2}(x_i) = 1.$

$$N'_{i,5,2}(x_{i+1}) = N'_{i,5,2}(x_{i+2}) = 0.$$

- $N''_{i,5,2}(x_{i-2}) = 0.$

$$N''_{i,5,2}(x_{i-1}) = R_3''(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = -2 \frac{h_{i-2}^2}{h_{i-1}(h_{i-2} + h_{i-1})^2}.$$

$$N''_{i,5,2}(x_i) = R_2''(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{4}{h_{i-1}} - \frac{4}{h_i}.$$

$$N''_{i,5,2}(x_{i+1}) = R_1''(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 2 \frac{h_{i+1}^2}{h_i(h_i + h_{i+1})^2}.$$

$$N''_{i,5,2}(x_{i+2}) = 0.$$

- $N'''_{i,5,2}(x_{i-2}) = 0.$

$$N'''_{i,5,2}(x_{i-1}) = R_3'''(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = 6 \frac{h_{i-2}(h_{i-2} - 2h_{i-1})}{h_{i-1}^2(h_{i-2} + h_{i-1})^2}.$$

$$N'''_{i,5,2}(x_i) = R_2'''(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{6}{h_{i-1}^2} + \frac{6}{h_i^2} - \frac{24}{h_{i-1}h_i}.$$

$$N'''_{i,5,2}(x_{i+1}) = R_1'''(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 6 \frac{h_{i+1}(-2h_i + h_{i+1})}{h_i^2(h_i + h_{i+1})^2}.$$

$$N'''_{i,5,2}(x_{i+2}) = 0.$$

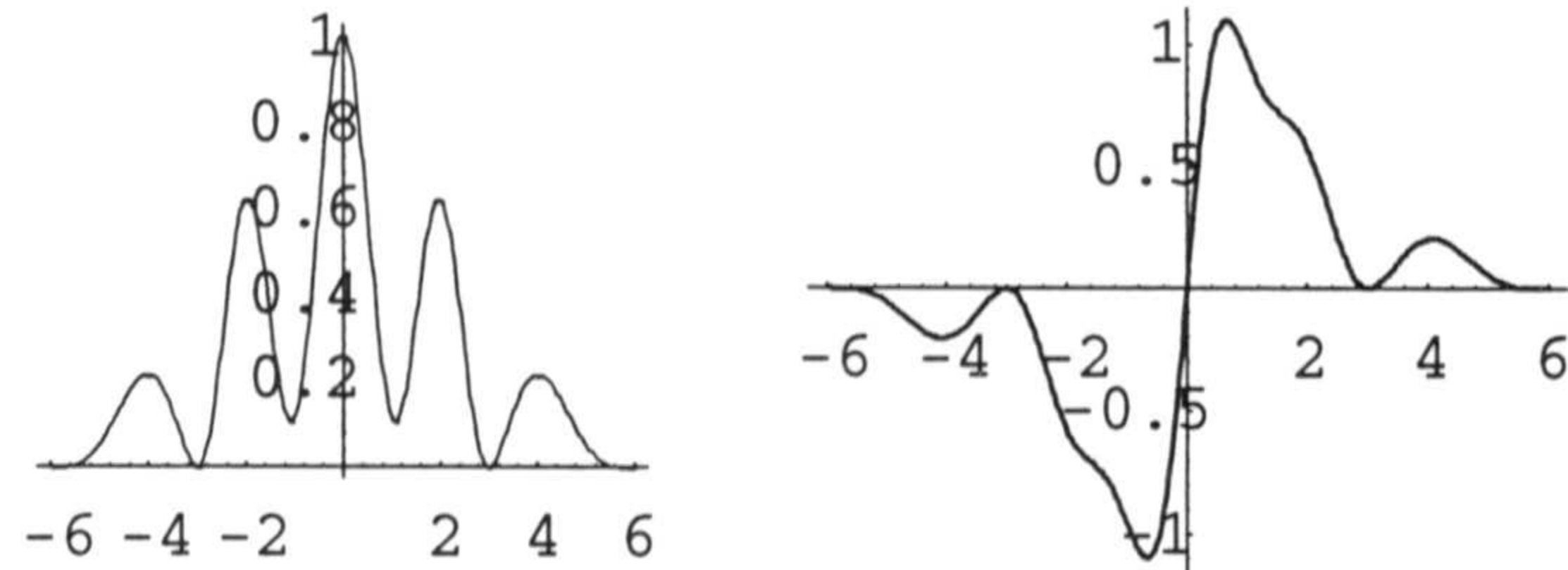


Figura 2.3: Funciones fundamentales para la interpolación spline de Hermite de orden uno quinta de clase tres. Producen un interpolante exacto en \mathbb{P}_5 . Corresponden a $\nu = 2$. Los macro-intervalos son de longitud tres y los micro-intervalos son, pues, de longitud unidad.

En la fig. 2.3 se muestran las funciones fundamentales para unos valores concretos correspondientes a la situación recién considerada.

Finalmente, para $\nu = 3$ las funciones $M_{i,5,3}$ y $N_{i,5,3}$ tienen como soporte el intervalo $[x_{i-3}, x_{i+1}]$, y sus valores y los de sus derivadas hasta el orden tres se dan seguidamente:

- $M_{i,5,3}(x_{i-3}) = M_{i,5,3}(x_{i-2}) = M_{i,5,3}(x_{i-1}) = 0, M_{i,5,3}(x_i) = 1.$
 $M_{i,5,3}(x_{i+1}) = 0.$
- $M'_{i,5,3}(x_{i-3}) = M'_{i,5,3}(x_{i-2}) = M'_{i,5,3}(x_{i-1}) = M'_{i,5,3}(x_i) = M'_{i,5,3}(x_{i+1}) = 0.$
- $M''_{i,5,3}(x_{i-3}) = 0.$
 $M''_{i,5,3}(x_{i-2}) = Q''_3(x_{i-2}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = 2 \frac{h_{i-1}^2 (2h_{i-2} + 5h_{i-1})}{h_{i-1}^3 (h_{i-2} + h_{i-1})^2}.$
 $M''_{i,5,3}(x_{i-1}) = Q''_2(x_{i-1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = 2 \frac{(h_{i-1} + h_i)^2 (-2h_{i-1} + 3h_i)}{h_{i-1}^2 h_i^3}.$
 $M''_{i,5,3}(x_i) = Q''_1(x_i; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = -2 \frac{10h_i^2 + 10h_i h_{i+1} + 3h_{i+1}^3}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})^2}.$
 $M''_{i,5,3}(x_{i+1}) = 0.$

- $M_{i,5,3}'''(x_{i-3}) = 0.$
- $M_{i,5,3}'''(x_{i-2}) = Q_3'''(x_{i-2}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) =$

$$-12 \frac{h_{i-2} (3h_{i-2}^2 + 9h_{i-2}h_{i-1} + 5h_{i-1}^2)}{h_{i-1}^3 (h_{i-2} + h_{i-1})^3}.$$
- $M_{i,5,3}'''(x_{i-1}) = Q_2'''(x_{i-1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = 6 \left(\frac{2}{h_{i-1}^3} + \frac{6}{h_i^3} - \frac{8}{h_{i-1}^2 h_i} \right).$
- $M_{i,5,3}'''(x_i) = Q_1'''(x_i; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) =$

$$12 \frac{(2h_i + h_{i+1}) (5h_i^2 + 5h_i h_{i+1} + h_{i+1}^2)}{h_i^3 (h_i + h_{i+1})^3}.$$
- $M_{i,5,3}'''(x_{i+1}) = 0.$
- $N_{i,5,3}(x_{i-3}) = N_{i,5,3}(x_{i-2}) = N_{i,5,3}(x_{i-1}) = N_{i,5,3}(x_i) = N_{i,5,3}(x_{i+1}) = 0.$
- $N'_{i,5,3}(x_{i-3}) = N'_{i,5,3}(x_{i-2}) = N'_{i,5,3}(x_{i-1}) = 0, N'_{i,5,3}(x_i) = 1$
 $N'_{i,5,3}(x_{i+1}) = 0.$
- $N''_{i,5,3}(x_{i-3}) = 0.$
- $N''_{i,5,3}(x_{i-2}) = R_3''(x_{i-2}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = -2 \frac{h_{i-2}^2}{h_{i-1}^2 (h_{i-2} + h_{i-1})}.$
- $N''_{i,5,3}(x_{i-1}) = R_2''(x_{i-1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = -2 \frac{(h_{i-1} + h_i)^2}{h_{i-1} h_i^2}.$
- $N''_{i,5,3}(x_i) = R_1''(x_i; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = -\frac{4}{h_i} - \frac{4}{h_i + h_{i+1}}.$
- $N''_{i,5,3}(x_{i+1}) = 0.$
- $N'''_{i,5,3}(x_{i-3}) = 0.$
- $N'''_{i,5,3}(x_{i-2}) = R_3'''(x_{i-2}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = 6 \frac{h_{i-2} (3h_{i-2} + 2h_{i-1})}{h_{i-1}^2 (h_{i-2} + h_{i-1})^2}.$
- $N'''_{i,5,3}(x_{i-1}) = R_2'''(x_{i-1}; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{6}{h_{i-1}^2} + \frac{18}{h_i^2} + \frac{24}{h_{i-1} h_i}.$
- $N'''_{i,5,3}(x_i) = R_1'''(x_i; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 6 \frac{6h_i^2 + 6h_i h_{i+1} + h_{i+1}^2}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})^2}.$
- $N'''_{i,5,3}(x_{i+1}) = 0.$

Caso par: $r = 3$

En el caso par la situación $r = 3$ corresponde a splines cuárticos que están definidos sobre una sucesión estrictamente creciente de nodos primarios que dan lugar a macro-intervalos en los que se considera un único nodo adicional, y que son de clase global dos y clase tres en cada macro-intervalo. Se logra construir interpolantes exactos en \mathbb{P}_4 . De las dos posibilidades que hay en lo que se refiere al soporte de la segunda función fundamental, elegiremos una, siendo el otro caso análogo; y de los posible valores de v elegimos $v = 2$. En consecuencia, indicaremos los valores que nos permiten definir las funciones fundamentales y que no están fijados por ser un interpolante de Hermite de orden uno, es decir, los que la segunda derivada de cada una de las funciones fundamentales toma en los nodos primarios de su soporte. El de $M_{i,4,2}$ es $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ y $[x_{i-2}, x_{i+1}]$ el de $N_{i,4,2}$. Sus valores y los de sus derivadas primera y segunda en los nodos primarios interiores a $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ y $[x_{i-2}, x_{i+1}]$, respectivamente, se recogen seguidamente:

- $M_{i,4,2}(x_{i-2}) = M_{i,4,2}(x_{i-1}) = 0$, $M_{i,4,2}(x_i) = 1$, $M_{i,4,2}(x_{i+1}) = M_{i,4,2}(x_{i+2}) = 0$.

- $M'_{i,4,2}(x_{i-2}) = M'_{i,4,2}(x_{i-1}) = M'_{i,4,2}(x_i) = M'_{i,4,2}(x_{i+1}) = M'_{i,4,2}(x_{i+2}) = 0$.

- $M''_{i,4,2}(x_{i-2}) = 0$.

$$M''_{i,4,2}(x_{i-1}) = Q''_3(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = 2 \frac{h_{i-2}(3h_{i-2} + 4h_{i-1})}{h_{i-1}^2(h_{i-2} + h_{i-1})^2}.$$

$$M''_{i,4,2}(x_i) = Q''_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = -\frac{2}{h_{i-1}^2} - \frac{6}{h_i^2} + \frac{4}{h_{i-1}h_i}.$$

$$M''_{i,4,2}(x_{i+1}) = Q''_1(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 2 \frac{h_{i+1}^2}{h_i^2(h_i + h_{i+1})^2}.$$

$$M''_{i,4,2}(x_{i+2}) = 0.$$

- $N_{i,4,2}(x_{i-2}) = N_{i,4,2}(x_{i-1}) = N_{i,4,2}(x_i) = N_{i,4,2}(x_{i+1}) = 0$.

- $N'_{i,4,2}(x_{i-2}) = N'_{i,4,2}(x_{i-1}) = 0$, $N_{i,4,2}(x_i) = 1$, $N_{i,4,2}(x_{i+1}) = 0$.

- $N''_{i,4,2}(x_{i-2}) = 0$.

$$N''_{i,4,2}(x_{i-1}) = R''_3(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = -2 \frac{h_{i-2}}{h_{i-1}(h_{i-2} + h_{i-1})}.$$

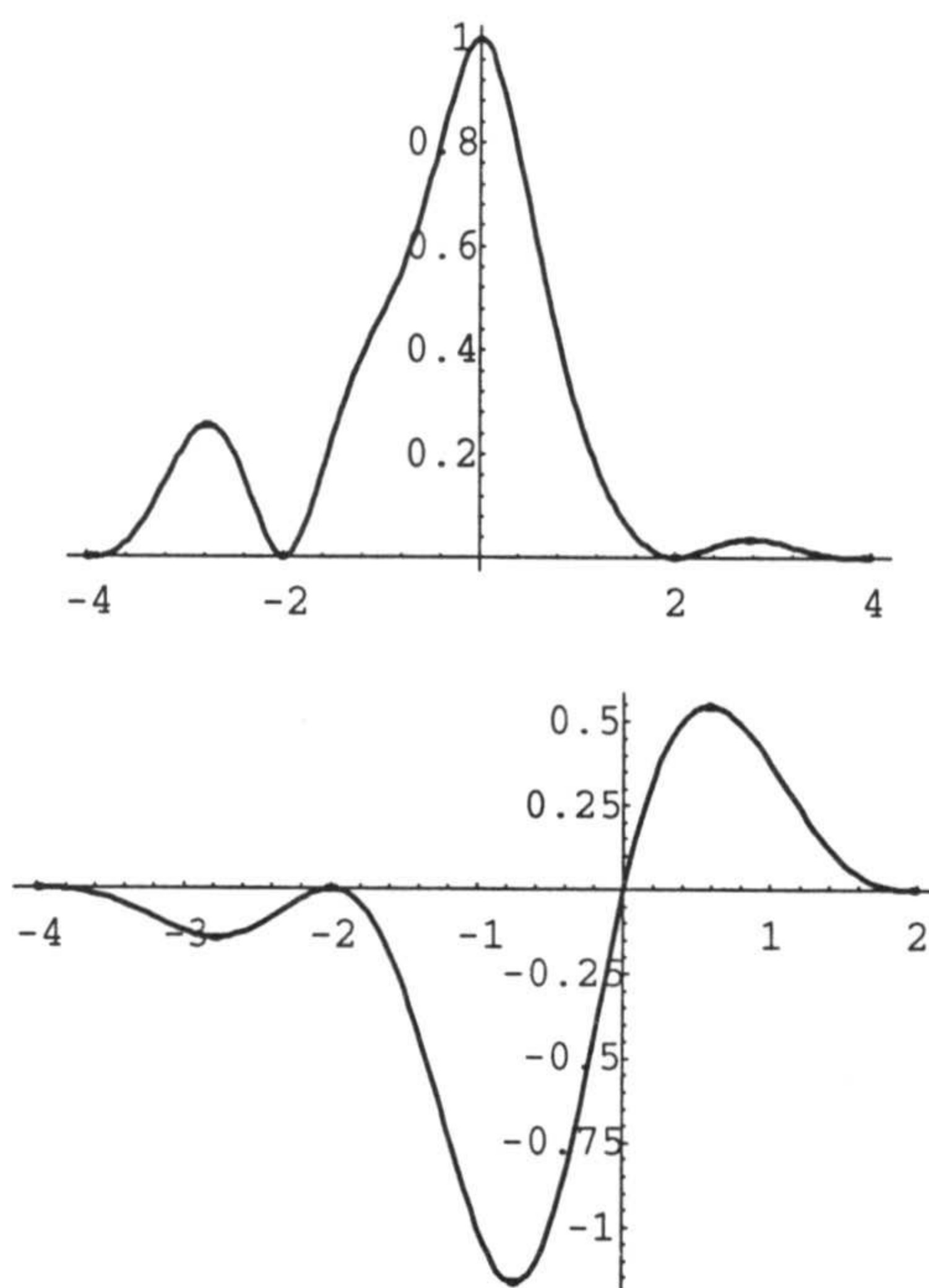


Figura 2.4: Se muestran las gráficas de las funciones fundamentales para la interpolación spline de Hermite de orden uno cuártica de clase dos, $v = 2$. Los macrointervalos tienen longitudes iguales a dos, y están descompuestos en dos microintervalos unitarios por el nodo secundario.

$$N''_{i,4,2}(x_i) = R''_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{2}{h_{i-1}} - \frac{4}{h_i}.$$

$$N''_{i,4,2}(x_{i+1}) = 0.$$

En la fig. 2.4 se muestran las gráficas de las funciones fundamentales cuárticas de clase dos asociadas a unos datos concretos.

Vamos a considerar también en este caso la posibilidad de que los soportes de las funciones fundamentales sean iguales. Como $r = 3$, si tomamos $v = 2$, se cumplirá que $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ es el soporte de $M_{i,4,2}$ y $N_{i,4,2}$. Por la proposición 2.2.5, los valores de $M''_{i,4,2}$ y $N''_{i,4,2}$ se calculan a partir de los splines de Hermite en la forma que se indica:

- $M_{i,4,2}$

$$M''_{i,4,2}(x_{i-1}) = \tilde{Q}''_3(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}).$$

$$M''_{i,4,2}(x_i) = \tilde{Q}''_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}).$$

$$M''_{i,4,2}(x_{i+1}) = \tilde{Q}''_1(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}).$$

• $N_{i,4,2}$

$$N''_{i,4,2}(x_{i-1}) = \tilde{R}''_3(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}).$$

$$N''_{i,4,2}(x_i) = \tilde{R}''_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}).$$

$$N''_{i,4,2}(x_{i+1}) = \tilde{R}''_1(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}).$$

Como el grado de las funciones spline de Hermite \tilde{Q}_k y \tilde{R}_k es bajo, vamos a hallar sus B-coeficientes para calcular, posteriormente, los valores que necesitamos de las segundas derivadas.

Detallamos el procedimiento en un caso y damos los resultados en los restantes.

El spline de Hermite $\tilde{Q}_2(\bullet; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\})$ se anula, junto con su derivada, en x_{i-1} , luego sus B-coeficientes en $[x_{i-1}, x_i]$ son del tipo $(0, 0, b_2, b_3, b_4)$. Por un motivo similar, en $[x_i, x_{i+1}]$ son de la forma $(b_5, b_6, b_7, 0, 0)$. La imposición de la condición $\tilde{Q}_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = 1$ da lugar a los valores $b_4 = b_5 = 1$, mientras que $\tilde{Q}'_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = 0$ conduce a $b_3 = b_4$ y $b_5 = b_6$. Por tanto, los B-coeficientes son $(0, 0, b_2, 1, 1)$ y $(1, 1, b_7, 0, 0)$. Exigiendo ahora que $\tilde{Q}_2(\bullet; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\})$ sea de clase tres en x_i , obtenemos las igualdades

$$\frac{b_2 - 1}{h_{i-1}^2} = \frac{b_7 - 1}{h_i^2}$$

$$\frac{3b_2 - 2}{h_{i-1}^3} = \frac{2 - 3b_7}{h_i^3}$$

que tienen como solución los valores

$$b_2 = \frac{(h_{i-1} + h_i)(2h_i - h_{i-1})}{3h_i^2}$$

$$b_7 = \frac{(2h_{i-1} - h_i)(h_{i-1} + h_i)}{3h_{i-1}^2}$$

Por tanto,

$$M''_{i,4,2}(x_i) = \tilde{Q}''_2(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = \frac{4}{h_{i-1}^2 h_i^2} (-h_{i-1}^2 + h_{i-1} h_i - h_i^2)$$

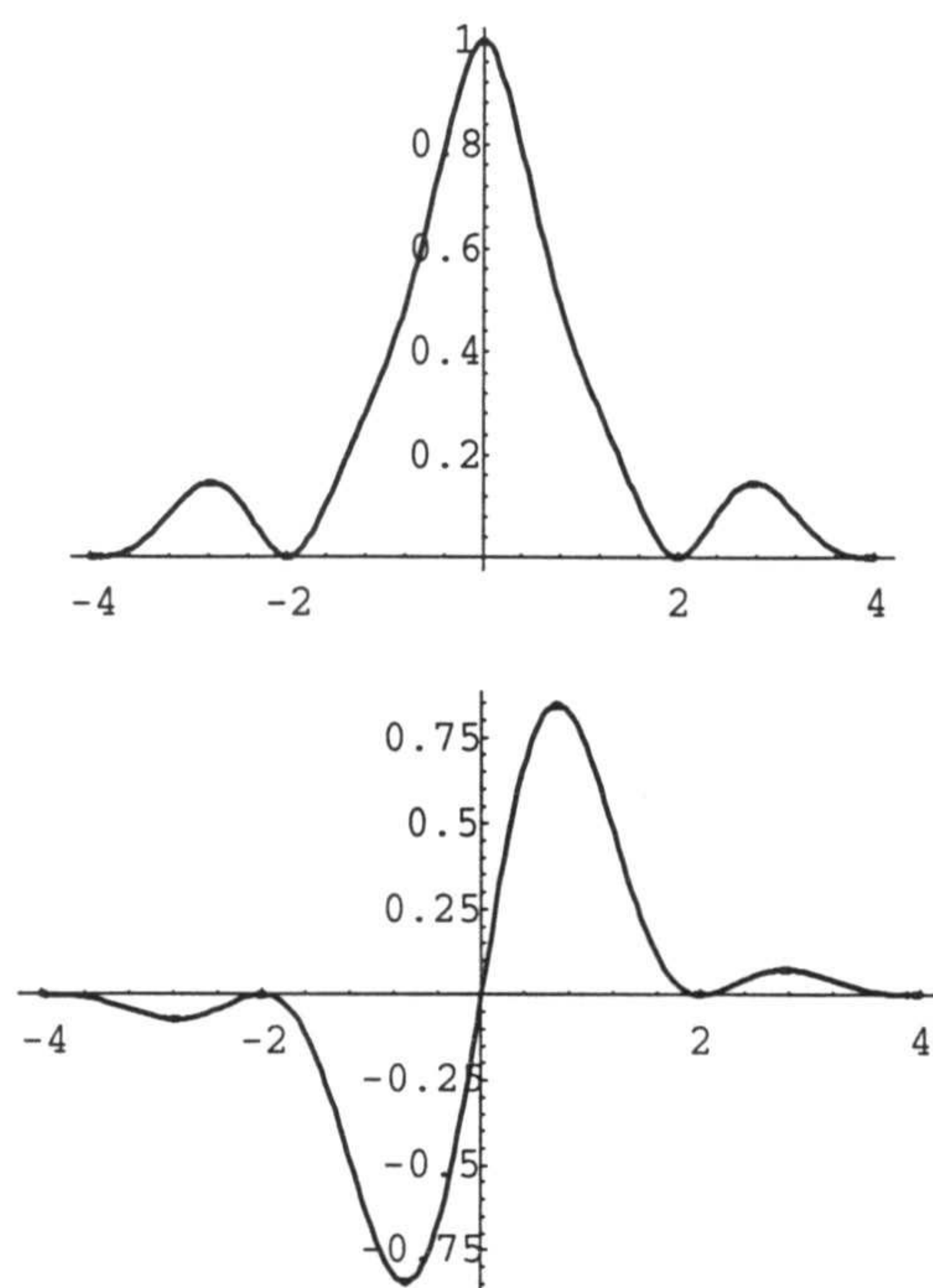


Figura 2.5: Si se adopta la estrategia indicada para que las funciones fundamentales en el caso par tengan igual soporte, la interpolación cuártica de clase dos tiene funciones fundamentales con las gráficas mostradas.

Cálculos similares dan lugar a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 N''_{i,4,2}(x_i) &= \tilde{R}_2''(x_i; \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}) = 12 \frac{h_i - h_{i-1}}{h_{i-1}h_i} \\
 M''_{i,4,2}(x_{i-1}) &= \tilde{Q}_3''(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = 4 \frac{h_{i-2}}{h_{i-1}^2 (h_{i-2} + h_{i-1})} \\
 N''_{i,4,2}(x_{i-1}) &= \tilde{R}_3''(x_{i-1}; \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}) = -\frac{h_{i-2}}{h_{i-1} (h_{i-2} + h_{i-1})} \\
 M''_{i,4,2}(x_{i+1}) &= \tilde{Q}_1''(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = 4 \frac{h_{i+1}}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})} \\
 N''_{i,4,2}(x_{i+1}) &= \tilde{R}_1''(x_{i+1}; \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}) = \frac{h_{i+1}}{h_i (h_i + h_{i+1})}
 \end{aligned}$$

2.3 Sobre el error en la interpolación spline cúbica de clase dos

Hasta este momento, en el capítulo hemos construido diferentes operadores de interpolación de Hermite a partir de procedimientos locales, para los que está garantizado un error de interpolación de orden igual a la dimensión del espacio de polinomios en el que se exige la exactitud.

Como el caso cúbico sigue desempeñando un papel muy destacado en las aplicaciones, para lo que basta pensar en los muy variados programas de ordenador que utilizan de un modo u otro funciones spline cúbicas, vamos a convertirlo en el tema de estudio de esta sección. Nos planteamos analizar con detalle el error de la interpolación spline de Hermite de orden dos, cúbica de clase dos, cuando se realiza una elección de los nodos secundarios que simplifica a priori el estudio; aprovechando el resultado que formularemos, encontraremos una estimación del error para la interpolación spline de orden uno, cúbica de clase dos, correspondiente. Ambos son esquemas locales de interpolación y el error presentará un comportamiento muy satisfactorio.

Completamos el caso cúbico definiendo un esquema global, que dará lugar a un método convergente, y analizaremos el error de interpolación asociado.

2.3.1 El problema de interpolación de Hermite de orden dos

Supongamos, como viene siendo habitual, que $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión biinfinita estrictamente creciente, e $Y_3 = \{y_{i,j}\}_{i \in \mathbb{Z}, j=1,2}$ una que satisface las desigualdades

$$x_i < y_{i,1} < y_{i,2} < x_{i+1} \quad (2.3.1)$$

Escribamos

$$y_{i,1} = x_i + \alpha_i h_i, \quad y_{i,2} = x_i + (1 - \alpha_i) h_i, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (2.3.2)$$

con

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad 0 < \alpha_i < \frac{1}{2} \quad (2.3.3)$$

Lo mismo que consideramos en la situación general, sean el conjunto $T = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = X \cup Y_3$, donde

$$t_{3i} = x_i, \quad t_{3i+1} = y_{i,1}, \quad t_{3i+2} = y_{i,2}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.4)$$

y el espacio de funciones spline cúbicas de clase dos

$$\mathbb{P}_3^2(T) = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}) : f|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 \right\} \quad (2.3.5)$$

Para cualquier entero i existen funciones φ_i , ψ_i y χ_i en $\mathbb{P}_3^2(T)$ tales que

$$\text{sop } \varphi_i = \text{sop } \psi_i = \text{sop } \chi_i = [x_{i-1}, x_{i+1}] \quad (2.3.6)$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_j) &= \delta_{ij}, & \varphi_i'(x_j) &= \varphi_i''(x_j) = 0 \\ \psi_i'(x_j) &= \delta_{ij}, & \psi_i(x_j) &= \psi_i''(x_j) = 0 \\ \chi_i''(x_j) &= \delta_{ij}, & \chi_i(x_j) &= \chi_i'(x_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Las funciones φ_i , ψ_i y χ_i se pueden expresar en términos de los B-splines normalizados asociados a los nodos de T ([5], [71]) o por medio de polinomios de Bernstein en cada subintervalo de sus soportes ([19]).

A continuación estableceremos representaciones explícitas de las funciones fundamentales φ_i , ψ_i y χ_i , usando la primera aproximación indicada.

Para cada entero j , sea S_j el espacio de las funciones spline cúbicas de clase C^2 definidas en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, dotado de la partición $\bar{T}_j = \{\bar{t}_{k,j}, 0 \leq k \leq 5\}$, donde

$$\begin{aligned} \bar{t}_{0,j} &= \bar{t}_{1,j} = \bar{t}_{2,j} = \bar{t}_{3,j} = t_{3j} \\ \bar{t}_{4,j} &= t_{3j+1} \\ \bar{t}_{5,j} &= t_{3j+2} \\ \bar{t}_{6,j} &= \bar{t}_{7,j} = \bar{t}_{8,j} = \bar{t}_{9,j} = t_{3,j+3} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

y, para cada entero k , sea $N_{j,k}$ el B-spline normalizado de soporte $[\bar{t}_{k,j}, \bar{t}_{k+4,j}]$.

Es conocido que $\{N_{k,j}, 0 \leq k \leq 5\}$ constituye una base de S_j . Supongamos que la función r de S_j satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} r(x_j) &= r_j & r(x_{j+1}) &= r_{j+1} \\ r'(x_j) &= r'_j & r'(x_{j+1}) &= r'_{j+1} \\ r''(x_j) &= r''_j & r''(x_{j+1}) &= r''_{j+1} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Usando, por ejemplo, el algoritmo de de Boor ([5]), deducimos que r se escribe como

$$r = \sum_{k=0}^5 c_k N_{k,j}, \quad (2.3.10)$$

donde los coeficientes c_k tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= r_j \\
 c_1 &= r_j + \frac{\alpha_j}{3} h_j r'_j \\
 c_2 &= r_j + \frac{h_j}{3} r'_j + \frac{\alpha_j (1 - \alpha_j)}{6} h_j^2 r''_j \\
 c_3 &= r_{j+1} - \frac{h_j}{3} r'_{j+1} + \frac{\alpha_j (1 - \alpha_j)}{6} h_j^2 r''_{j+1} \\
 c_4 &= r_{j+1} - \frac{\alpha_j}{3} h_j r'_{j+1} \\
 c_5 &= r_{j+1}
 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Así pues, podemos dar las anunciadas representaciones explícitas de las funciones φ_i , ψ_i y χ_i que satisfacen las condiciones (2.3.7) a partir de (2.3.10) y (2.3.11):

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(x) &= \begin{cases} N_{3,i-1}(x) + N_{4,i-1}(x) + N_{5,i-1}(x), & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ N_{0,i}(x) + N_{1,i}(x) + N_{2,i}(x), & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \\
 \psi_i(x) &= \begin{cases} -\frac{h_{i-1}}{3} N_{3,i-1}(x) - \frac{\alpha_{i-1}}{3} h_{i-1} N_{4,i-1}(x), & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{\alpha_i}{3} h_i N_{1,i}(x) + \frac{h_i}{3} N_{2,i}(x), & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \\
 \chi_i(x) &= \begin{cases} \frac{\alpha_{i-1} (1 - \alpha_{i-1})}{6} h_i^2 N_{2,i-1}(x), & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{\alpha_i (1 - \alpha_i)}{6} h_{i-1}^2 N_{2,i-1}(x), & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

La fig. 2.6 muestra las gráficas de estas funciones para una cierta elección de nodos.

Si f es de clase $C^2(\mathbb{R})$, el interpolante definido por

$$\mathcal{H}^2 f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) \varphi_i + f'(x_i) \psi_i + f''(x_i) \chi_i) \tag{2.3.13}$$

es exacto sobre \mathbb{P}_3 .

Para x en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^2 f = & f(x_i) \varphi_i(x) + f'(x_i) \psi_i(x) + f''(x_i) \chi_i(x) + \\
 & f(x_{i+1}) \varphi_{i+1}(x) + f'(x_{i+1}) \psi_{i+1}(x) + f''(x_{i+1}) \chi_{i+1}(x)
 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

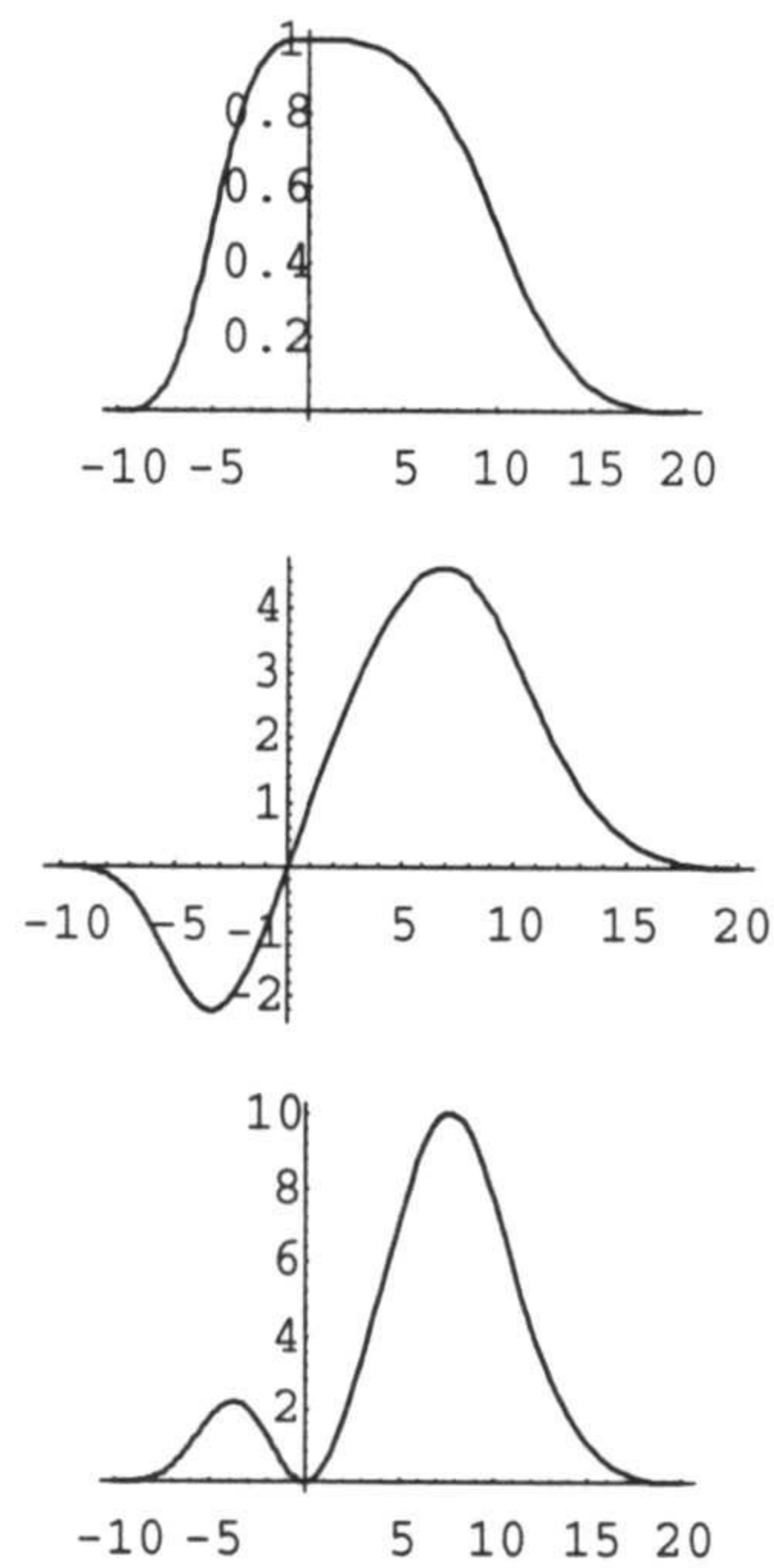


Figura 2.6: Funciones fundamentales correspondientes a los nodos primarios -10 , 0 y 10 y secundarios determinados por los parámetros $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$.

2.3.2 Error de interpolación para \mathcal{H}^2

El objetivo de esta sección es dar una cota para el error de interpolación $\mathcal{H}^2 f - f$ en un intervalo arbitrario $[x_i, x_{i+1}]$, cuando f es una función de clase $C^4(\mathbb{R})$.

Lema 2.3.1 *Sea K la función definida por*

$$K(x, t) = (x - t)_+^3 - H_x^{(2)} \left[(x - t)_+^3 \right], \quad x, t \in [x_i, x_{i+1}] \quad (2.3.15)$$

siendo

$$(x - t)_+^3 = \begin{cases} (x - t)^3 & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t \end{cases}$$

Para cada x de (x_i, x_{i+1}) fijo, se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $K(x, t) < 0$ para $t \in (x_i, y_{i,1}) \cup (y_{i,2}, x_{i+1})$
- ii) $K(x, t) > 0$ para $t \in (y_{i,1}, y_{i,2})$
- iii) $K(x, x_i) = K(x, y_{i,1}) = K(x, y_{i,2}) = K(x, x_{i+1}) = 0$

$$(2.3.16)$$

Demostración.

Por (2.3.14) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x^2 \left[(x - t)_+^3 \right] &= (x_i - t)_+^3 \varphi_i(x) + 3(x_i - x)_+^2 \psi_i(x) + \\ &6(x_i - t)_+ \chi_i(x) + (x_{i+1} - t)_+^3 \varphi_{i+1}(x) + \\ &3(x_{i+1} - x)_+^2 \psi_{i+1}(x) + 6(x_{i+1} - t)_+ \chi_{i+1}(x) \end{aligned}$$

y, por tanto, por (2.3.15), si $t \leq x$, podemos escribir

$$K(x, t) = (x - t)^3 - (x_{i+1} - t)^3 \varphi_{i+1}(x) - 3(x_{i+1} - x)^2 \psi_{i+1}(x) - 6(x_{i+1} - t) \chi_{i+1}(x) \quad (2.3.17)$$

mientras que

$$K(x, t) = -(x_{i+1} - t)^3 \varphi_{i+1}(x) - 3(x_{i+1} - x)^2 \psi_{i+1}(x) - 6(x_{i+1} - t) \chi_{i+1}(x) \quad (2.3.18)$$

si $t > x$.

Por otro lado, como \mathcal{H}^2 es exacto en \mathbb{P}_3 , se tiene que

$$(x - t)^3 = \mathcal{H}^2 \left[(x - t)^3 \right]$$

lo que se traduce en la igualdad

$$\begin{aligned} (x-t)^3 &= (x_i-t)^3 \varphi_i(x) + 3(x_i-x)^2 \psi_i(x) + \\ & 6(x_i-t) \chi_i(x) + (x_{i+1}-t)^3 \varphi_{i+1}(x) + \\ & 3(x_{i+1}-x)^2 \psi_{i+1}(x) + 6(x_{i+1}-t) \chi_{i+1}(x) \end{aligned}$$

que sustituida en (2.3.17) y (2.3.18) produce la siguiente expresión de $K(x, t)$:

$$K(x, t) = \begin{cases} (x_i-t)^3 \varphi_i(x) + 3(x_i-t)^2 \psi_i(x) + \\ 6(x_i-t) \chi_i(x) & \text{si } t \leq x \\ -(x_{i+1}-t)^3 \varphi_{i+1}(x) - 3(x_{i+1}-t)^2 \psi_{i+1}(x) - \\ 6(x_{i+1}-t) \chi_{i+1}(x) & \text{si } t > x \end{cases} \quad (2.3.19)$$

Para cada x del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ la función $K(x, t)$ es una función spline cúbica con un único nodo en $t = x$. Las igualdades (2.3.16 iii) se deducen inmediatamente de (2.3.19). Asimismo, es fácil ver que $K(x, t)$, para x en dicho intervalo, sólo se anula en los puntos indicados.

Finalmente, estudiemos el signo de $K(x, t)$. Supongamos que $x \in (x_i, x_{i+1})$ y $t \in [x_i, x)$. Entonces

$$K(x, t) = (x_i-t)^3 \varphi_i(x) + 3(x_i-t)^2 \psi_i(x) + 6(x_i-t) \chi_i(x)$$

y

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -3(x_i-t)^2 \varphi_i(x) - 6(x_i-t) \psi_i(x) - 6\chi_i(x)$$

Las igualdades anteriores en $t = x_i$ proporcionan, por (2.3.12),

$$K(x, x_i) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial t}(x, x_i) = -6\chi_i(x) < 0$$

Si $x \in (x_i, y_{i,1})$ y $t \in (x, x_i]$, de (2.3.19) se obtienen de forma totalmente análoga las siguientes relaciones para $t = x_{i+1}$:

$$K(x, x_{i+1}) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial t}(x, x_{i+1}) = 6\chi_{i+1}(x) > 0$$

Conseguimos los mismos resultados cuando $x \in [y_{i,1}, y_{i,2}]$ o $x \in (y_{i,2}, x_{i+1})$. Se deducen, pues, las desigualdades (2.3.16 i y ii). \square

Lema 2.3.2 *La norma L^∞ de la función*

$$k(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |K(x, t)| dt, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (2.3.20)$$

es

$$\|k\|_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |k(x)| = \frac{3 - 15\alpha_i + 16\alpha_i^2 + 46\alpha_i^3 - 96\alpha_i^4 + 32\alpha_i^5}{192(1 - \alpha_i)} \quad (2.3.21)$$

Demostración.

Como el signo de $K(x, t)$ alterna, podemos escribir

$$\begin{aligned} k(x) &= - \int_{x_i}^{y_{i,1}} K(x, t) dt + \int_{y_{i,1}}^{y_{i,2}} K(x, t) dt - \int_{y_{i,2}}^{x_{i+1}} K(x, t) dt \\ &= \left(- \int_{x_i}^{y_{i,1}} (x-t)_+^3 + \int_{x_i}^{y_{i,1}} \mathcal{H}_x^2 [(x-t)_+^3] \right) + \\ &= \left(\int_{y_{i,1}}^{y_{i,2}} (x-t)_+^3 - \int_{y_{i,1}}^{y_{i,2}} \mathcal{H}_x^2 [(x-t)_+^3] \right) + \\ &= \left(\int_{y_{i,2}}^{x_{i+1}} (x-t)_+^3 - \int_{y_{i,2}}^{x_{i+1}} \mathcal{H}_x^2 [(x-t)_+^3] \right), \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

Para $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} k(x) &= - \int_{x_i}^x (x-t)^3 dt + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{H}_x^2 [(x-t)_+^3] dt - \\ &\quad 2 \int_{y_{i,1}}^{y_{i,2}} \mathcal{H}_x^2 [(x-t)_+^3] dt \\ &= -\frac{1}{4} (x-x_i)^4 + \\ &\quad \varphi_{i+1}(x) \left[\frac{1}{4} h_i^4 + \frac{1}{2} (x_{i+1} - y_{i,2})^4 - \frac{1}{2} (x_{i+1} - y_{i,1})^4 \right] + \\ &\quad \psi_{i+1}(x) \left[h_i^3 + 2(x_{i+1} - y_{i,2})^3 - 2(x_{i+1} - y_{i,1})^3 \right] + \\ &\quad \chi_{i+1}(x) \left[3h_i^2 + 6(x_{i+1} - y_{i,2})^2 - 6(x_{i+1} - y_{i,1})^2 \right] \end{aligned}$$

Pero las expresiones (2.3.12) deducidas para las funciones φ_i , ψ_i y χ_i implican que la combinación lineal de ellas que aparece en la igualdad precedente es del tipo $a_1 (x - x_i)^3$, siendo a_1 un valor real que posteriormente explicitaremos; así pues,

$$k(x) = -\frac{1}{4} (x - x_i)^4 + a_1 (x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, y_{i,1}] \quad (2.3.22)$$

Análogamente, si $x \in [y_{i,1}, y_{i,2}]$,

$$k(x) = -\frac{1}{4}(x - x_i)^4 + \frac{1}{2}(x - y_{i,1})^4 + a_2(x - x_i)^3 + a_3(x - y_{i,1}) \quad (2.3.23)$$

y, si $x \in [y_{i,2}, x_{i+1}]$,

$$k(x) = -\frac{1}{4}(x_{i+1} - x)^4 + \beta_1(x_{i+1} - x)^3 + \beta_2(x_{i+1} - x)^2 + \beta_3(x_{i+1} - x) + \beta_4$$

siendo a_2, a_3 y $\beta_i, 1 \leq i \leq 4$, valores reales.

Pero las condiciones

$$k(x_{i+1}) = k'(x_{i+1}) = k''(x_{i+1}) = 0$$

nos permite escribir la última igualdad obtenida en la forma equivalente

$$k(x) = -\frac{1}{4}(x_{i+1} - x)^4 + a_4(x_{i+1} - x)^3, \quad x \in [y_{i,2}, x_{i+1}] \quad (2.3.24)$$

con a_4 real.

Las relaciones (2.3.22), (2.3.23) y (2.3.24) se pueden resumir como

$$k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x - x_i)^4 + a_1(x - x_i)^3 & \text{si } x \in [x_i, y_{i,1}] \\ -\frac{1}{4}(x - x_i)^4 + \frac{1}{2}(x - y_{i,1})^4 + a_2(x - x_i)^3 + a_3(x - y_{i,1}) & \text{si } x \in [y_{i,2}, x_{i+1}] \\ -\frac{1}{4}(x_{i+1} - x)^4 + a_4(x_{i+1} - x)^3 & \text{si } x \in [y_{i,2}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.3.25)$$

donde los coeficientes $a_i, 1 \leq i \leq 4$, serán determinados imponiendo que la función k sea de clase C^2 en los nodos secundarios $y_{i,1}$ e $y_{i,2}$.

La clase C^2 en $y_{i,1}$ se consigue simplemente a partir de la condición $a_2 = a_1$, mientras que en $y_{i,2}$ deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_i)^3 a_2 + (1 - 2\alpha_i)^3 a_3 - \alpha_i^3 a_4 &= \frac{1}{4} [-\alpha_i^4 + (1 - \alpha_i)^4 - 2(1 - 2\alpha_i)^4] h_i \\ (1 - \alpha_i)^2 a_2 + (1 - 2\alpha_i)^2 a_3 + \alpha_i^2 a_4 &= \frac{1}{3} [\alpha_i^3 + (1 - \alpha_i)^3 - 2(1 - 2\alpha_i)^3] h_i \\ (1 - \alpha_i) a_2 + (1 - 2\alpha_i) a_3 - \alpha_i a_4 &= \frac{1}{2} [-\alpha_i^2 + (1 - \alpha_i)^2 - 2(1 - 2\alpha_i)^2] h_i \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones tienen la siguiente única solución:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1 - 6\alpha_i + 18\alpha_i^2 - 16\alpha_i^3}{12\alpha_i(1 - \alpha_i)} h_i \\ a_3 &= -\frac{1 - 12\alpha_i^2 + 8\alpha_i^3}{12\alpha_i(1 - \alpha_i)} h_i \\ a_4 &= \frac{1 - 6\alpha_i + 18\alpha_i^2 - 16\alpha_i^3}{12\alpha_i(1 - \alpha_i)} h_i \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Una vez que conocemos la representación explícita de k , es inmediato comprobar que se trata de una función estrictamente creciente en $[x_i, y_{i,1})$, estrictamente decreciente en $[y_{i,2}, x_{i+1})$, que $k(x_j) = k'(x_j) = 0$ para $j = 1, 2$, y que k presenta un único extremo relativo en $x^* = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$. En consecuencia,

$$\|k\|_i = k(x^*)$$

y se tiene (2.3.21). □

Proposición 2.3.3 Sea $f \in C^4(\mathbb{R})$. Para cada entero i y $x \in [x_i, x_{i+1}]$, definamos

$$\mathcal{L}f = f(x) - \mathcal{H}^2 f(x) \quad (2.3.27)$$

Entonces

$$|\mathcal{L}f| \leq \frac{3 - 15\alpha_i + 16\alpha_i^2 + 48\alpha_i^3 - 96\alpha_i^4 + 32\alpha_i^5}{1152(1 - \alpha_i)} h_i^4 \|f^{(4)}\|_i \quad (2.3.28)$$

donde

$$\|f^{(4)}\|_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f^{(4)}(x)|$$

Demostración.

Por ser \mathcal{H}^2 exacto en \mathbb{P}_3 , el funcional \mathcal{L} definido por (2.3.27) satisface la igualdad

$$\mathcal{L}p = 0, \quad p \in \mathbb{P}_3$$

Por tanto, empleando el teorema del núcleo de Peano, podemos escribir

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathcal{L}_x [(x-t)_+^3] f^{(4)}(t) dt = \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x,t) f^{(4)}(t) dt$$

Entonces,

$$|\mathcal{L}f| \leq \frac{1}{6} \|f^{(4)}\|_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x, t) dt = \frac{1}{6} k(x) \|f^{(4)}\|_i$$

y (2.3.28) se sigue de (2.3.21). \square

Hemos establecido una cota del error de interpolación en el caso de Hermite completamente local que hemos indicado, y en ella aparece la constante

$$\frac{3 - 15\alpha_i + 16\alpha_i^2 + 48\alpha_i^3 - 96\alpha_i^4 + 32\alpha_i^5}{1152(1 - \alpha_i)}$$

Es natural interesarse por la disposición óptima de los nodos secundarios, $y_{i,1}$ e $y_{i,2}$, que se suponían simétricamente distribuidos alrededor del centro de su intervalo. Es inmediato probar que, para minimizar dicha constante, los puntos críticos se escriben en la forma $\alpha_i = \frac{1}{2} - z$, siendo z un cero del polinomio $z(1+z)(1-6z+8z^3)$; es decir, son los valores 0 , -1 y $\cos\left(\frac{2^k\pi}{9}\right)$, $1 \leq k \leq 3$, de los que sólo $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ conduce a un α_i en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. El máximo absoluto de la constante del error de interpolación se alcanza en $\alpha_i = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$, y es, aproximadamente, igual a 0.0065292969.

Dado que $\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ es muy próximo a $\frac{1}{3}$, sería razonable considerar en las aplicaciones este último valor para disponer los nodos secundarios si este cambio no produjese un aumento considerable de la constante del error. Para $\alpha_i = \frac{1}{3}$ la estimación es

$$|f(x) - \mathcal{H}^2 f(x)| \leq \frac{61}{3888} \frac{h_i^4}{4!} \|f^{(4)}\|_i$$

Comparando con la estimación calculada para $\alpha_i = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ se concluye que $\alpha_i = \frac{1}{3}$ es una buena elección.

Por otro lado, si consideramos funciones spline cúbicas de clase C^2 definidas sobre los intervalos producidos por los nodos primarios exclusivamente, es conocido ([26]) que la estimación $\frac{5}{385} h_i^4$ ($\frac{5}{384} \simeq 0.0130208333$) para la constante de la estimación del error de interpolación es óptima y puede ser comparada con las estimaciones correspondientes a la situación considerada en esta sección con $\alpha_i = \frac{1}{3}$ y $\alpha_i = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$, obteniendo que la constante en este último caso es ligeramente superior a la mitad de la del esquema spline sobre los nodos primarios.

El esquema de interpolación dado por \mathcal{H}^2 proporciona buenos resultados, aunque necesitamos calcular un mayor número de polinomios; no debemos olvidar, sin embargo, que el tener como datos los valores hasta la segunda derivada en los nodos

primarios introduce un conjunto de grados de libertad que pueden ser utilizados para, por ejemplo, resolver problemas de preservación de la forma ([42]).

2.3.3 El problema de interpolación de Hermite de orden uno

En las dos subsecciones precedentes hemos considerado el problema de interpolación spline de Hermite de orden dos con una distribución de nodos secundarios concreta y el error de interpolación asociado. Vamos a tratar ahora la de orden uno y a utilizar aquellos resultados para obtener una estimación del error de interpolación, aunque no óptima.

Para ello, recordemos que, con las mismas notaciones empleadas hasta ahora, existen funciones $\tilde{\varphi}_i$ y $\tilde{\psi}_i$ en $\mathbb{P}_4^3(T)$ con soportes $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ y $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, respectivamente, tales que, para cada entero j , satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_i(x_j) &= \delta_{ij} & \tilde{\varphi}'_i(x_j) &= 0 \\ \tilde{\psi}_i(x_j) &= 0 & \tilde{\psi}'_i(x_j) &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

además de las siguientes:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_i''(x_{i-1}) &= 2 \frac{h_{i-2}}{(h_{i-2} + h_{i-1}) h_{i-1}^2} \\ \tilde{\varphi}_i''(x_i) &= -2 \frac{h_{i-1}^2 - h_{i-1}h_i + h_i^2}{h_{i-1}^2 h_i^2} \\ \tilde{\varphi}_i''(x_{i+1}) &= 2 \frac{h_{i+1}}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})} \\ \tilde{\psi}_i''(x_i) &= 2 \left(\frac{1}{h_{i-1}} - \frac{1}{h_i} \right)\end{aligned}$$

El operador de interpolación definido por

$$\mathcal{H}^1 f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) \tilde{\varphi}_i + f'(x_i) \tilde{\psi}_i) \tag{2.3.29}$$

es exacto en \mathbb{P}_3 . Entre las funciones fundamentales de los operadores \mathcal{H}^2 y \mathcal{H}^1 hay una estrecha relación, pues

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_i &= \varphi_i + \frac{2h_{i-2}}{(h_{i-1} + h_i) h_{i-1}^2} \chi_{i-1} - 2 \frac{h_{i-1}^2 - h_{i-1}h_i + h_i^2}{h_{i-1}^2 h_i^2} \chi_i + \frac{2h_{i+1}}{h_i^2 (h_i + h_{i+1})} \chi_{i+1} \\ \tilde{\psi}_i &= \psi_i + 2 \left(\frac{1}{h_{i-1}} - \frac{1}{h_i} \right) \chi_i\end{aligned}$$

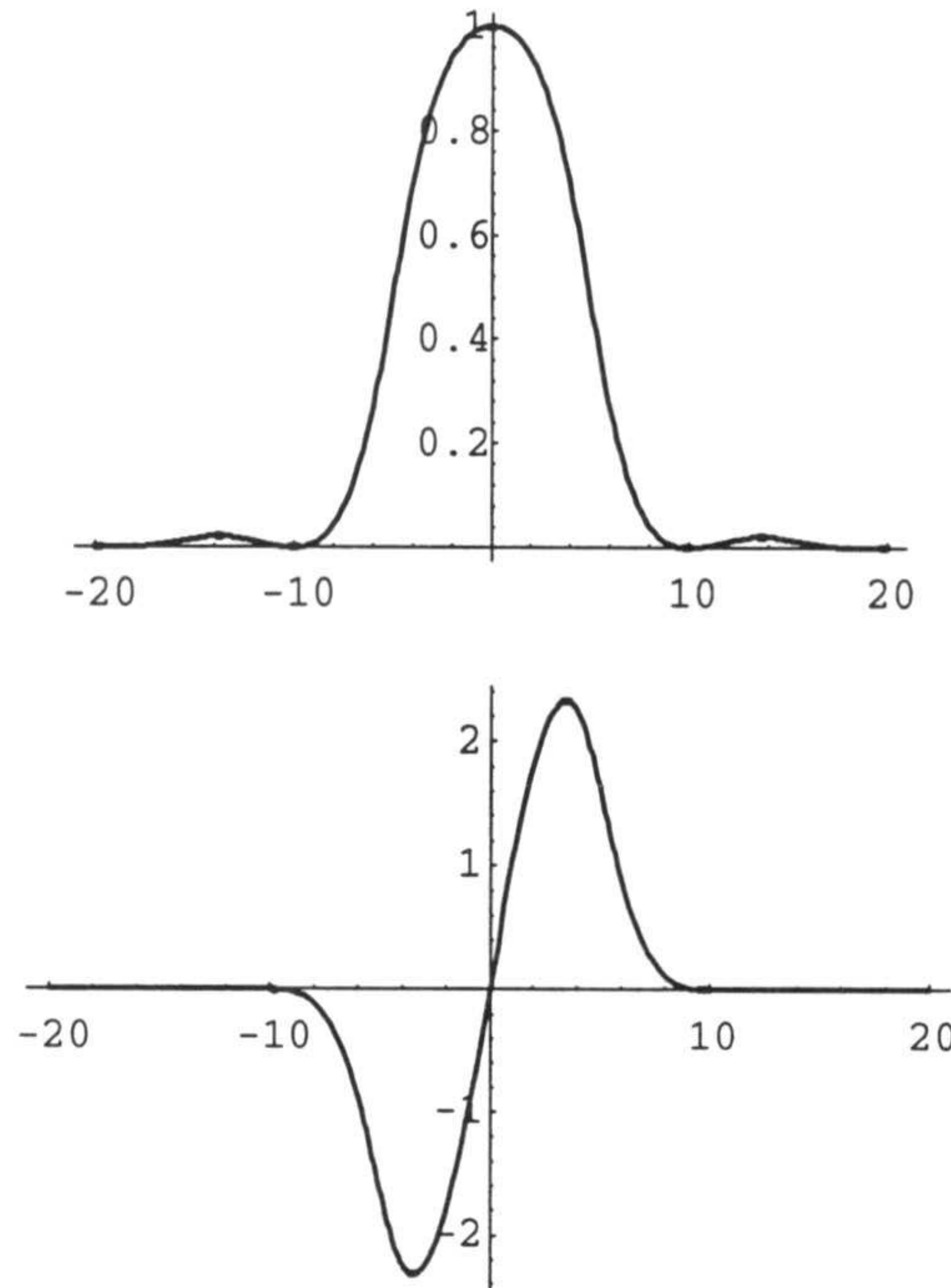


Figura 2.7: Gráficas de las funciones $\tilde{\varphi}_i$ y $\tilde{\psi}_i$ para $x_i = 10i$, $-2 \leq i \leq 2$, $\alpha_{-2} = \alpha_1 = \frac{1}{3}$ y $\alpha_{-1} = \alpha_0 = \frac{5}{12}$.

como se comprueba sin más que hallar los valores de las derivadas segundas en los nodos primarios y tener en cuenta la unicidad.

El siguiente resultado se establece de forma inmediata efectuando los cambios de índice oportunos.

Lema 2.3.4 *En las condiciones indicadas, $\mathcal{H}^1 f$ admite la siguiente representación:*

$$\mathcal{H}^1 f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (f(x_i) \varphi_i + f'(x_i) \psi_i + s_i \chi_i) \quad (2.3.30)$$

donde

$$s_i = 2 \frac{h_i}{h_{i-1}^2 (h_{i-1} + h_i)} f(x_{i-1}) - 2 \frac{h_{i-1}^2 - h_{i-1} h_i + h_i^2}{h_{i-1}^2 h_i^2} f(x_i) + 2 \left(\frac{1}{h_{i-1}} - \frac{1}{h_i} \right) f'(x_i) + 2 \frac{h_{i-1}}{h_i^2 (h_{i-1} + h_i)} f(x_{i+1}) \quad (2.3.31)$$

2.3.4 Error de interpolación para \mathcal{H}^1

En esta subsección obtendremos una estimación para $\mathcal{H}^1 f(x) - f(x)$ en cada macrointervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Lema 2.3.5 *Supongamos que $f \in C^4(\mathbb{R})$ y sea s_i el valor dado por (2.3.31). Entonces*

$$f''(x_i) - s_i = \frac{h_{i-1}h_i}{12} f^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \quad (2.3.32)$$

Demostración

Definamos el funcional \mathcal{D} por medio de

$$\mathcal{D}f = f''(x_i) - s_i$$

Como

$$\mathcal{D}p = 0, \quad p \in \mathbb{P}_3,$$

el teorema del núcleo de Peano implica que

$$\mathcal{D}f = \frac{1}{6} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathcal{D}_x [(x-t)_+^3] f^{(4)}(t) dt$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x [(x-t)_+^3] = & 6(x_i - t)_+ - \frac{2}{h_{i-1}^2(h_{i-1} + h_i)h_i^2} [3h_{i-1}h_i(h_i^2 - h_{i-1}^2)(x_i - t)_+^2 + \\ & h_i^3(x_{i-1} - t)_+^3 - (h_{i-1}^3 + h_i^3)(x_i - t)_+^3 + h_{i-1}^3(x_{i+1} - t)_+^3] \end{aligned}$$

En consecuencia, si $t \in [x_{i-1}, x_i)$, tenemos que

$$\mathcal{D}_x [(x-t)_+^3] = 2 \frac{h_i}{h_{i-1}^2(h_{i-1} + h_i)} (x_{i-1} - t)^3$$

y, si $t \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\mathcal{D}_x [(x-t)_+^3] = -2 \frac{h_{i-1}}{h_i^2(h_{i-1} + h_i)} (x_{i+1} - t)^3$$

En resumen,

$$\mathcal{D}_x [(x-t)_+^3] = \begin{cases} 2 \frac{h_i}{h_{i-1}^2(h_{i-1} + h_i)} (x_{i-1} - t)^3 & \text{si } x_{i-1} \leq t < x_i \\ -2 \frac{h_{i-1}}{h_i^2(h_{i-1} + h_i)} (x_{i+1} - t)^3 & \text{si } x_i \leq t \leq x_{i+1} \end{cases}$$

Se trata de una función que no cambia de signo en $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, por lo que existe ξ_i en (x_{i-1}, x_{i+1}) tal que

$$\mathcal{D}f = \frac{1}{6} f^{(4)}(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathcal{D}_x [(x-t)_+^3] dt = -\frac{h_{i-1}h_i}{12} f^{(4)}(\xi_i)$$

con lo que concluye la demostración. \square

Lema 2.3.6 Para cada entero i , sea g_i la función definida en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$g_i(x) = \chi_i(x) + \chi_{i+1}(x)$$

Entonces

$$\|g\|_i = \frac{\alpha_i(3-4\alpha_i)}{24(1-\alpha_i)} h_i^2 \quad (2.3.33)$$

Demostración

La función g_i puede expresarse en cada subintervalo $I_{i,1} = [x_i, y_{i,1}] = [t_{3i}, t_{3i+1}]$, $I_{i,2} = [y_{i,1}, y_{i,2}] = [t_{3i+1}, t_{3i+2}]$ e $I_{i,3} = [y_{i,2}, x_{i+1}] = [t_{3i+2}, t_{3i+3}]$ en la base de Bernstein de \mathbb{P}_3 ([19]). Concretamente, si $\{B_j, 0 \leq j \leq 3\}$ es la base de Bernstein, cuyos elementos están definidos como

$$B_j(u) = \binom{3}{j} (1-u)^{3-j} u^j, \quad u \in [0, 1],$$

y $g_{i,j}$ denota la restricción de g_i a $I_{i,j}$, $1 \leq j \leq 3$, entonces

$$g_{i,j} = \sum_{k=0}^3 b_{3j+k-3} B_j \left(\frac{x - t_{3i+k}}{t_{3i+k+1} - t_{3i+k}} \right), \quad x \in [t_{3i+k}, t_{3i+k+1}],$$

donde los valores del conjunto $\{b_{3j+k-3}, 1 \leq j \leq 3, 0 \leq k \leq 3\}$ se determinan imponiendo que g_i sea de clase C^2 , obteniendo los siguientes valores:

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1 = b_8 = b_9 = 0 \\ b_2 &= b_7 = \frac{1}{6} \alpha_i^2 h_i^2 \\ b_3 &= b_6 = \frac{1}{6} \frac{(2-3\alpha_i)\alpha_i}{1-\alpha_i} h_i^2 \\ b_4 &= b_5 = \frac{1}{6} (1-\alpha_i)\alpha_i h_i^2 \end{aligned}$$

Como $b_r = b_s$ cuando $r + s = 9$, la función g_i es simétrica respecto del punto $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Por otra parte, g_i es convexa en un entorno de x_i , creciente en $(x_i, y_{i,1}]$, presenta un punto de inflexión en $(1 - \alpha_i) h_{i-1}$, es cóncava en $(y_{i,1}, y_{i,2})$ y tiene un máximo relativo en x_i^* . Por tanto, la función g_i alcanza su máximo absoluto en x_i^* , lo que conduce a (2.3.33). \square

Lema 2.3.7 *Supongamos que $f \in C^4(\mathbb{R})$. Entonces, para cualesquiera entero i y $x \in [x_i, x_{i+1}]$ se cumple la siguiente desigualdad:*

$$|\mathcal{H}^2 f(x) - \mathcal{H}^1 f(x)| \leq \frac{\alpha_i (3 - 4\alpha_i)}{288 (1 - \alpha_i)} \left(h_i^3 \max_{j \in \{i-1, i+1\}} h_j \right) \|f^{(4)}\|_{i-1,3} \quad (2.3.34)$$

donde

$$\|f^{(4)}\|_{i-1,3} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_{i+2}]} |f^{(4)}(x)|$$

Demostración

Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$, por (2.3.13) y (2.3.32), se tiene la igualdad

$$\mathcal{H}^2 f(x) - \mathcal{H}^1 f(x) = (f''(x_i) - s_i) \chi_i(x) + (f''(x_{i+1}) - s_{i+1}) \chi_{i+1}(x)$$

Entonces, por (2.3.12), (2.3.32) y (2.3.33), deducimos la existencia de $\xi_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$, $j = i, i + 1$, tales que

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}^2 f(x) - \mathcal{H}^1 f(x)| &\leq |f''(x_i) - s_i| \chi_i(x) + |f''(x_{i+1}) - s_{i+1}| \chi_{i+1}(x) \\ &\leq \frac{h_{i-1} h_i}{12} |f^{(4)}(\xi_i)| \chi_i(x) + \frac{h_i h_{i+1}}{12} |f^{(4)}(\xi_{i+1})| \chi_{i+1}(x) \\ &\leq \frac{h_i}{12} (h_{i-1} \chi_i(x) + h_{i+1} \chi_{i+1}(x)) \|f^{(4)}\|_{i-1,3} \\ &\leq \frac{h_i}{12} \max_{j \in \{i-1, i+1\}} h_j (\chi_i(x) + \chi_{i+1}(x)) \\ &\leq \frac{h_i}{12} \max_{j \in \{i-1, i+1\}} h_j \frac{\alpha_i (3 - 4\alpha_i)}{24 (1 - \alpha_i)} h_i^2 \|f^{(4)}\|_{i-1,3} \end{aligned}$$

con lo que finaliza la demostración. \square

Ya podemos enunciar y probar la estimación de error que perseguíamos desde el inicio de esta subsección.

Proposición 2.3.8 *Supongamos que $f \in C^4(\mathbb{R})$. Entonces, para cualesquiera entero i y $x \in [x_i, x_{i+1}]$ se cumple la siguiente desigualdad:*

$$|\mathcal{H}^1 f(x) - f(x)| \leq C(\alpha_i) \left(h_i^3 \max_{j \in \{i-1, i, i+1\}} h_j \right) \|f^{(4)}\|_{i-1,3} \quad (2.3.35)$$

donde

$$C(\alpha_i) = \frac{32\alpha_i^5 - 96\alpha_i^4 + 48\alpha_i^3 - 3\alpha_i + 3}{1152(1 - \alpha_i)}$$

Demostración

Para $x \in [x_i, x_{i+1}]$, por (2.3.28) y (2.3.34), podemos escribir

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}^1 f(x) - f(x)| &\leq |\mathcal{H}^2 f(x) - \mathcal{H}^1 f(x)| + |\mathcal{H}^1 f(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\alpha_i(3 - 4\alpha_i)}{288(1 - \alpha_i)} \left(h_i^3 \max_{j \in \{i-1, i, i+1\}} h_j \right) \|f^{(4)}\|_{i-1,3} + \\ &\quad \frac{3 - 15\alpha_i + 16\alpha_i^2 + 48\alpha_i^3 - 96\alpha_i^4 + 32\alpha_i^5}{1152(1 - \alpha_i)} h_i^4 \|f^{(4)}\|_i \\ &\leq \left[\frac{\alpha_i(3 - 4\alpha_i)}{288(1 - \alpha_i)} \max_{j \in \{i-1, i, i+1\}} h_j + \right. \\ &\quad \left. \frac{3 - 15\alpha_i + 16\alpha_i^2 + 48\alpha_i^3 - 96\alpha_i^4 + 32\alpha_i^5}{1152(1 - \alpha_i)} h_i \right] h_i^3 \|f^{(4)}\|_{i-1,3} \end{aligned}$$

expresión que conduce (2.3.35). □

Para finalizar, sólo podemos afirmar que se tiene la desigualdad

$$|\mathcal{H}^1 f(x) - f(x)| \leq \frac{5}{1152} h^4 \|f^{(4)}\|_{i-1,3},$$

donde h es el máximo de las longitudes de los macrointervalos inducidos por la sucesión de nodos primarios, puesto que $C(\alpha_i)$ es una función estrictamente creciente de la variable $\alpha_i \in (0, \frac{1}{2})$. La cota anterior es comparable con la correspondiente a la interpolación spline cúbica de clase C^1 , que es $\frac{1}{384} h^4$, como se prueba en [75]. Los valores $\alpha_i = \frac{1}{3}$ y $\alpha_i = \frac{1}{2} - \cos \frac{4\pi}{9}$ producen mejores constantes en las estimaciones que la indicada más arriba (obtenida haciendo tender α_i al valor $\frac{1}{2}$), que son $\frac{331}{3888} \frac{1}{4!} \simeq 0.0035472393$ y 0.0035034605 , respectivamente. Es razonable pensar que el uso directo del teorema del núcleo de Peano para estimar el error de interpolación para el interpolante $\mathcal{H}^1 f$ produzca una constante menor, que mejore la cota óptima asociada a la interpolación spline cúbica de clase C^1 . No debemos perder de vista que, a pesar de todo, el operador de interpolación que hemos definido produce interpolantes de clase C^2 .

2.3.5 Un esquema global de Hermite de orden uno

En lo que resta de la sección vamos a considerar un problema similar al anterior pero definido globalmente y a estudiar el error que tiene asociado.

Sean $I = [a, b]$ un intervalo de \mathbb{R} y $X_n = \{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$ e $Y_{n,3} = \{y_{i,j}\}_{0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2}$ dos conjuntos de puntos similares a los definidos inicialmente, es decir, tales que

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a, \quad x_n = b \\
 x_i &< y_{i,1} < y_{i,2} < x_{i+1} \\
 y_{i,1} &= x_i + \alpha_i h_i \\
 y_{i,2} &= x_i + (1 - \alpha_i) h_i, \quad 0 \leq i \leq n-1 \\
 h_i &= x_{i+1} - x_i \\
 0 &< \alpha_i < \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Definimos el conjunto $T_{n,3} = X_n \cup Y_{n,3} = \{t_i\}_{0 \leq i \leq 3n}$, donde

$$\begin{aligned}
 t_{3i} &= x_i \\
 t_{3i+1} &= y_{i,1}, \quad t_{3i+2} = y_{i,2}, \quad 0 \leq i \leq n-1 \\
 t_{3n} &= x_n
 \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

Asimismo, consideramos el espacio

$$\mathbb{P}_3^2(I, T_{n,3}) = \left\{ f \in C^2(I) : f|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \quad 0 \leq i \leq n-1 \right\} \tag{2.3.38}$$

de funciones spline cúbicas con nodos en $T_{n,3}$.

Para cualquier $0 \leq i \leq n$ hay funciones $\varphi_{i,n}$, $\psi_{i,n}$ y $\chi_{i,n}$ en $\mathbb{P}_3^2(I, T_{n,3})$ tales que

$$\begin{aligned}
 \text{sop } \varphi_{0,n} &= \text{sop } \varphi_{0,n} = \text{sop } \varphi_{0,n} = [x_0, x_1] \\
 \text{sop } \varphi_{i,n} &= \text{sop } \varphi_{i,n} = \text{sop } \varphi_{i,n} = [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq n-1 \\
 \text{sop } \varphi_{n,n} &= \text{sop } \varphi_{n,n} = \text{sop } \varphi_{n,n} = [x_{n-1}, x_n]
 \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

y

$$\begin{aligned}
 \varphi_{i,n}(x_j) &= \delta_{ij}, \quad \varphi'_{i,n}(x_j) = \varphi''_{i,n}(x_j) = 0 \\
 \psi'_{i,n}(x_j) &= \delta_{ij}, \quad \psi_{i,n}(x_j) = \psi''_{i,n}(x_j) = 0 \\
 \chi''_{i,n}(x_j) &= \delta_{ij}, \quad \chi_{i,n}(x_j) = \chi'_{i,n}(x_j) = 0
 \end{aligned} \tag{2.3.40}$$

para $0 \leq j \leq n$. Las funciones $\varphi_{i,n}$, $\psi_{i,n}$ y $\chi_{i,n}$ se pueden expresar en términos de los B-splines normalizados asociados a $T_{n,3}$.

Podemos definir un operador

$$\mathcal{H}_n^2 : C^2(I) \rightarrow C^2(I)$$

mediante

$$\mathcal{H}_n^2 f = \sum_{i=0}^n (f(x_i) \varphi_{i,n} + f'(x_i) \psi_{i,n} + f''(x_i) \chi_{i,n}) \quad (2.3.41)$$

Para cada $n+1$ -upla $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de números reales tiene sentido considerar el operador

$$\mathcal{S}_{n,\lambda} : C^1(I) \rightarrow C^2(I)$$

definido a partir de la siguiente igualdad:

$$\mathcal{S}_{n,\lambda} f = \sum_{i=0}^n (f(x_i) \varphi_{i,n} + f'(x_i) \psi_{i,n} + \lambda_i \chi_{i,n}) \quad (2.3.42)$$

Si f es una función de clase $C^1(I)$, la función $\mathcal{S}_{n,\lambda} f$ es solución del problema de interpolación de Hermite de orden uno en $\mathbb{P}_3^2(I, T_n)$ asociado a los datos $\{f^{(r)}(x_i), 0 \leq i \leq n, r = 0, 1\}$.

A continuación hacemos una elección específica de λ imponiendo la *condición not-a-knot* de de Boor ([5]).

Proposición 2.3.9 *Consideremos $f \in C^2(I)$ y definamos $\lambda_0 = f''(x_0)$ y $\lambda_n = f''(x_n)$. Entonces existe un único conjunto de valores λ_i , $1 \leq i \leq n-1$, tales que, para $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, la función $\mathcal{S}_{n,\lambda} f$ es de clase C^3 en los nodos primarios x_i , $1 \leq i \leq n-1$. Por tanto, $\mathcal{S}_{n,\lambda} f$ queda definida de forma única de esta manera.*

Demostración

En el resto de la sección notaremos $f(x_i) = y_i$, $f'(x_i) = y'_i$ y $f''(x_i) = y''_i$. Sea, además,

$$R_j(x) = \mathcal{S}_{n,\lambda} f(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = i-1, i$$

La continuidad C^3 en x_i se da si $R_{i-1}^{(3)}(x_i) = R_i^3(x_i)$. Las derivadas que necesitamos pueden ser evaluadas usando el algoritmo de de Boor ([5]), obteniendo los siguientes valores:

$$\begin{aligned} R_{i-1}^{(3)}(x_i) &= \mu_{i-1}(y_i - y_{i-1}) - \nu_{i-1}(2y'_i + y'_{i-1}) + \sigma_{i-1}\lambda_i - \tau_{i-1}\lambda_{i-1} \\ R_i^3(x_i) &= \mu_i(y_{i+1} - y_i) - \nu_i(y'_{i+1} + 2y'_i) + \tau_i\lambda_{i+1} - \sigma_i\lambda_i \end{aligned}$$

donde, para $j = i - 1, i$,

$$\begin{aligned}\mu_j &= \frac{6}{\alpha_j (1 - \alpha_j) h_j^3} \\ \nu_j &= \frac{2}{\alpha_j (1 - \alpha_j) h_j^2} \\ \sigma_j &= \frac{1}{h_j} \left[1 + \frac{1}{\alpha_j (1 - \alpha_j)} \right] \\ \tau_j &= \frac{1}{h_j}\end{aligned}\tag{2.3.43}$$

La continuidad C^3 en x_i se logra si

$$-A_{i-1}\lambda_{i-1} + B_i\lambda_i - C_{i+1}\lambda_{i+1} = M_i\tag{2.3.44}$$

con

$$M_i = D_{i+1}y_{i+1} - E_i y_i + F_{i-1}y_{i-1} - G_{i+1}y'_{i+1} - H_i y'_i + I_{i-1}y'_{i-1}\tag{2.3.45}$$

donde

$$\begin{aligned}A_{i-1} &= \tau_{i-1} & D_{i+1} &= \mu_i & G_{i+1} &= \nu_i \\ B_i &= \sigma_{i-1} + \sigma_i & E_i &= \mu_{i-1} + \mu_i & H_i &= 2(\nu_i - \nu_{i-1}) \\ C_{i+1} &= \tau_i & F_{i-1} &= \mu_{i-1} & I_{i-1} &= \nu_{i-1}\end{aligned}\tag{2.3.46}$$

Las ecuaciones (2.3.44), junto con $\lambda_0 = f''(x_0)$ y $\lambda_n = f''(x_n)$, constituyen un sistema lineal tridiagonal, que es estrictamente diagonalmente dominante, lo que garantiza la existencia y unicidad de las λ_i , $1 \leq i \leq n - 1$. \square

La $n + 1$ -upla $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dada por la proposición anterior hace posible definir un operador $\mathcal{S}_{n,\lambda}$ concreto, que notaremos \mathcal{S}_n . Es inmediato verificar el siguiente resultado:

Lema 2.3.10 *Sea $f \in C^2(I)$. Entonces los valores*

$$e_i = \lambda_i - y''_i, \quad 1 \leq i \leq n - 1, \quad e_0 = e_n = 0\tag{2.3.47}$$

son solución del sistema

$$-A_{i-1}e_{i-1} + B_i e_i - C_{i+1}e_{i+1} = \overline{M}_i, \quad 1 \leq i \leq n - 1\tag{2.3.48}$$

donde

$$\overline{M}_i = M_i + A_{i-1}y''_{i-1} - B_i y''_i + C_{i+1}y''_{i+1}\tag{2.3.49}$$

Vamos a establecer estimaciones para $|e_i|$ y $|\overline{M}_i|$ en los dos resultados siguientes.

Lema 2.3.11 *Sea $f \in C^2(I)$. Entonces*

$$e = \max_{1 \leq i \leq n-1} |e_i| \leq \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n-2} (h_i \alpha_i (1 - \alpha_i)) \max_{1 \leq i \leq n-1} |\overline{M}_i| \quad (2.3.50)$$

Demostración

De (2.3.48), para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned} B_i |e_i| &\leq |\overline{M}_i| + A_{i-1} \max_{1 \leq i \leq n-1} |e_{i-1}| + C_{i-1} \max_{1 \leq i \leq n-1} |e_{i+1}| \\ &\leq |\overline{M}_i| + e (A_{i-1} + C_{i-1}) \end{aligned}$$

Entonces,

$$B_i |e_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |\overline{M}_i| + e \max_{1 \leq i \leq n-1} (A_{i-1} + C_{i-1})$$

lo que implica que

$$e \max_{1 \leq i \leq n-1} B_i \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |\overline{M}_i| + e \max_{1 \leq i \leq n-1} (A_{i-1} + C_{i-1})$$

de manera que

$$\left(\max_{1 \leq i \leq n-1} B_i - \max_{1 \leq i \leq n-1} (A_{i-1} + C_{i-1}) \right) e \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |\overline{M}_i|$$

Pero, teniendo en cuenta los valores de A_{i-1} , C_{i+1} y B_i dados por (2.3.46), podemos escribir

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} B_i - \max_{1 \leq i \leq n-1} (A_{i-1} + C_{i-1}) \geq 2 \max_{1 \leq i \leq n-2} \left\{ \frac{1}{h_i \alpha_i (1 - \alpha_i)} \right\}$$

de donde se deduce, finalmente, la desigualdad (2.3.50). \square

Lema 2.3.12 *Sea $f \in C^4(I)$. Entonces se satisface la desigualdad*

$$\max_{1 \leq i \leq n-1} |\overline{M}_i| \leq \frac{1}{6} \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{1 - 6\alpha_i + 18\alpha_i^2 - 16\alpha_i^3}{\alpha_i (1 - \alpha_i)} h_i \right\} \|f^{(4)}\|_\infty \quad (2.3.51)$$

donde

$$\|f^{(4)}\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f^{(4)}(t)| \quad (2.3.52)$$

Demostración

Haciendo uso de la fórmula de Taylor, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + h_i y'_i + \frac{1}{2} h_i^2 y''_i + \frac{1}{6} h_i^3 y'''_i + \frac{1}{6} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t)^3 f^{(4)}(t) dt \\
 y_{i-1} &= y_i - h_{i-1} y'_i + \frac{1}{2} h_{i-1}^2 y''_i - \frac{1}{6} h_{i-1}^3 y'''_i + \frac{1}{6} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1})^3 f^{(4)}(t) dt \\
 y'_{i+1} &= y'_i + h_i y''_i + \frac{1}{2} h_i^2 y'''_i + \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t)^2 f^{(4)}(t) dt \\
 y'_{i-1} &= y'_i - h_{i-1} y''_i + \frac{1}{2} h_{i-1}^2 y'''_i - \frac{1}{2} h_{i-1}^2 y'''_i - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1})^2 f^{(4)}(t) dt \\
 y''_{i+1} &= y''_i + h_i y'''_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) f^{(4)}(t) dt \\
 y''_{i-1} &= y''_i - h_{i-1} y'''_i + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1}) f^{(4)}(t) dt
 \end{aligned}$$

Entonces, por (2.3.43), (2.3.46) y (2.3.49), se cumple que

$$\overline{M}_i = \frac{1}{\alpha_i (1 - \alpha_i) h_i^3} \Omega_i + \frac{1}{\alpha_{i-1} (1 - \alpha_{i-1}) h_{i-1}^3} \Omega_{i-1} \tag{2.3.53}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \Omega_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) \left[(x_{i+1} - t)^2 - h_i (x_{i+1} - t) + \beta_i h_i^2 \right] f^{(4)}(t) dt \\
 \Omega_{i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1}) \left[(t - x_{i-1})^2 - h_{i-1} (t - x_{i-1}) + \beta_{i-1} h_{i-1}^2 \right] f^{(4)}(t) dt
 \end{aligned}$$

con $\beta_j = \alpha_j (1 - \alpha_j)$, $j = i - 1, i$.

Por tanto, tras un cambio de variable adecuado, deducimos, para $j = i, i - 1$, que

$$\begin{aligned}
 |\Omega_j| &\leq \frac{h_j^4}{\alpha_j (1 - \alpha_j)} \int_0^1 u |u - \alpha_j| |u - (1 - \alpha_j)| du \cdot \|f^{(4)}\|_\infty \\
 &= \frac{1}{12} \frac{1 - 6\alpha_j + 18\alpha_j^2 - 16\alpha_j^3}{\alpha_j (1 - \alpha_j)} \|f^{(4)}\|_\infty
 \end{aligned} \tag{2.3.54}$$

En consecuencia, por (2.3.53) y (2.3.54), para $1 \leq i \leq n - 1$, tenemos que

$$|\overline{M}_i| \leq \frac{1}{12} \|f^{(4)}\|_\infty \sum_{j=i-1}^i \frac{1 - 6\alpha_j + 18\alpha_j^2 - 16\alpha_j^3}{\alpha_j (1 - \alpha_j)} h_j$$

de lo que se deduce (2.3.51). \square

En el siguiente resultado acotamos la diferencia entre el operador $S_n f$ y el de Hermite de orden dos $\mathcal{H}_n^2 f$.

Proposición 2.3.13 *Sea $f \in C^4(I)$. Entonces, para cada $0 \leq i \leq n-1$ y $x \in [x_i, x_{i+1}]$, se satisface la desigualdad:*

$$|\mathcal{H}_n^2 f(x) - S_n f(x)| \leq \frac{1}{288} D_{\underline{\alpha}, \underline{h}}^{(2)} \frac{\alpha_i (3 - 4\alpha_i)}{1 - \alpha_i} h_i^2 \|f^{(4)}\|_\infty \quad (2.3.55)$$

donde

$$D_{\underline{\alpha}, \underline{h}}^{(2)} = \min_{1 \leq j \leq n-2} (h_j \alpha_j (1 - \alpha_j)) \max_{0 \leq j \leq n-1} \left(\frac{1 - 6\alpha_j + 18\alpha_j^2 - 16\alpha_j^3}{\alpha_j (1 - \alpha_j)} h_j \right) \quad (2.3.56)$$

y

$$\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \quad \underline{h} = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$$

Demostración

Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$, por (2.3.41), (2.3.42) y (2.3.50) se cumple que

$$|H_n^{(2)} f(x) - S_n f(x)| \leq \sum_{j=i}^{i+1} |f''(x_j) - \lambda_j| |\chi_{j,n}(x)| \leq e \sum_{j=i}^{i+1} \chi_{j,n}(x)$$

Los resultados (2.3.50), (2.3.51) y (2.3.33) nos permiten concluir la demostración. \square

La estimación del error de interpolación asociado al interpolante $S_n f$ es el objetivo del siguiente resultado:

Proposición 2.3.14 *Sea $f \in C^4(I)$. Entonces, para cada $0 \leq i \leq n-1$ y $x \in [x_i, x_{i+1}]$, se satisface la desigualdad*

$$|S_n f(x) - f(x)| \leq \frac{h_i^2}{1152(1 - \alpha_i)} D_{\underline{\alpha}, \underline{h}}^{(1)} \|f^{(4)}\|_\infty \quad (2.3.57)$$

donde

$$D_{\underline{\alpha}, \underline{h}}^{(1)} = 4\alpha_i (3 - 4\alpha_i) D_{\underline{\alpha}, \underline{h}}^{(2)} + p(\alpha_i) h_i^2 \quad (2.3.58)$$

y

$$p(\alpha_i) = 3 - 15\alpha_i + 16\alpha_i^2 + 48\alpha_i^3 - 96\alpha_i^4 + 32\alpha_i^5 \quad (2.3.59)$$

Demostración. La desigualdad

$$|\mathcal{S}_n f(x) - f(x)| \leq |\mathcal{H}_n^2 f(x) - \mathcal{S}_n f(x)| + |\mathcal{H}_n^2 f(x) - f(x)|$$

y (2.3.55) y (2.3.28) dan el resultado indicado. \square

En la estimación de $|\overline{M}_i|$ que hemos obtenido la constante depende de nuevo de la ubicación de los nodos secundarios. El valor de α_i que produce una constante mínima es $\alpha_i = \frac{1}{2} - \cos \frac{4\pi}{9}$, como en el caso de la interpolación de Hermite de orden dos.

En la estimación (2.3.57) intervienen las cotas de $|\overline{M}_i|$ y $|\mathcal{H}_n^2 f(x) - f(x)|$, y ambas son minimizadas cuando se considera el valor $\alpha_i = \frac{1}{2} - \cos \frac{4\pi}{9}$. Así pues, podemos considerar de nuevo esquemas basados en nodos primarios que no están uniformemente distribuidos pero con nodos secundarios que tienen la misma posición relativa respecto de cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. En este caso, las estimaciones dadas por (2.3.55) y (2.3.57) se convierten en

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_n^2 f(x) - \mathcal{S}_n f(x)| &\leq \frac{1}{288} D^{(2)} \left(\min_{1 \leq j \leq n-2} h_j \right) \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} h_j \right) h_i^2 \|f^{(4)}\|_\infty \\ D^{(2)} &= \frac{1}{288} \frac{\alpha(3-4\alpha)(1-6\alpha+18\alpha^2-16\alpha^3)}{1-\alpha} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_n f(x) - f(x)| &\leq \frac{h_i^2}{1152(1-\alpha)} D^{(1)} \|f^{(4)}\|_\infty \\ D^{(1)} &= 4\alpha(3-4\alpha)(1-6\alpha+18\alpha^2-16\alpha^3) \\ &\quad \left(\min_{1 \leq j \leq n-2} h_j \right) \left(\max_{0 \leq j \leq n-1} h_j \right) + \\ &\quad (3-15\alpha+16\alpha^2+48\alpha^3-96\alpha^4+32\alpha^5) h_i^2 \end{aligned}$$

respectivamente, siendo α el parámetro común que fija la posición de los nodos secundarios. Además, si los nodos primarios están uniformemente distribuidos, las estimaciones anteriores adoptan expresiones más simples.

2.3.6 Ejemplos numéricos

Finalizaremos el capítulo dando algunos ejemplos que ilustren las propiedades de aproximación de los esquemas que hemos definido. Consideraremos la función

$$f(x) = (1+x^2) e^{-\frac{x}{1000}} \cos\left((\pi x)^{\frac{5}{2}}\right) \operatorname{sen}(\pi x^2), \quad x \in [0, 1],$$

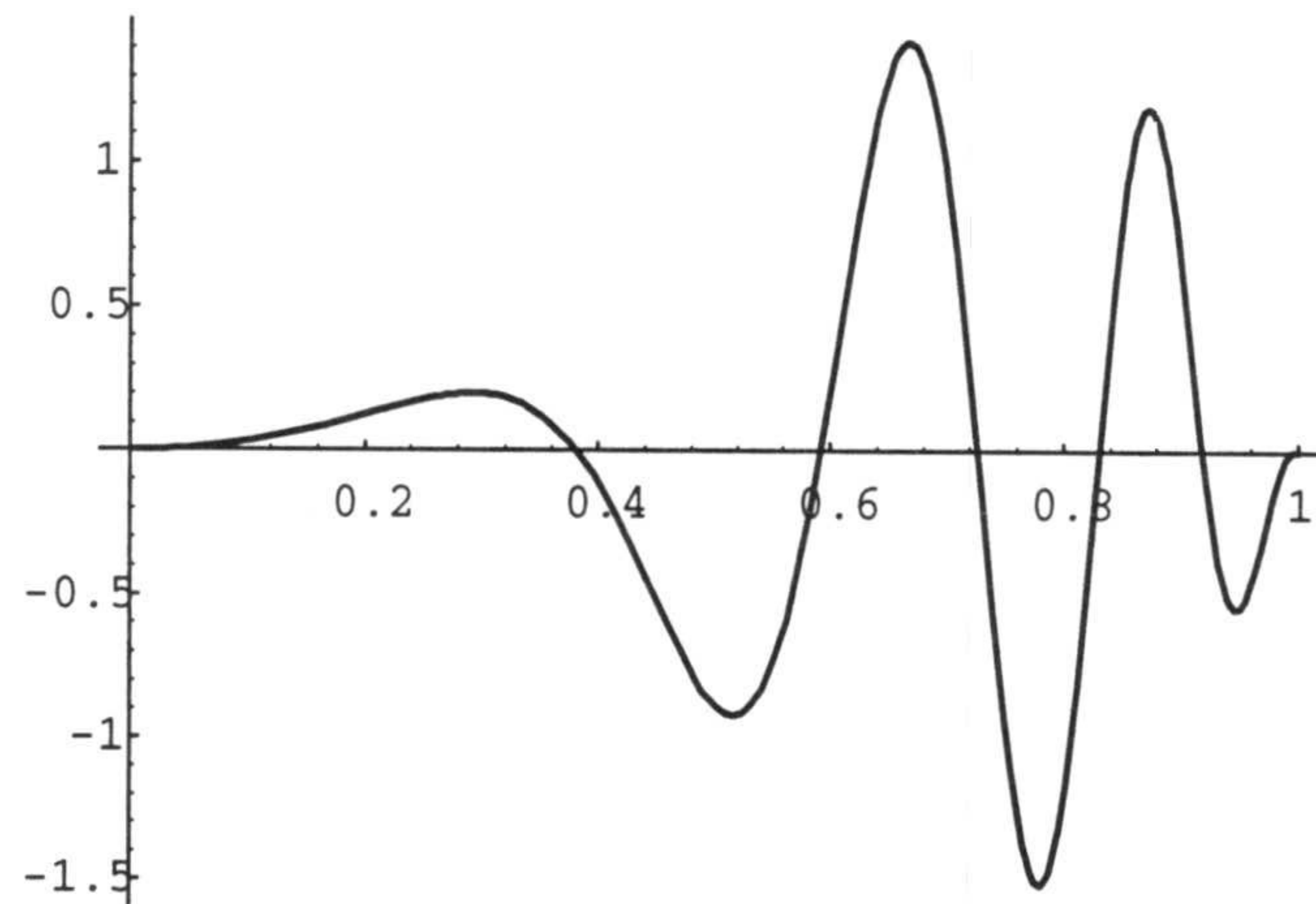


Figura 2.8: Gráfica de la función f .

cuya gráfica se muestra en la fig. 2.8.

Dividimos el intervalo $[0, 1]$ en subintervalos de amplitud $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{32}$. En la fig. 2.9 se muestran las gráficas de los interpolantes $\mathcal{H}_8^2 f$ y $\mathcal{H}_{16}^2 f$. La de $\mathcal{H}_{32}^2 f$ no se distingue de $\mathcal{H}_{16}^2 f$.

Para estos tres interpolantes mostramos las gráficas del error de interpolación en las fig. 2.10, 2.11 y 2.12.

En lo que respecta al esquema de interpolación de tipo Hermite de orden uno global, en las fig. 2.13 y 2.14 se muestran la gráfica de f y las de $\mathcal{S}_8 f$ y $\mathcal{S}_{16} f$, respectivamente. La de $\mathcal{S}_{32} f$ no se distingue de la de $\mathcal{S}_{16} f$.

Los errores de interpolación muestran un comportamiento similar a los correspondientes a los de los interpolantes de tipo Hermite de orden dos, pero son significativos en un intervalo más amplio.

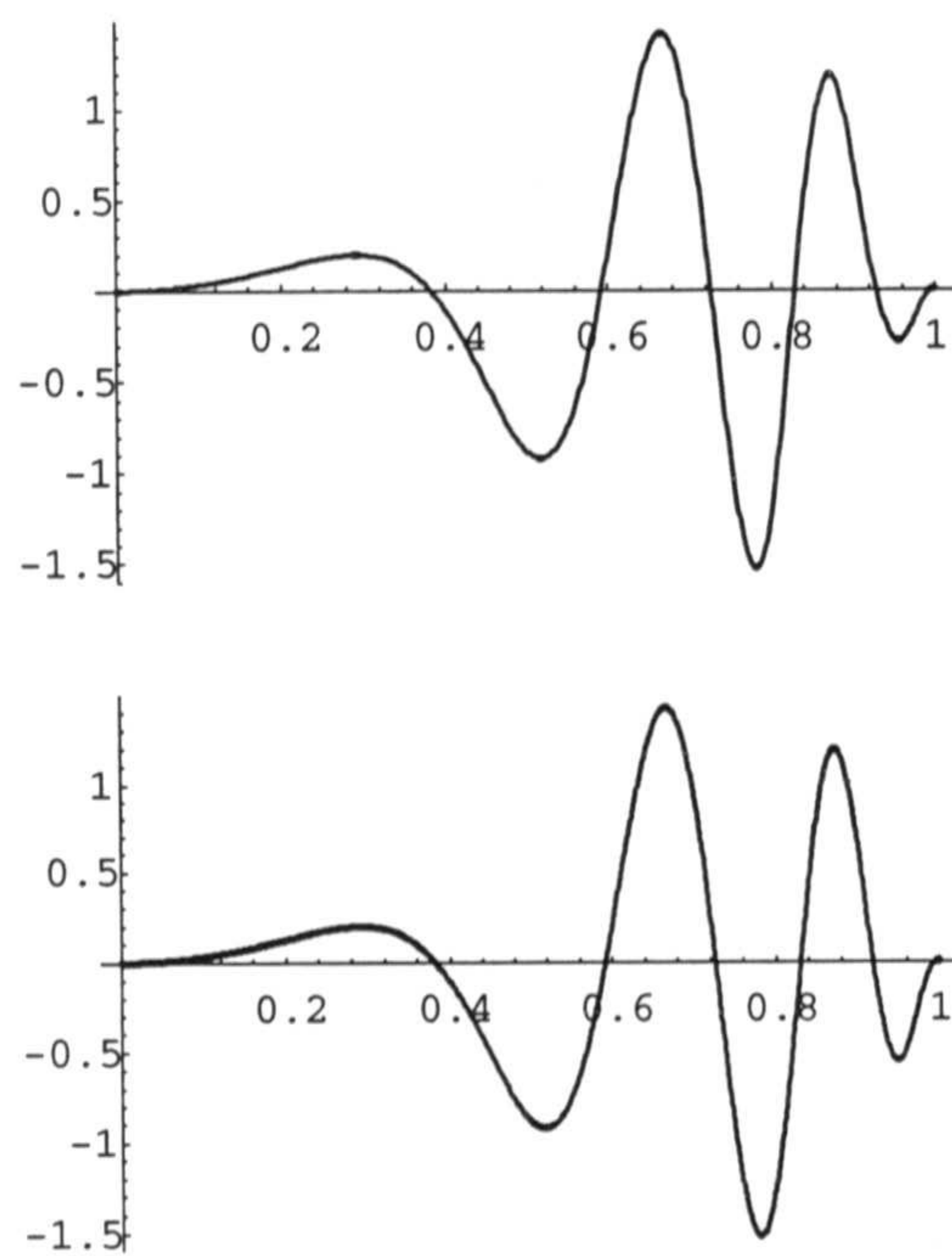


Figura 2.9: Gráficas de los interpolantes $\mathcal{H}_n^2 f$ con $n = 8, 16$.

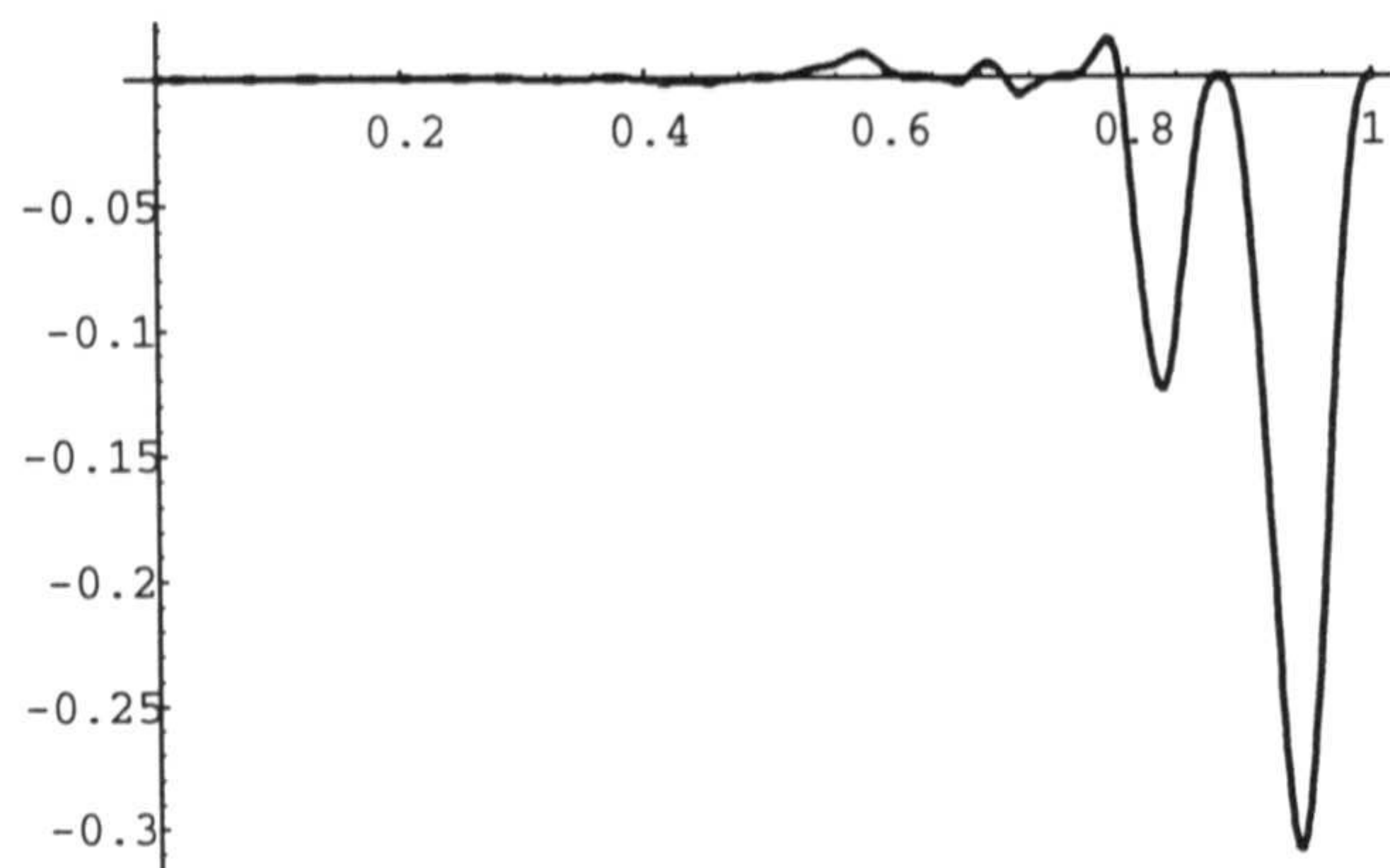
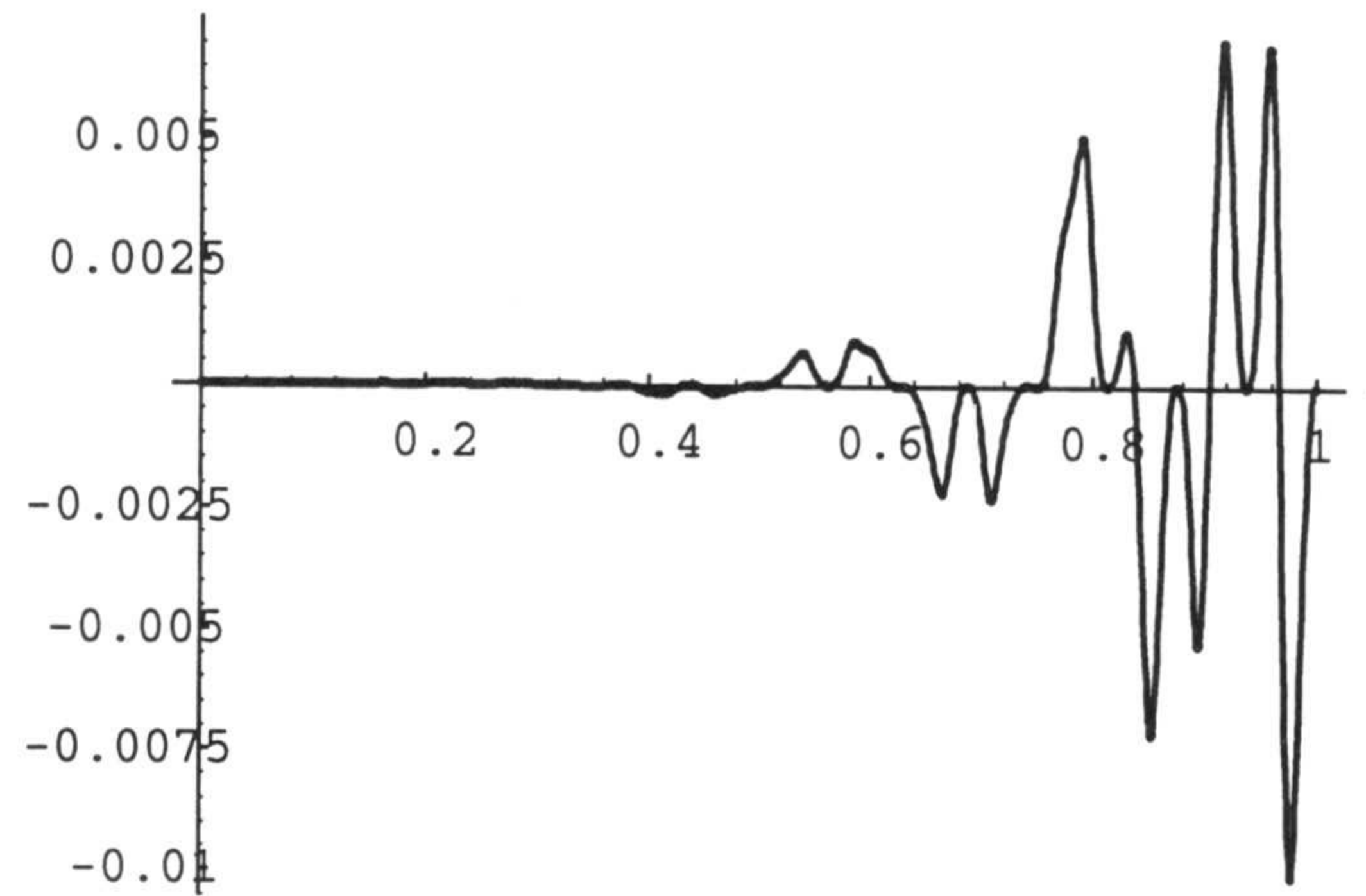
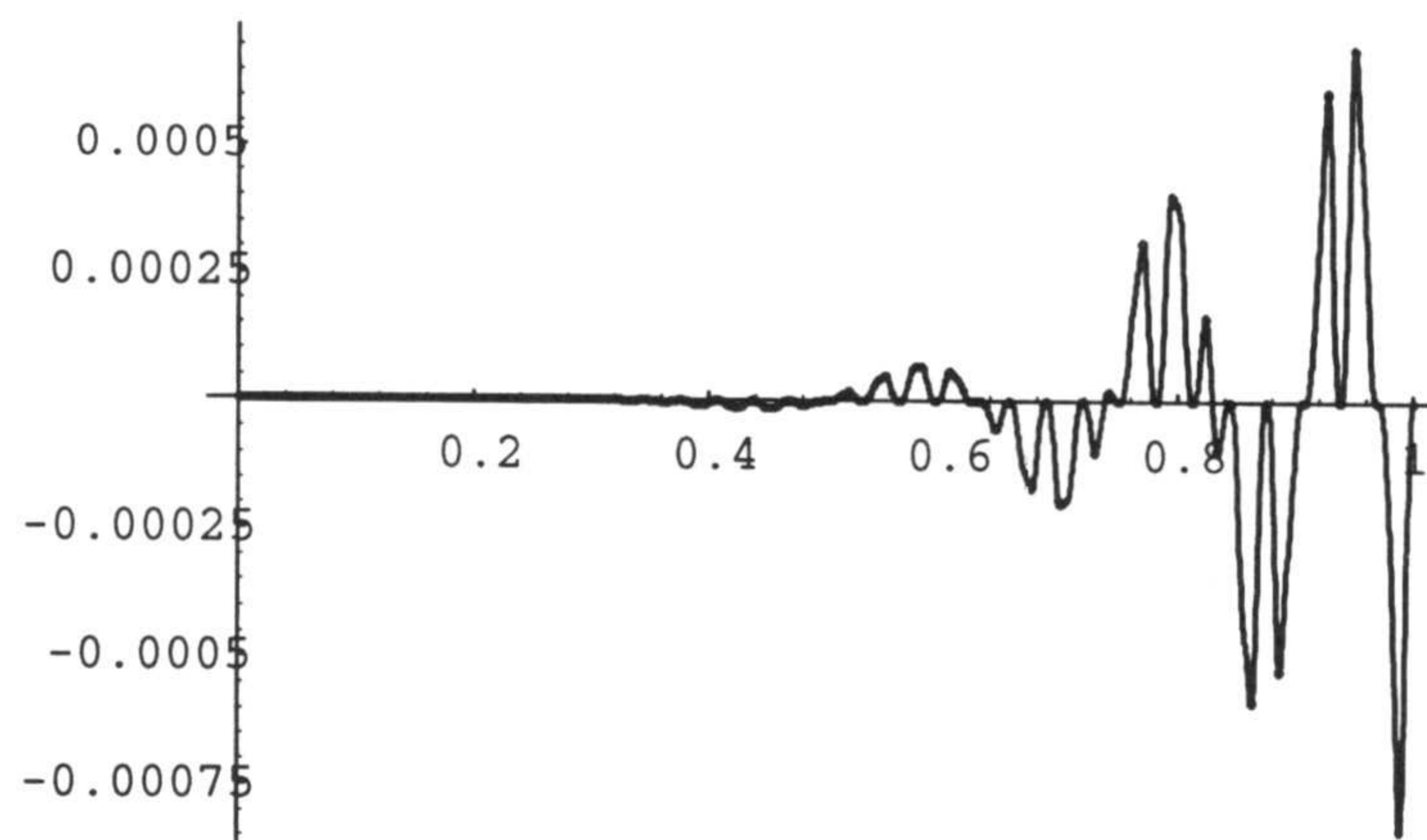


Figura 2.10: El error $f - \mathcal{H}_8^2 f$.

Figura 2.11: El error $f - \mathcal{H}_{16}^2 f$.Figura 2.12: El error $f - \mathcal{H}_{32}^2 f$.

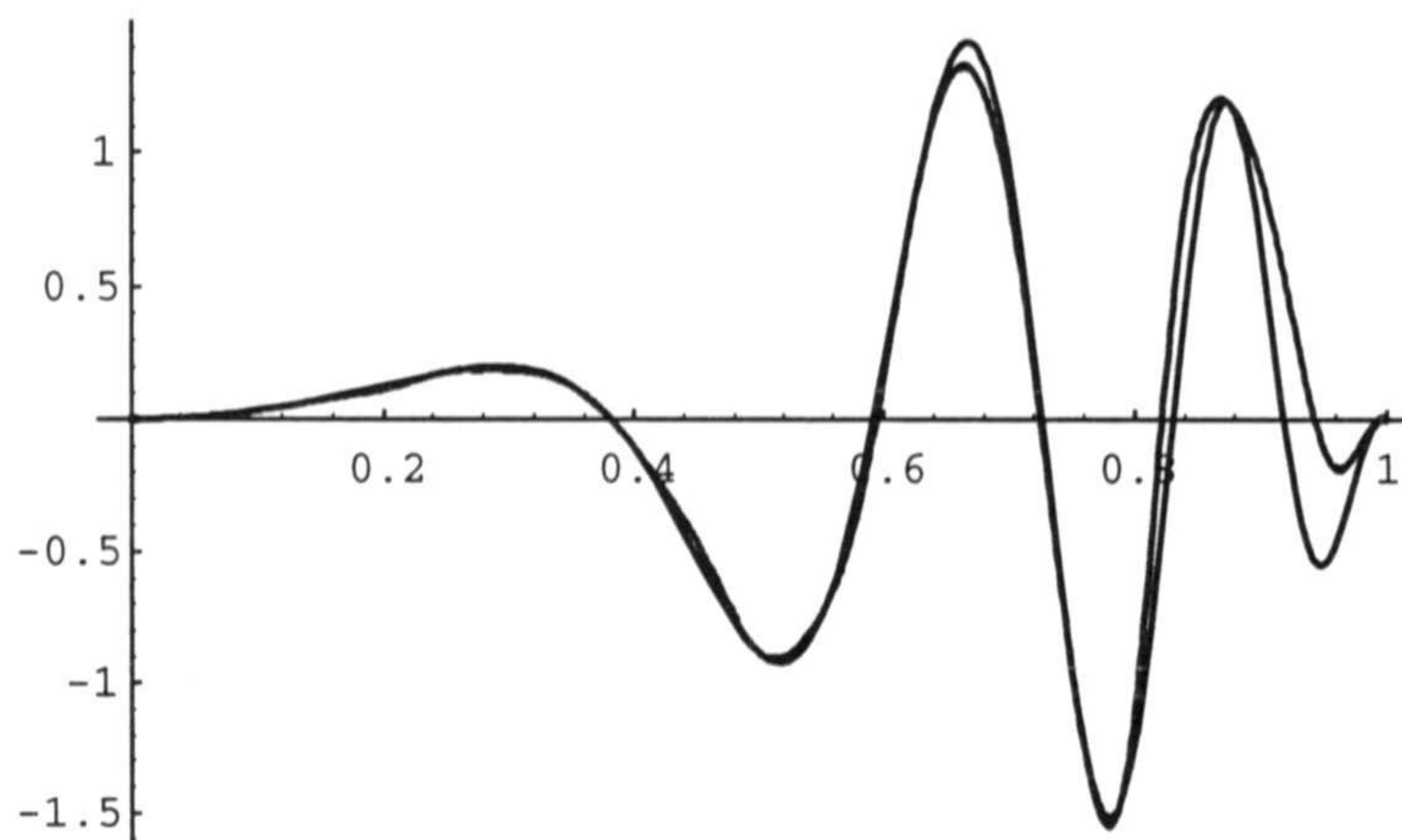


Figura 2.13: La función f y el interpolante $S_8 f$.

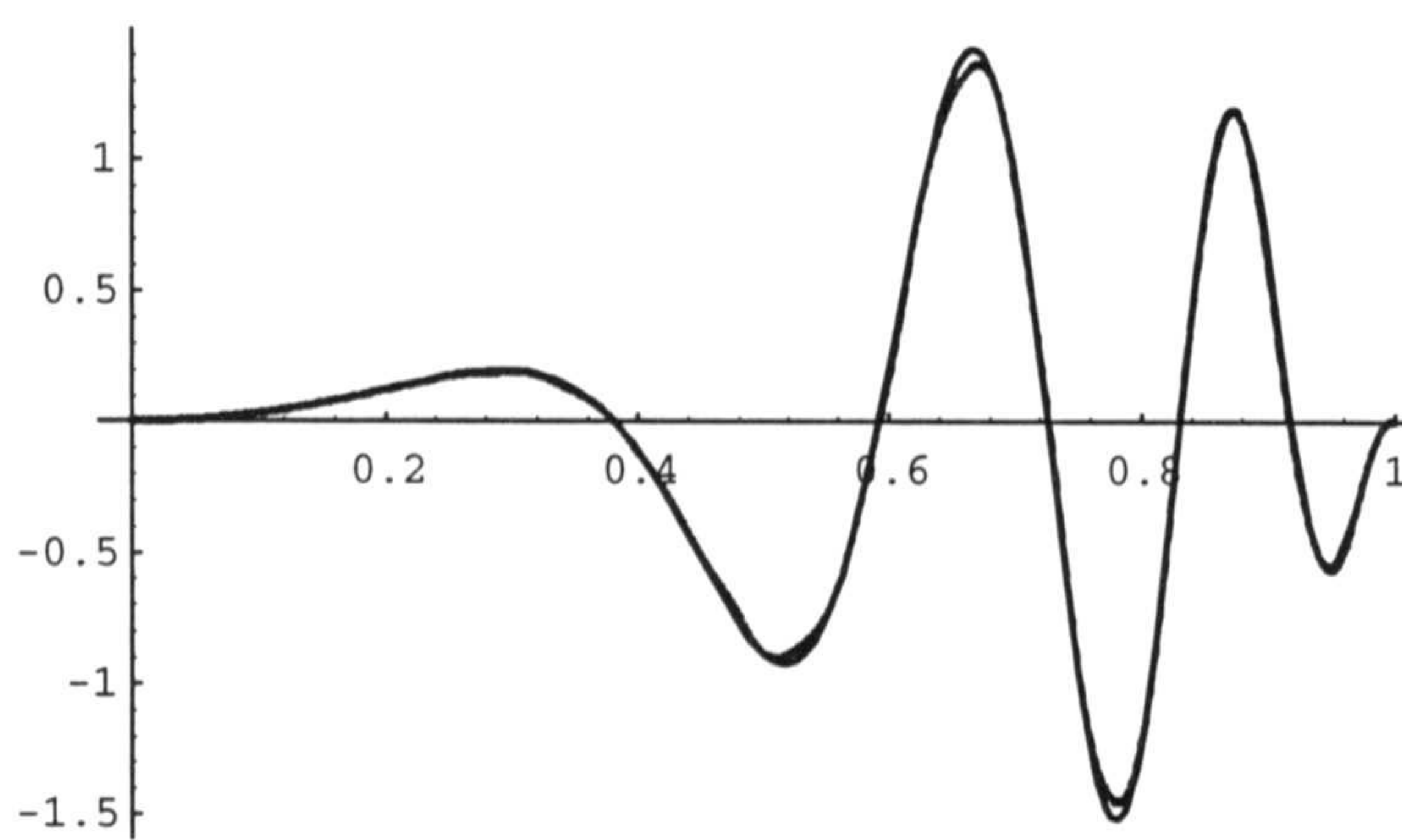
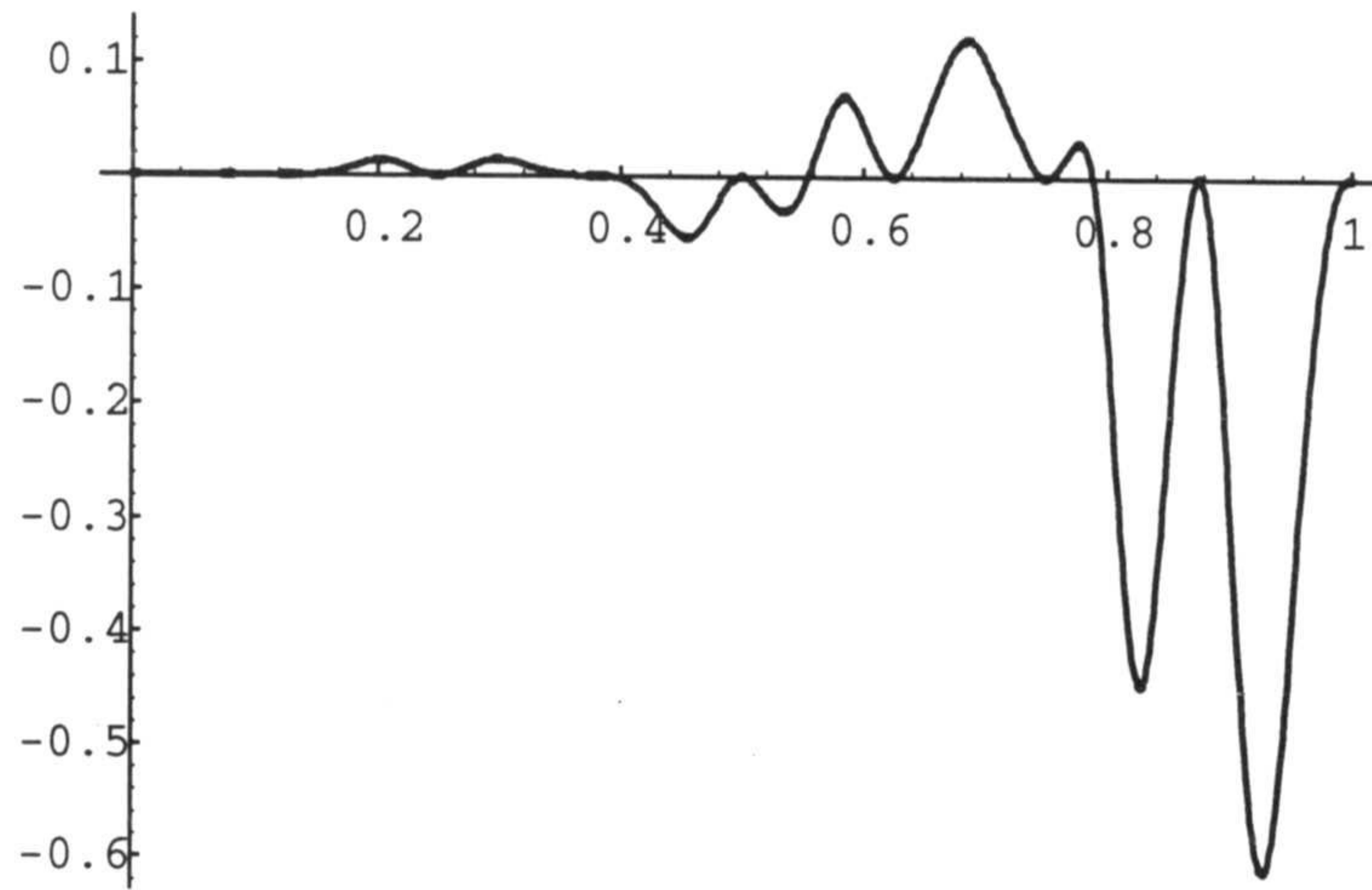
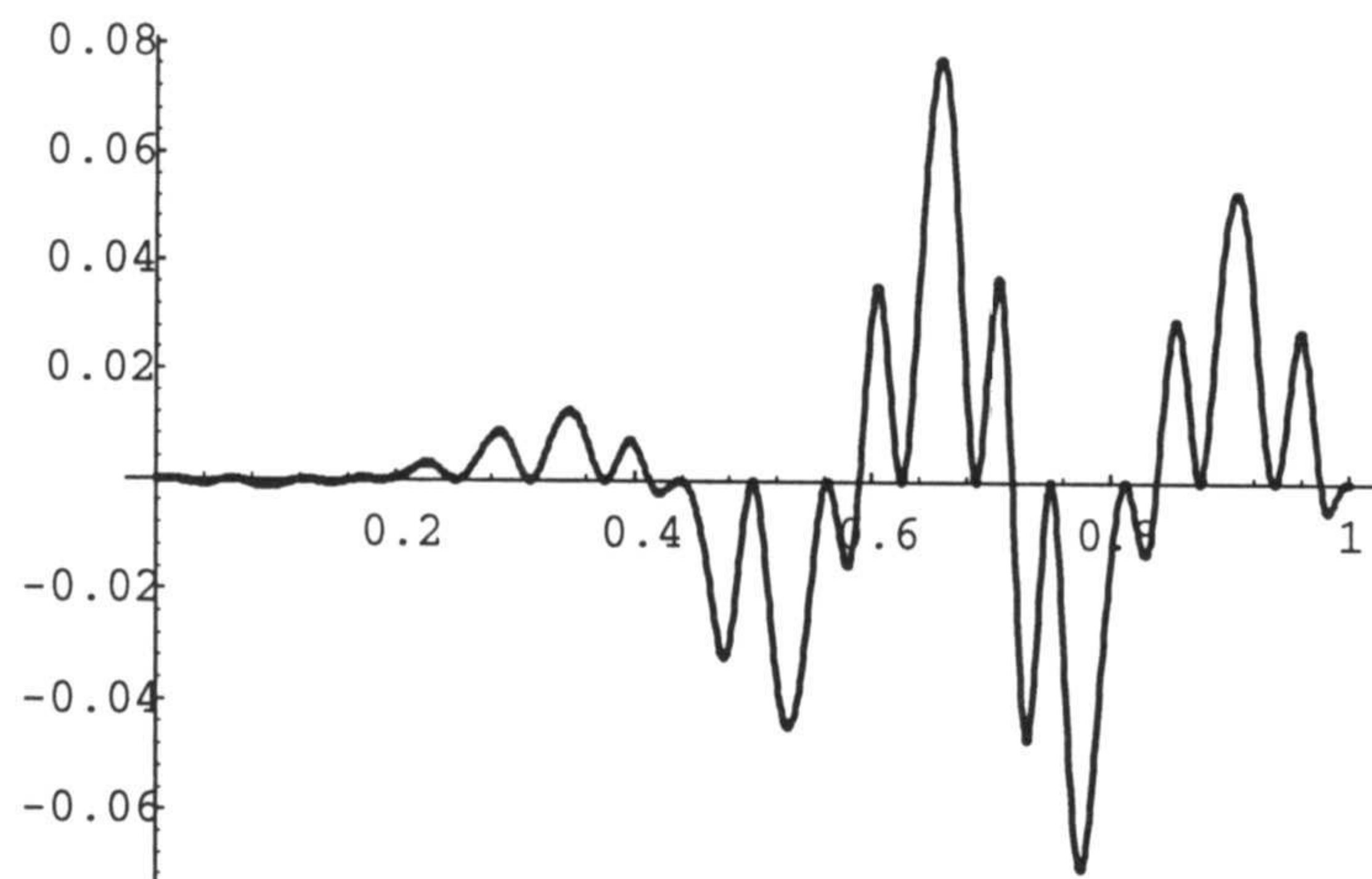


Figura 2.14: La función f y el interpolante $S_{16} f$.

Figura 2.15: Gráfica del error $f - S_8 f$.Figura 2.16: Gráfica del error $f - S_{16} f$.

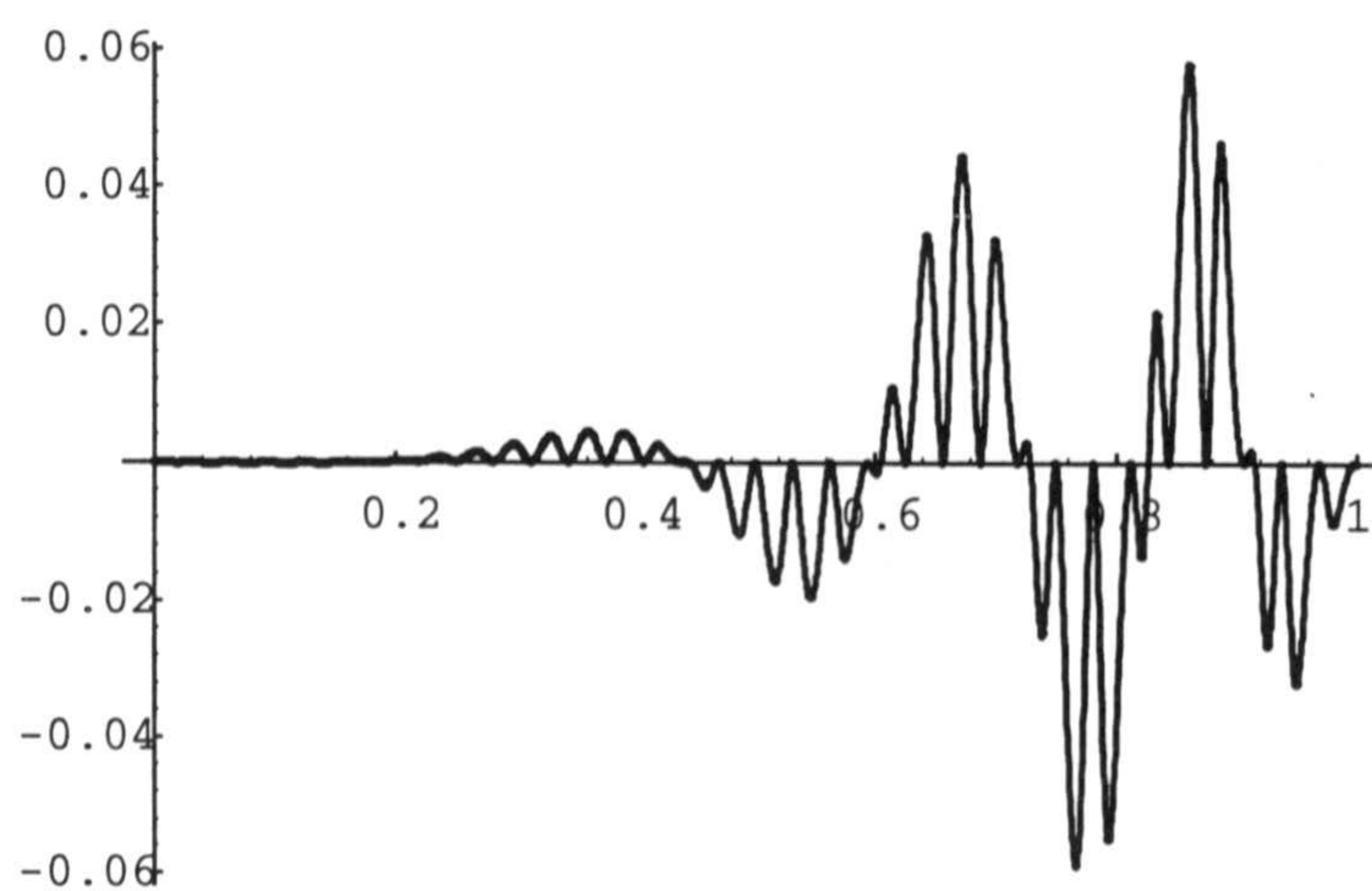


Figura 2.17: Gráfica del error $f - S_{32}f$.

Capítulo 3

Interpolación spline de Hermite sobre redes regulares del plano

3.1 Introducción

En este capítulo estamos interesados en tratar problemas de interpolación spline de Hermite bivariada de naturaleza local, es decir, en definir operadores de interpolación construyendo sus restricciones a los elementos inducidos al considerar en el plano la partición a que da lugar la red regular de que se trate. El interpolante global se forma *ensamblando* estas restricciones.

Haremos uso de dos tipos de particiones regulares del plano, una triangular y otra cuadrangular. La construcción local se apoyará en la utilización de elementos finitos triangulares de los tipos Hsieh-Clough-Tocher (HCT, [11], [12], [15], [29], [32], [33], [34], [35], [52], [53], [54], [56]) y Powell-Sabin (PS, [29], [32], [33], [34], [37], [46], [52], [53], [54], [56]; [73] para PS2), y cuadrangulares de Fraeijs de Veubeke-Sander (FVS, [14], [20], [29], [31], [32], [34], [36], [56], [65], [66]).

En cualquiera de los casos indicados, fijado el tipo de operador de interpolación deseado, la clase global del interpolante y la exactitud de aquél en un cierto espacio de polinomios, el problema se reducirá a determinar los valores que deben tomar diversos parámetros intrínsecos, para lo que emplearemos una idea similar a la del capítulo precedente.

Para motivar el método de construcción de los operadores de Hermite, vamos a considerar una generalización del problema planteado en [16], relativo a la existencia y unicidad de un operador de interpolación spline de Lagrange, considerado al mismo tiempo que nosotros por M. Laghchim-Lahlou ([30]). El problema equivale

a determinar su función fundamental, que es de soporte compacto. El elemento elegido originalmente por los autores fue el de tipo HCT cúbico de clase uno. La elección de este elemento conlleva que el interpolante global sea de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. La función fundamental quedará unívocamente determinada si se calculan sus valores y los de su gradiente en los vértices de los macro-triángulos que forman su soporte, además de las derivadas normales en los puntos medios de sus lados, por ejemplo.

Ya en [64] se trató mediante un procedimiento global la interpolación spline de Lagrange y Hermite cuadrática y de clase uno sobre triangulaciones no uniformes.

3.1.1 Interpolación spline de Lagrange y elemento finito HCT

Sea τ la triangulación del plano inducida por las rectas de ecuaciones $x = k$, $y = k$ y $x - y = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Llamemos τ_3 a la subtriangulación de τ obtenida uniendo el baricentro de cada triángulo de τ , T , con sus vértices (no habría ningún problema en considerar otro punto en lugar del baricentro; es decir, en cada triángulo podríamos fijar el punto que respecto de él tiene coordenadas baricéntricas $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_i > 0$, $0 \leq i \leq 2$, $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$).

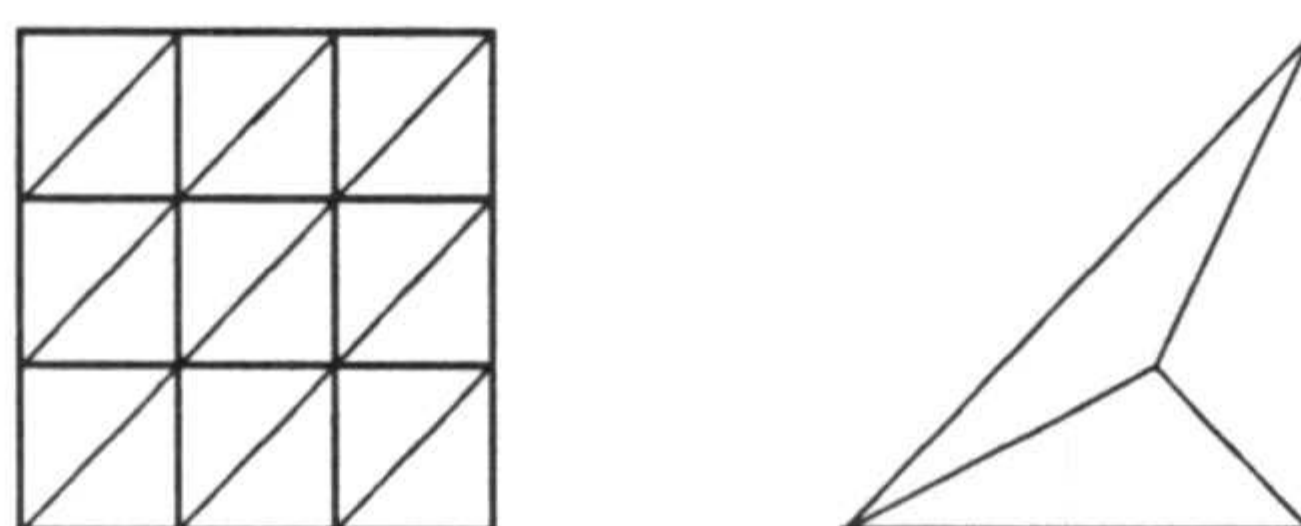


Figura 3.1: La triangulación τ de un subconjunto del plano y la subtriangulación τ_3 de uno de sus triángulos.

En este capítulo notaremos por \mathbb{P}_m al espacio de los polinomios en dos variables de grado total menor o igual que m , y, para cada triángulo T de la triangulación, $\mathbb{P}_n^k(T, \tau_3)$ será el espacio de las funciones de clase $C^k(T)$ cuyas restricciones a los micro-triángulos de T están en \mathbb{P}_n .

Estamos interesados, como dijimos, en que el proceso constructivo sea local, o lo que es lo mismo, que el interpolante global se forme a partir del interpolante local sobre cada macro-triángulo. Este método de *ensamblado* de elementos finitos de tipo HCT es similar al procedimiento seguido en el capítulo anterior, aunque las condiciones que determinan los interpolantes spline locales son más complejas, como no podía ser de otra forma. En [29], [32], [33], [34], [35] y [52] P. Sablonnière y M. Laghchim-Lahlou llevan a cabo un amplio estudio de elementos finitos triangulares

de tipo HCT de clase C^s , $s \geq 1$, para una triangulación arbitraria del plano. Estos splines generalizados les permiten definir interpolantes de clase global prefijada, $C^\rho(\mathbb{R}^2)$. Para determinarlos hay que conocer sus valores y los de sus derivadas parciales hasta el orden $\rho + \left\lceil \frac{\rho}{2} \right\rceil$ en los vértices de cada macro-triángulo, además de ciertas derivadas direccionales en diversos conjuntos de puntos interiores a sus lados ($[x]$ denota la parte entera de x).

Las condiciones que deben ser impuestas dependen, pues, de la paridad de la clase global deseada.

Sea $s \geq 1$ la clase del interpolante global y definamos

$$g_{HCT}(s) = 2 \left(s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil \right) + 1 \tag{3.1.1}$$

Sean m cualquier número natural menor o igual que $g_{HCT}(s)$ y \mathbb{P}_m el espacio de polinomios en que el operador de interpolación debe ser exacto. Definamos el conjunto

$$T_m = \left\{ (a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a - b = m, a \geq 0, b \leq 0 \right\} \tag{3.1.2}$$

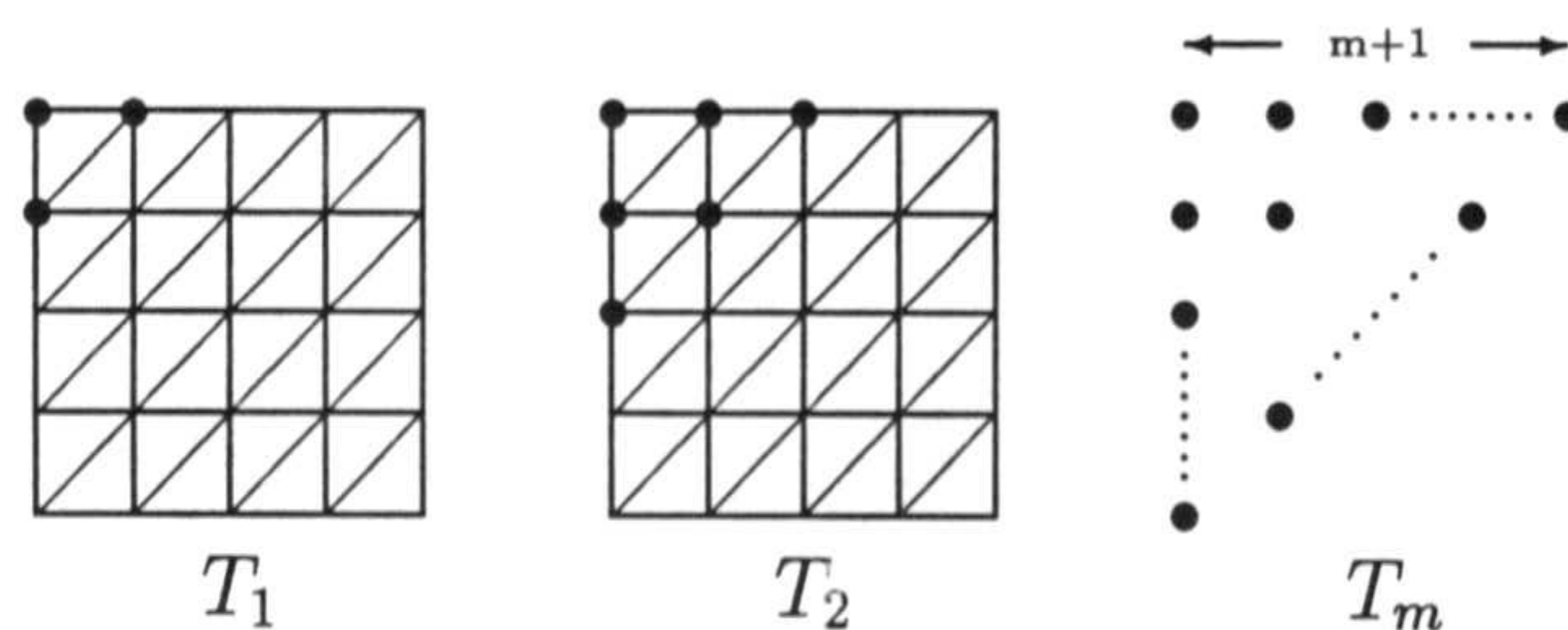


Figura 3.2: Los conjuntos T_1 y T_2 y la representación de T_m .

Hagamos $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ y $e_3 = (1, 1)$, y sean $\bar{e}_1 = (0, 1)$, $\bar{e}_2 = (1, 0)$ y $\bar{e}_3 = (1, -1)$ sus direcciones normales, respectivamente.

Si α pertenece a \mathbb{Z}^2 , sea $he(\alpha) = \{[\alpha + e_1, \alpha + e_3, \alpha + e_2, \alpha - e_1, \alpha - e_3, \alpha - e_2]\}$ el hexágono unitario centrado en α ($[S]$ denotará la envolvente convexa del subconjunto S del plano; no habrá confusión con el símbolo adoptado para la parte entera de un número real).

Escribamos por un momento el operador de interpolación que vamos a construir como

$$\mathcal{L}f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} f(\alpha) L_\alpha$$

siendo, pues, L_α su función fundamental. Pediremos que su soporte sea el conjunto $\Omega_m(\alpha)$ definido por

$$\Omega_m(\alpha) = \bigcup_{\varepsilon \in T_m} \text{he}(\alpha + \varepsilon) \quad (3.1.3)$$

Nótese que el conjunto $\{\alpha + \varepsilon : \varepsilon \in T_m\}$ no es otra cosa que el conjunto trasladado de T_m en la dirección α , $\alpha + T_m$.

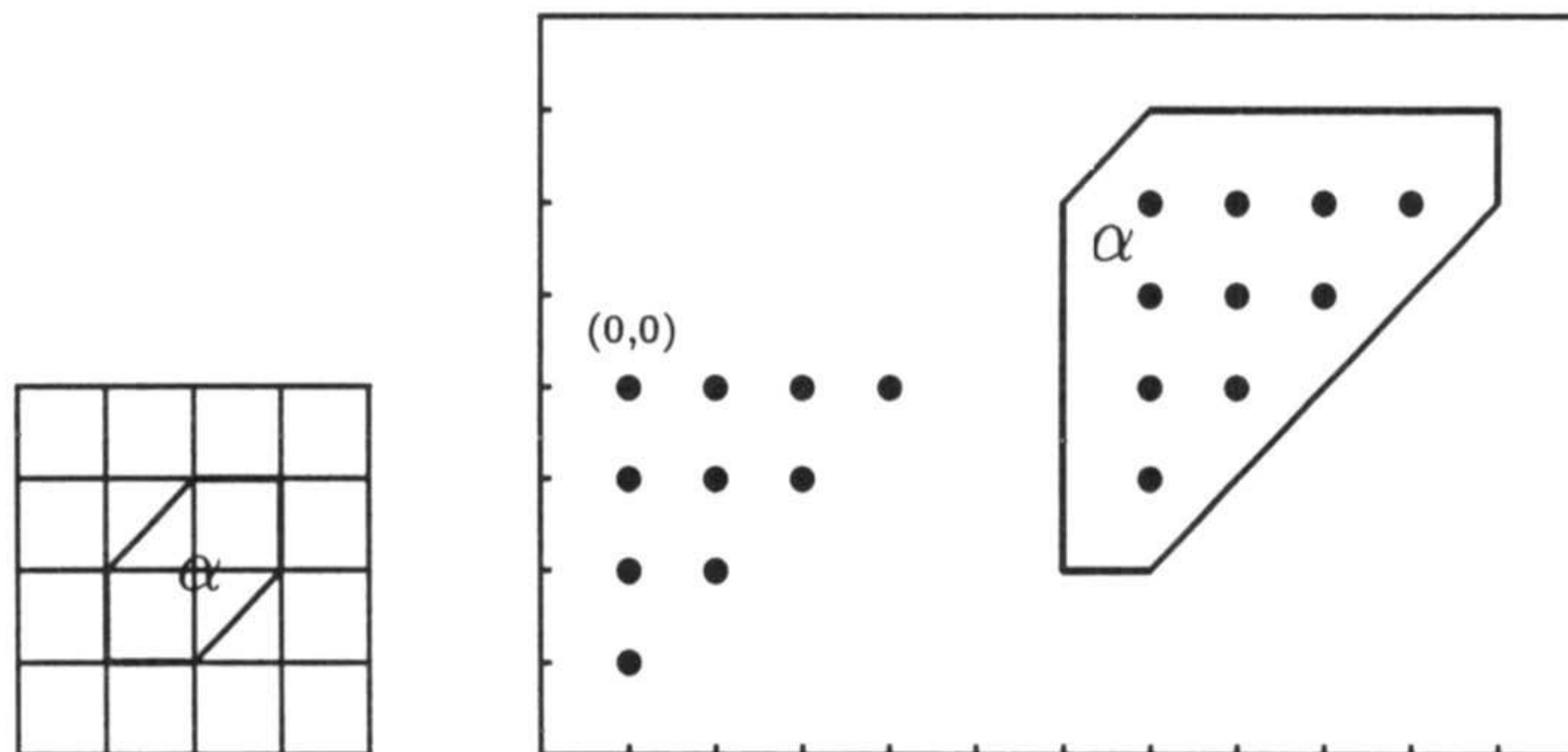


Figura 3.3: A la izquierda, el hexágono unitario centrado en α . A la derecha, los conjuntos T_3 , $\alpha + T_3$ y $\Omega_3(\alpha)$.

Si representamos por \mathbb{N}^* a $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ es un multi-índice de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, notamos $|\mu| = \mu_1 + \mu_2$, como es habitual. Si f es una función real bivariada, la derivada parcial $\frac{\partial^{|\mu|} f}{\partial x^{\mu_1} \partial y^{\mu_2}}(\alpha)$ se escribirá $\partial_\alpha^\mu(f)$, y $D_{v,\alpha}^r(f)$ será la derivada de orden r de f en α en la dirección v . Por otra parte, $f|_S$ denotará la restricción de f al subconjunto S del plano.

Consideremos el subconjunto T_m definido por (3.1.2). El problema consistente en encontrar un polinomio, q , de \mathbb{P}_m tal que $q(\gamma) = c_\gamma$, $\gamma \in T_m$, donde $\{c_\gamma : \gamma \in T_m\}$ es un conjunto arbitrario de escalares, es unisolvante ([50] teorema 4.2.1, p. 84, [13] teorema 6.1, p. 70). Además, para cualquier v de \mathbb{Z}^2 el conjunto $v - T_m = \{v - \gamma : \gamma \in T_m\}$ presenta la misma característica. Entonces, si α es cualquier elemento de $v - T_m$, representamos por $q_\alpha(\bullet; v - T_m)$ al único polinomio de \mathbb{P}_m que satisface las condiciones

$$q_\alpha(\alpha'; v - T_m) = \delta_{\alpha,\alpha'}, \quad \alpha' \in v - T_m$$

Tras estos preliminares y notaciones, podemos enunciar el resultado que nos permitirá construir el operador de interpolación. Su demostración es consecuencia de los resultados establecidos en [29] y [35], por ejemplo.

Proposición 3.1.1 Sean $s \geq 1$ y $1 \leq m \leq g_{HCT}(s)$. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existe una única función, \tilde{L}_α , definida en $\Omega_m(\alpha)$ y determinada por las siguientes condiciones:

1. Si s es impar, para cada macro-triángulo, T , contenido en $\Omega_m(\alpha)$ se cumple que $\tilde{L}_\alpha|_T$ está en el espacio $\mathbb{P}_{g_{HCT}(s)}^s(T, \tau_3)$; y si s es par, entonces pertenece a $\mathbb{P}_{g_{HCT}(s)}^{s+1}(T, \tau_3)$.

2. \tilde{L}_α es de clase $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ en los vértices de cada macro-triángulo contenido en $\Omega_m(\alpha)$.

3.

$$\tilde{L}_\alpha(\alpha') = \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_m(\alpha) \quad (3.1.4)$$

4.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(\tilde{L}_\alpha) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(q_\alpha(\bullet; \alpha + \varepsilon - T_m)), \quad \varepsilon \in T_m \\ \mu \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

5.

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(\tilde{L}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(q_\alpha(\bullet; \alpha + \varepsilon - T_m)) \\ \varepsilon \in T_m, \quad 1 \leq j \leq r, \quad 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq k \leq 3 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

6.

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(\tilde{L}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(q_\alpha(\bullet; \alpha + \varepsilon - T_m)) \\ \varepsilon \in T_m, \quad 1 \leq j \leq 2s-r, \quad s+1 \leq r \leq 2s-1, \quad 1 \leq k \leq 3 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

7. En los puntos de \mathbb{Z}^2 que están en la frontera de $\Omega_m(\alpha)$ la función \tilde{L}_α es nula, así como sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$.

8. Sobre las aristas de la triangulación que están contenidas en la frontera de $\Omega_m(\alpha)$, las derivadas direccionales análogas a las descritas en (3.1.6) y (3.1.7) que puedan ser aplicadas son nulas.

Demostración

Las condiciones 1 y 2 indican el subespacio de funciones polinómicas a trozos en el que se encuentra la función \tilde{L}_α . Las igualdades (3.1.4)-(3.1.7) proporcionan los valores de los grados de libertad en los puntos de \mathbb{Z}^2 interiores a $\Omega_m(\alpha)$ y en los lados de la triangulación que tienen como vértice, al menos, uno de esos puntos.

Por último, las condiciones 7 y 8 dan los valores de los grados de libertad en la frontera de $\Omega_m(\alpha)$.

Por tanto, la función \tilde{L}_α existe y es única.

Además, al haber tomado los mismos conjuntos de puntos sobre las aristas de la triangulación contenidas en $\Omega_m(\alpha)$ y los mismos vectores para calcular las derivadas direccionales, la función \tilde{L}_α es de clase $C^s(\Omega_m(\alpha))$. \square

Una vez probada la existencia y unicidad de función \tilde{L}_α para cada α de \mathbb{Z}^2 , la extendemos por cero a $\mathbb{R}^2 - \Omega_m(\alpha)$, obteniendo la nueva función

$$L_\alpha(x, y) = \begin{cases} \tilde{L}_\alpha(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_m(\alpha) \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_m(\alpha) \end{cases} \quad (3.1.8)$$

La función definida es de clase $C^s(\mathbb{R}^2)$ y de soporte compacto, $\Omega_m(\alpha)$.

Tanto \tilde{L}_α como L_α dependen de s y m , pero omitiremos cualquier referencia explícita a este hecho.

Proposición 3.1.2 Sean $s \geq 1$ y $1 \leq m \leq g_{HCT}(s)$. El operador de interpolación definido por

$$\mathcal{L}f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} f(\alpha) L_\alpha \quad (3.1.9)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

Demostración

Sea p cualquier polinomio de \mathbb{P}_m . De (3.1.4) se deduce que $\mathcal{L}p(\alpha) = p(\alpha)$ para cada α de \mathbb{Z}^2 .

Consideremos cualquier μ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $1 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$. Gracias a (3.1.9) podemos escribir

$$\partial_\alpha^\mu(\mathcal{L}p) = \partial_\alpha^\mu \left(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} p(\gamma) L_\gamma \right) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \\ \alpha \in \text{int}(\text{sop}(L_\gamma))}} p(\gamma) \partial_\alpha^\mu(L_\gamma)$$

donde hemos notado por $\text{sop}(L_\gamma)$ al soporte de L_γ y por $\text{int}(\text{sop}(L_\gamma))$ a su interior. Pero α es interior al soporte de L_γ si y sólo si α pertenece al conjunto $\gamma + T_m$, por lo que debe ser de la forma $\gamma + \varepsilon$, con ε perteneciente a T_m . En definitiva,

$$\alpha \in \text{int}(\text{sop}(L_\gamma)) \Leftrightarrow \gamma = \alpha - \varepsilon, \quad \varepsilon \in T_m$$

Por tanto,

$$\partial_\alpha^\mu(\mathcal{L}p) = \sum_{\varepsilon \in T_m} p(\alpha - \varepsilon) \partial_\alpha^\mu(L_{\alpha - \varepsilon})$$

Consideremos el conjunto $\alpha - T_m$ y los polinomios $q_{\alpha-\varepsilon}(\bullet; \alpha - T_m)$, $\varepsilon \in T_m$. Entonces

$$p = \sum_{\varepsilon \in T_m} p(\alpha - \varepsilon) q_{\alpha-\varepsilon}(\bullet; \alpha - T_m)$$

Como (3.1.5) es válida para todo α de \mathbb{Z}^2 , se cumple que

$$\partial_\alpha^\mu (L_{\alpha-\varepsilon}) = \partial_\alpha^\mu (q_{\alpha-\varepsilon}(\bullet; \alpha - T_m)), \quad \varepsilon \in T_m$$

por lo que

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^\mu (\mathcal{L}p) &= \sum_{\varepsilon \in T_m} p(\alpha - \varepsilon) \partial_\alpha^\mu (q_{\alpha-\varepsilon}(\bullet; \alpha - T_m)) \\ &= \partial_\alpha^\mu \left(\sum_{\varepsilon \in T_m} p(\alpha - \varepsilon) q_{\alpha-\varepsilon}(\bullet; \alpha - T_m) \right) \\ &= \partial_\alpha^\mu (p) \end{aligned}$$

Así pues,

$$\partial_\alpha^\mu (\mathcal{L}p) = \partial_\alpha^\mu (p), \quad \alpha \in \mathbb{Z}^2, \quad 1 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$$

Por otra parte, sean r y j valores tales que $1 \leq r \leq s$ y $1 \leq j \leq r$. Por (3.1.6), se tiene que

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (\mathcal{L}p) &= \sum_{\varepsilon \in T_m} p(\alpha - \varepsilon) D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (L_{\alpha-\varepsilon}) \\ &= \sum_{\varepsilon \in T_m} p(\alpha - \varepsilon) D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (q_{\alpha-\varepsilon}(\bullet; \alpha - T_m)) \\ &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r \left(\sum_{\varepsilon \in T_m} p(\alpha - \varepsilon) q_{\alpha-\varepsilon}(\bullet; \alpha - T_m) \right) \\ &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (p) \end{aligned}$$

Un razonamiento idéntico permite probar, a partir de (3.1.7), que

$$D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r2s-1} e_k}^r (\mathcal{L}p) = D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r2s-1} e_k}^r (p)$$

$$s + 1 \leq r \leq 2s - 1, \quad 1 \leq j \leq 2s - r$$

En consecuencia, $\mathcal{L}p = p$ por unicidad.

Hemos probado, por tanto, que \mathcal{L} es exacto en \mathbb{P}_m . □

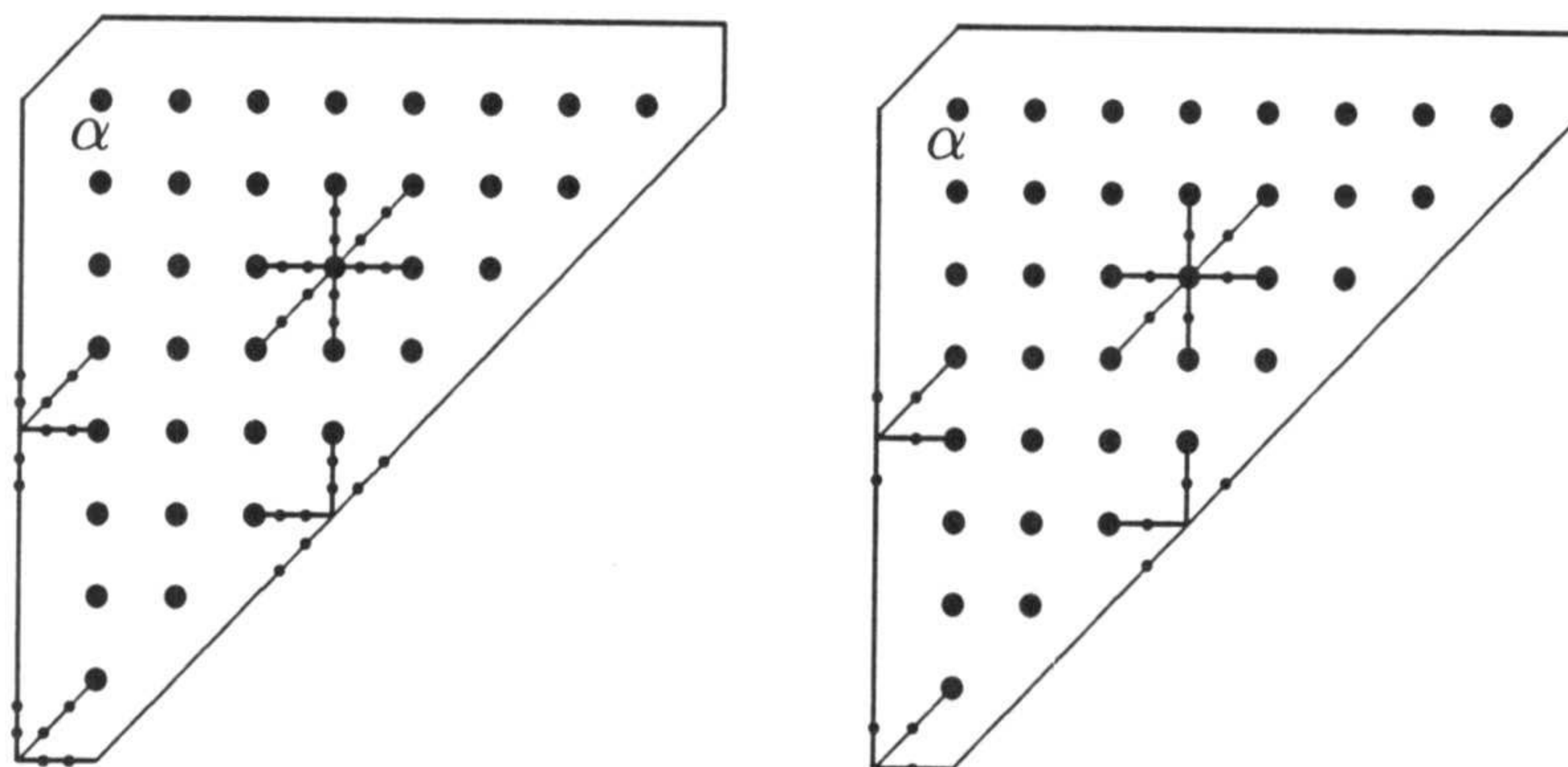


Figura 3.4: T_7 y el soporte de L_α , formado por 97 macro-triángulos. A la izquierda, conjuntos de puntos asociados a los vértices indicados (interior, punto extremo y puntos de la frontera no extremos) en los que es necesario evaluar las derivadas direccionales primeras y terceras. A la derecha, puntos correspondientes a los mismos vértices donde se evalúa la derivada direccional de orden dos.

En la fig. 3.4 se muestra el soporte de la función fundamental del operador de Lagrange que proporciona interpolantes de clase global dos ($s = 2$). Su construcción se basa en el elemento finito HCT de grado $g_{HCT}(s) = 7$, que produce clase tres en cada macro-triángulo.

Para que sea exacto en \mathbb{P}_7 consideramos T_7 . Hay que calcular los valores de sus derivadas parciales primeras y segundas en los vértices interiores (en los vértices de la frontera son nulas). Además, para cada uno de ellos, hay que calcular derivadas direccionales de primer y tercer órdenes en los puntos que dividen a las aristas que concurren en él en tres partes iguales; y de segundo orden en los puntos medios.

En la fig. 3.5 se muestra el polinomio con el que se efectúan los cálculos relativos a un punto $\alpha + \varepsilon$, con ε de T_7 .

3.1.2 Interpolación spline de Lagrange y elemento finito PS

El elemento finito que hemos utilizado (HCT) presenta un problema a la hora de construir el interpolante y es que hay que calcular las derivadas direccionales que hemos especificado. Podemos atenuar esta dificultad considerando para cada clase s especificada el elemento HCT reducido ([29], [35], [54]). Sin embargo, otra posibilidad a nuestra disposición es trabajar con elementos de tipo PS, para lo que partimos de la triangulación τ y subdividimos cada uno de sus triángulos en seis micro-triángulos trazando las medianas.

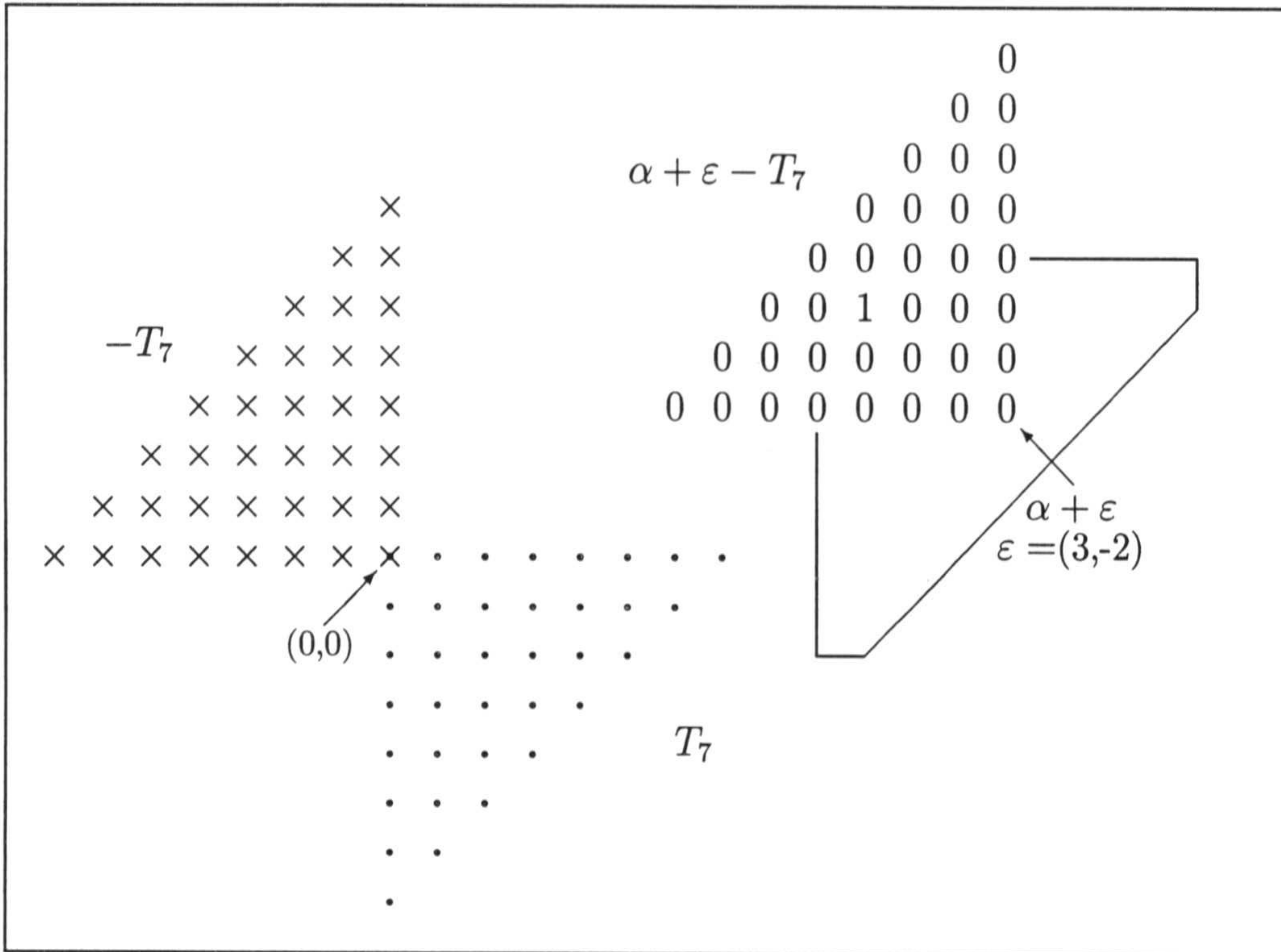


Figura 3.5: Se construye el polinomio de interpolación de los datos indicados en puntos próximos a α ($\alpha + \epsilon - T_7$) y con él se calculan las derivadas parciales y direccionales precisas relativas al punto $\alpha + \epsilon$. Toma el valor 1 en el punto α .

Si $s \geq 1$ es la clase global del interpolante, sea

$$g_{PS}(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } s \text{ es impar} \\ 2s + 1 & \text{si } s \text{ es par} \end{cases} \quad (3.1.10)$$

El valor $g_{PS}(s)$ da el grado del elemento que debe ser utilizado. Es menor que el necesario cuando se emplea el elemento HCT. Como antes, es necesario calcular en los vértices las derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$, pero no se precisan derivadas direccionales adicionales. Como inconveniente, el número de micro-triángulos se duplica.

Podemos enunciar los resultados análogos a los de las proposiciones 3.1.1 y 3.1.2 en uno solo, cuya demostración es similar y, en lo que respecta a la existencia y unicidad, se basa en [29], [32], [33], [34], [37] y [52].

Proposición 3.1.3 Sean $s \geq 1$ y $1 \leq m \leq g_{PS}(s)$. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existe una única función, \tilde{L}_α , definida en $\Omega_m(\alpha)$ y determinada por las siguientes condiciones:

1. Si s es impar, para cada macro-triángulo, T , contenido en $\Omega_m(\alpha)$ se cumple que $\tilde{L}_\alpha|_T$ está en el espacio $\mathbb{P}_{g_{PS}(s)}^s(T, \tau_6)$; y si s es par, entonces pertenece a $\mathbb{P}_{g_{PS}(s)}^{s+1}(T, \tau_6)$.
2. \tilde{L}_α es de clase $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ en los vértices de cada macro-triángulo contenido en $\Omega_m(\alpha)$.

3.

$$\tilde{L}_\alpha(\alpha') = \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_m(\alpha) \quad (3.1.11)$$

4.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(\tilde{L}_\alpha) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(q_\alpha(\bullet; \alpha + \varepsilon - T_m)), \quad \varepsilon \in T_m \\ \mu \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

5. En los puntos de \mathbb{Z}^2 que están en la frontera de $\Omega_m(\alpha)$ la función \tilde{L}_α es nula, así como sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$.

Además, si llamamos L_α a la extensión por cero de \tilde{L}_α a \mathbb{R}^2 , el operador

$$\mathcal{L}f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} f(\alpha) L_\alpha \quad (3.1.13)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

3.1.3 Interpolación spline de Lagrange y elemento finito FVS

Para la red regular bidireccional del plano generada por las direcciones e_1 y e_2 podemos emplear un método de trabajo similar al objeto de construir operadores de interpolación de Lagrange que sean exactos en un determinado espacio de polinomios y que tengan función fundamental de soporte compacto.

Si τ denota la partición en cuadriláteros del plano, cada cuadrilátero puede triangularse trazando sus diagonales; se obtiene así la subtriangulación que designaremos por τ_4 . Seguiremos notando T a los subconjuntos del plano producidos por τ .

Las formas lineales necesarias para utilizar elementos finitos FVS son análogas a las empleadas con el elemento finito HCT, aunque se simplifican las condiciones para construir el operador de interpolación al no haber aristas en τ en la dirección e_3 ([29], [31], [32], [34], [36]).

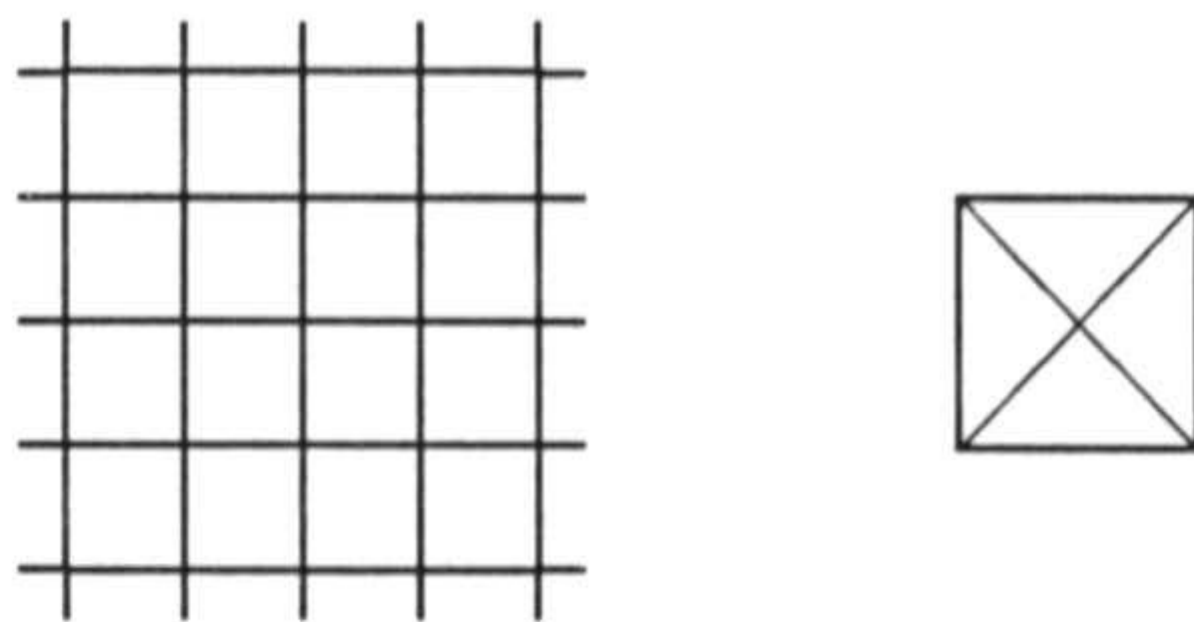


Figura 3.6: La partición en cuadriláteros, τ , de un subconjunto del plano y la subtriangulación τ_4 de uno de esos cuadriláteros.

Sea $s \geq 1$ la clase del interpolante global, y definamos

$$g_{FVS}(s) = \begin{cases} 3s & \text{si } s \text{ es impar} \\ 3s + 1 & \text{si } s \text{ es par} \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Nótese que coincide con $g_{HCT}(s)$.

Asimismo, si α es cualquier punto de \mathbb{Z}^2 , sea

$$cu(a) = [\{\alpha + e_1 + e_2, \alpha - e_1 + e_2, \alpha - e_1 - e_2, \alpha + e_1 - e_2\}]$$

el cuadrilátero unitario centrado en α . Siguiendo la idea utilizada hasta ahora para formar lo que será el soporte de la función fundamental, consideremos el conjunto $\tilde{\Omega}_m(\alpha)$ definido por

$$\tilde{\Omega}_m(\alpha) = \bigcup_{\varepsilon \in T_m} cu(a + \varepsilon) \quad (3.1.15)$$

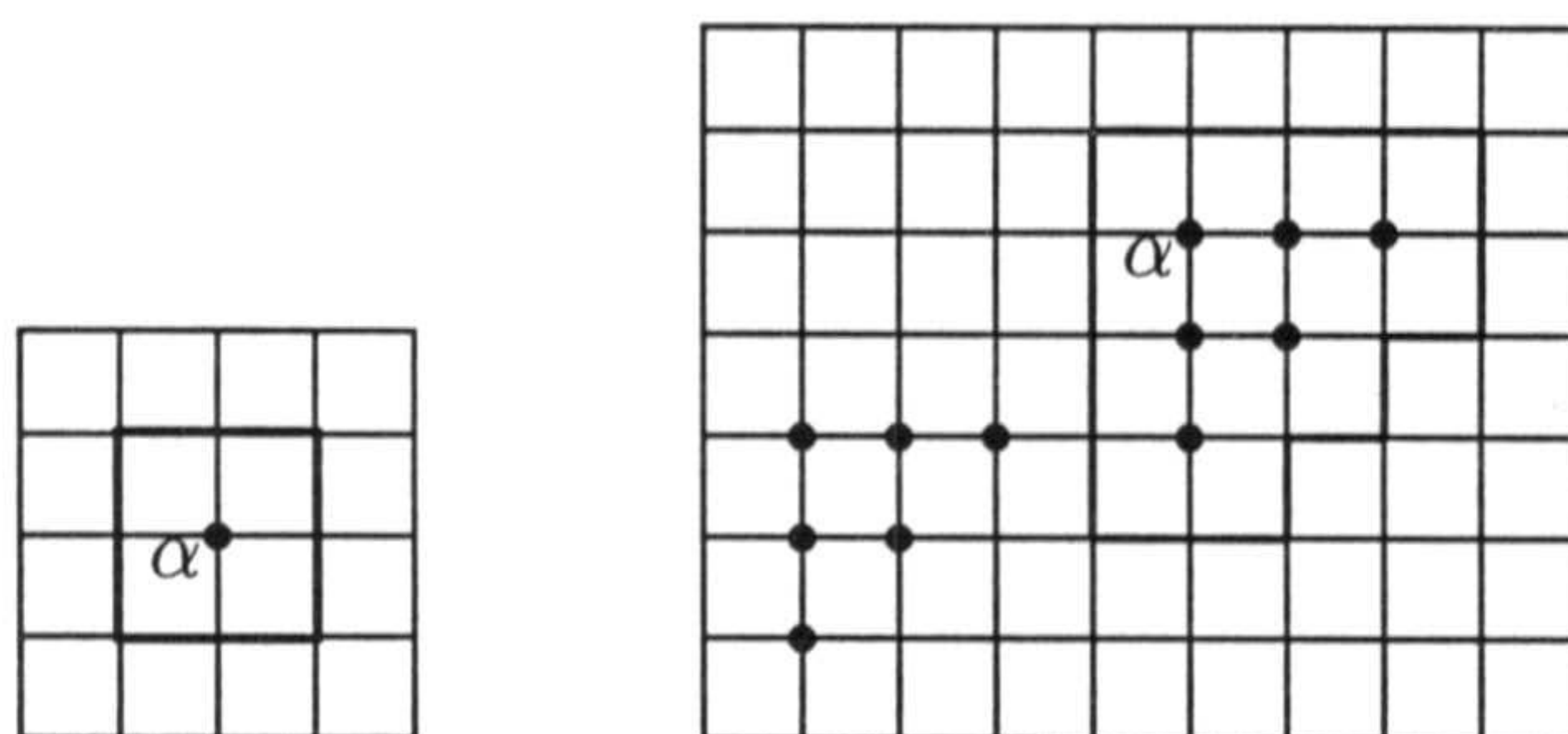


Figura 3.7: A la izquierda, el cuadrado unidad centrado en α ; a la derecha, T_2 , $\alpha + T_2$ y $\tilde{\Omega}_2(\alpha)$.

Los conjuntos $\tilde{\Omega}_m(\alpha)$ no son convexos, al contrario que $\Omega_m(\alpha)$.

Finalizamos la sección enunciando el resultado relativo a la existencia y unicidad del interpolante global.



Proposición 3.1.4 Sean $s \geq 1$ y $1 \leq m \leq g_{FVS}(s)$. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existe una única función, \tilde{L}_α , definida en $\tilde{\Omega}_m(\alpha)$ y determinada por las siguientes condiciones:

1. Si s es impar, para cada cuadrilátero, T , contenido en $\tilde{\Omega}_m(\alpha)$ se cumple que $\tilde{L}_\alpha|_T$ está en el espacio $\mathbb{P}_{g_{FVS}(s)}^s(T, \tau_4)$; y pertenece a $\mathbb{P}_{g_{FVS}(s)}^{s+1}(T, \tau_4)$ si s es par.

2. \tilde{L}_α es de clase $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ en los vértices de cada cuadrilátero contenido en $\tilde{\Omega}_m(\alpha)$.

3.

$$\tilde{L}_\alpha(\alpha') = \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \tilde{\Omega}_m(\alpha) \quad (3.1.16)$$

4.

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(\tilde{L}_\alpha) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(q_\alpha(\bullet; \alpha + \varepsilon - T_m)) \\ \varepsilon \in T_m, \mu \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, 1 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

5.

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(\tilde{L}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(q_\alpha(\bullet; \alpha + \varepsilon - T_m)) \\ \varepsilon \in T_m, 1 \leq j \leq r, 1 \leq r \leq s, 1 \leq k \leq 2 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

6.

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(\tilde{L}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha+\varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(q_\alpha(\bullet; \alpha + \varepsilon - T_m)) \\ \varepsilon \in T_m, 1 \leq j \leq 2s-r, s+1 \leq r \leq 2s-1, 1 \leq k \leq 2 \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

7. En los puntos de \mathbb{Z}^2 que están en la frontera de $\tilde{\Omega}_m(\alpha)$ la función \tilde{L}_α es nula, así como sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$.

8. Sobre las aristas de los cuadriláteros que están contenidas en la frontera de $\tilde{\Omega}_m(\alpha)$, las derivadas direccionales análogas a las descritas en las igualdades (3.1.18) y (3.1.19) que puedan ser aplicadas son nulas.

Además, si llamamos L_α a la extensión por cero de \tilde{L}_α a \mathbb{R}^2 , el operador

$$\mathcal{L}f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} f(\alpha) L_\alpha \quad (3.1.20)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

3.2 Interpolación spline de Hermite de orden uno

Una vez que hemos descrito el procedimiento local seguido para construir interpolantes spline de Lagrange, pasamos a plantear el problema para la interpolación spline de Hermite. Comenzamos con la de orden uno, inicialmente considerada en [3], a fin de que se aprecie la forma de operar y las diferencias con el problema tratado, y finalizaremos dando los resultados para el orden general, k .

3.2.1 Interpolación spline de Hermite vía elementos finitos HCT

Es necesario definir los conjuntos que juegan para la interpolación de Hermite de orden uno el papel desempeñado por T_m para la de Lagrange.

Definición 3.2.1 *Sea P un subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 y m un número natural. Diremos que (P_0, P_1) es una configuración \mathbb{P}_m -admisibile si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $P_1 \subset P$, $(0, 0) \in P_1$ y $P_0 \subset P \setminus P_1$.
2. Si $\text{card}(S)$ representa el cardinal del conjunto s , entonces

$$\text{card}(P_0) + 3 \text{card}(P_1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

3. Si $Q_0 = P_0 \cup P_1$ y $Q_1 = P_1$, cualquier triángulo unitario incluido en el interior de $[Q_i]$, $i = 0, 1$, tiene al menos un vértice que pertenece a Q_i .

Posteriormente comentaremos el motivo por el que se exige esta tercera condición.

Definición 3.2.2 *Sea (P_0, P_1) una configuración \mathbb{P}_m -admisibile. Diremos que es \mathbb{P}_m -unisolvante si y sólo si para cualquier subconjunto $\{f_\alpha^{(0,0)}\}_{\alpha \in Q_0} \cup \{f_\alpha^{(1,0)}, f_\alpha^{(0,1)}\}_{\alpha \in Q_1}$ de números reales existe un único polinomio, p , de \mathbb{P}_m tal que*

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= f_\alpha^{(0,0)}, \quad \alpha \in Q_0 \\ \partial_\alpha^{(1,0)}(p) &= f_\alpha^{(1,0)}, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(p) = f_\alpha^{(0,1)}, \quad \alpha \in Q_1 \end{aligned}$$

En general, si S_0 y S_1 son dos subconjuntos de \mathbb{Z}^2 tales que el problema descrito por las igualdades

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= f_\alpha^{(0,0)}, \quad \alpha \in S_0 \cup S_1 \\ \partial_\alpha^{(1,0)}(p) &= f_\alpha^{(1,0)}, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(p) = f_\alpha^{(0,1)}, \quad \alpha \in S_1 \end{aligned}$$

es \mathbb{P}_m -unisolvente, el conjunto

$$\left\{ q_\alpha^{(0,0)}(\bullet; S_0 \cup S_1, S_1) \right\}_{\alpha \in S_0 \cup S_1} \cup \left\{ q_\alpha^{(1,0)}(\bullet; S_0 \cup S_1, S_1), q_\alpha^{(0,1)}(\bullet; S_1 \cup S_1) \right\}_{\alpha \in S_1}$$

denota la base dual de $\left\{ \partial_\alpha^{(0,0)} \right\}_{\alpha \in S_0 \cup S_1} \cup \left\{ \partial_\alpha^{(1,0)}, \partial_\alpha^{(0,1)} \right\}_{\alpha \in S_1}$, donde $\partial_\alpha^{(0,0)}(p) = p(\alpha)$; es decir, los polinomios q , en los que se ha omitido toda referencia a S_0 y $S_0 \cup S_1$, satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha'}^{(0,0)}(q_\alpha^{(0,0)}) &= \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in S_0 \cup S_1 \\ \partial_{\alpha'}^{(1,0)}(q_\alpha^{(0,0)}) &= \partial_{\alpha'}^{(0,1)}(q_\alpha^{(0,0)}) = 0, \quad \alpha' \in S_1 \\ \partial_{\alpha'}^{(1,0)}(q_\alpha^{(1,0)}) &= \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in S_0 \cup S_1 \\ \partial_{\alpha'}^{(0,0)}(q_\alpha^{(1,0)}) &= \partial_{\alpha'}^{(0,1)}(q_\alpha^{(1,0)}) = 0, \quad \alpha' \in S_1 \\ \partial_{\alpha'}^{(0,1)}(q_\alpha^{(0,1)}) &= \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in S_0 \cup S_1 \\ \partial_{\alpha'}^{(0,0)}(q_\alpha^{(0,1)}) &= \partial_{\alpha'}^{(1,0)}(q_\alpha^{(0,1)}) = 0, \quad \alpha' \in S_1 \end{aligned}$$

Cualquier polinomio, p , de \mathbb{P}_m admite, entonces, la representación

$$\begin{aligned} p &= \sum_{\alpha \in S_0 \cup S_1} p(\alpha) q_\alpha^{(0,0)}(\bullet; S_0 \cup S_1, S_1) + \\ &\quad \sum_{\alpha \in S_1} \left(\partial_\alpha^{(1,0)}(p) q_\alpha^{(1,0)}(\bullet; S_0 \cup S_1, S_1) + \partial_\alpha^{(0,1)}(p) q_\alpha^{(0,1)}(\bullet; S_0 \cup S_1, S_1) \right) \end{aligned}$$

Supongamos que la configuración inicial (P_0, P_1) es \mathbb{P}_m -unisolvente, y consideremos los subconjuntos Q_0 y Q_1 asociados a ella. Definimos, para $i = 0, 1$, el subconjunto $\Omega_i(\alpha)$ como

$$\Omega_i(\alpha) = \bigcup_{\varepsilon \in Q_i} \text{he}(\alpha + \varepsilon)$$

Obsérvese que es el mismo tipo de construcción empleada para formar el soporte de la función fundamental del operador de interpolación de Lagrange. En la fig. 3.8 se muestra el proceso de formación de los conjuntos $\Omega_i(\alpha)$ para una cierta elección \mathbb{P}_4 -unisolvente.

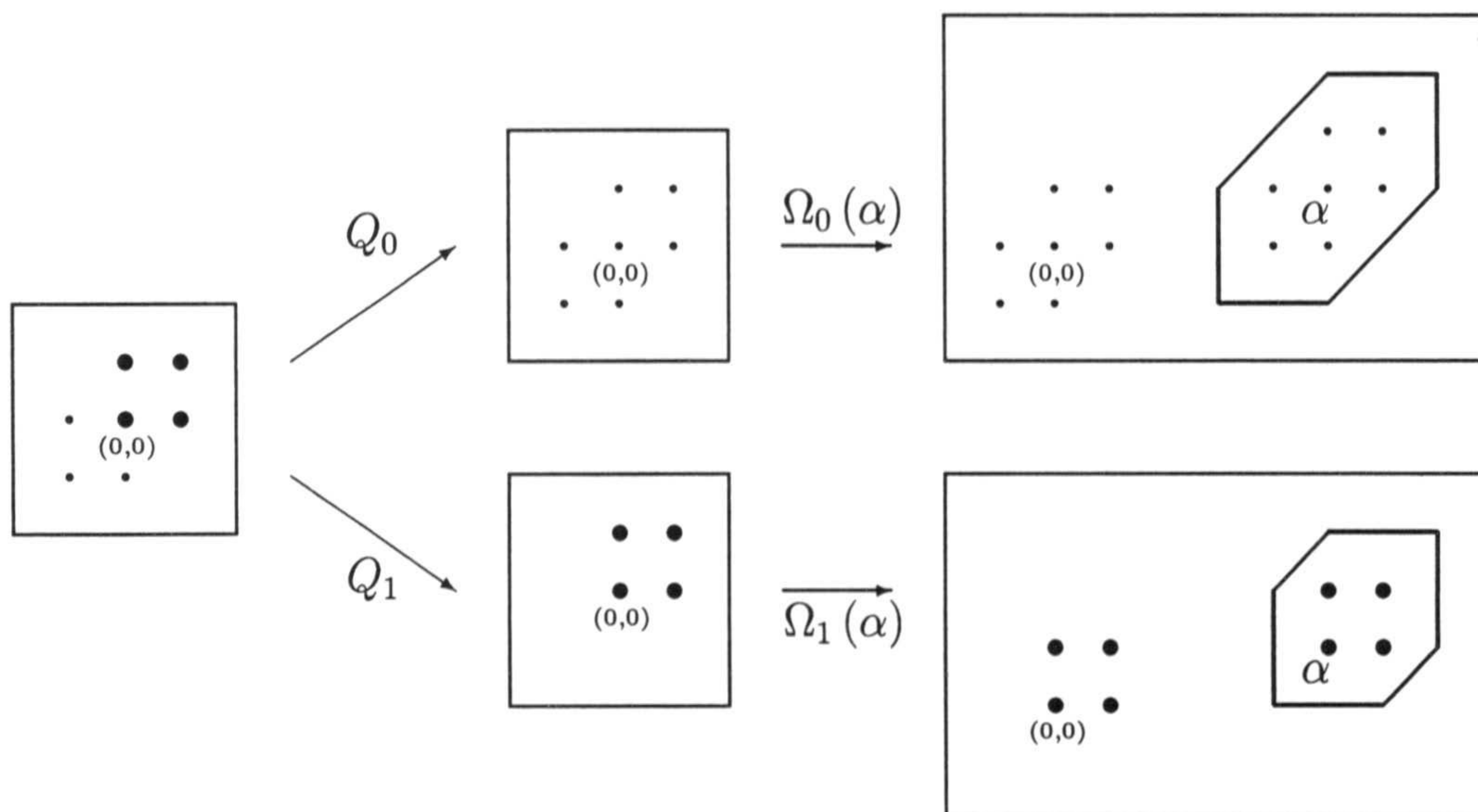


Figura 3.8: Proceso constructivo de los conjuntos $\Omega_i(\alpha)$ a partir de una configuración \mathbb{P}_4 -unisolvante.

Los puntos de la figura de la izquierda marcados con \bullet constituyen el conjunto P_1 , y P_0 los indicados con \cdot . P_1 y P_0 son subconjuntos de $P = \text{he}(0,0) \cap \mathbb{Z}^2$. Los conjuntos $\Omega_i(\alpha)$ se forman uniendo hexágonos unitarios y serán los soportes de las funciones fundamentales del operador de interpolación de Hermite de orden uno, que será exacto en \mathbb{P}_4 .

Después de las notaciones y preliminares podemos enunciar el resultado de existencia y unicidad que nos permitirá definir con posterioridad las funciones fundamentales de soporte compacto para el operador de interpolación de Hermite.

Proposición 3.2.3 Sean $s \geq 1$ y $1 \leq m \leq g_{HCT}(s)$, y (P_0, P_1) una configuración \mathbb{P}_m -unisolvante. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existen unas únicas funciones \tilde{L}_α , definida en $\Omega_0(\alpha)$ y \tilde{M}_α y \tilde{N}_α , definidas en $\Omega_1(\alpha)$, que verifican las siguientes condiciones:

1. Si s es impar, las restricciones de dichas funciones a los macro-triángulos, T , de sus conjuntos de definición pertenecen a $\mathbb{P}_{g_{HCT}(s)}^s(T, \tau_3)$, y a $\mathbb{P}_{g_{HCT}(s)}^{s+1}(T, \tau_3)$ si s es par.
2. Son funciones de clase $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ en los vértices de cada macro-triángulo contenido en sus conjuntos de definición.

3.

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_\alpha(\alpha') &= \delta_{\alpha,\alpha'}, \quad \partial_\alpha^{(1,0)}(\tilde{L}_\alpha) = 0, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(\tilde{L}_\alpha) = 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_0(\alpha) \\
\tilde{M}_\alpha(\alpha') &= 0, \quad \partial_\alpha^{(1,0)}(\tilde{M}_\alpha) = \delta_{\alpha,\alpha'}, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(\tilde{M}_\alpha) = 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_1(\alpha) \\
\tilde{N}_\alpha(\alpha') &= 0, \quad \partial_\alpha^{(1,0)}(\tilde{N}_\alpha) = 0, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(\tilde{N}_\alpha) = \delta_{\alpha,\alpha'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_1(\alpha)
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

4. Para cada ε de Q_0 y multi-índice μ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $2 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$,

$$\partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(\tilde{L}_\alpha) = \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(q_\alpha^{(0,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \tag{3.2.2}$$

y para cada ε de Q_1

$$\begin{aligned}
\partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(\tilde{M}_\alpha) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(q_\alpha^{(1,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\
\partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(\tilde{N}_\alpha) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^\mu(q_\alpha^{(0,1)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q))
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

con $Q = (Q_0, Q_1)$ y

$$\alpha + \varepsilon - Q = \alpha + \varepsilon - (Q_0, Q_1) = (\alpha + \varepsilon - Q_0, \alpha + \varepsilon - Q_1)$$

5. Para $1 \leq r \leq s$, $1 \leq j \leq r$ y $1 \leq k \leq 3$,

$$\begin{aligned}
D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(\tilde{L}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(q_\alpha^{(0,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\
\varepsilon \in Q_0 \\
D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(\tilde{M}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(q_\alpha^{(1,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\
D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(\tilde{N}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(q_\alpha^{(0,1)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\
\varepsilon \in Q_1
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

y para $s + 1 \leq r \leq 2s - 1$, $1 \leq j \leq 2s - r$ y $1 \leq k \leq 3$,

$$\begin{aligned}
D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(\tilde{L}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(q_\alpha^{(0,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\
\varepsilon \in Q_0 \\
D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(\tilde{M}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(q_\alpha^{(1,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\
D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(\tilde{N}_\alpha) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(q_\alpha^{(0,1)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\
\varepsilon \in Q_1
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

6. En los vértices de la triangulación que pertenecen a las fronteras de los respectivos conjuntos de definición de las funciones \tilde{L}_α , \tilde{M}_α y \tilde{N}_α , éstas y sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ se anulan. Además, sobre las aristas de la triangulación que están incluidas en dichas fronteras, las derivadas direccionales que puedan imponerse del tipo de las que aparecen en (3.2.4) y (3.2.5) son nulas.

La demostración de esta proposición se reduce a aplicar los resultados probados en los trabajos ya citados de P. Sablonnière y M. Laghchim-Lahlou, como en el caso de la interpolación lagrangiana, y la omitimos.

Como hicimos al tratar la interpolación lagrangiana, extendemos por cero a \mathbb{R}^2 las funciones \tilde{L}_α , \tilde{M}_α y \tilde{N}_α obteniendo

$$\begin{aligned} L_\alpha(x, y) &= \begin{cases} \tilde{L}_\alpha(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_0(\alpha) \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_0(\alpha) \end{cases} \\ M_\alpha(x, y) &= \begin{cases} \tilde{M}_\alpha(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_1(\alpha) \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1(\alpha) \end{cases} \\ N_\alpha(x, y) &= \begin{cases} \tilde{N}_\alpha(x, y) & \text{si } (x, y) \in \Omega_1(\alpha) \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_1(\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

que son las funciones que nos permiten definir el operador de interpolación de Hermite.

Proposición 3.2.4 *El operador \mathcal{H}_1 definido por*

$$\mathcal{H}_1 f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \left(f(\alpha) L_\alpha + \partial_\alpha^{(1,0)}(f) M_\alpha + \partial_\alpha^{(0,1)}(f) N_\alpha \right) \quad (3.2.6)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

Demostración

Supongamos que p es un polinomio de grado menor o igual que m . Las igualdades (3.2.1) implican que $\mathcal{H}_1 p(\alpha) = p(\alpha)$, $\partial_\alpha^{(1,0)}(\mathcal{H}_1 p) = \partial_\alpha^{(1,0)}(p)$ y $\partial_\alpha^{(0,1)}(\mathcal{H}_1 p) = \partial_\alpha^{(0,1)}(p)$, para α de \mathbb{Z}^2 .

Sea μ cualquier multi-índice tal que $2 \leq |\mu| \leq s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$. Por (3.2.6),

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^\mu(\mathcal{H}_1 p) &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \\ \alpha \in \text{int}(\text{sop}(L_\gamma))}} p(\gamma) \partial_\alpha^\mu(L_\gamma) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \\ \alpha \in \text{int}(\text{sop}(M_\gamma))}} \partial_\gamma^{(1,0)}(p) \partial_\alpha^\mu(M_\gamma) + \\ &\quad \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \\ \alpha \in \text{int}(\text{sop}(N_\gamma))}} \partial_\gamma^{(0,1)}(p) \partial_\alpha^\mu(N_\gamma) \end{aligned}$$

Pero α pertenece al conjunto $\text{int}(\text{sop}(L_\gamma))$ si y sólo si γ es de la forma $\alpha - \varepsilon$, con ε de Q_0 . Análogamente, α pertenece a $\text{int}(\text{sop}(M_\gamma))$ y a $\text{int}(\text{sop}(N_\gamma))$ si y sólo si γ se expresa como $\alpha - \varepsilon$, siendo ε un elemento de Q_1 . Así pues,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^\mu(\mathcal{H}_1 p) &= \sum_{\varepsilon \in Q_0} p(\alpha - \varepsilon) \partial_\alpha^\mu(L_{\alpha - \varepsilon}) + \\ &\quad \sum_{\varepsilon \in Q_1} \left(\partial_{\alpha - \varepsilon}^{(1,0)}(p) \partial_\alpha^\mu(M_{\alpha - \varepsilon}) + \partial_{\alpha - \varepsilon}^{(0,1)}(p) \partial_\alpha^\mu(N_{\alpha - \varepsilon}) \right) \end{aligned}$$

La igualdad anterior sugiere que se consideren los conjuntos $\alpha - Q_0$ y $\alpha - Q_1$ y la representación

$$\begin{aligned} p &= \sum_{\varepsilon \in Q_0} p(\alpha - \varepsilon) q_{\alpha - \varepsilon}^{(0,0)}(\bullet; \alpha - Q) + \\ &\quad \sum_{\varepsilon \in Q_1} \left(\partial_{\alpha - \varepsilon}^{(1,0)}(p) q_{\alpha - \varepsilon}^{(1,0)}(\bullet; \alpha - Q) + \partial_{\alpha - \varepsilon}^{(0,1)}(p) q_{\alpha - \varepsilon}^{(0,1)}(\bullet; \alpha - Q) \right) \end{aligned}$$

del polinomio p de \mathbb{P}_m .

Entonces

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^\mu(p) &= \sum_{\varepsilon \in Q_0} p(\alpha - \varepsilon) \partial_\alpha^\mu \left(q_{\alpha - \varepsilon}^{(0,0)}(\bullet; \alpha - Q) \right) + \\ &\quad \sum_{\varepsilon \in Q_1} \left(\partial_{\alpha - \varepsilon}^{(1,0)}(p) \partial_\alpha^\mu \left(q_{\alpha - \varepsilon}^{(1,0)}(\bullet; \alpha - Q) \right) + \right. \\ &\quad \left. \partial_{\alpha - \varepsilon}^{(0,1)}(p) \partial_\alpha^\mu \left(q_{\alpha - \varepsilon}^{(0,1)}(\bullet; \alpha - Q) \right) \right) \end{aligned}$$

Las condiciones (3.2.2) y (3.2.3), válidas para todo α de \mathbb{Z}^2 , implican que $\partial_\alpha^\mu(\mathcal{H}_1 p) = \partial_\alpha^\mu(p)$ para $2 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$.

Un procedimiento completamente similar basado en el cumplimiento de (3.2.4) y (3.2.5) nos permite probar que también se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(\mathcal{H}_1 p) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(p) \\ 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq j \leq r, \quad 1 \leq k \leq 3 \\ D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(\mathcal{H}_1 p) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(p) \\ s+1 \leq r \leq 2s-1, \quad 1 \leq j \leq 2s-r, \quad 1 \leq k \leq 3 \end{aligned}$$

Entonces, como además se cumplen 1 y 2, podemos asegurar que $\mathcal{H}_1 p = p$, es decir, que el operador es exacto en \mathbb{P}_m . \square

Debemos observar que si el interpolante es de clase global C^1 , entonces s es igual a la unidad y los grados de libertad del problema son exclusivamente las derivadas normales en los puntos medios de las aristas de la triangulación incluidas en los soportes.

Vamos a comentar brevemente la tercera condición impuesta a la configuración (P_0, P_1) . Supongamos que los subconjuntos P_0 y P_1 elegidos condujeran al siguiente Q_0 (véase la fig. 3.9):

$$Q_0 = (\{(0, 0), (3, 0), (3, 3), (0, 3)\} \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

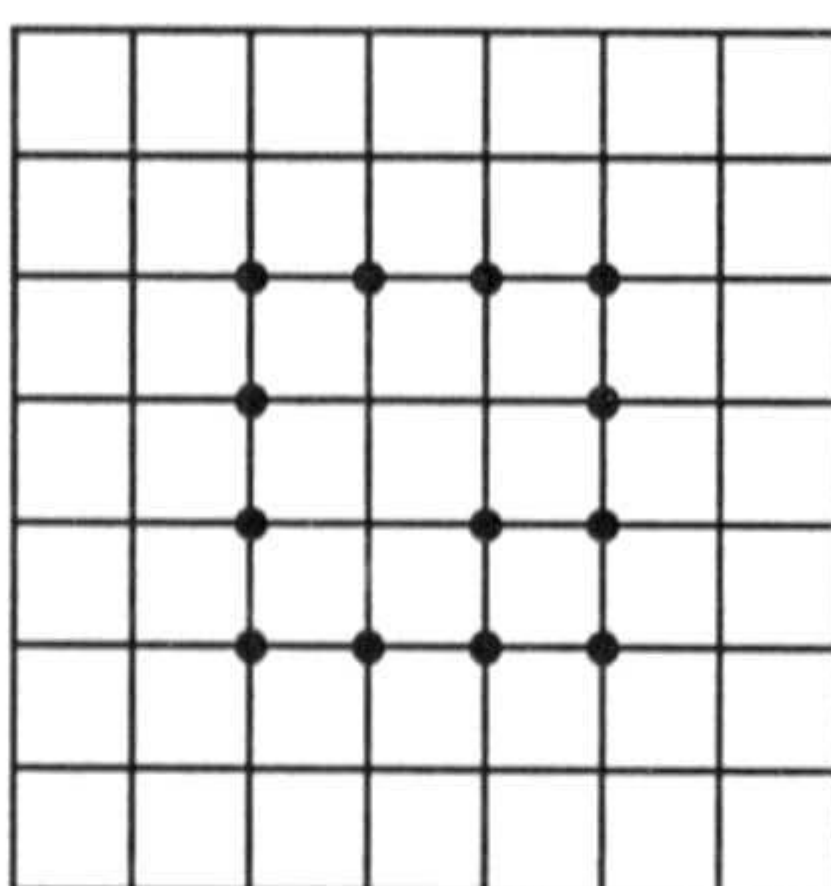


Figura 3.9: Un posible conjunto Q_0 .

El proceso de construcción empleado para formar los soportes de las funciones fundamentales daría lugar al subconjunto mostrado en la fig. 3.10 como soporte de L_α .

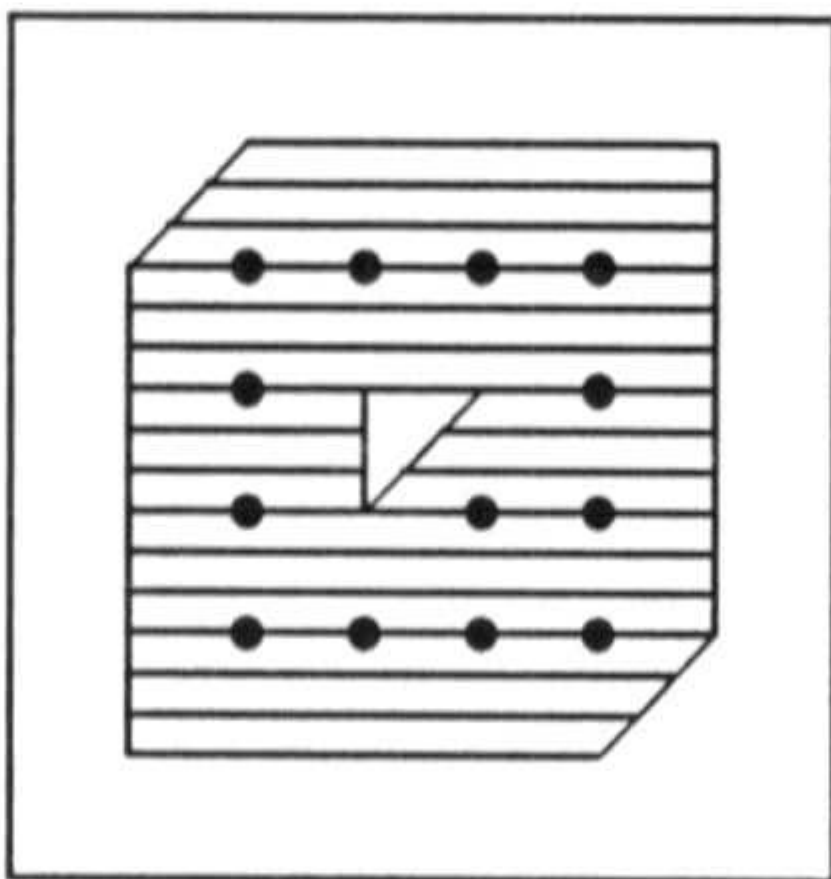


Figura 3.10: El subconjunto que correspondería a Q_0 siguiendo el método de construcción de soportes.

No es simplemente-conexo. Por tanto, la condición que se exige a los subconjuntos P_0 y P_1 tiene como objetivo garantizar que los conjuntos que serán los soportes de las funciones fundamentales del operador de interpolación sean simplemente conexos.

3.2.2 Elementos finitos PS y FVS

En la interpolación spline de Lagrange comenzamos considerando el elemento finito de tipo HCT y vimos que se simplificaban las condiciones que conducían al interpolante de clase prefijada si en su lugar utilizábamos el elemento PS o, incluso, el cuadrangular de tipo FVS, aunque el número de micro-triángulos aumentaba en cada caso. Lo mismo sucede en lo que se refiere a la interpolación de Hermite de orden uno, y tan sólo vamos a establecer los resultados.

Si tratamos con el elemento de tipo PS y exigimos que el interpolante sea de clase global $C^1(\mathbb{R}^2)$, las funciones fundamentales son cuadráticas a trozos y en su determinación intervienen sólo las derivadas parciales de orden uno, por lo que no hay grados de libertad que determinar. Además, el interpolante que se construye a partir de las condiciones de interpolación preserva directamente el espacio \mathbb{P}_2 . La no existencia de derivadas parciales -ni direccionales- que calcular implica que no es posible preservar tan sólo \mathbb{P}_1 (o \mathbb{P}_0 , si se quiere, aunque esta opción no ha sido considerada en ningún caso). Por tanto, el primer caso no trivial corresponde a la clase global $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Esta circunstancia no se produce si empleamos elementos de tipo FVS, pues sí hay que calcular el valor de ciertas derivadas direccionales.

Enunciamos a continuación los resultados correspondientes a estos elementos análogos a los de las proposiciones 3.2.3 y 3.2.4.

Proposición 3.2.5 Sean $s \geq 2$ y $1 \leq m \leq g_{PS}(s)$, y (P_0, P_1) una configuración \mathbb{P}_m -unisolvante. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existe unas únicas funciones \tilde{L}_α , definida en $\Omega_0(\alpha)$, y \tilde{M}_α y \tilde{N}_α , definidas en $\Omega_1(\alpha)$, que verifican las siguientes condiciones:

1. Si s es impar, las restricciones de dichas funciones a los macro-triángulos, T , de sus conjuntos de definición pertenecen a $\mathbb{P}_{g_{PS}(s)}^s(T, \tau_6)$, y a $\mathbb{P}_{g_{PS}(s)}^{s+1}(T, \tau_6)$ si s es par.
2. Son funciones de clase $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ en los vértices de cada macro-triángulo contenido en sus conjuntos de definición.
- 3.

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_\alpha(\alpha') &= \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \partial_\alpha^{(1,0)}(\tilde{L}_\alpha) = 0, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(\tilde{L}_\alpha) = 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_0(\alpha) \\
 \tilde{M}_\alpha(\alpha') &= 0, \quad \partial_\alpha^{(1,0)}(\tilde{M}_\alpha) = \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(\tilde{M}_\alpha) = 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_1(\alpha) \\
 \tilde{N}_\alpha(\alpha') &= 0, \quad \partial_\alpha^{(1,0)}(\tilde{N}_\alpha) = 0, \quad \partial_\alpha^{(0,1)}(\tilde{N}_\alpha) = \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_1(\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{3.2.7}$$

4. Para cada ε de Q_0 y multi-índice μ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $2 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$,

$$\partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (\tilde{L}_{\alpha}) = \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (q_{\alpha}^{(0,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \quad (3.2.8)$$

y para cada ε de Q_1

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (\tilde{M}_{\alpha}) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (q_{\alpha}^{(1,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (\tilde{N}_{\alpha}) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (q_{\alpha}^{(0,1)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

5. En los vértices de la triangulación que pertenecen a las fronteras de los respectivos conjuntos de definición de las funciones \tilde{L}_{α} , \tilde{M}_{α} y \tilde{N}_{α} , éstas y sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ se anulan.

Además, si notamos por L_{α} , M_{α} y N_{α} a las extensiones por cero de \tilde{L}_{α} , \tilde{M}_{α} y \tilde{N}_{α} a \mathbb{R}^2 , respectivamente, entonces el operador de interpolación definido por

$$\mathcal{H}_1 f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} (f(\alpha) L_{\alpha} + \partial_{\alpha}^{(1,0)}(f) M_{\alpha} + \partial_{\alpha}^{(0,1)}(f) N_{\alpha}) \quad (3.2.10)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

Proposición 3.2.6 Sean $s \geq 1$ y $1 \leq m \leq g_{FVS}(s)$, y (P_0, P_1) una configuración \mathbb{P}_m -unisolvante. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existen unas únicas funciones \tilde{L}_{α} , definida en $\Omega_0(\alpha)$, y \tilde{M}_{α} y \tilde{N}_{α} , definidas en $\Omega_1(\alpha)$, que verifican las siguientes condiciones:

1. Si s es impar, las restricciones de dichas funciones a los cuadriláteros, T , de sus conjuntos de definición pertenecen a $\mathbb{P}_{g_{FVS}(s)}^s(T, \tau_4)$, y a $\mathbb{P}_{g_{FVS}(s)}^{s+1}(T, \tau_4)$ si s es par.

2. Son funciones de clase $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ en los vértices de cada cuadrilátero contenido en sus conjuntos de definición.

3.

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\alpha}(\alpha') &= \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \partial_{\alpha}^{(1,0)}(\tilde{L}_{\alpha}) = 0, \quad \partial_{\alpha}^{(0,1)}(\tilde{L}_{\alpha}) = 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_0(\alpha) \\ \tilde{M}_{\alpha}(\alpha') &= 0, \quad \partial_{\alpha}^{(1,0)}(\tilde{M}_{\alpha}) = \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \partial_{\alpha}^{(0,1)}(\tilde{M}_{\alpha}) = 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_1(\alpha) \\ \tilde{N}_{\alpha}(\alpha') &= 0, \quad \partial_{\alpha}^{(1,0)}(\tilde{N}_{\alpha}) = 0, \quad \partial_{\alpha}^{(0,1)}(\tilde{N}_{\alpha}) = \delta_{\alpha, \alpha'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_1(\alpha) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

4. Para cada ε de Q_0 y multi-índice μ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $2 \leq |\mu| \leq s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$,

$$\partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (\tilde{L}_{\alpha}) = \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (q_{\alpha}^{(0,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \quad (3.2.12)$$

y para cada ε de Q_1

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (\tilde{M}_{\alpha}) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (q_{\alpha}^{(1,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (\tilde{N}_{\alpha}) &= \partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} (q_{\alpha}^{(0,1)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

5. Para $1 \leq r \leq s$, $1 \leq j \leq r$ y $1 \leq k \leq 2$,

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (\tilde{L}_{\alpha}) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (q_{\alpha}^{(0,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ \varepsilon \in Q_0 \\ D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (\tilde{M}_{\alpha}) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (q_{\alpha}^{(1,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (\tilde{N}_{\alpha}) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r (q_{\alpha}^{(0,1)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ \varepsilon \in Q_1 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

y para $s+1 \leq r \leq 2s-1$, $1 \leq j \leq 2s-r$ y $1 \leq k \leq 2$,

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r (\tilde{L}_{\alpha}) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r (q_{\alpha}^{(0,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ \varepsilon \in Q_0 \\ D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r (\tilde{M}_{\alpha}) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r (q_{\alpha}^{(1,0)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r (\tilde{N}_{\alpha}) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r (q_{\alpha}^{(0,1)} (\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ \varepsilon \in Q_1 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

6. En los vértices de los cuadriláteros que pertenecen a las fronteras de los respectivos conjuntos de definición de las funciones \tilde{L}_{α} , \tilde{M}_{α} y \tilde{N}_{α} , éstas y sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ se anulan. Además, sobre las aristas de los cuadriláteros que están incluidas en dichas fronteras, las derivadas direccionales que puedan imponerse del tipo de las que aparecen en (3.2.14) y (3.2.15) son nulas.

Además, si notamos por L_{α} , M_{α} y N_{α} a las extensiones por cero de \tilde{L}_{α} , \tilde{M}_{α} y \tilde{N}_{α} a \mathbb{R}^2 , respectivamente, entonces el operador de interpolación definido por

$$\mathcal{H}_1 f = \sum_{\alpha \in Z^2} (f(\alpha) L_{\alpha} + \partial_{\alpha}^{(1,0)} (f) M_{\alpha} + \partial_{\alpha}^{(0,1)} (f) N_{\alpha}) \quad (3.2.16)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

3.2.3 Un ejemplo

Vamos a finalizar la sección especificando los valores de los grados de libertad que surgen cuando construimos un interpolante de Hermite de orden uno de clase global dos ($s = 2$).

Si empleamos un elemento PS, debemos considerar el de grado $g_{PS}(2) = 5$ y hay que calcular las derivadas parciales hasta el orden tres en los vértices interiores a los soportes, como se indica en la proposición 3.2.5 ([53]). Podemos imponer exactitud en \mathbb{P}_m , con $1 \leq m \leq 5$, y elegimos concretamente $m = 4$. Para ello, haremos uso de la situación mostrada en la fig. 3.8. Entonces,

$$P_1 = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}, \quad P_0 = \{(-1, 0), (-1, -1), (0, -1)\}$$

Hay que calcular un total de quince polinomios de base. En la tabla 3.1 se recogen los valores de un primer conjunto de valores de las derivadas parciales, y en la 3.2 los de un segundo. En la fig. 3.8 se muestran los soportes de las funciones fundamentales.

ε	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(3, 0)	(2, 1)	(1, 2)	(0, 3)
(0, 0)	-4	2	-4	0	0	0	0
(1, 0)	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{4}$	0	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(1, 1)	0	$\frac{7}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
(0, 1)	0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3
(-1, 0)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
(-1, -1)	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(0, -1)	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3

Tabla 3.1: Valores de $\partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} \left(q_{\alpha}^{(0,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q) \right)$, $\varepsilon \in Q_0$, necesarios para determinar L_{α} . Los índices corresponden a $|\mu| = 2$ y $|\mu| = 3$.

3.3 El caso general

Una vez que hemos estudiado la interpolación spline de Hermite de orden uno basada en los elementos finitos HCT, PS y FVS siguiendo el método desarrollado inicialmente para la interpolación de Lagrange, vamos a considerar la interpolación de Hermite general de orden k , con $k \geq 2$, abordada en el caso del elemento finito HCT e interpolante de clase global par en [4].

ε	(2,0)	(1,1)	(0,2)	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
(0,0)	2	0	0	-6	2	-2	0
(1,0)	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	0
(1,1)	0	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	1	0
(0,1)	0	0	0	0	-2	2	0
(0,0)	0	0	2	0	2	-2	-6
(1,0)	0	0	0	0	2	-2	0
(1,1)	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	0
(0,1)	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	1	0

Tabla 3.2: Valores de $\partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} \left(q_{\alpha}^{(1,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q) \right)$ y $\partial_{\alpha+\varepsilon}^{\mu} \left(q_{\alpha}^{(1,0)}(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q) \right)$, $\varepsilon \in Q_1$, necesarios para determinar M_{α} y N_{α} , respectivamente. Los de M_{α} aparecen en las cuatro primeras filas, y los de N_{α} en las restantes. Los índices especificados corresponden a $|\mu| = 2$ y $|\mu| = 3$.

3.3.1 Elementos finitos HCT y FVS

Nuevamente vamos a comenzar con el elemento HCT, que es el que más grados de libertad genera.

Definición 3.3.1 Sean P un subconjunto finito de \mathbb{Z}^2 y m un número natural. Diremos que (P_0, P_1, \dots, P_k) es una configuración \mathbb{P}_m -admisibles si se verifican las siguientes condiciones:

1. $P_k \subset P$, $(0,0) \in P_k$ y para cada $1 \leq i \leq k$ se cumple que

$$P_{k-i} \subset P \setminus \bigcup_{j=k-i+1}^k P_j$$

- 2.

$$\sum_{i=0}^k \frac{(i+1)(i+2)}{2} \text{card}(P_i) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

3. Si $Q_i = \bigcup_{j=i}^k P_j$, $0 \leq i \leq k$, cualquier triángulo unitario incluido en el interior de $[Q_i]$ tiene al menos un vértice que pertenece a Q_i .

La tercera condición de la definición anterior vuelve a tener como objetivo que los soportes de las funciones fundamentales que vamos a construir sean simplemente conexos.

Si escribimos $Q = (Q_0, Q_1, \dots, Q_k)$, definimos $\alpha - Q$ mediante la igualdad

$$\alpha - Q = (\alpha - Q_0, \alpha - Q_1, \dots, \alpha - Q_k)$$

siendo

$$\alpha - Q_i = \{\alpha - \varepsilon : \varepsilon \in Q_i\}, \quad 0 \leq i \leq k$$

Asociado a k , sea

$$\Delta_k = \{\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : |\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq k\}$$

y definamos los conjuntos

$$\Gamma_{k,i} = \{\beta \in \Delta_k : |\beta| = i\}, \quad 0 \leq i \leq k$$

Definición 3.3.2 Sea (P_0, P_1, \dots, P_k) una configuración \mathbb{P}_m -admisibile. Diremos que es \mathbb{P}_m -unisolvante si el problema consistente en encontrar un polinomio de \mathbb{P}_m , p , tal que

$$\partial_\alpha^\beta (p) = f_\alpha^\beta, \quad \beta \in \Gamma_{k,i}, \quad \alpha \in Q_i, \quad 0 \leq i \leq k$$

tiene una única solución cualquiera que sea el conjunto de escalares

$$\bigcup_{i=0}^k \{f_\alpha^\beta : \beta \in \Gamma_{k,i}, \alpha \in Q_i\}$$

Básicamente lo que hacemos es considerar subconjuntos de los tipos $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$, $S_1 \cup \dots \cup S_k$, ..., S_k para los que el problema descrito por las igualdades

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= f_\alpha^{(0,0)}, \quad \alpha \in S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k \\ \partial_\alpha^\beta (p) &= f_\alpha^\beta, \quad \beta \in \Gamma_{k,1}, \quad \alpha \in S_1 \cup \dots \cup S_k \\ &\vdots \\ \partial_\alpha^\beta (p) &= f_\alpha^\beta, \quad \beta \in \Gamma_{k,k}, \quad \alpha \in S_k \end{aligned}$$

admite una única solución. Ello permite expresar el polinomio p de la forma

$$\begin{aligned} p &= \sum_{\alpha \in S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k} \partial_\alpha^{(0,0)} (p) q_\alpha^{(0,0)} (\bullet; S) + \\ &\quad \sum_{\alpha \in S_1 \cup \dots \cup S_k} \sum_{\beta \in \Gamma_{k,1}} \partial_\alpha^\beta (p) q_\alpha^\beta (\bullet; S) + \dots + \sum_{\alpha \in S_k} \sum_{\beta \in \Gamma_{k,k}} \partial_\alpha^\beta (p) q_\alpha^\beta (\bullet; S) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{\alpha \in S_i \cup \dots \cup S_k} \sum_{\beta \in \Gamma_{k,i}} \partial_\alpha^\beta (p) q_\alpha^\beta (\bullet; S) \end{aligned}$$

donde $\bigcup_{i=0}^k \{q_\alpha^\beta(\bullet; S) : \beta \in \Gamma_{k,i}, \alpha \in S_i \cup \dots \cup S_k\}$ es la base dual de la base de formas lineales de \mathbb{P}_m dada por $\bigcup_{i=0}^k \{\partial_\alpha^\beta : \beta \in \Gamma_{k,i}, \alpha \in S_i \cup \dots \cup S_k\}$.

Dada una configuración \mathbb{P}_m -unisolvente (P_0, P_1, \dots, P_k) , asociados a los conjuntos Q_i de la definición 3.3.1 consideramos los subconjuntos

$$\Omega_i(\alpha) = \bigcup_{\varepsilon \in Q_i} \text{he}(\alpha + \varepsilon), \quad 0 \leq i \leq k$$

Enunciamos el resultado relativo a la existencia y unicidad del operador de interpolación de Hermite de orden k para el elemento finito HCT.

Proposición 3.3.3 Sean $k \geq 2$, $s \geq 1$ tal que $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil \geq k$ y $k \leq m \leq g_{\text{HCT}}(s)$. Sea, asimismo, (P_0, P_1, \dots, P_k) una configuración \mathbb{P}_m -unisolvente. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existen unas únicas funciones $\widetilde{H}_\alpha^\beta$, $\beta \in \Delta_k$, definidas en $\Omega_{|\beta|}(\alpha)$ que verifican las siguientes propiedades:

1. Si s es impar, las restricciones de $\widetilde{H}_\alpha^\beta$, $\beta \in \Delta_k$, a los macro-triángulos, T , de su conjunto de definición pertenecen a $\mathbb{P}_{g_{\text{HCT}}(s)}^s(T, \tau_3)$, y a $\mathbb{P}_{g_{\text{HCT}}(s)}^s(T, \tau_3)$ si s es par.
2. Son funciones de clase $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ en los vértices de cada macro-triángulo contenido en sus conjuntos de definición.
3. Para cada β de Δ_k ,

$$\partial_{\alpha'}^{\beta'}(\widetilde{H}_\alpha^\beta) = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\beta, \beta'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_{|\beta|}(\alpha), \quad \beta' \in \Delta_k \quad (3.3.1)$$

4. Para cada ε de Q_i , $0 \leq i \leq k$, y multi-índice μ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $k + 1 \leq |\mu| \leq s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$,

$$\partial_{\alpha + \varepsilon}^\mu(\widetilde{H}_\alpha^\beta) = \partial_{\alpha + \varepsilon}^\mu(q_\alpha^\beta(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \quad (3.3.2)$$

donde

$$\alpha + \varepsilon - Q = (\alpha + \varepsilon - Q_0, \alpha + \varepsilon - Q_1, \dots, \alpha + \varepsilon - Q_k)$$

5. Para cada β de Δ_k y ε de $Q_{|\beta|}$ y $1 \leq n \leq 3$,

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_n, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_n}^r(\widetilde{H}_\alpha^\beta) &= D_{\bar{e}_n, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_n}^r(q_\alpha^\beta(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq j \leq r \\ D_{\bar{e}_n, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_n}^r(\widetilde{H}_\alpha^\beta) &= D_{\bar{e}_n, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_n}^r(q_\alpha^\beta(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \\ s + 1 \leq r \leq 2s - 1, \quad 1 \leq j \leq 2s - r \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

6. En los vértices de la triangulación que pertenecen a las fronteras de los respectivos conjuntos de definición de las funciones $\widetilde{H}_\alpha^\beta$, $\beta \in \Delta_k$, éstas y sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ se anulan. Además, sobre las aristas de la triangulación que están incluidas en dichas fronteras, las derivadas direccionales que puedan imponerse del tipo de las que aparecen en (3.3.3) son nulas.

Además, si notamos por H_α^β , $\beta \in \Delta_k$, $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, a la extensión por cero de $\widetilde{H}_\alpha^\beta$ a \mathbb{R}^2 , entonces H_α^β es de clase $C^s(\mathbb{R}^2)$ y tiene soporte $\Omega_{|\beta|}(\alpha)$, y el operador de interpolación de Hermite definido por

$$\mathcal{H}_k f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{\beta \in \Gamma_{k,i}} \partial_\alpha^\beta(f) H_\alpha^\beta \quad (3.3.4)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

Demostración

La existencia y unicidad de las funciones $\widetilde{H}_\alpha^\beta$ están garantizadas al ser especificada su naturaleza local mediante 1 y 2; los valores que ellas y sus respectivas derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ toman en los vértices de sus soportes por (3.3.1), (3.3.2) y 6; y (3.3.3) y 6 dan los de sus derivadas direccionales en ciertos conjuntos precisos de puntos interiores a los lados de los triángulos de la triangulación de sus soportes.

Que las funciones H_α^β son de clase $C^s(\mathbb{R}^2)$ es consecuencia del proceso local de construcción.

Sólo resta probar la exactitud del operador \mathcal{H}_k .

Sea p un polinomio de \mathbb{P}_m . Las igualdades (3.3.1) implican que $\partial_\alpha^\beta(\mathcal{H}_k p) = \partial_\alpha^\beta(p)$, $\beta \in \Delta_k$, para α de \mathbb{Z}^2 .

Consideremos una de las funciones fundamentales, H_α^β , $\beta \in \Gamma_{k,i}$, $0 \leq i \leq k$ (nótese que $|\beta| = i$).

Sea μ cualquier multi-índice tal que $k + 1 \leq |\mu| \leq s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$. Por (3.3.4),

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^\mu(\mathcal{H}_k p) &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \\ \alpha \in \text{int}(\text{sop}(H_\gamma^{(0,0)}))}} p(\gamma) \partial_\alpha^\mu(H_\gamma^{(0,0)}) + \\ &\quad \sum_{\beta \in \Gamma_{k,1}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \\ \alpha \in \text{int}(\text{sop}(H_\gamma^\beta))}} \partial_\gamma^\beta(p) \partial_\alpha^\mu(H_\gamma^\beta) + \cdots + \end{aligned}$$

$$\sum_{\beta \in \Gamma_{k,k}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}^2 \\ \alpha \in \text{int}(\text{sop}(H_\gamma^\beta))}} \partial_\gamma^\beta(p) \partial_\alpha^\mu(H_\gamma^\beta)$$

Pero α pertenece al conjunto $\text{int}(\text{sop}(H_\gamma^\beta))$ si y sólo si γ es de la forma $\alpha - \varepsilon$, con ε de $Q_{|\beta|}$. Así pues,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^\mu(\mathcal{H}_k p) &= \sum_{\varepsilon \in Q_0} p(\alpha - \varepsilon) \partial_\alpha^\mu(H_{\alpha - \varepsilon}^{(0,0)}) + \sum_{\beta \in \Gamma_{k,1}} \sum_{\varepsilon \in Q_1} \partial_{\alpha - \varepsilon}^\beta(p) \partial_\alpha^\mu(H_{\alpha - \varepsilon}^\beta) + \cdots + \\ &\quad \sum_{\beta \in \Gamma_{k,k}} \sum_{\varepsilon \in Q_k} \partial_{\alpha - \varepsilon}^\beta(p) \partial_\alpha^\mu(H_{\alpha - \varepsilon}^\beta) \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{\beta \in \Gamma_{k,i}} \sum_{\varepsilon \in Q_i} \partial_{\alpha - \varepsilon}^\beta(p) \partial_\alpha^\mu(H_{\alpha - \varepsilon}^\beta) \end{aligned}$$

La igualdad anterior sugiere que se considere $\alpha - Q$ y la representación

$$p = \sum_{i=0}^k \sum_{\beta \in \Gamma_{k,i}} \sum_{\varepsilon \in Q_i} \partial_\alpha^\beta(p) q_{\alpha - \varepsilon}^\beta(\bullet; \alpha - Q)$$

del polinomio p de \mathbb{P}_m .

Entonces

$$\partial_\alpha^\mu(p) = \sum_{i=0}^k \sum_{\beta \in \Gamma_{k,i}} \sum_{\varepsilon \in Q_i} \partial_{\alpha - \varepsilon}^\beta(p) \partial_\alpha^\mu(q_{\alpha - \varepsilon}^\beta(\bullet; \alpha - Q))$$

Las condiciones (3.3.2), válidas para todo α de \mathbb{Z}^2 , implican que $\partial_\alpha^\mu(\mathcal{H}_k p) = \partial_\alpha^\mu(p)$ para $k + 1 \leq |\mu| \leq s + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$.

Operando de igual modo y empleando (3.3.3), se prueba que también se cumplen las propiedades

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(\mathcal{H}_k p) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{r+1} e_k}^r(p) \\ 1 \leq r \leq s, \quad 1 \leq j \leq r, \quad 1 \leq n \leq 3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(\mathcal{H}_k p) &= D_{\bar{e}_k, \alpha + \varepsilon \pm \frac{j}{2s-r+1} e_k}^r(p) \\ s + 1 \leq r \leq 2s - s, \quad , \quad 1 \leq j \leq 2s - r, \quad 1 \leq n \leq 3 \end{aligned}$$

Por tanto, como se cumplen además 1 y 2, queda garantizado que $\mathcal{H}_k p = p$, es decir, que el operador \mathcal{H}_k es exacto en \mathbb{P}_m . \square

Debemos observar que cuando k coincide con $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ no hay derivadas parciales que evaluar, y los únicos grados de libertad son los correspondientes a las derivadas direccionales, es decir, las que aparecen en (3.3.3).

Por ejemplo, si planteamos un problema de interpolación de Hermite de orden tres ($k = 3$), necesitamos derivadas parciales hasta el orden tres, al menos. Si pedimos clase global dos ($s = 2$) ya se precisan esas derivadas parciales de orden tres, pues sus valores se siguen directamente de las condiciones de interpolación de Hermite. Sólo habrá que calcular determinadas derivadas direccionales de órdenes uno, dos y tres en puntos ya indicados en diferentes ocasiones de los lados de los triángulos de la triangulación. Así pues, el elemento finito HCT de grado siete permite construir un operador de interpolación de Hermite de orden tres, que produce interpolantes de clase global $C^2(\mathbb{R}^2)$. Se podrá imponer exactitud en cualquier espacio de polinomios \mathbb{P}_m con $2 \leq m \leq 7$.

Si queremos construir un operador de interpolación de Hermite de orden dos que produzca interpolantes de clase global dos, entonces $k = 2$, $s = 2$ y $g_{HCT}(s) = 7$ estamos en la misma situación anterior, pero hay que hallar los valores de las derivadas parciales de orden tres, además de los de las derivadas direccionales citadas, y también podrá exigirse exactitud en \mathbb{P}_m con $2 \leq m \leq 7$.

Como hemos podido ver al tratar tanto la interpolación spline de Lagrange como la de Hermite de orden uno, para emplear el elemento finito FVS sólo hay que hacer algunos cambios menores. Concretamente, el grado de dicho elemento finito es $g_{FVS}(s)$, los soportes de las funciones fundamentales serán los conjuntos

$$\tilde{\Omega}_i(\alpha) = \bigcup_{\varepsilon \in Q_i} \text{cu}(\alpha + \varepsilon), \quad 0 \leq i \leq k$$

en lugar de $\Omega_i(\alpha) = \bigcup_{\varepsilon \in Q_i} \text{he}(\alpha + \varepsilon)$ y, en lo que se refiere a las derivadas normales, sólo hay que hacer uso de e_1 y e_2 , es decir, $1 \leq n \leq 2$. Con estos cambios se puede enunciar un resultado análogo a la proposición 3.3.3, que omitimos.

3.3.2 El elemento finito PS

El elemento PS presenta en el caso general características que lo hacen muy interesante en la construcción de operadores de interpolación de clase prefijada en comparación con el HCT, gracias a su menor grado y a la no existencia de grados de libertad de tipo derivada direccional, y ello a pesar del mayor número de micro-triángulos.

Enunciamos el resultado relativo a la existencia y unicidad del operador de interpolación de Hermite de orden k para el elemento finito PS.

Proposición 3.3.4 Sean $k \geq 2$, $s \geq 1$ tal que $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil > k$ y $k \leq m \leq g_{PS}(s)$. Sea, asimismo, (P_0, P_1, \dots, P_k) una configuración \mathbb{P}_m -unisolvente. Para cada α de \mathbb{Z}^2 existen unas únicas funciones $\widetilde{H}_\alpha^\beta$, $\beta \in \Delta_k$, definidas en $\Omega_{|\beta|}(\alpha)$ que verifican las siguientes propiedades:

1. Si s es impar, las restricciones de $\widetilde{H}_\alpha^\beta$, $\beta \in \Delta_k$, a los macro-triángulos, T , de su conjunto de definición pertenecen a $\mathbb{P}_{g_{PS}(s)}^s(T, \tau_6)$, y a $\mathbb{P}_{g_{PS}(s)}^s(T, \tau_6)$ si s es par.
2. Son funciones de clase $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ en los vértices de cada macro-triángulo contenido en sus conjuntos de definición.
3. Para cada β de Δ_k ,

$$\partial_{\alpha'}^{\beta'}(\widetilde{H}_\alpha^\beta) = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\beta, \beta'}, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}^2 \cap \Omega_{|\beta|}(\alpha), \quad \beta' \in \Delta_k \quad (3.3.5)$$

4. Para cada ε de Q_i , $0 \leq i \leq k$, y multi-índice μ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $k + 1 \leq |\mu| \leq s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$,

$$\partial_{\alpha + \varepsilon}^\mu(\widetilde{H}_\alpha^\beta) = \partial_{\alpha + \varepsilon}^\mu(q_\alpha^\beta(\bullet; \alpha + \varepsilon - Q)) \quad (3.3.6)$$

donde

$$\alpha + \varepsilon - Q = (\alpha + \varepsilon - Q_0, \alpha + \varepsilon - Q_1, \dots, \alpha + \varepsilon - Q_k)$$

5. En los vértices de la triangulación que pertenecen a las fronteras de los respectivos conjuntos de definición de las funciones $\widetilde{H}_\alpha^\beta$, $\beta \in \Delta_k$, éstas y sus derivadas parciales hasta el orden $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ se anulan.

Además, si notamos por H_α^β , $\beta \in \Delta_k$, $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, a la extensión por cero de $\widetilde{H}_\alpha^\beta$ a \mathbb{R}^2 , entonces H_α^β es de clase $C^s(\mathbb{R}^2)$ y tiene soporte $\Omega_{|\beta|}(\alpha)$, y el operador de interpolación de Hermite definido por

$$\mathcal{H}_k f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{\beta \in \Gamma_{k,i}} \partial_\alpha^\beta(f) H_\alpha^\beta \quad (3.3.7)$$

es exacto en \mathbb{P}_m .

Demostración

Es completamente análoga a la de la proposición 3.3.3. \square

Conviene observar que se ha exigido que s cumpla la condición $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil > k$ en lugar de $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil \geq k$, como en el caso HCT. Se debe a que, si s es tal que $s + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ coincide con k , entonces los grados de libertad disponibles quedan determinados directamente por las condiciones de interpolación, y, además, se preserva el mayor espacio posible, $\mathbb{P}_{g_{PS}(s)}$.

3.3.3 Operadores escalados

Vamos a finalizar los apartados relativos a la construcción de los operadores de interpolación spline de Lagrange y de Hermite haciendo una referencia muy breve al caso escalado.

Como hemos visto, fijados dos tipos de redes regulares del plano, que dan como vértices de interpolación los puntos de \mathbb{Z}^2 , hemos podido construir diferentes tipos de operadores de Lagrange, denominados genéricamente \mathcal{L} , y de Hermite de orden k , \mathcal{H}_k . Responden a las representaciones

$$\mathcal{L}f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} f(\alpha) L(\bullet - \alpha)$$

$$\mathcal{H}_k f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{\beta \in \Gamma_{k,i}} \partial_{\alpha}^{\beta}(f) H_{\alpha}^{\beta}$$

respectivamente.

No hay ninguna dificultad en partir de las redes regulares inducidas por las rectas $x = hk$, $y = hk$, $x - y = hk$, o $x = hk$, $y = hk$, donde h es una constante positiva, obteniendo los operadores escalados

$$\mathcal{L}^h = \sigma_h \mathcal{L} \sigma_{\frac{1}{h}}, \quad \mathcal{H}^h = \sigma_h \mathcal{H} \sigma_{\frac{1}{h}}$$

con σ_p definido mediante la igualdad $\sigma_p(f) = f(p \bullet)$.

Si \mathbb{P}_m es el espacio de polinomios preservado por los operadores recién descritos, es conocido que los errores $f - \mathcal{L}^h f$ y $f - \mathcal{H}^h f$ son del orden de $O(h^{m+1})$, siempre que f sea suficientemente regular. En [30], [37] y [55] se muestra cómo pueden obtenerse expresiones más precisas de dichos errores en diversos casos, haciendo uso de los resultados desarrollados en [2] y [25] (en la primera de las referencias anteriores, se trata la interpolación de Hermite con elementos finitos de Powell-Sabin cuadráticos de clase dos sobre una triangulación arbitraria a la que se impone una condición adicional). La misma técnica es aplicable en nuestro caso con unas variaciones mínimas, por lo cual no desarrollamos este aspecto.

3.4 Consideraciones acerca de las configuraciones

Esta sección está destinada a describir algunos hechos genéricos sobre la clasificación de las configuraciones que hemos definido para construir, a partir de una de ellas, los operadores ([72], [74]).

3.4.1 Clasificación de configuraciones admisibles

Recordemos que a una configuración admisible le habíamos impuesto una condición que garantizaba que los soportes construidos a partir de ella eran simplemente-conexos. Dicha condición no es imprescindible, pero simplifica la descripción de las condiciones sobre la frontera, y no vamos a tenerla en cuenta en lo que sigue. Además, imponíamos que el conjunto P_k incluyese al punto $(0, 0)$; vamos a obviar también esta condición. En definitiva, cuando nos refiramos en lo sucesivo a una configuración \mathbb{P}_m -admisibles, estaremos considerando una $k+1$ -upla, (P_0, P_1, \dots, P_k) , que verifica exclusivamente las dos condiciones siguientes:

- $P_{k-i} \subset P \setminus \bigcup_{j=k-i+1}^k P_j, 1 \leq i \leq k.$
- $\sum_{i=0}^k \frac{(i+1)(i+2)}{2} \text{card}(P_i) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$

Las restantes exigencias serán comprobadas a posteriori.

Si una configuración \mathbb{P}_m -admisibles en el sentido anterior da lugar a un problema de interpolación polinómica de Hermite \mathbb{P}_m -unisolvante, diremos que es una configuración \mathbb{P}_m -unisolvante.

El problema de la determinación de las configuraciones \mathbb{P}_m -admisibles para la interpolación de polinómica de Hermite de orden k construidas con puntos del conjunto P es equivalente a encontrar las formas en que los símbolos s, l y $h_i, 1 \leq i \leq k$, por ejemplo, pueden ser asignados a los puntos de P . Formemos la $k+2$ -upla $\text{simb} = (s, l, h_1, \dots, h_k)$. Sus componentes se notarán $\text{simb}_j, 0 \leq j \leq k+1$.

Definición 3.4.1 Sea (P_0, P_1, \dots, P_k) una configuración \mathbb{P}_m -admisibles. Diremos que es de tipo $(t; t_0, \dots, t_k)$, donde $t = \text{card}(P) - \sum_{i=0}^k \text{card}(P_i)$ y $t_i = \text{card}(P_i)$, $0 \leq i \leq k$.

Sea k cualquier entero no negativo. Fijado un tipo de configuración \mathbb{P}_m -admisibles para la interpolación de Hermite de orden k , $(t; t_0, \dots, t_k)$, es importante conocer cuántas configuraciones de ese tipo hay asociadas al sistema de puntos P . Es inmediato que ese número de configuraciones de tipo $(t; t_0, \dots, t_k)$ es

$$\prod_{i=0}^k \binom{\text{card}(P) - \sum_{j=k-i+1}^k t_j}{t_{k-i}}$$

entendiendo que $\sum_{j=k-i+1}^k t_j$ es nulo cuando $i = 0$. Obsérvese que $t = \text{card}(P) - \sum_{i=0}^k t_i$ es el número de puntos a los que no se asigna ningún dato de interpolación y que se debe cumplir la igualdad

$$\sum_{i=0}^k \frac{(i+1)(i+2)}{2} t_i = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad (3.4.1)$$

Si m es tal que la anterior ecuación admite alguna solución, sea

$$\mathcal{S}_{m,k} = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_k) \in (\mathbb{N}^*)^k \times \mathbb{N} : \sum_{i=0}^k \frac{(i+1)(i+2)}{2} t_i = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \right\}$$

su conjunto de soluciones. Entonces, el cardinal de $\cup \mathcal{S}_{m,k}$ es

$$\sum_{(t_0, t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{S}_m} \prod_{i=0}^k \binom{\text{card}(P) - \sum_{j=k-i+1}^k t_j}{t_{k-i}} \quad (3.4.2)$$

extendiéndose la unión a aquellos valores de k para los que la igualdad (3.4.1) tiene solución. Dicho cardinal coincide con el coeficiente $x^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}$ en el desarrollo de la expresión

$$\left(1 + \sum_{i=0}^k x^{\frac{(i+1)(i+2)}{2}} \right)^{\text{card}(P)} \quad (3.4.3)$$

En otras palabras, fijado el espacio \mathbb{P}_m en el que queremos tener un esquema admisible (y luego unisolvente), la suma de las cantidades de configuraciones \mathbb{P}_m -admisibles de cualquier tipo para la interpolación de Lagrange, para la de Hermite de orden uno y de Hermite de orden $k \geq 2$ viene dada por (3.4.2) y por el coeficiente de $x^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}$ en (3.4.3).

Como las particiones que hemos considerado en el plano para definir los elementos finitos (triangular y cuadrangular) son regulares, para estudiar las configuraciones \mathbb{P}_m -unisolventes es razonable clasificar las \mathbb{P}_m -admisibles atendiendo a su preservación mediante las isometrías de algún sistema de puntos relacionado con P .

En dichas particiones *conviven* dos estructuras regulares: una triangular (no equilátera) y otra formada por cuadrados. Por tanto, al sistema de puntos P le asociamos el conjunto \tilde{P} constituido de forma natural por los vértices de la triangulación equilátera relativa a τ . En la fig. 3.11 se muestra un sistema de puntos concreto, P , y en la fig. 3.12 su conjunto asociado \tilde{P} .

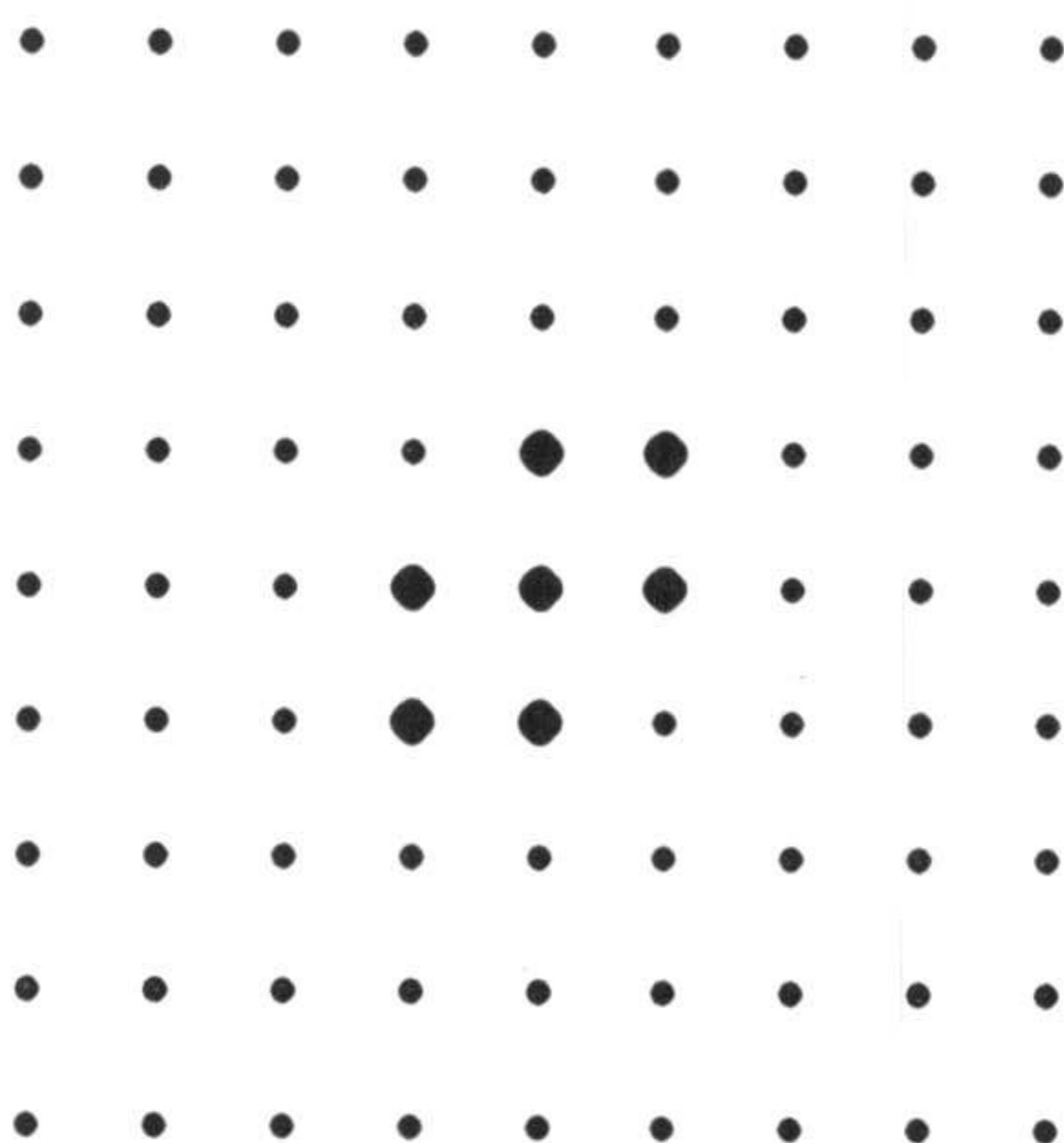


Figura 3.11: Un conjunto particular P de \mathbb{Z}^2 : el centro y los vértices del hexágono unitario centrado en $(0, 0)$.

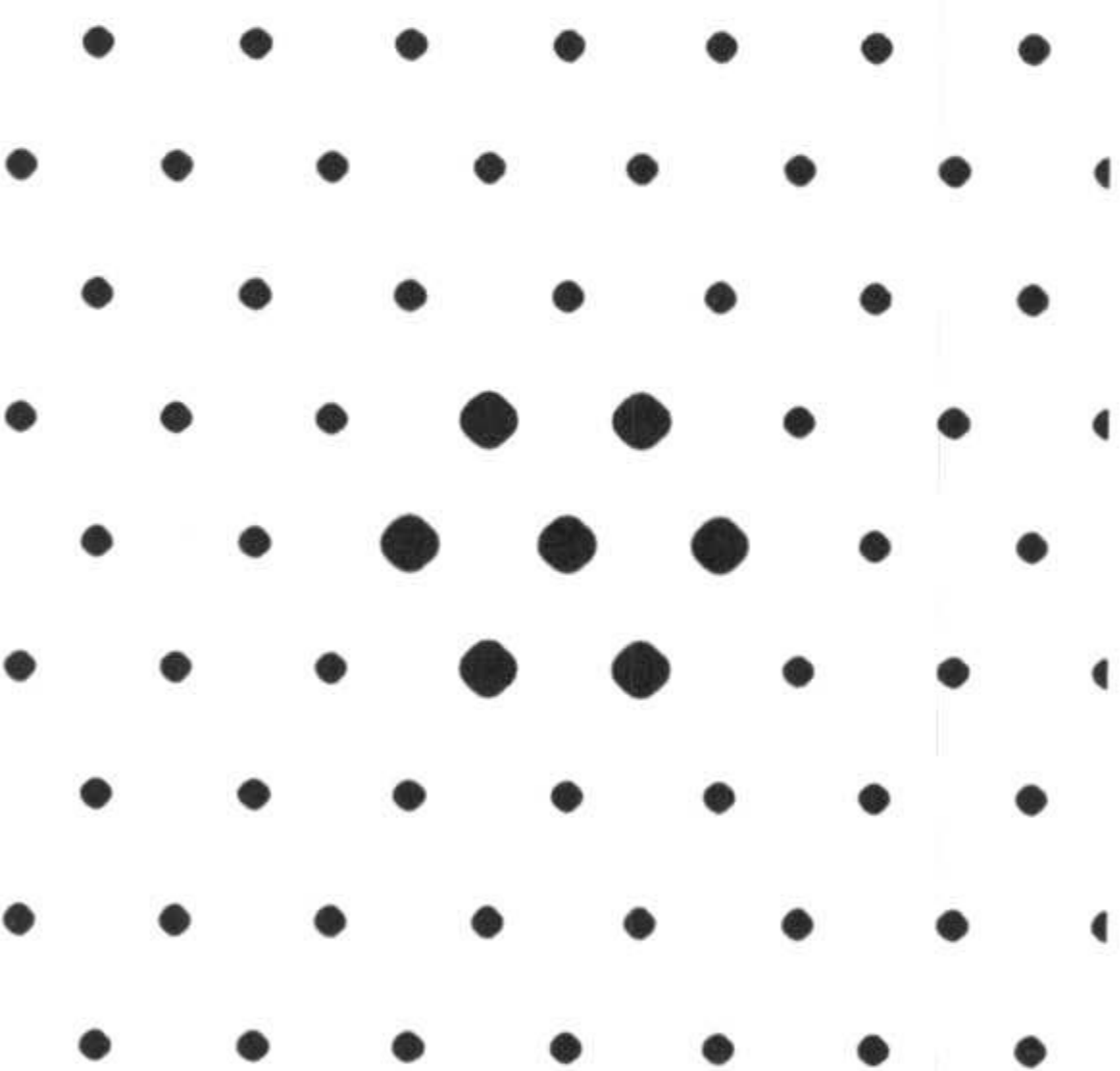


Figura 3.12: El conjunto \tilde{P} asociado al sistema de puntos mostrado en la fig. 3.11. Se tiene que $P^* = \tilde{P}$.

Sean $\text{Iso}(P)$ e $\text{Iso}(\tilde{P})$ los grupos de isometrías de P y \tilde{P} , respectivamente. Si $\text{card}(\text{Iso}(\tilde{P})) > \text{card}(\text{Iso}(P))$, hacemos $P^* = \tilde{P}$, y $P^* = P$ en caso contrario. Sea $\text{Iso}(P^*)$ su grupo de isometrías.

A cada configuración \mathbb{P}_m -admisibles (P_0, P_1, \dots, P_k) le corresponde de modo natural una $k + 2$ -upla $(P_0^*, P_1^*, \dots, P_k^*)$, donde cada P_i^* es un subconjunto de P^* .

Definición 3.4.2 Diremos que dos configuraciones \mathbb{P}_m -admisibles (P_0, P_1, \dots, P_k) y (Q_0, Q_1, \dots, Q_k) del mismo tipo son equivalentes si existe una isometría de P^* , σ , tal que $\sigma(P_i^*) = \sigma(Q_i^*)$, $0 \leq i \leq k$.

La relación definida es de equivalencia y produce en el conjunto de configuraciones \mathbb{P}_m -admisibles del tipo dado una partición en clases. La \mathbb{P}_m -unisolvencia de un elemento de una de las clases implica la de todas sus configuraciones relacionadas. Esto justifica que estemos interesados en formar clases de equivalencia y en conocer el número de las mismas que hay de un determinado tipo. El planteamiento que estamos llevando a cabo nos permitirá utilizar resultados clásicos de la teoría de la enumeración de patrones ([72], [74]).

Cada isometría, σ , de P^* produce una permutación, $\pi(\sigma)$, de los puntos de P . Ésta se descompone como producto de ciclos, cuyos órdenes forman un conjunto que notamos $J_{\pi(\sigma)}$. Sea $z_i(\pi(\sigma))$ el número de ciclos de $\pi(\sigma)$ que tienen orden $i \in J_{\pi(\sigma)}$. El polinomio $\prod_{i \in J_{\pi(\sigma)}} x_i^{z_i(\pi(\sigma))}$ se denomina representación de la estructura de ciclos de $\pi(\sigma)$.

Definición 3.4.3 Si $n = \max \cup_{\sigma \in \text{Iso}(P^*)} J_{\pi(\sigma)}$, definimos el índice de ciclo de $\text{Iso}(P^*)$ como

$$\text{Ind}_{\text{Iso}(P^*)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\text{card}(\text{Iso}(P^*))} \sum_{\sigma \in \text{Iso}(P^*)} \prod_{i \in J_{\pi(\sigma)}} x_i^{z_i(\pi(\sigma))} \quad (3.4.4)$$

Aunque en el polinomio dado por (3.4.4) aparecen las variables x_i , $1 \leq i \leq n$, habrá índices que no correspondan al orden de ningún ciclo. En sentido estricto, las correspondientes variables x_i no son tales variables. El que aparezcan de forma artificial no supone ningún problema en lo que se refiere al resultado que enunciaremos a continuación. Al tratar situaciones concretas utilizaremos exclusivamente las variables con subíndices que corresponden al orden de algún ciclo.

Proposición 3.4.4 El número de clases de equivalencia de tipo $(t; t_0, \dots, t_k)$ es el coeficiente de $\text{simb}_0^t \prod_{i=1}^{k+1} \text{simb}_i^{t_i-1}$ en el desarrollo de la expresión

$$\text{Ind}_{\text{Iso}(P^*)} \left(\sum_{i=0}^{k+1} \text{simb}_i, \sum_{i=0}^{k+1} \text{simb}_i^2, \dots, \sum_{i=0}^{k+1} \text{simb}_i^n \right)$$

A continuación mostraremos cómo se traduce el planteamiento anterior cuando se fijan conjuntos de puntos P simples.

3.4.2 Configuraciones unisolventes para la interpolación de bajo grado

El problema relativo a la unisolvencia de la interpolación polinómica de Hermite multivariada ha sido estudiado ampliamente y es objeto de una intensa investigación. En [7] y [41] se estudia en profundidad la cuestión y [67] constituye un trabajo reciente que proporciona nuevos resultados.

En particular, la teoría de sistemas de interpolación desarrollada por M. Gasca, J. I. Maeztu, V. Ramírez y J. Lorente es una herramienta muy interesante en la determinación de la unisolvencia de un problema determinado y en la construcción de su solución ([22], [23], [39], [40], [49]).

En lo que respecta a la interpolación polinómica lagrangiana, necesaria al tratar la interpolación spline de Lagrange vía elementos finitos HCT, PS y FVS, los resultados obtenidos en [38] nos proporcionan un procedimiento recurrente para construir los polinomios de base necesarios para determinar los grados de libertad, aplicable aunque se utilice un conjunto distinto de T_m que dé lugar a un esquema unisolvente.

Vamos a finalizar este capítulo centrándonos en la interpolación polinómica de Hermite de órdenes uno y dos de bajo grado.

En general, los sistemas de puntos que vamos a considerar son la intersección de un hexágono centrado en el origen con \mathbb{Z}^2 , es decir,

$$he_n = [(n, 0), (n, n), (0, n), (-n, 0), (-n, -n), (0, -n)] \cap \mathbb{Z}^2, \quad n \geq 1$$

Está formado por $3n^2 + 3n + 1$ puntos. Por tanto, pueden plantearse problemas de interpolación de Hermite de orden uno en \mathbb{P}_m para $(m + 1)(m + 2) \leq 6(3n^2 + 3n + 1)$ con $m \geq 1$.

Antes de pasar de un conjunto he_n al siguiente, he_{n+1} , podemos hacer una elección intermedia, que es

$$cu_n = [(-n, -n), (n, -n), (n, n), (-n, n)] \cap \mathbb{Z}^2, \quad n \geq 1$$

Se añaden $2(1 + 2 + \dots + n)$ puntos al pasar de he_n a cu_n , lo que puede ser suficiente para encontrar alguna configuración unisolvente en el espacio de polinomios especificado.

Antes de indicar el índice de ciclo de he_n vamos a calcular el de he_1 . Notamos A_0 al centro de he_1^* y A_i , $1 \leq i \leq 6$, a sus seis vértices, comenzando en $(1, 0)$ y

siguiendo el sentido dextrógiro. Las doce isometrías de he_1^* son la identidad, id , los cinco giros γ_i de amplitudes $\frac{\pi}{3}i$ rad. (sentido horario), $1 \leq i \leq 5$, las tres simetrías σ_i respecto de las rectas determinadas por los puntos A_i y A_{i+3} , $1 \leq i \leq 3$, y las tres simetrías σ_i respecto del punto medio del segmento $\overline{A_{i-2}A_{i-1}}$ y su simétrico respecto del centro, $4 \leq i \leq 6$. Cada isometría da lugar a una permutación de los vértices de he_1^* .

En la tabla 3.3 se muestran las descomposiciones en ciclos de las permutaciones que inducen en el conjunto de vértices las isometrías de he_1^* .

id (0) (1) (2) (3) (4) (5) (6)	γ_1 (0) (123456)	γ_2 (0) (135) (246)
γ_3 (0) (14) (25) (36)	γ_4 (0) (153) (264)	γ_5 (0) (165432)
σ_1 (0) (1) (26) (35) (4)	σ_2 (0) (15) (24) (3) (6)	σ_3 (0) (13) (46) (2) (5)
σ_4 (0) (14) (23) (56)	σ_5 (0) (16) (25) (34)	σ_6 (0) (12) (36) (45)

Tabla 3.3: Descomposición en ciclos de las permutaciones de los puntos de he_1 inducidas por sus isometrías.

La descomposición correspondiente a la permutación inducida por el giro de sesenta grados es (0) (123456), por lo que tiene un 1-ciclo y un 6-ciclo, lo que proporciona la representación $x_1^1 x_6^1$, es decir, $x_1 x_6$. La de la generada por la simetría respecto de la recta que une los vértices A_4 y A_1 es (0) (1) (26) (35) (4), por lo que hay tres 1-ciclos y dos 2-ciclos. Así, da lugar a $x_1^3 x_2^2$. En definitiva, el índice de ciclo de $\text{Iso}(he_1^*)$ es

$$\text{Ind}_{\text{Iso}(he_1^*)}(x_1, x_2, \dots, x_6) = \frac{1}{12} (x_1^7 + 2x_1 x_6 + 2x_1 x_3^2 + 4x_1 x_2^3 + 3x_1 x_2^2)$$

Obsérvese que las variables x_4 y x_5 son artificiales, pues no aparecen en la expresión polinómica de la derecha de la igualdad precedente.

Para he_1 podemos considerar \mathbb{P}_m , $1 \leq m \leq 5$, como espacio para la interpolación de Hermite de orden uno, mientras que para la de Hermite de orden dos podemos hacer uso de \mathbb{P}_m con $2 \leq m \leq 7$. En la tabla 3.4 se muestran los diferentes tipos admisibles en el primero de los casos citados, la cantidad posible de elecciones de conjuntos P_0 y P_1 , y el número de clases de equivalencia correspondiente a cada tipo.

Una vez que disponemos de la información necesaria acerca de las configuraciones, damos un representante de cada una de las clases \mathbb{P}_m -unisolventes. Debemos indicar que los esquemas con símbolo s^2h^5 no pueden ser \mathbb{P}_4 -unisolventes ([41], teorema 4.3.1 (5), p. 32). En las tablas 3.5, 3.6 y 3.7 se muestran representantes de las clases de equivalencia \mathbb{P}_m -unisolventes, $2 \leq m \leq 4$, respectivamente. El caso correspondiente a \mathbb{P}_1 es trivial. Los puntos de P_0 se simbolizan con h , los de P_1 con l y los de $P \setminus (P_0 \cup P_1)$ con s . El esquema \mathbb{P}_4 -unisolvente de tipo $[0; 3, 4]$ mostrado a la izquierda en la tabla 3.7 fue el utilizado en la sección 3.2.3.

De los representantes mostrados en dicha tabla sólo el primero cumple la primera condición de configuración admisible en lo que se refiere a que el punto $(0, 0)$ debe pertenecer a P_k ($k = 1$).

Para abarcar los espacios \mathbb{P}_m , $5 \leq m \leq 9$, necesitamos un sistema de puntos que contenga a he_1 , y el natural es he_2 . Sin embargo, como dijimos, podemos considerar cu_1 . Es inmediato que $cu_1^* = cu_1$. Su centro se nota B_0 y los restantes elementos, B_i , $1 \leq i \leq 8$, a partir de $(1, 0)$ y en sentido levógiro. Tiene ocho isometrías: la identidad, \tilde{id} ; los tres giros, $\tilde{\gamma}_i$, de $\frac{\pi}{2}i$ radianes (sentido anti-horario), $1 \leq i \leq 3$; las simetrías, $\tilde{\sigma}_i$, respecto de los segmentos $\overline{B_{2i}B_{2i+4}}$, $1 \leq i \leq 2$; y las simetrías, $\tilde{\sigma}_{i+2}$, respecto de $\overline{B_{2i+1}B_{2i+5}}$, $1 \leq i \leq 2$.

En la tabla 3.8 se muestran las descomposiciones en ciclos de las permutaciones que inducen en el conjunto de vértices las isometrías de cu_1^* .

Su índice de ciclo es, pues,

$$\text{Ind}_{\text{Iso}(cu_1^*)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8} (x_1^9 + 2x_1x_4^2 + 4x_1^3x_2^3 + x_1x_2^4)$$

En la tabla 3.9 se muestran los diferentes tipos \mathbb{P}_5 -admisibles, la cantidad posible de elecciones de conjuntos P_0 y P_1 , y el número de clases de equivalencia correspondiente a cada tipo. En la tabla 3.10 se recogen representantes de las clases de equivalencia \mathbb{P}_5 -unisolventes construidas a partir de cu_1 .

Los índices de ciclo de he_n^* y cu_n^* se dan en la próxima proposición.

Proposición 3.4.5 *Sea $n \geq 1$.*

1. *El cardinal de he_n^* es $3n^2 + 3n + 1$. Si n es par, entonces*

$$\text{Ind}_{\text{Iso}(he_n^*)}(x_1, x_2, x_3, x_6) = \frac{1}{12} \left(x_1^{3n^2+3n+1} + 2x_1x_6^{\frac{n(n+1)}{2}} + 2x_1x_3^{n(n+1)} + x_1x_2^{\frac{3n(n+1)}{2}} + 3x_1^{2n+1}x_2^{\frac{n(3n+1)}{2}} + 3x_1^{n+1}x_2^{\frac{n(3n+2)}{2}} \right)$$

Espacio	Tipo	Configuraciones	Símbolo	Clases
\mathbb{P}_1	[6; 0, 1]	7	s^6h	3
\mathbb{P}_2	[3; 3, 1]	140	s^3l^3h	15
	[5; 0, 2]	21	s^5h^2	4
\mathbb{P}_3	[1; 4, 2]	105	sl^4h^2	12
	[3; 1, 3]	140	s^3lh^3	15
\mathbb{P}_4	[0; 3, 4]	35	l^3h^4	6
	[2; 0, 5]	21	s^2h^5	4
\mathbb{P}_5	[0; 0, 7]	1	h^7	1

Tabla 3.4: Datos sobre configuraciones para la interpolación de Hermite de orden uno con $P = he_1$. Se tiene $k = 1$, por lo que se sustituye h_1 por h . Las expresiones s^0 , l^0 y h^0 se omiten y las s^1 , l^1 y h^1 se convierten en s , l y h , respectivamente.

Tipo de configuración	Representantes			
[3; 3, 1]	$l \ l$	$l \ h$	$s \ h$	$s \ h$
	$s \ h \ l$	$s \ l \ l$	$l \ l \ l$	$s \ l \ l$
	$s \ s$	$s \ s$	$s \ s$	$s \ l$
	$s \ h$	$l \ h$	$l \ h$	$s \ h$
	$l \ l \ s$	$l \ s \ l$	$l \ s \ s$	$l \ s \ s$
	$s \ l$	$s \ s$	$s \ l$	$l \ l$
	$s \ h$	$l \ h$	$l \ h$	
	$l \ s \ l$	$s \ s \ l$	$l \ s \ s$	
	$l \ s$	$l \ s$	$l \ s$	

Tabla 3.5: Clases de equivalencia \mathbb{P}_2 -unisolventes.

Tipo de configuración	Representantes			
[1; 4, 2]	$h \ s$ $h \ l \ l$ $l \ l$	$s \ h$ $h \ l \ l$ $l \ l$	$l \ h$ $h \ l \ s$ $l \ l$	$h \ s$ $h \ l \ l$ $l \ l$
	$l \ h$ $h \ l \ l$ $l \ s$	$l \ h$ $l \ h \ l$ $s \ l$		
[3; 1, 3]	$s \ s$ $s \ l \ h$ $h \ h$	$h \ s$ $s \ l \ h$ $h \ s$	$s \ s$ $h \ s \ l$ $h \ h$	$s \ s$ $h \ s \ h$ $h \ l$
	$s \ l$ $h \ s \ s$ $h \ h$	$s \ h$ $l \ s \ s$ $h \ h$	$s \ h$ $h \ s \ s$ $l \ h$	$s \ l$ $h \ s \ h$ $h \ s$
	$l \ h$ $s \ h \ h$ $s \ s$	$s \ h$ $s \ h \ l$ $s \ h$	$s \ h$ $l \ h \ s$ $s \ h$	

Tabla 3.6: Clases de equivalencia \mathbb{P}_3 -unisolventes.

$h \ h$	$h \ l$
$l \ h \ h$	$l \ h \ h$
$l \ l$	$h \ l$

Tabla 3.7: Clases de equivalencia \mathbb{P}_4 -unisolventes

\tilde{id} (0) (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)	$\tilde{\gamma}_1$ (0) (1357) (2468)
$\tilde{\gamma}_2$ (0) (15) (37) (26) (48)	$\tilde{\gamma}_3$ (0) (1753) (2864)
$\tilde{\sigma}_1$ (0) (3) (7) (24) (15) (68)	$\tilde{\sigma}_2$ (0) (1) (5) (46) (37) (28)
$\tilde{\sigma}_3$ (0) (2) (6) (13) (48) (57)	$\tilde{\sigma}_4$ (0) (4) (8) (17) (26) (35)

Tabla 3.8: Descomposición en ciclos de las permutaciones de los puntos de cu_1 inducidas por sus isometrías.

Tipo	Configuraciones	Símbolo	Clases
[0; 3, 6]	84	l^3h^6	16
[2; 0, 7]	36	s^2h^7	8

Tabla 3.9: Datos sobre configuraciones para la interpolación de Hermite de orden uno con $P = cu_1$.

Tipo	Representantes											
[2; 0, 7]	h	s	h	h	h	h						
	h	h	h	h	h	s						
	h	h	s	h	s	h						
[0; 3, 6]	l	l	h	l	h	l	l	h	h	h	l	h
	h	l	h	h	l	h	h	l	l	l	l	h
	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h
	l	l	h	l	l	h	l	l	h	l	l	h
	h	h	l	h	h	h	h	h	h	h	h	h
	h	h	h	l	h	h	h	l	h	h	h	l
	l	h	l	l	h	l	l	h	h	h	l	h
	h	h	h	h	h	h	h	h	l	l	h	l
	l	h	h	h	l	h	h	l	h	h	h	h

Tabla 3.10: Clases de equivalencia \mathbb{P}_5 -unisolventes

y

$$\text{Ind}_{\text{Iso}(\text{he}_n^*)}(x_1, x_2, x_3, x_6) = \frac{1}{12} \left(x_1^{3n^2+3n+1} + 2x_1x_6^{\frac{n(n+1)}{2}} + 2x_1x_3^{n(n+1)} + \right. \\ \left. x_1x_2^{\frac{3n(n+1)}{2}} + 3x_1^n x_2^{\frac{3n^2+2n+1}{2}} + 3x_1^{2n+1} x_2^{\frac{n(3n+1)}{2}} \right)$$

si es impar.

2. El cardinal de cu_n^* es $(2n+1)^2$ y

$$\text{Ind}_{\text{Iso}(\text{cu}_n^*)}(x_1, x_2, x_4) = \frac{1}{8} \left(x_1^{(2n+1)^2} + x_1x_2^{2n(n+1)} + 2x_1x_4^{n(n+1)} + 4x_1^{2n+1} x_2^{n(2n+1)} \right)$$

Demostración

Las isometrías de he_n^* y cu_n^* son las de he_1^* y cu_1^* , respectivamente. Denotamos los puntos de he_n^* que corresponden a he_1^* en la forma que indicamos para he_1^* , y operamos de igual modo en lo que respecta a cu_n^* en relación cu_1^* .

La identidad transforma los puntos del conjunto he_n^* en ellos mismos, por lo que hay un total de $3n^2 + 3n + 1$ 1-ciclos, y $(2n+1)^2$ en el caso de cu_n^* .

Consideremos he_n^* . La simetría respecto de la recta determinada por A_1 y A_4 deja fijos un total de $2n+1$ puntos, lo que produce $2n+1$ 1-ciclos y el término x_1^{2n+1} . Además, los puntos del semiplano abierto definido por dicha recta y que contiene a A_2 se transforman en los del semiplano que contiene a A_5 , por lo que hay $\frac{n(3n+1)}{2}$ 2-ciclos, lo que da lugar al factor $x_2^{\frac{n(3n+1)}{2}}$. Como sucede exactamente lo mismo para las simetrías respecto de la recta definida por A_i y A_{i+3} , $i = 2, 3$, en el índice de ciclo del grupo de las isometrías de he_n^* aparece el sumando $3x_1^{2n+1} x_2^{\frac{n(3n+1)}{2}}$, independientemente de la paridad de n .

Si n es impar, la simetría respecto de los puntos medios de los segmentos $\overline{A_2A_3}$ y $\overline{A_5A_6}$ opera de igual modo, pero sólo deja fijos n puntos, de ahí que dé lugar a n 1-ciclos y $\frac{3n^2+2n+1}{2}$ 2-ciclos. Ella y las dos simetrías restantes del mismo tipo originan el sumando $3x_1^n x_2^{\frac{3n^2+2n+1}{2}}$. Si n es par, el número de puntos que quedan fijos por las simetrías indicadas es $n+1$, por lo el sumando correspondiente en el índice de ciclo es $3x_1^{n+1} x_2^{\frac{n(3n+2)}{2}}$.

Sea $n \geq 1$ cualquiera. Los giros de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ radianes fijan el centro de he_n^* y determinan en los $3n^2 + 3n$ puntos restantes un total de $\frac{n(n+1)}{2}$ 6-ciclos, por lo que en el índice de ciclo aparece el sumando $2x_1x_6^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Los giros de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ radianes

actúan de forma similar, fijando el centro y originando $n(n+1)$ 3-ciclos entre los $3n^2 + 3n$ puntos restantes, dando lugar a $2x_1x_3^{n(n+1)}$. Por último, el giro de ángulo igual a π radianes también fija el centro y determina $\frac{3n(n+1)}{2}$ 2-ciclos, es decir, lo que corresponde al sumando $x_1x_2^{\frac{3n(n+1)}{2}}$.

En lo que se refiere a cu_n^* , se razona de igual modo y se establece el resultado indicado. \square

Para $n = 2$, es decir, para he_2^* , podemos tratar la interpolación en \mathbb{P}_m necesaria para construir operadores de Hermite de orden uno, $6 \leq m \leq 8$. Los resultados relativos a tipos admisibles y número de configuraciones y clases de equivalencia se muestran en la tabla 3.11. El número de configuraciones y de clases es, por lo general, muy elevado, por lo que la búsqueda automatizada de clases unisolventes se hace imprescindible.

Espacio	Tipo	Configuraciones	Símbolo	Clases
\mathbb{P}_6	[1; 13, 5]	162792	$sl^{13}h^5$	13748
	[3; 10, 6]	7759752	$s^3l^{10}h^6$	648203
	[5; 7, 7]	39907296	$s^5l^7h^7$	3329248
	[7; 4, 8]	24942060	$s^7l^4h^8$	2081515
	[9; 1, 9]	923780	s^9lh^9	77440
\mathbb{P}_7	[1; 9, 9]	923780	sl^9h^9	77440
	[3; 6, 10]	7759752	$s^3l^6h^{10}$	648203
	[5; 3, 11]	4232592	$s^5l^3h^{11}$	353808
	[7; 0, 12]	50388	s^7h^{12}	4356
\mathbb{P}_8	[0; 6, 13]	27132	l^6h^{13}	2376
	[2; 3, 14]	116280	$s^2l^3h^{14}$	9871
	[4; 0, 15]	3876	s^4h^{15}	364

Tabla 3.11: Resultados sobre tipos de esquemas y número de clases \mathbb{P}_m -admisibles, $6 \leq m \leq 8$.

En la tabla 3.12 se muestran representantes de tres clases de equivalencia \mathbb{P}_m -unisolventes, $6 \leq m \leq 8$, que cumplen las condiciones de admisibilidad especificadas en la definición 3.3.1.

En cu_2^* se puede trabajar con $m = 9$, y en las tablas 3.13 y 3.14 se encuentran los datos correspondientes y un ejemplo de esquema unisolvente, respectivamente.

Finalizamos el capítulo recogiendo diversas tablas similares a las precedentes pero correspondientes a la interpolación de Hermite de orden dos. En he_1 y cu_1 los resultados son manejables, pero al pasar a he_2 se acentúa la necesidad de clasificar

$m = 6$				$m = 7$				$m = 8$						
	s	l	s		h	h	h		h	h	l			
	h	h	s	l		s	h	l	s		h	h	h	
s	l	h	h	s	h	l	h	h	l	h	h	h	l	h
h	h	h	l		h	h	l	h		h	h	l	s	
s	h	s			l	s	l			h	s	h		

Tabla 3.12: Tres esquemas \mathbb{P}_m -unisolventes para la interpolación de Hermite de orden uno, $6 \leq m \leq 8$.

Tipo	Configuraciones	Símbolo	Clases
[0; 10, 15]	3268760	$l^{10}h^{15}$	410170
[2; 7, 16]	73547100	$s^2l^7h^{16}$	9199605
[4; 4, 17]	75710250	$s^4l^4h^{17}$	9469965
[6; 1, 18]	3364900	s^6lh^{18}	421640

Tabla 3.13: Datos para cu_2 y $m = 9$.

l	l	h	h	h
l	l	h	h	l
l	l	h	l	l
h	h	h	h	h
h	h	h	h	l

Tabla 3.14: Una configuración \mathbb{P}_9 -unisolvente sobre cu_2 .

las configuraciones de forma automática. La dificultad aumenta si, además, queremos que los soportes sean simplemente-conexos y convexos, características que son importantes desde el punto de vista práctico.

Espacio	Tipo	Configuraciones	Símbolo	Clases
\mathbb{P}_2	[6; 0, 0, 1]	7	$s^6 h_2$	2
\mathbb{P}_3	[4; 1, 1, 1]	210	$s^4 l h_1 h_2$	19 *
	[2; 4, 0, 1]	105	$s^2 l^4 h_2$	12 **
\mathbb{P}_4	[4; 0, 1, 2]	105	$sl^4 h^2$	12 *
	[2; 3, 0, 2]	140	$s^2 l^3 h_2^2$	23 *
	[3; 0, 3, 1]	140	$s^3 h_1^3 h_2$	15
	[1; 3, 2, 1]	420	$sl^3 h_1^2 h_2$	38 **
\mathbb{P}_5	[3; 0, 1, 3]	140	$s^3 h_1 h_2^3$	15
	[1; 3, 0, 3]	140	$sl^3 h_2^3$	15 **
	[2; 0, 3, 2]	210	$s^2 h_1^3 h_2^2$	23 *
	[0; 3, 2, 2]	210	$l^3 h_1^2 h_2^2$	23 **
	[1; 0, 5, 1]	42	$sh_1^5 h_2$	5 **
\mathbb{P}_6	[1; 1, 1, 4]	210	$slh_1 h_2^4$	19 *
	[0; 1, 3, 3]	140	$lh_1^3 h_2^3$	15 *
\mathbb{P}_7	[1; 0, 0, 6]	7	sh_2^6	2 *
	[0; 0, 2, 5]	21	$h_1^2 h_2^5$	4 *

Tabla 3.15: Hermite de orden dos sobre he_1 . * indica que no hay clases unisolventes y ** que, aunque las hay, ninguna tiene un punto de orden dos en el centro del hexágono.

Espacio	Tipo	Representantes					
\mathbb{P}_2	[6; 0, 0, 1]	s	s				
		s	h_2	s			
		s	s				
\mathbb{P}_4	[3; 0, 3, 1]	s	s		s	h_1	
		h_1	h_2	s	h_1	h_2	s
		h_1	h_2		s	h_1	
\mathbb{P}_5	[3; 0, 1, 3]	s	s		s	s	
		h_1	h_2	s	h_2	h_2	s
		h_1	h_1		h_1	h_2	
					h	s	l
					h	h	
							s
							h_1
							h_2
							h_2
							s
							h_2

Tabla 3.16: Representantes unisolventes en el espacio indicado que presentan un dato de tipo h_2 en el centro del hexágono. Los puntos de P_2 se notan h_2 y los de P_1 se simbolizan con h_1 .

Espacio	Tipo	Configuraciones	Símbolo	Cl.	Unis.	$(0, 0) \in P_2$
\mathbb{P}_3	[6; 1, 1, 1]	504	$s^6 l h_1 h_2$	66	0	0
	[4; 4, 0, 1]	630	$s^4 l^4 h_2$	89	38	2
\mathbb{P}_6	[3; 1, 1, 4]	2520	$s^3 l h_1 h_2^4$	324	0	0
	[1; 4, 0, 4]	630	$s l^4 h_2^4$	89	21	10
	[2; 1, 3, 3]	5040	$s^2 l h_1^3 h_2^3$	648	95	17
	[0; 4, 2, 3]	1260	$l^4 h_1^2 h_2^3$	174	39	10
	[1; 1, 5, 2]	1512	$s l h_1^5 h_2$	198	47	6
	[0; 1, 7, 1]	72	$l h_1^7 h_2$	12	12	2
\mathbb{P}_7	[3; 0, 0, 6]	84	$s^3 h_2^6$	16	0	0
	[2; 0, 2, 5]	756	$s^2 h_1^2 h_2^5$	108	8	4
	[0; 3, 1, 5]	504	$l^3 h_1 h_2^5$	72	12	4
	[1; 0, 4, 4]	630	$s h_1^4 h_2^4$	89	21	10
	[0; 0, 6, 3]	84	$h_1^6 h_2^3$	16	13	4
\mathbb{P}_8	[1; 0, 1, 7]	72	$s h_1 h_2^7$	12	3	3
	[0; 0, 3, 6]	84	$h_1^3 h_2^6$	16	13	9

Tabla 3.17: Hermite de orden dos sobre cu_1 . Incluimos P_3 , pues en he_1 no había ninguna clase utilizable. En las columnas penúltima y última se especifica el número de clases unisolventes y el de las que tienen un punto de orden dos en el centro del cuadrado.

Tipo	Representantes					
[4; 4, 0, 1]	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>s</i>
	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>s</i>
	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>s</i>	<i>l</i>

Tabla 3.18: Representantes de configuraciones \mathbb{P}_3 -unisolventes en el cuadrado unidad.

Tipo	Representantes											
[1; 4, 0, 4]	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>
	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>
	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂
	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>s</i>
	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>
	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂
	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>l</i>						
	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>						
	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₂						
[2; 1, 3, 3]	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>l</i>
	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>
	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁
	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₁
	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>
	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂
	<i>s</i>	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁
	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>
	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>h</i> ₂
	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂
	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>s</i>
	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>s</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₁	<i>l</i>	<i>h</i> ₂
	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₁									
	<i>h</i> ₂	<i>h</i> ₂	<i>l</i>									
	<i>s</i>	<i>h</i> ₁	<i>h</i> ₂									

Tabla 3.19: Configuraciones unisolventes en \mathbb{P}_6 con dato de orden dos en el centro del cuadrado unidad.

Tipo	Representantes												
[0; 4, 2, 3]	h_1	l	l	l	h_1	l	l	h_1	l	l	h_1	l	
	h_2	h_2	l	h_1	h_2	l	h_2	h_2	l	h_2	h_2	l	
	l	h_2	h_1	h_2	l	h_2	l	h_1	h_2	h_1	l	h_2	
	l	h_1	l	l	h_2	l	l	h_2	l	l	h_2	l	
	h_2	h_2	l	h_1	h_2	l	h_1	h_2	l	h_2	h_2	l	
	h_2	l	h_1	h_1	l	h_2	h_2	l	h_1	h_1	l	h_1	
	h_1	h_2	l	h_1	h_2	l							
	l	h_2	l	h_2	h_2	l							
	h_2	l	h_1	l	l	h_1							
	[1; 1, 5, 2]	h_1	l	h_1	h_1	l	h_1	l	h_1	h_1	l	h_1	h_1
		h_1	h_2	s	h_2	h_2	s	h_1	h_2	s	h_2	h_2	s
		h_1	h_2	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_2	h_1	h_1	h_1
s		h_1	h_1	s	h_1	h_1							
h_1		h_2	l	h_2	h_2	l							
h_1		h_1	h_2	h_1	h_1	h_1							
[0; 1, 7, 1]	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	l							
	h_1	h_2	l	h_1	h_2	h_1							
	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1							

Tabla 3.20: Configuraciones unisolventes en \mathbb{P}_6 con dato de orden dos en el centro del cuadrado unidad (continuación).

Tipo	Representantes											
[2; 0, 2, 5]	s	h_2	h_1	h_1	h_2	h_1	s	h_1	h_2	h_1	h_1	h_2
	h_2	h_2	s	h_2	h_2	s	h_2	h_2	s	h_2	h_2	s
	h_2	h_1	h_2	h_2	s	h_2	h_1	h_2	h_2	s	h_2	h_2
[0; 3, 1, 5]	l	h_2	l	h_1	h_2	l	l	h_2	h_1	l	h_1	h_2
	h_2	h_2	l	h_2	h_2	l	h_2	h_2	l	h_2	h_2	l
	h_2	h_1	h_2	h_2	l	h_2	h_2	l	h_2	l	h_2	h_2
[1; 0, 4, 4]	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_2	h_1	h_1	h_2	h_1
	h_2	h_2	s	h_2	h_2	s	h_1	h_2	s	h_2	h_2	s
	h_1	h_2	h_2	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1	h_2	h_1	h_1	h_2
	h_1	h_1	h_2	h_1	h_1	h_2	h_1	h_2	s	h_1	h_2	s
	h_1	h_2	s	h_2	h_2	s	h_1	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1
	h_1	h_2	h_2	h_1	h_1	h_2	h_2	h_1	h_2	h_1	h_1	h_2
	h_1	h_1	h_1	s	h_2	h_1						
	h_2	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1						
	s	h_2	h_2	h_1	h_1	h_2						
[0; 0, 6, 3]	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1	h_1
	h_1	h_2	h_1	h_1	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1
	h_1	h_2	h_2	h_2	h_1	h_2	h_1	h_1	h_2	h_1	h_2	h_1

Tabla 3.21: Configuraciones unisolventes en \mathbb{P}_7 con dato de orden dos en el centro del cuadrado unidad.

Tipo	Representantes									
[1; 0, 1, 7]	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_2	s	h_2	h_2	
	h_2	h_2	s	h_2	h_2	s	h_2	h_2	h_1	
	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	
[0; 0, 3, 6]	h_2	h_1	h_1	h_1	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1	h_2
	h_2	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1	h_1	h_2	h_1	h_2
	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_2	h_1
	h_2	h_2	h_1	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1	h_2	h_2
	h_2	h_2	h_1	h_1	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1	h_2
	h_2	h_1	h_2	h_2	h_2	h_2	h_1	h_2	h_2	h_1
	h_1	h_2	h_1							
	h_2	h_2	h_2							
	h_1	h_2	h_2							

Tabla 3.22: Configuraciones unisolventes en \mathbb{P}_8 con dato de orden dos en el centro del cuadrado unidad.

Capítulo 4

Spline de Lagrange de soporte hexagonal: un problema abierto

4.1 Introducción

En el primer capítulo consideramos el B-spline centrado de Schoenberg, M_k , de soporte $\left[-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right]$, el conjunto de índices $I_k = \{i \in \mathbb{Z} : -(k-2) \leq i \leq k-2\}$ y la familia $\left\{M_k\left(\bullet - \frac{j}{2}\right), j \in I_k\right\}$ de las trasladadas de M_k según los índices de I_k . Con estas funciones probamos que siempre existe un único spline de Lagrange, q_k , que se expresa como

$$q_k = \sum_{j \in I_k} \gamma_j M_k\left(\bullet - \frac{j}{2}\right)$$

Como dijimos, la existencia y unicidad de q_k se deduce directamente del teorema de Schoenberg-Whitney, pues la matrix $\left[M_k\left(i - \frac{j}{2}\right)\right]_{(i,j) \in I_k^2}$ tiene elementos diagonales $M_k\left(i - \frac{i}{2}\right)$ positivos, lo que garantiza su invertibilidad.

A causa de la estructura impuesta a q_k , su soporte es $[-(k-1), k-1]$. Calcular la matriz indicada más arriba requiere conocer los valores de M_k en los puntos de $\frac{1}{2}I_k$, y su construcción va siendo más complicada según aumenta k . Esto motivó que, en una primera etapa, redujésemos el problema a comprobar que dos polinomios íntimamente relacionados con M_k eran primos relativos, y, en una segunda, probásemos que efectivamente lo eran. Además, el esquema teórico proporcionaba un método muy simple para construir q_k .

El método empleado se basaba en la utilización de la transformada de Fourier de q_k , que se expresa en términos de la de M_k , conteniendo ésta toda la información

relevante.

En este capítulo vamos a abordar un problema similar referido a la construcción de splines de Lagrange definidos sobre la red tridireccional del plano, generada a partir de las direcciones $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ y $e_3 = e_1 + e_2$. La función que jugará el papel de M_k será el box-spline centrado ([6], [8], [44], [51]).

4.2 El caso del box-spline cuártico de clase dos

Consideremos inicialmente un caso concreto, el del box-spline cuártico a trozos de clase dos, que notaremos B_2 . Su soporte es el hexágono

$$H_2 = [\{(2, 0), (2, 2), (0, 2), (-2, 0), (-2, -2), (0, -2)\}]$$

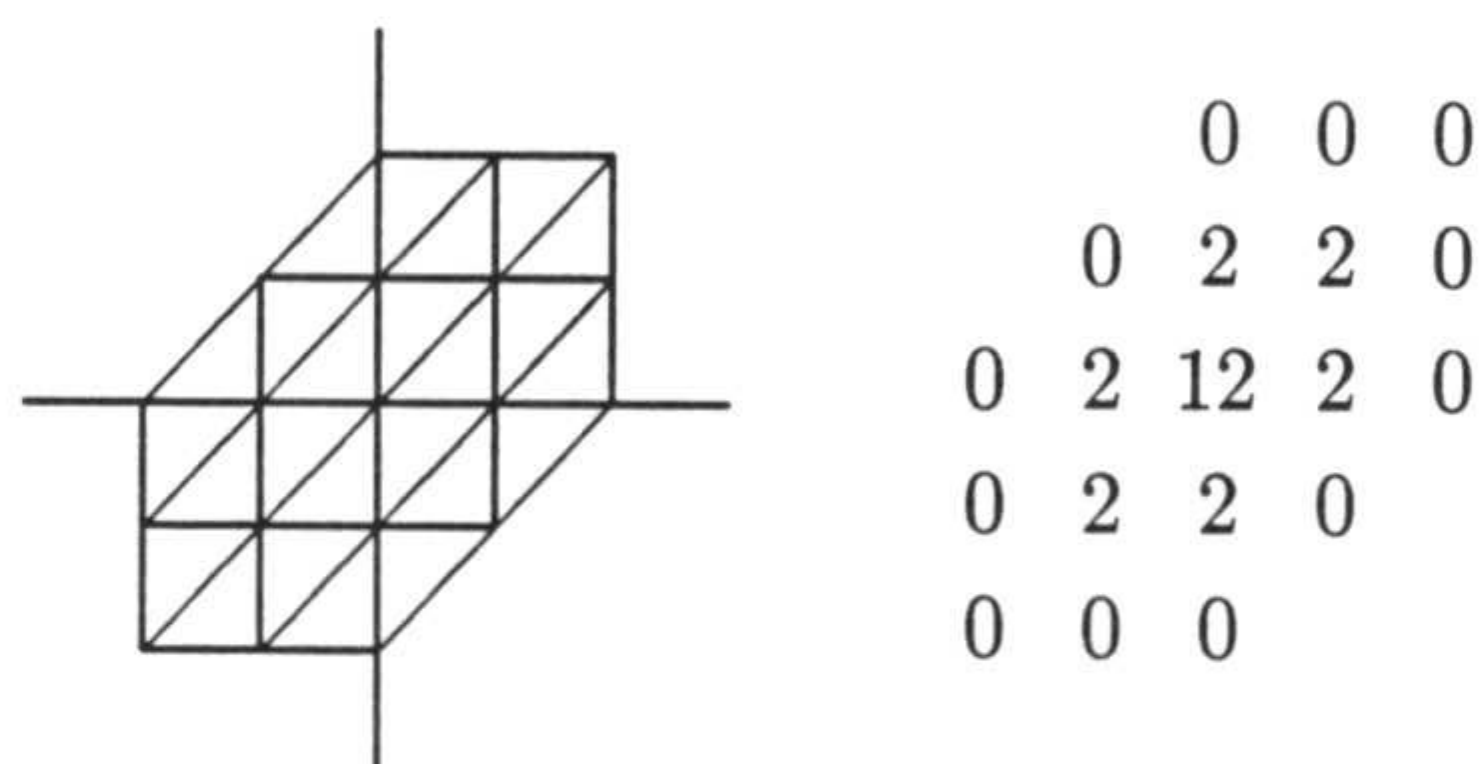


Figura 4.1: Soporte de B_2 y valores en $H_2 \cap \mathbb{Z}^2$ de $24B_2$.

En la fig. 4.1 se muestran el soporte de B_2 y los valores en $H_2 \cap \mathbb{Z}^2$ de $24B_2$; a continuación indicamos los B-coeficientes de $24B_2$ en los triángulos de su soporte que determinan la región de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(2, 2)$ ([51]):

							0				
							0	0			
							0	0	0		
							0	0	0	0	
						2	1	0	0	0	0
					4	3	1	0	0	0	0
				8	6	4	1	0	0	0	0
			12	6	3	10	1	0	0	0	0
		12	12	8	4	2	0	0	0	0	0

Los B-coeficientes sobre las restantes regiones triangulares determinadas por el centro del hexágono y sus aristas frontera se obtienen *girando* los mostrados anteriormente, proceso cuyo resultado indicamos a continuación en lo que se refiere a la

región de vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 2)$:

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
2	3	4	10	2	1	0	0	0
4	6	3	4	3	1	0	0	0
8	6	8	6	4	1	0	0	0
12	12	6	3	10	1	0	0	0
12	12	8	4	2	0	0	0	0

La función que tiene los B-coeficientes antes citados también es cuártica a trozos de clase dos, pero sus trasladadas enteras no constituyen una partición de la unidad. La normalización lograda al dividir por 24 es lo que hace que la familia $\{B_2(\bullet - i) : i \in \mathbb{Z}^2\}$ lo sea, es decir, que $\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} B_2(\bullet - i) = 1$.

Sea

$$H_1 = \frac{1}{2}H_2 = [\{(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1)\}]$$

Consideremos aquellos índices, i , tales que el soporte de la trasladada $B_2(\bullet - i)$ del box-spline B_2 tiene intersección con H_1 no reducida a un conjunto de medida nula, y formemos con ellos el conjunto I_2 . Se cumple que $I_2 = H_2 \cap \mathbb{Z}^2$ (ver fig. 4.2).

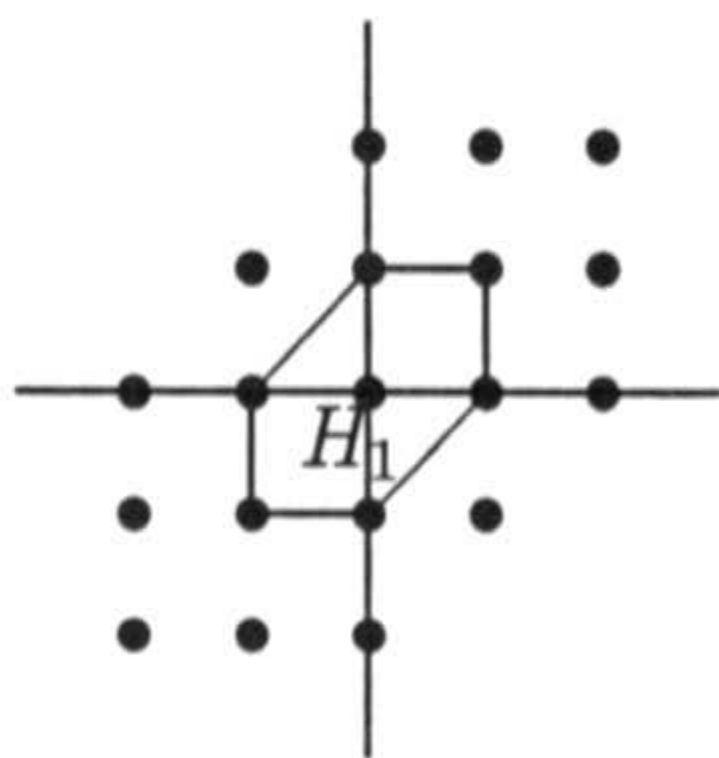


Figura 4.2: Los 19 puntos de I_2 .

La familia $\{B_2(\bullet - i) : i \in I_2\}$ es linealmente independiente. Si $\{f_{\frac{i}{2}} : j \in I_2\}$ es un conjunto cualquiera de escalares, existirá una única función

$$S = \sum_{i \in I_2} \gamma_i B_2(\bullet - i)$$

tal que $S\left(\frac{j}{2}\right) = f_{\frac{j}{2}}$ si y sólo si la matriz $\left[B_2\left(\frac{j}{2} - i\right)\right]_{(i,j) \in I_2^2} = \left[B_2\left(i - \frac{j}{2}\right)\right]_{(i,j) \in I_2^2}$ es invertible. Pero no disponemos de un análogo bivariado del teorema de Schoenberg-Whitney que proporcione un criterio de invertibilidad de la matriz $\left[B_2\left(i - \frac{j}{2}\right)\right]_{(i,j) \in I_2^2}$.

Por otra parte, el problema lagrangiano propuesto equivale al que consiste en encontrar

$$q_2 = \sum_{j \in I_2} \gamma_j B_2\left(\bullet - \frac{j}{2}\right) \quad (4.2.1)$$

tal que

$$q_2(i) = \delta_{0,i} \quad i \in I_2 \quad (4.2.2)$$

Entonces, existirá un único spline de Lagrange de la forma (4.2.1) si y sólo si la matriz $\left[B_2\left(i - \frac{j}{2}\right)\right]_{(i,j) \in I_2^2}$ es invertible.

Aunque el cálculo de esta matriz es laborioso, se puede aprovechar la estructura *periódica* de los valores de B_2 en los puntos de $I_2 = H_2 \cap \mathbb{Z}^2$ para simplificarlo. Los valores de $24B_2$ aparecen en la fig. 4.1. Para hallar sus valores en los puntos de $\frac{1}{2}I_2 - I_2$ utilizamos el algoritmo de subdivisión para box-splines ([6], [8], [18], [43], [44]). Sea C_2 el box-spline centrado en $(2, 2)$; se cumple la igualdad

$$C_2(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} b_\alpha C_2(2x - \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

donde los coeficientes $\{b_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^2}$ dan lugar al polinomio

$$b(u, v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} b_\alpha u^{\alpha_1} v^{\alpha_2}$$

definido por

$$b(u, v) = 2^{-4} (u+1)^2 (v+1)^2 (uv+1)^2$$

En definitiva,

$$\begin{aligned} 2^4 b(u, v) = & 1 + 2u + u^2 + 2v + 6uv + 6u^2v + 2u^3v + v^2 + \\ & 6uv^2 + 10u^2v^2 + 6u^3v^2 + u^4v^2 + 2uv^3 + \\ & 6u^2v^3 + 6u^3v^3 + 2u^4v^3 + u^2v^4 + 2u^3v^4 + u^4v^4 \end{aligned}$$

y los coeficientes b_α no nulos son los siguientes:

$$\begin{aligned} b_{(0,0)} &= \frac{1}{16} & b_{(1,0)} &= \frac{1}{8} & b_{(2,0)} &= \frac{1}{16} & b_{(0,1)} &= \frac{1}{8} & b_{(1,1)} &= \frac{3}{8} & b_{(2,1)} &= \frac{3}{8} \\ b_{(3,1)} &= \frac{1}{8} & b_{(0,2)} &= \frac{1}{16} & b_{(1,2)} &= \frac{3}{8} & b_{(2,2)} &= \frac{5}{8} & b_{(3,2)} &= \frac{3}{8} & b_{(4,2)} &= \frac{1}{16} \\ b_{(1,3)} &= \frac{1}{8} & b_{(2,3)} &= \frac{3}{8} & b_{(3,3)} &= \frac{3}{8} & b_{(4,3)} &= \frac{1}{8} & b_{(2,4)} &= \frac{1}{16} & b_{(3,4)} &= \frac{1}{8} \\ b_{(4,4)} &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Así pues, si \overline{C}_2 representa la función box-spline cuártica a trozos, de clase dos, centrada $(1, 1)$ y basada en la red tridireccional del plano engendrada por las direcciones $\frac{1}{2}e_i$, $1 \leq i \leq 3$, escribimos

$$C_2(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} b_\alpha C_2(2x - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} b_\alpha \overline{C}_2\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)$$

y se cumple que

$$\begin{aligned} 2^4 C_2 &= \overline{C}_2(\bullet) + \overline{C}_2(\bullet - (1, 0)) + \overline{C}_2(\bullet - (2, 1)) + \\ &\quad \overline{C}_2(\bullet - (2, 2)) + \overline{C}_2(\bullet - (1, 2)) + \overline{C}_2(\bullet - (0, 1)) + \\ &\quad 2\left(\overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(2, \frac{3}{2}\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. \overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, 2\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right)\right) + \\ &\quad 6\left(\overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(1, \frac{1}{2}\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, 1\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. \overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(1, \frac{3}{2}\right)\right) + \overline{C}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)\right) + \\ &\quad 10\overline{C}_2(\bullet - (1, 1)) \end{aligned}$$

La estructura de esta combinación lineal se mantiene si consideramos el box-spline centrado en el origen, B_2 , y el box-spline cuártico a trozos, de clase dos, centrado también en el origen y basado en la subred tridireccional del plano engendrada por las direcciones $\frac{1}{2}e_i$, $1 \leq i \leq 3$, \overline{B}_2 , pero los índices de traslación son los del conjunto $\frac{1}{2}I_2$, es decir,

$$\begin{aligned} 2^4 B_2 &= \overline{B}_2(\bullet - (-1, -1)) + \overline{B}_2(\bullet - (0, -1)) + \overline{B}_2(\bullet - (1, 0)) + \\ &\quad \overline{B}_2(\bullet - (1, 1)) + \overline{B}_2(\bullet - (0, 1)) + \overline{B}_2(\bullet - (-1, 0)) + \\ &\quad 2\left(\overline{B}_2\left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, -1\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(1, \frac{1}{2}\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. \overline{B}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(-1, -\frac{1}{2}\right)\right)\right) + \\ &\quad 6\left(\overline{B}_2\left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(0, -\frac{1}{2}\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. \overline{B}_2\left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) + \overline{B}_2\left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right)\right) + 10\overline{B}_2 \end{aligned}$$

En la fig. 4.3 se esquematizan los datos de la igualdad anterior. Con ésta se calculan los valores de B_2 en $I_2 - \frac{1}{2}I_2$, que se muestran junto con los de B_2 en I_2 en la fig. 4.4.

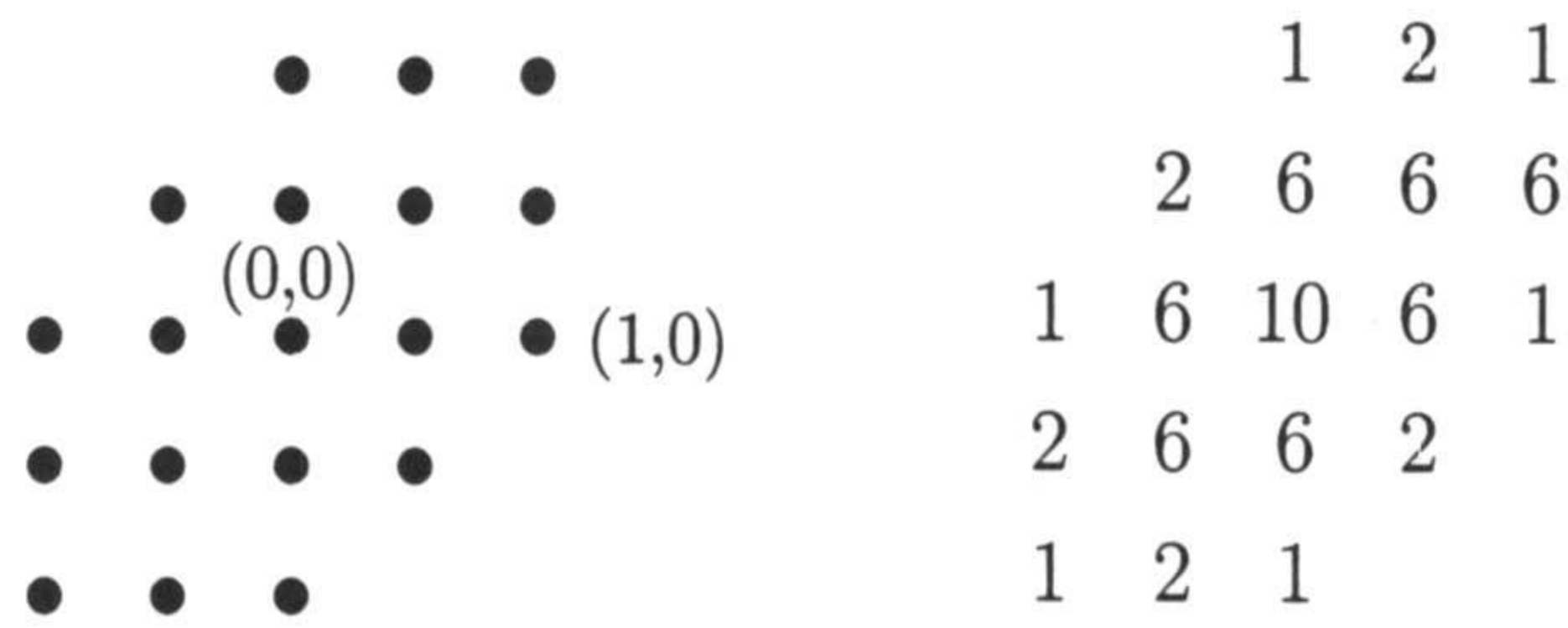


Figura 4.3: Centros de las funciones trasladadas de \overline{B}_2 y sus coeficientes en la combinación lineal que expresa $2^4 B_2$ en términos de dichas trasladadas.

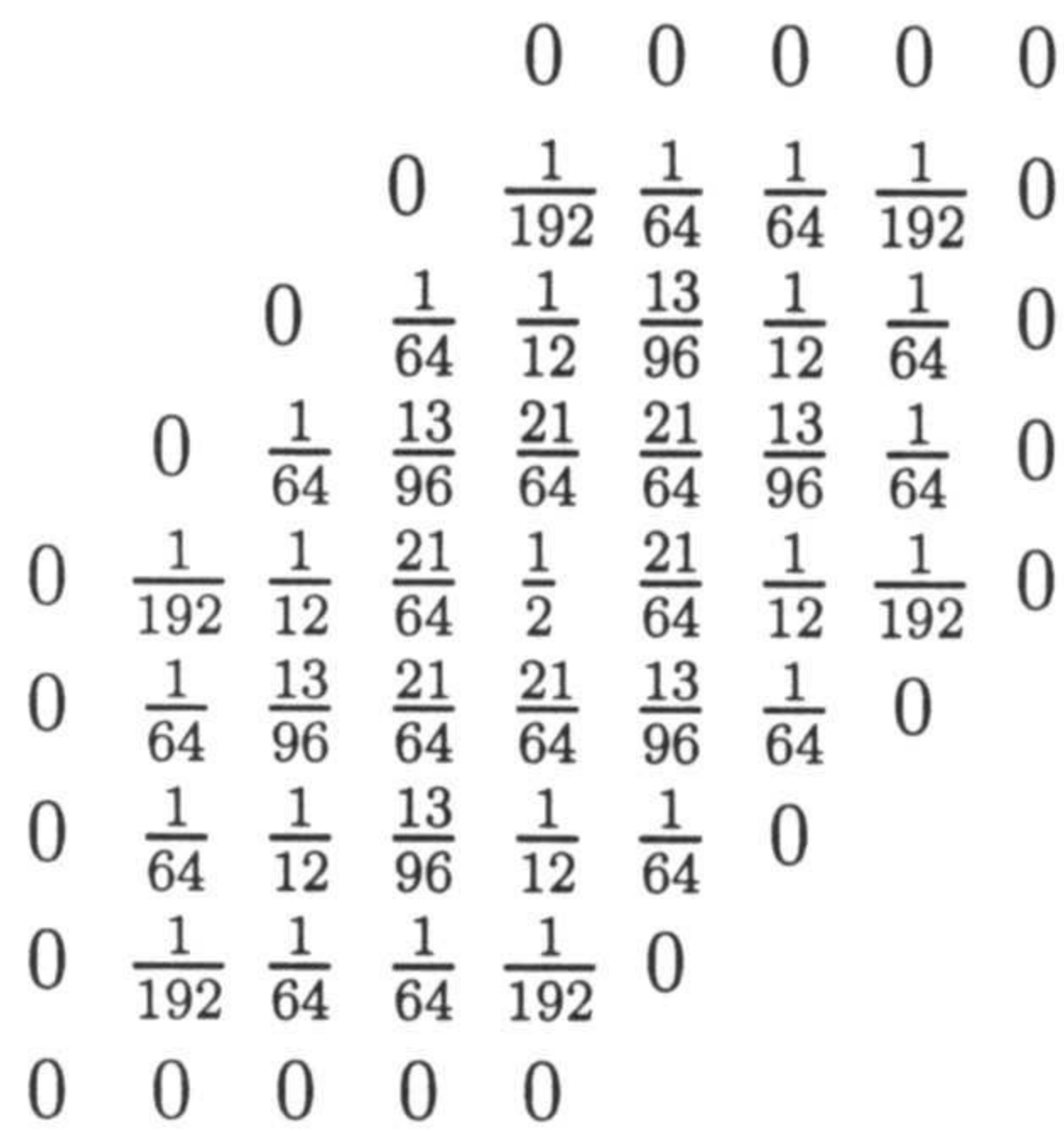


Figura 4.4: Valores de B_2 en $\frac{1}{2}I_2$.

Numeramos los puntos de I_2 en la forma indicada en la fig. 4.5, elegida para que a $(0,0)$ le corresponda el valor central. A partir de la igualdad (4.2.1) formamos la

matriz $192 \left[B_2 \left(i - \frac{j}{2} \right) \right]_{(i,j) \in I_2^2}$, obteniendo

16	3	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	26	16	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	3	16	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	1	0	26	3	0	0	16	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
96	63	16	63	63	26	3	16	26	16	3	0	3	3	1	0	0	0	0
16	63	96	3	26	63	63	0	3	16	26	16	0	1	3	3	0	0	0
0	1	16	0	0	3	26	0	0	0	3	16	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	3	0	0	0	16	1	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
16	3	0	63	26	3	0	96	63	16	1	0	63	26	3	0	16	3	0
16	26	16	26	63	63	26	16	63	96	63	16	26	63	63	26	16	26	16
0	3	16	0	3	26	63	0	1	16	63	96	0	3	26	63	0	3	16
0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	16	0	0	0	3	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	16	3	0	0	0	26	3	0	0	16	1	0
0	0	0	3	3	1	0	16	26	16	3	0	63	63	26	3	96	63	16
0	0	0	0	1	3	3	0	3	16	26	16	3	26	63	63	16	63	96
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	16	0	0	3	26	0	1	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	16	3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	3	1	16	26	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0	3	16

El determinante de $\left[B_2 \left(i - \frac{j}{2} \right) \right]_{(i,j) \in I_2^2}$ es igual a $\frac{1}{205\,195\,258\,022\,068\,224}$ y la matriz es invertible. El sistema lineal asociado al problema (4.2.1)-(4.2.2) tiene una única solución, $(\gamma_j)_{j \in I_2}$, que, con la numeración escogida, se escribe como

$$\frac{1}{36} (-1, 8, -1, 8, -32, -32, 8, -1, -32, 186, -32, -1, 8, -32, -32, 8, -1, 8, -1)$$

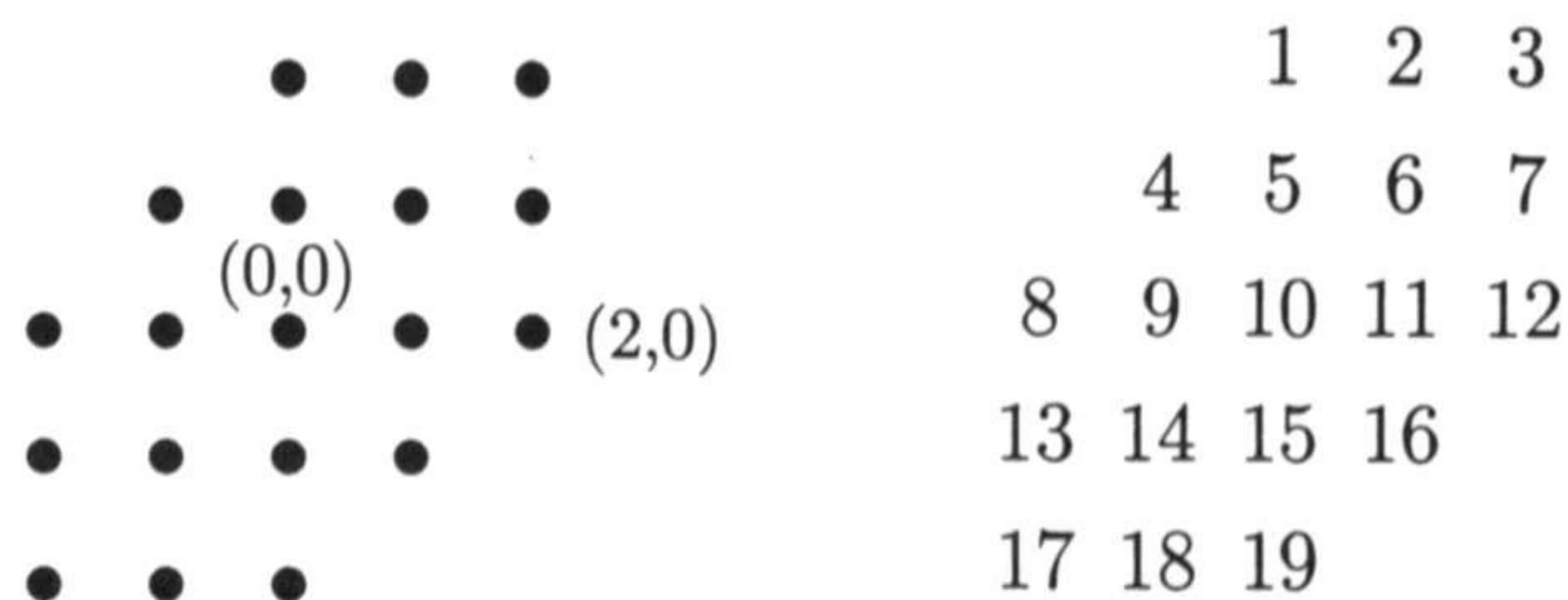


Figura 4.5: Puntos de I_2 y numeración asociada.

conjunto de medida no nula. Con un método similar al empleado anteriormente, el problema consistente en encontrar un spline del tipo

$$q_3 = \sum_{j \in I_3} \gamma_j B_3 \left(\bullet - \frac{j}{2} \right)$$

tal que

$$q_3(i) = \delta_{0,i} \quad i \in \mathbb{Z}^2$$

conduce a un sistema lineal de orden 61 (que puede ser reducido a uno de orden 9 haciendo uso de las simetrías de B_3 e I_3), para lo que se emplea una numeración de los puntos de I_3 similar a la utilizada con I_2 . En la fig. 4.7 se muestran los 9 coeficientes γ_j que proporcionan los valores de la totalidad de los de la combinación lineal a la que es igual q_3 . Los restantes se obtienen aplicando las permutaciones inducidas por los seis giros de la red tridireccional equilátera.

(4,4)	$\gamma_{0,0}$
(3,3) (4,3)	$\gamma_{3,0} \quad \gamma_{4,1}$
(2,2) (3,2) (4,2)	$\gamma_{2,0} \quad \gamma_{3,1} \quad \underline{\gamma_{4,2}}$
(1,1) (2,1) (3,1) (4,1)	$\gamma_{1,0} \quad \underline{\gamma_{2,1}} \quad \underline{\gamma_{3,1}} \quad \underline{\gamma_{4,1}}$
(0,0) (1,0) (2,0) (3,0) (4,0)	$\underline{\gamma_{0,0}} \quad \underline{\gamma_{1,0}} \quad \underline{\gamma_{2,0}} \quad \underline{\gamma_{3,0}} \quad \underline{\gamma_{4,0}}$

Figura 4.7: Parámetros que determinan los coeficientes de la combinación lineal que proporciona q_3 .

Como es necesario calcular los valores de B_3 sobre $\frac{1}{2}I_3$, empleamos de nuevo el algoritmo de subdivisión, encontrando que

$$\begin{aligned}
 2^7 B_3 &= 56 \bar{B}_3(\bullet) + \\
 &39 \left(\bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(0, \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \left. \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(0, -\frac{1}{2} \right) \right) \right) + \\
 &12 \left(\bar{B}_3(\bullet - (1, 0)) + \bar{B}_3(\bullet - (1, 1)) + \bar{B}_3(\bullet - (0, 1)) + \right. \\
 &\quad \left. \bar{B}_3(\bullet - (-1, 0)) + \bar{B}_3(\bullet - (-1, -1)) + \bar{B}_3(\bullet - (0, -1)) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 18 \left(\bar{B}_3 \left(\bullet - \left(1, \frac{1}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-1, -\frac{1}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, -1 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right) \right) + \\
& \left(\bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, 0 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(0, \frac{3}{2} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(0, -\frac{3}{2} \right) \right) \right) + \\
& 3 \left(\bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{3}{2}, 1 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(1, \frac{3}{2} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, 1 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-1, \frac{1}{2} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{3}{2}, -1 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-1, -\frac{3}{2} \right) \right) \right) + \\
& \quad \left. \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(\frac{1}{2}, -1 \right) \right) + \bar{B}_3 \left(\bullet - \left(1, -\frac{1}{2} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Los coeficientes son los que aparecen cuando se desarrolla la expresión polinómica $2^{-7} (u+1)^3 (v+1)^3 (uv+1)^3$, y se representan en la fig. 4.8.

			1	3	3	1		
			3	12	18	12	3	
		3	18	39	39	18	3	
	1	12	39	56	39	12	1	
	3	18	39	39	18	3		
	3	12	18	12	3			
	1	3	3	1				

Figura 4.8: Los coeficientes de la expresión que da la subdivisión de $2^7 B_3$.

Los valores de $2^7 840 B_3$ se hallan, mediante las permutaciones inducidas por los giros de la red equilátera, a partir de los que se muestran en la fig. 4.9.

Resolviendo el sistema resultante para el problema planteado, encontramos los

						0
					1	0
			128	8		0
		2061	440	19		0
	11008	3358	640	19		0
	27506	15026	3358	440	8	0
36864	27506	11008	2061	128	1	0

Figura 4.9: Valores de $2^7 840 B_3$ en $\frac{1}{2} I_3$.

siguientes valores de los parámetros:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{0,0} &= \frac{401156792819892365}{19370503527482936} & \gamma_{1,0} &= -\frac{11003765481180568}{2421312940935367} \\
 \gamma_{2,0} &= \frac{6528320768844515}{4842625881870734} & \gamma_{2,1} &= \frac{333733972535792}{2421312940935367} \\
 \gamma_{3,0} &= -\frac{31562851131128}{2421312940935367} & \gamma_{3,1} &= -\frac{435903627888216}{2421312940935367} \\
 \gamma_{4,0} &= -\frac{4937307311025}{38741007054965872} & \gamma_{4,1} &= \frac{4441331851208}{2421312940935367} \\
 \gamma_{4,2} &= \frac{165388571275765}{19370503527482936} & &
 \end{aligned}$$

Queda de manifiesto que la aproximación que hemos adoptado para resolver el problema propuesto está lejos de producir un resultado general, en el sentido de que es preciso construir la matriz para, a posteriori, determinar si es regular. Por tanto, vamos a abordar el problema (4.2.1)-(4.2.2), para un box-spline que definiremos posteriormente, mediante una técnica similar a la del primer capítulo, aprovechando que toda la información necesaria sobre el box-spline estará contenida en su transformada de Fourier.

4.3 El problema de interpolación en el caso general

Sean a , b y c números naturales, y e_i , $1 \leq i \leq 3$, las direcciones que generan la red tridireccional regular del plano. Comenzamos definiendo la función a partir de la cual plantearemos el problema de construcción del spline de Lagrange ([6], [8], [44]). Con los elementos de la lista

$$\overbrace{e_1, \dots, e_1}^a, \overbrace{e_2, \dots, e_2}^b, \overbrace{e_3, \dots, e_3}^c,$$

formemos el conjunto $X_{a,b,c}$ y notemos aquéllos por x_i , $1 \leq i \leq a + b + c$.

Definición 4.3.1 *Llamaremos box-spline bivariado, centrado en el origen y de direcciones*

$$\overbrace{e_1, \dots, e_1}^a, \overbrace{e_2, \dots, e_2}^b, \overbrace{e_3, \dots, e_3}^c,$$

y lo notaremos $B_{a,b,c}$, a la distribución definida por

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) B_{a,b,c}(x, y) dx dy = \iint_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{a+b+c}} f\left(\sum_{i=1}^{a+b+c} t_i x_i\right) dt_1 \dots dt_{a+b+c}$$

(4.3.1)

donde $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ es el conjunto de las funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ de soporte compacto.

A continuación resumimos algunas de las propiedades de $B_{a,b,c}$.

Proposición 4.3.2 *El box-spline $B_{a,b,c}$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *Es una función polinómica a trozos sobre la triangulación producida por la red tridireccional del plano, de grado $a + b + c - 2$.*
2. *Es de clase $C^r(X_{a,b,c})(\mathbb{R}^2)$, donde*

$$r(X_{a,b,c}) = \min \left\{ \text{card } Y : Y \subset X_{a,b,c}, \langle X_{a,b,c} \setminus Y \rangle \neq \mathbb{R}^2 \right\} - 2$$

representando $\langle S \rangle$ el subespacio de \mathbb{R}^2 engendrado por su subconjunto S .

3. Su soporte es el trasladado del conjunto

$$[X_{a,b,c}] = [\{(0, 0), (a, 0), (a + c, c), (a + c, a + c), (c, b + c), (0, b)\}]$$

en la dirección $-\frac{1}{2}(a + c, b + c)$.

4. Es una función no negativa en su soporte.

5. La familia $\{B_{a,b,c}(\bullet - i) : i \in \mathbb{Z}^2\}$ forma una partición de la unidad.

6. Si definimos la función seno cardinal mediante la igualdad

$$\text{sinc } x = \frac{\text{sen } \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}},$$

entonces la transformada de Fourier de $B_{a,b,c}$ es

$$\widehat{B}_{a,b,c}(u, v) = (\text{sinc } u)^a (\text{sinc } v)^b (\text{sinc } (u + v))^c$$

Si $a = b = c = k + 1$, $k \geq 1$, notaremos $B_{a,b,c} = B_{k+1}$. Será una función de clase $C^{2k}(\mathbb{R}^2)$, polinómica a trozos de grado $3k + 1$ y su soporte será el hexágono $H_{k+1} = (k + 1)H_1$.

Definamos, para cualesquiera enteros no negativos a, b y c , la función

$$\sigma_{a,b,c}(u, v) = \left(2 \text{sen } \frac{u}{2}\right)^a \left(2 \text{sen } \frac{v}{2}\right)^b \left(2 \text{sen } \frac{u + v}{2}\right)^c$$

y notémosla σ_r si $a = b = c = r$.

Sea $I_{k+1} = H_{2k} \cap \mathbb{Z}^2$. Este conjunto está formado por aquellos índices i tales que la trasladada $B_{k+1}(\bullet - i)$ del box-spline B_{k+1} tiene soporte cuya intersección con H_{2k} es un conjunto de medida no nula. Está formado por un total de $12k^2 + 6k + 1$ elementos.

Nos planteamos estudiar la existencia y unicidad de una función de la forma

$$q_{k+1} = \sum_{j \in I_{k+1}} \gamma_j B_{k+1}\left(\bullet - \frac{j}{2}\right) \quad (4.3.2)$$

tal que

$$q_{k+1}(i) = \delta_{0,i}, \quad i \in \mathbb{Z}^2 \quad (4.3.3)$$

De existir, su soporte sería el hexágono H_{2k+1} . Además, daría lugar al operador de interpolación de Lagrange definido por

$$\mathcal{L}f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} f(\alpha) q_{k+1}(\bullet - \alpha)$$

El método empleado en la sección anterior produciría un sistema lineal de orden $12k^2 + 6k + 1$, reducible a uno de orden $(k+1)^2$ si se tienen en cuenta a priori las simetrías ya comentadas. No parece posible afirmar que, para cualquier $k \geq 1$, el sistema para los coeficientes γ_j admita solución única.

4.4 Reducción del problema vía transformada de Fourier

Vamos a formalizar un método de trabajo para el problema (4.3.2)-(4.3.3) que siga la idea del empleado en el capítulo primero, es decir, que emplee la transformada de Fourier del box-spline definido.

El conjunto de índices I_{k+1} es la unión de $2k+1$ subconjuntos disjuntos, $I_{k+1,0} = \{(0,0)\}$ e $I_{k+1,i} = I_{k+1} \cap \Gamma(H_i)$, $1 \leq i \leq k$, donde $\Gamma(H_i)$ denota la frontera del hexágono $H_i = iH_1$ (cf. fig. 4.10).

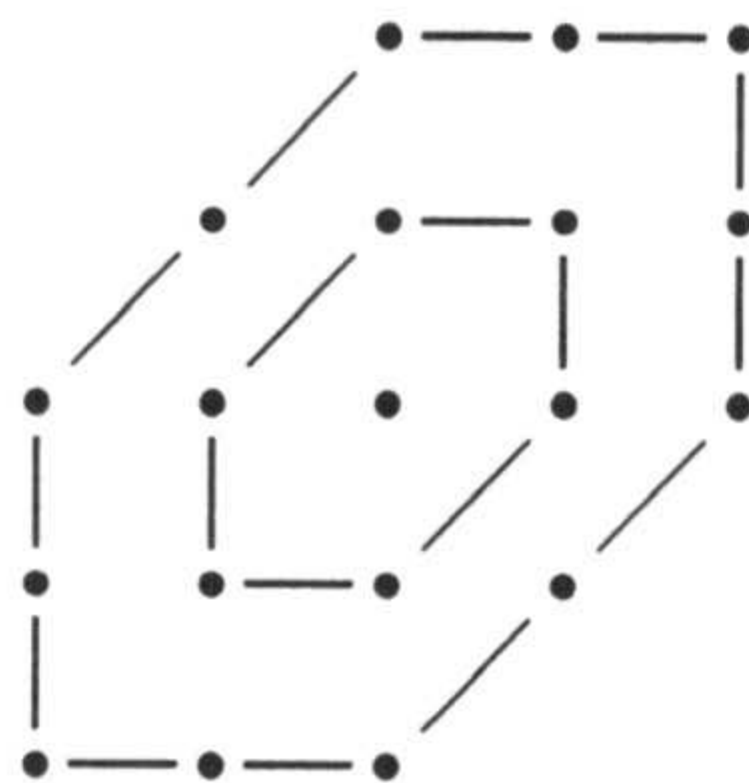


Figura 4.10: Los tres subconjuntos $I_{k+1,i}$ para $k = 1$.

Las simetrías de B_{k+1} , I_{k+1} y de la estructura a que dan lugar los coeficientes que intervienen en la subdivisión de B_{k+1} hacen que los $12k^2 + 6k + 1$ coeficientes γ_j , $j \in I_{k+1}$, que aparecen en (4.3.2) se puedan escribir en términos de $(k+1)^2$ de ellos, como se ilustra en la fig. 4.11.

Los coeficientes γ_j con j en $I_{k+1,2m+1}$, $0 \leq m \leq 2k-1$, se expresan a partir de $m+1$ de ellos prefijados, mientras que los de $I_{k+1,2m}$, $0 \leq m \leq k$, se reducen a otros $m+1$ parámetros, hecho que se refleja en la fig. 4.12 en un caso particular, que indica

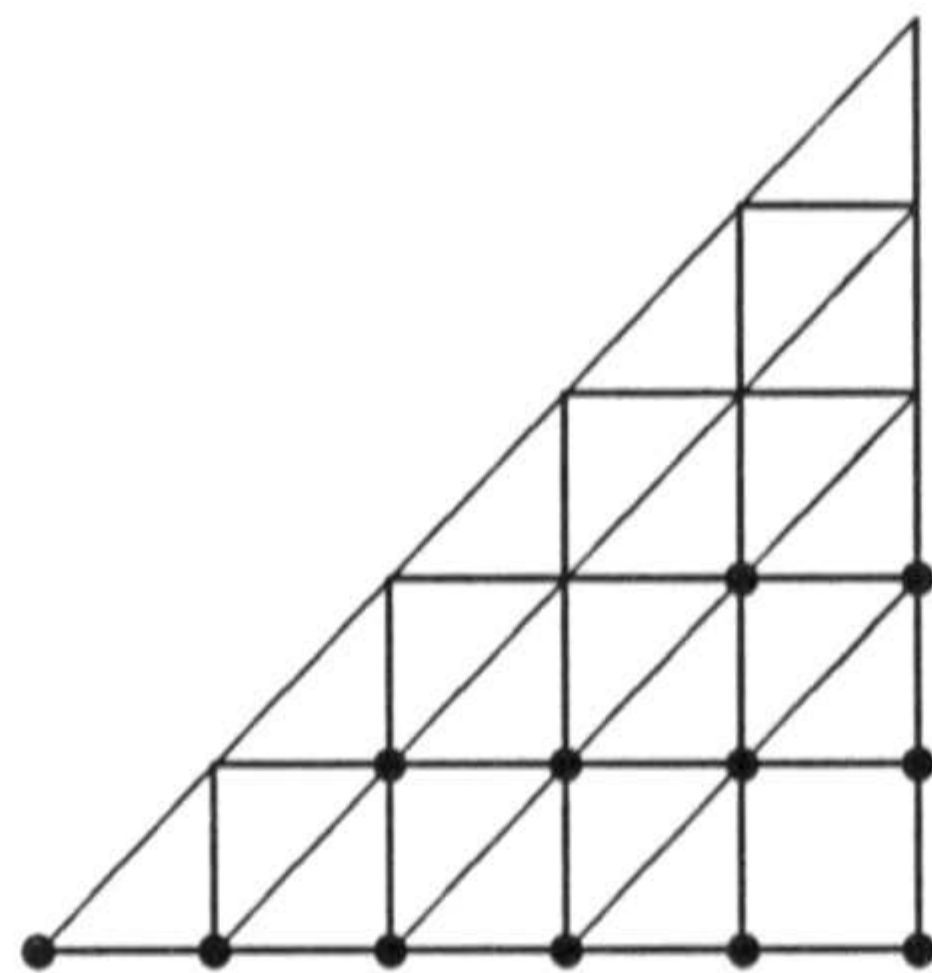


Figura 4.11: Los puntos marcados con • corresponden a los γ_j elegidos como parámetros.

cuáles son precisamente los parámetros elegidos en cada uno de los subconjuntos en que se divide I_k .

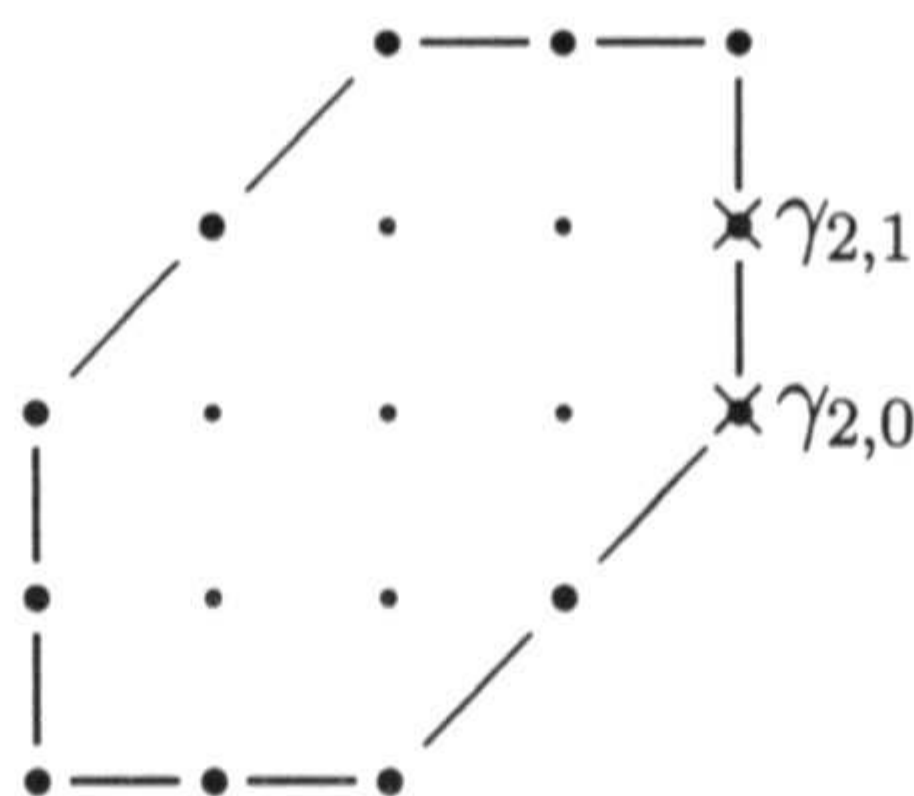


Figura 4.12: Los 12 coeficientes γ_j , $j \in I_{2,2}$, se reducen a dos, marcados con \times : $\gamma_{2,2} = \gamma_{0,2} = \gamma_{-2,0} = \gamma_{-2,-2} = \gamma_{0,-2} = \gamma_{2,0}$ y $\gamma_{1,2} = \gamma_{1,-1} = \gamma_{-2,-1} = \gamma_{-1,-2} = \gamma_{1,-1} = \gamma_{2,1}$.

Cada parámetro fijado en $I_{k+1,2m+1}$, $0 \leq m \leq 2k$, y los que están relacionados con él forman un subconjunto de $I_{k+1,2m+1}$. Como hay $m + 1$ parámetros en $I_{k+1,2m+1}$, este conjunto es la unión de $m + 1$ subconjuntos disjuntos, $I_{k+1,2m+1,n}$, $0 \leq n \leq m$. Lo mismo sucede con cada uno de los subconjuntos $I_{k+1,2m}$, $0 \leq m \leq k$; es decir, es la unión de otros $m + 1$ subconjuntos disjuntos, que notaremos $I_{k+1,2m,n}$, $0 \leq n \leq m$. El parámetro común a la lista $I_{k+1,r,n}$ se notará $\gamma_{k+1,r,n}$. Con esta partición del conjunto I_{k+1} podemos calcular la transformada de Fourier de q_{k+1} ,

$$\hat{q}_{k+1}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(u,v) \cdot (x,y)} q_{k+1}(x, y) dx dy$$

Sea $z = (u, v)$. Como para cada j de \mathbb{Z}^2 la transformada de Fourier de $B_{k+1}(\bullet - \frac{j}{2})$

es $e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} \widehat{B}_{k+1}(\bullet)$, se tiene que

$$\widehat{q}_{k+1}(z) = \left(\sum_{j \in I_{k+1}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} \right) \widehat{B}_{k+1}(z) \quad (4.4.1)$$

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_{k+1}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} &= \sum_{n=0}^{2k} \sum_{j \in I_{k+1,n}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} \\ &= \gamma_{k+1,0,0} + \sum_{m=1}^k \sum_{j \in I_{k+1,2m}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} + \sum_{m=1}^k \sum_{j \in I_{k+1,2m-1}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} \\ &= \gamma_{k+1,0,0} + \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \sum_{j \in I_{k+1,2m,n}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} + \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{j \in I_{k+1,2m-1,n}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} \end{aligned}$$

lo que da lugar a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_{k+1}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} &= \gamma_{k+1,0,0} + \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in I_{k+1,2m,n}} e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} + \\ &\quad \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in I_{k+1,2m-1,n}} e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Los conjuntos $I_{k+1,2m,n}$, $0 \leq n \leq m$, e $I_{k+1,2m-1,n}$, $0 \leq n \leq m-1$, son simétricos respecto de $(0,0)$. Por tanto, la suma de los términos correspondientes a j y $-j$ en cada una de las sumas de (4.4.2) se reduce a

$$e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} + e^{i\frac{z \cdot j}{2}} = 2 \cos \frac{z \cdot j}{2}$$

Sea $J_{k+1,r,n}$ el subconjunto de $I_{k+1,r,n}$ tal que

$$I_{k+1,r,n} = J_{k+1,r,n} \cup (-J_{k+1,r,n})$$

donde

$$-J_{k+1,r,n} = \{-j : j \in J_{k+1,r,n}\}$$

Entonces, (4.4.2) se convierte en

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_{k+1}} \gamma_j e^{-i\frac{z \cdot j}{2}} &= \gamma_{k+1,0,0} + 2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}} \cos \frac{z \cdot j}{2} + \\ &\quad 2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}} \cos \frac{z \cdot j}{2} \end{aligned}$$

y, por (4.4.1) y 6 de la proposición 4.3.2, podemos enunciar el siguiente resultado:

Lema 4.4.1 *La transformada de Fourier de q_{k+1} es*

$$\widehat{q}_{k+1}(u, v) = \left[\begin{aligned} &\gamma_{k+1,0,0} + 2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}} \cos \frac{z \cdot j}{2} + \\ &2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}} \cos \frac{z \cdot j}{2} \end{aligned} \right] \cdot (\text{sinc}(u) \cdot \text{sinc}(v) \cdot \text{sinc}(u+v))^{k+1}$$

Sea $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{Z}^2$. Supongamos que j es un elemento de $J_{k+1,2m,n}$. La expresión $(-1)^{\nu \cdot j}$ toma los siguientes cuatro valores, dependiendo de j : 1 , $(-1)^{\nu_1}$, $(-1)^{\nu_2}$ o $(-1)^{\nu_1 + \nu_2}$. Sin embargo, si j pertenece a $J_{k+1,2m-1,n}$, sólo hay tres posibles: $(-1)^{\nu_1}$, $(-1)^{\nu_2}$ o $(-1)^{\nu_1 + \nu_2}$. Definamos, pues los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} J_{k+1,2m,n}^\alpha &= \{j \in J_{k+1,2m,n} : (-1)^{j \cdot \nu} = (-1)^{\nu \cdot \alpha}\} \\ \alpha &\in \Delta_1 = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\} \\ J_{k+1,2m-1,n}^\alpha &= \{j \in J_{k+1,2m-1,n} : (-1)^{j \cdot \nu} = (-1)^{\nu \cdot \alpha}\} \\ \alpha &\in \Delta_2 = \Delta_1 \setminus \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

Se cumple que

$$J_{k+1,2m,n} = \bigcup_{\alpha \in \Delta_1} J_{k+1,2m,n}^\alpha, \quad J_{k+1,2m-1,n} = \bigcup_{\alpha \in \Delta_2} J_{k+1,2m-1,n}^\alpha$$

Por el lema 4.4.1, $\widehat{q}_{k+1}(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2)$ es igual a

$$\left(\left(\frac{\text{sen} \left(\frac{u}{2} + \pi\nu_1 \right)}{\frac{u+2\pi\nu_1}{2}} \right) \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{v}{2} + \pi\nu_2 \right)}{\frac{v+2\pi\nu_2}{2}} \right) \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{u+v}{2} + \pi(\nu_1 + \nu_2) \right)}{\frac{u+v+2\pi\nu_1+2\pi\nu_2}{2}} \right) \right)^{k+1} \cdot \left[\begin{aligned} &2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}} \cos \frac{(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2) \cdot j}{2} + \\ &2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}} \cos \frac{(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2) \cdot j}{2} + \gamma_{k+1,0,0} \end{aligned} \right]$$

expresión que se reduce a

$$\left(\left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{u + 2\pi\nu_1} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{v}{2}}{v + 2\pi\nu_2} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2}}{u + v + 2\pi\nu_1 + 2\pi\nu_2} \right) \right)^{k+1} \cdot \left[2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}} (-1)^{\nu \cdot j} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + 2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}} (-1)^{\nu \cdot j} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + \gamma_{k+1,0,0} \right]$$

Empleando los subconjuntos $J_{k+1,2m,n}^\alpha$ y $J_{k+1,2m-1,n}^\alpha$ definidos anteriormente, se convierte en

$$\left(\left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{u}{2}}{u + 2\pi\nu_1} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{v}{2}}{v + 2\pi\nu_2} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2}}{u + v + 2\pi\nu_1 + 2\pi\nu_2} \right) \right)^{k+1} \cdot \left[2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}^\alpha} (-1)^{\nu \cdot \alpha} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + 2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{\alpha \in \Delta_2} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}^\alpha} (-1)^{\nu \cdot \alpha} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + \gamma_{k+1,0,0} \right]$$

expresión que reescribimos de la siguiente forma:

$$\frac{\sigma_{k+1}(u, v)}{(u + 2\pi\nu_1)^{k+1} (v + 2\pi\nu_2)^{k+1} (u + v + 2\pi\nu_1 + 2\pi\nu_2)^{k+1}} \cdot \left\{ \left[\gamma_{k+1,0,0} + 2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}^{(0,0)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} \right] + 2(-1)^{\nu_1} \left[\sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}^{(1,0)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}^{(1,0)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} \right] + \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & 2(-1)^{\nu_2} \left[\sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}^{(0,1)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + \right. \\
 & \left. \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}^{(0,1)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} \right] + \\
 & 2(-1)^{\nu_1+\nu_2} \left[\sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}^{(1,1)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + \right. \\
 & \left. \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}^{(1,1)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} \right] \Bigg\}
 \end{aligned}$$

A partir de esta expresión enunciamos el siguiente resultado:

Lema 4.4.2 Para cada α de Δ_1 sea

$$\rho_{k+1}^\alpha(u, v) = \sigma_{k+1}(u, v) \tau_{k+1}^\alpha(u, v)$$

donde τ_{k+1}^α denota la función correspondiente a la elección $a = b = c = k + 1$ en la definida, de forma general y para valores no negativos, por

$$\tau_{a,b,c}^\alpha(u, v) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \frac{(-1)^{\nu \cdot \alpha}}{(u + 2\pi\nu_1)^a (v + 2\pi\nu_2)^b (u + v + 2\pi\nu_1 + 2\pi\nu_2)^c}$$

Asimismo, sean

$$A_{k+1}^{(0,0)}(u, v) = \gamma_{k+1,0,0} + 2 \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}^{(0,0)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2}$$

y, para cada α de Δ_2 ,

$$\begin{aligned}
 A_{k+1}^\alpha(u, v) = 2 \left[\sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^m \gamma_{k+1,2m,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m,n}^{(1,0)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} + \right. \\
 \left. \sum_{m=1}^k \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{k+1,2m-1,n} \sum_{j \in J_{k+1,2m-1,n}^{(1,0)}} \cos \frac{(u,v) \cdot j}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Entonces, el problema (4.3.2)-(4.3.3) tiene una única solución si y sólo si

$$\sum_{\alpha \in \Delta_1} \rho_{k+1}^\alpha A_{k+1}^\alpha = 1 \quad (4.4.3)$$

Demostración

El desarrollo realizado prueba que

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_{k+1}(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2) = \sum_{\alpha \in \Delta_1} \rho_{k+1}^\alpha(u, v) A_{k+1}^\alpha(u, v)$$

y la exigencia $\sum_{\alpha \in \Delta_1} \rho_{k+1}^\alpha A_{k+1}^\alpha = 1$ equivale a $\sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_{k+1}(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2) = 1$, condición que caracteriza la existencia y unicidad de solución. \square

Nótese que las cuatro expresiones ρ_{k+1}^α juegan el papel que desempeñaban los polinomios trigonométricos ρ_s y σ_s en el caso univariado, para el B-spline de Schoenberg.

Una vez reducido el problema (4.3.2)-(4.3.3) a comprobar si se cumple la igualdad (4.4.3), debemos convertir ésta en una condición puramente algebraica, en la que intervengan exclusivamente polinomios bivariados, del mismo modo que en el caso univariado las funciones ρ_s y σ_s se relacionaban con ciertos polinomios que eran finalmente los que permitían decidir si el problema era unisolvente. Recordemos que, una vez conseguido, las expresiones análogas a A_{k+1}^α también se relacionaban con otros polinomios y esto permitía calcular los coeficientes de la combinación lineal que proporcionaba la función fundamental del operador de Lagrange.

Sin embargo, no hemos podido probar los hechos indicados, aunque sí obtener diferentes resultados que hacen plausible pensar que el procedimiento funciona de manera análoga a la desarrollada en el capítulo primero y que el problema es siempre unisolvente. De hecho, con un procedimiento de *fuerza bruta* hemos demostrado al inicio de este capítulo que para $k = 1, 2$, sí admite una única solución.

4.5 Argumentos a favor de la unisolvencia

El proceso lógico que se podría seguir para reducir las diferentes expresiones que intervienen en (4.4.3) a polinomios en dos variables consistiría en establecer una relación de recurrencia para las funciones ρ_{k+1}^α que permitiera concluir que efectivamente son polinomios, calculables mediante un cambio de variables.

Sean a, b y c números naturales y α de Δ_1 . Definimos la función $\rho_{a,b,c}^\alpha$ mediante la igualdad

$$\rho_{a,b,c}^\alpha(u, v) = \sigma_{a,b,c}(u, v) \tau_{a,b,c}^\alpha(u, v) \quad (4.5.1)$$

Un cálculo directo prueba que se satisfacen las relaciones de recurrencia explicitadas a continuación.

Proposición 4.5.1 Sean $a, b, c \geq 1$. Entonces,

1.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \left(2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \right) \rho_{a,b,c}^\alpha \right] = \\ & 2 \left[(a+1) \cos \frac{u}{2} \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} + (c+1) \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos \frac{u+v}{2} \right] \rho_{a,b,c}^\alpha - \\ & a \left(2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \right) \rho_{a+1,b,c}^\alpha - c \left(2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \rho_{a,b,c+1}^\alpha \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

2.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(2 \operatorname{sen} \frac{v}{2} \right) \left(2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \right) \rho_{a,b,c}^\alpha \right] = \\ & 2 \left[(b+1) \cos \frac{v}{2} \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} + (c+1) \operatorname{sen} \frac{v}{2} \cos \frac{u+v}{2} \right] \rho_{a,b,c}^\alpha - \\ & b \left(2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \right) \rho_{a,b+1,c}^\alpha - c \left(2 \operatorname{sen} \frac{v}{2} \right) \rho_{a,b,c+1}^\alpha \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Demostración

Inmediata. □

Se observa que la dirección e_3 obliga a considerar situaciones que no son del tipo que da lugar al box-spline B_{k+1} ; es decir, de $\rho_{a,b,c}^\alpha$ no se pasa a $\rho_{a+1,b+1,c+1}^\alpha$, sino a situaciones intermedias. Es necesaria alguna información adicional que ligue $\rho_{a+1,b,c}^\alpha$, $\rho_{a,b+1,c}^\alpha$ y $\rho_{a,b,c+1}^\alpha$, pues sólo disponemos de dos relaciones de recurrencia para esas tres funciones. Dichas relaciones de recurrencia y algunas expresiones que posteriormente aparecerán parecen sugerir que las permutaciones de los elementos u , v y $u+v$ están involucradas.

Se ha exigido que ninguno de los valores a , b y c sea nulo para definir $\rho_{a,b,c}$. A continuación consideramos las funciones que se derivan de (4.5.1) haciendo $c = 0$, y establecemos para ellas relaciones de recurrencia directamente de la definición de dichas funciones $\rho_{a,b,0}^\alpha$, sin hacer $c = 0$ en las igualdades (4.5.2) y (4.5.3), lo que fortalecerá la intuición que se tiene acerca del carácter de las funciones $\rho_{a,b,c}^\alpha$ en general.

Proposición 4.5.2 Sean a y b números naturales y $\alpha \in \Delta_1$. Se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\rho_{a+1,b,0}^\alpha &= \cos \frac{u}{2} \rho_{a,b,0}^\alpha - \frac{2}{a} \operatorname{sen} \frac{v}{2} \frac{\partial}{\partial u} \rho_{a,b,0}^\alpha \\ \rho_{a,b+1,0}^\alpha &= \cos \frac{v}{2} \rho_{a,b,0}^\alpha - \frac{2}{b} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \frac{\partial}{\partial v} \rho_{a,b,0}^\alpha\end{aligned}\tag{4.5.4}$$

Demostración

Inmediata. □

Para $\alpha = (0, 0)$ y $\alpha = (1, 1)$ podemos dar los valores iniciales de las relaciones de recurrencia (4.5.4), para lo cual seguimos un proceso basado en la obtención de los valores iniciales en el caso univariado ([77]).

Proposición 4.5.3

$$\rho_{2,2,0}^{(0,0)}(u, v) = 1, \quad \rho_{1,1,0}^{(1,1)}(u, v) = 1\tag{4.5.5}$$

Demostración

En $L^2([- \pi, \pi]^2)$ consideremos el producto escalar usual

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, t) \overline{g(u, t)} du dt$$

donde $\overline{}$ indica conjugación. El sistema $\{e^{(nt+mu)i}\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$ es completo ([78]).

Definamos la función $h(u, t) = e^{-i(xu+yt)}$, donde x e y son valores reales fijos. Un cálculo inmediato muestra que los coeficientes de Fourier de h respecto del sistema indicado, $c_{n,m}$, están dados por

$$\begin{aligned}c_{n,m} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(u, t) \overline{e^{(nt+mu)i}} du dt \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\pi x + \pi m) \operatorname{sen}(\pi y + \pi n)}{\pi^2 (x + m) (y + n)} \\ &= (-1)^{m+n} \frac{\operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi y}{(\pi x + \pi m) (\pi y + \pi n)}\end{aligned}$$

Disponemos, pues, del desarrollo en serie de Fourier

$$e^{-i(xu+yt)} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n} e^{-i(xu+yt)}$$

Por la identidad de Parseval,

$$1 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n}^2 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x \operatorname{sen}^2 \pi y}{(\pi x + \pi m)^2 (\pi y + \pi n)^2}$$

Haciendo el cambio de variables $\pi x = \frac{\bar{u}}{2}$ y $\pi y = \frac{\bar{v}}{2}$, podemos escribir

$$1 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{\sin^2 \frac{\bar{u}}{2} \sin^2 \frac{\bar{v}}{2}}{\left(\frac{\bar{u}}{2} + \pi m\right)^2 \left(\frac{\bar{v}}{2} + \pi n\right)^2} = \sigma_{2,2,0}(\bar{u}, \bar{v}) \tau_{2,2,0}^{(0,0)}(\bar{u}, \bar{v})$$

es decir, $\rho_{2,2,0}^{(0,0)}(\bar{u}, \bar{v}) = 1$.

Como el desarrollo en serie de Fourier de $e^{-i(xu+yt)}$ converge en $(u, t) = (0, 0)$, evaluándolo en este punto podemos afirmar que

$$1 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{m,n} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{m+n} \frac{\sin \pi x \sin \pi y}{(\pi x + \pi m)(\pi y + \pi n)}$$

El mismo cambio de variables indicado más arriba nos conduce a

$$1 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{m+n} \frac{\left(2 \sin \frac{\bar{u}}{2}\right) \left(2 \sin \frac{\bar{v}}{2}\right)}{(\bar{u} + 2\pi m)(\bar{v} + 2\pi n)} = \sigma_{1,1,0}(\bar{u}, \bar{v}) \tau_{1,1,0}^{(1,1)}(\bar{u}, \bar{v})$$

es decir, $\rho_{1,1,0}^{(1,1)}(\bar{u}, \bar{v}) = 1$, y (4.5.5) queda probada. \square

Las relaciones de recurrencia (4.5.4) con los valores (4.5.5) producen polinomios trigonométricos. Algunos de tipo $\rho_{a,b,0}^{(0,0)}$ son

$$\begin{aligned} \rho_{2,2,0}^{(0,0)}(u, v) &= 1 \\ \rho_{3,2,0}^{(0,0)}(u, v) &= \cos \frac{u}{2} \\ \rho_{2,3,0}^{(0,0)}(u, v) &= \cos \frac{v}{2} \\ \rho_{3,3,0}^{(0,0)}(u, v) &= \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} \\ \rho_{4,3,0}^{(0,0)}(u, v) &= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{u}{2}\right) \cos \frac{v}{2} \\ \rho_{3,4,0}^{(0,0)}(u, v) &= \cos \frac{u}{2} \frac{1}{2} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{v}{2}\right) \\ \rho_{4,4,0}^{(0,0)}(u, v) &= \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{u}{2}\right) \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{v}{2}\right) \end{aligned}$$

y de los de tipo $\rho_{a,b,0}^{(1,1)}$ damos los siguientes:

$$\rho_{1,1,0}^{(1,1)}(u, v) = 1$$

$$\begin{aligned}\rho_{2,1,0}^{(1,1)}(u, v) &= \cos \frac{u}{2} \\ \rho_{1,2,0}^{(1,1)}(u, v) &= \cos \frac{v}{2} \\ \rho_{2,2,0}^{(1,1)}(u, v) &= \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} \\ \rho_{3,2,0}^{(1,1)}(u, v) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{u}{2} \right) \cos \frac{v}{2} \\ \rho_{2,3,0}^{(1,1)}(u, v) &= \cos \frac{u}{2} \frac{1}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{v}{2} \right)\end{aligned}$$

Estas igualdades sugieren que hay una íntima relación entre las funciones $\rho_{a,b,0}^\alpha$, $\alpha \in \{(0,0), (1,1)\}$, y los polinomios coseno U_k y V_k definidos en la proposición 1.1.6, que enunciamos y probamos a continuación.

Proposición 4.5.4 *Si $a, b \geq 2$, entonces,*

$$\rho_{a,b,0}^{(0,0)}(u, v) = U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right)$$

y

$$\rho_{a,b,0}^{(1,1)}(u, v) = V_{a-1} \left(\cos \frac{u}{2} \right) V_{b-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)$$

si $a, b \geq 1$.

Demostración

Consideremos la función $U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right)$.

Se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left(U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) \right) &= \\ U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) U'_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right)\end{aligned}$$

Por las relaciones de recurrencia establecidas en la proposición 1.1.6,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left(U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) \right) &= \\ U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \right) \frac{U_{a-1} \left(\cos \frac{u}{2} \right) - \cos \frac{u}{2} U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right)}{1 - \cos^2 \frac{u}{2}} a\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) \right) = \\ & -U_{a-1} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) + \cos \frac{u}{2} U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} U_{a-1} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) &= \cos \frac{u}{2} U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) - \\ & \frac{2}{a} \operatorname{sen} \frac{u}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Por tanto, $U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right)$ y $\rho_{a,b,0}^{(0,0)}(u, v)$ son iguales al satisfacer la misma ecuación dífero-diferencial y cumplirse que

$$\rho_{2,2,0}^{(0,0)}(u, v) = 1 = U_0 \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_0 \left(\cos \frac{v}{2} \right)$$

Un razonamiento similar prueba que $\rho_{a,b,0}^{(1,1)}(u, v) = V_{a-1} \left(\cos \frac{u}{2} \right) V_{b-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)$. \square

No son de extrañar las relaciones que hemos probado entre las funciones bivariadas definidas y los polinomios coseno del primer capítulo. Pensemos que $\rho_{a,b,0}^{(0,0)}$ y $\rho_{a,b,0}^{(1,1)}$, así como $\rho_{a,b,0}^{(1,0)}$ y $\rho_{a,b,0}^{(0,1)}$, pueden considerarse asociadas al box-spline de direcciones

$$\overbrace{e_1, \dots, e_1}^a \overbrace{e_2, \dots, e_2}^b$$

que corresponde a la familiar situación del producto tensorial de B-splines centrados.

De $\rho_{a,b,0}^{(1,0)}$ y $\rho_{a,b,0}^{(0,1)}$ no conocemos su estructura precisa, pues es necesario encontrar funciones que jueguen el papel desempeñado por $h(u, t)$ en la demostración de la proposición 4.5.3, y quizás un sistema ortonormal completo diferente, a fin de establecer los valores iniciales que deban ser utilizados en conjunción con (4.5.4). Pero el estudio realizado sugiere lo que sólo podemos conjeturar, siendo plausible y estando sólo pendiente de encontrar los valores iniciales comentados.

Conjeturamos que, para $a \geq 1$ y $b \geq 2$ se cumple que

$$\rho_{a,b,0}^{(1,0)}(u, v) = V_{a-1} \left(\cos \frac{u}{2} \right) U_{b-2} \left(\cos \frac{v}{2} \right)$$

y

$$\rho_{a,b,0}^{(0,1)}(u, v) = U_{a-2} \left(\cos \frac{u}{2} \right) V_{b-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)$$

para $a \geq 2$ y $b \geq 1$.

Aunque los resultados establecidos apoyan el carácter de polinomios trigonométricos de las funciones $\rho_{a,b,c}^\alpha$, poco más conocemos de éstas que las relaciones de recurrencia que satisfacen. Pero podemos adoptar otra aproximación al problema -diferente de la derivación parcial- a fin de encontrar nuevas relaciones de recurrencia para valores concretos de a , b y c . Recordemos que $\rho_{1,1,1}^\alpha$ se nota ρ_1^α .

Proposición 4.5.5 *Con $\alpha \in \Delta_1$, se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{u}{2} \rho_1^\alpha &= \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \rho_{2,1,0}^\alpha - \operatorname{sen} \frac{v}{2} \rho_{2,0,1}^\alpha \\ \operatorname{sen} \frac{v}{2} \rho_1^\alpha &= \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \rho_{1,2,0}^\alpha - \operatorname{sen} \frac{u}{2} \rho_{0,2,1}^\alpha\end{aligned}$$

Demostración

Consideremos la descomposición

$$\frac{1}{AB(A+B)} = \frac{1}{A^2B} - \frac{1}{A^2(A+B)}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \rho_1^\alpha(u, v) &= \sigma_{2,1,1}(u, v) \tau_{1,1,1}^\alpha(u, v) \\ &= \sigma_{2,1,1}(u, v) \cdot (\tau_{2,1,0}^\alpha(u, v) - \tau_{2,0,1}^\alpha(u, v)) \\ &= \left(2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2}\right) \sigma_{2,1,0}(u, v) \tau_{2,1,0}^\alpha(u, v) - \\ &\quad \left(2 \operatorname{sen} \frac{v}{2}\right) \sigma_{2,0,1}(u, v) \tau_{2,0,1}^\alpha(u, v) \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \rho_{2,1,0}^\alpha - 2 \operatorname{sen} \frac{v}{2} \rho_{2,0,1}^\alpha\end{aligned}$$

y obtenemos la primera igualdad. La segunda se halla a partir de la descomposición

$$\frac{1}{AB(A+B)} = \frac{1}{AB^2} - \frac{1}{B^2(A+B)}$$

operando de manera análoga. □

Posteriormente probaremos que $\rho_1^{(0,0)} = 1$, lo que da lugar a las igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{u}{2} &= \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \rho_{2,0,1}^\alpha - \operatorname{sen} \frac{v}{2} \rho_{2,1,0}^\alpha \\ \operatorname{sen} \frac{v}{2} &= \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \rho_{1,2,0}^\alpha - \operatorname{sen} \frac{u}{2} \rho_{0,2,1}^\alpha\end{aligned}$$

Si las comparamos con las identidades

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \cos \frac{v}{2} - \cos \frac{u+v}{2} \operatorname{sen} \frac{v}{2} &= \operatorname{sen} \frac{u}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \cos \frac{u}{2} - \cos \frac{u+v}{2} \operatorname{sen} \frac{u}{2} &= \operatorname{sen} \frac{v}{2} \end{aligned}$$

se sugiere que

$$\rho_{2,1,0}^{(0,0)} = \cos \frac{v}{2}, \quad \rho_{1,2,0}^{(0,0)} = \cos \frac{u}{2}, \quad \rho_{2,0,1}^{(0,0)} = \rho_{0,2,1}^{(0,0)} = \cos \frac{u+v}{2}$$

De hecho, el conocimiento del valor de $\rho_{2,1,0}^{(0,0)}$ o $\rho_{2,0,1}^{(0,0)}$ daría inmediatamente el del otro.

Antes de probar que $\rho_1^{(0,0)}$ es igual a la unidad, enunciemos una nueva relación de recurrencia.

Proposición 4.5.6 *Con $\alpha \in \Delta_1$, se cumple que*

$$\operatorname{sen} \frac{u+v}{2} \rho_{1,1,0}^\alpha = \operatorname{sen} \frac{v}{2} \rho_{1,0,1}^\alpha + \operatorname{sen} \frac{u}{2} \rho_{0,1,1}^\alpha$$

Demostración

A partir de la descomposición

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A(A+B)} + \frac{1}{B(A+B)}$$

se obtiene de forma inmediata. □

Proposición 4.5.7 $\rho_1^{(0,0)} = 1$.

Demostración

Consideremos el box-spline B_1 . Su soporte es el hexágono unitario centrado en $(0,0)$ y se trata de una función lineal a trozos (es de la pirámide de altura unidad y base hexagonal). En $(0,0)$ toma el valor uno y cero en los vértices del hexágono. Sea $I_1 = H_1 \cap \mathbb{Z}^2$. Formemos la función

$$q_1 = \sum_{j \in I_1} \gamma_j B_1 \left(\bullet - \frac{j}{2} \right)$$

donde los coeficientes γ_j son arbitrarios pero cumplen las siguientes condiciones:

$$\gamma_{1,1} = \gamma_{0,1} = \gamma_{-1,0} = \gamma_{-1,-1} = \gamma_{0,-1} = \gamma_{1,0}$$

Entonces, si $z = (u, v)$,

$$\sum_{j \in I_1} \gamma_j e^{-iz \cdot \frac{j}{2}} = \gamma_{0,0} + 2\gamma_{1,0} \left(\cos \frac{u}{2} + \cos \frac{v}{2} + \cos \frac{u+v}{2} \right)$$

y, por tanto,

$$\hat{q}_1(u, v) = \frac{\left[\gamma_{0,0} + 2\gamma_{1,0} \left(\cos \frac{u}{2} + \cos \frac{v}{2} + \cos \frac{u+v}{2} \right) \right]}{\text{sinc}(u) \text{sinc}(v) \text{sinc}(u+v)}.$$

Así pues, $\hat{q}_1(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2)$ es igual a

$$\frac{\left[\gamma_{0,0} + 2\gamma_{1,0} \left((-1)^{\nu_1} \cos \frac{u}{2} + (-1)^{\nu_2} \cos \frac{v}{2} + (-1)^{\nu_1+\nu_2} \cos \frac{u+v}{2} \right) \right]}{\frac{2 \text{sen} \frac{u}{2}}{u + 2\pi\nu_1} \frac{2 \text{sen} \frac{v}{2}}{v + 2\pi\nu_2} \frac{2 \text{sen} \frac{u+v}{2}}{u+v+2\pi\nu_1+2\pi\nu_2}}.$$

por lo que

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_1(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2) = \gamma_{0,0} \rho_1^{(0,0)} + 2\gamma_{1,0} \left(\cos \frac{u}{2} \rho_1^{(1,0)} + \cos \frac{v}{2} \rho_1^{(0,1)} + \cos \frac{u+v}{2} \rho_1^{(1,1)} \right)$$

Consideremos, por otra parte, la siguiente función 2π -periódica ([6]):

$$\tilde{q}_1(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} q_1(-j) e^{ij \cdot (u,v)}$$

Es inmediato comprobar que

$$\begin{aligned} q_1(0, 0) &= \gamma_{0,0} + 3\gamma_{1,0} \\ q_1(1, 0) &= q_1(1, 1) = q_1(0, 1) = q_1(-1, 0) = q_1(-1, -1) = q_1(0, -1) = \frac{1}{2}\gamma_{1,0} \end{aligned}$$

Como, además, el soporte de q_1 es H_1 , se cumple que

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(u, v) &= q_1(0, 0) + 2q_1(1, 0) [\cos u + \cos v + \cos(u+v)] \\ &= \gamma_{0,0} + \gamma_{1,0} (3 + \cos u + \cos v + \cos(u+v)) \end{aligned}$$

Por aplicación de la fórmula de sumación de Poisson a la función $f = e^{-i(u,v) \cdot (\bullet, \bullet)} q_1$ ([6]),

$$\tilde{q}_1(u, v) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_1(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2)$$

por lo que, al tratarse de una identidad y ser los γ_j arbitrarios, podemos identificar los coeficientes de $\tilde{q}_1(u, v)$ y $\sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_1(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2)$ para obtener

$$\rho_1^{(0,0)} = 1$$

y

$$\cos \frac{u}{2} \rho_1^{(1,0)} + \cos \frac{v}{2} \rho_1^{(0,1)} + \cos \frac{u+v}{2} \rho_1^{(1,1)} = 3 + \cos u + \cos v + \cos(u+v)$$

lo que prueba la proposición. \square

Además del resultado anunciado, hemos obtenido otra identidad satisfecha por las funciones de las cuales tenemos menos información, ρ_1^α , $\alpha \in \Delta_2$.

Un procedimiento completamente similar aplicado al box-spline B_2 nos proporciona información relativa a ρ_2^α , $\alpha \in \Delta_1$.

Proposición 4.5.8 $\rho_2^{(0,0)} = \frac{3 + \cos u + \cos v + \cos(u+v)}{6}$.

Demostración

Para $k = 1$ la igualdad (4.4.3) se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_2(u + 2\pi\nu_1, v + 2\pi\nu_2) = & \\ & [\gamma_{0,0} + 2\gamma_{2,0}(\cos u + \cos v + \cos(u+v))] \rho_2^{(0,0)}(u, v) + \\ & 2 \left[\gamma_{1,0} \cos \frac{v}{2} + \gamma_{2,1} \cos \frac{2u+v}{2} \right] \rho_2^{(1,0)}(u, v) + \\ & 2 \left[\gamma_{1,0} \cos \frac{v}{2} + \gamma_{2,1} \cos \frac{2u+v}{2} \right] \rho_2^{(0,1)}(u, v) + \\ & 2 \left[\gamma_{1,0} \cos \frac{u+v}{2} + \gamma_{2,1} \cos \frac{u-v}{2} \right] \rho_2^{(1,1)}(u, v) \end{aligned}$$

Por otra parte, la función 2π -periódica definida por

$$\tilde{q}_2(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} q_2(-j) e^{ij \cdot (u,v)}$$

se puede calcular explícitamente (el soporte de q_2 es H_3), obteniendo

$$\begin{aligned}\tilde{q}_2(u, v) &= q_2(0, 0) - 6(q_2(1, 0) + q_2(2, 0) + q_2(2, 1)) + \\ &\quad 4(q_2(1, 0)\mathcal{A}_1(u, v) + q_2(2, 0)\mathcal{A}_2(u, v) + q_2(u, v)\mathcal{A}_3(u, v)) \\ &= \gamma_{0,0}\left(\frac{1}{3}\mathcal{A}_1\right) + \gamma_{2,0}\left(-5 + \frac{8}{3}\mathcal{A}_1 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_2 + \frac{1}{6}\mathcal{A}_3\right) + \\ &\quad \gamma_{1,0}\left(-\frac{33}{16} + \frac{61}{24}\mathcal{A}_1 + \frac{1}{48}\mathcal{A}_2 + \frac{1}{8}\mathcal{A}_3\right) + \\ &\quad \gamma_{2,1}\left(-\frac{35}{8} + \frac{11}{4}\mathcal{A}_1 + \frac{1}{8}\mathcal{A}_2 + \frac{7}{12}\mathcal{A}_3\right)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(u, v) &= \cos^2 \frac{u}{2} + \cos^2 \frac{u+v}{2} + \cos^2 \frac{v}{2} \\ \mathcal{A}_2(u, v) &= \cos^2 u + \cos^2(u+v) + \cos^2 v \\ \mathcal{A}_3(u, v) &= \cos^2 \frac{2u+v}{2} + \cos^2 \frac{u+2v}{2} + \cos^2 \frac{u-v}{2}\end{aligned}$$

habiendo empleado los siguientes valores:

$$\begin{aligned}q_2(0, 0) &= \frac{1}{2}\gamma_{0,0} + \frac{63}{32}\gamma_{1,0} + \frac{1}{2}\gamma_{2,0} + \frac{13}{16}\gamma_{2,1} \\ q_2(1, 0) &= \frac{1}{12}\gamma_{0,0} + \frac{61}{96}\gamma_{1,0} + \frac{2}{3}\gamma_{2,0} + \frac{11}{16}\gamma_{2,1} \\ q_2(2, 0) &= \frac{1}{192}\gamma_{1,0} + \frac{1}{12}\gamma_{2,0} + \frac{1}{32}\gamma_{2,1} \\ q_2(2, 1) &= \frac{1}{32}\gamma_{1,0} + \frac{1}{6}\gamma_{2,0} + \frac{7}{48}\gamma_{2,1}\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}&\gamma_{0,0}\left(\frac{1}{3}\mathcal{A}_1\right) + \gamma_{2,0}\left(-5 + \frac{8}{3}\mathcal{A}_1 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_2 + \frac{1}{6}\mathcal{A}_3\right) \\ &= [\gamma_{0,0} + 2\gamma_{2,0}(\cos u + \cos v + \cos(u+v))] \frac{3 + \cos u + \cos v + \cos(u+v)}{6}\end{aligned}$$

La fórmula de sumación de Poisson aplicada a $f = e^{-i(u,v)\cdot(\bullet,\bullet)}q_2$ da lugar a

$$\tilde{q}_2(u, v) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_2(u + 2\pi v_1, v + 2\pi v_2) \quad (4.5.6)$$

e, identificando términos, concluimos que

$$\rho_2^{(0,0)}(u, v) = \frac{3 + \cos u + \cos v + \cos(u + v)}{6}$$

que es lo enunciado. \square

La transformada de Fourier nos ha permitido reducir un problema de interpolación lagrangiana basada en una combinación lineal adecuada de trasladadas de una función box-spline a uno algebraico, en el que intervienen expresiones ciertamente polinómicas y otras que, aunque no podemos probar aún que lo son, dejan traslucir que lo son realmente, para lo que se ha aportado la mayor cantidad posible de argumentos. Si lo fuesen, a la vista de (4.4.3), la unisolvencia del problema de interpolación (4.3.2)-(4.3.3) equivaldría a que dichos polinomios no tuviesen factores comunes, en la línea de los resultados obtenidos por Micchelli en [43], resumidos en el teorema 1.1.3. El problema univariado que ha motivado el que hemos descrito era siempre unisolvente, y el teorema de Bezout permitía calcular los coeficientes de la combinación lineal que lo resolvía. Es de esperar que también el problema bivariado sea unisolvente, lo que permitiría utilizar técnicas de bases de Gröbner para calcular en este caso los coeficientes ([1]).

Conjeturamos que el problema (4.3.2)-(4.3.3) es unisolvente.

En el supuesto, como pensamos, de que sea así, se podría definir el operador de interpolación de Lagrange de la forma habitual:

$$\mathcal{L}_k f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} f(\alpha) q_k(\bullet - \alpha)$$

Como la transformada de Fourier de q_k cumple que $\hat{q}_k(0) = 1$, que equivale a $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} q_k(\bullet - \alpha) = 1$, y presenta ceros de orden $2k + 2$ en los puntos j de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, el operador \mathcal{L}_k sería exacto en el espacio de polinomios \mathbb{P}_{2k+1} . Además, el orden de aproximación de la versión escalada de \mathcal{L}_k sería h^{2k+2} , si la red tridireccional empleada fuese la generada por las direcciones he_i , $1 \leq i \leq 3$, $h > 0$.

En el caso univariado, tras probar la unisolvencia del problema de interpolación para el B-spline de Schoenberg, definimos el S-spline y estudiamos el problema de interpolación correspondiente. De cumplirse las expectativas anunciadas en el caso bivariado, la técnica desarrollada puede ser empleada para analizar problemas de interpolación lagrangiana basados en funciones polinómicas a trozos más generales que las de tipo box-spline. Nos referimos a las funciones H-splines, recientemente introducidas por P. Sablonnière y D. Sbibi ([57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [68]).

Bibliografía

- [1] Adams, W. W., Loustaunau, P.: An Introduction to Gröbner Bases. Graduate Studies in Mathematics, vol. 3. AMS, Providence, Rhode Island (1996, reim-presión).
- [2] Arcangeli, R., Gout, J. L.: *Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de La-grange dans un ouvert de \mathbb{R}^n* , RAIRO Anal. Num. 10 (1976), 5-27.
- [3] Barrera, D., Ibáñez Pérez, M. J., López Carmona, A.: *Interpolación de Her-mite vía Elementos Finitos*, Actas del XIV C.E.D.Y.A.-IV C.M.A., Vic (1995) (preprint 18, Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén).
- [4] Barrera, D., Ibáñez Pérez, M. J., López Carmona, A.: *Compactly Supported Fundamental Functions for Bivariate Hermite Spline Interpolation and Trian-gular Finite Elements of Type HCT*, en Numerical Analysis and Its Applica-tions, L. Vulkov, J. Waśniewski y P. Yalamov (eds.) LNCS 1196. Springer-Verlag (1997), 414-421.
- [5] de Boor, C.: A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, Nueva York (1984, 2a. ed.).
- [6] de Boor, C., Höllig, K., Riemenschneider, S.: Box Splines. Springer-Verlag, Nueva York (1993).
- [7] Bojanov, B. D., Hakopian, H. A., Sahakian, A. A.: Spline Functions and Multivariate Interpolations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993).
- [8] Chui, C. K.: Multivariate Splines. CBMS-NSF Conference Series in Applied Mathematics 54. SIAM (1973, 2a. ed.).
- [9] Chui, C. K.: An Introduction to Wavelets. Academic Press, San Diego (1992).

-
- [10] Chui, C. K., Lai, M. J.: *A Multivariate Analog of Marsden's Identity and Quasi-Interpolation Scheme*, Constr. Approx. (1987) 3, 11-122.
- [11] Ciarlet, P. G.: *Interpolation error estimates for the reduced Hsieh-Clough-Tocher triangles*, Math. Comp. 32 (1978), 335-344.
- [12] Ciarlet, P. G.: *Basic error estimates for elliptic problems*, en Handbook of Numerical Analysis, vol. II, Finite Element Methods, Part I. North-Holland, Amsterdam (1991).
- [13] Ciarlet, P.G., Lions, P. L. (eds): Handbook of Numerical Analysis, vol. II, Finite Element Methods, Part I. North-Holland, Amsterdam (1991).
- [14] Ciavaldini, J. F., Nédélec, J. C.: *Sur l'élément de Fraeijs de Veubeke et Sander*, RAIRO, Sér. Rouge Anal. Numér. R-2 (1974), 29-45.
- [15] Clough, R. W., Tocher, J. L.: *Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending*, en Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A. F. B., Ohio (1965).
- [16] Dahmen, W., Goodman, T. N. T., Micchelli, C. A.: *Local Spline Interpolation Schemes in One and Several Variables*, en Approximation & Optimization, Proc. Havana 1987, A. Gómez, F. Guerra, M. A. Jiménez y G. López (eds.), LNM 1354, Springer-Verlag (1987), 11-24.
- [17] Dahmen, W., Goodman, T. N. T., Micchelli C. A.: *Compactly Supported Fundamental Functions for Spline Interpolation*, Numer. Math. 52 (1988), 639-664.
- [18] Dahmen, W., Micchelli, C. A.: *Subdivision algorithms for the generation of box spline surfaces*, Comput. Aided Geom. Design 1 (2) (1984), 115-129.
- [19] Farin. G.: Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. Academic Press, San Diego, (1990, 2a. ed.).
- [20] Fraeijs de Veubeke, G.: *Bending and Stretching of plates*, en Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A. F. B., Ohio (1965).
- [21] Gasca, M., López Carmona, A.: *A general recurrence formula and its applications to multivariate interpolation*, J. Approx. Theory 34 (1982), 361-374.

- [22] Gasca, M., Maeztu, J. I.: *On Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^k* , Numer. Math. 39 (1982), 1-14.
- [23] Gasca, M., Ramírez, V.: *Interpolation system in \mathbb{R}^k* , J. Approx. Theory 42 (1984), 36-52.
- [24] Gasca, M., Micchelli, C. A., Peña, J. M.: *Banded Matrices with Banded Inverses III: p -Slanted Matrices*, en Wavelets, Images and Surface Fitting, P. J. Laurent, A. le Méhauté y L. L. Schumaker (eds.), AK Peters, Wellesley (1994), 245-268
- [25] Gout, J. L.: *Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans \mathbb{R}^n* , Numer. Math. 28 (1977), 407-429.
- [26] Hall, C. A., Meyer, W. W.: *Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation*, J. Approx. Theory 16 (1976), 105-122.
- [27] Holschneider, M.: *Wavelets. An Analysis Tool*. Oxford Science Publications, Oxford (1995).
- [28] Karlin, S.: *Total Positivity*. Stanford University Press, Stanford (1968).
- [29] Laghchim-Lahlou, M.: *Elements Finis Composites de Classe C^k dans \mathbb{R}^2* . Thèse, I.N.S.A. de Rennes (1991).
- [30] Laghchim-Lahlou, M.: *The C^r -fundamental splines de Clough-Tocher and Powell-Sabin types for Lagrange interpolation type on a three direction mesh*, Département de mathématiques, Université de Marrakech (Mayo, 1997).
- [31] Laghchim-Lahlou, M., Sablonnière, P.: *Composite quadrilateral finite elements of class C^r* , en Mathematical Methods in CAGD, T. Lyche y L. L. Schumaker (eds.), Academic Press, New York (1989), 413-418.
- [32] Laghchim-Lahlou, M., Sablonnière, P.: *C^r finite element of HCT, PS and FVS types*, en Fifth International Symposium on Numerical Analysis in Engineering, R. Gruber, J. Périaux y R. P. Shaw (eds.). Springer-Verlag, Berlin (1989), vol. 2, 163-168.
- [33] Laghchim-Lahlou, M., Sablonnière, P.: *Composite C^r triangular finite elements of type on a three-direction mesh*, en Curves and Surfaces, P. J. Laurent, A. Le Méhauté y L. L. Schumaker (eds.). Academic Press, New York (1991), 275-278.

- [34] Laghchim-Lahlou, M., Sablonnière, P.: *Eléments finis polynomiaux composés de classe C^r* , C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I (1993), 503-508.
- [35] Laghchim-Lahlou, M., Sablonnière, P.: *Triangular Finite Elements of HCT type and class C^p* , Advances in Computational Mathematics 2 (1994), 101-122.
- [36] Laghchim-Lahlou, M., Sablonnière, P.: *Quadrilateral finite elements of FVS type and class C^p* , Numer. Math. 70 (1995), 229-243.
- [37] Laghchim-Lahlou, M., Sablonnière, P.: *C^r -finite elements of Powell-Sabin type on the three direction mesh*, Advances in Computational Mathematics 6 (1996), 191-206.
- [38] López Carmona, A.: Interpolación por recurrencia en varias variables. Tesis doctoral, Universidad de Granada (1981).
- [39] Lorente Pardo, J.: Funciones Splines: Interpolación Conservativa. Interpolación Multivariada. Tesis doctoral, Universidad de Granada (1987).
- [40] Lorente Pardo, J., Ramírez, V.: *On Interpolation Systems and H-Reducible Interpolation Problems*, en Topics in Multivariate Approximation, C. K. Chui, L. L. Schumaker y F. I. Utreras (eds.). Academic Press (1987), 153-163
- [41] Lorentz, R. A.: Multivariate Birkhoff Interpolation. LNM 1516. Springer-Verlag (1992)
- [42] Manni, C., Sablonnière, P.: *Monotone Interpolation of order 3 by C^2 cubic splines*, IMA J. Numer. Anal. 17 (1997), 305-320.
- [43] Micchelli, C. A.: *Banded matrices with banded inverses*, J. of Computational and Applied Mathematics 41 (1992), 281-300.
- [44] Micchelli, C. A.: Mathematical Aspects of Geometric Modelling. CBMS-NSF Conference Series in Applied Mathematics 65. SIAM (1994).
- [45] Micchelli, C. A., Rivlin, T. J., Winograd, S.: *The Optimal Recovery of Smooth Functions*, Numer. Math. 26 (1976), 191-200.
- [46] Powell, M. J. D., Sabin, M. A.: *Piecewise quadratic approximation on triangles*, A. C. M. Transactions on Math. Software, 3 (4) (1977), 316-325.

- [47] Qi, D. X.: *A class of local explicit many-knot spline interpolation schemes*, MRC Technical Summary Report # 2238, Madison (1981).
- [48] Qi, D. X., Zhou, S. Z.: *Local explicit many-knot spline Hermite approximation schemes*, MRC Technical Summary Report # 2359, Madison (1982).
- [49] Ramírez González, V.: *Interpolación de Hermite en varias variables*. Tesis doctoral, Universidad de Granada (1980).
- [50] Raviart, P. A., Thomas, J. M.: *Introduction a l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées partielles*. Manon, Paris (1983).
- [51] Sablonnière, P.: *Bases de Bernstein et approximants splines*. Thèse de Doctorat ès-sciences, Université de Lille (1982).
- [52] Sablonnière, P.: *Composite finite elements of class C^k* , J. Comput. Appl. Math. 12,13 (1985), 541-550.
- [53] Sablonnière, P.: *Elements finis triangulaires de degré 5 et de class C^2* , en Computers and Computing, P. Chenin, C. Di Crescenzo y F. Robert (eds.). Wiley-Masson (1986), 111-115.
- [54] Sablonnière, P.: *Composite Finite Elements of Class C^2* , en Topics in Multivariate Approximation, C. K. Chui, L. L. Schumaker y F. I. Utreras (eds.). Academic Press, New York (1987), 207-217.
- [55] Sablonnière, P.: *Error bounds for Hermite interpolation by quadratic splines*, IMA J. Numer. Anal. 7 (1987), 495-508.
- [56] Sablonnière, P.: *Surfaces polynomiales par triangles*, cours de 3^{ème} cycle, Université de Rennes (1993).
- [57] Sablonnière, P.: *Quasi-Interpolants associated with H-splines on a three-direction mesh*. J. Comput. Appl. Math. 66 (1996), 433-442.
- [58] Sablonnière, P.: *B-splines on uniform meshes of the plane*, en Advanced Topics in Multivariate approximation, F. Fontanella, K. Jetter y L. L. Schumaker (eds.). World Scientific Publishing Co. (1996), 323-338.
- [59] Sablonnière, P.: *New families of B-splines on uniform meshes of the plane*, en Program on Spline Functions and the Theory of wavelets. C.R.M. of the University of Montréal (1996) (sometido).

- [60] Sablonnière, P.: *Quasi-interpolants splines sur le réseau quadridirectionnel τ_2* , Colloque Modélisation et Approximation des courbes et surfaces. CIRM de Luminy (1-4, Abril, 1997).
- [61] Sablonnière, P.: *Approximation par B-splines sur de réseaux uniformes du plan*, Congrès National d'Analyse Numérique, Imbours (26-30, Mayo, 1997).
- [62] Sablonnière, P., Sbibih, D.: *B-splines à supports hexagonaux sur un réseau tridirectionnel régulier du plan*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I (1994), 277-282.
- [63] Sablonnière, P., Sbibih, D.: *Some families of splines with hexagonal support on a three-direction mesh*, en *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, M. Daehlen, T. Lyche y L. L. Schumaker (eds.). Vanderbilt University Press, 467-475 (1995).
- [64] Sablonnière, P., Zedek, F.: *Hermite and Lagrange Interpolation by quadratic splines on non-uniform criss-cross triangulations*, en *Wavelets, Images and Surface Fitting*, P. J. Laurent, A. Le Méhauté y L. L. Schumaker (eds.). A K Peters, Wellesley (1994), 445-452.
- [65] Sander, G.: *Bornes supérieures et inférieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion*, Bull. Soc. Royale Sciences, Liège, 33^e année, n 7-8, 456-494 (1964).
- [66] Sander, G.: *Applications de la méthode des éléments finis à la flexion des plaques*, Collection des publications de la faculté des sciences de Liège, 15 (1969).
- [67] Sauer, T, Yu, Y: *On multivariate Hermite interpolation*, *Advances in Computational Mathematics* 4 (1995), 207-259.
- [68] Sbibih, D.: *B-splines et quasi-interpolants sur un réseau tridirectionnel du plan*. Thèse. Université Mohamed I^{er}, Oujda (1995).
- [69] Schoenberg, I. J.: *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Parts A and B, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. IV, No. 1 (1946), 45-141.
- [70] Schoenberg, I. J.: *Cardinal Spline Interpolation*. CBMS-NSF Conference Series in Applied Mathematics 12, SIAM (1973).

-
- [71] Schumaker, L. L.: Spline Functions: Basic Theory. John Wiley & Sons, Nueva York (1981).
- [72] Slomson, A.: An Introduction to Combinatorics, Chapman and Hall (1991).
- [73] Tijini, A.: Elements finis composites de classe C^p de type PS2 et courbes splines paramétrées, périodiques, convexes. Thèse. Université Mohamed I^{er}, Oujda (1997).
- [74] Van Lint, J. H., Wilson, R. M.: A Course in Combinatorics. Cambridge University Press (1992).
- [75] Varma, A. K., Howell, G.: *Best Error Bounds for Derivatives in Two Point Birkhoff Interpolation Problems*, J. Approx. Theory 38 (1983), 258-268.
- [76] de Villiers, J. M.: *A Convergence Result in Nodal Spline Interpolation*, J. Approx. Theory 74 (1993), 266-279.
- [77] Walter, G. G.: Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications. CRC Press, Boca Raton, Florida (1994).
- [78] Zygmund, A.: Trigonometric Series. 2nd edition. Vols. I & II combined. Cambridge University Press, Cambridge (1988).