

Departamento de Estadística e Investigación Operativa



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Tesis Doctoral

**Aportaciones en el estudio de
modelos estocásticos de
crecimiento para el estudio de la
producción de petróleo.
Proceso de difusión Hubbert.**

Istoni Da Luz Sant'Ana

Granada, junio de 2017

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales

Autor: Istoni da Luz Sant' Ana

ISBN: 978-84-9163-442-3

URI: <http://hdl.handle.net/10481/48098>

Departamento de Estadística e Investigación Operativa



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Memoria presentada por Istoni Da Luz Sant'Ana, y realizada en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Dña. Patricia Román Román y D. Francisco de Asís Torres Ruiz, Catedráticos de dicho Departamento, con objeto de aspirar al grado de Doctor.

VºBº

Fdo. Dra. D.^a Patricia Román Román
Directora de la Memoria

VºBº

Dr. D. Francisco de Asís Torres Ruiz
Director de la Memoria

Istoni Da Luz Sant'Ana

Índice general

1. Introducción general	5
1.1. La teoría del pico de Hubbert	5
1.2. Breve síntesis de modelos para estudiar la producción de petróleo	8
1.3. Sobre modelos basados en procesos de difusión	11
1.4. Objetivos y estructura de la tesis	17
1.5. Trabajos derivados de la tesis	20
2. La curva Hubbert	23
2.1. Origen de la curva Hubbert	23
2.2. La curva Hubbert	25
2.3. Ecuación de crecimiento de Hubbert	31
3. Proceso de difusión Hubbert	35
3.1. Proceso de difusión de Hubbert a partir de las ecuaciones diferenciales estocásticas	35
3.2. Proceso de difusión de Hubbert a partir de las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov	41
3.3. Características del proceso	47
4. Inferencia en el proceso de difusión Hubbert	53
4.1. Planteamiento general	53

4.2. Función de verosimilitud	56
4.3. Obtención de las estimaciones de los parámetros a partir de las ecuaciones de verosimilitud	57
4.3.1. Búsqueda de solución inicial para el sistema de ecuaciones de verosimilitud	59
4.4. Aplicación de Simulated Annealing y Variable Neighborhood Search para la estimación de los parámetros del proceso	62
4.4.1. Acotación del espacio paramétrico	63
4.4.2. Aplicación de Simulated Annealing	66
4.4.3. Aplicación de Variable Neighborhood Search	69
4.5. Traslación en el tiempo para el proceso Hubbert	70
5. Tiempos de primer paso en el proceso de difusión Hubbert	73
5.1. Cuestiones generales sobre tiempos de primer paso en procesos de difusión	73
5.2. Tiempos de primer paso en el proceso de difusión Hubbert	77
5.3. El tiempo del pico como tiempo de primer paso	81
6. Ajuste y predicción. Aplicaciones	83
6.1. Ajuste y predicción	83
6.2. Estudios de simulación	86
6.2.1. Estimación de los parámetros	87
6.2.2. Predicción del instante del pico y del pico	97
6.3. Aplicaciones a datos reales	101
6.3.1. Noruega	103
6.3.2. Kazajistán	109
7. Conclusiones y líneas futuras	115
7.1. Conclusiones	115

Índice	3
<hr/>	
7.2. Líneas futuras	117
A. Apéndice	119
Bibliografía	132

Introducción general

1.1. La teoría del pico de Hubbert

Es una realidad que la sociedad moderna se ha vertebrado, desde hace muchas décadas, en torno a la disponibilidad de recursos energéticos. De hecho se ha convertido en un sistema dependiente y vulnerable ante la disponibilidad de tal tipo de recursos, especialmente el petróleo, el gas natural y el carbón, los cuales son motores de gran parte de la actividad. Controlar esos suministros puede, por tanto, determinar la salud económica, e incluso la supervivencia, de las naciones¹.

Durante los últimos dos siglos nos hemos acostumbrado a un régimen en el que cada año había más energía disponible, y la población ha crecido rápidamente para aprovechar esta inesperada ganancia de energía. Hemos llegado a confiar en un sistema económico basado en la suposición de que el crecimiento es normal y necesario y que puede durar para siempre. Claramente, la esperada transición energética del siglo XXI afectará a casi todo lo que a la humanidad le preocupa. Ninguna persona o grupo permanecerá ajeno a ello.

De acuerdo con los informes anuales de la Perspectiva Mundial del Petróleo (en inglés, World Oil Outlook), [52, 53], actualmente los combustibles fósiles representan el 81 % de

¹Heinberg, en un pasaje de su libro *The Party's Over* [35], afirma que *si no fuera por el petróleo, los Estados Unidos tendrían poco interés en Oriente Medio. Si no fuera por la participación de Estados Unidos en el Oriente Medio (específicamente Arabia Saudí), Osama bin Laden nunca se habría sentido obligado a destruir símbolos del poder económico y militar de Estados Unidos*

la mezcla global total de energía consumida. Más del 90 % de la demanda de energía para el transporte proviene de productos petrolíferos. La población mundial crecerá en más de 1.772 millones en los próximos años, alcanzando 9.078 millones en 2040. Por consiguiente, la demanda de petróleo se elevará, y se prevé que alcanzará los 109.4 millones de barriles al día en 2040. Más de un tercio de la demanda total proviene del sector del transporte por carretera y se prevé que el número total de automóviles de pasajeros se duplique, pasando de alrededor de 1.000 millones en 2015 a 2.100 millones en 2040, mientras que la población de vehículos comerciales aumentará en 113 %, llegando a 463 millones de vehículos. Los requerimientos esperados de inversión en petróleo durante el período 2016-2040 son 7.4 mil millones de dólares (en dólares de 2015).

Es importante entender lo que hizo del petróleo una mercancía energética tan valiosa. Heinberg [35] detalla su importancia en cuatro puntos:

- Es fácilmente transportable. Los combustibles líquidos son transportados más económicamente que los sólidos, como el carbón o los gases, y pueden transportarse en los buques mucho más fácilmente que los gases.
- Posee una alta densidad de energía. La gasolina contiene aproximadamente 40 kilovatios-hora por galón.
- Tiene la capacidad de refinarse en varios combustibles, incluyendo gasolina, queroseno y diesel, adecuados para una variedad de aplicaciones.
- Tiene una gran variedad de usos, incluyendo el transporte, la calefacción, y la producción de productos químicos agrícolas y otros materiales.

Dado que el petróleo es un recurso no renovable y finito, el problema de predecir la futura producción de petróleo se ha vuelto de gran interés en las últimas décadas junto con el problema de prever el momento en que la producción de petróleo llegará a su punto máximo, después de lo cual la producción comenzará a declinar.

En 1956, M.K. Hubbert fue el primer investigador en estudiar esta cuestión, [38]. Concretamente, consideró la producción de petróleo en 48 estados productores de los Estados Unidos (salvo Alaska y Hawai) y predijo correctamente su pico alrededor de 1970. En su artículo original, Hubbert no proporcionó una forma funcional para su predicción, presentando en su lugar algunos métodos gráficos relacionados con una curva en forma de campana en la que el área bajo la curva era igual a la estimación de la cantidad total de petróleo. Posteriormente, estableció que la producción acumulativa de petróleo sigue una curva logística, por lo que la producción anual se ajusta a su primera derivada (llamada curva Hubbert desde entonces).

Desde la introducción de la teoría del pico de Hubbert, se han dedicado muchos esfuerzos al estudio de la dinámica de la producción de petróleo, especialmente en lo que respecta al pico, el tiempo en el que se alcanza y el agotamiento de los recursos. Ello ha dado lugar a numerosas publicaciones en las que se advierte que la producción de petróleo está cerca de un inevitablemente pico mundial, lo cual puede tener consecuencias en múltiples aspectos de la sociedad actual. Algunos autores auguran tiempos difíciles en tal caso, aludiendo a la *guerra, hambre, recesión económica, e incluso a posibilidad de la extinción del homo sapiens* (Campbell [13]). Algunos expertos, como Bakhtiari [4] o Defeyes [16], creen que el pico ya se ha alcanzado, mientras que otros sostienen que pronto ocurrirá; concretamente, Towler [71] concluye que no es probable que el pico ocurra antes de 2018, y que incluso esta fecha puede ampliarse aún más por el aumento de los precios del petróleo y la evolución de la tecnología.

De hecho, la producción de petróleo en muchas regiones ha alcanzado su punto máximo. Después de un aumento de 100 años, la producción anual de petróleo crudo estadounidense alcanzó su nivel máximo en 1970, con 3,5 mil millones de barriles de petróleo y ha disminuido desde entonces. Brandt [9] analiza 139 regiones productoras de petróleo en todo el mundo y sostiene que la producción en 123 regiones puede ser razonablemente ajustada mediante un solo pico, y que la producción en 74 de estas regiones ya ha

alcanzado su punto máximo.

Hoy día hay un debate abierto sobre el agotamiento del petróleo. En consecuencia, se han hecho varias contribuciones a este campo en los últimos años, proponiendo análisis y predicciones de fechas específicas de pico de petróleo. Muchos de estos modelos se refieren al enfoque de Hubbert, tratando de extender y actualizar en un intento de modificar y/o completar algunos aspectos de su teoría.

La teoría de Hubbert hoy día es fuente de controversia ya que diversos autores no se ponen de acuerdo en cuando ocurrirá el pico, si bien todos lo están en que tiene que ocurrir (obviamente debe ser así al tratarse de un recurso energético limitado). Lo importante es poder controlar cuando tendrá lugar en función de factores ajenos a la producción en sí. Controversias aparte, sí es un tema de máxima actualidad, emitiéndose periódicamente informes sobre el mismo: por ejemplo el informe anual de la OPEC, de la Agencia Internacional de la Energía, de la Agencia de Información de Energía de EE.UU., existiendo incluso una asociación internacional para el estudio del pico del petróleo (ASPO, <http://peak-oil.org/>), fundada en 2000 y con sede en numerosos países.

1.2. Breve síntesis de modelos para estudiar la producción de petróleo

Como se ha comentado en la sección anterior, M. K. Hubbert fue el primer investigador que desarrolló una teoría para el estudio de la producción de petróleo. En 1956 aplicó su teoría a la producción de petróleo crudo en Estados Unidos, y predijo correctamente que su pico sería alcanzado alrededor de 1970. Al principio, no proporcionó una forma funcional para su predicción, sino que su ajuste se basó en métodos gráficos usando una curva en forma de campana en la que el área bajo la curva era igual a las estimaciones existentes sobre la cantidad de petróleo total disponible. Más tarde, en 1959, especificó una forma funcional para la curva, [39]. Su punto de partida fue la curva logística, indicando que la

producción acumulada a lo largo del tiempo seguiría una curva de tal tipo y, por tanto, la producción anual seguiría la primera derivada de la curva logística (desde entonces llamada curva Hubbert).

Probablemente, el principal valedor y exponente de las teorías de Hubbert es K. Deffeyes, quien ha publicado varios libros defendiendo sus teorías, el último de ellos publicado en 2010, [17]. Sin embargo, algunos aspectos de estas teorías han llevado a los investigadores a ampliar y/o modificar su modelo.

Algunos analistas han demostrado que el modelo de Hubbert tiene desventajas y limitaciones, en particular, las siguientes:

- Asume que la producción de petróleo sólo depende del tiempo y no tiene en cuenta el efecto de posibles factores tecnológicos y/o económicos.
- Proporciona una predicción de la producción de petróleo en un sistema con sólo un pico, que parece válido a un limitado número de casos, es decir, como la producción de petróleo en los 48 estados continentales de los EE.UU., o países con un gran número de campos de petróleo como la antigua Unión Soviética.

En este sentido, Laherrère mostró en [43] que la producción de petróleo en varios países (entre otros Francia y el Reino Unido) no puede ser representada por un solo ciclo como establece la teoría clásica Hubbert. Por esta razón, introdujo un modelo caracterizado por varios ciclos, adoptando un enfoque que se llama desde entonces *ajuste múltiple de Hubbert*. Este enfoque ha sido extendido posteriormente en [48] por Maggio y Cacciola y aplicado al ajuste de la producción de petróleo. Por ejemplo, Nashawi et al. [51] lo hicieron referido a la producción mundial de petróleo, mientras que Saraiva et al. se ocuparon del caso brasileño, [67].

Otro aspecto que ha recibido especial atención es la simetría de la curva Hubbert alrededor del pico, lo que significa que las tasas de aumento y disminución de la producción (antes y después del pico) son las mismas. Brandt consideró en [9] varios modelos lineales

y exponenciales simétricos y asimétricos, y los comparó con la curva Hubbert. Hallock et al. [34] introdujeron una versión modificada de la curva Hubbert que alcanza el 60 % de la producción de petróleo en lugar del valor típico del 50 % exhibido por la curva original, lo que implica una forma asimétrica de producción y una tasa de disminución más pronunciada que la de crecimiento.

Por otro lado, las implicaciones económicas de la producción de petróleo son evidentes. El método de Hubbert supone que la producción de petróleo sólo depende del tiempo y no toma en cuenta los efectos de posibles factores tecnológicos y/o económicos. Con el fin de incluir estos factores en dichos estudios, se han propuesto varias modificaciones. Por ejemplo, en [54, 55], Reynolds incluye precios y costos en el modelo de Hubbert; Brecha [10] consideró un modelo híbrido que combina la curva logística usual con los costos de extracción proyectados a partir de los datos existentes; Kaufmann [40] considera el efecto de factores geológicos, económicos y políticos sobre la producción de petróleo en los 48 estados continentales de Estados Unidos entre 1947 y 1985; Holland [37] consideró modelos en los que la producción aumenta, entre otros factores, con la demanda, las nuevas tecnologías y las adiciones de nuevas reservas. También se ha considerado modelos econométricos, como el de Kemp y Kasim [41] basado en un sistema de ecuaciones simultáneas. Guseo et al. [21] se basaron en un modelo generalizado de Bass para tratar el crecimiento global del petróleo como un proceso de difusión natural vinculado con variables exógenas clave como el precio, la tecnología y las intervenciones estratégicas. Este modelo empleó técnicas de correlación autorregresiva para diseccionar los datos históricos de series de tiempo de producción en elementos de difusión, intervenciones de memoria larga y componentes estocásticos de ruido blanco.

Por último, y en cuanto a modelos probabilísticos, Bertrand sugirió en [6] un modelo para predecir la producción de petróleo basado en el tamaño del campo petrolífero, ajustado por una distribución de Pareto, y tomando en cuenta de lanzamiento de la producción, ajustado por una distribución gamma.

Como puede verse, el debate sobre el agotamiento del petróleo ha dado lugar a múltiples estudios, y la literatura sobre el tema es bastante extensa, con varias contribuciones que proponen análisis y predicciones de la fecha del pico petrolífero. Cabe señalar también que, aunque la teoría del pico iniciada por Hubbert se implementó en el contexto de la producción de petróleo, hoy día se aplica a otros recursos no renovables como el gas natural (Soldo [68]), el fósforo (Déry y Anderson [18]), y el litio (Vikström et al. [75]).

1.3. Sobre modelos basados en procesos de difusión

La mayoría de los modelos mencionados en la sección anterior no consideran la producción de petróleo como una variable aleatoria que evoluciona con el tiempo. No obstante, fenómenos de crecimiento, como de hecho es la producción de petróleo, no son estáticos sino dinámicos, y muestran una evolución temporal.

Sin embargo, este tipo de fenómenos con frecuencia presentan una elevada complejidad que suele conllevar la especificación de múltiples factores que no siempre son conocidos o cuantificables, o incluso pueden ser desconocidos. Como indican Li et al. [45] *los ruidos son muy abundantes en la naturaleza y la sociedad humana; por ejemplo, las fluctuaciones ambientales, la falta de precisión de las mediciones. En cualquier caso, uno tiene que lidiar con los efectos de la aleatoriedad en el modelo.* Este inconveniente se puede evitar mediante el uso de modelos estocásticos entre los que destacan los procesos de difusión. En el contexto de las curvas relacionadas con los fenómenos de crecimiento (como es el caso de la curva Hubbert), estos procesos surgen cuando se introduce una fluctuación aleatoria en la ecuación diferencial cuya solución es la curva bajo estudio, introduciendo así ecuaciones diferenciales estocásticas (E.D.E). El uso de estos modelos estocásticos no sólo proporciona una explicación más realista de las variables en estudio, sino que también permite estudiar otras características importantes, por ejemplo, la inferencia, los tiempos de primer paso y sus problemas relacionados.

La literatura sobre la construcción y aplicación de procesos de difusión es amplísima. Uno de los pioneros fue Feller en 1939, quien consideró un proceso asociado a la curva logística. Para ello consideró una E.D.E. transformando la conocida ecuación diferencial logística con la inclusión de un factor cuadrático en el término estocástico de la misma. Sin embargo, la densidad de transición nunca se ha obtenido al no poder resolverse las ecuaciones diferenciales parciales de Kolmogorov. Tuckwell y Koziol [72] consideran extensiones del modelo anterior proponiendo otras funciones para incluir en el término estocástico de la ecuación diferencial. Algunas de esas extensiones han tenido aplicación, por ejemplo en Demografía, [3]. Schurz [69] considera una versión mucho más general aún de la E.D.E. asociada al crecimiento logístico y Rupsys [66] introduce una versión que incluye retardos.

La metodología anterior ha sido aplicada en el ámbito de otros tipos de curvas de crecimiento. Por ejemplo, asociado al modelo malthusiano (curva exponencial) dando lugar al proceso lognormal (Capocelli y Ricciardi [14, 15]). Tales autores lo aplican a crecimiento de poblaciones en Ecología, mientras que en Economía está asociado con el modelo de Black y Scholes [7]. Ligado a la curva Gompertz, Capocelli y Ricciardi [15] introdujeron un proceso que modela comportamientos similares al logístico, en concreto asociados a una curva Gompertz cuya cota no depende del valor inicial, y que no presenta el inconveniente del anterior de no disponer de solución exacta para las ecuaciones de difusión. Sin embargo, este modelo no permite describir situaciones en las cuales se disponga de múltiples trayectorias que, mostrando una pauta de crecimiento tipo Gompertz, presenten cotas diferentes dependiendo del valor inicial de las mismas. En este sentido, en [28], Gutiérrez et al. introducen un nuevo modelo tipo Gompertz cuya media es una curva Gompertz que permite modelar ese tipo de comportamientos. Siguiendo la metodología de este último artículo, y con la idea de que la media del proceso construido sea una determinada curva de crecimiento, han aparecido recientemente diversos procesos asociados a distintas curvas: Von Bertalanffy (Román et al. [58]; Román y Torres [64]), logística (Román y Torres [63]; Barrera et al. [5]) y Richards (Román y Torres [65]).

Centrándonos ahora en el contexto de estudios energéticos, Giovanis y Skiadas [20] utilizaron un proceso de difusión logístico para estudiar el consumo de energía en Grecia y Estados Unidos. Gutierrez et al. [23, 24] consideraron procesos de difusión asociados a curvas Gompertz y gamma, para modelar el consumo de electricidad en Marruecos y la tendencia del stock total de automóviles privados, respectivamente. Más recientemente, Nadifi et al. [50] consideraron un proceso de difusión gamma con factores exógenos con el objetivo de ajustar y predecir el consumo de electricidad en España.

Una vez planteados los modelos, uno de los principales problemas relacionados con su estudio es el de la inferencia. Una de las líneas fundamentales en las que más se ha profundizado recientemente es la derivada de la consideración de muestreo discreto de las trayectorias del proceso, aplicando la teoría de máxima verosimilitud y tratando la estimación máximo verosímil de los parámetros y de funciones paramétricas de interés (con fines predictivos) como la funciones media, moda y percentiles del proceso.

Sin embargo, en la mayor parte de los procesos comentados con anterioridad, asociados con las curvas de crecimiento Gompertz, Bertalanffy, logística y Richards, la estimación máximo verosímil de los parámetros (y por consiguiente de cualquier función paramétrica de interés) plantea dificultades ya que las ecuaciones de verosimilitud no tienen solución explícita y surgen complicaciones en la aplicación de los procedimientos numéricos clásicos, entre las que destacamos la obtención de buenas soluciones iniciales que garanticen la convergencia del algoritmo o método empleado. Por ello, en [28], en el ámbito de un proceso tipo Gompertz (introducido en dicho artículo), se propuso un procedimiento iterativo validado mediante simulación y se realizó una aplicación a datos reales de crecimiento de conejos; asimismo para el proceso Bertalanffy, introducido en [58], y el logístico, [63], se han planteado estrategias para la obtención de buenas soluciones iniciales para la aplicación de procedimientos numéricos usando la información proporcionada por las trayectorias observadas en relación con características propias del modelo a estimar. Estas estrategias han sido validadas mediante estudios de simulación y se han realizado aplicaciones al

crecimiento de especies piscícolas y cultivo de microorganismos, respectivamente.

No obstante, puesto que las ecuaciones que se obtienen dependen de los valores muestrales de las trayectorias observadas, no se puede garantizar siempre que los métodos empleados puedan ser utilizados. Por ejemplo, se han descrito casos concretos en los que métodos como el de Newton-Raphson o el de bisección presentan problemas al no verificarse las hipótesis que permiten su empleo. Por lo tanto la estimación máximo verosímil de los parámetros debe abordarse de forma directa maximizando la función de verosimilitud. Aquí entra en juego una clase de algoritmos ampliamente usados en una gran variedad de problemas de muy distinta naturaleza entre sí: las metaheurísticas, que se definen como estrategias generales para diseñar procedimientos heurísticos para resolver un problema de optimización mediante un proceso de búsqueda en un cierto espacio de soluciones alternativas.

Las metaheurísticas se aplican generalmente a los problemas para los que no existe un algoritmo específico satisfactorio para resolverlos. Casi todas las metaheurísticas comparten las siguientes características: están inspiradas en la naturaleza (basado en algunos principios de la física o la biología), hacen uso de componentes estocásticos (que involucran variables aleatorias), no utilizan el gradiente o matriz hessiana de la función objetivo y tienen varios parámetros que deben introducirse apropiadamente en el problema en cuestión. Una metaheurística tendrá éxito en un problema de optimización dado si se puede proporcionar un equilibrio entre la exploración y la explotación. Se necesita explotación para identificar las partes de el espacio de búsqueda con soluciones de alta calidad. En la explotación es importante intensificar la búsqueda en algunas áreas prometedoras de la experiencia de búsqueda acumulada. Las principales diferencias entre las metaheurísticas existentes se refieren a la forma particular en que ellos tratan de lograr este equilibrio. Dos de las metaheurísticas que más se han desarrollado en las últimas décadas han sido Simulated Annealing (S.A.) y Variable Neighborhood Search (V.N.S.). S.A. ha sido aplicado con éxito en el contexto de estimación de máxima verosimilitud

para distribuciones (Vera y Díaz-García [74], y Abbasi et al. [1]). En el ámbito de los procesos de difusión Román-Román et al. [57] lo han utilizado para estimar los parámetros de un proceso de difusión tipo Gompertz. En cuanto a V.N.S., los trabajos de Zoraghi et al. [76] y Abbasi et al. [1] muestran algunas aplicaciones a la estimación de parámetros en distribuciones. Recientemente Román-Román y Torres-Ruiz [65] lo han aplicado para estimar los parámetros de un proceso de difusión tipo Richards.

Otro problema de interés asociado a los procesos de difusión, y en general en el estudio de fenómenos que involucran variables que evolucionan en el tiempo, y que por tanto se pueden modelar mediante procesos estocásticos, surge de forma natural al plantearse cuestiones acerca de la evolución temporal de la variable en estudio.

Dentro de este tipo de situaciones merece especial atención aquellas en las que la variable temporal que se desea estudiar es el tiempo en el que el proceso verifica por primera vez una propiedad; es decir la variable

$$\text{Inf}_{t \geq t_0} \{t : X(t) \text{ verifica una propiedad dada}\},$$

para la cual se debe calcular su distribución.

En múltiples situaciones, tal propiedad puede formularse en términos de una función, denominada barrera, de tal forma que el problema planteado es el estudio del primer instante de tiempo en el cual el proceso alcanza, o atraviesa, dicha función, dando origen a lo que se conoce como *problema de tiempo de primer paso*. Esta cuestión aparece en la modelización de fenómenos aleatorios en diversos campos como en Ecología, con el estudio del tiempo de primer paso de animales por determinadas zonas, o en Neurobiología, donde la actividad de una neurona puede ser estudiada a través del tiempo de primer paso por un umbral del proceso que modela la diferencia de potencial de la membrana neuronal. Históricamente el problema se consideró primero para procesos homogéneos en el tiempo. Tras un largo proceso, Giorno et al. [19] establecieron que la densidad de tiempo de primer

paso verifica una ecuación integral de Volterra de segunda especie. El estudio del caso no homogéneo pasó por diversas etapas, concluyéndose en 1997 cuando Gutiérrez et al. [25] verificaron que la anterior ecuación era válida también para procesos no homogéneos.

Los resultados obtenidos sobre este tema no se limitan solamente a los aspectos meramente teóricos. En este sentido, y entroncando con la clase de procesos de crecimiento de tipo difusión, podemos citar el caso del proceso lognormal con factores exógenos para el cual la obtención de la densidad de tiempo de primer paso a través de barreras constantes ha sido aplicada al campo económico para el estudio de variables macroeconómicas como es el caso del Producto Interior Bruto (Gutiérrez et al. [32]). Asimismo, para el proceso de difusión tipo Gompertz introducido en [28] se han estudiado variables temporales asociadas a dos características importantes de esta curva de crecimiento: el instante de inflexión y el primer instante de tiempo en el que el proceso alcanza un determinado porcentaje de su crecimiento total. El análisis de ambas cuestiones ha conducido a reducirlas al estudio de tiempos de primer paso a través de barreras constantes, siendo aplicado este estudio al crecimiento (en cuanto al tamaño) de algunas especies animales, [29]. En [58] se aplica esta metodología, dentro del contexto del proceso Bertalanffy, al estudio del crecimiento de determinadas especies piscícolas, mientras que en [63] se considera el proceso logístico, aplicándolo al estudio del tiempo de inflexión en el crecimiento de cultivos de microorganismos.

Asimismo, determinados aspectos computacionales han sido objeto de interés en el estudio de problemas de tiempos de primer paso. En efecto, la solución de la ecuación integral que verifica la densidad de la variable tiempo de primer paso no siempre puede ser establecida de forma explícita (salvo para el caso de determinados procesos y barreras concretas), lo cual obliga a emplear esquemas numéricos como el propuesto por Buonocore et al. [11] basado en la regla del trapecio compuesta. Sin embargo, en la aplicación de estos métodos numéricos pueden aparecer ciertos inconvenientes que pueden conducir a malas aproximaciones de la función de densidad de tiempo de primer paso, o, en el

caso de buenas aproximaciones, a costes computacionales innecesariamente elevados. Esta cuestión ha sido tratada por Román et al. en [59], donde se presenta una estrategia para una aplicación eficiente de ese tipo de esquemas numéricos. Esta estrategia se basa en una función introducida en dicho artículo (First Passage Time Location (F.P.T.L.) Function) que aporta información sobre la localización del rango de variación de la variable temporal en estudio. No obstante el estudio se centra en comportamientos particulares de dicha función, concretamente en el caso de ser crecientes o de ser crecientes hasta un cierto valor y luego decrecer en el resto del intervalo. Una extensión de esta estrategia para cualquier tipo de comportamiento de la función F.P.T.L. puede verse en Román-Román et al. [60, 61] junto con la descripción de un paquete de R creado para implementarla y que está disponible en CRAN ([62]).

1.4. Objetivos y estructura de la tesis

En las secciones anteriores se ha comentado la importancia que hoy día tiene el problema de la modelización de la producción de petróleo, sobre todo en lo que se refiere a predecir su comportamiento, haciendo especial énfasis en el estudio del instante en el que la producción alcance su máximo (el pico). Asimismo se han enumerado algunos de los modelos que se han propuesto para abordar tal cuestión. No obstante, hasta la fecha no se han empleado procesos estocásticos, ni menos de difusión, para analizar este problema. Este es el objetivo fundamental de esta tesis: introducir un proceso de difusión relacionado con la curva Hubbert y que, por consiguiente, pueda ser utilizado para la modelización de la producción de petróleo y, en consecuencia, permita abordar los problemas de predicción asociados a tal producción.

El proceso introducido verifica que su función media y su función media condicionada (condicionada a un valor en un instante de tiempo anterior) son curvas Hubbert. Esto indica que el proceso puede ser considerado como una herramienta válida para el estu-

dio de datos que muestran un comportamiento de tipo Hubbert, como son los datos de producción de petróleo. En particular, estas funciones media permiten ajustar los datos observados en el tiempo y predecir los valores futuros de la producción de petróleo. Por otro lado, el hecho de que estas funciones medias sean curvas de Hubbert permitirán el estudio del pico y el tiempo del pico. Tanto las funciones media, pico y tiempo del pico pueden expresarse como funciones paramétricas, por lo que para estimarlas se debe primero estimar los parámetros del proceso, lo cual conduce a un estudio más profundo sobre procedimientos de estimación óptimos.

Además, el uso de un proceso de difusión para ajustar la evolución temporal de la producción de petróleo permite abordar el estudio del tiempo del pico desde una perspectiva estocástica, y más específicamente como la variable de tiempo en la que la producción alcanza, por primera vez, su máximo.

De forma resumida, la estructura de la tesis es la siguiente:

- El Capítulo 2 está dedicado a un estudio de la curva Hubbert. Se describe de forma resumida sus orígenes, pasando después a estudiarla a partir de la curva logística. Es importante destacar la reparametrización que se hace de la curva, a partir de la cual se obtiene una expresión que permite posteriormente abordar de forma más adecuada el problema de acotación del espacio asociado a los parámetros que en ella aparecen. Se analizan sus principales características y se finaliza mostrando la ecuación diferencial de crecimiento que sigue dicha curva, fundamental para el establecimiento del proceso de difusión asociado.
- En el Capítulo 3 se introduce el proceso Hubbert. La forma natural de hacerlo es siguiendo la habitual metodología seguida para el establecimiento de procesos de difusión asociados a curvas de crecimiento. Esto es, a partir de la ecuación diferencial determinística seguida por la curva, a la cual se le añade un término estocástico, dando lugar a una E.D.E. cuya solución es el proceso Hubbert. No obstante, también

se plantea, de forma alternativa, la introducción a partir de las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov. Posteriormente se estudia la distribución del proceso y sus principales características, haciendo hincapié en aquellas que serán especialmente útiles con fines predictivos.

- El Capítulo 4 está dedicado a la inferencia en el proceso. La estimación se realizará, aprovechando el carácter markoviano del proceso, mediante máxima verosimilitud, considerando muestreo discreto de las trayectorias. El hecho de que las ecuaciones de verosimilitud no posean solución explícita conduce necesariamente a abordar su resolución mediante métodos numéricos, como Newton-Raphson. En este punto se hace imprescindible un estudio para determinar soluciones iniciales óptimas, presentando diversas alternativas dependiendo del conocimiento que se tenga de algunas características asociadas a la curva Hubbert, y que se puedan deducir de los datos disponibles en aplicaciones prácticas. No obstante, en ocasiones los métodos de resolución presentan problemas de convergencia al no poderse asegurar siempre la misma al depender el sistema de ecuaciones de las observaciones muestrales. Ello conduce a plantear la maximización directa de la función de verosimilitud mediante algoritmos metaheurísticos, concretamente S.A. y V.N.S. Estos métodos precisan de espacios de soluciones acotados, lo cual lleva a un estudio en tal sentido, aprovechando para ello algunas de las propiedades exhibidas por la curva Hubbert en la forma reparametrizada introducida en el Capítulo 2.
- El Capítulo 5 aborda el problema de tiempos de primer paso. Tras una introducción general al problema, exponiendo la forma de resolverlo, se procede a plantearlo en el caso concreto del proceso Hubbert, presentando barreras para las cuales se tiene asegurada que la densidad de tiempo de primer paso, a través de barreras variables en el tiempo, tenga solución explícita e indicando cómo se puede abordar el problema en otro caso mediante métodos numéricos.

Posteriormente se plantea el problema de la estimación del tiempo del pico como un problema de tiempo de primer paso. Para ello se relaciona este proceso con el proceso logístico introducido por Román y Torres en [63]. De esta forma, la variable tiempo del pico se calcula a partir del tiempo de primer paso del correspondiente proceso logístico a través de la barrera constante que determina el tiempo de inflexión en el proceso logístico.

- El Capítulo 6 aborda el problema de la predicción en el proceso, determinando cómo se puede plantear tanto la predicción de valores del proceso como la estimación del pico y tiempo del pico. A continuación se presentan diversas aplicaciones concretas. Primeramente se realizan diversos estudios de simulación con el objetivo de validar todos los procedimientos relacionados con la inferencia y presentados en el Capítulo 3. Posteriormente se presentan dos aplicaciones a datos reales, considerando para ello los datos de producción de petróleo crudo de Noruega y Kazajistán. Estos ejemplos muestran las posibilidades que presenta el proceso Hubbert introducido para ajustar la producción de petróleo y cómo puede ayudar a responder a la pregunta de cuándo puede esperarse la producción máxima.
- Finalmente se incluye un apartado de conclusiones y de futuras líneas de investigación que se desprenden de esta tesis.

1.5. Trabajos derivados de la tesis

A continuación se enumeran los trabajos que se han realizado a partir de los contenidos de la tesis. De ellos, dos son en revistas de impacto JCR. En concreto uno está publicado en *Energy*, revista de impacto Q1, y el otro está en periodo de revisión en *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. El resto de contribuciones, cinco en total, lo han sido en congresos de carácter internacional.

El listado de los trabajos es el siguiente:

■ **Trabajos en revistas**

- Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2017). Modeling oil production and its peak by means of a stochastic diffusion process based on the Hubbert curve. *Energy*, (en prensa).
<http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2017.05.125>
- Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2017). The Hubbert diffusion process: estimation via simulated annealing and variable neighborhood search procedures. Application to forecasting peak oil production. Sometido a *Applied Stochastic Models in Business and Industry*.

■ **Contribuciones en congresos internacionales**

- Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2014). A Hubbert diffusion process. *21^o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística (SINAPE 2014)*. Natal, 20 al 25 de julio. Tipo de comunicación: oral.
- Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2014). A double-Hubbert diffusion process. *37th Conference on Stochastic Processes and their Applications (SPA 2014)*. Buenos Aires, 28 de julio al 1 de agosto . Tipo de comunicación: póster.
- Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2015). Modeling one cycle oil production and its peak by means of a Hubbert diffusion process. *EMS 2015, European Meeting of Statisticians*. Amsterdam, 6-10 de julio. Tipo de comunicación: póster.
- Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2016). Modeling two life-cycles oil production and its peak by means of stochastic diffusion process. *22^o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística (SINAPE 2016)*. Porto Alegre, 24 al 29 de julio. Tipo de comunicación: póster.

- Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2016). Using Simulated Annealing and Variable Neighborhood Search procedures for estimating the Hubbert diffusion process. *22nd International Conference on Computational Statistics (COMPSTAT 2016)*. Oviedo, 23-26 de agosto. Tipo de comunicación: póster.

La curva Hubbert

2.1. Origen de la curva Hubbert

El origen de esta curva hay que buscarla en el geofísico investigador estadounidense Marion King Hubbert (1903-1989). Nació en San Saba, Texas, en 1903 y estudió en la Universidad de Chicago donde se graduó en 1926, obteniendo el título de doctor en 1937. Sus estudios se centraron principalmente en Geología, Matemáticas y Física. Trabajó como geólogo ayudante para la *Amerada Petroleum Company* durante dos años, simultaneando este trabajo con sus estudios de doctorado. Posteriormente trabajó en la *Shell Oil Company* desde 1943 a 1964. Tras pasar por Shell, trabajó como experto geofísico para el *United States Geological Survey* hasta su retiro en 1976. También desempeñó funciones de profesor de Geología y Geofísica en la Universidad de Standford de 1963 a 1968 y en la de Berkeley de 1973 a 1976.

Hubbert realizó varias contribuciones a la Geofísica, incluyendo la demostración matemática de que la roca en la corteza de la Tierra debía presentar plasticidad, al igual que la arcilla, a causa de la gran presión a la que está sometida en grandes áreas. Esta demostración explicaba las observaciones de que la corteza de la Tierra se deforma con el tiempo. Sin embargo, Hubbert es especialmente conocido por sus estudios sobre la disponibilidad de las reservas de petróleo y de gas natural, desarrollando una teoría relativa al cálculo del instante en el que el petróleo alcance su cénit de producción, hoy día denominada Teoría del Pico de Hubbert.

Según esta teoría, desarrollada mientras fue geofísico en el laboratorio de la compañía Shell, la producción de petróleo crece de forma exponencial hasta alcanzar su cénit, tras lo cual desciende al mismo ritmo, como muestra la figura 2.1, que es la original que el propio Hubbert realizó en 1956.

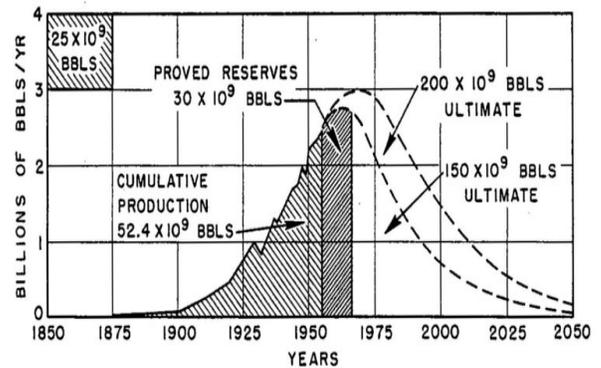
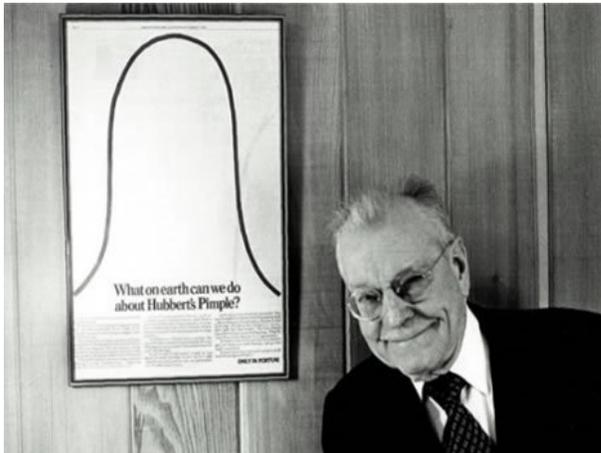


Figure 21 - Ultimate United States crude-oil production based on assumed initial reserves of 150 and 200 billion barrels.

Figura 2.1: M. K. Hubbert y el diseño de la curva realizado en 1956.

La curva muestra la producción anual de petróleo. Para Hubbert el factor que propiciaba la caída en la producción era energético, esto es, la producción cae cuando el gasto energético que supone la extracción de un barril de petróleo es superior a la energía que puede producir tal barril. No obstante, él no tuvo en cuenta factores ni de tipo económico ni de tipo sociopolítico. Su gran éxito fue predecir en 1956 que EE.UU. alcanzaría el pico de producción a finales de los años 60, lo cual fue corroborado posteriormente (figura 2.2).

Asimismo, en aquellos años se atrevió a vaticinar que el pico a nivel mundial se alcanzaría entre 1995 y 2000, lo cual no se produjo. ¿Por qué? Obviamente no pudo tener en cuenta las sucesivas crisis energéticas de los años 70, ni la Guerra del Golfo ni las recesiones económicas de la década de los 80. Visto ahora, 60 años después, las predicciones de Hubbert no se ajustan a la realidad. En la gráfica 2.3 vemos en rojo la predicción dada en 1956 frente a las observaciones reales. ¿Qué conclusiones debemos sacar?: por

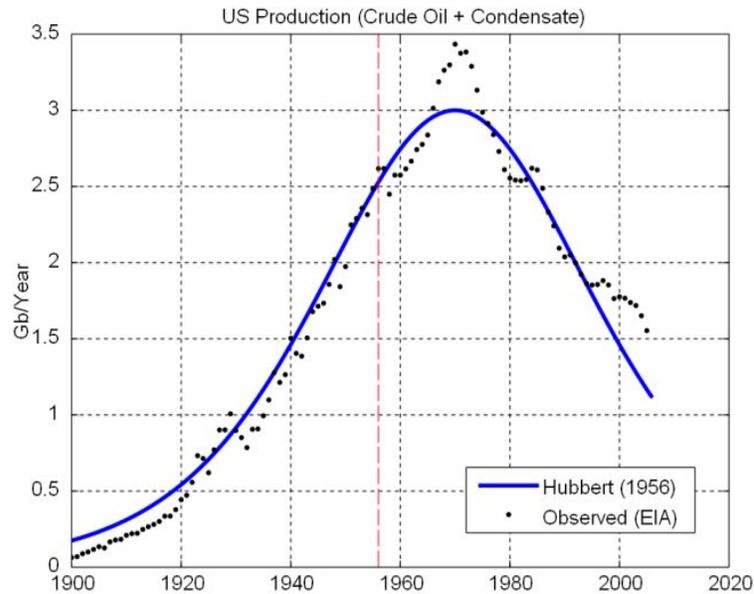


Figura 2.2: Predicciones de Hubbert en 1956.

un lado el modelo debería contemplar la necesidad de incluir variables exógenas (de tipo económico y sociopolítico), así como la posibilidad de contemplar varios picos (y no uno solo como él proponía), lo cual está relacionado con comportamientos plurisigmoidales de la producción acumulada de petróleo.

2.2. La curva Hubbert

Los estudios realizados por Hubbert se basaron en la observación de que la función logística es la curva que mejor describe la producción acumulada de uno o de la suma de varios campos petrolíferos, siempre que la explotación se produzca sin restricciones económicas o políticas, y suponiendo que no se sigue un plan que incluya limitaciones para su conservación. En este sentido, Hubbert menciona que cuando hay estimaciones de las reservas de petróleo, la producción acumulada se puede ajustar mediante una curva logística, mientras que la producción anual se ajusta por una curva en forma de campana y simétrica, obtenida por derivación de la curva logística. A esta curva se dio el nombre

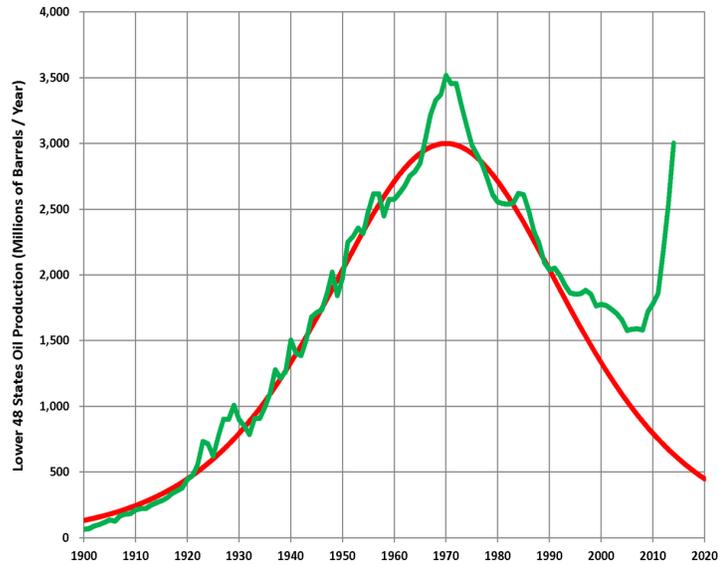


Figura 2.3: Predicciones de Hubbert para el pico entre 1995 y 2000.

de curva Hubbert, pero cabe señalar que Hubbert nunca presentó un modelo matemático, sino que hizo sus cálculos gráficamente.

En esta sección exponemos las principales características de la curva Hubbert, para lo cual partimos, obviamente, de la curva logística. Dicha curva se obtiene a partir de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \alpha f(t) - \beta f^2(t) \\ f(t_0) &= f_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La constante α define la tasa de crecimiento mientras que el término $-\beta f^2(t)$ actúa como un inhibidor de tal tasa. En este sentido, β suele considerarse mayor que α . Cuando la población $f = f(t)$ es pequeña, este término tiene un efecto pequeño sobre el valor de la derivada y, en consecuencia, la población tiene al inicio un crecimiento exponencial. Sin embargo, a medida que f crece, el término inhibidor hace disminuir cada vez más la tasa

de crecimiento. La solución de (2.1) es

$$f(t) = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{f_0} - 1\right) e^{-\alpha(t-t_0)}}, \quad t \geq t_0.$$

Esta curva verifica

- Es creciente si y sólo si $\alpha > \beta f_0$.
- $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \alpha/\beta$.
- Posee un punto de inflexión si y sólo si $\alpha > \beta$. En tal caso se alcanza en

$$t_I = t_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha/\beta}{f_0} - 1 \right).$$

Román y Torres [63] consideran una reparametrización de esta curva con el objetivo de conseguir que su asíntota dependa del valor que la curva toma en el instante inicial de observación del fenómeno en estudio, partiendo para ello de una expresión general de la curva anterior. Concretamente:

$$f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}, \quad t \in \mathbb{R}; a, b, c > 0.$$

Esta es la expresión de la cual se parte¹ para llegar a la correspondiente a la curva Hubbert. A continuación se considera $\alpha = e^{-c}$, $\eta = 1/b$ y $k = a\eta$. Con ello se obtiene la siguiente reparametrización de la curva logística:

$$f(t) = \frac{k}{\eta + \alpha^t}, \quad t \in \mathbb{R}; \eta, k > 0, 0 < \alpha < 1. \quad (2.2)$$

Las figuras 2.4 y 2.5 muestran diversas representaciones de la curva para distintas selecciones de los parámetros. Para un valor de α fijo, a medida que η aumenta, se produce

¹Observemos que se ha extendido el dominio de definición a toda la recta real.

una disminución en la tasa de crecimiento, al mismo tiempo que la cota disminuye. En el caso de η fijo, a medida que α disminuye, se observa que la curva alcanza con mayor rapidez la cota, si bien esta no depende de dicho valor.

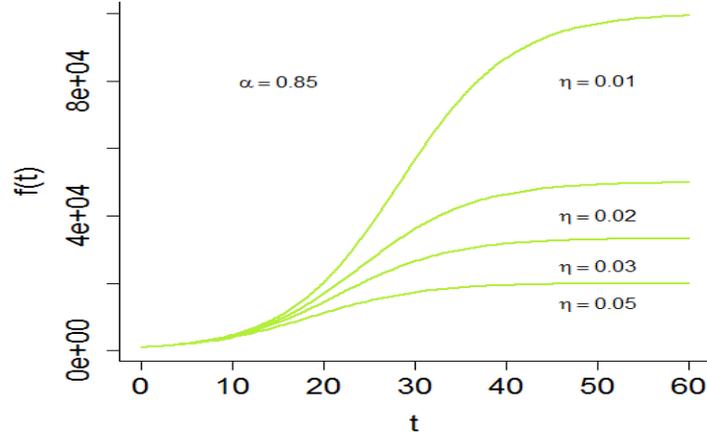


Figura 2.4: Curvas logísticas con $\alpha = 0,85$ y $\eta = 0,01, 0,02, 0,03, 0,05$.

Laherrère [43] afirma que *Hubbert presentó varias curvas para el ajuste de la producción mundial y estadounidense, pero era un poco reticente a explicar la base matemática de su obra. Se refirió a una curva en forma de campana, pero no mostró cualquier forma de ecuación.* A pesar de las declaraciones anteriores, este mismo autor señala que la curva Hubbert es, de hecho, la derivada de la curva logística.

En consecuencia, derivando (2.2), e imponiendo que $f'(t_0) = x_0$ (t_0 representa el instante inicial de observación del fenómeno), se obtiene una expresión general para la curva Hubbert.

$$x(t) = f'(t) = x_0 \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \alpha^{t-t_0}, \quad t \in \mathbb{R}; \eta, x_0 > 0, 0 < \alpha < 1.$$

En el contexto de la producción de petróleo, $x(t)$ representa el número de barriles producidos por día. El parámetro η no tiene unidades mientras que las de α son

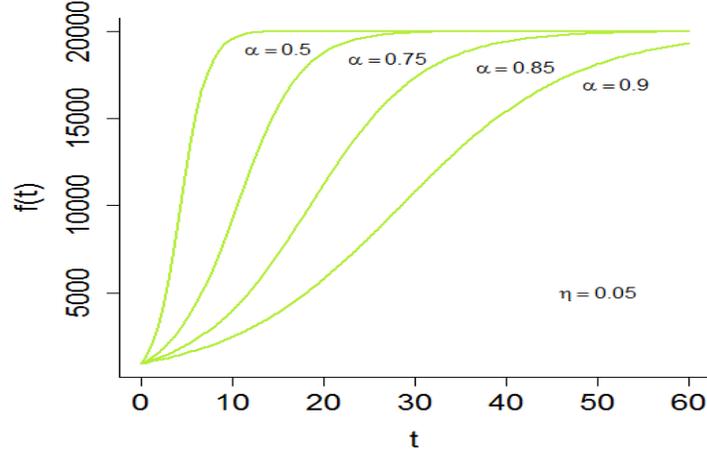


Figura 2.5: Curvas logísticas con $\eta = 0,05$ y $\alpha = 0,5, 0,75, 0,85, 0,9$.

$\exp(\text{tiempo}^{-1})$.

A continuación calculamos su primera y segunda derivada, resultando ²:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -f'(t) \frac{\alpha^t \ln \alpha}{\eta + \alpha^t} - f(t) \ln \alpha \frac{\alpha^t \ln \alpha (\eta + \alpha^t) - \alpha^{2t} \ln \alpha}{(\eta + \alpha^t)^2} = \\ &= f(t) \frac{\alpha^{2t} \ln^2 \alpha}{(\eta + \alpha^t)^2} - \frac{f(t) \ln^2 \alpha \alpha^t}{(\eta + \alpha^t)^2} [\eta + \alpha^t - \alpha^t] = \\ &= f(t) \frac{\alpha^t \ln^2 \alpha}{(\eta + \alpha^t)^2} [\alpha^t - \eta] = -x(t) \frac{\ln \alpha (\alpha^t - \eta)}{\eta + \alpha^t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= -x'(t) \frac{\ln \alpha (\alpha^t - \eta)}{\eta + \alpha^t} - x(t) \ln \alpha \frac{\alpha^t \ln \alpha (\eta + \alpha^t) - (\alpha^t - \eta) \alpha^t \ln \alpha}{(\eta + \alpha^t)^2} = \\ &= x(t) \frac{\ln^2 \alpha (\alpha^t - \eta)^2}{(\eta + \alpha^t)^2} - \frac{x(t) \ln^2 \alpha \alpha^t}{(\eta + \alpha^t)^2} [\eta + \alpha^t - \alpha^t + \eta] = \\ &= x(t) \frac{\ln^2 \alpha}{(\eta + \alpha^t)^2} [(\alpha^t - \eta)^2 - 2\eta \alpha^t] = x(t) \frac{\ln^2 \alpha}{(\eta + \alpha^t)^2} [\alpha^{2t} - 4\eta \alpha^t + \eta^2]. \end{aligned}$$

A partir de la primera derivada se deduce que la curva es creciente si y sólo si se

²Notemos que $f'(t) = -f(t) \frac{\alpha^t \ln \alpha}{\eta + \alpha^t}$.

verifica $t < \ln \eta / \ln \alpha$ y decreciente en caso contrario, alcanzando un máximo global en

$$t_{\max} = \frac{\ln \eta}{\ln \alpha}, \quad (2.3)$$

conocido como el tiempo de pico en el contexto de la producción de petróleo. Además, $t_{\max} > t_0$ (es decir, el pico se alcanza después del período de observación inicial y, en consecuencia, es visualizado) si y sólo si $0 < \eta < \alpha^{t_0} < 1$.

Por otro lado, el valor máximo de $x(t)$, comúnmente conocido como el *pico*, es

$$x(t_{\max}) = x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{4\eta\alpha^{t_0}}. \quad (2.4)$$

A partir de la segunda derivada se deduce que la curva tiene dos puntos de inflexión, simétricos alrededor de t_{\max} , y que denotaremos por $t_{\text{inf},1}$ y $t_{\text{inf},2}$. Específicamente tenemos

$$t_{\text{inf},1} = t_{\max} + \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\ln \alpha}, \quad t_{\text{inf},2} = t_{\max} + \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\ln \alpha}, \quad (2.5)$$

verificándose $t_{\text{inf},1} < t_{\text{inf},2}$. Además $t_{\text{inf},1} > t_0$ si y sólo si $\eta < \alpha^{t_0} (2 - \sqrt{3}) < 2 - \sqrt{3}$.

Finalmente,

$$x(t_{\text{inf},1}) = x(t_{\text{inf},2}) = x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{6\eta\alpha^{t_0}} = \frac{2}{3}x(t_{\max}). \quad (2.6)$$

Puesto que el principal objetivo perseguido con el uso de esta curva en la modelización de la producción de petróleo es el cálculo del pico y el tiempo del pico, nos limitaremos a la inflexión anterior a t_{\max} , y a partir de ahora consideraremos $t_{\text{inf}} = t_{\text{inf},1}$.

Una última característica importante de la curva Hubbert, y de gran utilidad en la aplicación a la producción de petróleo, es el área bajo la curva, usualmente conocido como URR (*Ultimate Recoverable Resources*):

$$\text{URR} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = -x_0 \frac{(\eta + \alpha^{t_0})^2}{\eta\alpha^{t_0} \ln \alpha}. \quad (2.7)$$

Las figuras 2.6 y 2.7 presentan diversas representaciones de curvas Hubbert para distintas elecciones de los parámetros. Para un valor de α fijo, a medida que η disminuye el valor del pico aumenta y se desplaza hacia la derecha, obteniéndose un valor mayor de URR. Para η fijo, a medida que α crece, hay un aumento del valor del pico y URR, así como un desplazamiento a la derecha del tiempo de pico como en el caso anterior.

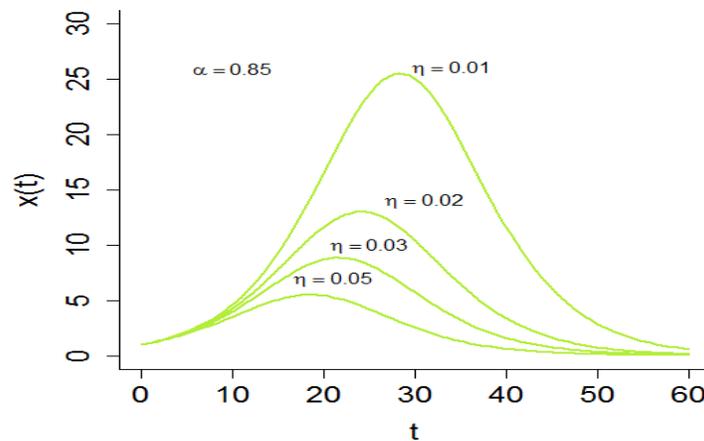


Figura 2.6: Curvas Hubbert con $\alpha = 0,85$ y $\eta = 0,01, 0,02, 0,03, 0,05$.

2.3. Ecuación de crecimiento de Hubbert

Al igual que ocurre con la curva logística, la curva Hubbert verifica una determinada ecuación diferencial ordinaria, la cual describe una transición continua de las tasas de crecimiento infinitesimal de la producción de petróleo. Dicha ecuación es la siguiente

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.8)$$

donde

$$r(t) = -\ln \alpha \frac{\alpha^t - \eta}{\eta + \alpha^t}.$$

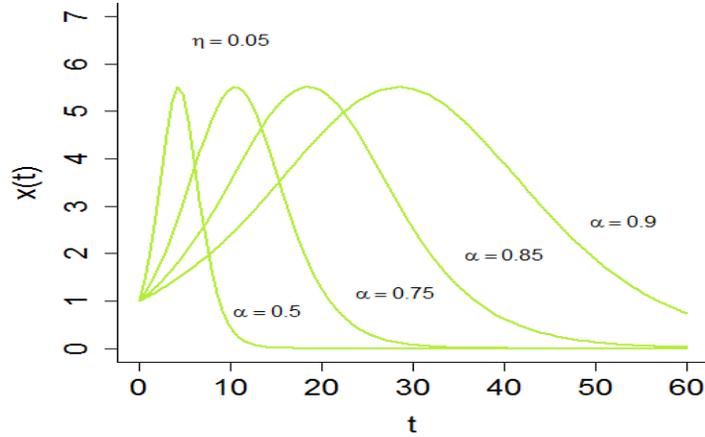


Figura 2.7: Curvas Hubbert con $\eta = 0,05$ y $\alpha = 0,5, 0,75, 0,85, 0,9$.

La función $r(t)$ representa la tasa de crecimiento de la producción de petróleo, tasa que evoluciona con el tiempo. Esta función es continua, decreciente para cualesquiera valores de η y α y verifica $|r(t)| < |\ln \alpha|$, $\forall t \in \mathbb{R}$, por lo que es una función acotada.

En la figura 2.8, para $\alpha = 0,85$ fijo, se observa que cuando η disminuye más altas son las tasas de crecimiento para un t fijo. Al aumentar el valor de t , las tasas de crecimiento convergen a un valor, en este caso $\lim_{t \rightarrow \infty} dx(t)/dt = 0,162$.

Análogamente para $\eta = 0,05$ fijo, y tomando $\alpha = 0,5, 0,75, 0,85, 0,9$, las tasas de crecimiento disminuyen a medida que los valores de t aumentan (ver figura 2.9). Vemos que el valor α determina la velocidad de caída en las tasas de crecimiento, es decir, cuanto menor es α , mayor es la disminución de la tasa de crecimiento con el tiempo. En este caso, las tasas no convergen a ningún valor concreto.

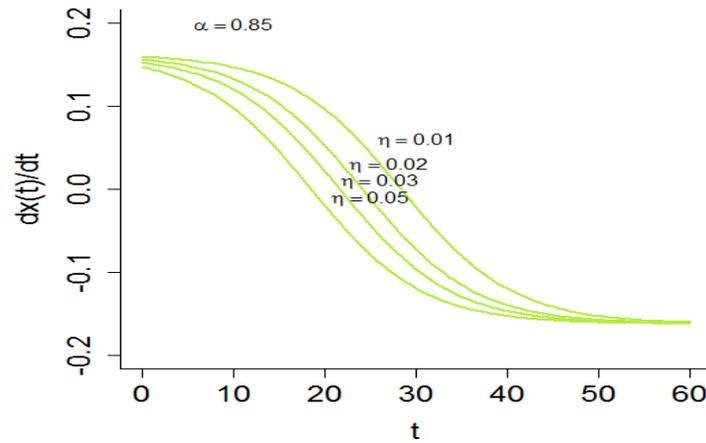


Figura 2.8: Tasas de crecimiento de la curva Hubbert con $\alpha = 0,85$ y $\eta = 0,01, 0,02, 0,03, 0,05$.

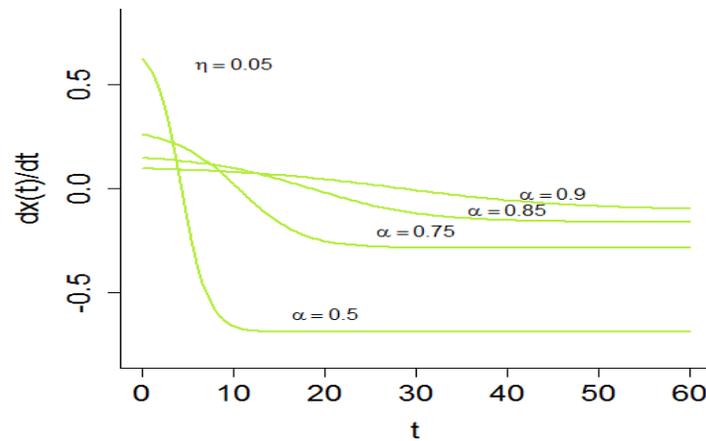


Figura 2.9: Tasas de crecimiento de la curva Hubbert con $\eta = 0,05$ y $\alpha = 0,5, 0,75, 0,85, 0,9$.

Proceso de difusión Hubbert

El propósito de este capítulo es introducir un nuevo proceso de difusión, el cual esté relacionado con la curva Hubbert. Para ello abordaremos su introducción desde el ámbito de las ecuaciones diferenciales estocásticas así como desde las ecuaciones en derivadas parciales de Kolmogorov. Nos centraremos posteriormente en su distribución y obtención de sus principales características.

3.1. Proceso de difusión de Hubbert a partir de las ecuaciones diferenciales estocásticas

Como se comentó en el capítulo anterior, la curva Hubbert verifica la ecuación diferencial ordinaria (2.8), esto es

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t); \quad x(t_0) = x_0$$

donde $r(t) = -\ln \alpha \frac{\alpha^t - \eta}{\eta + \alpha^t}$ es una función continua, decreciente y acotada (concretamente, $|r(t)| < |\ln \alpha|$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

Esta ecuación puede ser vista como una generalización del modelo de crecimiento malthusiano con una tasa de fertilidad determinística dependiendo del tiempo, representada por la función $r(t)$.

Reemplazando la tasa de fertilidad por $r(t) + \sigma W(t)$, donde $\sigma > 0$ y $W(t)$ es el proceso

Wiener estándar, se obtiene la ecuación de Langevin

$$\frac{dX(t)}{dt} = r(t)X(t) + \sigma X(t)W(t)$$

que, reescrita con la notación habitual de las E.D.E., da origen a

$$dX(t) = r(t)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t); \quad X(t_0) = X_0, \quad (3.1)$$

siendo X_0 independiente de $W(t) - W(t_0)$ para $t \geq t_0$.

A continuación vamos a comprobar que esta ecuación tiene solución única que define un proceso de difusión que toma valores en \mathbb{R}^+ . En primer lugar comprobemos la existencia y unicidad de solución, para lo cual hacemos uso del siguiente teorema (ver [2]):

Teorema 3.1.1. *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} dX(t) &= a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t) \\ X(0) &= X_0, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $W(t)$ representa el proceso de Wiener estándar y X_0 es una variable aleatoria independiente de $W(t) - W(t_0)$ para $t \geq t_0$. Supongamos que las funciones a y b están definidas y son medibles en $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ y que existe una constante $K > 0$ tal que

- (Condición de Lipschitz):

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| \leq K|x - y|, \quad \forall t \in [t_0, T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- (Restricción sobre el crecimiento):

$$|a(x, t)|^2 + |b(x, t)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad \forall t \in [t_0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, la ecuación (3.2) tienen una única solución en $[t_0, T]$ y con valores en \mathbb{R} , continua con probabilidad uno, y satisfaciendo la condición inicial; esto es, si $X(t)$ e $Y(t)$ son soluciones de (3.2) con igual valor inicial X_0 , entonces

$$P \left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)| > 0 \right) = 0.$$

Comentario 3.1.1.

1. El teorema sigue siendo válido si reemplazamos la condición de Lipschitz por una más general. Concretamente, para cada $N > 0$ existe una constante K_N tal que $\forall t \in [t_0, T]$, $|x| \leq N$ e $|y| \leq N$ se verifica

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| \leq K_N |x - y|.$$

2. Para que la condición de Lipschitz del teorema (o la generalización de la nota anterior) se verifique es suficiente que las funciones a y b tengan derivadas de primer orden, respecto de x , continuas para cada valor $t \in [t_0, T]$ y que estén acotadas en $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ (o en $[t_0, T] \times |x| \leq N$ en el caso de la generalización).
3. La segunda condición del teorema lo que hace es acotar las funciones a y b de forma uniforme respecto a $t \in [t_0, T]$ y permite, como mucho, un crecimiento lineal de dichas funciones respecto a x . Si esta condición no se verifica se produce el denominado fenómeno de explosión de la solución. Por lo tanto, esta condición asegura que, con probabilidad uno, la solución no explota en $[t_0, T]$, sea quien sea la condición inicial X_0 .
4. Si las funciones a y b están definidas en $[t_0, \infty) \times \mathbb{R}$, y las condiciones del teorema se verifican para cualquier subintervalo finito $[t_0, T]$ incluido en $[t_0, \infty)$, entonces la ecuación tiene una única solución en $[t_0, \infty)$, que se denomina solución global.

Por último, para que el proceso solución sea de difusión hay que exigir nuevas condiciones sobre los coeficientes de la ecuación diferencial. Así tenemos:

Teorema 3.1.2. *Si la ecuación (3.2) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad de solución y, además, las funciones a y b son continuas respecto a t , entonces la solución es un proceso de difusión con media infinitesimal $a(x, t)$ y varianza infinitesimal $b^2(x, t)$. En particular, la solución de una ecuación diferencial estocástica autónoma¹ es siempre un proceso de difusión homogéneo sobre $[t_0, \infty]$.*

Comprobemos que estamos en las condiciones de los teoremas anteriores. En efecto, si consideramos $t \in [t_0, T]$ y $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned} |a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| &= |r(t)x - r(t)y| + |\sigma x - \sigma y| \\ &= |r(t)||x - y| + \sigma|x - y| \\ &= (|r(t)| + \sigma)|x - y| \leq K_1|x - y| \end{aligned}$$

con $K_1 = |\ln \alpha| + \sigma$. Por otro lado,

$$|a(x, y)|^2 + |b(x, t)|^2 = r(t)^2 x^2 + \sigma^2 x^2 = (r^2(t) + \sigma^2)x^2 \leq (r(t)^2 + \sigma^2)(1 + x^2) \leq K_2(1 + x^2)$$

con $K_2 = \ln^2 \alpha + \sigma^2$.

Por último, ambas desigualdades se verifican tomando $K = \text{Max}\{K_1, K_2\}$. En consecuencia, la ecuación (3.1) posee una única solución. Además, puesto que $r(t)$ es una función continua, la solución es un proceso de difusión con momentos infinitesimales

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= r(t)x \\ A_2(x) &= \sigma^2 x^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

¹Una ecuación se dice autónoma si las funciones a y b no dependen de t .

En cuanto a su resolución, consideremos el cambio de variable $Y(t) = \log X(t)$. En virtud del lema de Itô (ver [2]), la ecuación (3.1) se convierte en

$$dY(t) = \left(r(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t)$$

$$Y(t_0) = \ln(X_0),$$

que es una ecuación diferencial lineal en sentido restringido, cuya solución viene dada por

$$Y(t) = \ln(X_0) + 2 \ln \frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} + \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma (W(t) - W(t_0)).$$

Por lo tanto, la solución de (3.1) es

$$X(t) = X_0 \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \alpha^{t-t_0} \exp \left(\sigma (W(t) - W(t_0)) - \frac{\sigma^2}{2} (t - t_0) \right).$$

En cuanto al carácter de la solución, y más concretamente de su distribución, consideramos el siguiente resultado (ver [2]):

Teorema 3.1.3. *La solución de la ecuación $dX(t) = (A(t)X(t) + a(t)) dt + B(t)dW(t)$, con solución inicial $X(t_0) = X_0$, es un proceso gaussiano si y sólo si x_0 es normal o constante. Si notamos $\Phi(t)$ a la solución de la ecuación $x'(t) = A(t)x(t)$, se tiene:*

- *La función media del proceso, $m(t) = E[X(t)]$, es la solución de la ecuación diferencial*

$$m'(t) = A(t)m(t) + a(t), \quad m(t_0) = E[X_0],$$

o sea,

$$m(t) = \Phi(t) \left[E[X_0] + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)a(s) ds \right].$$

- La función covarianza, $K(s, t) = Cov[X(t), X(s)]$, verifica

$$K(s, t) = \Phi^2(s) \left[Var[X_0] + \int_{t_0}^{Min(s,t)} \Phi^2(u) B^2(u) du \right].$$

En particular, la varianza del proceso, $K(t) = K(t, t) = Cov[X(t)]$, verifica la ecuación

$$K'(t) = 2A(t)K(t) + B^2(t), \quad K(t_0) = Var[X_0].$$

Por tanto, y considerando $Y(t) = \ln X(t)$, dicho proceso es gaussiano si y sólo si $Y(t_0) = \ln(X_0)$ es una distribución degenerada o bien normal. Además,

$$\begin{aligned} m(t) = E[Y(t)] &= E[Y(t_0)] + \int_{t_0}^t \left(r(s) - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds \\ &= E[Y(t_0)] + \int_{t_0}^t \left(-\ln \alpha \left(1 - \frac{2\eta}{\alpha^2 + \eta} \right) - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds \\ &= E[Y(t_0)] + 2 \ln \frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} + \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0). \end{aligned}$$

Por otro lado, notando $s \wedge t = Min(s, t)$,

$$K(s, t) = Cov[Y(t), Y(s)] = Var[Y(t_0)] + \int_{t_0}^{s \wedge t} \sigma^2 du = Var[Y(t_0)] + \sigma^2(s \wedge t - t_0).$$

Por lo tanto, y con las consideraciones anteriores sobre la distribución inicial, el proceso $Y(t)$ es gaussiano con media $m(t)$ y función de covarianza $K(s, t)$.

A partir de este resultado, $X(t)$ es un proceso de difusión cuyas distribuciones finito dimensionales son lognormales. En concreto, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, se tiene

$$(X(t_1), \dots, X(t_n))^T \sim \Lambda_n[\mu, \Sigma],$$

donde $\mu_i = m(t_i)$ y $\sigma_{ij} = K(t_i, t_j)$. En particular, a partir de la distribución bidimen-

sional $(X(s), X(t))^T$, $s < t$, la de $X(t)|X(s) = x_s$ es lognormal; concretamente:

$$X(t)|X(s) = x_s \sim \Lambda_1 \left[\ln x_s + 2 \ln \frac{\eta + \alpha^s}{\eta + \alpha^t} + \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - s), \sigma^2(t - s) \right].$$

3.2. Proceso de difusión de Hubbert a partir de las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov

El proceso Hubbert puede ser también estudiado desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales parciales de Kolmogorov. En este caso partimos de su definición como un proceso de difusión $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ que toma valores en \mathbb{R}^+ y con momentos infinitesimales dados por (3.3).

A partir de dichos momentos planteamos la ecuación de Fokker-Planck (o adelantada)

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial t} = -r(t) \frac{\partial [xf(x, t|y, \tau)]}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 [x^2 f(x, t|y, \tau)]}{\partial x^2}$$

y la ecuación de Kolmogorov (o atrasada)

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial \tau} + r(\tau) \frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2} y^2 \frac{\partial^2 f(x, t|y, \tau)}{\partial y^2} = 0.$$

En primer lugar debemos comprobar si el proceso así propuesto verifica las condiciones de existencia y unicidad de solución para ambas ecuaciones. Para ello usamos el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Supongamos que los momentos infinitesimales A_1 y A_2 verifican, para todo valor x del espacio de estados y $\forall t \in [t_0, T]$, las siguientes condiciones:*

1. *Existen unas constantes positivas σ_0 y k tales que*

- $|A_1(x, t)| \leq k\sqrt{1 + x^2}$.

$$\blacksquare 0 < \sigma_0 \leq \sqrt{A_2(x, t)} \leq k\sqrt{1 + x^2}.$$

2. (Condición de Hölder). Existen constantes positivas γ y k tales que

$$\blacksquare |A_1(x, t) - A_1(y, t)| \leq k|x - y|^\gamma.$$

$$\blacksquare |\sqrt{A_2(x, t)} - \sqrt{A_2(y, t)}| \leq k|x - y|^\gamma.$$

Entonces se verifica:

1. La ecuación atrasada tiene una única solución sujeta a la condición frontera del tipo delta de Dirac, $\lim_{\tau \uparrow t} f(x, t|y, \tau) = \delta(x - y)$.

2. Existe un proceso de Markov $\{X(t) : t \in [t_0, T]\}$, con trayectorias continuas, que verifica las condiciones de proceso de difusión.

3. Si, además, las condiciones del enunciado son cumplidas por $\frac{\partial A_1(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 A_2(x, t)}{\partial x^2}$, la función $f(x, t|y, \tau)$ es la única solución de la ecuación adelantada sujeta a la condición frontera del tipo delta de Dirac, $\lim_{t \downarrow \tau} f(x, t|y, \tau) = \delta(x - y)$.

Comprobemos que estamos en condiciones de utilizar este resultado:

$$\blacksquare |A_1(x, t)| = |r(t)||x| \leq |\ln \alpha| \sqrt{1 + x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \geq t_0.$$

$\blacksquare \sqrt{A_2(x, t)} = \sigma x < \sigma \sqrt{1 + x^2}$. Ahora bien, dado $x > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < x$, por lo que

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma \sqrt{1 + x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \geq t_0,$$

con $\sigma_0 = \epsilon \sigma$.

En consecuencia, $|A_1(x, t)| \leq k\sqrt{1 + x^2}$ y $0 \leq \sigma_0 \leq k\sqrt{1 + x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ y $\forall t \geq t_0$ sin más que tomar $\sigma_0 = \epsilon \sigma$ y $k = \text{Max}\{|\ln \alpha|, \sigma\}$. Por otro lado,

$$|A_1(x, t) - A_1(y, t)| = |r(t)||x - y| \leq |\ln \alpha||x - y|$$

y

$$|\sqrt{A_2(x, t)} - \sqrt{A_2(y, t)}| = \sigma|x - y|,$$

por lo que

$$|A_1(x, t) - A_1(y, t)| \leq k|x - y|^\gamma$$

$$|\sqrt{A_2(x, t)} - \sqrt{A_2(y, t)}| \leq k\sigma|x - y|$$

sin más que tomar $k = \text{Max} \{|\ln \alpha|, \sigma\}$ y $\gamma = 1$.

Además, es inmediato comprobar que estas relaciones son verificadas por $\frac{\partial A_1(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 A_2(x, t)}{\partial x^2}$, por lo que las ecuaciones de Kolmogorov tienen una única solución.

En cuanto a la resolución de las ecuaciones, una de las posibilidades existentes es mediante la búsqueda de una función que las transforme en las de otro proceso para el cual dichas ecuaciones tengan solución conocida.

Tal es el caso del proceso Wiener estándar y la ecuación atrasada o de Kolmogorov. Exponemos de forma concisa esta idea.

Sea $\{X(t); t \geq t_0\}$ un proceso de difusión con media y varianza infinitesimal $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, respectivamente, definido sobre un intervalo I y sea $\{W(t'); t' \geq t'_0\}$ el proceso Wiener estándar con media infinitesimal cero y varianza infinitesimal igual a uno. Sea f la densidad de transición del proceso $X(t)$ y f' la del proceso Wiener.

Las transformaciones en las que estamos interesados son del tipo

$$x' = \Psi(x, t), \quad t' = \Phi(t) \tag{3.4}$$

que cambie la ecuación atrasada del proceso $X(t)$

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial \tau} + A_1(y, \tau) \frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial y} + \frac{A_2(y, \tau)}{2} \frac{\partial^2 f(x, t|y, \tau)}{\partial y^2} = 0$$

en la del proceso Wiener

$$\frac{\partial f'(x', t' | y', \tau')}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f'(x', t' | y', \tau')}{\partial y'^2} = 0,$$

cuya solución es

$$f'(x', t' | y', \tau') = \left(\sqrt{2\pi(t' - \tau')} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{(x' - y')^2}{2(t' - \tau')} \right).$$

Evidentemente, la cuestión que se plantea es cuándo se podrá transformar un proceso de difusión cualquiera en el Wiener. Ricciardi [56] estudió con detalle este problema, dando condiciones necesarias y suficientes para que exista tal tipo de transformación.

Dicho estudio se lleva a cabo observando como se ven alterados los momentos infinitesimales de $X(t)$ por medio de la transformación (3.4) e igualando los nuevos momentos resultantes a los del Wiener estándar, obteniéndose el siguiente teorema:

Teorema 3.2.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión con función densidad de transición $f(x, t | y, \tau)$ y momentos infinitesimales $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$ pueda transformarse al proceso Wiener estándar es que existan funciones arbitrarias $C_1(t)$ y $C_2(t)$ que verifiquen*

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x, t)]^{1/2}}{2} \left\{ C_1(t) + \int_z^x \frac{C_2(t) A_2(y, t) + \frac{\partial A_2(y, t)}{\partial t}}{(A_2(y, t))^{3/2}} dy \right\}.$$

En tal caso la transformación es

$$\begin{aligned} x' = \psi(x, t) &= (k_1)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t C_2(s) ds \right) \int_z^x \frac{1}{(A_2(y, t))^{1/2}} dy \\ &\quad - \frac{(k_1)^{1/2}}{2} \int_{t_2}^t C_1(s) \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_2 \\ t' = \phi(t) &= k_1 \int_{t_1}^t \exp \left(-\int_{t_0}^s C_2(\theta) d\theta \right) ds + k_3, \end{aligned}$$

siendo z un valor del intervalo de definición del proceso, $t_i \in [t_0, \infty)$ y k_i constantes arbitrarias con la restricción $k_1 > 0$.

Nota 3.2.1. Puesto que, para cada t , $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \left[\frac{\phi'(t)}{A_2(x, t)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0$, la transformación $x' = \psi(x, t)$ es biyectiva y la relación entre las densidades de transición del proceso Wiener y el transformado es

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} f'(x', t'|y', \tau').$$

En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} r(t)x &= \frac{2x\sigma^2}{4} + \frac{\sigma x}{2}c_1(t) + \frac{\sigma x}{2} \int_z^x \frac{c_2(t)\sigma^2 y^2}{\sigma^3 y^3} dy = \frac{\sigma^2 x}{2} + \frac{\sigma c_1(t) x}{2} + \frac{c_2(t) x}{2} \int_z^x \frac{1}{y} dy \\ &= \left[\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma c_1(t)}{2} + \frac{c_2(t)}{2} \ln \left(\frac{x}{z} \right) \right] x, \end{aligned}$$

por lo que basta considerar $C_1(t) = \frac{2h(t)}{\sigma} - \sigma$ y $C_2(t) = 0$ para que se verifique la condición.

Con ello la transformación que cambia el proceso Hubbert en el de Wiener es

$$x' = \psi(x, t) = \frac{k_1^{1/2}}{\sigma} \int_z^x \frac{dy}{y} - \frac{k_1^{1/2}}{2} \int_{t_2}^t \left[\frac{2r(s)}{\sigma} - \sigma \right] ds + k_2$$

$$t' = \phi(t) = k_1 \int_{t_1}^t ds + k_3.$$

Operando se tiene

$$x' = \psi(x, t) = k_1^{1/2} \left[\frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{x}{z} \right) - \frac{1}{\sigma} \int_{t_2}^t r(s) ds + \frac{\sigma}{2}(t - t_2) + k_2 \right]$$

$$t' = \phi(t) = k_1(t - t_1) + k_3.$$

Finalmente, y como $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \frac{k_1^{1/2}}{\sigma x}$, la densidad de transición del proceso es

$$\begin{aligned} f(x, t|y, \tau) &= \frac{k_1^{1/2}}{\sigma x} f'(x', t'|y', \tau') = \frac{k_1^{1/2}}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t' - \tau')}} \exp\left(-\frac{(x' - x'_0)^2}{2(t' - \tau')}\right) \\ &= \frac{k_1^{1/2}}{x\sqrt{2\pi\sigma^2 k_1(t - \tau)}} \exp\left(-\frac{\left(k_1^{1/2} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\ln\left(\frac{x}{z}\right) - \ln\left(\frac{y}{z}\right) - \int_{\tau}^t r(s) ds\right) + \frac{\sigma}{2}(t - \tau)\right)\right)^2}{2k_1(t - \tau)}\right) \\ &= \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t - \tau)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(t - \tau)} \left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \int_{\tau}^t r(s) ds + \frac{\sigma^2}{2}(t - \tau)\right)^2\right), \end{aligned}$$

y sustituyendo la función $r(t)$ por su expresión se concluye

$$f(x, t|y, \tau) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi(t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln\frac{x}{y} - 2\ln\frac{\eta + \alpha^\tau}{\eta + \alpha^t} - \left(\ln\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - \tau)\right]^2}{2\sigma^2(t - \tau)}\right\}, \quad (3.5)$$

que se corresponde con la función de densidad de una variable lognormal

$$X(t)|X(\tau) = y \sim \Lambda_1 \left[\ln y + 2\ln\frac{\eta + \alpha^\tau}{\eta + \alpha^t} + \left(\ln\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - \tau), \sigma^2(t - \tau) \right].$$

Una vez calculada la densidad de transición del proceso, puesto que este es markoviano, la obtención de las distribuciones finito-dimensionales depende de la elección que se haga de la distribución inicial. Atendiendo a ello, si consideramos que X_0 es degenerada en un valor $x_0 > 0$, o sea, $P[X(t_0) = x_0] = 1$, o bien seleccionamos una distribución lognormal $X(t_0) \sim \Lambda_1[\mu_0; \sigma_0^2]$, tales elecciones aseguran que las distribuciones finito-dimensionales

son lognormales. Observemos que la primera elección es un caso particular de la segunda considerando $\sigma_0 = 0$ (lo cual implica $\mu_0 = \ln(x_0)$). Además, la distribución inicial degenerada es la situación real cuando se dispone de una sola trayectoria muestral del proceso, mientras que el caso lognormal requiere diversas trayectorias.

Hay que indicar que el proceso introducido es un caso particular del conocido como *proceso lognormal con factores exógenos*. En Gutiérrez et al. [26] se realiza un detallado análisis de tal proceso desde los dos puntos de vista aquí considerados. En [27] se hace un análisis inferencial y se muestra su utilidad en Economía, mientras que en [31] se aborda el problema de tiempos de primer paso.

3.3. Características del proceso

Una vez calculadas las distribuciones finito-dimensionales del proceso y la densidad de transición del mismo, en este apartado mostramos algunas de sus principales características. Ponemos especial atención en aquellas más comúnmente utilizadas en las aplicaciones prácticas, sobre todo relacionadas con el ajuste y predicción. En concreto consideramos tres de las funciones más empleadas: el momento n -ésimo, la función moda y las funciones de cuantiles (así como sus versiones condicionadas). Las expresiones de todas estas funciones se pueden formular de manera conjunta para las dos distribuciones iniciales mencionadas con anterioridad. En concreto la expresión es

$$G_X^\lambda(t|y, \tau) = M(t|y, \tau)^{\lambda_1} \exp(\lambda_2(\lambda_3\sigma_0^2 + \sigma^2(t - \tau))^{\lambda_4}), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T, \quad (3.6)$$

siendo $M(t|y, \tau) = \left(\frac{\eta + \alpha^\tau}{\eta + \alpha^t}\right)^2 \exp\left[y + \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - \tau)\right]$.

La tabla 3.3 incluye los valores de λ , τ e y necesarios para cada una de las funciones consideradas².

² z_α es el α -ésimo cuantil de una distribución normal estándar.

Función	Expresión	y	τ	λ
n -ésimo momento	$E[X(t)^n]$	μ_0	t_0	$(n, n^2/2, 1, 1)^T$
n -ésimo momento condicional	$E[X(t)^n X(\tau) = y]$	$\ln x_s$	τ	$(n, n^2/2, 0, 1)^T$
Moda	$Moda[X(t)]$	μ_0	t_0	$(1, -1, 1, 1)^T$
Moda condicional	$Moda[X(t) X(\tau) = y]$	$\ln x_s$	τ	$(1, -1, 0, 1)^T$
α -Cuantil	$C_\alpha[X(t)]$	μ_0	t_0	$(1, z_\alpha, 1, 1/2)^T$
α -Cuantil condicional	$C_\alpha[X(t) X(\tau) = y]$	$\ln x_s$	τ	$(1, z_\alpha, 0, 1/2)^T$

Tabla 3.1: Diversas características a partir de $G^\lambda(t|y, \tau)$.

En particular, la media de $X(t)$ y su versión condicionada a un valor x_s son:

$$E[X(t)] = \exp\left(\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right) \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t}\right)^2 \alpha^{(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (3.7)$$

y

$$E[X(t)|X(\tau) = y] = y \left(\frac{\eta + \alpha^\tau}{\eta + \alpha^t}\right)^2 \alpha^{(t-\tau)}, \quad t \geq \tau. \quad (3.8)$$

Ambas expresiones se corresponden con sendas curvas Hubbert, lo cual hace que estas funciones sean especialmente útiles con fines de ajuste de datos que muestren un comportamiento de tipo Hubbert, así como también serán de utilidad con fines predictivos.

Por otro lado, vamos a obtener la expresión concreta que adoptan la función varianza y covarianza del proceso. En cuanto a la función varianza se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t)] &= E[X(t_0)^2] \exp((2r(t) + \sigma^2)(t - t_0)) - (E[X(t_0)])^2 \exp(2r(t)(t - t_0)) \\ &= \exp(2r(t)(t - t_0)) \left[E[X(t_0)^2] e^{\sigma^2(t-t_0)} - (E[X(t_0)])^2 \right] \\ &= \exp(2r(t)(t - t_0)) \left[(E[X(t_0)^2] - (E[X(t_0)])^2) e^{\sigma^2(t-t_0)} \right. \\ &\quad \left. + (E[X(t_0)])^2 (e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1) \right] \\ &= \exp(2r(t)(t - t_0)) \left[\text{Var}[X(t_0)] e^{\sigma^2(t-t_0)} + (E[X(t_0)])^2 (e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1) \right] \\ &= \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t}\right) \alpha^{2(t-t_0)} \left[\text{Var}[X(t_0)] e^{\sigma^2(t-t_0)} + (E[X(t_0)])^2 (e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1) \right]. \end{aligned}$$

A continuación calculamos los momentos cruzados. Para $\tau < t$ se tiene

$$\begin{aligned} E[X(t)^{k_1} X(\tau)^{k_2}] &= E [E [X(t)^{k_1} X(\tau)^{k_2} | X(\tau)]] = E [X(\tau)^{k_2} E [X(t)^{k_1} | X(\tau)]] \\ &= E \left[X(\tau)^{k_1} X(\tau)^{k_2} \exp \left(k_1 \left(r(t) + \frac{\sigma^2}{2} (k_1 - 1) \right) (t - \tau) \right) \right] \\ &= E [X(\tau)^{k_1+k_2}] \exp \left(k_1 \left(\frac{\sigma^2}{2} (k_1 - 1) \right) (t - \tau) \right) \left(\frac{\eta + \alpha^\tau}{\eta + \alpha^t} \right) \alpha^{k_1(t-\tau)}. \end{aligned}$$

De la misma forma, cuando $t < \tau$ se llega a la expresión

$$E[X(t)^{k_1} X(\tau)^{k_2}] = E [X(t)^{k_1+k_2}] \exp \left(k_2 \left(\frac{\sigma^2}{2} (k_2 - 1) \right) (\tau - t) \right) \left(\frac{\eta + \alpha^t}{\eta + \alpha^\tau} \right) \alpha^{k_2(\tau-t)}.$$

A partir de estos momentos cruzados podemos calcular la expresión de la función covarianza. En concreto, si $\tau < t$ se tiene

$$\begin{aligned} R(t, s) &= \text{Cov} [X(t), X(\tau)] = E [X(t)X(\tau)] - E[X(t)]E[X(\tau)] \\ &= E[X(\tau)^2] \exp(r(t)(t - \tau)) - E[X(\tau)]E[X(\tau)] \exp(r(t)(t - \tau)) \\ &= \text{Var}[X(\tau)] \exp(r(t)(t - \tau)) = \text{Var}[X(t)] \left(\frac{\eta + \alpha^\tau}{\eta + \alpha^t} \right) \alpha^{(t-\tau)}, \end{aligned}$$

mientras que para $t < \tau$ se obtiene

$$R(t, s) = \text{Var}[X(t)] \left(\frac{\eta + \alpha^t}{\eta + \alpha^\tau} \right) \alpha^{(\tau-t)}.$$

En consecuencia:

$$R(t, s) = \text{Var}[X(t \wedge \tau)] \left(\frac{\eta + \alpha^{t \wedge \tau}}{\eta + \alpha^{t \vee \tau}} \right) \alpha^{(t \wedge \tau - t \vee \tau)}.$$

donde ahora $t \vee \tau = \text{Max}(t, \tau)$.

Las figuras 3.1 y 3.2 ilustran diversas trayectorias del proceso Hubbert considerando diversas combinaciones de parámetros (en verde se representa la función media).

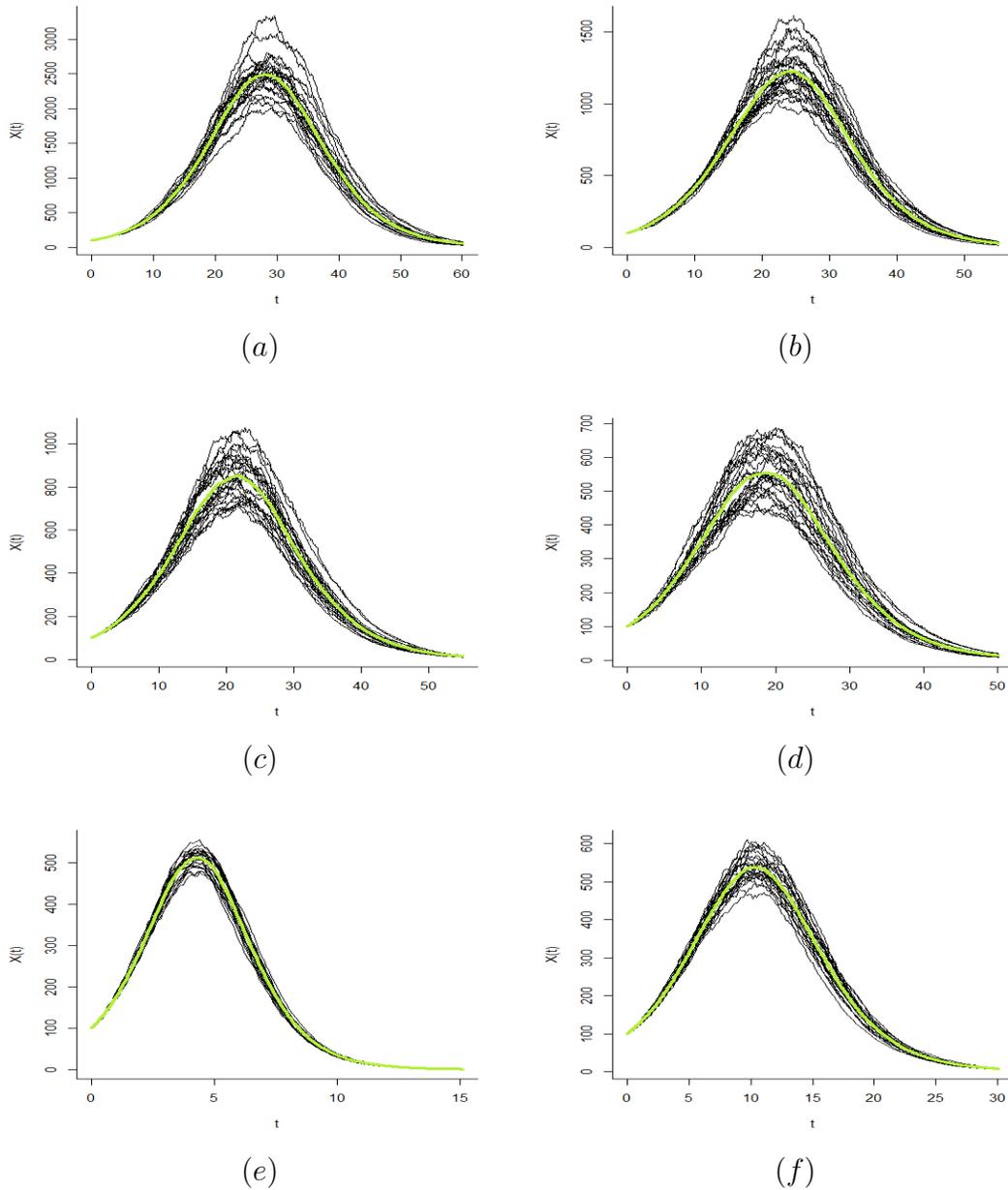


Figura 3.1: Procesos Hubbert con $\alpha = 0.85$, $\sigma = 0.025$: (a) $\eta = 0.01$, (b) $\eta = 0.02$, (c) $\eta = 0.03$ y (d) $\eta = 0.05$. Procesos Hubbert con $\eta = 0.05$, $\sigma = 0.025$: (e) $\alpha = 0.05$, (f) $\alpha = 0.75$ (sigue a continuación).

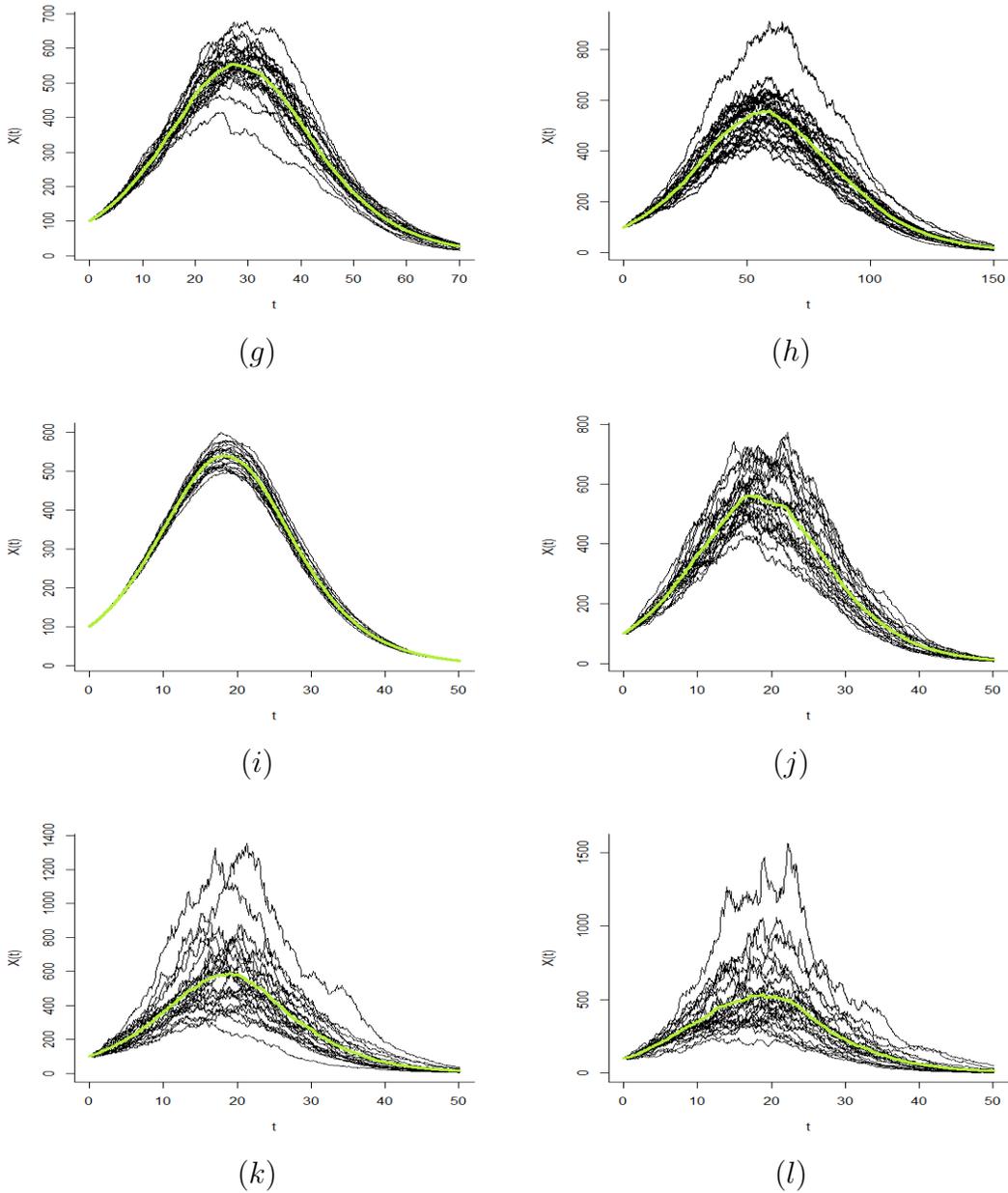


Figura 3.2: Procesos Hubbert con $\eta = 0.05, \sigma = 0.025$: (g) $\alpha = 0.90$, (h) $\alpha = 0.95$. Procesos Hubbert con $\eta = 0.05, \alpha = 0.85$: (i) $\sigma = 0.01$, (j) $\sigma = 0.05$, (k) $\sigma = 0.075$, (l) $\sigma = 0.1$.

Inferencia en el proceso de difusión Hubbert

4.1. Planteamiento general

En este capítulo abordaremos la estimación máximo verosímil de los parámetros del proceso de difusión Hubbert introducido en el capítulo anterior. Comenzaremos exponiendo las cuestiones generales del procedimiento que seguiremos para, con posterioridad, considerar el caso concreto del proceso Hubbert.

La estimación se realizará considerando el caso de muestreo discreto, esto es, supondremos que se dispone de observaciones del proceso en instantes de tiempo t_1, \dots, t_n en los cuales se observan las variables $X(t_1), \dots, X(t_n)$, cuyos valores observados constituirán la muestra base del estudio inferencial.

El procedimiento que seguiremos está basado en el método de estimación por máxima verosimilitud. Para ello será necesario conocer, excepto eventualmente para valores de parámetros desconocidos, la distribución conjunta de la muestra observada, lo cual conlleva conocer las distribuciones finito-dimensionales del proceso.

En nuestro caso, y puesto que los procesos de difusión son procesos de Markov¹, dicha propiedad permite que a partir de la distribución inicial del proceso y las transiciones se tenga cualquier distribución finito dimensional y, con ello, podamos aplicar la teoría de estimación máximo verosímil.

¹En realidad, el procedimiento que vamos a emplear no es válido sólo para procesos de difusión sino para procesos markovianos en general.

El planteamiento general del procedimiento es el siguiente:

Sea $\{X(t); t \geq t_0\}$ un proceso de difusión, del cual conocemos sus distribuciones unidimensionales y transiciones, y para el cual es posible realizar observaciones del mismo en instantes de tiempo prefijados. Sean t_1, \dots, t_n dichos instantes de tiempo y llamemos x_1, \dots, x_n a los valores observados del proceso.

Notemos f_1 y f a la densidad de la variable $X(t_1)$ y a la función de densidad de transición, respectivamente, y sean θ_1 y θ los parámetros asociados a ambas. Así, la función de verosimilitud de la muestra observada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ es

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}(\theta_1, \theta) = f_1(x_1) \prod_{i=2}^n f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}),$$

a partir de la cual se obtendrán los estimadores máximo verosímiles de θ_1 y θ . En concreto, asociadas a la muestra observada \mathbf{x} , se obtendrán las estimaciones $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(\mathbf{x})$ y $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x})$ tales que

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}) = \mathop{Sup}_{\theta_1, \theta} \mathbb{L}_{\mathbf{x}}(\theta_1, \theta).$$

Un caso particular, pero bastante usual en la práctica, sobre todo cuando se considera una sola trayectoria del proceso, es aquél en el que la distribución de $X(t_1)$ es degenerada, esto es, $P(X(t_1) = x_1) = 1$. En dicho caso la función de verosimilitud queda como

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}(\theta) = \prod_{i=2}^n f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}),$$

que depende sólo del parámetro θ .

Como hemos comentado, cuando se observa una sola trayectoria se debe considerar en t_1 una distribución degenerada ya que, en otro caso, no se dispondría de información suficiente para estimar el parámetro θ_1 . En otras ocasiones se dispone de información sobre d trayectorias, observadas en instantes de tiempo t_{ij} , ($i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, n_i$). Observemos que no es necesario que los instantes de observación sean los mismos para

cada trayectoria, si bien el instante inicial conviene que sí lo sea ya que hay que imponer una distribución inicial. Así pues consideraremos que $t_{i1} = t_1$, $i = 1, \dots, d$. Llamando $\{x_{ij}\}_{i=1, \dots, d; j=1, \dots, n_i}$ a los valores observados, y \mathbf{x} al vector conteniendo dichos valores, la función de verosimilitud queda en este caso en la forma

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}(\theta_1, \theta) = \prod_{i=1}^d f_1(x_{i1}) \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1}),$$

si se considera una distribución no degenerada en t_1 , mientras que en otro caso es

$$\mathbb{L}_{\mathbf{x}}(\theta) = \prod_{i=1}^d \prod_{j=2}^{n_i} f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1}).$$

Como es sabido, es habitual considerar el logaritmo de la función de verosimilitud para calcular el estimador máximo verosímil. Considerando el caso de múltiples trayectorias con distribución inicial no degenerada, ello conduce a

$$\log(\mathbb{L}_{\mathbf{x}}(\theta_1, \theta)) = \sum_{i=1}^d \log(f_1(x_{i1})) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \log(f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1})),$$

por lo que, en el caso de que θ_1 y θ sean independientes, la estimación de ambos también lo será. En tal caso, para la estimación de θ_1 sólo se considera la información del instante inicial de observación, mientras que la estimación de θ coincide en el caso de distribución inicial degenerada y no degenerada.

A continuación consideramos el caso concreto del proceso de difusión Hubbert, obteniendo la estimación máximo verosímil de los parámetros del modelo, a partir de la cual podemos obtener, aplicando el teorema de Zehna, la estimación de las funciones paramétricas del tipo (3.6), así como para el tiempo de pico y el pico (2.3) y (2.4), respectivamente.

4.2. Función de verosimilitud

Consideraremos una muestra discreta del proceso, basada en d trayectorias, en los instantes t_{ij} , ($i = 1, \dots, d; j = 1, \dots, n_i$) con $t_{i1} = t_1$, $i = 1, \dots, d$. Es decir, se observan las variables $X(t_{ij})$, cuyos valores constituyen la muestra del estudio inferencial que notaremos por $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{i=1, \dots, d; j=1, \dots, n_i}$.

La función de verosimilitud depende de la elección de la distribución inicial, la cual puede ser degenerada o lognormal. A partir de los comentarios anteriores, el primer caso se puede considerar una particularización del segundo, razón por la cual abordaremos el caso en el cual la distribución inicial es lognormal, esto es, $X(t_1) \sim \Lambda_1[\mu_1, \sigma_1^2]$.

La función de densidad de transición (3.5) se puede describir como

$$f(x_{ij}, t_{ij} | x_{i,j-1}, t_{i,j-1}) = \frac{1}{\sigma x_{ij} \sqrt{2\pi (t_{ij} - t_{i,j-1})}} \times \exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}}\right) - 2T_{ij}^{\eta, \alpha} - \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{ij} - t_{i,j-1})\right]^2}{2\sigma^2 (t_{ij} - t_{i,j-1})}\right)$$

siendo $T_{ij}^{\eta, \alpha} = \ln \frac{\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}}{\eta + \alpha^{t_{ij}}}$. Denotando $N = \sum_{i=1}^d n_i$, el logaritmo de la función de verosimilitud de la muestra es

$$\begin{aligned} \ln L_{\mathbf{x}}(\mu_1, \sigma_1^2, \eta, \alpha, \sigma^2) &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{d}{2} \ln \sigma_1^2 - \frac{N-d}{2} \ln \sigma^2 - \sum_{i=1}^d \ln x_{i1} \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^d [\ln x_{i1} - \mu_1]^2 - \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln x_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \ln(t_{ij} - t_{i,j-1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left[Z_1 + 4Y_1^{\eta, \alpha} + \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 Z_2 - 4Y_2^{\eta, \alpha} - 2 \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) [Z_3 - 2R^{\eta, \alpha}] \right], \quad (4.1) \end{aligned}$$

donde

$$Y_1^{\eta,\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{(T_{ij}^{\eta,\alpha})^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}}, \quad Y_2^{\eta,\alpha} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln\left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}}\right) T_{ij}^{\eta,\alpha}}{t_{ij} - t_{i,j-1}}, \quad R^{\eta,\alpha} = \sum_{i=1}^d \ln \frac{\eta + \alpha^{t_{i1}}}{\eta + \alpha^{t_{in_i}}},$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{\ln^2\left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}}\right)}{t_{ij} - t_{i,j-1}}, \quad Z_2 = \sum_{i=1}^d (t_{in_i} - t_{i1}), \quad Z_3 = \sum_{i=1}^d \ln\left(\frac{x_{in_i}}{x_{i1}}\right).$$

4.3. Obtención de las estimaciones de los parámetros a partir de las ecuaciones de verosimilitud

A partir de (4.1), las estimaciones de máxima verosimilitud de μ_1 y σ_1^2 son

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \ln x_{i1}$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (\ln x_{i1} - \hat{\mu}_1)^2$$

mientras que las de η , α y σ^2 se derivan de la solución del sistema de ecuaciones

$$X_2^{\eta,\alpha} - 2X_3^{\eta,\alpha} - \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) X_1^{\eta,\alpha} = 0, \quad (4.2)$$

$$2\alpha X_5^{\eta,\alpha} - 4\alpha + X_6^{\eta,\alpha} - \left(\ln \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) (2\alpha X_4^{\eta,\alpha} + Z_2) + Z_3 - 3R^{\eta,\alpha} = 0, \quad (4.3)$$

$$(N - d)\sigma^2 - Z_1 - 4Y_1^{\eta,\alpha} - \left(\ln^2 \alpha - \frac{\sigma^4}{2}\right) Z_2 + 2 \ln \alpha (Z_3 - R^{\eta,\alpha}) + 4Y_2^{\eta,\alpha} = 0 \quad (4.4)$$

siendo

$$\begin{aligned}
X_1^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \frac{W_i^\alpha}{S_i^{\eta,\alpha}}, & X_2^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{W_{ij}^\alpha}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}} \ln \left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}} \right), \\
X_3^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{ij}^{\eta,\alpha} W_{ij}^\alpha}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}}, & X_4^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \frac{V_i^{\eta,\alpha}}{S_i^{\eta,\alpha}}, \\
X_5^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{V_{ij}^{\eta,\alpha}}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}} \ln \left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}} \right), & X_6^{\eta,\alpha} &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{T_{i,j}^{\eta,\alpha} V_{i,j}^{\eta,\alpha}}{(t_{ij} - t_{i,j-1}) S_{ij}^{\eta,\alpha}}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{\eta,\alpha} &= (\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}) (\eta + \alpha^{t_{ij}}), & S_i^{\eta,\alpha} &= (\eta + \alpha^{t_{i1}}) (\eta + \alpha^{t_{in_i}}), \\
W_{ij}^\alpha &= \alpha^{t_{ij}} - \alpha^{t_{i,j-1}}, & W_i^\alpha &= \alpha^{t_{in_i}} - \alpha^{t_{i1}}, \\
V_{ij}^{\eta,\alpha} &= t_{i,j-1} \alpha^{t_{i,j-1}-1} (\eta + \alpha^{t_{ij}}) - t_{ij} \alpha^{t_{ij}-1} (\eta + \alpha^{t_{i,j-1}}), \\
V_i^{\eta,\alpha} &= t_{i1} \alpha^{t_{i1}-1} (\eta + \alpha^{t_{in_i}}) - t_{in_i} \alpha^{t_{in_i}-1} (\eta + \alpha^{t_{i1}}).
\end{aligned}$$

De (4.2) obtenemos $\sigma_{\eta,\alpha}^2 = 2(S^{\eta,\alpha} + \ln \alpha)$, donde $S^{\eta,\alpha} = \frac{2X_3^{\eta,\alpha} - X_2^{\eta,\alpha}}{X_1^{\eta,\alpha}}$.

Al sustituir esta última expresión en (4.3) y (4.4), se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
2\alpha (X_5^{\eta,\alpha} - 2X_6^{\eta,\alpha} + S^{\eta,\alpha} X_4^{\eta,\alpha}) - 2R^{\eta,\alpha} + S^{\eta,\alpha} Z_2 + Z_3 &= 0, \\
S^{\eta,\alpha} [2(N - d) + Z_2 (S^{\eta,\alpha} + 2 \ln \alpha)] - 4Y_1^{\eta,\alpha} + 4Y_2^{\eta,\alpha} - Z_1 \\
- 2 \ln \alpha (Z_3 - 2R^{\eta,\alpha} + N - d) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

La solución de este sistema proporcionará las estimaciones de máxima verosimilitud para η y α , mientras que la estimación para σ^2 vendrá dada por

$$2(S^{\hat{\eta}, \hat{\alpha}} + \ln \hat{\alpha}). \tag{4.6}$$

4.3.1. Búsqueda de solución inicial para el sistema de ecuaciones de verosimilitud

El sistema de ecuaciones (4.5) es bastante complejo, y su resolución es difícil, especialmente cuando la muestra es grande. Por esta razón, se hace necesario hacer uso de procedimientos numéricos, la mayoría de los cuales requieren una solución inicial.

Con el fin de obtener una buena solución inicial, proponemos tres alternativas. Las dos primeras se basan en la información proporcionada por las trayectorias observadas del proceso, mientras que la tercera depende de la información disponible a partir de la estimación de URR.

- **Procedimiento 1.** Para aplicar este método, asumimos que el pico y el tiempo de pico son conocidos o se pueden aproximar (por ejemplo interpolando los valores obtenidos a partir de la media de las trayectorias y luego calculando el máximo de la función interpolada). Haciendo uso de (2.3) y (2.4), se verifica la siguiente relación:

$$x(t_{\max}) = x_0 \frac{\alpha^{t_{\max}-t_0} + \alpha^{t_0-t_{\max}} + 2}{4}.$$

Al sustituir, en esta última expresión, t_{\max} y $x(t_{\max})$ por sus valores aproximados $(t_{\max}^{\text{approx}}, x_{t_{\max}}^{\text{approx}})$, se obtiene una ecuación cuya solución proporciona los valores iniciales para α (a saber α_0), mientras que $\eta_0 = \alpha_0^{t_{\max}^{\text{approx}}}$.

- **Procedimiento 2.** Ahora consideramos que el valor del punto de inflexión t_{inf} es conocido o aproximado. En tal caso, los valores de η_0 y α_0 pueden obtenerse a través de la relación entre (2.5) y (2.6). A partir de estas expresiones deducimos

$$x(t_{\text{inf}}) = \frac{x_0}{6} \left[(2 - \sqrt{3}) \alpha^{t_{\text{inf}}-t_0} + (2 + \sqrt{3}) \alpha^{t_0-t_{\text{inf}}} + 2 \right].$$

Una vez que $x(t_{\text{inf}})$ y t_{inf} son conocidos (o aproximados), la solución de la ecuación

anterior proporciona un valor para α_0 . Por consiguiente, η_0 es determinado por

$$\eta_0 = \frac{\alpha_0^{t_{inf}}}{2 + \sqrt{3}}.$$

Este método es una alternativa al anterior para los casos en que los datos disponibles no sugieran que el pico se haya alcanzado. Con el fin de aproximar el tiempo de inflexión, y dado que el instante de inflexión de la curva coincide con aquel en el que su derivada alcanza el máximo, se sugiere aproximar los valores de la derivada de la trayectoria media de la muestra. Este cálculo puede realizarse interpolando previamente los valores de la muestra y considerando la derivada de la expresión encontrada. Así, el instante en el que se alcanza el máximo de la derivada sería la aproximación de t_{inf} , y el valor de la función aproximada en este punto sería una aproximación para $x(t_{inf})$.

- **Procedimiento 3.** Este método parte del hecho de que en situaciones reales se suele disponer de estimaciones de URR. Laherrère considera en [43] el problema de estimación de los parámetros calculando previamente una función aproximada a partir de los datos y considerando la simetría alrededor del tiempo de pico de la curva Hubbert (de hecho la producción de petróleo acumulada hasta t_{max} es $URR/2$). A partir de esa función, el autor sugiere utilizar esa extrapolación para calcular los valores de los parámetros. Sin embargo, para poder aplicar este procedimiento, deben tenerse en cuenta algunas consideraciones:

1. El pico y el tiempo de pico deben ser estimados.
2. Puesto que el instante inicial de observación de la producción no tiene por qué coincidir con el instante en el que comenzó la producción, habrá que estimar dicho instante con el objetivo de que la producción acumulada de petróleo hasta t_{max} sea igual a $URR/2$.

Estas consideraciones hacen que no se pueda garantizar que este enfoque proporcione siempre resultados satisfactorios. Por ello, y siempre basado en la disponibilidad de estimaciones de URR, proponemos el siguiente método alternativo.

Sea T_F el tiempo de observación final, el cual puede ser anterior o posterior a (t_{\inf} y/o t_{\max}), y consideremos c definido por

$$c = \int_{t_0}^{T_F} x(t)dt = \eta URR \frac{\alpha^{t_0} - \alpha^{T_F}}{(\eta + \alpha^{t_0})(\eta + \alpha^{T_F})}. \quad (4.7)$$

En la práctica se puede obtener una aproximación de c mediante integración numérica considerando los datos procedentes de las trayectorias muestrales. Conocidos los valores aproximados de URR y c , las expresiones (2.7) y (4.7) determinan un sistema de ecuaciones a partir del cual se pueden obtener los valores iniciales para α y η . Realizando operaciones, (2.7) se puede expresar como

$$x_0 \eta^2 + \alpha^{t_0} (2x_0 + \ln \alpha URR) \eta + x_0 \alpha^{2t_0}, \quad (4.8)$$

mientras que (4.7) se puede reordenar para obtener

$$M \eta^2 + \alpha_0^t [(M - 1) + (M + 1) \alpha^h] \eta + M \alpha^{2t_0+h} = 0, \quad (4.9)$$

donde $h = T_F - t_0$ y $M = c/URR$.

De (4.8) y (4.9) obtenemos

$$\eta = \frac{M x_0 \alpha^{t_0} (\alpha^h - 1)}{c \ln \alpha + x_0 (M + 1) (1 - \alpha^h)} := \kappa(\alpha),$$

y sustituyendo en (4.8) concluimos

$$x_0 \kappa^2(\alpha) + \alpha^{t_0} (2x_0 + \ln \alpha URR) \kappa(\alpha) + x_0 \alpha^{2t_0} = 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4.10)$$

La solución de la ecuación (4.10) proporciona el valor inicial α_0 , siendo $\eta_0 = \kappa(\alpha_0)$.

4.4. Aplicación de Simulated Annealing y Variable Neighborhood Search para la estimación de los parámetros del proceso

Como hemos comentado anteriormente, el sistema de ecuaciones (4.5) es bastante complejo y su resolución precisa de métodos numéricos, los cuales necesitan una solución inicial óptima para su empleo. Sin embargo, aunque se disponga de buenos procedimientos para obtener tal solución inicial, es imposible realizar un estudio general del sistema de ecuaciones con el objetivo de comprobar las condiciones de convergencia del método numérico considerado ya que el sistema depende de los valores muestrales.

Un enfoque alternativo a la estimación de parámetros mediante procedimientos numéricos se da mediante el uso de procedimientos de optimización estocástica como S.A. y V.N.S.. Estos algoritmos están diseñados para resolver problemas del tipo $\min_{\theta \in \Theta}$ y son a menudo más apropiados que los métodos numéricos clásicos, ya que imponen menos restricciones en el espacio paramétrico y en las propiedades analíticas de la función a optimizar. En nuestro caso, una vez que hemos encontrado los estimadores de μ_1 y σ_1^2 , el problema se convierte en maximizar la función $\log L_x(\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1^2, \eta, \alpha, \sigma^2)$. Dado que los algoritmos anteriores suelen formularse para problemas de minimización, a partir de (4.1) la función objetivo que vamos a considerar es

$$\tilde{L}_x(\alpha, \eta, \sigma^2) = \frac{N-d}{2} \ln \sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=2}^{n_i} \frac{[\ln \left(\frac{x_{ij}}{x_{i,j-1}} \right) - T_{ij}^{\eta, \alpha} + \frac{\sigma^2}{2}(t_{ij} - t_{i,j-1})]^2}{t_{ij} - t_{i,j-1}}. \quad (4.11)$$

4.4.1. Acotación del espacio paramétrico

El espacio paramétrico vinculado a la función objetivo (4.11), en la que deben operar los algoritmos antes mencionados, es continuo y no acotado. Concretamente el espacio es

$$\Theta = \{(\alpha, \eta, \sigma) : 0 < \alpha < 1, \eta > 0, \sigma > 0\}.$$

Al no estar acotado el espacio, se puede presentar el inconveniente de que tal vez los algoritmos no lo exploren con suficiente profundidad. Esto nos lleva a buscar procedimientos para acotar el espacio de búsqueda.

En cuanto al parámetro σ , valores altos del mismo conducen a trayectorias con gran variabilidad alrededor de la media del proceso. Por lo tanto, la variabilidad excesiva en las trayectorias disponibles haría desaconsejable utilizar un modelo de tipo Hubbert. Algunas simulaciones realizadas para varios valores de σ (ver figura 4.1) nos han llevado a considerar que $0 < \sigma < 0,1$, para que podamos tener trayectorias compatibles con un crecimiento tipo Hubbert. Por otra parte, mientras que α está acotado, no parece haber un límite superior para η . Sin embargo, como se ha indicado con anterioridad, la curva Hubbert tiene un punto de inflexión antes de t_{\max} que se visualiza ($t_{\inf} > t_0$) si y sólo si $\eta < \alpha^{t_0}(2 - \sqrt{3}) < 2 - \sqrt{3}$. De esta forma tenemos ya una acotación superior para η .

Adicionalmente, a partir del desarrollo realizado para establecer la solución inicial para el sistema de ecuaciones de verosimilitud cuando se dispone de una estimación de URR, se pueden hacer algunos refinamientos para una mejor delimitación de α . En efecto:

- Para tener solución, el discriminante de la ecuación (4.8) debe verificar

$$\alpha^{2t_0} \log \alpha URR (\log \alpha URR + 4x_0) \geq 0,$$

de donde se deduce que $\alpha \leq \alpha_1$ siendo $\alpha_1 = \exp(-4x_0/URR)$.

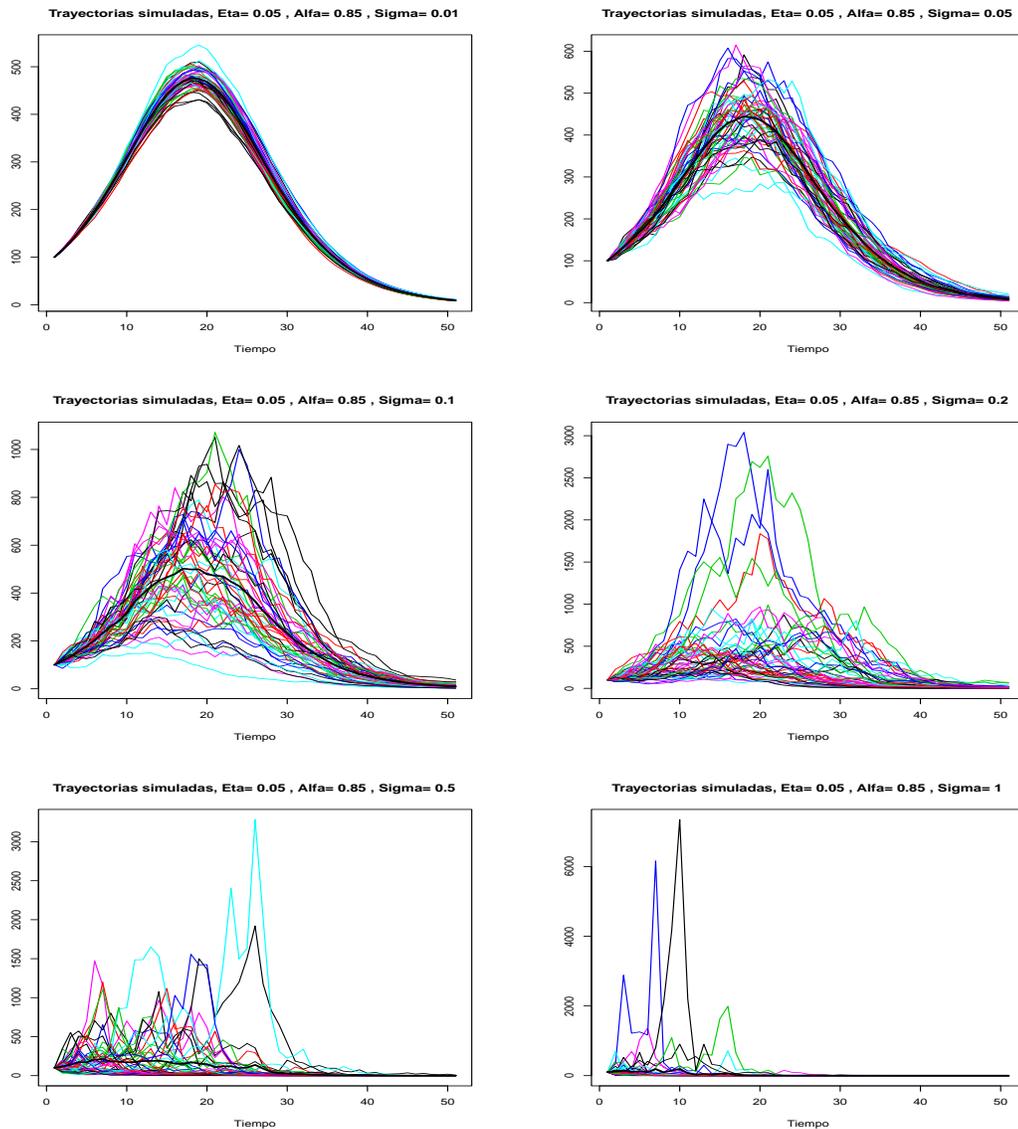


Figura 4.1: Distintas simulaciones de procesos Hubbert para diversos valores de σ .

- Siguiendo un argumento similar para la ecuación (4.9), se verifica la siguiente expresión

$$(M - 1)^2 - 2(M^2 + 1)\alpha^h + (M + 1)^2\alpha^{2h} \geq 0,$$

resultando

$$\alpha < \alpha_2 = \left(\frac{M-1}{M+1} \right)^{2/h}.$$

- De los dos razonamientos anteriores consideramos $\alpha^* < \text{Min}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Las tablas 4.1 y 4.2 contienen, para diversos valores de α y η , las cotas proporcionadas por el método expuesto. Se puede comprobar cómo para $\eta = 0,01$ la cota proporcionada por α_2 es preferible, independientemente del valor de α . La situación cambia cuando η aumenta ya que en tal caso también crece el rango de valores de α para el cual la cota proporcionada por α_1 es preferible. En tal caso, cuando η crece, la amplitud de los intervalos proporcionada por α_1 disminuye.

Tabla 4.1: Cotas para α para diversos valores de dicho parámetro y η .

α	$t_0 = 0, \quad t_f = 50$							
	$\eta = 0,01$		$\eta = 0,025$		$\eta = 0,05$		$\eta = 0,075$	
	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
0,05	0,8891	0,8088	0,7519	0,8388	0,5807	0,8619	0,4594	0,8756
0,10	0,9136	0,8088	0,8031	0,8388	0,6585	0,8619	0,5500	0,8756
0,15	0,9283	0,8088	0,8347	0,8388	0,7088	0,8619	0,6111	0,8756
0,20	0,9388	0,8088	0,8579	0,8388	0,7467	0,8619	0,6584	0,8756
0,25	0,9470	0,8088	0,8763	0,8388	0,7776	0,8619	0,6977	0,8756
0,30	0,9538	0,8088	0,8917	0,8388	0,8037	0,8619	0,7315	0,8756
0,35	0,9596	0,8088	0,9049	0,8388	0,8265	0,8619	0,7614	0,8756
0,40	0,9647	0,8088	0,9164	0,8388	0,8468	0,8619	0,7883	0,8756
0,45	0,9691	0,8088	0,9268	0,8388	0,8651	0,8619	0,8127	0,8756
0,50	0,9731	0,8088	0,9361	0,8388	0,8818	0,8619	0,8353	0,8756
0,55	0,9768	0,8088	0,9446	0,8388	0,8972	0,8619	0,8562	0,8756
0,60	0,9801	0,8088	0,9525	0,8388	0,9114	0,8619	0,8758	0,8756
0,65	0,9832	0,8088	0,9598	0,8388	0,9248	0,8619	0,8941	0,8756
0,70	0,9861	0,8088	0,9666	0,8388	0,9373	0,8619	0,9115	0,8756
0,75	0,9887	0,8090	0,9729	0,8388	0,9491	0,8619	0,9280	0,8756
0,80	0,9912	0,8132	0,9789	0,8395	0,9603	0,8621	0,9437	0,8757
0,85	0,9936	0,8546	0,9846	0,8522	0,9709	0,8660	0,9586	0,8776
0,90	0,9958	0,9398	0,9900	0,9148	0,9810	0,9019	0,9730	0,9000
0,95	0,9979	0,9915	0,9951	0,9821	0,9907	0,9715	0,9867	0,9644

Tabla 4.2: Cotas para α para diversos valores de dicho parámetro y η (continuación).

α	$t_0 = 0, t_f = 50$							
	$\eta = 0,1$		$\eta = 0,15$		$\eta = 0,2$		$\eta = 0,25$	
	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
0,05	0,3714	0,8853	0,2568	0,8989	0,1893	0,9085	0,1470	0,9158
0,10	0,4671	0,8853	0,3518	0,8989	0,2782	0,9085	0,2290	0,9158
0,15	0,5341	0,8853	0,4228	0,8989	0,3485	0,9085	0,2969	0,9158
0,20	0,5874	0,8853	0,4818	0,8989	0,4089	0,9085	0,3569	0,9158
0,25	0,6323	0,8853	0,5331	0,8989	0,4629	0,9085	0,4117	0,9158
0,30	0,6716	0,8853	0,5791	0,8989	0,5122	0,9085	0,4627	0,9158
0,35	0,7067	0,8853	0,6210	0,8989	0,5580	0,9085	0,5107	0,9158
0,40	0,7386	0,8853	0,6598	0,8989	0,6010	0,9085	0,5563	0,9158
0,45	0,7679	0,8853	0,6960	0,8989	0,6417	0,9085	0,5998	0,9158
0,50	0,7952	0,8853	0,7301	0,8989	0,6803	0,9085	0,6417	0,9158
0,55	0,8206	0,8853	0,7624	0,8989	0,7173	0,9085	0,6820	0,9158
0,60	0,8446	0,8853	0,7931	0,8989	0,7529	0,9085	0,7211	0,9158
0,65	0,8672	0,8853	0,8224	0,8989	0,7871	0,9085	0,7590	0,9158
0,70	0,8887	0,8853	0,8505	0,8989	0,8202	0,9085	0,7959	0,9158
0,75	0,9092	0,8853	0,8776	0,8989	0,8522	0,9085	0,8318	0,9158
0,80	0,9288	0,8854	0,9037	0,8989	0,8834	0,9085	0,8669	0,9158
0,85	0,9476	0,8865	0,9289	0,8995	0,9136	0,9088	0,9012	0,9161
0,90	0,9657	0,9016	0,9533	0,9078	0,9431	0,9141	0,9347	0,9198
0,95	0,9831	0,9595	0,9769	0,9538	0,9719	0,9511	0,9677	0,9501

4.4.2. Aplicación de Simulated Annealing

S.A. es un algoritmo metaheurístico de búsqueda local introducido por Kirpatrick et al. [42], inspirado en el proceso metalúrgico de recocido estudiado en estadística mecánica. Debido a su eficiencia se ha difundido ampliamente en los últimos años, particularmente con fines de optimización combinatoria. En el contexto de estimación de máxima verosimilitud para distribuciones, se ha utilizado en trabajos como los de Vera y Díaz-García [74] y Abbasi et al. [1]. En el ámbito de los procesos de difusión Román-Román et al. [57] lo han utilizado para estimar los parámetros de un proceso de difusión tipo Gompertz.

El algoritmo realiza una exploración iterativa del espacio paramétrico buscando mejoras en el valor de la función objetivo. Una vez que se encuentra una nueva solución, se

acepta con probabilidad uno si mejora la anterior. Si no es así, se acepta con una probabilidad que depende del valor del incremento de la función objetivo, y también de un factor de escala llamado temperatura (T). Esto pretende evitar una atracción hacia los mínimos locales. Más específicamente, sea θ la solución existente para una iteración dada y $f(\theta)$ el valor de la función objetivo en ella. En la siguiente iteración se selecciona un nuevo valor θ' en un entorno N_θ de θ y se evalúa el incremento en la función objetivo $\Delta = f(\theta') - f(\theta)$. Si $\Delta \leq 0$ entonces θ' se selecciona como la nueva solución. De lo contrario, podría aceptarse con probabilidad $p = \exp(-\Delta/T)$. Así, un ciclo interno genera una cadena de Markov que es tan larga como el número de iteraciones del ciclo. Al final del ciclo la temperatura disminuye gradualmente y se genera una nueva cadena de Markov. Al principio, el proceso de enfriamiento permite seleccionar soluciones que empeoran la función objetivo (alta temperatura). Más tarde, a medida que la temperatura disminuye, estas soluciones ya no son aceptadas. Esto permite la convergencia hacia un mínimo local de la función objetivo. Estudios teóricos (por ejemplo Hájek [33]) han demostrado que cuando T se aproxima a cero (después de un proceso de enfriamiento infinitamente largo) el proceso converge a un mínimo local con probabilidad uno.

En consecuencia, la aplicación general del algoritmo requiere:

1. Selección de los parámetros iniciales del algoritmo (solución inicial θ_0 , temperatura inicial (T_0), temperatura final, número de iteraciones del algoritmo (longitud de la cadena de Markov, L) y procedimiento de enfriamiento) y una condición de parada.
2. Aplicación del procedimiento de selección para una nueva solución L veces.
3. Verificación de la condición de parada. Si no se verifica, disminuir la temperatura y volver al paso anterior.

En el estudio de simulación que mostraremos posteriormente en el capítulo 5 hemos considerado las siguientes opciones para los parámetros iniciales del algoritmo:

1. La solución inicial se elige aleatoriamente en el subespacio acotado

$$\Theta' = [0, 2 - \sqrt{3}] \times [0, \alpha^*] \times (0, 0, 1).$$

El cálculo de α^* depende de la disponibilidad de datos sobre URR. Si estos datos no están disponibles, debemos sustituir Θ' por $\Theta = (0, 2 - \sqrt{3}) \times (0, 1) \times (0, 0, 1)$.

2. Para la aplicación de S.A. la temperatura inicial debe ser alta, de modo que al principio existe una alta probabilidad, p_0 , de aceptar valores que aumentan el valor de la función objetivo. En nuestro caso, y según Buseti [12], hemos considerado $p_0 = 0,9$, de modo que $T_0 = -\Delta f^+ / \log(p_0)$. Δf^+ denota el aumento promedio en la función objetivo cuando los valores que producen un incremento se aceptan después de considerar N valores en el espacio paramétrico. En nuestro caso, hemos considerado $N = 100$.
3. Para el proceso de enfriamiento hemos considerado un esquema geométrico en el que la temperatura actual se multiplica por una constante $\gamma (0 < \gamma < 1)$, es decir $T_i = \gamma T_{i-1}$, $i \geq 1$. Los valores usuales para γ están entre 0,8 y 0,99. Para este caso hemos establecido la constante $\gamma = 0,95$.
4. La longitud seleccionada de la cadena para la aplicación de cada secuencia completa del algoritmo es $L = 50$. Por lo tanto, en cada paso se generará una cadena de 50 soluciones antes de comprobar la regla de parada y modificar la temperatura si es necesario.
5. La regla de parada seleccionada es doble. En primer lugar se comprueba si los últimos 50 valores generados son iguales, en cuyo caso el algoritmo se detiene. De lo contrario continúa hasta que la temperatura alcanza un valor cerca de cero (0,1 en este caso).

4.4.3. Aplicación de Variable Neighborhood Search

La primera descripción del algoritmo V.N.S. apareció en la obra publicada por Mladenovic y Hansen [49]. Su principal objetivo es explorar diversos entornos del espacio paramétrico cuando se localiza un óptimo local para la función objetivo mediante el empleo de un método de búsqueda local. El algoritmo se aplica en dos fases distintas: en la primera se determina una estructura de entornos en el espacio paramétrico, N_k , $k = 1, \dots, k_{\max}$, y se elige una solución inicial θ_0 . Para $k = 1, \dots, k_{\max}$, la segunda fase utiliza un método de búsqueda local para determinar una nueva solución θ^* en $N_k(\theta_0)$. Si θ^* provoca una mejora en la función objetivo entonces $\theta_0 = \theta^*$ y la búsqueda se reanuda desde $N_1(\theta_0)$. En otro caso, la búsqueda continúa con el siguiente entorno $N_{k+1}(\theta_0)$. De esta forma, la solución final proporcionada por el algoritmo es un mínimo local con respecto a la estructura de entornos k_{\max} , por lo que es mucho más probable encontrar un mínimo global con este método que con el uso de una estructura única. El procedimiento descrito anteriormente cambia de estructura de entornos cada vez que se produce una mejora en la función objetivo. En la literatura sobre V.N.S. esta versión del algoritmo se conoce como *Variable Neighborhood Descent* (otras versiones pueden contemplarse en [8]). Los trabajos de Zoraghi et al. [76] y Abbasi et al. [1] muestran algunas aplicaciones del algoritmo V.N.S. a la estimación de parámetros en las distribuciones. Recientemente, Román-Román y Torres-Ruiz [65] lo han aplicado para estimar los parámetros de un proceso de difusión relacionado con la curva de crecimiento de tipo Richards.

Como se ha indicado anteriormente, para la aplicación del algoritmo V.N.S. debemos tener en cuenta la estructura de entornos y el método de búsqueda local. En las aplicaciones prácticas que hemos realizado en esta memoria se han hecho las siguientes elecciones:

- **Estructura de entornos:** Después de seleccionar un valor para k_{\max} (5 en este caso) procedemos de la siguiente manera.

Sea Θ' el subespacio paramétrico anteriormente mencionado. Dada una solución inicial $\theta_0 = (\alpha_0, \eta_0, \sigma_0)^T$ consideramos las cantidades:

$$h_{11} = \frac{\eta_0}{k_{\max}}, \quad h_{12} = \frac{2 - \sqrt{3} - \eta_0}{k_{\max}}, \quad h_{21} = \frac{\alpha_0}{k_{\max}}, \quad h_{22} = \frac{1 - \alpha_0}{k_{\max}},$$

$$h_{31} = \frac{\sigma_0}{k_{\max}}, \quad h_{32} = \frac{0, 1 - \sigma_0}{k_{\max}},$$

a partir de las cuales la estructura de entornos es

$$N_k(\theta) = [\eta_0 - k h_{11}, \eta_0 + k h_{12}] \times [\alpha_0 - k h_{21}, \alpha_0 + k h_{22}] \times [\sigma_0 - k h_{31}, \sigma_0 + k h_{32}]$$

para $k = 1, \dots, k_{\max}$.

- **Búsqueda local:** El método de búsqueda local que hemos seleccionado es S.A.. Esta elección nos permite realizar un procedimiento híbrido que ha demostrado ser útil en varias aplicaciones (véase, por ejemplo, [1] o [65]).

Con el fin de aplicar el algoritmo hemos considerado como una solución inicial aquella encontrada aplicando el algoritmo S.A.

4.5. Traslación en el tiempo para el proceso Hubbert

En las aplicaciones prácticas es usual considerar valores altos de los instantes de tiempo para el proceso. En estos casos puede haber la posibilidad de que el valor estimado de η sea próximo a cero (notemos que $\eta = \alpha^{t_{\max}}$.) En estas situaciones, comunes en casos reales, muchos paquetes computacionales y/o estadísticos pueden encontrar dificultades para obtener estimaciones precisas, pudiéndose producir errores considerables en los resultados finales.

Para evitar esta situación se propone una alternativa que pasa por considerar un nuevo

proceso de difusión $\{Y(t); t \geq t_0 - k\}$, obtenido a partir de $\{X(t); t \geq t_0\}$ considerando una traslación de longitud k en el tiempo, esto es, $Y(t) = X(t + k)$, de tal forma que los datos originales pueden considerarse como observaciones del nuevo proceso, para el cual el instante inicial de tiempo es $t_0 = 0$. Este nuevo proceso es también un proceso de difusión Hubbert cuyos parámetros α y σ permanecen invariantes mientras que η se transforma en $\eta' = \alpha^{-k}\eta$.

En efecto, sea $\{X(t); t \geq t_0\}$ el proceso Hubbert, y sea $\{Y(t); t \geq t_0 - k\}$ el proceso transformado tras la traslación de longitud k en el tiempo, o sea, $Y(t) = X(t+k)$. Notemos $A_m(x, t)$ y $B_m(y, t)$ a sus respectivos momentos infinitesimales de orden m .

Teniendo en cuenta la definición de momento infinitesimal de orden m ,

$$A_m(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E [(X(t + \Delta t) - X(t))^m | X(t) = x],$$

es inmediato comprobar que $B_m(y, t) = A_m(y, t+k)$. Así, el proceso $Y(t)$ tiene momentos infinitesimales dados por

$$\begin{aligned} B_1(y, t) &= -\ln \alpha \frac{\alpha^t - \eta'}{\alpha^t + \eta'} y \\ B_2(y) &= \sigma^2 y^2, \end{aligned}$$

donde $\eta' = \eta\alpha^{-k}$.

En consecuencia, $Y(t)$ también es un proceso de difusión Hubbert cuyos momentos infinitesimales difieren de los de $X(t)$ sólo en la reparametrización ocurrida en η . Lo mismo ocurre para las distribuciones finito dimensionales, la densidad de transición y principales características del proceso. En particular,

$$G_Y^\lambda(t|y, s) = G_X^\lambda(t+k|y, s+k).$$

Además, para las expresiones relacionadas con instantes de tiempo (como el tiempo

del pico) es suficiente con deshacer los cambios hechos en el tiempo. En efecto,

$$t'_{\max} = \frac{\ln \eta'}{\ln \alpha} = \frac{\ln(\eta\alpha^{-k})}{\ln \alpha} = \frac{\ln \eta}{\ln \alpha} - k = t_{\max} - k$$

$$t'_{\inf} = t'_{\max} + \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\ln \alpha} = t_{\max} - k + \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{\ln \alpha} = t_{\inf} - k,$$

mientras que para valores concretos de la curva se tiene

$$x(t'_{\max}) = x_0 \frac{(\eta' + \alpha^{t'_0})^2}{4\eta'\alpha^{t'_0}} = x_0 \frac{(\eta\alpha^{-k} + \alpha^{t_0-k})^2}{4\eta\alpha^{-k}\alpha^{t_0-k}} = x_0 \frac{\alpha^{-2k}(\eta + \alpha^{t_0})^2}{4\alpha^{-2k}\eta\alpha^{t_0}} = x(t_{\max})$$

$$URR' = -x_0 \frac{(\eta' + \alpha^{t'_0})^2}{\eta'\alpha^{t'_0} \ln \alpha} = -x_0 \frac{(\eta\alpha^{-k} + \alpha^{t_0-k})^2}{\eta\alpha^{-k}\alpha^{t_0-k} \ln \alpha} = -x_0 \frac{\alpha^{-2k}(\eta + \alpha^{t_0})^2}{\alpha^{-2k}\eta\alpha^{t_0} \ln \alpha} = URR$$

$$\begin{aligned} c' &= \eta' URR' \frac{\alpha^{t'_0} - \alpha^{T'_F}}{(\eta' + \alpha^{t'_0})(\eta' + \alpha^{T'_F})} = \eta\alpha^{-k} URR \frac{\alpha^{t_0-k} - \alpha^{T_F-k}}{(\eta\alpha^{-k} + \alpha^{t_0-k})(\eta\alpha^{-k} + \alpha^{T_F-k})} \\ &= \eta URR \frac{\alpha^{t_0} - \alpha^{T_F}}{(\eta + \alpha^{t_0})(\eta + \alpha^{T_F})} = c. \end{aligned}$$

Tiempos de primer paso en el proceso de difusión Hubbert

5.1. Cuestiones generales sobre tiempos de primer paso en procesos de difusión

En el estudio de fenómenos que involucran variables que evolucionan en el tiempo, y que por tanto se pueden modelar mediante procesos estocásticos, es frecuente plantearse cuestiones acerca de la evolución temporal de la variable en estudio.

Por tanto, cuando se dispone de variables que evolucionan en el tiempo y sobre las cuales se desea determinar cuándo se cumple una determinada condición, es lógico considerar el problema de estudiar la distribución de la variable *instante en el cual la variable en estudio verifica una determinada condición*. En las situaciones en las que el fenómeno esté regido por un proceso estocástico en tiempo continuo, es evidente que lo que estamos planteando es estudiar el tiempo en el cual dicho proceso satisface una determinada propiedad.

Dentro de este tipo de situaciones merece especial atención aquellas en las que la variable temporal que se desea estudiar es el tiempo en el que el proceso verifica por primera vez una propiedad; es decir la variable

$$\text{Inf}_{t \geq t_0} \{t : X(t) \text{ verifica una propiedad dada}\},$$

para la cual se debe calcular su distribución.

Algunos ejemplos de situaciones de esta naturaleza los tenemos en la cría controlada de especies para consumo, como piscifactorías, donde es importante saber el primer instante en el que el organismo alcanza una determinada talla o un determinado peso, ya que eso determina el instante en el que es apto para el consumo y no se debe seguir invirtiendo en su cría. Otro ejemplo lo podemos encontrar en Economía, cuando se desea conocer cuándo una variable, como el P.I.B. o el I.P.C, atraviesa por primera vez un determinado umbral (el cual puede tener un importante significado desde el punto de vista económico). Siguiendo con el campo económico, un problema actual en muchos países son los déficits en el gastos públicos relacionados a la Seguridad Social. Los gobiernos toman en ocasiones medidas correctivas y conocer el tiempo necesario para reequilibrar las cuentas públicas es un asunto de interés en tales situaciones. Otros ejemplos los tenemos en Farmacocinética, cuando se dispone de diferentes medicamentos para el tratamiento de una determinada enfermedad, y se desea saber el tiempo estimado para la cura y/o control de dicha enfermedad, o en Neurobiología, donde la actividad de una neurona puede ser estudiada a través del instante en el que el proceso que modela la diferencia de potencial de la membrana neuronal atraviesa un determinado umbral.

Todos estos últimos ejemplos obedecen a un esquema que se conoce como *problema de tiempo de primer paso*, y puede ser modelado matemáticamente de la siguiente forma:

Sea $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso estocástico en tiempo continuo y $S(t)$ una función continua (a la que denominaremos barrera) definida en $[t_0, T]$. Se define la variable tiempo de primer paso de $X(t)$ a través de $S(t)$, condicionada a que $X(t_0) = x_0$, como

$$T_{S(t),x_0} = \begin{cases} \text{Inf}_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0\} & \text{si } x_0 < S(t_0) \\ \text{Inf}_{t \geq t_0} \{t : X(t) < S(t) | X(t_0) = x_0\} & \text{si } x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (5.1)$$

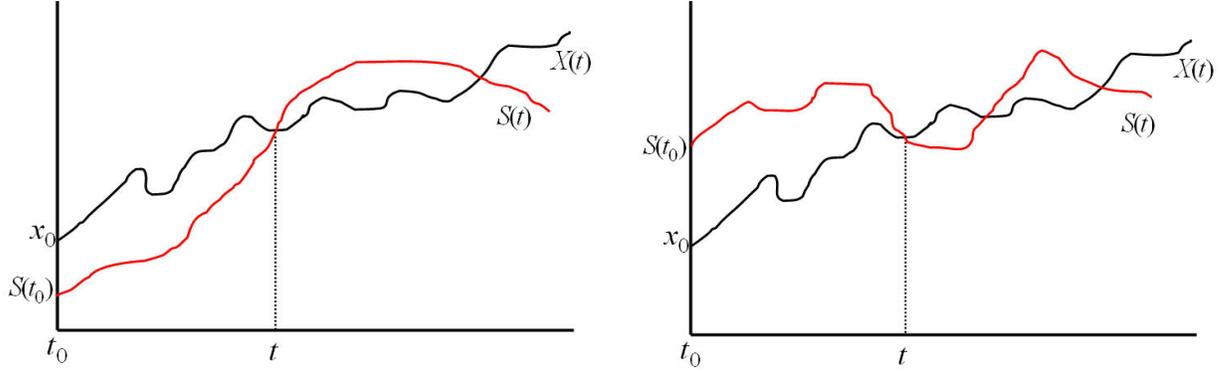


Figura 5.1: Primer paso de $X(t)$ a través de $S(t)$.

y notaremos por $g(S(t), t|x_0, t_0)$ a su función de densidad. La figura (5.1) ilustra la situación comentada.

Esta definición puede generalizarse al caso en el que no se condicione a un valor inicial. En tal caso el tiempo de primer paso depende de la variable $X(t_0)$ y se define como

$$T_{S(t), X(t_0)} = \begin{cases} \text{Inf}_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t)\} & \text{si } X(t_0) < S(t_0) \\ \text{Inf}_{t \geq t_0} \{t : X(t) < S(t)\} & \text{si } X(t_0) > S(t_0). \end{cases} \quad (5.2)$$

En esta situación, la función de densidad de la variable (5.2) puede obtenerse a partir de la familia de densidades $\{g(S(t), t|x_0, t_0), x_0 \in J - \{S(t_0)\}\}$, donde J denota el rango de variación de $X(t_0)$, mediante la expresión

$$g(S(t), t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{S(t_0) - \epsilon} g(S(t), t|x_0, t_0) f_{X(t_0)}(x_0) dx_0 + \int_{S(t_0) + \epsilon}^{+\infty} g(S(t), t|x_0, t_0) f_{X(t_0)}(x_0) dx_0 \right],$$

donde $f_{X(t_0)}$ es la densidad de $X(t_0)$. Por tanto, este caso puede reducirse al dado en (5.1).

Aunque en esta memoria nos ubicamos en el caso de procesos de difusión, algunos de los resultados que comentaremos han sido extendidos a clases de procesos más generales, como es el caso de los procesos de Markov o la clase de procesos gaussianos.

Centrándonos en procesos de difusión, sea $\{X(t) : t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión unidimensional con media y varianza infinitesimal $A_1(x, t)$ y $A_2(x, t)$, respectivamente, definido sobre el intervalo $I = (r_1, r_2)$, con $r_i, (i = 1, 2)$, barreras naturales. Supongamos, asimismo, que $P[X(t_0) = x_0] = 1$ y consideremos una función $S(t)$ continua, en principio, en $[t_0, T]$.

El estudio de la obtención de la densidad de tiempo de primer paso del proceso $X(t)$ a través de la barrera $S(t)$ ha seguido un largo camino y numerosos autores han participado en el desarrollo de esta teoría. Tras un largo proceso, en el que se fueron considerando procesos concretos y posteriores generalizaciones, Giorno et al., [19], establecieron que la densidad de tiempo de primer paso verifica una ecuación integral de Volterra de segunda especie. El estudio del caso no homogéneo pasó por diversas etapas. En primer lugar se consideró la clase de procesos no homogéneos cuya densidad de transición se puede obtener a partir de la de procesos homogéneos mediante una cierta factorización de la misma (Gutiérrez et al. [22, 30]) para posteriormente, tratar con la clase de procesos que se pueden obtener a partir del proceso Wiener (Gutiérrez et al. [31], Torres [70]), concluyéndose con la verificación de la anteriormente citada ecuación integral para la clase de procesos no homogéneos en general (Gutiérrez et al. [25]). En concreto, la ecuación integral es

$$g(S(t), t|x_0, t_0) = 2\rho \left\{ -\Psi(S(t), t|x_0, t_0) + \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau|x_0, t_0) \Psi(S(t), t|S(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (5.3)$$

donde $\rho = \text{Sgn}(S(t_0) - x_0)$ y el núcleo de la ecuación viene determinado por

$$\Psi(S(t), t|y, \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t|y, \tau) \left[S'(t) - A_1(S(t), t) + \frac{3}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right] + \frac{1}{2} A_2 \left(S(t), t \Big| \frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right)$$

siendo $f(x, t|y, s)$ la función de densidad de probabilidad de transición del proceso.

5.2. Tiempos de primer paso en el proceso de difusión Hubbert

A continuación vamos a aplicar los resultados resumidos en la sección anterior al proceso de difusión Hubbert.

En primer lugar calculamos el núcleo de la ecuación integral de Volterra de segunda especie cuya solución proporciona, para una barrera $S(t)$, la densidad de tiempo de primer paso del proceso por dicha barrera.

A partir de la expresión de la densidad de transición, dada por (3.5), se verifica

$$\frac{\partial f(x, t|y, \tau)}{\partial x} = -\frac{f(x, t|y, \tau)}{x} \left[1 + \frac{\ln \frac{x}{y} - \int_{\tau}^t r(s) ds + \frac{\sigma^2}{2}(t - \tau)}{\sigma^2(t - \tau)} \right],$$

de donde el núcleo de la ecuación integral (5.3) queda en la forma

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{f(S(t), t | y, \tau)}{2} \left[S'(t) - r(t)S(t) - S(t) \frac{\ln \frac{S(t)}{y} - \int_{\tau}^t r(s) ds}{t - \tau} \right].$$

La resolución de la ecuación integral no conduce necesariamente a una solución en

forma explícita para la densidad de tiempo de primer paso. En general no se puede asegurar tal hecho, aunque en algunas ocasiones sí se puede obtener. Tal es el caso cuando el núcleo de la ecuación se anula en el intervalo de integración entre t_0 y t , esto es, cuando $\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0, \forall t \in [t_0, \tau)$, en cuyo caso la solución es

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = | 2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) | .$$

Una condición para ello es que

$$S'(t) - r(t)S(t) - S(t) \frac{\ln \frac{S(t)}{S(\tau)} - \int_{\tau}^t r(s)ds}{t - \tau} = 0,$$

lo cual conduce a una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución proporciona la barrera $S(t)$ para la cual hay solución explícita para la ecuación integral. Resolviendo la ecuación diferencial, la barrera en cuestión es de la forma

$$S(t) = A \exp(Bt + R(t)), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

donde

$$R(t) = \int_t^{\infty} r(s)ds = \ln \frac{\alpha^t}{(\eta + \alpha^t)^2},$$

resultando entonces

$$S(t) = A \frac{\exp(B + \ln \alpha) t}{(\eta + \alpha^t)^2},$$

y con ello, para $x_0 \neq A \exp(Bt_0 + R(t_0))$, la densidad de tiempo de primer paso queda en la forma

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{|\ln(A/x_0) + Bt_0 + R(t_0)|}{(t - t_0)^{3/2} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{\left[\ln(A/x_0) + Bt + \frac{\sigma^2}{2}(t - t_0) + R(t_0) \right]^2}{2\sigma^2(t - t_0)} \right).$$

Sin embargo, en la mayor parte de las ocasiones, la ecuación (5.3) no tiene una solución en forma explícita. En tales casos hay que recurrir a esquemas numéricos. Uno de los más ampliamente utilizados se basa en la aproximación numérica de la integral que aparece en la expresión de la ecuación (5.3) mediante la regla del trapecio compuesta. Ello da origen a un método iterativo cuya expresión, para $S(t_0) > x_0$ (la expresión para $S(t_0) < x_0$ es inmediata) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 g(S(t_0 + h), t_0 + h | x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t_0 + h), t_0 + h | x_0, t_0) \\
 g(S(t_0 + kh), t_0 + kh | x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t_0 + kh), t_0 + kh | x_0, t_0) \\
 &\quad + 2h \sum_{j=1}^{k-1} g(S(t_0 + jh), t_0 + jh | x_0, t_0) \times \\
 &\quad \times \Psi(S(t_0 + kh), t_0 + kh | S(t_0 + jh), t_0 + jh) \\
 k &= 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

siendo h el paso de integración.

Román et al. [59] estudiaron los problemas asociados a la aproximación de la densidad del tiempo de primer paso mediante procedimientos numéricos de este tipo e introdujeron el empleo de la función F.P.T.L., la cual permite localizar el rango de variación de la variable en estudio.

El empleo de (5.4) requiere:

1. La elección de un paso de integración apropiado, h .
2. Aplicarlo desde el instante de tiempo inicial, t_0 .
3. Detener la ejecución en el tiempo T , o en un instante de tiempo previo si se verifica una determinada regla de parada, por ejemplo, cuando la integral de la solución obtenida se aproxime a uno o el incremento en la integral no sea significativo.

El principal problema en la aplicación de (5.4) es la elección de h . Puesto que el proce-

dimiento numérico proporciona una sucesión de funciones $g_h(S(t), t|x_0, t_0)$ que converge a $g(S(t), t|x_0, t_0)$ cuando h tiende a 0, se debe elegir un valor pequeño de h con el propósito de garantizar una buena aproximación de g . No obstante, dicho valor no puede elegirse de forma absoluta sino en relación al rango de valores para el que la densidad del tiempo de primer paso es significativamente distinta de 0. Una elección inapropiada de h puede acarrear diversos inconvenientes:

- Si h es excesivamente pequeño en relación al rango de variación de $T_{S(t),x_0}$, el coste computacional del método es innecesariamente elevado dado que un paso de integración mayor proporcionaría una aproximación similar con un número menor de evaluaciones del algoritmo.
- Si h es pequeño, pero grande en relación al rango de variación de $T_{S(t),x_0}$, el procedimiento puede dar lugar a aproximaciones no válidas debido a que el algoritmo es evaluado sobre pocos puntos significativos del rango de variación, proporcionando aproximaciones nada suaves que no integren uno. Es posible incluso, en el caso excepcional de un rango de variación de $T_{S(t),x_0}$ muy pequeño, que un valor de h , que, a priori, puede parecer adecuado, produzca una aproximación nula como consecuencia de que el algoritmo salta el rango de variación de $T_{S(t),x_0}$.
- Aparte de las consideraciones anteriores, si $T_{S(t),x_0}$ se localiza muy lejos del instante inicial t_0 , y no está muy dispersa, la aplicación del algoritmo numérico desde t_0 puede conllevar un coste computacional innecesariamente elevado. Esto también puede ocurrir si la densidad de la variable tiempo de primer paso presenta una cola a la derecha excesivamente grande y consideramos una regla de parada como la referida.

La función F.P.T.L. es una herramienta que permite solventar los anteriores inconvenientes. A partir de sus fundamentos, los autores realizaron en [60] un paquete en R para

implementarla. Dicho paquete ha sido posteriormente modificado, ver [62], permitiendo abordar problemas de índole más general a los originariamente planteados, [61].

5.3. El tiempo del pico como tiempo de primer paso

Como ya se ha comentado, la determinación del instante en el cual se alcanza el pico de producción es un problema de sumo interés; de hecho dio origen a la teoría del pico de Hubbert.

Puesto que el tiempo del pico se puede expresar mediante una función paramétrica de los parámetros del proceso de difusión introducido, una posibilidad de estimación de dicho instante de tiempo es a partir de la estimación de dichos parámetros. No obstante, el uso de procesos de difusión para la modelización de la producción de petróleo permite abordar la estimación del tiempo del pico desde una perspectiva estocástica; concretamente a partir de la obtención de la variable temporal que modeliza el instante en el que la producción alcanza su máximo.

Teniendo en cuenta la relación entre las curvas Hubbert y logística, y considerando el proceso de difusión $X^L(t)$, introducido por Román-Román y Torres-Ruiz en [63], y relacionado con la curva logística (2.2), la variable temporal que modeliza el instante en el que el proceso Hubbert alcanza su máximo coincide con aquella que modeliza el instante en el que ocurre la inflexión para $X^L(t)$. El problema de la determinación del instante de inflexión ha sido estudiado por Gutiérrez et al. en [29] en el contexto de un proceso de difusión tipo Gompertz, formulándolo como un problema de tiempo de primer paso. Siguiendo un razonamiento en la misma línea, se puede verificar que el instante de inflexión para el proceso logístico $X^L(t)$ puede ser formulado como un problema de tiempo de primer paso a través de la barrera constante que representa el valor del proceso en tal instante, esto es, $S = URR/2$. Así pues, la variable temporal que consideramos es

$$T_{S, x_0^L} = \begin{cases} \underset{t \geq t_0}{\text{Inf}} \{t : X(t) > URR/2 | X^L(t_0) = x_0^L\} & \text{si } x_0^L < S(t_0) \\ \underset{t \geq t_0}{\text{Inf}} \{t : X(t) < URR/2 | X^L(t_0) = x_0^L\} & \text{si } x_0^L > S(t_0). \end{cases}$$

donde x_0^L es el valor de la distribución inicial para X^L , el cual debe ser el de la producción acumulada hasta t_0 , o sea

$$x_0^L = \int_{-\infty}^{t_0} x(t) dt = -x_0 \frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\alpha^{t_0} \ln \alpha}.$$

Observemos que para el problema planteado no tenemos una solución explícita para la ecuación integral de Volterra (5.3). Por lo tanto se hace necesario el empleo del esquema numérico (5.4), para el cual usaremos el paquete *fptdApprox* desarrollado por Román-Román et al. (ver [62]).

Ajuste y predicción. Aplicaciones

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo puede ser utilizado el proceso introducido en esta memoria para la modelización de fenómenos reales que muestren una tendencia de tipo Hubbert. En concreto nos centraremos en la estimación de las principales características del proceso, resumidas en la tabla (3.3), las cuales serán de gran importancia para abordar problemas como el de la predicción de tendencias futuras a partir de la información disponible hasta un momento concreto. De igual forma abordaremos el problema de la estimación del tiempo del pico y del pico que, como ya se ha comentado en reiteradas ocasiones, son cuestiones de máxima importancia sobre todo en el ámbito de la modelización de la producción de petróleo.

6.1. Ajuste y predicción

Para abordar cualquiera de las dos vertientes comentadas (características y medidas asociadas al pico) el punto de partida es el mismo: la obtención de las estimaciones de los parámetros del proceso a partir de datos disponibles de trayectorias muestrales. En el caso de disponerse de una trayectoria se considerará que la distribución inicial del proceso es degenerada en el valor indicado por la primera observación disponible, mientras que cuando se disponga de múltiples trayectorias se asumirá que la distribución inicial es lognormal $\Lambda_1[\mu_1, \sigma_1^2]$, cuyos parámetros se estimarán a partir de la información disponible para cada trayectoria en el instante inicial t_1 .

Posteriormente se calcularán las estimaciones del resto de parámetros. Para ello hay dos opciones disponibles:

1. A partir del sistema de ecuaciones (4.5), obtener las estimaciones de α y η , mientras que la de σ^2 se deduce de la expresión (4.6). Como se ha comentado en el capítulo 3, para resolver el sistema es necesario emplear métodos numéricos. En nuestro caso se ha usado el de Newton-Raphson. Para ello es necesario disponer de soluciones iniciales, obtenidas mediante los procedimientos citados en el mencionado capítulo. El método usado para ello dependerá de los datos disponibles, a saber:

- Si el pico y el tiempo del pico son conocidos (o pueden ser aproximados) se empleará el procedimiento 1.
- En el caso de no disponer de información sobre el pico pero sí del punto de inflexión de la curva anterior al mismo, se usará el procedimiento 2.
- Si existe una estimación del valor de URR se empleará el procedimiento 3.

2. Obtener las estimaciones de los parámetros mediante el empleo de algoritmos heurísticos. En nuestro caso hemos considerado S.A. y V.N.S., para cuyo empleo es necesario una acotación previa del espacio paramétrico. Tanto la descripción de los métodos como de la acotación del espacio paramétrico se han realizado en el capítulo 3.

Una vez obtenidas las estimaciones de los parámetros, y mediante el empleo del teorema de Zehna, se obtienen las correspondientes a las funciones paramétricas del tipo (3.6). Notemos que tanto la función media como la media condicionada son curvas Hubbert, lo cual las hacen especialmente válidas tanto como para ajustar el modelo a los datos muestrales como para disponer también de la posibilidad de realizar predicciones a partir del modelo ajustado. Otras funciones de interés serán la moda, mediana así como las de percentiles. Hay que notar que si se desea realizar predicciones en futuros instantes de

tiempo es más razonable usar las versiones condicionadas de estas funciones (condicionando al valor en el último instante de observación) puesto que estas funciones emplean información más actualizada.

En lo que se refiere a la estimación del tiempo del pico proponemos dos enfoques:

1. El primero está basado en el hecho de que tanto la función media como su versión condicionada alcanza su máximo en el mismo instante, el cual determinará el tiempo del pico. En concreto,

$$t_{\max} = \frac{\ln \eta}{\ln \alpha}.$$

En consecuencia se trata de una función paramétrica que puede ser estimada a partir de las correspondientes estimaciones máximo verosímiles de η y α , resultando

$$\hat{t}_{\max} = \frac{\ln \hat{\eta}}{\ln \hat{\alpha}}.$$

2. Utilizar la distribución de la variable aleatoria tiempo del pico obtenida como se describe en el capítulo 4. A partir de dicha distribución se puede obtener una estimación puntual, t_{\max}^* , mediante medidas apropiadas de tendencia central de dicha variable (media y/o mediana principalmente). Por otra parte, el conocimiento de esa distribución puede proporcionar información adicional sobre el comportamiento de la variable aleatoria tiempo del pico.

Finalmente, para el valor del pico también proponemos dos alternativas:

1. Calcular la estimación máximo verosímil del pico a partir del máximo de la función media (3.7), o sea

$$\exp\left(\hat{\mu}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1}{2}\right) \frac{(\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{\hat{t}_1})^2}{4\hat{\eta}\hat{\alpha}^{\hat{t}_1}}, \quad (6.1)$$

o de la función media condicionada (3.8)

$$x_s \frac{(\hat{\eta} + \hat{\alpha}^s)^2}{4\hat{\eta}\hat{\alpha}^s}, \quad (6.2)$$

siendo x_s el valor del proceso en el instante s .

2. Calcular una estimación puntual para el pico como el valor de la media estimada, o como el valor de la función media condicional estimada, evaluada en la estimación puntual del tiempo de pico obtenida a partir de la distribución de la variable aleatoria tiempo de pico, es decir:

$$\left(\hat{\mu}_1 + \frac{\hat{\sigma}_1^2}{2} \right) \left(\frac{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{t_1}}{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{t_{\max}^*}} \right)^2 \hat{\alpha}^{(t_{\max}^* - s)}$$

o

$$x_s \left(\frac{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^s}{\hat{\eta} + \hat{\alpha}^{t_{\max}^*}} \right)^2 \hat{\alpha}^{(t_{\max}^* - s)}.$$

6.2. Estudios de simulación

En esta sección se presentan diversos estudios de simulación con el objetivo de validar los métodos de inferencia comentados en los capítulos anteriores. Centraremos el interés tanto en lo que se refiere a la estimación de los parámetros del proceso como a la predicción del tiempo del pico y pico.

Se han realizado dos simulaciones de trayectorias diferentes, dependiendo del tipo de método de estimación de los parámetros considerado; esto es, una simulación para el caso de estimación resolviendo el sistema de ecuaciones de verosimilitud y otra cuando se han usado los algoritmos S.A. y V.N.S.

En cada una de las simulaciones se han generado 50 trayectorias muestrales. El método usado para ello ha sido mediante la relación existente entre el proceso Hubbert y el proceso de Wiener, esto es:

$$X(t) = X_{t_0} \left(\frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\eta + \alpha^t} \right)^2 \alpha^{t-t_0} \exp \left(\sigma W(t-t_0) - \frac{\sigma^2}{2} (t-t_0) \right).$$

Cada trayectoria consta de 501 valores, los cuales han sido simulados en los instantes de tiempo $t_i = (i - 1) \cdot 0,1$, $i = 1, \dots, 501$, considerando una distribución degenerada en el valor $x_0 = 100$. Tras la obtención de cada trayectoria, se ha seleccionado una muestra de ella comenzando por el primer valor, tomado instantes de tiempo igualmente espaciados usando un paso igual a uno. De esta forma se obtuvo una muestra de 51 datos para cada trayectoria. Además, todo el procedimiento se replicó 50 veces.

En la primera simulación se han considerado los siguientes valores para los parámetros del proceso: $\eta = (0,03, 0,04, 0,05)$, $\alpha = (0,85, 0,875, 0,9, 0,925)$ y $\sigma = (0,01, 0,05, 0,07)$. Para la segunda simulación se amplió el rango de valores considerado para α y η ; concretamente, $\eta = (0,01, 0,025, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25)$ (recordemos que $\eta < 2 - \sqrt{3}$) y $\alpha = 0,05 + (i - 1) \cdot 0,1$, $i = 1, \dots, 10$, mientras que para σ se han considerado los valores 0,05 y 0,07. Dentro de la arbitrariedad de estas selecciones, se han considerado valores que no difieran de los estimados en situaciones reales, como las que se muestran posteriormente.

A continuación se muestran los resultados, distinguiendo entre los obtenidos para la estimación de los parámetros y las estimaciones del tiempo del pico y pico.

6.2.1. Estimación de los parámetros

Resolución del sistema de ecuaciones de verosimilitud

Como ya se ha comentado, la resolución del sistema de ecuaciones (4.5) precisa de la obtención de soluciones iniciales. En el capítulo 3 se proponen algunos procedimientos para ello, los cuales dependen de la información que se tenga, o se pueda obtener, sobre el pico, tiempo del pico, inflexión de la curva y URR.

Hemos considerado dos escenarios:

- **Escenario 1:** Se visualiza el pico. En este caso se ha considerado cada trayectoria simulada en su totalidad

- **Escenario 2:** El pico no se visualiza. En este caso cada trayectoria será truncada en un instante de tiempo, T_F , anterior al instante del pico pero posterior al primer punto de inflexión. Específicamente, el instante de truncamiento considerado en este estudio es el que representa el tercer cuartil de los instantes entre el punto de inflexión y el tiempo de pico. La tabla 6.1 muestra el número de datos utilizados para cada combinación de los parámetros en este escenario.

η	α			
	0.85	0.875	0.9	0.925
0.03	19	23	30	40
0.04	17	21	27	37
0.05	16	19	25	34

Tabla 6.1: Primera simulación: número de datos utilizados en el segundo escenario.

Con el fin de obtener la solución inicial para el sistema de ecuaciones (4.5), se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones:

- Para el procedimiento 1, considerando que los datos incluyen el pico de la curva, se ha ajustado un spline cúbico natural, v , a la media de las trayectorias de la muestra. De esta forma se considera t_{\max} como el instante de tiempo en el que v alcanza su máximo y, con ello, $x(t_{\max}) = v(t_{\max})$.
- Para el procedimiento 2, y tras ajustar un spline cúbico natural (v) a la media de las trayectorias de la muestra, se considera t_{\inf} como el instante de tiempo en el que su primera derivada presenta un máximo local. Por consiguiente, $x(t_{\inf}) = v(t_{\inf})$.
- Para el procedimiento 3, es decir, teniendo en cuenta que hay información disponible para URR, debemos señalar que, en la práctica, las estimaciones de reservas probadas publicadas en diferentes dominios públicos sufren cambios de forma constante. Laherrère [44] comenta que menos del 7% de estos cambios se deben a adiciones de

nuevos descubrimientos. De hecho, más del 93 % de las adiciones de reservas provienen de la reevaluación de anteriores estimaciones. Por esta razón, en este estudio se ha decidido analizar el efecto ejercido sobre la estimación de los parámetros cuando el valor proporcionado de URR es considerado óptimo, así como cuando esta cantidad sobreestima y subestima la cantidad real en un 10 %.

Bajo el escenario 1 se ha considerado el procedimiento 1 de obtención de la solución inicial, mientras que para el escenario 2 se han usado los procedimientos 2 y 3. En las aplicaciones prácticas el segundo escenario es más interesante, sobre todo con el objetivo de obtener predicciones del pico de producción, pero en cualquier caso hemos incluido el primero con el fin de mostrar las capacidades inferenciales del método propuesto. La figura 6.1 muestra el esquema general seguido en esta aplicación.

Las soluciones iniciales de los procedimientos numéricos para los casos previamente considerados se muestran en la tabla 6.2. Se puede observar cómo las soluciones iniciales ya proporcionan buenas estimaciones para los parámetros teóricos, con una tendencia general a empeorar ligeramente a medida que σ crece. Es de particular interés ver cómo el procedimiento 2 proporciona valores similares a los del procedimiento 1, a pesar de que utiliza un número significativamente menor de datos. Con respecto al procedimiento 3, y como se esperaba, cuando la producción se sobrestima o subestima, los valores difieren ligeramente de los deducidos en el caso de que exista un valor URR exacto disponible.

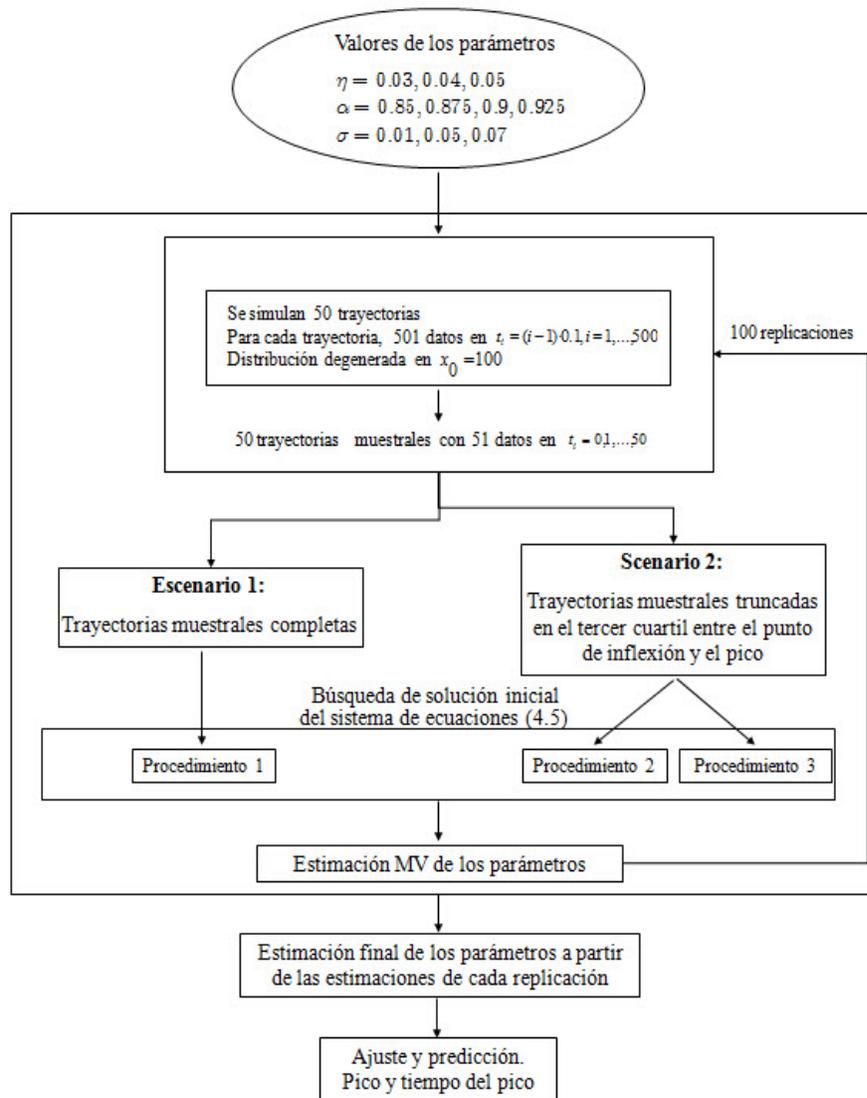


Figura 6.1: Esquema de la primera simulación.

			<i>Scenario1</i>		<i>Scenario2</i>							
			<i>Proc,1</i>		<i>Proc,2</i>		<i>Proc,3</i>					
							<i>Standard</i>		<i>-10%URR</i>		<i>+10%URR</i>	
η	α	σ	η_0	α_0	η_0	α_0	η_0	α_0	η_0	α_0	η_0	α_0
0,03	0,85	0,01	0,03001	0,85018	0,02974	0,85052	0,03001	0,85001	0,03245	0,84560	0,02785	0,85343
		0,05	0,03005	0,85049	0,02955	0,85148	0,03005	0,85019	0,03251	0,84578	0,02790	0,85360
		0,07	0,03007	0,85033	0,02949	0,85211	0,03010	0,85031	0,03256	0,84590	0,02793	0,85372
	0,875	0,01	0,03001	0,87513	0,02990	0,87538	0,03001	0,87502	0,03247	0,87133	0,02784	0,87788
		0,05	0,03002	0,87467	0,02926	0,87707	0,03007	0,87522	0,03255	0,87154	0,02791	0,87807
		0,07	0,02999	0,87443	0,02882	0,87776	0,03013	0,87534	0,03260	0,87166	0,02795	0,87820
	0,9	0,01	0,03002	0,90022	0,02992	0,90037	0,03001	0,90003	0,03241	0,89685	0,02789	0,90248
		0,05	0,03004	0,89992	0,02883	0,90220	0,03010	0,90022	0,03250	0,89705	0,02797	0,90267
		0,07	0,03001	0,89939	0,02786	0,90372	0,03016	0,90033	0,03257	0,89715	0,02802	0,90278
	0,925	0,01	0,03001	0,92501	0,02975	0,92548	0,03001	0,92504	0,03245	0,92268	0,02787	0,92685
		0,05	0,02994	0,92444	0,02806	0,92760	0,03012	0,92521	0,03257	0,92286	0,02797	0,92702
		0,07	0,02986	0,92439	0,02726	0,92860	0,03020	0,92530	0,03265	0,92295	0,02804	0,92711
0,04	0,85	0,01	0,04002	0,84981	0,04016	0,85010	0,03999	0,85001	0,04323	0,84525	0,03716	0,85371
		0,05	0,04010	0,84988	0,03881	0,85259	0,04007	0,85016	0,04330	0,84540	0,03722	0,85386
		0,07	0,04013	0,84951	0,03879	0,85302	0,04012	0,85026	0,04336	0,84550	0,03727	0,85396
	0,875	0,01	0,04002	0,87514	0,04032	0,87490	0,04001	0,87503	0,04319	0,87089	0,03719	0,87823
		0,05	0,04002	0,87494	0,03980	0,87639	0,04011	0,87522	0,04330	0,87109	0,03728	0,87842
		0,07	0,03999	0,87482	0,03879	0,87773	0,04018	0,87535	0,04338	0,87123	0,03735	0,87855
	0,9	0,01	0,04003	0,90004	0,04022	0,90010	0,04001	0,90003	0,04315	0,89658	0,03722	0,90269
		0,05	0,04003	0,89975	0,03816	0,90274	0,04013	0,90021	0,04328	0,89677	0,03733	0,90287
		0,07	0,03999	0,90009	0,03735	0,90379	0,04021	0,90032	0,04338	0,89688	0,03741	0,90298
	0,925	0,01	0,04002	0,92487	0,04003	0,92517	0,04002	0,92504	0,04312	0,92235	0,03726	0,92711
		0,05	0,03990	0,92501	0,03682	0,92818	0,04019	0,92523	0,04330	0,92255	0,03741	0,92730
		0,07	0,03974	0,92459	0,03599	0,92905	0,04030	0,92534	0,04343	0,92265	0,03752	0,92704
0,05	0,85	0,01	0,05002	0,85001	0,05055	0,84972	0,04999	0,85002	0,05387	0,84465	0,04656	0,85418
		0,05	0,05009	0,84960	0,04881	0,85277	0,05009	0,85016	0,05397	0,84480	0,04664	0,85433
		0,07	0,05012	0,84890	0,04846	0,85333	0,05017	0,85026	0,05405	0,84490	0,04671	0,85442
	0,875	0,01	0,05002	0,87493	0,04954	0,87568	0,05001	0,87502	0,05396	0,87065	0,04651	0,87842
		0,05	0,05003	0,87497	0,04852	0,87736	0,05013	0,87520	0,05409	0,87083	0,04662	0,87859
		0,07	0,05002	0,87485	0,04765	0,87852	0,05022	0,87532	0,05420	0,87096	0,04671	0,87871
	0,9	0,01	0,05003	0,89986	0,05043	0,90001	0,05002	0,90003	0,05384	0,89627	0,04661	0,90295
		0,05	0,05002	0,89946	0,04686	0,90348	0,05018	0,90023	0,05401	0,89647	0,04675	0,90313
		0,07	0,04997	0,89963	0,04672	0,90399	0,05029	0,90034	0,05414	0,89658	0,04686	0,90325
	0,925	0,01	0,05001	0,92505	0,04918	0,92569	0,05003	0,92504	0,05383	0,92214	0,04663	0,92727
		0,05	0,04985	0,92469	0,04574	0,92864	0,05025	0,92524	0,05407	0,92235	0,04683	0,92747
		0,07	0,04967	0,92485	0,04447	0,92966	0,05040	0,92535	0,05423	0,92246	0,04697	0,92757

Tabla 6.2: Soluciones iniciales para diversos procedimientos y combinaciones de valores de η , α y σ .

La tabla 6.3 contiene las estimaciones de los parámetros tras resolver el sistema de ecuaciones (4.5) a partir de las soluciones iniciales de la tabla 6.2, así como el error absoluto relativo total (suma de los errores absolutos relativos entre cada estimación y el parámetro correspondiente). Se observa que las estimaciones de los procedimientos 2 y 3 convergen al mismo valor, aunque procedan de valores iniciales diferentes. Además, las obtenidas utilizando todos los datos tienden a ser más precisas que las calculadas en el segundo escenario, independientemente de los valores de η y α (esto se hace aún más evidente según σ crece). La principal diferencia en la estimación realizada en los dos escenarios se percibe al observar la estimación de σ , que es más precisa para la primera, como se esperaba dado que el primer escenario emplea todos los datos disponibles. En consecuencia, el error para el segundo escenario es siempre mayor. Además, el error aumenta a medida que σ crece.

Uso de S.A. y V.N.S.

Para el empleo de los algoritmos S.A. y V.N.S. se han tenido en cuenta todas las consideraciones que sobre ambos métodos se han realizado en el capítulo 3, tanto en lo que se refiere a la acotación del espacio paramétrico como a la selección de los parámetros y estructura de entornos necesarios para su empleo. Para V.N.S., se ha tomado como método de búsqueda local S.A., lo cual da origen a un algoritmo híbrido V.N.S.-S.A.

La tabla 6.4 muestra, para cada combinación de los parámetros, los errores relativos absolutos ($\times 10^{-3}$) entre el valor real del logaritmo de la verosimilitud y el obtenido tras aplicar los algoritmos. En este caso se ha optado por incluir este error ya que los procedimientos trabajan directamente con la función de verosimilitud y, en consecuencia, debe ser la referencia válida para comparar los resultados obtenidos.

Se observa que ambos procedimientos proporcionan buenas estimaciones en términos de los errores relativos mencionados. Sin embargo, el uso del método híbrido V.N.S.-S.A. mejora la estimación ya que se observa una notable disminución en el error relativo. Las tablas 6.5 y 6.6 contienen las estimaciones de los parámetros al utilizar este algoritmo.

η	α	σ	<i>Escenario 1</i>				<i>Escenario 2</i>			
			Proc. 1				Proc. 2,3			
			$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	<i>Error</i>	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	<i>Error</i>
0,03	0,85	0,01	0,03002	0,85001	0,00999	0,00177	0,03002	0,84999	0,00995	0,00521
		0,05	0,03014	0,85005	0,04995	0,00588	0,03011	0,84998	0,04978	0,00821
		0,07	0,03021	0,85007	0,06993	0,00823	0,03015	0,84998	0,06969	0,00954
	0,875	0,01	0,03003	0,87502	0,00999	0,00205	0,03002	0,87501	0,00999	0,00119
		0,05	0,03019	0,87509	0,04995	0,00740	0,03013	0,87505	0,04998	0,00467
		0,07	0,03028	0,87513	0,06993	0,01048	0,03017	0,87508	0,06998	0,00624
	0,9	0,01	0,03003	0,90002	0,00999	0,00225	0,03004	0,89999	0,01001	0,00169
		0,05	0,03022	0,90014	0,04995	0,00873	0,03022	0,89997	0,04999	0,00768
		0,07	0,03034	0,90019	0,06993	0,01262	0,03030	0,89997	0,06999	0,01048
	0,925	0,01	0,03003	0,92503	0,00999	0,00203	0,03002	0,92503	0,00998	0,00250
		0,05	0,03020	0,92519	0,04995	0,00785	0,03011	0,92519	0,04991	0,00561
		0,07	0,03030	0,92527	0,06993	0,01151	0,03015	0,92527	0,06988	0,00699
0,04	0,85	0,01	0,04003	0,84999	0,00999	0,00168	0,04002	0,84999	0,00995	0,00508
		0,05	0,04018	0,85004	0,04995	0,00544	0,04010	0,84998	0,04977	0,00705
		0,07	0,04026	0,85006	0,06993	0,00760	0,04012	0,84999	0,06969	0,00765
	0,875	0,01	0,04004	0,87501	0,00999	0,00197	0,04005	0,87498	0,00998	0,00292
		0,05	0,04023	0,87508	0,04995	0,00695	0,04023	0,87493	0,04991	0,00755
		0,07	0,04035	0,87511	0,06993	0,00982	0,04031	0,87492	0,06988	0,00958
	0,9	0,01	0,04005	0,90002	0,00999	0,00222	0,04002	0,90002	0,01001	0,00201
		0,05	0,04029	0,90013	0,04995	0,00848	0,04009	0,90015	0,05006	0,00393
		0,07	0,04044	0,90017	0,06993	0,01219	0,04011	0,90023	0,07009	0,00450
	0,925	0,01	0,04004	0,92503	0,00999	0,00217	0,04004	0,92502	0,00998	0,00282
		0,05	0,04029	0,92518	0,04995	0,00858	0,04019	0,92515	0,04991	0,00672
		0,07	0,04045	0,92526	0,06993	0,01259	0,04025	0,92522	0,06988	0,00820
0,05	0,85	0,01	0,05003	0,85001	0,00999	0,00161	0,05001	0,85001	0,00996	0,00376
		0,05	0,05021	0,85003	0,04995	0,00512	0,05004	0,85009	0,04982	0,00443
		0,07	0,05031	0,85004	0,06993	0,00714	0,05004	0,85015	0,06975	0,00450
	0,875	0,01	0,05005	0,87501	0,00999	0,00190	0,05004	0,87499	0,00995	0,00529
		0,05	0,05028	0,87507	0,04995	0,00660	0,05018	0,87498	0,04978	0,00803
		0,07	0,05041	0,87509	0,06993	0,00930	0,05022	0,87499	0,06969	0,00886
	0,9	0,01	0,05006	0,90002	0,00999	0,00218	0,05003	0,90002	0,00999	0,00170
		0,05	0,05035	0,90012	0,04995	0,00822	0,05013	0,90014	0,05004	0,00375
		0,07	0,05053	0,90016	0,06993	0,01179	0,05015	0,90021	0,07006	0,00429
	0,925	0,01	0,05006	0,92503	0,00999	0,00223	0,05005	0,92502	0,00999	0,00179
		0,05	0,05039	0,92517	0,04995	0,00893	0,05017	0,92516	0,04996	0,00445
		0,07	0,05059	0,92524	0,06993	0,01308	0,05018	0,92524	0,06994	0,00473

Tabla 6.3: Estimaciones de los parámetros y total de los errores relativos para diversos procedimientos y combinaciones de valores de η , α y σ .

$\sigma = 0,05$																	
		$\eta = 0,01$		$\eta = 0,025$		$\eta = 0,05$		$\eta = 0,075$		$\eta = 0,1$		$\eta = 0,15$		$\eta = 0,20$		$\eta = 0,25$	
α	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	
0,05	2,150	0,470	1,440	0,110	0,750	0,001	0,310	0,001	0,110	0,010	0,010	0,001	0,040	0,001	0,040	0,001	
0,15	2,750	0,050	1,620	0,070	1,090	0,058	0,050	0,010	0,328	0,012	0,292	0,018	0,245	0,011	0,123	0,049	
0,25	2,450	0,040	0,840	0,010	0,915	0,013	0,440	0,020	0,574	0,017	0,005	0,005	0,211	0,001	0,066	0,065	
0,35	1,500	0,010	1,020	0,040	0,822	0,027	0,310	0,001	0,277	0,012	0,139	0,009	0,170	0,005	0,127	0,043	
0,45	6,640	0,270	1,990	0,001	0,313	0,007	0,280	0,001	0,321	0,004	0,346	0,005	0,007	0,064	0,077	0,067	
0,55	9,290	0,100	1,970	0,030	0,228	0,037	0,560	0,001	0,420	0,057	0,067	0,002	0,259	0,019	0,099	0,100	
0,65	7,489	2,060	7,620	0,530	1,348	0,039	0,120	0,040	1,028	0,117	0,502	0,095	0,153	0,085	0,074	0,068	
0,75	2,470	0,170	5,240	0,050	0,404	0,064	2,270	0,040	3,651	0,034	2,144	0,738	0,027	0,029	0,518	0,426	
0,85	6,330	0,700	3,530	0,350	1,022	0,078	0,090	0,010	0,536	0,053	0,938	0,135	0,392	0,295	0,904	0,342	
0,95	0,590	0,150	0,300	0,010	0,458	0,146	0,030	0,020	0,343	0,105	0,259	0,236	0,018	0,017	0,028	0,013	
$\sigma = 0,07$																	
		$\eta = 0,01$		$\eta = 0,025$		$\eta = 0,05$		$\eta = 0,075$		$\eta = 0,1$		$\eta = 0,15$		$\eta = 0,20$		$\eta = 0,25$	
α	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	<i>SA</i>	<i>VNS</i>	
0,05	0,180	0,010	0,250	0,010	0,310	0,001	0,120	0,001	0,090	0,001	0,009	0,001	0,009	0,001	0,020	0,001	
0,15	1,000	0,010	0,052	0,030	0,267	0,009	0,110	0,001	0,009	0,006	0,069	0,013	0,012	0,004	0,096	0,005	
0,25	0,440	0,010	0,240	0,001	0,033	0,018	0,070	0,001	0,011	0,016	0,043	0,005	0,034	0,006	0,082	0,010	
0,35	0,260	0,010	0,640	0,010	0,139	0,026	0,260	0,001	0,132	0,010	0,003	0,017	0,022	0,022	0,016	0,009	
0,45	2,300	0,010	0,310	0,001	0,322	0,005	0,070	0,010	0,336	0,031	0,338	0,028	0,031	0,007	0,041	0,051	
0,55	6,600	0,030	0,970	0,040	0,598	0,022	0,040	0,030	0,046	0,040	0,039	0,022	0,013	0,044	0,007	0,002	
0,65	3,350	0,010	0,590	0,160	0,517	0,125	0,090	0,070	0,091	0,084	0,162	0,133	0,063	0,022	0,376	0,108	
0,75	0,500	0,010	0,750	0,080	0,181	0,136	0,330	0,015	1,325	1,256	1,609	0,069	0,866	0,317	1,584	0,658	
0,85	2,000	0,440	1,390	0,600	0,211	0,060	0,050	0,020	0,019	0,016	0,429	0,151	0,186	0,184	0,715	0,570	
0,95	0,330	0,080	0,090	0,030	0,154	0,064	0,051	0,021	0,074	0,039	0,512	0,183	0,483	0,356	0,654	0,595	

Tabla 6.4: Errores absolutos relativos ($\times 10^{-3}$) entre el verdadero y estimado valor del logaritmo de la verosimilitud tras aplicar S.A. y V.N.S.-S.A.

$\sigma = 0,05$												
$\eta = 0,01$			$\eta = 0,025$			$\eta = 0,05$			$\eta = 0,075$			
α	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$									
0,05	0,0101	0,0501	0,0599	0,0248	0,0500	0,0547	0,0500	0,0501	0,0511	0,0746	0,0501	0,0509
0,15	0,0100	0,1503	0,0526	0,0249	0,1502	0,0531	0,0504	0,1501	0,0510	0,0747	0,1501	0,0502
0,25	0,0099	0,2501	0,0516	0,0250	0,2505	0,0513	0,0500	0,2499	0,0506	0,0745	0,2499	0,0505
0,35	0,0101	0,3501	0,0509	0,0247	0,3500	0,0514	0,0505	0,3498	0,0512	0,0751	0,3501	0,0498
0,45	0,0098	0,4503	0,0524	0,0249	0,4502	0,0507	0,0500	0,4500	0,0508	0,0745	0,4502	0,0497
0,55	0,0099	0,5498	0,0509	0,0249	0,5499	0,0506	0,0500	0,5499	0,0506	0,0748	0,5502	0,0501
0,65	0,0101	0,6501	0,0503	0,0249	0,6497	0,0510	0,0502	0,6501	0,0503	0,0744	0,6499	0,0496
0,75	0,0101	0,7501	0,0508	0,0248	0,7500	0,0508	0,0502	0,7500	0,0501	0,0742	0,7498	0,0498
0,85	0,0092	0,8467	0,0506	0,0238	0,8480	0,0507	0,0511	0,8499	0,0502	0,0739	0,8497	0,0496
0,95	0,0142	0,9476	0,0503	0,0253	0,9496	0,0505	0,0521	0,9498	0,0503	0,0729	0,9491	0,0498
$\eta = 0,1$			$\eta = 0,15$			$\eta = 0,20$			$\eta = 0,25$			
α	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$									
0,05	0,1001	0,0409	0,0505	0,1499	0,0499	0,0505	0,0201	0,0502	0,0504	0,2482	0,0499	0,0505
0,15	0,1004	0,1499	0,0506	0,1506	0,1500	0,0506	0,2005	0,1500	0,0502	0,2476	0,1498	0,0510
0,25	0,1004	0,2499	0,0508	0,1505	0,2499	0,0505	0,2005	0,2498	0,0505	0,2470	0,2498	0,0503
0,35	0,1003	0,3498	0,0507	0,1509	0,3498	0,0504	0,2005	0,3498	0,0505	0,2491	0,3498	0,0506
0,45	0,1004	0,4499	0,0508	0,1505	0,4499	0,0502	0,1992	0,4497	0,0503	0,2496	0,4495	0,0502
0,55	0,0995	0,5498	0,0503	0,1511	0,5499	0,0504	0,2009	0,5500	0,0503	0,2476	0,5497	0,0507
0,65	0,1004	0,6498	0,0503	0,1505	0,6497	0,0502	0,2003	0,6497	0,0503	0,2474	0,6499	0,0504
0,75	0,1011	0,7501	0,0505	0,1497	0,7496	0,0504	0,1988	0,7497	0,0505	0,2470	0,7496	0,0504
0,85	0,1012	0,8500	0,0505	0,1511	0,8498	0,0503	0,1991	0,8495	0,0504	0,2440	0,8493	0,0502
0,95	0,1027	0,9500	0,0502	0,1501	0,9488	0,0503	0,1939	0,9476	0,0503	0,2285	0,9469	0,0504

Tabla 6.5: Estimaciones de los parámetros tras aplicar V.N.S.-S.A.

$\sigma = 0,07$												
	$\eta = 0,01$			$\eta = 0,025$			$\eta = 0,05$			$\eta = 0,075$		
α	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$
0,05	0,0101	0,0502	0,0711	0,0253	0,0499	0,0696	0,0501	0,0498	0,0711	0,0754	0,0501	0,0701
0,15	0,0101	0,1499	0,0716	0,0253	0,1499	0,0696	0,0499	0,1500	0,0699	0,0751	0,1501	0,0695
0,25	0,0101	0,2502	0,0698	0,0251	0,2498	0,0691	0,0497	0,2497	0,0701	0,0751	0,2501	0,0696
0,35	0,0099	0,3501	0,0696	0,0251	0,3501	0,0695	0,0503	0,3500	0,0693	0,0751	0,3502	0,0701
0,45	0,0101	0,4502	0,0699	0,0252	0,4502	0,0699	0,0499	0,4501	0,0703	0,0749	0,4501	0,0698
0,55	0,0101	0,5506	0,0703	0,0252	0,5501	0,0704	0,0498	0,5498	0,0702	0,0745	0,5499	0,0697
0,65	0,0103	0,6507	0,0691	0,0251	0,6502	0,0696	0,0502	0,6503	0,0698	0,0738	0,6502	0,0698
0,75	0,0103	0,7505	0,0699	0,0254	0,7506	0,0693	0,0506	0,7505	0,0702	0,0753	0,7505	0,0698
0,85	0,0093	0,8474	0,0702	0,0233	0,8471	0,0701	0,0496	0,8499	0,0699	0,0749	0,8498	0,0701
0,95	0,0135	0,9493	0,0698	0,0239	0,9505	0,0695	0,0480	0,9500	0,0697	0,0739	0,9494	0,0697
	$\eta = 0,1$			$\eta = 0,15$			$\eta = 0,20$			$\eta = 0,25$		
α	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$
0,05	0,1003	0,0502	0,0704	0,1507	0,0499	0,0694	0,2009	0,0501	0,0697	0,2501	0,0499	0,0701
0,15	0,0998	0,1500	0,0699	0,1500	0,1500	0,0692	0,1988	0,1500	0,0701	0,2468	0,1499	0,0695
0,25	0,1000	0,2501	0,0699	0,1504	0,2500	0,0698	0,2001	0,2498	0,0700	0,2479	0,2501	0,0699
0,35	0,1001	0,3501	0,0699	0,1499	0,3501	0,0697	0,2004	0,3502	0,0698	0,2466	0,3501	0,0702
0,45	0,1005	0,4503	0,0702	0,1509	0,4502	0,0698	0,2006	0,4500	0,0699	0,2449	0,4503	0,0701
0,55	0,0999	0,5502	0,0701	0,1509	0,5502	0,0703	0,1993	0,5503	0,0700	0,2479	0,5499	0,0700
0,65	0,0999	0,6501	0,0699	0,1510	0,6505	0,0697	0,2001	0,6501	0,0700	0,2474	0,6502	0,0698
0,75	0,1007	0,7505	0,0700	0,1512	0,7503	0,0699	0,2002	0,7503	0,0699	0,2458	0,7501	0,0700
0,85	0,1001	0,8503	0,0697	0,1505	0,8506	0,0699	0,1999	0,8504	0,0698	0,2437	0,8500	0,0699
0,95	0,0980	0,9499	0,0700	0,1490	0,9489	0,0701	0,1950	0,9473	0,0701	0,2488	0,9470	0,0701

Tabla 6.6: Estimaciones de los parámetros tras aplicar V.N.S.-S.A. (continuación).

6.2.2. Predicción del instante del pico y del pico

Tras el estudio de simulación anterior, dedicado a la estimación de los parámetros del proceso, en este apartado analizamos la capacidad del modelo en lo que se refiere a la estimación del tiempo del pico y del pico. Para ello se ha considerado el primer esquema de simulación, esto es, el realizado para el caso de la resolución de las ecuaciones de verosimilitud, considerando los dos escenarios allí tratados.

En cuanto a las estimaciones puntuales del tiempo de pico y pico, los resultados se presentan en la tabla 6.7. En ambos escenarios se muestra el pico estimado mediante la expresión (6.1). Para el escenario 2, el uso de (6.2) no proporcionó mejoras sustanciales por lo que no se ha incluido en la tabla. Se puede observar cómo los valores estimados son muy cercanos a los reales, contemplándose un comportamiento similar al discutido en la tabla 6.3.

Consideremos ahora la estimación del tiempo del pico a partir de la consideración del mismo como un problema de tiempo de primer paso, tal como se introdujo en el capítulo 5. Los resultados que se muestran a continuación son los correspondientes al caso $\eta = 0,04$, mientras que el resto de valores para los otros parámetros se han mantenido (resultados similares han sido obtenidos para el resto de valores de η).

A partir de las estimaciones de los parámetros incluidas en la tabla 6.3, se ha obtenido la aproximación numérica de las funciones de densidad de tiempo de primer paso para el proceso de difusión logístico, asociado al proceso Hubbert, a través de la barrera S definida en la sección 5.3. Dado que la distribución inicial es degenerada ($x_0 = 100$), la variable tiempo de primer paso está condicionada al valor

$$x_0^L = -x_0 \frac{\eta + \alpha^{t_0}}{\alpha^{t_0} \ln \alpha},$$

el cual representa la estimación de la producción acumulada hasta t_0 .

Para obtener la aproximación numérica de las funciones de densidad de tiempo de

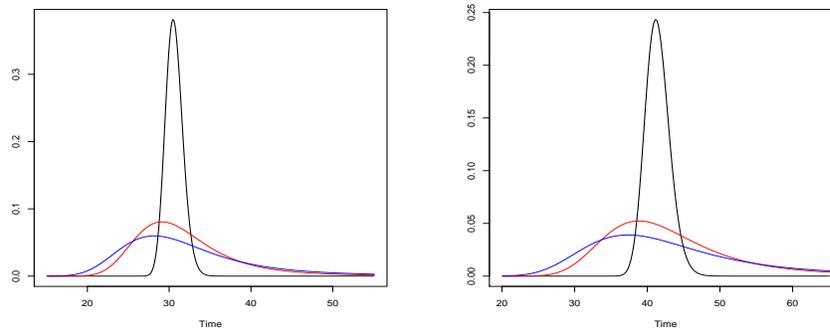


Figura 6.2: Densidades de tiempo de primer paso para $\eta = 0,04$, $\alpha = 0,9$ y $\sigma = 0,01$ (negro), $0,05$ (rojo), $0,07$ (azul). Escenario 1(izquierda), escenario 2(derecha).

primer paso se ha aplicado el paquete de R *fptdApprox* (ver [62]) desarrollado en [60] y [61].

La tabla 6.8 muestra las medias, modas y deciles de las distribuciones obtenidas. Se puede observar cómo, para valores pequeños de σ , la media y la moda de las distribuciones proporcionan una buena estimación del tiempo de pico. Sin embargo, a medida que σ aumenta, tales medidas de tendencia central proporcionan peores estimaciones ya que la distribución de la variable se vuelve asimétrica, presentando una larga cola a la derecha (la figura 6.2 muestra un ejemplo que ilustra este comentario). En esta situación, la mediana es una mejor opción como estimación puntual del tiempo de pico. Además, los deciles de la distribución ayudan a comprender mejor el comportamiento de la variable que modeliza el tiempo en el que ocurre el pico.

η	α	σ	t_{\max}	$x(t_{\max})$	<i>Escenario 1</i>		<i>Escenario 2</i>	
					Proc. 1		Proc. 2,3	
					$\widehat{t_{\max}}$	$\widehat{x(t_{\max})}$	$\widehat{t_{\max}}$	$\widehat{x(t_{\max})}$
0,03	0,85	0,01	21,5763	884,0833	21,5727	883,3404	21,5702	883,40069
		0,05	21,5763	884,0833	21,5549	879,9878	21,5503	880,91751
		0,07	21,5763	884,0833	21,5439	878,0820	21,5430	879,81367
	0,875	0,01	26,2601	884,0833	26,2562	883,1303	26,2552	883,30640
		0,05	26,2601	884,0833	26,2342	878,7927	26,2399	880,46287
		0,07	26,2601	884,0833	26,2196	876,3082	26,2349	879,19486
	0,9	0,01	33,2815	884,0833	33,2794	882,9867	33,2644	882,78438
		0,05	33,2815	884,0833	33,2595	877,7533	33,2017	877,86814
		0,07	33,2815	884,0833	33,2423	874,6308	33,1738	875,57923
	0,925	0,01	44,9780	884,0833	44,9885	883,1702	44,9907	883,41110
		0,05	44,9780	884,0833	45,0143	878,5127	45,0499	880,97326
		0,07	44,9780	884,0833	45,0172	875,5850	45,0846	879,90990
0,04	0,85	0,01	19,8061	676,0000	19,8025	675,4928	19,8010	675,59542
		0,05	19,8061	676,0000	19,7848	673,1887	19,7880	674,36706
		0,07	19,8061	676,0000	19,7739	671,8706	19,7858	673,98370
	0,875	0,01	24,1057	676,0000	24,1013	675,3329	24,0929	675,21303
		0,05	24,1057	676,0000	24,0783	672,2997	24,0487	672,37774
		0,07	24,1057	676,0000	24,0635	670,5636	24,0307	671,13453
	0,9	0,01	30,5510	676,0000	30,5476	675,1947	30,5548	675,62600
		0,05	30,5510	676,0000	30,5230	671,4003	30,5797	674,51959
		0,07	30,5510	676,0000	30,5042	669,1602	30,5982	674,21020
	0,925	0,01	41,2879	676,0000	41,2938	675,2317	41,2903	675,29921
		0,05	41,2879	676,0000	41,2995	671,3674	41,3160	672,96892
		0,07	41,2879	676,0000	41,2916	668,9632	41,3393	672,10209
0,05	0,85	0,01	18,4331	551,2500	18,4295	550,8746	18,4335	551,12031
		0,05	18,4331	551,2500	18,4119	549,1568	18,4413	550,83347
		0,07	18,4331	551,2500	18,4013	548,1673	18,4490	550,83075
	0,875	0,01	22,4346	551,2500	22,4300	550,7477	22,4261	550,79979
		0,05	22,4346	551,2500	22,4064	548,4586	22,4040	549,44289
		0,07	22,4346	551,2500	22,3914	547,1454	22,4002	549,02609
	0,9	0,01	28,4331	551,2500	28,4287	550,6234	28,4344	550,91081
		0,05	28,4331	551,2500	28,4011	547,6902	28,4519	549,95149
		0,07	28,4331	551,2500	28,3812	545,9679	28,4686	549,72350
	0,925	0,01	38,4257	551,2500	38,4284	550,6018	38,4273	550,73073
		0,05	38,4257	551,2500	38,4209	547,3739	38,4660	549,48111
		0,07	38,4257	551,2500	38,4061	545,3807	38,5059	549,38465

Tabla 6.7: Estimaciones del pico y tiempo de pico para varias combinaciones de η , α y σ .

<i>Escenario 1</i>													
α	σ	t_{max}	Media	Moda	1-decil	2-decil	3-decil	4-decil	5-decil	6-decil	7-decil	8-decil	9-decil
0,85	0,01	19,806	19,832	19,772	19,142	19,367	19,532	19,682	19,817	19,967	20,117	20,297	20,551
	0,05	19,806	21,089	19,118	17,074	17,941	18,684	19,303	19,985	20,728	21,595	22,772	24,815
	0,07	19,806	23,381	18,691	16,185	17,324	18,311	19,223	20,134	21,197	22,564	24,463	28,564
0,875	0,01	24,105	24,150	24,058	23,231	23,527	23,743	23,940	24,137	24,314	24,531	24,767	25,121
	0,05	24,105	26,217	23,192	20,460	21,665	22,629	23,513	24,397	25,361	26,566	28,253	31,226
	0,07	24,105	29,205	22,488	19,385	20,936	22,100	23,361	24,622	26,077	27,920	30,733	37,231
0,9	0,01	30,551	30,625	30,495	29,329	29,727	30,045	30,336	30,601	30,866	31,158	31,502	32,032
	0,05	30,551	34,155	29,164	25,523	27,178	28,502	29,716	31,040	32,474	34,240	36,667	41,522
	0,07	30,551	37,855	28,234	24,102	26,168	27,846	29,525	31,332	33,527	36,238	40,757	53,021
0,925	0,01	41,288	41,422	41,184	39,376	40,033	40,527	40,938	41,349	41,801	42,253	42,829	43,610
	0,05	41,288	47,600	38,927	33,756	36,180	38,119	40,059	42,159	44,422	47,330	51,532	60,905
	0,07	41,288	51,627	37,295	31,574	34,712	37,295	39,879	42,832	46,154	50,952	59,256	92,844
<i>Escenario 2</i>													
α	σ	t_{max}	Media	Moda	1-decil	2-decil	3-decil	4-decil	5-decil	6-decil	7-decil	8-decil	9-decil
0,85	0,01	19,806	19,831	19,772	19,157	19,367	19,532	19,682	19,817	19,952	20,117	20,297	20,551
	0,05	19,806	21,040	19,118	17,074	17,941	18,622	19,303	19,985	20,728	21,595	22,710	24,753
	0,07	19,806	23,276	18,615	16,185	17,324	18,311	19,147	20,134	21,121	22,488	24,387	28,412
0,875	0,01	24,105	24,145	24,057	23,231	23,526	23,742	23,939	24,136	24,313	24,529	24,765	25,120
	0,05	24,105	26,174	23,111	20,460	21,665	22,549	23,433	24,317	25,361	26,566	28,173	31,145
	0,07	24,105	29,124	22,488	19,385	20,839	22,100	23,264	24,525	25,980	27,823	30,636	37,134
0,9	0,01	30,551	30,619	30,469	29,303	29,727	30,045	30,310	30,575	30,866	31,158	31,502	32,006
	0,05	30,551	34,075	29,047	25,518	27,172	28,495	29,708	30,921	32,355	34,119	36,656	41,398
	0,07	30,551	37,698	28,107	24,104	26,170	27,849	29,527	31,335	33,401	36,112	40,503	52,511
0,925	0,01	41,288	41,417	41,144	39,376	40,034	40,527	40,938	41,349	41,760	42,254	42,788	43,611
	0,05	41,288	47,495	38,864	33,709	36,125	38,058	39,991	42,085	44,340	47,240	51,428	60,609
	0,07	41,288	51,457	37,293	31,573	34,710	37,293	39,877	42,645	46,151	50,764	58,884	91,362

Tabla 6.8: Valor teórico t_{max} y valores de la media, moda, y deciles para la densidad de tiempo de primer paso estimada para $\eta = 0,04$.

6.3. Aplicaciones a datos reales

Tras mostrar en la sección anterior la eficacia de los métodos planteados para el ajuste del proceso Hubbert, así como para la estimación de características como el pico y el instante en el que este se alcanza, en esta sección ilustraremos tales cuestiones a partir de datos reales de producción de petróleo.

En concreto se consideran los datos reales relativos a la producción de petróleo crudo (incluyendo los *lease condensate*, o hidrocarburos líquidos de baja densidad que están presentes como componentes gaseosos en el gas natural) de dos países: Noruega y Kazajistán. Los datos históricos sobre la producción de petróleo crudo se obtuvieron de la base de datos de la *US Energy Information Administration*, [73].

En el caso de Noruega, los datos recogidos varían entre 1980 y 2015. En 2001, Noruega produjo 3.226.000 barriles al día¹, año en el que alcanzó el único pico de producción observado hasta el momento. En el caso de Kazajistán, los datos han sido tomados entre 1992 y 2015, no habiéndose observado en ese intervalo de tiempo todavía ningún pico. En ambos casos, los valores observados en 2015 sólo se utilizaron con el fin de compararlos con predicciones realizadas posteriormente por el modelo; en consecuencia, no han sido utilizados con fines inferenciales.

La figura 6.3 muestra la producción de petróleo crudo para Noruega, mientras que la figura 6.4 recoge la de Kazajistán. Se puede observar que en el caso de Noruega, después de alcanzarse el pico en 2001, la producción anual comenzó a declinar ininterrumpidamente, con la excepción de 2014, cuando se produjo un aumento del 2.5% respecto a 2013. En general, el tipo de comportamiento observado es coherente con la teoría del pico desarrollada por Hubbert. En el caso de Kazajistán el pico todavía no puede decirse que se haya alcanzado, pudiéndose también esperar un comportamiento compatible con la teoría de Hubbert si no hay factores excepcionales que influyan en su producción anual.

¹Habitualmente las cifras viene dadas en miles de barriles diarios (Mbbbl/d). En este caso, la producción

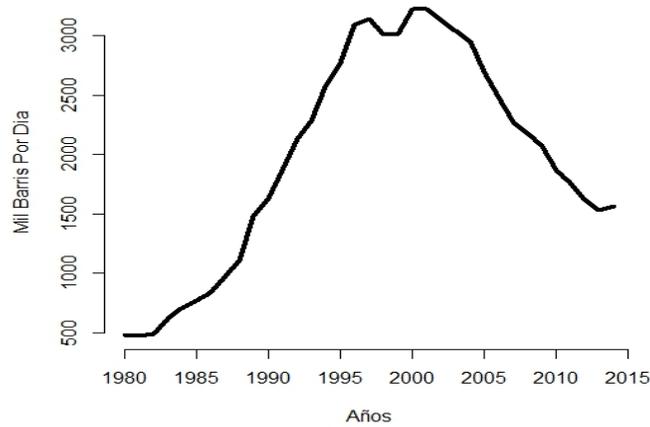


Figura 6.3: Producción de petróleo en Noruega entre 1980 y 2015.

Antes de comentar los resultados obtenidos, hay que incidir en un aspecto importante, y que ya fue remarcado al final del capítulo tercero, sobre los valores de los instantes de tiempo. En efecto, al considerar altos valores para los instantes de tiempo en el proceso existe la posibilidad de que el valor estimado de η sea muy cercano a cero (hay que tener en cuenta que $\eta = \alpha^{t^{\max}}$). En esta situación los errores en el cálculo de las estimaciones de los parámetros pueden ser bastante grandes y pueden generar efectos perjudiciales en los resultados finales. Una forma de abordar este problema es considerar un nuevo proceso de difusión considerando un desplazamiento de longitud k en el tiempo, es decir $Y(t) = X(t + k)$, de modo que los datos originales pueden ser considerados como observaciones del nuevo proceso con el instante inicial 0 tomando $k = t_0$ (1980 para Noruega y 1992 para Kazajistán). El nuevo proceso es también un proceso de difusión Hubbert cuyos parámetros α y σ permanecen invariantes, mientras que η se convierte en $\eta' = \alpha^{-k}\eta$. De esta manera, las expresiones utilizadas para predecir los valores del proceso así como el pico son los mismos, ya sea usando η o η' , mientras que para aquellos relacionados con instantes de tiempo (como el tiempo del pico) basta con deshacer los cambios hecho en el

de 2001 es de 3226 Mbbl/d

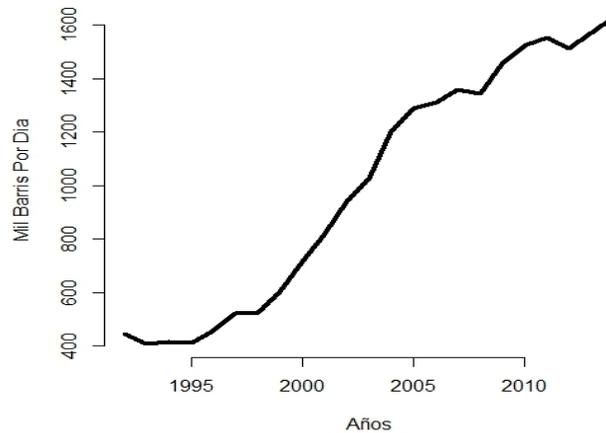


Figura 6.4: Producción de petróleo en Kazajistán entre 1992 y 2015.

tiempo (los detalles se pueden observar en el capítulo 3).

6.3.1. Noruega

Los datos observados para Noruega permite la consideración de los dos escenarios ya discutidos con anterioridad en los ejemplos de simulación, es decir:

- **Escenario 1:** El pico ya se ha alcanzado. Bajo este escenario se considera la totalidad de los datos de la trayectoria. Esta situación permite evaluar la capacidad de ajuste del modelo.
- **Escenario 2:** El pico no se ha alcanzado. Para contemplar este escenario, se truncan los datos de la trayectoria en un instante de tiempo específico, T_F , antes del pico y después de la primera inflexión visualizada en los datos (en este caso se ha elegido $T_F = 1999$). Este escenario permite utilizar las capacidades predictivas del modelo para estimar el tiempo del pico así como para predecir el futuro comportamiento de la producción de petróleo.

Estimación de los parámetros del proceso

A continuación resumimos los resultados obtenidos en lo que se refiere a la estimación de los parámetros del proceso, para lo cual se han empleado los dos métodos presentados en esta memoria: la resolución del sistema de ecuaciones (4.5) y el empleo de S.A. y V.N.S.

En cuanto al primer método, la determinación de las soluciones iniciales para el sistema se ha hecho empleando el procedimiento 1 para el primer escenario, mientras que para el segundo escenario se han utilizado los procedimientos 2 y 3. Para el procedimiento 2, el instante de inflexión se aproximó previo ajuste de un spline cúbico natural a los datos observados, obteniéndose $t_{\text{inf}} = 1988.5$ y $x(t_{\text{inf}}) = 1297.522$ Mbbbl/d. En cuanto al procedimiento 3, el valor estimado para URR se obtiene como la suma de las reservas probadas estimadas, recogidas también en [73], y la producción de petróleo acumulada hasta 2014. Al igual que en los ejemplos de simulación, se ha considerado una subestimación y sobrevaloración de dicho valor en un 10 %. Los resultados² se encuentran resumidos en la tabla 6.9. Centrándonos en el escenario 2, es importante comentar que si bien las soluciones iniciales utilizadas para resolver el sistema de ecuaciones dependen del procedimiento utilizado, las estimaciones finales de los parámetros no dependen de ellas. De igual forma, se puede observar que el uso de valores modificados en las estimaciones de URR no produce alteraciones en la estimación final de los parámetros.

La tabla 6.9 contiene también los resultados obtenidos tras el uso de S.A. y V.N.S. Puesto que la acotación de α depende del valor de URR, en cada escenario se ha utilizado el valor correspondiente y que figura en la base de datos de *US Energy Information Administration*. Se observa cómo la acotación es bastante similar, situándose bastante cerca del definitivo valor estimado para el parámetro. Asimismo, en este caso las estimaciones finales de los parámetros sí dependen del valor de URR, si bien se sitúan en unos valores bastante próximos a los obtenidos por el anterior método.

²Obsérvese que se estima el parámetro transformado η' .

Método usado: resolución del sistema de ecuaciones (4.5).											
Escenario	Proc.	η'_0	α_0	$\hat{\eta}'$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	Valores Observados			EMV	
							Tiempo del pico	Pico	t_{max}	$x(t_{max})$	$x^*(t_{max})$
1	1	0.040	0.854	0.043	0.866	0.073	2001	3226	2001.870	3073.805	-
	2	0.071	0.856	0.038	0.858	0.070	2001	3226	2001.352	3444.985	3118.041
2	3	0.042	0.861	0.038	0.858	0.070	2001	3226	2001.352	3444.985	3118.041
	3 URR -10 %	0.045	0.856	0.038	0.858	0.070	2001	3226	2001.352	3444.985	3118.041
	3 URR +10 %	0.039	0.865	0.038	0.858	0.070	2001	3226	2001.352	3444.985	3118.041

Método usado: algoritmos S.A. y V.N.S.											
Escenario	URR	α^*	Algoritmo	$\hat{\eta}'$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	Valores Observados			EMV	
							Tiempo del pico	Pico	t_{max}	$x(t_{max})$	$x^*(t_{max})$
1	100 %	0.872	S.A.	0.043	0.863	0.064	2001	3226	2001.489	3067.360	-
			V.N.S.	0.042	0.864	0.063	2001	3226	2001.561	3083.389	-
2	100 %	0.884	S.A.	0.037	0.862	0.076	2001	3226	2002.1	3464.156	3181.182
			V.N.S.	0.037	0.860	0.073	2001	3226	2001.79	3485.809	3155.094

Tabla 6.9: Valores estimados de los parámetros para Noruega considerando los dos escenarios.

Estimación del tiempo del pico y del pico

La tabla (6.9) contiene los valores observados del tiempo del pico y pico, junto con sus respectivas estimaciones. La estimación del pico se realiza teniendo en cuenta su expresión como función paramétrica. Así, en el escenario 1, la estimación del pico se realizó mediante la expresión (6.1), mientras que bajo el escenario 2 se incluye también la estimación realizada usando (6.2). En este último caso, el valor x_s fue la producción en 1999 ($x_s = 3019$ Mbbl/d) y el valor estimado se nota por $x^*(t_{\max})$ en la tabla. Como era de prever, en este segundo caso se obtienen predicciones más precisas del pico de producción.

En lo que se refiere a la estimación del tiempo del pico a partir del análisis de la variable temporal definida en el capítulo 4, se ha obtenido la aproximación numérica de su densidad bajo ambos escenarios. La figura 6.5 muestra la representación de ambas funciones de densidad. Es de destacar, en ambos casos, una ligera asimetría a la derecha, por lo que se debe tener precaución al seleccionar la media de la variable tiempo de primer paso como una estimación puntual para el valor del tiempo del pico. La misma cuestión se puede observar en la tabla 6.10, la cual contiene la media, moda y mediana de las densidades de tiempo de primer paso, calculadas bajo ambos escenarios a partir de las estimaciones de los parámetros obtenidas bajo todos los métodos y procedimientos desarrollados. Por ejemplo, bajo el escenario 2 (bastante más realista ya que considera datos antes del pico de producción), y considerando los procedimientos 2 y 3 de selección de solución inicial para el sistema de ecuaciones de verosimilitud, la media de la variable tiempo de primer paso es 2005.281, bastante alejado del valor real que es 2001. Dado que el valor de σ es relativamente grande, alrededor de 0,07, y la asimetría hacia la derecha de la densidad, una buena elección como estimación puntual del tiempo del pico es la mediana de dicha variable aleatoria. En este caso, el valor obtenido es 2001,663, que es muy cercano al valor observado. Un comentario del mismo tipo se puede realizar cuando es el escenario 1 el que se considera, o cuando se consideran los algoritmos S.A. y V.N.S. para la estimación de los parámetros del proceso.

Escenario	Proc.	Media	Moda	Mediana
1	1	2006.455	2000.296	2002.275
	2,3	2005.281	2000.009	2001.663
2	SA	2006.142	2000.030	2001.857
	VNS	2005.885	2000.117	2001.901

Tabla 6.10: Media, moda y mediana del tiempo de primer paso por el pico para Noruega.

La tabla 6.11 contiene los demás deciles de la distribución, a partir de los cuales se pueden calcular intervalos que contegan el tiempo del pico con una cierta probabilidad.

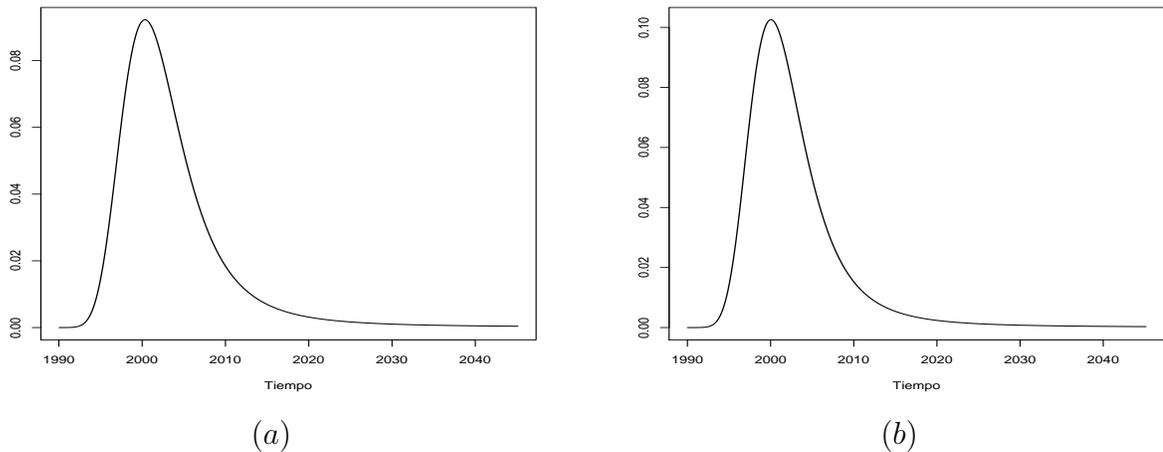


Figura 6.5: Densidad de tiempo de primer paso del pico para Noruega bajo el escenario 1 (a) y escenario 2 (b).

Predicción de la producción

Una vez que se ha estimado el modelo de producción de petróleo crudo, podemos utilizarlo con fines predictivos para estudiar la producción futura para los próximos años. En este caso se ha considerado analizar las predicciones hasta 2040. Con tal fin se han considerado las versiones condicionadas de las funciones media, moda y mediana, así como las bandas de confianza proporcionadas por las funciones de cuantiles al 2,5% y 97,5%,

Esc.	Proc.	Deciles								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1997.508	1998.857	2000.026	2001.106	2002.275	2003.535	2005.244	2007.762	2013.519
	2,3	1997.363	1998.686	1999.679	2000.671	2001.663	2002.821	2004.310	2006.460	2011.175
2	SA	1997.246	1998.551	1999.682	2000.726	2001.857	2003.162	2004.815	2007.338	2013.168
	VNS	1997.314	1998.673	1999.777	2000.797	2001.901	2003.091	2004.705	2007.084	2012.436

Tabla 6.11: Deciles del tiempo de primer paso por el pico para Noruega.

cuyas expresiones se deducen de (3.6) de acuerdo con los valores de la tabla 3.3.

Para mostrar las capacidades predictivas del modelo se ha considerado el escenario 1 puesto que en el caso de Noruega el pico ha sido ya alcanzado en 2001. Bajo dicho escenario, la tabla 6.12 y la figura 6.6 muestran los resultados obtenidos para las características del proceso consideradas, las cuales han sido obtenidas condicionando al valor registrado en el último instante de tiempo de observación ($s = 2014$, $x_s = 1568$ Mbbl/d). En la figura también se han representado los valores observados hasta 2014 con el fin de visualizar el comportamiento global de la producción a partir del tiempo inicial de observación.

En el año 2015 la producción de petróleo de Noruega fue de 1.610 Mbbl/d (alrededor de 50.000 barriles/día más respecto a 2014). De acuerdo con el patrón que se infiere de la estimación del modelo, se hubiera esperado una producción de 1.410 (Mbbl/d). La razón de la diferencia la encontramos en el propio informe de la OPEC de 2016, ver [53], en el cual se indica que entre 2013 y 2014 se abrieron nuevos pozos, lo cual obviamente se traduce en un ligero incremento de producción³. No obstante, a partir de los intervalos de cuantiles calculados, se tiene que, con probabilidad 0.95, el intervalo (1221,398; 1629,760) contiene el valor real de la producción para el año 2015, lo que realmente sucedió.

Después de alcanzar su pico alrededor de 2001, Noruega comienza a mostrar una disminución en la producción. De esta forma, y si no hay otros factores que alteren el modelo, como puede ser el descubrimiento de nuevas reservas, se puede estimar el agotamiento de los recursos cerca de 2040.

³Obviamente, este debe ser el punto de arranque para la extensión del modelo planteando la inclusión de factores exógenos que permitan controlar el modelo de producción.

Año	Media	Mediana	Moda	percentil 2,5 %	percentil 97,5 %
2015	1413,653	1409,891	1402,398	1221,934	1626,760
2016	1268,490	1261,748	1248,372	1030,615	1544,716
2017	1133,415	1124,392	1106,559	877,590	1440,600
2018	1008,893	998,197	977,145	749,792	1328,899
2019	895,026	883,181	859,959	641,365	1216,169
2020	791,637	779,081	754,565	548,753	1106,085
2021	698,339	685,434	660,337	469,423	1000,845
2022	614,599	601,637	576,527	401,404	901,750
2023	539,789	526,999	502,320	343,081	809,511
2024	473,230	460,787	436,875	293,092	724,432
2025	414,222	402,257	379,355	250,274	646,534
2026	362,069	350,675	328,952	213,626	575,648
2027	316,099	305,338	284,901	182,280	511,472
2028	275,675	265,580	246,488	155,488	453,622
2029	240,198	230,787	213,057	132,603	401,670
2030	209,118	200,390	184,012	113,064	355,164
2031	181,933	173,876	158,816	96,391	313,646
2032	158,185	150,777	136,987	82,169	276,672
2033	137,464	130,678	118,095	70,041	243,813
2034	119,403	113,207	101,762	59,701	214,665
2035	103,673	98,0319	87,652	50,888	188,850
2036	89,984	84,861	75,473	43,376	166,020
2037	78,079	73,438	64,967	36,976	145,856
2038	67,732	63,536	55,908	31,521	128,066
2039	58,742	54,957	48,102	26,874	112,386
2040	50,936	47,526	41,377	22,913	98,578

Tabla 6.12: Valores previstos de la producción de petróleo de Noruega de 2015 a 2040, considerando el escenario 1.

6.3.2. Kazajistán

Los datos observados para Kazajistán no sugieren que el pico de producción se haya producido. Por dicha razón el análisis de los datos se ha realizado bajo el escenario 2.

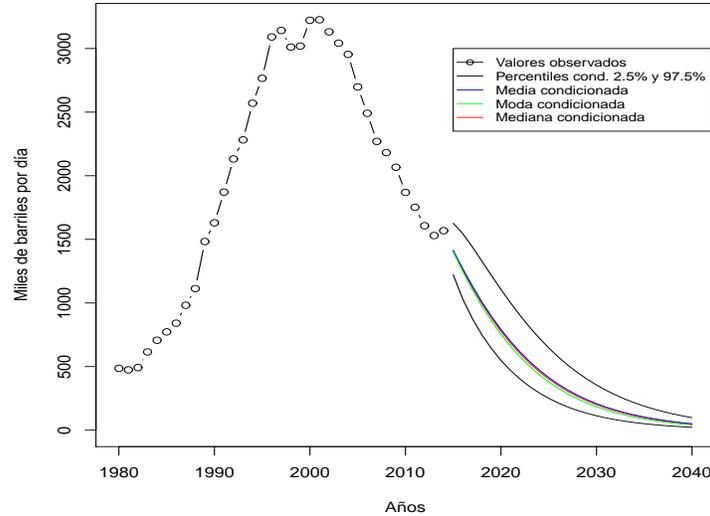


Figura 6.6: Valores predichos para Noruega.

Estimación de los parámetros y determinación del pico y tiempo del pico

La tabla 6.13 contiene los resultados obtenidos tras la aplicación de los procedimientos 2 y 3 para la obtención de solución inicial para el sistema de ecuaciones, así como tras el empleo de los algoritmos de optimización metaheurísticos. En cuanto a la estimación vía el sistema de ecuaciones (4.5), y al igual que ocurría en el caso de Noruega, los distintos procedimientos de obtención de soluciones iniciales proporcionan valores diferentes, aunque todos conducen a las mismas estimaciones finales de los parámetros, al igual que ocurre al modificar los valores de URR considerados. Es de destacar, igualmente, cómo los algoritmos S.A. y V.N.S. conducen a soluciones prácticamente iguales y muy próximas a las obtenidas con el método anterior.

La estimación paramétrica del pico se ha realizado usando (6.2), con $s = 2014$ y la producción en dicho año, que fue de 1632 Mbbl/d. Los resultados muestran que el pico se alcanzará en el año 2023 con un valor de 1920,969 Mbbl/d para los procedimientos numéricos de estimación, mientras aquellos resultantes de la optimización estocástica es-

Proc.	η'_0	α_0	$\hat{\eta}'$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	MLE	
						t_{\max}	$x^*(t_{\max})$
2	0.076	0.897	0.061	0.914	0.066	2023.102	1920.969
3	0.056	0.919	0.061	0.914	0.066	2023.102	1920.969
3 URR -10 %	0.061	0.917	0.061	0.914	0.066	2023.102	1920.969
3 URR +10 %	0.051	0.921	0.061	0.914	0.066	2023.102	1920.969
S.A.	-	-	0.062	0.918	0.064	2024.500	2019.205
V.N.S.	-	-	0.061	0.917	0.064	2024.279	2048.443

Tabla 6.13: Parámetros estimados para Kazajistán.

Proc.	Media	Moda	Mediana
2,3	2030.119	2020.250	2023.660
S.A.	2031.633	2021.426	2025.153
V.N.S.	2031.324	2021.344	2024.874

Tabla 6.14: Media, moda y mediana del tiempo de primer paso por el pico para Kazajistán.

timan el alcance del pico un años más tarde, o sea, 2024 con los valores 2019,205 Mbbbl/d para el método S.A. y 2048,443 Mbbbl/d para V.N.S.

Por otro lado, la figura 6.7 muestra la función de densidad del tiempo del pico. Como en el caso anterior, se observa una ligera asimetría de dicha función hacia la derecha. A partir de la tabla 6.14, y considerando nuevamente la mediana, como en el estudio de simulación y en la aplicación a Noruega, la estimación puntual para el tiempo del pico varia entre 2023,660 y 2025,153 dependiendo del procedimiento empleado de estimación. La tabla 6.15 contiene los valores de los deciles de la distribución. Profundizando un poco más en la estimación del tiempo del pico, el conocimiento de la distribución de la variable aleatoria tiempo del pico permite calcular un intervalo de confianza bootstrap para la mediana, que proporciona información sobre la exactitud de dicha estimación. Después de remuestrear dicha distribución, considerando la obtenida a partir de la estimación de los parámetros a partir del sistema de ecuaciones, el intervalo de confianza obtenido es (2021,455; 2024,230).

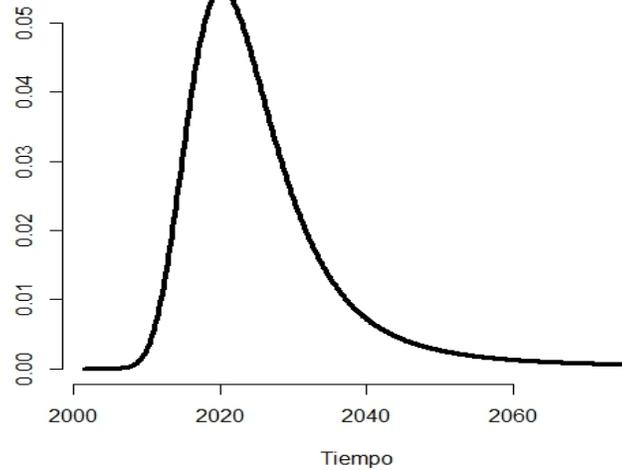


Figura 6.7: Densidad de tiempo de primer paso del pico para Kazajistán.

Proc.	Deciles								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,3	2015.703	2017.977	2019.824	2021.671	2023.660	2025.933	2028.917	2033.605	2045.540
S.A.	2016.805	2019.190	2021.128	2023.066	2025.153	2027.538	2030.519	2035.439	2047.513
V.N.S.	2016.636	2018.990	2020.902	2022.815	2024.874	2027.228	2030.170	2035.025	2046.941

Tabla 6.15: Deciles del tiempo de primer paso por el pico para Kazajistán.

Predicción de la producción

Al igual que se hizo en el caso de Noruega, se han calculado las predicciones para Kazajistán hasta el año 2040. Para ello se han usado las mismas características que en el caso anterior, condicionando al valor de producción en 2014. Los resultados están recogidos en la tabla 6.16 y representados en la figura 6.8. En 2015 Kazajistán produjo 1.653 Mbbl/d, cantidad que representa un incremento del 1.29 % respecto de la producción del año anterior. El valor predicho por el modelo, y recogido en la tabla 6.16 es de 1686,991, observándose la precisión de tal predicción. Asimismo dicho valor está contenido en el intervalo de cuantiles con probabilidad 0,95.

Observemos que, tras alcanzarse el pico de producción alrededor de 2023, se prevé una

desaceleración y disminución en la producción, si bien los valores predichos no permiten deducir cuando se espera que los recursos lleguen a un nivel que permita inferir su pronta extinción.

Año	Media	Mediana	Moda	percentil 2,5 %	percentil 97,5 %
2015	1686,991	1683,320	1676,004	1479,066	1915,782
2016	1737,655	1730,102	1715,095	1440,862	2077,406
2017	1783,309	1771,694	1748,693	1416,066	2216,635
2018	1823,307	1807,491	1776,270	1395,460	2341,180
2019	1857,064	1836,950	1797,374	1375,550	2453,116
2020	1884,069	1859,608	1811,635	1354,599	2552,890
2021	1903,904	1875,097	1818,785	1331,642	2640,343
2022	1916,257	1883,157	1818,663	1306,133	2715,099
2023	1920,928	1883,641	1811,223	1277,792	2776,745
2024	1917,844	1876,525	1796,538	1246,521	2824,938
2025	1907,054	1861,908	1774,796	1212,362	2859,459
2026	1888,730	1840,006	1746,296	1175,461	2880,249
2027	1863,164	1811,150	1711,438	1136,049	2887,432
2028	1830,752	1775,771	1670,713	1094,418	2881,315
2029	1791,988	1734,389	1624,687	1050,909	2862,386
2030	1747,442	1687,596	1573,983	1005,892	2831,300
2031	1697,750	1636,039	1519,264	959,755	2788,861
2032	1643,589	1580,400	1461,218	912,890	2735,998
2033	1585,661	1521,383	1400,537	865,682	2673,735
2034	1524,679	1459,690	1337,904	818,501	2603,168
2035	1461,346	1396,012	1273,977	771,691	2525,429
2036	1396,342	1331,012	1209,380	725,567	2441,667
2037	1330,314	1265,315	1144,689	680,412	2353,018
2038	1263,865	1199,498	1080,430	636,470	2260,584
2039	1197,545	1134,083	1017,068	593,947	2165,416
2040	1131,849	1069,536	955,012	553,013	2068,496

Tabla 6.16: Valores predichos de la producción de petróleo de Kazajistán entre 2015 y 2040.

Las figuras 6.6 y 6.8 muestran que, tanto para Noruega como para Kazajistán, la producción de petróleo de ambos países tiende a ser bastante reducida a partir de 2040. Sin embargo, algunos autores indican que los efectos de la reducción de la producción de petróleo en estos países podrían sentirse antes de 2040 e, incluso, haber comenzado.

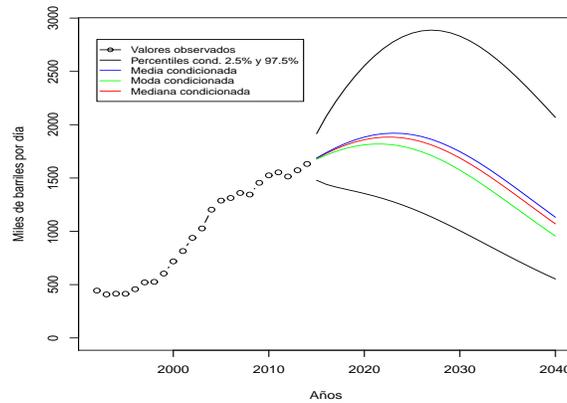


Figura 6.8: Valores predichos para Kazajistán.

Según Hirsch et al., [36], se requieren medidas oportunas para evitar choques económicos, sociales y políticos: *existen opciones viables de mitigación tanto en la oferta como en la demanda pero, para tener un impacto sustancial, deben iniciarse más de una década antes de alcanzar el pico.*

Conclusiones y líneas futuras

En esta tesis se ha querido mostrar cómo la modelización estocástica, a partir de procesos estocásticos de difusión, y el uso de procedimientos inferenciales estadísticos pueden ser unas herramientas importantes para la comprensión del proceso complejo de la producción de petróleo. La siguiente sección resume los logros obtenidos, en relación a los objetivos inicialmente establecidos y que fueron formulados en el Capítulo 1. Posteriormente se comentan direcciones para futuros trabajos.

7.1. Conclusiones

La producción de petróleo a menudo requiere un modelo matemático que represente apropiadamente la dinámica del fenómeno en estudio. Para ello, muchos autores eligen modelos econométricos/estocásticos que consideran variables exógenas asociadas con factores tecnológicos y/o económicos, o incluso modelos determinísticos simplistas relacionados con la curva Hubbert. Los procesos estocásticos de difusión permiten proporcionar mecanismos que consiguen un balance conveniente entre ambas opciones. El proceso presentado se relaciona con la curva Hubbert de manera estocástica, pero matemáticamente más sofisticado.

Los enfoques hasta ahora existentes para tratar este problema se formulan, en parte, a partir de informaciones costosas o de un acceso extremadamente difícil, y siempre asumen que los modelos son capaces de ajustar suficientemente los datos disponibles, sin tener en

cuenta el grado de incertidumbres de los mismos. Ambas propiedades no coinciden con los requisitos del modelo considerado en este trabajo.

Los capítulos 2 y 3 de la presente tesis motivan el estudio de la curva Hubbert a través de la formulación de un nuevo proceso de difusión válido para la modelización de la producción de petróleo. Planteado el modelo de difusión como la solución de una E.D.E., el siguiente objetivo es estimar estadísticamente sus parámetros basados en observaciones del proceso en tiempo discreto. El capítulo 3 profundiza en la metodología clásica derivada de la estimación máximo verosímil. La aplicación de tales técnicas puede ser problemática, si no imposible, en algunas situaciones típicas de datos en la producción de petróleo, en particular, cuando no hay visualizaciones del tiempo de pico y/o inflexión. Se proponen alternativas apropiadas para abordar estos problemas mediante enfoques que consideran las características del proceso y de los datos observados de producción. Estos procedimientos se centran en la búsqueda de soluciones iniciales para el sistema de ecuaciones derivado de la aplicación de la teoría de máxima verosimilitud. No obstante, y motivado por el hecho de que en ocasiones los métodos clásicos de resolución de sistemas no lineales pueden no funcionar adecuadamente, se plantea la estimación de los parámetros mediante la maximización directa de la función de verosimilitud vía algoritmos metaheurísticos como S.A. y V.N.S. Todos estos métodos y procedimientos han sido testeados mediante diversos estudios de simulación (capítulo 5).

Uno de los pilares básicos de la teoría del pico de Hubbert, una de las piedras angulares del estudio de la producción de petróleo, es la determinación del instante en el que la producción alcanza el pico. Una de las formas de estimarlo es mediante la aplicación de las estimaciones de los parámetros puesto que dicho instante se puede formular como una determinada función paramétrica. No obstante, una aportación interesante adicional de esta tesis es el abordar el estudio del tiempo del pico mediante su formulación como un problema de tiempo de primer paso en procesos de difusión. A partir de la relación del proceso Hubbert con el logístico se establece el nexo necesario para la obtención de la

densidad de tiempo de primer paso que modeliza el tiempo del pico.

Entrando ya en el apartado de aplicaciones del modelo introducido, el capítulo 6 utiliza los conocimientos teóricos obtenidos en los capítulos anteriores para las investigaciones estadísticas en problemas simulados y reales desde el punto de vista de la producción de petróleo. En primer lugar se abordan diferentes estudios de simulación conducentes a validar los métodos de estimación de los parámetros considerados así como la determinación del pico y del tiempo del pico desde las perspectivas introducidas. Posteriormente se analiza la evolución temporal de procesos de producción reales basados en datos procedentes de Noruega y Kazajistán. Estas se pueden considerar las primeras aplicaciones reales que usan procesos de difusión para la modelización del problema de la producción de petróleo.

7.2. Líneas futuras

La utilización de procesos de difusión, junto con las técnicas de inferencia estadística, en la modelización de la producción de petróleo es nueva. Por lo tanto, la investigación está en sus primeras etapas y son múltiples las extensiones y/o mejoras que pueden realizarse. Tales avances ayudarán a mejorar la comprensión del proceso de producción en diversos aspectos. Esta tesis proporciona un primer paso en esa dirección.

Un ejemplo de estas extensiones se refiere al hecho de que el proceso de difusión Hubbert presentado puede aplicarse más fácilmente y de manera más eficiente para la modelización de situaciones en las que la producción de petróleo presente un único ciclo, tal como fue originariamente presentado por Hubbert. Las perspectivas futuras de este trabajo se refieren principalmente a la utilización de los métodos desarrollados para ser aplicados a situaciones más complejas como pueden ser curvas asimétricas o ciclos de producción múltiples que presenten varios picos. Asimismo, puede ser de gran interés la incorporación al modelo de información adicional externa que puede modificar el comportamiento de la producción, tanto políticos como sociales como, evidentemente, económicos. Dicha cues-

tión conllevará la introducción de factores exógenos al proceso que permitan una mejor modelización del fenómeno observado, al mismo tiempo que posibiliten poder actuar de forma externa al modelo y, con ello, un control sobre la dinámica de evolución del mismo.

Esta tesis proporciona pautas para la configuración del modelo de difusión Hubbert y proporciona información adecuada para su inferencia estadística. Los enfoques de estimación considerados se han formulado en forma algorítmica. Todos los algoritmos han sido implementados en R. Otra perspectiva futura es la implementación de todos estos procedimientos.

En general, la aplicación combinada de modelos de difusión e inferencia estadística promete proporcionar una nueva visión en el estudio de la producción energética en el futuro. Esta tesis ha demostrado el potencial de este enfoque.

Apéndice

Presentamos aquí, los códigos en R usados para producir los gráficos que se muestran a lo largo de los capítulos.

La curva Hubbert

```
##### Ejemplo de la curva Logística #####  
k <- 1000  
eta <- 0.05  
alpha <- 0.85  
  
curve(k/(eta + alpha^x),0,60,xlab="t",ylab="f(t)")  
  
##### Ejemplo de la curva Hubbert #####  
x0 <- 1  
t0 <- 0  
eta <- 0.05  
alpha <- 0.85  
  
curve(x0*(((eta + alpha^t0)/(eta + alpha^x))^2)*alpha^(x-t0),  
0,60,xlab="t",ylab="x(t)")
```

```
##### Ejemplo de la tasa de crecimiento de Hubbert #####
eta <- 0.05
alpha <- 0.85
curve(-log(alpha)*((alpha^x - eta)/(eta + alpha^x)),0,60,
xlab="t",ylab="dx(t)/dt")
```

Modelo de difusión Hubbert

```
##### Ejemplo del proceso de difusión de Hubbert #####
library(Sim.DiffProc)
alpha <- 0.85
eta <- 0.05
sigma <- 0.025
f <- expression(-log(alpha)*((alpha^t - eta)/(eta + alpha^t))*x)
g <- expression(sigma*x)
res <- snssde1d(drift = f, diffusion=g, M=25,x0=100,N=501,
T=50,Dt=.1)
plot(res,plot.type="single",xlab="t",ylab="X(t)")
lines(time(res),mean(res),col="olivedrab2",lwd=4)
```

Inferencia en el proceso de difusión Hubbert

```
##### Algoritmo utilizado para estimación de los parámetros del proceso de difusión de Hubbert #####
```

```
library(nleqslv)
# Fórmula de integración del trapecio compuesta #
```

```
Integral.Trapezio <-function (x, y){
  if(length(x) > 1){
    p <- order(x)
    x <- x[p]
    y <- y[p]
    Integral <- sum((diff(x) * (y[-length(y)] + y[-1]))/2)}
  else Integral <- 0
  Integral}

# Método de bisección para una función f #
# La solución es mayor que cero (lim1 < -0.01) #

Biseccion<-function(f, testigo, tope)
{
  sigue<-1
  lim1<-0.01
  y1<-f(lim1)
  while(sigue > 0)
  {
    lim2<-lim1+.01
    y2<-f(lim2)
    if (sign(y1) != sign(y2))
      sigue=0
    else
    {
      lim1<-lim2
      y1<-y2
    }
  }
  if(testigo==1)
```

```
{
  if (lim2>tope)
  {
    lim2<-tope
    sigue<-0
  }
}
sigue<-1
while(sigue >0)
{
  sol=(lim1+lim2)/2
  y<-f(sol)
  if(abs(y)<10^(-10))
    sigue<-0
  else
    if(sign(y)!=sign(y1))
    {
      y2<-y
      lim2<-sol
    }
    else
    {
      y1<-y
      lim1<-sol
    }
}
```

```

sol
}

# Definición de la curva Hubbert de parámetros alfa y eta #
Hubbert<-function(t0 , t , eta , alfa )( alfa ^ ( t-t0 ) *( eta+alfa ^ t0 ) ^ 2 ) /
( eta+alfa ^ t ) ^ 2

# Función que da el valor de eta en términos del de alfa cuando se usa la URR #
Eta1<-function(x0 , t0 , h , alfa , m , c ) alfa ^ t0 * m * x0 * ( alfa ^ h - 1 ) /
(( m + 1 ) * x0 * ( 1 - alfa ^ h ) + c * log ( alfa ))

# Función para el cálculo de alfa cuando se usa la URR #
FAlfa<-function(x0 , t0 , Urr , h , alfa , m , c ) x0 * Eta1 ( x0 , t0 , h , alfa , m , c ) ^ 2 +
alfa ^ t0 * Eta1 ( x0 , t0 , h , alfa , m , c ) * ( 2 * x0 + Urr * log ( alfa )) + x0 * alfa ^ ( 2 * t0 )

# Función que proporciona la aproximación de alfa y eta #
# cuando el pico no se conoce y se dispone de la URR. #
# Usa el área entre los instantes de observación. #
# Proporciona cotas superior e inferior para alfa #
Calcula1<-function(x , t , tf , nvaltf , Urr )
{
  CEstimado <-Integra . Trapecio ( t [ 1 : nvaltf ] , x [ 1 : nvaltf ] )
  #s <-splinefun ( t [ 1 : nvaltf ] , x [ 1 : nvaltf ] , method="natural" )
  #CEstimado <-integrate ( s , t [ 1 ] , t [ nvaltf ] ) $ value
  h <-tf-t [ 1 ]
  m <-CEstimado/Urr
  valor <-( 2 * m + 1 ) / CEstimado
  f <-function(a) ( log ( a ) / ( a ^ h - 1 ) ) - valor
  CotaAlfaSup <-min( Biseccion ( f , 0 , 0 ) , exp ( - 4 * x [ 1 ] / Urr ) )

```

```

CotaAlfaInf <-((m-1)^2/(m+1)^2)^1/h
g <-function(a) FAlfa(x[1], t[1], Urr, h, a, m, CEstimado)
Alfa1 <-Biseccion(g, 1, CotaAlfaSup)
Calcula1 <-c(Eta1(x[1], t[1], h, Alfa1, m, CEstimado), Alfa1,
CotaAlfaInf, CotaAlfaSup)
}

# Función que proporciona alfa a partir de la inflexión #

AlfaInfle<-function(x0, alfa, t, t0, valorinfle) valorinfle -x0*
((2-sqrt(3))*alfa^(t-t0)+(2+sqrt(3))*alfa^(t0-t)+2)/6

# Función que proporciona la aproximación de alfa y eta #
# a partir de la inflexión y el pico no se conoce #

Calcula2<-function(t, x, n)
{
s<-splinefun(t[1:n], x[1:n], method="natural")
Nuevot<-seq(t[1], t[length(t)], .025)
v1<-curve(s(x, deriv=1), Nuevot[1], Nuevot[length(Nuevot)],
n=length(Nuevot))$y
v3<-which(v1==max(v1), arr.ind=TRUE)
if (length(v3)>1) v3<-v3[1]
if(v3==1) v3<-v3+1
Tinfle<-Nuevot[v3]
Infle<-s(Tinfle)
f<-function(a) AlfaInfle(x[1], a, Tinfle, t[1], Infle)
Alfa1<-Biseccion(f, 0, 0)
Calcula2<-c(Alfa1^Tinfle/(2+sqrt(3)), Alfa1, Tinfle, Infle)
}

```

```
# Función que proporciona Alfa a partir del pico #

AlfaPico<-function(x0, alfa , t , t0 , valorpico)  valorpico-x0*
( alfa ^ (t-t0)+ alfa ^ (t0-t)+2)/4

# Función que proporciona la aproximación de alfa y eta #
# a partir de la estimación del pico #

Calcula3<-function(t , x)
{
  s<-splinefun(t , x , method="natural" )
  Nuevot<-seq(t [1] , t [length(t)] , .025)
  v3<-which(s(Nuevot)==max(s(Nuevot)) , arr.ind=TRUE)
  TPicoEstimado<-Nuevot[v3]
  PicoEstimado<-s(TPicoEstimado)
  f<-function(a) AlfaPico(x[1] , a , TPicoEstimado , t [1] , PicoEstimado)
  Alfa1<-Biseccion(f , 0 , 0)
  Calcula3<-c(Alfa1 ^ TPicoEstimado , Alfa1)
}

# FUNCIONES PARA LA ESTIMACIÓN DEL PROCESO POR MV #

Tij<-function(eta , alfa , mt , d) matrix(rep(log(( eta+alfa ^ (mt [
1:(length(mt) -1)])))/( eta+alfa ^ (mt [2:length(mt)])) ) , d) ,
ncol=d , byrow=FALSE)

Ti<-function(eta , alfa , mt , d) matrix(rep(log(( eta+alfa ^
(mt [1])))/( eta+alfa ^ (mt [length(mt)])) ) , d) , ncol=d , byrow=
FALSE)

Sij<-function(eta , alfa , mt , d) matrix(rep(( eta+alfa ^ (mt [1:
(length(mt) -1)])))*( eta+alfa ^ (mt [2:length(mt)])) , d) , ncol=d ,
byrow=FALSE)
```

```

Si<-function(eta , alfa ,mt,d) matrix(rep(( eta+alfa ^ (mt [1])) *
( eta+alfa ^ (mt [length (mt)])) , d) , ncol=d , byrow=FALSE)
Wij<-function(eta , alfa ,mt,d) matrix(rep( alfa ^ (mt [2:
length (mt)]) - alfa ^ (mt [1:( length (mt) - 1)])) , d) , ncol=d ,
byrow=FALSE)
Wi<-function(eta , alfa ,mt,d) matrix(rep( alfa ^ (mt [length (mt)])
- alfa ^ (mt [1]) , d) , ncol=d , byrow=FALSE)
Vij<-function(eta , alfa ,mt,d) matrix(rep((mt [1:( length (mt)-
1)])*( alfa ^ ((mt [1:( length (mt) - 1)] - 1))*( eta+alfa ^ (mt [2:
length (mt)])) (mt [2: length (mt)])*( alfa ^ (mt [2: length (mt)] - 1))*
( eta+alfa ^ (mt [1:( length (mt) - 1)])) , d) , ncol=d , byrow=FALSE)
Vi<-function(eta , alfa ,mt,d) matrix(rep(mt [1]*( alfa ^ (mt [1] -
1))*( eta+alfa ^ (mt [length (mt)])) - (mt [length (mt)])*( alfa ^ (mt [
length (mt)] - 1))*( eta+alfa ^ (mt [1])) , d) , ncol=d , byrow=FALSE)
X1<-function(eta , alfa ,mt,d) sum(Wi(eta , alfa ,mt,d)/Si(eta ,
alfa ,mt,d))
X2<-function(eta , alfa ,mt,d,X) sum(X*Wij(eta , alfa ,mt,d)/
(((mt [2: length (mt)]) - (mt [1:( length (mt) - 1)])) * Sij(eta ,
alfa ,mt,d)))
X3<-function(eta , alfa ,mt,d) sum( Tij(eta , alfa ,mt,d)*Wij(
eta , alfa ,mt,d)/(((mt [2: length (mt)]) - (mt [1:( length (mt) - 1]
)])) * Sij(eta , alfa ,mt,d)))
X4<-function(eta , alfa ,mt,d) sum(Vi(eta , alfa ,mt,d)/Si(eta ,
alfa ,mt,d))
X5<-function(eta , alfa ,mt,d,X) sum(X*Vij(eta , alfa ,mt,d)/
(((mt [2: length (mt)]) - (mt [1:( length (mt) - 1)])) * Sij(eta ,
alfa ,mt,d)))

```

```

X6<-function(eta , alfa , mt , d) sum(Tij(eta , alfa , mt , d)*Vij(eta ,
alfa , mt , d)/(((mt[2:length(mt)])-(mt[1:(length(mt)-1)])))*Sij
(eta , alfa , mt , d)))
R<-function(eta , alfa , mt , d) sum(Ti(eta , alfa , mt , d))
Y1<-function(eta , alfa , mt , d) sum((Tij(eta , alfa , mt , d)^2)/
(((mt[2:length(mt)])-(mt[1:(length(mt)-1)]))))
Y2<-function(eta , alfa , mt , d , X) sum(X*Tij(eta , alfa , mt , d)/
(((mt[2:length(mt)])-(mt[1:(length(mt)-1)]))))
S<-function(eta , alfa , mt , d , X) (2*X3(eta , alfa , mt , d)-X2(eta ,
alfa , mt , d , X))/X1(eta , alfa , mt , d)
Z<-function(X , t , n , ntra) c(sum((log(X[2:n , ]/X[1:(n-1) , ]))
^2/(t[2:n]-t[1:(n-1)])) , sum(rep(t[n]-t[1] , ntra)) , sum(log
(X[n , ]/X[1 , ])))
# FUNCIÓN OBJETIVO PARA EL PROCESO HUBBERT #
# par: vector de parámetros #
# X: Matriz con los logaritmos de los incrementos #
# de las trayectorias #
# t: vector con los instantes de tiempo #
# d: Diferencia entre tiempos (en principio los #
# datos son equidistantes) #
# N: Longitud de las trayectorias #
# z: (n-1)*NumTrayectorias #
f . Hubbert<-function(par , X , t , d , N , z)
{
  a1<-z[1]+4*Y1(par[1] , par[2] , t , d)+(log(par[2]) - par[3]^2/2)
  ^2*z[2]-4*Y2(par[1] , par[2] , t , d , X)
  a2<-2*(log(par[2]) - par[3]^2/2)*(2*R(par[1] , par[2] , t , d)-z[3])

```

```

f . Hubbert<-N*log (par [3]^2)/2+(a1+a2)/(2*par [3]^2)
}

# Logaritmo de la verosimilitud #

Vero<-function (par ,X,Y, t ,d,N, z)
{
  a1<-N*log (2*pi)/2-sum (log (Y) [2: length (t) ,1:d]) -d*sum (log (( t
  [2: length (t)] - t [1:( length (t) -1)])))/2
  Vero<-a1-f . Hubbert (par ,X, t ,d,N, z)
}

# Temperatura: la siguiente función calcula la media de los incrementos #
# entre soluciones aleatorias que se van generando en 100 iteraciones. #
# esta media será la temperatura adecuada para aplicar S.A. #

temperatura . Hubbert<-function (entorno ,x, t ,ntra ,N,p0 ,z)
{
  solalea1<-c (runif (1 ,entorno [1 ,1] ,entorno [1 ,2]) ,runif (1 ,
entorno [2 ,1] ,entorno [2 ,2]) ,runif (1 ,entorno [3 ,1] ,entorno [3 ,2]))
  tempini<-0
  k<-1
  for (i in 1:100)
  {
    solalea2<-c (runif (1 ,entorno [1 ,1] ,entorno [1 ,2]) ,runif (1 ,entorno [2 ,1] ,
entorno [2 ,2]) ,runif (1 ,entorno [3 ,1] ,entorno [3 ,2]))
    Dif=f . Hubbert (solalea2 ,x, t ,ntra ,N, z)-f . Hubbert (solalea1 ,x, t ,ntra ,
N, z)
    if (Dif >0)

```

```
{
  k<-k+1
  tempini<-tempini+Dif
}
solalea1<-solalea2
}
tempini<-(-tempini/k)/log(p0)
}

# ALGORITMO SA PARA EL PROCESO HUBBERT #

simann.Hubbert<-function(entorno , temp , alpha , x , t , ntra ,
N, z)
{
  ini<-c(runif(1, entorno [1, 1] , entorno [1, 2]) , runif(1 ,
entorno [2, 1] , entorno [2, 2]) , runif(1, entorno [3, 1] ,
entorno [3, 2]))
  while(temp>0.1)
  {
    for(k in 1:50)
    {
      sol<-c(runif(1, entorno [1, 1] , entorno [1, 2]) , runif(1 ,
entorno [2, 1] , entorno [2, 2]) , runif(1, entorno [3, 1] ,
entorno [3, 2]))
      delta<-f.Hubbert(sol , x , t , ntra , N, z)-f.Hubbert(ini , x , t ,
ntra , N, z)
      if(delta <=0)
        ini<-sol
      else
```

```

        {
            if (exp(-delta/temp)>runif(1))
                ini<-sol
        }
    }
    temp<-temp*alpha
}
simann.Hubbert<-ini
}

# ALGORITMO VNS DESCENDENTE PARA EL PROCESO HUBBERT #
vns.descendente.Hubbert<-function(kmax, solini, entorno, x,
t, ntra, N, p0, gamma, z){
    paso11<-(solini[1]-entorno[1,1])/kmax
    paso12<-(entorno[1,2]-solini[1])/kmax
    paso21<-(solini[2]-entorno[2,1])/kmax
    paso22<-(entorno[2,2]-solini[2])/kmax
    paso31<-(solini[3]-entorno[3,1])/kmax
    paso32<-(entorno[3,2]-solini[3])/kmax
    ini<-solini
    k<-1
    while(k<=kmax)
    {
        if(k==1) ent<-rbind(c(solini[1]-paso11, solini[1]+paso12),
c(solini[2]-paso21, solini[2]+paso22), c(solini[3]-paso31,
solini[3]+paso32))
        temp<-temperatura.Hubbert(ent, x, t, ntra, N, p0, z)
        sol<-simann.Hubbert(ent, temp, gamma, x, t, ntra, N, z)
    }
}

```

```

if (f.Hubbert(sol, x, t, ntra, N, z) < f.Hubbert(ini, x, t, ntra,
N, z))
{
  ini <- sol
  k <- 1
}
else
  k <- k + 1
ent <- rbind(c(solini[1] - k*paso11, solini[1] + k*paso12),
c(solini[2] - k*paso21, solini[2] + k*paso22), c(solini[3] -
k*paso31, solini[3] + k*paso32))
}
ini
}

```

Tiempos de primer paso

Ejemplo de aproximación de una densidad de tiempo de primer paso para el proceso de difusión de Hubbert

```

library(fptdApprox)
x <- character(4)
x[1] <- "-log(alpha)*((alpha^t-eta)/(eta+alpha^t))*x"
x[2] <- "sigma^2*x^2"
x[3] <- "dnorm((log(x)-(log(y)+2*log((eta+alpha^s)))/
(eta+alpha^t))+(log(alpha)-sigma^2/2)*(t-s)))/
(sigma*sqrt(t-s)),0,1)/(sigma*sqrt(t-s)*x)"

```

```
x[4]<-“‘plnorm(x, log(y)+2*log((eta+alpha^s)/(eta+alpha^t))-  
(log(alpha)-sigma^2/2)*(t-s), sigma*sqrt(t-s))”  
Hubbertdifproc<-diffproc(x)
```

Bibliografía

- [1] Abbasi, B., Niaki, S., Khalife, M.A. y Faize, Y. (2011). A hybrid variable neighborhood search and simulated annealing algorithm to estimate the three parameters of the Weibull distribution. *Expert Systems with Applications*, 38(1), 700-708.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2010.07.022>

- [2] Arnold, L. (1973). *Stochastic differential equations*. John Wiley and Sons.

- [3] Artzrouni, M. y Reneke, J. (1990). Stochastic differential equations in mathematical demography: a review. *Applied Mathematics and Computation*, 38(1), 7-21.

[http://dx.doi.org/10.1016/0096-3003\(90\)90078-H](http://dx.doi.org/10.1016/0096-3003(90)90078-H)

- [4] Bakhtiari, A.M. (2004). World oil production capacity model suggests output peak by 2006-2007.

<http://www.resilience.org/stories/2004-05-02/world-oil-production-capacity-model-suggests-output-peak-2006-07>

- [5] Barrera-García, A.J.; Román-Román, P. y Torres-Ruiz, F. (2013). Fitting dynamic growth models of biological phenomena from sample observations through gaussian diffusion processes. *Biosystems*, 112(3), 284-291.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystems.2012.12.007>

- [6] Bertrand, M. (2011). Oil production: A probabilistic model of the Hubbert curve. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 27(4), 434-449.
<http://dx.doi.org/10.1002/asmb.851>
- [7] Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- [8] Boussaid, I., Lepagnot, J. y Siarry, P. (2013). A survey on optimization metaheuristics. *Information Sciences*, 237, 82-117.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2013.02.041>
- [9] Brandt, A.R. (2007). Testing Hubbert. *Energy Policy*, 35(5), 3074-3088.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2006.11.004>
- [10] Brecha, R.J. (2012). Logistic curves, extraction costs and effective peak oil. *Energy Policy*, 51, 586-597.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2012.09.016>
- [11] Buonocore, A., Nobile, A.G. y Ricciardi, L. (1987). A new integral equation for the evaluation of first-passage-time probability densities. *Advances in Applied Probability*, 19(4), 784-800.
<http://dx.doi.org/10.2307/1427102>
- [12] Busetti, F. Simulated Annealing Overview.
<http://aiifinance.com/saweb.pdf>
- [13] Campbell, C.J. (2001). Oil depletion-updated through 2001.
<http://www.oilcrisis.com/campbell/update2002.htm>

- [14] Capocelli, R.M. y Ricciardi, L.M. (1974). Growth with regulation in random environment. *Kybernetik*, 15(3), 147-157.
<http://dx.doi.org/10.1007/BF00274586>
- [15] Capocelli, R.M. y Ricciardi, L.M. (1974). A diffusion model for population growth in random environment. *Theoretical Population Biology*, 5(1), 28-41.
[http://dx.doi.org/10.1016/0040-5809\(74\)90050-1](http://dx.doi.org/10.1016/0040-5809(74)90050-1)
- [16] Deffeyes, K.S. (2006). Beyond oil: the view from Hubbert's peak. Hill and Wang Publishers.
- [17] Deffeyes, K. S. (2010). When Oil Peaked. Hill and Wang Publishers.
- [18] Déry P. y Anderson, B. (2007). Peak phosphorus. *Energy Bulletin*.
<http://www.resilience.org/stories/2007-08-13/peak-phosphorus>
- [19] Giorno, V., Nobile, A.G., Ricciardi, L. y Sato, S. (1989). On the evaluation of first-passage-time probability densities via non singular integral equations. *Advances in Applied Probability*, 21(1), 20-36.
<http://dx.doi.org/10.2307/1427196>
- [20] Giovanis, A.P. y Skiadas, C.H. (1999). A stochastic logistic innovation diffusion model studying the electricity consumption in Greece and the Unites States. *Technological Forecastind and Social Change*, 61(3), 235-246.
[http://dx.doi.org/10.1016/S0040-1625\(99\)00005-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0040-1625(99)00005-0)
- [21] Guseo, R., Dalla Valle, A. y Guidolin, M. (2007). World oil depletion models: price effects compared with strategic or technological interventions. *Technological Forecasting and Social Change*, 74(4), 452-469.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.techfore.2006.01.004>

- [22] Gutiérrez, R., De Juan, A. y Román, P. (1991). Construction of first-passage-time densities for a diffusion process which is not necessarily time-homogeneous. *Journal of Applied Probability*, 28(4), 903-909.
<http://dx.doi.org/10.2307/3214694>
- [23] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sanchez, R. y Nafidi, A. (2006). Electricity consumption in Morocco: Stochastic Gompertz diffusion analysis with exogenous factors. *Applied Energy*, 83(10), 1139-1151.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apenergy.2005.11.007>
- [24] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sanchez, R. y Nafidi, A. (2009). The trend of the total stock of the private car-petrol in Spain: Stochastic modelling using a new gamma diffusion process. *Applied Energy*, 86(1), 18-24.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apenergy.2008.03.016>
- [25] Gutiérrez, R., Ricciardi, L.M., Román, P. y Torres, F. (1997). First-passage-time densities for time-non-homogeneous diffusion processes. *Journal of Applied Probability*, 34(3), 623-631.
<http://dx.doi.org/10.2307/3215089>
- [26] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P. y Torres, F. (2006). Approximate and generalized confidence bands for some parametric functions of the lognormal diffusion process with exogenous factors. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 64, 313-329.
- [27] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D. y Torres, F. (2003). Forecasting for the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Cybernetics and Systems*, 34(8), 709-724.
<http://dx.doi.org/10.1080/716100279>

- [28] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D., Serrano, J.J. y Torres, F. (2007). A new Gompertz-type diffusion process with application to random growth. *Mathematical Biosciences*, 208(1), 147-165.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.mbs.2006.09.020>
- [29] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D., Serrano, J.J. y Torres, F. (2008). Some time random variables related to a Gompertz-type diffusion process. *Cybernetics and Systems*, 39(5), 467-479.
<http://dx.doi.org/10.1080/01969720802069773>
- [30] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (1994). A remark on the validity of the Volterra integral equation of first-passage-time densities for a class of time-non-homogeneous diffusion processes. En: Trappl R., ed., *Cybernetics and Systems 1994*. World Scientific Publishing. Vol. II, 847-854.
- [31] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (1995). A note on the Volterra integral equation for the first-passage-time probability density. *Journal of Applied Probability*, 32(3), 635-648.
<http://dx.doi.org/10.2307/3215118>
- [32] Gutiérrez, R., Román, P. y Torres, F. (1999). Inference and first-passage-times for the lognormal diffusion process with exogenous factors. Application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 15(4), 325-332.
[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1526-4025\(199910/12\)15:4<325::AID-ASMB397>3.0.CO;2-F](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1526-4025(199910/12)15:4<325::AID-ASMB397>3.0.CO;2-F)
- [33] Håjek, B. (1988). Cooling schedules for optimal annealing. *Mathematics of Operations research*, 13(2), 311-329.

- [34] Hallock, Wu W., Hall C. A.S. y Jefferson, M. (2014). Forecasting the limits to the availability and diversity of global conventional oil supply: validation. *Energy*, 64, 130-153.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2013.10.075>
- [35] Heinberg, R. (2005). The party's over. Oil, war and the fate of industrial societies. 2^a ed. New Society Publishers, Gabriola Island, Canada.
- [36] Hirsch, R., Bezdek, R. y Wendling, R. Peaking of world oil production: impacts, mitigation & risk management.
http://www.netl.doe.gov/publications/others/pdf/oil_peaking_netl.pdf
- [37] Holland, S.P. (2008). Modeling Peak Oil. *The Energy Journal*, 29(2), 61-79.
<http://dx.doi.org/10.5547/ISSN0195-6574-EJ-Vol29-No2-4>
- [38] Hubbert, M.K. (1956). Nuclear Energy and the Fossil Fuels. Shell Development Company.
- [39] Hubbert, M.K. (1959). Techniques of prediction with application to the petroleum industry. Shell Development Company.
- [40] Kaufmann, R.K. (1991). Oil production in the lower 48 states: Reconciling curve fitting and econometric models. *Resources and Energy*, 13(1), 111-127.
[http://dx.doi.org/10.1016/0165-0572\(91\)90022-U](http://dx.doi.org/10.1016/0165-0572(91)90022-U)
- [41] Kemp, A. y Kasim, S. (2003). An econometric model of oil and gas exploration development and production in the UK continental shelf: a systems approach. *The Energy Journal*, 24(2), 113-141.
<http://dx.doi.org/10.2307/41322992>

- [42] Kirkpatrick, S., Gelatt, D. y Vecchi, M.P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598), 671-680.
<http://dx.doi.org/10.1126/science.220.4598.671>.
- [43] Laherrère, J.H. (2000). The Hubbert curve: its strengths and weakness.
<http://dieoff.org/page191.htm>.
- [44] Laherrère, J.H. (2002). Modelling future liquids production from extrapolation of the past and from ultimates. *Energy Exploration & Exploitation*, 20(6), 457-480.
- [45] Li, W., Wang, K., Su, H., (2011). Optimal harvesting policy for stochastic logistic population model. *Applied Mathematics and Computation*, 218(1), 157-162.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.05.079>
- [46] Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2017). Modeling oil production and its peak by means of a stochastic diffusion process based on the Hubbert curve. *Energy*, (en prensa).
<http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2017.05.125>
- [47] Luz-Sant'Ana, Istoni; Román-Román, Patricia y Torres-Ruiz, Francisco. (2017). The Hubbert diffusion process: estimation via simulated annealing and variable neighborhood search procedures. Application to forecasting peak oil production.
Sometido a *Applied Stochastic Models in Business and Industry*.
- [48] Maggio, G. y Cacciola, G. (2009). A variant of the Hubbert curve for world oil production forecasts. *Energy Policy*, 37(11), 4761-4770.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2009.06.053>
- [49] Mladenovic, N. y Hansen, P. (1997). Variable neighborhood search. *Computers and Operations Research*, 24, 1097-1100.

[http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548\(97\)00031-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548(97)00031-2)

- [50] Nafidi, A., Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez, R., Ramos-Ábalos, E. y El Hachimi, S. (2016). Modelling and predicting electricity consumption in Spain using the stochastic Gamma diffusion process with exogenous factors. *Energy*, 113, 309-318.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2016.07.002>

- [51] Nashawi, I.S., Malallah, A. y Al-Bisharah, M. (2010). Forecasting World Crude Oil Production Using Multicyclic Hubbert Model. *Energy & Fuels*, 24(3), 1788-1800.

<http://dx.doi.org/10.1021/ef901240p>

- [52] OPEC. (2015). World oil outlook. *OPEC Secretariat*.

- [53] OPEC. (2016). World oil outlook. *OPEC Secretariat*.

- [54] Reynolds, D.B. (1999). The mineral economy: how prices and costs can falsely signal decreasing scarcity. *Ecological Economics*, 31(1), 155-166.

[http://dx.doi.org/10.1016/S0921-8009\(99\)00098-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0921-8009(99)00098-1)

- [55] Reynolds, D. B. (2002). Using Non-Time-Series to Determine Supply Elasticity: How Far do Prices Change the Hubbert Curve? *OPEC Energy Review*, 26(2), 147-167.

<http://dx.doi.org/10.1111/1468-0076.00111>

- [56] Ricciardi, L.M. (1976). On the transformation of diffusion processes into the Wiener processes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 54(1), 185-199.

[http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X\(76\)90244-4](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(76)90244-4)

- [57] Román-Román, P., Romero, D., Rubio, M.A. y Torres-Ruiz, F. (2012). Estimating the parameters of a Gompertz-type diffusion process by means of simulated annealing. *Applied Mathematics and Computation*, 218(9), 5121-5131.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.10.077>

- [58] Román-Román, P., Romero, D. y Torres-Ruiz, F. (2010). A diffusion process to model generalized von Bertalanffy growth patterns: Fitting to real data. *Journal of Theoretical Biology*, 263(1), 59-69.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jtbi.2009.12.009>
- [59] Román-Román, P., Serrano, J.J. y Torres-Ruiz, F. (2008). First-passage-time location function: application to determine first-passage-time densities in diffusion processes. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(8), 4132-4146.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2008.01.017>
- [60] Román-Román, P., Serrano, J.J. y Torres-Ruiz, F. (2012). An R package for an efficient approximation of first-passage-time densities for diffusion processes bases on the FPTL function. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7), 8408-8428.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.01.066>
- [61] Román-Román, P., Serrano, J.J. y Torres-Ruiz, F. (2014). More general problems on first-passage times for diffusion processes: A new version of the fptdApprox R package. *Applied Mathematics and Computation*, 244, 432-446.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.111>
- [62] Román-Román, P., Serrano, J.J. y Torres-Ruiz, F. fptdApprox: approximation of first-passage-time densities for diffusion process. R package.
<http://cran.r-project.org/package=fptdApprox>
- [63] Román-Román P. y Torres-Ruiz F. (2012). Modelling logistic growth by a new diffusion process: application to biological system. *Biosystems*, 110(1), 9-21.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystems.2012.06.004>

- [64] Román-Román, P. y Torres-Ruiz, F. (2014). Forecasting fruit size and caliber by means of diffusion processes. Application to Valencia Late oranges. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, 19(2), 292-313.
<http://dx.doi.org/10.1007/s13253-014-0172-3>
- [65] Román-Román P. y Torres-Ruiz F. (2015). A stochastic model related to the Richards-type growth curve. Estimation by means of simulated annealing and variable neighborhood search. *Applied Mathematics and Computation*, 266, 579-598.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.096>
- [66] Rupsys, P., 2008. Stationary densities and parameter estimation for delayed stochastic logistic growth laws with application in biomedical studies. *WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine*, 6(5), 117-132.
- [67] Saraiva, T.A., Szklo, A., Pereira-Lucena, A.F. y Chavez-Rodriguez, M.F. 2014). Forecasting Brazil's crude oil production using a multi-Hubbert model variant. *Fuel*, 115, 24-31.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.fuel.2013.07.006>
- [68] Soldo, B. (2012). Forecasting natural gas consumption. *Applied Energy*. 92, 26-37.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apenergy.2011.11.003>
- [69] Schurz, H. (2007). Modeling, analysis and discretization of stochastic logistic equations. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 4(2), 178-197.
- [70] Torres, F. (1993). Aportaciones al estudio de difusiones estocásticas no homogéneas. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [71] Towler, B. (2014). *The Future of Energy*. 1^a ed. Academic Press.

- [72] Tuckwell, H.C. (1974). A study of some diffusion models of population growth. *Theoretical Population Biology*, 5(3), 345-357.
[http://dx.doi.org/10.1016/0040-5809\(74\)90057-4](http://dx.doi.org/10.1016/0040-5809(74)90057-4)
- [73] U.S. Energy Information Administration.
<http://www.eia.gov/beta/international/data/browser>.
- [74] Vera, J.F. y Díaz-García, J.A. (2008). A global simulated annealing heuristic for the three-parameter lognormal maximum likelihood estimation. *Computational Statistics and Data Analysis*, 52(2), 5055-5065.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2008.04.033>
- [75] Vikström, H.; Davidsson, S. y Höök, M. (2013). Lithium availability and future production outlook. *Applied Energy*, 110, 252-266.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apenergy.2013.04.005>.
- [76] Zoraghi, N., Abbasi, B., Niaki, S. y Abdi, M. (2012). Estimating the four parameters of the Burr III distribution using a hybrid method of variable neighborhood search and iterated local search algorithms. *Applied Mathematics and Computation*, 218(19), 9664-9675.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.003>