



DIEGO PABLO RUIZ PADILLO
 Profesor del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Granada.
 Coordinador del Laboratorio de Acústica y Física Ambiental de la Universidad de Granada.
 Tel: 958 244161 e-mail: dpruiz@ugr.es



Analogías electro-mecánico-acústicas



Movimiento armónico amortiguado

Todos los sistemas vibrantes están sujetos a fuerzas de fricción que provocan una disminución de la amplitud con el tiempo.

<p>Fuerza de fricción</p> $F = -R_M \frac{dx}{dt}$ <p>R_M – resistencia mecánica</p>	<p>Nueva ecuación del movimiento</p> $M \frac{d^2x}{dt^2} + R_M \frac{dx}{dt} + kx = 0$	<p>Proponemos una solución del tipo</p> $x(t) = Ae^{\gamma t}$
<p>Solución compleja:</p> $x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$	$\beta = \frac{R_M}{2M}$	$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Forma particular de la solución:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

Conceptos relacionados:

Frecuencia angular natural del oscilador amortiguado/no amortiguado.

Tiempo de relajación.

Amortiguamiento crítico

2

Oscilaciones forzadas

Sistema mecánico que efectúa oscilaciones sinusoidales de periodo T y amplitud constante.

Nueva ecuación del movimiento

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + R_M \frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos(\omega t)$$

Proponemos una solución del tipo

$$x(t) = A e^{j\omega t}$$

Solución compleja:

$$x(t) = \frac{F_o}{j\omega R_M + (k - M\omega^2)} e^{j\omega t} \quad u(t) = \frac{F_o}{R_M + j(M\omega - \frac{k}{\omega})} e^{j\omega t}$$

Solución real:

$$x(t) = \frac{F \sin(\omega t - \Theta)}{\omega |Z_M|} \quad \Theta = \arctan \frac{M\omega - k/\omega}{R_M}$$

$$u(t) = \frac{F \cos(\omega t - \Theta)}{|Z_M|}$$

Impedancia mecánica:

$$Z_M = R_M + j \left(M\omega - \frac{k}{\omega} \right) = R_M + jX_M$$

$$Z_M = \frac{f}{u}$$

X_M = Reactancia mecánica

Admitancia mecánica (Y_M):

$$Y_M = 1/Z_M$$

3

Resonancia mecánica

La frecuencia (angular) de resonancia mecánica es aquella a la cual la reactancia mecánica X_M se hace cero.

Potencia de un oscilador forzado

Potencia instantánea (P_i)

$$P_i = \frac{F^2}{Z_M} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta)$$

Potencia promedio (P)

$$P = \int_0^T P_i dt = \frac{F^2}{2Z_M} \cos(\theta)$$

- 1) A esta frecuencia la fuerza da la máxima potencia al oscilador
- 2) La impedancia mecánica tiene su valor mínimo $Z_M = R_M$
- 3) Máxima amplitud de velocidad

Factor de calidad (Q)

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

ω_0 – frecuencia de resonancia

$\omega_1, (\omega_2)$ – frecuencia menor (mayor) a la resonancia donde el valor de la potencia promedio ha decaído a la mitad.

4

Analogías electroacústicas

La electroacústica es la parte de la acústica que estudia el modelado de sistemas mecánicos y acústicos mediante circuitos eléctricos.

Estrategia
 Aplicación de la teoría de circuitos eléctricos para resolver problemas acústicos, puesto que ambos sistemas poseen ecuaciones diferenciales análogas.

Ventajas
 1) Permite la resolución de ecuaciones diferenciales de manera sencilla e intuitiva.
 2) Estudio de la conversión de señales acústicas en eléctricas (y viceversa) es mucho más sencillo. *TRANSDUCCIÓN.*

Ejemplo:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + R_M \frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos(\omega t) \quad \text{Ec. oscilador forzado (sistema mecánico)}$$

Reescrito como $f=f(u)$, donde u es la velocidad de oscilación del sistema.

$$M_M \frac{du}{dt} + R_M u + \frac{1}{C_M} \int u dt = F(t)$$

Circuitos mecánicos

Resistencia mecánica (R_M)

Formalmente, un dispositivo mecánico se comporta como una resistencia mecánica cuando, accionado por una fuerza, ésta es proporcional a la velocidad que adquiere.

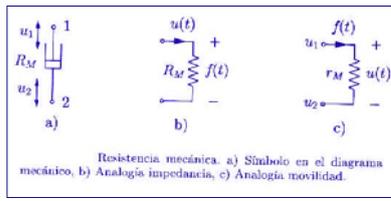
$$f(t) = R_M u(t)$$

Que es una expresión análoga a la **ley de Ohm** en una resistencia eléctrica.

$$e(t) = R_E i(t)$$

y en analogía **admitancia** o **movilidad**, puede expresarse como:

$$u(t) = \frac{1}{R_M} f(t)$$



Circuitos mecánicos

Masa mecánica (M_M).

Es la parte imaginaria positiva de la impedancia mecánica y representa la capacidad de la materia de almacenar energía en forma de inercia cuando se le aplica una fuerza.

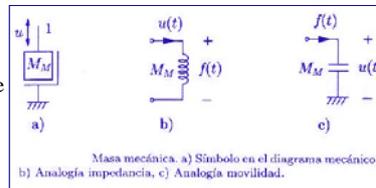
$$f(t) = M_M \frac{du(t)}{dt} \quad (\text{Ley de Newton})$$

Que es una expresión análoga a la ecuación de **autoinducción** de una bobina en un circuito eléctrico.

$$e(t) = L_E \frac{di(t)}{dt}$$

y en analogía **admitancia** o **movilidad**, puede expresarse como:

$$u(t) = \frac{1}{M_M} \int f(t) dt$$



7

Circuitos mecánicos

Compliancia mecánica (C_M).

Es la parte imaginaria negativa de la impedancia mecánica y representa la capacidad de una suspensión de almacenar energía elástica cuando se le aplica una fuerza.

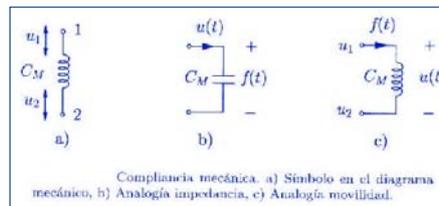
$$f(t) = \frac{1}{C_M} \int u(t) dt \quad (\text{Ley de Hooke})$$

Que es una expresión análoga a la ecuación del **condensador** en un circuito eléctrico

$$e(t) = \frac{1}{C_E} \int i(t) dt$$

y en analogía **admitancia** o **movilidad**, puede expresarse como:

$$u(t) = C_M \frac{df(t)}{dt}$$



8

Circuitos mecánicos

Resumen.

	Impedancia	Movilidad
Resistencia mecánica	$f(t) = R_M u(t)$	$u(t) = \frac{1}{R_M} f(t)$
Masa mecánica	$f(t) = M_M \frac{du(t)}{dt}$	$u(t) = \frac{1}{M_M} \int f(t) dt$
Compliancia mecánica	$f(t) = \frac{1}{C_M} \int u(t) dt$	$u(t) = C_M \frac{df(t)}{dt}$

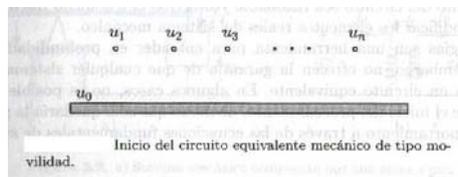
Definición de los elementos que forman la impedancia mecánica.

9

¿Cómo se escribe el circuito mecánico equivalente?

Analogía movilidad.

- 1) En el sistema mecánico, se localizan las masas con diferente velocidad, u_1, u_2, \dots, u_n .
- 2) Se asigna a cada una de estas velocidades un nudo en el circuito análogo.



- 3) Se dibuja una línea de referencia en la base que representa la tierra o velocidad nula, de modo que cada nudo posee una velocidad diferente a la del otro nudo referida al nudo de tierra.
- 4) Todas las masas (condensadores en analogía de movilidad) se conectan entre nudos y tierra, cada una en el nudo de su velocidad correspondiente. El resto de elementos se conectan entre nudos o nudos y tierra.

10

¿Cómo se escribe el circuito mecánico equivalente?

Analogía impedancia.

- 1) Asignar a cada masa una velocidad única, y cada unión entre resistencias y compliancias, si éstas no incluyen masa.
- 2) Para cada elemento mecánico, indicar la corriente principal; para una masa, será una velocidad mientras que para una resistencia o compliancia, será una diferencia de velocidades entre sus extremos.
- 3) Es conveniente empezar al principio del sistema, dónde se aplica la fuerza o velocidad externa. La velocidad en ese punto (intensidad en la analogía eléctrica) es u_s .
- 4) Dibujar un esquema de la distribución de las velocidades a partir del punto de partida y añadir ramas para representar las diferencias de velocidades, de modo que todas las velocidades del punto 2) deben aparecer en este esquema. Una vez que se han dibujado todas las ramas, todos sus finales se recombinan a tierra para que la suma de ellas sea precisamente u_s .
- 5) Insertar los elementos correspondientes de las partes mecánicas (R_M resistencias, C_M condensadores y M_M bobinas). En el punto inicial, donde se encuentra la excitación mecánica externa, se sitúa un generador de fuerza o velocidad.

11

¿Cómo se escribe el circuito mecánico equivalente?

Es conveniente comprobar que el comportamiento del circuito sea razonable y describa el fenómeno físico que ocurriría en el caso de modificar los elementos reales del sistema mecánico.

Comprobación de la validez del circuito.

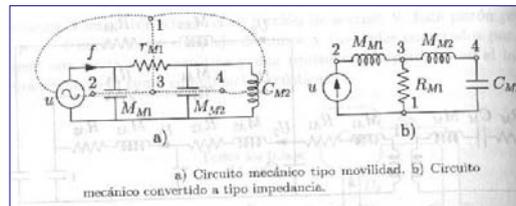
- Forzar a una de las masas que no se mueva, o sea velocidad de dicha masa igual a cero, rompiendo el circuito en dicho punto.
- Anular una compliancia cortocircuitando el elemento, es decir, se hace rígida o se deja en circuito abierto, es decir, se hace infinitamente elástica.

12

Cambio de analogía

- Los elementos en serie pasan a elementos en paralelo.
- Los elementos de resistencia pasan a su inversa, los de capacidad a inductancia y los de inductancia a capacidad.
- La suma de caídas a lo largo de los elementos en serie de una malla corresponden a la suma de corrientes de un nodo.
- Los generadores de caída constante se transforman en generadores de flujo constante y viceversa.

método del punto



13

Circuitos acústicos

Velocidad volumétrica (U)

Derivada con respecto al tiempo del volumen de aire que desplaza un radiador:
(RADIADOR ACÚSTICO).

Para radiadores del tipo membrana, por ejemplo, o para altavoces, el volumen que mueven cuando su membrana de área S_D se desplaza una distancia x es $S_D x$. Por tanto, U puede escribirse de modo general como:

$$U = \frac{dV}{dt} = S_D \frac{dx}{dt} = S_D u$$

Impedancia acústica:

$$Z_A = \frac{p}{U}$$

14

Circuitos acústicos

Resistencia acústica (R_A)

La resistencia acústica es la parte real de la impedancia acústica y representa las pérdidas disipativas que ocurren cuando hay movimiento viscoso de una cantidad de gas a través de una malla fina o capilar.

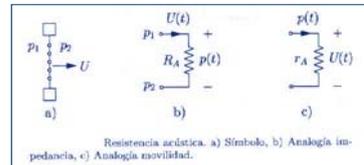
$$p(t) = R_A U(t)$$

Expresando la **ley de Ohm** en una resistencia eléctrica.

$$e(t) = R_e i(t)$$

y en analogía **admitancia** o **movilidad**, puede expresarse como:

$$U(t) = \frac{1}{R_A} p(t)$$



15

Circuitos acústicos

Masa acústica (M_A).

Es la parte imaginaria positiva de la impedancia acústica y, puesto que es proporcional a la masa de aire en el interior del elemento, representa la capacidad del fluido de almacenar energía de inercia.

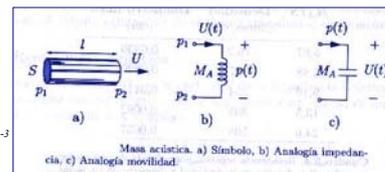
$$p(t) = M_A \frac{dU(t)}{dt}$$

y en analogía **admitancia** o **movilidad**, puede expresarse como:

$$U(t) = \frac{1}{M_A} \int p(t) dt$$

La compliancia acústica del aire en un volumen arbitrario es:

$$M_A = \rho_0 \frac{l}{S} \quad \begin{array}{l} \rho_0 = \text{Densidad estática del aire} = 1,21 \text{ Kg m}^{-3} \\ l = \text{longitud del tubo} \\ S = \text{Sección} \end{array}$$



16

Circuitos acústicos

Compliancia acústica (C_A).

Es la parte imaginaria negativa de la impedancia mecánica y representa la propiedad de los medios fluidos por los que se propaga el sonido, según la cual, presentan cierta elasticidad cuando son comprimidos, de la misma forma que un muelle.

$$p(t) = \frac{1}{C_A} \int U(t) dt$$

y en analogía **admitancia** o **movilidad**, puede expresarse como:

$$U(t) = C_A \frac{dp(t)}{dt}$$

La compliancia acústica del aire en un volumen arbitrario es:

$$C_A = \frac{V}{\gamma P_0}$$

$V = \text{Volumen}$
 $\gamma = 1.4 \text{ (Cte. adiabático)}$
 $P_0 = \text{Presión atmosférica.}$



17

Resumen

Elementos mecánicos y acústicos

	Mecánico	Acústico	Conversión	Expresiones
Impedancia	$Z_M = \frac{f}{u}$	$Z_A = \frac{p}{U}$	$Z_A = \frac{f}{uS} = \frac{Z_M}{S^2}$	Tablas
Resistencia	$R_M = \frac{f}{u}$	$R_A = \frac{p}{U}$	$R_A = \frac{f}{uS} = \frac{R_M}{S^2}$	
Masa	$M_M = \frac{f}{\frac{du}{dt}}$	$M_A = \frac{p}{\frac{dU}{dt}}$	$M_A = \frac{f}{S \frac{du}{dt}} = \frac{M_M}{S^2}$	$M_A = \frac{\rho_0 l}{S}$
Compliancia	$C_M = \frac{\int u dt}{f}$	$C_A = \frac{\int U dt}{p}$	$C_A = \frac{S \int u dt}{f} = C_M S^2$	$C_A = \frac{V}{\rho_0 c^2}$

Elementos mecánicos y acústicos.

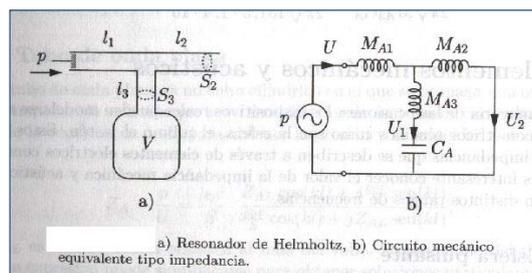
18

Ejemplo: Resonador de Helmholtz (1)



19

Ejemplo: Resonador de Helmholtz (2)



La velocidad U_2 será nula cuando las partes imaginarias de la impedancia sean iguales:

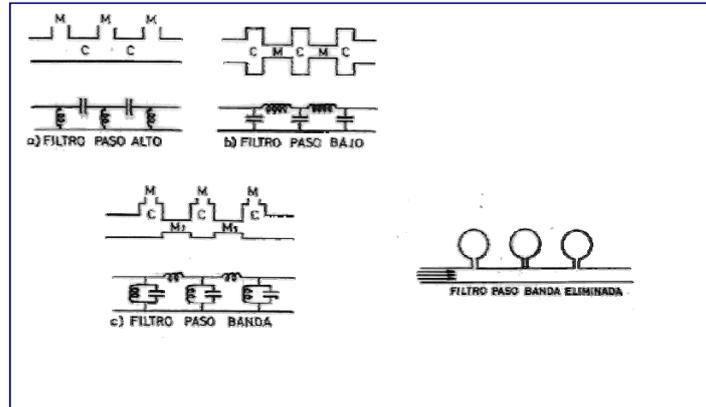
$$j\omega M_{A3} = \frac{1}{j\omega C_A} \longrightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{M_{A3}C_A}}$$

<http://www.mbr-design-group.com/productos/absordifu/resonador.html>

20

Filtros acústicos

Algunos ejemplos de filtros acústicos:



<http://www.iberisa.com/soporte/comet/muffler.htm>

21