Universidad de Granada

Facultad de Ciencias

Fco Javier Pérez González

# C*-ALGEBRAS ASOCIATIVAS Y C*-ALGEBRAS DE JORDAN

## UN TRATAMIENTO UNIFICADO

por

FRANCISCO JAVIER PEREZ GONZALEZ

Memoria realizada en el Departamento de Teoría de Funciones de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Prof. Dr. D. Angel Rodríguez Palacios.

V° B° EL PONENTE

Fdo. : José Ramón Fuentes Miras

V° B° EL DIRECTOR

Aspirante al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas:

Fdo. : Francisco Javier Pérez González

# I N D I C E

## C A P I T U L O   IV



## C A P I T U L O   V

# INTRODUCCION

## SUCESIVAS GENERALIZACIONES DEL CONCEPTO DE $B^*$-ALGEBRA

## RESUMEN DE LA MEMORIA

La teoría de las álgebras de operadores sobre un espacio de Hilbert, iniciada por von Neumann y Murray en una serie de trabajos publicados entre los años 1929 y 1937, ha sido desde entonces objeto principal de investigación como lo prueba la cantidad y calidad de los trabajos con él relacionados, y es sobradamente conocida la importante contribución que dicha teoría ha tenido en el desarrollo de muchas ramas de la Matemática así como de otros campos de la Ciencia. Las álgebras de operadores, conocidas hoy como *$W^*$-álgebras* o *álgebras de von Neumann*, se definen como subálgebras débilmente cerradas y autoadjuntas del álgebra $BL(H)$ de los operadores lineales continuos sobre un espacio de Hilbert complejo no trivial $H$. A las subálgebras uniformemente cerradas y autoadjuntas de $BL(H)$ se las conoce con los nombres de *$B^*$-álgebras* y *$C^*$-álgebras*. En particular toda $W^*$-álgebra es una $B^*$-álgebra.

Entre los años 1943 y 1953 se logra caracterizar, a partir del trabajo inicial de Gelfand y Naimark y las aportaciones posteriores de Fukamiya y Kaplansky, la clase de las $B^*$-álgebras por medio de axiomas intrínsecos sin referencia alguna al espacio de Hilbert subyacente. Concretamente dichas álgebras coinciden (salvo isomorfismos totales) con las álgebras de Banach $A$ complejas con involución multiplicativa $*$ que verifican el axioma: $\|a^*a\| = \|a\|^2$ $(a \in A)$. Quizás sea conveniente precisar en este momento que por *involución multiplicativa* de un álgebra compleja $A$ entendemos una involución $*$ verificando la propiedad: $(ab)^* = b^*a^*$ $(a, b \in A)$.

La caracterización abstracta de las $W^*$-álgebras es lograda por Dixmier y Sakai en sendos trabajos aparecidos en los años 1950 y 1956 respectivamente, en los que se demuestra que tales álgebras son (salvo isomorfismos totales) precisamente aquellas $B^*$-álgebras cuyo espacio normado subyacente es dual de un espacio de Banach. A partir de estas fechas la teoría de las $B^*$-álgebras y $W^*$-álgebras desde el punto de visto abstracto ha sido extensamente desarrollada disponiendo en la actualidad de excelentes monografías entre las que cabe destacar [15] y [33].

El propósito de conseguir una descripción matemática de la Mecánica Cuántica fue uno de los que inicialmente motivaron el estudio de las $W^*$-álgebras. Con tal objetivo desde el año 1925 han sido propuestos gran variedad de modelos matemáticos sin que hasta la fecha se disponga de uno totalmente satisfactorio. Destaquemos entre ellos el sugerido por Jordan en 1933 que motivó el estudio de un nuevo tipo de álgebras conocidas ahora como *álgebras de Jordan* . Tales álgebras son conmutativas y se diferencian de las usuales en que la ley asociativa es sustituida por el axioma más débil (llamado axioma de Jordan): $a^2(ba) = (a^2b)a$.

Si $A$ es un álgebra asociativa, el álgebra obtenida definiendo en el espacio vectorial de $A$ el producto:

$$a.b = \frac{1}{2}(ab + ba) \qquad (1)$$

es un álgebra de Jordan notada $A^+$ y llamada *álgebra de Jordan subyacente a* $A$ o *álgebra simetrizada* de $A$.

Si $H$ es un espacio de Hilbert complejo de dimensión mayor que 1 es sabido que el subespacio $Sim(BL(H))$ de los operadores autoadjuntos de $BL(H)$ no es estable para el producto usual; pero si este es sustituido por el *producto de Jordan* (1) entonces es claro que $Sim(BL(H))$ es una subálgebra real de $BL(H)^+$.

Aunque hay precedentes aislados puede considerarse que el estudio de las subálgebras de operadores autoadjuntos de $BL(H)^{+}$ llamadas *JC-álgebras* si son uniformemente cerradas y *JW-álgebras* si son débilmente cerradas, tiene sus comienzos en un trabajo de Topping publicado en el año 1965 ([44]) donde se puso de manifiesto que muchas de las técnicas empleadas en el estudio de las álgebras de operadores podían adaptarse con éxito a la nueva situación. El trabajo de Topping fue seguido por otros entre los que destacan los de Størmer ([42] y [43]) y el propio Topping ([45]). Todos ellos se situan en lo que podemos llamar un "ambiente concreto", esto es, en un concreto espacio $BL(H)$ . Como se verá enseguida la caracterización intrínseca de las *JC*-álgebras tropieza con serias dificultades.

En 1934 Jordan, von Neumann y Wigner ([19]) clasificaron las álgebras de Jordan reales finito dimensionales y formalmente reales, esto es, verificando la propiedad adicional: $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ . Probaron que tales álgebras pueden expresarse de forma única como suma directa de álgebras simples y estas fueron representadas inyectivamente, salvo un caso, como álgebras de Jordan de operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo. El caso excepcional es el álgebra $M_3^8$

de las matrices hermitianas de orden 3 sobre los números de Cayley.

Las dificultades antes aludidas se deben al hecho de que en cualquier axiomatización razonable de las $JC$-álgebras no se puede evitar incluir el álgebra $M_3^8$ de la que, desde 1959, se sabe, gracias a Albert y Paige, que no puede ser representada como subálgebra de $BL(H)^+$. Esta ha sido la causa de que hasta fechas recientes no se haya intentado llevar a cabo una tal axiomatización. Este problema ha sido brillantemente resuelto por Alfsen, Shultz y Størmer ([3]) introduciendo el concepto de *JB-álgebra* como un álgebra $A$ de Jordan real con unidad normada completa verificando:

$$\|a\|^2 = \|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\| \quad (a,b \in A).$$

Este tipo de álgebras incluye evidentemente a las $JC$-álgebras y también al álgebra $M_3^8$, pues es sabido que esta puede normarse como $JB$-álgebra ([35]). Con ello resulta que no es posible representar toda $JB$-álgebra como una $JC$-álgebra concreta, no obstante se consigue el mejor resultado que cabe esperar en esta situación pues Alfsen, Shultz y Størmer consiguen demostrar que $M_3^8$ es esencialmente la única $JB$-álgebra que no puede ser realizada como álgebra de Jordan de operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo. Concretamente si $A$ es una $JB$-álgebra, entonces existe un espacio de Hilbert complejo $H$ y un espacio de Hausdorff compacto $X$ tal que $A$ puede identificarse con una subálgebra cerrada de $Sim(BL(H)) \oplus C(X, M_3^8)$.

Lograda la caracterización abstracta de las $JC$-álgebras en el sentido antes indicado, es lógico abordar dicho problema para las $JW$-álgebras. Ello ha sido realizado con éxito por Shultz ([36]) introduciendo el concepto de *$JBW$-álgebra* como una $JB$-álgebra que es un espacio de Banach dual. En el citado trabajo se demuestra que toda $JBW$-álgebra $A$ puede expresarse de forma única como suma directa de ideales: $A = A_s \oplus C(X, M_3^8)$, donde $A_s$ es isomorfa a una $JW$-álgebra concreta y $X$ es un espacio hyperestoneano.

Si $A$ es una $JC$-álgebra de operadores sobre un espacio de Hilbert complejo $H$ es immediato que $A + iA$ es una subálgebra autoadjunta y unifórmemente cerrada de $BL(H)^+$, tales álgebras se llaman *$JC^*$-álgebras* y evidentemente toda $JC$-álgebra es la parte autoadjunta de una única $JC^*$-álgebra. Teniendo esto en cuenta es natural investigar la existencia de un tipo de álgebras que desempeñen respecto a las $JB$-álgebras análogo papel al que juegan las $JC^*$-álgebras respecto a las $JC$-álgebras. A este tipo de álgebras, conocidas hoy como *$C^*$-álgebras de Jordan* o *$JB^*$-álgebras* se ha llegado por dos aproximaciones independientes. De una parte Kaplansky, en la conferencia final del St. Andrews Colloquium de la Sociedad Matemática de Edimburgo en 1976, sugirió una definición de $JB^*$-álgebra, por medio de axiomas del tipo de Gelfand-Naimark, como un álgebra de Jordan compleja, normada, completa,con unidad $A$ con una involución multiplicativa $*$ verificando:

$$\| U_a(a^*)\| = \| a\|^3 \qquad (a \in A)$$

donde

$$U_a(b) = a(ab) - a^2 b \qquad (a,b \in A)$$

(y algunos axiomas adicionales que posteriormente resultaron ser supérfluos). Es fácil ver que la parte autoadjunta de una $JB^*$-álgebra es una $JB$-álgebra, y el recíproco también es cierto pues, como demostró Wright ([46]), toda $JB$-álgebra es la parte autoadjunta de una única $JB^*$-álgebra. Con ello queda totalmente justificado el propósito inicial que llevó a la introducción del nuevo concepto. Por otra parte J. Martínez Moreno aborda, por las mismas fechas, la axiomatización de un tipo de álgebras que fueran la contraparte Jordan de las $B^*$-álgebras. Como puede apreciarse el propósito es esencialmente coincidente con el anterior. El camino que aparece como mas immediato para ello, a saber, la exacta verificación del axioma de Gelfand-Naimark $\|a^*a\| = \|a\|^2$ no es el indicado, pues resulta que tal axioma no es satisfecho por las álgebras de Jordan subyacentes a las $B^*$-álgebras no conmutativas, y es deseable que tales álgebras queden incluidas en el nuevo concepto que se pretende introducir. Como quiera que el teorema de Vidav-Palmer caracteriza las $B^*$-álgebras con unidad, exclusivamente en términos de la norma y la unidad, como aquellas álgebras A de Banach complejas *unitales*, es decir, con unidad I de norma 1, que verifican:

$$A = H(A) + iH(A) \qquad (2)$$

donde $H(A)$ es el conjunto de los elementos $a \in A$ tales que $\langle a', a\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $a' \in A'$ verificando

$\|a'\| = \langle a', I\rangle = 1$, (la involución de $A$ queda entonces intrínsecamente determinada por: $h + ik \to h - ik$ $(h,k \in H(A))$), resulta evidente que en tal situación el álgebra $A^+$ verifica también: $A^+ = H(A^+) + iH(A^+)$. En consecuencia se introduce en [23] el concepto de *JV-álgebra* como un álgebra de Jordan $A$ compleja, normada, completa y unital que verifica (2). Con ello se consiguen unos axiomas naturales que incluyen las álgebras de Jordan subyacentes a las $B^*$-álgebras con unidad. Además Martínez Moreno en [24] demuestra que la parte autoadjunta, $H(A)$, de una $JV$-álgebra $A$ es una $JB$-álgebra quedando por saber si, recíprocamente, toda $JB$-álgebra es la parte autoadjunta de una $JV$-álgebra, lo que supondría la equivalencia entre los conceptos de $JB^*$-álgebra y de $JV$-álgebra. Pues bien, efectivamente así ocurre como consecuencia de un resultado de Youngson ([50] ) junto con el anteriormente citado de M. Moreno ( [24] y también [23]). Independientemente del trabajo de Youngson, este hecho ha sido también demostrado por A. Rodríguez Palacios ([32]).

La generalización así lograda del teorema de Vidav-Palmer para álgebras de Jordan es muy sugerente;

pues al ser la condición (2) independiente del producto del álgebra, se está invitado a considerar el caso de un álgebra compleja no-asociativa normada, completa, unital verificando dicha condición; un álgebra $A$ en estas condiciones es llamada una *V-álgebra*. La aplicación: $h+ik \overset{*}{\to} h-ik$ $(h,k \in H(A))$ es entonces una involución lineal en $A$, llamada *involución natural* de la $V$-álgebra $A$. En vista del teorema de Vidav-Palmer tales álgebras constituyen una generalización por vía geométrica del concepto de $B^*$-álgebra con unidad *siempre que la involución natural sea multiplicativa*. El siguiente problema surge, pues, de forma natural: ¿ en qué condiciones puede asegurarse que la involución de una $V$-álgebra $A$ es multiplicativa ?. El resultado antes citado en [24] implica que esto es cierto cuando $A$ es un álgebra de Jordan. Partiendo de este resultado inicial A. Mojtar y Rodríguez Palacios resuelven totalmente el problema en [26] demostrando que la multiplicabilidad de la involución natural equivale a que $A$ sea un *álgebra de Jordan no-conmutativa*, esto es, un álgebra que satisface el axioma de Jordan y en la que la conmutatividad se sustituye por la condición mas débil: $a(ba) = (ab)a$ .

Por tanto las $V$-álgebras de Jordan no-conmutativas constituyen la más amplia generalización posible a través del teorema de Vidav-Palmer de las $B^*$-álgebras con unidad.

Comentábamos antes que el axioma de Gelfand-Naimark no se verifica en las álgebras de Jordan $A^+$ cuando $A$ es una $B^*$-álgebra no conmutativa. Cabe, pues, investigar qué tipo de álgebras no-asociativas, complejas, normadas, completas y unitales admiten una involución multiplicativa $*$ verificando: $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Este problema fue resuelto por R. Palacios en [32], incluso sin suponer la multiplicabilidad de $*$ (lo que, según lo dicho, implicaría que el álgebra es de Jordan no-conmutativa) sino simplemente que la unidad fuera un elemento simétrico, demostrando que una tal álgebra es necesariamente *alternativa*, esto es, un álgebra en la que la ley asociativa se sustutuye por los axiomas: $a(ab) = a^2 b$ y $(ba)a = ba^2$. Tales álgebras las llamamos *$B^*$-álgebras alternativas* y, evidentemente, incluyen a las $B^*$-álgebras (asociativas).

Expuestos los antecedentes que emmarcan el presente trabajo, pasamos a ocuparnos de nuestro enfoque personal.

En esta Memoria se introduce una clase de álgebras que incluye a las $B^*$-álgebras alternativas y a las $JB^*$-álgebras. La teoría de las $JB^*$-álgebras se considera como una generalización de la de las $B^*$-álgebras puesto que, si $A$ es una de estas últimas, su simetrizada $A^+$ es una de las primeras y la mayoría de las propiedades de $A$ quedan reflejadas en $A^+$. En el paso de $A$ a $A^+$, no obstante, alguna información se pierde puesto que, como es sabido, dos $B^*$-álgebras distintas pueden tener la misma simetrizada. Una auténtica generalización de las $B^*$-álgebras, que incluye las $JB^*$-álgebras y las $B^*$-álgebras alternativas, se obtiene introduciendo el concepto de *$JB^*$-álgebra no-conmutativa* (abreviadamente: $JB^*$-álgebra n.c.), a saber: un álgebra de Jordan no-conmutativa, compleja, normada, completa $A$ con involución multiplicativa $*$ verificando:

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \qquad (a \in A),$$

donde

$$U_a(b) = a(ba) + (ba)a - ba^2 \qquad (a,b \in A).$$

Si se tiene en cuenta que para una $JB^*$-álgebra n.c. $A$, $A^+$ es otra $JB^*$-álgebra (conmutativa) se comprenderá que muchos resultados para el nuevo concepto introducido se reducen al caso conmutativo tan ampliamente estudiado en los últimos años. Este hecho nos ha llevado a centrar nuestra atención en aquellos aspectos de la teoría de las $JB^*$-álgebras n.c. que no son fácilmente reducibles al caso conmutativo. Los resultados que hemos conseguido son conocidos para $B^*$-álgebras asociativas pero algunos creemos que ni siquiera son conocidos para $JB^*$-álgebras. Pasamos a continuación a comentar los principales resultados de la presente Memoria.

CAPITULO I. En la sección 1 se introducen los conceptos básicos de la teoría de álgebras no-asociativas necesarios para la comprensión de este trabajo y se caracterizan los ideales biláteros con unidad en un álgebra de Jordan no-conmutativa (Teorema 1.19), resultado del que no tenemos referencia alguna en la bibliografía que hemos consultado. A este respecto desearía indicar que, desde sus comienzos, la teoría de las álgebras de operadores se ha caracterizado por una afortunada combinación de Algebra y Análisis ( la sección 11 pensamos que es un ejemplo de ello ). Frecuentemente los resultados son expresados en términos algebraicos mientras que las técnicas de demostración son altamente analíticas. En la sección 2 se definen los conceptos de $JB^*$-álgebra n.c. y $B^*$-álgebra no-asociativa obteniendo algunas consecuencias. También se exponen, por razones de complitud, la construcción del producto de Arens en el bidual de un álgebra normada y de la involución "doble traspuesta".

Un aspecto original de la presente Memoria es que en ella se utilizan técnicas generales de geometría de los espacios de Banach para obtener resultados de tipo algebraico-topológico. Por ello en la sección 3 se presentan los resultados básicos de la teoría de rango numérico en álgebras normadas no-asociativas unitales. En esta sección se hace también un resumen de los resultados fundamentales de la teoría de las $JB^*$-álgebras.

CAPITULO II. Este capítulo es básico en el presente trabajo. Se habrá podido observar que las definiciones de $JB$-álgebra y de $JB^*$-álgebra exigen la presencia de unidad; nosotros, desde el principio, suprimimos esta exigencia. En consecuencia se plantea enseguida el problema de la *unitización*. Este problema puede ser descrito, a grandes rasgos, como sigue: dada un álgebra no-asociativa sin unidad $A$ con alguna estructura adicional (normada, con involución multiplicativa, etcétera) ¿ existe un álgebra $\widetilde{A}$ con unidad, con las mismas perfecciones que $A$, tal que $A$ pueda ser totalmente identificada con un ideal de codimensión 1 de $\widetilde{A}$ ?. Los resultados conocidos por nosotros que se ocupan de este problema para $JB$-álgebras y $JB^*$-álgebras están muy lejos de alcanzar una forma estéticamente convincente. En [40] se aborda el problema de la unitización de una $JB$-álgebra sustituyendo la condición $\|a^2\| \leq \|a^2+b^2\|$ por la condición $\|a^2-b^2\| \leq \max\{\|a^2\|, \|b^2\|\}$ mas fuerte, en principio que la primera. Se consigue así el objetivo perseguido y se deja como problema abierto si las dos condiciones anteriores, que en el caso con unidad son equivalentes, siguen siéndolo para $JB$-álgebras sin unidad. El problema de la unitización de una

$JB$-álgebra parece haber sido definitivamente resuelto por Behncke en un trabajo ([7]) citado en [49] y que no hemos podido conseguir. Por su parte Youngson en [49] trata el mismo problema para $JB^*$-álgebras consiguiendo resolverlo por métodos muy indirectos. Claro está que si le hubiera sido posible demostrar que la parte autoadjunta de una $JB^*$-álgebra (sin unidad) es una $JB$-álgebra (sin unidad), el problema de la unitización para $JB^*$-álgebras habría sido fácilmente resuelto haciendo uso del resultado de Behncke y del resultado principal de Wright en [46] anteriormente referido. Comentamos esto para hacer notar que el problema de la unitización presenta siempre serias dificultades, máxime tratándose, como es el caso, de álgebras no-asociativas. De otra parte las técnicas de rango numérico en álgebras no-asociativas normadas, que tan espectaculares resultados han dado últimamente, requieren para su aplicación que el álgebra sea unital. Por ello el problema de la unitización tiene mas importancia de lo que, a primera vista, pudiera parecer. Para $JB^*$-álgebras no conmutativas dicho problema no es trivialmente reducible al caso conmutativo, como muy bien el lector podrá observar.

También se demuestra en [49], apoyándose fuertemente en el resultado principal de [3] en su versión compleja dada por Wright en [46], que el bidual $A''$ de una $JB^*$-álgebra sin unidad $A$ con el producto de Arens y una cierta involución que extiende la de $A$, es también una $JB^*$-álgebra unital. Nosotros abordamos en primer lugar este problema lo que simplifica grandemente la tarea a realizar; concretamente, demostramos (Teorema 4.6):

*El bidual $A''$ de una $JB^*$-álgebra n.c. no-unital $A$, con el producto de Arens e involución doble traspuesta, es una $JB^*$-álgebra n.c. unital verificando toda identidad multilineal satisfecha por $A$.*

Resultado este que incluye un perfeccionamiento del de Youngson para $JB^*$-álgebras pues se determina muy fácilmente la involución en $A''$. Como consecuencia obtenemos (Corolario 4.7):

*Toda $JB^*$-álgebra n.c. sin unidad se puede unitizar como $JB^*$-álgebra n.c.*

De paso quedan resueltos, como casos particulares, los mismos problemas (sobre los que no hay ningún precedente en la literatura) para $B^*$-álgebras alternativas sin unidad (Corolarios 4.8 y 4.9). También en esta sección 4 se prueba (Teorema 4.2) que *el concepto de $JB^*$-álgebra n.c. coincide, en el caso unital, con el de V-álgebra de Jordan n.c.* y ya se ha indicado anteriormente que tal estructura algébrico-analítica es la mayor generalización natural no-asociativa de las $B^*$-álgebras (asociativas) con unidad. Se logran también resultados de estabilidad para la estructura (Proposición 4.10):

*Todo ideal bilátero cerrado M de una $JB^*$-álgebra n.c. A, es autoadjunto y A/M es, de forma natural, una $JB^*$-álgebra n.c.*

En la sección 5 se introduce el concepto de *$JW^*$-álgebra n.c.* , a saber: $JB^*$-álgebra n.c. que es un espacio de Banach dual. Los únicos trabajos que conocemos relacionados con $JW^*$-álgebras (conmutativas) son [27] y [16] . Nosotros demostramos, haciendo uso de un resultado de [49], que (Corolario 5.6):

*Toda $JW^*$-álgebra n.c. tiene unidad.*

A partir de un interesante resultado afirmando (Teorema 5.2):

*Los operadores hermitianos en un espacio de Banach complejo con único predual son débil* continuos,*

y apoyándose en un resultado de [16], se demuestra (Teorema 5.13):

*El producto de una JW*-álgebra n.c. es separadamente débil* continuo.*

Como consecuencia de ello y del teorema 1.19 se caracterizan los ideales biláteros débil* cerrados en una *JW**-álgebra n.c. obteniendo (Teorema 5.15):

*Los ideales biláteros débil* cerrados de una JW*-álgebra n.c. A, son los conjuntos de la forma Ae donde e es una proyección central en A.*

CAPITULO III. En este capítulo se empiezan a aplicar técnicas de geometría de espacios de Banach lo que, juntamente con algunos resultados clásicos de álgebras de Banach, permite demostrar (Lema 6.7):

*Las L-proyecciones en un espacio de Banach complejo conmutan con los operadores hermitianos,*

(las definiciones de los conceptos que se manejan aquí pueden verse en la Definición 6.1) como consecuencia de ello resulta (Teorema 6.9):

*Los M-ideales de un espacio de Banach complejo son invariantes por operadores hermitianos.*

Digamos que en su Memoria de Doctorado [28] (realizada simultáneamente a la presente Memoria) nuestro compañero R. Payá ha obtenido, utilizando técnicas de demostración distintas a las nuestras, resultados muy generales que incluyen como caso particular a los anteriormente indicados.

Los resultados conseguidos en la sección 6 se aplican en la siguiente sección para caracterizar los ideales biláteros cerrados de una $JB^*$-álgebra n.c. (Teorema 7.4):

*Los M-ideales de una $JB^*$-algebra n.c. coinciden con los ideales biláteros cerrados del álgebra.*

Resultado que generaliza ampliamente el análogo conocido para $B^*$-álgebras ([41]).

También merece destacarse el siguiente resultado que expresa una interesantísima propiedad geométrica del predual de una $JW^*$-álgebra (Teorema 7.8):

*El predual $A_*$ de una JW*-álgebra A es un L-sumando del dual A' de A.*

CAPITULO IV. En la sección 8 se aplican las técnicas usadas en [29] y [30] para obtener un teorema de estructura para los isomorfismos de JB*-álgebras n.c.(Teorema 8.13): que, en esencia, afirma:

*Dos JB*-álgebras n.c. A y B que son isomorfas como álgebras son también totalmente isomorfas como JB*-álgebras n.c.*

Previamente *se ha demostrado la unicidad de la norma completa en una JB*-álgebra n.c.* (Proposición 8.3) y como consecuencia *la continuidad automática de los isomorfismos entre JB*-álgebras n.c.* (Corolario 8.4).

En esta sección se aprecia claramente la extraordinaria importancia que tiene el hecho de que la clase de las JB*-álgebras n.c. sea estable por simetrizaciones (véase, a título de ejemplo, el Corolario 8.16).

Conseguimos demostrar también (Corolarios 8.9 y 8.16) que:

*Toda derivación de una JW*-álgebra n.c. es débil* continua.*

*Los isomorfismos algebraicos de JW*-álgebras n.c. son débil* continuos.*

Resultados que no son conocidos en el caso conmutativo.

La sección 9 la consideramos muy original. En ella se introduce de forma coherente el concepto de *factor* y de *representación factorial* de una JB*-álgebra n.c. (Definición 9.1) y se aborda el problema, básico en este tipo de estudios, de la abundancia de representaciones factoriales. Haciendo uso de técnicas geométricas y de la caracterización conseguida de los ideales biláteros cerrados de una JB*-álgebra n.c. y de los ideales biláteros débil* cerrados de una JW*-álgebra n.c., anteriormente comentadas, se logra demostrar (Corolario 9.9):

*Toda JB*-álgebra n.c. posee una familia separadora de representaciones factoriales.*

Indiquemos que este resultado en absoluto puede reducirse al caso conmutativo.

CAPITULO V. En la primera sección de este capítulo se trabaja en $B^*$-álgebras asociativas logrando una caracterización de los ideales primitivos de una tal álgebra. Concretamente, demostramos (Teorema 10.7):

*Los ideales primitivos de una $B^*$-álgebra coinciden con los M-ideales primitivos de su espacio de Banach subyacente,*

lo que constituye un perfeccionamiento de un resultado de Alfsen y Effros ([2 : Corolario 6.19]).

Se demostró en [26] que el álgebra de los octoniones complejos $O$ puede dotarse de estructura de $B^*$-álgebra (alternativa no asociativa). Haciendo uso del Teorema 8.13 demostramos en la sección 11 que tal estructura es esencialmente única (Teorema 11.2):

*Salvo isomorfismos totales hay una única $B^*$-álgebra de octoniones complejos.*

Este resultado permite hablar sin ambigüedad de la $B^*$-álgebra de los octoniones complejos $O$.

El teorema de abundancia de representaciones factoriales de una $JB^*$-álgebra n.c. antes citado permite reducir, en cierto sentido, el estudio de este tipo de álgebras a las estructuras mas simples, es decir, los factores. Aunque a nivel general no hemos resuelto el problema (dificil) de la clasificación de los mismos ( no obstante, tenemos resultados muy precisos al respecto ), sí hemos logrado dar una completa descripción de los factores alternativos, demostrando (Teorema 11.5):

*Un factor alternativo o es asociativo o es la $B^*$-álgebra de los octoniones complejos.*

Este resultado permite extender el Teorema 10.7 a las $B^*$-álgebras alternativas (Teorema 11.7):

*Los M-ideales primitivos de una $B^*$-álgebra alternativa coinciden con los ideales primitivos algébricos.*

También se establece para $B^*$ -álgebras alternativas un teorema (Teorema 11.13) análogo al de Alfsen, Shultz y Størmer para $JB$-álgebras ([2: Teorema 9.5]). Hemos logrado también un teorema de estructura para $W^*$-álgebras alternativas (Teorema 11.15):

*Toda $W^*$-álgebra alternativa $A$ se descompone de forma única en suma directa de ideales:*

$$A = A_s \oplus A_p$$

*donde $A_s$ es una $W^*$-álgebra asociativa y $A_p$ es una $W^*$-álgebra puramente alternativa.*

Como consecuencia de todo lo anterior, se consiguen describir perfectamente las $B^*$-álgebras alternativas, a saber (Teorema 11.16):

*No hay mas $B^*$-álgebras alternativas que las subálgebras cerradas y autoadjuntas de un álgebra $A \oplus C(X,O)$ donde $A$ es una $B^*$-álgebra asociativa y $X$ un espacio de Hausdorff compacto.*

Finalmente se demuestra (Teorema 11.23) que:

*No hay mas $W^*$-álgebras puramente alternativas que las álgebras $C(X,O)$ donde $X$ es un espacio hyperestoneano,*

resultado que, junto con el teorema 11.15 da una perfecta descripción de las $W^*$-álgebras alternativas.

Para acabar, no quiero dejar de hacer constar que la presente Memoria está integrada en una línea de investigación en la que, desde hace tiempo, llevan trabajando varios compañeros de mi Departamento, habiendo conseguido, como se habrá podido apreciar, resultados importantes que están en la base de este trabajo. Esta labor investigadora ha sido dirigida en todo momento por el Dr. Angel Rodríguez Palacios a quien quiero manifestar mi mas sincero agradecimiento por su constante orientación y ayuda sin las cuales no habría sido posible la realización de esta Memoria.

Mi agradecimiento también al Dr. Fuentes Miras, Director del Departamento de Teoría de Funciones y los restantes miembros de dicho Departamento por el estímulo y apoyo que me han prestado en todo momento.

Granada, Junio 1980

Francisco Javier Pérez González

# CAPITULO I

CONCEPTOS DE BASE

RANGO NUMERICO EN ALGEBRAS NORMADAS

RESULTADOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LAS JB*-ALGEBRAS.

## 1. DEFINICIONES Y CONCEPTOS ALGEBRAICOS BASICOS.

En esta sección se introducen los distintos tipos de álgebras objeto de nuestro estudio - fundamentalmente álgebras de Jordan no-conmutativas y alternativas - y se exponen, por razones de complitud, algunos conceptos básicos de la teoría general de álgebras no-asociativas. Incluimos también algunos resultados que serán de utilidad mas adelante. Para mayor información acerca de estas cuestiones puede consultarse [34] para álgebras no-asociativas en general y [18] para el caso particular de álgebras de Jordan.

**1.1 DEFINICION.** Un *algebra* sobre un cuerpo conmutativo $K$ es un par $(X,f)$ donde $X$ es un espacio vectorial sobre $K$ y $f$ una aplicación bilineal, llamada *producto*, de $X \times X$ en $X$.

Consideraremos solamente álgebras reales ($K = \mathbb{R}$) o complejas ($K = \mathbb{C}$) e indicaremos el cuerpo base cuando ello tenga alguna importancia.

Se dice que un álgebra es *asociativa* o *conmutativa* cuando la correspondiente propiedad es verificada por su producto. Los calificativos "*no-asociativa*" ("*no-conmutativa*") aplicados a un álgebra quieren decir que el álgebra en cuestión no se supone asociativa (conmutativa) *aunque tampoco se excluye esta posibilidad.* Cuando existe elemento neutro para el producto tal elemento se llama *unidad* del álgebra y se dice que el álgebra tiene unidad. Los conceptos que aparecen en la teoría de álgebras asociativas y que son definidos sin hacer referencia alguna a la asociatividad tales como los de *ideal, homomorfismo* , *álgebra cociente* y otros, se trasladan sin mas a álgebras no-asociativas. *Por ideal se entenderá siempre ideal bilátero.*

**1.2 NOTACION.** Usualmente se notan con una misma letra el álgebra y el espacio vectorial subyacente, y notamos el producto, en general, por yuxtaposición, reservándose la precisión en este aspecto para aquellas situaciones que puedan ser confundidoras; por ejemplo, cuando sobre un mismo espacio vectorial se considera mas de un producto.

Recordemos que para cada espacio vectorial no trivial $X$ , el conjunto $L(X)$ de las aplicaciones lineales de $X$ en $X$ tiene, de forma canónica, estructura de álgebra asociativa con unidad.

En toda álgebra $A$ con producto $(a,b) \to ab$ definimos (para todos $a,b,c \in A$):

$$[a,b] = ab - ba$$

$$[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$$

Para cada elemento $a$ de $A$ el *multiplicador derecha (izquierda)* por $a$ es la aplicación $R_a$ ( $L_a$ ) de $A$ en $A$ definida por $b \to ba$ ($b \to ab$ ). Claramente $R_a$ y $L_a$ pertenecen a $L(A)$ y las aplicaciones de $A$ en $L(A)$ definidas por $a \to R_a$ y $a \to L_a$ son lineales.

Podemos definir en el espacio vectorial de $A$ un producto $(a,b) \to a.b$ por:

$$a.b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

obteniendo de esta forma un álgebra, llamada *simetrizada* de $A$, que notaremos $A^+$ y que, evidentemente, es conmutativa. Análogamente $A^-$ designará el álgebra cuyo espacio vectorial es el de $A$ con producto definido por: $(a,b) \to \frac{1}{2}[a,b]$.

Notando $L_a^+$ ( $L_a^-$ ) el multiplicador izquierda por $a$ en $A^+$ ( $A^-$ ), tenemos:

$$L_a^+ = \frac{1}{2}(L_a + R_a), \qquad L_a^- = \frac{1}{2}(L_a - R_a).$$

En general dada un álgebra $A = (X,f)$ los multiplicadores se notarán por $L_a^f$ y $R_a^f$ ; el *producto revertido de* $f$ se notará $f^r$ y está definido (para todos $a,b \in A$) por:

$$f^r(a,b) = f(b,a) \qquad (1)$$

con ello $A^+ = (X, \frac{1}{2}(f + f^r))$.

1.3 NUCLEO Y CENTRO DE UN ALGEBRA. El *núcleo* y el *centro* de un álgebra $A$ son, respectivamente, los conjuntos definidos por:

$$N(A) = \{ c \in A: [a,b,c] = [a,c,b] = [c,a,b] = 0, \ (a,b \in A)\}$$

$$Z(A) = \{c \in A: [a,b,c] = [a,c,b] = [c,a] = 0, \ (a,b \in A)\}$$

En toda álgebra $A$ se comprueban fácilmente las identidades $(a,b,c,d \in A)$:

$$a[b,c,d] + [a,b,c]d = [ab,c,d] - [a,bc,d] + [a,b,cd] \quad (1)$$

$$[ab,c] - a[b,c] - [a,c]b = [a,b,c] - [a,c,b] + [c,a,b] \quad (2)$$

De la identidad (1) se sigue fácilmente que $N(A)$ es una *subálgebra (asociativa)* de $A$ y de la identidad (2) se deduce que $Z(A)$ es una *subálgebra (conmutativa y asociativa)* de $A$.

1.4 UNITIZACION DE UN ALGEBRA. Sea $A$ un álgebra sobre $K$ con o sin unidad. La *unitización* $\tilde{A}$ de $A$ es el álgebra cuyo espacio vectorial es $A \times K$ con el producto definido (para todos $a,b \in A, \alpha,\beta \in K$) por:

$$(a,\alpha)(b,\beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta).$$

El elemento $(0,1)$ es unidad de $\tilde{A}$, la aplicación $a \to (a,0)$ es un homomorfismo inyectivo de $A$ en $\tilde{A}$ y (identificando $A$ con su imagen en $\tilde{A}$ ) $A$ es un ideal (maximal) de $\tilde{A}$.

1.5 COMPLEXIFICACION DE UN ALGEBRA. Sea $A$ un álgebra sobre $\mathbb{R}$. La *complexificación* $A_c$ de $A$ es el conjunto $A \times A$ con adición, multiplicación escalar y producto definidos (para todos $a,b,c,d \in A, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ) por:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d),$$

$$(\alpha + i\beta)(a,b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a),$$

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Se comprueba fácilmente que $A_c$ es un álgebra compleja y que la aplicación $a \to (a,0)$ es un $\mathbb{R}$-monomorfismo de $A$ en $A_c$.

1.6 DERIVACIONES DE UN ALGEBRA. Se llama *derivación* de un álgebra $A$ a toda aplicación lineal $D$ de $A$ en $A$ verificando:

$$[D, L_a] = L_{Da} \qquad (a \in A)$$

o equivalentemente: $D(ab) = aDb + (Da)b \qquad (a,b \in A)$.

Es immediato que el *conjunto de las derivaciones de $A$ es una subálgebra de $L(A)^-$.*

Recordemos que un *idempotente* en un álgebra $A$ es un elemento $e$ de $A$ verificando $ee = e \neq 0$. Un *idempotente central* es un idempotente que pertenece a $Z(A)$.

1.7 PROPOSICION. *Sea $A$ un álgebra, $D$ una derivación de $A$ y $e$ un idempotente central de $A$; entonces $De = 0$.*

DEMOSTRACION. Es immediata.

En toda álgebra $A$ definimos por inducción (para todo $a \in A$, k = 1,2,...):

$$a^1 = a, \quad a^{k+1} = a^k a$$

si el álgebra tiene unidad I se define $a^0 = I$. Se dice que $A$ es un álgebra de *potencias asociativas* si la subálgebra engendrada por cada elemento de $A$ es asociativa.

1.8 ALGEBRAS DE JORDAN NO-CONMUTATIVAS. Un álgebra verificando los axiomas:

(I) $(ab)a = a(ba)$ $\quad (a,b \in A)$ (ley flexible)

(II) $(a^2b)a = a^2(ba)$ $\quad (a,b \in A)$ (axioma de Jordan)

se llama álgebra de *Jordan no-conmutativa* (brevemente: álgebra de Jordan n.c.). *El calificativo "no-conmutativa" se omitirá cuando el álgebra sea conmutativa* (en cuyo caso (I) se satisface automáticamente).

En términos de operadores los axiomas (I) y (II) se escriben:

$$\text{(I')} \quad [R_a, L_a] = 0, \qquad \text{(II')} \quad [L_{a^2}, R_a] = 0 \quad (a \in A)$$

Toda álgebra que verifique el axioma (I) se llama *flexible*.

Si $A$ es un álgebra de Jordan o de Jordan n.c. su unitización $\tilde{A}$ es del mismo tipo que $A$.

1.9 EJEMPLOS. i) Si $A$ es un álgebra asociativa se comprueba fácilmente que $A^+$ es un álgebra de Jordan. Se dice que $A^+$ es el *álgebra de Jordan subyacente* a $A$ y el producto de $A^+$ se llama *producto de Jordan.*

ii) Si $A$ es un álgebra (sobre $K$) y $\alpha \in K$ notamos $A(\alpha)$ el álgebra cuyo espacio vectorial es el de $A$ con producto definido por $(a,b) \to \alpha ab + (1-\alpha)ba$. Nótese que $A(\frac{1}{2}) = A^+$ . Si $A$ es asociativa $A(\alpha)$ es un álgebra de Jordan no-conmutativa. Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$ y $A$ no es conmutativa $A(\alpha)$ no es conmutativa.

La importancia del ejemplo i) motiva la siguiente definición: *Un álgebra de Jordan se llama especial si es una subálgebra de un álgebra $A^+$ con $A$ asociativa.* La existencia de álgebras de Jordan no especiales fue demostrada por A.A. Albert ([1]) probando que el álgebra $M$ de las matrices hermitianas de orden 3 sobre los números de Cayley es un álgebra de Jordan no especial. Tales álgebras se llaman *excepcionales* .

1.10 PROPOSICION. *En toda álgebra flexible A se verifica (para todos $a,b,c \in A$):*

*i)* $L_{ab} - L_aL_b = R_{ba} - R_aR_b$;

*ii)* $L_{a^2} - L_a^2 = R_{a^2} - R_a^2$;

*iii)* $[L_a, R_b] = [R_a, L_b]$;

*iv)* $[R_{a^2}, L_a] = [L_{a^2}, L_a] = [R_{a^2}, R_a] = [L_{a^2}, R_a]$.

DEMOSTRACION. i) La ley flexible se puede expresar por $[a,b,a] = 0$ y sustituyendo $a$ por $a+c$ obtenemos $[a,b,c] + [c,b,a] = 0$ que, expresado en términos de operadores tomando $c$ como variable, es i).

ii) Hacer $b = a$ en i).

iii) Basta sustituir $a$ por $a+b$ en (I').

iv) Se deduce sin dificultad de ii) y iii).

Obtenemos a continuación algunas consecuencias de las anteriores identidades.

1.11 PROPOSICION. *Un álgebra A es flexible si y solo si para todo elemento a de A,* $L_a - R_a$ *es una derivación de* $A^+$.

DEMOSTRACION. Sea A flexible $a$ y $b$ elementos de A, usando sucesivamente 1.10 iii) y 1.10 i) resulta:

$$[L_b^+, L_a - R_a] = [\tfrac{1}{2}(L_b + R_b), L_a - R_a] =$$
$$= \tfrac{1}{2}([L_b, L_a] - [L_b, R_a] + [R_b, L_a] - [R_b, R_a]) =$$
$$= \tfrac{1}{2}([L_b, L_a] - [R_b, R_a]) = \tfrac{1}{2}(L_{ba} - L_{ab} + R_{ba} - R_{ab}) =$$
$$= \; - L^+_{(L_a - R_a)b} \, ,$$

lo que nos dice que $L_a - R_a$ es una derivación de $A^+$. El recíproco se deduce de que $[L^+_a, L_a - R_a] = 0$ implica $[L_a, R_a] = 0$.

1.12 PROPOSICION. *Un álgebra A es de Jordan no-conmutativa si y solo si para cada elemento a de A,* $\{L_a, R_a, L_{a^2}, R_{a^2}\}$ *es un subconjunto conmutativo de* $L(A)$.

DEMOSTRACION. Es consecuencia de 1.10 iv) y de (II').

1.13 PROPOSICION. *Un álgebra flexible A es de Jordan no-conmutativa si y solo si* $A^+$ *es un álgebra de Jordan.*

DEMOSTRACION. Basta observar que si $a \in A$ entonces, en virtud de 1.10 iv), $[L_{a^2} + R_{a^2}, L_a + R_a] = 0$ si y solo si $[L_{a^2}, R_a] = 0$.

La siguiente definición introduce un operador de gran utilidad en el estudio de las álgebras de Jordan.

**1.14 DEFINICION.** En un álgebra $A$ se define el operador $U_a$ (para todo $a \in A$) por:

$$U_a = (L_a + R_a)L_a - L_{a^2}.$$

**1.15 PROPOSICION.** *En un álgebra flexible A se verifica:* $U_a^+ = U_a$ $(a \in A)$, *donde* $U_a^+ = 2(L_a^+)^2 - L_{a^2}^+$.

**DEMOSTRACION.** Es immediata teniendo en cuenta que, por 1.10 ii) y (I'), en un álgebra flexible se verifica:

$$(L_a + R_a)L_a - L_{a^2} = (L_a + R_a)R_a - R_{a^2}.$$

**1.16 IDENTIDADES E INVERSOS EN ALGEBRAS DE JORDAN NO-CONMUTATIVAS.** En toda álgebra de Jordan $A$ se demuestran por métodos convencionales ([18: p.41]) las dos identidades siguientes (para todos $a,b,c \in A$ y $k = 1,2,\ldots$):

$$[L_c, [L_a, L_b]] = L_{[L_a, L_b]c} \qquad (1)$$

$$L_{a^{k+2}} = 2L_a L_{a^{k+1}} - (2L_a^2 - L_{a^2})L_{a^k} \qquad (2)$$

no ocurre así con otras identidades, algunas de ellas fundamentales. Claro está que la obtención de identidades en álgebras de Jordan especiales no presenta mas dificultad que en el caso asociativo, el problema está en pasar de aquí al caso general. Dos teoremas debidos a MacDonald ([18: p.41]) y a Shirshov ([18: p.48]) resuelven en parte este problema y vienen a decir, hablando en términos intuitivos, que *toda identidad en tres elementos de grado cero o uno en uno de ellos, que sea válida en toda álgebra de Jordan especial es válida en toda álgebra de Jordan*. Haciendo uso de este resultado se prueba la identidad "fundamental":

$$U_a U_b U_a = U_{U_a(b)} \tag{3}$$

Sendas consecuencias importantes se deducen de las identidades (1) y (2): la primera de ellas equivale a afirmar que $[L_a, L_b]$ *es derivación de* $A$ *para todos* $a$ *y* $b$ *en* $A$; la segunda implica que $L_{a^k}$ pertenece a la subálgebra de $L(A)$ engendrada por $L_{a^2}$ y $L_a$, y siendo $[L_{a^2}, L_a] = 0$, dicha subálgebra es conmutativa por lo que, en particular, resulta:

$$[L_{a^k}, L_{a^m}] = 0 \quad (a \in A,\ k,m = 1, 2, ..)$$

lo que, a su vez, claramente implica que A es de potencias asociativas y, de aquí se deduce fácilmente sin mas que tener en cuenta que en un álgebra de Jordan no-conmutativa $A$ las potencias en $A$ y en $A^+$ coinciden, que *toda álgebra de Jordan no-conmutativa es de potencias asociativas.*

El conocimiento del producto de Jordan en un álgebra asociativa no permite reconstruir el producto original; no obstante ciertos conceptos, en apariencia intrínsecos al producto asociativo, pueden ser expresados en el producto de Jordan. Así ocurre con el concepto de elemento inversible y de inverso de un tal elemento; concretamente: si $A$ es un álgebra asociativa con unidad I, un elemento $b$ de $A$ es inverso de $a \in A$ si y solo si se verifican las igualdades:

$$a.b = I$$

$$a^2.b = a$$

([18: p.51]). Consecuentemente, *en un álgebra de Jordan $A$ con unidad I se dice que $a \in A$ es inversible con inverso $b \in A$ si se verifica* $ab = I$ *y* $a^2 b = a$. Se demuestra que *la relación así definida es simétrica* y que *el inverso es único*. Además se demuestra que *un elemento $a$ en $A$ es inversible si y solo si $U_a$ es* *inversible en* $L(A)$ *siendo* $U_a^{-1} = U_{a^{-1}}$ *y* $a^{-1} = U_a^{-1}(a)$. Estos resultados así como otros de interés relativos a inversos en álgebras de Jordan pueden verse en ([18: p.52]). La identidad (3) es fundamental para la obtención de los mismos.

La extensión de los resultados anteriores para álgebras de Jordan no-conmutativas con unidad se debe a McCrimmon ([25: II.1]). En una tal álgebra $A$ con unidad $I$ se dice que *a es inversible con inverso* $b$ *si se verifican las igualdades:*

$$ab = ba = I$$

$$a^2 b = ba^2 = a$$

demostrándose ([25: Teorema 2.2]) que *ello es equivalente a que* $b$ *sea inverso de* $a$ *en el álgebra de Jordan* $A^+$.

Notaremos $\mathrm{Inv}(A)$ el conjunto de los elementos inversibles de $A$.

*El espectro de un elemento* $a$ *de un álgebra de Jordan no-conmutativa compleja* $A$ es el subconjunto de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}(A,a)$ ($\mathrm{Sp}(a)$ si no hay confusión) definido por:

i) Si $A$ tiene unidad $I$, $\mathrm{Sp}(A,a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda I \notin \mathrm{Inv}(A)\}$

ii) Si $A$ no tiene unidad $\mathrm{Sp}(A,a) = \mathrm{Sp}(\tilde{A},(a,0))$.

Como consecuencia de lo anteriormente dicho:

$$\mathrm{Sp}(A,a) = \mathrm{Sp}(A^+,a) \qquad (4)$$

A continuación nos proponemos demostrar que hay una biyección entre el conjunto de los ideales biláteros con unidad de un álgebra de Jordan n.c. y el conjunto de los idempotentes centrales de dicha álgebra.

1.17 PROPOSICION. *i) Sea A un álgebra flexible, a y b elementos de A; entonces* $[R_b, L_a]$ *es derivación de* $A^+$ *si y solo si lo es* $[L_b^+, L_a^+]$.
*ii) Sea A un álgebra de Jordan no-conmutativa, a y b elementos cualesquiera de A; entonces* $L_a - R_a$ *y* $[R_b, L_a]$ *son derivaciones de* $A^+$.

DEMOSTRACION. i) Se ha visto en la Proposición 1.11 que $L_a^-$ y $L_b^-$ son derivaciones de $A^+$ con ello tenemos:

$$[R_b, L_a] = [L_b^+ - L_b^-, L_a^+ + L_a^-] = [L_b^+, L_a^+] - [L_b^-, L_a^-] + [L_b^+, L_a^-] - [L_b^-, L_a^+] =$$

$$= [L_b^+, L_a^+] - [L_b^-, L_a^-] - L^+_{L_a^-(b)} - L^+_{L_b^-(a)} =$$

$$= [L_b^+, L_a^+] - [L_b^-, L_a^-]$$

y para concluir la demostración basta notar que $[L_b^-, L_a^-]$

es una derivación de $A^+$.

ii) Consecuencia de la Proposición 1.11, la identidad 1.16 (1) y la primera parte.

1.18 LEMA. *Sea A un álgebra verificando que* $L_a - R_a$ *y* $[R_b, L_a]$ *son derivaciones de* $A^+$ *para todos* $a$ *y* $b$ *en* $A$. *Sea* $e$ *un idempotente de* $A$ *perteneciente a* $Z(A^+)$; *entonces* $e$ *pertenece a* $Z(A)$.

DEMOSTRACION. Por la proposición 1.7 tenemos para todos $a$ y $b$ en $A$:

$$(L_a - R_a)e = [a,e] = 0; \quad [R_b, L_a]e = [a,e,b] = 0$$

y a partir de aquí obtenemos:

$$b(ae) = b.(ae) + \frac{1}{2}[b,ae] = b.(a.e) + \frac{1}{2}[b,a.e] =$$

$$= (b.a).e + \frac{1}{2}a.[b,e] + \frac{1}{2}[b,a].e =$$

$$= (b.a)e + \frac{1}{2}[b,a]e = (ba)e.$$

Lo que concluye la demostración.

La versión para álgebras de Jordan del teorema que sigue puede verse en [27: Teorema I.3.9].

1.19 TOREMA. *En un álgebra de Jordan no conmutativa* A *son equivalentes:*

*i)* $Ae$ *es un ideal bilátero de* A *con unidad* $e$*;*

*ii)* $e$ *es un idempotente central de* A.

DEMOSTRACION. Que ii) implica i) es trivial. Recíprocamente si $Ae$ es un ideal bilátero de A con unidad $e$, entonces $Ae$ es un ideal de $A^+$ con unidad $e$, por tanto, en virtud de la citada versión conmutativa del teorema, $e \in Z(A^+)$ y por la Proposición 1.17 y el lema 1.18 concluimos que $e \in Z(A)$.

NOTA. El teorema 1.19 (del que no conocemos ninguna referencia en la literatura) será de gran utilidad en las secciones 5 y 11.

1.20 ALGEBRAS ALTERNATIVAS. Un álgebra A verificando los axiomas:

$$a^2 b = a(ab), \quad ba^2 = (ba)a \qquad (a, b \in A)$$

se llama un álgebra *alternativa*.

Se prueba fácilmente que toda álgebra alternativa es de Jordan no-conmutativa. El siguiente resultado conocido como "Teorema de Artin" es básico en la teoría de álgebras alternativas e indica que este tipo de álgebras está muy próximo a las asociativas.

1.21 TEOREMA [34: p.29]. *En un álgebra alternativa la subálgebra engendrada por dos elementos cualesquiera es asociativa.*

## 2. ALGEBRAS NORMADAS.

En esta sección se introducen los conceptos de $JB^*$-álgebra no-conmutativa y de $B^*$-álgebra no-asociativa y se dan las definiciones del producto de Arens e involución "doble traspuesta" obteniéndose algunas consecuencias.

2.1 DEFINICION. Un *álgebra normada* es un par $(X,f)$ donde $X$ es un espacio normado y $f$ una aplicación bilineal de $X \times X$ en $X$ continua y de norma menor o igual que 1.

Notando $\|.\|$ la norma de $X$ se verificará:

$$\|f(a,b)\| \leqslant \|a\|\|b\| \qquad (a,b \in X)$$

Evidentemente si el álgebra tiene unidad I, es $\|I\| \geq 1$. *Si* $\|I\| = 1$ *se dice que el álgebra es unital.*

Si $X$ es un espacio normado llamaremos *producto de álgebra* sobre $X$ a toda aplicación bilineal continua de $X \times X$ en $X$ de norma menor o igual que 1.

Un álgebra normada $(X,f)$ tal que $X$ es un espacio de Banach se dice que es un *álgebra normada completa* reservándose el nombre de *álgebras de Banach* para álgebras asociativas normadas completas.

La Teoría de las Algebras de Banach constituye un tema clásico dentro del Análisis. En contraste con ello hay que esperar hasta fechas recientes para encontrar trabajos en álgebras normadas no asociativas. Una de las técnicas que se utilizan en el estudio de tales álgebras consiste en localizar ciertos problemas en subálgebras mas ricas que la total. Como ejemplo de esto que decimos baste el siguiente:

2.2 TEOREMA ([26: II.5.1]). *Dada un álgebra A de Jordan no-conmutativa, compleja, normada, completa, con unidad y un elemento $a$ de A, existe una subálgebra de A asociativa, conmutativa y cerrada B tal que $a \in B$ y* $\mathrm{Sp}(A,a) = \mathrm{Sp}(B,a)$.

El teorema 2.2 implica claramente que todas las propiedades del espectro de un elemento válidas en álgebras de Banach también lo son para álgebras de Jordan no-conmutativas complejas normadas completas.

Si $A$ es un álgebra normada asociativa $A^+$ es un álgebra de Jordan normada. Ejemplos de esta clase son las llamadas *$JC^*$-álgebras* (res. *$JC$-álgebras*) que se definen como subespacios nórmicamente cerrados y autoadjuntos (res. de operadores autoadjuntos) del álgebra de los operadores continuos sobre un espacio de Hilbert complejo y que son estables para el producto de Jordan. Las $JC$-álgebras han sido ampliamente estudiadas por Topping ([44] y [45]) y Størmer ( [42] y [43]). La axiomatización de este tipo de álgebras ha dado lugar, respectivamente, a las $JB^*$-álgebras introducidas por Kaplansky y a las $JB$-álgebras introducidas y exahustivamente estudiadas por Alfsen, Shultz y Størmer en [3].

2.3 DEFINICION. Una *$JB$-álgebra* es un álgebra de Jordan real normada completa $A$ verificando: $\|a\|^2 = \|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\| \quad (a, b \in A)$.

Evidentemente toda $JC$-álgebra es $JB$-álgebra pero existen también $JB$-álgebras excepcionales pues es sabido ([35]) que el álgebra $M_3^8$ puede normarse como $JB$-álgebra.

Recordemos que una *involución* $*$ en un espacio vectorial complejo $X$ es una aplicación $x \to x^*$ de $X$ en $X$ verificando:

$$(x+y)^* = x^* + y^*; \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*; \quad (x^*)^* = x \quad (x, y \in X, \lambda \in C)$$

El conjunto $Sim(X) = \{x \in X: x^* = x\}$ es evidentemente un subespacio real de $X$ cuyos elementos se llaman *simétricos* o *autoadjunyos* y $X$ es la suma directa $X = Sim(X) \oplus iSim(X)$. Todo subconjunto de $X$ invariante por la involución se dice que es autoadjunto. Si $M$ es un subespacio autoadjunto de $X$, definiendo (para todo $x \in X$): $(x+M)^* = x^* + M$, se obtiene una involución en $X/M$ llamada *involución cociente* .

Una involución $*$ en un álgebra compleja $A$ se dice *multiplicativa* si verifica: $(ab)^* = b^* a^*$ $(a, b \in A)$.

2.4 DEFINICION. Una *JB*-álgebra no-conmutativa* es un álgebra de Jordan no-conmutativa compleja normada completa con una involución multiplicativa $*$ verificando:

$$\| U_a(a^*) \| = \|a\|^3 \qquad (a \in A) \quad .$$

*El calificativo "no-conmutativa" se omitirá cuando el álgebra sea conmutativa.*

Claramente las $JC$-álgebras están en correspondencia uno a uno con las $JC^*$-álgebras, a saber: toda $JC$-álgebra es la parte autoadjunta de una única $JC^*$ -álgebra. Este resultado también permanece para los respectivos modelos abstractos. Es fácil ver que la parte autoadjunta de una $JB^*$álgebra *unital* es una $JB$-álgebra unital y, recíprocamente se verifica:

2.5 TEOREMA ( [46]). *La complexificación de una $JB$-álgebra unital puede dotarse de forma única de estructura de $JB^*$-álgebra unital cuya parte autoadjunta es la $JB$-álgebra de partida.*

2.6 PROPOSICION. *Sea $A$ un álgebra flexible normada completa con involución multiplicativa. Entonces $A$ (con la norma e involución dadas) es una $JB^*$-álgebra no-conmutativa si y solo si $A^+$ (con la misma norma e involución) es una $JB^*$-álgebra.*

DEMOSTRACION. Consecuencia de las Proposiciones 1.13 y 1.15.

La proposición anterior está enunciada en términos muy precisos para evitar el que pueda pensarse que si $A$ es un álgebra de Jordan n.c. y $A^+$ es una $JB^*$-álgebra entonces $A$ con la norma($\|.\|$)e involución de $A^+$ es a su vez una $JB^*$-álgebra n.c. Ello , aunque resulta ser cierto (Teorema 4.4 y Corolario 4.7), no es ni mucho menos evidente, pues aunque la norma dada hace continuo al producto de $A$ (Proposición 8.3), no tiene por qué ser $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$.

2.7 DEFINICION. Una *$B^*$-álgebra no-asociativa* es un álgebra compleja, normada, completa, con involución multiplicativa $*$ verificando: $\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (a \in A)$.

La clase de las $JB^*$ -álgebras n.c. incluye la clase de las $B^*$-álgebras alternativas como muestra la siguiente proposición:

2.8 PROPOSICION. *En un álgebra alternativa A normada con involución multiplicativa $*$ se verifica:*

$$(\ \|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \quad (a \in A)\ ) \Leftrightarrow (\ \|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (a \in A)\ ).$$

DEMOSTRACION. Siendo $A$ alternativa la subálgebra engendrada por dos elementos es asociativa, en particular $U_a(a^*) = aa^*a$ . Por tanto: $\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \Rightarrow \|a\|^2 \leqslant \|a^*a\|$ con lo que fácilmente se obtiene $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ .Recíprocamente si $\|a^*a\| = \|a\|^2$ entonces $\|a\| = \|a^*\|$ y $\|a\|^4 = \|a^*a\|^2 = \|a^*aa^*a\| \leqslant \|a\|\|aa^*a\| \leqslant \|a\|^4$ de donde $\|a\|^3 = \|aa^*a\|$.

Para todo espacio normado $X$ notamos $X'$ ($X''$ ) el espacio de Banach dual (bidual) de $X$. La forma bilineal canónica asociada al par dual $(X',X)$ se notará $(x',x) \to \langle x',x \rangle$ .

Sean $X,Y,Z$ espacios normados sobre $K$ y $f : X\times Y \to Z$ una aplicación bilineal continua. Se llama *traspuesta de Arens* de $f$ a la aplicación $f' : Z'\times X \to Y'$, definida por:

$$\langle f'(z',x),y\rangle = \langle z',f(x,y)\rangle \qquad ( (z',x)\in Z'\times X,\ y\in Y )$$

De forma análoga se definen la segunda y la tercera traspuestas de Arens de $f$ que se notan respectivamente $f''$ y $f'''$ ; demostrándose sin dificultad que la aplicación $f \to f'''$ es *una isometría lineal* del espacio $BL(X\times Y,Z)$ (aplicaciones bilineales continuas de $X\times Y$ en $Z$ ) en $BL(X''\times Y'',Z'')$ y que $f'''$ *extiende a* $f$.

De las anteriores consideraciones se deduce que si $(X,f)$ es un álgebra normada, la tercera traspuesta de Arens de $f$, $f'''$, que por comodidad notaremos por $f^t$, es un producto de álgebra sobre $X''$, llamado *producto de Arens y* $(X,f)$ *es una subálgebra de* $(X'',f^t)$ . Cuando el producto $f$ es asociativo también lo es $f^t$ pero puede ocurrir que $f$ sea conmutativo y $f^t$ no lo sea ([5]) ello motiva la siguiente definición:

*El producto $f$ se llama Arens-regular si* $f^{rt} = f^{tr}$.

(la letra $r$ indica el revertido del producto en cuestión. Ver 1.2(1))

Evidentemente si $f$ es conmutativo ( $f^r = f$) entonces $f^t$ es conmutativo ( $f^{tr}= f^t$ ) si y solo si $f$ es Arens-regular ( $f^{tr}=f^{rt}$).

*Un álgebra normada A se dice Arens-regular si su producto es Arens-regular.* El bidual A'' de un álgebra normada A se considerará siempre como álgebra normada con el producto de Arens y A se identifica con una subálgebra de A''.

Recordando que todo espacio normado X es débil* denso en X'' (nos referimos a la topología débil* $\sigma(X'',X')$ ), interesa conocer las propiedades de continuidad débil* del producto de Arens. En este sentido se sabe ([5]) que:

*Dada un álgebra normada A con producto $f$, $f^t$ es la única extensión de $f$ a A'' verificando:*

*i) para todo b'' en A'' la aplicación de A'' en A''* $a'' \to f^t(a'',b'')$ *(esto es $R^{f^t}_{b''}$) es débil* continua;*

*ii) para todo a en A la aplicación de A'' en A''* $b'' \to f^t(a,b'')$ *(esto es $L^{f^t}_{a}$ ) es débil* continua.*

Puesto que propiedades análogas caracterizan a $f^t$ se comprueba fácilmente que *la regularidad-Arens de $f$ equivale a que las aplicaciones $L^{f^t}_{a''}$ y $R^{f^t}_{a''}$ sean débil* continuas para todo a'' en A''* (el producto de A'' se dice entonces *separadamente débil* continuo*) y de aquí se deduce sin dificultad:

2.9 PROPOSICION ([32: Lema 20]). *Si A es un álgebra normada Arens regular, el álgebra A" satisface toda identidad multilineal verificada por A.*

Acabamos de ver un procedimiento que permite extender un producto de álgebra en un espacio vectorial normado $X$ a su bidual $X''$. Lo mismo puede hacerse con una involución. Supongamos, pues, que $X$ es un espacio normado complejo dotado de una involución continua $*$ . Para cada $x'$ en $X'$ definamos $x'^*$ por:

$$\langle x'^*, x\rangle = \overline{\langle x', x^*\rangle} \qquad (x \in X)$$

(la barra indica complejo conjugado). Claramente $x'^* \in X'$ y $x' \to x'^*$ es una involución continua en $X''$ (*isométrica si la involución de* $X$ *es isométrica*) que llamamos "*traspuesta*" de la dada. De igual forma se define $x''^*$ para cada $x''$ en $X''$ obteniendo de esta forma una involución en $X''$ que llamamos "*doble traspuesta*" y que *extiende la involución dada en* $X$. Es immediato que *la involución doble traspuesta es débil* continua.*

## 3. RANGO NUMERICO EN ALGEBRAS NORMADAS.

En esta sección se introducen los conceptos fundamentales de la teoría general de Rango Numérico, así como los de $V$-álgebra e involución natural de una $V$-álgebra, básicos para la comprensión del siguiente apartado 4. Se exponen también algunos resultados fundamentales de la teoría de $JB^*$-álgebras que constituyen las herramientas que se emplearán en lo sucesivo.

En todo espacio normado $X$ definimos:

$$B(X) = \{x \in X: \ \|x\| \leqslant 1\}; \quad S(X) = \{x \in X: \ \|x\| = 1\}.$$

Para cada $u \in S(X)$ se define:

$$D(X,u) = \{x' \in X': \ \|x'\| = \langle x', u \rangle = 1\};$$

$D(X,u)$ es no vacío en virtud del teorema de Hahn-Banach y sus elementos son llamados *estados normalizados relativos a* $u$ o, simplemente, *estados* .

**3.1 DEFINICION.** Lamamos *espacio de rango numérico* a un par $(X,u)$ donde $X$ es un espacio normado y $u \in S(X)$. El elemento $u$ se llama *elemento distinguido* del espacio.

Se define el *rango numérico de un elemento* $x \in X$ en el espacio de rango numérico $(X,u)$ como el subconjunto del cuerpo:

$$V(X,u;x) = \{\lambda \in K:\ \lambda = \langle x',x\rangle\ ,\ x' \in D(X,u)\}.$$

Cuando no hay lugar a confusión lo notamos simplemente $V(x)$. La siguiente proposición incluye algunas propiedades elementales del rango numérico de un elemento.

3.2 PROPOSICION. *Sea* $(X,u)$ *un espacio de rango numérico,* $x$ *e* $y$ *elementos de* $X$ *y* $\lambda$ *un escalar. Se verifica:*

*i)* $V(x)$ *es un subconjunto convexo compacto no vacío de* $K$;

*ii)* $V(x+y) \subset V(x) + V(y)$;

*iii)* $V(\lambda x) = \lambda V(x)$;

*iv)* $V(x+\lambda u) = V(x) + \lambda$;

*v)* $|\lambda| \leqslant \|x\|$ *para todo* $\lambda \in V(x)$.

DEMOSTRACION. i) Basta notar que $V(x)$ es la imagen por la función débil* continua $x' \to \langle x',x\rangle$ del conjunto convexo y débil* compacto $D(X,u)$.

ii), iii), iv) y v) Son immediatas.

El número:

$$v(x) = max \{|\lambda| : \lambda \in V(x)\},$$

se llama *radio numérico de* $x$.

*Toda álgebra normada unital A se considerará siempre como espacio de rango numérico (A, I) siendo I la unidad de A.*

La siguiente proposición tiene interés pues, de una parte, permite "localizar" en cierto sentido el concepto de rango numérico de un elemento y, de otra, permite trasladar algunos problemas de rango numérico al contexto de un álgebra de Banach unital.

3.3 PROPOSICION. *i) Sea* $(X,u)$ *un espacio de rango numérico y* $M$ *un subespacio de* $X$ *tal que* $u \in M$, *entonces:*

$$V(X,u;x) = V(M,u;x) \quad (x \in M)$$

*ii) Sean* $(X,u)$ *e* $(Y,v)$ *dos espacios de rango numérico sobre* $K$ *y* $F$ *una aplicación lineal continua de* $X$ *en* $Y$ *verificando* $F(u) = v$ *y* $\|F\| \leqslant 1$, *entonces:*

$$V(Y,v;F(x)) \subset V(X,u;x) \quad (x \in X),$$

*si además* $F$ *es isométrica:* $V(Y,v;F(x)) = V(X,u;x)$.

*iii) Sea* $A$ *un álgebra normada unital y* $BL(A)$ *el álgebra (asociativa y unital) de las aplicaciones lineales* *continuas de A en A; entonces:*

$$V(BL(A),L_a) = V(BL(A),R_a) = V(A,a) \qquad (a \in A).$$

DEMOSTRACION. i) Consecuencia de que, en virtud del teorema de Hahn-Banach, todo elemento en $D(M,u)$ tiene una extensión equinórmica a todo $X$.

ii) LLamando $Z$ a la imagen de $X$ por $F$, por i) si $x \in X$ es $V(Z,v;F(x)) = V(Y,v;F(x))$ , por lo que puede suponerse $Z=Y$ con lo que $F$ es una aplicación lineal continua de $X$ *sobre* $Y$. Entonces si $b' \in D(Y,v)$ se tiene que $b' \circ F \in D(X,u)$ con lo que $V(Y,v;F(x)) \subset V(X,u;x)$ para $x \in X$. Si $F$ es isométrica para obtener la inclusión contraria basta considerar $F^{-1}$.

iii) Por ser $A$ unital $a \to L_a$ y $a \to R_a$ son isometrías lineales de $A$ en $BL(A)$ que conservan las respectivas unidades.

Consecuencia del Teorema 2.2 y del punto i) de la proposición anterior es que podemos trasladar a álgebras de Jordan n.c. normadas completas unitales muchos resultados conocidos en álgebras de Banach. En la siguiente proposición se incluyen algunos de entre los mas importantes, cuyas demostraciones para el caso asociativo unital pueden verse en [11: (i) 2. Teorema 6, (ii) 3. Teorema 4, (iii) 4. Teorema 1, (v) 5. Teorema 14] y [37].

3.4 PROPOSICION. *Sea A un álgebra de Jordan no-conmutativa compleja normada completa y unital. Para todo elemento a de A se verifica:*

*i)* $Sp(A,a) \subset V(a)$;

*ii)* $max\{Re\lambda : \lambda \in V(a)\} = sup\{\frac{1}{\alpha} log\| e^{\alpha a}\| : \alpha > 0\} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} log\| e^{\alpha a}\|$;

*iii)* $\frac{1}{e}\|a\| \leq v(a) \leq \|a\|$ ;

*iv)* $r(a) = v(a) = \|a\|$ *si* $V(a) \subset \mathbb{R}$ ;

*v)* $V(a) = co\ Sp(A,a)$ *si* $V(a) \subset \mathbb{R}$ .

(En iv) la letra "r" indica el radio espectral. Ver comentario que precede a la Proposición 8.3)

Las propiedades anteriores ponen de manifiesto que el rango numérico de un elemento de un álgebra normada, *aun no dependiendo para nada del producto del álgebra*, refleja propiedades geométricas y algebraicas del elemento en cuestión actuando como enlace entra la estructura de espacio normado y la de álgebra propiamente dicha.

3.5 DEFINICION. Un elemento $x$ de un espacio de rango numérico complejo $(X,u)$ se llama *hermitiano* si $V(x)\subset \mathbb{R}$. El conjunto de tales elementos se notará $H(X)$ y es, por ii) y iii) de la Proposición 3.2, un subespacio real de $X$. Es immediato que $H(X)\cap iH(X) = \{x\in X: v(x)=0\}$.

Puesto que el radio numérico $v(.)$ es, por ii), iii) y iv) de la Proposición 3.2,una seminorma continua sobre $X$, deducimos que $H(X)\cap iH(X)=\{0\}$ equivale a que el radio numérico sea una norma sobre $X$ lo que, a su vez, es claramente equivalente a que $D(X,u)$ separe puntos en $X$ y se dice entonces que el elemento $u$ es un *vértice de* $B(X)$.Un célebre teorema debido a Bohnenblust y Karling ([9]) afirma que *la unidad es vértice en toda álgebra de Banach compleja unital*. Acabamos de ver (Proposición 3.4 iii)) que lo mismo es cierto si sólo se supone el álgebra de Jordan n.c. , aún más, puede demostrarse sin dificultad que *la unidad es vértice en toda álgebra compleja normada unital*.

3.6 DEFINICION. Una *V-álgebra* es un álgebra $A$ compleja normada completa y unital verificando: $A = H(A) + iH(A)$.

De lo dicho anteriormente se deduce que si $A$ es una $V$-álgebra la suma $A = H(A) + iH(A)$ es topológico-directa pues, por su definición es immediato que $H(A)$ es cerrado. Deducimos que la aplicación $*$ de $A$ en $A$ definida por: $h + ik \overset{*}{\to} h - ik \quad (h,k \in H(A))$ es una involución lineal continua en $A$, llamada *involución natural de la $V$-álgebra $A$.*

Recordemos que si $A$ es un álgebra normada y $M$ es un ideal cerrado de $A$, $A/M$ con la norma cociente tiene, de forma canónica, estructura de álgebra normada (unital si $A$ es unital y completa si $A$ es completa)

3.7 PROPOSICION. *Sea $A$ una $V$-álgebra y $M$ un ideal cerrado de $A$ y propio. Entonces $M$ es autoadjunto y $A/M$ es una $V$-álgebra cuya involución natural coincide con la involución cociente.*

DEMOSTRACION. Teniendo en cuenta que el epimorfismo natural de $A$ sobre $A/M$ conserva las unidades y es continuo de norma menor o igual que 1, se sigue por la Proposición 3.3 ii) que si $h \in H(A)$ entonces $[h] \in H(A/M)$ donde $[h]$ denota la clase del elemento $h$ en $A/M$. Dado $a \in A$

será $a = h + ik$ con $h, k \in H(A)$ por lo que $[a] = [h] + i[k]$ lo que prueba que $A/M$ es una $V$-álgebra, además si $a \in M$ deducimos $[h] = -i[k]$ lo que exige $[h] = [k] = 0$, o sea, $h, k \in M$ por lo que $h - ik \in M$ y por tanto $M$ es auto-adjunto.

La teoría del rango numérico en álgebras de Banach alcanza su punto culminante en el Teorema de Vidav y Palmer ([11: II.6]) que *caracteriza la clase de las $B^*$-álgebras asociativas con unidad como la clase de las $V$-álgebras asociativas,* siendo la involución natural la única que verifica la propiedad estelar $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Una primera generalización de dicho torema para álgebras alternativas aparece en [26: Teorema V.5.14]. Por otra parte en [23] M. Moreno introduce el concepto de *$JV$-álgebra*, esto es, $V$-álgebra de Jordan, demostrando que *si $A$ es una $JV$-álgebra entonces $H(A)$ es una $JB$-álgebra,* de otro lado en [48] y [50] se demuestra que si $A$ es una $JV$-álgebra *tal que $H(A)$ es una $JB$-álgebra* entonces $A$ con su involucion natural es una $JB^*$-álgebra. Uniendo estos dos resultados tenemos un teorema tipo

Vidav-Palmer para $JB^*$-álgebras (que toda $JB^*$-álgebra es una $JV$-algebra es la parte "fácil" de dicho teorema [48]). Lo enunciaremos para futura referencia.

3.8 TEOREMA (Martínez-Youngson). *Un álgebra A compleja normada completa y unital admite una involución respecto a la cual es una $JB^*$-álgebra si y solo si A es una JV-álgebra, en cuyo caso la involución no es otra que la involución natural.*

Una demostración de este teorema independiente de los resultados de Youngson y a la vez más concisa y elegante se debe a R. Palacios ([32: Teorema 6]), en [32] se demuestran también importantes teoremas que nos serán necesarios en la próxima sección por lo que los expondremos aquí para disponer de una cómoda referencia.

3.9 TEOREMA ([32: Teorema 8]). *Si A es una V-álgebra las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) A es un álgebra de Jordan no-conmutativa;*

*ii) La involución natural de A es multiplicativa;*

*iii) La involución natural de A es isométrica.*

Este resultado (bastante sorprendente) pone de manifiesto que la estructura de álgebra de Jordan n.c. aparece de forma natural en el estudio de las $V$-álgebras y pone unos límites naturales a la generalización, a través del teorema de Vidav-Palmer ,del concepto de $B^*$-álgebra asociativa con unidad.

3.10 TEOREMA ( [32: Teorema 14]). *Toda $B^*$-álgebra no-asociativa unital es una $V$-algebra ALTERNATIVA cuya involución natural coincide con la original.*

Este teorema establece de forma definitiva que la generalización del concepto de $B^*$-álgebra asociativa unital a álgebras no-asociativas exigiendo la verificación del axioma de Gelfand-Naimark, no conduce a mas (ni a menos) que a la consideración de álgebras alternativas.

3.11 DEFINICION. Si $A$ y $B$ son álgebras de Jordan n.c. un *$J$-homomorfismo* de $A$ en $B$ es un homomorfismo de $A^+$ en $B^+$.

Una aplicación lineal $F$ entre dos espacios vectoriales complejos con involución se dice *simétrica* si $F(x^*) = (F(x))^*$ . Un *homomorfismo simétrico* entre álgebras complejas con involución se llama también *$*$-homomorfismo*.

El siguiente teorema que incluye dos resultados, el primero de ellos debido a Wright-Youngson ([47]) y el segundo debido a Wright ([46]), será usado en las secciones 5 y 8. Digamos que en [32] se obtiene un perfeccionamiento del mismo.

3.12 TEOREMA. *Sean A y B JB*-álgebras unitales.*

*i) Si $F: A \to B$ es una isometria lineal sobreyectiva que conserva las unidades entonces F es un isomorfismo simétrico.*

*ii) Si $F: A \to B$ es un homomorfismo simétrico entonces F disminuye normas y si F es inyectiva es isométrica.*

Finalmente también usaremos el siguiente:

3.13 TEOREMA([26: V.2.27]). *La involución natural de una V-álgebra A es multiplicativa si y solo si es multiplicativa en $A^+$.*

# C A P I T U L O II

## BIDUAL Y UNITIZACION DE UNA JB*-ALGEBRA NO-CONMUTATIVA

## JW*-ALGEBRAS NO-CONMUTATIVAS

## 4. BIDUAL DE UNA JB*-ALGEBRA NO-CONMUTATIVA. UNITIZACION.

Las definiciones dadas de $JB^*$-álgebra no-conmutativa y $B^*$-álgebra no-asociativa no exigen la presencia de unidad. Abordamos aquí el problema de la unitización, es decir, dada una $JB^*$-álgebra n.c. sin unidad $A$, ¿pueden prolongarse la norma y la involución de $A$ a su unitización $\widetilde{A}$ de manera que $\widetilde{A}$ quede estructurada como $JB^*$-álgebra n.c.?. Consecuencia del Teorema 3.10 es que existen serias restricciones para que el mismo problema en el caso de una $B^*$-álgebra no-asociativa tenga respuesta afirmativa. No ocurre así con $JB^*$-álgebras n.c. demostrándose que el problema planteado tiene siempre solución afirmativa. Indiquemos que los únicos trabajos que conocemos relacionados con el problema que nos ocupa son [40] y [49]. En [40] se trata el problema de la unitización de una $JB$-álgebra sustituyendo el axioma $\|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|$ por $\|a^2 - b^2\| \leqslant max\{\|a^2\|, \|b^2\|\}$ que fácilmente se demuestra que implica el anterior, y en [49] se demuestra que toda $JB^*$-álgebra puede unitizarse como $JB^*$-álgebra. También se indica en este trabajo que en [7] (trabajo que no hemos podido conseguir) se demuestra que efectivamente toda $JB$-álgebra puede ser sumergida en una $JB$-álgebra unital. *Con ello resulta que la correspondencia uno a uno entre $JB$-álgebras unitales y $JB^*$-álgebras unitales* (Teorema 2.5 y comentario previo al mismo) *se extiende para $JB$-álgebras y $JB^*$-álgebras sin unidad.*

Los métodos usados en [49] no son generalizables al caso Jordan no conmutativo (además de ser muy indirectos). En el mismo trabajo [49] se prueba posteriormente a lo dicho (por técnicas tampoco generalizables a nuestro caso) que el bidual de una $JB^*$-álgebra no unital con el producto de Arens y una involución "construida usando técnicas de rango numérico" es una $JB^*$-álgebra unital. Nosotros procedemos en sentido contrario pues es claro que el problema de la unitización queda resuelto afirmativamente si se demuestra que el bidual de una $JB^*$-álgebra n.c. es una $JB^*$-álgebra n.c. unital. La demostración que hacemos de ello es una reducción al caso conmutativo a través de una caracterización geométrica de los $JB^*$-productos no-conmutativos de una $JB^*$-álgebra.

Empezaremos haciendo la siguiente observación:

4.1 NOTA. El concepto de rango numérico de un elemento de un álgebra normada unital $A$ es esencialmente un concepto lineal no dependiendo para nada del producto del álgebra sino solamente de la estructura de espacio normado y la unidad. En particular $A^+$ es una $V$-álgebra si y solo si lo es $A$.

4.2 TEOREMA (de Vidav-Palmer para JB*-álgebras n.c.). *Toda JB*-álgebra no-conmutativa unital es una V-álgebra cuya involución natural coincide con la previa. Recíprocamente: toda V-álgebra de Jordan no-conmutativa con su involución natural es una JB*-álgebra n.c.*

DEMOSTRACION. Lo dicho en la nota anterior permite reducir la primera parte al caso conmutativo. Recíprocamente si $A$ es una $V$-álgebra de Jordan no-conmutativa el Teorema 3.8 aplicado a $A^+$ junto con el Teorema 3.13 y la proposición 2.6 permiten concluir que $A$ con su involución natural es una JB*-álgebra no-conmutativa.

El siguiente lema será de utilidad:

4.3 LEMA. *Sea* $(X, f_0)$ *un álgebra normada unital* , I *la unidad y* $f$ , $g$ *dos productos de álgebra sobre* X *tales que* $f + g = 2f_0$. *Entonces* I *es unidad para los productos* $f$ *y* $g$ .

DEMOSTRACION. Llamemos $I_X$ a la unidad de $BL(X)$. Por hipótesis

$$\frac{1}{2}\left( L_I^f + L_I^g \right) = \frac{1}{2}\left( R_I^f + R_I^g \right) = I_X$$

siendo todos los operadores que aparecen en esta igualdad de norma 1. La afirmación del lema es consecuencia de un teorema debido a Kakutani ([33: Proposición 1.6.6]) que afirma que en toda álgebra normada unital la unidad es punto extremo de la bola unidad.

El siguiente teorema que aparece parcialmente enunciado en [26: Corolario IV.5.10] , afirma que los $JB^*$-productos no-conmutativos de una $JB^*$-álgebra unital A son precisamente aquellos productos de álgebra sobre A que conservan la unidad.

4.4 TEOREMA. *Sea* $(X,f_0)$ *una JB*-álgebra con unidad* I *y* $f$ *una aplicación bilineal continua de* $X \times X$ *en* $X$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i)* $\|f\| \leqslant 1$ *e* I *es unidad para* $f$ *;*

*ii)* $(X,f)$ *con la norma e involución dadas es una JB*-álgebra no-conmutativa con unidad* I *;*

*iii)* $\frac{1}{2}(f + f^{r}) = f_0$ *y* $\|f\| \leqslant 1$ *;*

*iv)* $\|f\| \leqslant 1$ *y* $\|2f_0 - f\| \leqslant 1$ .

DEMOSTRACION. i) $\Rightarrow$ ii). Por el Teorema 4.2 $(X,f_0)$ y, por lo dicho en la Nota 4.1, $(X,f)$ son $V$-álgebras con igual involución natural que coincide con la pre-via de $X$ que es isométrica (Teorema 3.9 i)$\Rightarrow$ iii)) lo que, en virtud del Teorema 3.9 iii) $\Rightarrow$i), implica que $(X,f)$ es una $V$- álgebra de Jordan no-conmutativa y entonces el Teorema 4.2 nos dice que es una JB*-álge-bra no-conmutativa.

ii) $\Rightarrow$iii). Pongamos $g = \frac{1}{2}(f + f^{r})$. $(X,g)$ es una JB*-álgebra con unidad I. La aplicación identidad de $(X,g)$ en $(X,f_0)$ es una biyección lineal isométrica que preserva la unidad y en consecuencia (Teorema 3.12 i)) es un isomorfismo de álgebras, es decir: $f_0 = g$ .

iii) $\Rightarrow$ iv). Basta considerar que evidentemente $\|f^{r}\| = \|f\|$.

iv) $\Rightarrow$ i). Consecuencia del Lema 4.3.

El siguiente teorema es un retoque de un resultado de Youngson.

4.5 TEOREMA. *Sea A una JB*-álgebra (sin unidad); entonces A'' con el producto de Arens e involución doble traspuesta es una JB*-álgebra unital.*

DEMOSTRACION. Se demuestra en [49 : Teorema 3.16] que A'' con el producto de Arens y una cierta involución que extiende la de A es una JB*-álgebra unital. Como quiera que esta involución es débil* continua ([16: Lema 4] o bien [27: II. Teorema 5.4], ver Teorema 5.11), que la involución doble traspuesta también es débil* continua y extiende la de A, concluimos en vista de la débil* densidad de A en A'', que ambas involuciones coinciden.

4.6 TEOREMA. *Sea A una JB*-álgebra no-conmutativa sin unidad. Entonces A" con el producto de Arens e involución doble traspuesta es una JB*-álgebra no-conmutativa unital verificando toda identidad multilineal satisfecha por A.*

DEMOSTRACION. Pongamos $A = (X,f)$ y sea $f_0 = \frac{1}{2}(f + f^r)$. En virtud del Teorema 4.5 $(X'', f_0^t)$ con la involución doble traspuesta es una JB* -álgebra con unidad que notaremos I". Como la trasposición de Arens es una isometría lineal, de la relación $f_0^t = \frac{1}{2}(f^t + f^{rt})$ se deduce por aplicación del Lema 4.3 que I" es unidad para $f^t$ y el Teorema 4.4 i) ⇒ ii) aplicado a $(X'', f_0^t)$ nos permite concluir que $(X'', f^t)$ con la misma involución doble traspuesta es una JB*-álgebra no-conmutativa unital. Finalmente por el Teorema 4.4 iii) tenemos: $f_0^t = \frac{1}{2}(f^t + f^{tr})$ por lo que deducimos $f^{rt} = f^{tr}$, es decir, A es Arens-regular lo que, junto con la Proposición 2.9, concluye la demostración del teorema.

NOTA. Destaquemos que en la demostración anterior se ha obtenido que toda $JB^*$-álgebra n.c. es Arens-regular.

4.7 COROLARIO. *Toda $JB^*$-álgebra no-conmutativa $A$ sin unidad se puede unitizar como $JB^*$-álgebra.*

DEMOSTRACION. Consideremos $A$ como $JB^*$-subálgebra de $A''$ y sea $I$ la unidad de $A''$, entonces $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}I$ es subálgebra cerrada de $A''$ y por tanto $\tilde{A}$ con la norma e involución inducidas es una $JB^*$-álgebra n.c. .

4.8 COROLARIO. *El bidual de una $B^*$-álgebra alternativa con el producto de Arens e involución doble traspuesta es una $B^*$-álgebra alternativa unital.*

DEMOSTRACION. Proposición 2.8 y Teorema 4.6 .

4.9 COROLARIO. *Toda $B^*$-alternativa sin unidad se puede unitizar como $B^*$-álgebra.*

Observemos que como consecuencia del Teorema 3.10 los dos corolarios anteriores son falsos para $B^*$-álgebras no alternativas.

4.10 PROPOSICION. *Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa y $M$ un ideal propio cerrado de $A$. Entonces $M$ es autoadjunto y $A/M$ con la norma e involución cocientes es una $JB^*$-álgebra no-conmutativa.*

DEMOSTRACION. Si $A$ es unital este resultado es conocido ([32]) y, en cualquier caso, se deduce del Teorema 4.2 y la Proposición 3.7 . Si $A$ no tiene unidad y es $\tilde{A}$ su unitización como $JB^*$-álgebra no-conmutativa, entonces considerando $A \subset \tilde{A}$ resulta que $M$ es ideal cerrado de $\tilde{A}$ y por tanto autoadjunto. Además $A/M$ es un ideal completo y por tanto cerrado de la $JB^*$-álgebra no-conmutativa unital $\tilde{A}/M$ y, en particular, $A/M$ es una $JB^*$-álgebra no-conmutativa.

## 5. $JW^*$-ALGEBRAS NO-CONMUTATIVAS.

En esta sección se define mediante el axioma de Sakai el concepto de $JW^*$-álgebra no-conmutativa obteniendo a continuación algunas propiedades básicas de una tal álgebra. De especial interés es la elegante demostración que se da de la continuidad separada débil* del producto en una $JW^*$-álgebra n.c. Tal resultado es conocido para $JW^*$-álgebras ([27: III. Teorema 3.7]) y no es immediato pasar de aquí al caso que nos ocupa. Empezaremos fijando algunos conceptos.

Para todo espacio normado $X$ la letra $J$ indicará la inyección canónica de $X$ en $X''$ definida para cada $x \in X$ por:

$$\langle Jx, x' \rangle = \langle x', x \rangle \qquad (x' \in X')$$

Si $X$ e $Y$ son espacios normados (sobre $K$) y $\phi \in BL(X,Y)$ (aplicaciones lineales continuas de $X$ en $Y$) la *aplicación traspuesta* de $\phi$ la notamos $\phi^t$ y es la aplicación de $Y'$ en $X'$ definida por: $y' \to y' \circ \phi$ . Evidentemente $\phi^t \in BL(Y',X')$ . Recordemos que la *aplicación de trasposición* $\phi \to \phi^t$ es una isometría lineal de $BL(X,Y)$ en $BL(Y',X')$ . Cuando $Y = X$ dicha aplicación es además un antihomomorfismo de $BL(X)$ en $BL(X')$.

Sea $X$ un espacio de Banach que es dual de otro espacio de Banach $Y$. El espacio $Y$ se inyecta naturalmente en $X'$ dando un subespacio nórmicamente cerrado $X_*$

de $X'$ con la propiedad, fácilmente comprobable, de que la aplicación:

$$x \to J(x)|_{X_*} \text{ (restricción de } J(x) \text{ a } X_*)$$

*es una isometría lineal de* $X$ *sobre* $X'_*$. Recíprocamente todo subespacio *normicamente cerrado* de $X'$ con esta propiedad hace de $X$ un espacio dual. *Tales subespacios serán llamados preduales de* $X$.

Si $X$ es un espacio de Banach y $X_*$ un predual de $X$, dicho subespacio $X_*$ determina la mínima topología en $X$ que hace continuos a los funcionales del mismo, es decir, la *topología débil** $\sigma(X,X_*)$. El concepto de "espacio con único predual" pretende expresar la idea de que sobre un tal espacio no hay mas que una única topología débil*. Por supuesto, dado un espacio de Banach $X$, no está garantizada la existencia de algún predual de $X$ y tampoco, de existir, la unicidad (ni siquiera salvo isomorfismos isométricos), pero en caso de que, efectivamente, $X$ tenga un predual $X_*$ y sea único, esta circunstancia se expresará diciendo que "$X$ *tiene único predual*" o "$X_*$ *es predual único de* $X$". La afirmación "$X$ *es un espacio de Banach dual*" quiere decir que existe algún predual de $X$.

Por lo dicho hasta ahora es claro que si $X$ e $Y$ son espacios de Banach (sobre $K$) ambos con preduales $X_*$ e $Y_*$ respectivamente, una aplicación $\phi \in BL(X,Y)$ es débil* continua, es decir, continua cuando en $X$ e $Y$ se consideran las correspondientes topologías débil*, si y solo si $\phi^t(Y_*) \subset X_*$. Si se tiene en cuenta que, como decíamos anteriormente, la aplicación de trasposición $\phi \to \phi^t$ es una isometría lineal, es fácil ver que el subconjunto de $BL(X,Y)$ formado por las aplicaciones débil* continuas es un subespacio cerrado (una subálgebra cerrada si $Y = X$ ) de $BL(X,Y)$.

Si se considera que en un espacio de Banach $X$ con predual único la topología débil* está intrínsecamente determinada por la estructura de $X$ como espacio de Banach, se comprenderá que las isometías lineales sobreyectivas entre espacios de Banach con único predual son débil* continuas. Este hecho aparece con ligeras diferencias formales en [17] . Indiquemos, no obstante, el procedimiento para su demostración.

5.1 LEMA. *Toda biyección lineal isométrica entre espacios de Banach con único predual es débil* continua.*

DEMOSTRACION. Notemos $X$ e $Y$ los espacios, $X_*$ e $Y_*$ sus respectivos preduales únicos y $\phi : X \to Y$ la biyección lineal isométrica en cuestión. Basta probar que $\phi^t(Y_*)$ es un predual de $X$ lo que es un sencillo pero tedioso ejercicio.

5.2 TEOREMA. *Todo operador hermitiano sobre un espacio de Banach complejo con único predual es débil* continuo.*

DEMOSTRACION. Notemos $X$ y $T$ respectivamente el espacio y el operador en cuestión. Por hipótesis $T \in BL(X)$ y es hermitiano, es decir, $V(BL(X),T) \subset \mathbb{R}$ . Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos $V(BL(X),i\alpha T) \subset i\mathbb{R}$ y, por la Proposición 3.4 ii), ha de ser $\| e^{i\alpha T} \| = 1$, obteniéndose que el operador $e^{i\alpha T}$ y su inverso $e^{-i\alpha T}$ tienen norma 1 y por tanto $e^{i\alpha T}$ es una isometría lineal sobre $X$ y, en consecuencia, por el Lema 5.1, es débil* continuo.

Por lo dicho anteriormente bastará para nuestros propósitos demostrar que $T$ es límite de una sucesión de operadores débil* continuos y ello queda patente sin mas que poner:

$$T = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{i}{n}T} - I}{\frac{i}{n}}$$

donde I es la unidad de $BL(X)$.

5.3 DEFINICION. Una $JB^*$-álgebra no-conmutativa $A$ que es un espacio de Banach dual se llama *$JW^*$-álgebra no-conmutativa*. El calificativo "no-conmutativa" se omitirá cuando el álgebra sea conmutativa.

5.4 TEOREMA ([49]). *Una $JB^*$-álgebra $A$ tiene unidad si y solo si su bola unidad, $B(A)$, tiene puntos extremos.*

5.5 TEOREMA. *Una $JB^*$-álgebra no-conmutativa $A$ posee unidad si y solo si su bola unidad, $B(A)$, posee puntos extremos.*

DEMOSTRACION. Supongamos que $B(A)$ tiene puntos extremos; entonces, por el Teorema 5.4, $A^+$ tiene unidad lo que implica, por el Lema 4.3, que $A$ tiene unidad. La otra parte del teorema es consecuencia de que en toda álgebra normada unital $A$ la unidad es punto extremo de $B(A)$ ([33: Proposición 1.6.6]).

Como consecuencia del Teorema 5.5 y de los teoremas de Banach-Alaoglu y de Krein-Milman, resulta:

5.7 COROLARIO. *Toda JW*-álgebra no-conmutativa posee unidad.*

No dependiendo para nada el eventual predual de un álgebra del producto de la misma, algunos resultados conocidos para JB*-álgebras se trasladan directamente al caso no-conmutativo. Introduzcamos previamente algunos conceptos.

5.7 DEFINICION. Un elemento de una JB*-álgebra no-conmutativa $A$ se dice *positivo* si es el cuadrado de un elemento simétrico. El conjunto de los elementos positivos de $A$ lo notamos $Pos(A)$ . Según lo dicho:

$$Pos(A) = \{a^2 : \ a \in Sim(A)\}$$

5.8 PROPOSICION. *El conjunto de los elementos positivos de una $JB^*$-álgebra no-conmutativa A es un cono convexo y cerrado.*

DEMOSTRACION. Siendo este resultado conocido para $JB^*$-álgebras ([49]) basta observar que, evidentemente, $Pos(A) = Pos(A^+)$.

Teniendo en cuenta la correspondencia uno a uno entre $JB$-álgebras y $JB^*$-álgerbras indicada en el Teorema 2.5 y en la introducción de la sección anterior, y la Proposición 5.8, es claro que si $A$ es una $JB$-álgebra el conjunto $Pos(A) = \{a^2 : a \in A\}$ es un cono convexo y cerrado. Por tanto si $A$ es una $JB^*$-álgebra n.c. o una $JB$-álgebra, la relación $\leqslant$ definida por:

$$a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in Pos(A)$$

donde $Pos(A)$ es, en cada caso, el conjunto de los elementos positivos de $A$ es una relación de orden compatible con la estructura de espacio de Banach real de $A$.

5.9 PROPOSICION. *Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa y $a \in Sim(A)$.*

*i) Si $A$ tiene unidad, entonces:*

$$V(A,a) \subset \mathbb{R}_0^+ \quad \Leftrightarrow \quad Sp(A,a) \subset \mathbb{R}_0^+;$$

*ii)* $a \in Pos(A) \Leftrightarrow Sp(A,a) \subset \mathbb{R}_0^+$.

DEMOSTRACION. i) $Sim(A) = Her(A)$ (Teorema 4.2) y por la Proposición 3.4 v), $V(A,a) = \text{co } Sp(A,a)$.

ii) Si $A$ no tiene unidad podemos considerarla como subálgebra de su $JB^*$-unitización $\tilde{A}$. Como evidentemente se verifica $Pos(A) = Pos(\tilde{A}) \cap A$ y, por definición $Sp(A,a) = Sp(A,a)$, estas consideraciones permiten suponer que $A$ tiene unidad, I. Sea $B$ la subálgebra cerrada de $A$ engendrada por $\{a,I\}$. Como consecuencia de la asociatividad de las potencias en $A$ se deduce que $B$ es una $B^*$-álgebra asociativa (ver Proposición 2.8). Por lo que es sabido ([15: Proposición 1.6.1]) que:

$a \in Pos(B) \Leftrightarrow Sp(B,a) \subset \mathbb{R}_0^+ \Leftrightarrow a = b^2;\ b = \sqrt{a} \in Sim(B) \subset Sim(A)$

y, en particular, $a \in Pos(B) \Leftrightarrow a \in Pos(A)$. Como, por las mismas razones que en i), se verifica $V(B,a) = \text{co } Sp(B,a)$ deducimos, haciendo uso de la Proposición 3.3 i), que $a \in Pos(A) \Leftrightarrow V(B,a) = V(A,a) \subset \mathbb{R}_0^+$ y lo visto en i) concluye la demostración.

Recordemos que en un espacio vectorial ordenado $(X, \leqslant)$ una red de elementos $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ se dice creciente si $x_\alpha \geqslant x_\beta$ siempre que $\alpha \geqslant \beta$.

5.10 DEFINICION. Una $JB^*$-álgebra no-conmutativa $A$ (o una $JB$-álgebra $A$) se dice que es *monótona completa* si toda red creciente y nórmicamente acotada de elementos de $A$ tiene extremo superior en $A$. Un funcional $a' \in A'$ se dice que es *normal* si para cada red $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ creciente y nórmicamente acotada de elementos de $A$ con extremo superior igual a $s \in A$, la red $\{\langle a', a_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\Lambda}$ converge hacia $\langle a', s\rangle$.

El siguiente resultado aparece demostrado para $JW^*$-álgebras en [27: Teoremas II.5.4 y II.4.9] y en [16].

5.11 TEOREMA. *Sea $A$ una $JW^*$-álgebra no-conmutativa. Se verifica:*

*i) La involución es débil* continua;*

*ii) $Pos(A)$ es débil* cerrado.*

DEMOSTRACION. Se reduce al caso conmutativo.

En el importante trabajo [36] F.W. Shultz caracteriza las $JB$-álgebras unitales que son espacios de Banach duales como aquellas $JB$-álgebras $A$ que son monótonas completas y poseen un conjunto separador de estados normales. En tal caso demuestra que el predual de $A$ es único y coincide con el espacio de los funcionales normales sobre $A$. Apoyándose en este resultado y razonándo como en el caso clásico se demuestra en [16] la unicidad del predual de una $JW^*$-álgebra.

5.12 TEOREMA. *El predual de una $JW^*$-álgebra no-conmutativa $A$ es único y coincide con el espacio de los funcionales normales sobre $A$.*

DEMOSTRACION. Se reduce al caso conmutativo.

5.13 TEOREMA. *El producto de toda $JW^*$-álgebra no-conmutativa es separadamente débil* continuo.*

DEMOSTRACION. Sea $A$ nuestra álgebra y $h$ un elemento de $H(A)$ ( $= Sim(A)$).Por la Proposición 3.3 iii) $L_h$ y $R_h$ pertenecen a $H(BL(A))$ por lo que el Teorema 5.12 seguido del Teorema 5.2 permiten concluir que $L_h$ y $R_h$

son débil* continuos. Si $a \in A$ será $a = h + ik$ con $h, k \in H(A)$ de donde se deduce que $L_a = L_h + iL_k$ y $R_a = R_h + iR_k$ son débil* continuos.

Indiquemos que el resultado anterior era conocido para $W^*$-álgebras alternativas ([31]).

Acabaremos esta sección caracterizando los ideales biláteros débil* cerrados en una $JW^*$-álgebra n.c.

Recordemos que un elemento $e$ de una $JB^*$álgebra n.c. se llama una *proyección* si $e = e^*$ y $e^2 = e$.

5.14 PROPOSICION. *Toda subálgebra débil* cerrada y autoadjunta de una $JW^*$-álgebra no conmutativa tiene unidad.*

DEMOSTRACION. Consecuencia del Corolario 5.6 junto al conocido hecho de que si $X$ es un espacio de Banach dual dicha propiedad es heredada por los subespacios débil* cerrados de $X$.

5.15 TEOREMA. _Los ideales biláteros débil* cerrados de una JW*-álgebra no-conmutativa A son los conjuntos de la forma Ae donde e es una proyección central de A._

DEMOSTRACION. Proposiciónes 3.7 y 5.14 y Teorema 1.19.

# CAPITULO III

## CARACTERIZACION DE LOS IDEALES BILATEROS CERRADOS EN UNA JB*-ALGEBRA NO-CONMUTATIVA.

## 6. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE M-IDEALES.

Si $M$ es un subespacio de un espacio normado $X$ notaremos $M^{\circ}$ el subespacio anulador de $M$ definido por:

$$M^{\circ} = \{x' \in X' : \langle x', x \rangle = 0 \quad (x \in M)\}$$

Análogamente para cada subespacio $N$ de $X'$ se define su anulador ${}^{\circ}N$ como el subespacio de $X$:

$${}^{\circ}N = \{x \in X : \langle x', x \rangle = 0 \quad (x' \in N)\}$$

Recordemos que si $X$ es un espacio normado complejo $H(BL(X))$ es el subconjunto de $BL(X)$ formado por los operadores hermitianos.

6.1 DEFINICION. Sea $X$ un espacio normado. Una proyección lineal $\pi : X \to X$ verificando:

$$\|x\| = \|\pi(x)\| + \|x - \pi(x)\| \qquad (x \in X)$$

$$(\text{ res. } \|x\| = \max\{\|\pi(x)\|, \|x - \pi(x)\|\} (x \in X) )$$

se llama una *L-proyección* (res. *M-proyección*).

Los subespacios de $X$ que son imágenes de L-proyecciones (res. M-proyecciones) se llaman *L-sumandos* (res. *M-sumandos*). Un subespacio cerrado $M$ de $X$ se llama un *M-ideal* si $M°$ es un L-sumando de $X'$.

Enunciamos a continuación algunos resultados básicos que serán usados frecuentemente en lo que sigue.

6.2 PROPOSICION ( [8: Lema 1.4 y Proposición 1.5]). *Sea $X$ un espacio normado y $\pi : X \to X$ una proyección lineal y continua. Se verifica:*

*i) $\pi$ es una L-proyección si y solo si $\pi^t$ es una M-proyección.*

*ii) $\pi$ es una M-proyección si y solo si $\pi^t$ es una L-proyección.*

*iii) Todo L-sumando (res. M-sumando) es imagen de una única L-proyección (res. M-proyección).*

*Siendo $\pi(X)° = Ker\ \pi^t$ se deduce que el anulador de un L-sumando (res. M-sumando) en $X$ es un M-sumando (res. L-sumando) en $X'$. En particular todo M-sumando es M-ideal.*

6.3 TEOREMA ( [8: Teorema 5.7] y [22: Teorema 6.16] ). *Sea X un espacio de Banach. Se verifica:*

*i) Todo M-sumando de X' es débil* cerrado.*

*ii) Todo M-ideal débil* cerrado de X' es el anulador de un L-sumando de X.*

Se deduce de lo dicho que el concepto de "L-ideal" (esto es, subespacio cerrado cuyo anulador es un M-sumando) no juega ningún papel en espacios de Banach pues, por el teorema anterior, dicho concepto se reduce al de L-sumando.

6.4 PROPOSICION ([8: Proposicion 1.7]). *Dos L-proyecciones (M-proyecciones) cualesquiera en un espacio normado conmutan.*

A continuación nos proponemos generalizar este resultado.

6.5 PROPOSICION. *Toda L-proyección en un espacio de Banach complejo es un operador hermitiano.*

DEMOSTRACION. Sea $X$ el espacio y $\pi$ la L-proyección en cuestión. Para cada $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\|e^{i\alpha\pi}(x)\| = \| x + (e^{i\alpha} - I)\pi(x) \| =$$
$$= \| \pi(e^{i\alpha}x) + (x - \pi(x)) \| =$$
$$= \| \pi(e^{i\alpha}x)\| + \|x - \pi(x)\| =$$
$$= \|\pi(x)\| + \|x - \pi(x)\| = \|x\|;$$

por tanto $\|e^{i\alpha\pi}\| = 1$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ lo que, por la Proposición 3.4 ii), es equivalente a $\pi \in H(BL(X))$.

6.6 PROPOSICION. *Para toda L-proyeccion $\pi$ en un espacio de Banach $X$ y toda biyección lineal isométrica $F$ de $X$ sobre $X$, se verifica que $F\pi F^{-1}$ es una L-proyección en $X$.*

DEMOSTRACION. Es immediata.

6.7 LEMA. *Las L-proyecciones en un espacio de Banach complejo conmutan con los operadores hermitianos.*

DEMOSTRACION. Sea $X$ un espacio de Banach, $\pi$ una L-proyección en $X$ y $S \in H(BL(X))$. Por la Proposición 3.4 ii) es $\|e^{i\alpha S}\| = 1$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, de donde se deduce que $e^{i\alpha S}$ es una isometría y, por las Proposiciones 6.6 y 6.4, obtenemos:

$$[e^{i\alpha S}\pi e^{-i\alpha S},\pi] = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Calculando el coeficiente de $\alpha$ en el desarrollo en serie de potencias del primer término de esta igualdad, se obtiene:

$$[[S,\pi],\pi] = 0,$$

y, por un conocido teorema de Kleinecke ([10: 18.Proposición 13]), resulta que $r([S,\pi]) = 0$ donde r indica el radio espectral. Por la Proposición 6.5 $\pi \in H(BL(X))$ y, siendo $S \in H(BL(X))$ por hipótesis, es sabido ([11: Lema 5.4]) que $i[S,\pi] \in H(BL(X))$ y por la Proposición 3.4 iv) resulta finalmente $\|[S,\pi]\| = r([S,\pi]) = 0$.

Advirtamos que por ser la operación de trasposición $\pi \to \pi^t$ un antihomomorfismo isométrico de $BL(X)$ en $BL(X')$ que conserva las unidades, se deduce fácilmente del Lema 6.7 que las M-proyecciones en un espacio de Banach complejo conmutan con los operadores hermitianos. Se deduce también de las Proposiciones 6.5, 6.2 ii) y 3.3 ii) que las M-proyecciones son operadores hermitianos.

El siguiente corolario es una generalización no asociativa de dos resultados que aparecen en ([41: Proposiciones 3.1 y 3.2]).

6.8 COROLARIO. *Sea $A$ un álgebra compleja normada completa unital y $\pi$ una M-proyección en $A$. Se verifica:*

*i)* $\pi(I) \in H(A)$ *y* $[L_{\pi(I)}, \pi] = 0$;

*ii)* $(\pi(I))^2 = \pi(I)$;

*donde* $I$ *es la unidad de* $A$.

DEMOSTRACION. i) La aplicación $T \to T(I)$ de $BL(A)$ en $A$ es lineal, disminuye normas y conserva los elementos distinguidos, por lo que (Proposición 3.3 ii)) se verifica: $V(A, T(I)) \subset V(BL(A), T)$. En particular siendo $\pi$ un operador hermitiano se deduce $V(A, \pi(I)) \subset \mathbb{R}$, es decir, $\pi(I) \in H(A)$. La segunda afirmación de i) se sigue ahora del Lema 6.7 junto con el comentario que le sigue y de la Proposición 3.3 iii).

ii) $(\pi(I))^2 = L_{\pi(I)}(\pi(I)) = \pi(L_{\pi(I)}(I)) = \pi(\pi(I)) = \pi(I)$.

6.9 TEOREMA. *Los M-ideales en un espacio de Banach complejo son invariantes por operadores hermitianos.*

DEMOSTRACION. Sea $X$ un espacio de Banach complejo, $M$ un M-ideal en $X$ y $S \in H(BL(X))$. Sea $\pi$ la L-proyección sobre $M^\circ$. Siendo la operación de trasposición $S \to S^t$ de $BL(X)$ en $BL(X')$ una isometría lineal que conserva las unidades, es $S^t \in H(BL(X'))$ (Proposición 3.3 ii)) y, por el Lema 6.7, $[S^t,\pi] = 0$ de donde resulta que $M^\circ$ permanece invariante por $S^t$ y, siendo $M$ un subespacio cerrado, ello equivale a que $M$ permanezca invariante por $S$.

## 7. IDEALES CERRADOS EN UNA JB*-ALGEBRA NO-CONMUTATIVA.

El concepto de M-ideal introducido en la sección anterior puede considerarse, en cierto sentido, como una abstracción geométrica del concepto de ideal bilátero cerrado en un álgebra de Banach; de hecho, para $B^*$-álgebras asociativas ambos conceptos coinciden como se demuestra en [41]. En esta sección se prueba que este resultado permanece válido para $JB^*$-álgebras n.c. lo que, claramente, supone una amplia generalización del mismo.

7.1 LEMA. *Los M-ideales de una V-álgebra son ideales bilátero cerrados.*

DEMOSTRACION. Sea $A$ una $V$-álgebra, $M$ un M-ideal en $A$ y $a = h + ik$ $(h,k \in H(A))$ un elemento arbitrario de $A$. Tenemos $L_a = L_h + iL_k$, $R_a = R_h + iR_k$ y siendo los operadores $L_h, L_k, R_h, R_k$ todos ellos hermitianos (Proposición 3.3 iii)) se deduce, por el Teorema 6.9, que $L_a(M) \subset M$ y $R_a(M) \subset M$.

7.2 COROLARIO. *Los M-ideales en una JB*-álgebra no-conmutativa son ideales biláteros cerrados.*

DEMOSTRACION. Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa y $M$ un M-ideal en $A$. Si $A$ tiene unidad nuestra afirmación es consecuencia del Teorema 4.2 y el Lema 7.1. Si $A$ no tiene unidad, considerémosla como subálgebra de la $JB^*$-álgebra no-conmutativa unital $A''$. Siendo $M$ un M-sumando de $A''$ es también M-ideal y por tanto es un ideal bilátero de $A''$, de donde se deduce que $M^{\circ\circ} \cap A$ es un ideal bilátero de $A$ y como $M$ es un subespacio cerrado se tiene $M = M^{\circ\circ} \cap A$.

7.3 LEMA. *Los ideales biláteros cerrados de una $JB^*$-álgebra no-conmutativa son M-ideales.*

DEMOSTRACION. Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa y $M$ un ideal bilátero cerrado de $A$. Claramente $M^{\circ\circ}$ es un ideal bilátero débil* cerrado de la $JW^*$-álgebra no-conmutativa $A''$ y por tanto es $M^{\circ\circ} = A''e$ donde $e$ es una proyección central en $A''$(Teorema 5.15). Sea $B$ el álgebra $A''e \times A''(I-e)$ con operaciones definidas de forma natural y norma e involución definidas (para todo $(a,b) \in B$ ) por:

$$\|(a,b)\| = max\{\|a\|, \|b\|\}; \quad (a,b)^* = (a^*, b^*).$$

Fácilmente se comprueba que $B$ es una $JB^*$-álgebra no-conmutativa unital. La aplicación : $a \to (ae, a-ae)$ de $A''$ en $B$ es un isomorfismo simétrico por lo que dicha aplicación es isométrica (Teorema 3.12 ii)); es decir:

$$\|a\| = max\{\|ae\|, \|a-ae\|\} \quad (a \in A'').$$

Deducimos que la aplicación $a \to ae$ es una M-proyección en $A''$ cuya imagen es $M^{\circ\circ} = A''e$ , esto es, $M^{\circ\circ}$ es un M-sumando de $A''$ pero entonces, por el Teorema 6.3, $M^{\circ}$ es un L-sumando de $A'$ y, siendo $M$ cerrado, $M$ es un M-ideal de $A$.

7.4 TEOREMA. *Los M-ideales de una JB*-álgebra no-conmutativa coinciden con los ideales biláteros cerrados del álgebra.*

DEMOSTRACION. Corolario 7.2 y Lema 7.3.

Es interesante notar que el Teorema 7.4 pone en equivalencia, para una *JB** -álgebra n.c. *A*, dos conceptos de muy distinta naturaleza: el de M-ideal que depende exclusivamente de la estructura de espacio de Banach subyacente a *A* y el de ideal bilátero cerrado que es un concepto algébrico-topológico.

Es sabido ([13]) que si *A* es una *B**-álgebra asociativa, los ideales cerrados de $A^+$ son ideales biláteros de *A*. El siguiente corolario es una generalización de este resultado.

7.5 COROLARIO. *Los ideales biláteros cerrados de una JB*-álgebra no-conmutativa A coinciden con los ideales cerrados de* $A^+$.

DEMOSTRACION. Siendo el concepto de M-ideal independiente por completo del producto, es claro que los

M-ideales en $A$ y en $A^{+}$ son los mismos y basta aplicar el Teorema 7.4.

A continuación nos proponemos obtener una importante propiedad geométrica del predual de una $JW^*$-álgebra no-conmutativa.

7.6 LEMA. *Un subespacio nórmicamente cerrado $N$ del dual $A'$ de una $JB^*$-álgebra no-conmutativa $A$ es invariante por los traspuestos de los operadores de multiplicación de $A$ si y solo si $N^\circ$ es un ideal bilátero de $A''$.*

DEMOSTRACION. Se trata de probar la veracidad de las siguientes dobles implicaciones:

$$R_a^t(N) \subset N \quad (a \in A) \Leftrightarrow R_{a''}(N^\circ) \subset N^\circ \quad (a'' \in A'')$$

$$L_a^t(N) \subset N \quad (a \in A) \Leftrightarrow L_{a''}(N^\circ) \subset N^\circ \quad (a'' \in A'').$$

Notemos $J$ la immersión canónica de $A$ en $A''$. A partir de la definición del producto de Arens se comprueba sin dificultad que para todo elemento $a$ en $A$ se verifica $L_{J(a)} = L_a^{tt}$ y que la Arens-regularidad de $A$ (ver nota que sigue al Teorema 4.6) equivale a que $R_{J(a)} = R_a^{tt}$ $(a \in A)$. Además, siendo $N$ cerrado, $R_a^t(N) \subset N$

(res. $L_a^t(N) \subset N$ ) es equivalente a $R_a^{tt}(N^\circ) \subset N^\circ$ (res. $L_a^{tt}(N^\circ) \subset N^\circ$ ), con ello es claro que todo se reduce a probar que:

$$R_{J(a)}(N^\circ) \subset N^\circ \quad (a \in A) \Leftrightarrow R_{a''}(N^\circ) \subset N^\circ \quad (a'' \in A'')$$

$$L_{J(a)}(N^\circ) \subset N^\circ \quad (a \in A) \Leftrightarrow L_{a''}(N^\circ) \subset N^\circ \quad (a'' \in A'')$$

La implicación hacia la izquierda es trivial y hacia la derecha es consecuencia de que siendo $N^\circ$ débil* cerrado y el producto en $A''$ separadamente dédil* continuo, es claro que los conjuntos $\{a'' \in A'' : R_{a''}(N^\circ) \subset N^\circ\}$ y $\{a'' \in A'' : L_{a''}(N^\circ) \subset N^\circ\}$ son débil* cerrados y, por hipótesis contienen al conjunto débil* denso $J(A)$ y por tanto coinciden con $A''$.

7.7 COROLARIO. *Los L-sumandos del espacio dual de una JB*-álgebra no-conmutativa son los subespacios cerrados invariantes por los traspuestos de los operadores de multiplicación del álgebra.*

DEMOSTRACION. Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa. Por el Teorema 6.3 un subespacio cerrado $N$ de $A'$ es un L-sumando si y solo si $N^\circ$ es un M-ideal de $A''$ y ahora se aplican sucesivamente el Teorema 7.4 y el Lema 7.6.

7.8 TEOREMA. *El predual de una JW*-álgebra no-conmutativa A es un L-sumando de A'.*

DEMOSTRACION. Notando $A_*$ el predual de A, la continuidad separada débil* del producto de A se expresa por: $R_a^t(A_*) \subset A_*$ y $L_a^t(A_*) \subset A_*$ para cada $a \in A$ . El Corolario 7.7 nos dice que $A_*$ es un L-sumando de A'.

# CAPITULO IV

## ISOMORFISMOS DE JB*-ALGEBRAS NO-CONMUTATIVAS
## REPRESENTACIONES FACTORIALES

## 8. ISOMORFISMOS DE JB*-ALGEBRAS NO-CONMUTATIVAS.

En el Capítulo II de su Tesis de Doctorado (nº 29 de la bibliografía) R. Palacios perfecciona el enunciado de un conocido teorema de estructura de los isomorfismos de $B^*$-álgebras ([33: Corolario 4.1.21]) a base de construir una demostración totalmente nueva del mismo con técnicas de teoría general de álgebras de Banach. Estas técnicas permitirían mas tarde al autor generalizar dicho teorema a Jordan-isomorfismos de $B^*$-álgebras ([30]). En esta sección, apurando estas técnicas, se extiende dicho teorema a $JB^*$ -álgebras n.c. Con objeto de no repetir lo ya dicho en [29] y [30], referencias fácilmente accesibles, hemos optado por desarrollar solamente aquellos puntos en los que puede surgir alguna dificultad al intentar trasladar literalmente los razonamientos allí expuestos. La terminología que se emplea en esta sección es la que se introdujo en la Definición 3.11.

8.1 PROPOSICION. *Sean* $A$ *y* $B$ *JB*-álgebras no-conmutativas y* $F$ *un homomorfismo simétrico de* $A$ *en* $B$*; entonces* $F$ *disminuye normas y* $F(A)$ *es una JB*-subálgebra de* $B$*. Si* $F$ *es inyectivo entonces es isométrico.*

DEMOSTRACION. Si $A$ y $B$ tienen unidad la consideración de $A^+$ y $B^+$ reducen la proposición al caso conmutativo unital donde es conocida (Teorema 3.12 ii)). Caso de no ser así se consideran las respectivas $JB^*$ -unitizaciones $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ y se extiende $F$ definiendo:

$$\tilde{F}((a,\lambda)) = (F(a),\lambda) \qquad ((a,\lambda)\in \tilde{A})$$

con lo que $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ y $\tilde{F}$ están en la situación antes considerada. Finalmente para ver que $F(A)$ es una $JB^*$-subálgebra de $B$ basta considerar la descomposición canónica de $F$ (téngase en cuenta la Proposición 4.10).

En [46: Corolario 2.2] se demuestra el siguiente resultado: *Sea* $A$ *una JB*-álgebra con unidad,* $a$ *y* $b$ *elementos autoadjuntos de* $A$ *y notemos* $J(a,b)$ *la JB*-subálgebra de* $A$ *engendrada por* $a$ *y* $b$*; entonces* $J(a,b)$ *es isométricamente isomorfa a una JC*-álgebra.* En particular si $u$ es un elemento cualquiera de $A$, como evidentemente es $J(u) = J(\frac{u+u^*}{2}, \frac{u-u^*}{2i}) = J(u,u^*)$, resulta que $J(u)$ puede identificarse con una $JC^*$-álgebra.

8.2 PROPOSICION. *Sea A una $JB^*$-álgebra no-conmutativa y a un elemento de A; entonces se verifica:* $\|a^*.a\| \geq \frac{1}{2}\|a\|^2$.

DEMOSTRACION. Podemos suponer que A tiene unidad. Por el resultado anteriormente citado puede considerarse a todos los efectos que la subálgebra cerrada de $A^+$ engendrada por $a$ y $a^*$ es una $JC^*$-álgebra. Notando $\perp$ el producto asociativo, será:

$$a.a^* = \frac{1}{2}( a^*\perp a + a\perp a^* ),$$

por lo que: $a^*.a \geq \frac{1}{2}a^*\perp a \geq 0$, y por tanto:

$\|a^*.a\| \geq \frac{1}{2}\|a^*\perp a\| = \frac{1}{2}\|a\|^2$.

Conviene recordar con vistas a la siguiente proposición que en un álgebra normada A de potencias asociativas, el radio espectral está definido (para todo $a \in A$) por([10: p.11]) :

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \qquad (1)$$

evidentemente se verifica : $r(a) \leq \|a\|$. Si $A$ es un álgebra de Banach compleja se sabe que el radio espectral queda determinado algebraicamente por:

$$r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A,a)\},$$

y, en consecuencia , *el radio espectral es el mismo para todas las normas completas sobre* $A$. Curiosamente *este resultado sigue siendo cierto si se supone sólamente que el álgebra* $A$ *es de potencias asociativas* ([6]) *y, en particular, si* $A$ *es un álgebra de Jordan n.c.* Ello es consecuencia de que en una tal álgebra cualquier elemento puede ser sumergido, por una fácil aplicación del Lema de Zorn, en una subálgebra asociativa maximal que, evidentemente es cerrada y por tanto completa. De otro lado la expresión (1) pone de manifiesto que el radio espectral de un elemento queda perfectamente determinado por la subálgebra engendarda por el elemento en cuestión.

Si $A$ es una $JB^*$-álgebra n.c., como consecuencia de la asociatividad de las potencias en $A$, la subálgebra cerrada $C(h)$ engendrada por un elemento simétrico $h$ de $A$ (y, eventualmente, la unidad) es una $B^*$-álgebra asociativa y conmutativa (con la norma e onvolución inducidas). En particular se verifica: $r(h) = \|h\|$.

8.3 PROPOSICION. *Todas las normas de álgebra completas sobre una JB*-álgebra no-conmutativa A son equivalentes.*

DEMOSTRACION. Sea $\|.\|$ la norma de A como JB*-álgebra y $\|.\|_1$ otra norma de álgebra completa sobre A. En virtud de la Proposición 8.2 y siendo el radio espectral el mismo para ambas normas, para cada elemento $a$ de A se verifica:

$$\frac{1}{2}\|a\|^2 \leqslant \|a^*.a\| = r(a^*.a) \leqslant \|a^*.a\|_1 \leqslant \|a^*\|_1\|a\|_1 .$$

Puede continuarse el razonamiento igual que en [33: Lema 4.1.12] o en [29: p.33] .

Consecuencia immediata de la Proposición 8.3 es el siguiente corolario.

8.4 COROLARIO. *Todo isomorfismo entre JB*-álgebras no-conmutativas es continuo.*

8.5 PROPOSICION. *Sea A una JB*-álgebra no-conmutativa, a y b elementos de A el primero de ellos positivo y z un número complejo perteneciente al espectro de b; entonces:* $\|a-b\| \geq d(z,\mathbb{R}_0^+)$.

DEMOSTRACION. Puede suponerse que A tiene unidad. Por la Proposición 3.4 i) se verifica $Sp(A,b) \subset V(A,b)$ y, por la Proposición 5.9, la positividad de $a$ equivale a que $V(A,a) \subset \mathbb{R}_0^+$. Sea $u' \in D(A)$ con $\langle u',b\rangle = z$. Entonces: $\|a-b\| \geq |\langle u',a-b\rangle| = |\langle u',a\rangle - z| \geq d(z,\mathbb{R}_0^+)$.

8.6 DEFINICION. Sean A y B JB*-álgebras no-conmutativas:

Para cada aplicación lineal y continua $G$ de A en B, $G^*$ denota la aplicación de A en B definida por $a \to (G(a^*))^*$.

Para cada isomorfismo $G$ de A sobre B, $G^{\bullet}$ denota el isomorfismo de B sobre A definido por $G^{\bullet} = (G^*)^{-1}$.

Un automorfismo $G$ de A se dice *$\bullet$-simétrico* cuando es $G^{\bullet} = G$. Un automorfismo $\bullet$-simétrico cuyo espectro este formado por números reales positivos será llamado *$\bullet$-positivo*.

Una derivación $D$ de A se llama *antisimétrica* si $D^* = -D$ (evidentemente $D^*$ también es derivación de A).

Reunimos en la siguiente proposición algunas propiedades de demostración immediata.

8.7 PROPOSICION. *Sean A, B y C JB*-álgebras no-conmutativas. Se verifica:*

*i) La aplicación* $G \to G^*$ *de* $BL(A,B)$ *en sí mismo es una involución lineal isométrica y* $G^* = G$ *si y sólo si* $G$ *es simétrica en el sentido de la definición 3.11.*

*ii)* $(GF)^* = G^*F^*$ $\quad (F \in BL(A,B),\ G \in BL(B,C))$

*iii) Si F es una biyección lineal continua de A sobre B es* $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$.

*iv) Sean F y G isomorfismos de A sobre B y de B sobre A respectivamente; entonces:* $(G^\bullet)^\bullet = G$ *y* $(GF)^\bullet = F^\bullet G^\bullet$.

La demostración de que toda derivación de una $B^*$-álgebra es continua dada por Sakai ([33: Lema 4.1.3]) puede adaptarse fácilmente para probar que toda derivación de una $JB^*$-álgebra n.c. es continua (la reducción al caso conmutativo es obvia en cuyo caso esto ha sido notado en [50] ). Recordemos también que la exponencial de una derivación continua de un álgebra normada completa es un automorfismo (continuo) del álgebra.

La siguiente proposición es conocida cuando el álgebra tiene unidad. ([32: Corolario 11]).

8.8 PROPOSICION. *Las derivaciones antisimétricas de una JB*-álgebra no-conmutativa son operadores hermitianos.*

DEMOSTRACION. Sea $A$ una JB*-álgebra n.c. y $D$ una derivación antisimétrica de $A$. Para cada número real $\alpha$, $e^{i\alpha D}$ es un automorfismo de $A$ y, por la continuidad de la involución, se verifica $(e^{i\alpha D})* = e^{-i\alpha D^*} = e^{i\alpha D}$, es decir, se trata de un automorfismo simétrico por lo que $e^{i\alpha D}$ es una isometría de $A$ (Proposición 8.1) y, en particular, será $\|e^{i\alpha D}\| = 1$, lo que, siendo $\alpha$ un número real cualquiera, nos dice que $D$ es hermitiano.

8.9 COROLARIO. *Las derivaciones de una JW*-álgebra no-conmutativa son débil* continuas.*

DEMOSTRACION. Consecuencia de la Proposición 8.8, de los Teoremas 5.2 y 5.12 y del hecho evidente de que toda derivación $D$ de una JB*álgebra n.c. puede escribirse en la forma $D = D_1 + iD_2$ con $D_1$ y $D_2$ derivaciones antisimétricas.

8.10 LEMA. *Sean A y B JB*-álgebras no-conmutativas y G un isomorfismo de A sobre B; entonces $G^{\cdot}G$ es un automorfismo$^{\cdot}$-positivo de A.*

DEMOSTRACION. Sea $a$ un elemento cualquiera de $A$ y $z$ un número complejo; se comprueba sin dificultad la siguiente cadena de desigualdades:

$$\|a\|\|G^{\cdot}G(a) - za\| \geqslant \|a^*.(G^{\cdot}G(a) - za)\| =$$
$$= \|G^{\cdot}(G(a)^*.G(a) - zG^*(a^*.a)\| \geqslant$$
$$\geqslant \|G\|^{-1}\|G(a)^*.G(a) - zG^*(a^*.a)\|$$

(en el último paso se ha tenido en cuenta que $\|(G^{\cdot})^{-1}\| = \|G\|$). Sea $\alpha = \|a^*.a\|$; entonces $\alpha \in \mathrm{Sp}(A, a^*.a)$. Siendo $G^*$ un isomorfismo conserva los espectros por lo que: $\alpha z \in \mathrm{Sp}(B, zG^*(a^*.a))$. Como $G(a)^*.G(a)$ es evidenetemente un elemento positivo de $B$ tenemos por la Proposición 8.5:

$$\|G(a)^*.G(a) - zG^*(a^*.a)\| \geqslant d(\alpha z, \mathbb{R}_0^+) = \alpha\, d(z, \mathbb{R}_0^+),$$

aplicando ahora la Proposición 8.2 resulta:

$$\|G(a)^*.G(a) - zG^*(a^*.a)\| \geqslant \frac{1}{2}\|a\|^2 d(z, \mathbb{R}_0^+).$$

A partir de aquí puede seguirse textualmente la demostración de [30: II Lema] .

8.11 LEMA. *Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa; la aplicación $D \to e^D$ es un homeomorfismo del conjunto de las derivaciones antisimétricas de $A$ sobre el conjunto de los automorfismos $\cdot$-positivos de $A$.*

DEMOSTRACION. Es sabido de la teoría general de operadores que la aplicación $D \to e^D$ es un homeomorfismo del conjunto de los elementos de $BL(A)$ cuyo espectro está contenido en el conjunto $\Omega = \{z \in C : -\pi < Im z < \pi\}$ sobre el conjunto de los elementos de $BL(A)$ cuyo espectro está contenido en el conjunto $\Omega' = \{z \in C: z \notin \mathbb{R}_0^-\}$

Sea $D$ una derivación antisimétrica de $A$, por las Proposiciones 8.8 y 3.4 i), se verifica:

$$Sp(BL(A), D) \subset V(BL(A), D) \subset \mathbb{R}$$

y de aquí se deduce ("spectral mapping theorem") que el espectro de $e^D$ está formado por números reales positivos. Además es evidente que $e^D$ es un automorfismo $\cdot$-simétrico. Luego si $D$ es una derivación antisimétrica de $A$, $e^D$ es un automorfismo $\cdot$-positivo de $A$ y la aplicación así definida es inyectiva. Para probar que es sobreyectiva hacemos uso de un resultado que aparece implícitamente en [14: III.9.4, Lema 8(ii)] y que afirma que todo automorfismo continuo de un álgebra compleja normada completa cuyo espectro esté contenido en $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : |arg(z)| < 2\pi/3\}$ es de la forma $e^{\mathcal{D}}$, con $\mathcal{D}$ derivación continua cuyo espectro está contenido en $\mathbb{R}$. En particular si $G$ es un automorfismo $\cdot$-positivo de $A$, existirá una derivación $\mathcal{D}$ de $A$ tal que $Sp(BL(A),\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}$ y $G = e^{\mathcal{D}}$, y como evidentemente $G^* = e^{\mathcal{D}^*} = G^{-1} = e^{-\mathcal{D}}$ y también $Sp(BL(A),\mathcal{D}^*) \subset \mathbb{R}$ (Proposición 8.7 ii)), ha de ser $\mathcal{D}^* = -\mathcal{D}$, es decir $\mathcal{D}$ es antisimétrica.

8.12 COROLARIO. *Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa, $G$ un automorfismo $\cdot$-positivo de $A$; existe un único automorfismo $\cdot$-positivo de $A$, $F$ tal que $F^2 = G$.*

DEMOSTRACION. Por el Lema 8.11, $G$ se escribe de una única forma como $G = e^{\mathcal{D}}$, donde $\mathcal{D}$ es una derivación antisimétrica de $A$. Definamos $F = e^{1/2\,\mathcal{D}}$ entonces $F$ es un automorfismo $\cdot$-positivo tal que $F^2 = G$. Si $H$ es otro automorfismo $\cdot$-positivo de $A$ tal que $H^2 = G$ y es $H = e^{\mathcal{D}'}$ la expresión única de $H$ que garantiza el Lema 8.11, con $\mathcal{D}'$ derivación antisimétrica de $A$, entonces $H^2 = e^{2D'} = G = e^{D}$ por lo que $D' = \frac{1}{2}D$, con lo que $H = F$. El automorfismo $F$ se notará $\sqrt{G}$.

Podemos ya demostrar el siguiente teorema de estructura de los isomorfismos de $JB^*$-álgebras.

8.13 TEOREMA. *Sean $A$ y $B$ $JB^*$-álgebras no-conmutativas, $G$ un isomorfismo de $A$ sobre $B$. Entonces $G$ se escribe de manera única en la forma $G = G_2 G_1$ donde $G_1$ es un automorfismo $^*$-positivo de $A$ y $G_2$ un isomorfismo simétrico de $A$ sobre $B$.*

DEMOSTRACION. Haciendo uso del Lema 8.10 y del Corolario 8.12, la demostración dada en [30: II. Teorema] puede aplicarse a nuestro caso palabra por palabra. Indiquemos que $G_1$ se vé fácilmente que ha de ser igual a $\sqrt{G^* G}$ con lo que necesariamente $G_2 = G G_1^{-1}$ y se obtiene sin dificultad que $G_2^* = G_2$.

Una de las ventajas de trabajar con $JB^*$-álgebras no-conmutativas queda patente en el siguiente corolario en apariencia más general que el Teorema 8.13.

8.14 COROLARIO. *Sean A y B JB*-álgebras no-conmutativas, G un Jordan-isomorfismo de A sobre B. Entonces G se escribe de manera única en la forma* $G = G_2 G_1$ *donde* $G_1$ *es un Jordan-automorfismo* $\cdot$*-positivo de A y* $G_2$ *un Jordan-isomorfismo simétrico de A sobre B.*

DEMOSTRACION. Aplíquese el Teorema 8.13 a las JB*-álgebras $A^+$ y $B^+$.

8.15 NOTA. Se demuestra en [30] el resultado análogo al Corolario 8.14 para Jordan-isomorfismos de B*-álgebras (asociativas) lográndose allí una perfección consistente en que $G_1$ resulta ser un auténtico automorfismo de B*-álgebras. Ello se debe al hecho de que todo Jordan-automorfismo de un álgebra de Banach compleja semisimple, cuyo espectro esté contenido en el conjunto $\{z \in C - \{0\}: |arg(z)| < 2\pi/3\}$ es un auténtico automorfismo. Con ello resulta que si $G$ es un Jordan-isomorfismo de B*-álgebras $\overset{\bullet}{G}\,G$ es un auténtico automorfismo $\cdot$-positivo de la primera de ellas. Probaremos con un ejemplo que la citada perfección no puede conseguirse en general para JB*-álgebras n.c.

Sea $A$ una $B^*$-âlgebra alternativa no asociativa. Siendo la identidad:

$$3[c,b,a] = -[a,cb] + c[a,b] + [a,c]b$$

cierta en toda álgebra alternativa, se deduce que existe algún elemento $a$ de $A$ tal que la aplicación $D_a$: $x \to [a,x]$ de $A$ en $A$ no es una derivación de $A$; y puede suponerse que $a$ es simétrico. Con ello resulta (Proposición 1.11) que $D_a$ es J-derivación antisimétrica y no es derivación de $A$ por lo que se deduce la existencia de números reales $\alpha$ tales que $e^{\alpha D_a}$ es J-automorfismo $\cdot$-positivo y no es automorfismo de $A$. [Obsérvese que si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha D_a}$ fuera automorfismo de $A$, ello implicaría que $D_a = \lim_{\alpha \to 0} \dfrac{e^{\alpha D_a} - I}{\alpha}$ es una derivación de $A$]

Es sabido que los isomorfismos de $W^*$-álgebras asociativas son débil* continuos. Que nosotros sepamos este resultado no es conocido para $W^*$-ãlgebras no-asociativas (alternativas o de Jordan). El siguiente corolario es una generalización no-asociativa al nivel más general posible del citado resultado asociativo.

8.16 COROLARIO. *Sean A y B JW*-álgebras no-conmutativas y G un isomorfismo de A sobre B; entonces G es débil* continuo.*

DEMOSTRACION. Sea $G = G_2 G_1$ la descomposición de $G$ que garantiza el Teorema 8.13. Siendo $G_2$ un isomorfismo simétrico de $A$ sobre $B$ es una isometría (Proposición 8.1) y, por el Lema 5.1, $G_2$ es débil* continuo. Por su parte $G_1$ es de la forma $e^{D}$ donde $D$ es una derivación antisimétrica de $A$ (Lema 8.11) y, teniendo ahora en cuenta el Corolario 8.9, resulta que $G_1$ es límite uniforme de una sucesión de operadores débil* continuos y por tanto él mismo es débil* continuo, lo que completa la demostración.

## 9. REPRESENTACIONES FACTORIALES.

Se ha visto anteriormente que el propósito de disponer en todo espacio de Banach de unos objetos que desempeñen en lo posible análogo papel al de los ideales biláteros cerrados de un álgebra de Banach, condujo a la definición de M-ideal. Siguiendo esta línea el concepto de "M-ideal primitivo" fue introducido por Alfsen y Effros ([2]) con la intención de disponer de una versión geométrica del concepto de ideal primitivo algebraico. Esto, junto con el hecho de ser los ideales primitivos de un álgebra de Banach (ver Definición 10.6) los núcleos de las representaciones irreducibles, sugiere la posibilidad de utilizar las técnicas geométricas de estructura en los espacios de Banach para atacar el problema de la "abundancia de representaciones factoriales" de una $JB^*$-álgebra no-conmutativa. En esta sección queda patente la extraordinaria utilidad de tales técnicas para abordar problemas como el expuesto, en apariencia lejanos a ellas. Concretamente, se demuestra que toda $JB^*$-álgebra no-conmutativa posee una familia separadora de "representaciones factoriales" lo que, hasta cierto punto, permite reducir la teoría de las $JB^*$-álgebras n.c. al estudio de las estructuras mas simples, es decir, los "factores".

9.1 DEFINICION. Llamaremos *factor* a una $JW^*$-álgebra no-conmutativa que carece de ideales biláteros débil* cerrados no triviales.

Si tenemos en cuenta que, por el Teorema 5.15, los ideales (biláteros) débil* cerrados de una $JW^*$-álgebra n.c. están en correspondencia biunívoca con las proyecciones centrales, que el centro de una tal álgebra es, como consecuencia de la continuidad separada débil* del producto, una $W^*$-álgebra asociativa (y conmutativa) y finalmente recordamos que toda $W^*$-álgebra asociativa es el cierre en norma del subespacio engendrado por las proyecciones de la misma; se deduce que *la condición de ser factor para una $JW^*$-álgebra n.c. es equivalente a que su centro se reduzca a los múltiplos escalares de la unidad.*

Una *representación factorial* de una $JB^*$-álgebra no-conmutativa $A$ es un homomorfismo simétrico $\phi$ de $A$ en un factor $B$ tal que $\phi(A)$ es débil* denso en $B$.

9.2 PROPOSICION. *Sea $\phi$ una representación factorial de una JB*-álgebra no-conmutativa $A$ en un factor $B$. Se verifica:*

*i) $B$ satisface toda identidad multilineal satisfecha por $A$;*

*ii) Si $B$ es reflexivo $\phi$ es sobreyectivo.*

DEMOSTRACION. i) Es consecuencia de ser el producto en $B$ separadamente débil* continuo.

ii) Si $B$ es reflexivo la topología débil* de $B$ coincide con la débil por lo que los conjuntos convexo-cerrados en dicha topología y en la de la norma coinciden y $\phi(A)$ es nórmicamente cerrado en $B$ (Proposición 8.1).

Dado un conjunto convexo $\Omega$ en un espacio normado notamos $\partial_e(\Omega)$ el conjunto de los puntos extremos de $\Omega$. La siguiente proposición será útil en varias ocasiones.

9.3 PROPOSICION ([2: Proposición 1.15]). *Sea $M$ un L-sumando de un espacio normado $X$; entonces se verifica: $\partial_e B(M) = M \cap \partial_e B(X)$.*

Se demuestra en [2: Proposición 2.1] que el cierre de la unión de una familia arbitraria de M-ideales de un espacio de Banach $X$ es un M-ideal de $X$. Ello permite considerar, dado un elemento $x'$ del espacio dual $X'$, el más grande M-ideal de $X$ contenido en el núcleo de $x'$ que notaremos $M_{x'}$. Los M-ideales de $X$ de la forma $M_{x'}$ siendo $x'$ un punto extremo de $B(X')$ se llaman *M-ideales primitivos* de $X$. La siguiente propiedad de los M-ideales primitivos será usada en el próximo lema.

9.4 TEOREMA ([2: Lema 3.1]). *Si un M-ideal primitivo contiene a la intersección de dos M-ideales entonces contiene a alguno de ellos.*

Si $A$ es una $JW^*$-álgebra n.c. y $u'$ es un funcional débil* continuo, aplicando el Teorema 7.4 y teniendo en cuenta la continuidad separada débil* del producto, se deduce fácilmente que $M_{u'}$ es un ideal (bilátero) débil* cerrado y, como consecuencia del Teorema 5.15, existirá una proyección central $e$ en $A$ tal que $M_{u'} = Ae$. Notaremos $A_*$ el predual de $A$.

9.5 LEMA. *Sea $A$ una $JW^*$-álgebra no-conmutativa; $u' \in \partial_e B(A') \cap A_*$ y $e$ la proyección central de $A$ verificando $M_{u'} = Ae$. Entonces $A(I-e)$ es un factor.*

DEMOSTRACION. Notemos $B = A(I-e)$. Evidentemente $B$ es una $JW^*$-álgebra no-conmutativa cuya unidad es $I-e$ Sea $z$ una proyección central de $B$ y $z'$ la proyección complementaria, es decir, $z + z' = I - e$. Entonces $B = Bz \oplus Bz'$ con $Bz$ y $Bz'$ ideales biláteros cerrados de $B$ y por tanto de $A$, por lo que $Bz$ y $Bz'$ son M-ideales de $A$ y como $Bz \cap Bz' = \{0\} \subset M_{u'}$, en virtud del Teorema 9.4, tenemos que $Bz \subset M_{u'}$ o $Bz' \subset M_{u'}$, esto es, $z = 0$ o $z' = 0$, lo que prueba que el centro de $B$ $Z(B)$, carece de proyecciones no triviales y siendo $Z(B)$ una $W^*$-álgebra asociativa ello implica que $Z(B)$ se reduce a los múltiplos escalares de la unidad.

9.6 LEMA. *Sea $A$ una $JB^*$-álgebra no-conmutativa y $a'$. un elemento de $A'$; entonces $J(M_{a'}) = J(A) \cap M_{J(a')}$.*

DEMOSTRACION. $M_{a'}^{\circ\circ}$ es un M-ideal de $A''$ que, evidentemente está contenido en el núcleo de $J(a')$. Por tanto

$M_{a'}^{\infty} \subset M_{J(a')}$. De donde $J(M_{a'}) = J(A) \cap M_{a'}^{\circ\circ} \subset J(A) \cap M_{J(a')}$. Recíprocamente, definamos $L = \{a \in A : J(a) \in M_{J(a')}\}$, puesto que $M_{J(a')}$ es un ideal bilátero cerrado de la $JB^*$-álgebra n.c. $A''$ y $J$ un homomorfismo de $A$ en $A''$, obtenemos que $L$ es un ideal bilátero cerrado de $A$ que, trivialmente, está contenido en el núcleo de $a'$. En consecuencia $J(A) \cap M_{J(a')} = J(L) \subset J(M_{a'})$.

9.7 TEOREMA. *Todo M-ideal primitivo de una $JB^*$-álgebra no-conmutativa $A$ es núcleo de una representación factorial de $A$.*

DEMOSTRACION. Notemos $J$ la inyección canónica de $A$ en $A''$ y de $A'$ en $A'''$ y sea $u' \in \partial_e B(A')$. Siendo $J(A')$ el predual de la $JW^*$-álgebra n.c. $A''$, es un L-sumando de $A'''$ (Teorema 7.8) por lo que, según la Proposición 9.3, es $\partial_e B(J(A')) = J(A') \cap \partial_e B(A''')$ y, por ser $J$ una isometría lineal, $\partial_e B(J(A')) = J(\partial_e B(A'))$ con lo que podemos aplicar a $A''$ y a $J(u')$ el Lema 9.5 para obtener que $A''(I-e'')$ es un factor [donde $e''$ es la proyección central de $A''$ verificando que $M_{J(u')} = A''e''$]. Sea $\phi$ la aplicación de $A$ en $A''(I-e'')$ definida por:

$a \to J(a)(I - e'')$. Es immediato que $\phi$ es un homomorfismo simétrico y que $\phi(A)$ es débil* denso en $A''(I - e'')$. Luego $\phi$ es una representación factorial de $A$. Finalmente puesto que, evidentemente, se tiene:

$$\operatorname{Ker}\phi = J^{-1}(J(A)e'') = J^{-1}(J(A) \cap M_{J(u')})$$

se deduce, por el Lema 9.6, que $\operatorname{Ker}\phi = M_{u'}$.

9.8 LEMA. *En todo espacio de Banach $X$ la intersección de los M-ideales primitivos es cero.*

DEMOSTRACION. Basta notar que, como consecuencia del teorema de Krein-Milman, el conjunto $\partial_e B(X')$ separa puntos en $X$ por lo que $\bigcap_{u' \in \partial_e B(X')} \operatorname{Ker}(u') = \{0\}$.

El Teorema 9.7 y el Lema 9.8 prueban la abundancia de representaciones factoriales de toda $JB^*$-álgebra no-conmutativa, pues consecuencia immediata de ellos es el siguiente corolario.

9.9 COROLARIO. *Toda JB*-álgebra no-conmutativa posee una familia separadora de representaciones factoriales.*

Los factores que aparecen en el Teorema 9.7, es decir, de la forma $A''(I - e'')$ donde $A$ es una JB*-álgebra n.c. y $e''$ es una proyección central en $A''$ tal que $A''e'' = M_{J(u')}$ con $u' \in \partial_e B(A')$, los llamaremos *factores de representación*. El siguiente teorema nos será de utilidad para probar una propiedad importante de los mismos.

9.10 TEOREMA ([2: Proposición 3.5]). *Sea X un espacio de Banach y M un M-ideal en X. El epimorfismo canónico de X sobre X/M establece una biyección entre el conjunto de los M-ideales primitivos de X que contienen a M y los M-ideales primitivos de X/M.*

9.11 PROPOSICION. *{0} es M-ideal primitivo de todo factor de representación.*

DEMOSTRACION. Sea $B = A''(I - e'')$ el factor en cuestión y pongamos $A''e'' = M_{J(u')}$ con $u' \in \partial_e B(A')$.

Puesto que $A'' = \mathcal{B} \oplus M_{J(u')}$ y el isomorfismo natural (de álgebras) de $\mathcal{B}$ sobre $A''/M_{J(u')}$ es evidentemente simétrico, se sigue, por la Proposición 8.1, que es isométrico. Por el Teorema 9.10 $\{0\}$ es M-ideal primitivo de $A''/M_{J(u')}$ y, claramente, los M-ideales se conservan por isomorfismos lineales isométricos.

# CAPITULO V

IDEALES PRIMITIVOS EN LAS B*-ALGEBRAS

TEOREMAS DE ESTRUCTURA DE LAS B*-ALGEBRAS Y

W*-ALGEBRAS ALTERNATIVAS.

## 10. UNA CARACTERIZACION GEOMETRICA DE LOS IDEALES PRIMITIVOS DE UNA $B^*$-ALGEBRA.

Se ha podido apreciar en las secciones anteriores la estrecha dependencia que hay entre la teoría clásica de las $B^*$-álgebras y las técnicas de geometría de los espacios de Banach. Las definicionse de M-ideal y de M-ideal primitivo en un espacio de Banach pretenden abstraer las propiedades geométricas de que gozan los ideales biláteros cerrados y los ideales primitivos de una $B^*$-álgebra respectivamente. Siendo esto así es de desear que en una $B^*$-álgebra los nuevos objetos introducidos coincidan con aquellos que motivaron su definición. Sabemos que ello es así para M-ideales e ideales biláteros cerrados. Alfsen y Effros ([2])demuestran que los M-ideales primitivos de la parte autoadjunta de una $B^*$-álgebra coinciden con las partes autoadjuntas de los ideales primitivos algébricos. Teniendo en cuenta lo dicho la siguiente conjetura aparece de forma natural: ¿coinciden los ideales primitivos de una $B^*$-álgebra con los M-ideales primitivos de su espacio de Banach subyacente?. En esta sección damos respuesta afirmativa a esta cuestión justificando con ello totalmente el propósito inicial que condujo a Alfsen y Effros a la introducción del concepto de M-ideal primitivo.

*Solo se consideran en esta sección álgebras asociativas.*

Sea $A$ una $B^*$-álgebra y $A'$ el espacio de Banach dual de $A$. Para cada $a \in A$ y cada $a' \in A'$, $a'a$ es el elemento de $A'$ definido por:

$$\langle aa', x \rangle = \langle a', xa \rangle \qquad (x \in A)$$

Recordemos que un funcional $x'$ sobre un álgebra de Banach involutiva $A$ se dice *positivo* si para cada $a \in A$ se tiene $\langle x', a^*a \rangle \geqslant 0$. En tal caso se verifica la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x', ab \rangle|^2 \leqslant \langle x', a^*a \rangle \langle x', b^*b \rangle \qquad (a, b \in A)$$

Los funcionales positivos de norma 1 se llaman *estados*. Notaremos $E(A)$ el conjunto de los estados de $A$. Si $A$ es una $B^*$-álgebra los puntos extremos de $E(A)$ se llaman *estados puros* de $A$ y cuando $A$ tiene unidad I es sabido que un funcional $x'$ sobre $A$ es positivo si y solo si $\langle x', I \rangle = \|x'\|$, en particular en tal caso $E(A)$

coincide con el conjunto $\mathcal{D}(A)$. Digamos finalmente que si $x'$ es un funcional positivo sobre una $B^*$-álgebra $A$ existe un único funcional positivo $\widetilde{x}'$ sobre la unitización $\widetilde{A}$ de $A$ que extiende a $x'$ y tal que $\langle \widetilde{x}', I\rangle = \|x'\|$.

10.1 LEMA. *Sea $a$ un elemento positivo de una $B^*$-álgebra $A$ y $a'$ un elemento de $A'$ verificando $\langle a', a\rangle = \|a'\|\|a\|$; entonces $aa' = a'$.*

DEMOSTRACION. Por [33: Proposición 1.5.2] $a'$ es positivo. Puede suponerse $\|a'\| = \|a\| = 1$ y, por lo antes dicho, que $A$ tiene unidad $I$ en cuyo caso $\langle a', I - a\rangle = 0$, y la desigualdad de Schwarz da para cada $x \in A$:

$$|\langle a', x(I-a)\rangle|^2 \leqslant \langle a', x^*x\rangle \langle a', (I-a)^2\rangle \leqslant \langle a', x^*x\rangle\langle a', I-a\rangle = 0.$$

Luego $(I-a)a' = 0$.

Sea $A$ una $W^*$-álgebra y $A_*$ su predual. Recordemos ([33: Teorema 1.14]) que todo elemento $a_*$ de $A_*$ admite una única descomposición, llamada *descomposición polar*, en la forma $a_* = bu_*$ donde $u_*$ es un elemento positivo de $A_*$ verificando $\|a_*\| = \|u_*\|$ y $b$ es un elemento de $A$ tal que $b^*b = s(u^*)$, donde $s(u^*)$ es el soporte de $u_*$

es decir, $s(u_*)$ es la mínima proyección $p$ verificando $\langle u_*, p\rangle = \|u_*\|$ , en particular, por el Lema anterior, $s(u_*)u_* = u_*$.

10.2 COROLARIO. *Sea A una $W^*$-álgebra, $a_*$ un punto extremo de $B(A_*)$ y $a_* = bu_*$ la descomposición polar de $a_*$. Entonces $u_*$ es también punto extremo de $B(A_*)$.*

DEMOSTRACION. Sea $u_* = \frac{1}{2}(x_* + y_*)$ con $x_*, y_* \in B(A_*)$, entonces $a_* = \frac{1}{2}(bx_* + by_*)$ lo que exige $a_* = bx_* = by_*$. Así resulta: $u_* = s(u_*)u_* = b^*bu_* = b^*a_* = b^*bx_*$. Los elementos $b^*b$ y $x_*$ están en las condiciones del Lena 10.1 por lo que $u_* = x_*$ , con lo que $u_* \in \partial_e B(A_*)$.

10.3 PROPOSICION. *Sea A una $W^*$-álgebra, $a_*$ un elemento de $A_*$ y $a_* = bu_*$ la descomposición polar de $a_*$. Entonces $M_{a_*} = M_{u_*}$.*

DEMOSTRACION. $M_{u_*}$ es un ideal bilátero de A, en consecuencia $M_{u_*}b \subset M_{u_*} \subset \mathrm{Ker}(u_*)$. Así:

$$\langle a_*, M_{u_*}\rangle = \langle bu_*, M_{u_*}\rangle = \langle u_*, M_{u_*}b\rangle = \{0\},$$

con lo que $M_{u_*} \subset M_{a_*}$. Como también se tiene $u_* = b^*a_*$ obtenemos análogamente la inclusión contraria.

10.4 LEMA. *Todo M-ideal primitivo en una $B^*$-álgebra A es de la forma $M_{u'}$, donde u' es un elemento positivo de A' punto extremo de B(A').*

DEMOSTRACION. Consideremos $a' \in \partial_e B(A')$, entonces $J(a') \in \partial_e B(J(A'))$. Como $J(A')$ es el predual de A" se deduce del Corolario 10.2 y la Proposición 10.3 la existencia de un elemento positivo $J(u')$ de $J(A')$ tal que $J(u') \in \partial_e B(J(A'))$ y $M_{J(a')} = M_{J(u')}$ y el Lema 9.6 permite concluir $M_{a'} = M_{u'}$.

10.5 LEMA. *Sea u' un estado puro de una $B^*$-álgebra A; entonces u' es punto extremo de B(A').*

DEMOSTRACION. Sea $u' = \frac{1}{2}\langle v' + w'\rangle$, con $v', w' \in B(A')$
Bastará probar que $v'$ y $w'$ son positivos. Sea $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una unidad aproximada para A, entonces ([15: Proposición 2.1.5(v)]) :

$$\frac{1}{2}\langle v', a_\lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle w', a_\lambda\rangle \to 1.$$

Como C es uniformemente convexo, la relación anterior exige: $\langle v', a_\lambda\rangle \to 1$, y $\langle w', a_\lambda\rangle \to 1$. Puesto que la red $\{J(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\}$ en $A''$ converge débil* a la unidad I de $A''$ obtenemos $\langle J(v'),\mathrm{I}\rangle = \langle J(w'),\mathrm{I}\rangle = 1$, de donde se sigue que $v'$ y $w'$ son positivos.

10.6 DEFINICION. Un ideal $M$ de un álgebra no-asociativa $A$ se llama *primitivo* si existe un ideal izquierdo maximal modular $L$ de $A$ tal que $M$ es al mayor ideal bilátero contenido en $L$. Si $N$ es un ideal de $A$ es fácil ver que el epimorfismo canónico $\pi : A \to A/N$ establece una biyección entre el conjunto de los ideales primitivos de $A$ que contienen a $N$ y el conjunto de los ideales primitivos de $A/N$. En particular un ideal $M$ es primitivo si y solo si $\{0\}$ es ideal primitivo de $A/M$. Si $A$ es un álgebra normada completa los ideales primitivos son cerrados.

10.7 TEOREMA. *Los ideales primitivos de una $B^*$-álgebra son los M-ideales primitivos de su espacio de Banach.*

DEMOSTRACION. Por [15: Teorema 2.9.5] los ideales izquierda maximales modulares de una $B^*$-álgebra $A$ son los más grandes ideales izquierdos contenidos en los núcleos de los estados puros. En consecuencia los ideales primitivos de $A$ son los conjuntos de la forma $M_{u'}$, donde $u'$ es estado puro. El Lema 10.4 nos dice que todo M-ideal primitivo de $A$ es ideal primitivo y el Lema 5 nos asegura la afirmación recíproca.

NOTA. Terminado este trabajo hemos visto que el Corolario 10.2 y el Lema 10.5 aparecen implícitamente en [4].

## 11. $B^*$-ALGEBRAS Y $W^*$-ALGEBRAS ALTERNATIVAS.

En esta sección se describen los factores alternativos y se dan sendos teoremas de estructura para las $B^*$-álgebras alternativas y para las $W^*$-álgebras alternativas ( Teoremas 11.16 y 11.24 ).

Empezaremos describiendo brevemente el álgebra de los octoniones complejos.

Sea $K$ un cuerpo arbitrario y $A$ un álgebra con unidad I, de dimensión n sobre $K$ y canónicamente dotada de una *conjugación*, esto es, de una aplicación lineal $a \to \bar{a}$ verificando (para todos $a,b \in A_n$):

$$\bar{\bar{a}} = a; \quad \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}; \quad a+\bar{a} = \alpha I; \quad a\bar{a} = \beta I \ (\alpha,\beta \in K).$$

Sumergimos $A_n$ en un espacio vectorial $A_{2n}$ de dimensión 2n sobre $K$ cuyos elementos se notan en la forma $a+bw$ para $a$ y $b$ en $A_n$. Se define una multiplicación en $A_{2n}$ (para todos $a,b,c,d \in A_n$) por:

$$(a+bw)(c+dw) = ac+\lambda\bar{d}b + (da+b\bar{c})w \qquad (1)$$

donde $\lambda$ es un elemento no nulo de $K$. Se comprueba fácilmente que la aplicación $a+bw \to \bar{a}-bw$ es una conjugación en $A_{2n}$.

Partiendo de $K$ con la aplicación identidad como conjugación, de una terna $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in (K-\{0\})^3$, y repitiendo tres veces el procedimiento anterior, eligiendo sucesivamente en cada etapa los números $\lambda_1,\lambda_2$ y $\lambda_3$ en lugar del $\lambda$ que aparece en (1), se obtiene un álgebra $O(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ de dimensión 8 sobre $K$ *alternativa pero no asociativa* ([34: III.4]) llamada un *álgebra de Cayley*. Para $O(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ es posible encontrar una base de su espacio vectorial $(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8)$, que llamaremos una *base canónica* de $O(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ de manera que la multiplicación de dicha álgebra queda conocida en función de la siguiente sencilla tabla de multiplicación ([34: p.5]):

| | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ |
| $u_2$ | $u_2$ | $\lambda_1 u_1$ | $-u_4$ | $-\lambda_1 u_3$ | $-u_6$ | $-\lambda_1 u_5$ | $u_8$ | $\lambda_1 u_7$ |
| $u_3$ | $u_3$ | $u_4$ | $\lambda_2 u_1$ | $\lambda_2 u_2$ | $-u_7$ | $-u_8$ | $-\lambda_2 u_5$ | $-\lambda_2 u_6$ |
| $u_4$ | $u_4$ | $\lambda_1 u_3$ | $-\lambda_2 u_2$ | $-\lambda_1\lambda_2 u_1$ | $-u_8$ | $-\lambda_1 u_7$ | $\lambda_2 u_6$ | $\lambda_1\lambda_2 u_5$ |
| $u_5$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ | $\lambda_3 u_1$ | $\lambda_3 u_2$ | $\lambda_3 u_3$ | $\lambda_3 u_4$ |
| $u_6$ | $u_6$ | $\lambda_1 u_5$ | $u_8$ | $\lambda_1 u_7$ | $-\lambda_3 u_2$ | $-\lambda_1\lambda_3 u_1$ | $-\lambda_3 u_4$ | $-\lambda_1\lambda_3 u_3$ |
| $u_7$ | $u_7$ | $-u_8$ | $\lambda_2 u_5$ | $-\lambda_2 u_6$ | $-\lambda_3 u_3$ | $\lambda_3 u_4$ | $-\lambda_2\lambda_3 u_1$ | $\lambda_2\lambda_3 u_2$ |
| $u_8$ | $u_8$ | $-\lambda_1 u_7$ | $\lambda_2 u_6$ | $-\lambda_1\lambda_2 u_5$ | $-\lambda_3 u_4$ | $\lambda_1\lambda_3 u_3$ | $-\lambda_2\lambda_3 u_2$ | $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 u_1$ |

11.1 TEOREMA ([34: III.Corolario 3.24]). *Dos álgebras de Cayley con divisores de cero sobre un cuerpo de característica distinta de dos son isomorfas.*

Toda álgebra de Cayley $A$ es de grado dos sobre $K$ siendo: $(\lambda - a)(\lambda - \bar{a}) = \lambda^2 - \alpha\lambda + \beta I$, la ecuación cuadrática satisfecha por $a \in A$. Si el cuerpo $K$ es algebraicamente cerrado es evidente que $K$ tiene divisores de cero.

En particular existe una única álgebra de Cayley compleja que suele llamarse álgebra de los *octoniones complejos* y se notará con la letra $O$. Según esto la elección de la terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ es irrelevante en el caso complejo por lo que supondremos que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Se demuestra en [26: IV.6] que $O$ puede dotarse de estructura de $B^*$-álgebra. Concretamente, sea $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$ una base canónica de $O$, la aplicación $a \to a^*$ que a un elemento $a = \sum_1^8 \lambda_s u_s$ hace corresponder $a^* = \overline{\lambda}_1 u_1 - \sum_2^7 \overline{\lambda}_s u_s$ es una involución multiplicativa en $O$. Definamos: $U = \{a \in O : a^* = a^{-1}\}$ y $W = |co|\, U$ la envolvente absolutamente convexa de $U$; entonces el funcional de Minkowski de $W$, que notamos $p$, es una norma de álgebra sobre $O$ y $(O, *, p)$ *es una $B^*$-álgebra alternativa no asociativa.*

11.2 TEOREMA. *Salvo isomorfismos totales hay una única $B^*$-álgebra de octoniones complejos.*

DEMOSTRACION. Sean $A_1 = (O(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), *_1, \|.\|_1)$ y $A_2 = (O(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), *_2, \|.\|_2)$ dos $B^*$-álgebras de Cayley complejas. Por el Teorema 11.1 $O(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ y $O(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ son isomorfas y entonces, como consecuencia del Teorema 8.13 existe un isomorfismo simétrico, y por tanto isómétrico, de $A_1$ sobre $A_2$ .

Un álgebra $A$ se dice *semiprima* si la igualdad $M^2 = \{0\}$ donde $M$ es un ideal de $A$ implica que $M = \{0\}$. Un álgebra alternativa $A$ se dice *puramente alternativa* si $\{0\}$ es el único ideal de $A$ contenido en el núcleo de $A$.

11.3 TEOREMA ([38: 4.11]). *Sea $A$ un álgebra alternativa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i) $A$ es semiprima puramente alternativa;*

*ii) $A$ carece de ideales asociativos excepto el cero.*

11.4 TEOREMA ([38: Corolario 7.7]). *Sea $A$ un álgebra alternativa semiprima y $M$ un ideal de $A$; entonces o $M \subset N(A)$ o bien $M \cap Z(A) \neq \{0\}$.*

Recordemos que un álgebra $A$ se dice *simple* si $\{0\}$ es el único ideal propio de $A$ y $A^2 \neq \{0\}$.

11.5 TEOREMA. *Un factor alternativo o es asociativo o es la $B^*$-álgebra de los octoniones complejos.*

DEMOSTRACION. Sea $A$ un factor alternativo no asociativo. Teniendo en cuenta que el cierre débil* de un ideal asociativo es también un ideal asociativo, se deduce que $\{0\}$ es el único ideal asociativo de $A$ y, por el Teorema 11.3, $A$ es semiprima y puramente alternativa, pero entonces, por el Teorema 11.4, si $M \neq \{0\}$ es un ideal de $A$, ha de ser $M \cap Z(A) \neq \{0\}$ y como $Z(A) = CI$ concluimos que necesariamente $M = A$. Por tanto $A$ es simple y en estas condiciones un conocido resultado de Kleinfeld ([20]) afirma que $A$ es isomorfa como álgebra a $\mathcal{O}$ y, por el Teorema 8.13, concluimos que existe un isomorfismo simétrico del factor $A$ sobre el factor $(\mathcal{O},*,p)$.

11.6 LEMA. *Sea $A$ una $B^*$-álgebra alternativa no asociativa y supongamos que $\{0\}$ es M-ideal primitivo de $A$; entonces $A$ es totalmente isomorfa al factor $(\mathcal{O},*,p)$.*

DEMOSTRACION. Por el Teorema 9.7 existe una representación inyectiva $\phi$ de $A$ en un factor que, evidentemente, no puede ser asociativo por lo que, en virtud del Teorema 11.5, dicho factor, salvo isomorfismos isométricos, no puede ser otro que $(O,*,p)$ y siendo $O$ finito dimensional se deduce, por la Proposición 9.2, que $\phi$ es sobreyectivo.

11.7 TEOREMA. *Los M-ideales primitivos de una $B^*$-álgebra alternativa $A$ coinciden con los ideales primitivos algébricos.*

DEMOSTRACION. Sea $M$ un ideal primitivo de $A$. Como $M$ es cerrado, podemos considerar la $B^*$-álgebra cociente $A/M$ (Proposición 4.10). Por un resultado de Kleinfeld ([21]) $A/M$ es asociativa o bien es un álgebra de Cayley sobre su centro que, siendo un álgebra compleja normada y de división, no puede ser otro que $C$. En definitiva $A/M$ es una $B^*$-álgebra asociativa o, por el Teorema 11.2, totalmente isomorfa al factor $(O,*,p)$. En el primer caso $\{0\}$ es ideal primitivo de $A/M$ y, por el Teorema 10.7, $\{0\}$ es M-ideal primitivo de $A/M$. En el segundo caso, como $O$ es simple, es claro que $\{0\}$ es M-ideal primitivo de $A/M$. En resumen, si $M$ es un ideal primitivo de $A$, $\{0\}$ es M-ideal primitivo de $A/M$ pero entonces, por el Teorema 9.10, $M$ es M-ideal primitivo de $A$. Recíprocamente sea $M$ un M-ideal primitivo de $A$, entonces, por el Teorema 9.10, $\{0\}$ es M-ideal primitivo de $A/M$. Si $A/M$ es asociativa entonces, aplicando otra vez el Teorema 10.7, $\{0\}$ es ideal primitivo de $A/M$. Si $A/M$ no es asociativa, aplicando el Lema 11.6, $A/M$ es totalmente isomorfa al factor $(0,*,p)$ y evidentemente $\{0\}$ es ideal primitivo de $A/M$. En cualquier caso, si $M$ es un M-ideal primitivo de $A$ resulta que $\{0\}$ es ideal primitivo de $A/M$ pero ello es equivalente a ser $M$ ideal primitivo de $A$.

Un álgebra alternativa se dice *Kleinfeld-semisimple* si la intersección de todos los ideales primitivos es cero.

11.8 COROLARIO. *Las $B^*$-álgebras alternativas son Kleinfeld-semisimples.*

DEMOSTRACION. Teorema 11.7 y Lema 9.8.

En un álgebra $A$ el ideal bilátero engendrado por el conjunto $\{z \in A: z = [a,b,c], (a,b,c \in A)\}$ se llama *ideal asociador* y lo notaremos con la letra $\mathcal{D}$.

11.9 PROPOSICION. *Sea $\phi$ una representación factorial de una $B^*$-álgebra alternativa $A$ en un factor $B$; entonces $B$ es asociativo si y solo si $\mathrm{Ker}(\phi) \supset \overline{\mathcal{D}}$.*

DEMOSTRACION. Si $B$ es asociativo es evidente que $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Ker}(\phi)$. Recíprocamente, si $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathrm{Ker}(\phi)$ la $B^*$-álgebra $A/\mathrm{Ker}(\phi)$ es asociativa e isomorfa a $\phi(A)$ por lo que $\phi(A)$ es también asociativa y al ser débil* densa en $B$ se sigue que $B$ es ella misma asociativa.

11.10 PROPOSICION. *Las representaciones factoriales de una $B^*$-álgebra puramente alternativa $A$ sobre $(0,*,p)$ separan puntos.*

DEMOSTRACION. Sabemos que cada ideal primitivo $M$ de $A$ tiene asociada una representación factorial de $A$ cuyo núcleo es $M$. Sea $\Pi$ el conjunto de los ideales primitivos de $A$, $\Pi_1$ el subconjunto de $\Pi$ formado por los ideales primitivos que son núcleos de representaciones factoriales de $A$ en un factor asociativo y $\Pi_2$ el subconjunto de $\Pi$ formado por los ideales primitivos que son núcleos de representaciones factoriales de $A$ sobre $O$. Con ello $\Pi = \Pi_1 \dot{\cup} \Pi_2$. Sean $a, b, c \in \cap \{ M : M \in \Pi_2 \}$. Evidentemente $[a,b,c] \in \cap \{M : M \in \Pi_2\}$ y, por la Proposición 11.9, también $[a,b,c] \in \cap \{M : M \in \Pi_1\}$ por lo que $[a,b,c] \in \{\cap M : M \in \Pi\} = \{0\}$. Luego $\cap \{M : M \in \Pi_2\}$ es un ideal bilátero asociativo y siendo por hipótesis $A$ puramente alternativa para acabar la demostración bastará probar, en virtud del Teorema 11.3, que $A$ es semiprima, pero ello es trivial (aún sin suponer $A$ puramente alternativa) pues si $M$ es un ideal de $A$ tal que $M^2 = \{0\}$ y si $a \in M$ se tiene $(aa^*)^2 \in M^2$ por lo que $0 = \|(aa^*)^2\| = \|a\|^4$ luego $a = 0$.

11.11 PROPOSICION. *Sea $X$ un conjunto no vacío. El espacio $B(X,O)$ de las aplicaciones acotadas de $X$ en $(O,*,p)$ con operaciones definidas puntualmente y norma del supremo es una $B^*$-álgebra puramente alternativa y toda representación factorial de $B(X,O)$ es sobre el factor $(O,*,p)$.*

DEMOSTRACION. Es sencillo comprobar que con las definiciones dadas $B(X,O)$ es una $B^*$-álgebra alternativa. Veamos que es puramente alternativa. Consideremos para cada $x \in X$ la aplicación $\phi_x$: $B(X,O) \to O$ definida por $\phi_x(f) = f(x)$. Es evidente que tal aplicación es un epimorfismo simétrico por lo que, si $M$ es un ideal propio de $B(X,O)$, $\phi_x(M)$ es un ideal de $O$ y por tanto $\phi_x(M) = \{0\}$ o $\phi_x(M) = O$ (pues $O$ es simple). Si $M$ es asociativo, necesariamente $\phi_x(M) = \{0\}$ y como $x$ es un elemento arbitrario de $X$ y la familia $\{\phi_x\}_{x \in X}$ separa puntos, se sigue que $M = \{0\}$, por lo que, en vista del Teorema 11.3, resulta que $B(X,O)$ es puramente alternativa.

Sea $\phi : B(X,O) \to B$ una representación factorial . Identificando cada función constante con el valor que toma, podemos considerar $O$ como subálgebra de $B(X,O)$. Como $O$ es simple y $\phi(1) \neq 0$ se deduce que $O \cap \mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ y por tanto la imagen de $\phi$ contiene una subálgebra isomorfa a $O$ lo que exige que $B = (O,*,p)$.

11.12 PROPOSICION. *Sea $A$ una $B^*$-álgebra puramente alternativa. Existe un monomorfismo simétrico (en consecuencia isométrico) de $A$ en un álgebra $C(X,O)$ para algún espacio de Hausdorff compacto $X$.*

DEMOSTRACION. Sea $F$ la familia de las representaciones factoriales de $A$ sobre $O$. Recordando que los homomorfismos simétricos de

$JB^*$-álgebras n.c. disminuyen normas, podemos considerar la aplicación $x \to \tilde{x}$ de $A$ en $B(F,O)$ definida por: $\tilde{x}(\phi) = \phi(x)$ $(\phi \in F)$. Se comprueba fácilmente que dicha aplicación es un homomorfismo simétrico. Además es inyectivo pues, por la Proposición 11.10, la familia $F$ separa puntos en $A$. Finalmente si $X$ es la compactación de Stone-Cêch del espacio discreto $F$, $B(F,O)$ se identifica con $C(X,O)$.

11.13 TEOREMA. *Sea $A$ una $B^*$-álgebra alternativa. Existe un único ideal cerrado $M$ en $A$ tal que $A/M$ es una $B^*$-álgebra asociativa y toda representación factorial de $A$ que no anule a $M$ es sobre el factor $(O,*,p)$.*

DEMOSTRACION. Es immediato, teniendo en cuenta la Proposición 11.9, que el cierre en norma del ideal asociador, $\overline{D}$, verifica las condiciones del enunciado. Sea $N$ otro ideal cerrado verificando la tesis del teorema. Por ser $A/N$ asociativa $N \supset \overline{D}$. Cada representación factorial $\phi$ de $A/D$ induce una representación factorial $\tilde{\phi}$ $(= \phi_o\pi$, donde $\pi$ es la proyección canónica de $A$ sobre $A/\overline{D}$) de $A$ que, evidentemente, no es sobre $O$ y por tanto debe anular a $N$. Puesto que $A/\overline{D}$ posee una familia separadora de representaciones factoriales se deduce que $N \subset \overline{D}$.

11.14 TEOREMA ([39: Lema 3.2]). *Sea $A$ un álgebra alternativa, $U$ el mayor ideal contenido en el núcleo de $A$; entonces $A/U$ es puramente alternativa y semiprima.*

11.15 TEOREMA. *Sea $A$ una $W^*$-álgebra alternativa. Existe una única proyección central $z$ tal que :*

$$A = Az \oplus A(I-z)$$

*donde $Az$ es una $W^*$-álgebra asociativa y $A(I-z)$ es una $W^*$-álgebra puramente alternativa.*

DEMOSTRACION. Teniendo en cuenta que el núcleo de $A$ es débil* cerrado, se deduce que el mayor ideal $U$ de $A$ contenido en el núcleo de $A$ es débil* cerrado; por lo que existe una proyección central única $z$ tal que $U = Az$. Tenemos entonces $A = Az \oplus A(I-z)$ donde, evidentemente, $Az$ es una $W^*$-álgebra asociativa y $A(I-z)$ es puramente alternativa, como resulta del Teorema 11.14 sin mas que notar que $A(I-z)$ es isomorfa a $A/Az$ . Sea $w$ otra proyección central verificando las condiciones del enunciado. Entonces $Aw \cap A(I-z)$ es un ideal asociativo de $A(I-z)$ por lo que, en virtud del Teorema 11.3, ha de ser $Aw \cap A(I-z) = Aw(I-z) = \{0\}$ , o sea, $w(I-z)=0$. Análogamente $z(I-w) = 0$. Luego $z = w$ .

Dada una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $JB^*$-álgebras n.c. notamos $\oplus A_\lambda$ la $JB^*$-álgebra n.c. cuyos elementos son las familias $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tales que $a_\lambda \in A_\lambda$, y $\sup \|a_\lambda\| < \infty$ con operaciones definidas puntualmente y norma del supremo.

11.16 TEOREMA. *Sea $A$ una $B^*$-álgebra alternativa. Existe un espacio de Hilbert complejo $H$ y un espacio de Hausdorff compacto $X$ tales que $A$ se identifica con una subálgebra de la $B^*$-álgebra alternativa $BL(H)\oplus C(X,0)$.*

DEMOSTRACION. Considerando $A$ como subálgebra de la $W^*$-álgebra alternativa $A''$ y llamando z la proyección central cuya existencia garantiza el Teorema 11.15, tenemos $A'' = Az \oplus A(I-z)$ donde $Az$ se identifica, en virtud del teorema de Gelfand-Naimark, con una subálgebra (necesariamente cerrada y autoadjunta) de $BL(H)$ para algún espacio de Hilbert complejo $H$ y, en virtud del Teorema 11.12, $A(I-z)$ se identifica con una subálgebra (cerrada y autoadjunta) de $C(X,0)$ para algún espacio de Hausdorff compacto $X$.

Nos proponemos a continuación describir las $W^*$-álgebras puramente alternativas.

Un elemento $a$ de una $JB$-álgebra $A$ (res. $JB^*$-álgebra n.c. $A$ ) se llama una *e-simetría* si $a^2 = e$ donde $e$ es un idempotente de $A$ (res. si $a = a^*$ y $a^2 = e$ donde $e$ es una proyección de $A$). Si $A$ tiene unidad I, las I-simetrías se llaman simplemente simetrías. Dos elementos $a$ y $b$ de una $JB$-álgebra $A$(res. $JB^*$-álgebra n.c. $A$) se llaman *ortogonales* (res. *J-ortogonales* ) si verifican: $ab = 0$ (res. $ab + ba = 0$). Recordemos que una $JBW$álgebra es una $JB$-álgebra que es dual de un espacio de Banach.

11.17 LEMA ([36: Lemas 3.4 y 3.5]). *Sea $\phi$ un epimorfismo de una JBW-álgebra A sobre una JB-álgebra B (que, por tanto, tendrá unidad, I). Sean $u_1,\ldots,u_n$ $(n \geq 1)$ simetrías ortogonales en B. Entonces existe un idempotente $e \in A$ y e-simetrías ortogonales $s_1,\ldots,s_n$ tales que: $\phi(e) = I$ ; $s_i \in U_e(A)$ y $\phi(s_i) = u_i$ $(1 \leq i \leq n)$.*

En realidad el resultado que se obtiene en [36] es más fuerte pero el enunciado que damos es suficiente para nuestros propósitos.

11.18 LEMA. *Sea $\phi$ un epimorfismo simétrico de una $W^*$-álgebra alternativa A sobre una $B^*$-álgebra alternativa B (que, por tanto, tendrá unidad ,I). Sean $u_1,\ldots,u_n$ $(n \geq 1)$ simetrías J-ortogonales* *en B. Entonces existe una proyección* $e \in A$ *y e-simetrías J-ortogonales* $s_1, \ldots, s_n$ *tales que:*

$$\phi(e)=I \ ; \quad s_i \in eAe \quad y \quad \phi(s_i)= u_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

DEMOSTRACION. Por la Proposición 2.8 $A$ es una $JW^*$-álgebra n.c. y por la Proposición 2.6 $A^+$ es una $JW^*$-álgebra. Como consecuencia de la continuidad débil* de la involución $Sim(A)=(Sim(A^+))$ es débil* cerrado y por tanto $(Sim(A))^+$ es una $JBW$-álgebra. El epimorfismo $\phi$ induce (¡ $\phi$ es simétrico¡) un epimorfismo de la $JBW$-álgebra $(Sim(A))^+$ sobre la $JB$-álgebra $(Sim(B))^+$. Advirtamos que $u_i \in Sim(B)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ y que la J-ortogonalidad en un álgebra es equivalente a la ortogonalidad en el álgebra simetrizada; además por ser $A$ alternativa se verifica $U_a(b) = bab$ $(a,b \in A)$ . Estas consideraciones permiten reducir nuestro lema al lema 11.17.

11.19 LEMA. *Sea* $\phi$ *un epimorfismo simétrico de una* $W^*$*-álgebra alternativa* $A$ *sobre la* $B^*$*-álgebra* $(O,*,p)$; *entonces* $A$ *contiene una subálgebra autoadjunta que es totalmente isomorfa a la* $B^*$*-álgebra de los octoniones complejos.*

DEMOSTRACION. Sea $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$ una base canónica en $O$. Pongamos $v_2 = iu_2$, $v_3 = iu_3$, $v_5 = iu_5$. Observando la tabla de multiplicación dada anteriormente (con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$) y recordando cómo está definida la involución en $O$, es fácil ver que $v_2$, $v_3$ y $v_5$ son simetrías J-ortogonales. Sea $e$ la proyección y $t_2$, $t_3$, $t_5$ las $e$-simetrías J-ortogonales en $A$ cuya existencia garantiza el Lema 11.18. Definiendo $a_2 = -it_2$, $a_3 = -it_3$, $a_5 = -it_5$ se verifica:

$$\phi(a_j) = u_j \; ; \; \frac{1}{2}(a_j a_k + a_k a_j) = -\partial_{kj} e \quad (k, j \in \{2,3,5\})$$

Como los elementos $a_2, a_3, a_5$ tienen cuadrado igual a $-e$ y anticonmutan, la subálgebra por ellos engendrada, $B$, es finito dimensional [36: p.373] y autoadjunta por tener un sistema autoadjunto de generadores. Como $u_2, u_3$ y $u_5$ engendran algebraicamente a $O$ resulta que la restricción $\tilde{\phi}$ de $\phi$ a $B$ es un epimorfismo simétrico de $B$ sobre $O$. $\mathrm{Ker}\tilde{\phi}$ es un ideal bilátero cerrado de $B$ por lo que, siendo $B$ finito dimensional, existirá una proyección central en $B$, $z$, tal que $\mathrm{Ker}\tilde{\phi} = Bz$. Entonces $B(e-z)$ es una subálgebra de $A$ tal que la restricción de $\phi$ a dicha subálgebra es un isomorfismo simétrico de $B(e-z)$ sobre $O$.

Si $A$ y $B$ son álgebras (sobre $K$), el *producto de Kronecker* $A \otimes B$ es el producto tensorial de los espacios vectoriales $A$ y $B$ con el producto definido por bilinealidad siendo:

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) \quad ((a_i, b_i) \in A \times B, i=1,2)$$

11.20 TEOREMA ([51: Teorema 2]). *Sea $A$ un álgebra alternativa y $B$ una subálgebra de Cayley. Entonces $A = A_1 \oplus A_2$ donde $A_1$ y $A_2$ son ideales de $A$ y $A_1$ es el producto de Kronecker: $A_1 = B \otimes Z(A_1)$, donde $Z(A_1)$ es el centro de $A_1$.*

Es conveniente recordar ahora algunas cuestiones acerca del producto tensorial de espacios normados [10: §42].

Sea $X$ e $Y$ espacios normados (sobre $K$). Para cada par $(x,y) \in X \times Y$ sea $x \otimes y$ el elemento de $BL(X' \times Y', K)$ definido por:

$$x \otimes y(x', y') = x'(x)y'(y) \quad ((x', y') \in X' \times Y')$$

El producto tensorial algebraico de $X$ e $Y$, notado

$X\otimes Y$, se define como el subespacio vectorial engendrado por $\{x\otimes y : (x,y)\in X\times Y\}$ en $BL(X'\times Y',K)$ . Sea $\Psi: X\times Y \to X\otimes Y$ la aplicación bilineal definida por:

$$\Psi(x,y) = x\otimes y \qquad ((x,y)\in X\times Y).$$

Es sabido que dada una aplicación bilineal $f: X\times Y\to Z$, existe una única aplicación lineal $\phi: X\otimes Y\to Z$ tal que $f=\phi\circ\Psi$.

El producto tensorial algebraico $X\otimes Y$ hereda la norma del espacio $BL(X'\times Y',K)$ ; dicha norma la notamos $\lambda$: si $u=\Sigma\, x_i\otimes y_i$

$$\lambda(u) = sup\ \{|\Sigma\, x'(x_i)y'(y_i)| : \|x'\|\leqslant 1, \|y'\|\leqslant 1\}$$

Se llama producto tensorial débil de $X$ e $Y$ al cierre en norma de $X\otimes Y$ en $BL(X'\times Y',K)$ y se nota $X\underset{\lambda}{\otimes} Y$.

Consideremos un espacio de Hausdorff compacto $X$ y el producto de Kronecker $C(X)\otimes O$ . La aplicación $f: C(X)\times O\to C(X,O)$ definida (para cada $(a,z)\in C(X)\times O$) por: $f(a,z) = az$, donde $az: t\to a(t)z$ $(t\in X)$ es bilineal. Sea $\phi: C(X)\otimes O\to C(X,O)$ la única aplicación lineal verificando $\phi(a\otimes z) = az$ . Es trivial comprobar que $\phi$ es homomorfismo de álgebras. Además:

$$\|\phi(\Sigma a_i \otimes z_i)\| = \sup_{t\in X} \|\Sigma a_i(t) z_i\| =$$

$$= \sup_{t\in X} \sup_{\|z'\|\leq 1} |\Sigma a_i(t)\langle z', z_i\rangle| =$$

$$= \sup_{\|z'\|\leq 1} \|\Sigma a_i \langle z', z_i\rangle\| =$$

$$= \sup_{\|z'\|\leq 1} \sup_{\|a'\|\leq 1} |\Sigma \langle a', a_i\rangle\langle z', z_i\rangle| = \lambda(\Sigma a_i \otimes z_i),$$

lo que nos dice que $\phi$ es isométrica considerando en $C(X)\otimes O$ la norma $\lambda$. Como $O$ es finito dimensional es evidente que $\phi$ es sobreyectiva. En definitiva $\phi$ es una biyección lineal isométrica de $C(X,O)$ sobre $C(X)\otimes O$ que además es un isomorfismo de álgebras. Esto prueba, por un lado, que $C(X)\otimes O$ es completo y por tanto $C(X) \underset{\lambda}{\otimes} O = C(X)\otimes O$ y, por otro, que $C(X) \underset{\lambda}{\otimes} O$ con involución definida de manera obvia es una $B^*$-álgebra alternativa totalmente isomorfa a $C(X,O)$.

11.21 LEMA. *Toda $W^*$-álgebra puramente alternativa $A$ contiene una proyección central $e \neq 0$, tal que $Ae$ es totalmente isomorfa a $C(X,O)$ donde $X$ es un espacio de Hausdorff compacto.*

DEMOSTRACION. Sabemos por la Proposición 11.10 que hay gran abundancia de representaciones factoriales de $A$ sobre $(0,*,p)$. Sea una de ellas. Por el Lema 11.19 $A$ contiene una subálgebra autoadjunta totalmente isomorfa a $(0,*,p)$ que notaremos con la letra $0$. Por el Teorema 11.20 $A = A_1 \oplus A_2$ donde $A_1$ y $A_2$ son ideales de $A$. Sea $I = e_1 + e_2$ donde $I$ es la unidad de $A$ y $e_i \in A_i$ $(i = 1,2)$. Es immediato que $e_i$ es unidad de $A_i$ y, por el Teorema 1.19, $e_i$ es un idempotente central y como el centro de $A$, $Z(A)$, es una $B^*$-álgebra asociativa y conmutativa es immediato que todo idempotente en $Z(A)$ es simétrico, es decir, $e_1$ y $e_2$ son proyecciones centrales de $A$ por lo que $A_1$ y $A_2$ son ideales débil* cerrados. En particular el centro de $A_1$ es una $B^*$álgebra asociativa y conmutativa y, por el teorema conmutativo de Gelfand-Naimark, $Z(A_1) \cong C(X)$ donde $X$ es un espacio de Hausdorff compacto. Además, por el Teorema 11.20 y las consideraciones anteriores, tenemos:

$$A_1 = 0 \otimes Z(A_1) \cong 0 \otimes C(X) \cong C(X,0)$$

lo que concluye la demostración.

Antes de enunciar el próximo lema conviene fijar algunos conceptos.

Se demuestra en [36] que toda $B^*$-álgebra es monótona completa (Definición 5.10), resultado que se traslada a $JW^*$-álgebras n.c. de manera evidente.

Sea $A$ una $JW^*$-álgebra n.c., recordemos que el predual $A_*$ de $A$ es el espacio de los funcionales normales sobre $A$ (Teorema 5.12). Sea $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red creciente nórmicamente acotada de elementos de $A$; por ser $A$ monótona cpmpleta existe $a = sup\{a_\lambda : \lambda\in\Lambda\}\in A$ y para cada $a_* \in A_*$ será $\langle a_*, a_\lambda\rangle \to \langle a_*, a\rangle$ , es decir, $\{a_\lambda\}$ es débil* convergente hacia $a$. En particular, si $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de *elementos positivos* de $A$ tal que la red $\{\sum_{\lambda\in F} a_\lambda\}_{F\in\mathcal{E}(\Lambda)}$ (donde $\mathcal{E}(\Lambda)$ está formado por los subconjuntos finitos de $\Lambda$ con el orden de inclusión) está nórmicamente acotada, dicha red será débil* convergente hacia $s = sup\{\sum_{\lambda\in F} a_\lambda : F\in \mathcal{E}(\Lambda)\}$ puede verse que ello equivale a afirmar que la familia de elementos positivos $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es débil* sumable y el elemento $s$ es la suma débil* de la misma que se suele notar $s = \sum_\lambda a_\lambda$ (el concepto de familia débil* sumable no es mas que la traducción para la topología débil* del familiar concepto de familia sumable en un espacio vectorial topológico).

Recordemos finalmente que todo elemento simétrico $a$ de una $B^*$-álgebra admite una descomposición única (llamada descomposición ortogonal [33: Definición 1.4.3]) en la forma: $a = a^+ - a^-$ con $a^+, a^- \geqslant 0$, $a^+a^- = 0$. Puesto que tal descomposición solo depende de la $B^*$-subálgebra engendrada por $a$, es también válida para elementos simétricos de una $JB^*$-álgebra n.c. Advirtamos que los elementos $a^+$ y $a^-$ verifican: $\|a^+\| \leqslant \|a\|, \|a^-\| \leqslant \|a\|$.

11.22 LEMA. *Sea $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de proyecciones centrales mutuamente ortogonales de una $JW^*$-álgebra no-conmutativa $A$; entonces:*

*i) $e = \Sigma e_\lambda$ es una proyección central;*

*ii) $\phi_1 : a \to \{ae_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $A$ en $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} Ae_\lambda$ es un homomorfismo simétrico;*

*iii) Si $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} Ae_\lambda$ entonces $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es débil* sumable y $\phi_2 : \{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \to \underset{\lambda\in\Lambda}{\Sigma} b_\lambda$ es un homomorfismo simétrico de $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} Ae_\lambda$ en $A$;*

*iv)* $\phi_1 \circ \phi_2 = I$ *en* $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Ae_\lambda$ *y* $\phi_2 \circ \phi_1 = R_e$ *en A;*

*v) Si* $e = I$, $\phi_1$ *y* $\phi_2$ *son isomorfismos simétricos y* $\phi_2 = \phi_1^{-1}$.

DEMOSTRACION. i) La familia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es débil* sumable pues es de elementos positivos y toda suma finita de la misma es una proyección y por tanto de norma 1. Si $a \in A$ en virtud de la continuidad separada débil* del producto, se tiene para toda familia débil* sumable $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

$$a\, \Sigma b_\lambda = \Sigma a b_\lambda \qquad (1)$$

en particular, para $e = \Sigma e_\lambda$ resulta:

$$e^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} \Big( \sum_{\mu\in\Lambda} e_\mu \Big) e_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda = e$$

además $e^* = e$ por la continuidad débil* de la involución. Luego $e$ es una proyección.

ii) Trivial.

iii) Comencemos observando que si el conjunto $\Lambda$ es finito las afirmaciones hechas en iii) son de demostración immediata. Si $\Lambda$ es infinito lo primero que hay que probar es la sumabilidad débil* de la familia $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ Sea $F$ un subconjunto finito de $\Lambda$. La aplicación

$\{b_\lambda\}_{\lambda\in F} \to \sum_{\lambda\in F} b_\lambda$ es, por la observación hecha al principio, un homomorfismo simétrico de $\underset{\lambda\in F}{\oplus} Ae_\lambda$ en y por tanto disminuye normas (Proposición 8.1):

$$\|\sum_{\lambda\in F} b_\lambda\| \leq max\{\|b_\lambda\|:\lambda\in F\}\leq sup\{\|b_\lambda\|:\lambda\in\Lambda\}=\|\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\|$$

Es suficiente considerar para nuestros propósitos que los $b_\lambda$ son simétricos y así lo supondremos. Si $b_\lambda = b_\lambda^+ - b_\lambda^-$ es la descomposición ortogonal de $b_\lambda$ entonces $\sum_{\lambda\in F} b_\lambda = \sum_{\lambda\in F} b_\lambda^+ - \sum_{\lambda\in F} b_\lambda^-$ es la descomposición ortogonal de $\sum_{\lambda\in F} b_\lambda$ por lo que:

$$max\{\|\sum_{\lambda\in F} b_\lambda^+\|, \|\sum_{\lambda\in F} b_\lambda^-\|\}\leq \|\sum_{\lambda\in F} b_\lambda\|\leq \|\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\|$$

de donde se deduce que las familias $\{b_\lambda^+\}_{\lambda\in\Lambda}$ y $\{b_\lambda^-\}_{\lambda\in\Lambda}$ son débil* sumables y por tanto también lo es la familia $\{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Haciendo uso de (1) se tiene:

$$\phi_2(\{b_\lambda\}\{a_\mu\}) = (\Sigma b_\lambda)(\Sigma a_\mu) = \sum_\mu (\sum_\lambda b_\lambda) a_\mu = \sum_\mu(\sum_\lambda b_\lambda a_\mu) = \Sigma b_\lambda a_\lambda$$

y, por tanto, $\phi_2$ es un homomorfismo, por supuesto, simétrico.

iv) y v) No ofrecen dificultad.

Un espacio de Hausdorff compacto  se llama *hyperestoneano* si la $B^*$-álgebra $C(X)$ es un espacio de Banach dual, es decir, si $C(X)$ es una $W^*$-álgebra [33:p.46].

11.23 TEOREMA. *Sea $A$ una $W^*$-álgebra puramente alternativa; entonces existe un espacio hyperestoneano $X$ tal que $A$ es totalmente isomorfa a $C(X,O)$. Recíprocamente $C(X,O)$ para $X$ hyperestoneano es una $W^*$-álgebra puramente alternativa.*

DEMOSTRACION. Por una aplicación típica del lema de Zorn consideremos $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familia maximal de proyecciones centrales ortogonales de  tales que $Ae_\lambda \cong C(X_\lambda, O)$ para algún espacio de Hausdorff compacto $X_\lambda$. Sea $z=\Sigma e_\lambda$. Si $z \neq I$, entonces $I-z$ es una proyección central y $A = Az \oplus A(I-z)$. Puesto que, evidentemente, $A(I-z)$ es una $W^*$-álgebra puramente alternativa, por el Lema 11.21, existe una proyección central $w_0 \neq 0$ en $A(I-z)$ tal que $A(I-z)w_0' = Aw_0 \cong C(X_0, O)$ donde $X_0$ es un espacio de Hausdorff compacto, pero entonces $w_0$ es una proyección central en $A$ y ortogonal a todo $e_\lambda$ lo que contradice las hipótesis hechas sobre la familia $\{e_\lambda\}$.

Luego $I = \Sigma e_\lambda$. Tenemos ahora:

$$A \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Ae_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C(X_\lambda, O) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (C(X_\lambda)\otimes O) \cong (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C(X_\lambda))\otimes O$$

la primera identificación es cinsecuencia del Lema 11.22, las dos siguientes no precisan comentario por lo visto anteriormente y la última es rutinaria. Puesto que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C(X_\lambda)$ es una $B^*$-álgebra conmutativa, existe un espacio de Hausdorff compacto $X$ tal que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} C(X_\lambda) \cong C(X)$, luego $A \cong C(X) \otimes O \cong C(X,O)$. Veamos que $X$ es hyperestoneano. El centro de $C(X,O)$ son las funciones valuadas en $Z(O) = C$ y puede, por tanto, identificarse con $C(X)$. Puesto que por hipótesis $A$, y por tanto $C(X,O)$, es una $W^*$-álgebra, y $C(X)$ es una subálgebra débil* cerrada de $C(X,O)$ resulta que $C(X)$ es una $W^*$-álgebra, es decir $X$ es hyperestoneano.

Para probar la otra parte solo se precisa ver, teniendo en cuenta la Proposición 11.11, que si $X$ es hyperestoneano $C(X,O)$ es un espacio de Banach dual. Puede consultarse a este respecto [36] donde se demuestra el resultado análogo para $C(X,M_3^8)$ apoyándose solamente en la finito dimensionalidad de $M_3^8$ por lo que dicha demostración es también válida para nuestro caso.

Como consecuencia de los Teoremas 11.15 y 11.23 podemos enunciar:

11.24 TEOREMA. *No hay mas $W^*$-álgebras alternativas que las álgebras* $B \oplus C(X,O)$ *donde* $B$ *es una* $W^*$-*álgebra asociativa y* $X$ *es hyperestoneano.*

Se observará que algunos de los resultados anteriores quedan incluidos en el Teorema 11.24, pero es interesante saber que tales resultados pueden obtenerse, como se ha hecho, por técnicas mas sencillas que las que requiere este último teorema.

# B I B L I O G R A F I A


[1] A.A. ALBERT : *On a certain algebra of Quantum Mechanics.* Ann. Math. 35 (1934), 65-73.

[2] E.M. ALFSEN and E.G. EFFROS : *Structure in real Banach spaces II.* Ann. Math. 96 (1972), 129-173.

[3] E. ALFSEN, F.W. SHULTZ and E. STØRMER : *A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras.* Advances in Math. 28 (1978), 11-56.

[4] A. AKEMANN and B. RUSSO : *Geometry of the unit sphere of a C*-algebra and its dual.* Pac. J. Math. 32 (1970), 575-585.

[5] R. ARENS : *The adjoint of a bilinear operation.* Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 839-848.

[6] V.K. BALACHANDRAN and P.S. REMA : *Uniqueness of the norm topology in certain Banach Jordan Algebras.* Publications of the Ramanujan Institute, 1 (1969), 283-289.

[7] H. BEHNCKE : *Hermitean Jordan Banach algebras.* Por aparecer.

[8] E. BEHRENDS : *M-Structure and the Banach-Stone Theorem.* Lecture Notes in Mathematics, 736. Springer-Verlag 1979.

[9] H.F. BOHNENBLUST and S. KARLIN : *Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras*. Ann. Math. 62 (1955), 217-229.

[10] F.F. BONSALL and J. DUNCAN : *Complete Normed Algebras*. Springer-Verlag 1973.

[11] F.F. BONSALL and J. DUNCAN : *Numerical Ranges of Operators on normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*. London Mathematical Society. Lecture Note Series, 2 (1971).

[12] R. BRAUN, W. KAUP and H. UPMEIER : *A holomorphic characterization of Jordan C*-algebras*. Math. Z. 161 (1978), 277-290.

[13] P. CIVIN and B. YOOD : *Lie and Jordan structures in Banach algebras*. Pac. J. Math. 15 (1965), 775-797.

[14] J. DIXMIER : *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*. Gauthier-Villars 1969.

[15] J. DIXMIER : *Les C*-algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars 1969.

[16] C.M. EDWARDS : *On Jordan W*-algebras*. Por aparecer.

[17] G. GODEFROY : *Espaces de Banach: existence et unicité de certains préduaux*. Ann. Inst. Fourier 28 (1978), 87-105.

[18] N. JACOBSON : *Structure and representations of Jordan algebras*. Amer. Math. Soc. Coll. Pub. 39, Providence 1966.

[19] P. JORDAN, J. von NEUMANN and E. WIGNER : *On an algebraic generalization of the Quantum Mechanical formalism*. Ann. Math. 35 (1934), 29-64.

[20] E. KLEINFELD : *Simple alternative rings*. Ann. Math. 58 (1953), 544-547.

[21] E. KLEINFELD : *Primitive alternative rings and semisimplicity*. Amer. J. Math. 77 (1955), 725-730.

[22] A. LIMA : *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces*. Trns. Amer. Math. Soc. 227 (1977).

[23] J. MARTINEZ MORENO : *Sobre álgebras de Jordan normadas completas*. Tesis doctorales de la Universidad de Granada n° 149 (1977).

[24] J. MARTINEZ MORENO : *JV-algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), 47-50.

[25] K. McCRIMMON : *Norms and noncommutative Jordan algebras*. Pac. J. Math. 15 (1965), 925-956.

[26] A. MOJTAR KAIDI : *Bases para una teoría de las álgebras no-asociativas normadas*. Tesis de doctorado. Universidad de Granada. Por aparecer.

[27] F. OCAÑA OCAÑA : *El axioma de Sakai en JV-álgebras*. Tesis doctorales de la Universidad de Granada n° 224 (1979).

[28] R. PAYA ALBERT : *Técnicas de rango numérico y estructura en espacios normados*. Por aparecer.

[29] A. RODRIGUEZ PALACIOS : *Contribución a la teoría de las C*-álgebras con unidad*. Tesis doctorales de la Universidad de Granada n° 57 (1974).

[30] A. RODRIGUEZ PALACIOS : *Teorema de estructura de los Jordan-isomorfismos de las C*-álgebras*. Rev. Mat. Hispano-Americana 4° Serie-Tomo XXXVII, n° 3-4 p. 114-128 (1977).

[31] A. RODRIGUEZ PALACIOS : *La continuidad del producto Jordan implica la del ordinario en el caso completo semiprimo*. Contrib. en Prob. y Est. Mat. Ens. de la Mat. y Análisis. Universidad de Granada (1979) p. 280-288.

[32] A. RODRIGUEZ PALACIOS : *A Vidav-Palmer theorem for Jordan C*-algebras and related topics*. Aparecerá en J. London Math. Soc.

[33] S. SAKAI : *C*-algebras and W*-algebras*. Springer-Verlag Vol. 60, 1971.

[34] R.D. SCHAFER : *An introduction to nonassociative algebras*. Academic Press; 1966.

[35] S. SHERMAN : *On Segal's Postulates for General Quantum Mechanics*. Ann. Math. 64 (1956), 593-601.

[36] F.W. SHULTZ : *On normed Jordan algebras wich are Banach dual spaces*. J. Funct. Anal. 31 (1979), 360-376.

[37] A.M. SINCLAIR : *The norm of a Hermitian element in a Banach algebra*. Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1970), 275-280.

[38] M. SLATER : *Ideals in Semiprime Alternative Rings*. J. of Algebra 8 (1968), 60-76.

[39] M. SLATER : *Alternative rings with D.C.C.,I*. J. of Algebra 11 (1969), 102-110.

[40] R.R. SMITH : *On non-unital Jordan-Banach algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 82 (1977), 375-380.

[41] R.R. SMITH and J.D. WARD : *M-Ideal structure in Banach algebras*. J. Funct. Anal. 27 (1978), 337-349.

[42] E. STØRMER : *Jordan algebras of tipe I*. Acta Math. 115 (1966), 165-184.

[43] E. STØRMER : *Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators*. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 153-166.

[44] D.M. TOPPING : *Jordan algebras of self-adjoint operators*. Mem. Amer. Math. Soc. 53 (1965).

[45] D.M. TOPPING : *An isomorphism invariant for spin factors.* J. Math. Mech. 15 (1966), 1055-1064.

[46] J.D.M. WRIGHT : *Jordan C*-algebras.* Michigan Math. J. 24 (1977), 11-56.

[47] J.D.M. WRIGHT and M.A. YOUNGSON : *On isometries of Jordan algebras.* J. London Math. Soc. 17 (1978), 339-344.

[48] M.A. YOUNGSON : *A vidav theorem for Banach Jordan algebras.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 84 (1978), 263-272.

[49] M.A. YOUNGSON : *Non-unital Banach Jordan algebras and C*-triple systems.* Por aparecer.

[50] M.A. YOUNGSON : *Hermitian operators on Banach Jordan algebras.* Proc. Edin. Math. Soc. 22 (1979), 93-104.

## BIBLIOGRAFIA ADICIONAL

[51] N. JACOBSON : *A kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra.* Amer. J. Math. 76 (1954), 447-452.

**DILIGENCIA:**

Reunido el Tribunal examinador en el día de la fecha, constituido por:

D. Juan José Gutiérrez Suárez

D. José Ramón Fuentes Miras

D. Gerardo Rodríguez López

D. Mariano Gasca González

D. Angel Rodríguez Palacios

para juzgar la Tesis Doctoral del Licenciado D. Fco. Javier Pérez González

se acordó por unanimidad otorgar la calificación de Sobresaliente "cum Laude"

y para que conste, se extiende firmada por los componentes del Tribunal, la presente diligencia.

Granada, a 24 de Junio de 1980

El Secretario,

Angel Rodríguez

El Presidente,

Juan J. Gutiérrez Suárez

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

J. R. Fuentes M. Gasca Rodríguez