

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS



Tesis presentada a través del
Departamento de Física Moderna

**CONSTRAINTS, GAUGE SYMMETRIES, ANOMALIES AND TOPOLOGY
IN QUANTUM FIELD THEORY**

**LIGADURAS, SIMETRÍAS GAUGE, ANOMALÍAS Y TOPOLOGÍA EN
TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS**

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

MANUEL CALIXTO MOLINA

Instituto Carlos I

de Física Teórica y Computacional

Junio de 1997

VÍCTOR ALDAYA VALVERDE, Investigador Científico del C.S.I.C en el I.F.I.C. (Centro Mixto Universidad Valencia- C.S.I.C.) y en el Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional de la Universidad de Granada.

CERTIFICO:

Que la presente Memoria “**Ligaduras, Simetrías Gauge, Anomalías y Topología en Teoría Cuántica de Campos**” ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Física Teórica y del Cosmos y en el Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional de la Universidad de Granada por **Manuel Calixto Molina**, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presento ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada la referida Tesis.

Granada, a 23 de Junio de 1997.

Fdo. Víctor Aldaya Valverde.

Deseo agradecer sinceramente a mi director de tesis, Victor Aldaya, su constante orientación y ayuda, así como el crear un buen ambiente de trabajo que ha contribuído a que todo vaya “sobre (dos) ruedas”.

También quiero agradecer a Julio Guerrero y a Miguel Navarro (indistintamente) la colaboración prestada a lo largo del desarrollo de la Tesis. Con ellos, tanto las discusiones científicas como muchas no estrictamente tales han sido siempre estimulantes. Hago este agradecimiento extensivo a José María Cerveró y Alfonso Romero.

A mis padres

ABSTRACT

In this Thesis we develop a mathematical formalism of (Symmetry) Group-Approach to Quantization of Field Theories with constraints (gauge invariant theories), which incorporates techniques and tools of Algebra, Differential Geometry and Topology. This mathematical formalism is successfully applied to the quantization of anomalous systems which are difficult to handle by the conventional Canonical Quantization scheme. In particular, we provide a way out to the traditional “no-go” theorems of Groenwald and van Hove through a revision of the concept of “algebraic anomaly” and by allowing new anomalous internal degrees of freedom. We also study the Quantum Hall Effect, the appearance of integer and fractional quantum numbers of topological nature and the role played by the modular invariance. Moreover, we tackle the quantization of field theories in curved symmetric spaces like Anti-de Sitter and we offer a group-theoretical explanation of the Fulling-Unruh Effect (vacuum radiation in accelerated systems) as a spontaneous breakdown of the conformal symmetry. Lastly, a revision of the traditional concepts of gauge symmetry and constraints leads us to a unified quantization of the electromagnetic and Proca fields (massless and massive photon, respectively) and opens the door to alternatives to the Higgs-Kibble mechanism to provide mass to the intermediate vector bosons of the weak interaction in the Standard Model.

RESUMEN

En esta Tesis se desarrolla un formalismo matemático de Aproximación por Grupos (de simetría) a la Cuantización de Teorías de Campos con ligaduras (teorías invariantes “gauge”) que incorpora herramientas y técnicas del Álgebra, la Geometría Diferencial y la Topología. Dicho formalismo matemático se aplica con éxito a la cuantización de sistemas anómalos o difícilmente tratables desde el punto de vista de la Cuantización Canónica convencional. En particular, se proporcionan escapatorias a los tradicionales teoremas “no-go” de Groenwald y van Hove mediante una revisión del concepto de “anomalía algebraica” y permitiendo nuevos grados de libertad internos anómalos. También se estudia el Efecto Hall Cuántico, la aparición de números cuánticos enteros y fraccionarios de naturaleza topológica y el papel que juega la invariancia modular. Asimismo, se aborda la cuantización de teorías de campos sobre espacios curvos simétricos como el de Anti-de Sitter y se ofrece una explicación grupo-teórica del Efecto Fulling-Unruh (radiación del vacío en sistemas acelerados) como una rotura espontánea de la simetría conforme. Por último, una revisión de los conceptos tradicionales de simetría gauge y ligaduras nos lleva a una cuantización unificada del campo electromagnético y el campo de Proca (fotón sin y con masa, respectivamente) y nos abre las puertas a mecanismos alternativos al de Higgs-Kibble para proporcionar masa a los bosones vectoriales que median la interacción débil en el Modelo Estándar.

KEYWORDS

Symmetry and Quantization; Group-Theoretical formulation of Field Theory; Group Representation Theory; Geometric, Algebraic and Topologic aspects of Quantum Theory; Geometric Quantization; Coherent States; Gauge Symmetries; Constrained Quantization; Tensor Operator Algebras; No-go Theorems; Deformation Quantization; Quantum Hall Effect; Unruh Effect; Conformal Symmetry; Yang-Mills Theory.

PALABRAS CLAVE

Simetría y Cuantización; Formulación Grupo-Teórica de la Teoría Cuántica de Campos; Teoría de Representación de Grupos; Aspectos Geométricos, Algebraicos y Topológicos de la Teoría Cuántica; Cuantización Geométrica; Estados Coherentes; Simetrías Gauge; Cuantización con Ligaduras; Álgebras de Operadores Tensoriales; Teoremas “no-go”; Cuantización por Deformación; Efecto Hall Cuántico; Efecto Unruh; Simetría Conforme; Teorías de Yang-Mills.

PUBLICACIONES EN REVISTAS J.C.R. DERIVADAS DE LA TESIS

1. V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, *Group-Theoretical Analysis of the Mixing Angle in the Electro-Weak Gauge Group*, Int. J. Theor. Phys. **35**, 1901, (1996). hep-th/9410131
2. V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, *Algebraic Quantization, Good Operators and Fractional Quantum Numbers*, Commun. Math. Phys. **178**, 399-424 (1996). hep-th/9507016
3. M. Navarro, V. Aldaya and M. Calixto, *Group Quantization on Configuration Space*, J. Math. Phys. **37**, 206-218,(1996). hep-th/9501085
4. M. Navarro, V. Aldaya and M. Calixto, *Group Quantization on Configuration Space: Gauge Symmetries and Linear Fields*, J. Math. Phys. **38**, 1454 (1997). hep-th/9612068
5. V. Aldaya, M. Calixto and M. Navarro, *The Electromagnetic and Proca Fields Revisited: a Unified Quantization*, Int. J. Mod. Phys. **A12**, 3609-3623 (1997). hep-th/9609083
6. M. Calixto, V. Aldaya and J. Guerrero, *Generalized Conformal Symmetry and Extended Objets from the Free Particle*, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 4889-4911 (1998). hep-th/9707237
7. M. Navarro, M. Calixto and V. Aldaya, *Relativistic Field Equations from Higher-Order Polarizations of the Poincaré Group*, Reports on Mathematical Physics **41**, 193-202 (1998). hep-th/9612189
8. J. Guerrero, M. Calixto and V. Aldaya, *Fractional Quantization and Quantum Hall Effect*, Physics of Atomic Nuclei **61**, 1960-1965 (1998)
9. V. Aldaya and M. Calixto, *Group Approach to Quantization of non-Abelian Gauge Theories: a Cohomological Origin of Mass*, Journal of Physics (Math. & Gen.) **A32**, 7287-7304 (1999). hep-th/9902175
10. J. Guerrero, M. Calixto and V. Aldaya, *Modular Invariance on the Torus and Fractional Quantum Hall Effect*, Journal of Mathematical Physics **40**, 3773-3790 (1999). hep-th/9707237.
11. V. Aldaya, M. Calixto and J.M. Cerveró, *Vacuum Radiation and Symmetry Breaking in Conformally Invariant Quantum Field Theory*, Communications in Mathematical Physics **200**, 325-354 (1999). hep-th/9705049
12. M. Calixto, V. Aldaya and M. Navarro, *Quantum Field Theory in Curved Space from a Second Quantization on a Group*, International Journal of Modern Physics **A15**, 4011-4044, (2000). hep-th/9701180
13. M. Calixto and V. Aldaya, *Gauge Transformation Properties of Vector and Tensor Potentials Revisited: a Group Quantization Approach*, International Journal of Modern Physics **A15**, 1661-1683 (2000). hep-th/9903106
14. M. Calixto and V. Aldaya, *Algebraic Characterization of Constraints and Generation of Mass in Gauge Theories*, Nuclear Physics (Proc. Sup.) **B88**, 361-364 (2000). hep-th/0003127

Índice

1	INTRODUCCIÓN	3
I	CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS. EXPOSICIÓN DEL FORMALISMO	7
2	ALGUNOS CONCEPTOS PREVIOS	9
2.1	Algunas nociones sobre Grupos y Fibrados	9
2.2	Antecedentes: Cuantización Geométrica.	12
3	CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS	15
3.1	Cuantización sobre grupos. Caso de un grupo de Lie simplemente conexo	15
3.1.1	Ligaduras en la CSG	19
3.1.2	Invariantes Noether y Teoría Clásica.	20
3.1.3	Anomalías algebraicas. Grados de libertad extra	21
3.2	Cuantización algebraica. Aspectos globales de la teoría cuántica	21
3.2.1	Anomalías topológicas. Violación del Teorema de Ehrenfest	24
3.2.2	Ligaduras y simetrías gauge	25
3.3	Ejemplo: partícula libre no relativista sobre la circunferencia	25
4	CONEXIÓN CON EL FORMALISMO LAGRANGIANO	31
4.1	Grupo de cuantización en el espacio de configuración	31
4.1.1	Simetrías espacio-temporales e internas	33
4.2	Ejemplos relevantes de teorías de campos lineales	34
4.2.1	Campos lineales invariantes conforme	34
4.2.2	Campos de materia en un espacio-tiempo curvo simétrico	36
4.2.3	Campos de materia acoplados a campos electromagnéticos simétricos	37
4.3	Cuantización en el espacio de configuración	38
4.3.1	Cuantización holomorfa	39
4.4	Generalizaciones. Grupos de “gauge” no abelianos y grupo de Virasoro	40
5	SEGUNDA CUANTIZACIÓN SOBRE UN GRUPO	43
5.1	Motivación a la construcción de una SCSG	43
5.2	Construcción del grupo de segunda cuantización	44
II	CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS. APLICACIONES	49
6	GRADOS DE LIBERTAD INTERNOS ANÓMALOS	51
6.1	(Pseudo)cohomología y grados internos de libertad	51
6.2	Grados de libertad internos asociados con la partícula elemental	52
6.2.1	Comparación con la cuerda bosónica	59

6.2.2	Partícula sobre la esfera S^2	59
6.3	Escapatorias a los teoremas no-go: objetos extensos con origen en la partícula elemental	61
6.4	Conexión con la Óptica de Fresnel	63
7	INVARIANCIA MODULAR Y EL EFECTO HALL CUÁNTICO	65
7.1	Representaciones del grupo de Schrödinger en 1D	66
7.1.1	Representaciones del subgrupo de ligaduras T	68
7.1.2	El grupo de Schrödinger toral	71
7.2	Teoría de Chern-Simons abeliana en 2+1 dimensiones	75
7.2.1	Comparación con otros resultados	77
7.3	Invariancia Modular y Efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario	77
8	TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS SOBRE ANTI-DE SITTER	83
8.1	Mecánica cuántica sobre el universo de AdS	83
8.1.1	Representación en el espacio de configuración	83
8.1.2	Representación holomorfa	87
8.2	Teoría Cuántica de Campos sobre el espacio-tiempo curvo de AdS	91
8.3	Comentarios finales	94
9	RADIACIÓN DEL VACÍO Y ROTURA DE LA SIMETRÍA CONFORME	97
9.1	Simetría conforme clásica y cuántica	97
9.2	Mecánica Cuántica Invariante Conforme	99
9.2.1	Subgrupo de dilatación no compacto	100
9.2.2	Subgrupo de dilatación compacto	105
9.3	Una teoría cuántica de campos invariante conforme	107
9.3.1	Rotura al subgrupo de Weyl. Radiación del vacío	110
9.4	Otras representaciones: algunos comentarios	113
10	CUANTIZACIÓN UNIFICADA DEL CAMPO DE MAXWELL Y PROCA	117
10.1	Motivación a la ley de grupo	117
10.2	Cuantización unificada del campo electromagnético y el campo de Proca	120
10.2.1	$\tilde{G}(k^2 = 0)$: Campo Electromagnético	123
10.2.2	$\tilde{G}(k^2 \neq 0)$: Campo de Proca	124
10.3	Comentarios y perspectivas	126
11	CONCLUSIONES	129

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Con el advenimiento de la Mecánica Cuántica (MC) a principios de siglo fueron explicados numerosos fenómenos físicos, como el *Efecto Fotoeléctrico* o la *Radiación del Cuerpo Negro*, que la Mecánica Clásica, como tal, no era capaz de abarcar. Éstos pusieron de manifiesto el carácter dual tanto de la materia como de la radiación (*dualidad onda- corpúsculo*), lo que llevó a tener que reconsiderar, no sólo el concepto de sistema físico, sino también, el propio proceso de medición. Para construir el marco teórico adecuado donde explicar todos estos fenómenos, hubo que echar mano de nuevas herramientas y conceptos matemáticos, como el de *espacio de Hilbert*, desconocidos entonces para buena parte de la comunidad científica. La interpretación de Copenhague de la MC estableció en aquel tiempo, no sin falta de controversia, las directrices a seguir para el abordaje e interpretación de los sistemas cuánticos.

Hoy en día, la MC sigue cosechando éxitos en su afán por buscar una explicación del “todo”. No obstante, aunque en el presente no parece existir para la misma aquel clima que desbancó a la Mecánica Clásica como teoría fundamental, si es cierto que son necesarias nuevas perspectivas y un cierto esfuerzo de unificación para, primero, dar cabida a nuevos efectos cuánticos para los cuales los métodos de cuantización tradicionales se quedan cortos y, segundo, para conciliar diferentes perspectivas referentes a un mismo problema cuántico. Que la MC necesite de una revisión de sus conceptos, no es una afirmación gratuita, no mientras la cuantización de la que podría denominarse “la reina de las interacciones” (nos referimos a la Gravedad) siga en el mismo estado de “incertidumbre” que se encuentra en estos momentos.

No es el objetivo directo (pero si quizás indirecto) de esta memoria el ofrecer una aproximación razonable a la Cuantización de la Gravedad sino, más bien, el dar soporte a una nueva línea de aproximación a las teorías cuánticas que no necesita, al contrario de lo que suele suceder en la aproximación estándar (canónica), de una descripción clásica previa del sistema físico. ¿Por qué pensamos que es necesario desprenderse de la idea de “cuantizar sistemas clásicos”?, pues por la misma razón que no “relativizamos” sistemas Galileanos.

En un principio, y por cuestiones de familiaridad quizás, pudo tenerse una mejor intuición física en el ámbito clásico que en el cuántico; no obstante, hoy en día, y con la cantidad de información cuántica acumulada, ya no debería tener sentido tal aproximación. Conceptos como los de *anomalía* o los mismos *teoremas no-go* de Groenewald y van Hove que, usualmente, hacen referencia directa a averías asociadas con la cuantización de un sistema clásico, han sido casi siempre obstáculos insalvables para la cuantización tradicional. Si por “anomalía” entendemos una situación no esperada o no deseable desde el punto de vista de un marco explicativo previo, una situación anómala puede verse como “normal”, y hasta esencial, dentro de un marco explicativo más amplio.

El punto de vista que adoptaremos en esta tesis está más cerca de la definición de un sistema cuántico haciendo uso de las simetrías que éste posee, que por el conjunto de ecuaciones diferenciales derivadas de una acción clásica dada. Esta primera forma de proceder es típica en lo que se refiere a la formulación de teorías fundamentales, más que a la resolución de problemas concretos.

El objetivo es más amplio que la simple idea de hacer uso de las simetrías como herramienta de

cálculo que ayude a la resolución o clasificación de un determinado sistema cuántico. Para nosotros, el grupo de simetría cuántico será previo a toda noción de espacio donde colocar nuestros objetos físicos, el cual podrá obtenerse a posteriori como subproducto del proceso de cuantización. Al contrario de lo que podría pensarse, el partir de una estructura particular de grupo no es una restricción seria, y no cuando, en definitiva, el conjunto de *observables* que puede ser cuantizado cierra álgebra en la mayoría de los casos.

Para extraer la información física oculta en un grupo de cuantización, ha sido necesario desarrollar toda una maquinaria matemática que toma conceptos modernos de diversas ramas como la Geometría, la Topología, el Álgebra, etc. Los que hemos aportado de una manera u otra nuestro granito en esta empresa, creo que somos todos conscientes de que no es ésta la forma más usual de atacar los problemas actualmente en MC. No obstante, creo también que todos estamos convencidos de su fecundidad, existiendo todavía numerosas cuestiones sin resolver y planteamientos a los que no se les ha sacado todo su jugo, como la aproximación por grupos a las teorías de campos gauge, y que pueden establecer válvulas de escape a ciertos problemas que no acaban de resolverse satisfactoriamente por los métodos tradicionales.

En cualquier caso, las tradicionales consideraciones matemáticas rigurosas de la Mecánica Cuántica referentes a Teoría Espectral de Operadores, reglas de Cuantización Canónica, etc, deben reexaminarse como posible origen de nuevos fenómenos cuánticos (de naturaleza, digamos, topológica) como los que describiremos en partes de esta memoria.

Pasemos a enumerar y comentar todas y cada una de estas partes y capítulos en que se divide esta Tesis.

La primera parte (**Parte I**) está dedicada esencialmente a la exposición del formalismo de Cuantización Sobre Grupos (CSG, o GAQ en inglés), haciendo énfasis en aquellas aportaciones nuevas respecto de planteamientos anteriores, introduciendo alguna que otra aplicación relevante, pero sencilla, para ilustrar conceptos básicos y nuevos, y estableciendo puentes de unión entre distintas aproximaciones a la cuantización de sistemas físicos, como el formalismo lagrangiano, y la CSG. En esta parte se revisan multitud de conceptos más o menos usuales en la MC ordinaria desde un punto de vista distinto (y más general), conceptos como: *simetría gauge*, *ligadura (de primera y segunda clase)*, *operador bueno (malo y regular)*, *operador de cambio de polarización y de cambio de cuantización*, *anomalía (topológica)*, etc; también se introducen, cómo no, otros conceptos nuevos sin una traducción directa aparente en términos de nociones establecidas como, por ejemplo, los *grados de libertad internos esencialmente anómalos*. Desglosemos un poco más por capítulos los contenidos de esta parte:

- El Capítulo 2 está dedicado tanto al repaso de ciertas nociones útiles sobre grupos de Lie, geometría diferencial, topología y fibrados, como a dar un breve bosquejo de un antecedente a la CSG: la Cuantización Geométrica (CG). Se discuten las limitaciones de la CG y se propone una salida a las mismas.
- El Capítulo 3 consta a su vez de tres partes. La primera trata de la aproximación por grupos a la cuantización de sistemas en los que un tratamiento local (en términos de generadores del álgebra de Lie) es suficiente para extraer toda la información cuántica de los mismos. La segunda parte generaliza a la primera en lo que respecta a la consideración de nuevos fenómenos cuánticos asociados con la estructura topológica global de la variedad grupo (*efectos de homotopía*). El carácter no local de la función de onda en MC hace que la “partícula” sea sensible en cada instante a la forma global del universo donde vive, cosa que no sucede en Mecánica Clásica, con una formulación preferentemente local. La última parte está dedicada a una aplicación simple, pero riquísima en contenido físico, que tiene que ver con un modelo de partícula libre sobre la circunferencia aplicable a sistemas físicos reales, como anillos superconductores, y que se presenta como ejemplo finitodimensional del fenómeno de ϑ -vacíos en teorías mucho más complicadas como las teorías de Yang-Mills no abelianas.

- El Capítulo 4 se dedica a establecer la conexión del formalismo de CSG con el formalismo lagrangiano, vía el formalismo simpléctico, para teorías de campos lineales con toda generalidad. Se construye lo que llamaremos “grupo de cuantización en el espacio de configuración” y se comenta al final un resultado que establece una restricción, para grupos de gauge con una ley de multiplicación punto a punto, en cuanto al tipo de ecuaciones diferenciales compatibles con dichos grupos.
- El Capítulo 5 se dedica a generalizar el concepto Minkowskiano de “segunda cuantización” a espacio-tiempos no triviales. Partiendo de un espacio de Hilbert hecho de funciones polarizadas sobre un grupo (grupo de primera cuantización), el objetivo será la construcción de lo que denominaremos “grupo de segunda cuantización” que describirá una teoría de campos definida sobre espacios generales sumergibles de alguna forma dentro de un grupo. Este formalismo lo aplicaremos en los Capítulos 8 y 9 para obtener información sobre efectos físicos muy interesantes.

La segunda parte de la memoria (**Parte II**) está dedicada exclusivamente a aplicaciones novedosas, de forma más precisa:

- En el Capítulo 6 se establecen escapatórias a los teoremas no-go de Groenwald y van Hove tras una reflexión profunda sobre los conceptos de “anomalía algebraica” en conexión con la aparición de grados de libertad internos anómalos para la partícula libre. Se establecen analogías y diferencias entre otros grados de libertad internos “normales” como el espín y, en un afán por buscar un significado físico para dichos grados de libertad internos anómalos, se llega a un álgebra de Lie de dimensión infinita con origen en el álgebra de Poisson de la partícula libre o el oscilador armónico, y que resulta generalizar a la simetría conforme de la Cuerda Bosónica. Desde este punto de vista, la cuantización de (casi) toda el álgebra de Poisson de funciones sobre la variedad simpléctica (analíticas salvo en el origen) de la partícula libre (o el oscilador), da lugar a un objeto extenso cuya relación con la gravedad en 1+1 dimensiones está por ver. También discutimos brevemente la potencial aplicación de estas técnicas a la investigación de las aberraciones en la Óptica de Fresnel.
- El Capítulo 7 se dedica al estudio de la implementación de la invariancia modular en el toro como variedad simpléctica. Los resultados obtenidos se aplican a la cuantización de Teorías de Chern-Simons (topológicas) y, principalmente, al Efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario. Es aquí donde se harán más visibles los efectos no triviales que la topología tiene sobre la cuantización. La aparición de números cuánticos topológicos fraccionarios (en general), generalizando la clase de cohomología entera de Chern, será la base para la explicación de la cuantización fraccionaria de la conductividad.
- En el Capítulo 8 se construye una teoría cuántica de campos sobre el universo de Anti-de Sitter haciendo uso de las técnicas de segunda cuantización desarrolladas en el Capítulo 5. La cuantización de campos en espacios curvos adolece de una definición precisa del concepto de partícula y de la selección de vacío, es más, encuentra serios obstáculos en aquellos casos en los que el espacio-tiempo no es globalmente hiperbólico. Veremos cómo dichos problemas pueden subsanarse cambiando de perspectiva.
- El Capítulo 9 está dedicado a investigar las dificultades en la implementación de la invariancia conforme en teoría cuántica de campos *sin masa* sobre el espacio de Minkowski y su relación con fenómenos de radiación del vacío desde sistemas de referencia acelerados. Siendo el grupo conforme $SO(4, 2)$ una invariancia exacta de las ecuaciones de campo clásico sin masa sobre el espacio-tiempo de Minkowski, esta dificultad hace referencia a una rotura “dinámica” de la simetría al pasar al correspondiente sistema cuántico. Todas estas cuestiones serán aclaradas y se calculará exactamente el espectro de un vacío acelerado, el cual resulta ser una generalización del

espectro plankiano para la radiación del cuerpo negro, recuperado éste en un cierto límite. Para alcanzar dicho objetivo será necesario utilizar también las técnicas desarrolladas en el Capítulo 5.

- Por último, el Capítulo 10 pretende ser un primer paso hacia una aproximación por grupos a la cuantización de teorías de Yang-Mills no abelianas (en general). Tras una revisión profunda de los conceptos de simetría gauge y de ligadura, se realiza la cuantización conjunta del campo electromagnético y el campo de Proca (fotón sin y con masa) y se apunta un origen cohomológico para la aparición de masa en ciertos bosones vectoriales que describen las interacciones fundamentales en Teorías Unificadas. Según este nuevo punto de vista, el grupo de transformaciones locales (grupo de gauge en la terminología estándar) adquiere, en cierto modo, dinámica cuando el bosón vectorial (en nuestro caso, el fotón) sale de la capa de masa nula, dinámica que se transfiere a dicho bosón vectorial conformando el bosón vectorial masivo. El caso no abeliano está siendo investigado en estos momentos, a la espera de resolver ciertos problemas técnicos, y pretendemos aportar alternativas al “tan laureado y sin embargo tan sospechoso” Mecanismo de Higgs de Rotura Espontánea de la Simetría como medio suministrador de masa en Teorías Unificadas.

Parte I

**CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS.
EXPOSICIÓN DEL FORMALISMO**

Capítulo 2

ALGUNOS CONCEPTOS PREVIOS

Los conceptos básicos de la teoría de fibrados pueden considerarse entre las herramientas más potentes y útiles para explorar la interrelación existente entre grupos, topología y cuantización. Es dentro de este marco teórico donde el origen topológico de ciertos efectos típicamente cuánticos se hace manifiesto.

Comencemos por repasar algunas definiciones interesantes derivadas a partir de un grupo y, más particularmente, a partir de un grupo de Lie G , el cual incorpora toda la maquinaria del cálculo diferencial sobre variedades.

2.1 Algunas nociones sobre Grupos y Fibrados

★ **Grupo de Lie G** : grupo cuyos elementos son puntos de una variedad diferenciable, de forma que las operaciones de composición $G \times G \rightarrow G$, $(g', g) \mapsto g'' = g' * g$ y de inversión $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ son diferenciables.

★ **Traslación por la izquierda $L_{g'}$ y por la derecha R_g** : homomorfismos internos definidos de forma natural a partir de la operación de composición $*$ como:

$$\begin{aligned} L_{g'} : G &\rightarrow G & R_g : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto L_{g'}(g) = g' * g & g' &\mapsto R_g(g') = g' * g, \end{aligned} \quad (2.1)$$

y que son aplicaciones diferenciables por serlo la propia composición $*$. La acción *adjunta* Ad_g se define a partir de las anteriores como:

$$Ad_g : G \rightarrow G, \quad g' \mapsto Ad_g(g') = gg'g^{-1} = R_{g^{-1}} \circ L_g(g'), \quad (2.2)$$

y es un automorfismo interior de G . La relación “ser adjunto de” es de equivalencia y descompone a G en *clases de conjugación*. Las clases de conjugación que a la vez son grupo se denominan *subgrupos invariantes o normales* y, como veremos más adelante, tienen un papel importante en nuestro formalismo de cuantización en tanto en cuanto representan *subgrupos de gauge* de la teoría.

★ **Campos de vectores invariantes por la izquierda (derecha) $X^{L(R)}$** : campos de vectores en el tangente $T(G)$ a la variedad del grupo G que verifican: $L_{g'}^T X_g^L = X_{g'*g}^L$ ($R_g^T X_{g'}^R = X_{g'*g}^R$), donde $L_{g'}^T$ (R_g^T) simboliza la aplicación tangente de $L_{g'}$ (R_g) [también se utiliza la notación abreviada $(L_{g'})_* X = X$]. Dado un sistema de coordenadas $\{g^j\}$, $j = 1, \dots, \dim(G)$ en el grupo G [por simplicidad, nos restringiremos a una carta conexas con la identidad], podemos obtener una expresión explícita de dichos campos de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} X_{g^i}^R &= \left. \frac{\partial g''^j}{\partial g'^i} \right|_{g'=e} \frac{\partial}{\partial g^j} = R_g^T \frac{\partial}{\partial g^i} \\ X_{g^i}^L &= \left. \frac{\partial g''^j}{\partial g^i} \right|_{g=e} \frac{\partial}{\partial g^j} = L_g^T \frac{\partial}{\partial g^i} \end{aligned} \right\} [X_{g^i}^L, \tilde{X}_{g^j}^R] = 0, \quad (2.3)$$

donde e simboliza la identidad en G . La identidad a la derecha de la llave es un reflejo de la conmutatividad entre transformaciones izquierdas y derechas en la ecuación (2.1) y, como veremos más adelante, se presenta como una propiedad muy importante dentro de nuestro formalismo de cuantización [obsérvese que los campos izquierdos (derechos) son los generadores infinitesimales de las transformaciones derechas (izquierdas)].

El conjunto de campos de vectores invariantes por la izquierda (derecha) $\mathcal{X}^{L(R)}(G)$ tiene estructura de álgebra de Lie [es fácil comprobar que el conmutador de dos campos “izquierdos” (derechos) es “izquierdo” (derecho)]. Se define de forma unívoca el *álgebra de Lie* \mathcal{G} de G como el tangente $T_e(G)$ en la identidad al grupo. Se puede comprobar que la aplicación tangente Ad_g^T de Ad_g en la identidad e es un homomorfismo de álgebras de Lie y, si denotamos por Ad la aplicación

$$Ad : G \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}), \quad g \mapsto Ad_g^T(e), \quad (2.4)$$

ésta define de forma natural una representación del grupo G en su álgebra \mathcal{G} . A su vez, la aplicación tangente de Ad en la identidad e , que denotaremos por ad , asigna a cada elemento X de \mathcal{G} un homomorfismo de álgebras ad_X tal que $ad_X(Y) = [X, Y]$.

Existe una correspondencia biunívoca entre elementos X de \mathcal{G} y campos de vectores invariantes por la izquierda (derecha) lo que lleva a la siguiente definición:

★ **1-forma canónica izquierda θ^L sobre el grupo G :** la aplicación $\theta^L : \mathcal{X}^L(G) \rightarrow \mathcal{G}$ que hace corresponder a cada campo izquierdo X^L el único elemento X de \mathcal{G} tal que $X_e^L = X$. Eligiendo un sistema de coordenadas como en (2.3) podemos dar una expresión explícita de la 1-forma canónica izquierda como $\theta^L = X_j \otimes \theta^{L(g^j)}$, donde las 1-formas $\theta^{L(g^j)}$ se denominan *componentes* de θ^L y se definen por *dualidad* con los campos izquierdos, es decir, $\theta^{L(g^j)}(X_{g^k}^L) = \delta_k^j$. Esta dualidad permite definir también la *coálgebra* \mathcal{G}^* del grupo G , constituyendo las componentes $\theta^{L(g^j)}$ de la 1-forma canónica en la identidad una base de la misma. De la misma forma, cada aplicación tangente $(f)_*$ da lugar, por dualidad, a su homóloga cotangente $(f)^*$ [a la operación $*$ se le suele denominar *imagen recíproca* o “pullback”]. La acción cotangente finita e infinitesimal de las traslaciones izquierdas y derechas sobre estas 1-formas puede expresarse en forma compacta como:

$$\begin{aligned} (L_g)^*\theta^L &= \theta^L & \mathcal{L}_{X^R}\theta^L &= 0 \\ (R_g)^*\theta^L &= (Ad_{g^{-1}})^*\theta^L & \mathcal{L}_{X^L}\theta^L &= -(ad_X)^*\theta^L \\ (L_g)^*\theta^R &= (Ad_g)^*\theta^R & \mathcal{L}_{X^R}\theta^R &= (ad_X)^*\theta^R \\ (R_g)^*\theta^R &= \theta^R & \mathcal{L}_{X^L}\theta^R &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde \mathcal{L}_X denota la *derivada de Lie*. La acción infinitesimal se puede escribir también en componentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_{g^j}^R}\theta^{L(g^k)} &= 0 & \mathcal{L}_{X_{g^j}^L}\theta^{R(g^k)} &= 0 \\ \mathcal{L}_{X_{g^j}^L}\theta^{L(g^k)} &= -C_{jl}^k\theta^{L(g^l)} & \mathcal{L}_{X_{g^j}^R}\theta^{R(g^k)} &= C_{jl}^k\theta^{R(g^l)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde C_{jl}^k son las *constantes de estructura* del álgebra de Lie \mathcal{G} ($[X_j, X_l] = C_{jl}^k X_k$).

La acción coadjunta $(Ad_g)^*$ del grupo G sobre la coálgebra \mathcal{G}^* define órbitas de dimensión par que tienen estructura de *variedad simpléctica* (véase [1]), definiéndose la forma simpléctica w como:

$$w(X^*, Y^*)|_{\theta} \equiv \theta([X, Y]), \quad X^* \equiv (ad_X)^*\theta, \quad Y^* \equiv (ad_Y)^*\theta \in \mathcal{G}^*. \quad (2.7)$$

Este hecho fué aprovechado por [2] para aplicar técnicas de *Cuantización Geométrica* a los grupos semisimples.

El concepto de “1-forma” es, claro está, un caso particular de lo que se denominan *p-formas* o *formas multilineales alternadas* que son aplicaciones del producto cartesiano $T(G) \times \dots \times T(G) \rightarrow C^\infty(G)$ lineales en sus p argumentos [$p = \text{grado}$ de la forma] y que, bajo una permutación de los mismos, cambian o no de signo según la signatura de la permutación (sin ningún otro efecto). El conjunto

de todas las p -formas $\Omega^p(G)$ sobre G resulta ser un espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{p}$, donde $n = \dim(G)$. Existen operaciones que aumentan o disminuyen el grado de una forma como son:

★ **Producto exterior \wedge , derivada exterior d y contracción i_X de formas diferenciales:** el producto exterior $\theta \wedge \theta'$ de dos 1-formas θ, θ' es una 2-forma ω tal que

$$\omega(X, X') = \theta \wedge \theta'(X, X') \equiv \frac{1}{2}(\theta(X)\theta'(X') - \theta(X')\theta(X)). \quad (2.8)$$

Esta definición se extiende fácilmente a productos exteriores múltiples haciendo uso del antisimetrizador de r índices ;un ejemplo lo constituye el *volumen de integración invariante* (o *medida de Haar*) por la izquierda (derecha) $v(g) = \theta^{L(g^1)} \wedge \dots \wedge \theta^{L(g^n)}$, donde se ha elegido una determinada *orientación*.

Dada la base $\{dg^j\}$ de 1-formas (dual de $\frac{\partial}{\partial g^j}$), la *derivada exterior* d se define a partir de las siguientes tres propiedades:

1. $d(dg^{j_1} \wedge \dots \wedge dg^{j_m}) = 0$ para toda secuencia de enteros j_i .
2. Si $F \in C^\infty(G)$ entonces $dF \equiv \sum_{j=1}^{\dim(G)} \frac{\partial F}{\partial g^j} dg^j$.
3. $d(F dg^{j_1} \wedge \dots \wedge dg^{j_m}) = dF \wedge dg^{j_1} \wedge \dots \wedge dg^{j_m}$.

Así pues, el operador d incrementa en una unidad el grado de la forma diferencial. También se puede comprobar que $d^2 = 0$ (*nilpotente*), lo que da pie a preguntarse cuántas p -formas ω con derivada exterior nula $d\omega = 0$ (*formas cerradas*) no se pueden escribir como la derivada exterior $\omega = d\alpha$ de otra $(p-1)$ -forma α (*formas exactas*); la estructura matemática que da cuenta de esto es el *p -ésimo grupo de cohomología de de Rham* $H^p(G, \mathfrak{R})$ [existe una interrelación entre la *homotopía* y la cohomología de Rham] que da idea del mayor o menor carácter *contráctil* de la variedad.

Unas identidades que nos serán útiles son las denominadas *ecuaciones de estructura de Maurer-Cartán* que expresamos en forma compacta y en coordenadas:

$$\begin{aligned} d\theta^L &= -\frac{1}{2}\theta^L \wedge \theta^L \\ d\theta^{L(g^j)} &= -\frac{1}{2}C_{kl}^j \theta^{L(g^k)} \wedge \theta^{L(g^l)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Un campo de vectores X define una *contracción* i_X de una p -forma ω como la única $(p-1)$ -forma $i_X\omega$ tal que:

$$(i_X\omega)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1}). \quad (2.10)$$

Se comprueba fácilmente que la operación de contracción es también nilpotente $(i_X)^2 = 0$. Varias relaciones útiles entre la derivada de Lie, la derivada exterior y la contracción son las siguientes:

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d \quad (2.11)$$

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X \quad (2.12)$$

$$d\theta(X, Y) = \mathcal{L}_X \theta(Y) - \mathcal{L}_Y \theta(X) - \theta([X, Y]) \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \quad (2.14)$$

★ **Grupo de Lie G como un fibrado principal.** Dado un subgrupo *cerrado* (respecto a la topología de G) $H \subset G$, podemos dar a G una estructura de fibrado principal $G(H, H)$ con *grupo estructural* (o *fibra*) H y *base* el espacio cociente (o *espacio homogéneo*) $Q = G/H$. La acción derecha de H en G es justo R_h y la proyección sobre la base es la proyección canónica sobre el cociente. En un fibrado principal $G(Q, H)$ se pueden introducir los conceptos de *horizontalidad* y de *verticalidad* para

los campos de vectores X por medio de una *1-forma de conexión* θ_H valorada en el álgebra de Lie \mathcal{H} de H , de forma que, se dice que X es vertical si $\theta_H(X) = X$ u horizontal si $\theta_H(X) = 0$. La forma de construirla es ya intuitiva a partir de θ^L definida más arriba.

El ejemplo más *trivial* de fibrado principal lo constituye el producto directo $G = J \otimes H$. El conjunto de todos los fibrados principales no equivalentes con base Q y fibra H viene caracterizado por el *conjunto de cohomología de Čech de orden uno* $\check{H}^1(Q, H)$, que resulta tener estructura de grupo para H abeliano; no obstante, no todos estos fibrados son grupo, por ejemplo, para $Q = S^2$ y $H = U(1)$ se tiene que $\check{H}^1(Q, H) = Z$ y el único que es grupo es el correspondiente al elemento $1 \in Z$ que a su vez se corresponde con $SU(2)$.

Hablando en términos coloquiales podríamos decir que, un objeto físico que “viva” en un fibrado, en un “paseo por la base Q ” podría detectar una estructura no trivial en su mundo si, al volver al punto de partida, viese alguna de sus propiedades alterada (aquellas que corresponden a la fibra). Muchos conceptos físicos importantes como: la *fase de Berry* [3], la *rotación de Wigner* [4], *potenciales de tipo monopolo* [5], *holonomías y Wilson loops* [6], etc, parecen preferir el lenguaje matemático de fibrados para su descripción. Veamos que, no sólo las teorías gauge (y entre ellas la gravitación) son las únicas que prefieren este lenguaje sino que, la propia *Mecánica Cuántica* florece sobre esta estructura. Antes de pasar a exponer el formalismo de *Cuantización Sobre Grupos* (CSG), hagamos un breve repaso de los antecedentes al mismo.

2.2 Antecedentes: Cuantización Geométrica.

La Cuantización Geométrica [7, 8, 9, 10] (CG) es un formalismo que pretende dar una base geométrica rigurosa a las reglas de cuantización canónicas usuales:

$$\begin{aligned} q^i &\longrightarrow \hat{q}^i; & (\hat{q}^i \psi)(\mathbf{q}) &\equiv q^i \psi(\mathbf{q}) \\ p_j &\longrightarrow \hat{p}_j; & (\hat{p}_j \psi)(\mathbf{q}) &\equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j} \psi(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde q^i, p_j verifican el corchete de Poisson

$$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j \quad (2.16)$$

La idea básica en este formalismo es que la teoría cuántica debe ser una representación irreducible del álgebra de Poisson $P(\mathcal{F})$ de funciones (“observables”) del espacio de fases clásico \mathcal{F} que deben actuar en un espacio de Hilbert \mathcal{H} el cual se construye de una forma natural a partir del sistema clásico. Así, a cada función $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathfrak{R}$, debería asociársele un operador lineal autoadjunto \hat{f} actuando en \mathcal{H} tal que:

$$\{\widehat{f}, \widehat{g}\} = [\hat{f}, \hat{g}], \forall f, g \in P(\mathcal{F}). \quad (2.17)$$

Es bien sabido que este programa no puede ser llevado a cabo por completo debido a ciertas obstrucciones que aparecen (teoremas *no-go* [11]), principalmente debidas a problemas de ordenación normal, y que imposibilitan representar enteramente el álgebra $P(\mathcal{F})$. No obstante, estas obstrucciones no son un problema mayor si uno se contenta con a) representar un subconjunto de $P(\mathcal{F})$ lo suficientemente grande como para generar por completo $P(\mathcal{F})$, y b) obtener sin ambigüedades los observables básicos de la teoría tales como el hamiltoniano, el operador momento angular, etc.

Dado un espacio fásico con un corchete de Poisson $\{, \}$ (\equiv forma simpléctica w), podemos asociar de forma natural a cada $f \in P(\mathcal{F})$ un operador $X_f : P(\mathcal{F}) \longrightarrow P(\mathcal{F})$, definido como:

$$X_f(g) = \{f, g\}, \forall g \in P(\mathcal{F}) \quad (2.18)$$

Estos operadores cumplen también la ecuación (2.17). Estas relaciones constituyen una guía y un primer paso hacia “lo que se espera” que debe ser la naturaleza fundamental del espacio de Hilbert de la teoría cuántica, $\mathcal{H} \sim P(\mathcal{F})$, y de los operadores cuánticos, $\hat{f} \sim X_f$. La razón de que el programa de cuantización no se termine aquí es que la correspondencia $f \rightarrow X_f$ no es uno a uno debido a que las funciones constantes caen dentro del núcleo. Para superar este problema lo que se hace es añadir un nuevo término al operador X_f para conseguir asociar a las funciones constantes sus operadores constantes homólogos. La forma de hacerlo consiste en ampliar (no trivialmente) \mathcal{F} con un nuevo parámetro $\zeta \in U(1)$ dando lugar a una nueva variedad $\tilde{\mathcal{F}}$, llamada *variedad cuántica*, con estructura de fibrado principal con base \mathcal{F} y grupo estructural $U(1)$, o sea $\tilde{\mathcal{F}}/U(1) = \mathcal{F}$. La dependencia de las funciones de onda (funciones complejas sobre $\tilde{\mathcal{F}}$) con respecto a esta nueva coordenada $\zeta \in U(1)$ se fija a través de la *condición de $U(1)$ -función*

$$\psi(\zeta p) = \zeta \psi(p), \quad \forall \zeta \in U(1), \quad (2.19)$$

o bien (en forma infinitesimal), si X_ζ es el campo de vectores que genera la acción de $U(1)$ en $\tilde{\mathcal{F}}$, la ligadura (2.19) se escribe:

$$X_\zeta \psi = \psi. \quad (2.20)$$

Esta condición, junto con la exigencia natural de que las funciones constantes se representen por un múltiplo de la identidad, implica que el nuevo operador “precuántico” asociado con $f \in F(\tilde{\mathcal{F}})$ (funciones sobre el espacio fásico extendido) tenga la siguiente expresión (local):

$$\tilde{X}_f = -i \left[X_f - (i_{X_f} \lambda - i f) X_\zeta \right], \quad (2.21)$$

donde λ simboliza un *potencial simpléctico* de w .

Si ahora designamos por Θ la 1-forma de conexión sobre $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}$, la cual se define a partir de las condiciones $i_{X_\zeta} \Theta = 1$, $i_{X_\zeta} d\Theta = 0$ y $(\tilde{\mathcal{F}}, d\Theta)/U(1) \sim (\mathcal{F}, w)$, entonces, los operadores \tilde{X}_f vendrán definidos por las siguientes relaciones:

$$i_{\tilde{X}_f} \Theta = f, \quad i_{\tilde{X}_f} d\Theta = -df \quad (2.22)$$

(estas relaciones implican en particular que $\mathcal{L}_{\tilde{X}_f} \Theta = 0$).

Con este procedimiento se asegura que la correspondencia $f \rightarrow \tilde{X}_f$ sea fiel: Sin embargo, la representación es (en general) reducible, es decir, hay operadores no triviales \tilde{X}_a que conmutan con los básicos de la representación: $\tilde{X}_{q^i}, \tilde{X}_{p_j}$. La irreducibilidad se logra imponiendo además que (algunos de) estos operadores [para ser más precisos, un conjunto maximal que cierre subálgebra (*subálgebra de polarización*), para asegurar integrabilidad] actúen trivialmente sobre el espacio de Hilbert *físico*:

$$\tilde{X}_a \psi = 0, \quad \text{para algunos } a \in I, \forall \psi \in \mathcal{H} \quad (2.23)$$

En términos poco precisos, esta última condición requiere que las funciones de onda dependan arbitrariamente de sólo la mitad de las variables del espacio fásico, o sea, bien las q^i 's o bien las p_j 's (o una combinación particular de éstas, como sucede en el oscilador armónico).

Este programa presenta diversas limitaciones y obstrucciones técnicas. Entre ellas, apuntaremos las siguientes:

- La necesidad de resolver el sistema clásico antes de abordar la cuantización [una tarea, a veces, más complicada que la propia cuantización].
- La no existencia de subálgebras de polarización para ciertos sistemas *anómalos* [que no significa necesariamente “raros”] y la imposibilidad de obtener ecuaciones de evolución de orden mayor que uno [ni siquiera la ecuación de Schrödinger de la partícula libre en el espacio de posiciones]. O, la última y más importante

- La imposibilidad de describir sistemas (púramente) cuánticos sin límite clásico. Si la naturaleza ha de ser eminentemente cuántica, cualquier formalismo que parta de una situación límite (como es el sistema clásico) y pretenda reconstruir el caso general (sistema cuántico), como mucho ofrecerá una visión restringida de éste último.

Un formalismo diseñado para tratar directamente con sistemas cuánticos y que salva dichas limitaciones es la CSG, el cual pasamos a exponer seguidamente.

Capítulo 3

CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS

Según la CG, la Mecánica Cuántica se definiría a partir de una fibración (no trivial) del espacio físico clásico extendido por $U(1)$, es decir, de la variedad cuántica $\tilde{\mathcal{F}}$. Una generalización de esta imagen podría consistir en considerar una estructura diferenciable mayor que contenga a $\tilde{\mathcal{F}}$, por ejemplo, un grupo [12]. El requerimiento de partir de la estructura particular de grupo podría representar, a primera vista, un inconveniente o, mejor dicho, una limitación; sin embargo, en la práctica, dicho inconveniente es menor en tanto en cuanto la CSG, no sólo consigue extraer información cuántica de muchos sistemas no tratables por los métodos tradicionales sino que, en la mayoría de los problemas cuánticos, el subconjunto de observables que pueden en definitiva ser cuantizados cierran un álgebra de Lie. Aún más, la CSG incorpora en su programa un tratamiento coherente de sistemas cuánticos con ligaduras (*teorías gauge*) que proporciona una riqueza todavía poco explorada. A este respecto, y dado el estado actual del tema, existen indicios de que cualquier sistema físico con interacción (de tipo gauge) pudiera verse como un sistema “libre” con ligaduras; el sistema libre vendría descrito por un grupo mientras que el sistema ligado vendría descrito por el *conjunto de operadores buenos de la teoría* (véase siguiente sección) el cual es una estructura menos rígida que un grupo [puede ser un grupo cuántico] al cual generaliza.

3.1 Cuantización sobre grupos. Caso de un grupo de Lie simplemente conexo

El punto de partida de la CSG es un grupo \tilde{G} (el *grupo de cuantización*) con una estructura de fibrado principal $\tilde{G}(M, T)$, donde simbolizamos por T al grupo estructural y por M la base. El subgrupo T generaliza la invariancia de fase de la Mecánica Cuántica [un observador cuántico no distingue estados que se diferencien en una fase, sólo observa “kets” o clases de equivalencia]. Aunque la situación puede ser más general [13], nos centraremos por el momento en el caso bastante general en el cual \tilde{G} es una extensión central de un grupo G por T [T siempre contendrá a $T_0 = U(1)$ o incluso habrá casos en los que sea necesario tomar $T = C^* = \mathfrak{R}^+ \times U(1)$]. Para el grupo uniparamétrico $T = T_0 = U(1)$, la ley de grupo para $\tilde{G} = \{\tilde{g} = (g, \zeta)/g \in G, \zeta \in U(1)\}$ adopta la forma siguiente:

$$\tilde{g}' * \tilde{g} = (g' * g, \zeta' \zeta e^{i\xi(g', g)}) , \quad (3.1)$$

donde $g'' = g' * g$ es la ley de composición en el grupo G y $\xi(g', g)$ es un *2-cociclo* de $G \times G$ en \mathfrak{R} , el cual verifica en general que:

$$\xi(g_2, g_1) + \xi(g_2 * g_1, g_3) = \xi(g_2, g_1 * g_3) + \xi(g_1, g_3) , g_i \in G. \quad (3.2)$$

Generalmente es necesaria una constante con dimensiones de acción (la constante de Planck \hbar) para que el cociclo aparezca sin dimensiones [esta necesidad no se daría si el grupo de estructura fuese

\mathfrak{R} en vez de $U(1)$; véase sección 3.1.2]. En la teoría general de extensiones centrales [14] dos 2-cociclos se dice que son equivalentes si difieren en un coborde, es decir, un cociclo que puede escribirse como $\xi(g', g) = \delta(g' * g) - \delta(g') - \delta(g)$, donde $\delta(g)$ se denomina *función generatriz del coborde*. No obstante, aunque los cociclos que se diferencian en un coborde dan lugar a extensiones centrales equivalentes como tales, existen cobordes que proporcionan una conexión no trivial en el fibrado \tilde{G} y unas constantes de estructura diferentes de las correspondientes al producto directo $G \times U(1)$. Éstos están generados por una función δ con gradiente no trivial en la identidad del grupo, y pueden ser divididas en subclases de equivalencia de Pseudocohomología: dos pseudocociclos son equivalentes si se diferencian en un coborde generado por una función con gradiente trivial en la identidad [15, 16, 17]. La Pseudocohomología juega un papel importante en la teoría de representaciones de grupos semisimples de dimensión finita, ya que éstos tienen cohomología trivial [esto no sucede en dimensión infinita como es el caso del grupo de Virasoro]; para éstos, las clases de Pseudocohomología están asociadas con las órbitas coadjuntas [17]. Además, la Pseudocohomología puede generar auténtica cohomología bajo procesos de contracción [15].

Las acciones izquierda y derecha del grupo \tilde{G} sobre sí mismo proporcionan dos conjuntos de campos de vectores (derechos $\tilde{X}_{\tilde{g}^i}^R$ e izquierdos $\tilde{X}_{\tilde{g}^i}^L$, respectivamente) que conmutan entre ellos, los cuales, haciendo uso de las expresiones en (2.3) y (3.1), podemos escribir como:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_{\tilde{g}^i}^R &= X_{g^i}^R + \left. \frac{\partial \xi(g', g)}{\partial g'^i} \right|_{\tilde{g}'=e} i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_{\tilde{g}^i}^L &= X_{g^i}^L + \left. \frac{\partial \xi(g', g)}{\partial g^i} \right|_{\tilde{g}=e} i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} [\tilde{X}_{\tilde{g}^i}^L, \tilde{X}_{\tilde{g}^j}^R] = 0, \quad (3.3)$$

donde $\{\tilde{g}^j = (g^j, \zeta)\}$ es una parametrización de \tilde{G} . El campo de vectores $\tilde{X}_{\tilde{\zeta}}^L (= \tilde{X}_{\tilde{\zeta}}^R) = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}$ es *central* (conmuta con todo) y suele denotarse por $i\Xi$ para diferenciarlo del resto¹.

El programa de CSG continúa definiendo una componente vertical (la $U(1)$ -componente) $\tilde{\theta}^{L(\zeta)}$ de la 1-forma canónica invariante por la izquierda $\tilde{\theta}^L$ de \tilde{G} , la cual denotaremos por Θ y nos referiremos a ella como *1-forma de cuantización* [recuérdese que, en coordenadas, $\Theta = \tilde{\theta}^{L(\zeta)}$ se define por dualidad respecto al generador central $\tilde{X}_{\tilde{\zeta}}^L$]. Ésta constituye la generalización de la *forma de Poincaré-Cartan* de la Mecánica clásica (véase [18]). Para una extensión \tilde{G} de G por $U(1)$ tal como (3.1) la 1-forma de cuantización adopta la siguiente expresión:

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial g^j} \xi(g', g)|_{g'=g^{-1}} dg^j + \frac{d\zeta}{i\zeta}, \quad (3.4)$$

que, para ciertos grupos como el de Galileo extendido, se convierte en la forma tradicional de $\Theta_{PC} = p_j dx^j - H dt$ salvo por el término $\frac{d\zeta}{i\zeta}$ (¡que no es una diferencial total!) proveniente de la invariancia bajo fase típica de la M. Cuántica (nótese también que Θ es estrictamente invariante bajo transformaciones de simetría, mientras que Θ_{PC} es sólo semiinvariante). La diferencial $d\Theta$ es una forma *presimpléctica* y el *módulo característico* de Θ , $\text{Ker}\Theta \cap \text{Ker}d\Theta$ (“Ker” significa “kernel” o núcleo), está generado por una subálgebra izquierda \mathcal{G}_Θ denominada *subálgebra característica* [en general contiene los campos correspondientes a variables no simpécticas]. El cociente $(\tilde{G}, \Theta)/\mathcal{G}_\Theta$ es una variedad cuántica en el sentido de la CG. Las trayectorias generadas por los campos de vectores en \mathcal{G}_Θ constituyen las ecuaciones generalizadas de movimiento (evolución temporal, rotaciones, simetrías gauge, etc), y los *invariantes Noether* bajo dichas ecuaciones se escriben como:

$$F_{\tilde{g}^j} \equiv i_{\tilde{X}_{\tilde{g}^j}^R} \Theta; \quad (3.5)$$

es decir, la contracción de los campos de vectores invariantes por la derecha con la 1-forma de cuantización [la comprobación de invariancia $\mathcal{L}_{\tilde{X}_{\tilde{g}^k}^L} F_{\tilde{g}^j} = 0$, $\forall \tilde{X}_{\tilde{g}^k}^L \in \mathcal{G}_\Theta$ puede hacerse a través de (2.12) y (2.11)]. Con respecto a este último punto es pertinente introducir la siguiente

¹veremos que juega un papel “central” dentro del esquema de cuantización.

Definición: diremos que un campo de vectores invariante por la derecha \tilde{X}^R es *gauge* si

$$i_{\tilde{X}^R}\Theta = 0, \quad (3.6)$$

es decir, si el invariante Noether correspondiente es nulo. Esta definición es consistente con la dada dentro de otros esquemas (por ejemplo, en [19]) y, en cierto modo, la generaliza. A la subálgebra generada por todos los campos de vectores gauge la denotaremos por \mathcal{N} y la denominaremos *subálgebra de gauge* (véase [20]).

Teniendo en cuenta la propiedad general $\mathcal{L}_{\tilde{X}^R}\theta^L = 0$ en (2.5) y utilizando la expresión (2.11), la ecuación (3.6) implica que $i_{\tilde{X}^R}d\Theta = 0$. Esto último enlaza con la descripción usual de simetrías gauge como aquellas generadas por campos de vectores en el núcleo de la forma presimpléctica (véase, por ejemplo [21] y referencias allí citadas).

Proposición: Sea \mathcal{N} el subespacio generado por los campos de vectores gauge. Entonces \mathcal{N} es un *ideal* de \mathcal{G} .

En efecto, basta con hacer uso de la propiedad (2.12) y la propia definición de campo de gauge.

Nótese que un campo gauge \tilde{X}^R verifica que $i_{\tilde{X}^R}\Theta = 0 = i_{\tilde{X}^R}d\Theta$ y, por lo tanto, forma parte del módulo característico generado por $\mathcal{G}_\Theta = \{\tilde{X}_j^L, j \in I\}$. Por consiguiente, un campo de gauge (derecho) debe poder escribirse, en general, como una combinación lineal de campos en la subálgebra característica (izquierdos); más explícitamente:

$$\tilde{X}_a^R = \sum_{j \in I} f_a^j \tilde{X}_j^L, \quad \forall \tilde{X}_a^R \in \mathcal{N}, \quad (3.7)$$

donde las funciones f_a^j no son del todo arbitrarias [deben definir representaciones de \mathcal{G}_Θ].

Continuemos con la descripción del formalismo de CSG y denotemos por $\mathcal{B}(\tilde{G})$ el conjunto de *T-funciones* complejas sobre \tilde{G} en el sentido de teoría de fibrados principales (2.19):

$$\psi(\zeta * \tilde{g}) = D_T(\zeta)\psi(\tilde{g}), \quad \zeta \in T, \quad (3.8)$$

donde D_T es la representación natural (no trivial) de T en los números complejos C [la expresión infinitesimal de (3.8) es $\tilde{X}_\zeta^R\psi = \psi$ para el caso de D_T fiel]. La representación de \tilde{G} en $\mathcal{B}(\tilde{G})$ generada por los campos derechos $\tilde{\mathcal{G}}^R = \{\tilde{X}^R\}$ se denomina *Cuantización de Bohr* y resulta ser *reducible*. La reducción puede lograrse imponiendo restricciones dadas por una *polarización completa* \mathcal{P} :

$$\tilde{X}^L\psi_p = 0, \quad \forall \tilde{X}^L \in \mathcal{P}, \quad (3.9)$$

la cual es una subálgebra izquierda, maximal y horizontal de $\tilde{\mathcal{G}}^L$ que contiene al módulo característico \mathcal{G}_Θ ; en otras palabras, \mathcal{P} estaría formada por aquellos campos correspondientes a variables no simplécticas (de tipo tiempo, rotaciones, gauges, etc) y a la mitad de las simplécticas (“posiciones”, “momentos”, o bien combinaciones). Debemos advertir que la existencia de una polarización completa, conteniendo a toda el álgebra \mathcal{G}_Θ , no está en general garantizada (sólo lo está para grupos semisimples y solubles [22]). En caso de que se dé una avería tal, denominada *anomalía*² [23] [o debido simplemente a una elección particular de espacio de representación], recurriremos a las *polarizaciones de orden superior* [23, 24, 25] —entramos aquí en el campo de los *operadores pseudodiferenciales*. Una polarización de orden superior \mathcal{P}^{HO} es una subálgebra [en sentido débil] maximal y horizontal del álgebra envolvente izquierda $U\tilde{\mathcal{G}}^L$. En el álgebra envolvente entendemos por “horizontal”: que no interseca con la subálgebra abeliana $\mathcal{T} = u(1)$ ni con sus potencias. El decir “maximal” implica que \mathcal{P}^{HO} contiene el máximo número de condiciones compatibles con la condición de equivariancia (3.8).

²añadiremos a ésta el calificativo de “algebraica” para distinguirla del concepto de anomalía “topológica” que introduciremos más tarde

Tendremos ocasión de tratar con ejemplos anómalos que necesitan de estas técnicas de cuantización y veremos con más detalle cómo el concepto de *anomalía* adquiere un significado más amplio que la simple idea de *obstrucción* a la cuantización. Preferimos dejar para después (sección 3.1.3) este asunto con el ánimo de no romper la continuidad de la exposición de la CSG.

La definición de polarización de orden superior es quizás poco operativa ya que, por sí misma, no ofrece guías para buscar subálgebras de polarización dentro del “vasto y salvaje territorio” del álgebra envolvente. No obstante, en muchos casos de interés, el procedimiento para construir ésta consiste en partir de los elementos del álgebra característica que son problemáticos (que no caben en la polarización no completa de primer orden) e ir añadiendo potencias de otros generadores hasta conseguir cerrar. Este proceso puede tener fin (en muchos casos basta con llegar hasta potencias cuadráticas [23, 26, 27]) o no parar nunca [28] aunque, para este último caso, la serie suele ser sumable. Otros candidatos a formar parte de una \mathcal{P}^{HO} son ciertos ideales horizontales del álgebra envolvente que se comportan como *álgebras de gauge de orden superior* en el sentido de que dan el mismo resultado si se imponen por la izquierda que por la derecha [27]. Por último, siempre podremos echar mano de los Casimires como un recurso más [29]. La técnica de polarizaciones de orden superior más la “intuición física” también resulta ser un método operativo de obtener ecuaciones de onda, de cualquier orden, invariantes bajo un cierto grupo de simetría [30].

Una vez conseguida la reducción por medio de una polarización, el grupo \tilde{G} queda representado irreduciblemente sobre el espacio $\mathcal{H}(\tilde{G}) \equiv \{|\psi\rangle\}$ de funciones de onda polarizadas y sobre su dual $\mathcal{H}^*(\tilde{G}) \equiv \{\langle\psi|\}$. Si denotamos por

$$\psi_p(\tilde{g}) \equiv \langle\tilde{g}_p|\psi\rangle, \quad \psi'_p{}^*(\tilde{g}) \equiv \langle\psi'|\tilde{g}_p\rangle \quad (3.10)$$

las coordenadas del “ket” $|\psi\rangle$ y del “bra” $\langle\psi|$ en una representación definida a través de una polarización \mathcal{P} (de primer orden o mayor), entonces, podemos definir de manera natural un producto escalar en $\mathcal{H}(\tilde{G})$ de la siguiente forma:

$$\langle\psi'|\psi\rangle \equiv \int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}) \psi'_p{}^*(\tilde{g}) \psi_p(\tilde{g}), \quad (3.11)$$

donde

$$\mu(\tilde{g}) \equiv \theta_{\tilde{g}^i}^L \wedge \overset{\dim(\tilde{G})}{\dots} \wedge \theta_{\tilde{g}^n}^L \quad (3.12)$$

es el volumen de integración invariante izquierdo en \tilde{G} y

$$1 = \int_{\tilde{G}} |\tilde{g}_p\rangle \mu(\tilde{g}) \langle\tilde{g}_p| \quad (3.13)$$

representa formalmente una *relación de cierre*. Una comprobación directa prueba que, con este producto escalar, el grupo \tilde{G} se representa unitariamente por medio de la acción *izquierda* finita (ρ denota la representación)

$$\langle\tilde{g}_p|\rho(\tilde{g}')|\psi\rangle \equiv \psi_p(\tilde{g}'^{-1} * \tilde{g}). \quad (3.14)$$

La acción *adjunta* se define entonces como

$$\langle\psi'|\rho^\dagger(\tilde{g}')|\psi\rangle \equiv \langle\psi|\rho(\tilde{g}')|\psi'\rangle^*, \quad \text{es decir } \langle\tilde{g}_p|\rho^\dagger(\tilde{g}')|\psi\rangle = \psi_p(\tilde{g}' * \tilde{g}). \quad (3.15)$$

Podemos relacionar las coordenadas de $|\psi\rangle$ en dos representaciones dadas, correspondientes a dos polarizaciones diferentes \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 , como sigue:

$$\psi_{p_1}(\tilde{g}) = \langle\tilde{g}_{p_1}|\psi\rangle = \int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}') \langle\tilde{g}_{p_1}|\tilde{g}'_{p_2}\rangle \langle\tilde{g}'_{p_2}|\psi\rangle \equiv \int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}') \bar{\Delta}_{p_1 p_2}(\tilde{g}, \tilde{g}') \psi_{p_2}(\tilde{g}'), \quad (3.16)$$

donde $\bar{\Delta}_{p_1 p_2}(\tilde{g}, \tilde{g}')$ es un *operador de cambio de polarización* [ejemplos particulares son la transformada de Fourier, la transformada de Bargmann, etc]. Podemos dar una expresión explícita de $\bar{\Delta}_{p_1 p_2}$ haciendo uso de una base $\{|n\rangle\}_{n \in I}$ (I es un conjunto de índices) de $\mathcal{H}(\tilde{G})$, de esta forma:

$$\bar{\Delta}_{p_1 p_2}(\tilde{g}, \tilde{g}') = \langle\tilde{g}_{p_1}|\tilde{g}'_{p_2}\rangle = \sum_{n \in I} \psi_{p_1, n}^*(\tilde{g}) \psi_{p_2, n}(\tilde{g}'), \quad (3.17)$$

donde $\psi_{p_i, n}(\tilde{g}) \equiv \langle \tilde{g}_{p_i} | n \rangle$ son las coordenadas de $|n\rangle$ en una polarización \mathcal{P}_i .

3.1.1 Ligaduras en la CSG

Hasta ahora nos hemos centrado en un grupo de estructura T central y más particularmente en $T = U(1)$. La posibilidad de un grupo de estructura no uniparamétrico y no central también puede contemplarse y, de hecho, constituye la base de la *Cuantización Algebraica Sobre Grupos* (CASG) que es una generalización de la CSG para tratar grupos no simplemente conexos y grupos que contienen simetrías discretas (casos que trataremos en la sección 3.2). Este procedimiento de agrandar el subgrupo de estructura resulta ser la manera más natural de incorporar consistentemente las *ligaduras* dentro del formalismo de CSG, es decir, por medio de condiciones de T -función (3.8), que podemos escribir ahora como:

$$\rho(\tilde{t})|\psi\rangle = D_T^{(\epsilon)}(\tilde{t})|\psi\rangle, \quad \tilde{t} \in T \quad (3.18)$$

o infinitesimalmente como³:

$$\tilde{X}_{\tilde{t}}^R|\psi\rangle = dD_T^{(\epsilon)}(\tilde{t})|\psi\rangle, \quad (3.19)$$

donde $D_T^{(\epsilon)}$ simboliza una representación particular (con parámetro ϵ) de T contenida en ρ y $dD_T^{(\epsilon)}$ su diferencial. El índice ϵ parametriza las diferentes representaciones de T que se dan en ρ . En general habrá representaciones de T que no estén en ρ , pero la imposición de ligaduras será consistente sólo para aquellas representaciones de T que estén en ρ ⁴.

Denotemos por $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G})$ al subespacio de T -funciones (3.18) de $\mathcal{H}(\tilde{G})$, donde el índice ϵ parametriza las *cuantizaciones no equivalentes* de la teoría ligada. Es claro que, para un subgrupo de estructura T no central, no todos los operadores $\tilde{X}_{\tilde{g}}^R$ preservarán las ligaduras, es decir, no todos dejarán estable el subespacio $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G})$. Una condición suficiente para que una subálgebra $\tilde{\mathcal{G}}_T$ preserve dichas ligaduras es [31]:

$$[\tilde{\mathcal{G}}_T, \mathcal{T}] \subset \text{Ker} dD_T^{(\epsilon)}. \quad (3.20)$$

La subálgebra $\tilde{\mathcal{G}}_T$ forma parte del denominado *conjunto de operadores buenos* [13] definido precisamente como aquellos operadores que respetan las ligaduras y, por tanto, dejan estable el subespacio $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G})$. El resto de operadores serán calificados como *malos* aunque, en ciertos casos, algunos de éstos pueden “regularizar su situación” en tanto en cuanto actúan como *operadores de cambio de cuantización* pasando de un $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G})$ a otro $\mathcal{H}^{(\epsilon')}(\tilde{G})$ y, por consiguiente, actuando en la unión $\bigcup_{\epsilon} \mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G})$. A este tipo de operadores los denominaremos, por brevedad, *operadores regulares*.

Llegados a este punto, es el momento de poner de manifiesto otro tipo de obstrucciones que aparecen en el proceso de imposición de ligaduras y que hacen referencia a la tradicional distinción entre: *ligaduras de primera y segunda clase*. Todo lo dicho hasta ahora es rigurosamente cierto siempre que T factorize como $T = (T/T_0) \times T_0$, donde $\tilde{T} = T/T_0$ denota el subgrupo de ligaduras propiamente dicho; diremos que este caso se corresponde con ligaduras de primera clase. Sin embargo, también puede darse la situación de que T sea una extensión central no trivial de \tilde{T} por T_0 , es decir, de que existan parejas canónico conjugadas de generadores (de tipo “coordenada-momento”) cuya acción no pueda ser fijada a la vez por el *principio de incertidumbre*. En tal caso bastará con imponer como ligadura sólo un subgrupo de polarización $T_p \subset T$ el cual, para teorías con un vacío, deberá encontrarse entre los campos de la polarización dual \mathcal{P}^* (derecha) de \mathcal{P} (siempre que no queramos tratar con funciones de onda “distribucionales”); diremos que este segundo caso se corresponde con ligaduras de segunda clase. En definitiva, para ligaduras de segunda clase bastará con sustituir las condiciones de T -función (3.18) por las de T_B -función, con $T_B = T_p \times U(1)$. Los operadores buenos deben preservar, no sólo la condición de T_B -función elegida sino, todas y cada una de las posibles

³recordemos que seguimos tratando con grupos simplemente conexos

⁴si se trata de fijar el valor de un cierto operador, debemos partir, claro está, de un espacio que lo contenga dentro de su espectro

elecciones de T_p dentro de T [de otra forma, no sería T quien dictase cuál es la teoría constreñida sino T_B]. En la siguiente sección veremos que la situación puede cambiar cuando se trata con espacios no simplemente conexos y T/T_0 es finito.

Al igual que sucede con la subálgebra de polarización, también las ligaduras pueden extenderse a *ligaduras de orden superior* [no necesariamente de primer orden como en (3.19)]; es decir, en general, las ligaduras constituyen una subálgebra del álgebra envolvente derecha $U\tilde{G}^R$. Un ejemplo ilustrativo de este caso tiene lugar cuando se seleccionan representaciones etiquetadas por un valor ϵ de algún operador de Casimir C correspondiente a un subgrupo \tilde{G}_C de \tilde{G} . Tendremos ocasión de ver este caso en relación con la radiación del vacío en una teoría cuántica de campos invariante conforme (véase Capítulo (9)). Tanto en estos casos, como en ligaduras de primer orden, los operadores buenos hay que buscarlos, en general, en el álgebra envolvente derecha $U\tilde{G}^R$ con la condición de que conmuten (en sentido débil) con la ligadura.

El procedimiento que hemos seguido para introducir las ligaduras hace referencia al método general de “primero cuantizar y después constreñir” frente al de “primero constreñir y luego cuantizar”, entendiéndose por esta segunda opción el “cuantizar el conjunto de operadores buenos”. Existen casos en los que los dos procedimientos no conmutan, es más, hasta donde yo conozco, la primera forma de proceder parece constituir una forma refinada de la segunda. Es de suponer que sería más correcto cuantizar y constreñir al mismo tiempo, si bien esta forma de proceder está todavía por perfilar.

3.1.2 Invariantes Noether y Teoría Clásica.

Usualmente se dice que la Teoría Clásica es el “límite $\hbar \rightarrow 0$ ” de la Teoría Cuántica, aunque esta afirmación no puede ser tomada al pie de la letra. En la CSG, la versión clásica (si es que existe) correspondiente a un sistema cuántico definido por un grupo de cuantización \tilde{G} puede conseguirse sin más que sustituir el subgrupo de invariancia de fase $T_0 = U(1)$ por su versión local $T_0 = \mathfrak{R}$. En efecto, llamemos \check{G} al grupo obtenido de \tilde{G} haciendo esta sustitución, cuya ley de grupo queda como:

$$\check{g} = (g'', r'') = (g' * g, r' + r + \xi(g', g)), \quad g \in G, r \in \mathfrak{R} \quad (3.21)$$

Nótese que el argumento que dábamos para introducir la constante de Planck en el cociclo ya no tiene sentido, es decir, la Teoría Clásica no necesita de esta constante. Ahora, la condición de \mathfrak{R} -función sobre funciones Γ definidas sobre \check{G} es:

$$\Gamma(r * \check{g}) = \Gamma(\check{g}) \Rightarrow \Gamma(g, r) = S(g) + r, \quad r \in \mathfrak{R}. \quad (3.22)$$

Para dar un significado a las nuevas “funciones de onda” Γ , no tenemos más que darnos cuenta de que si escribimos $\psi = e^{i\frac{E}{\hbar}} W$ [recuérdese la aproximación semiclásica], entonces la condición de $U(1)$ -función (3.8) para ψ se convierte en una condición de \mathfrak{R} -función para Γ . Todo apunta a que S sea la *función principal de Hamilton* y, en efecto, se puede comprobar que las ecuaciones de polarización para Γ conducen precisamente a la ecuación de Hamilton-Jacobi para S . Físicamente podríamos decir que esta “descompactificación” $U(1) \rightarrow \mathfrak{R}$ (que es equivalente a quedarse en una carta local $\phi = -i \log \zeta \sim r$ de $U(1)$) destruye la prescripción cuántica y da paso a la clásica. La 1-forma de cuantización (3.4) coincide ahora rigurosamente con la forma de Poincaré-Cartan, debido a que el término sobrante dr (versión local de $i\zeta d\zeta$) es ahora una diferencial exacta [la diferencia está en que $H^1(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = 0$ mientras que $H^1(S^1, \mathfrak{R}) = \mathbb{Z}$]. La definición de invariante Noether permanece, no obstante, inalterada. Para dichos invariantes puede introducirse de manera natural un corchete de Poisson definido como:

$$\{F_{\check{g}^j}, F_{\check{g}^k}\} \equiv i \left[\tilde{X}_{\check{g}^j}^R, \tilde{X}_{\check{g}^k}^R \right] \Theta \quad (3.23)$$

El cociente por las ecuaciones generalizadas de movimiento definidas por los campos de vectores en la subálgebra característica (campos correspondientes a variables no simplécticas o no dinámicas)

produce una *reducción* de la variedad original correspondiente a todos los invariantes Noether de manera que, ahora, algunos de estos invariantes Noether no básicos (precisamente los correspondientes a las variables no simplécticas) se escriben en función de los básicos (los correspondientes a variables simplécticas). Llamaremos variedad clásica a esta variedad reducida y añadiremos el calificativo de “clásico” a este proceso de reducción, por contraposición al proceso de reducción “cuántico”, el cual no tiene por qué venir unido al anterior; de hecho, ambos procesos de reducción no son paralelos si existe una anomalía algebraica.

3.1.3 Anomalías algebraicas. Grados de libertad extra

El concepto de anomalía algebraica es más amplio que la simple idea de *obstrucción* a la cuantización, compartiendo con la definición estándar [32] la aparición de términos centrales extra en conmutadores cuánticos que no se encontraban en sus homólogos clásicos (corchetes de Poisson). Ejemplos bien conocidos de estos términos centrales son los *términos de Schwinger* que aparecen en las álgebras cuánticas de corrientes

$$\left[\hat{J}_a^0(\vec{x}), \hat{J}_b^i(\vec{y}) \right]_{\Sigma} = -C_{ab}^c \hat{J}_c^i(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \overbrace{S_{ab}^{ij} \partial_j \delta(\vec{x} - \vec{y})}^{\text{tér. de Schwinger}} + \dots, \quad \Sigma \equiv \{x^0 = cte\}, \quad (3.24)$$

cuando éstas corrientes se expresan en términos de los operadores básicos correspondientes a materia fermiónica, o los términos centrales del álgebra de Virasoro

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m - n) \hat{L}_{(m+n)} + \overbrace{\frac{d}{12} (n^3 - n) \delta_{m,n} \hat{1}}^{\text{tér. central}} \quad (3.25)$$

que aparecen cuando los generadores de la simetría conforme en la cuerda bosónica se expresan en función de los operadores básicos correspondientes a los modos normales de ésta.

Tanto las situaciones anómalas como los teoremas *no-go* [11] han sido obstáculos, casi siempre insalvables, para la cuantización convencional debido quizás al procedimiento de “cuantizar sistemas clásicos” y no “describir sistemas cuánticos”. Esta perspectiva limita el número de sistemas cuánticos “admisibles” y es necesario abrir una brecha en este sentido (véase Capítulo 6).

Todos estos ejemplos comparten una base común: si partiésemos de la situación más general posible para un álgebra de simetrías, permitiendo todo tipo de “deformaciones” (extensiones centrales y deformaciones inducidas) con parámetros γ_j , y abordásemos su cuantización, llegaríamos a que, mientras la *reducción clásica* ocurre para lo que llamaremos “valores clásicos de la anomalía” (digamos $\gamma_j = 0$), la *reducción cuántica*⁵ se da para otros valores diferentes (de ahí la denominación de anómalos) los cuales llamaremos “valores cuánticos de la anomalía”. Dicha reducción cuántica se lleva a cabo por la imposición de una polarización de orden superior, la cual existe precisamente sólo para dichos valores cuánticos de la anomalía. Fuera de éstos valores la reducción no es posible y el sistema exhibe nuevos grados de libertad además de los esperados ingenuamente por la Teoría Clásica (véase Capítulo 6).

3.2 Cuantización algebraica. Aspectos globales de la teoría cuántica

Todo lo dicho hasta ahora es aplicable a grupos de cuantización simplemente conexos que describen teorías cuánticas definidas sobre espacios de fases o de configuración simplemente conexos, algo usual en la Mecánica Cuántica tradicional. No obstante, en los últimos años se ha puesto de relieve que los efectos cuánticos más sorprendentes parecen estar relacionados con espacios de configuración Q (y,

⁵entendiendo ahora la reducción que conlleva la expresión de los operadores cuánticos no básicos (correspondientes a variables no simplécticas) en función de los básicos (resp. simplécticos)

más generalmente, espacios de fases) múltiplemente conexos o no conexos, es decir, con un carácter no trivial del correspondiente grupo fundamental (o grupo de homotopía) $\Pi_1(Q)$. Ejemplos de tales espacios los encontramos por ejemplo en:

- *Teorías de Yang-Mills*, donde los efectos cuánticos topológicos, debidos a la existencia de un conjunto infinito (numerable) de G -fibrados principales (G denota un grupo de gauge simple y no abeliano) con conexión de Yang-Mills A definida sobre S^4 [compactificación por un punto de \mathbb{R}^4 debido a condiciones de contorno], se manifiestan a través del fenómeno de instantones y de sus ϑ -estados asociados (vacíos degenerados). Estos ϑ -estados también pueden verse como los análogos cuánticos de las configuraciones de campo independientes del tiempo, de energía nula y homotópicamente no equivalentes, es decir, potenciales $A \in Q = C^\infty(S^3, G)$ puro gauge definidos sobre S^3 y no homotópicos; dichas configuraciones vienen etiquetadas por representaciones de $\Pi_1(Q)$ o, mejor dicho, por elementos de $\text{Hom}(\Pi_1(Q), U(1))$ (índices ϑ).
- *Modelos σ no lineales*, donde los campos $\phi \in Q = C^\infty(\Sigma, G/H)$ (Σ denota una superficie espacial) caen en distintas clases de homotopía. Un ejemplo es el modelo de Heisenberg de espines en materia condensada.
- La propia *Gravedad Cuántica*, vista como una teoría gauge, donde

$$Q = \text{Riem}\Sigma/\text{Diff}(\Sigma, \mathcal{F}) \sim C^\infty(\Sigma, GL^+(3, \mathbb{R})/SO(3))/\text{Diff}(\Sigma, \mathcal{F}) \quad (3.26)$$

(\mathcal{F} denota el espacio tangente de sistemas de referencia en un punto de Σ).

- *Estadísticas exóticas y anyones* en el plano, donde el espacio de configuración Q es el de n partículas idénticas obtenido a partir de \mathbb{R}^{2n} quitando los puntos donde puedan superponerse las partículas. El grupo de homotopía $\Pi_1(Q)$ se corresponde con el grupo de trenzas, que sustituye al grupo simétrico S_n para $d = 2$).
- O ejemplos más “palpables” como un *anillo superconductor* o el *efecto Hall cuántico entero y fraccionario* donde, tanto la disposición experimental como los aparatos de medida o las propias condiciones de contorno, cambian la topología del sistema de manera no trivial dando lugar a cuantizaciones de tipo topológico (tendremos ocasión de ver en detalle este último caso).
- *Moléculas poliatómicas*, cuyo espacio de configuración es $Q = SO(3)/K$ donde K denota el grupo de simetría (discreto) de la molécula, etc.

Para nosotros, tanto el espacio de configuración Q como el espacio fásico F (o mejor dicho, sus correspondientes recubridores universales \bar{Q} y \bar{F}) estarán embebidos en una estructura más grande definida a través de un grupo de cuantización \tilde{G} , visto éste como un fibrado principal con grupo estructural T , el cual contiene al primer grupo de homotopía del espacio fásico junto con $U(1)$. Si F es el cotangente $T^*(Q)$ de un espacio de configuración Q múltiplemente conexo, entonces $\Pi_1(F) = \Pi_1(Q) = T$ y las cuantizaciones no equivalentes vendrán dadas por las distintas representaciones del grupo de ligaduras $T = \tilde{T} \times U(1)$ (las cuales resultan ser de primera clase para este caso), más precisamente, por los elementos de $\text{Hom}(\tilde{T}, U(1))$ (“ ϑ -sectores” [33, 31]). Pero también pueden darse situaciones en las cuales F no sea el cotangente de ningún Q , como es el caso del toro o la esfera vistas como variedades simplécticas; en tal caso se tiene que, en general, $T \neq \tilde{T} \times U(1)$ ya que existen parejas de elementos que dan $U(1)$ al conmutar. En este último caso T es una extensión central de \tilde{T} por $U(1)$ y las ligaduras resultan ser de segunda clase. No obstante, en estos casos siempre podremos imponer todo T como ligadura (sin recurrir a un subgrupo de polarización T_p) debido a su carácter discreto (veremos un ejemplo de este tipo en conexión con la aparición de números cuánticos topológicos fraccionarios en el Efecto Hall Cuántico).

Todo lo dicho se aplica también a la obtención de representaciones unitarias de un grupo G no simplemente conexo. El formalismo de CASG ataca este problema buscando extensiones (o pseudoextensiones) \tilde{G} del recubridor universal \bar{G} por $U(1)$; el grupo de estructura se elige como $T = \Pi_1(G) \times U(1)$. Este es el caso, por ejemplo, de $G = SO(3)$ cuyo grupo de cuantización es $\tilde{G} = SU(2) \tilde{\otimes} U(1)$ con grupo de estructura $T = Z_2 \times U(1)$.

La inclusión de simetrías discretas en el formalismo de CSG (no ya sólo de origen homotópico sino también del tipo: paridad, inversión temporal, conjugación de carga, etc) nos obliga a traducir algunos de los conceptos geométricos introducidos en la sección anterior a sus homólogos algebraicos:

1. El primero hace referencia al *grupo característico* G_c como versión finita de la subálgebra característica \mathcal{G}_Θ . Para dar una caracterización algebraica de G_c podemos notar que \mathcal{G}_Θ podría haber sido definida como la subálgebra horizontal y maximal de $\tilde{\mathcal{G}}^L$ tal que $[\mathcal{G}_\Theta, \mathcal{X}^L(\tilde{G})]$ es horizontal. En efecto, haciendo uso de las ecuaciones de Maurer-Cartan (2.9) se tiene que

$$d\Theta(X, Y) = -\Theta([X, Y]) \quad (3.27)$$

de forma que $\Theta([X, Y]) = 0 \forall X \in \mathcal{G}_\Theta, Y \in \mathcal{X}^L(\tilde{G})$, ya que $i_X d\Theta = 0 = i_X \Theta$. La condición de horizontalidad puede sustituirse por su homóloga finita:

$$[G_c, \tilde{G}] \cap T_0 = 1_{\tilde{G}}, \quad G_c \cap U(1) = 1_{\tilde{G}}, \quad (3.28)$$

donde $[\tilde{g}, \tilde{g}'] \equiv \tilde{g} * \tilde{g}' * \tilde{g}^{-1} * \tilde{g}'^{-1}$ es el conmutador en el grupo.

2. El siguiente es el *subgrupo de polarización completa* G_p , que definiremos como aquel que es maximal, horizontal y contiene a G_c , o sea:

$$G_c \subset G_p, \quad G_p \cap U(1) = 1_{\tilde{G}}. \quad (3.29)$$

La polarización finita se impone como $\psi(\tilde{g} * G_p) = \psi(\tilde{g})$. Las polarizaciones de orden superior podrían imponerse de forma finita como *transformaciones integrales* con un cierto núcleo integral determinado pero, en esta memoria, no vamos a tener ocasión de tratar esta cuestión.

3. Por último, el *grupo de gauge* N de \tilde{G} es el subgrupo *normal*, horizontal y maximal de \tilde{G} . Es claro que $N \subset G_c$.

Puede probarse fácilmente el recíproco de la proposición de la sección anterior, referente a la equivalencia entre ideales horizontales y subálgebras de gauge, ahora que tenemos una caracterización finita de \mathcal{N} .

Proposición: Sea H un subgrupo conexo, normal y horizontal de un grupo de cuantización \tilde{G} , y sean \tilde{X}_a^R los campos de vectores derechos que generan H . Entonces:

$$i_{\tilde{X}_a^R} \Theta = 0. \quad (3.30)$$

En efecto, considérese cualquier función $\psi : \tilde{G} \rightarrow C$ tal que $\psi(\tilde{g} * h) = \psi(\tilde{g})$, $\forall \tilde{g} \in \tilde{G}, h \in H$ (“ ψ está polarizada”). Entonces, debido a que H es normal, se tiene que $\psi(h * \tilde{g}) = (\rho(h^{-1})\psi)(\tilde{g}) = \psi(\tilde{g})$. Este hecho requiere que, para cualquier $\tilde{g} \in \tilde{G}$, cualquier campo derecho \tilde{X}_a^R que genere la acción izquierda de H pueda ser expresado como una combinación lineal de los campos izquierdos que generan la acción derecha de H , y al revés. Por lo tanto, ya que H es horizontal, las cargas Noether asociadas con los campos de vectores tangentes a H y a la 1-forma de cuantización (izquierda) Θ son cero.

También pueden darse otras caracterizaciones de “operador bueno” en el grupo, bien haciendo referencia al subgrupo de polarización:

$$Ad(\tilde{G})([T, \tilde{G}'_T]) \subset G_p \quad (3.31)$$

o bien como el *grupo pequeño* de la representación $D_T^{(\epsilon)}$ de T , es decir, el subgrupo \tilde{G}_T'' que lleva la representación $D_T^{(\epsilon)}$ a una equivalente $D_T^{(\epsilon, \tilde{g}_T)}$ bajo la acción adjunta:

$$D_T^{(\epsilon, \tilde{g}_T)}(\tilde{t}) \equiv D_T^{(\epsilon)}(\tilde{g}_T * \tilde{t} * \tilde{g}_T^{-1}) \approx D_T^{(\epsilon)}(\tilde{t}), \quad \forall \tilde{t} \in T, \quad \forall \tilde{g}_T \in \tilde{G}_T''. \quad (3.32)$$

Esta última caracterización generaliza a la versión finita de (3.20) y coincide con ella para representaciones de dimensión uno, de modo que $G_T \subset G_T''$. Nótese que (3.31) no hace referencia a $D_T^{(\epsilon)}$, mientras que (3.20) y (3.32) si lo hacen. A priori, es difícil decir si $G_T' \subset G_T \subset G_T''$, aunque para los casos que se estudian en esta memoria es así, con la salvedad de que la caracterización (3.20) puede extenderse de manera directa al álgebra envolvente, mientras que las otras dos no, extendiendo así el concepto de operador bueno en el grupo.

3.2.1 Anomalías topológicas. Violación del Teorema de Ehrenfest

La existencia de un grupo de homotopía no trivial (o, equivalentemente, el carácter múltiplemente conexo) de una variedad M está relacionada con la existencia de cohomología de Rham $H^1(M, \mathbb{R}) \neq 0$. Para estas variedades existen funciones que no están globalmente definidas, aunque si lo estén localmente. Mientras que una teoría eminentemente local como es la M. Clásica –formulada como un problema de valores iniciales– no es sensible a la homotopía (digamos que las partículas clásicas son “miopes” y no distinguen entre M y su recubridor universal \bar{M}), una teoría eminentemente global como es la M. Cuántica es perceptiva a estas “sutilezas” de origen topológico (digamos que el carácter no local de la función de onda implica que los objetos cuánticos sean conscientes en cada instante de la forma que tiene el “universo” donde viven [34]). En efecto, cuando se aborda la cuantización del correspondiente sistema clásico por el procedimiento de asignar a cada función clásica A un operador cuántico \hat{A} , estas diferencias se manifiestan a través de lo que se ha dado en llamar *anomalías topológicas* [35] y que hacen referencia a la violación del Teorema de Ehrenfest por la aparición de términos indeseables o no esperados (anómalos):

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \text{términos anómalos} \quad (3.33)$$

precisamente para aquellos operadores \hat{A} correspondientes a funciones clásicas A no globalmente definidas. Estos problemas se achacan a que \hat{A} no preserva el dominio de definición del hamiltoniano \hat{H} , interpretándose ésto como una falta de hermiticidad para \hat{A} .

Desde nuestro punto de vista, estas averías son interpretables en términos de *operadores malos* para una teoría cuántica definida por un grupo de cuantización $\tilde{G}(M, T)$ donde T incorpora el grupo fundamental de M . En efecto, las técnicas de CASG aplicadas a este tipo de sistemas distinguen los operadores cuánticos \hat{A} , correspondientes a coordenadas locales, como operadores malos, es decir, operadores que no respetan la condición de T -función y que, por consiguiente, no dejan estable el espacio de Hilbert constreñido (muchas veces este operador malo resulta ser regular y puede reinsertarse en la teoría, véase ejemplo la sección 3.3). Para un formalismo eminentemente cuántico como es CASG, estos hechos no merecerían ser llamados “anómalos” por no esperados o no deseables (algo más propio de formalismos de cuantización con un marcado tinte clásico).

Para terminar con este apartado, me gustaría comentar otro tipo de fenómenos relacionados con la homotopía y que hacen referencia a un tipo de “creación de cohomología” a partir de pseudocohomología, esta vez no debidos a procesos de contracción [15] sino, debidos a la no trivialidad de $H^1(M, \mathbb{R})$ (cohomología de Rham). En efecto, ciertos cobordes correspondientes a funciones locales sobre M , que están globalmente definidos en el recubridor universal \bar{M} y que, por consiguiente, no afectarían la dinámica tanto clásica como cuántica de la teoría no constreñida, resultan dar lugar a cambios no triviales de la 1-forma de cuantización (\sim acción) correspondiente a la teoría constreñida por la aparición de diferenciales cerradas pero no exactas (no totales) alterando así la Teoría Cuántica. Este hecho está en íntima relación con el fenómeno de los “ ϑ -sectores” en teoría cuántica de campos (tendremos ocasión de volver sobre ello en la sección 3.3).

3.2.2 Ligaduras y simetrías gauge

Tradicionalmente, la existencia de simetrías de tipo gauge en una teoría clásica definida a través de una acción S lleva consigo la necesidad de introducir ligaduras en la dinámica Hamiltoniana correspondiente. Ésto es, digámoslo así, debido a que la teoría no es capaz de determinar el futuro a partir del presente, en el sentido de que existen varias trayectorias posibles para unas condiciones iniciales dadas [dos “campos” relacionados por una transformación de gauge podrían coincidir en un cierto instante de tiempo (también sus derivadas) y evolucionar de forma independiente]. Para remediar este mal normalmente se opta por *fixar un gauge*, lo cual significa quedarse con aquellas soluciones que cumplen una determinada condición compatible con la dinámica. Esta avería afecta directamente al paso del formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano (y por consiguiente a la cuantización canónica del correspondiente sistema cuántico) debido fundamentalmente a la falta de regularidad del Lagrangiano, es decir, debido a que existen coordenadas cuyo momento canónico conjugado es cero. Para solventar este problema, y con vistas a recuperar la cuantización canónica para estos sistemas, Dirac ideó una forma de establecer un formalismo hamiltoniano con ligaduras que reprodujese la teoría original. Básicamente este formalismo consiste en partir de un Lagrangiano regular (con mayor o menor relación con el original) y construir a partir de él un hamiltoniano que reproduzca, al menos parcialmente, las ecuaciones de movimiento originales; el resto se ponen como condiciones de ligadura. Desde este punto de vista, la simetría gauge es *anterior* a (motiva) las ligaduras.

Para nuestro método de cuantización, las simetrías gauges resultan ser meros “espectadores” en el sentido de que, debido a que forman parte del módulo característico, el formalismo de cuantización ya ha tomado cociente por ellas, cociente que se traduce en una representación trivial para los correspondientes campos derechos (por ser gauge). Es decir, si decidiéramos imponer los generadores de gauge como ligadura, nos encontraríamos con que ésta se satisface trivialmente!. ¿Cuál es entonces, si es que existe, la conexión entre ligaduras y simetrías gauge dentro de la CSG?. La respuesta está contenida, en su mayor parte, en la caracterización (3.20) de operador bueno y la definición de subgrupo de gauge como subgrupo normal y horizontal. En efecto, el conjunto (grupo) de operadores buenos \tilde{G}_T juega el papel de *normalizador* de la ligadura T , mejor dicho, de T/T_0 , ya que T_0 nunca está en el $\text{Ker}D_T^{(\epsilon)}$. Desde esta perspectiva, el subgrupo $\tilde{T} = T/T_0$ es normal y horizontal dentro de \tilde{G}_T (que ahora define la teoría constreñida) y, por consiguiente, pasa a ser un subgrupo de gauge del sistema físico resultante. Hay que hacer una puntualización en el caso en que T sea una extensión central (no producto directo $\tilde{T} \times U(1)$); como sabemos, en este caso no podemos aspirar a imponer mas que un subgrupo T_B . Esta situación

se

correspondería con una *teoría gauge anómala* [no se confunda este tipo de anomalía con la anomalía algebraica definida anteriormente, la cual hace referencia a una verdadera obstrucción a la cuantización, aunque comparta con ésta la aparición de términos centrales “no deseables” en los conmutadores]. Cuando T sea una extensión central de un grupo discreto por $U(1)$, llamaremos a todo T *grupo de gauge anómalo*.

Desde nuestra perspectiva pues, la simetría gauge es *posterior* a la ligadura. Es más, hay razones para pensar que la totalidad de las teorías gauge puedan obtenerse como teorías ligadas de otras más fundamentales, digamos, “libres”. Esta idea esta siendo desarrollada y en nuestro punto de mira está el abordar la Cuantización de la Gravedad (!); aunque, por lo pronto nos conformaremos con atacar las teorías de Yang-Mills, cosa que haremos en el último capítulo.

3.3 Ejemplo: partícula libre no relativista sobre la circunferencia

Para concretar algunas de las cuestiones tratadas en términos generales en las secciones precedentes, vamos a estudiar el ejemplo simple de la partícula libre Galileana sobre la circunferencia $Q = S^1$. Su utilidad es manifiesta tanto como modelo simplificado de *anillos superconductores* en Estado Sólido, como reflejo finitodimensional del fenómeno de ϑ -sectores en teoría cuántica de campos. Para abordar

la cuantización de este sistema partiremos del grupo de Galileo extendido $\tilde{G}_{(m)}$ en una dimensión, cuya ley de grupo es:

$$\begin{aligned} t'' &= t' + t \\ x'' &= x' + x + \frac{p'}{m}t \\ p'' &= p' + p \\ \zeta'' &= \zeta' \zeta e^{\frac{i}{\hbar} \xi(g', g)}, \quad \xi(g', g) \equiv x'p + \left(\frac{pp'}{m} + \frac{p'^2}{2m}\right)t, \end{aligned} \quad (3.34)$$

tomando como grupo estructural $T = \Pi_1(S^1) \times U(1) = Z \times U(1)$, donde $\tilde{T} = Z$ es el subgrupo de traslaciones discretas en la coordenada x por una cantidad fija L (nótese que estamos tratando con ligaduras de primera clase). Los campos de vectores izquierdos y derechos se escriben:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^L &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{p^2}{2m} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} & \tilde{X}_t^R &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \tilde{X}_x^L &= \frac{\partial}{\partial x} & \tilde{X}_x^R &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} p \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_p^L &= \frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{\hbar} x \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} & \tilde{X}_p^R &= \frac{\partial}{\partial p} + \frac{t}{m} \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{pt}{m\hbar} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_\zeta^L &= \tilde{X}_\zeta^R = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

y los conmutadores (izquierdos) son:

$$\begin{aligned} [\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_x^L] &= 0 \\ [\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_p^L] &= -\frac{1}{m} \tilde{X}_x^L \\ [\tilde{X}_x^L, \tilde{X}_p^L] &= \frac{i}{\hbar} \tilde{X}_\zeta^L \\ [\tilde{X}_\zeta^L, \text{todo}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

La 1-forma de cuantización y el módulo característico son:

$$\begin{aligned} \Theta &= -x dp - \frac{p^2}{2m} dt + \frac{d\zeta}{i\zeta} \\ \mathcal{G}_\Theta &= \langle \tilde{X}_t^L \rangle. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Existen dos subálgebras de polarización

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_t^L, \tilde{X}_x^L \rangle \quad \text{y} \quad \mathcal{P}^{HO} = \langle \tilde{X}_t^L - \frac{i\hbar}{2m} \tilde{X}_x^L \tilde{X}_x^L, \tilde{X}_p^L \rangle, \quad (3.38)$$

la primera (de primer orden y completa) que conduce a la representación en el espacio de momentos

$$\psi(\zeta, t, x, p) = \zeta e^{-i \frac{p^2}{2m\hbar} t} \phi(p), \quad (3.39)$$

y la segunda (de orden superior) que conduce a la representación en el espacio de posiciones

$$\psi(\zeta, t, x, p) = \zeta e^{-i \frac{px}{\hbar}} e^{i \frac{\hbar t}{2m} \nabla^2} \phi'(x). \quad (3.40)$$

La condición de T -función (3.18) aplicada a estas funciones de onda se traduce en:

$$\psi^{(\epsilon)}(\zeta, t, x + kL, p) = e^{\frac{i}{\hbar} pkL} e^{\frac{i}{\hbar} \epsilon kL} \psi^{(\epsilon)}(\zeta, t, x, p), \quad (3.41)$$

donde $D_T^{(\epsilon)}(e_k, \zeta) = \zeta e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon k L}$ es una representación de $T = Z \times U(1) = \{e_k, \zeta\}$, $k \in Z$ con parámetro $\epsilon \in [0, \frac{2\pi\hbar}{L})$ (la primera zona de Brillouin en la nomenclatura de Estado Sólido). Esta condición implica que

$$\phi^{(\epsilon)}(p) = \sum_{k \in Z} a_k \delta(p - \epsilon - \frac{2\pi\hbar}{L}k) \quad (3.42)$$

para funciones (3.39) [dicho de otra forma, las funciones de onda sólo tienen soporte en los valores $p_k^\epsilon = \epsilon + \frac{2\pi\hbar}{L}k$], o bien

$$\phi'^{(\epsilon)}(x + L) = e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon k L} \phi'^{(\epsilon)}(x) \quad (3.43)$$

para funciones (3.40), condición esta última que indica simplemente que las funciones $\phi'^{(\epsilon)}$ son *cuasiperiódicas* en la coordenada x . Para este último caso puede darse una base de funciones:

$$\psi_n^{(\epsilon)}(\zeta, t, x, p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n) = \zeta e^{-\frac{i}{2m\hbar}(\epsilon + \frac{2\pi\hbar}{L}n)^2 t} e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon + \frac{2\pi\hbar}{L}n)x}, \quad (3.44)$$

que generan el espacio de Hilbert constreñido $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G}_{(m)})$. La acción de los operadores físicos: energía $\hat{E} = i\hbar\tilde{X}_t^R$, momento $\hat{P} = -i\hbar\tilde{X}_x^R$ (y posición $\hat{X} = -i\hbar\tilde{X}_p^R$) sobre dichas funciones es:

$$\begin{aligned} \hat{E}\psi_n^{(\epsilon)} &= \frac{1}{2m}(\epsilon + \frac{2\pi\hbar}{L}n)^2 \psi_n^{(\epsilon)} \\ \hat{P}\psi_n^{(\epsilon)} &= (\epsilon + \frac{2\pi\hbar}{L}n)\psi_n^{(\epsilon)} \\ (\hat{X}\psi_n^{(\epsilon)} &= x\psi_n^{(\epsilon)}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde hemos puesto entre paréntesis la acción del operador de posición \hat{X} por no preservar éste el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G}_{(m)})$, es decir, por no respetar la condición (3.41) y, por consiguiente, tratarse de un operador malo [o de otra forma, mientras que $\psi_n^{(\epsilon)}$ es cuasiperiódica, $x\psi_n^{(\epsilon)}$ no lo es]. Este hecho se interpreta como una anomalía topológica cuando se comprueba que la evolución en el tiempo del valor medio de \hat{X} en un estado arbitrario de $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G}_{(m)})$, de acuerdo con el Teorema de Ehrenfest, introduce términos extra como en (3.33). Uno puede comprobar que, aunque $\hat{X} = i\hbar\tilde{X}_p^R$ no sea bueno, un “boost” finito $\hat{\eta}^k \equiv e^{i\frac{2\pi}{L}k\hat{X}}$ con parámetro $p_k = \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in Z$ si resulta ser bueno. Boosts finitos con parámetro $p = \vartheta \in [0, \frac{2\pi\hbar}{L})$ resultan ser operadores regulares que pasan de $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G}_{(m)})$ a $\mathcal{H}^{(\epsilon+\vartheta)}(\tilde{G}_{(m)})$ y, por consiguiente, actúan en la unión $\bigcup_\epsilon \mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G}_{(m)})$; el operador \hat{X} actuaría como generador infinitesimal de los cambios de representación [el operador momento \hat{P} , aunque es bueno (y hermítico) en cada uno de estos espacios de Hilbert $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G}_{(m)})$, no es hermítico en la unión de todos ellos]. ¿Cuál es entonces el observable que mide la posición de la partícula en la circunferencia?; el candidato para este puesto es precisamente el boost finito $\hat{\eta}$, el cual actúa como $\hat{\eta}\psi^{(\epsilon)} = e^{i\frac{2\pi}{L}x}\psi^{(\epsilon)}$ o, mejor dicho, su parte real $\cos(\frac{2\pi}{L}k\hat{X})$ o imaginaria $\sin(\frac{2\pi}{L}k\hat{X})$, ya que $\hat{\eta}$ es unitario. Nótese que cualquier operador $O(\hat{X})$ periódico en \hat{X} será también un operador bueno ya que se podrá expresar como combinación lineal de potencias k -ésimas de $\hat{\eta}$ (boosts finitos por una cantidad $p_k = \frac{2\pi\hbar}{L}k$).

En este punto, es interesante mencionar que el conjunto de operadores \hat{P} , $\hat{\eta}$ y $\hat{\eta}^\dagger$ cierra un álgebra de Lie que es isomorfa al álgebra del oscilador armónico no extendido. Los operadores $\hat{\eta}$ y $\hat{\eta}^\dagger$ actúan como operadores escalera sobre las autofunciones de \hat{P} (cuyo espectro es equiespaciado pero, al contrario de lo que ocurre en el oscilador armónico, no está acotado inferiormente). Este tipo de construcción ha sido empleada en [36] para estudiar Mecánica Cuántica sobre la circunferencia, con resultados similares a los aquí expuestos.

Una forma interesante de interpretar físicamente el fenómeno de las cuantizaciones no equivalentes parametrizadas por ϵ es, como un efecto de tipo Aharonov-Bohm [37] mediante la aparición de *potenciales de gauge inducidos* [36, 38, 39]. Las diferentes cuantizaciones se pueden realizar en la práctica

produciendo (externamente al sistema, mediante un solenoide “infinito”) un flujo magnético Φ a través de la circunferencia, de manera tal que la partícula no sienta el campo magnético sino sólo el potencial vector. Bajo estas circunstancias, el efecto del potencial vector es el mismo que el de un boost, dando lugar a cuantizaciones no equivalentes dependiendo del valor del flujo a través de la circunferencia, de tal modo que $\epsilon = e\Phi/c$. Una aplicación física interesante es la del anillo superconductor atravesado por un flujo magnético, en el que, debido al efecto Meissner, el flujo magnético es repelido fuera del material superconductor de manera que el campo magnético es efectivamente cero en el interior del material superconductor y sólo el potencial vector es relevante (efecto Aharonov-Bohm). Si el valor del flujo es⁶ $k\Phi_0$, $k \in \mathbb{Z}$, donde $\Phi_0 \equiv hc/e^*$ es el cuanto unidad de flujo magnético, no hay corriente neta en el anillo superconductor, pero para cualquier otro valor del flujo existe una corriente neta que tiene la forma dada en la Figura 1.

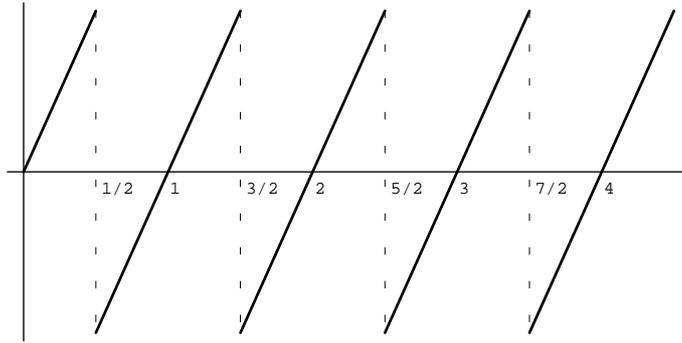


Figura 3.1: Corriente neta en el anillo superconductor frente a Φ/Φ_0 .

Nótese la discontinuidad que aparece para los valores semienteros de Φ/Φ_0 , donde la corriente no tiene un signo definido como consecuencia, precisamente, de la doble degeneración de todos los estados de energía (incluido el vacío), de manera que estados con velocidades en sentidos contrarios tienen la misma energía y por tanto no hay costo energético en pasar de uno a otro [este fenómeno nos recuerda el *efecto estroboscópico* y, de hecho, se podría dar una explicación “semiclásica” de la inversión de corriente en términos del mismo].

Nótese también que para $\epsilon = 0$ los estados n y $-n$ en (3.45) tienen la misma energía, lo que significa que todos los autoestados están doblemente degenerados excepto el vacío, que no lo está. Para cualquier otro valor de ϵ , los estados n y $-(n + 2\epsilon \frac{L}{2\pi\hbar})$ tienen la misma energía, pero $-(n + 2\epsilon \frac{L}{2\pi\hbar})$ es un autoestado sólo si $2\epsilon \frac{L}{2\pi\hbar} \in \mathbb{Z}$, es decir, si $\epsilon \frac{L}{2\pi\hbar}$ es un entero o semientero. Esto significa que, en general, no hay degeneración en el espectro para ningún valor de ϵ excepto para los valores enteros, en cuyo caso todos los autoestados excepto el vacío son degenerados, y los semienteros, para los que todos los estados incluyendo el vacío son degenerados. El fenómeno de vacío degenerado en este modelo tan simple asemeja el fenómeno de θ -vacío en Teorías de Yang-Mills, hecho que ha sido utilizado en [40] para ensayar técnicas Monte Carlo, de integrales de camino y de instantones en este “rotor” en el plano. Veamos que dicha semejanza tiene una raíz más profunda. Para ello basta con darse cuenta que el fenómeno de cuantizaciones no equivalentes en la partícula libre sobre la circunferencia se puede reproducir, de forma equivalente, mediante la introducción de un coborde extra en la ley de grupo (3.34) con función generatriz $\delta(g) = \epsilon x$, que modifica el cociclo $\xi(g', g)$ en un término adicional $\epsilon p't$ y la 1-forma de cuantización (3.37) en $-\epsilon \frac{p}{m} dt$. Ésta modificación no alteraría ni la teoría cuántica no constreñida (partícula libre sobre la recta real) ni su límite clásico. La situación es diferente cuando la partícula está en la circunferencia debido a que, ahora, la función generatriz ϵx (o mejor $e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon x}$) ya no es univaluada (a no ser que $\epsilon = \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in \mathbb{Z}$). Como consecuencia, dos cociclos que difieran en un coborde generado por ϵx ya no dan lugar a teorías equivalentes sobre la circunferencia si $\epsilon \neq \frac{2\pi\hbar}{L}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Este proceso de “creación de cohomología no trivial” nos recuerda mucho la aparición de cohomología bajo

⁶En este caso la carga eléctrica efectiva es $e^* = 2e$ debido a que los electrones forman parejas de Cooper.

la contracción de grupos, como ocurre, por ejemplo, en el grupo de Poincaré, que no tiene cohomología pero en el que una clase de cobordes (generados por una función lineal en el tiempo) se convierten en verdaderos coclicos en el límite $c \rightarrow \infty$ (límite que lleva de Poincaré pseudoextendido a Galileo extendido); la función generatriz del coborde no está definida en este límite [41]. No obstante, el origen de este fenómeno parece estar relacionado ahora con la “creación de homotopía y cohomología de Rham” a partir de la imposición de ligaduras.

Ahora se ve más clara la conexión entre el fenómeno de ϑ -vacíos en teorías de Yang-Mills con el de cuantizaciones no equivalentes, parametrizadas por $\epsilon(\sim \vartheta)$, en la circunferencia. En efecto, el carácter no trivial del tercer grupo de homotopía $\Pi_3(G)$ del grupo de gauge G definido sobre la esfera en 4D S^4 (compactificación por un punto de \mathfrak{R}^4 debido a condiciones de contorno), puede manifestarse de manera equivalente a través de un término añadido al Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2g^2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \overbrace{\frac{\hbar\vartheta}{16\pi^2} \text{tr} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}}^{\text{densidad de Pontryagin } P} \quad (3.46)$$

que no altera las ecuaciones de movimiento clásicas, debido a que es una divergencia total (de una cantidad invariante gauge) $P = \partial_\mu C^\mu$ (C^μ se denomina “segunda clase característica de Chern-Simons”), pero que si altera la teoría cuántica.

Capítulo 4

CONEXIÓN CON EL FORMALISMO LAGRANGIANO

La forma estándar de definir un sistema físico suele ser mediante un Lagrangiano L , más que por sus simetrías. Aunque ya se han establecido conexiones entre algunos conceptos de la CSG y definiciones usuales de los formalismos tradicionales, no estaría de más profundizar un poco más y adivinar puentes de unión de manera que haya un entendimiento mutuo entre ambos programas. En esta sección vamos a establecer una conexión entre el formalismo Lagrangiano y el de CSG vía el formalismo simpléctico; para esta tarea nos restringiremos a teorías de campos lineales en toda su generalidad. La cuantización de campos lineales no es siempre una tarea trivial. Por ejemplo, la cuantización de campos en espacios curvos no está todavía completamente entendida [aquí tienen lugar efectos físicos interesantes como la “radiación de Hawking” de un agujero negro]. En cualquier caso, los campos lineales siempre han tenido un interés intrínseco.

4.1 Grupo de cuantización en el espacio de configuración

Para una teoría lineal existe una estructura natural de grupo abeliano en la variedad de soluciones clásica; la suma de dos soluciones es solución¹. Veamos la manera de extender este grupo para definir el correspondiente grupo de cuantización.

Consideremos una teoría con campos φ^a , $a = 1, \dots, N$, y acción

$$S = \int_M dv L(\varphi^a, \partial_\mu \varphi^a). \quad (4.1)$$

Nos restringiremos a variedades espacio-temporales M , con elemento de volumen $dv = d^{D+1}x$, globalmente hiperbólicas, es decir, homeomorfas a $\Sigma \times \mathfrak{R}$ donde \mathfrak{R} representa las direcciones tipo tiempo y Σ es cualquier hipersuperficie (D -dimensional) tipo espacio (hipersuperficie de Cauchy)². En lo que sigue, no distinguiremos entre dos Lagrangianos que difieran en una divergencia total.

Denotaremos por Γ al conjunto de todos los campos φ , con independencia de si cumplen o no las ecuaciones de Euler-Lagrange. De entre ellos distinguiremos aquellos campos que cumplen tales ecuaciones, a los cuales denominaremos *trayectorias clásicas*, denotando por \mathcal{S} al conjunto de todas estas trayectorias.

Como se ha comentado anteriormente, si la teoría (S, Γ) es lineal, el espacio \mathcal{S} es un espacio vectorial; es decir, si φ y ϕ son soluciones, también lo es $\lambda\varphi + \beta\phi$ para cualquier $\lambda, \beta \in \mathfrak{R}$. Por lo tanto \mathcal{S} puede verse como un grupo (abeliano) de simetrías de la teoría con ley de composición:

¹para teorías no lineales, la operación suma podría sustituirse por fórmulas de superposición no lineales como las transformaciones de Backlund-Calogero que definen el grupo de Calogero [42]; aunque esta cuestión está por estudiar

²esta restricción será relajada en el capítulo 5 para tratar campos sobre espacio-tiempos no globalmente hiperbólicos, como es el de antide-Sitter, ahora desde la perspectiva de una “segunda cuantización sobre un grupo”

$$\varphi'' = \varphi' + \varphi \quad (4.2)$$

Denotemos simplemente por $G_{\mathcal{S}}$ a dicho grupo y veamos cómo se puede extender de forma apropiada introduciendo una estructura simpléctica en \mathcal{S} .

Teorema 1: Si (S, Γ) es una teoría de campos lineal con ecuaciones de Euler-Lagrange $([E - L]\varphi)_a = 0$, entonces

$$a) \quad L(\varphi + \phi) = L(\varphi) + L(\phi) + ([E - L]\phi)_a \varphi^a + \partial_\mu J^\mu(\varphi, \phi), \quad \forall \varphi, \phi \in \Gamma$$

b) Existe un Lagrangiano que viene dado por:

$$\hat{L}(\varphi) = \frac{1}{2} ([E - L]\varphi)_a \varphi^a, \quad (4.3)$$

es decir, que es nulo sobre trayectorias $\hat{L}(\varphi) = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

En efecto, el punto a) puede verse más claramente mirando a $L(\varphi + \phi)$ como una variación del Lagrangiano similar a la que da las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange.

Por otra parte, podemos encontrar un Lagrangiano que satisfaga b) sin más que poner $\varphi = \phi = \frac{1}{2}\kappa$ en a), o sea:

$$L(\kappa) = \frac{1}{2} ([E - L]\kappa)_a \kappa^a + \frac{1}{2} \partial_\mu J^\mu(\kappa, \kappa), \quad (4.4)$$

de forma que, el nuevo Lagrangiano

$$\hat{L}(\kappa) = L(\kappa) - \frac{1}{2} \partial_\mu J^\mu(\kappa, \kappa) \quad (4.5)$$

cumple b).

Corolario 1: ya que la corriente $J^\mu(\varphi, \phi)$ es bilineal, también se puede escoger que sea:

1) Con divergencia nula sobre trayectorias

y

2) Antisimétrica.

En efecto: 1) es una consecuencia del apartado a) del Teorema cuando se escoge desde el principio un Lagrangiano nulo sobre soluciones. Para demostrar la propiedad 2) basta con darse cuenta de que, si $J^\mu(\kappa, \kappa)$ no fuese cero, entonces $\tilde{J}^\mu(\varphi, \phi) \equiv J^\mu(\varphi, \phi) - \frac{1}{2}J^\mu(\varphi, \varphi) - \frac{1}{2}J^\mu(\phi, \phi)$ (que es también una corriente admisible) sí que sería antisimétrica. Al ser bilineales tanto J^μ como \tilde{J}^μ , se debe tener que $J^\mu(\kappa, \kappa) = 0 \quad \forall \kappa$ y $\tilde{J}^\mu = J^\mu$, lo cual niega la hipótesis de partida y prueba 2).

Definición 1: A la corriente J^μ verificando 1) y 2) la denominaremos *corriente canónica* de (S, Γ) .

Existe de hecho un camino más corto, pero equivalente, de obtener la corriente canónica J^μ a partir del Teorema anterior. En efecto, si intercambiamos φ y ϕ en a) y antisimetrizamos, se tiene que:

$$\frac{1}{2} \partial_\mu (J^\mu(\varphi, \phi) - J^\mu(\phi, \varphi)) = \frac{1}{2} ([E - L]\varphi)_a \phi^a - \frac{1}{2} ([E - L]\phi)_a \varphi^a, \quad (4.6)$$

donde la corriente $\frac{1}{2} (J^\mu(\varphi, \phi) - J^\mu(\phi, \varphi))$ es precisamente la corriente canónica de (S, Γ) .

Corolario 2: si $L' = L + \partial_\mu \Lambda^\mu$, entonces $J'^\mu = J^\mu$; es decir, la corriente canónica no se ve afectada por añadir una divergencia total al lagrangiano.

Definición 2: para todo $\varphi, \phi \in \mathcal{S}$ definimos el *producto canónico* $\Omega(\varphi, \phi)$ como:

$$\Omega(\varphi, \phi) = \int_\Sigma d\sigma_\mu J^\mu(\varphi, \phi), \quad (4.7)$$

donde Σ es cualquier hipersuperficie de Cauchy en M . Por consiguiente, el producto canónico es bilineal, antisimétrico e independiente de la hipersuperficie Σ elegida, por ser J^μ de divergencia nula.

El par (\mathcal{S}, Ω) tiene estructura de variedad (espacio vectorial) simpléctica, estructura clásica fundamental que subyace a la construcción de la teoría cuántica de un campo lineal para algunos formalismos de cuantización [43]. Desde este punto de vista, la condición $\partial_\mu J^\mu = 0$ asegura que la identificación del espacio de fases \mathcal{F} (“espacio de condiciones iniciales”) con el espacio de soluciones \mathcal{S} , como variedades simplécticas, no dependa del “instante inicial” elegido para tal identificación.

El producto canónico de dos soluciones φ y ϕ no es más que la carga Noether asociada con la simetría generada por φ en el punto $\phi \in \mathcal{S}$, o al revés (con signo menos). Éste también da idea de hasta qué punto dos trayectorias clásicas φ, ϕ son conjugadas (coordenada-momento) una de la otra.

Nota: nótese que la corriente potencial de la teoría es $j^\mu = J^\mu(\varphi, \delta\varphi)$ y la forma simpléctica está dada por [44, 21]:

$$\omega = - \int_{\Sigma} d\sigma_\mu \delta j^\mu \quad (4.8)$$

Teorema 2: para el producto canónico Ω definido anteriormente, la siguiente ley de composición:

$$\varphi''(x) = \varphi'(x) + \varphi(x) \quad (4.9)$$

$$\zeta'' = \zeta' \zeta \exp i\Omega(\varphi', \varphi), \quad (4.10)$$

(donde $\varphi, \varphi' \dots$ son trayectorias y $\zeta, \zeta' \dots \in U(1)$) define una extensión central $\tilde{G}_{\mathcal{S}}$ de $G_{\mathcal{S}}$ por $U(1)$.

Veamos cómo agrandar $\tilde{G}_{\mathcal{S}}$ introduciendo otras simetrías de la teoría.

4.1.1 Simetrías espacio-temporales e internas

Además de las simetrías abelianas correspondientes a $G_{\mathcal{S}}$, existen en general otras no abelianas tales como las espacio-temporales e internas [por ejemplo: invariancia Poincaré, conservación de algún tipo de carga (eléctrica, leptónica, bariónica,...), paridad, etc] que actúan sobre $G_{\mathcal{S}}$ de forma semidirecta. La condición para que $U = \{u, v, \dots\}$ sean simetrías de este último tipo es que si $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces $u(\varphi) \in \mathcal{S}$

Para cualquier campo de vectores X que genere la acción de U en el espacio Γ , se tiene que

$$\mathcal{L}_X(Ldv) = d\Lambda_X \quad (4.11)$$

donde Λ_X es una D -forma sobre el espacio-tiempo.

La ecuación (4.11) junto con el Corolario 2 dice que el producto canónico es invariante bajo la acción de, al menos, la componente conexa U_0 de U en la identidad (*simetrías canónicas*), es decir:

$$\Omega(u(\varphi), u(\phi)) = \Omega(\varphi, \phi), \quad \forall \varphi, \phi \in \mathcal{S}, \quad \forall u \in U_0. \quad (4.12)$$

Desde el momento en que introducimos simetrías no conexas con la identidad, tales como la paridad o la inversión temporal (*simetrías anticanónicas*), esta condición debe ser relajada para dar cabida a situaciones en las que $\Omega(u(\varphi), u(\phi)) = -\Omega(\varphi, \phi)$. En general, la acción de U sobre Ω define una representación ϵ de U sobre $Z_2 = \{+, -\}$. Dado el grupo $G_{\mathcal{S}}$ y la acción semidirecta de U , es fácil ver que la siguiente ley de composición define un grupo:

$$\begin{aligned} u'' &= u' * u, \quad u, u', u'' \in U \\ \varphi''(x) &= \varphi'(x) + (u'(\varphi))(x), \quad \varphi, \varphi', \varphi'' \in \mathcal{S} \\ \zeta'' &= \zeta' \zeta^{\epsilon(u')} \exp i\Omega(\varphi', (u'(\varphi))), \quad \zeta, \zeta', \zeta'' \in U(1), \end{aligned} \quad (4.13)$$

el cual denotaremos por $\tilde{G}_{(\mathcal{S}, U)}$. Nótese que, cuando se introducen simetrías anticanónicas en U , el grupo $\tilde{G}_{(\mathcal{S}, U)}$ ya no es una extensión central por $U(1)$.

Por simplicidad, en lo que sigue sólo trataremos con simetrías para las que $\epsilon(u) = 1$, es decir, canónicas. Con esta simplificación, el grupo (4.13) es nuestro grupo de cuantización en el espacio de configuración, el cual tomaremos como punto de partida para construir la Mecánica Cuántica del correspondiente sistema clásico (S, Γ) . El problema para nosotros se reduce pues a encontrar corrientes bilineales y antisimétricas con divergencia nula sobre soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

4.2 Ejemplos relevantes de teorías de campos lineales

Construyamos el grupo de cuantización en el espacio de configuración para distintas teorías lineales relevantes.

4.2.1 Campos lineales invariantes conforme

El grupo conforme esta hecho de la composición de las siguientes actuaciones básicas en la variedad espacio-temporal de Minkowski:

- a) traslaciones espacio-temporales: $(ux)^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$
- b) transformaciones de Lorentz: $(ux)^\alpha = \Lambda_\mu^\alpha x^\mu$
- c) dilataciones: $(ux)^\alpha = e^{-l\lambda} x^\alpha$
- d) transformaciones conformes específicas: $(ux)^\alpha = \frac{x^\alpha + c^\alpha x^2}{1 + 2cx + c^2 x^2}$

Campo escalar sin masa

La ley de grupo (en cuatro dimensiones, en donde la dimensión conforme es $l = -1$) es:

$$\begin{aligned} u'' &= u' * u && \text{(Sub)grupo conforme} \\ \phi''(x) &= \phi'(x) + \sigma^{-1}(u'^{-1}, x)\phi(u'^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \Omega_{MS}(g', g) \\ &= \zeta \zeta' \exp \frac{i}{2} \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu}(x) J_{MS}^{\mu} \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde

$$J_{MS}^{\mu} = \phi'(x) \partial^{\mu} [\sigma^{-1}(u'^{-1}, x)\phi(u'^{-1}(x))] - \partial^{\mu} \phi'(x) [\sigma^{-1}(u'^{-1}, x)\phi(u'^{-1}(x))] \quad (4.16)$$

es la corriente canónica y la función σ viene dada por:

$$\sigma(u, x) = \begin{cases} 1 + 2cx + c^2 x^2 & \text{para transformaciones conformes específicas,} \\ e^{-\lambda} & \text{para dilataciones,} \\ 1 & \text{para el subgrupo de Poincaré.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Para una transformación conforme general, la función σ puede obtenerse haciendo uso de la propiedad

$$\sigma(u, x)\sigma(u', ux) = \sigma(u'u, x), \quad (4.18)$$

propiedad también necesaria para que (4.14) sea grupo.

No es difícil comprobar que si $\phi(x)$ y $\phi'(x)$ son soluciones de la ecuación de movimiento

$$\partial^{\mu} \partial_{\mu} \phi(x) = 0 \quad (4.19)$$

también lo es $\phi''(x)$. También es directo probar, usando (4.18- 4.19), que la corriente J^{μ} tiene divergencia nula y da lugar a un producto canónico que satisface las propiedades de cociclo (3.2).

El campo electromagnético.

La ley de grupo sin extender viene dada por:

$$\begin{aligned} u'' &= u' * u && \text{(Sub)grupo conforme} \\ A''_\mu(x) &= A'_\mu(x) + \frac{\partial u'^{-1\alpha}}{\partial x^\mu} A_\alpha(u'^{-1}x) \\ &\equiv A'_\mu(x) + (S(u'^{-1})A)_\mu(x) \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde S es la representación natural del grupo conforme sobre el potencial vector del campo electromagnético (que resulta tener peso conforme l nulo). Esta actuación induce la siguiente en el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F''_{\mu\nu}(x) &= F'_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial u'^{-1\alpha}}{\partial x^\mu} \frac{\partial u'^{-1\beta}}{\partial x^\nu} F_{\alpha\beta}(u'^{-1}x) \\ &\equiv F'_{\mu\nu}(x) + (S(u'^{-1})F)_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Es fácil ver que esta actuación deja invariante la acción de Maxwell

$$S_M = \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.22)$$

y, por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell (clásicas)³.

La extensión central viene dada por:

$$\begin{aligned} \zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \Omega_M(g', g) \\ &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) J_M^\mu(g', g)(x) \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde puede demostrarse que la corriente

$$J_M^\mu(g', g)(x) = F'^{\mu\nu}(x)(S(u'^{-1})A)_\nu(x) - A'_\nu(x)(S(u'^{-1})F)^{\mu\nu}(x), \quad (4.24)$$

tiene divergencia nula siempre que $\partial_\mu F'^{\mu\nu} = 0$. Si nos restringimos a traslaciones espacio-temporales, el grupo extendido queda como:

$$\begin{aligned} a'' &= a + a' \\ A''_\mu(x) &= A'_\mu(x) + A_\mu(x - a') \\ \zeta'' &= \zeta \zeta' \exp \frac{i}{2} \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) J_M^\mu(g', g)(x) \end{aligned} \quad (4.25)$$

con corriente

$$J_M^\mu(g', g)(x) = F'^{\mu\nu}(x)A_\nu(x - a') - A'_\nu(x)F^{\mu\nu}(x - a') \quad (4.26)$$

Para este último caso, la corriente verifica las condiciones de cociclo y tiene divergencia nula tanto si se cumple $\partial_\mu F'^{\mu\nu} = 0$ como $\partial_\mu F'^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$, es decir, es válida tanto para el campo electromagnético como para el campo de Proca⁴. Este no es el caso cuando se considera todo el grupo conforme.

³en el capítulo 9 veremos que no así la correspondiente teoría cuántica, para la cual perdura sólo el subgrupo de Weyl (Poincaré+ dilataciones) debido a una *rotura dinámica de la simetría*

⁴en el último capítulo veremos cómo introducir ligaduras para estos sistemas mediante una revisión de los conceptos de invariancia gauge en teorías de Yang-Mills que lleva a una cuantización unificada del campo con y sin masa

4.2.2 Campos de materia en un espacio-tiempo curvo simétrico

En esta sección presentamos el grupo de cuantización para campos de materia, el campo de Dirac y el de Klein-Gordon, que evolucionan en un espacio-tiempo curvo simétrico arbitrario con métrica $g_{\mu\nu}$.

Supongamos que el conjunto de transformaciones v es un grupo de isometrías de la métrica (véase por ejemplo [6, 45]). Entonces se tiene que

$$g_{\mu\nu}(vx) \frac{\partial(vx)^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(vx)^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\beta}(x) \quad (4.27)$$

y, de igual manera,

$$g^{\mu\nu}(vx) = g^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial(vx)^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(vx)^\nu}{\partial x^\beta} \quad (4.28)$$

El campo escalar

Las ecuaciones de movimiento de un campo escalar que evoluciona en un espacio curvo con esta métrica son (véase por ejemplo [46, 47]):

$$\left[\square(x) + \alpha R(x) + m^2 \right] \phi(x) = 0 \quad (4.29)$$

donde

$$\square(x)\phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \partial_\mu \left(\sqrt{g(x)} g^{\mu\nu}(x) \partial_\nu \right) \phi(x) \quad (4.30)$$

representa el D'Álembertiano en este espacio (operador de Beltrami).

La ley de grupo que describe la dinámica cuántica de este sistema viene dada por:

$$\begin{aligned} v'' &= v' * v \\ \phi''(x) &= \phi'(x) + \phi(v'^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\zeta'' = \zeta \zeta' \exp \frac{i}{2} \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) J_{SCS}^\mu \quad (4.32)$$

donde

$$J_{SCS}^\mu = \sqrt{g(x)} g^{\mu\nu}(x) \left[\phi'(x) \partial_\nu \left[\phi(v'^{-1}(x)) \right] - \partial_\nu \phi'(x) \phi(v'^{-1}(x)) \right] \quad (4.33)$$

es la corriente canónica [nótese que (4.27) implica que $\square(x) = \square(vx)$ y $R(vx) = R(x)$ (véase también [45])].

El campo de Dirac

Sea ahora ψ el campo de Dirac con ecuaciones de movimiento (véase por ejemplo [6, 46]):

$$\left[i\hat{\gamma}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} i\Gamma^a{}_\mu{}^b \Sigma_{ab} \right) - m \right] \psi = 0 \quad (4.34)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b \quad (4.35)$$

$$\hat{\gamma}^\mu = \gamma^a e_a^\mu \quad , \quad \Sigma_{ab} = \frac{1}{4} i [\gamma_a, \gamma_b] \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{ab}^c = e^c{}_\nu e_a^\mu \left(\partial_\mu e_b^\nu + e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \right) , \quad (4.37)$$

siendo e_b^ν la tétrada (o “vierbein”), γ^a las matrices de Dirac, Γ_{ab}^c los coeficientes de la conexión de Levi-Civita en la base $\hat{e}_a \equiv e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, y Σ_{ab} la representación espinorial de los generadores de las transformaciones de Lorentz.

Para una cierta isometría v , existe una transformación de Lorentz local $\Lambda(v, x)$ tal que:

$$e^a{}_\mu(vx) \frac{\partial(vx)^\mu}{\partial x^\lambda} = \Lambda(v, x)^a{}_c e^c{}_\lambda(x) . \quad (4.38)$$

En virtud de ésto, se puede demostrar que el siguiente conjunto de transformaciones define un (super)grupo:

$$\begin{aligned} v'' &= v' * v \\ \psi''(x) &= \psi'(x) + \rho(\Lambda(v'^{-1}, x)) \psi(v'^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}''(x) &= \bar{\psi}'(x) + \bar{\psi}(v'^{-1}(x)) \rho(\Lambda(v'^{-1}, x))^{-1} \\ \zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \Omega_{DCS}(g', g) \\ &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) J_{DCS}^\mu(g', g)(x) \end{aligned} \quad (4.40)$$

donde

$$\begin{aligned} J_{DCS}^\mu(g', g)(x) &= i \left[\bar{\psi}'(x) \hat{\gamma}^\mu(x) \rho(\Lambda(v'^{-1}, x)) \psi(v'^{-1}x) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi}(v'^{-1}x) \rho(\Lambda(v'^{-1}, x))^{-1} \hat{\gamma}^\mu(x) \psi'(x) \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

y ρ es la representación espinorial usual del grupo de Poincaré que verifica:

$$\rho(\Lambda)^{-1} \gamma^a \rho(\Lambda) = \Lambda^a{}_b \gamma^b \quad (4.42)$$

4.2.3 Campos de materia acoplados a campos electromagnéticos simétricos

En esta subsección presentamos el grupo de cuantización en el espacio de configuración para campos de materia, campos de Klein-Gordon y Dirac, acoplados a un campo electromagnético de fondo (que no evoluciona) simétrico arbitrario.

Consideraremos que el espacio-tiempo es plano con métrica Minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$. El conjunto de transformaciones $\{v\}$ hará referencia al subgrupo de Poincaré que deja invariante el potencial vector: $\frac{\partial(vx)^\alpha}{\partial x^\mu} A_\alpha(vx) = A_\mu(x)$.

El campo de Klein-Gordon

Supongamos que el campo ϕ obedece las ecuaciones de movimiento

$$\left(D_\mu D^\mu + m^2 \right) \phi = 0 \quad (4.43)$$

donde $D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu$ denota la derivada covariante. Entonces, la siguiente ley de composición define un grupo:

$$v'' = v' * v \quad (4.44)$$

$$\phi''(x) = \phi'(x) + \phi(v'^{-1}(x)) \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \Omega_{SAF}(g', g) \\ &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \int_{\Sigma} d\sigma_\mu(x) J_{SAF}^\mu(g', g)(x) \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde

$$\begin{aligned} J_{SAF}^\mu(g', g)(x) &= D^\mu \phi(v'^{-1}) \phi'^*(x) - \phi(v'^{-1}) (D^\mu \phi)^*(x) \\ &\quad + (D^\mu \phi(v'^{-1}))^* \phi'(x) - \phi(v'^{-1})^* (D^\mu \phi)'(x) \end{aligned} \quad (4.47)$$

denota la corriente canónica para este caso.

El campo de Dirac

Sea ahora ψ un campo de Dirac que verifica:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0. \quad (4.48)$$

El (super)grupo de cuantización en el espacio de configuración viene dado ahora por:

$$v'' = v' * v \quad (4.49)$$

$$\psi''(x) = \psi'(x) + \rho(\Lambda(v'^{-1})) \psi(v'^{-1}(x))$$

$$\bar{\psi}''(x) = \bar{\psi}'(x) + \bar{\psi}(v'^{-1}(x)) \rho(\Lambda(v'^{-1}))^{-1}$$

$$\begin{aligned} \zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \Omega_{DAF}(g', g) \\ &= \zeta' \zeta \exp \frac{i}{2} \int_{\Sigma} d\sigma_\mu(x) J_{DAF}^\mu(g', g)(x) \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde

$$\begin{aligned} J_{DAF}^\mu(g', g)(x) &= i \left[\bar{\psi}'(x) \gamma^\mu \rho(\Lambda(v'^{-1})) \psi(v'^{-1}x) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\psi}(v'^{-1}x) \rho(\Lambda(v'^{-1}))^{-1} \gamma^\mu \psi'(x) \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.3 Cuantización en el espacio de configuración

El uso del cálculo diferencial no resulta ser el más idóneo para trabajar con el grupo de cuantización en el espacio de configuración $\tilde{G}_{(S,U)}$ (menos aún cuando se introducen simetrías discretas). Es por esto por lo que aplicaremos técnicas y conceptos de Cuantización Algebraica más apropiados para esta “imagen” del formalismo.

Comenzemos por identificar el subgrupo característico G_c . Para ello debemos construir el conmutador de dos elementos genéricos $\tilde{g} = (u, \varphi, \zeta) \in \tilde{G}_{(S,U)}$ y $g' = (u', \varphi', 1) \in G_c$. G_c deberá ser el subgrupo maximal tal que $[\tilde{g}, g'] = (1_U, 0, \zeta)$ implique que $\zeta = 1$ para todo $\tilde{g} \in \tilde{G}_{(S,U)}$. Explícitamente:

$$\begin{aligned}
g'\tilde{g} &= (u'u, u^{-1}(\varphi') + \varphi, \zeta'\zeta \exp \frac{i}{2}\Omega(u^{-1}(\varphi'), \varphi)) \\
g^{-1} &= (u^{-1}, -u(\varphi), \zeta^{-1}) \\
\tilde{g}g' &= (uu', u'^{-1}(\varphi) + \varphi', \zeta\zeta' \exp \frac{i}{2}\Omega(u'^{-1}(\varphi), \varphi')) \\
g'\tilde{g}(\tilde{g}g')^{-1} &= \left(u'u(uu')^{-1}, uu'[u^{-1}(\varphi') + \varphi] - uu'[u'^{-1}(\varphi) + \varphi'], \right. \\
&\quad \left. \exp \frac{i}{2} \left[\Omega(u^{-1}(\varphi'), \varphi) - \Omega(u'^{-1}(\varphi), \varphi') \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \Omega(uu'[u^{-1}(\varphi') + \varphi], uu'[u'^{-1}(\varphi) + \varphi']) \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Por consiguiente, $g' = (u', \varphi', 1)$ tiene que cumplir que

$$\Omega(\varphi', u(\varphi) + u'^{-1}(\varphi)) = 0 \quad \forall \tilde{g} = (u, \varphi, \zeta) \in \tilde{G}_{(S,U)}, \tag{4.53}$$

lo que implica que

$$G_c = U \oplus N \tag{4.54}$$

donde $N =$ subgrupo de gauge $= \{(1_U, \varphi', 1)/\Omega(\varphi', \varphi) = 0 \quad \forall \tilde{g} = (u, \varphi, \zeta) \in \tilde{G}_{(S,U)}\}$ [$U \oplus N$ representa el subgrupo generado por $U \cup N$ verificando también que $U \cap N = 1_{\tilde{G}}$].

Recordemos que el subgrupo de polarización G_p es el subgrupo maximal y horizontal tal que $G_c \subset G_p$. Así, cualquier G_p está generado por

$$G_p = G_c \cup G_p^\varphi, \tag{4.55}$$

donde G_p^φ es el subgrupo maximal y horizontal tal que $\Omega(v(\varphi), \varphi') = 0, \quad \forall g = (1_U, \varphi, 1), g' = (1_U, \varphi', 1) \in G_p^\varphi, \quad \forall v \in U$

Definición: definimos un *subgrupo lagrangiano* como aquel subgrupo $G_L = \{(1_U, \varphi, 1)\}$ tal que $\Omega(\varphi, \varphi') = 0$, para cualquier $(1_U, \varphi, 1), (1_U, \varphi', 1) \in G_L$. Si $U(G_L) \subset G_L$ le añadiremos a G_L el calificativo de (*subgrupo lagrangiano*) *invariante*. Con esto llegamos a la conclusión de que:

Proposición: cualquier subgrupo de polarización G_p esta generado por $U \cup N \cup G_L$, donde G_L es un subgrupo lagrangiano invariante.

4.3.1 Cuantización holomorfa

Consideremos ahora el caso en que existen dos subgrupos $G_L, \bar{G}_L \subset \tilde{G}_{(S,U)}$ que verifican que

- \bar{G}_L es subgrupo lagrangiano (no necesariamente invariante),
- G_L es subgrupo lagrangiano invariante,
- $\tilde{G}_{(S,U)} = U \oplus G_L \oplus \bar{G}_L \oplus U(1)$,

de lo que se deduce que cualquier trayectoria φ admite una única descomposición como

$$\varphi = a + \bar{a}, \quad \text{donde} \quad (1_U, a, 1) \in G_L, (1_U, \bar{a}, 1) \in \bar{G}_L \tag{4.56}$$

Nota: Para encontrar G_L y \bar{G}_L con las propiedades anteriores es necesario, en general, recurrir a la complexificación (“transformada de Fourier”) $\bar{\mathcal{F}}$ del espacio fásico \mathcal{F} , y considerar el grupo $\tilde{G}_{(\bar{S},U)} \supset \tilde{G}_{(S,U)}$ en vez de $\tilde{G}_{(S,U)}$, para el cual la condición c) es estrictamente cierta.

Si tomamos la descomposición $\varphi = \bar{a} + a$, el grupo de polarización es $G_p = U \oplus G_L$, que impuesto sobre las funciones de onda dice que

$$\Psi(u, \bar{a} + a, \zeta \exp i\Omega(\bar{a}, a)) = \Psi(u, \bar{a}, \zeta). \tag{4.57}$$

Esta igualdad, junto con la condición de $U(1)$ -función sobre $\Psi(u, \varphi, \zeta)$, implica que:

$$\Psi(u, \varphi, \zeta) = \zeta \Phi(u, \bar{a}) \exp[-i\Omega(\bar{a}, a)]. \quad (4.58)$$

El resto de las condiciones de polarización (aquellas que conciernen al subgrupo U de simetrías internas y espacio-temporales) dicen que:

$$\Psi(u'u, u^{-1}(\varphi), \zeta) = \Psi(u, \varphi, \zeta) \quad (4.59)$$

y por consiguiente

$$\Phi(u'u, u^{-1}(\bar{a})) = \Phi(u', \bar{a}), \quad (4.60)$$

donde hemos utilizado el hecho de que G_L es un subgrupo lagrangiano invariante. Nótese que como \bar{G}_L no tiene por qué ser invariante, $u^{-1}(\bar{a})$ no tiene por qué estar en \bar{G}_L . En cualquier caso, la ecuación (4.60) da la acción finita de las simetrías espacio-temporales e internas sobre las funciones de onda. La acción infinitesimal, y en particular la ecuación de Schrödinger, se puede obtener a partir de los primeros términos del desarrollo en serie de potencias en los parámetros de U .

La separación usual que se hace en teoría cuántica de campos relativista, referente a las partes de “frecuencias positivas” y “frecuencias negativas” del campo, es precisamente un caso particular de factorización que verifica los requerimientos exigidos a un subgrupo lagrangiano; en este caso, ambos G_L y \bar{G}_L , son invariantes bajo el grupo (propio) de Poincaré. Por otra parte, la partícula libre no relativista (vista como un “campo” lineal en 0D) proporciona un ejemplo simple en el cual las trayectorias \mathbf{x} se descomponen en $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}$, donde $\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{x}(t_0)$ ($t_0 \in \mathfrak{R}$ fijo) es invariante bajo U (traslaciones temporales) mientras que $\bar{\mathbf{a}}(t) \equiv \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$ no lo es. Esta división se corresponde con la parametrización familiar del espacio de fases en términos de posiciones y momentos. El hecho de que el subespacio de posiciones (es decir, el subconjunto de trayectorias con momento nulo) sea invariante mientras que el de momentos (es decir, el subconjunto de trayectorias con posición inicial nula) no lo sea, parece contradecir (pero sólo parece...) la transformación usual de las correspondientes cantidades clásicas y operadores cuánticos.

4.4 Generalizaciones. Grupos de “gauge” no abelianos y grupo de Virasoro

Antes de nada advertamos que no hay que confundir aquí grupo de “gauge” con la definición dada en la sección 3.2 como subgrupo normal y horizontal de \tilde{G} ; en esta sección el concepto de grupo de gauge hace referencia a la definición usual de funciones sobre una variedad M con valores en un grupo G .

Reconsideremos desde una perspectiva distinta la forma en que llegamos a la ley de grupo (4.10) al final de la sección 4.1. Podríamos haber motivado dicha ley de grupo diciendo simplemente que partíamos de un grupo de gauge abeliano formado por campos φ sobre el espacio-tiempo M con valores en G (abeliano) del cual extraíamos un subgrupo G_S de campos que verificaban una ciertas ecuaciones diferenciales (ecuaciones de movimiento); el subgrupo obtenido de esta forma podía ser extendido, siendo una corriente bilineal, antisimétrica y con divergencia nula el principal ingrediente para dicha extensión.

Este punto de vista se presta a una generalización inmediata: en lugar de un grupo de gauge abeliano, ¿por qué no considerar grupos de gauge no abelianos?. La cuestión está en ver qué tipo de ecuaciones diferenciales son compatibles con una ley de grupo $*$ de un grupo no abeliano, es decir, qué tipo de ecuaciones diferenciales existen de manera que si $\varphi(x)$ y $\varphi'(x)$ son soluciones, también lo sea la composición $\varphi(x) * \varphi'(x)$ (suponemos que la ley de multiplicación es punto a punto).

Existen fuertes indicios de que el tipo de ecuaciones, si existen, que son compatibles con la ley de grupo de un grupo de gauge no abeliano, deben ser de primer orden. Es decir, no existen ecuaciones de orden mayor que uno compatibles con un grupo de gauge G no abeliano. En efecto, denotemos por

$g(x) = e^{\varphi^a(x)T_a}$ un elemento del grupo de gauge $\{G(x)\}_{x \in M}$, donde T_a son los generadores del álgebra de Lie de G con relaciones de conmutación $[T_b, T_c] = C_{bc}^a T_a$. La composición de dos elementos $g'(x)$ y $g(x)$ es otro

$$\begin{aligned} g''(x) &= e^{\varphi''^a(x)T_a} = e^{\varphi'^a(x)T_a} e^{\varphi^a(x)T_a} \quad \text{con} \\ \varphi''^a(x) &= \varphi'^a(x) + \varphi^a(x) + \frac{1}{2} C_{bc}^a \varphi'^b(x) \varphi^c(x) + O(3), \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde se ha hecho uso de la fórmula de Campbell-Hausdorff para elementos del grupo en un entorno de la identidad: $\varphi^a(x), \varphi'^a(x) \ll 1$. Es fácil ver que, si tanto $\varphi'^a(x)$ como $\varphi^a(x)$ verificasen ecuaciones de segundo orden $\partial^2 \varphi^a(x) = \lambda_b^a \partial \varphi^b(x) + \beta_b^a \varphi^b(x) + O(2)$, no sería posible para la composición $\varphi''^a(x)$ verificar una ecuación de este mismo tipo. Del mismo modo puede verse que para ecuaciones de primer orden no existe, en principio, esta obstrucción (véase [48] para otra prueba equivalente).

Este resultado puede verse como una especie de teorema “no-go”⁵, para grupos de gauge no abelianos describiendo teorías de campos, con respecto al caso abeliano. Para el caso no abeliano podríamos decir que las ecuaciones de movimiento adquieren una forma típicamente hamiltoniana, no siendo posible una división entre coordenadas y momentos (versión Lagrangiana) sin destruir la ley de grupo.

Ahora mostraremos que tal “obstrucción” no se presenta para otro tipo de grupos no abelianos. Consideremos, por ejemplo, la derivada Schwarziana $S(f)$:

$$S(f) = \partial_t \left\{ \frac{\partial_t^2 f}{\partial_t f} \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t^2 f}{\partial_t f} \right)^2 = \frac{\partial_t^3 f}{\partial_t f} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_t^2 f}{\partial_t f} \right)^2, \quad (4.62)$$

Este operador cumple la llamada *propiedad de Cayley*

$$S(fog) = S(f)og(\dot{g})^2 + S(g) \quad (4.63)$$

donde o representa la composición de funciones. Puede comprobarse que si

$$S(f) = 0, \quad S(g) = 0 \quad \implies \quad S(fog) = 0. \quad (4.64)$$

con lo que, para el grupo de Virasoro (grupo de lazos definido sobre una variedad de dimensión uno, con la composición de funciones como ley de composición en el grupo), la ecuación $S(f) = 0$ es una ecuación diferencial de orden mayor que 1 compatible con la ley de grupo. A primera vista, este resultado debería extrañarnos dado el carácter no abeliano del grupo de Virasoro. Sin embargo, este grupo no tiene por qué cumplir los resultados del teorema “no-go” anterior dado que no cumple la hipótesis principal, es decir, la de tener una ley de composición punto a punto.

Comentarios: una vez establecida la conexión entre el formalismo lagrangiano y el formalismo de CSG (al menos para teorías de campos lineales), en el resto de esta tesis preferiremos dar un sistema físico a partir de sus simetrías más que por el conjunto de ecuaciones (diferenciales) que satisfaga. Pienso que no es sólo cuestión de puntos de vista el hacerlo de una manera o de otra (reconociendo que el punto de vista “lagrangiano” es el más usual), y más en Física Teórica, donde no existe a priori otra información que la simetría para construir las *leyes físicas fundamentales*.

⁵no se confunda aquí “no-go” con la otra acepción en esta memoria que hace referencia a la tradicional obstrucción al intentar cuantizar funciones del álgebra de Poisson más que cuadráticas en x, p [11]

Capítulo 5

SEGUNDA CUANTIZACIÓN SOBRE UN GRUPO

Existe otra forma de atacar la cuantización de una teoría de campos, en principio lineal, más cercana a la idea de “cuantización de una teoría de muchos cuerpos” que a la de “cuantización de un sistema con infinitos grados de libertad”.

5.1 Motivación a la construcción de una SCSG

En este capítulo vamos a proponer un esquema de *Segunda Cuantización Sobre un Grupo* (SCSG) que generaliza el concepto Minkowskiano de “segunda cuantización” a espacio-tiempos no triviales, recuperando la Teoría Cuántica de Campos estándar para el caso de los campos relativistas tradicionales. Por “segunda cuantización” se entiende normalmente la cuantización (canónica) de un sistema clásico de dimensión infinita constituido por el espacio lineal de funciones de onda asociado a una partícula mecanocuántica, considerando ahora la evolución en el tiempo de dichas funciones de onda como trayectorias de un campo clásico. Más precisamente, los coeficientes de Fourier $a(k), a(k)^*$ del desarrollo en modos básicos de la función de onda son considerados como las coordenadas del espacio físico del campo clásico a cuantizar, mientras que los correspondientes operadores cuánticos $\hat{a}(k), \hat{a}(k)^\dagger$ son interpretados como operadores de aniquilación y de creación de copias idénticas de la partícula mecanocuántica original.

El problema fundamental al pasar del espacio-tiempo de Minkowski a cualquier otro universo radica en la ambigüedad en la noción de operadores de aniquilación y de creación. Tal ambigüedad se manifiesta ante cambios de coordenadas generados por alguna simetría *local* e interpretados como transiciones de un sistema de referencia a otro equivalente (desde el punto de vista de las ecuaciones *clásicas* de movimiento); ante un cambio de coordenadas de este tipo puede ocurrir que los coeficientes de aniquilación del campo en uno de los sistemas de referencia tomen parte tanto de coeficientes de aniquilación como de creación en el otro sistema (*transformación de Bogolyubov*), haciendo de la noción de partícula un concepto dependiente del sistema de referencia. Un cambio de sistema de referencia generado por una simetría *cuántica* no debería presentar estos problemas, es decir, debería dejar estable el vacío de la teoría cuántica de campos [a no ser que exista una rotura de la simetría, como veremos en el capítulo 9]. Esta situación parece recordarnos pues el concepto de “anomalía topológica” discutido en la sección 3.2.

Veremos cómo el formalismo de SCSG se presenta, en particular, especialmente apropiado para tratar con campos definidos sobre espacios no triviales como, por ejemplo, espacio-tiempos Q no globalmente hiperbólicos o no factorizables como $\mathfrak{R} \times \Sigma$ (véase capítulo 8), para los cuales la ausencia de hipersuperficies de Cauchy con buen comportamiento (o, mejor dicho, la no unicidad en la evolución temporal a partir de unas condiciones iniciales especificadas en una hipersuperficie de Cauchy dada)

causa un efecto desbaratador [49] tanto en el formalismo de cuantización tradicional como en su versión de CSG introducida en el capítulo anterior. El alcance de la SCSG no queda aquí sino que abre nuevas perspectivas precisamente en el entendimiento de problemas de radiación del vacío en teorías cuánticas de campos en espacios curvos (y planos) bajo cambios de sistema de referencia acelerados (véase capítulo 9), problemas de radiación éstos, como se ha dicho anteriormente, usualmente achacados a la falta de globalidad en dichos cambios o transformaciones [47, 50, 46] (“mutilaciones del espacio-tiempo”). Otra virtud de la SCSG frente a los métodos ordinarios de cuantización de campos en espacios curvos es su capacidad de seleccionar un vacío privilegiado (insistiremos en ello más adelante).

La clave para abordar problemas de teoría cuántica de campos definidos sobre un espacio $Q \sim \{(t, x)\}$ desde la perspectiva de la SCSG, estará en embeber Q dentro de una estructura diferenciable mayor que contenga al espacio de fases de la teoría. El candidato deseable para ello, desde el punto de vista físico, es un grupo de cuantización \tilde{G} . Las ecuaciones de polarización en \tilde{G} proporcionarán tanto la reducción de \tilde{G} a Q como las ecuaciones de movimiento (generalmente provenientes de polarizaciones de orden superior [29, 30]). Desde esta perspectiva también existe la posibilidad de considerar espacios de representación alternativos al espacio de configuración, lugar donde se construye usualmente la Mecánica Cuántica sobre un espacio curvo haciendo uso exclusivo de la estructura diferenciable intrínseca de Q (generalmente una variedad pseudo-Riemanniana globalmente hiperbólica con métrica $g_{\mu\nu}$).

Supongamos que ya hemos construido la Mecánica Cuántica (“primera cuantización”) sobre $Q \subset \tilde{G}$ aplicando técnicas de CSG y que hemos obtenido un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$ de funciones de onda polarizadas, el cual veremos ahora como el espacio correspondiente a un campo complejo. Veamos cómo construir el grupo de cuantización $\tilde{G}^{(2)}$ de la correspondiente teoría cuántica de campos.

5.2 Construcción del grupo de segunda cuantización

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$ y su dual $\mathcal{H}^*(\tilde{G})$, definimos la suma directa

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tilde{G}) &\equiv \mathcal{H}(\tilde{G}) \oplus \mathcal{H}^*(\tilde{G}) \\ &= \left\{ |f\rangle = |A\rangle + |B^*\rangle; |A\rangle \in \mathcal{H}(\tilde{G}), |B^*\rangle \in \mathcal{H}^*(\tilde{G}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde hemos denotado por $\langle \tilde{g}_p | B^* \rangle \equiv \langle B | \tilde{g}_p \rangle = B_p^*(\tilde{g})$. El grupo \tilde{G} actúa en este espacio vectorial como:

$$\rho(\tilde{g}') |f\rangle = \rho(\tilde{g}') |A\rangle + \rho(\tilde{g}') |B^*\rangle, \quad (5.2)$$

donde

$$\langle \tilde{g}_p | \rho(\tilde{g}') |B^*\rangle \equiv \langle B | \rho^\dagger(\tilde{g}') | \tilde{g}_p \rangle = B_p^*(\tilde{g}'^{-1} * \tilde{g}). \quad (5.3)$$

También podemos definir el espacio dual

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(\tilde{G}) &\equiv \mathcal{H}^*(\tilde{G}) \oplus \mathcal{H}^{**}(\tilde{G}) \\ &= \left\{ \langle f | = \langle A | + \langle B^* |; \langle A | \in \mathcal{H}^*(\tilde{G}), \langle B^* | \in \mathcal{H}^{**}(\tilde{G}) \sim \mathcal{H}(\tilde{G}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde \tilde{G} actúa de acuerdo con la acción adjunta

$$\langle f | \rho^\dagger(\tilde{g}') = \langle A | \rho^\dagger(\tilde{g}') + \langle B^* | \rho^\dagger(\tilde{g}') \quad (5.5)$$

y ahora

$$\langle B^* | \rho^\dagger(\tilde{g}') | \tilde{g}_p \rangle \equiv \langle \tilde{g}_p | \rho(\tilde{g}') | B \rangle. \quad (5.6)$$

Usando la relación de cierre (3.13), el producto de dos elementos arbitrarios de $\mathcal{F}(\tilde{G})$ es

$$\langle f' | f \rangle = \langle A' | A \rangle + \langle A' | B^* \rangle + \langle B'^* | A \rangle + \langle B'^* | B^* \rangle = \langle A' | A \rangle + \langle B'^* | B^* \rangle, \quad (5.7)$$

ya que las integrales

$$\int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}) A_p'^* (\tilde{g}) B_p^* (\tilde{g}) = 0 = \int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}) B_p' (\tilde{g}) A_p (\tilde{g}) \quad (5.8)$$

son cero debido a la integración en el parámetro central $\zeta \in U(1)$. Así, los subespacios $\mathcal{H}(\tilde{G})$ y $\mathcal{H}^*(\tilde{G})$ son ortogonales respecto al producto escalar en $\mathcal{F}(\tilde{G})$. Una base de $\mathcal{F}(\tilde{G})$ viene dada por el conjunto $\{|n\rangle, |n^*\rangle\}_{n \in I}$ (véase párrafo siguiente a (3.17)).

Podemos dotar al espacio $\mathcal{M}(\tilde{G}) \equiv \mathcal{F}(\tilde{G}) \cup \mathcal{F}^*(\tilde{G})$ de una estructura simpléctica

$$S(f', f) \equiv \frac{-i}{2} (\langle f' | f \rangle - \langle f | f' \rangle), \quad (5.9)$$

que define a $\mathcal{M}(\tilde{G})$ como un espacio fásico. Este espacio fásico puede embeberse de manera natural en un grupo de cuantización

$$\tilde{G}^{(2)} \equiv \left\{ \tilde{g}^{(2)} = (g^{(2)}; \varsigma) = (\tilde{g}, |f\rangle, \langle f|; \varsigma) \right\}, \quad (5.10)$$

el cual es una (verdadera) extensión central por $U(1)$, con parámetro ς , del producto semidirecto $G^{(2)} \equiv \tilde{G} \otimes_{\rho} \mathcal{M}(\tilde{G})$ entre el grupo básico \tilde{G} y el espacio fásico $\mathcal{M}(\tilde{G})$. La ley de grupo de $\tilde{G}^{(2)}$ es formalmente:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'' &= \tilde{g}' * \tilde{g} \\ |f''\rangle &= |f'\rangle + \rho(\tilde{g}') |f\rangle \\ \langle f''| &= \langle f'| + \langle f| \rho^\dagger(\tilde{g}') \\ \varsigma'' &= \varsigma' \varsigma e^{i\xi^{(2)}(g^{(2)'}, g^{(2)})}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde $\xi^{(2)}(g^{(2)'}, g^{(2)})$ es una 2-cociclo definido como

$$\xi^{(2)}(g^{(2)'}, g^{(2)}) \equiv \kappa S(f', \rho(\tilde{g}') f) \quad (5.12)$$

y el papel de la constante κ es el de “matar” cualquier posible dimensión de S .

Un sistema de coordenadas para $\tilde{G}^{(2)}$ se corresponde con una elección particular de representación asociada con una polarización dada $\mathcal{P} \subset \tilde{G}^L$

$$f_p(\tilde{g}) \equiv \langle \tilde{g}_p | f \rangle, \quad f_p^*(\tilde{g}) \equiv \langle f | \tilde{g}_p \rangle. \quad (5.13)$$

La expresión del 2-cociclo (5.12) en este sistema de coordenadas (por simplicidad, no consideraremos la acción semidirecta de \tilde{G})

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}(g^{(2)'}, g^{(2)}) &= \frac{-i\kappa}{2} \left(\iint_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}') \mu(\tilde{g}) f_p'^* (\tilde{g}') \Delta_p(\tilde{g}', \tilde{g}) f_p(\tilde{g}) - c.c. \right) \\ \Delta_p(\tilde{g}', \tilde{g}) &\equiv \langle \tilde{g}'_p | \tilde{g}_p \rangle = \sum_{n \in I} \psi_{p,n}(\tilde{g}') \psi_{p,n}^*(\tilde{g}) + c.c. \end{aligned} \quad (5.14)$$

muestra que los campos de vectores asociados con los parámetros (5.13) son canónico conjugados

$$\left[\tilde{X}_{f_p^*(\tilde{g}')}^L, \tilde{X}_{f_p(\tilde{g})}^L \right] = \kappa \Delta_p(\tilde{g}', \tilde{g}) \tilde{X}_\varsigma^L. \quad (5.15)$$

La función $\Delta_p(\tilde{g}', \tilde{g})$ juega aquí el papel de un *propagador* (matriz central del 2-cociclo). Los propagadores en dos parametrizaciones de $\tilde{G}^{(2)}$, correspondientes a dos subálgebras de polarización diferentes \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 de \tilde{G}^L (o de $U\tilde{G}^L$), están relacionados a través de operadores de cambio de polarización (3.17) como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta_{p_2}(\tilde{h}', \tilde{h}) &= \iint_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}') \mu(\tilde{g}) \Delta_{p_2 p_1}(\tilde{h}', \tilde{g}') \Delta_{p_1}(\tilde{g}', \tilde{g}) \Delta_{p_1 p_2}(\tilde{g}, \tilde{h}) \\ \Delta_{p_i p_j}(\tilde{h}, \tilde{g}) &\equiv \bar{\Delta}_{p_i p_j}(\tilde{h}, \tilde{g}) + c.c. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Llegados a este punto es importante hacer énfasis en el hecho de que, al contrario de lo que sucede con otros métodos basados en una aproximación por grupos a la cuantización de campos (como en [51], o incluso la misma conexión con el formalismo lagrangiano expuesta en el capítulo anterior), la existencia o no de hipersuperficies de Cauchy $\Sigma \subset Q$, donde especificar las condiciones iniciales para el campo clásico, ya no es una cuestión esencial para la SCSG. Esto es debido a que la integración en la hipersuperficie de Cauchy $\int_{\Sigma} d\sigma(x)$ [recuérdense las expresiones (4.8) y (4.10)] ha sido reemplazada por una integración en todo el grupo $\int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g})$. Pueden existir casos en los que la integración en el tiempo $t \in \mathfrak{R}$ en $\int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g})$, junto con las variables extra tipo momento, pueda ser factorizada dando lugar a una reducción $\int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}) \rightarrow \int_{\Sigma} d\sigma_{\mu}(x)$ que involucra una integración efectiva en sólo $\Sigma \subset Q$; no obstante, la integración en el tiempo, junto con el resto de los parámetros, puede ser necesaria en el caso general para mantener el carácter hermitico de los generadores de las simetrías correspondientes (retomaremos esta cuestión en el Cap. 8).

Con el objetivo de aplicar las técnicas de CSG a $\tilde{G}^{(2)}$, es conveniente usar una parametrización “tipo Fourier”. Si denotamos por

$$a_n \equiv \langle n|f \rangle, \quad b_n \equiv \langle f|n^* \rangle, \quad (5.17)$$

los coeficientes de Fourier de la “partícula” y de la “antipartícula” respectivamente, la subálgebra de polarización $\mathcal{P}^{(2)}$ para $\tilde{G}^{(2)}$ viene dada por los correspondientes campos de vectores izquierdos $\tilde{X}_{a_n}^L, \tilde{X}_{b_n}^L$ y por la totalidad del álgebra de Lie izquierda de $\tilde{G} \subset \tilde{G}^{(2)}$, la cual representa ahora la subálgebra característica $\mathcal{G}_{\Theta^{(2)}}$ de la teoría segundo-cuantizada.

El grupo \tilde{G} juega aquí un papel clave como instrumento para seleccionar un vacío privilegiado, y definir una noción de “partícula” exenta de ambigüedades, en la teoría segundo-cuantizada, de la misma forma que el grupo de Poincaré juega un papel central en las teorías cuánticas de campos relativistas definidas sobre el espacio de Minkowski. En general, la Teoría Cuántica estándar de Campos sobre espacios curvos adolece de la falta de una definición única o privilegiada de partícula. En efecto, el carácter infinito-dimensional de la variedad simpéctica de soluciones (\sim espacio físico) para una teoría de campos es responsable de la existencia de infinitas representaciones unitarias e irreducibles no equivalentes de las relaciones de Heisenberg-Weyl, no existiendo criterio alguno para seleccionar un vacío preferido de entre los infinitos existentes para la correspondiente teoría cuántica (véase, por ejemplo, [47, 43, 46]). Esta situación no se da en dimensión finita, de acuerdo con el teorema de Stone-von Newman [52, 53]. En nuestro lenguaje, el origen de este hecho está relacionado con la falta de un módulo característico para el subgrupo H-W $\sim \tilde{G}^{(2)}/\tilde{G}$ de $\tilde{G}^{(2)}$; es decir, para el grupo H-W de dimensión infinita, siempre podemos polarizar las funciones de onda en “infinitas direcciones” arbitrarias y no equivalentes. Así, siempre que podamos embeber nuestro espacio-tiempo M en un grupo \tilde{G} dado, la existencia de un módulo característico $\mathcal{G}_{\Theta^{(2)}} \sim \tilde{G}^L$ en la subálgebra de polarización $\mathcal{P}^{(2)}$ nos ayudará a seleccionar un vacío privilegiado. De manera más precisa, el vacío vendrá caracterizado por aquel estado aniquilado por la versión derecha de la subálgebra de polarización dual a $\mathcal{P}^{(2)}$, es decir, será invariante bajo la acción de $\tilde{G} \subset \tilde{G}^{(2)}$ y aniquilado por los campos de vectores $\tilde{X}_{a_n}^R, \tilde{X}_{b_n}^R$.

También pueden seleccionarse otros vacíos como aquellos estados que son invariantes bajo un subgrupo $\tilde{G}_C \subset \tilde{G}$ sólo; por ejemplo, bajo el subgrupo uniparamétrico de evolución temporal. Desde nuestro punto de vista, esta situación se correspondería con una rotura de la simetría y podría interpretarse como una teoría constreñida de la original. En efecto, discutamos la influencia que tienen las ligaduras de la teoría primero-cuantizada en segunda cuantización. Asociado con una función de onda constreñida satisfaciendo (3.19), existe un campo constreñido sujeto a la siguiente condición:

$$\text{ad}_{\tilde{X}_{\tilde{t}}^{R(2)}} \left(\tilde{X}_{|f}^R \right) \equiv \left[\tilde{X}_{\tilde{t}}^{R(2)}, \tilde{X}_{|f}^R \right] = dD_T^{(\epsilon)}(\tilde{t}) \tilde{X}_{|f}^R, \quad (5.18)$$

donde $\tilde{X}_{\tilde{t}}^{R(2)}$ representa la versión segundo-cuantizada de $\tilde{X}_{\tilde{t}}^R$. Con respecto a estos operadores $\tilde{X}^{R(2)}$, hay que decir que aparecen normalmente ordenados de forma natural, es decir, *la ordenación normal*

es intrínseca al formalismo de (S)CSG y no es necesaria introducirla a mano, como se hace usualmente en teoría cuántica de campos. La generalización de la condición (5.18) a ligaduras de orden superior es directa:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1^R \tilde{X}_2^R \dots \tilde{X}_j^R |\psi\rangle &= \epsilon |\psi\rangle \rightarrow \\ \text{ad}_{\tilde{X}_1^{R(2)}} \left(\text{ad}_{\tilde{X}_2^{R(2)}} \left(\dots \text{ad}_{\tilde{X}_j^{R(2)}} \left(\tilde{X}_{|f\rangle}^R \right) \dots \right) \right) &= \epsilon \tilde{X}_{|f\rangle}^R. \end{aligned} \quad (5.19)$$

La selección de un subespacio de Hilbert dado $\mathcal{H}^{(\epsilon)}(\tilde{G}) \subset \mathcal{H}(\tilde{G})$ hecho de funciones de onda ψ_c que obedecen una ligadura de orden superior $C\psi_c = \epsilon\psi_c$, donde $C = \tilde{X}_1^R \tilde{X}_2^R \dots \tilde{X}_j^R$ es cualquier operador de Casimir de $\tilde{G}_C \subset \tilde{G}$, se manifiesta, en segunda cuantización, como una nueva (rota) Teoría Cuántica de Campos. El vacío para los nuevos observables de esta teoría rota (los operadores buenos en (5.19)) no tiene por qué coincidir con el vacío de la teoría original, y la acción del resto de operadores (los operadores malos) podrían hacer radiar a este nuevo vacío. Este es precisamente el problema que trataremos en el Capítulo 9, donde C es el Casimir del subgrupo de Poincaré G_C dentro del grupo conforme G .

También es importante notar que la representación ρ de \tilde{G} en $\mathcal{M}(\tilde{G})$ es reducible, siendo, no obstante, irreducible bajo \tilde{G} junto con la operación de *conjugación de carga* $a_n \leftrightarrow b_n$, la cual podría haber sido incorporada en $\tilde{G}^{(2)}$. Para no complicar la exposición (y debido a que se tratará siempre con campos reales en las aplicaciones), no se ha incorporado en el esquema de la SCSG, aunque personalmente pienso que un estudio que la incluya podría ser relevante como revisión de la simetría CPT en Teoría Cuántica de Campos.

El invariante Noether asociado con $\tilde{X}_\zeta^{R(2)}$ (versión “segundo-cuantizada” del generador $\tilde{X}_\zeta^R \in \tilde{G}^R$) es precisamente la *carga eléctrica total* (el *número total de partículas* para el caso de un campo real $b_n \equiv a_n$) y su carácter central dentro del grupo “dinámico” \tilde{G} de la teoría primero-cuantizada asegura ahora su conservación bajo la acción del subgrupo $\tilde{G} \subset \tilde{G}^{(2)}$. Para dar cuenta de cargas no abelianas como: carga leptónica, bariónica, etc, se requiere un grupo de estructura $T \subset \tilde{G}$ no abeliano.

Por último, merece la pena decir que la propiedad para un subgrupo $N \subset \tilde{G}$ de ser gauge es heredada por la segunda cuantización.

Parte II

**CUANTIZACIÓN SOBRE GRUPOS.
APLICACIONES**

Capítulo 6

GRADOS DE LIBERTAD INTERNOS ANÓMALOS

No es necesario irse a dimensión infinita para encontrarse con sistemas anómalos. El álgebra de Poisson de funciones lineales y cuadráticas en las coordenadas básicas del espacio físico de la partícula libre o del oscilador armónico adolece, ya en dimensión finita, de una anomalía (recuérdese la definición dada en la sección 3.1.3). La cuantización de estos sistemas fuera de los valores cuánticos o críticos de la anomalía lleva a un aumento del número de grados de libertad del sistema físico. Estos grados de libertad extra comparten con otros bien conocidos, como el espín, su naturaleza o carácter interno, pero presentan otras peculiaridades que los distinguen como el hecho de poseer un número infinito de estados diferentes; ambos están asociados con propiedades de transformación del sistema cuántico bajo el grupo de Weyl simpléctico $WSp(6, \mathfrak{R})$. El significado físico de estos nuevos grados de libertad extra podría establecerse dentro de un problema más amplio correspondiente a la cuantización de un álgebra de dimensión infinita extraída del álgebra de Poisson de la partícula libre, álgebra que resulta generalizar a la de la cuerda bosónica y que da lugar a un *objeto extenso* más general. Este punto de vista abre una brecha para escapar a los tradicionales teoremas no-go de Groenwald y van Hove en Mecánica Cuántica, y puede aportar nueva luz a problemas asociados a otras áreas del saber como, por ejemplo, el estudio y clasificación de las aberraciones en Óptica.

6.1 (Pseudo)cohomología y grados internos de libertad

Las representaciones irreducibles del grupo de Schrödinger fueron estudiadas por primera vez por Niederer [54] y Perroud [55] quienes no vieron clara la asociación de algunas de estas representaciones con el concepto usual de sistema elemental, debido ésto a la aparición “inesperada” de un número infinito de estados internos. Estos estados internos se corresponden con el espacio soporte de las representaciones irreducibles de dimensión infinita con índice de Bargmann k [56] del grupo (no compacto) $SL(2, \mathfrak{R})$, grupo que reemplaza a las traslaciones temporales en, bien Galileo, o bien el grupo del oscilador armónico (grupo de Newton), sustitución que lleva a la simetría de Schrödinger.

Como tendremos ocasión de ver en la siguiente sección, las representaciones unitarias del grupo de Schrödinger, o más generalmente de $WSp(6, \mathfrak{R})$, con índice de Bargmann k no trivial (parámetro de la pseudoextensión por $U(1)$ de $SL(2, \mathfrak{R}) \subset WSp(6, \mathfrak{R})$) resultan estar asociadas a sistemas lineales (partícula libre galileana, oscilador armónico, etc) con un nuevo grado de libertad extra, de la misma manera que las representaciones del subgrupo (compacto) $SO(3)$ con índice s no trivial (parámetro de la pseudoextensión por $U(1)$ de $SO(3) \subset WSp(6, \mathfrak{R})$) están asociadas con partículas elementales con grado de libertad de espín, aunque para éste el número de estados asociados es finito ($2s + 1$, de hecho). No obstante, a diferencia del espín, el cual se realiza en la naturaleza para cualquier valor semientero de s , solamente el valor $k = \frac{d}{4}$ (d representa la dimensión del espacio) es encontrado de

hecho en los sistemas físicos ordinarios como, por ejemplo, los descritos en Óptica Cuántica [57].

Las diferencias y analogías entre k y s aparecen claramente cuando uno se da cuenta de que la simetría de Schrödinger es anómala [23] y que $k = \frac{d}{4}$ es el valor cuántico de la anomalía (véase sección 3.1.3). En otras palabras, $k = \frac{d}{4}$ es el valor que la cuantización asocia al valor clásico $k = 0$ esperado ingenuamente para un sistema clásico sin grados de libertad internos extra. Desde ahora en adelante nos referiremos a $\bar{s} = -k$ como el *espín simpléctico* o simplemente *simplín*, por brevedad. Hablando de forma poco precisa, diremos que el valor $k = \frac{d}{4}$ se corresponde con un sistema cuántico sin simplín.

No obstante, la posibilidad matemática de otros valores distintos de k , correspondientes a otras representaciones del grupo de Schrödinger, nos lleva a preguntarnos por el significado físico de los mismos. En la sección siguiente calculamos en detalle todas estas representaciones asociadas a un sistema cuántico lineal (el oscilador isótropo tridimensional, para ser más preciso) con grados internos de libertad de espín y simplín. Mostraremos cómo es el espacio de Hilbert dependiendo de los valores de $k = -\bar{s}$ y s y estableceremos analogías existentes entre éste y el espacio de Hilbert de otras teorías anómalas más conocidas, en dimensión infinita, como la cuerda bosónica.

Al contrario que el espín, cuyo significado físico parece estar bien entendido en términos de objetos bosónicos y fermiónicos, el simplín no parece, por el momento, ajustarse a ninguna característica conocida de la partícula elemental. Más bien parece ser entendible como formando parte de un conjunto más amplio de grados de libertad con origen en la partícula libre y que conforman un objeto extenso que resulta generalizar la simetría conforme y las álgebras w_∞ de DeWitt. Para ser más precisos, este objeto extenso surge cuando intentamos cuantizar más observables que los permitidos por los bien conocidos, y ya mencionados, teoremas no-go [11], siendo la anomalía de Schrödinger la primera obstrucción a la cuantización estándar de los mismos. De hecho, la elección de una base infinito-dimensional apropiada del álgebra de Poisson sobre el espacio fásico de un sistema lineal (partícula libre u oscilador armónico), junto con un tratamiento adecuado de cohomología de álgebras de Lie, extensiones centrales y anomalías, dará lugar a un sistema dinámico que debe ser entendido como un objeto extenso (con infinitos grados de libertad). Esta simetría, la cual contiene en particular a la de la cuerda bosónica, también incorpora el álgebra de Schrödinger como la subálgebra más grande de dimensión finita. Desde este punto de vista, la partícula elemental con simplín aparecería como la parte finito-dimensional única y más simple de este objeto. Esto lo discutiremos con más detalle en la última sección.

Tanto la forma práctica en que surge una anomalía como el modo en que las polarizaciones de orden superior reducen el espacio de Hilbert de la teoría cuántica para los valores cuánticos de la anomalía, lo vamos a ver seguidamente con un ejemplo en dimensión finita. Al final compararemos con otros sistemas más conocidos en dimensión infinita como la cuerda bosónica.

6.2 Grados de libertad internos asociados con la partícula elemental

Los grados de libertad internos en un sistema cuántico lineal, con \mathfrak{R}^{2d} como espacio fásico, están asociados generalmente con propiedades de transformación no triviales de la fase ζ de la función de onda bajo el grupo simpléctico $Sp(2d, \mathfrak{R}) \subset WSp(2d, \mathfrak{R})$. Su presencia se hace evidente por la aparición de cargas centrales en el álgebra de Lie $sp(2d, \mathfrak{R})$ de transformaciones simplécticas (la cual es isomorfa al álgebra de Poisson de todas las funciones cuadráticas de la posición x_j y de su momento conjugado p_j) y su origen es cohomológico. El caso más simple que podemos considerar es $d = 1$ (partícula en una línea) para el cual el álgebra de Lie del grupo simpléctico $Sp(2, \mathfrak{R}) \simeq SL(2, \mathfrak{R}) \simeq SU(1, 1)$, isomorfa al álgebra de Poisson generada por $\{\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}p^2, xp\}$, aparece extendida de forma natural, realizando una representación con índice de Bargmann $k = \frac{1}{4}$. Como hemos mencionado antes, no existe a priori un significado físico para otras representaciones con índices de Bargmann k (el simplín \bar{s} para nosotros) distintos de éste. Para construir explícitamente estas representaciones y comparar con el caso más usual o más conocido del espín, consideraremos dimensión $d = 3$ y nos restringiremos al subgrupo de Schrödinger del grupo de Weyl simpléctico $WSp(6, \mathfrak{R})$, donde se ha reemplazado el grupo $Sp(6, \mathfrak{R})$ por

su subgrupo $SL(2, \mathfrak{R}) \otimes SO(3)$, álgebra de Lie de este último isomorfa al álgebra de Poisson generada por $\{\frac{1}{2}\mathbf{x}^2, \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}; \mathbf{x} \times \mathbf{p}\}$. Para lo que sigue, será más conveniente y más manejable usar una parametrización de tipo oscilador en términos de las combinaciones complejas usuales:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} + i\mathbf{p}), \quad \mathbf{a}^* \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x} - i\mathbf{p}), \quad (6.1)$$

donde hemos fijado $\hbar = 1 = m = \omega$ por simplicidad. De la misma forma, consideraremos la versión “complejificada” $SU(1, 1)$ de $SL(2, \mathfrak{R})$ definida como:

$$SU(1, 1) \equiv \left\{ \bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \\ \bar{z}_2^* & \bar{z}_1^* \end{pmatrix}, \bar{z}_i, \bar{z}_i^* \in C / \det(\bar{U}) = |\bar{z}_1|^2 - |\bar{z}_2|^2 = 1 \right\} \quad (6.2)$$

y el doble recubridor

$$SU(2) \equiv \left\{ U = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}, z_i, z_i^* \in C / \det(U) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\} \quad (6.3)$$

de $SO(3)$ para dar cuenta de valores semienteros para el espín.

Echemos un vistazo a la estructura de ambos grupos como fibrados principales y elijamos un sistema de coordenadas adaptado a dicha fibración como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &\equiv \frac{\bar{z}_1}{|\bar{z}_1|}, \quad \bar{\alpha} \equiv \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}, \quad \bar{\alpha}^* \equiv \frac{\bar{z}_2^*}{\bar{z}_1^*}, \quad \bar{\eta} \in S^1, \quad \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^* \in D_1; \\ \eta &\equiv \frac{z_1}{|z_1|}, \quad \alpha \equiv \frac{z_2}{z_1}, \quad \alpha^* \equiv \frac{z_2^*}{z_1^*}, \quad \eta \in S^1, \quad \alpha, \alpha^* \in S^2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

es decir, $SU(1, 1)$ es un fibrado principal con fibra $U(1)$ y base el disco unidad abierto D_1 , mientras que $SU(2)$ tiene a la esfera S^2 como base (para ser más preciso, las coordenadas α, α^* , correspondientes a una carta local en la identidad, están relacionadas con la proyección estereográfica de la esfera en el plano). La acción de $SU(1, 1)$ sobre \mathbf{a}, \mathbf{a}^* se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \rightarrow \bar{U} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^* \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{1 - \bar{\alpha}\alpha^*}} \begin{pmatrix} \bar{\eta} & \alpha\bar{\eta} \\ \bar{\alpha}^*\bar{\eta}^* & \bar{\eta}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

mientras que la acción de $SU(2)$ se puede obtener haciendo uso de la isometría existente entre las matrices 2×2 hermíticas de traza nula $A \equiv \begin{pmatrix} a_3 & a_1 + ia_2 \\ a_1 - ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$ y \mathfrak{R}^3 , la cual lleva a:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow UAU^\dagger = \frac{1}{1 + \alpha\alpha^*} \begin{pmatrix} \eta & \alpha\eta \\ -\alpha^*\eta^* & \eta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & a_1 + ia_2 \\ a_1 - ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^* & -\alpha\eta \\ \alpha^*\eta^* & \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{a} &\rightarrow R\mathbf{a}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde la correspondencia $U \rightarrow R$ no es más que el homomorfismo usual entre $SU(2)$ y $SO(3)$.

Escribamos ahora, en forma compacta, la ley de grupo $\tilde{g}'' = \tilde{g}' * \tilde{g}$ del grupo 13-paramétrico de cuantización de Schrödinger \tilde{G} en $d = 3$, el cual consiste en un producto semidirecto $G = \mathbf{C}^3 \otimes_s (SU(2) \otimes SU(1, 1))$ extendido convenientemente por $U(1)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{U}'' &= \bar{U}'\bar{U} \\ U'' &= U'U \quad (\text{o bien } R'' = R'R) \\ \begin{pmatrix} \mathbf{a}'' \\ \mathbf{a}^{*''} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^* \end{pmatrix} + \bar{U}^{-1} \begin{pmatrix} R^{-1}\mathbf{a}' \\ R^{-1}\mathbf{a}'^* \end{pmatrix} \\ \zeta'' &= \zeta'\zeta \exp \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \Omega \bar{U}^{-1} \begin{pmatrix} R^{-1}\mathbf{a}' \\ R^{-1}\mathbf{a}'^* \end{pmatrix} \right\} (\eta''\eta'^{-1}\eta^{-1})^{2s} (\bar{\eta}''\bar{\eta}'^{-1}\bar{\eta}^{-1})^{2\bar{s}}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

denotamos aquí por $\Omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz central del cociclo de Bargmann, y por s, \bar{s} los índices de espín y simplín relacionados con ambas pseudoextensiones de $SU(2)$ y $SU(1,1)$ con funciones generatrices $\delta(U) = s\theta$, $\theta \equiv -2i \log \eta$ y $\delta(\bar{U}) = \bar{s}\bar{\theta}$, $\bar{\theta} \equiv -2i \log \bar{\eta}$ respectivamente. Nótese que tanto el espín como el simplín están forzados a tomar sólo valores semienteros

$$s \equiv \frac{k}{2}, \quad \bar{s} \equiv \frac{l}{2}, \quad k, l \in Z \quad (6.8)$$

por condiciones de globalidad (univaluedad), como puede verse expresando $\eta, \bar{\eta}$ en términos de las coordenadas globales z_i, \bar{z}_i , $i = 1, 2$ como en (6.4) (véase otra discusión posterior al respecto).

La ley de grupo (6.7) será nuestro punto de partida para obtener las representaciones irreducibles del grupo de Schrödinger, las cuales resultarán corresponderse con las de un “oscilador isótropo tridimensional” con dos grados de libertad internos. Con este objetivo, comencemos escribiendo la expresión explícita de los campos de vectores izquierdos y derechos:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\zeta^L &= \tilde{X}_\zeta^R = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} & (6.9) \\ \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^* \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^*} - \frac{1}{2} \mathbf{a} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_{\bar{\eta}}^L &= \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} - 2\bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} + 2\bar{\alpha}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}^*} - \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} + \mathbf{a}^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^*} \\ \tilde{X}_{\bar{\alpha}}^L &= -\frac{1}{2} \bar{\eta} \bar{\alpha}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} - \bar{\alpha}^{*2} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}^*} - \mathbf{a}^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} - \bar{s} \bar{\alpha}^* \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^L &= \frac{1}{2} \bar{\eta} \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} - \bar{\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}^*} - \mathbf{a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^*} + \bar{s} \bar{\alpha} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_\eta^L &= \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - 2i(a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial a_2}) - 2i(a_2^* \frac{\partial}{\partial a_1^*} - a_1^* \frac{\partial}{\partial a_2^*}) \\ \tilde{X}_\alpha^L &= \frac{1}{2} \eta \alpha^* \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} + \alpha^{*2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + s \alpha^* \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ &+ (a_3 \frac{\partial}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial a_3}) + i(a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} - a_3 \frac{\partial}{\partial a_2}) + (a_3^* \frac{\partial}{\partial a_1^*} - a_1^* \frac{\partial}{\partial a_3^*}) + i(a_2^* \frac{\partial}{\partial a_3^*} - a_3^* \frac{\partial}{\partial a_2^*}) \\ \tilde{X}_{\alpha^*}^L &= -\frac{1}{2} \eta \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - s \alpha \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ &+ (a_3 \frac{\partial}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial a_3}) - i(a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} - a_3 \frac{\partial}{\partial a_2}) + (a_3^* \frac{\partial}{\partial a_1^*} - a_1^* \frac{\partial}{\partial a_3^*}) - i(a_2^* \frac{\partial}{\partial a_3^*} - a_3^* \frac{\partial}{\partial a_2^*}) \\ \tilde{X}_{\mathbf{a}}^R &= \bar{z}_1^* R \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} - \bar{z}_2^* R \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^*} - \frac{1}{2} (\bar{z}_2^* R \mathbf{a} + \bar{z}_1^* R \mathbf{a}^*) \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R &= -\bar{z}_2 R \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} + \bar{z}_1 R \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^*} + \frac{1}{2} (\bar{z}_1 R \mathbf{a} + \bar{z}_2 R \mathbf{a}^*) \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_{\bar{\eta}}^R &= \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \\ \tilde{X}_{\bar{\alpha}}^R &= \frac{1}{2} \bar{\eta}^{-1} \bar{\alpha}^* \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} + \bar{\eta}^{-2} (1 - \bar{\alpha} \bar{\alpha}^*) \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} + \bar{s} \bar{\eta}^{-2} \bar{\alpha}^* \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^R &= -\frac{1}{2} \bar{\eta}^3 \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} + \bar{\eta}^2 (1 - \bar{\alpha} \bar{\alpha}^*) \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}^*} - \bar{s} \bar{\eta}^2 \bar{\alpha} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_\eta^R &= \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \tilde{X}_\alpha^R &= -\frac{1}{2} \eta^{-1} \alpha^* \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^{-2} (1 + \alpha \alpha^*) \frac{\partial}{\partial \alpha} - s \eta^{-2} \alpha^* \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

$$\tilde{X}_{\alpha^*}^R = \frac{1}{2}\eta^3\alpha\frac{\partial}{\partial\eta} + \eta^2(1+\alpha\alpha^*)\frac{\partial}{\partial\alpha^*} + s\eta^2\alpha\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

Los conmutadores (izquierdos) entre estos campos de vectores son:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{X}_{\zeta}^L, \text{all} \right] &= 0 & \left[\tilde{X}_{a_j}^L, \tilde{X}_{a_k}^L \right] &= -\delta_{jk}\tilde{X}_{\zeta}^L & \left[\tilde{X}_{\eta,\alpha,\alpha^*}^L, \tilde{X}_{\eta,\bar{\alpha},\bar{\alpha}^*}^L \right] &= 0 \\ \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\alpha}^L \right] &= 2\tilde{X}_{\alpha}^L & \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L \right] &= -2\tilde{X}_{\alpha^*}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L \right] &= \tilde{X}_{\eta}^L + 2\bar{s}\tilde{X}_{\zeta}^L \\ \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\alpha}^L \right] &= 2\tilde{X}_{\alpha}^L & \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L \right] &= -2\tilde{X}_{\alpha^*}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{\alpha}^L \right] &= -\tilde{X}_{\eta}^L - 2\bar{s}\tilde{X}_{\zeta}^L \\ \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L \right] &= \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L \right] &= 0 & \left[\tilde{X}_{\alpha^*}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L \right] &= \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L \\ \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L \right] &= -\tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L \right] &= \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha^*}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L \right] &= 0 \\ \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{a_3}^L \right] &= 0 & \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{a_2}^L \right] &= 2i\tilde{X}_{a_1}^L & \left[\tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{a_1}^L \right] &= -2i\tilde{X}_{a_2}^L \\ \left[\tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{a_3}^L \right] &= -\tilde{X}_{a_1}^L + i\tilde{X}_{a_2}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{a_2}^L \right] &= -i\tilde{X}_{a_3}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{a_1}^L \right] &= \tilde{X}_{a_3}^L \\ \left[\tilde{X}_{\alpha^*}^L, \tilde{X}_{a_3}^L \right] &= -\tilde{X}_{a_1}^L - i\tilde{X}_{a_2}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha^*}^L, \tilde{X}_{a_2}^L \right] &= i\tilde{X}_{a_3}^L & \left[\tilde{X}_{\alpha^*}^L, \tilde{X}_{a_1}^L \right] &= \tilde{X}_{a_3}^L \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde hemos omitido los conmutadores $\left[\tilde{X}_{\eta,\alpha,\alpha^*}^L, \tilde{X}_{a_j}^L \right]$, los cuales tienen la misma forma que los de sus parejas conjugadas $\tilde{X}_{a_j}^L$. La 1-forma de Cuantización es:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{i}{2}(\mathbf{a}^*d\mathbf{a} - \mathbf{a}d\mathbf{a}^*) & (6.11) \\ &+ \frac{i}{2}\frac{\bar{\alpha}^*\mathbf{a}\mathbf{a}^* + \mathbf{a}^2}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*}d\bar{\alpha} - \frac{i}{2}\frac{\bar{\alpha}\mathbf{a}\mathbf{a}^* + \mathbf{a}^2}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*}d\bar{\alpha}^* + i\eta^*\frac{(1 + \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*)\mathbf{a}\mathbf{a}^* + \bar{\alpha}\mathbf{a}^*{}^2 + \bar{\alpha}^*\mathbf{a}^2}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*}d\bar{\eta} \\ &- i\frac{\alpha^*L_3 - L_-}{1 + \alpha\alpha^*}d\alpha + i\frac{\alpha L_3 - L_+}{1 + \alpha\alpha^*}d\alpha^* + 2i\eta^*\frac{(1 - \alpha\alpha^*)L_3 + \alpha L_- + \alpha^*L_+}{1 + \alpha\alpha^*}d\eta \\ &+ \Theta_{SU(1,1)} + \Theta_{SU(2)} - i\zeta^{-1}d\zeta \\ \Theta_{SU(1,1)} &= \frac{i\bar{s}}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*}(\bar{\alpha}d\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^*d\bar{\alpha} - 4\bar{\alpha}\bar{\alpha}^*\eta^*d\bar{\eta}) \\ \Theta_{SU(2)} &= \frac{is}{1 + \alpha\alpha^*}(-\alpha d\alpha^* + \alpha^*d\alpha + 4\alpha\alpha^*\eta^*d\eta), \end{aligned}$$

donde hemos denotado por $\mathbf{L} \equiv i(\mathbf{a}^* \times \mathbf{a})$ y por $L_{\pm} \equiv L_1 \pm iL_2$. El módulo característico $\text{Ker}\Theta \cap \text{Ker}d\Theta$ está generado por la subálgebra de campos izquierdos

$$\mathcal{G}_{\Theta} = \langle \tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\eta}^L \rangle, \quad (6.12)$$

cuyas trayectorias representan las ecuaciones hamiltonianas generalizadas del movimiento en la variedad simpléctica 10-dimensional $\mathbf{C}^3 \otimes D_1 \otimes S^2$ de la teoría. Los invariantes Noether bajo dichas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{a}} &\equiv i_{\tilde{X}_{\mathbf{a}}^R}\Theta = i(\bar{z}_1^*R\mathbf{a}^* + \bar{z}_2^*R\mathbf{a}) & F_{\mathbf{a}^*} &\equiv i_{\tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R}\Theta = -i(\bar{z}_1R\mathbf{a} + \bar{z}_2R\mathbf{a}^*) \\ F_{\bar{\eta}} &\equiv i_{\tilde{X}_{\bar{\eta}}^R}\Theta = \bar{s}\frac{4i\bar{\alpha}\bar{\alpha}^*}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*} + iF_{\mathbf{a}^*} \cdot F_{\mathbf{a}} & F_{\eta} &\equiv i_{\tilde{X}_{\eta}^R}\Theta = s\frac{4i\alpha\alpha^*}{1 + \alpha\alpha^*} + 2(F_{\mathbf{a}^*} \times F_{\mathbf{a}})_3 \\ F_{\bar{\alpha}} &\equiv i_{\tilde{X}_{\bar{\alpha}}^R}\Theta = \bar{s}\frac{-2i\bar{\eta}^{-2}\bar{\alpha}^*}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*} - \frac{i}{2}F_{\mathbf{a}} \cdot F_{\mathbf{a}} & F_{\alpha} &\equiv i_{\tilde{X}_{\alpha}^R}\Theta = s\frac{2i\eta^{-2}\alpha^*}{1 + \alpha\alpha^*} + (F_{\mathbf{a}^*} \times F_{\mathbf{a}})_- \\ F_{\bar{\alpha}^*} &\equiv i_{\tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^R}\Theta = \bar{s}\frac{2i\bar{\eta}^2\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*} + \frac{i}{2}F_{\mathbf{a}^*} \cdot F_{\mathbf{a}^*} & F_{\alpha^*} &\equiv i_{\tilde{X}_{\alpha^*}^R}\Theta = s\frac{-2i\eta^2\alpha}{1 + \alpha\alpha^*} + (F_{\mathbf{a}^*} \times F_{\mathbf{a}})_+ \end{aligned} \quad (6.13)$$

Como dijimos en la sec. 3.5, estos invariantes Noether parametrizan la variedad clásica de soluciones del sistema cuántico correspondiente. Nótese que los invariantes Noether no dinámicos o no simplécticos (no básicos) F_{η} y $F_{\bar{\eta}}$, provenientes de campos derechos cuya versión izquierda está en la subálgebra característica (6.12), se expresan en términos del resto (los básicos). El corchete de Poisson (3.23), a través de las relaciones de conmutación (6.10), reproduce exactamente las expresiones estándar en términos de

$$\{1, \mathbf{a}, \mathbf{a}^*, -\frac{i}{2}\mathbf{a}^2, \frac{i}{2}\mathbf{a}^*{}^2, i\mathbf{a}^*\mathbf{a}, \mathbf{a}^* \times \mathbf{a}\} \quad (6.14)$$

sólamente para $\bar{s} = s = 0$. También, para estos valores particulares (clásicos), todos los invariantes Noether se expresan en términos de los ahora básicos $F_{\mathbf{a}}$ y $F_{\mathbf{a}^*}$ (como se puede observar en (6.13)), dando lugar a una nueva reducción de la variedad simpléctica

$$\mathbf{C}^3 \otimes D_1 \otimes S^2 \rightarrow \mathbf{C}^3 \quad (6.15)$$

de 10 a 6 dimensiones, es decir, perdiendo los grados internos de libertad. Desde el punto de vista cuántico, esta reducción se debe al engrosamiento de la subálgebra característica (6.12), la cual incorpora ahora la totalidad de los campos en las subálgebras $su(2)$ y $su(1,1)$.

Hasta ahora, la forma tratar ambos grupos, $SU(2)$ y $SU(1,1)$, ha sido bastante paralela. La diferencia comienza cuando nos disponemos a buscar una subálgebra de polarización (3.9) encaminada a reducir la representación (3.8) para el caso $s = \bar{s} = 0$, es decir, cuando intentamos representar de forma irreducible y unitaria el álgebra de Poisson clásica (6.14) sobre un espacio de Hilbert de funciones de onda que dependan arbitrariamente, digamos, de sólo las variables \mathbf{a}^* . Como puede comprobarse a partir de las relaciones de conmutación (6.10), mientras la subálgebra $su(2)$ de \mathcal{G}_{Θ} es diagonal bajo conmutación, bien con $\tilde{X}_{\mathbf{a}}^L$ o bien con $\tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L$ (cerrando una subálgebra horizontal por separado), la subálgebra $su(1,1)$ no es diagonal, es decir, mezcla $\tilde{X}_{\mathbf{a}}^L$ con $\tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^L$ e imposibilita una polarización completa para este caso. Esta obstrucción es un ejemplo particular de lo que ya hemos definido como anomalía algebraica, compartiendo con la caracterización tradicional la aparición de cargas centrales en el álgebra cuántica de operadores. La cuantización tradicional resuelve este problema imponiendo una *ordenación normal* a mano, dando lugar a un álgebra cuántica de operadores que difiere del álgebra clásica de Poisson (6.14) en términos centrales (de ordenación normal), y que realiza una representación irreducible del grupo metapéctico $Mp(2, \mathfrak{R})$ (doble recubridor de $Sp(2, \mathfrak{R}) \simeq SU(1,1)$) con índice de Bargmann $k = 3/4$ ($= d/4$ en d dimensiones). Esta situación puede verse como una violación “débil” (eludible) de los teoremas no-go y, según veremos en la sección 6.3, podemos ir incluso más lejos en el proceso de cuantización.

Veamos cómo la CSG resuelve esta obstrucción (la reducción de la representación cuántica) por medio de polarizaciones de orden superior, cuya existencia estará garantizada sólomente, según veremos, para el valor cuántico de $\bar{s} = -\frac{3}{4}$ [$\bar{s} = -\frac{d}{4}$ en d dimensiones], en contraposición al valor clásico de $\bar{s} = 0$ (para el cual se alcanza la homóloga reducción clásica). Para ello, calculemos primero las representaciones irreducibles del grupo de Schrödinger con espín y simplín arbitrario para, posteriormente, mostrar cómo tiene lugar la reducción mencionada anteriormente.

Existe una subálgebra de polarización completa para s y \bar{s} arbitrarios y distintos de cero, la cual es:

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_{\eta}^L, \tilde{X}_{\bar{\eta}}^L, \tilde{X}_{\alpha}^L, \tilde{X}_{\bar{\alpha}}^L, \tilde{X}_{\mathbf{a}}^L \rangle . \quad (6.16)$$

La solución general de las ecuaciones de polarización (3.9) lleva a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(s,\bar{s})}(\tilde{G})$ de funciones de onda de la forma:

$$\begin{aligned} \psi^{(s,\bar{s})}(\zeta, \eta, \alpha, \alpha^*, \bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*, \mathbf{a}, \mathbf{a}^*) &= \zeta(1 + \alpha\alpha^*)^{-s}(1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*)^{-\bar{s}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{a}^*\mathbf{a} + \bar{\alpha}\mathbf{a}^*)} \phi(\chi, \bar{\chi}, \mathbf{b}) \\ \chi &\equiv \eta^{-2}\alpha^*, \quad \bar{\chi} \equiv \bar{\eta}^{-2}\bar{\alpha}^*, \quad \mathbf{b} \equiv (1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*)^{\frac{1}{2}} \bar{\eta}^* \mathbf{R} \mathbf{a}^* . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Podemos dar un producto escalar por medio del volumen de integración invariante de \tilde{G} :

$$v(\tilde{g}) = i \frac{1}{(1 + \alpha\alpha^*)^2} \frac{1}{(1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*)^2} \left[\prod_{j=1}^3 d\text{Re}(a_j) \wedge d\text{Im}(a_j) \right] \quad (6.18)$$

$$\wedge \left[d\text{Re}(\alpha) \wedge d\text{Im}(\alpha) \wedge \eta^{-1} d\eta \right] \wedge \left[d\text{Re}(\bar{\alpha}) \wedge d\text{Im}(\bar{\alpha}) \wedge \bar{\eta}^{-1} d\bar{\eta} \right] \wedge \zeta^{-1} d\zeta . \quad (6.19)$$

Denotemos por

$$\psi_{\mathbf{n}}^{(m,\bar{m})} \equiv \zeta(1 + \alpha\alpha^*)^{-s}(1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*)^{-\bar{s}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{a}^*\mathbf{a} + \bar{\alpha}\mathbf{a}^*)} (\chi)^m (\bar{\chi})^{\bar{m}} (b_1)^{n_1} (b_2)^{n_2} (b_3)^{n_3} \quad (6.20)$$

una función básica, donde m y \bar{m} representan las terceras componentes de espín y simplín, respectivamente, y n_j representa los cuantos de oscilador en la dirección j . El requerimiento de analiticidad de estas funciones de onda, cuando se expresan en términos de coordenadas globales $z_i, \bar{z}_i, i = 1, 2$ (como en (6.4)), lleva a condiciones de integralidad $2s, 2\bar{s}, m, \bar{m} \in Z$, que recuperan las condiciones ya dadas en (6.8). La acción de los campos de vectores derechos (operadores de la teoría) sobre $\mathcal{H}^{(s, \bar{s})}(\tilde{G})$ puede darse a través de la acción sobre funciones básicas (6.20) como sigue (denotamos por $\hat{\mathbf{e}}_j \equiv (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \delta_{3,j})$):

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{a_j}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= -\psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_j}^{(m, \bar{m})} - n_j \psi_{\mathbf{n}-\hat{\mathbf{e}}_j}^{(m, \bar{m}+1)} \\
\tilde{X}_{a_j^*}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= n_j \psi_{\mathbf{n}-\hat{\mathbf{e}}_j}^{(m, \bar{m})} \\
\tilde{X}_{\bar{\eta}}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= -(2\bar{m} + \sum_j n_j) \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} \\
\tilde{X}_{\bar{\alpha}}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= -(\bar{m} - 2\bar{s} + \sum_j n_j) \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m}+1)} - \frac{1}{2} \sum_j \psi_{\mathbf{n}+2\hat{\mathbf{e}}_j}^{(m, \bar{m})} \\
\tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= \bar{m} \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m}-1)} \\
\tilde{X}_{\eta}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= -2m \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} + 2i(n_1 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_2-\hat{\mathbf{e}}_1}^{(m, \bar{m})} - n_2 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_1-\hat{\mathbf{e}}_2}^{(m, \bar{m})}) \\
\tilde{X}_{\alpha}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= -(2s - m) \psi_{\mathbf{n}}^{(m+1, \bar{m})} - (n_1 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_3-\hat{\mathbf{e}}_1}^{(m, \bar{m})} - n_3 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_1-\hat{\mathbf{e}}_3}^{(m, \bar{m})}) \\
&\quad - i(n_3 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_2-\hat{\mathbf{e}}_3}^{(m, \bar{m})} - n_2 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_3-\hat{\mathbf{e}}_2}^{(m, \bar{m})}) \\
\tilde{X}_{\alpha^*}^R \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= m \psi_{\mathbf{n}}^{(m-1, \bar{m})} - (n_1 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_3-\hat{\mathbf{e}}_1}^{(m, \bar{m})} - n_3 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_1-\hat{\mathbf{e}}_3}^{(m, \bar{m})}) + i(n_3 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_2-\hat{\mathbf{e}}_3}^{(m, \bar{m})} - n_2 \psi_{\mathbf{n}+\hat{\mathbf{e}}_3-\hat{\mathbf{e}}_2}^{(m, \bar{m})}).
\end{aligned} \tag{6.21}$$

A partir de estas expresiones se puede concluir que la tercera componente de espín m está restringida a tomar los valores $m = 0, \dots, 2s$ (un espacio de dimensión finita), mientras que la tercera componente de simplín \bar{m} puede tomar cualquier valor entero de 0 a ∞ (espacio de dimensión infinita); la diferencia está en el carácter compacto y no compacto de los correspondientes subgrupos $SU(2)$ y $SU(1, 1)$. Dicho esto, cualquier función en $\mathcal{H}^{(s, \bar{s})}(\tilde{G})$ puede expresarse como una combinación lineal de estas funciones básicas como:

$$\psi^{(s, \bar{s})} = \sum_{j=1}^3 \sum_{n_j=0}^{\infty} \sum_{\bar{m}=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2s} c_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} \psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})}. \tag{6.22}$$

Nótese que el conjunto de funciones de onda $\{\psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})}\}$ no es ortogonal respecto al producto escalar definido a través del volumen de integración en (6.19), pero puede ser expresado en términos de un conjunto ortogonal $\{\check{\psi}_{\mathbf{k}}^{(m, \bar{m})}\}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{n}}^{(m, \bar{m})} &= \sum_{l_1=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{l_2=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \sum_{l_3=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \left(\prod_{j=1}^3 (-1)^{n_j+l_j} \Gamma_{n_j, l_j} \right) \check{\psi}_{\mathbf{n}-2\mathbf{l}}^{(m, \bar{m}+l_1+l_2+l_3)} \\
\Gamma_{n_j, l_j} &\equiv \frac{1}{2^{l_j}} \frac{(n_j + 2l_j)!}{n_j! l_j!} \\
\check{\psi}_{\mathbf{k}}^{(m, \bar{m})} &\equiv \left(\tilde{X}_{a_1}^R \right)^{k_1} \left(\tilde{X}_{a_2}^R \right)^{k_2} \left(\tilde{X}_{a_3}^R \right)^{k_3} \psi_{\mathbf{0}}^{(m, \bar{m})},
\end{aligned} \tag{6.23}$$

donde $\lfloor \frac{n_j}{2} \rfloor$ denota la parte entera de $\frac{n_j}{2}$.

Definamos los operadores *internos* de orden superior como:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{\bar{\eta}}^R(HO) &\equiv \tilde{X}_{\bar{\eta}}^R - \tilde{X}_{\mathbf{a}}^R \cdot \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R & \tilde{X}_{\eta}^R(HO) &\equiv \tilde{X}_{\eta}^R + 2i \left(\tilde{X}_{\mathbf{a}}^R \times \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R \right)_3 \\
\tilde{X}_{\bar{\alpha}}^R(HO) &\equiv \tilde{X}_{\bar{\alpha}}^R + \frac{1}{2} \tilde{X}_{\mathbf{a}}^R \cdot \tilde{X}_{\mathbf{a}}^R & \tilde{X}_{\alpha}^R(HO) &\equiv \tilde{X}_{\alpha}^R + i \left(\tilde{X}_{\mathbf{a}}^R \times \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R \right)_- \\
\tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^R(HO) &\equiv \tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^R - \frac{1}{2} \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R \cdot \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R & \tilde{X}_{\alpha^*}^R(HO) &\equiv \tilde{X}_{\alpha^*}^R - i \left(\tilde{X}_{\mathbf{a}}^R \times \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R \right)_+
\end{aligned} \tag{6.24}$$

que cierran una subálgebra del álgebra envolvente derecha de grupo de Schrödinger \tilde{G} , isomorfa al álgebra de Lie $su(2) \oplus su(1, 1)$ con una particular pseudoextensión:

$$\left[\tilde{X}_\alpha^{R(HO)}, \tilde{X}_{\alpha^*}^{R(HO)} \right] = \tilde{X}_\eta^{R(HO)} + 2s, \quad \left[\tilde{X}_{\bar{\alpha}}^{R(HO)}, \tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^{R(HO)} \right] = -\tilde{X}_{\bar{\eta}}^{R(HO)} - \left(2\bar{s} + \frac{3}{2} \right). \quad (6.25)$$

Estos operadores representan los observables correspondientes a los grados de libertad puramente internos: espín y simplín. Es más, esta subálgebra resulta ser, en general, un ideal (bajo conmutación en sentido débil) del álgebra envolvente derecha $U\tilde{\mathcal{G}}^R$ de \tilde{G} , y un ideal horizontal para los valores particulares de

$$\bar{s} = -\frac{3}{4}, \quad \text{and} \quad s = 0 \quad (6.26)$$

(como se puede comprobar parcialmente en (6.25)). Esta última situación requiere una atención especial. De hecho, la existencia de un ideal horizontal no trivial (no cero) es un síntoma de *reducibilidad*. En efecto, de acuerdo con la teoría general expuesta en las secciones 3.1 y 3.2.2, los ideales horizontales derechos se corresponden con subálgebras de gauge cuyos campos de vectores pueden escribirse en función de los campos de vectores izquierdos en el módulo característico y, por consiguiente, deben representarse trivialmente (por cero). ¿Que es lo que sucede entonces?, pues que la representación (6.21) es reducible para los particulares valores cuánticos (6.26), en contraposición a los valores clásicos (en lo que concierne al simplín, que no al espín) para los cuales se da la reducción clásica (6.15). No obstante, mientras que la reducción (normal) para $s = 0$ se consigue con una nueva subálgebra de polarización completa que se compone de (6.16) agrandada con $\tilde{X}_{\alpha^*}^L$ (es decir, conteniendo por completo a la subálgebra $su(2)$ del álgebra característica), la reducción (anómala) para $\bar{s} = -3/4$ requiere el uso de polarizaciones de orden superior. Como ya dijimos, la forma práctica de construir polarizaciones de orden superior es tomar los elementos del álgebra característica $su(1, 1)$, correspondiente a la reducción clásica de la variedad simpéctica, y sumarle términos del álgebra envolvente izquierda $U\tilde{\mathcal{G}}^L$. Para nuestro problema, y sólo para el caso crítico $\bar{s} = -3/4$, los campos obtenidos por este procedimiento resultan coincidir con la versión izquierda de los operadores de gauge de orden superior (6.24), de manera que, a las restricciones de primer orden dadas por (6.16) y que conducen a soluciones (6.22), podemos añadir nuevas restricciones de orden superior. El candidato para este proceso de reducción es la deformación $\tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^{L(HO)}$ de $\tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^L$, la cual es precisamente el homólogo izquierdo de $\tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^{R(HO)}$ definido en (6.24). Su carácter gauge hace que sea indiferente si las condiciones de polarización de orden superior

$$\tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^{L(HO)} \psi^{(s, -\frac{3}{4})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\chi}} - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{b}_j^2} = 0 \quad (6.27)$$

se imponen como restricciones por la izquierda o por la derecha sobre las funciones de onda (6.22), la solución de las cuales puede expresarse en términos de un conjunto ortogonal y completo de la forma:

$$\check{\psi}_{\mathbf{k}}^{(m)} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{l_i=0}^{\infty} \sum_{n_i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^3 \Gamma_{n_j, l_j} \delta_{n_j+2l_j, k_j} \right) \psi_{\mathbf{n}}^{(m, l_1+l_2+l_3)} = \left(\prod_{j=1}^3 (-1)^{k_j} \left(\tilde{X}_{a_j}^R \right)^{k_j} \right) \psi_{\mathbf{0}}^{(m, 0)}, \quad (6.28)$$

es decir, como la órbita de los operadores de creación $\hat{a}_j^\dagger \equiv -\tilde{X}_{a_j}^R$ a partir del vacío $\psi_{\mathbf{0}}^{(0,0)}$ (cuando $s = 0$). De esta forma, la totalidad de los operadores físicos $\tilde{X}_{\hat{g}_i}^R$ se expresan en términos de los básicos: $\hat{a}_j^\dagger = -\tilde{X}_{a_j}^R$ y $\hat{a}_j \equiv \tilde{X}_{a_j^*}^R$, como en (6.24), teniendo en cuenta que ahora los operadores de orden superior (internos) $\tilde{X}_{\hat{g}_i}^{R(HO)}$ son trivialmente nulos (gauge). Por ejemplo, el operador energía es:

$$\hat{E} \equiv -X_{\bar{\eta}}^R \equiv -\tilde{X}_{\bar{\eta}}^R - 2\bar{s}\tilde{X}_{\bar{\zeta}}^R = \sum_{j=1}^3 \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right), \quad (6.29)$$

donde la última redefinición del generador $\tilde{X}_{\bar{\eta}}^R$ pretende devolver a las relaciones de conmutación $[\tilde{X}_{\bar{\alpha}}^R, \tilde{X}_{\bar{\alpha}^*}^R] = \tilde{X}_{\bar{\eta}}^R + 2\bar{s}\tilde{X}_{\bar{\zeta}}^R$ en (6.10) la forma usual en $su(1, 1)$: $[X_{\bar{\alpha}}^R, X_{\bar{\alpha}^*}^R] = X_{\bar{\eta}}^R$. Nótese que la energía del punto cero $E_0 = \frac{1}{2}d$ del oscilador armónico es precisamente $-2\bar{s}$ para el valor cuántico de la anomalía $\bar{s} = -\frac{d}{4}$. Este valor anómalo se obtiene usualmente por la “ingenua” *regla de simetrización* y resulta tener consecuencias físicas importantes, en teoría de campos, en el *Efecto Casimir* observado experimentalmente (véase [58] y referencias allí citadas).

El carácter semi(semi)entero del valor cuántico $\bar{s} = -\frac{1}{2}(\frac{3}{2})$ del simplín indica, de acuerdo con (6.8), que la representación de $SU(1, 1)$ es *bivaluada*, es decir, es el doble recubridor $Mp(2, \mathfrak{R})$ (el grupo metaplético) quien, de hecho, se representa fielmente.

6.2.1 Comparación con la cuerda bosónica

Llegados a este punto, resulta oportuno establecer una comparación de los fundamentos de este sistema de dimensión finita con el sistema más convencional, y en dimensión infinita, de la cuerda bosónica [26].

El papel que juega el grupo de Virasoro, actuando sobre los modos de la cuerda $\{\alpha_m^\mu\}$,

$$[\hat{L}_n, \hat{\alpha}_m^\mu] = m\hat{\alpha}_{n+m}^\mu \quad (6.30)$$

lo juega aquí el grupo $SU(1, 1)$ actuando sobre los modos de oscilador \mathbf{a}, \mathbf{a}^* . Al igual que el álgebra $su(1, 1)$, el álgebra de Virasoro

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n - m)\hat{L}_{n+m} + \frac{1}{12}(cn^3 - c'n)\delta_{n,-m}\hat{1} \quad (6.31)$$

aparece también centralmente extendida aunque, esta vez, tanto por un pseudocociclo (con parámetro c' que “generaliza” al simplín) como por un verdadero cociclo (con parámetro c); el último está permitido gracias al carácter infinito-dimensional del grupo de Virasoro, el cual viola el lema de Whitehead [59]. La reducción anómala que permite a los operadores de Virasoro escribirse en términos de los modos de la cuerda (construcción de Sugawara [60]) para $c = c' = d$ (la dimensión del espacio-tiempo)

$$\hat{L}_k = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} : \sum \hat{\alpha}_{k-n}^\mu \hat{\alpha}_n^\nu : \quad (6.32)$$

es esencialmente equivalente (en su naturaleza) a la reducción anómala que permite a los operadores de $su(1, 1)$ escribirse en términos de los modos de oscilador para $\bar{s} = -d/4$. De hecho, la fórmula (6.28) que expresa los estados del subespacio invariante reducido del espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(s, \bar{s} = -\frac{3}{4})}(\tilde{G})$, generado por la acción de sólo los operadores de creación \hat{a}_j^\dagger , tiene su paralelo en la construcción del espacio de Hilbert reducido de la cuerda por la acción, esta vez, de sólo los operadores de los modos de la cuerda sobre el vacío (véase por ejemplo [26])

$$\hat{\alpha}_{n_1}^{\mu_1} \hat{\alpha}_{n_2}^{\mu_2} \dots \hat{\alpha}_{n_i}^{\mu_i} |0\rangle. \quad (6.33)$$

Para llevar hasta el final esta comparación podríamos simular las ligaduras en la teoría de cuerdas restringiendo nuestro oscilador a moverse sobre la esfera S^2 ; más precisamente, el papel que juegan parte de los generadores del grupo de Virasoro, constriñendo la cuerda, lo juegan aquí parte de los operadores de $su(1, 1)$, por ejemplo, aquellos que restringen a la partícula a moverse sobre la esfera, como vamos a ver.

6.2.2 Partícula sobre la esfera S^2

Veamos en detalle este primer ejemplo de sistema constreñido a partir de otro más general (el oscilador en este caso). Haciendo uso de la expresión (6.1), podemos escribir el cuadrado del operador vector

de posición y su “derivada respecto al tiempo” como:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^2 &\equiv \frac{1}{2}((\tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R)^2 + (\tilde{X}_{\mathbf{a}}^R)^2 - \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R \tilde{X}_{\mathbf{a}}^R - \tilde{X}_{\mathbf{a}}^R \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R) = \tilde{X}_{\tilde{\alpha}^*}^R - \tilde{X}_{\tilde{\alpha}}^R - \tilde{X}_{\tilde{\eta}}^R + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}) &\equiv -\frac{i}{2}((\tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R)^2 - (\tilde{X}_{\mathbf{a}}^R)^2) = -i(\tilde{X}_{\tilde{\alpha}^*}^R + \tilde{X}_{\tilde{\alpha}}^R).\end{aligned}\quad (6.34)$$

La teoría constreñida puede formularse viendo el grupo de Schrödinger como un fibrado principal donde el grupo de estructura $T = U(1)$ ha sido reemplazado por $T = \hat{A}(1)$, una extensión central del grupo afín en 1D; de manera más precisa, el álgebra de Lie de T es ahora:

$$\begin{aligned}[\tilde{X}_{\tilde{t}_1}^R, \tilde{X}_{\tilde{t}_2}^R] &= 2i\tilde{X}_{\tilde{t}_1}^R + 2ir^2\tilde{X}_{\tilde{\zeta}}^R \\ \tilde{X}_{\tilde{t}_1}^R &\equiv \hat{\mathbf{x}}^2 - r^2\tilde{X}_{\tilde{\zeta}}^R, \quad \tilde{X}_{\tilde{t}_2}^R \equiv \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}}),\end{aligned}\quad (6.35)$$

la cual toma parte de una subálgebra de $su(1, 1)$ pseudoextendida por $U(1)$ con parámetro r (radio de la esfera). La ligadura sobre la esfera se puede implementar por medio de condiciones de T -equivariancia (3.19) sobre combinaciones arbitrarias $\check{\psi}^{(s)}$ de funciones básicas (6.28), bien como

$$\tilde{X}_{\tilde{t}_1}^R \check{\psi}^{(s)} = 0 \quad \text{o como} \quad \tilde{X}_{\tilde{t}_2}^R \check{\psi}^{(s)} = 0, \quad (6.36)$$

ya que el carácter conjugado de estos dos generadores (véase conmutador en (6.35)) impide fijar los dos a la vez (“principio de Heisemberg”). Eligiendo la segunda opción llegamos al siguiente conjunto de operadores buenos (véase (3.20)):

$$\begin{aligned}\tilde{G}_T &= \left\{ \tilde{X}_{\mathbf{a}}^R \times \tilde{X}_{\mathbf{a}^*}^R, \tilde{X}_{\tilde{\eta}}^R, \tilde{X}_{\tilde{\alpha}}^R, \tilde{X}_{\tilde{\alpha}^*}^R, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3 \right\} \\ \hat{\mathbf{u}} &\equiv \hat{r}^{-1}\hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{r}^{-1} \equiv \frac{1}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{\tilde{X}_{\tilde{t}_1}^R}{r^2} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \tilde{X}_{\tilde{t}_1}^R}}\end{aligned}\quad (6.37)$$

los cuales conmutan con $\tilde{X}_{\tilde{t}_2}^R$ y cierran una subálgebra isomorfa al álgebra euclídea en 3D para el caso de espín $s = 0$ [nótese que los operadores \hat{u}_j viven en el álgebra envolvente del grupo de Schrödinger]. El espacio de Hilbert constreñido, hecho de funciones T -equivariantes (6.36), puede construirse a partir de los únicos $2s + 1$ estados que son invariantes por rotaciones espaciales y aniquilados por $\tilde{X}_{\tilde{t}_2}^R$. Éstos resultan ser las combinaciones:

$$Y_{m_s, 0}^{(0)} \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \frac{K}{(2q)!!(2q - N_0)!!} \left(-\tilde{X}_{\tilde{\alpha}}^R \right)^{2q} \check{\psi}_{\mathbf{0}}^{(m_s)}, \quad m_s = 0, \dots, 2s + 1 \quad (6.38)$$

donde K es una constante arbitraria (a fijar por normalización) y $N_0 = 2\bar{s} + 1 = -\frac{1}{2}$. Para $s = 0$, el estado $Y_{0,0}^{(0)}$ representa simplemente el armónico esférico de momento angular orbital nulo [nótese que es una combinación lineal infinita de funciones de oscilador]. Otros estados con valores más altos del momento angular $Y_{m_s, m_l}^{(l)}$ se pueden obtener a partir de estos “vacíos” tomando la órbita de \hat{u}_j a partir de $Y_{m_s, 0}^{(0)}$. Por ejemplo, el estado $Y_{m_s, 0}^{(1)} \equiv \hat{u}_3 Y_{m_s, 0}^{(0)}$ tiene momento angular (orbital) $l = 1$ y tercera componente $m_l = 0$. El conjunto de todos los estados obtenidos de esta manera representan el espacio de Hilbert de una partícula puntual con espín viviendo en la esfera S^2 . Los diferentes valores de s parametrizan cuantizaciones no equivalentes.

Hemos preferido mantener el grado interno de libertad de espín para comparar con otras formas y métodos de abordar la *Mecánica Cuántica sobre S^D* como en [36], donde se usa el grupo euclídeo en $(D + 1)$ dimensiones para estudiar la partícula puntual sobre S^D , o las referencias [39, 38] donde se considera a S^D como un espacio homogéneo $G/H = SO(D+1)/SO(D)$ de $SO(D+1)$. A este respecto, tenemos que apuntar aquí una diferencia básica importante entre nuestro procedimiento y el de éstos

otros: la esfera S^2 donde vive la “partícula libre” de [36, 39, 38], parece corresponderse más bien con nuestra esfera *interna* S^2 inmersa en la variedad simpléctica $T^*S^2 \times S^2$ [T^*S^2 es el cotangente de S^2] que resulta de la original $\mathbf{C}^3 \otimes D_1 \otimes S^2$ (véase (6.15)) tras reducir (6.27) [$\rightarrow \mathbf{C}^3 \otimes S^2$] y constreñir (6.36); es decir, existen *dos* esferas diferentes (en su naturaleza) para nosotros, una esfera *real* inmersa en \mathfrak{R}^3 , donde la partícula vive, y una esfera “interna” (simpléctica) $S^2 = SU(2)/U(1)$ correspondiente al grado de libertad de espín. Esta situación puede llevar a errores de interpretación cuando se cuantiza sobre espacios homogéneos $Q = G/H$ y se parametriza Q como si estuviera inmerso en \mathfrak{R}^n ; de hecho, una inmersión de nuestra esfera $Q = S^2 = SU(2)/U(1)$ en $\mathfrak{R}^3 = \{y_1, y_2, y_3\}$ de acuerdo con una proyección estereográfica estándar:

$$\alpha\eta^2 = \frac{y_1}{\rho + y_3} + i\frac{y_2}{\rho + y_3}, \quad \text{con } \mathbf{y}^2 = \rho^2 \quad (6.39)$$

nos podría llevar a pensar que “existe un monopolo rondando” si interpretamos la 1-forma de conexión $\Theta_{SU(2)}$ en (6.11) como un potencial de gauge $U(1)$ [también denominado *H-conexión* o *conexión canónica* en [39, 38]], pero nosotros sabemos que “este monopolo no vive en nuestro mundo...”.

6.3 Escapatorias a los teoremas no-go: objetos extensos con origen en la partícula elemental

Como se ha dicho anteriormente, el álgebra de Schrödinger se puede ver como la subálgebra de Poisson más grande sobre la variedad de soluciones de la partícula libre y/o del oscilador armónico que puede cuantizarse de una forma más o menos canónica. Se quiere decir con esto que la aplicación de cuantización “ $\hat{}$ ” que representa la subálgebra de Poisson $\langle 1, x, p, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}p^2, xp \rangle$ por $\langle \hat{1}, \hat{x}, \hat{p}, \frac{1}{2}\hat{x}^2, \frac{1}{2}\hat{p}^2, \hat{x}\hat{p} \rangle$ no es un homomorfismo de álgebras de Lie debido al término anómalo $-\frac{i}{2}$ en el conmutador $[\frac{1}{2}\hat{x}^2, \frac{1}{2}\hat{p}^2]$ con relación a su respectivo corchete de Poisson. Afortunadamente esta anomalía puede ocultarse fácilmente con tal de simetrizar el operador (\widehat{xp}) .

La cuantización canónica estándar fracasa al intentar ir más allá de cualquier subálgebra de Poisson de polinomios en x, p de grado mayor que dos [61, 11]. No obstante, desde el punto de vista de la cuantización sobre grupos, podemos ir más lejos con tal de que seamos capaces de cerrar una subálgebra de Poisson que, aunque necesariamente de dimensión infinita, tenga un crecimiento controlado (crecimiento finito; véase por ejemplo [62]). Una vez hecho esto, la ley de grupo la podemos encontrar, al menos, exponenciando el álgebra de Lie orden por orden, como, por ejemplo, en las álgebras de Kac-Moody [63], y considerando todas las posibles (pseudo)extensiones con parámetros arbitrarios γ_k .

Es evidente que, en el proceso de cuantización, aparecerán muchas anomalías que requerirán el empleo de polarizaciones de orden superior. Estas anomalías son realmente obstrucciones a la cuantización de funciones dadas de x, p en términos de \hat{x}, \hat{p} . Los valores cuánticos $\gamma_k^{(0)}$ de la anomalía son precisamente aquellos para los que se puede llevar a cabo esta tarea, aunque el morfismo cuántico “ $\hat{}$ ” aparezca, hasta cierto punto, distorsionado (términos centrales para los operadores que representan funciones cuadráticas y términos más generales para polinomios de grado mayor en x, p). Lejos de estos valores cuánticos de la anomalía aparecerán nuevos grados de libertad (puramente cuánticos) asociados con aquellos operadores que no pueden expresarse en función de \hat{x}, \hat{p} . Más aún, puede ocurrir perfectamente que no existan valores cuánticos de γ_k para ciertos casos, dando lugar a situaciones “esencialmente anómalas” (no salvables).

Para construir esta álgebra de Poisson de dimensión infinita, que generalice y englobe al álgebra de Schrödinger, partamos de la variedad de soluciones de la partícula elemental en dos dimensiones parametrizada por x, p . Por simplicidad asumiremos que la partícula es no relativista, aunque podríamos pensar en la situación relativista con tal de que x represente el análogo clásico del operador de posición de Newton-Wigner [64, 65] o, incluso, podríamos considerar también el parámetro tiempo x^0 con tal de atribuirle carácter dinámico a través de un momento canónico conjugado p^0 (de manera

que $\{x, p\} = 1 \rightarrow \{x^\mu, p^\nu\} = g^{\mu\nu}$), e imponer la ligadura de la capa de masas [66]. Mantengamos la parametrización tipo oscilador del espacio fásico, como en (6.1), y elijamos el siguiente conjunto de funciones clásicas de a^*, a :

$$L_n^\alpha = \frac{1}{2}a^{2n}(a^*a)^{-\alpha-n+1}, \quad L_{-m}^\beta = \frac{1}{2}a^{*2m}(a^*a)^{-\beta-m+1} \quad (6.40)$$

$$n, m = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad \alpha, \beta = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \dots$$

que generaliza el álgebra de Virasoro (como generadora de los difeomorfismos del plano) y contiene el álgebra de Schrödinger como la subálgebra más grande de dimensión finita.

Un cálculo directo a partir del corchete de Poisson básico $\{a^*, a\} = i$ proporciona la siguiente álgebra de Poisson formal:

$$\{L_n^\alpha, L_m^\beta\} = -i[(1-\beta)n - (1-\alpha)m]L_{n+m}^{\alpha+\beta} \quad n, m, \alpha, \beta \in Z/2 \quad (6.41)$$

la cual no debe confundirse con la introducida en [67]. Ésta contiene varias subálgebras interesantes: *álgebra de Schrödinger*:

$$a^* = 2L_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \quad a = 2L_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \equiv 2L_0^1, \quad \frac{1}{2}a^{*2} = L_{-1}^0, \quad \frac{1}{2}a^2 = L_1^0, \quad a^*a = 2L_0^0. \quad (6.42)$$

álgebra de Virasoro:

$$L_n \equiv L_n^0 \Rightarrow \{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m} \quad (6.43)$$

álgebra de la cuerda "sin extender": La subálgebra de Virasoro anterior puede agrandarse por $\alpha_m \equiv L_m^1$, $m \in Z$. Estos dos conjuntos cierran la siguiente álgebra (acción semidirecta):

$$\begin{aligned} \{L_n, L_m\} &= -i(n-m)L_{n+m} \\ \{L_n, \alpha_m\} &= im\alpha_{n+m} \\ \{\alpha_n, \alpha_m\} &= 0, \end{aligned} \quad (6.44)$$

correspondiente a la simetría *clásica* subyacente en la cuerda bosónica (una por cada índice μ de α_m^μ), es decir, antes de extender por $U(1)$.

La subálgebra de (6.41) correspondiente a las potencias positivas y enteras de x, p , denominada en la literatura como *álgebra* w_∞ , ha sido considerada recientemente en muchos trabajos y, en particular, en conexión con el grupo de Geroch [68]. La restricción tradicional a índices enteros y positivos está basada en argumentos de analiticidad. No obstante, en el paso al mundo cuántico, el requerimiento de analiticidad sólo tiene sentido para aquellos operadores que no son básicos, es decir, aquellos que no están directamente asociados con ningún grado de libertad y, por lo tanto, deben escribirse en función de los operadores cuánticos básicos (\hat{a}^*, \hat{a} en nuestro caso). Y a la inversa, los elementos del álgebra de Poisson que generan cohomología de álgebras de Lie (y, por lo tanto, extensiones centrales) pueden mantenerse como generadores de la verdadera simetría cuántica en el sentido de que no tienen por qué expresarse, en principio, como funciones de \hat{a}^*, \hat{a} . Éstos últimos hacen referencia a una "anomalía esencial" y extienden el sistema en el sentido de que generan nuevos (independientes) grados de libertad cuánticos. Sólo la presencia de anomalías algebraicas requerirá una nueva reducción de la representación cuántica, la cual permite a algunos operadores a priori básicos escribirse en función de otros efectivamente básicos. Los valores cuánticos de la anomalía son, en general, aquellos valores de las cargas centrales para los cuales la extensión efectiva del sistema extendido se reduce al mínimo. En cualquier caso, y como un mal menor, si quisiéramos establecer la motivación (6.40) al álgebra (6.41) desde un punto de vista matemático riguroso, podríamos eliminar el punto $a = a^* = 0$ de nuestro espacio fásico original asegurando así la analiticidad a las combinaciones (6.40) [nótese también que

el análogo cuántico $\widehat{a^*a} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}$ de la función clásica a^*a no es nunca cero debido al valor anómalo del simplín (energía del punto cero)].

Para entender mejor la interrelación entre: “un cierto grado de” no analiticidad clásica, cohomología de grupos y extensión de un sistema cuántico, restrinjámonos al álgebra clásica de simetrías de la cuerda (6.44). Los generadores de este álgebra clásica se escriben como funciones no analíticas [en el sentido “debil” (eludible) especificado en el párrafo anterior] de a^*, a :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} a^{2n} (a^* a)^{1-n} & , & \quad L_{-n} = \frac{1}{2} a^{*2n} (a^* a)^{1-n} \\ \alpha_m &= \frac{1}{2} a^{2m} (a^* a)^{-m} & , & \quad \alpha_{-m} = \frac{1}{2} a^{*2m} (a^* a)^{-m} . \end{aligned} \quad (6.45)$$

Extendiendo este álgebra de la forma:

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = (n - m) \hat{L}_{n+m} + \frac{1}{12} (cn^3 + c'n) \delta_{n+m,0} \hat{1} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_n, \hat{\alpha}_m] &= \hat{\alpha}_{n+m} \\ [\hat{\alpha}_n, \hat{\alpha}_m] &= am \delta_{n+m} \hat{1} , \end{aligned} \quad (6.47)$$

podemos proceder con la CSG y encontrar ya la subálgebra característica y las parejas canónico conjugadas. No vamos a dar los cálculos precisos, los cuales se pueden encontrar en [69] y las referencias allí citadas [para la verdadera álgebra de la cuerda, es decir, para las d componentes de $\alpha_m^\mu, \mu = 0, 1, 2, \dots, d$, aunque los resultados son formalmente equivalentes]. Los resultados a los que se llegan son los mismos que los de la sección 6.2.1: para $a = 1, c = c' = 1$ todos los generadores de Virasoro se dejan expresar, tras la cuantización, como funciones cuadráticas (y por lo tanto analíticas) de los operadores cuánticos $\hat{\alpha}_m$ (véase (6.32)), los cuales no necesitan ser expresados (ni, de hecho, pueden serlo) en términos de cualquiera otros, ya que son operadores básicos e independientes como consecuencia de la extensión central (6.47), dando una extensión infinita al sistema físico. Lo mismo sucede con el caso $\bar{s} = -\frac{d}{4}$ de la partícula con simplín estudiada en la sección 6.2 donde, la pseudoextensión de $SU(1, 1)$ (la cual redefine el generador $\tilde{X}_{\bar{\eta}}^R$) con parámetro \bar{s} , es exactamente la misma que la pseudoextensión del álgebra de Virasoro (la cual redefine el generador $L_0 = a^*a$) con parámetro c' .

Nuestra sugerencia es, por tanto, mirar a las extensiones centrales de toda el álgebra (6.41) , considerada como un álgebra formal abstracta, como el álgebra de cuantización del sistema mínimo de dimensión infinita que extiende a la partícula libre de tal manera que la propia cuerda está incluida de manera natural. Dentro de este “enorme” objeto físico extenso, la partícula libre con simplín aparecería como el único subsistema, y el más grande, de dimensión finita. También en esta línea, la gravedad cuántica en 1+1D podría surgir como un subproducto de la cuantización completa del espacio físico de la partícula libre (relativista). Para ver si esto es cierto o no, habrá que esperar un estudio general de las extensiones centrales de (6.41) y la cuantización correspondiente. Debido a la embergadura del problema y a la reciente aparición de este álgebra [27], no será posible arrojar luz sobre este tema en esta tesis, aunque ya estamos investigando esta cuestión. En particular, están siendo investigados en la actualidad ciertos aspectos de este tema relacionados con aplicaciones a la Óptica.

6.4 Conexión con la Óptica de Fresnel

La relación estructural entre la Óptica de Fresnel (a veces denominada óptica de 4π) y la Mecánica Cuántica ha sido desarrollada extensamente en las últimas décadas, habiendo notables contribuciones de A.J. Dragt, S. Steinberg, K.B. Wolf, etc. y excelente bibliografía introductoria como es el libro [70] *Symplectic Techniques in Physics* y numerosos “reports” de K.B. Wolf.

Como se desprende de tal relación, el estudio y clasificación de las aberraciones en Óptica encuentra los mismos problemas que la propia Mecánica Cuántica cuando se pretende ir más allá de los límites de validez de los teoremas denominados *no-go*, esencialmente asociados a Groenwald y van Hove. No obstante, estas técnicas de cuantización desarrolladas para la solución de problemas anómalos y que proporcionan una escapatoria a los citados teoremas *no-go*, esperamos que sean igualmente válidas para el análisis teórico de las aberraciones en Óptica.

El objetivo es calibrar el alcance real de las nuevas técnicas de cuantización en el campo de la óptica no lineal.

Capítulo 7

INVARIANCIA MODULAR Y EL EFECTO HALL CUÁNTICO

Ya en la sección 3.3 vimos las consecuencias no triviales que tiene considerar el cilindro $\mathfrak{R} \times S^1 = \mathfrak{R} \times (\mathfrak{R}/Z)$ frente al plano $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ (su recubridor universal) como variedad simpléctica asociada a un sistema cuántico [en este caso, la partícula libre sobre la circunferencia frente a la partícula libre sobre la recta real]. La no trivialidad del primer grupo de homotopía para la primera da lugar a efectos cuánticos novedosos respecto al caso estándar (plano), introducidos éstos aquí por medio de ligaduras que incorporan la información subyacente en este cambio de topología. Pero éste es uno de los muchos casos que podríamos tratar por este mismo procedimiento, siendo $S^1 \times S^1 = T^2$ (el toro) el siguiente paso en consideración y el que, precisamente, vamos a desarrollar en este capítulo. Otras variedades simplécticas obtenidas a partir de las ya conocidas como, por ejemplo, $D_1 \subset SU(1,1)$ (disco unidad abierto) y $S^2 \subset SU(2)$ (esfera) del capítulo anterior, podrían obtenerse tomando cociente por grupos fuchsianos [71] (subgrupos discretos de $SU(1,1)$ y $SU(2)$), dando como subproducto una clasificación de las distintas variedades riemannianas en dos dimensiones¹.

De acuerdo con el procedimiento general en 3.2, vamos a considerar la variedad simpléctica $T^2 = S^1 \times S^1$ inmersa en un grupo de cuantización \tilde{G} que contiene a su recubridor universal $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ y que incorpora la información “homotópica” de T^2 en su grupo de estructura $T \sim \Pi_1(T^2) \times U(1)$. El candidato más directo para ocupar el puesto de \tilde{G} es el grupo de Heisenberg-Weyl en 1D, considerado esta vez como un fibrado principal con grupo estructural $T \sim (Z \times Z) \times U(1)$, el cual ha sido bautizado en [31] como *grupo de H-W toral* junto con el *grupo de H-W cilíndrico* en conexión con el cilindro como variedad simpléctica. Ambos grupos resultan ser, respectivamente, simetrías básicas subyacentes en sistemas físicos como “electrones en una estructura periódica bidimensional con un campo magnético perpendicular a la misma” y en “anillos superconductores”, proporcionando explicaciones, respectivamente, al *Efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario* (I(F)QHE) y, como ya comentamos en la sección 3.3, a la *cuantización del flujo* en los dichos anillos superconductores. El estudio que se hizo en la referencia [31] con respecto a estos *grupos de H-W compactificados* puede extenderse introduciendo más simetrías en el modelo, las cuales proporcionarán, cómo no, más riqueza al mismo. El nuevo candidato a grupo de cuantización \tilde{G} será ahora el grupo de Schrödinger en 1D, el cual incorpora una simetría $SL(2, \mathfrak{R})$ adicional a la de $H - W$ suficiente como para implementar *invariancia modular* en el correspondiente sistema cuántico constreñido, es decir, el sistema cuántico asociado a \tilde{G} con grupo de estructura $T \sim (Z \times Z) \times U(1)$. Veremos que tal implementación es sensible al carácter de la clase de cohomología de la forma simpléctica en el toro (un *número cuántico topológico*), hecho que puede revelarse como una explicación fundamental del carácter impar de los *denominadores* del “factor de llenado” en el FQHE.

¹este tema está siendo investigado y esperamos que otros nuevos fenómenos cuánticos aparezcan en escena

7.1 Representaciones del grupo de Schrödinger en 1D

En esta sección vamos a seguir un tratamiento un tanto distinto al desarrollado en la sección 6.2 para el grupo de Schrödinger, no ya sólo en lo referente a la dimensión y al uso de coordenadas complejas sino también, en lo que concierne al uso de un sistema *global* de coordenadas para $Sp(2, \mathfrak{R}) \simeq SL(2, \mathfrak{R})$. Cuando tratamos con este tipo de ligaduras “topológicas” hemos de ser cuidadosos con la estructura del grupo de cuantización si no queremos perder información acerca de ciertas transformaciones globales que resultan ser relevantes en el sistema ligado. En nuestro caso bastará con reemplazar $SL(2, \mathfrak{R})$ por $GL(2, \mathfrak{R})$, el cual tiene un parámetro más (que resultará corresponderse con una simetría gauge de la teoría no constreñida) y es más apropiado para llevar a cabo un tratamiento global de coordenadas. Con esta modificación, la ley de grupo queda como:

$$\begin{aligned}\vec{x}'' &= \vec{x}' + \frac{S'}{|S'|^{1/2}} \vec{x} \\ S'' &= S'S \\ \zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{i m \omega}{2 \hbar} \left[\frac{-A' x'_2 x_1 - B' x'_2 x_2 + C' x'_1 x_1 + D' x'_1 x_2}{|S'|^{1/2}} \right],\end{aligned}\tag{7.1}$$

donde $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$ (ω es una frecuencia, de manera que, por ejemplo, $m\omega x_2$ hace de momento), $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2, \mathfrak{R})$ y $|S| \equiv AD - BC$ es el determinante de S . El factor $|S'|^{-1/2}$ en el cociclo de la acción semidirecta de $GL(2, \mathfrak{R})$ sobre \mathfrak{R}^2 es necesario para que la extensión central esté bien definida.

Los campos de vectores izquierdos se escriben en las coordenadas $x_1, x_2, A, B, C, D, \zeta$ como:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{x_1}^L &= |S|^{-1/2} \left[A \frac{\partial}{\partial x_1} + C \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{m\omega}{2\hbar} (-Ax_2 + Cx_1) \Xi \right] \\ \tilde{X}_{x_2}^L &= |S|^{-1/2} \left[D \frac{\partial}{\partial x_2} + B \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{m\omega}{2\hbar} (-Bx_2 + Dx_1) \Xi \right] \\ \tilde{X}_A^L &= A \frac{\partial}{\partial A} + C \frac{\partial}{\partial C} \\ \tilde{X}_B^L &= A \frac{\partial}{\partial B} + C \frac{\partial}{\partial D} \\ \tilde{X}_C^L &= B \frac{\partial}{\partial A} + D \frac{\partial}{\partial C} \\ \tilde{X}_D^L &= B \frac{\partial}{\partial B} + D \frac{\partial}{\partial D} \\ \tilde{X}_\zeta^L &= \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv -i \Xi,\end{aligned}\tag{7.2}$$

mientras que los derechos se escriben como:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{x_1}^R &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{m\omega}{2\hbar} x_2 \Xi \\ \tilde{X}_{x_2}^R &= \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{m\omega}{2\hbar} x_1 \Xi \\ \tilde{X}_A^R &= A \frac{\partial}{\partial A} + B \frac{\partial}{\partial B} + \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \tilde{X}_B^R &= C \frac{\partial}{\partial A} + D \frac{\partial}{\partial B} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \tilde{X}_C^R &= A \frac{\partial}{\partial C} + B \frac{\partial}{\partial D} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_D^R &= C \frac{\partial}{\partial C} + D \frac{\partial}{\partial D} - \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \tilde{X}_\zeta^R &= -i\Xi,\end{aligned}\tag{7.4}$$

Las relaciones de conmutación son:

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{l} \tilde{X}_A^L, \tilde{X}_B^L \\ \tilde{X}_A^L, \tilde{X}_C^L \\ \tilde{X}_A^L, \tilde{X}_D^L \\ \tilde{X}_B^L, \tilde{X}_C^L \\ \tilde{X}_B^L, \tilde{X}_D^L \\ \tilde{X}_C^L, \tilde{X}_D^L \\ \tilde{X}_{x_1}^L, \tilde{X}_{x_2}^L \\ \tilde{X}_A^L, \tilde{X}_{x_1}^L \end{array} \right] &= \begin{array}{l} \tilde{X}_B^L \\ -\tilde{X}_C^L \\ 0 \\ \tilde{X}_A^L - \tilde{X}_D^L \\ \tilde{X}_B^L \\ -\tilde{X}_C^L \\ \frac{m\omega}{\hbar} \Xi \\ \frac{1}{2} \tilde{X}_{x_1}^L \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \tilde{X}_A^L, \tilde{X}_{x_2}^L \\ \tilde{X}_B^L, \tilde{X}_{x_1}^L \\ \tilde{X}_B^L, \tilde{X}_{x_2}^L \\ \tilde{X}_C^L, \tilde{X}_{x_1}^L \\ \tilde{X}_C^L, \tilde{X}_{x_2}^L \\ \tilde{X}_D^L, \tilde{X}_{x_1}^L \\ \tilde{X}_D^L, \tilde{X}_{x_2}^L \end{array} \right] &= \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \tilde{X}_{x_2}^L \\ 0 \\ \tilde{X}_{x_1}^L \\ \tilde{X}_{x_1}^L \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \tilde{X}_{x_1}^L \\ \frac{1}{2} \tilde{X}_{x_2}^L \end{array}\end{aligned}\tag{7.5}$$

La 1-forma de cuantización Θ y la subálgebra característica \mathcal{G}_Θ son:

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{m\omega}{2\hbar} (x_2 dx_1 - x_1 dx_2) + \frac{d\zeta}{i\zeta} \\ \mathcal{G}_\Theta &= \langle \tilde{X}_A^L + \tilde{X}_D^L, \tilde{X}_A^L - \tilde{X}_D^L, \tilde{X}_B^L, \tilde{X}_C^L \rangle\end{aligned}\tag{7.6}$$

donde el generador $\tilde{X}_A^L + \tilde{X}_D^L$ resulta ser *gauge* (ideal horizontal). Debido al carácter anómalo de este grupo, ya discutido en el capítulo anterior, tomaremos como subálgebra de polarización la siguiente de orden superior

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{HO} &= \langle \tilde{X}_A^L + \tilde{X}_D^L, \tilde{X}_A^L - \tilde{X}_D^L - \frac{i\hbar}{2m\omega} (\tilde{X}_{x_1}^L \tilde{X}_{x_2}^L + \tilde{X}_{x_2}^L \tilde{X}_{x_1}^L), \tilde{X}_B^L + \frac{i\hbar}{2m\omega} (\tilde{X}_{x_1}^L)^2, \\ &\tilde{X}_C^L - \frac{i\hbar}{2m\omega} (\tilde{X}_{x_2}^L)^2, \tilde{X}_{x_1}^L \text{ (o bien } \tilde{X}_{x_2}^L) \rangle,\end{aligned}\tag{7.7}$$

que conduce a las siguientes ecuaciones de polarización:

$$\begin{aligned}(\tilde{X}_A^L + \tilde{X}_D^L) \psi &= 0 \\ \tilde{X}_B^L \psi &= 0 \\ (\tilde{X}_A^L - \tilde{X}_D^L) \psi &= -\frac{1}{2} \psi \\ \tilde{X}_{x_1}^L \psi &= 0 \\ \tilde{X}_C^L \psi &= \frac{i\hbar}{2m\omega} (\tilde{X}_{x_2}^L)^2 \psi.\end{aligned}\tag{7.8}$$

La primera de dichas ecuaciones (cociente por el gauge) tiene como solución aquellas funciones de onda definidas sobre $SL(2, R) \subset GL(2, R)$, o sea,

$$\psi(A, B, C, D, x_1, x_2, \zeta) = \psi(a, b, c, d, x_1, x_2, \zeta),\tag{7.9}$$

donde $a \equiv \frac{A}{\sqrt{AD-BC}}$, $b \equiv \frac{B}{\sqrt{AD-BC}}$, $c \equiv \frac{C}{\sqrt{AD-BC}}$ y $d \equiv \frac{D}{\sqrt{AD-BC}}$, con $ad - bc = 1$.

Para continuar resolviendo las ecuaciones de polarización es conveniente introducir cartas locales en $SL(2, R)$. Las elegiremos como aquellas definidas por: bien $a \neq 0$ o bien $c \neq 0$, respectivamente². La primera carta contiene a la identidad $I_2 \in SL(2, R)$, y la segunda contiene al elemento $J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

²En verdad, éstas se corresponden con cuatro cartas contráctiles: $a > 0, a < 0$ y $c < 0, c > 0$, pero las funciones de transición entre cada par de estas cartas son triviales, de manera que las consideraremos como una sola carta

Las soluciones de las ecuaciones de polarización, junto con la condición de $U(1)$ -función $\psi(\zeta * \tilde{g}) = \zeta \psi(\tilde{g})$, vienen dadas por:

1. Para $a \neq 0$:

$$\psi = \zeta a^{-1/2} e^{\frac{im\omega}{2\hbar}xy} \chi(\tau, y), \quad (7.10)$$

donde $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2 - \tau x_1$ y $\tau \equiv \frac{c}{a}$, satisfaciendo χ una ecuación de tipo Schrödinger

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \frac{i\hbar}{2m\omega} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}. \quad (7.11)$$

2. Para $c \neq 0$:

$$\bar{\psi} = \zeta c^{-1/2} e^{-\frac{im\omega}{2\hbar}\bar{x}\bar{y}} \bar{\chi}(\bar{\tau}, \bar{y}), \quad (7.12)$$

donde $\bar{x} \equiv x_2$, $\bar{y} \equiv x_1 - \bar{\tau}x_2$ y $\bar{\tau} \equiv \frac{a}{c}$, siendo $\bar{\chi}$ solución de una ecuación de tipo Schrödinger

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{\tau}} = -\frac{i\hbar}{2m\omega} \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (7.13)$$

El elemento J representa una rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el plano (x_1, x_2) , y lleva la función de onda de una carta local a la otra³. De por sí, $J^4 = I_2$, pero su actuación sobre las funciones de onda

$$\psi(J * g) = (-1)^{1/4} \bar{\psi}(g), \quad (7.14)$$

dice que $\psi(J^4 * g) = -\psi(g)$, un reflejo más de que la representación del subgrupo $SL(2, R)$ es bivaluada, tal y como dijimos en el capítulo anterior, siendo el doble recubridor (el grupo metaplético) quien se representa fielmente. Comparando con un ejemplo mejor conocido podríamos decir que: la representación metaplética es a $SL(2, R)$ lo que la representación de espín $\frac{1}{2}$ es a $SO(3)$ (véase [61] y [22]).

Con esto tenemos construido el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$ de la teoría no constreñida. Antes de pasar a imponer las ligaduras, discutamos un poco las representaciones unitarias e irreducibles del subgrupo de estructura T , representaciones que resultan ser, en general, de dimensión mayor que 1 debido al carácter no abeliano del mismo.

7.1.1 Representaciones del subgrupo de ligaduras T

El subgrupo de estructura

$$T = \{\tilde{t} = (I_2, x_1 = k_1 L_1, x_2 = k_2 L_2, \zeta) \in \tilde{G} / k_1, k_2 \in Z, \zeta \in U(1)\} \quad (7.15)$$

[$L_{1,2}$ denotan los periodos (longitudes) en cada una de las direcciones] es, a su vez, un grupo de cuantización con estructura de fibrado principal con fibra $U(1)$ y base el grupo discreto $\tilde{T} = Z \times Z = \Pi_1(T^2)$, es decir, una extensión central por $U(1)$ de $Z \times Z$. Podemos pues aplicar las técnicas de CA para obtener sus representaciones unitarias e irreducibles. La ley de grupo para T viene inducida a partir de la de \tilde{G} , de manera que la composición $\tilde{t}' * \tilde{t}$ de dos elementos arbitrarios $\tilde{t}, \tilde{t}' \in T$ es:

$$(I_2, k'_1 L_1, k'_2 L_2, \zeta') * (I_2, k_1 L_1, k_2 L_2, \zeta) = (I_2, (k'_1 + k_1) L_1, (k'_2 + k_2) L_2, \zeta' \zeta e^{i \frac{m\omega L_1 L_2}{2\hbar} (k'_1 k_2 - k'_2 k_1)}) \quad (7.16)$$

En la búsqueda de subgrupos horizontales y parejas conjugadas es conveniente calcular el conmutador $[\tilde{t}', \tilde{t}]$ de dos elementos arbitrarios de T :

$$[(I_2, k'_1 L_1, k'_2 L_2, \zeta'), (I_2, k_1 L_1, k_2 L_2, \zeta)] = (I_2, 0, 0, e^{i \frac{m\omega L_1 L_2}{\hbar} (k'_1 k_2 - k'_2 k_1)}), \quad (7.17)$$

la estructura del cual condiciona el mayor o menor grado de “abelianidad” de T según los valores que tome la magnitud $\frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar}$, a la cual nos referiremos de ahora en adelante como (*unidades de flujo magnético* ϕ , o simplemente *flujo*)⁴, por razones que veremos más adelante. Existen tres casos

³de hecho, salvo factor, J representa un operador de cambio de polarización, es decir, la “transformada de Fourier” que pasa de la representación en el espacio x_1 a la representación en el espacio de x_2

⁴quizás fuese más apropiado hablar de “fluxones”

interesantes dependiendo del carácter del flujo ϕ :

- i) FUJO ENTERO: $\phi = \frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = n \in Z$.
- ii) FLUJO FRACCIONARIO: $\phi = \frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = \frac{n}{r}$, $n, r \in Z$ y primos entre sí (con $r > 1$).
- iii) FLUJO IRRACIONAL: $\phi = \frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = \rho$, siendo ρ un número irracional.

Estudiemus por separado dichos casos:

Caso de flujo entero

En este caso T es un grupo abeliano, producto directo de $\tilde{T} = \{t = (I_2, k_1 L_1, k_2 L_2, e^{-i\pi\phi k_1 k_2})\} \sim Z \times Z$ por $U(1)$, y todas sus representaciones son de dimensión 1. Nos quedaremos con aquellas representaciones de T que restringidas a $U(1)$ son fieles, es decir, que son compatibles con la condición de $U(1)$ -función ya impuesta en (7.10). Estas representaciones tienen la siguiente forma:

$$D_T^{(\tilde{\varphi})}(I_2, k_1 L_1, k_2 L_2, \zeta) = \zeta e^{i(\varphi_1 k_1 + \varphi_2 k_2)} e^{-i\pi n k_1 k_2}, \quad \forall k_1, k_2 \in Z, \forall \zeta \in U(1), \quad (7.18)$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ parametrizan las representaciones no equivalentes.

Caso de flujo fraccionario

En este caso T es no abeliano (no es producto directo), siendo una extensión central no trivial de $Z \times Z$ por $U(1)$, tal y como se ve en el conmutador:

$$[(I_2, k'_1 L_1, k'_2 L_2, \zeta'), (I_2, k_1 L_1, k_2 L_2, \zeta)] = (I_2, 0, 0, \omega_r^{k'_1 k_2 - k'_2 k_1}), \quad (7.19)$$

donde $\omega_r \equiv e^{i2\pi\frac{n}{r}}$ es una raíz r -ésima de la unidad. Nótese que si $|n| > r$, entonces $w_r = e^{i2\pi\frac{n}{r}} = e^{i2\pi\frac{q}{r}}$, donde $q = n \bmod r$. Dado que n y r son primos entre sí, q y r también lo serán y, por consiguiente, podemos escoger tanto un par como el otro para caracterizar a T .

El grupo T admite un subgrupo característico⁵, no trivial de la forma:

$$G_c = \{(I_2, r k_1 L_1, r k_2 L_2, e^{i\pi n r k_1 k_2}), / k_1, k_2 \in Z\}, \quad (7.20)$$

el cual se identifica con los elementos de Casimir de T , es decir, aquellos elementos que, no siendo de $U(1)$, conmutan con todos los demás. El cociente T/G_c resulta ser el *grupo de Clifford generalizado* G_r^2 (véase [72]) producto por $U(1)$. Un subgrupo de polarización T_p para T consistiría en G_c junto con traslaciones discretas en una u otra dirección. Dada la fibración no trivial de T para este caso, y pensando en él ahora como grupo de ligaduras de nuestra teoría, el subgrupo T_p representaría, en principio, precisamente el máximo conjunto de restricciones que podrían ser impuestas simultáneamente a las funciones de onda, ya que se trata de ligaduras de segunda clase (véase sec. 3.1.1). No obstante, las representaciones unitarias e irreducibles de los grupos de Clifford generalizados son de dimensión finita (véase [72]), lo cual permite tratar estas ligaduras de segunda clase “como si fueran de primera”, es decir, no sólo T_p sino, todo T puede imponerse consistentemente eligiendo una de estas representaciones (que no sea la trivial, claro está). Hay que decir que nosotros obtuvimos en la referencia [31] estas mismas representaciones (entonces no teníamos conocimiento de la referencia anterior) por un procedimiento, digamos, indirecto. Lo que hicimos allí fue imponer primeramente el grupo abeliano T_p como ligadura en el grupo de H-W toral, escogiendo representaciones de dimensión 1 parametrizadas con dos índices (de forma similar al caso de flujo entero) para, posteriormente, reinsertar el resto de

⁵nótese la diferencia con el equivalente continuo de T (grupo de H-W) para el cual, ni existe grupo característico, ni existen cuantizaciones no equivalentes (para un número finito de grados de libertad), según el Teorema de Stone-von Neumann

operadores (malos) de T como operadores regulares (de cambio de cuantización) actuando sobre un *fibrado vectorial de dimensión r* resultante de la unión de las r representaciones equivalentes de T_p ; de esta forma, la función de onda adquiriría un marcado carácter “espinorial” [este mecanismo de obtener funciones de onda “espinoriales” tiene su origen en la multivaluedad de la función de onda, siendo las componentes de estos “espinores” (complejos) los valores de dicha función en cada hoja de la superficie de Riemann]. De una u otra forma, las representaciones de T para este caso resultan ser de dimensión r y pueden escribirse como:

$$D_T^{(\vec{\varphi})}(I_2, k_1 L_1, k_2 L_2, \zeta) = \zeta e^{i(\varphi_1 k_1 + \varphi_2 k_2)} e^{-i\pi \frac{2}{r} k_1 k_2} A_r^{k_1} B_r^{k_2}, \quad \forall k_1, k_2 \in Z, \quad \forall \zeta \in U(1), \quad (7.21)$$

donde A_r y B_r son matrices $r \times r$ de la forma:

$$(A_r)_{ij} = \omega_r^{i-1} \delta_{ij}, \quad (B_r)_{ij} = \delta_{i, (j \bmod r) + 1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \quad (7.22)$$

que verifican $A_r B_r = \omega_r B_r A_r$, y $A_r^r = B_r^r = I_r$ (relaciones de q -conmutación típicas de un *plano cuántico* [73] con $q = \omega_r$).

Como ocurre en el caso entero, uno esperaría ingenuamente que el rango de representaciones no equivalentes viniera dado por $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$. No obstante, en este caso el rango de no equivalencia se ve reducido debido a la existencia de transformaciones unitarias no triviales que relacionan representaciones en el intervalo $[0, 2\pi)$, algo que no sucedía en el caso entero por ser las representaciones de dimensión 1. Así, tenemos que determinar el rango mínimo de valores μ_1, μ_2 para los cuales la representación $D^{(\mu_1, \mu_2)}$ es equivalente a la representación “trivial” $D^{(0,0)}$, es decir, ver para qué valores de μ_1, μ_2 existe una matriz unitaria V tal que $D^{(\mu_1, \mu_2)} = V D^{(0,0)} V^\dagger$. Estudiando los casos $(\mu_1, 0)$ y $(0, \mu_2)$ por separado se obtiene que:

$$(i) \quad D_T^{(\mu_1, 0)} \text{ es equivalente a } D_T^{(0,0)} \text{ para } \mu_1 = \frac{2\pi}{r}, \text{ con } V = B_r^{m_0}$$

$$(ii) \quad D_T^{(0, \mu_2)} \text{ es equivalente a } D_T^{(0,0)} \text{ para } \mu_2 = \frac{2\pi}{r}, \text{ con } V = A_r^{\frac{1}{n}}$$

aquí $(A_r^{\frac{1}{n}})_{ij} \equiv \omega_r^{\frac{i-1}{n}} \delta_{ij} = e^{i2\pi \frac{i-1}{r}} \delta_{ij}$, y $0 < m_0 < r$ es un entero, solución de la ecuación diofántica

$$1 + nm_0 = rk, \quad k \in Z, \quad (7.23)$$

la cual tiene siempre dos soluciones en el rango $\{-(r-1), \dots, 0, \dots, r-1\}$, con tal de que n y r sean primos entre sí. Nótese que $(A_r^{\frac{1}{n}})^n = A_r$ y $(B_r^{m_0})^n = B_r^{-1}$, de manera que estas matrices pueden considerarse como raíces n -ésimas de las matrices A_r y B_r^{-1} , respectivamente.

En resumen, el rango de representaciones no equivalentes de T se reduce a $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \frac{2\pi}{r})$. Este hecho tendrá una importancia extrema en la determinación de los operadores buenos que sobreviven a la ligadura en el grupo de Schrödinger y, en particular, para aquellos que se refieren a la invariancia modular en el caso fraccionario.

Caso de flujo irracional

Finalmente, y por completitud, comentaremos brevemente el caso en que $\phi = \frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar}$ es un número irracional. Como en el caso fraccionario, no podemos imponer todo el grupo T como ligaduras y hemos de elegir un subgrupo de polarización T_p . En este caso el subgrupo característico es trivial y el subgrupo de polarización consiste en traslaciones discretas en una u otra dirección. Las representaciones resultan ser de dimensión infinita, al igual que en (su homólogo continuo) el grupo de H-W. El caso irracional no resulta ser interesante desde el punto de vista físico y no será considerado en conexión con la invariancia modular. Para más información puede consultarse la referencia [31], esta vez en conexión con el grupo de H-W toral.

7.1.2 El grupo de Schrödinger toral

La teoría constreñida puede formularse considerando ahora al grupo de Schrödinger \tilde{G} como un fibrado principal con grupo estructural T , grupo al que bautizamos como: *grupo de Schrödinger toral*. El calificativo de *toral* hace referencia a la variedad simpléctica resultante de \tilde{G} tras tomar cociente por el grupo característico $GL(2, \mathfrak{R})$ y por la ligadura T , dando $\tilde{G}/(GL(2, \mathfrak{R}) \cup T) \sim S^1 \times S^1$. La cantidad $\phi = \frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar}$ definida en la sección anterior resulta ser una extensión del concepto de *clase de cohomología de la forma simpléctica w* (o *clase de Chern*) sobre el toro, permitiendo valores fraccionarios además de los valores enteros descritos en la Cuantización Geométrica estándar. Para ésta, la aparición de funciones r -valuadas para clases fraccionarias n/r puede eludirse reemplazando el fibrado de línea usual por un fibrado vectorial E de rango r y clase de Chern entera n .

Caso entero

Las condiciones de T -función $\psi^{(\tilde{\varphi})}(\tilde{t} * \tilde{g}) = D_T^{(\tilde{\varphi})}(\tilde{t})\psi^{(\tilde{\varphi})}(\tilde{g})$, $\forall \tilde{t} \in T$ pueden interpretarse como condiciones de contorno periódicas que seleccionan de entre el espacio de Hilbert original $\mathcal{H}(\tilde{G})$ aquellas funciones de onda que son cuasiperiódicas, es decir, que cambian en una fase $e^{i\varphi_1}$ bajo una traslación de x_1 por una cantidad L_1 y en $e^{i\varphi_2}$ bajo una traslación de x_2 por una cantidad L_2 . Si nos restringimos a la representación trivial para \tilde{T} (funciones estrictamente periódicas), la solución general de la condición de T -función $\psi^{(0)}(g_T * g) = \zeta \psi^{(0)}(g)$ para las funciones polarizadas en (7.10) es:

$$\chi^0(\tau, y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta_k^0(\tau, y), \quad (7.24)$$

donde

$$\Delta_k^0(\tau, y) = e^{i2\pi k(\frac{y}{L_2} - \frac{\delta}{2n}\tau k)} \sum_{q \in Z} e^{i2\pi n q[\frac{y}{L_2} - \frac{\delta}{2n}\tau(k^2 + nq)]}, \quad (7.25)$$

$\delta \equiv \frac{L_1}{L_2}$ y a_k son n coeficientes arbitrarios. Estas funciones también pueden escribirse como:

$$\Delta_k^0(\tau, y) = e^{i\frac{\delta L_2^2 \tau}{4\pi n} \frac{d^2}{dy^2}} \Delta_k^0(y), \quad (7.26)$$

donde las n funciones $\Delta_k^0(y) = e^{i2\pi k \frac{y}{L_2}} \sum_{q \in Z} \delta(y - \frac{q}{n} L_2)$ son las T -funciones que hubiésemos obtenido tomando como punto de partida el grupo de H-W en vez del grupo de Schrödinger (véase [31]). Nótese que el parámetro tiempo τ aparece ahora *compactificado*. Utilizando los resultados en [31], podemos escribir la solución de las condiciones T -función para periodicidad arbitraria en términos de estas funciones restringidas a H-W como $\Delta_k^{\tilde{\varphi}}(y) = e^{i\varphi_1 \frac{y}{L_2}} \Delta_k^0(y + \frac{\varphi_2 L_2}{2\pi n})$, resultado al cual se puede llegar aplicando operadores de cambio de cuantización (regulares). En definitiva, el espacio de Hilbert de la teoría constreñida $\mathcal{H}^{(\tilde{\varphi})}(\tilde{G})$ está generado por la base $\{\Delta_k^{\tilde{\varphi}}\}_{k=0}^{n-1}$ y, por lo tanto, *es de dimensión finita*.

Para la carta local que contiene a J ($c \neq 0$) el resultado es básicamente el mismo.

El conjunto de operadores buenos para este caso hay que buscarlo en el normalizador de T en \tilde{G} el cual resulta ser (este resultado también es válido en el caso fraccionario):

$$\begin{aligned} N(T) &\equiv \left\{ \tilde{g}_N \in \tilde{G} / \tilde{g}_N * \tilde{t} * \tilde{g}_N^{-1} \in T, \forall \tilde{t} \in T \right\} \\ &= \left\{ \tilde{g}_N = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right), x_1, x_2, \zeta \in \tilde{G} / a, b\delta^{-1}, c\delta, d \in Z; x_1, x_2 \in R; \zeta \in U(1) \right\} \end{aligned} \quad (7.27)$$

o sea, el producto semidirecto de $SL(2, Z)$ (subgrupo de $SL(2, \mathfrak{R})$ hecho de matrices con entradas enteras) por el subgrupo de H-W. Aplicando la caracterización de operador bueno dada en (3.32) (la

cual equivale en este caso a (3.20) por ser T abeliano), obtenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (a-1)\frac{\varphi_1}{2\pi} + c\delta\frac{\varphi_2}{2\pi} + n\left(-a\frac{x_2}{L_2} + c\delta\frac{x_1}{L_1} - \frac{1}{2}ac\delta\right) &= k \in Z \\ (d-1)\frac{\varphi_2}{2\pi} + b\delta^{-1}\frac{\varphi_1}{2\pi} + n\left(-b\delta^{-1}\frac{x_2}{L_2} + d\frac{x_1}{L_1} - \frac{1}{2}db\delta^{-1}\right) &= k' \in Z. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Procedamos por partes al cálculo concreto de operadores buenos.

A) En lo que respecta al subgrupo de H-W (es decir, para $a = d = 1$ y $b = c = 0$), se llega al mismo resultado que en [31], sólo las traslaciones finitas

$$\begin{aligned} (\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}} &\equiv (I_2, x_1 = k_1\frac{L_1}{n}, 0, 1) \\ (\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}} &\equiv (I_2, 0, x_2 = k_2\frac{L_2}{n}, 1), \end{aligned} \quad (7.29)$$

con $k_1, k_2 \in Z$, sobreviven a la ligadura. De aquí se desprende una consecuencia muy importante: no ya sólo las funciones $(\eta_1)^{k_1} = e^{i2\pi k_1 \frac{x_1}{L_1}}$ y $(\eta_2)^{k_2} = e^{i2\pi k_2 \frac{x_2}{L_2}}$, periódicas en x_1 y x_2 , se cuantizan como operadores buenos $(\hat{\eta}_1)^{k_1}$ y $(\hat{\eta}_2)^{k_2}$ [es decir, toda el álgebra de Poisson de funciones analíticas sobre la variedad simpléctica $S^1 \times S^1$ (véase [74]), sino ¡también sus raíces n -ésimas! [esto es posible gracias a que las funciones de onda son secciones de un fibrado vectorial de dimensión n sobre el toro]. Este hecho, junto con la escapatoria a los teoremas no-go del capítulo anterior, es una manifestación más de que la “falta de analiticidad” (hasta cierto punto) no es un obstáculo serio para nuestro método de cuantización, resultando a veces hasta “natural”.

Por completitud, podemos dar la acción de dichos operadores restringida a las funciones de onda sobre H-W mencionadas anteriormente, ésta es:

$$\begin{aligned} (\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}} \Delta_k^{\vec{\varphi}}(y) &= e^{\frac{i}{n}(2\pi k - \varphi_2)} \Delta_k^{\vec{\varphi}}(y) \\ (\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}} \Delta_k^{\vec{\varphi}}(y) &= e^{\frac{i}{n}\varphi_1 k_2} \Delta_{k-k_2 \bmod n}^{\vec{\varphi}}(y) \end{aligned} \quad (7.30)$$

Hagamos un breve inciso y comentemos algunas propiedades interesantes que aparecen en la literatura referentes al subgrupo (infinito)

$$W_n \equiv \left\{ (\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}} (\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}}, k_1, k_2 \in Z, \right\} \subset \tilde{G}_T^{(\vec{\varphi})}, \quad (7.31)$$

de operadores buenos generados por $(\hat{\eta}_1)^{\frac{1}{n}}$ y $(\hat{\eta}_2)^{\frac{1}{n}}$ o, mejor dicho, al álgebra obtenida al considerar los elementos de este grupo, o más bien una representación matricial de él, como generadores de un espacio vectorial con el conmutador usual de matrices como corchete de Lie (*álgebras trigonométricas* [75]). Como grupo, W_n tiene estructura de fibrado principal con base $Z \times Z$ y fibra $Z_n \subset U(1)$ (conjunto de raíces n -ésimas de la unidad) Por ser n entero, este grupo discreto tiene centro, de forma que si tomamos cociente por él (esto es lo que hace la condición de T -función), nos queda un grupo finito generado por $\{(\hat{\eta}_1)^{\frac{k_1}{n}} (\hat{\eta}_2)^{\frac{k_2}{n}}, k_1, k_2 = 0, \dots, n-1\}$. Este grupo finito, que puede verse como una versión finita del grupo de H-W, constituye un fibrado principal con base $Z_n \times Z_n$ y fibra $Z_n \subset U(1)$, y admite una representación matricial simple [76] (véase también [75] y [67]). El álgebra del grupo correspondiente resulta ser la de $SU(n) \times U(1)$ para n impar o la de $U(n/2)$ para n par, en una base trigonométrica [75]. Por medio de esta representación, el límite $n \rightarrow \infty$ (lo que podríamos llamar el límite clásico) es particularmente sencillo de realizar, dando lugar al álgebra de difeomorfismos (que preservan el área) de una superficie bidimensional (el toro, en este caso). Este álgebra, que se denomina ω_∞ en la literatura, es la versión clásica de una diversidad de álgebras de dimensión infinita denominadas colectivamente W_∞ , de interés creciente día a día (véase [77] para un *review*). En este sentido, el subgrupo de operadores buenos W_n puede verse como la versión cuántica del álgebra de difeomorfismos del toro, constituyendo de esta forma una realización de álgebra W_∞ sobre el toro.

En la sección siguiente veremos que W_n representa el conjunto de *Wilson loops* de una teoría de Chern-Simon abeliana sobre el toro [78, 79].

B) En lo que respecta al subgrupo $SL(2, \mathfrak{R})$ (es decir, para $x_1 = x_2 = 0$), la condición (7.28) dice que el máximo subgrupo que sobrevive tras la ligadura es $SL(2, Z)$, y sólo para:

- (i) funciones estrictamente periódicas ($\varphi_1 = 2\pi m_1$, $\varphi_2 = 2\pi m_2$ con $m_1, m_2 \in Z$) y n par
- (i) funciones antiperiódicas ($\varphi_1 = \pi(2m_1 + 1)$, $\varphi_2 = \pi(2m_2 + 1)$ con $m_1, m_2 \in Z$) y n impar

es cuando se consigue la *invariancia modular* completa.

Para estos casos el conjunto total de operadores buenos resulta ser mayor que el mero producto de W_n por $SL(2, Z)$, obteniéndose de (7.28) que todos los elementos de la forma:

$$\tilde{G}_T = \left\{ (S, \frac{1}{n} S J^m L_{\vec{k}}, \zeta) / S \in SL(2, Z), m = 0, 1, 2, 3, \vec{k} \in Z \times Z, \zeta \in U(1) \right\} \quad (7.32)$$

respetan, tanto las condiciones periódicas (para n par) como las antiperiódicas (para n impar).

Para periodicidad arbitraria sólo sobrevive, en general, un subgrupo de $SL(2, Z)$ (aparte de W_n , claro está). En particular, existen tres casos interesantes que son:

- (i) Cuando ambos, $\frac{\varphi_1}{2\pi}$ y $\frac{\varphi_2}{2\pi}$, son irracionales, la identidad I_2 es el único elemento de $SL(2, Z)$ que sobrevive.
- (ii) Cuando $\frac{\varphi_1}{2\pi}$ es irracional y $\frac{\varphi_2}{2\pi} = \frac{p}{q}$ es racional, el único subgrupo de transformaciones modulares que sobrevive son las transformaciones triangulares superiores $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon q \delta^{-1} k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in Z$ y con $\epsilon = 1$ para n par y $\epsilon = 2$ para n impar (al intercambiar los papeles de 1 y 2, se intercambian las transformaciones triangulares superiores por inferiores).
- (iii) Si $\frac{\varphi_2}{2\pi} = \frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{\varphi_2}{2\pi} = \frac{p_2}{q_2}$ son racionales, las transformaciones modulares que sobreviven vienen dadas por las soluciones de la siguientes ecuaciones diofánticas:

$$\begin{aligned} (a-1) \frac{p_1}{q_1} + c\delta \frac{p_2}{q_2} - n \frac{ac\delta}{2} &= k \in Z \\ b\delta^{-1} \frac{p_1}{q_1} + (d-1) \frac{p_2}{q_2} - n \frac{db\delta^{-1}}{2} &= k' \in Z. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Para este caso es posible reinsertar los operadores malos de $SL(2, Z)$ como operadores regulares de cambio de cuantización actuando sobre fibrados vectoriales de dimensión dependiente de los valores de q_1 y q_2 .

Caso fraccionario

Para este caso dejaremos de lado la determinación explícita de las funciones de onda constreñidas, las cuales se podrían obtener a partir de las funciones de onda restringidas al subgrupo de H-W calculadas en [31] aplicando el operador pseudodiferencial $e^{i \frac{\delta L_2^2 \tau}{4\pi n} \frac{d^2}{dy^2}}$ como en la ecuación (7.26). Nos limitaremos pues al cálculo de los operadores buenos, utilizando para ello la caracterización dada en (3.32). Según esta caracterización, las transformaciones buenas \tilde{g}_T de \tilde{G} son aquellas que envían la representación $D_T^{(\vec{\varphi})}$ de T a una equivalente bajo la acción adjunta

$$D_T^{(\vec{\varphi}, \tilde{g}_T)}(\tilde{t}) \equiv D_T^{(\vec{\varphi})}(\tilde{g}_T * \tilde{t} * \tilde{g}_T^{-1}) = V(\tilde{g}_T) D^{(\vec{\varphi})}(\tilde{t}) V(\tilde{g}_T)^\dagger \quad \forall \tilde{t} \in T, \quad (7.34)$$

donde $V(\tilde{g}_T)$ es la matriz unitaria que realiza la transformación. Una primera aproximación consiste en mirar al normalizador $N(T)$ de T , el cual viene definido como en (7.27), siendo ahora la acción adjunta de $\tilde{g}_N = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x_1, x_2, \zeta' \right) \in \tilde{G}$ sobre un elemento $\tilde{t} = (I_2, k_1 L_1, k_2 L_2, \zeta) \in T$ de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{g}_N * \tilde{t} * \tilde{g}_N^{-1} &= (I_2, (ak_1 + b\delta^{-1}k_2)L_1, (c\delta k_1 + dk_2)L_2, \\ &\zeta e^{i2\pi \frac{n}{r} [(-a\frac{x_2}{L_2} + c\delta\frac{x_1}{L_1})k_1 + (-b\delta^{-1}\frac{x_2}{L_2} + d\frac{x_1}{L_1})k_2]} \equiv \tilde{t}'. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Exigiendo que $\tilde{t}' \in T$, llegamos a la misma conclusión que en (7.27) respecto a los valores de a, b, c, d , es decir, en principio, sólo las transformaciones de $SL(2, Z)$ sobreviven a la ligadura. Procedamos por partes al cálculo de operadores buenos como en el caso entero anterior.

A) En lo que respecta al subgrupo de H-W = $\{\tilde{h} = (I_2, x_1, x_2, \zeta) \in \tilde{G}\}$, la condición (7.34) aplicada a la representación de T dada en (7.21) se escribe como:

$$e^{i2\pi \frac{n}{r} (-\frac{x_2}{L_2}k_1 + \frac{x_1}{L_1}k_2)} A_r^{k_1} B_r^{k_2} = V(\tilde{h}) A_r^{k_1} B_r^{k_2} V(\tilde{h})^\dagger. \quad (7.36)$$

la cual es un caso particular de equivalencia entre las representaciones $D_T^{(\mu_1, \mu_2)}$ y $D_T^{(0,0)}$ de T estudiadas en la sección anterior (caso fraccionario) y, por lo tanto, se deduce que $x_1 = k_1 \frac{L_1}{n}$ y $x_2 = k_2 \frac{L_2}{n}$, con $k_1, k_2 \in Z$. O sea, volvemos a obtener que W_n en (7.31) es bueno, esta vez para todos los valores de $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \frac{2\pi}{r})$.

B) En lo que respecta a $SL(2, Z)$, bastará con analizar la “bondad” de los dos elementos

$$g_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

los cuales generan $SL(2, Z)$, para las diferentes cuasiperiodicidades y valores de n y r . Para g_1 se obtiene la condición:

$$e^{i2\pi k_2 (\frac{\varphi_1}{2\pi} - \frac{nk_2}{2r})} A_r^{k_1+k_2} B_r^{k_2} = V(g_1) A_r^{k_1} B_r^{k_2} V(g_1)^\dagger, \quad \forall k_1, k_2 \in Z, \quad (7.38)$$

la cual se verifica si

- (i) $\varphi_1 = 0$ y nr es par, o bien si
- (ii) $\varphi_1 = \frac{\pi}{r}$ y nr es impar.

Para el primer caso la matriz unitaria $V(g_1)$ tiene la forma $V(g_1)_{ij} = \omega_r^{\frac{(i-1)^2}{2}} \delta_{ij}$, y para el segundo $V(g_1)_{ij} = \omega_r^{\frac{i-1}{2n}} \omega_r^{\frac{(i-1)^2}{2}} \delta_{ij}$.

Para que g_2 sea bueno tiene que cumplirse que:

$$e^{i2\pi k_1 (\frac{\varphi_2}{2\pi} - \frac{nk_1}{2r})} A_r^{k_1} B_r^{k_1+k_2} = V(g_2) A_r^{k_1} B_r^{k_2} V(g_2)^\dagger, \quad \forall k_1, k_2 \in Z. \quad (7.39)$$

condición que se verifica si

- (i) $\varphi_2 = 0$ y nr es par, o bien si
- (ii) $\varphi_2 = \frac{\pi}{r}$ y nr es impar.

La matriz unitaria $V(g_2)$ tiene la forma:

$$V(g_2) = V = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{(r-1)(r-2)}{\omega_r^2} & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \\ \omega_r & 1 & \dots & \dots & \\ \omega_r^3 & \omega_r & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \omega_r \frac{(r-1)(r-2)}{2} \\ \frac{(r-1)(r-2)}{\omega_r^2} & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } nr \text{ es par}$$

$$V(g_2) = A_r^{\frac{1}{2n}} V \text{ si } nr \text{ es impar,}$$

donde $(A_r^{\frac{1}{2n}})_{ij} = e^{i\pi \frac{i-1}{r}} \delta_{ij}$.

En definitiva, los valores de $\vec{\varphi}$ para los cuales se tiene invariancia modular completa se corresponden con funciones de onda periódicas para nr par o con antiperiódicas si nr es impar, donde dichas condiciones de contorno periódicas se entienden con respecto a traslaciones por rL_1 y rL_2 (toro r veces más grande en las dos direcciones). La representación $\rho(g_l)$, $l = 1, 2$ sobre el espacio de Hilbert constreñido de dimensión nr descompone en producto de representaciones $\rho_{ij;ab}(g_l) = V_{ij}U_{ab}$, $i, j = 1, \dots, r$; $a, b = 1, \dots, n$ actuando sobre “índices del espacio de gauge” i, j y sobre “índices del espacio físico” a, b , en la nomenclatura de Teorías de Chern-Simons [79].

Para comparar los resultados obtenidos con otros presentes en la literatura (y referentes casi todos a Teorías de Chern-Simons) veamos en detalle cómo atacar una teoría de Chern-Simons desde nuestra perspectiva y cómo se pueden trasladar todos los resultados obtenidos para el grupo de Schrödinger total a dichas teorías. Para ello recurriremos a la sección 4.1 para la construcción del grupo de cuantización a partir de la acción de Chern-Simons.

7.2 Teoría de Chern-Simons abeliana en 2+1 dimensiones

Sea M una variedad tridimensional globalmente hiperbólica, es decir, descomponible en producto directo $M = \Sigma \times \mathfrak{R}$ con Σ una variedad bidimensional orientable.

La acción para una teoría de Chern-Simons abeliana viene dada por [80]:

$$S_{ACS} = \frac{k}{4\pi} \int_M (A \wedge dA) \quad (7.40)$$

donde A es una 1-forma en M valorada en el álgebra de Lie \mathcal{K} de un grupo de Lie abeliano K [la generalización a dimensiones impares $(2D + 1)$ mayores es directa teniendo en cuenta que, ahora, A es una D - forma]. Es directo comprobar que la acción S_{ACS} es invariante bajo transformaciones de gauge $A \rightarrow A + d\Lambda$ para cualquier $\Lambda : M \rightarrow \mathcal{K}$.

Las ecuaciones de movimiento y el producto canónico (4.7), el cual es conservado sobre soluciones, se escriben:

$$dA \equiv F = 0 \quad (7.41)$$

$$\Omega_{ACS}(A', A) = \int_{\Sigma} J = \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma} A' \wedge A, \quad (7.42)$$

donde $J^\mu \equiv \frac{k}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\sigma} A'_\nu A_\sigma$ es la corriente canónica. El espacio vectorial de soluciones \mathcal{S}_{ACS} es pues el conjunto de todas las conexiones planas sobre M .

Dado que la derivada exterior d conmuta con la operación “pullback” $*$ (véase capítulo 2), si f es un difeomorfismo de M , y $A', A \in \mathcal{S}_{ACS}$, entonces $A' + f^*A$ es también solución.

Con todo esto, la siguiente ley de composición define la ley de grupo para el grupo de cuantización \tilde{G}_{ACS} de una teoría de Chern-Simons abeliana:

$$\begin{aligned} f'' &= f' \circ f, & f, f', f'' &\in \text{Diff}(M) \\ A'' &= f^{-1*}A' + A \\ \zeta'' &= \zeta\zeta' \exp \Omega_{ACS}(f^{-1*}A', A) \end{aligned} \quad (7.43)$$

El subgrupo característico resulta ser $G_c(ACS) = \{(f, A, 1) / A = d\Lambda \text{ para algún } \Lambda : M \rightarrow \mathcal{K}\}$, el cual contiene al grupo de gauge de la teoría [si elegimos $\Sigma \equiv \{x^0 = \text{cte} \in \mathfrak{R}\}$, entonces la componente A_0 de la conexión es directamente gauge]. Las condiciones de polarización (4.57) implican pues que las funciones de onda dependen sólo de cantidades topológicas e invariantes gauge. Para estas teorías se sabe que toda la información invariante gauge de una conexión A está contenida en los *Wilson loops*, definidos como:

$$W(A, \gamma) = \exp \int_{\gamma} A \quad (7.44)$$

para cualquier loop (camino cerrado o lazo) γ en M . Al ser las conexiones planas (puro gauge), los Wilson loops sólo dependerán de la clase de homotopía $[\gamma] \in \Pi_1(\Sigma)$ del correspondiente lazo γ . Para $\Sigma = S^1 \times S^1$ y $K = U(1)$, el grupo de homotopía se genera a partir de dos elementos $[\gamma_j]$, $j = 1, 2$, correspondientes a lazos (que dan una sola vuelta, o que tienen “winding number” igual a uno) en la dirección de cada una de las circunferencias en el toro (“handles”). De esta manera, los Wilson loops (7.44) vienen dados por:

$$W(A, [\gamma]) = e^{2\pi i \sum_{j=1}^2 n_j a_j} \quad (7.45)$$

donde n_j es el “winding number” de $[\gamma]$ en el “handle” j , y a_j son parametrizaciones locales de A_j correspondientes a una separación $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \nabla U(\mathbf{x}) + \mathbf{a}(t)$ en términos de una función U univaluada sobre el toro con valores en el grupo de gauge $K = U(1)$ y variables a_j independientes de \mathbf{x} . Debemos notar que el cociente por las transformaciones de gauge se ha impuesto sólo parcialmente ya que queda tomar cociente por lo que se denominan *transformaciones de gauge globales* [79] y que hacen referencia a invariancia bajo cambios de la forma

$$a_j \rightarrow a_j + k_j, \quad k_j \in Z \quad (7.46)$$

en (7.45). Con esto, hemos reducido la cuantización de una teoría de campos (con infinitos grados de libertad), dada por el grupo de cuantización (7.43), a la cuantización del grupo de H-W en una dimensión (una coordenada y un momento) con grupo de estructura $T \sim Z \times Z \times U(1)$ [grupo de transformaciones de gauge globales (7.46)]. La invariancia modular entra en juego a través del cociente $\text{Diff}(M)/\text{Diff}_0(M)$ (véase [6]) de los difeomorfismos de M por aquellos que son conexos con la identidad y que, de acuerdo con la ecuación de movimiento (7.41), actúan trivialmente sobre la parte invariante gauge de la conexión (Wilson loops).

Resumiendo:

- La constante de acoplamiento k juega el mismo papel aquí que el flujo ϕ en el grupo de Schrödinger toral, determinando el carácter del espacio de Hilbert resultante (finitodimensional (!))
- El conjunto de Wilson loops (7.45) es a la teoría de CS lo que el conjunto de operadores buenos W_n es al grupo de Schrödinger toral

- El grupo de transformaciones de gauge globales no es más que el grupo de estructura T . Para el caso de una constante de acoplamiento k fraccionaria, se habla de *grupo de gauge anómalo* [79]; aquí la anomalía hace referencia a la fibración no trivial de T que lo hace ser no abeliano, al contrario del grupo de gauge primitivo K correspondiente a la teoría clásica.
- El grupo característico de T se corresponde con el conjunto de operadores de Casimir de la teoría, cuyos índices φ_1, φ_2 (los “vacuum angles” [79]) parametrizan las distintas representaciones unitarias e irreducibles de la teoría.

La teoría de Chern-Simons constituye así un ejemplo de reducción drástica del número de grados de libertad (de infinitos a un número finito) debido a la existencia de una invariancia gauge muy grande a la que sobreviven sólo aquellos cuyo origen es puramente topológico.

7.2.1 Comparación con otros resultados

Comparando nuestros resultados con algunos dados en la literatura, obtenemos un completo acuerdo con la referencia [78], en el contexto también de una teoría de Chern-Simons abeliana $U(1)$ sobre el toro, en lo que respecta al caso entero. Para el caso fraccionario obtenemos un resultado diferente, ya que [78] obtiene invariancia modular sólo para n par (y cualquier valor de r). Creemos que la diferencia radica en el rango de representaciones no equivalentes para T , el cual resulta ser menor para nosotros debido a la existencia de transformaciones unitarias no triviales, como $A_r^{\frac{1}{n}}$ y $B_r^{m_0}$ dadas en la sección anterior [casos (i), (ii) antes de (7.23)], que relacionan representaciones que se han considerado no equivalentes en la literatura.

El mismo problema fue estudiado en la referencia [79] (también en el contexto de una teoría de Chern-Simons abeliana $U(1)$ sobre el toro y mecánica cuántica de anyones) donde se obtuvo invariancia modular completa para ambos casos, entero y fraccionario, y periodicidad $\frac{1}{2}$, independientemente de la paridad de la *constante de acoplamiento* k (equivalente a nuestro flujo ϕ). Un análisis más cuidadoso revela que, para nr par, la periodicidad $\frac{1}{2}$ para ellos es equivalente a la 0 y que, para nr impar, la periodicidad $\frac{1}{2}$ es equivalente a nuestro caso de funciones antiperiódicas. En definitiva, sus resultados están de acuerdo con los nuestros.

7.3 Invariancia Modular y Efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario

Sin menospreciar la cuantización de las teorías de Chern-Simons, la cual ha sido y es objeto de muchos estudios relacionados incluso con la cuantización de la gravedad, el Efecto Hall Cuántico Entero y Fraccionario [81, 82, 83] resulta ser uno de los fenómenos cuánticos más atractivos, desde el punto de vista tanto experimental como teórico, bajo el cual subyace el mismo tipo de simetría que en aquellas. En efecto, el grupo de H-W toral se realiza en estos sistemas [estructura bidimensional de electrones que no interaccionan entre ellos (esta condición puede relajarse) sometidos a un campo magnético perpendicular H] por medio de *traslaciones magnéticas* en las dos direcciones espaciales. Para ver ésto con un poco de más detalle, restrinjámonos a una partícula y tomemos, por simplicidad, un potencial constante como ejemplo de potencial periódico. El grupo de cuantización para dicha partícula viene dado por (véase [31]):

$$\begin{aligned}
 t'' &= t' + t \\
 \vec{r}'' &= \vec{r} + \hat{M}^{-1}(t) \cdot \vec{r}' \\
 \vec{R}'' &= \vec{R}' + \vec{R} \\
 \zeta'' &= \zeta' \zeta e^{\frac{i}{\hbar} m \omega_c [\frac{1}{2} \vec{r}' \cdot \hat{N}(t) \cdot \vec{r}' + (\frac{1}{2} R'_1 R_2 - \frac{1}{2} R'_2 R_1)]},
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

donde $\hat{M}(t) \equiv \cos \omega_c t \hat{I} - \sin \omega_c t \hat{J}$ (con $\hat{J}_{ij} \equiv \epsilon_{ij}$, $\epsilon_{12} = 1$ e \hat{I} la matriz identidad 2×2) es una matriz 2×2 , y donde se ha descompuesto el vector de posición \vec{x} de la partícula en $\vec{x} = \vec{R} + \vec{r}$; la coordenada \vec{R}

hace referencia al “centro de la trayectoria” (es directo ver que son circunferencias [84, 85], la constante $\omega_c = eH/mc$ haciendo referencia a la *frecuencia ciclotrón*) y la coordenada \vec{r} es la coordenada relativa a este centro (coordenada “radial”).

Las relaciones de conmutación para los campos de vectores (izquierdos) en esta parametrización son:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_{\vec{r}}^L] &= \omega_c \hat{\mathbf{J}} \cdot \tilde{X}_{\vec{r}}^L \\
 [\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_{\vec{R}}^L] &= 0 \\
 [\tilde{X}_{r^i}^L, \tilde{X}_{r^j}^L] &= \frac{m\omega_c}{\hbar} \epsilon_{ij} \Xi \\
 [\tilde{X}_{R^i}^L, \tilde{X}_{R^j}^L] &= -\frac{m\omega_c}{\hbar} \epsilon_{ij} \Xi \\
 [\tilde{X}_{\vec{r}}^L, \tilde{X}_{\vec{R}}^L] &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

Un vistazo al álgebra (7.48) nos revela que se trata de una extensión central de la suma directa del álgebra del oscilador armónico (no extendida) y el álgebra de Heisenberg-Weyl (no extendida), que realiza precisamente las traslaciones magnéticas en las dos direcciones. Como consecuencia, podemos anticipar que la función de onda consistirá en una función de onda del oscilador armónico (dependiendo de t y \vec{r}) por una función de \vec{R} , y el espectro de energías coincidirá con el del oscilador armónico, aunque la degeneración de cada nivel de energía es infinita debida a la simetría del grupo de H-W, que tiene sólo representaciones unitarias de dimensión infinita (en el plano). Esta degeneración pasa a ser finita cuando se imponen condiciones de contorno periódicas que afectan a la coordenada \vec{R} , degeneración que depende del valor del flujo magnético $\phi = \frac{m\omega L_1 L_2}{2\pi\hbar} = \frac{eHL_1 L_2}{2\pi\hbar c}$ (en unidades de flujo elemental $2\pi\hbar$) de H a través de cada celda de dimensiones $L_1 L_2$ (toro). La cuantización del flujo de H a través de la superficie del toro es de la misma naturaleza que la *cuantización de la carga del monopolo* de Dirac [la única forma de obtener un campo magnético perpendicular a una superficie cerrada es mediante un “monopolo”, cuya carga, cuánticamente, debe estar cuantizada [5]]. El significado físico de tal cuantización hace referencia a que el sistema absorbe campo magnético a saltos (“fluxones”), y no de forma continua. No vamos a obtener la cuantización completa de este sistema; para quién esté interesado en ello, le remitimos a la referencia [31], en la cual se aborda con todo detalle.

Hay que remarcar que el toro en el Efecto Hall no lo constituye el posible sustrato periódico por el cual se mueven los electrones sino, y esto es importante, la propia geometría subyacente al dispositivo experimental destinado a la medición de la conductividad Hall. La Figura 7.1, sacada de la referencia [83], representa el esquema de dicho dispositivo, el cual resulta ser topológicamente equivalente a un toro menos un punto. Por lo tanto, el toro del que estamos hablando es un toro físico que vive en \mathfrak{R}^3 , no sólo del toro matemático estudiado usualmente en conexión con sistemas de partículas sobre un sustrato bidimensional periódico obtenido a partir de \mathfrak{R}^2 por “cirujía”. Aunque desde el punto de vista matemático la diferencia es sólo de carácter métrico, en el mundo real las partículas que se mueven en este dispositivo se ven sometidos a manipulaciones normales de \mathfrak{R}^3 , tales como rotaciones, bajo las cuales se puede manifestar el carácter espinorial de las partículas (no se trata de anyone pues...).

Este sistema cuántico fue estudiado de forma extensa por [81, 82], quienes encontraron que la conductancia Hall $\sigma_{x_1 x_2}$ (véase el dispositivo experimental para medir ésta en la Figura 7.1) calculada a partir de la fórmula de Kubo-Greenwood [86], era un invariante topológico (no sensible a deformaciones del sustrato); más precisamente, un múltiplo entero (ν) de e^2/h (véase Figura 7.2).

Más tarde, esta integral fue reconocida como la primera clase de Chern de un fibrado principal con base el toro T^2 y fibra $U(1)$ [87]; las fibras son las funciones de onda magnéticas de Bloch y el toro se corresponde con la primera zona de Brillouin magnética $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$. Fue necesaria una generalización de estas ideas cuando se detectaron valores fraccionarios de ν (el *factor de llenado*) en experimentos con campos magnéticos grandes (véase Figura 7.3), dando así lugar al desarrollo del Efecto Hall Cuántico Fraccionario (FQHE en la literatura), en contraposición con el Efecto Hall

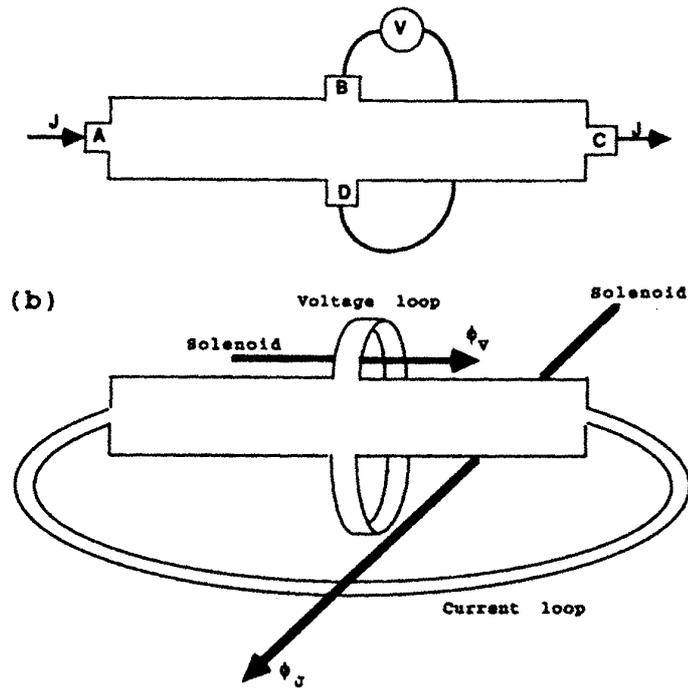


Figura 7.1: Esquema del dispositivo experimental para la medición de la resistencia Hall (toro con un agujero).

Cuántico Entero (IQHE) (véase [86, 88]).

Una característica que llamó especialmente la atención en estos experimentos fue que todos los factores de llenado $\nu = p/q$ aparecían con denominadores q *impares*, hecho que fue atribuido al carácter fermiónico del sistema portador de corriente⁶, mientras que se esperaba que los denominadores *pares* apareciesen en un sistema de bosones. De esta forma, el carácter impar y/o par de q estaría relacionado directamente con la estadística de las partículas. Nosotros nos vemos tentados a apuntar otra razón fundamental para dicha distinción, esta vez, relacionada con la invariancia modular de estos sistemas. Para este propósito, establezcamos primeramente la conexión entre el fenómeno experimental fraccionario (y entero), de acuerdo con el valor de ν , y nuestro caso entero (y fraccionario), de acuerdo con el valor del flujo ϕ . La *dualidad* entre el toro “espacial” $T^2 = (H-W)/T$ y su zona de Brillouin “magnética”, establece una relación recíproca entre el flujo y el factor de llenado: $\nu \sim 1/\phi$. De esta forma, el caso fraccionario $\nu = 1/n$, el cual está asociado a los “estados madre (o padre)” (“parent states”) [89] del FQHE, se corresponde con nuestro caso entero $\phi = n$ (la clase de cohomología entera de la forma simpléctica en el toro espacial), mientras que el caso entero $\nu = r$ se corresponde con nuestro (“puro”) caso fraccionario $\phi = 1/r$. Esta relación está de acuerdo con el hecho de que la cuantización fraccionaria de la conductividad Hall aparezca experimentalmente a campos magnéticos altos ($\phi > 1$). Así, desde nuestro punto de vista, el caso (particular) $\nu = 1/n$ está destacado y, de hecho, salta a la vista cuando se mira la gráfica experimental de la resistencia Hall frente al campo magnético (véase Figura 7.3, sacada de la referencia [90]), en tanto que se corresponde con las mesetas (“plateaus”) más anchas. Cada estado madre $\nu = 1/n$ da lugar a una jerarquía de valores $\nu = r/n$, los cuales se explican usualmente en términos de *cuasipartículas* [91] que obedecen a una estadística fraccionaria [92].

Echando en falta una teoría fundamental que relacione el espín, la estadística y la topología⁷,

⁶Laughlin [89] construyó un sistema de funciones de onda variacionales que daban cuenta de este hecho y que resultaron ser especialmente apropiadas para el estudio de estos sistemas

⁷quizás la CASG tenga algo que decir al respecto en un futuro...

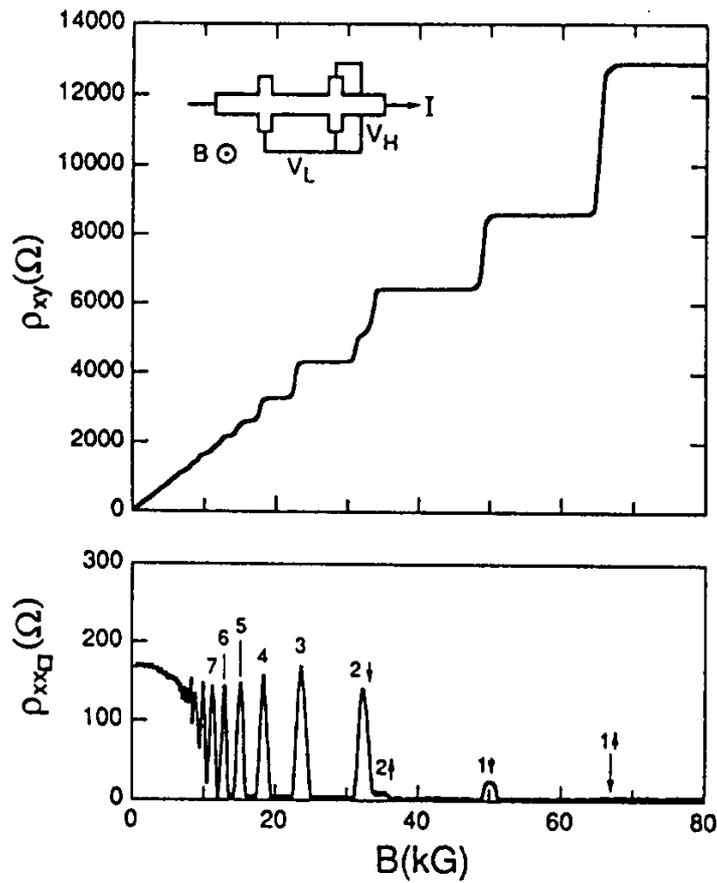


Figura 7.2: Efecto Hall Cuántico Entero.

podríamos conjeturar la asignación de funciones de onda antiperiódicas (periódicas) a los fermiones (bosones), de forma que el requerimiento natural de invariancia modular para estos sistemas explicaría por qué sólo los denominadores impares en $\nu = \frac{1}{n}$ están permitidos para sistemas portadores de carácter fermiónico (de acuerdo con los resultados en la sección 7.1.2, referentes a la implementación de la invariancia modular para el grupo de Schrödinger toral). Para la jerarquía derivada $\nu = r/n$ con r par, el carácter periódico de las funciones de onda podría ser atribuída a algún tipo de bosonización en términos de cuasipartículas.

Con independencia de que esta última conjetura sea cierta o no, creemos que la invariancia modular en el Efecto Hall puede ser relevante para futuras investigaciones, habiéndose dado un estudio matemático concienzudo de la misma en esta memoria (véase también [93]).

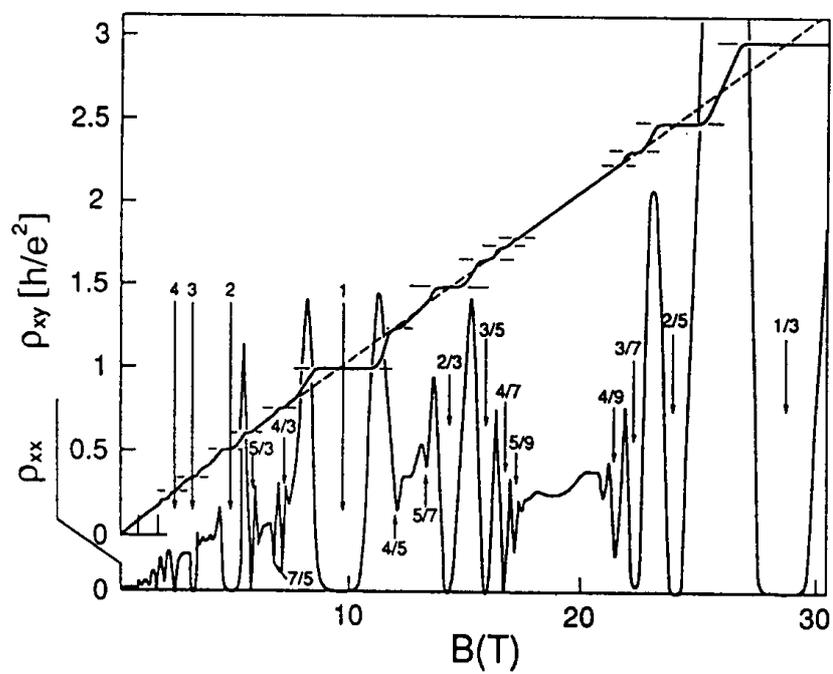


Figura 7.3: Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

Capítulo 8

TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS SOBRE ANTI-DE SITTER

En este capítulo se estudia la cuantización de una teoría de campos sobre un espacio-tiempo curvo no globalmente hiperbólico, en particular, el universo de Anti-de Sitter (AdS), aplicando la teoría general de SCSG desarrollada en el capítulo 5. Este mismo problema ha sido atacado también en las referencias [51] por medio de otros métodos basados en una aproximación por grupos a la cuantización de campos; no obstante, tal como se apunta en la referencia [49], no se tuvieron en cuenta los efectos “perniciosos” de la falta de hiperbolicidad global referentes a la ausencia de hipersuperficies de Cauchy donde especificar las condiciones iniciales para el campo “clásico”. Al contrario que en estos otros métodos de cuantización, la existencia o no de hipersuperficies de Cauchy no es una cuestión determinante en nuestro esquema de cuantización, estando toda la información a cerca de la “propagación del campo” en el 2-cociclo (5.12,5.14). Daremos una expresión explícita del propagador (5.14) para este universo de AdS.

8.1 Mecánica cuántica sobre el universo de AdS

Nos centraremos en el espacio-tiempo de AdS en 1+1 dimensiones, el cual puede verse como un espacio homogéneo del grupo $G = SO(1,2)$ ($SO(3,2)$ en 3+1 dimensiones). Usaremos dos tipos de parametrización de G y dos subálgebras de polarización diferentes; la primera será especialmente apropiada para una interpretación física directa relacionada con el movimiento libre de una partícula en el espacio-tiempo de AdS, mientras que la segunda resultará más apropiada para realizar ciertos cálculos conducentes a la determinación de la ley de grupo de la teoría segundo-cuantizada. Cada una de estas parametrizaciones de G nos llevará, tras una extensión apropiada por $U(1)$, a espacios de representación diferentes relacionados por un *operador de cambio de polarización* (3.16). Veamos primeramente cómo obtener la ley de grupo de G a partir de su acción sobre el espacio-tiempo de AdS y cómo extender dicha ley para obtener el espacio de Hilbert asociado la partícula libre en AdS mediante técnicas de CSG.

8.1.1 Representación en el espacio de configuración

Consideremos el hiperboloide en 3D que define los universos de deSitter y AdS (véase, por ejemplo, [94],[95])

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + \frac{\lambda^2}{k} = \frac{1}{k}, \quad (8.1)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = (+, -)$, $x^\mu = (x^0, x^1)$, λ es la coordenada extra y k representa la curvatura del espacio. Para $k > 0$, la ecuación (8.1) define el espacio-tiempo de AdS (espacio homogéneo de $SO(1,2)$), para

$k < 0$, el espacio-tiempo de deSitter (espacio homogéneo de $SO(2, 1)$) y, para $k = 0$, se consigue el espacio-tiempo de Minkowski.

El elemento de línea en el espacio plano tridimensional definido por (8.1) es

$$c^2(d\tau)^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{k}(d\lambda)^2, \quad (8.2)$$

donde τ representa el tiempo propio. Si despejamos λ de (8.1) y diferenciamos,

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{1 - k\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu} \\ d\lambda &= -\frac{k\eta_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu}{\lambda}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

y después introducimos (8.3) en (8.2),

$$c^2(d\tau)^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{k}{\lambda^2}x^\rho\eta_{\rho\mu}x^\sigma\eta_{\sigma\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (8.4)$$

obtenemos la métrica inducida por (8.2) en el espacio tangente al hiperboloide (8.1); ésta es la métrica de deSitter:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + k\frac{\eta_{\mu\lambda}x^\lambda\eta_{\nu\kappa}x^\kappa}{1 - k\eta_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma}, \quad (8.5)$$

y su inversa

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - kx^\mu x^\nu. \quad (8.6)$$

Definamos los momentos contravariantes para una partícula de masa m como $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{dt}$. Entonces, la ecuación (8.4) puede verse como una ligadura entre los momentos p^μ , es decir, la capa de masas de de de Sitter

$$(p^0)^2 - (p)^2 + \frac{k}{\lambda^2}(p^0 x^0 - px^1)^2 = m^2 c^2. \quad (8.7)$$

Despejando p^0 en términos de p y x^μ , se obtiene que

$$p^0 = \frac{kpx^1x^0 + \lambda\sqrt{m^2c^2 + p^2 + m^2c^2kx^{1^2}}}{1 + kx^{1^2}}. \quad (8.8)$$

A partir de (8.5) se deriva la conexión

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = kx^\mu g_{\nu\lambda}, \quad (8.9)$$

de manera que las geodésicas vienen dadas por las soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -kx^\mu, \quad (8.10)$$

las cuales podrían también interpretarse como las ecuaciones de movimiento de un oscilador relativista [96].

Para dar la acción del grupo de (anti)deSitter G sobre el espacio-tiempo, adoptaremos la prescripción de que los parámetros de AdS se reduzcan a los de la acción del grupo de Poincaré en el límite $k \rightarrow 0$. Denotando por a^0, a^1, p los parámetros de traslación temporal, espacial y “boost”,

respectivamente, del espacio-tiempo de AdS y, por Λ , la versión en el grupo G de la coordenada extra λ , la acción del grupo G sobre AdS mencionada anteriormente resulta ser:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{mc} & \frac{p}{mc} & a^0 \\ \frac{p}{mc} & \frac{p^0}{mc} & a^1 \\ -k\frac{p^0 a^0 - p a^1}{\Lambda mc} & kK & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

donde se ha definido

$$K \equiv \frac{p^0 a^1 - p a^0}{mc}; \quad \Lambda \equiv \sqrt{1 - k(a^{02} - a^{12})}, \quad (8.12)$$

y p^0 se define en términos de a^0, a^1, p como en (8.8). A partir de la acción (8.11) es directo derivar la ley de grupo de G actuando dos veces con distintas transformaciones ($g'' = g' * g$). La forma explícita de esta ley de grupo es:

$$\begin{aligned} a^{0''} &= \frac{p'^0}{mc} a^0 + \frac{P'}{mc} a^1 + \Lambda a^{0'} \\ a^{1''} &= \frac{p'}{mc} a^0 + \frac{P^{0'}}{mc} a^1 + \Lambda a^{1'} \\ p'' &= \frac{p' p^0}{mc} + \frac{P^{0'} p}{mc} - \frac{k}{\Lambda} (p^0 a^0 - p a^1) a^{1'}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

donde hemos definido

$$P^0 \equiv \frac{p^0 + mck a^1 K}{\Lambda}; \quad P \equiv \frac{p + mck a^0 .K}{\Lambda} \quad (8.14)$$

Como aplicación, es conveniente elegir un parámetro tiempo compacto para trabajar con un sistema dinámico cuántico con estados ligados. Si denotamos por

$$t \equiv \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega a^0}{c\beta}; \quad \beta \equiv \sqrt{1 + kx^2}; \quad \omega \equiv \sqrt{kc}; \quad x \equiv a^1 \quad (8.15)$$

y consideramos la parametrización $g = g(t, x, p)$ en G , podemos dar una pseudoextensión de G (recordemos que $SO(1, 2)$ es simple) por $U(1)$ (es decir, un 2-cociclo generado por una función $\delta(g)$ sobre el grupo básico G con gradiente no trivial en la identidad) a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \zeta'' &= \zeta' \zeta e^{\frac{i}{\hbar}(\delta(g'') - \delta(g') - \delta(g))} \in U(1) \\ \delta &\equiv -mc^2 \left(t + \frac{1}{mc^2} f(x, p) \right) \\ f(x, p) &\equiv -\frac{2mc^2}{\omega} \arctan \left[\frac{mc^2}{\omega p x} (\beta - 1) \left(\frac{P_0}{mc} - \beta \right) \right] \\ P_0 &\equiv \sqrt{mc^2 + p^2 + m^2 \omega^2 x^2}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Nótese que la cantidad $\frac{mc^2}{\hbar\omega} \equiv N$ resulta estar cuantizada por cuestiones de globalidad (compacidad de la variable $\zeta \in U(1)$), siendo $N = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ los valores posibles para la misma¹. La función $f(x, p)$ generaliza la expresión más simple de $f(x, p) \sim xp$, para el caso plano y no relativista, al caso curvo.

La expresión explícita de los campos de vectores izquierdos y derechos en esta parametrización t, x, p, ζ de \tilde{G} resulta ser:

¹más tarde veremos que esta cuantización de N es equivalente, o tiene el mismo origen, que la cuantización del simplín en la sección 6.2

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t^L &= \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - m\omega^2 x \frac{\partial}{\partial p} + \frac{P_0}{mc\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} \\
\tilde{X}_p^L &= \frac{P_0}{mc} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{mcx}{P_0 + mc} \frac{1}{\hbar} \Xi \\
\tilde{X}_x^L &= \frac{P_0}{mc} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{p}{mc^2\beta^2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{pmc}{P_0 + mc} \frac{1}{\hbar} \Xi,
\end{aligned} \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t^R &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\tilde{X}_p^R &= \frac{\beta}{m\omega} \sin \omega t \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\omega xp}{mc^2\beta} \sin \omega t + \frac{P_0}{mc\beta} \cos \omega t \right) \frac{\partial}{\partial p} + \\
&\quad \frac{x}{mc^2\beta} \cos \omega t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{(P_0 + mc)\beta} (P_0 x \cos \omega t - \frac{pc}{\omega} \sin \omega t) \frac{1}{\hbar} \Xi \\
\tilde{X}_x^R &= \beta \cos \omega t \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\omega^2 xp}{c^2\beta} \cos \omega t - \frac{P_0\omega}{c\beta} \sin \omega t \right) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{x\omega}{c^2\beta} \sin \omega t \frac{\partial}{\partial t} + \\
&\quad \frac{m}{(P_0 + mc)\beta} (P_0\omega x \sin \omega t + pc \cos \omega t) \frac{1}{\hbar} \Xi,
\end{aligned} \tag{8.18}$$

y las relaciones de conmutación (izquierdas) entre ellos son:

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_x^L] &= -mkc^2 \tilde{X}_p^L \\
[\tilde{X}_t^L, \tilde{X}_p^L] &= \frac{1}{m} \tilde{X}_x^L \\
[\tilde{X}_x^L, \tilde{X}_p^L] &= \frac{1}{mc^2} \tilde{X}_t^L - i \frac{1}{\hbar} \tilde{X}_\zeta^L \\
[\tilde{X}_\zeta^L, \text{all}] &= 0.
\end{aligned} \tag{8.19}$$

La a 1-forma de cuantización y su módulo característico son:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{p(P_0^2 + m^2\omega^2 x^2)}{\beta^2 P_0 (P_0 + mc)} dx - \frac{m^2 c^2 x}{P_0 (P_0 + mc)} dp - c(P_0 - mc) dt + \hbar \frac{d\zeta}{i\zeta} \\
\mathcal{G}_\Theta &= \langle \tilde{X}_t^L \rangle.
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Los invariantes Noether se calculan inmediatamente como $i_{\tilde{X}_R} \Theta$:

$$\begin{aligned}
i_{\tilde{X}_t^R} \Theta &= -c(P_0 - mc) \equiv E \\
i_{\tilde{X}_x^R} \Theta &= \frac{p}{\beta} \cos \omega t + \frac{P_0}{mc\beta} m\omega x \sin \omega t \equiv P \\
i_{\tilde{X}_p^R} \Theta &= -\frac{P_0}{mc\beta} x \cos \omega t + \frac{p}{m\omega\beta} \sin \omega t \equiv -K,
\end{aligned} \tag{8.21}$$

los cuales verifican la restricción clásica de la capa de masas

$$E^2 - m^2 c^2 \omega^2 K^2 - c^2 P^2 = m^2 c^4. \tag{8.22}$$

Para buscar una subálgebra de polarización conducente a una representación de \tilde{G} sobre funciones de onda que dependan arbitrariamente de sólo la coordenada x (representación en el espacio de configuración o de “posiciones”), debemos notar que el generador \tilde{X}_p^L debe estar contenido en dicha polarización. La segunda relación de conmutación en (8.19) nos fuerza pues a tener que “alterar”

el módulo característico $\mathcal{G}_\Theta = \langle \tilde{X}_t^L \rangle$ de acuerdo con un operador de orden superior \tilde{X}_t^{HO} , el cual resulta ser precisamente la versión izquierda del operador de Casimir de \tilde{G} más un término central arbitrario; más explícitamente, la polarización de orden superior que realiza la reducción es:

$$\mathcal{P}^{HO} = \langle \tilde{X}_t^{HO} \equiv (\tilde{X}_t^L)^2 - c^2(\tilde{X}_x^L)^2 - \frac{2imc^2}{\hbar}\tilde{X}_t^L - \gamma\frac{mc^2\omega}{\hbar}\tilde{X}_\zeta^L, \tilde{X}_p^L \rangle, \quad (8.23)$$

donde γ (parámetro numérico acompañando al término central de \tilde{X}_t^{HO}) quedará, por el momento, sin definir.

Debemos aclarar que, en este caso, el uso de polarizaciones de orden superior no está asociado a una anomalía sino, como ya se comentó en la sección 3.1, a una elección particular de espacio de representación, existiendo una polarización completa tal y como veremos en la siguiente subsección. La condición de $U(1)$ -función (3.8) junto con las condiciones de polarización nos llevan a funciones de onda que verifican:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\zeta^L \psi = \psi &\rightarrow \psi = \zeta \phi(x, p, t) \\ \tilde{X}_p^L \psi = 0 &\rightarrow \psi = \zeta e^{\frac{i}{\hbar}(f+mc^2)} \varphi(x, t) \\ \tilde{X}_t^{HO} \psi = 0 &\rightarrow \left(\square_x + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \nu R \right) \varphi = 0, \end{aligned} \quad (8.24)$$

donde $R \equiv -2k$ puede verse como la curvatura escalar (véase, por ejemplo, [46]), $\nu \equiv \frac{N\gamma}{2}$ (he aquí el papel que juega el parámetro γ) y

$$\square_x \equiv \frac{1}{c^2 \beta^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2\omega^2 x}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (8.25)$$

es el operador D'Alambertiano en el espacio-tiempo de AdS. Claramente, para $k \rightarrow 0$, la ecuación (8.24) se reduce a la ecuación usual de Klein-Gordon para una partícula moviéndose en el espacio tiempo de Minkowski.

La ecuación (8.24) puede resolverse desarrollo en serie, dando lugar a las siguientes funciones básicas

$$\varphi_n \equiv e^{-iE_n^{(N,\gamma)} \omega t} \beta^{-E_n^{(N,\gamma)}} H_n^{(N,\gamma)}, \quad (8.26)$$

donde $E_n^{(N,\gamma)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4N(N-\gamma)}}{2} + n$ y $H_n^{(N,\gamma)}(\chi)$ son polinomios en la variable $\chi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ (véase [97, 96] para más detalles). El volumen de integración invariante en \tilde{G} que define el producto escalar se escribe como:

$$\mu(\tilde{g}) = -i \frac{dp \wedge dx \wedge dt \wedge d\zeta}{\zeta P_0}. \quad (8.27)$$

No desarrollaremos por completo el procedimiento de SCSG dentro de esta representación en el espacio de configuración de \tilde{G} sino que, mejor, haremos uso de la representación holomorfa, la cual es más fácil de manejar. Como se ha mencionado anteriormente, ambas representaciones resultan ser equivalentes, ya que existe un operador de cambio de polarización (llamado “transformación de Bargmann relativista” y calculado explícitamente en [98]) que las relaciona.

8.1.2 Representación holomorfa

Introduzcamos un nuevo conjunto de variables (tipo “espacio de Fock”) en el grupo,

$$\begin{aligned} z &\equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p \equiv \sqrt{2N} \frac{\alpha}{1 - \alpha\alpha^*} \\ z^* &\equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p \equiv \sqrt{2N} \frac{\alpha^*}{1 - \alpha\alpha^*}, \end{aligned} \quad (8.28)$$

y un nuevo parámetro tiempo y_0 (sin dimensiones)

$$e^{iy_0} \equiv e^{i\frac{\omega}{2}(t + \frac{1}{mc^2}f)} \equiv \eta. \quad (8.29)$$

Como puede comprobarse fácilmente, los parámetros complejos α, α^* se corresponden precisamente con la proyección del hiperboloide dentro de

$$SU(1, 1) = \left\{ U = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}, z_i, z_i^* \in C / \det(U) = |z_1|^2 - |z_2|^2 = 1 \right\}, \quad (8.30)$$

sobre el disco unidad abierto D_1 . El grupo $SU(1, 1) \sim SO(1, 2)/Z_2$ es un recubridor de $SO(1, 2)$ y su estructura topológica es, como ya comentamos en la sección 6.2, la de un fibrado principal con fibra $U(1)$ y base el hiperboloide. Recordemos la relación entre los parámetros α, α^*, η y z_1, z_2 :

$$\eta \equiv \frac{z_1}{|z_1|}, \quad \alpha \equiv \frac{z_2}{z_1}, \quad \alpha^* \equiv \frac{z_2^*}{z_1^*}, \quad \eta \in U(1), \quad \alpha, \alpha^* \in D_1, \quad (8.31)$$

así como la transformación inversa

$$z_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha\alpha^*}}\eta, \quad z_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha\alpha^*}}\alpha\eta. \quad (8.32)$$

La ley de grupo $U'' = U'U$ en las coordenadas η, α, α^* adquiere ahora la forma siguiente: form:

$$\begin{aligned} \eta'' &= \frac{z_1''}{|z_1''|} = \frac{\eta'\eta + \eta'\eta^*\alpha'\alpha^*}{\sqrt{(1 + \eta^{*2}\alpha'\alpha^*)(1 + \eta^2\alpha\alpha'^*)}} \\ \alpha'' &= \frac{z_2''}{z_1''} = \frac{\alpha\eta^2 + \alpha'}{\eta^2 + \alpha'\alpha^*} \\ \alpha^{*''} &= \frac{z_2^{*''}}{z_1^{*''}} = \frac{\alpha^*\eta^{-2} + \alpha'^*}{\eta^{-2} + \alpha'^*\alpha}, \end{aligned} \quad (8.33)$$

y la forma de la extensión (8.16) se simplifica a

$$\zeta'' = \zeta'\zeta e^{i\xi(g',g)} = \zeta'\zeta \left(\eta''\eta'^{-1}\eta^{-1} \right)^{-2N}, \quad (8.34)$$

donde se hace más clara la condición semientera para el parámetro numérico N dado después de la ecuación (8.16). Este parámetro N caracterizará cada representación irreducible de \tilde{G} .

La forma explícita de los campos de vectores izquierdos y derechos en estas nuevas coordenadas es:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\zeta^L &= \tilde{X}_\zeta^R = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \tilde{X}_\eta^L &= \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + 2\alpha^* \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \\ \tilde{X}_\alpha^L &= -\frac{1}{2}\eta\alpha^* \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} - \alpha^{*2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + N\alpha^* \tilde{X}_\zeta^L \\ \tilde{X}_{\alpha^*}^L &= \frac{1}{2}\eta\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} - N\alpha \tilde{X}_\zeta^L \\ \tilde{X}_\eta^R &= \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \tilde{X}_\alpha^R &= \frac{1}{2}\eta^{-1}\alpha^* \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^{-2}(1 - \alpha\alpha^*) \frac{\partial}{\partial \alpha} - N\eta^{-2}\alpha^* \tilde{X}_\zeta^L \\ \tilde{X}_{\alpha^*}^R &= -\frac{1}{2}\eta^3\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^2(1 - \alpha\alpha^*) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} + N\eta^2\alpha \tilde{X}_\zeta^L. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Ambos conjuntos cierran el álgebra de Lie:

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_\alpha^L] &= 2\tilde{X}_\alpha^L \\
[\tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L] &= -2\tilde{X}_{\alpha^*}^L \\
[\tilde{X}_\alpha^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L] &= \tilde{X}_\eta^L - 2N\tilde{X}_\zeta^L \\
[\tilde{X}_\zeta^L, \text{all}] &= 0,
\end{aligned} \tag{8.36}$$

con un cambio de signo global en las constantes de estructura para los campos derechos. El operador de Casimir adquiere la forma (excepto por una ambigüedad en un término central):

$$\hat{C} = (\tilde{X}_\eta^R - 2N\tilde{X}_\zeta^R)^2 + 2\tilde{X}_\alpha^R\tilde{X}_{\alpha^*}^R + 2\tilde{X}_{\alpha^*}^R\tilde{X}_\alpha^R = -(\tilde{X}_{y_0}^R - 2N\tilde{X}_{y_3}^R)^2 + (\tilde{X}_{y_1}^R)^2 + (\tilde{X}_{y_2}^R)^2, \tag{8.37}$$

donde se ha denotado por $\alpha \equiv y_1 + iy_2$ y $\zeta \equiv e^{iy_3}$, para un uso futuro.

La 1-forma de cuantización y la subálgebra característica adquieren ahora la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{1}{1 - \alpha\alpha^*} \left(4iN\alpha\alpha^*\eta^{-1}d\eta + iN\alpha^*d\alpha - iN\alpha d\alpha^* \right) - i\zeta^{-1}d\zeta \\
\mathcal{G}_\Theta &= \langle \tilde{X}_\eta^L \rangle,
\end{aligned} \tag{8.38}$$

y los invariantes Noether se escriben como:

$$\begin{aligned}
F_\eta &= i\tilde{X}_\eta^R\Theta = \frac{4iN\alpha\alpha^*}{1 - \alpha\alpha^*} \\
F_\alpha &= i\tilde{X}_\alpha^R\Theta = \frac{2iN\eta^{-2}\alpha^*}{1 - \alpha\alpha^*} \\
F_{\alpha^*} &= i\tilde{X}_{\alpha^*}^R\Theta = \frac{-2iN\eta^2\alpha}{1 - \alpha\alpha^*}.
\end{aligned} \tag{8.39}$$

Mirando a los conmutadores (8.36) nos damos cuenta de que existe una subálgebra de polarización de primer orden y completa dentro de esta “imagen holomorfa”, la cual está hecha de:

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_\alpha^L \rangle. \tag{8.40}$$

La solución de la condición de $U(1)$ -función, junto con las condiciones de de polarización (3.9), nos llevan a las siguientes funciones de onda:

$$\begin{aligned}
\psi^{(N)}(\eta, \alpha, \alpha^*, \zeta) &= W_N(\alpha, \alpha^*, \zeta)\phi(s) \\
W_N(\alpha, \alpha^*, \zeta) &= \zeta(1 - \alpha\alpha^*)^N,
\end{aligned} \tag{8.41}$$

donde W_N juega el papel de “vacío” y ϕ es una serie de potencias arbitraria

$$\phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, \tag{8.42}$$

en la variable

$$s \equiv \eta^{-2}\alpha^* = \frac{z_2^*}{z_1}. \tag{8.43}$$

El grupo \tilde{G} actúa en este espacio unidimensional por traslaciones izquierdas ($\tilde{g}'' = \tilde{g}' * \tilde{g}$) como sigue:

$$s \rightarrow s' = \frac{s + \alpha'^*}{\eta'^2(1 + s\alpha')}. \tag{8.44}$$

El volumen de integración invariante por la izquierda adquiere la forma:

$$\begin{aligned}\mu(\alpha, \alpha^*, \eta, \zeta) &= \frac{-i(2\pi)^{-3}}{(1 - \alpha\alpha^*)^2} \eta^{-1} d\eta \wedge d\alpha \wedge d\alpha^* \wedge \zeta^{-1} d\zeta \\ &= \frac{2(2\pi)^{-3}}{(1 - y_1^2 - y_2^2)^2} dy_0 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 ,\end{aligned}\quad (8.45)$$

siendo el rango de integración de cada variable el siguiente:

$$0 \leq y_0 < 2\pi, \quad 0 \leq \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < 1, \quad 0 \leq \arctan \frac{y_2}{y_1} < 2\pi, \quad 0 \leq y_3 < 2\pi . \quad (8.46)$$

Denotemos por $\tilde{\psi}_n^{(N)}(\eta, \alpha, \alpha^*, \zeta) = W_N(\alpha, \alpha^*, \zeta) s^n$ una función básica. El producto escalar de dos de ellas es:

$$\langle \tilde{\psi}_n^{(N)}, \tilde{\psi}_m^{(N)} \rangle = \frac{n!(2N-2)!}{(2N+n-1)!} \delta_{nm} \equiv C_n^{(N)} \delta_{nm}, \quad (8.47)$$

el cual está bien definido (es finito) para valores de $N > \frac{1}{2}$. El conjunto

$$B(\mathcal{H}_N(\tilde{G})) = \left\{ \psi_n^{(N)} \equiv \frac{1}{\sqrt{C_n^{(N)}}} \tilde{\psi}_n^{(N)} \right\} \quad (8.48)$$

es pues ortogonal y completo, es decir, una base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_N(\tilde{G})$.

La acción de los campos de vectores derechos (operadores de la teoría) sobre funciones de onda polarizadas (8.41) tiene la forma explícita:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_\eta^R \psi^{(N)} &= W_N \cdot (-2s \frac{\partial}{\partial s}) \phi(s) \\ \tilde{X}_\alpha^R \psi^{(N)} &= W_N \cdot (-s^2 \frac{\partial}{\partial s} - 2Ns) \phi(s) \\ \tilde{X}_{\alpha^*}^R \psi^{(N)} &= W_N \cdot (\frac{\partial}{\partial s}) \phi(s) \\ \tilde{X}_\zeta^R \psi^{(N)} &= \psi^{(N)},\end{aligned}\quad (8.49)$$

expresión que proporciona una acción de \tilde{G}^R sobre las funciones ϕ , una vez que se quita el factor común W_N .

La acción del operador de Casimir (8.37) sobre funciones de onda polarizadas es:

$$C\psi^{(N)} = 4N(N-1)\psi^{(N)}. \quad (8.50)$$

La correspondiente acción finita (izquierda) de un elemento arbitrario $\tilde{g}' = \tilde{g}'(\eta', \alpha', \alpha^{*'}, \zeta')$ de \tilde{G} sobre una función arbitraria $\psi_n^{(N)}$ de la base (8.48) es:

$$\begin{aligned}\psi_n^{(N)'}(\tilde{g}) \equiv \psi_n^{(N)}(\tilde{g}'^{-1} * \tilde{g}) &= W_N(\alpha, \alpha^*, \zeta) W_N^*(\alpha', \alpha^{*'}, \zeta') \\ &\times (1 - ss'^*)^{-2N-n} (s - s')^n \eta'^{2n},\end{aligned}\quad (8.51)$$

donde se ha hecho uso de que las coordenadas del elemento inverso \tilde{g}^{-1} de un \tilde{g} vienen dadas por:

$$\eta(\tilde{g}^{-1}) = \eta^{-1}, \quad \alpha(\tilde{g}^{-1}) = -\alpha\eta^2, \quad \alpha^*(\tilde{g}^{-1}) = -\alpha^*\eta^{-2}, \quad \zeta(\tilde{g}^{-1}) = \zeta^{-1} \quad (8.52)$$

La acción izquierda de \tilde{G} sobre funciones de onda arbitrarias en $\mathcal{H}_N(\tilde{G})$ puede calcularse desarrollando dichas funciones en serie

$$\psi^{(N)}(\tilde{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n^{(N)}(\tilde{g}), \quad (8.53)$$

en términos de las funciones de la base. Los coeficientes a'_m de la función de onda transformada

$$(\rho(\tilde{g}')\psi^{(N)})(\tilde{g}) = \psi^{(N)}(\tilde{g}'^{-1} * \tilde{g}) \equiv \psi^{(N)'}(\tilde{g}) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} a'_m \psi_m^{(N)}(\tilde{g}) \quad (8.54)$$

pueden calcularse a través de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} a'_m &= \langle \psi_m^{(N)} | \rho(\tilde{g}') | \psi^{(N)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_m^{(N)} | \rho(\tilde{g}') | \psi_n^{(N)} \rangle a_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{mn}^{(N)}(\tilde{g}') a_n \\ \rho_{mn}^{(N)}(\tilde{g}) &= \sqrt{\frac{C_m^{(N)}}{C_n^{(N)}}} \zeta^{-1} \sum_{l=\theta_{nm}}^n \binom{n}{l} \binom{2N+m+l-1}{m-n+l} \times \\ &\quad (-)^l \eta^{2m} \alpha^{*l} \alpha^{m-n+l} (1 - \alpha\alpha^*)^N, \end{aligned} \quad (8.55)$$

donde la función θ_{nm} , en el límite inferior de la última sumatoria, viene definida por $\theta_{nm} \equiv (n - m) \frac{\text{sign}(n-m)+1}{2}$, siendo $\text{sign}(n)$ la función *signo* estándar ($\text{sign}(0) = 1$); esta función garantiza que se cumpla la desigualdad $m - n + l \geq 0$. Estas expresiones nos serán de gran utilidad en la siguiente sección para escribir la ley de grupo de la SCSG para el caso de un campo cuántico (el cual, por simplicidad, consideraremos real) sobre el espacio-tiempo de AdS.

8.2 Teoría Cuántica de Campos sobre el espacio-tiempo curvo de AdS

Apliquemos el formalismo de CSG al grupo centralmente extendido $\tilde{G}^{(2)}$ dado a través de la ley de grupo general en (5.11) para el caso de $G = SO(2,1)$ y representación holomorfa. Usaremos la parametrización tipo “Fourier” (5.17) en términos de las coordenadas a_n , mejor que la parametrización tipo “campo” (5.13) en términos de $f_p(\tilde{g})$. La ley de grupo explícita de $\tilde{G}^{(2)}$ en estas coordenadas resulta ser:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'' &= \tilde{g}' * \tilde{g} \\ a_m'' &= a_m' + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{mn}^{(N)}(\tilde{g}') a_n \\ a_m^{*''} &= a_m^{*'} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{mn}^{(N)*}(\tilde{g}') a_n^* \\ \zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{\kappa}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_m^{*'} \rho_{mn}^{(N)}(\tilde{g}') a_n - a_m' \rho_{mn}^{(N)*}(\tilde{g}') a_n^*). \end{aligned} \quad (8.56)$$

Denotemos por $\partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial a_m}$, $\partial_m^* \equiv \frac{\partial}{\partial a_m^*}$ y usemos la parametrización $\tilde{g}(\eta, \alpha, \alpha^*, \zeta) = \tilde{g}(y_\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$ dada después de (8.37) y (8.45), con el objetivo de tratar con operadores hermíticos $\tilde{X}_{y_\nu}^{R(2)}$. Con esta notación, los campos de vectores izquierdos y derechos se escriben como:

$$\tilde{X}_\zeta^L = \tilde{X}_\zeta^R = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{a_n}^L &= \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{mn}^{(N)}(y) \partial_m + \frac{\kappa}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{mn}^{(N)}(y) a_m^* \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{X}_{a_n^*}^L &= \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{mn}^{(N)*}(y) \partial_m^* - \frac{\kappa}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{mn}^{(N)*}(y) a_m \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{X}_{y_{\nu}}^{L(2)} &= \tilde{X}_{y_{\nu}}^L \\
\tilde{X}_{a_n}^R &= \partial_n - \frac{\kappa}{2} a_n^* \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{X}_{a_n^*}^R &= \partial_n^* + \frac{\kappa}{2} a_n \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{X}_{y_0}^{R(2)} &= \tilde{X}_{y_0}^R + 2i \sum_{m=0}^{\infty} m (a_m \partial_m - a_m^* \partial_m^*) \\
\tilde{X}_{y_1}^{R(2)} &= \tilde{X}_{y_1}^R + \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{(m+1)(2N+m)} (a_m \partial_{m+1} - a_{m+1} \partial_m + a_m^* \partial_{m+1}^* - a_{m+1}^* \partial_m^*) \\
\tilde{X}_{y_2}^{R(2)} &= \tilde{X}_{y_2}^R + i \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{(m+1)(2N+m)} (a_m \partial_{m+1} + a_{m+1} \partial_m - a_m^* \partial_{m+1}^* - a_{m+1}^* \partial_m^*) \\
\tilde{X}_{y_3}^{R(2)} &= \tilde{X}_{y_3}^R - i \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \partial_m - a_m^* \partial_m^*). \tag{8.57}
\end{aligned}$$

Escribimos aquí los conmutadores no triviales entre estos campos de vectores:

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}_{y_0}^{L(2)}, \tilde{X}_{y_1}^{L(2)}] &= -2\tilde{X}_{y_2}^{L(2)} \\
[\tilde{X}_{y_0}^{L(2)}, \tilde{X}_{y_2}^{L(2)}] &= 2\tilde{X}_{y_1}^{L(2)} \\
[\tilde{X}_{y_1}^{L(2)}, \tilde{X}_{y_2}^{L(2)}] &= -2\tilde{X}_{y_0}^{L(2)} + 4N\tilde{X}_{y_3}^{L(2)} \\
[\tilde{X}_{y_0}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n}^L] &= 2in\tilde{X}_{a_n}^L \\
[\tilde{X}_{y_1}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n}^L] &= -\sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1}}^L + \sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1}}^L \\
[\tilde{X}_{y_2}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n}^L] &= i\sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1}}^L + i\sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1}}^L \\
[\tilde{X}_{y_3}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n}^L] &= -i\tilde{X}_{a_n}^L \\
[\tilde{X}_{y_0}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n^*}^L] &= -2in\tilde{X}_{a_n^*}^L \\
[\tilde{X}_{y_1}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n^*}^L] &= -\sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1}^*}^L + \sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1}^*}^L \\
[\tilde{X}_{y_2}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n^*}^L] &= -i\sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1}^*}^L - i\sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1}^*}^L \\
[\tilde{X}_{y_3}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n^*}^L] &= i\tilde{X}_{a_n^*}^L \\
[\tilde{X}_{a_n}^L, \tilde{X}_{a_n^*}^L] &= -\kappa\tilde{X}_{\zeta}^L \delta_{nm}. \tag{8.58}
\end{aligned}$$

La 1-forma de cuantización y el álgebra característica son:

$$\begin{aligned}
\Theta^{(2)} &= \frac{i\kappa}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n da_n^* - a_n^* da_n) - i\zeta^{-1} d\zeta \\
\mathcal{G}_{\Theta^{(2)}} &= \langle \tilde{X}_{y_{\nu}}^{L(2)} \rangle, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{8.59}
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{G}_{\Theta^{(2)}}$ contiene ahora a todos los generadores del grupo \tilde{G} de la primera cuantización. Los invariantes Noether de la teoría segundo-cuantizada se escriben como:

$$\begin{aligned}
F_{a_n} &= i\tilde{X}_{a_n}^R \Theta^{(2)} = -i\kappa a_n^* \\
F_{a_n^*} &= i\tilde{X}_{a_n}^R \Theta^{(2)} = i\kappa a_n \\
F_{y_0}^{(2)} &= i\tilde{X}_{y_0}^{R(2)} \Theta^{(2)} = 2\kappa \sum_{n=0}^{\infty} n a_n^* a_n \\
F_{y_1}^{(2)} &= i\tilde{X}_{y_1}^{R(2)} \Theta^{(2)} = i\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} (a_n^* a_{n+1} - a_{n+1}^* a_n) \\
F_{y_2}^{(2)} &= i\tilde{X}_{y_2}^{R(2)} \Theta^{(2)} = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} (a_n^* a_{n+1} + a_{n+1}^* a_n) \\
F_{y_3}^{(2)} &= i\tilde{X}_{y_3}^{R(2)} \Theta^{(2)} = -\kappa \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* a_n
\end{aligned} \tag{8.60}$$

La subálgebra de polarización es:

$$\mathcal{P}^{(2)} = \langle \tilde{X}_{y_\nu}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_n}^L \rangle, \quad \forall n \geq 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{8.61}$$

y las $U(1)$ -funciones polarizadas tienen la forma:

$$\Psi[a_n, a_n^*, y_\nu, \varsigma] = \varsigma \exp \left\{ -\frac{\kappa}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* a_n \right\} \Phi[a^*] \equiv \Omega \Phi[a^*] \tag{8.62}$$

donde Ω es el vacío de la teoría segundo-cuantizada y Φ es una serie de potencias arbitraria en sus argumentos. He aquí el papel del grupo \tilde{G} de la primera cuantización como herramienta para singularizar un vacío de la teoría segundo-cuantizada; el vacío está asociado con una selección particular de una subálgebra de polarización, de entre las infinitas posibilidades que existirían si no hubiese módulo característico $\mathcal{G}_{\Theta^{(2)}} \sim \tilde{G}$ en la teoría segundo-cuantizada, de acuerdo con las infinitas cuantizaciones no equivalentes del subgrupo de H-W en dimensión infinita. Es decir, el vacío Ω está caracterizado por ser invariante bajo transformaciones de simetría de \tilde{G} ; la no invariancia del vacío bajo transformaciones de simetría es síntoma de que existe una *rotura (dinámica) de la simetría* (veremos un ejemplo de este tipo con todo detalle en el capítulo siguiente, en conexión con el grupo conforme).

La acción de los campos de vectores derechos (operadores de la teoría segundo-cuantizada) sobre las funciones de onda polarizadas (8.62) tiene la forma explícita:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{a_n}^R \Psi &= \Omega \cdot (-\kappa a_n^*) \Phi \equiv \Omega \cdot (-\kappa \hat{a}_n^\dagger) \Phi \\
\tilde{X}_{a_n^*}^R \Psi &= \Omega \cdot \left(\frac{\partial}{\partial a_n^*} \right) \Phi \equiv \Omega \cdot (\hat{a}_n) \Phi \\
\tilde{X}_{y_0}^{R(2)} \Psi &= \Omega \cdot \left(-2i \sum_{n=0}^{\infty} n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \right) \Phi \equiv -i\Omega \hat{F}_{y_0} \Phi \\
\tilde{X}_{y_1}^{R(2)} \Psi &= \Omega \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1} - \hat{a}_{n+1}^\dagger \hat{a}_n) \right) \Phi \equiv -i\Omega \hat{F}_{y_1} \Phi \\
\tilde{X}_{y_2}^{R(2)} \Psi &= \Omega \cdot \left(-i \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1} + \hat{a}_{n+1}^\dagger \hat{a}_n) \right) \Phi \equiv -i\Omega \hat{F}_{y_2} \Phi \\
\tilde{X}_{y_3}^{R(2)} \Psi &= \Omega \cdot \left(i \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \right) \Phi \equiv -i\Omega \hat{F}_{y_3} \Phi,
\end{aligned} \tag{8.63}$$

donde \hat{a}_n y \hat{a}_n^\dagger se interpretan como operadores de creación y aniquilación de “partículas”, \hat{F}_{y_0} se interpreta como el operador energía total (hamiltoniano), \hat{F}_{y_3} representa el operador número de partículas (la carga eléctrica total en el caso complejo), y los restantes operadores se corresponden con otras magnitudes conservadas de la teoría. Como ya se dijo en el capítulo 5, todos estos operadores aparecen *normalmente ordenados* de forma natural. Esta es una de las ventajas de este método de cuantización: la ordenación normal no se introduce a mano sino que está implícita en el propio formalismo.

Retrocedamos a la expresión (8.59) de la 1-forma de cuantización. Nótese que su apariencia tan simple se debe al hecho de que está escrita en términos de las “condiciones iniciales” en (8.60) ocultando el contenido dinámico de la misma. Realizemos el cambio de variables inducido por una acción general del grupo \tilde{G} (véase (8.56))

$$a_n = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm}^{(N)}(y) c_m, \quad (8.64)$$

y expresemos $\Theta^{(2)}$ en términos de las “variables de evolución” c_m . La forma final, tras estos cambios, de la 1-forma de cuantización es:

$$\begin{aligned} \Theta^{(2)} &= \frac{i\kappa}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (c_n dc_n^* - c_n^* dc_n + T_n^\nu(y) dy_\nu) - i\zeta^{-1} d\zeta \\ T_n^\nu(y) &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\rho_{nm}^{(N)}(y) \frac{\partial \rho_{nl}^{(N)*}(y)}{\partial y_\nu} - \rho_{nl}^{(N)*}(y) \frac{\partial \rho_{nm}^{(N)}(y)}{\partial y_\nu} \right) c_l^* c_m. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Las magnitudes $T_n^\nu(y)$ juegan el papel de momentos (por ejemplo, $T_n^0(y)$ es la energía del modo n).

Por completitud, daremos la expresión explícita del propagador (5.14) en el caso presente de polarización holomorfa. Tras unos cuantos cálculos éste resulta ser:

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{g}', \tilde{g}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{(N)}(\tilde{g}') \psi_n^{(N)*}(\tilde{g}) + c.c. \\ &= (2N-1) \frac{\zeta' \zeta^* (1 - \alpha' \alpha^*)^N (1 - \alpha \alpha^*)^N}{(1 - \alpha' \alpha^* \eta'^{-2} \eta^2)^{2N}} + c.c. \end{aligned} \quad (8.66)$$

El correspondiente propagador en el espacio de configuración puede calcularse haciendo uso de la expresión en (5.16) y el operador de cambio de polarización dado en [98].

8.3 Comentarios finales

Como ya hemos mencionado anteriormente, la teoría cuántica de campos sobre espacios curvos $M \sim \{(t, x)\}$ adolece de la falta de una definición precisa de partícula. El carácter infinitodimensional de la variedad simpléctica de soluciones de una teoría de campos es responsable de la existencia de infinitas representaciones unitarias no equivalentes de las relaciones de H-W y no existe criterio alguno, dentro del (sub)grupo de H-W, para seleccionar un vacío privilegiado del correspondiente sistema cuántico. Esta situación no se presenta en el caso finitodimensional de acuerdo con el teorema de Stone-von Newman [52, 53].

En nuestro lenguaje, el origen de este hecho está relacionado con la falta de módulo característico para el subgrupo $H-W \sim \tilde{G}^{(2)}/\tilde{G}$ de $\tilde{G}^{(2)}$; es decir, para el grupo infinitodimensional de H-W, uno puede polarizar las funciones de onda en infinitas direcciones no equivalentes. Así, como ya hemos comentado anteriormente, siempre que podamos embeber el espacio curvo Q en un grupo de cuantización dado \tilde{G} , la existencia de un módulo característico (generado por $\tilde{\mathcal{G}}^L$), contenido en la subálgebra de polarización, fijará uno de estos infinitos vacíos como privilegiado.

Otra cuestión importante era el efecto “desbaratador” que tenía la no existencia de hipersuperficies de Cauchy, para espacio-tiempos no globalmente hiperbólicos, en los formalismos de cuantización covariantes tradicionales. Esta avería, que consiste básicamente en la no unicidad en la evolución temporal del campo clásico a partir de las condiciones iniciales [49], se resuelve generalmente imponiendo condiciones de contorno en el infinito (espacial), lo cual a la vez asegura que la energía sea definida positiva y conservada; para el espacio de AdS en 3 + 1 dimensiones, existen dos conjuntos completos de funciones básicas que obedecen distintas condiciones de contorno en el infinito y que soportan dos representaciones distintas de $SO(3,2)$. Nosotros no hemos abordado esta inconveniencia ya que, al contrario que en otras aproximaciones por grupos a la cuantización de campos (véase [51]), la existencia o no de hipersuperficies de Cauchy $\Sigma \subset Q$ no es una cuestión básica en nuestro formalismo. La información a cerca de la propagación del campo está contenida en el 2-cociclo (5.12,5.14) e involucra una integración en todo \tilde{G} , no sólo en Σ . Sin embargo, podemos decir que nuestras funciones de onda se corresponden con “reflective boundary conditions” (en la terminología de [49]) dando polinomios Gegenbauer; otras representaciones diferentes se corresponderían con diferentes extensiones \tilde{G} del grupo básico G asociadas a diferentes órbitas coadjuntas de G [véase Cap. 9 para dos representaciones no equivalentes de $SO(2,2)$ asociadas a dos elecciones diferentes de función generatriz del coborde (“tiempo propio”)]. Como ya hemos mencionado, la reducción $\int_{\tilde{G}} \mu(\tilde{g}) \rightarrow \int_{\Sigma} d\sigma(x)$ podría llevar, en general, a una pérdida de hermiticidad para parte de los operadores en $\tilde{\mathcal{G}}^R$. En efecto, hay que remarcar la estructura diferente de la evolución temporal en el espacio de Minkowski (o, en general, en espacios globalmente hiperbólicos) comparada con el caso de AdS. Para éste último, el tiempo no puede ser factorizado de forma natural. La aparición de pesos parciales β^{-n} en las funciones de onda en el espacio de configuración es consecuencia de la presencia de un término de derivada en el tiempo en los operadores cuánticos. Otra consecuencia de la estructura de la evolución temporal (covariancia manifiesta de nuestra representación en el espacio de configuración) es la necesidad de la integración en el tiempo en el producto escalar definido a través del volumen de integración invariante izquierdo (8.27). De hecho, una factorización ingenua de la dependencia en el tiempo de las funciones de onda, operadores y producto escalar, da lugar a una representación no unitaria; las funciones en (8.26) (nos restringimos al caso $\gamma = 1$ para ser específicos) no son ya ortogonales ni los operadores $\tilde{X}_x^R, \tilde{X}_p^R$ son ya hermíticos. La x -representación puede, no obstante, unitarizarse cambiando la medida de integración, $dx \rightarrow \frac{dx}{\beta^2}$, y redefiniendo los operadores \tilde{X}_x^R y \tilde{X}_p^R de acuerdo con dicho cambio. El proceso de redefinición es paralelo al *método de los multiplicadores* usado en la literatura [100, 101, 102] para construir representaciones unitarias de un grupo G cuando no se tiene un elemento de volumen invariante natural. La medida $\frac{dx}{\beta^2}$ es invariante por la izquierda bajo el subgrupo $U(1)$ de $SO(1,2)$, es decir, la evolución temporal, de manera que el operador energía no se ve afectado por los multiplicadores. Además, la parte espacio-temporal $\varphi(x,t)$ de nuestras funciones de onda satisface una ecuación de tipo Klein-Gordon (8.24) con un operador \square (8.25) asociado con la métrica $ds^2 = c^2 \beta^2 dt^2 - \beta^{-2} dx^2$ y, según las técnicas estándar en Mecánica Cuántica, el producto escalar invariante bajo evolución temporal vendría dado por $\int \frac{dx}{\beta^2} \varphi^* \varphi'$ para tener una densidad de corriente de probabilidad conservada. La nueva representación obtenida por este camino es una representación mínima y constituye una verdadera teoría de funciones ortogonales (polinomios con pesos parciales; véase, por ejemplo, [96, 97]).

Deberíamos remarcar que, aunque la representación tipo Bargmann-Fock (8.41,8.49) puede restringirse directamente a una dependencia en sólo α, α^* sin perder unitariedad, no es posible definir un operador de cambio de polarización independiente del tiempo.

Esta cuestión recuerda parcialmente el problema de definir una dinámica de Klein-Gordon para campos escalares en espacios estáticos no globalmente hiperbólicos, esta vez buscando extensiones autoadjuntas (a decir, la extensión de Friedrichs) de la parte espacial del operador de Beltrami (véase [103]), como alternativa al problema de definir condiciones de contorno (véase [49, 99]).

Capítulo 9

RADIACIÓN DEL VACÍO Y ROTURA DE LA SIMETRÍA CONFORME

En este capítulo investigamos la razón fundamental que subyace a la dificultad a la hora de implementar unitariamente todo el grupo conforme $SO(4, 2)$ en una Teoría *Cuántica* de Campos sin masa sobre el espacio de Minkowski M . Siendo el grupo conforme una simetría exacta de la Teoría *Clásica* de Campos sin masa, este hecho puede verse como un tipo de “anomalía” o, en el sentido que especificaremos más tarde, como una *rotura (dinámica) de la simetría*.

Primeramente demostraremos que, al contrario de lo que se pensó en la referencia [104], la acción singular de las *transformaciones conformes específicas* sobre M no es la responsable de la existencia de problemas de radiación del vacío de la teoría cuántica de campos sin masa, sino que la razón es más profunda y está relacionada con la rotura dinámica de parte de la simetría conforme (del subgrupo asociado a dichas transformaciones conformes específicas, para ser más precisos) cuando se seleccionan representaciones de masa nula dentro de las representaciones del grupo conforme completo. Entonces veremos cómo el vacío de esta teoría cuántica de campos de masa nula *radia* bajo la acción de las transformaciones conformes específicas (las cuales se interpretan usualmente como transiciones a un sistema de referencia uniformemente acelerado) y calcularemos exactamente el espectro de las partículas salientes, el cual resulta ser una generalización del Planckiano, espectro este último que se recupera en un cierto límite razonable.

9.1 Simetría conforme clásica y cuántica

El grupo conforme $SO(4, 2)$ ha sido reconocido desde siempre como una simetría de las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica clásica [105], y más recientemente como una invariancia de teorías gauge no abelianas de campos sin masa a nivel clásico. No obstante, la teoría cuántica encuentra, en general, serios problemas en la implementación de la simetría conforme habiéndose dedicado mucho esfuerzo en el estudio de las razones físicas de este hecho (véase, por ejemplo, [106]). Básicamente, el problema principal asociado a esta simetría cuántica (a nivel de segunda cuantización) recae en la dificultad de encontrar un vacío estable bajo las transformaciones conformes específicas (TCE), cuya actuación en el espacio de Minkowski es de la forma:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{\sigma(x, c)}, \quad \sigma(x, c) = 1 + 2cx + c^2 x^2. \quad (9.1)$$

Estas transformaciones, las cuales pueden interpretarse como transiciones a sistemas de referencia de observadores relativistas uniformemente acelerados [107], provocan una *radiación del vacío*, un

fenómeno análogo al efecto Fulling-Unruh [47, 50] en un sistema de referencia no inercial. Para ser más precisos, si $a(k), a^+(k)$ son los coeficientes de Fourier de un campo escalar sin masa $\phi(x)$, que satisface la ecuación

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) = 0, \quad (9.2)$$

los coeficientes de Fourier $a'(k), a'^+(k)$ del campo transformado $\phi'(x') = \sigma^{-l}(x, c)\phi(x)$ por (9.1) (l es la dimensión conforme) se expresan en términos de ambos $a(k), a^+(k)$ a través de una transformación de Bogolyubov

$$a'(\lambda) = \int dk [A_\lambda(k)a(k) + B_\lambda(k)a^+(k)]. \quad (9.3)$$

En la teoría segundo-cuantizada los estados de vacío definidos por las condiciones $a(k)|0\rangle = 0$ y $a'(\lambda)|0'\rangle = 0$, no son idénticos si los coeficientes $B_\lambda(k)$ en (9.3) son distintos de cero. En este caso, el nuevo vacío tiene un contenido no trivial en estados de partícula del sistema original.

Esta situación está presente cuando se cuantizan teorías de campos en espacios curvos y también en espacios planos, siempre que tenga lugar una mutilación global del espacio-tiempo. Este es el caso de la cuantización en coordenadas de Rindler [46], la cual lleva a una cuantización no equivalente a la cuantización estándar en el espacio de Minkowski; o la de un campo cuántico en una caja, para la cual la operación de dilatación produce una radiación (o, si se prefiere, reorganización o polarización) del vacío [47]. No obstante, debemos remarcar que la situación para las TCE es más peculiar. Siendo las TCE una simetría de la teoría *clásica* de campos sin masa, la radiación (polarización) del vacío de la correspondiente teoría cuántica bajo estas TCE indica que la simetría conforme está rota de alguna manera, hecho que podríamos interpretar, en principio, como una anomalía topológica.

Pensando en las razones subyacentes a esta anomalía, uno estaría tentado a responsabilizar de la misma a la acción singular (no analítica) de las TCE en (9.1), como, de hecho, fue apuntado en [104]. Sin embargo, un análisis más profundo de la interconexión entre simetría y cuantización revelará una obstrucción más profunda a la posibilidad de implementar unitariamente las TCE también en un espacio de Minkowski generalizado y libre de singularidades, cuando los campos invariantes conforme sean obligados a evolucionar en el tiempo. De esta forma, la propia evolución temporal cuántica destruirá la simetría conforme dando lugar a una especie de *rotura dinámica de la simetría* a la que sobrevive sólo el subgrupo de Weyl (Poincaré + dilataciones).

Esta obstrucción tiene su origen en la imposibilidad de representar todo el grupo $SO(4, 2)$ de forma unitaria e irreducible sobre un espacio de funciones dependientes de sólo la coordenada espacial \vec{x} (véase [106]), de forma que una superficie de Cauchy determinase la evolución en el tiempo. Por el contrario, las representaciones unitarias naturales del conforme pueden construirse por medio de funciones de onda con soporte en todo el espacio-tiempo y evolucionando en una especie de *tiempo propio*.

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica de partículas (o “primera cuantización”), los argumentos libres de las funciones de onda, en la representación en el espacio de configuración, se corresponden con la mitad de las variables canónico conjugadas en el espacio de fases (o variedad de soluciones clásica), y este espacio de fases se define usualmente como una órbita coadjunta del grupo de simetría básico que caracteriza al sistema físico. Así, por ejemplo, para el grupo de Galileo o el de Poincaré el espacio físico asociado a partículas con masa y sin espín tiene dimensión 6 y las correspondientes funciones de onda en el espacio de configuración tienen la variable tiempo factorizada (la dependencia en el tiempo no es arbitraria sino fija, según las ecuaciones de movimiento cuánticas). No obstante, y como hemos dicho anteriormente, este no es el caso para el grupo conforme, para el cual veremos que el tiempo es un observable cuántico sujeto a relaciones de incertidumbre; este hecho extiende las reglas de covariancia al dominio cuántico.

En la siguiente sección aplicaremos la CSG al caso particular de $G = SO(2, 2)$, que es la versión en $1 + 1$ dimensiones del grupo conforme $SO(4, 2)$. Aunque la simetría conforme en $1 + 1$ dimensiones es mucho más rica (dos copias del grupo de Virasoro), procederemos de forma que los resultados obtenidos sean directamente extrapolables a la dimensión realista. En este ejemplo mostramos cómo extraer un

espacio (compacto) de la variedad grupo $SO(2, 2)$ localmente isomorfo al espacio de Minkowski, donde todo el grupo conforme actúe libre de singularidades. También mostraremos que las representaciones unitarias e irreducibles del grupo conforme requieren que la variable tiempo sea dinámica o, lo que es lo mismo, impiden la existencia de una ecuación de evolución cuántica invariante conforme en la variable tiempo. Examinamos dos casos correspondientes a una dinámica con “tiempo propio” no compacto y compacto. Posteriormente construiremos una teoría cuántica de campos invariante conforme por el procedimiento de SCSG y veremos las consecuencias que tiene la rotura dinámica de la simetría desde el punto de vista de segunda cuantización. En particular, investigaremos el efecto que tienen la TCE sobre un vacío de Weyl y el fenómeno de radiación asociado. Calcularemos exactamente el espectro de un vacío de Weyl acelerado, el cual resulta ser una generalización del espectro del cuerpo negro, espectro que se recupera en un cierto límite [*masa invariante conforme* nula o descompactificación del tiempo propio (véase última sección)].

9.2 Mecánica Cuántica Invariante Conforme

Desarrollaremos la Mecánica Cuántica Invariante Conforme (en 1+1D) encontrando las representaciones irreducibles del grupo conforme $SO(2, 2)$ centralmente extendido, de la misma manera que el espacio de Hilbert de la partícula libre Galileana se obtiene a partir de las representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Galileo centralmente extendido. El espacio de configuración de la teoría (una compactificación y una continuación analítica del espacio de Minkowski) surgirá como un espacio homogéneo del grupo, sobre el cual toman argumentos las funciones de onda.

Salvo por simetrías discretas, las cuales no son relevantes en la aproximación de álgebra de Lie, $SO(2, 2) \sim SU(1, 1) \otimes SU(1, 1)$ de manera que usaremos la estructura de $SU(1, 1)$ dada en (8.30) y (8.31) y parametrizaremos $G = SO(2, 2)$ como dos copias de $SU(1, 1)$ con parámetros $\{(\eta, \alpha, \alpha^*); (\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*)\}$. Existen dos posibilidades de combinar los generadores del álgebra de Lie

$$\mathcal{G}^L = \{X_\eta^L, X_\alpha^L, X_{\alpha^*}^L, X_{\bar{\eta}}^L, X_{\bar{\alpha}}^L, X_{\bar{\alpha}^*}^L\} \quad (9.4)$$

de G , para obtener los generadores usuales del grupo conforme

$$\mathcal{G}^L = \{D^L, M^L, P_0^L, P_1^L, K_0^L, K_1^L\}, \quad (9.5)$$

los cuales cumplen las siguientes relaciones de conmutación [108]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_0^L, D^L \\ P_1^L, M^L \\ P_0^L, K_1^L \\ K_1^L, D^L \\ D^L, M^L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -P_0^L \\ -P_0^L \\ 2M^L \\ K_1^L \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P_1^L, D^L \\ P_0^L, K_0^L \\ P_1^L, K_1^L \\ K_0^L, M^L \\ P_0^L, P_1^L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -P_1^L \\ -2D^L \\ 2D^L \\ -K_1^L \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P_0^L, M^L \\ P_1^L, K_0^L \\ K_0^L, D^L \\ K_1^L, M^L \\ K_0^L, K_1^L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -P_1^L \\ -2M^L \\ K_0^L \\ -K_0^L \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.6)$$

donde D, M, P_μ, K_μ son los generadores de las dilataciones, boosts, traslaciones espacio-temporales y TCE, respectivamente. Una de las elecciones mencionadas se corresponde con un subgrupo de dilatación no compacto, mientras la otra se corresponde con uno compacto. Dichas combinaciones

son:

$$\begin{array}{ll}
D \text{ COMPACTA} & D \text{ NO COMPACTA} \\
D^L = -\frac{1}{2} \left(X_\eta^L + X_{\bar{\eta}}^L \right) & D^L = -\frac{i}{2} \left(X_\alpha^L - X_{\alpha^*}^L + X_{\bar{\alpha}}^L - X_{\bar{\alpha}^*}^L \right) \\
M^L = \frac{1}{2} \left(X_\eta^L - X_{\bar{\eta}}^L \right) & M^L = \frac{i}{2} \left(X_\alpha^L - X_{\alpha^*}^L - X_{\bar{\alpha}}^L + X_{\bar{\alpha}^*}^L \right) \\
P_0^L = - \left(X_{\alpha^*}^L + X_{\bar{\alpha}^*}^L \right) & P_0^L = \frac{1}{2} \left(X_\alpha^L + X_{\alpha^*}^L - X_{\bar{\alpha}}^L - X_{\bar{\alpha}^*}^L - i(X_\eta^L - X_{\bar{\eta}}^L) \right) \\
P_1^L = X_{\alpha^*}^L - X_{\bar{\alpha}^*}^L & P_1^L = -\frac{1}{2} \left(X_\alpha^L + X_{\alpha^*}^L + X_{\bar{\alpha}}^L + X_{\bar{\alpha}^*}^L - i(X_\eta^L + X_{\bar{\eta}}^L) \right) \\
K_0^L = X_\alpha^L + X_{\bar{\alpha}}^L & K_0^L = \frac{1}{2} \left(-X_\alpha^L - X_{\alpha^*}^L + X_{\bar{\alpha}}^L + X_{\bar{\alpha}^*}^L - i(X_\eta^L - X_{\bar{\eta}}^L) \right) \\
K_1^L = X_\alpha^L - X_{\bar{\alpha}}^L & K_1^L = -\frac{1}{2} \left(X_\alpha^L + X_{\alpha^*}^L + X_{\bar{\alpha}}^L + X_{\bar{\alpha}^*}^L + i(X_\eta^L + X_{\bar{\eta}}^L) \right)
\end{array} \tag{9.7}$$

El grupo $G = SU(1,1) \otimes SU(1,1)$ es no compacto y semisimple. El volumen de integración invariante izquierdo puede expresarse como:

$$v(g) \equiv \theta_{g^i}^L \wedge \theta_{g^j}^L \wedge \dots = -\frac{1}{\eta(1-\alpha\alpha^*)^2} \frac{1}{\bar{\eta}(1-\bar{\alpha}\bar{\alpha}^*)^2} d\alpha \wedge d\alpha^* \wedge d\eta \wedge d\bar{\alpha} \wedge d\bar{\alpha}^* \wedge d\bar{\eta}, \tag{9.8}$$

el cual resulta ser singular para valores $|\alpha|, |\bar{\alpha}| \rightarrow 1$ (circunferencias de radio 1 alrededor de ambos discos abiertos). No obstante, recurriendo a una extensión central \tilde{G} de G , necesariamente trivial ya que G es semisimple y de dimensión finita, el producto escalar entre funciones de onda sobre el grupo se hará finito para cierto rango del parámetro de extensión.

Existen varias extensiones centrales del grupo conforme [109], pero nosotros estamos interesados en aquella que lleva a un espacio de Minkowski generalizado. Esta elección se corresponde con una extensión por un coborde lineal en el parámetro de las dilataciones, el cual consideraremos como un “tiempo propio” (véase [66]).

Separaremos los dos casos: a) tiempo propio no compacto y b) tiempo propio compacto, en dos subsecciones, respectivamente. La parte esencial del problema en el que estamos interesados no es sensible al carácter topológico del subgrupo de dilataciones; no obstante, mientras el caso no compacto es más útil para conectar con expresiones estándar en el espacio de Minkowski, el caso compacto es más manejable para construir e ilustrar el procedimiento de segunda cuantización (además, aquí podremos utilizar bastantes resultados del capítulo anterior). Se puede comprobar que, para obtener una teoría cuántica consistente, es necesaria una pseudoextensión por $T = C^*$ (el grupo multiplicativo de los números complejos salvo el cero) para el primer caso, mientras que una pseudoextensión por sólo $U(1)$ es suficiente para el segundo.

9.2.1 Subgrupo de dilatación no compacto

Consideremos la siguiente pseudoextensión por $T = C^* = \{z = r\zeta; r \in \mathfrak{R}^+, \zeta \in U(1)\}$:

$$z'' = z' z e^{\xi(g',g)}, \quad \xi(g',g) = \delta(g' * g) - \delta(g') - \delta(g), \quad z \in C^*, \tag{9.9}$$

donde $\delta(g) = -i\beta(\alpha - \alpha^* + \bar{\alpha} - \bar{\alpha}^*)$ es la función generatriz del coborde y $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ es un parámetro complejo que caracteriza la representación.

Los campos izquierdos y derechos del grupo extendido \tilde{G} son

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_r^L &= \tilde{X}_r^R = r \frac{\partial}{\partial r} \\
\tilde{X}_\zeta^L &= \tilde{X}_\zeta^R = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
\tilde{X}_\eta^L &= X_\eta^L + 2i\beta_1(\alpha + \alpha^*)\tilde{X}_r^L - 2\beta_2(\alpha + \alpha^*)\tilde{X}_\zeta^L \\
\tilde{X}_\alpha^L &= X_\alpha^L - i\beta_1\alpha^{*2}\tilde{X}_r^L + \beta_2\alpha^{*2}\tilde{X}_\zeta^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{\alpha^*}^L &= X_{\alpha^*}^L + i\beta_1\alpha^2\tilde{X}_r^L - \beta_2\alpha^2\tilde{X}_\zeta^L \\
\tilde{X}_\eta^R &= X_\eta^R \\
\tilde{X}_\alpha^R &= X_\alpha^R - i\beta_1(\eta^{-1}(1 - \alpha\alpha^*) - 1)\tilde{X}_r^R + \beta_2(\eta^{-1}(1 - \alpha\alpha^*) - 1)\tilde{X}_\zeta^R \\
\tilde{X}_{\alpha^*}^R &= X_{\alpha^*}^R + i\beta_1(\eta^2(1 - \alpha\alpha^*) - 1)\tilde{X}_r^R - \beta_2(\eta^2(1 - \alpha\alpha^*) - 1)\tilde{X}_\zeta^R
\end{aligned} \tag{9.10}$$

con una expresión similar para los parámetros $\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*$. Las nuevas relaciones de conmutación (izquierdas) para el álgebra de Lie extendida $\tilde{\mathcal{G}}$ de \tilde{G} son dos copias de:

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_\alpha^L] &= 2\tilde{X}_\alpha^L - 2i\beta_1\tilde{X}_r^L + 2\beta_2\tilde{X}_\zeta^L \\
[\tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L] &= -2\tilde{X}_{\alpha^*}^L - 2i\beta_1\tilde{X}_r^L + 2\beta_2\tilde{X}_\zeta^L \\
[\tilde{X}_\alpha^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L] &= \tilde{X}_\eta^L \\
[\tilde{X}_r^L, \text{todo}] &= 0 \\
[\tilde{X}_\zeta^L, \text{todo}] &= 0.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

El único cambio inducido en los conmutadores del álgebra de Lie (9.6) cuando sus generadores se expresan en términos de

$$\tilde{\mathcal{G}}^L = \{\tilde{D}^L, \tilde{M}^L, \tilde{P}_0^L, \tilde{P}_1^L, \tilde{K}_0^L, \tilde{K}_1^L, \tilde{X}_\zeta^L, \tilde{X}_r^L\} \tag{9.12}$$

(los cuales tienen la misma forma funcional que los de la parte derecha de (9.7)), es en los dos siguientes conmutadores:

$$\begin{aligned}
[\tilde{P}_0^L, \tilde{K}_0^L] &= -2\tilde{D}^L + 4\beta_1\tilde{X}_r^L + 4i\beta_2\tilde{X}_\zeta^L \\
[\tilde{P}_1^L, \tilde{K}_1^L] &= 2\tilde{D}^L - 4\beta_1\tilde{X}_r^L - 4i\beta_2\tilde{X}_\zeta^L.
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Estas relaciones muestran que las dos parejas de generadores $\tilde{P}_0^L, \tilde{K}_0^L$ y $\tilde{P}_1^L, \tilde{K}_1^L$ son canónico conjugadas, es decir, dan lugar a términos centrales a la derecha del conmutador correspondiente. Extensiones centrales de este tipo fueron ya consideradas en [109, 66]. A partir de (9.13) concluimos que, al igual que el operador de posición espacial, el tiempo no está exento de carácter dinámico, es decir, es un operador sujeto a relaciones de incertidumbre (véase la referencia [110] para otra definición de operadores de posición en el espacio-tiempo dentro del álgebra envolvente del grupo conforme).

La 1-forma de cuantización y el álgebra característica son

$$\begin{aligned}
\Theta &= (\Theta^{(r)}, \Theta^{(\zeta)}) \\
\Theta^{(r)} &= \beta_1(\Gamma(\eta, \alpha, \alpha^*) + \Gamma(\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*)) + r^{-1}dr \\
\Theta^{(\zeta)} &= -\beta_2(\Gamma(\eta, \alpha, \alpha^*) + \Gamma(\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*)) + i\zeta^{-1}d\zeta \\
\Gamma(\eta, \alpha, \alpha^*) &\equiv \frac{1}{1 - \alpha\alpha^*} \left(-2i(\alpha + \alpha^*)\eta^{-1}d\eta - i\alpha\alpha^*d\alpha + i\alpha\alpha^*d\alpha^* \right) \\
\mathcal{G}_\Theta &= \langle \tilde{D}^L, \tilde{M}^L \rangle.
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Sea $\mathcal{B}(\tilde{G})$ el conjunto de T -funciones complejas sobre \tilde{G} en el sentido de teoría de fibrados principales: $\psi(z * \tilde{g}) = D_T(z)\psi(\tilde{g})$ y escojamos la representación $D_T(z) = z^p$, donde p debe ser un entero negativo por cuestiones de univaluedad y para que las funciones de onda sean cuadrado-integrables. La subálgebra de polarización de primer orden y completa que reduce la representación es

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{D}^L, \tilde{M}^L, \tilde{K}_0^L, \tilde{K}_1^L \rangle, \tag{9.15}$$

y la solución de estas condiciones de polarización lleva a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\tilde{G})$ de funciones de onda de la forma:

$$\begin{aligned}
\psi^{(\beta)}(\eta, \alpha, \alpha^*, \bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*, \zeta) &= \zeta^p W_\beta(\alpha, \alpha^*, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*) \phi(\mu, \bar{\mu}) \\
W_\beta(\alpha, \alpha^*, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*) &= w_\beta(\alpha, \alpha^*) w_\beta(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*) \\
w_\beta(\alpha, \alpha^*) &= (1 - \alpha\alpha^*)^{p\beta} (\alpha + i)^{-p\beta} (\alpha^* - i)^{-p\beta} e^{ip\beta(\alpha - \alpha^*)}, \tag{9.16}
\end{aligned}$$

donde W_β es una “función generatriz” y ϕ es una serie de potencias arbitraria

$$\phi(\mu, \bar{\mu}) = \sum_{n, \bar{n} = -\infty}^{\infty} a_{n, \bar{n}} \phi_{n, \bar{n}}(\mu, \bar{\mu}), \quad \phi_{n, \bar{n}}(\mu, \bar{\mu}) \equiv \mu^n \bar{\mu}^{\bar{n}} \tag{9.17}$$

en las variables

$$\mu = \frac{\alpha^* - i}{\alpha + i} \eta^{-2} = \frac{z_2^* - iz_1^*}{z_2 + iz_1}, \quad \bar{\mu} = \frac{\bar{\alpha}^* - i}{\bar{\alpha} + i} \bar{\eta}^{-2} = \frac{\bar{z}_2^* - i\bar{z}_1^*}{\bar{z}_2 + i\bar{z}_1}. \tag{9.18}$$

Nótese que $(\mu, \bar{\mu})$ están definidas sobre un toro bidimensional $T^2 = S^1 \times S^1$ (la versión en 1 + 1 dimensiones del cono proyectivo $S^3 \times S^1/Z_2$ en 3 + 1 dimensiones). Veamos cómo el grupo conforme actúa sobre T^2 libre de singularidades. Para ello, expresemos μ y $\bar{\mu}$ en términos de las variables globales $z_i, z_i^*, \bar{z}_i, \bar{z}_i^*, i = 1, 2$ en (8.30) y consideremos g'' en la ley de grupo como el punto transformado de g por la acción izquierda con g' . Así se consigue:

$$\begin{aligned}
\mu \rightarrow \mu'' &\equiv \frac{z_2^{*''} - iz_1^{*''}}{z_2'' + iz_1''} = \frac{z_2^{*'} z_2 + z_1^{*'} z_1^* - i(z_2^{*'} z_1 + z_1^{*'} z_2^*)}{z_1' z_2 + z_2' z_1^* + i(z_1' z_1 + z_2' z_2^*)} = \frac{\mu - i\alpha^*}{\eta'^2 (1 + i\mu\alpha')} \\
\bar{\mu} \rightarrow \bar{\mu}'' &\equiv \frac{\bar{z}_2^{*''} - i\bar{z}_1^{*''}}{\bar{z}_2'' + i\bar{z}_1''} = \frac{\bar{z}_2^{*'} \bar{z}_2 + \bar{z}_1^{*'} \bar{z}_1^* - i(\bar{z}_2^{*'} \bar{z}_1 + \bar{z}_1^{*'} \bar{z}_2^*)}{\bar{z}_1' \bar{z}_2 + \bar{z}_2' \bar{z}_1^* + i(\bar{z}_1' \bar{z}_1 + \bar{z}_2' \bar{z}_2^*)} = \frac{\bar{\mu} - i\bar{\alpha}^*}{\bar{\eta}'^2 (1 + i\bar{\mu}\bar{\alpha}')} . \tag{9.19}
\end{aligned}$$

Esta acción está siempre bien definida y es transitiva en T^2 (véase la referencia [111] para un estudio más detallado de las propiedades globales de un espacio similar en 3+1 dimensiones), en contraste con la acción sobre el espacio de Minkowski, el cual puede verse como una carta local de T^2 obtenida por proyección estereográfica ($\mu \equiv e^{i\theta}$, $\bar{\mu} \equiv e^{i\bar{\theta}}$):

$$\begin{aligned}
t &= \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\bar{\theta}}{2} \right) \\
x &= \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\theta}{2} - \cot \frac{\bar{\theta}}{2} \right), \tag{9.20}
\end{aligned}$$

como puede comprobarse realizando esta transformación sobre los generadores de las transformaciones conformes sobre T^2 en (9.22), los cuales adquieren la forma estándar sobre el espacio de Minkowski en términos de t, x (véase, por ejemplo, [108]), excepto por términos (cuánticos) inhomogéneos proporcionales al parámetro de extensión β . La variedad T^2 es así un espacio-tiempo natural en el cual puede vivir una teoría cuántica de campos invariante conforme globalmente definida.

El volumen de integración invariante es ahora $v(\tilde{g}) = v(g) \wedge (r^{-1} dr) \wedge (i\zeta^{-1} d\zeta)$ (see Eq.(9.8)). El producto escalar de dos funciones de onda (9.16) será finito cuando el factor $((1 - \alpha\alpha^*)(1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*))^{2p\beta}$, proveniente de W_β (véase (9.16)), cancele la singularidad de $v(\tilde{g})$ en la frontera del disco unidad abierto debido al factor $((1 - \alpha\alpha^*)(1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*))^{-2}$. Esto es posible cuando

$$p\beta_1 > 1/2, \tag{9.21}$$

sin restricción alguna para el parámetro β_2 (esta es la razón por la cual la pseudoextensión por la recta real positiva, con parámetro $\beta_1 \neq 0$, es fundamental para este caso).

La acción de los campos derechos (operadores) sobre las funciones de onda polarizadas (9.16) tiene la forma explícita:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^R \psi^{(\beta)} &= \zeta^p W_\beta \cdot \left(-\frac{1}{2}(\mu^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{1}{2}(\bar{\mu}^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} - p\beta(\mu + \mu^{-1} + \bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1} - 2) \right) \phi(\mu, \bar{\mu}) \\
\tilde{M}^R \psi^{(\beta)} &= \zeta^p W_\beta \cdot \left(\frac{1}{2}(\mu^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{1}{2}(\bar{\mu}^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} - p\beta(-\mu - \mu^{-1} + \bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1}) \right) \phi(\mu, \bar{\mu}) \\
\tilde{P}_0^R \psi^{(\beta)} &= \zeta^p W_\beta \cdot \left(-\frac{i}{2}(\mu - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{i}{2}(\bar{\mu} - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} - p\beta(\mu - \mu^{-1} - \bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1}) \right) \phi(\mu, \bar{\mu}) \\
\tilde{P}_1^R \psi^{(\beta)} &= \zeta^p W_\beta \cdot \left(\frac{i}{2}(\mu - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{i}{2}(\bar{\mu} - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} - p\beta(-\mu + \mu^{-1} - \bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1}) \right) \phi(\mu, \bar{\mu}) \\
\tilde{K}_0^R \psi^{(\beta)} &= \zeta^p W_\beta \cdot \left(\frac{i}{2}(\mu + 1)^2 \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{i}{2}(\bar{\mu} + 1)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} + p\beta(\mu - \mu^{-1} - \bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1}) \right) \phi(\mu, \bar{\mu}) \\
\tilde{K}_1^R \psi^{(\beta)} &= \zeta^p W_\beta \cdot \left(\frac{i}{2}(\mu - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{i}{2}(\bar{\mu} - 1)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} - p\beta(-\mu + \mu^{-1} - \bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1}) \right) \phi(\mu, \bar{\mu}) \\
\tilde{X}_r^R \psi^{(\beta)} &= p\psi^{(\beta)}, \quad \tilde{X}_\zeta^R \psi^{(\beta)} = p\psi^{(\beta)}.
\end{aligned} \tag{9.22}$$

Esta representación es irreducible para el grupo conforme extendido \tilde{G} como consecuencia de la maximalidad de la subálgebra de polarización completa \mathcal{P} en (9.15), es decir, \mathcal{P} no puede ser agrandada más (ni siquiera en orden superior) ni la representación reducida más. El proceso de obtención de las representaciones irreducibles termina aquí. Cualquier restricción que se desee sobre las funciones de onda deberá imponerse como una ligadura.

Sin embargo, nosotros estamos interesados en representaciones de masa nula, lo cual puede lograrse seleccionando aquellas funciones de onda $\psi_c^{(\beta)}$ de $\mathcal{H}(\tilde{G})$ que se anulan bajo la acción del operador de Casimir $\tilde{Q}^R \equiv (\tilde{P}_0^R)^2 - (\tilde{P}_1^R)^2$ del subgrupo de Poincaré. Más explícitamente, funciones de onda que verifican:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}^R \psi_c^{(\beta)} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{(\bar{\mu} - 1)^2}{(\bar{\mu} - \bar{\mu}^{-1})} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} + p\beta \right) \left(\frac{(\mu - 1)^2}{(\mu - \mu^{-1})} \frac{\partial}{\partial \mu} + p\beta \right) \phi(\mu, \bar{\mu}) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial \phi(\mu, \bar{\mu})}{\partial \mu \partial \bar{\mu}} = 0,
\end{aligned} \tag{9.23}$$

donde

$$\phi(\mu, \bar{\mu}) \equiv \left(\frac{(\mu - 1)^2}{\mu} \frac{(\bar{\mu} - 1)^2}{\bar{\mu}} \right)^{-p\beta} \varphi(\mu, \bar{\mu}). \tag{9.24}$$

Esta ecuación de evolución tipo Klein-Gordon (en unas coordenadas tipo *cono de luz*) se interpreta pues como una *ligadura de orden superior* de la teoría, y lleva a un nuevo espacio de Hilbert $\mathcal{H}_c(\tilde{G})$ hecho de funciones de onda constreñidas de la forma:

$$\psi_c^{(\beta)} = z^p W_\beta \left(\frac{(\mu - 1)^2}{\mu} \frac{(\bar{\mu} - 1)^2}{\bar{\mu}} \right)^{-p\beta} (\varphi(\mu) + \bar{\varphi}(\bar{\mu})), \tag{9.25}$$

es decir, funciones de onda cuya parte arbitraria se divide en funciones que dependen de μ y $\bar{\mu}$ de forma separada (esto recuerda la separación usual en modos moviéndose hacia izquierda y derecha). Los operadores que preservan la ligadura (9.23) se pueden vislumbrar a partir de los siguientes conmutadores

$$\begin{aligned}
[\tilde{D}^R, \tilde{Q}^R] &= -2\tilde{Q}^R \\
[\tilde{M}^R, \tilde{Q}^R] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{P}_0^R, \tilde{Q}^R] &= 0 \\
[\tilde{P}_1^R, \tilde{Q}^R] &= 0 \\
[\tilde{K}_0^R, \tilde{Q}^R] &= -4\tilde{P}_0^R \tilde{D}^R + 4\tilde{P}_1^R \tilde{M}^R - 8ip\beta \tilde{P}_0^R \\
&= f_0(\mu, \bar{\mu}) \tilde{Q}^R - 8ip\beta \tilde{P}_0^R \\
[\tilde{K}_1^R, \tilde{Q}^R] &= -4\tilde{P}_1^R \tilde{D}^R + 4\tilde{P}_0^R \tilde{M}^R - 8ip\beta \tilde{P}_1^R \\
&= f_1(\mu, \bar{\mu}) \tilde{Q}^R - 8ip\beta \tilde{P}_1^R,
\end{aligned} \tag{9.26}$$

$[f_\nu(\mu, \bar{\mu})$ son ciertas funciones sobre el toro], a partir de los cuales concluimos que el conjunto de operadores buenos (de primer orden) es:

$$\mathcal{G}_{good} = \langle \tilde{D}^R, \tilde{M}^R, \tilde{P}_0^R, \tilde{P}_1^R, \tilde{X}_r^R, \tilde{X}_\zeta^R \rangle, \tag{9.27}$$

que cierran una subálgebra (Poincaré+dilatación \equiv Weyl) del álgebra de Lie conforme extendida original en 1 + 1 dimensiones.

El hecho de que \tilde{K}_0^R y \tilde{K}_1^R sean operadores *malos*, es decir, que no preserven el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_c(\tilde{G})$, será una cuestión importante en la segunda cuantización de la teoría constreñida. El nuevo vacío (Weyl) ya no será aniquilado por la versión segundo-cuantizada de los operadores \tilde{K}_0^R y \tilde{K}_1^R sino que, más bien, aparecerá “polarizado” desde un sistema de referencia acelerado (véase sección 9.3.1). De esta forma, la razón profunda de la radiación del vacío bajo TCE en una teoría cuántica de campos *sin masa*, no es la acción singular de este subgrupo sobre el espacio-tiempo sino, más bien, la imposibilidad de implementar adecuadamente estas transformaciones en el espacio de Hilbert constreñido $\mathcal{H}_c(\tilde{G})$. Nótese que las combinaciones $A_+ \equiv \frac{1}{2}(\tilde{K}_0^R + \tilde{K}_1^R)$ y $A_- \equiv \frac{1}{2}(\tilde{K}_0^R - \tilde{K}_1^R)$ son “parcialmente buenas”, en el sentido de que preservan los subespacios de modos moviéndose hacia la izquierda y la derecha, respectivamente; veremos en la sección 9.3.1 cómo su acción finita sobre un vacío Weyl (en la teoría segundo-cuantizada) da lugar a un baño térmico de fotones escalares moviéndose hacia izquierda y la derecha, respectivamente.

En lo que respecta a la teoría clásica de campos, la existencia de un producto escalar bien definido no es una cuestión básica; la condición (9.21) puede violarse poniendo $\beta = 0$, de manera que se llega a una representación reducible donde los operadores \tilde{K}_0^R y \tilde{K}_1^R dejan invariante la ecuación $\tilde{Q}^R \psi_c^{(\beta)} = 0$, como puede verse directamente a partir de los dos últimos conmutadores en (9.26). No obstante, para este caso particular, la pérdida de unitariedad puede dar lugar a problemas en el proceso de cuantización, especialmente en lo concerniente a la definición de los propagadores de la SCSG. Así, para el caso de masa nula, el grupo conforme está “espontáneamente roto” en el sentido de que, siendo una simetría de la teoría de campos clásica sin masa, la correspondiente teoría cuántica de campos es sólo invariante bajo el subgrupo de Weyl. La aparición de términos proporcionales a β a la derecha de algunos conmutadores, como en (9.26), puede verse como una “anomalía”; no obstante, anomalía esta vez no significa obstrucción a la cuantización sino que, por el contrario, es intrínseca al procedimiento de cuantización y necesaria para el buen comportamiento de la teoría.

Nótese que para campos masivos la situación es ligeramente distinta. La única simetría que sobrevive (tanto para la teoría clásica como para la cuántica) después de imponer la ligadura

$$\tilde{Q}^R \psi_c^{(\beta)} = D^{(m)}(\tilde{Q}^R) \psi_c^{(\beta)} = m^2 \psi_c^{(\beta)}, \tag{9.28}$$

es el subgrupo de Poincaré. En efecto, el generador de las dilataciones es ahora un operador malo (no preserva la ligadura (9.28)), como puede verse a partir de la primera línea de (9.26)). Su acción finita, siendo mala, no es “tan mala” en el sentido de que cambia de una representación $D^{(m)}(\tilde{Q}^R)$ a otra $D^{(m')}(\tilde{Q}^R)$ con $m' = e^{2\lambda}m$, donde λ es el parámetro de la transformación. Es decir, juega el papel de un operador de cambio de cuantización cuyo dominio es la unión $\bigcup_{m \in \mathbb{R}^+} \mathcal{H}_c^{(m)}(\tilde{G})$ de todos los espacios de Hilbert constreñidos correspondientes a diferentes masas, es decir, una teoría con espectro

de masas continuo. Uno podría buscar una interpretación física de estos hechos y decir que “los campos cuánticos invariantes conforme no evolucionan en el tiempo”. La representación (9.22) es irreducible para todo el grupo conforme, pero reducible bajo el subgrupo de Weyl. Alguna perturbación externa rompe la simetría conforme y fuerza a los campos a evolucionar en el tiempo y a adquirir un valor fijo para la masa (estamos interesados en el caso de masa nula), de manera que la rotura dinámica de la simetría y la fijación de la masa, incluso nula, vienen juntas.

9.2.2 Subgrupo de dilatación compacto

Se prueba que, para este caso, una pseudoextensión por $T = U(1)$ es suficiente para tener una teoría cuántica bien definida. Ésta tiene la forma:

$$\zeta'' = \zeta' \zeta e^{i\xi(g',g)} = \zeta' \zeta \left(\eta'' \eta'^{-1} \eta^{-1} \bar{\eta}'' \bar{\eta}'^{-1} \bar{\eta}^{-1} \right)^{-2N}, \quad (9.29)$$

donde el parámetro N etiqueta las representaciones irreducibles y, al igual que el espín, está cuantizado, tomando valores semienteros

$$N = \frac{j}{2}, \quad j \in Z, \quad (9.30)$$

por condiciones de globalidad.

Los campos izquierdos y derechos de \tilde{G} son ahora:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\eta^L &= X_\eta^L & \tilde{X}_\eta^R &= X_\eta^R \\ \tilde{X}_\alpha^L &= X_\alpha^L + N\alpha^* \tilde{X}_\zeta^R & \tilde{X}_\alpha^R &= X_\alpha^R - N\eta^{-2}\alpha^* \tilde{X}_\zeta^R \\ \tilde{X}_{\alpha^*}^L &= X_{\alpha^*}^L - N\alpha \tilde{X}_\zeta^L & \tilde{X}_{\alpha^*}^R &= X_{\alpha^*}^R + N\eta^2\alpha \tilde{X}_\zeta^R \end{aligned} \quad (9.31)$$

con una expresión similar para los parámetros $\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*$. Las nuevas relaciones de conmutación del álgebra de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$ del grupo conforme extendido \tilde{G} son dos copias de:

$$\begin{aligned} [\tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_\alpha^L] &= 2\tilde{X}_\alpha^L \\ [\tilde{X}_\eta^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L] &= -2\tilde{X}_{\alpha^*}^L \\ [\tilde{X}_\alpha^L, \tilde{X}_{\alpha^*}^L] &= \tilde{X}_\eta^L - 2N\tilde{X}_\zeta^L \\ [\tilde{X}_\zeta^L, \text{all}] &= 0. \end{aligned} \quad (9.32)$$

las cuales, expresadas en términos de la base $\{\tilde{D}^L, \tilde{M}^L, \tilde{P}_0^L, \tilde{P}_1^L, \tilde{K}_0^L, \tilde{K}_1^L, \tilde{X}_\zeta^L\}$, llevan a que

$$\begin{aligned} [\tilde{P}_0^L, \tilde{K}_0^L] &= -2\tilde{D}^L - 4N\tilde{X}_\zeta^L \\ [\tilde{P}_1^L, \tilde{K}_1^L] &= 2\tilde{D}^L + 4N\tilde{X}_\zeta^L \end{aligned} \quad (9.33)$$

y la misma expresión que en (9.6) para el resto.

La 1-forma de cuantización es ahora

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{iN}{1 - \alpha\alpha^*} \left(4\alpha\alpha^*\eta^{-1}d\eta + \alpha^*d\alpha - \alpha d\alpha^* \right) \\ &+ \frac{iN}{1 - \bar{\alpha}\bar{\alpha}^*} \left(4\bar{\alpha}\bar{\alpha}^*\bar{\eta}^{-1}d\bar{\eta} + \bar{\alpha}^*d\bar{\alpha} - \bar{\alpha}d\bar{\alpha}^* \right) - i\zeta^{-1}d\zeta, \end{aligned} \quad (9.34)$$

y, tanto la subálgebra característica \mathcal{G}_Θ como la subálgebra de polarización tiene el mismo contenido que en la sección previa. Las $U(1)$ -funciones de onda polarizadas tienen la forma:

$$\begin{aligned} \psi^{(N)}(\eta, \alpha, \alpha^*, \bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*, \zeta) &= \zeta W_N(\alpha, \alpha^*, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*) \phi(s, \bar{s}) \\ W_N &= w_N(\alpha, \alpha^*) w_N(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*) \\ w_N(\alpha, \alpha^*) &= (1 - \alpha\alpha^*)^N \end{aligned} \quad (9.35)$$

donde W_N es una “función generatriz” y ϕ es una serie de potencias arbitraria

$$\phi(s, \bar{s}) = \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} a_{n, \bar{n}} s^n \bar{s}^{\bar{n}} \quad (9.36)$$

en las variables

$$s = \eta^{-2} \alpha^* = \frac{z_2^*}{z_1}, \quad \bar{s} = \bar{\eta}^{-2} \bar{\alpha}^* = \frac{\bar{z}_2^*}{\bar{z}_1}. \quad (9.37)$$

Mostremos también ahora como el grupo conforme actúa libre de singularidades. Procediendo como en (9.19), obtenemos:

$$\begin{aligned} s &\rightarrow s'' \equiv \frac{z_2^{*''}}{z_1^{*''}} = \frac{z_2^{*' } z_2 + z_1^{*' } z_1^*}{z_1^{*' } z_1 + z_2^{*' } z_2^*} = \frac{s + \alpha^{*' }}{\eta'^2 (1 + s\alpha')} \\ \bar{s} &\rightarrow \bar{s}'' \equiv \frac{\bar{z}_2^{*''}}{\bar{z}_1^{*''}} = \frac{\bar{z}_2^{*' } \bar{z}_2 + \bar{z}_1^{*' } \bar{z}_1^*}{\bar{z}_1^{*' } \bar{z}_1 + \bar{z}_2^{*' } \bar{z}_2^*} = \frac{\bar{s} + \bar{\alpha}^{*' }}{\bar{\eta}'^2 (1 + \bar{s}\bar{\alpha}')} \end{aligned} \quad (9.38)$$

Esta acción está bien definida y es transitiva en este espacio.

El volumen de integración invariante puede tomarse como $v(\tilde{g}) = -(2\pi)^{-5} v(g) \wedge (i\zeta^{-1} d\zeta)$ y el producto escalar de dos funciones básicas $\check{\psi}_{n, \bar{n}}^{(N)} \equiv \zeta W_N \phi_{n, \bar{n}}$ y $\check{\psi}_{m, \bar{m}}^{(N)} \equiv \zeta W_N \phi_{m, \bar{m}}$ es:

$$\begin{aligned} \langle \check{\psi}_{n, \bar{n}}^{(N)} | \check{\psi}_{m, \bar{m}}^{(N)} \rangle &= \frac{n!(2N-2)!}{(2N+n-1)!} \frac{\bar{n}!(2N-2)!}{(2N+\bar{n}-1)!} \delta_{nm} \delta_{\bar{n}\bar{m}} = C_n^{(N)} C_{\bar{n}}^{(N)} \delta_{nm} \delta_{\bar{n}\bar{m}} \\ C_n^{(N)} &\equiv \frac{n!(2N-2)!}{(2N+n-1)!}, \end{aligned} \quad (9.39)$$

donde asumimos que $N > \frac{1}{2}$, condición necesaria para tener un producto escalar bien definido (finito) [esta condición puede ser relajada a $N > 0$ llenando al recubridor universal de G y modificando el producto escalar]. El conjunto

$$B(\mathcal{H}_N(\tilde{G})) = \left\{ \psi_{n, \bar{n}}^{(N)} \equiv \frac{1}{\sqrt{C_n^{(N)} C_{\bar{n}}^{(N)}}} \check{\psi}_{n, \bar{n}}^{(N)} \right\} \quad (9.40)$$

es ortonormal y completo, es decir, una base de $\mathcal{H}_N(\tilde{G})$.

La acción de los operadores sobre funciones de onda polarizadas (9.35) tiene la forma explícita:

$$\begin{aligned} \tilde{D}^R \psi^{(N)} &= \zeta W_N \cdot \left(s \frac{\partial}{\partial s} + \bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) \phi(s, \bar{s}) \\ \tilde{M}^R \psi^{(N)} &= \zeta W_N \cdot \left(-s \frac{\partial}{\partial s} + \bar{s} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) \phi(s, \bar{s}) \\ \tilde{P}_0^R \psi^{(N)} &= \zeta W_N \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) \phi(s, \bar{s}) \\ \tilde{P}_1^R \psi^{(N)} &= \zeta W_N \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) \phi(s, \bar{s}) \\ \tilde{K}_0^R \psi^{(N)} &= \zeta W_N \cdot \left(-s^2 \frac{\partial}{\partial s} - \bar{s}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{s}} - 2N(s + \bar{s}) \right) \phi(s, \bar{s}) \\ \tilde{K}_1^R \psi^{(N)} &= \zeta W_N \cdot \left(-s^2 \frac{\partial}{\partial s} + \bar{s}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{s}} - 2N(s - \bar{s}) \right) \phi(s, \bar{s}) \\ \tilde{X}_\zeta^L \psi^{(N)} &= \psi^{(N)}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Con vistas a la segunda cuantización, nos es útil calcular la transformación de una función de onda arbitraria

$$\psi^{(N)}(\tilde{g}) = \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} a_{n, \bar{n}} \psi_{n, \bar{n}}^{(N)}(\tilde{g}), \quad (9.42)$$

bajo la acción de un elemento arbitrario $\tilde{g}' = (\eta', \alpha', \alpha^{*'}, \bar{\eta}', \bar{\alpha}', \bar{\alpha}^{*'}, \zeta')$ de \tilde{G} . Esto puede hacerse, al igual que en las expresiones (8.54) y (8.55), mediante los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
(\rho(\tilde{g}')\psi^{(N)})(\tilde{g}) &= \psi^{(N)}(\tilde{g}'^{-1} * \tilde{g}) \equiv \psi^{(N)'}(\tilde{g}) = \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} a'_{m, \bar{m}} \psi_{m, \bar{m}}^{(N)}(\tilde{g}), \\
a'_{m, \bar{m}} &= \langle \psi_{m, \bar{m}}^{(N)} | \rho(\tilde{g}') | \psi^{(N)} \rangle = \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} a_{n, \bar{n}} \langle \psi_{m, \bar{m}}^{(N)} | \rho(\tilde{g}') | \psi_{n, \bar{n}}^{(N)} \rangle \\
&\equiv \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} \rho_{mn; \bar{m}\bar{n}}^{(N)}(\tilde{g}') a_{n, \bar{n}}, \\
\rho_{mn; \bar{m}\bar{n}}^{(N)}(\tilde{g}) &= \zeta^{-1} \rho_{mn}^{(N)}(\eta, \alpha, \alpha^*) \rho_{\bar{m}\bar{n}}^{(N)}(\bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*), \\
\rho_{mn}^{(N)}(\eta, \alpha, \alpha^*) &= \sqrt{\frac{C_m^{(N)}}{C_n^{(N)}}} \sum_{l=\theta_{nm}}^n \binom{n}{l} \binom{2N+m+l-1}{m-n+l} \times \\
&\quad (-1)^l \eta^{2m} \alpha^{*l} \alpha^{m-n+l} (1 - \alpha\alpha^*)^N
\end{aligned} \tag{9.43}$$

donde la función θ_{nm} es la misma que en la expresión (8.55) del capítulo anterior.

Las funciones de onda constreñidas $\psi_c^{(N)}$ que obedecen

$$\tilde{Q}^R \psi_c^{(N)} = ((\tilde{P}_0^R)^2 - (\tilde{P}_1^R)^2) \psi_c^{(N)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial \bar{s}} = 0 \tag{9.44}$$

tienen ahora la forma

$$\psi_c^{(N)} = \zeta W_N \cdot (\varphi(s) + \bar{\varphi}(\bar{s})). \tag{9.45}$$

Llegamos a las mismas conclusiones que en el caso de dilatación no compacta en lo referente a operadores buenos y malos. Para este caso, N juega el mismo papel que β en el anterior.

Construyamos la teoría cuántica de campos invariante conforme asociada a esta teoría primero-cuantizada y veamos cómo interpretar la rotura dinámica de la simetría conforme en el contexto de la SCSG.

9.3 Una teoría cuántica de campos invariante conforme

Apliquemos el formalismo de CSG al grupo de segunda cuantización $\tilde{G}^{(2)}$, dado por la ley de grupo general (5.11), para el caso de $\tilde{G} = SO(2, 2)$ y dilatación compacta. Tomaremos un campo real y consideraremos una parametrización tipo Fourier en términos de los coeficientes $a_{n, \bar{n}}$. La ley de grupo explícita es:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}'' &= \tilde{g}' * \tilde{g} \\
a_{m, \bar{m}}'' &= a_{m, \bar{m}}' + \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} \rho_{mn; \bar{m}\bar{n}}^{(N)}(\tilde{g}') a_{n, \bar{n}} \\
a_{m, \bar{m}}^{*''} &= a_{m, \bar{m}}^{*'} + \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} \rho_{mn; \bar{m}\bar{n}}^{(N)*}(\tilde{g}') a_{n, \bar{n}}^* \\
\zeta'' &= \zeta' \zeta \exp \frac{\kappa}{2} \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \sum_{n, \bar{n}=0}^{\infty} (a_{m, \bar{m}}^{*'} \rho_{mn; \bar{m}\bar{n}}^{(N)}(\tilde{g}') a_{n, \bar{n}} - a_{m, \bar{m}}' \rho_{mn; \bar{m}\bar{n}}^{(N)*}(\tilde{g}') a_{n, \bar{n}}^*).
\end{aligned} \tag{9.46}$$

Los campos de vectores izquierdos y derechos (denotamos $\partial_{m, \bar{m}} \equiv \frac{\partial}{\partial a_{m, \bar{m}}}$, $\partial_{m, \bar{m}}^* \equiv \frac{\partial}{\partial a_{m, \bar{m}}^*}$) son:

$$\tilde{X}_\zeta^L = \tilde{X}_\zeta^R = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L &= \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \rho_{m\bar{n};\bar{m}\bar{n}}^{(N)}(\tilde{g})\partial_{m,\bar{m}} + \frac{\kappa}{2} \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \rho_{m\bar{n};\bar{m}\bar{n}}^{(N)}(\tilde{g})a_{m,\bar{m}}^* \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}^*}^L &= \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \rho_{m\bar{n};\bar{m}\bar{n}}^{(N)*}(\tilde{g})\partial_{m,\bar{m}}^* - \frac{\kappa}{2} \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \rho_{m\bar{n};\bar{m}\bar{n}}^{(N)*}(\tilde{g})a_{m,\bar{m}} \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{D}^{L(2)} &= \tilde{D}^L, \quad \tilde{M}^{L(2)} = \tilde{M}^L, \quad \tilde{P}_0^{L(2)} = \tilde{P}_0^L, \\
\tilde{P}_1^{L(2)} &= \tilde{P}_1^L, \quad \tilde{K}_0^{L(2)} = \tilde{K}_0^L, \quad \tilde{K}_1^{L(2)} = \tilde{K}_1^L, \quad \tilde{X}_{\zeta}^{L(2)} = \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^R &= \partial_{n,\bar{n}} - \frac{\kappa}{2} a_{n,\bar{n}}^* \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}^*}^R &= \partial_{n,\bar{n}}^* + \frac{\kappa}{2} a_{n,\bar{n}} \tilde{X}_{\zeta}^L \\
\tilde{D}^{R(2)} &= \tilde{D}^R - \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} (m + \bar{m})(a_{m,\bar{m}}\partial_{m,\bar{m}} - a_{m,\bar{m}}^*\partial_{m,\bar{m}}^*) \\
\tilde{M}^{R(2)} &= \tilde{M}^R + \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} (m - \bar{m})(a_{m,\bar{m}}\partial_{m,\bar{m}} - a_{m,\bar{m}}^*\partial_{m,\bar{m}}^*) \\
\tilde{P}_0^{R(2)} &= \tilde{P}_0^R + \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \left(\sqrt{(m+1)(2N+m)}(a_{m+1,\bar{m}}\partial_{m,\bar{m}} - a_{m,\bar{m}}^*\partial_{m+1,\bar{m}}^*) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\bar{m}+1)(2N+\bar{m})}(a_{m,\bar{m}+1}\partial_{m,\bar{m}} - a_{m,\bar{m}}^*\partial_{m,\bar{m}+1}^*) \right) \\
\tilde{P}_1^{R(2)} &= \tilde{P}_1^R - \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \left(\sqrt{(m+1)(2N+m)}(a_{m+1,\bar{m}}\partial_{m,\bar{m}} - a_{m,\bar{m}}^*\partial_{m+1,\bar{m}}^*) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{(\bar{m}+1)(2N+\bar{m})}(a_{m,\bar{m}+1}\partial_{m,\bar{m}} - a_{m,\bar{m}}^*\partial_{m,\bar{m}+1}^*) \right) \\
\tilde{K}_0^{R(2)} &= \tilde{K}_0^R + \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \left(\sqrt{(m+1)(2N+m)}(a_{m,\bar{m}}\partial_{m+1,\bar{m}} - a_{m+1,\bar{m}}^*\partial_{m,\bar{m}}^*) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\bar{m}+1)(2N+\bar{m})}(a_{m,\bar{m}}\partial_{m,\bar{m}+1} - a_{m,\bar{m}+1}^*\partial_{m,\bar{m}}^*) \right) \\
\tilde{K}_1^{R(2)} &= \tilde{K}_1^R + \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} \left(\sqrt{(m+1)(2N+m)}(a_{m,\bar{m}}\partial_{m+1,\bar{m}} - a_{m+1,\bar{m}}^*\partial_{m,\bar{m}}^*) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{(\bar{m}+1)(2N+\bar{m})}(a_{m,\bar{m}}\partial_{m,\bar{m}+1} - a_{m,\bar{m}+1}^*\partial_{m,\bar{m}}^*) \right) \\
\tilde{X}_{\zeta}^{R(2)} &= \tilde{X}_{\zeta}^R - \sum_{m,\bar{m}=0}^{\infty} (a_{m,\bar{m}}\partial_{m,\bar{m}} - a_{m,\bar{m}}^*\partial_{m,\bar{m}}^*). \tag{9.47}
\end{aligned}$$

Los conmutadores no triviales entre estos campos de vectores son:

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L, \tilde{X}_{a_{m,\bar{m}}^*}^L] &= -\kappa\delta_{nm}\delta_{\bar{n}\bar{m}}\tilde{X}_{\zeta}^L \\
[\tilde{D}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= -(n + \bar{n})\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L \\
[\tilde{M}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= (n - \bar{n})\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L \\
[\tilde{P}_0^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= \sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1,\bar{n}}}^L + \sqrt{\bar{n}(2N+\bar{n}-1)}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}-1}}^L \\
[\tilde{P}_1^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= -\sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1,\bar{n}}}^L + \sqrt{\bar{n}(2N+\bar{n}-1)}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}-1}}^L \\
[\tilde{K}_0^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= \sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1,\bar{n}}}^L + \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}+1}}^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\tilde{K}_1^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= \sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1,\bar{n}}}^L - \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}+1}}^L \\
 [\tilde{X}_\zeta^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L \\
 [\tilde{D}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= (n+\bar{n})\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L \\
 [\tilde{M}^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= -(n-\bar{n})\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L \\
 [\tilde{P}_0^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= -\sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1,\bar{n}}}^L - \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}+1}}^L \\
 [\tilde{P}_1^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= \sqrt{(n+1)(2N+n)}\tilde{X}_{a_{n+1,\bar{n}}}^L - \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}+1}}^L \\
 [\tilde{K}_0^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= -\sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1,\bar{n}}}^L - \sqrt{\bar{n}(2N+\bar{n}-1)}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}-1}}^L \\
 [\tilde{K}_1^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= -\sqrt{n(2N+n-1)}\tilde{X}_{a_{n-1,\bar{n}}}^L + \sqrt{\bar{n}(2N+\bar{n}-1)}\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}-1}}^L \\
 [\tilde{X}_\zeta^{L(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L] &= -\tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L,
 \end{aligned} \tag{9.48}$$

donde se han omitido los conmutadores del grupo conforme extendido, los cuales tienen la misma forma que en (9.6), excepto por los dos conmutadores en (9.33).

La 1-forma de cuantización y la subálgebra característica son:

$$\begin{aligned}
 \Theta^{(2)} &= \frac{i\kappa}{2} \sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} (a_{n,\bar{n}} da_{n,\bar{n}}^* - a_{n,\bar{n}}^* da_{n,\bar{n}}) - i\zeta^{-1} d\zeta \\
 \mathcal{G}_{\Theta^{(2)}} &= \langle \tilde{D}^{L(2)}, \tilde{M}^{L(2)}, \tilde{P}_0^{L(2)}, \tilde{P}_1^{L(2)}, \tilde{K}_0^{L(2)}, \tilde{K}_1^{L(2)}, \tilde{X}_\zeta^{L(2)} \rangle.
 \end{aligned} \tag{9.49}$$

La subálgebra de polarización es:

$$\mathcal{P}^{(2)} = \langle \mathcal{G}_{\Theta^{(2)}}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^L \rangle, \quad \forall n, \bar{n} \geq 0 \tag{9.50}$$

y las $U(1)$ -funciones polarizadas tienen la forma

$$\Psi[a, a^*, \tilde{g}, \zeta] = \zeta \exp \left\{ -\frac{\kappa}{2} \sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} a_{n,\bar{n}}^* a_{n,\bar{n}} \right\} \Phi[a^*] \equiv \zeta \Omega \Phi[a^*], \tag{9.51}$$

donde Ω es el vacío de la teoría segundo-cuantizada y Φ es una serie de potencias arbitraria en sus argumentos.

La acción de los operadores sobre las funciones de onda polarizadas (9.51) tiene la forma explícita:

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^R \Psi &= \zeta \Omega \cdot (-\kappa a_{n,\bar{n}}^*) \Phi \equiv \zeta \Omega \cdot (-\kappa \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger) \Phi \\
 \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^{R*} \Psi &= \zeta \Omega \cdot (\partial_{n,\bar{n}}^*) \Phi \equiv \zeta \Omega \cdot (\hat{a}_{n,\bar{n}}) \Phi \\
 \tilde{D}^{R(2)} \Psi &= \zeta \Omega \cdot \left(\sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} (n+\bar{n}) \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}} \right) \Phi \\
 \tilde{M}^{R(2)} \Psi &= \zeta \Omega \cdot \left(-\sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} (n-\bar{n}) \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}} \right) \Phi \\
 \tilde{P}_0^{R(2)} \Psi &= \zeta \Omega \cdot \left(-\sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n+1,\bar{n}} + \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})} \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}+1} \right) \Phi \\
 \tilde{P}_1^{R(2)} \Psi &= \zeta \Omega \cdot \left(\sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n+1,\bar{n}} - \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})} \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}+1} \right) \Phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_0^{R(2)}\Psi &= \varsigma\Omega \cdot \left(- \sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} \hat{a}_{n+1,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}} + \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})} \hat{a}_{n,\bar{n}+1}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}} \right) \Phi \\
 \tilde{K}_1^{R(2)}\Psi &= \varsigma\Omega \cdot \left(- \sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(2N+n)} \hat{a}_{n+1,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}} - \sqrt{(\bar{n}+1)(2N+\bar{n})} \hat{a}_{n,\bar{n}+1}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}} \right) \Phi \\
 \tilde{X}_\zeta^{R(2)}\Psi &= \varsigma\Omega \cdot \left(\sum_{n,\bar{n}=0}^{\infty} \hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger \hat{a}_{n,\bar{n}} \right) \Phi
 \end{aligned} \tag{9.52}$$

donde $\hat{a}_{n,\bar{n}}$ y $\hat{a}_{n,\bar{n}}^\dagger$ se interpretan como operadores de aniquilación y creación de *modos* $|n; \bar{n}\rangle$, $\tilde{D}^{R(2)}$ juega el papel de hamiltoniano total (recuérdese que el parámetro de dilataciones juega el papel de tiempo propio) y $\tilde{X}_\zeta^{L(2)}$ se corresponde con el operador número de partículas.

Podemos pensar en el espacio de Hilbert como formado por:

1. estados “sin barra” $|n_1, n_2, \dots; 0\rangle$,
2. estados “puro barra” $|0; \bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots\rangle$,
3. y estados mezcla $|n_1, n_2, \dots; \bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots\rangle$.

9.3.1 Rotura al subgrupo de Weyl. Radiación del vacío

En esta subsección investigamos el efecto de las TCE sobre un vacío de Weyl, es decir, sobre un vacío de la teoría cuántica de campos sin masa obtenida tras constreñir la teoría cuántica de campos invariante conforme anterior.

Los grados de libertad del campo sin masa se obtienen trasladando la condición (9.44) al esquema de segunda cuantización, de acuerdo con el procedimiento general en (5.19), es decir, imponiendo

$$\begin{aligned}
 & \left[\tilde{P}_0^{R(2)} + \tilde{P}_1^{R(2)}, \left[\tilde{P}_0^{R(2)} - \tilde{P}_1^{R(2)}, \tilde{X}_{a_{n,\bar{n}}}^R \right] \right] = \\
 & -4\sqrt{n(2N+n-1)}\sqrt{\bar{n}(2N+\bar{n}-1)}\tilde{X}_{a_{n-1,\bar{n}-1}}^L = 0,
 \end{aligned} \tag{9.53}$$

condición que selecciona los operadores “sin barra” $\hat{a}_{n,0}^\dagger = -\frac{1}{\kappa}\tilde{X}_{a_{n,0}}^R$ y “puro barra” $\hat{a}_{0,\bar{n}}^\dagger = -\frac{1}{\kappa}\tilde{X}_{a_{0,\bar{n}}}^R$. Estos operadores, junto con los generadores de Weyl (operadores buenos de la teoría primero- cuantizada) cierran una subálgebra de Lie

$$\mathcal{G}_c^{(2)} = \langle \tilde{D}^{R(2)}, \tilde{M}^{R(2)}, \tilde{P}_0^{R(2)}, \tilde{P}_1^{R(2)}, \tilde{X}_\zeta^{L(2)}, \hat{a}_{n,0}^\dagger, \hat{a}_{0,\bar{n}}^\dagger \rangle \tag{9.54}$$

del álgebra de Lie original del campo cuántico invariante conforme. El vacío de esta teoría constreñida no tiene por qué coincidir con el vacío conforme $|0\rangle = |n=0; \bar{n}=0\rangle$. De hecho, cualquier estado del campo conforme con un contenido arbitrario en *modos cero*

$$|W\{\sigma\}\rangle \equiv \sum_{q=0}^{\infty} \sigma_q (\hat{a}_{0,0}^\dagger)^q |0\rangle \tag{9.55}$$

se comporta como un vacío desde el punto de vista de un observador Weyl, es decir, es aniquilado por los generadores de Weyl y los operadores de destrucción $\hat{a}_{n,0}$ y $\hat{a}_{0,\bar{n}}$, para todo $n, \bar{n} \in N - \{0\}$. Nótese que, ya que el operador $\hat{a}_{0,0}^\dagger$ es central en $\mathcal{G}_c^{(2)}$ (conmuta con el resto), sería demasiado restrictivo requerir que el estado (9.55) sea aniquilado por $\hat{a}_{0,0}$; la única solución sería el vacío conforme $|0\rangle$. Es natural, por tanto, requerir que $\hat{a}_{0,0}$ se comporte como la identidad, es decir, que deje estable el vacío de Weyl

$$\hat{a}_{0,0}|W\{\sigma\}\rangle = \vartheta|W\{\sigma\}\rangle \Rightarrow \sigma_q = \frac{\vartheta^q}{q!}\sigma_0, \tag{9.56}$$

condición que, tras normalizar, determina el vacío de Weyl salvo una fase

$$\langle W\{\sigma}\rangle|W\{\sigma}\rangle = 1 \Rightarrow |\sigma_0| = e^{-\frac{1}{2}|\vartheta|^2}. \quad (9.57)$$

Así, hemos encontrado un conjunto de vacíos de Weyl

$$|0\rangle_\vartheta \equiv e^{-\frac{1}{2}|\vartheta|^2} e^{\vartheta \hat{a}_{0,0}^\dagger} |0\rangle, \quad (9.58)$$

etiquetados por una fase, dentro del conjunto de estados del campo conforme [la existencia de un vacío degenerado nos recuerda el fenómeno de ϑ -vacíos comentado en la sección 3.2 referente a las teorías de Yang-Mills [112] y, en general, estará presente siempre que tratemos con espacios de fases no simplemente conexos y con teorías contrañidas]. Podemos dar una base ortonormal para el espacio de Hilbert de la teoría constreñida tomando la órbita de los operadores de creación “sin barra” y “puro barra” a partir del vacío (9.58) como sigue:

$$|m(n_1), \dots, m(n_q), m(\bar{n}_1), \dots, m(\bar{n}_j)\rangle_\vartheta \equiv \frac{(\hat{a}_{n_1,0}^\dagger)^{m(n_1)} \dots (\hat{a}_{n_q,0}^\dagger)^{m(n_q)} (\hat{a}_{0,\bar{n}_1}^\dagger)^{m(\bar{n}_1)} \dots (\hat{a}_{0,\bar{n}_j}^\dagger)^{m(\bar{n}_j)}}{(m(n_1)! \dots m(n_k)! m(\bar{n}_1)! \dots m(\bar{n}_j)!)^{1/2}} |0\rangle_\vartheta. \quad (9.59)$$

Podemos establecer una comparación con el caso más conocido de un campo cuántico sin masa sobre el espacio de Minkowski en 1+1 dimensiones y relacionar los modos con y sin barra con fotones escalares moviéndose hacia derecha e izquierda, respectivamente. Introduzcamos dimensiones a través de la constante de Plank h y la frecuencia ν del modo, de forma que el operador energía total viene dado por

$$\hat{E} \equiv h\nu \left(\tilde{D}^{R(2)} + 2N \tilde{X}_c^{L(2)} \right) \equiv h\nu D^{R(2)}; \quad (9.60)$$

donde la última redefinición del generador de las dilataciones está encaminada a devolver a las relaciones de conmutación en (9.33) la forma usual en (9.6) destruyendo la pseudoextensión (9.29). El valor esperado de la energía en un estado general (9.59) es

$$\langle \hat{E} \rangle = h\nu \left(\sum_{l=1}^q m(n_l) n_l + \sum_{l=1}^j m(\bar{n}_l) \bar{n}_l + 2N \right), \quad (9.61)$$

donde $E_0 \equiv 2Nh\nu$ representa la *energía del punto cero*, es decir, el valor esperado de la energía en el vacío de Weyl. Los modos cero representan partículas *virtuales* (no tienen energía y no pueden ser detectadas por un observador Weyl) y pueden crearse espontáneamente a partir del vacío, como puede deducirse de la condición (9.56).

Es natural pensar que los modos cero jugarán un papel importante en la radiación de un vacío Weyl, desde el momento en que se hacen *reales* por aceleración. De hecho, mostremos cómo una TCE, generada por $A_+^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(\tilde{K}_0^{L(2)} + \tilde{K}_1^{L(2)})$, aplicada a un vacío Weyl da lugar a un “baño térmico” de modos sin barra (fotones escalares moviéndose hacia la izquierda), mientras la combinación $A_-^{(2)} \equiv \frac{1}{2}(\tilde{K}_0^{L(2)} - \tilde{K}_1^{L(2)})$ da lugar a un “baño térmico” de modos barra (fotones escalares moviéndose hacia la derecha). La acción finita de $A_+^{(2)}$, con parámetro α (la correspondiente aceleración es $a \equiv -(2\pi)^2 \frac{c\nu}{\log|\alpha|^2}$, donde c es la velocidad de la luz), sobre los coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} a_{0,0}^* \rightarrow a_{0,0}'^* &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{C_0^{(N)}}{C_n^{(N)}}} a_{n,0}^* \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n a_{n,0}^* \alpha^n \\ r_n &\equiv (-1)^n \sqrt{\frac{C_0^{(N)}}{C_n^{(N)}}} \end{aligned} \quad (9.62)$$

(de acuerdo con la expresión general en la tercera línea de (9.46) y la última igualdad en (9.43)), conduce a la siguiente transformación en el vacío de Weyl:

$$|0\rangle_{\vartheta} \rightarrow |\Psi(\alpha)\rangle_{\vartheta} \equiv e^{i\vartheta - \frac{1}{2}\hat{a}_{0,0}^{\dagger}\alpha} |0\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} \alpha^q \sum_{\substack{m_1, \dots, m_q : \\ \sum_{n=0}^q nm_n = q}} \prod_{n=0}^q \frac{r_n^{m_n}}{m_n!} \prod_{n=0}^q (\hat{a}_{n,0}^{\dagger})^{m_n} |0\rangle_{\vartheta}, \quad (9.63)$$

donde $m_0 = 0$ y hemos usado la identidad general

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \alpha^n \right)^l &= \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q \alpha^q \\ \delta_0 &= \gamma_0^l \\ \delta_q &= \frac{1}{q\gamma_0} \sum_{s=1}^q (sm - q + s) \gamma_s \delta_{q-s}. \end{aligned} \quad (9.64)$$

La probabilidad relativa de observar un estado con energía total $E_q = h\nu q + E_0$ en un vacío de Weyl acelerado (es decir, en $|\Psi(\alpha)\rangle_{\vartheta}$) es

$$\begin{aligned} P_q &= \Lambda(E_q) (|\alpha|^2)^q \\ \Lambda(E_q) &\equiv \sum_{\substack{m_1, \dots, m_q : \\ \sum_{n=0}^q nm_n = q}} \prod_{n=0}^q \frac{r_n^{2m_n}}{m_n!}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Podemos asociar un baño térmico con esta función de distribución notando que $\Lambda(E_q)$ representa un peso relativo proporcional al número de estados con energía E_q , y el factor $(|\alpha|^2)^q$ acomoda este peso a una temperatura como

$$(|\alpha|^2)^q = e^{q \log |\alpha|^2} = e^{-\frac{E_q - E_0}{kT}}, \quad \text{donde } T \equiv -\frac{h\nu}{k \log |\alpha|^2} = \frac{\hbar a}{2\pi ck} \quad (9.66)$$

es la temperatura asociada con una aceleración dada a , y k es la constante de Boltzmann. Esta relación simple, pero profunda, entre la temperatura y la aceleración fue considerada por primera vez por [50]. El balance entre el “factor de multiplicidad” $\Lambda(E_q)$ (una función creciente de la energía) y el factor de temperatura (9.66) (una función decreciente con la temperatura) es favorable (máximo) para un cierto sistema de este colectivo canónico, cuya energía es un valor representativo de la energía media. De hecho, esta energía media se puede calcular exactamente como el valor esperado del operador energía \hat{E} en el estado $|\Psi(\alpha)\rangle_{\vartheta}$. Para ello, realizemos algunos cálculos intermedios. La norma de este vacío acelerado es

$$\text{Nor}[\Psi(\alpha)] \equiv {}_{\vartheta}\langle\Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle_{\vartheta} = \exp\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 |\alpha|^{2n}\right) = \exp\left((1 - |\alpha|^2)^{-2N} - 1\right). \quad (9.67)$$

La probabilidad $P_n(m)$ de observar m partículas con energía E_n coincide con el valor esperado del proyector $\hat{P}_n(m)$ en el estado $|m(n)\rangle_{\vartheta}$, es decir:

$$P_n(m) \equiv \frac{{}_{\vartheta}\langle\Psi(\alpha)|\hat{P}_n(m)|\Psi(\alpha)\rangle_{\vartheta}}{\text{Nor}[\Psi(\alpha)]} = \frac{1}{\text{Nor}[\Psi(\alpha)]} \frac{(r_n^2 |\alpha|^{2n})^m}{m!}; \quad (9.68)$$

se puede comprobar que se verifica de hecho una relación de cierre $\sum_{n,m=0}^{\infty} P_n(m) = 1$. El número medio \mathcal{N}_n de fotones escalares moviéndose hacia la izquierda con energía E_n se corresponde con el valor esperado del operador número $\hat{\mathcal{N}}_n \equiv \hat{a}_{n,0}^{\dagger} \hat{a}_{n,0}$, es decir:

$$\mathcal{N}_n = \sum_{m=0}^{\infty} m P_n(m) = \frac{1}{\text{Nor}[\Psi(\alpha)]} r_n^2 |\alpha|^{2n} \exp\left(r_n^2 |\alpha|^{2n}\right). \quad (9.69)$$

Con esta información, podemos calcular ya el valor esperado de la energía total como:

$$E[\Psi(\alpha)] \equiv E_0 + h\nu \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{N}_n = E_0 + \frac{2N h\nu |\alpha|^2}{(1 - |\alpha|^2)^{2N+1}}. \quad (9.70)$$

Si sustraemos la energía del punto cero, normalizamos por un factor $2N$ (esta normalización se puede ver como una reparametrización del tiempo propio) y hacemos uso de la relación $|\alpha|^2 = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ en (9.66), obtenemos una expresión más “familiar” para la energía media por modo

$$\epsilon_N(\nu, T) = \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})^{2N+1}}, \quad (9.71)$$

donde el valor $N = 0$ se corresponde con el caso bien conocido de la estadística de Bose-Einstein. Nótese que este valor particular de N sólo puede alcanzarse como un proceso de límite formulado en el recubridor universal de $SU(1, 1) \otimes SU(1, 1)$ o, de forma equivalente, descompactificando el tiempo propio ($U(1) \rightarrow \mathbb{R}$).

Comparemos la distribución espectral de la radiación de un vacío de Weyl acelerado para distintos valores de N , con el caso bien conocido de la radiación del cuerpo negro (espectro Plankiano). Para este propósito, tenemos que multiplicar la energía media por modo por el número de estados con frecuencia ν , la cual, en d dimensiones, es proporcional a ν^{d-1} . Si denotamos este producto por $u(x, N) \equiv u_0 x^{d-1} \epsilon_N(x, T_0)$ con $x \equiv \frac{h\nu}{kT_0}$ (u_0 es una constante, para una temperatura fija T_0 , con dimensiones de energía por unidad de volumen), la Figura 1 muestra la separación del espectro Plankiano ($N = 0$) para cuatro valores diferentes $N = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1.1$ en la dimensión realista $d = 3$. Nótese que el valor $N \equiv N_c = \frac{d-1}{2}$ se corresponde con una situación *crítica*: por encima de este valor la teoría exhibe una “catástrofe infrarroja”.

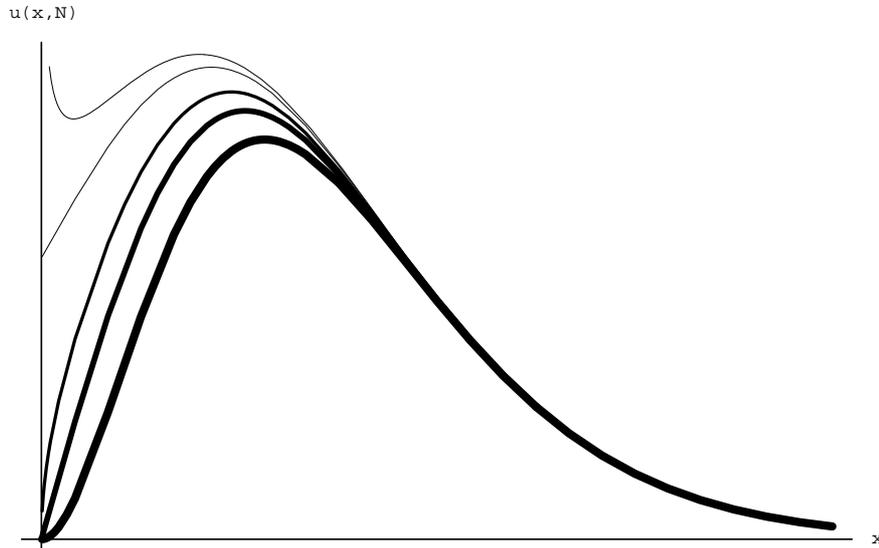


Figura 9.1: Diferencia con el espectro de Plank (línea más gruesa) para valores crecientes de N (grosor decreciente).

9.4 Otras representaciones: algunos comentarios

Hemos visto que es imposible establecer ecuaciones de evolución invariantes conforme en un espacio de Minkowski (incluso en el compactificado), no sólo para campos masivos sino, también para campos *cuánticos* sin masa.

partícula, la consecuencia ineludible de una masa variable inherente al formalismo fue ya observada por Niederer [114]. Ninguna de estas interpretaciones está exenta de controversias, como fue enfatizado por Rohrlich [117]. En cualquier caso, en este capítulo se ha considerado una cuestión más satisfactoria examinando la rotura dinámica de la simetría conforme al subgrupo de Weyl dentro del formalismo de CSG.

Capítulo 10

CUANTIZACIÓN UNIFICADA DEL CAMPO DE MAXWELL Y PROCA

Este capítulo pretende ser un primer paso hacia una aproximación por grupos a la cuantización de teorías de Yang-Mills no abelianas (en general). Aunque el caso abeliano pueda parecer, hasta cierto punto, trivial, no se ha dado hasta el momento una cuantización unificada satisfactoria del campo electromagnético y el campo de Proca (fotón sin y con masa) que pueda arrojar nueva luz sobre el origen de la toma de masa para ciertos bosones vectoriales en teorías unificadas sin hacer referencia a mecanismos de rotura de la simetría gauge, mecanismos que involucran partículas escalares aún no observadas¹ (como, por ejemplo, el bosón de Higgs). Nosotros veremos cómo, tras una revisión del concepto de simetría gauge en teorías de Yang-Mills (en principio, abelianas) dentro del esquema de CASG, la aparición de masa en la teoría resulta tener un origen cohomológico, perdurando dicha simetría gauge incluso para el campo masivo. Tal revisión del concepto de simetría gauge hace referencia a la dificultad de implementar la tradicional ley de transformación de gauge para el potencial vector del campo electromagnético, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\varphi(x)$, como parte de una ley de grupo de cuantización. Esta cuestión se resolvió en la referencia [118] a costa de introducir un parámetro de BRST en la ley de grupo. Para nosotros, la ley de transformación de gauge no aparecerá en la ley de grupo sino como trayectorias asociadas a ecuaciones generalizadas de movimiento generadas por campos de vectores con invariante Noether nulo (campos de gauge), y sin necesidad de introducir ningún parámetro extra de BRST. La ventaja de este nuevo punto de vista es que los parámetros del grupo local, $U(1)(\vec{x}, t)$, adquieren contenido dinámico fuera de la capa de masas del fotón provocando, en un cierto sentido que especificaremos luego, una transferencia de grados de libertad hacia el campo electromagnético original para conformar el campo de Proca. Este mecanismo puede revelarse de gran interés como alternativa al “tan laureado y tan sospechoso” Modelo de Higgs.

10.1 Motivación a la ley de grupo

De acuerdo con el principio de mínima interacción, y para extender cualquier simetría interna de los campos de materia a nivel local (gauge) —es decir, considerar los parámetros φ^a del grupo de simetría como funciones sobre el espacio de configuración—, es necesario introducir un potencial vector $A_\mu^a(x)$ el cual debe transformarse como una conexión. Para el caso particular de la simetría $U(1)$, dicha transformación del potencial vector conlleva únicamente la adición de la derivada del correspondiente parámetro de gauge:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\varphi(x) . \quad (10.1)$$

¹y que no satisfacen a buena parte de la comunidad científica trabajando en física de partículas

Esta es la forma estándar de introducir la interacción electromagnética en una formulación geométrica. No obstante, el campo electromagnético tiene su propia entidad, no necesariamente ligada a la parte no tensorial de las transformaciones de gauge, y su cuantización puede darse directamente en términos del tensor de Maxwell [119]. La cuantización en términos de A_μ conduce a una teoría redundante que debe ser constreñida haciendo uso de la llamada *ley de Gauss*. Hagamos una revisión breve del origen de esta ligadura.

La teoría de Maxwell para el campo electromagnético sin fuentes puede derivarse de la densidad Lagrangiana:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad (10.2)$$

donde

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \vec{E} \equiv -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}A^0, \quad \vec{B} \equiv \nabla \times \vec{A} \quad (10.3)$$

son el tensor electromagnético, el campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (10.4)$$

donde la componente temporal y espacial son la ley de Gauss y la de Ampère, respectivamente:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \dot{\vec{E}} = \nabla \times \vec{B}. \quad (10.5)$$

La cuantización canónica de este sistema tropieza con un problema cuando se somete a la descripción hamiltoniana, debido al hecho de que el lagrangiano (10.2) no depende de \dot{A}^0 y, por consiguiente, no existe momento conjugado de A^0 . En otras palabras, este lagrangiano es no regular. Esto significa que, en general, no todas las ecuaciones lagrangianas pueden escribirse en forma hamiltoniana y algunas de ellas deben añadirse a las ecuaciones de Hamilton en forma de ligaduras. Este es precisamente el caso de la ley de Gauss cuando uno usa la libertad de gauge para fijar la condición no covariante $A^0 = 0$, es decir, el denominado “gauge Weyl” (véase, por ejemplo, [120]).

En la referencia [121] se llevó a cabo la cuantización del campo electromagnético libre de forma que la ley de Gauss aparecía en el mismo pie de igualdad que las ecuaciones de movimiento de Hamilton ordinarias y no como una ligadura. El algoritmo utilizado fue la CSG aplicada a un grupo de dimensión infinita parametrizado por $\vec{E}(x)$ y $\vec{B}(x)$, además de la variable tiempo. No obstante, la cuantización, ahora con técnicas de CASG, en términos del potencial vector A_μ necesitó, como se ha dicho anteriormente, la introducción de un parámetro de BRST [118]. En este capítulo (véase también [122]) proponemos un grupo de Lie de dimensión infinita \tilde{G} , con estructura de fibrado principal $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}/T$, parametrizado por el potencial vector $A_\mu(\vec{x}, t)$, las variables de Poincaré y las coordenadas del grupo local $U(1)(\vec{x}, t)$, el cual juega el papel de subgrupo de estructura T . Como decimos siempre, este subgrupo generaliza la invariancia de fase bajo $U(1)$ de la Mecánica Cuántica ordinaria, y veremos que las condiciones de equivariancia extras asociadas con el subgrupo local $U(1)(\vec{x}, t)$ proporcionarán las ligaduras tradicionales de la teoría. La construcción de esta ley de grupo ha requerido una revisión de los conceptos de simetría gauge y ligaduras y ha llevado, como un subproducto, a la cuantización unificada del campo electromagnético y el campo de Proca, con unas perspectivas muy sugerentes para el caso no abeliano en lo referente a un posible origen cohomológico de la toma de masa para ciertos bosones vectoriales mediadores de las interacciones fundamentales. Esta última cuestión está siendo estudiada y pretende ser una alternativa al Mecanismo de Rotura Espontánea de la Simetría como mecanismo suministrador de masa. Para nosotros, parecen ser las propias funciones del grupo local ($U(1)(\vec{x}, t)$ en el caso abeliano) las que, al adquirir dinámica por la introducción de masa, proporcionan el grado de libertad de campo que le falta al bosón vectorial sin masa para conformar el bosón vectorial masivo.

Conscientes de que la aproximación por grupos para la construcción de teorías cuánticas no es para todos intuitiva, permítasenos motivar la ley de grupo que vamos a proponer haciendo uso de aproximaciones más usuales. Para ello, retomemos el análisis lagrangiano anterior y notemos que la

no regularidad del lagrangiano (10.2) puede expresarse covariantemente diciendo que L no depende de la cantidad covariante $\Phi \equiv \partial_\mu A^\mu$. Esto sugiere recurrir al nuevo lagrangiano regular (el lagrangiano de Fermi para $\lambda = 1$)

$$L' = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (10.6)$$

con λ arbitrario, al cual subsiste una invariancia (covariante) gauge residual $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\varphi(x)$, bajo funciones $\varphi(x)$ sobre la capa de masas del fotón, ea decir, tales que $\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x) = 0$. A esta simetría residual podríamos asociarle formalmente una carga Noether de la forma

$$Q_\varphi = \int d^3x \frac{\partial L'}{\partial \dot{A}_\mu} \partial_\mu\varphi = \lambda \int d^3x (\dot{\Phi}\varphi - \Phi\dot{\varphi}), \quad (10.7)$$

donde se han usado las ecuaciones de movimiento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \lambda\partial^\nu\Phi = 0 \Rightarrow \partial_\mu\partial^\mu\Phi = 0. \quad (10.8)$$

Las ecuaciones de Maxwell (10.4) se recuperan poniendo simplemente $\Phi = \text{constante}$ como una ligadura clásica. En particular, la ligadura $\dot{\Phi} = 0$ en (10.8) reproduce la ley de Gauss.

Un vistazo a la ecuación (10.7) revela que $\dot{\Phi}$ se comporta como un generador de las transformaciones de gauge (aquellas que están definidas sobre hipersuperficies de Cauchy solamente; véase [120] para el caso no covariante). De hecho, tanto Φ como $\dot{\Phi}$ cierran álgebra de Poisson con el resto de las variables dinámicas (o simplécticas) y el hamiltoniano asociado a L' . Es directo calcular los siguientes corchetes de Poisson ($\lambda = 1^2$):

$$\begin{aligned} \{A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{y}, t)\} &= 0 & \{\dot{A}_\mu(\vec{x}, t), \dot{A}_\nu(\vec{y}, t)\} &= 0 \\ \{\dot{A}_\mu(\vec{x}, t), A^\nu(\vec{y}, t)\} &= g_\mu^\nu\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & \{\dot{\Phi}(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)\} &= 0 \\ \{\Phi(\vec{x}, t), A^\mu(\vec{y}, t)\} &= g_0^\mu\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & \{\Phi(\vec{x}, t), \dot{A}^\mu(\vec{y}, t)\} &= -g_i^\mu\partial^i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\dot{\Phi}(\vec{x}, t), A^\mu(\vec{y}, t)\} &= g_i^\mu\partial^i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & \{\dot{\Phi}(\vec{x}, t), \dot{A}^\mu(\vec{y}, t)\} &= -g_0^\mu\nabla^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A_\mu, H\} &= \dot{A}_\mu & \{\dot{A}_\mu, H\} &= \nabla^2 A_\mu \\ \{\Phi, H\} &= \dot{\Phi} & \{\dot{\Phi}, H\} &= \nabla^2\Phi. \end{aligned} \quad (10.9)$$

La invariancia gauge del tensor de Maxwell se expresa ahora como: $\{F_{\mu\nu}(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)\} = \{F_{\mu\nu}(\vec{x}, t), \dot{\Phi}(\vec{y}, t)\} = 0$, como se deriva fácilmente de (10.9).

Como álgebra de Lie, (10.9) es una extensión central por $U(1)$ caracterizada por un cociclo (de álgebras de Lie) que involucra los generadores $(A, \dot{A}, \Phi, \dot{\Phi})$. A partir de este cociclo se ve directamente que la pareja (A, \dot{A}) se corresponde con un par (4 en realidad) de variables canónico conjugadas y que las variables $(\Phi, \dot{\Phi})$ no están exentas de contenido dinámico, como podría sugerir un primer vistazo a $\{\dot{\Phi}(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)\} = 0$, debido a los términos no diagonales en las líneas 3^a y 4^a en (10.9)). Por esta razón, las variables $\Phi, \dot{\Phi}$ no pueden asociarse precisamente con los generadores usuales con carga Noether nula. Más bien, estas variables serán consideradas como los generadores del grupo de estructura T y estarán relacionadas con las ligaduras.

Como punto de partida para llevar a cabo la cuantización conjunta del campo electromagnético y el campo de Proca, adoptaremos la estructura abstracta del álgebra de Poisson anterior (añadiendo el grupo de Poincaré completo), pero deformada con un término central de la forma $\{\dot{\Phi}(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)\} = m^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ (m es un parámetro con dimensiones de masa; estamos usando unidades naturales, $\hbar = 1 = c$), y construiremos la ley de grupo por exponenciación. El nuevo término central, parametrizado por m , modifica el contenido dinámico de las variables del grupo, transfiriendo grados de libertad entre las variables A y Φ . En el caso $m \neq 0$ el cociclo del grupo se diagonaliza en un nuevo conjunto de variables que se corresponden con el campo de Proca y una especie de campo escalar (véanse comentarios posteriores al respecto).

²adoptamos esta elección por simplicidad, aunque los resultados son independientes de λ .

10.2 Cuantización unificada del campo electromagnético y el campo de Proca

De acuerdo con la prescripción general de la CSG, partiremos de una ley de grupo, inspirada en el álgebra de Poisson (clásica) (10.9), que involucra los parámetros de Poincaré x^μ, Λ_ν^μ , los coeficientes de Fourier $a_\mu(k), a_\mu^+(k)$ del campo A_μ , los coeficientes de Fourier $\phi(k), \phi^+(k)$ del subgrupo local $U(1)_{loc}$ y el parámetro ζ asociado al subgrupo central $U(1)$. Todo el grupo \tilde{G} será visto, bien como: a) una extensión no central por un grupo T (parametrizado por $\phi(k), \phi^+(k)$ y ζ) del grupo constituido por la simetría espacio-temporal y los coeficientes de Fourier de A_μ , o bien como b) una extensión central por $U(1)$ del resto: $G \equiv \tilde{G}/U(1)$. En ambos casos la ley de grupo del parámetro central ζ vendrá caracterizada por un conjunto de cociclos ξ_1, ξ_2, ξ_3 (véase más abajo) definidos sobre el grupo de simetrías “clásico” G . Como hemos mencionado anteriormente, las condiciones de T -función se interpretarán como las ligaduras de la teoría.

La ley de grupo explícita $\tilde{g}'' = \tilde{g}' * \tilde{g}$ es:

$$\begin{aligned}
a_\mu''(k) &= a_\mu'(k) \exp(-ik \cdot \Lambda'x) + \Lambda_\mu^\nu a_\nu(\Lambda^{-1'}k) \\
a_\mu^{+''}(k) &= a_\mu^{+'}(k) \exp(ik \cdot \Lambda'x) + \Lambda_\mu^\nu a_\nu^+(\Lambda^{-1'}k) \\
\phi''(k) &= \phi'(k) \exp(-ik \cdot \Lambda'x) + \phi(\Lambda^{-1'}k) \\
\phi^{+''}(k) &= \phi^{+'}(k) \exp(ik \cdot \Lambda'x) + \phi^+(\Lambda^{-1'}k) \\
x'' &= x' + \Lambda'x \\
\Lambda'' &= \Lambda'\Lambda \\
\zeta'' &= \zeta'\zeta \exp \left[\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} i \{ \xi_1(g', g) + \xi_2(g', g) + \xi_3(g', g) \} \right], \quad g, g' \in G \\
\xi_1(g', g) &\equiv g^{\mu\sigma} \Lambda_\sigma^{\nu'} [a_\mu(\Lambda^{-1'}k) a_{\nu'}^+(k) e^{ik \cdot \Lambda'x} - a_\mu^+(\Lambda^{-1'}k) a_{\nu'}(k) e^{-ik \cdot \Lambda'x}] \\
\xi_2(g', g) &\equiv i [\phi^{+'}(k) (\Lambda^{-1'})^{\mu\nu} k_\nu a_\mu(\Lambda^{-1'}k) e^{ik \cdot \Lambda'x} + \phi'(k) (\Lambda^{-1'})^{\mu\nu} k_\nu a_\mu^+(\Lambda^{-1'}k) e^{-ik \cdot \Lambda'x} \\
&\quad - k^\mu a_\mu^{+'}(k) \phi(\Lambda^{-1'}k) e^{ik \cdot \Lambda'x} - k^\mu a_\mu'(k) \phi^+(\Lambda^{-1'}k) e^{-ik \cdot \Lambda'x}] \\
\xi_3(g', g) &\equiv k^2 [\phi^{+'}(k) \phi(\Lambda^{-1'}k) e^{ik \cdot \Lambda'x} - \phi'(k) \phi^+(\Lambda^{-1'}k) e^{-ik \cdot \Lambda'x}].
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Nótese que, de hecho, no estamos tratando verdaderamente con todo el grupo local $U(1)_{loc}$ sino, más bien, con un subgrupo hecho de “funciones sobre la capa de masas” relacionadas precisamente con la invariancia gauge residual que sobrevive al lagrangiano (10.6); no obstante, por simplicidad, nos referiremos a esta simetría como: simetría local $U(1)_{loc}$. Una característica importante de la ley de grupo propuesta es que, al contrario que en las formulaciones estándar de las teorías gauge, el subgrupo local $U(1)_{loc}$ no actúa sobre el potencial vector (como en (10.1)), y este punto de vista hace innecesaria la introducción de un parámetro de BRST (como en [118]). Sin embargo, la simetría local actúa no trivialmente sobre el parámetro ζ de $U(1)$, provocando un cambio en la fase de la función de onda (véanse comentarios posteriores al respecto). Además, las propiedades de transformación usuales del potencial vector aparecerán como trayectorias de ciertas ecuaciones generalizadas de movimiento.

La arbitrariedad en la elección del valor de k^2 en el cociclo $\xi_3(g', g)$, aquel que extiende el subgrupo local $U(1)_{loc}$, nos llevará a una cuantización unificada del campo electromagnético (caso $k^2 = 0$) y del campo de Proca (caso $k^2 = m^2 \neq 0$) cuando impongamos condiciones de T -equivariancia como ligaduras en ambos casos. Mantendremos k^2 a lo largo de las siguientes expresiones, hasta que sea necesaria una distinción entre estos dos casos.

A partir de la ley de grupo (10.10) obtenemos los campos de vectores izquierdos y derechos³:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_\zeta^R &= i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi \\
\tilde{X}_{a_\mu(k)}^R &= e^{-ikx} \left[\frac{\delta}{\delta a_\mu(k)} - \frac{i}{2} [a^{\mu+}(k) + i\phi^+(k)k^\mu] \Xi \right] \\
\tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^R &= e^{ikx} \left[\frac{\delta}{\delta a_\mu^+(k)} + \frac{i}{2} [a^\mu(k) - i\phi(k)k^\mu] \Xi \right] \\
\tilde{X}_{\phi(k)}^R &= e^{-ikx} \left[\frac{\delta}{\delta \phi(k)} - \frac{i}{2} [k^2 \phi^+(k) - ik^\mu a_\mu^+(k)] \Xi \right] \\
\tilde{X}_{\phi^+(k)}^R &= e^{ikx} \left[\frac{\delta}{\delta \phi^+(k)} + \frac{i}{2} [k^2 \phi(k) + ik^\mu a_\mu(k)] \Xi \right] \\
\tilde{X}_{x^\mu}^R &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}
\end{aligned} \tag{10.11}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_\zeta^L &= i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \equiv \Xi \\
\tilde{X}_{a_\mu(k)}^L &= \frac{\delta}{\delta a_\mu(k)} + \frac{i}{2} [a^{\mu+}(k) + i\phi^+(k)k^\mu] \Xi \\
\tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^L &= \frac{\delta}{\delta a_\mu^+(k)} - \frac{i}{2} [a^\mu(k) - i\phi(k)k^\mu] \Xi \\
\tilde{X}_{\phi(k)}^L &= \frac{\delta}{\delta \phi(k)} + \frac{i}{2} [k^2 \phi^+(k) - ik^\mu a_\mu^+(k)] \Xi \\
\tilde{X}_{\phi^+(k)}^L &= \frac{\delta}{\delta \phi^+(k)} - \frac{i}{2} [k^2 \phi(k) + ik^\mu a_\mu(k)] \Xi \\
\tilde{X}_{x^\mu}^L &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \int \frac{d^3 k}{2k^0} k^\mu [a_\nu(k) \frac{\delta}{\delta a_\nu(k)} - a_\nu^+(k) \frac{\delta}{\delta a_\nu^+(k)}] \\
&\quad + \int \frac{d^3 k}{2k^0} k^\mu [\phi(k) \frac{\delta}{\delta \phi(k)} - \phi^+(k) \frac{\delta}{\delta \phi^+(k)}]
\end{aligned} \tag{10.12}$$

A partir de los generadores izquierdos obtenemos las siguientes relaciones de conmutación no triviales que describen, en particular, el contenido dinámico de cada parámetro:

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{a_\nu(k)}^L \right] &= ik_\mu \tilde{X}_{a_\nu(k)}^L & \left[\tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{a_\nu^+(k)}^L \right] &= -ik_\mu \tilde{X}_{a_\nu^+(k)}^L \\
\left[\tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{\phi(k)}^L \right] &= ik_\mu \tilde{X}_{\phi(k)}^L & \left[\tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{\phi^+(k)}^L \right] &= -ik_\mu \tilde{X}_{\phi^+(k)}^L \\
\left[\tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^L, \tilde{X}_{a_\nu(k')}^L \right] &= ig^{\mu\nu} \Delta_{kk'} \Xi & \left[\tilde{X}_{\phi^+(k)}^L, \tilde{X}_{\phi(k')}^L \right] &= ik^2 \Delta_{kk'} \Xi \\
\left[\tilde{X}_{a_\mu(k)}^L, \tilde{X}_{\phi^+(k')}^L \right] &= k^\mu \Delta_{kk'} \Xi & \left[\tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^L, \tilde{X}_{\phi(k')}^L \right] &= k^\mu \Delta_{kk'} \Xi,
\end{aligned} \tag{10.13}$$

donde $\Delta_{kk'} = 2k^0 \delta^3(k - k')$ es la función delta generalizada sobre la hoja positiva del hiperboloide de masas. A partir de las relaciones de conmutación (10.13), línea 3, se observa que las cuatro componentes de $a_\nu(k)$ y $a_\nu^+(k)$ son variables canónico conjugadas ($\det(g) \neq 0$) para cualquier valor de k , mientras el par $\phi(k)$ y $\phi^+(k)$ son canónico conjugados sólo fuera de la capa de masas del fotón. No obstante, también nos damos cuenta de que existe una parte del cociclo del álgebra de Lie, línea 4 (correspondiente al cociclo $\xi_2(g', g)$ en el grupo), que mezcla las a 's y las ϕ 's. Cuando los parámetros de $U(1)_{loc}$ adquieren contenido dinámico por ellos mismos, es decir, cuando el “fotón” está fuera de la

³Para evitar cálculos innecesarios dejaremos de lado el subgrupo de Lorentz, el cual no juega ningún papel dinámico, y comentaremos simplemente las diferencias no esenciales que se hubieran obtenido si hubiésemos decidido mantenerlo

capa de masa nula, el cociclo puede diagonalizarse transfiriendo así contenido dinámico de una de las parejas conjugadas (aquella asociada a los nuevos coeficientes del campo electromagnético) a los nuevos parámetros de $U(1)_{loc}$. En ambos casos existen cuatro grados de libertad de campo independientes en el grupo \tilde{G} pero, mientras que la condición de T -equivariancia (las ligaduras) resta dos grados de libertad para el campo electromagnético, en el caso $k^2 = m^2 \neq 0$ sólo resta uno, dejando tres grados de libertad que conforman un campo vectorial masivo (campo de Proca; véase subsección 10.2.2 para más detalle).

Continuemos las líneas básicas de la CSG y calculemos la 1-forma de cuantización y la subálgebra característica, las cuales resultan ser:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} \left\{ g^{\mu\nu} \left([a_\mu(k) - ik_\mu\phi(k)] da_\nu^+(k) - [a_\mu^+(k) + ik_\mu\phi^+(k)] da_\nu(k) \right) \right. \\ &\quad + k_\mu [k_\nu\phi(k) + ia_\nu(k)] d\phi^+(k) - k_\mu [k_\nu\phi^+(k) - ia_\nu^+(k)] d\phi(k) \\ &\quad \left. + [a_\mu(k) - ik_\mu\phi(k)] [a_\nu^+(k) + ik_\nu\phi^+(k)] k^\sigma dx_\sigma \right\} + \frac{d\zeta}{i\zeta} \\ \mathcal{G}_\Theta &= \langle \tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{c(k)}^L, \tilde{X}_{c^+(k)}^L \rangle \quad \forall k, \end{aligned} \quad (10.14)$$

donde se ha definido

$$\tilde{X}_{c(k)}^L \equiv \tilde{X}_{\phi(k)}^L + ik_\mu \tilde{X}_{a_\mu(k)}^L, \quad \tilde{X}_{c^+(k)}^L \equiv \tilde{X}_{\phi^+(k)}^L - ik_\mu \tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^L. \quad (10.15)$$

Debemos señalar que \mathcal{G}_Θ también contendría a los generadores del subgrupo de Lorentz si los hubiésemos mantenido. Los invariantes Noether son:

$$\begin{aligned} F_{\phi(k)} &= i_{\tilde{X}_{\phi(k)}^R} \Theta = -ie^{-ikx} k^\mu [k_\mu\phi^+(k) - ia_\mu^+(k)] \equiv -ik^2\phi_{(0)}^+(k) - k^\mu a_{(0)\mu}^+ \\ F_{\phi^+(k)} &= i_{\tilde{X}_{\phi^+(k)}^R} \Theta = ie^{ikx} k^\mu [k_\mu\phi(k) + ia_\mu(k)] \equiv ik^2\phi_{(0)}(k) - k^\mu a_{(0)\mu} \\ F_{a_\mu(k)} &= i_{\tilde{X}_{a_\mu(k)}^R} \Theta = e^{-ikx} [k^\mu\phi^+(k) - ia_\mu^+(k)] \equiv k^\mu\phi_{(0)}^+(k) - ia_{(0)}^{\mu+}(k) \\ F_{a_\mu^+(k)} &= i_{\tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^R} \Theta = e^{ikx} [k^\mu\phi(k) + ia_\mu(k)] \equiv k^\mu\phi_{(0)}(k) + ia_{(0)}^\mu(k) \\ F_{x^\mu} &= i_{\tilde{X}_{x^\mu}^R} \Theta = \int \frac{d^3k}{2k^0} k_\mu [a_{(0)\nu}^+(k) - ik^\nu\phi_{(0)}(k)] [a_{(0)\nu}^+(k) + ik_\nu\phi_{(0)}^+(k)], \end{aligned} \quad (10.16)$$

donde $a_{(0)\mu}^+(k)$, $a_{(0)\mu}(k)$, $\phi_{(0)}^+(k)$, $\phi_{(0)}(k)$ son las condiciones iniciales.

Aparte de la evolución espacio-temporal convencional, generada por $\tilde{X}_{x^\mu}^L$, los otros dos campos de vectores $\tilde{X}_{c(k)}^L, \tilde{X}_{c^+(k)}^L$ en \mathcal{G}_Θ (véase (10.14)) deben entenderse como generadores de la siguiente relación de equivalencia:

$$\begin{aligned} a_\mu(k) &\sim a_\mu(k) + ik_\mu c(k), \quad \phi(k) \sim \phi(k) + c(k) \\ a_\mu^+(k) &\sim a_\mu^+(k) - ik_\mu c^+(k), \quad \phi^+(k) \sim \phi^+(k) + c^+(k), \end{aligned} \quad (10.17)$$

donde $c(k)$ y $c^+(k)$ son los correspondientes parámetros de integración. Los flujos de los campos de vectores en (10.15) constituyen las *transformaciones de gauge* de la teoría, y las relaciones (10.17) constatan simplemente que los gauges puros no contribuyen a la forma simpléctica $d\Theta/\mathcal{G}_\Theta$. El conjunto de campos de vectores (10.15) es precisamente un ideal horizontal del álgebra de Lie $\tilde{\mathcal{G}}^L$ de \tilde{G} . Para este álgebra, tal y como demostramos en las secciones 3.1.1 y 3.2.2, los campos de vectores derechos son proporcionales a los izquierdos y, por consiguiente, los invariantes Noether son nulos. De hecho, los factores de proporcionalidad para este caso realizan una representación del resto de los generadores en la subálgebra \mathcal{G}_Θ , más precisamente, de los generadores del subgrupo de Poincaré.

Con vistas a la reducción de la representación, hay que decir que el grupo \tilde{G} admite dos subálgebras de polarización diferentes según el valor de k^2 . A partir de aquí distinguiremos entre los casos $k^2 = 0$ y $k^2 = m^2 \neq 0$, tratando cada uno de ellos por separado en una subsección. El primer caso conducirá a la Teoría Cuántica de Fotones, mientras que el segundo al Campo Cuántico de Proca.

10.2.1 $\tilde{G}(k^2 = 0)$: Campo Electromagnético

La subálgebra de polarización para este caso (masa nula) es:

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{c(k)}^L, \tilde{X}_{c^+(k)}^L, \tilde{X}_{a_\mu(k)}^L \rangle \quad \forall k \quad (10.18)$$

La condición de $U(1)$ -función (el resto de condiciones de T -función se tratará después) junto con las condiciones de polarización se escriben como:

$$\begin{aligned} \Xi \Psi &= i \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - i \int \frac{d^3 k}{2k^0} k^\mu [a_\nu(k) \frac{\delta \Psi}{\delta a_\nu(k)} - a_\nu^+(k) \frac{\delta \Psi}{\delta a_\nu^+(k)}] - \\ & i \int \frac{d^3 k}{2k^0} k^\mu [\phi(k) \frac{\delta \Psi}{\delta \phi(k)} - \phi^+(k) \frac{\delta \Psi}{\delta \phi^+(k)}] = 0 \\ k_\mu \frac{\delta \Psi}{\delta a_\mu(k)} - i \frac{\delta \Psi}{\delta \phi(k)} &= 0 \\ k_\mu \frac{\delta \Psi}{\delta a_\mu^+(k)} + i \frac{\delta \Psi}{\delta \phi^+(k)} &= 0 \\ \frac{\delta \Psi}{\delta a_\mu(k)} - \frac{1}{2} [a^{+\mu}(k) + i \phi^+(k) k^\mu] \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

cuya solución general es:

$$\begin{aligned} \Psi(x^\mu, a_\mu, a_\mu^+, \phi, \phi^+, \zeta) &= \zeta \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} (a_\nu^+(k') a^\nu(k') - i k'^\nu a_\nu^+(k') \phi(k')) \right. \\ & \left. + i k'^\nu a_\nu(k') \phi^+(k') \right\} \Phi([a_\mu^+(k) + i k_\mu \phi^+(k)] e^{-ikx}) \\ &\equiv W \cdot \Phi([a_\mu^+(k) + i k_\mu \phi^+(k)] e^{-ikx}) \end{aligned} \quad (10.20)$$

donde Φ es una serie de potencias arbitraria en el argumento $[a_\mu^+(k) + i k_\mu \phi^+(k)] e^{-ikx}$. El vacío y los estados de una partícula de momento k son $|0\rangle \equiv W$ y $|a_\mu^+(k)\rangle \equiv W \cdot [a_\mu^+(k) + i k_\mu \phi^+(k)] e^{-ikx}$, respectivamente.

Nótese que la gaussiana que define el vacío contiene el exponente positivo $a_0^+(k') a^0(k')$ que podría hacer diverger el producto escalar. Esta avería se subsana tras imponer el resto de las condiciones de T -función, las cuales definen los *estados físicos* de la teoría. Veamos explícitamente dichas condiciones para este caso:

$$\tilde{X}^R \Psi_{phys} = dD(\tilde{X}^R) \Psi_{phys} \quad \forall \tilde{X}^R \in \mathcal{T} \equiv \langle \Xi, \tilde{X}_{\phi(k)}^R, \tilde{X}_{\phi^+(k)}^R \rangle \quad (10.21)$$

donde escogeremos la representación trivial $dD(\tilde{X}^R) = 0$ para $\tilde{X}^R = \tilde{X}_{\phi(k)}^R, \tilde{X}_{\phi^+(k)}^R$. Aplicando dichas condiciones a una combinación arbitraria de estados monoparticulares $\epsilon^\mu(k) |a_\mu^+(k)\rangle$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\phi^+(k)}^R \epsilon^\mu(k) |a_\mu^+(k)\rangle &= 0 \Rightarrow \epsilon^\mu(k) k_\mu = 0 \\ \tilde{X}_{\phi(k)}^R \Psi_{phys} &= 0 \Rightarrow k^\mu a_\mu^+(k) \Psi_{phys} = 0. \end{aligned} \quad (10.22)$$

La primera condición establece que los estados físicos deben contener la misma cantidad de fotones longitudinales que de tipo tiempo, para todo k . Ésta también garantiza que los estados físicos tengan norma positiva (o nula), ya que $-\epsilon^{\mu+}(k) \epsilon_\mu(k) \geq 0$, y recobra a la vez la conocida *condición de Gupta-Bleuler* [123, 124]. La segunda condición en (10.22) elimina los *vectores nulos* (de norma nula) de la teoría. Ésta establece que todos los vectores de norma nula, creados por la acción de $\tilde{X}_{\phi(k)}^R$, son

equivalentes a cero. En otras palabras, las funciones de onda físicas Ψ_{phys} tienen soporte sólo en la “superficie” $k^\mu a_\mu^+(k) = 0$, eludiendo así la avería en el producto escalar a la que hacíamos referencia anteriormente, concerniente al exponente positivo $a_0^+(k')a^0(k')$ en la gaussiana que define el vacío. Es decir, uno tiene que integrar sólo en los grados de libertad físicos (componentes transversales) cuando calcula el producto escalar. En la cuantización estándar (véase, por ejemplo, [58]) se prefiere, usualmente, permitir que los vectores nulos “circulen” por el sistema, o bien introducir una relación de equivalencia (“dos estados que difieren en un vector nulo son equivalentes”) y seleccionar una clase de equivalencia. Esta forma de proceder encuentra su justificación en el hecho de que el valor esperado de los *operadores físicos* (operadores buenos en nuestro lenguaje) resulta ser independiente de la clase de equivalencia elegida (véase la sección 10.3 para una discusión completa de estos hechos).

Los operadores buenos para este caso resultan ser:

$$\mathcal{G}_T = \langle \epsilon_\mu(k) \tilde{X}_{a_\mu(k)}^R, \epsilon_\mu^+(k) \tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^R, \tilde{X}_{x^\mu}^R \rangle \forall k \quad (10.23)$$

donde los factores $\epsilon^\mu(k)$ están restringidos por las dos condiciones (10.22), es decir, verifican que $\epsilon^\mu(k)k_\mu = 0$ y $-\epsilon^{\mu+}(k)\epsilon_\mu(k) > 0$. Así, proyectan sobre componentes transversales y conservan dos grados de libertad de campo de los cuatro que había originalmente. Los operadores buenos en (10.23) se comportan como operadores de creación y aniquilación de estados transversales,

$$\epsilon_\mu(k) \hat{a}^{+\mu}(k) \equiv \epsilon_\mu(k) \tilde{X}_{a_\mu(k)}^R, \quad \epsilon_\mu^+(k) \hat{a}^\mu(k) \equiv \epsilon_\mu^+(k) \tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^R, \quad (10.24)$$

respectivamente, y los operadores de Poincaré,

$$P_\mu \equiv i \tilde{X}_{x^\mu}^R, \quad M_{\mu\nu} \equiv i \tilde{X}_{\Lambda^{\mu\nu}}^R, \quad (10.25)$$

(cuando se mantienen las transformaciones de Lorentz Λ), declaran, en particular, que el campo electromagnético tiene helicidad ± 1 . Todos ellos cierran una subálgebra del álgebra de Lie original y constituyen los operadores físicos de la teoría.

10.2.2 $\tilde{G}(k^2 \neq 0)$: Campo de Proca

Como hemos mencionado anteriormente, una característica importante del grupo de cuantización (10.10) es que logra la cuantización del campo electromagnético y el campo de Proca de una forma unificada. El término en el cociclo proporcional a k^2 da lugar a que el fotón adquiriera masa. Para ver ésto, mostremos que es posible desacoplar los grados de libertad de $U(1)_{loc}$ por medio de una transformación que diagonaliza el cociclo. En efecto, las combinaciones:

$$\tilde{X}_{b_\mu(k)}^L \equiv \tilde{X}_{a_\mu(k)}^L - i \frac{k^\mu}{k^2} \tilde{X}_{\phi(k)}^L, \quad \tilde{X}_{b_\mu^+(k)}^L \equiv \tilde{X}_{a_\mu^+(k)}^L + i \frac{k^\mu}{k^2} \tilde{X}_{\phi^+(k)}^L \quad (10.26)$$

junto con $\tilde{X}_{\phi(k)}^L$ y $\tilde{X}_{\phi^+(k)}^L$ cierran el álgebra de Lie:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{X}_{b_\mu^+(k)}^L, \tilde{X}_{b_\nu(k')}^L \right] &= i M^{\mu\nu}(k) \Delta_{kk'} \Xi, & \left[\tilde{X}_{\phi^+(k)}^L, \tilde{X}_{\phi(k')}^L \right] &= ik^2 \Delta_{kk'} \Xi \\ \left[\tilde{X}_{b_\mu(k)}^L, \tilde{X}_{\phi(k'), \phi^+(k')}^L \right] &= 0, & \left[\tilde{X}_{b_\mu^+(k)}^L, \tilde{X}_{\phi(k'), \phi^+(k')}^L \right] &= 0 \end{aligned} \quad (10.27)$$

donde $M^{\mu\nu}(k) \equiv g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$. Los dos primeros conmutadores son los de un campo de Proca y de un campo de Klein-Gordon, respectivamente, y los otros indican simplemente que ambos campos están desacoplados. Para este caso, la subálgebra de polarización consta de los siguientes generadores:

$$\mathcal{P} = \langle \tilde{X}_{x^\mu}^L, \tilde{X}_{c(k)}^L, \tilde{X}_{c^+(k)}^L, \tilde{X}_{b_\mu(k)}^L, \tilde{X}_{\phi^+(k)}^L \rangle \forall k \quad (10.28)$$

La integración de las condiciones de polarización sigue pasos esencialmente idénticos a los de la referencia [125] y, junto con la condición de $U(1)$ -función llevan a:

$$\Psi = \zeta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} \left[\sum_{i=1}^3 \alpha^i(k') \alpha^{+i}(k') + k^2 \chi(k') \chi^+(k') \right] \right\} \cdot \Phi([\alpha^{+j}(k) e^{-ikx}], [\chi(k) e^{ikx}]) \equiv W \cdot \Phi \quad (10.29)$$

donde Φ es una serie de potencias arbitraria en sus argumentos; hemos definido $\chi(k) \equiv \phi(k) + i \frac{k^\mu}{k^2} a_\mu(k)$, y los coeficientes $\alpha^i(k)$, $\alpha^{+i}(k)$ son la parte transversal de

$$a_\mu(k) = \sum_{\beta=0}^3 \alpha^\beta(k) \epsilon_\mu^\beta(k), \quad a_\mu^+(k) = \sum_{\beta=0}^3 \alpha^{+\beta}(k) \epsilon_\mu^\beta(k), \quad (10.30)$$

siendo $\epsilon_\mu^\beta(k)$ la tétrada definida por

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \epsilon_\mu^\beta(k) \epsilon_\nu^\sigma(k) &= g^{\beta\sigma} & k^\mu \epsilon_\mu^i(k) &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \epsilon_\mu^0(k) &= k_\mu/k & \sum_{i=1}^3 \epsilon_\mu^i(k) \epsilon_\nu^i(k) &= -M_{\mu\nu}(k). \end{aligned} \quad (10.31)$$

Nótese que tenemos cuatro grados de libertad de campo al igual que en el caso $k^2 = 0$. Para este caso, el grupo de estructura T es él mismo una extensión central, es decir, las ligaduras son de segunda clase, y sólo podremos imponer de forma consistente un subgrupo $T_B = T_p \cup U(1)$ de T como condición de equivariancia. Si elegimos como subgrupo de polarización de T el generado por $T_p = \langle \tilde{X}_{\phi(k)}^R \rangle$, dichas condiciones dicen que

$$\tilde{X}_{\phi(k)}^R \Psi = 0 \Rightarrow \frac{\delta \Phi}{\delta \chi(k)} = 0 \quad \forall k, \quad (10.32)$$

es decir, la función arbitraria Φ no depende de la variable χ . Por otra parte, si elegimos $T_p = \langle \tilde{X}_{\phi^+(k)}^R \rangle$ como subgrupo de polarización de T , se obtiene la condición:

$$\tilde{X}_{\phi^+(k)}^R \Psi = 0 \Rightarrow \chi(k) \Psi = 0 \quad \forall k, \quad (10.33)$$

la cual establece que la función de onda Ψ tiene soporte en sólo aquellos valores para los cuales

$$\chi(k) = 0 \Rightarrow k\phi(k) = -i\alpha^0(k) \quad \forall k. \quad (10.34)$$

Esta condición recuerda vagamente aquella que elimina los bosones de Goldston en el Mecanismo de Higgs, haciendo uso de la libertad para fijar el gauge.

En cualquier caso, el resto de la función de onda, es decir,

$$\Psi = W \cdot \Phi([\alpha^{+j}(k) e^{-ikx}]), \quad (10.35)$$

es exactamente la función de onda del campo de Proca (véase [125] para más detalles al respecto). Los operadores buenos no triviales para este caso son:

$$\mathcal{G}_{good} = \langle \epsilon_\mu^j(k) \tilde{X}_{b_\mu(k)}^R, \epsilon_\mu^j(k) \tilde{X}_{b_\mu^+(k)}^R, \tilde{X}_{x^\mu}^R \rangle, \quad j = 1, 2, 3 \quad (10.36)$$

donde $\hat{\alpha}^{+j}(k) \equiv \epsilon_\mu^j(k) \tilde{X}_{b_\mu(k)}^R$ y $\hat{\alpha}^j(k) \equiv \epsilon_\mu^j(k) \tilde{X}_{b_\mu^+(k)}^R$ son los operadores de creación y aniquilación de componentes transversales, respectivamente. Todo el grupo de Poincaré es también bueno. Las componentes longitudinales $\epsilon_\mu^0(k) \tilde{X}_{b_\mu(k)}^R$ y $\epsilon_\mu^0(k) \tilde{X}_{b_\mu^+(k)}^R$ resultan ser idénticamente nulas sobre funciones de onda polarizadas (10.29); es más, son respectivamente proporcionales a los generadores de gauge $\tilde{X}_{c(k)}^L$, $\tilde{X}_{c^+(k)}^L$ y, por lo tanto, tienen también invariante Noether nulo.

10.3 Comentarios y perspectivas

El principal resultado en este capítulo ha sido la cuantización conjunta del campo electromagnético y el campo de Proca dentro de un esquema coherente basado en la CASG. Para lograr este objetivo ha sido necesaria una revisión de los conceptos de simetría gauge para el campo electromagnético dando lugar a una distinción sutil entre el subgrupo gauge y el subgrupo de ligaduras, el primero asociado a un subgrupo normal y horizontal y el segundo constituyendo el subgrupo de estructura del grupo \tilde{G} .

Otro resultado llamativo es la persistencia de la simetría gauge para el caso masivo. Para este caso existe también la posibilidad de no imponer las ligaduras, permitiendo así la existencia de un campo masivo de “energía negativa” y desacoplado del campo de Proca. Para el caso no abeliano la situación parece ser menos trivial [126], estando por ver la conexión con el Mecanismo de Rotura Espontánea de la Simetría.

Referente a las ligaduras para el caso $k^2 = 0$, debemos remarcar que, en principio, y desde un punto de vista estrictamente algebraico, ambos generadores, $\tilde{X}_{\phi(k)}^R$ y $\tilde{X}_{\phi^+(k)}^R$, pueden imponerse de forma compatible debido a que, al contrario que en caso $k^2 \neq 0$, la ligadura es de primera clase. Se suele argüir en la literatura que un tal conjunto de ligaduras no puede imponerse simultáneamente porque, de otra forma, el conmutador $[k^\mu \hat{a}_\mu^+(k), \hat{a}_\nu(k')] = k_\nu \Delta_{kk'}$ implicaría que el estado $\hat{a}_\nu(k')|\text{físico}\rangle$ no sería físico en general; aún más, se dice que ni el vacío mismo satisfaría la identidad (ligadura) $k^\mu \hat{a}_\mu^+(k)|0\rangle = 0$. No obstante, en nuestro esquema, este problema es ficticio ya que el único conjunto de operadores que tiene sentido considerar en la teoría constreñida es el de operadores buenos (y $\hat{a}_\nu(k')$ no lo es). Por lo tanto, no es que la ligadura sea de segunda clase, la cuestión es si se quiere o no tratar con funciones de onda distribucionales. Precisamente, el tratar con funciones de onda distribucionales es equivalente a eliminar explícitamente los fantasmas y los vectores nulos de la teoría. Nótese que este no es el caso cuando el fotón esta fuera de la capa de masa nula, para el cual sólo $\tilde{X}_{\phi(k)}^R$ o $\tilde{X}_{\phi^+(k)}^R$ puede ponerse como ligadura, debido a que, ahora, la ligadura es de segunda clase.

Por completitud, y como preparación para el caso no abeliano (el cual está siendo investigado actualmente [126]), expresemos la ley de grupo (10.10) directamente en el espacio de configuración. Si nos olvidamos, por simplicidad, del subgrupo de Poincaré, la mencionada ley de grupo tiene la forma:

$$\begin{aligned}
A''_\mu(x) &= A'_\mu(x) + A_\mu(x) \\
\varphi''(x) &= \varphi'(x) + \varphi(x) \\
\zeta'' &= \zeta' \zeta e^{\frac{i}{2} \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) J^\mu(g', g)(x)} \\
J^\mu(g', g)(x) &= A'_\rho(x) \overleftrightarrow{\partial}^{\mu\rho} A^\rho(x) + \varphi'(x) \overleftrightarrow{\partial}^{\mu\rho} (\partial_\rho A^\rho(x)) - \varphi(x) \overleftrightarrow{\partial}^{\mu\rho} (\partial_\rho A'^\rho(x)) \\
&\quad + m^2 \varphi'(x) \overleftrightarrow{\partial}^{\mu\rho} \varphi(x)
\end{aligned} \tag{10.37}$$

donde $\varphi'(x) \overleftrightarrow{\partial}^{\mu\rho} \varphi(x) \equiv \varphi'(x) \partial^\mu \varphi(x) - \varphi(x) \partial^\mu \varphi'(x)$ y así para los demás casos. Los parámetros $A_\mu(x)$ y $\varphi(x)$ tienen que satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + \partial^\nu (\partial_\rho A^\rho(x)) + m^2 A^\nu(x) &\equiv [\partial_\mu \partial^\mu + m^2] A^\nu(x) = 0 \\
[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \varphi(x) &= 0
\end{aligned} \tag{10.38}$$

para que la corriente $J^\mu(g', g)(x)$ sea conservada ($\partial_\mu J^\mu = 0$), y la integral que define el cociclo no dependa de la hipersuperficie de Cauchy Σ elegida.

Como se ha mencionado anteriormente, la ley de grupo (10.37) sugiere una revisión del concepto de transformación de gauge para el potencial vector $A_\mu(x)$. De acuerdo con nuestro esquema, la acción del subgrupo $U(1)_{loc}$ en la ley de grupo (10.37), para $m = 0$, deja quieto el potencial vector, pero cambia el parámetro de la extensión central ζ (y, por consiguiente, la fase de la función de onda). De forma más explícita:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varphi'(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x), \quad \zeta \rightarrow \zeta e^{\frac{i}{2} \int_\Sigma d\sigma_\mu(x) \varphi'(x) \overleftrightarrow{\partial}^{\mu\rho} (\partial_\rho A^\rho(x))}. \tag{10.39}$$

No obstante, la transformación estándar (10.1) se recupera como la trayectoria asociada a los campos de vectores en la subálgebra de gauge. La misma revisión se aplica al caso no abeliano, donde la situación parece ser un poco más sutil.

Capítulo 11

CONCLUSIONES

- Se ha dado una definición coherente y general de simetría gauge y su relación con las ligaduras dentro de un esquema amplio de aproximación por grupos a la cuantización.
- Se ha extendido el concepto de ligadura para abordar la cuantización de teorías con espacios de configuración no triviales y se ha aclarado aquí el concepto de anomalía topológica.
- Se ha formulado una cuantización en el espacio de configuración para teorías de campo lineales en toda su generalidad con el objetivo de establecer lazos de unión entre la CSG y la aproximación lagrangiana usual.
- Se ha formulado también una “segunda cuantización sobre un grupo”, generalizando el concepto Minkowskiano de segunda cuantización, que ha provado ser idónea a la hora de afrontar numerosos problemas graves de la teoría cuántica de campos.
- Se han establecido escapatorias a los teoremas no-go de Groenwald y van Hove como restricciones al número de funciones sobre la variedad simpléctica de un sistema clásico que pueden ser cuantizadas. La válvula de escape a estado en una revisión del concepto de anomalía algebraica y en la consideración de grados de libertad internos anómalos (“simplín”) en conexión con la partícula libre y el oscilador armónico. La posibilidad de obtener objetos extensos, generalizando la Cuerda Bosónica, al intentar cuantizar más funciones clásicas que las admitidas por los teoremas no-go, nos ha llevado al concepto de “anomalía esencial”.
- La posibilidad de describir números cuánticos topológicos fraccionarios aplicando técnicas de CASG, nos ha abierto las puertas al estudio de fenómenos cuánticos interesantísimos ligados a la topología no trivial del espacio donde dichos fenómenos se desarrollan. Nos referimos en particular al Efecto Hall Cuántico Fraccionario, donde hemos apuntado el posible papel fundamental que puede jugar la invariancia modular en la explicación del carácter impar de los denominadores del factor de llenado. Nuestro punto de vista también ofrece una explicación de por qué los estados “madre” están singularizados del resto.
- La construcción de una teoría cuántica de campos sobre el universo de AdS, libre de ambigüedades y exenta de los problemas tradicionales encontrados para espacio-tiempos no globalmente hiperbólicos ha dado fuerza a la SCSG como método coherente de aproximación a la teoría cuántica en espacios curvos.
- Se han entendido los problemas de radiación del vacío por aceleraciones para una teoría de “fotones” en términos de una rotura dinámica de la simetría conforme. El vacío acelerado

resulta radiar como un cuerpo negro y son necesarias aceleraciones muy grandes (como las que pudieron producirse en el “big-bang”) para obtener temperaturas del orden del Kelvin. La SCSG se ha mostrado también aquí de gran utilidad.

- Una revisión de los conceptos de simetría gauge y ligaduras en Teoría de Maxwell nos ha llevado a una cuantización conjunta del campo electromagnético y el campo de Proca. La extensión de estas ideas al caso de Teorías de Yang-Mills no abelianas puede tener consecuencias muy importantes para una formulación coherente de las interacciones fundamentales de corto alcance (bosones vectoriales masivos)

Las publicaciones fruto de esta Tesis se encuentran recogidas en las referencias [48, 20, 31, 122, 127, 29, 128, 30, 27, 93, 130, 129, 126].

Bibliografía

- [1] J.M. Souriau, *Structure des systemes dynamiques*, Dunod, Paris (1970)
- [2] Pressley A., and Segal G., *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford (1986)
- [3] Berry M.V., *Geometric Phases in Physics*, World Scientific (1988).
- [4] L. Fonda and G.C. Ghirardi, *Symmetry Principles in Quantum Physics*, Marcel Dekker, N.Y. (1970)
- [5] Balachandran A.P., Marmo G., Skagerstam B.S. and Stern A., *Gauge Symmetries and Fibre Bundles: Application to Particle Dynamics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 188, Springer-Verlag, Berlin, (1983).
- [6] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol (1990)
- [7] J.M. Souriau, *Structure des systemes dynamiques*, Dunod, Paris (1970)
- [8] B. Kostant, *Quantization and Unitary Representations*, in Lecture Notes in Math. **170**, Springer-Verlag, Berlin (1970)
- [9] J. Sniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1970)
- [10] N. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon, Oxford (1980).
- [11] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press (1991).
- [12] Aldaya, V., Azcárraga, J.A.: J. Math. Phys. **23**, 1297 (1982)
- [13] V. Aldaya, J. Navarro-Salas and A. Ramírez, Commun. Math. Phys. **121**, 541 (1989).
- [14] V. Bargmann, Ann. Math. **59**, 1 (1954).
- [15] E. J. Saletan, J. Math. Phys. **2**, 1 (1961).
- [16] V. Aldaya and J.A. de Azcárraga, Int. J. Teor. Phys. **24**, 141 (1985).
- [17] V. Aldaya, J. Bisquert, R. Loll and J. Navarro-Salas, J. Math. Phys. **33**, 3087 (1992).
- [18] R. Abraham and J. E. Marsden , *Foundations of Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, (1967).
- [19] D. Bak, D. Cangemi and R. Jackiw, Phys. Rev. **D49** , 5173 (1994).
- [20] M. Navarro, V. Aldaya and M. Calixto, *Group Quantization on Configuration Space: Gauge Symmetries and Linear Fields* J. Math. Phys. **38**, 1454 (1997).
- [21] J. Navarro-Salas, M. Navarro, C. F. Talavera and V. Aldaya, Phys. Rev. **D50**, 901 (1994).

- [22] A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag (1976)
- [23] V. Aldaya, J. Bisquert, R. Loll and J. Navarro-Salas, *J. Math. Phys.*, **33**, 3087 (1992).
- [24] V. Aldaya, J. Guerrero and G. Marmo, *Int. J. Mod. Phys.* **A12**, 3 (1997).
- [25] V. Aldaya, J. Guerrero, G. Marmo, *Higher-order Quantization on a Lie Group*, hep-th/9512020 (1995)
- [26] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge Univ. Press (1987).
- [27] M. Calixto, V. Aldaya and J. Guerrero, *Generalized Conformal Symmetry and Extended Objects from the Free Particle*, *Int. J. Mod. Phys.* **A13**, 4889-4911 (1998). hep-th/9707237
- [28] T. Holstein and H. Primakoff, *Phys. Rev.* **A 58**, 1098 (1940)
- [29] M. Calixto, V. Aldaya and M. Navarro, *Quantum Field Theory in Curved Space from a Second Quantization on a Group*, *International Journal of Modern Physics* **A15**, 4011-4044, (2000). hep-th/9701180
- [30] M. Navarro, M. Calixto and V. Aldaya, *Relativistic Field Equations from Higher-Order Polarizations of the Poincaré Group*, *Reports on Mathematical Physics* **41**, 193-202 (1998). hep-th/9612189
- [31] V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, *Algebraic Quantization, Good Operators and Fractional Quantum Numbers*, *Comm. Math. Phys.* **178**, 399-424 (1996).
- [32] R. Jackiw, in *Current Algebra and Anomalies*, S.B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino and E. Witten, eds. World Scientific (1985)
- [33] Isham, C.J.: *Topological and global aspects of quantum theory* in *Relativity, Groups and Topology II*, Les Houches 1983, B.S. De Witt and R. Stora eds. (North-Holland, Amsterdam 1984)
- [34] A. Einstein, N. Rosen and B. Podolski, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [35] Esteve, J.G.: *Phys. Rev.* **D 34**, 674 (1986)
- [36] Ohnuki, Y., Kitakado, S.: *J. Math. Phys.* **34**, 2827 (1993).
- [37] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485, (1959).
- [38] D. MacMullan, *Ann. of Phys.* **237**, 269 (1995).
- [39] N.P. Landsman and N. Linden, *Nucl. Phys.* **B365**, 121 (1991).
- [40] Asorey, M., Esteve, J.G., Pacheco, A.F.: *Phys. Rev.* **D 27**, 1852 (1983); Asorey, M.: *Classical and quantum anomalies in the quantum Hall effect*, *Proceedings of the Fall Workshop on Differential Geometry and its Applications*, Barcelona (1993)
- [41] V. Aldaya and J.A.de Azcárraga, *Int. J. Theor. Phys.* **24**, 141 (1985)
- [42] B.G. Konopelchenko, *Nonlinear Integrable Equations, Recursion Operators, Group-Theoretical and Hamiltonian Structures of Soliton Equations*, *Lecture Notes in Physics* vol. 270, Springer-Verlag (1987).
- [43] R.M. Wald, *General Relativity* Chicago and London: The University of Chicago Press (1984).

- [44] C. Crnković and E. Witten, in *Three Hundred Years of Gravitation*, eds. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge, 1987), p. 676; A. Ashtekar, L. Bombelli and O Reula, in *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, ed. M. Francaviglia (ESP, 1991), p. 417.
- [45] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company (1977).
- [46] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge University Press, (1982).
- [47] S.A. Fulling, *Aspect of Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: Cambridge University Press (1991).
- [48] M. Navarro, V. Aldaya and M. Calixto, *Group Quantization on Configuration Space*, J. Math. Phys. **37**, 206-218,(1996).
- [49] S. J. Avis, C. J. Isham and D. Storey, Phys. Rev. **D18**, 3565 (1978).
- [50] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D14**, 870 (1976)
- [51] C. Fronsdal, Rev. Mod. Phys., **37**, 221 (1965); Phys. Rev. **D10**, 589 (1974); Phys. Rev. **D12**, 3819 (1975); C. Fronsdal and R. B. Haugen, Phys. Rev. **D12** 3810 (1975).
- [52] M. Stone, Proc. Nat. Ac. (1929, 1930).
- [53] J. von Neumann, Math. Ann. Bd. 102 (1929).
- [54] U. Niederer, Helvetica Physica Acta **47**, 167 (1974)
- [55] M. Perroud, Helv. Phys. Acta **50**, 233 1977).
- [56] V. Bargmann, Ann. Math. **48**, 568 (1947).
- [57] H.P. Yuen, Phys. Rev. **A13**, 2226 (1976).
- [58] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill 1985.
- [59] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications (1979).
- [60] H. Sugawara, Phys. Rev. **170**, 1659 (1968).
- [61] G.B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Annals of Mathematics Studies, Princeton Univ. Press, New Jersey (1989).
- [62] J.P. Serre *Lie Algebras and Lie Groups*, W.A. Benjamin, INC., New York, (1965).
- [63] V. Aldaya and J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **113**, 375 (1987).
- [64] E.P. Wigner, Ann. Math. **40**, 149 (1939).
- [65] V. Aldaya, J. Bisquert, J. Guerrero and J. Navarro-Salas, J. Phys. **A26**, 5375 (1993).
- [66] V. Aldaya and J. A. Azcárraga, Ann. of Phys., **165**, (1985).
- [67] E. Floratos and J. Iliopoulos, Phys. Lett. **B201**, 237 (1988).
- [68] S. Mizoguchi, Phys. Rev. **D51**, 6788 (1995).
- [69] V. Aldaya and J. Navarro-Salas, Commun. Math. Phys. **139**, 433 (1991).

- [70] V. Guillemin and S. Stenberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press, (1984)
- [71] L. Alvarez-Gaumé and P. Nelson, *Riemann Surfaces and String Theories*, Trieste School on Supergravity, 419-510 (1986).
S. Katok, *Fuchsian Groups*, Chicago Lectures in Mathematics Series, the University of Chicago Press, Chicago and London (1992).
- [72] R. Jagannathan and N.R. Ranganathan, Rep. Math. Phys. **5**, 131 (1974), **7**, 229 (1975)
- [73] J.A. de Azcárraga and F. Ródenas, *An introduction to Quantum Groups and non-Commutative Differential Calculus*, Proceedings of the III Fall Workshop on Differential Geometry and its Applications, Anales de Física, Granada (1994)
- [74] M. Fernández, M.J. Gotay and A. Gray: Proc. Am. Math. Soc. **103**, 1209 (1988).
- [75] D.B. Fairlie, P. Fletcher, C.K. Zachos, J. Math. Phys. **31**, 1088 (1990)
- [76] Weyl, H.: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York (1931)
- [77] Shen, X.: Int. J. Mod. Phys. **A 7**, 6953 (1992)
- [78] A. P. Polychronakos, Ann. Phys. **203**, 231-254 (1990)
- [79] R. Iengo and K. Lechner, Phys. Rep. **213**, 179-269 (1992)
- [80] E. Witten, Comm. Math. Phys. **121**, 377 (1989)
- [81] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale and N. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982)
- [82] Qian Niu, D. J. Thouless and Yong-Shi Wu, Phys. Rev. **B 31**, 3372 (1985)
- [83] D. J. Thouless, J. Math. Phys. **35**, 5362 (1994)
- [84] Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: *Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford (1965)
- [85] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F.: *Mécanique quantique*, Tome I, Hermann (1977)
- [86] R. E. Prange and S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag (1987)
- [87] J. E. Avron, R. Seiler and B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51**, 51 (1983)
- [88] T. Chakraborty and P. Pietiläinen, *The Quantum Hall Effects*, Springer (1995)
- [89] R. B. Laughlin, Surf. Sci. **142**, 163 (1984)
- [90] H. L. Störmer, Physica **B177**, 401 (1992)
- [91] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983)
- [92] B. I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **52**, 1583, 2390(E) (1984)
- [93] J. Guerrero, M. Calixto and V. Aldaya, *Modular Invariance on the Torus and Fractional Quantum Hall Effect*, Journal of Mathematical Physics **40**, 3773-3790 (1999). hep-th/9707237.
- [94] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).

- [95] S.W. Hawking and G.F. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [96] Aldaya, V., Bisquert, J., Guerrero, J., Navarro-Salas, J.: J. Phys. **A 26**, 5375 (1993); V. Aldaya, J. Bisquert, J. Guerrero and J. Navarro-Salas, Rep. Math. Phys. **37**, 387 (1995)
- [97] B. Nagel, J. Math. Phys. **35**, 1549 (1994)
- [98] V. Aldaya and J. Guerrero, J. Phys. **A26**, 1175, (1993).
- [99] Peter Breitenlohner and Daniel Z. Freedman, Ann. Phys. **144**, 249 (1982).
- [100] V. Bargmann, Ann. Math. **48**, 568 (1947).
- [101] R. Hermann, *Lie groups for physicists*, W.A. Benjamin, INC., New York (1966).
- [102] G.W. Mackey, *Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory*, Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin/Cummings 1978; S. Lang, *SL₂(R)*, Addison-Wesley Publishing Company 1975.
- [103] Robert M. Wald, J. Math. Phys. **21**, 2802 (1980).
- [104] A.A. Grib and N. Sh. Urusova, Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **54**, 398 (1983).
Translated in Institute of Precision Mechanics and Optics, Leningrad.
- [105] E. Cunnigham, Proc. R. Soc. Lond. **8**, 77 (1910).
H. Bateman, Proc. London Math. Soc. **8**, 223 (1910).
- [106] C. Fronsdal, Phys. Rev. **D12**, 3819 (1975).
- [107] E. L. Hill, Phys. Rev. **67**, 358 (1945).
- [108] H.A. Kastrup, Annalen der Physik **9**, 388 (1962)
H.A. Kastrup, Phys. Rev. **142**, 1060 (1966)
H.A. Kastrup, Phys. Rev. **143**, 1021 (1966)
H.A. Kastrup, Phys. Rev. **150**, 1183 (1966)
- [109] V. Aldaya, J. A. Azcarraga and J. Bisquert, Lecture Notes in Physics **278**, 369, Springer-Verlag, (1986).
- [110] Marc-Thierry Jaekel and Serge Reynaud, Phys. Lett. **A220**, 10 (1996).
- [111] M. Lüscher and G. Mack, Commun. Math. Phys. **41**, 203 (1975).
- [112] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett **37** 172 (1976)
C. Callan, R. Dashen and D. Gross, Phys. Lett. **B63** 334 (1976).
- [113] A. O. Barut and Rolf B. Haugen, Ann. of Phys. **71**, 519 (1972).
- [114] U. Niederer, Helvetica Physica Acta **45**, 802 (1972)
A.O.Barut, Helvetica Physica Acta **46**, 496 (1973)
U. Niederer, Helvetica Physica Acta. **47**, 120 (1974)
U. Niederer, Helvetica Physica Acta. **47**, 167 (1974)
- [115] V. Aldaya, M. Calixto and J.M. Cerveró, in preparation.
- [116] H. Weyl, "Space, Time and Matter". Dover. NY. First Edition 1922

- [117] F.Rohrlich et al, Rev. Mod. Phys. **34**,442 (1962)
- [118] V. Aldaya, R. Loll and J. Navarro-Salas, Phys. Lett. **B237**, 392 (1989)
- [119] I. Bialynicki-Birula and Z. Bialynicka-Birula, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon Press 1975.
- [120] R. Jackiw, *Topological investigations of quantized gauge theories*, in *Current algebra and anomalies*, S.B. Treiman et al., eds. World Scientific (1985).
- [121] V. Aldaya and J. Navarro-Salas, Phys. Lett. **B274**, 79 (1992)
- [122] V. Aldaya, M. Calixto and M. Navarro, *The Electromagnetic and Proca Fields Revisited: a Unified Quantization*, Int. J. Mod. Phys. **A12**, 3609-3623 (1997).
- [123] S.N. Gupta, Proc. Phys. Soc. Lon. **A63**, 681, (1950).
- [124] K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567, (1950).
- [125] V. Aldaya, J.A. de Azcárraga and S. García, J. Phys. **A21**, 4265 (1988).
- [126] V. Aldaya and M. Calixto, *Group Approach to Quantization of non-Abelian Gauge Theories: a Cohomological Origin of Mass*, Journal of Physics (Math. & Gen.) **A32**, 7287-7304 (1999).
M. Calixto and V. Aldaya, *Gauge Transformation Properties of Vector and Tensor Potentials Revisited: a Group Quantization Approach*, International Journal of Modern Physics **A15**, 1661-1683 (2000).
M. Calixto and V. Aldaya, *Algebraic Characterization of Constraints and Generation of Mass in Gauge Theories*, Nuclear Physics (Proc. Sup.) **B88**, 361-364 (2000)
- [127] V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, *Group-Theoretical Analysis of the Mixing Angle in the Electro-Weak Gauge Group*, Int. J. Theor. Phys. **35**, 1901, (1996).
- [128] V. Aldaya, M. Calixto and J.M. Cerveró, *Vacuum Radiation and Symmetry Breaking in Conformally Invariant Quantum Field Theory*, Communications in Mathematical Physics **200**, 325-354 (1999). hep-th/9705049
- [129] V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, *Algebraic Versus Topologic Anomalies*, VI International Conference on Differential Geometry and Applications, Proc. Conf. Brno, Czech Republic, Masaryk University, Brno 495-502 (1995)
- [130] V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, *Algebraic Quantization on the Torus and Modular Invariance*, XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics: "Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras". World Scientific Publishing, Vol. I, pag. 401, Singapore (1997)
- [131] V. Aldaya, M. Calixto and J. Guerrero, *Global restrictions to the mixing angle θ_W* , XXI International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics: "Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras". World Scientific Publishing, Vol. II, pag. 744, Singapore (1997)
- [132] J. Guerrero, M. Calixto and V. Aldaya *Fractional Quantization and Quantum Hall Effect*, Physics of Atomic Nuclei **61**, 1960-1965 (1998)
- [133] V. Aldaya, M. Calixto and J.M. Cerveró, *Vacuum Radiation in a Relativistic Accelerated Frame*, Fifth International Wigner Symposium. World Scientific (1997) (por aparecer).