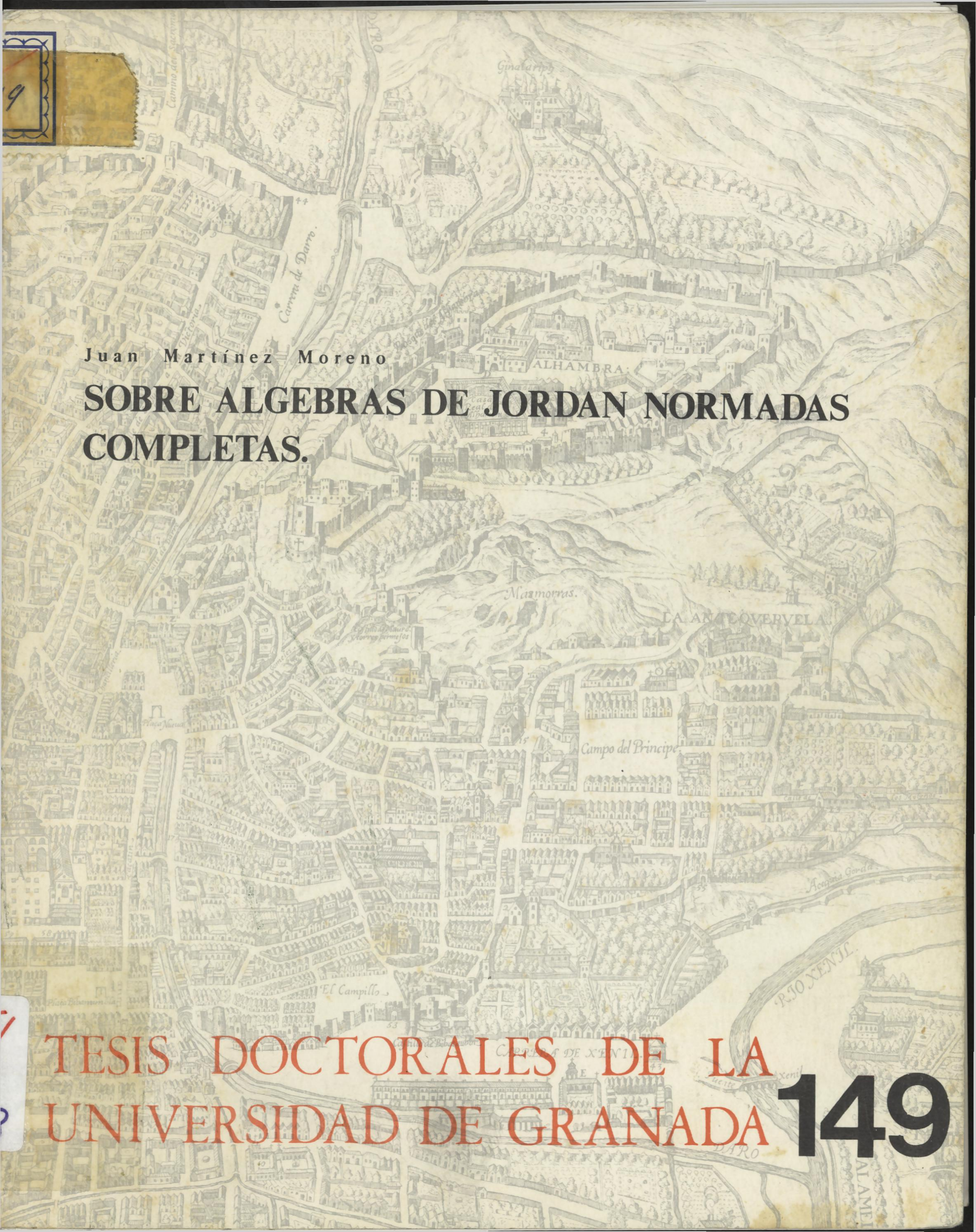

Juan Martínez Moreno

SOBRE ALGEBRAS DE JORDAN NORMADAS COMPLETAS.

TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA **149**

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

SOBRE ALGEBRAS DE JORDAN NORMADAS COMPLETAS

JUAN MARTINEZ MORENO

Tesis doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1977

© UNIVERSIDAD DE GRANADA. SOBRE ALGEBRAS DE JORDAN NORMADAS COMPLETAS. Impreso por el Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada. Un.Gr.40.77.04. Depósito legal Gr.21.1977. 100 ejemplares.
Printed in Spain.

Imprenta de la Universidad de Granada. Hospital Real. Cuesta del Hospicio, s/n.

Tesis doctoral, dirigida por el Prof. Dr. D. Angel Rodríguez Palacios, Adjunto interino de Análisis Matemático de la Universidad de Granada. Fue leída el día 17 de diciembre de 1976, ante el Tribunal formado por los Profesores: Linés Escardó; Valle Sánchez; Fuentes Miras; Bobillo Guerrero; Rodríguez López. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

Fé de Erratas

página	línea	dice	debe decir
2		$a^2+b^2+\ldots=0 \quad a=b=\ldots=0$	$a^2+b^2+\ldots=0 \Rightarrow a=b=\ldots=0$
11	-2	satisfasciendo	satisfaciendo
23	-6	suálgèbra	subálgebra
23	10	$Ia = aI$	$Ia = aI = a$
24	1	suálgebra	subálgebra
29	10	homogéneos o de	homogéneos de
29	-5	en un álgebra	en toda álgebra
40	9	$U^{-1}_{a^{-1},b^{-1}}$	$U_{a^{-1},b^{-1}}$
58	2	satisfasciendo	satisfaciendo
67	-7	lineal	bilineal
69	entre las lineas 2 y 3 falta el signo $\leq$		
70	3	va ha	va a
84	7	$P(a)$	P
92	1	$(bu-b)-ba+a$	$(b\mu-b)-ba+a \quad M$
96	-7	definción	definición
111	3	$(\alpha x)^* = \alpha x^*$	$(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$
112	2	compleja con involución	compleja y
113	-2	$\max \; \|a\| \;,\; \|a^*\|$	$\max \{ \|a\| \;,\; \|a^*\| \}$

I N D I C E

C A P I T U L O I I I

C A P I T U L O I V

INTRODUCCION

La teoría de las álgebras de Jordan tiene su origen en los trabajos de P. Jordan (Gottienger Nachr, 1932, p. 569; 1933, p. 204. Zschr. f. Phys, vol. 80, 1933, p. 285), cuyo proposito es formular una teoría matématica abstracta que axiomatice la clase de "observables" de un sistema físico en Mecánica Cuántíca . La fundamentación matemática se encuentra pues, en las tres operaciones "permisibles" en la clase de observables:

1) αa / $\alpha \in \mathbb{R}$

2) αa^n / $n \in N$ a,b observables

3) $a+b$

estando las operaciones 1) y 3) sometidas a los axiomas clásicos de los espacios vectoriales y la 2) satisfaciendo la "natural" ley de asociación:

$$(p \circ q)(a) = p(q(a))$$

donde p,q son polinomios formales con coeficientes en $\mathbb{R}$ y p(a) designa el observable $\alpha_o + \alpha_1 a + \dots + \alpha_n a^n$, si p es el polinomio $\alpha_o + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$.

Enseguida se intuye que esta estructura es fácilmente manejable si existe un "producto" conmutativo . (aplicación bilineal simétrica del conjunto de observables en si - mismo) tal que $a^2 = a.a$. Evidentemente, de existir dicho producto, no puede ser otro que:

(1) $$a.b = 1/2\ (a+b)^2 - 1/2\ (a^2+b^2)$$

Desgraciadamente, en general, la aplicación definida por (1) no es bilineal (38).

Exigiendo:

4) la bilinealidad de la aplicación definida por (1) y la verificación del axioma, de sencilla interpretación física:

5) $a^2+b^2 + ... = 0 \quad a = b = ... = 0$ /a,b observables

se prueba la equivalencia de las identidades:

6) $a^n.a^m = a^{n+m}$

7) $a^2.(a.b) = a.(a^2.b)$

(La identidad 6) equivale a que la aplicación $p \longrightarrow p(a)$ es - un homomorfismo del álgebra de los polinomios formales en el álgebra de observables con el producto (1). La identidad 7) es el célebre axioma de Jordan).

Si H es un espacio de Hilbert, el conjunto J(H) de los operadores lineales autoadjuntos de H con las operaciones 1), 2) y 3) usuales (el producto (1) resulta ser en este caso: $a.b = 1/2(ab+ba)$, donde la yuxtaposición indica la composición de operadores) satisface los axiomas 4),5) y evidentemente el 6) con lo que también el 7). Aparece así un primer ejemplo de "álgebra de Jordan real". El resultado es el mismo, si en lugar de J(H) elegimos una variedad lineal de -- J(H) cerrada para el producto (1), apareciendo así las llamadas JC-álgebras, si son uniformemente cerradas, y las -- JW-álgebras, si son débilmente cerradas.

El axioma 5) es inconsistente si el cuerpo $\mathbb{R}$ se sustituye por un cuerpo arbitrario (incluso en los ejemplos citados puede obtenerse como consecuencia de su estructura analítica), reduciendose su papel a poner en equivalencia la asociatividad de las potencias (6)) con el axioma de Jordan (7)).

Se define, en consecuencia, un álgebra de Jordan como un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo de caracteristica distinta de 2, dotado de un producto conmutativo - satisfaciendo el axioma de Jordan.

Es de notar que en toda álgebra de Jordan se satisface automáticamente el axioma 6), y así pues, la subálgebra engendrada por un solo elemento es asociativa, más aun es"fuer--temente asociativa". (I. 3.1 de la presente memoria)

Si A es un álgebra asociativa sobre un cuerpo conmutativo de característica distinta de 2, entonces A^+ (el álgebra resultante de añadir a la estructura vectorial de A el producto: $a.b = 1/2(ab+ba)$) es un álgebra de Jordan llamada álgebra de Jordan subyacente a A. Las subálgebras de A^+ constituyen las llamadas álgebras de Jordan especiales.

El problema de saber si este tipo de álgebras agotan (salvo isomorfismos) todas las álgebras de Jordan, fué re--suelto negativamente por A. Albert (2), apareciendo así las llamadas álgebras de Jordan excepcionales.

No obstante, hasta cierto punto, la teoría de las álgebras de Jordan se puede reducir al caso de las especiales con ayuda del Teorema de Macdonald (I. 4.1), posiblemente el más trascendental de la teoría, estableciendo que toda identidad con tres elementos de grado cero o uno en uno de ellos, válida en toda álgebra especial, es válida también en cualquier álgebra de Jordan.

En el desarrollo de la teoría de las álgebras de Jordan juega un papel esencial la "teoría cuadrática" basada en - la aplicación:

$$U_a(b) = 2(a.b).a - a^2b$$

Concretamente McCrimmon(25) ha logrado caracterizar las álgebras de Jordan a partir de la aplicación $a \longrightarrow U_a$

....

Si A es un álgebra de Banach, A^+ es entonces un álgebra de Jordan cuyo producto es evidentemente continuo, mas concretamente, A^+ es un álgebra de Jordan normada y completa - (II. 1.1).

Existen también álgebras de Jordan excepcionales normadas y completas; por ejemplo la M_3^8 real (38) y por consiguiente su complexificada (I. 8.1).

El propósito esencial de la presente memoria es fundamentar una teoría general de las álgebras de Jordan normadas y completas paralela a la de las álgebras de Banach.

Considerando que esta última consigue su máxima belleza y potencialidad en el caso complejo, hemos dirigido nuestra atención prioritariamente a las álgebras de Jordan complejas; apartandonos así de la línea clásica que, en toda - la bibliografía a nuestro alcance, se ocupa siempre del caso real, con la consiguiente dificultad de medios, alcanzando, no obstante, notabilisimos resultados (ver por ejemplo (4)). (Hemos de hacer constar que toda álgebra de Jordan real normada puede ser sumergida, mediante un monomorfismo isométrico en un álgebra de Jordan con unidad compleja normada (II. 5.6)).

El primer objetivo tenía que ser necesariamente el desarrollo de la teoría espectral.

No siendo, en general, el producto de un álgebra de Jordan asociativo, la relación:

$$a.b = I \quad (I \text{ se supone unidad del álgebra})$$

carece de consistencia para definir b como inverso de a pues, entre otras cosas, no esta garantizada la unicidad.

Esta dificultad inicial ha sido brillantemente resuelta por los algebristas a traves del análisis del caso A^+ -- (A asociativa). Concretamente:

Si A es un álgebra asociativa con unidad I (que automaticamente pasa a ser la unidad A^+) entonces :

$$ab = ba = I \iff (2)\begin{cases} a.b = I \\ a^2.b = a \end{cases}$$

lo que permite reconstruir el concepto de elemento inversible y de inverso de un tal elemento (en sentido asociativo) sin mas que el conocimiento del álgebra de Jordan A^+.

Si J es un álgebra de Jordan con unidad I y $a \in J$, se dice, en consecuencia, que a es inversible con inverso b, si se verifica (2). Enseguida se demuestra: la unicidad del inverso, que la relación "b es inverso de a" es simétrica y que la subálgebra engendrada por un elemento y su inverso es fuertemente asociativa.

Fijado el concepto algébrico de inversible conseguimos, como hechos más significativos, para álgebras de Jordan complejas normadas y completas :

- El conjunto de los elementos inversibles de J es -- abierto.
- La aplicación $a \longrightarrow a^{-1}$ es diferenciable y su diferencial en a_o es $-U_{a_o}^{-1}$.

En consecuencia :

- La función resolvente $z \longrightarrow (a-zI)^{-1}$ es analítica.
- El espectro de un elemento $a \in J$ (Sp(a)) es una parte no vacía y compacta de $\mathbb{C}$.
- $\lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$ existe y es igual al radio del más pequeño círculo con centro en cero que contiene a Sp(a).

Los resultados conseguidos invitan a intentar la construcción de un cálculo funcional holomorfo con su consiguiente teorema de la aplicación espectral ("Spectral mapping - thehorem").

Sea $a \in J$ y sea f analítica en un abierto D que contiene al espectro de a y con valores complejos. Evidentemente existe:

$$f(a) = 1/2\pi i \int_{\partial W} f(z)\ (zI-a)^{-1} dz$$

(donde W es un envolvente del par (Sp(a),D) (II. 6.5)) y es independiente de la elección de $\mathcal{W}$.

El problema fundamental estriba en probar que la aplicación $f \longrightarrow f(a)$ es un homomorfismo de álgebras, extendiendo el homomorfismo $p \longrightarrow p(a)$ con p polinomio; el que a su vez - se traduce en el problema algebraico de la asociatividad de la subálgebra $\mathcal{G}$ engendrada por $\{a, (zI-a)^{-1} / z \notin Sp(a)\}$ (téngase en cuenta que $f(a) \in \overline{\mathcal{G}}$).

A propuesta nuestra, el Profesor N. Jacobson ha resuelto este problema afirmatívamente probando:

Si $\mathcal{J}$ es un álgebra de Jordan con unidad I, $\mathcal{B}$ una subálgebra fuertemente asociativa de $\mathcal{J}$ tal que $I \in \mathcal{B}$ y C un subconjunto de $\mathcal{B}$ tal que $c \in C \Rightarrow \exists\, c^{-1} \in \mathcal{J}$, entonces la subálgebra engendrada por $\mathcal{B} \cup C^{-1}$ ($C^{-1} = \{c^{-1} / c \in C\}$) es fuertemente asociativa.

Este teorema nos ha permitido reducir el Cálculo Funcional Holomorfo en álgebras de Jordan al caso asociativo (y - por supuesto conmutativo) pues, corolario claro del mismo es que las subálgebras fuertemente asociativas maximales de $\mathcal{J}$ son "plenas" es decir, contienen los inversos de todos sus - elementos inversibles; de donde se sigue que si $\mathcal{J}$ es normada y completa y $a \in \mathcal{J}$, a puede ser sumergido en una tal álgebra fuertemente asociativa maximal que trivialmente es cerrada (Nótese que f(a) pertenece a cualquier subálgebra cerrada y plena que contenga a a,I)

....

Otro problema clásico en la teoría de las álgebras de Banach ha sido la investigación de condiciones álgebricas que impliquen la existencia de única topología normable - completa. El máximo exponente en esta línea lo constituye el célebre Teorema de Johnson, largo años conjeturado, afirmando la unicidad de la topología de la norma para álgebras de Banach semisimples en el sentido de Jacobson.

McCrimmon(27) ha enunciado una teoría del radical de Jacobson para álgebras de Jordan que es paralela a la correspondiente asociativa si en esta última se elige la conocida caracterización del mismo como el mas grande ideal casi inversible.

Si se tiene en cuenta que en la demostración del Teorema de Johnson interviene de manera esencial la caracterización del radical como intersección de los núcleos de las representaciones irreducibles, (lo que, en el caso Jordan - con las consiguientes definiciones, de ninguna manera equivaldria a la definición de McCrimmon) pensamos que, establecer en álgebras de Jordan un teorema análogo al de Johnson es, en el estado actual de nuestros conocimientos, practicamente imposible.

Bajo la hipótesis mas fuerte de la semisimplicidad fuerte (III. 1.10) hemos conseguido una prueba de la unicidad de la norma, si bien nos consta que este resultado ha sido probado por V. K. Balachandran y P. S. Rema ("Uniqueness - of the norm topology in certain Banach Jordan Algebras". Publ. Ramanujan Inst. nº1 (1968/69), 283-289), aunque no - hemos podido conseguir su trabajo.

También hemos probado la unicidad de la norma para álgebras de Jordan semisimples del tipo A^+ con A asociativa.

En cualquier caso hemos probado que el radical de Jacobson de un álgebra de Jordan normada y completa es cerrado.

....

No podía faltar, en el intento perseguido, disponer de un tipo de álgebras de Jordan que jugasen el papel análogo al desempeñado por las B*-álgebras.

Es conocido que una B*-álgebra A se define como un álgebra de Banach dotada de una involución lineal $*$, tal que:

1) $(ab)^* = b^*a^*$ y 2) $\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A$

(el conocido Teorema de Gelfand-NaimarK garantiza que, salvo isomorfismos, no hay mas B*-álgebras que las subálgebras uniformemente cerradas y autoadjuntas del álgebra de los -- operadores lineales continuos en un espacio de Hilbert)
si consideramos el álgebra de Jordan subyacente A^+ , esta -

vuelve a ser normada y completa, dotada de involución lineal $*$ satisfasciendo: $(a.b)^* = b^*.a^*$.

Enseguida nos podemos preguntar: ¿Verifica A^+ la propiedad 2)?.

Desde luego, ya que aa^* y a^*a son elementos positivos en A, se verifica:

$$1/2\, \|a\|^2 \leq \|a.a^*\| \leq \|a\|^2 \quad \forall a \in A$$

Por otra parte, en virtud de un resultado de Kaplansky (12. p. 58) se sabe que dada una B*-álgebra A no conmutativa $\exists\, a_o \in A$ / $a_o \neq 0$ y $a_o^2 = 0$. Luego para este elemento $a_o a_o^*$ y $a_o^* a_o$ son biortogonales.

También es conocido que para elementos biortogonales se verifica:

$$Sp(a_o^* a_o + a_o a_o^*) \cup \{0\} = Sp(a_o^* a_o) \cup Sp(a_o a_o^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(a_o^* a_o + a_o a_o^*) = r(a_o^* a_o) \quad \text{(r es el radio espectral)}$$

luego por la positividad de $a_o^* a_o + a_o a_o^*$ se sigue que :

$$\|a_o^* a_o + a_o a_o^*\| = \|a_o^* a_o\| = \|a_o\|^2 \Rightarrow \|a_o . a_o^*\| = 1/2\, \|a_o\|^2.$$

Por tanto la respuesta a nuestra pregunta es negativa.

Todo lo anterior nos pone de manifiesto que tratar de construir una teoría, análoga a las B*-álgebras, para álgebra de Jordan con involución, por adición del axioma 2), esta condenada al fracaso, a menos que queramos renunciar a las subyacentes de las B*-álgebras no conmutativas.

Ahora bien, Vidav y Palmer han conseguido caracterizar las B*-álgebras como las unicas álgebras A de Banach complejas"unitales" tales que $A = H(A) + iH(A)$ ($H(A)$ es el conjunto de los elementos $a \in A$ tales que $a'(a) \in \mathbb{R}$ para todo - $a' \in A'$ tal que $\|a'\| = a'(I) = 1$) en cuyo caso la involución $a+ib \longrightarrow a-ib$ es la única que satisface los axiomas 1) y 2).

Si se tiene en cuenta que $H(A)$ depende únicamente de la norma y de la unidad de A (que es la misma de la de A^+) resulta trivial que $A^+ = H(A^+) + iH(A^+)$ (IV. 5.6).

Este sencillo hecho justifica tomar como álgebras de Jordan, análogas a las B*-álgebras, aquellas álgebras de Jordan J complejas,normadas, completas y unitales que satisfacen - $J = H(J) + iH(J)$. A tales álgebras les llamamos JV-álgebras.

Nosotros hemos conseguido probar que,en una JV-álgebra, la aplicación $a+ib \longrightarrow a-ib$ es una involución de álgebra y además continua. Para conseguir este resultado hemos tenido que desarrollar una teoría de Rango Numerico en álgebras de Jordan unitales.

Análogamente a como nosotros hemos encontrado unos axiomas"naturales" que engloban las subálgebras cerradas y autoadjuntas de $BL(H)^+$ ($BL(H)$ designa el álgebra de los operadores lineales continuos en un espacio de Hilbert H), Al-- fen, Shultz y Størmer (4) obtienen axiomas mínimos, para -- álgebras de Jordan reales, a los que se someten las JC-álgebras.

Si se tiene en cuenta que toda JC-álgebra es necesariamente la parte simetrica de una subálgebra cerrada y autoadjunta de $BL(H)^{+}$, se comprende que,en esencia, el objetivo - inicial es el mismo.

En relación con la interdependencia de ambas axiomaticas hemos probado que la parte simetrica de toda JV-álgebra es necesariamente una JB-álgebra en el sentido de Alfen, - Shultz y Størmer (IV. 5.15).

Queda abierto el problema relativo a si, reciprocamente, toda JB-álgebra es la parte simetrica de una JV-álgebra; lo que en cierto modo supondria la equivalencia de las dos --- axiomaticas.

....

Como se dijo anteriormente esta memoria pretende únicamente establecer las bases de una teoría de las álgebras de Jordan normadas y completas. Sobre estas bases, el equipo - al que me honro en pertenecer, está consiguiendo importantes resultados entre los que destacaremos:

- La continuidad débil del producto en una JW*-álgebra (JV-álgebra isomorfa al dual de un espacio de Banach; se -- trata del axioma análogo al de Sakai para W*-álgebra) (Francisco Ocaña. Memoria del doctorado en preparación).

- Caracterización de las álgebras de Jordan reales normables de división (Amín Mojtar Kaidí. Memoria de doctorado en preparación).

- El bidual de una JV-álgebra con el producto de Arens es una JV-álgebra (35)

- Un álgebra A no asociativa compleja, conmutativa, normada completa y unital satisfaciendo $A = H(A) + iH(A)$ y tal que la involución $a+ib \longrightarrow a-ib$ es involución de álgebra, es álgebra de Jordan (recíproco del teorema IV. 5.3) (35).

....

Solo me queda expresar mi más profunda gratitud:

Al Dr. Rodríguez Palacios por su constante orientación y ayuda sin las cuales no hubiese sido posible la realización de esta memoria.

Al Dr. Fuentes Miras, Catedrático y Director del Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, a los restantes miembros de dicho Departamento, así como a los del Departamento de Ecuaciones Funcionales por su estímulo y ayuda de todo tipo.

Al Profesor N. Jacobson de la Universidad de Yale por su amable atención de comunicarme (carta de 5 de marzo de 1.976) la prueba del teorema I.5.8, sin la cual no hubiese sido posible desarrollar el Cálculo Funcional Holomorfo.

Granada, noviembre 1.976

Juan Martínez Moreno.

C A P I T U L O I

1. ALGEBRAS DE JORDAN.

DEFINICION 1.1.- Un espacio vectorial A sobre un cuerpo conmutativo K dotado de una aplicacion bilineal de $A \times A$ en A, diremos que es un álgebra.

A esta aplicación bilineal la llamaremos producto y notaremos $(a,b) \mapsto ab$. Por tanto ha de satisfacer:

1) $a(b+c)=ab+ac \quad , \quad (b+c)a=ba+ca$

2) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$

$\forall\, a,b,c \in A$ y $\forall\, \alpha \in K$

Si A es un álgebra sobre un cuerpo conmutativo K de caracteristica distinta de 2, podemos definir una nueva ley de composición en A, que notaremos . , en la forma:

3) $a.b=\frac{1}{2}(ab+ba) \quad \forall\, a,b \in A$

Es inmediato comprobar que $(a,b) \rightarrow a.b$ verifica las --- propiedades 1) y 2) y por tanto podemos reemplazar el pro--

ducto original en A por el nuevo producto 3) y obtener otra álgebra a la que notaremos A^+ que trivialmente será conmutativa.

Si el álgebra original A es asociatíva, entonces, al -- producto a.b de a por b en A lo llamaremos producto de Jordan. Es de inmediata comprobación que dicho producto verifica la identidad:

$$((a.a).b).a = (a.a).(b.a)$$

DEFINICION 1.2.-Un álgebra de Jordan J es un álgebra sobre un cuerpo conmutativo K de característica distinta de 2, cuyo producto notaremos , siempre que no haya confusión, por yuxtaposición, ab, satisfaciendo los axiomas:

A_1 : $ab = ba$

A_2: $(a^2b)a = a^2(ba)$ donde $a^2 = aa$

Evidentemente, si A es un álgebra asociativa, A^+ es un álgebra de Jordan.

DEFINICION 1.3.-Un álgebra de Jordan J la llamaremos especial si existe un monomorfismo (de álgebras) de J en un álgebra A^+ , A asociativa. Las álgebras de Jordan que no sean especiales las llamaremos excepcionales.

2. *IDENTIDADES BASICAS EN UN ALGEBRA DE JORDAN. ALGUNAS CONSECUENCIAS*

Notación.- Sea A un álgebra, $a \in A$, $k \in N$; definimos:

a^k por indución: $a^1 = a$, $a^{k+1} = a^k a$

$[a,b] = ab-ba, \quad a,b \in A$

$[a,b,c] = (ab)c-a(bc) \quad a,b,c \in A$

R_a, la aplicación $x \to xa$ de A en A

Recuerdese que, para cada espacio vectorial X, L(X) (conjunto de las aplicaciones lineales de X en X) es, de manera canónica, un álgebra asociativa.

Sea J un álgebra de Jordan. El axioma A_2 podemos escribirlo:

$$(2.1) \quad [R_a, R_{a^2}] = 0$$

Si reemplazamos a por $a+\alpha b$ ($\alpha \in K$) en (2.1) tenemos:

$0 = R_{a+\alpha b} R_{(a+\alpha b)^2} - R_{(a+\alpha b)^2} R_{a+\alpha b}$, de donde, en virtud de la linealidad de la aplicación $a \to R_a$ y de (2.1), se sigue:

$\alpha\{2(R_a R_{ab} - R_{ab} R_a) + R_b R_{a^2} - R_{a^2} R_b\} +$

$$+ \alpha^2\{ 2(R_bR_{ab} - R_{ab}R_b) + R_aR_b2 - R_b2R_a\} = 0, \text{ supuesto } \alpha \neq 0;$$

ya que el cuerpo K contiene al menos tres elementos distintos $0, \alpha, \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2(R_aR_{ab} - R_{ab}R_a) + R_bR_a2 - R_a2R_b + \alpha\{2(R_bR_{ab} - R_{ab}R_b) +$$

$$+ R_aR_b2 - R_b2R_a\} \equiv R_1 + \alpha R_2 = R_1 + \beta R_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\alpha-\beta)R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = R_1 = 0. \text{ Luego}$$

$$(2.2) \qquad 2(R_aR_{ab} - R_{ab}R_a) + R_bR_a2 - R_a2R_b = 0$$

Si ahora reemplazamos, en (2.2), a por $a+\lambda c$ y bajo la hipótesis de ser la caracteristica de K distinta de 2 obtenemos:

$$(2.3) \qquad [R_{ab},R_c] + [R_{ac},R_b] + [R_{bc},R_a] = 0$$

Aplicando (2.3) a un elemento $d \in J$ obtenemos:

$$(dc)(ab) + (db)(ac) + (ad)(bc) = \{d(ab)\}c + \{d(ac)\}b + \{d(bc)\}a.$$

Intercambiando c y d en la igualdad anterior podemos escribir:

$$(dc)(ab) + (cd)(ad) + (ac)(bd) = \{c(ab)\}d + \{c(ad)\}b +$$

+ $\{c(bd)\}a$, de donde se sigue:

$$(2.4)\quad R_{(ab)c} = R_{bc}R_a + R_{ac}R_b + R_{ab}R_c - (R_aR_cR_b + R_bR_cR_a)$$

Utilizando (2.3) en (2.4):

$$(2.5)\quad R_{(ab)c} = R_aR_{bc} + R_bR_{ac} + R_cR_{ab} - (R_aR_cR_b + R_bR_cR_a)$$

Si intercambiamos a y c en (2.5) y sustraemos la identidad resultante de (2.5):

$$R_{(ab)c} - R_{a(bc)} = R_cR_aR_b + R_bR_aR_c - R_aR_cR_b - R_bR_cR_a =$$
$$= [[R_c,R_a],R_b]$$

Ahora bien, por la linealidad de $a \to R_a$, se tiene:

$$R_{(ab)c} - R_{a(bc)} = R_{[a,b,c]}$$

Luego:

$$(2.6)\quad [[R_c,R_a],R_b] = R_{[a,b,c]} = R_{[R_c,R_a](b)} = [R_b,[R_a,R_c]]$$

La identidad (2.4) para $a=a^k$, $k \in N$, $k \geqslant 1$ y $b=c=a$ se reduce a

$$R_{a^{k+2}} = 2R_{a^{k+1}}R_a + R_{a^2}R_{a^k} - (R_{a^k}R_a^2 + R_a^2R_{a^k})$$

Esta identidad y un razonamiento de inducion nos ponen de manifiesto que $R_{a^{k+2}}$, $k\geq 1$, esta contenida en la subálgebra de $L(J)$ engendrada por R_a y R_{a^2}, ya que estos conmutan se - sigue $[R_{a^k}, R_{a^l}] = 0$, $k, l \geqslant 1$. Esto nos permite una simplificación de la formula de recurrencia anterior:

$$(2.7) \qquad R_{a^{k+2}} = 2R_a R_{a^{k+1}} - (2R_a^2 - R_{a^2})R_{a^K}, \quad k \geqslant 1$$

Se define el producto triple en un álgebra de Jordan

$$(2.8) \qquad \{abc\} \equiv (ab)c + (bc)a - (ac)b$$

Si el álgebra es especial y $a.b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ en términos del producto asociativo ab,entonces:

$$\{abc\} = \frac{1}{2}(abc + cba)$$

y en particular, $\{aba\} = aba$.

Sea ahora J un álgebra de Jordan y definimos la aplicación lineal $x \rightarrow \{axb\}$ de J en J a la que notaremos $U_{a,b}$ y - $U_{a,a} \equiv U_a$. Tenemos:

$$(2.9) \qquad U_{a,b} = R_a R_b + R_b R_a - R_{ab}$$

$$(2.10) \qquad U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}$$

Evidentemente U_{a^k} esta contenida en la subálgebra de - $L(J)$ engendrada por R_a y R_{a^2}. Tambien se verifica que U_a es una forma cuadrática en a, ya que para $\alpha \in K$, $U_{\alpha a} = \alpha^2 U_a$ y

$$(2.11) \quad U_{a,b} = \frac{1}{2}(U_{a+b} - U_a - U_b)$$

es lineal en a y b.

DEFINICION 2.1.- Un álgebra no asociativa A se dice que es de potencias asociativas si la subálgebra engendrada por cada elemento de A es asociativa. Esto es equivalente a que se verifiquen las identidades $a^k a^l = a^{k+l}$, $k,l \in N$;$k,l \geq 1$.

TEOREMA 2.2.- *Toda álgebra de Jordan es de potencias - asociativas.*

En efecto:

Probamos que $a^k a^l = a^{k+l}$ por indución sobre l

Trivialmente (1) es cierto para l=1 por la definición de -- $a^{k+1} = a^k a$. Supongamos pues, que $a^k a^l = a^{k+l}$; entonces:

$a^k a^{l+1} = a^k(a^l a) = (R_{a^k} R_a)a^l = (R_a R_{a^k})a^l = (a^l a^k)a = a^{k+l}a =$ $= a^{k+l+1}$. Donde hemos aplicado la conmutatividad de R_{a^k}, R_{a^l} $k,l \geq 1$.

DEFINICION 2.3.- Dada un álgebra A , se dice que una - aplicación lineal D de A en A es una derivación si verifica:

(2.12) $\quad D(ab) = D(a)b + aD(b) \quad \forall \; a,b \in A$

TEOREMA 2.4.- *Sea J un álgebra de Jordan, entonces - - $[R_a, R_b]$ es una derivación sobre J.*

La prueba es inmediata sin mas que tener en cuenta la - identidad (2.6). O bien, ya que $ab = 1/2(a+b)^2 - 1/2(a^2+b^2)$, basta probar que (2.12) se verifica para c^2, lo cual es cierto en virtud de la identidad (2.5).

3. SUBALGEBRAS FUERTEMENTE ASOCIATIVAS

DEFINICION 3.1.- Sea A un álgebra, se dice que $I \in A$ es una unidad para A si $Ia = aI \quad \forall a \in A$

DEFINICION 3.2.- Una subálgebra B de un álgebra de Jor= dan J diremos que es fuertemente asociativa si $[R_a, R_b] = 0$ para todo $a,b \in B$

Evidentemente, toda subálgebra fuertemente asociativa- es asociativa. Si notamos por $R_J(B)$ el conjunto $\{R_b \; / \; b \in B\}$ y por $R_J(B)^*$ la suálgebra de $L(J)$ engendrada por $\{R_J(B), I\}$ donde I es la unidad de $L(J)$, ya que un álgebra asociativa- es conmutativa sii admite un sistema conmutativo de generadores, es evidente que B será una subálgebra fuertemente - asociativa de J sii $R_J(B)^*$ es un álgebra conmutativa de -- transformaciones lineales.

COROLARIO 3.3.- *Cualquier subálgebra B de un álgebra de Jordan J engendrada por un único elemento es fuertemente -- asociativa. Si J posee unidad* I *, la subálgebra engendrada- por* I *y cualquier* $a \in J$ *es fuertemente asociativa.*

En efecto:

Basta tener en cuenta que si $a \in J$ entonces $[R_a k, R_a l] = 0$ $k,l \geq 0$, donde $a^0 \equiv I$.

LEMA 3.4.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I, *B una subálgebra de J conteniendo* I *y* G *un conjunto de generadores para B conteniendo* I . *Entonces el conjunto de operadores* $U_{a,b}$, $a,b \in G$ *es un conjunto de generadores para --* $R_J(B)^*$. (17. I, p. 42).

4. *ALGEBRAS LIBRES. ALGEBRAS DE JORDAN LIBRES.*

Un conjunto S con una ley de composición binaria $(a,b) \rightarrow ab$, lo llamaremos grupoide. Si la ley de composición bina-- ria es asociativa, diremos que S es un semigrupo. Cuando -- exita elemento unidad usaremos la terminologia de grupoide- (semigrupo) con unidad.

Sea $G \neq \phi$ un conjunto arbitrario. Por $M(G)'$ notaremos- el conjunto de los monomios o palabras $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} a_{\alpha_3} \ldots . a_{\alpha_k}$, -- $k \geq 1$, formados de elementos $a_{\alpha_i} \in G$. Se define un producto en $M(G)'$ por yuxtaposición:

$$(1) \quad (a_{\alpha_1} \ldots\ldots a_{\alpha_k})(a_{\beta_1} \ldots\ldots a_{\beta_l}) =$$
$$= a_{\alpha_1} \ldots\ldots a_{\alpha_k} a_{\beta_1} \ldots\ldots a_{\beta_l}$$

que trivialmente es asociativo y por tanto $M(G)'$ constituye un semigrupo con la ley de composición dada por (1).

A $M(G)'$ le podemos adjuntar una unidad I formando $M(G) = M(G)' \cup \{I\}$ / $I \notin M(G)'$ y definiendo $Ia = aI = a \; \forall \; a \in M(G)'$

A $M(G)'$ $(M(G))$ con la ley de composición (1) lo llamaremos semigrupo libre (semigrupo libre con unidad) engendrado o generado por G.

Cada elemento a de G se identifica de manera natural con el monomio a de $M(G)'$ ($M(G)$) y toda aplicación de G en un semigrupo S (en un semigrupo con unidad) se extiende de manera unica en un homomorfirmo (conservando la unidad, en el segundo caso) de $M(G)'$ $(M(G))$ en S (8. I, p. 79)

Evidentemente si H es otro conjunto y f una plicación de G en H, existe un único homomorfirmo, de $M(G)'$ $(M(G))$ en $M(H)'$ $(M(H))$ que extiende f.

Si $H \subseteq G$, se define el H-grado de $a = a_{\alpha_1} \ldots\ldots a_{\alpha_k}$ perteneciente a $M(G)'$, como el número de $a_{\alpha_i} \in H$ e incluidos en

a. Si $H = \{b\}$, simplemente hablaremos del grado de b.

Consideremos ahora el semigrupo libre $M(G,x)' \equiv \equiv M(G \cup \{x\})'$ engendrado por G y un elemento $x \notin G$. Definimos una nueva ley de composición, a la que llamaremos x-composición a la derecha, en $M(G,x)'$ en la forma:

$$(2) \quad aR_x b = (ab)x \qquad \forall a,b \in M(G,x)'$$

Evidentemente (2) no es asociativa.

Notaremos por $N(G)'$ al menor subgrupoide de $M(G,x)'$ relativo a la ley de composición (2) conteniendo a G, al que llamaremos grupoide no asociativo líbremente engrendrado por G. Podemos adjuntar un elemento identidad I a $N(G)'$, obteniendo $N(G) = \{I\} \cup N(G)'$.

Si S es cualquier grupoide (grupoide con unidad) y f una aplicación de G en S, entonces f puede ser extendida a un único homomorfirmo de $N(G)'$ ($N(G)$) en S (17. I, p.24).

Si $H \subseteq G$ se define el H-grado de $a \in N(G)'$ como el H-grado de $a \in M(G,x)'$. También se define el grado de I como cero.

Sea S un grupoide y K un cuerpo commutativo. Entonces podemos formar el espacio vectorial KS sobre K líbremente engendrado por G y definir un producto en KS :

$$(3) \qquad (\sum \alpha_i a_i)(\sum \beta_j b_j) = \sum \alpha_i \beta_j (a_i b_j)$$

$$\alpha_i, \beta_j \in K \text{ y } a_i, b_j \in S$$

Con esto KS será un álgebra sobre el cuerpo conmutativo K y será asociativa si S lo es y con identidad si S la posee. La inyección natural $a \to 1a$ de S en KS es multiplicativa.

Consideremos M(G)' , M(G), N(G)', N(G) y un cuerpo conmutativo K, podemos formar las correspondientes álgebras KM(G)', KM(G), KN(G)' y KN(G) a las que llamaremos respectivamente el algebra asociativa libre, álgebra asociativa libre con unidad, álgebra no asociativa libre y álgebra no asociativa libre con unidad engendrada por el conjunto G.

Si f es una aplicación de G en un álgebra A (álgebra co con unidad, álgebra asociativa, álgebra asociativa con unidad) entonces existe una unica extensión de f a un homomorfirmo (conservando la unidad) de KN(G)' (KN(G), KM(G)', KM(G)) en A (8. III, p. 22).

Se define ahora el álgebra de Jordan libre con unidad engendrada por un conjunto $G \neq \emptyset$,y notamos FJ(G), por :

$$FJ(G) = KN(G)/I(G)$$

donde $I(G)$ es el ideal en $KN(G)$ engendrado por todos los elementos de la forma $ab - ba$, $(a^2b)a-a^2(ab)$, $a,b \in KN(G)$.

Definiendo el producto de clases en el cociente $KN(G)/I(G)$ en la forma usual se comprueba fácilmente que $FJ(G)$ es un álgebra verificando los axiomas A_1 y A_2 .

Consideremos el álgebra asociativa libre con unidad $KM(G)$ engendrada por G y la correspondiente álgebra de Jordan $KM(G)^+$. Definimos el álgebra de Jordan libre especial con unidad engendrada por G como la subálgebra de $KM(G)^+$ engendrada por G y la unidad I, a la que notaremos $FSJ(G)$ Si G es un conjunto finito notaremos simplemente $FSJ^{(n)}$ y $FJ^{(n)}$.

Dado un conjunto $G \neq \emptyset$, salvo isomorfismos, $FJ(G)$ ($FSJ(G)$) es la única álgebra de Jordan con unidad (álgebra de Jordan especial con unidad) con las siguentes condiciones:

a) $G \subseteq FJ(G)$ $(G \subseteq FSJ(G))$

b) Toda aplicación f de G en cualquier otra álgebra de Jordan con unidad (álgebra de Jordan especial con unidad) $\mathcal{J}$, se extiende de forma única en un homomorfismo, conservando la unidad, de $FJ(G)$ ($FSJ(G)$) en $\mathcal{J}$. (17.I, p. 23).

Evidentemente la identidad del conjunto G no importa, sino únicamente su cardinal.

Según lo dicho anteriormente, la aplicación identidad de G en G se extiende de forma única a un homomorfismo de FJ(G) en FSJ(G) al que llamaremos homomorfismo canónico.

TEOREMA 4.1.- (Macdonald) *Sea* $FJ^{(3)}$ *el álgebra de Jordan libre como unidad* I *engendrada por* x,y,z, $FSJ^{(3)}$ *el álgebra de Jordan libre especial con unidad* I *engendrada por* u,v,w, f *el homomorfismo cánónico de* $FJ^{(3)}$ *en* $FSJ^{(3)}$ *aplicando* -- $I \to I, x \to u, y \to v, z \to w$, $N^{(3)}$ *el núcleo de* $f \cdot$ *y* B *el subespacio de elementos de* $FJ^{(3)}$ *que son homogeneos o de grado uno en* z. *Entonces* $N^{(3)} \cap B = \{0\}$ (17. I, p. 41).

TEOREMA 4.2.- (Shirshov) *El álgebra de Jordan* $FJ^{(2)}$ *con unidad* I *y dos generadores es especial.* (17.I,p.47)

Los teoremas de Macdonald y Shirshov juntos, establecen que cualquier identidad en tres elementos x,y,z de grado 0 ó 1 en z, que sea válida en un álgebra de Jordan especial es válida en toda álgebra de Jordan.

COROLARIO 4.3.- *Sea* J *un álgebra de Jordan. Entonces se verifica la siguiente identidad fundamental:*

$$(1) \qquad U_a U_b U_a = U_{U_a(b)}$$

En efecto :

La identidad (1) es equivalente a:

$$\{a\{b\{aca\}b\}a\} = \{\{aba\}c\{aba\}\}, \forall c \in J$$

Ahora bien en un álgebra de Jordan especial A^+, A asociativa, la igualdad anterior se convierte en $a(b(aca)b)a = (aba)c(aba)$ que trivialmente es cierta por la asociatividad

Por tanto (1) es cierta para toda álgebra de Jordan especial y por los teoremas 4.1 y 4.2, (1) será válida para toda álgebra de Jordan.

COROLARIO.4.4.- *Sea J un álgebra de Jordan. Entonces se verifica la siguiente identidad :*

$$(2) \qquad U_a U_{b,c} U_a = U_{U_a(b),\, U_a(c)}$$

En efecto:

Basta tener en cuenta la identidad (2.11) y el colorario anterior.

TEOREMA 4.5.- (Shirshov-Cohn) *Toda álgebra de Jordan (con unidad) engendrada por dos elementos (y la unidad) es especial* (17. I, p. 48).

5. INVERSOS EN UN ALGEBRA DE JORDAN. TEOREMAS FUNDAMENTALES.

DEFINICION 5.1.- Sea A un álgebra asociativa con unidad I. Diremos que a es inversible con inverso b si ab = I = ba y recíprocamente, b inversible con inverso a; $a,b \in A$.

Es immediato probar que si a es inversible con b como inverso, entonces en A^+ se verifican las siguientes relaciones:

(1) $a.b = I$

(2) $(a.a).b = a$

Recíprocamente si suponemos que a,b verifican las relaciones (1) y (2) entonces a es inversible con b como inverso y viceverza. Luego el concepto de inverso en un álgebra asociativa con unidad es expresable en términos del producto de Jordan.

Estas consideraciones llevan a la siguiente definición.

DEFINICION 5.2.- Sea J un álgebra de Jordan con unidad I. Se dice que $a \in J$ es inversible con inverso $b \equiv a^{-1}$ si se verifican las siguientes identidades:

(1) $ab = I$

(2) $a^2 b = a$

Al conjunto de los elementos inversibles en J lo notaremos por inv(J).

Dado un conjunto G y un subconjunto del mismo H, notamos por FJ(G/H) el álgebra de Jordan libre, engendrada por G y los "inversos" de H. Si $a \rightarrow a^{-1}$ es una biyección de H sobre un conjunto H^{-1} disjunto de G, podemos poner - - - $FJ(G/H) = FJ(G \cup H^{-1})/I(H)$, donde I(H) es el ideal, en el álgebra de Jordan libre con unidad $FJ(G \cup H^{-1})$ engendrado - por todos los elementos:

$$aa^{-1} - I,\ a^2 a^{-1} - a; \quad a \in H \text{ y } a^{-1} \in H^{-1}$$

Análogamente el álgebra de Jordan libre especial FSJ(G/H) engendrada por G y los inversos de H, puede mirarse como la subálgebra de $(KM(G \cup H^{-1})/I(H))^+$ engendrada por $G \cup H^{-1}$, donde I(H) es el ideal bilátero en el álgebra asociativa $KM(G \cup H^{-1})$ engendrado por todos los elementos:

$$aa^{-1} - I,\ a^{-1}a - I; \quad a \in H \text{ y } a^{-1} \in H^{-1}$$

Ahora se prueba tambien que, en las hipótesis anteriores, existe, salvo isomorfismos, una única álgebra de Jordan con unidad (álgebra de Jordan especial con unidad) FJ(G/H) (FSJ(G/H)), verificando:

a) $G \cup H^{-1} \subseteq FJ(G/H)$ $(G \cup H^{-1} \subseteq FSJ(G/H))$

b) a^{-1} es, en FJ(G/H) (FSJ(G/H)), el inverso de $a \in H$

c) Toda aplicación f de G en cualquier álgebra de Jordan J con unidad (álgebra de Jordan especial con unidad) tal que $f(H) \subset inv(J)$, se extiende de forma única en un homomorfismo de FJ(G/H) (FSJ(G/H)) en J conservando la unidad.

A FJ(G/H) (FSJ(G/H)) le llamaremos álgebra de Jordan libre engendrada por G y los inversos de H. (álgebra de Jordan libre especial engendrada por G y los inversos de H).

La aplicación identidad de G en G se extiende de forma única a un homomorfismo de FJ(G/H) en FSJ(G/H) al que llamaremos homomorfismo canónico. Evidentemente este homomorfismo conserva los inversos.

TEOREMA 5.3.- (Macdonald con inverso) *Si J y J_S son el álgebra de Jordan libre y el álgebra de Jordan libre especial engendradas por a,b,c y los inversos a^{-1}, b^{-1}. Entonces* *el nucleo del homomorfismo canónico f de J sobre* J_S *no contiene elementos de grado cero o uno en* c, *distintos de cero* (26).

TEOREMA 5.4.- (Shirshov con inverso). *El álgebra de Jordan libre J con dos generadores a,b y sus inversos* a^{-1}, b^{-1}, *es especial.* (26).

TEOREMA 5.5.- (Shirshov-Cohn con inversos). *Toda álgebra de Jordan (con unidad) engendrada por dos elementos y sus inversos (y la unidad) es especial.* (26).

TEOREMA 5.6.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I *y sean* a, b $\in$ *J. Entonces:*

I) *Si* a *es inversible en J con* b *como inverso, entonces* b *es inversible con* a *como inverso.*

II) *Las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

a) a *es inversible*

b) I *pertenece a la imagen de* U_a

c) U_a *es inversible en el álgebra, sobre* K, L(J)

III) *Si* a *es inversible entonces posee un único inverso* b *y este es precisamente* $U_a^{-1}(a) = b$

IV) *Si* a *y* b *son inversos entonces* $U_b = U_a^{-1}$ y $R_b =$ $= U_a^{-1} R_a$

V) $[R_a k, R_b l] = 0$ *para todo* $K, l \geq 0$ *y* a,b *inversos. Además si definimos* $a^{-k} = b^k$ *para* $k > 0$, $a^0 = I$ *entonces* $a^k a^l =$ $= a^{k+l}$ *para* k,l *números enteros.*

VI) a *y* b *son inversibles sii* $U_a(b)$ *es inversible.*

La prueba presentada se debe esencialmente, a K. McCrimmon.

I) Si en la identidad (2.3) hacemos a = c y a es inversible con b como inverso tenemos :

$$[R_I, R_a] + [R_a 2, R_b] + [R_I, R_a] = 0 \Rightarrow [R_a 2, R_b] = 0$$

ya que $R_I = I$ en L(J).

$0 = [R_a 2, R_b](b) = a^2 b^2 - b(a^2 b) = a^2 b^2 - ba = a^2 b^2 - I \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 b^2 = I.$

$$b^2 a = b^2(a^2 b) = (b^2 a^2) b = b$$

Donde hemos aplicado el axioma A_2 . Luego b es inversible y a es su inverso.

II) *a)* $\Rightarrow$ *b):*

Si a es inversible con b como inverso tenemos:

$$U_a(b^2) = 2(ab^2)a - a^2b^2 = 2ba - I = I.$$

Donde hemos aplicado I) y el resultado $a^2b^2 = I$.

b) $\Rightarrow$ *c)*:

Por la hipótesis de $I \in \text{Imag } U_a \Rightarrow \exists c \in J \,/\, U_a(c) = I$

Entonces el operador $I = U_I = U_{U_a(c)} = U_a U_c U_a$ por el corolario 4.3.

Luego U_a es inversible en el álgebra, sobre K, L(J).

c) $\Rightarrow$ *a)*:

Sea $b = U_a^{-1}(a) \Rightarrow a = U_a(b)$ y $U_a(I) = a^2 = R_a(a) =$

$= R_a(U_a(b)) = U_a(R_a(b))$ por el axioma A_2.

Ya que U_a^{-1} existe, $U_a^{-1}(U_a(I)) = I = U_a^{-1}(U_a(R_a(b)) =$

$$= R_a(b) = ab.$$

Análogamente $U_a(a) = a^3 = R_a 2(a) = R_a 2(U_a(b)) =$

$$= U_a(R_a 2(b)) = U_a(a^2b) \Rightarrow a = a^2b$$

Luego a es inversible con b como inverso.

III) Si b es un inverso de a entonces:

$$U_a(b) = 2(ab)a - a^2b = a$$

Ya que por II) U_a^{-1} existe $\Rightarrow$ $b = U_a^{-1}(a) \Rightarrow b$ es único.

IV) $U_a(b) = a$. Luego $U_a = U_{U_a(b)} = U_aU_bU_a$ y por la existencia de $U_a^{-1} \Rightarrow I = U_aU_b = U_bU_a \Rightarrow U_b = U_a^{-1}$

$[R_b, U_b^{-1}] = [R_b, U_a] = [R_b, 2R_a^2 - R_a2] = 2[R_b, R_a^2] +$

$+ [R_a2, R_b] = 2[R_b, R_a^2]$ ya que hemos visto que $[R_a2, R_b] = 0$

Por otra parte $[R_b, U_b^{-1}] = 0$ en virtud de que $[R_b, U_b] = 0$

y $L(J)$ es asociativa, y por tanto si R_b conmuta con $U_b \Rightarrow$

$\Rightarrow R_b$ conmuta con U_b^{-1}

Luego $[R_b, R_a^2] = 0$.

Por último, si en la identidad 2.4 hacemos $a = c \Rightarrow$

$R_a = R_a + R_a2\, R_b + R_a - R_a^2R_b - R_bR_a^2 \Rightarrow (2R_a^2 - R_a2)R_b = R_a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U_aR_b = R_a \Rightarrow R_b = U_a^{-1}R_a$.

V) Por lo visto en las demostraciones anteriores el conjunto de operadores $\{R_a, U_a, R_b, U_b\}$ es conmutativo y ya que - R_ak y R_bl $k,l \geqslant 0$ son polinomios en R_a, U_a, R_b y U_b se sigue $[R_ak, R_bl] = 0$

Si $k > 0$ entonces $a^k a^{-1} = R_{a^{-1}} R_{a^{k-1}} (a) =$

$= R_{a^{k-1}} R_{a^{-1}} (a) = R_{a^{k-1}} (I) = a^{k-1}$

Suponiendo que $a^k a^{-(h-1)} = a^{k-h+1}$ para $h > 1$, obtenemos de $[R_{a^k}, R_{a^{-1}}] = 0$:

$$a^k a^{-h} = a^k (a^{-(h-1)} a^{-1}) = (a^k a^{-(h-1)}) a^{-1} = a^{k-h+1} a^{-1}$$

que por lo visto anteriormente es igual a a^{k-h} si $k-h+1 > 0$ y el resto es evidente si $k-h+1 = 0$ ó si es menor que 0 ó si k y h tienen el mismo signo, en virtud de la asociatividad de las potencias.

VI) Por la identidad fundamental del colorario 4.3 se tiene $U_{U_a(b)} = U_a U_b U_a$ y $U_a U_b U_a$ es inversible en el álgebra asociativa $L(J)$ sii U_a, U_b lo son $\Leftrightarrow$ a,b son inversibles.

COROLARIO.5.7.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad. Entonces* $a \in$ *inv(J) sii* $a^n \in$ *inv(J)*

En efecto:

Por el teorema 4.5, $U_{a^n} = U_a^n$. Asi pues U_{a^n} es inversible sii U_a lo es y ahora aplicamos el teorema anterior.

TEOREMA. 5.8.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad, B una subálgebra fuertemente asociativa que contiene la uni-*

dad de J, C *un subconjunto de B tal que si* $c \in C \Rightarrow c^{-1}$ *(inverso de* c *) existe en J y B' la subálgebra de J engendrada por B* $\cup C^{-1}$ $(C^{-1} = \{c^{-1} / c \in C\})$*. Entonces se verifica que B' es fuertemente asociativa.*

En efecto:

En virtud del lema 3.4, sabemos que un sistema de generadores para $R_J(\mathcal{B}')^*$ es el conjunto:

$$\{U_{a,b} \ / \ a,b \in \mathcal{B} \cup C^{-1}\}$$

Luego bastará probar que cualquier par de elementos de este conjunto , conmutan.

a) Si $a,b \in \mathcal{B} \Rightarrow U_{a,b} = R_a R_b + R_b R_a - R_{ab} \in R_J(\mathcal{B})^*$

b) Si $a^{-1} \in C^{-1}$ y $b \in \mathcal{B}$, en virtud del colorario 4.4 y del teorema 5.6, se tiene:

$$U_a U_{a^{-1},b} U_a = U_{U_a(a^{-1}), U_a(b)} = U_{a,U_a(b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{a^{-1},b} = U_a^{-1} U_{a,U_a(b)} U_a^{-1} =$$

$$= (2R_a^2 - R_{a^2})^{-1}(R_a R_{U_a(b)} + R_{U_a(b)} R_a - R_{a\,U_a(b)})\,(2R_a^2 - R_{a^2})^{-1}$$

Luego $U_{a^{-1},b}$ / $a^{-1} \in C^{-1}$ viene expresado como el producto de un elemento que pertenece a $R_J(\mathcal{B})^*$ por inversos de elementos que pertenecen a $R_J(\mathcal{B})^*$

c) Sean por último $a^{-1}, b^{-1}, \in C^{-1}$. En virtud del colorario 4.4, el teorema 5.6 y la conmutatividad de $R_J(\mathcal{B})^*$ se tiene:

$$U_b U_a U_{a^{-1},b^{-1}} U_a U_b = U_b U_{U_a(a^{-1}),U_a(b^{-1})} U_b = U_b U_{a,U_a(b^{-1})} U_b =$$

$$= U_{U_b(a),U_b(U_a(b^{-1}))} = U_{U_b(a),U_a(U_b(b^{-1}))} = U_{U_b(a),U_a(b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{a^{-1},b^{-1}} = U_a^{-1} U_b^{-1} U_{U_b(a),U_a(b)} U_b^{-1} U_a^{-1}$$

Luego tenemos, otra vez, $U_{a^{-1},b^{-1}}$ expresado como el producto de un elemento $U_{U_b(a),U_a(b)} \in R_J(\mathcal{B})^*$ por inversos de elementos que pertenecen a $R_J(\mathcal{B})^*$.

Finalmente la prueba queda concluida teniendo en cuenta el hecho de que en un álgebra asociativa A con unidad, si $a \in A$ es inversible y a conmuta con b (ab = ba) $\Rightarrow a^{-1}$ conmuta también con b.

DEFINICION 5.9.- Sea J un álgebra de Jordan con unidad y $\mathcal{B}$ una subálgebra de J. Diremos que $\mathcal{B}$ es plena, si contiene la unidad de J y si $a \in \mathcal{B}$ y $\exists\, a^{-1} \in J \Rightarrow a^{-1} \in \mathcal{B}$

Ya que evidentemente el conjunto X de los subálgebras fuertemente asociativas de un álgebra de Jordan J , está parcialemtne ordenada por la relación de inclusión y además tiene la propiedad de que cada subconjunto no vacio $M \subset X$ totalmente ordenado, posee una cota superior $(B = \bigcup_{C \in M} C)$ se sigue, en virtud del Lema de Zorn, cada subálgebra fuertemente asociativa de J esta contenida en una subálgebra - fuertemente asociativa maximal (9.III, p. 21).

Así pues, podemos establecer el siguiente colorario.

COROLARIO. 5.10.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad. Entonces toda subálgebra B fuertemente asociativa maximal de J es plena.*

En efecto:

Por supuesto, la unidad pertenece a B . Si B no fuese plena, en virtud del teorema 5.8 B puede sumergirse en una subálgebra B' fuertemente asociativa. Contradicción con la hipótesis de maximalidad de B .

COROLARIO. 5.11.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad I y sea $a \in J$. Entonces existe una subálgebra B de J plena, - - fuertemente asociativa y por supuesto conmutativa, tal que $a \in B$.*

La demostración se sigue del corolario 3.3 y del corolario anterior.

Basta considerar la subálgebra $K\{a,I\}$ engendrada por a y la unidad, y por tanto existirá una subálgebra fuertemente asociativa maximal que la contenga.

6. IDEALES PROPIOS. IDEALES MAXIMALES. IDEALES MODULARES.

DEFINICION.6.1.- Sea J un álgebra de Jordan. Diremos que un ideal M de J es propio, si no coincide con J. Un ideal diremos que es maximal si es propio y no está contenido en ningún otro ideal propio.

LEMA 6.2.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I. *Entonces un ideal* M *de J es propio sii* $I \notin M$.

La prueba es evidente.

COROLARIO. 6.3.- *Sea J en las hipótesis del lema anterior. Entonces si* $a \in J$ *es inversible* $\Rightarrow$ a *no puede pertenecer a ningún ideal propio.*

Trivial.

LEMA. 6.4.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad. En-*

demande de pret

demande no m41096 pour bensebah ali, mathematiques

svp toujours nous repondre avec notre numero de demande. merci

X martinez Moreno juan -Sí

sobre algebras de jordan normadas completas
these de doctorat, granada , secretariado de publicaciones
de la universidad de granada 1977

obs+ pret svp

10 coupons expédiés

si le pret n'est pas permis svp faire un devis avant de
reproduire

gilles chaput
pret entre bibliotheques
universite de montreal
c.p. 6128, succ a
montreal, quebec

tonces todo ideal propio M *de* J *esta contenido en un ideal maximal.*

En efecto:

El conjunto X de los ideales propios de J es inductivo con respecto a la relación de inclusión. El resto se sigue del lema de Zorn.

DEFINICION. 6.5.- Diremos que un álgebra de Jordan es simple si carece de ideales propios, salvo el cero.

Sea J un álgebra de Jordan y M un ideal de J. Se comprueba inmediatamente que con las operaciones canónicas, suma y producto en J/M, este conjunto es un álgebra de Jordan.

Evidentemente, los ideales propios de J/M son las imagenes por el homomorfismo canónico de J en J/M, de los ideales propios de J. En particular, los ideales maximales de J/M son las imagenes de los ideales maximales de J que contienen a M. Podemos pues establecer el siguiente lema.

LEMA. 6.6.- *Sea* J *un álgebra de Jordan y* M *un ideal maximal de* J. *Entonces* J/M *es un álgebra de Jordan simple.*

En efecto:

Supongamos que existe N, ideal propio distinto de cero (M) en J/M. La imagen inversa de N en J sería un ideal propio contenido a M y distinto de M . Contradicción con la maximalidad de M .

Nota.- Sea J un álgebra de Jordan con o sin unidad. Dados $u \in J$ y G un subconjunto de J notaremos:

$$G(I-u) = \{ a - au \ / \ a \in G \}$$

DEFINICION. 6.7.- Sea J un álgebra de Jordan. Un elemento $u \in J$ se dice que es una unidad modular para un subespacio lineal L de J o que L admite una unidad modular si - $J(I-u) \subset L$

Un ideal modular M de J es un ideal que admite una unidad modular.

Diremos que un ideal M es maximal modular si es propio y modular y no esta contenido en ningún otro de este tipo.

Evidentemente si J posee unidad I, esta es una unidad modular para cada subespacio lineal de J .

TEOREMA. 6.8.-*Sea J un álgebra de Jordan. Se verifican las siguientes porposiciones:*

I) Si u es una unidad modular para un subespacio lineal L de J, lo es para cualquier subespacio S conteniendo a L.

II) Si u es una unidad modular para un ideal propio M

entonces $u \notin M$.

III) Si M es un ideal modular propio de J. Entonces M esta contenido en un ideal maximal.

IV) Los ideales maximales modulares son ideales maximales.

En efecto:

I) Es evidente.

II) Por hipótesis $a - au \in M \ \forall a \in J$ y si $u \in M$ entonces $au \in M$ y $a = a - au + au \in M \ \forall a \in J \Rightarrow M$ no es propio. Contradicción.

III) Sea M ideal modular propio y u una unidad modular de M. Designamos por X el conjunto de todos los ideales propios N tal que $M \subset N$.

Por I) u es una unidad modular para cada $N \in X$ y por II) $u \notin N$.

Por consiguiente el conjunto X es inductivo respecto a la relación de inclusión. El resto se sigue del lema de Zorn.

IV) Evidente en virtud de I) y III).

7. *UNITIZACION DE UN ALGEBRA DE JORDAN. EL RADICAL DE JACOBSON.*

PROPOSICION. 7.1.- *Toda álgebra de Jordan J sin unidad puede ser sumergida monomorficamente en un álgebra de Jordan $J+K \equiv \tilde{J}$ con unidad, a la que llamaremos álgebra unitizada.*

En efecto:

Consideremos el conjunto $J\times K$ producto cartesiano de J por K, cuerpo conmutativo de escalares sobre el cual esta definido J . Si definimos la adición, producto por escalares y producto en $J\times K$ para todo $a,b\in J$ y $\alpha,\beta\in K$ por:

1) $(a,\alpha) + (b,\beta) = (a+b,\alpha +\beta)$

2) $\beta(a,\alpha) = (\beta a,\beta\alpha)$

3) $(a,\alpha) (b,\beta) = (ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta)$

es de inmediata comprobación, teniendo en cuenta la asociatividad de las potencias en J , que $J\times K\equiv J+K$ es un álgebra de Jordan con unidad $I\equiv(0,1)$ donde 1 es la unidad del cuerpo.

Finalmente la aplicación de J en $J+K$:

$$a \rightarrow (a,0)$$

es trivialmente un monomorfismo.

DEFINICION. 7.2.- Dada un álgebra de Jordan J diremos que $a \subset J$ es casi-inversible en J si I-a es inversible en el álgebra unitizada $\tilde{J}$. Al conjunto de los elementos casi-inversibles de J lo notaremos por q-inv(J).

Según hemos visto: (proposición anterior)

$$I-a = (o,1) - (a,0) = (-a,1)$$

y si a es casi-inversible, ha de existir $(b,\beta) \in \tilde{J}$ tal que

1) $(-a,1)\,(b,\beta) = (0,1)$

2) $(-a,1)^2\,(b,\beta) = (-a,1)$

1) $(-a,1)\,(b,\beta) = (-ab+b-\beta a,\beta) = (0,1) \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ -ab+b-a = 0 \end{cases}$

2) $(-a,1)^2\,(b,1) = (a^2-2a,1)\,(b,1) = (a^2b-2ab+a^2-2a+b,1) =$

$= (-a,1) \Rightarrow a^2b-2ab+a^2-2a+b = -a \Rightarrow a^2b-2ab+a^2+b = a$

Ya que $(b,1)$ es inversible en $\tilde{J}$ y $(b,1) = (0,1)-(-b,0) \Rightarrow$ $\Rightarrow -b$ sera casi-inversible en J y lo llamaremos el casi-inverso de a.

Si notamos $-b \equiv a^0$ y definimos un nuevo producto en J, que notaremos por $*$, al que designaremos con el nombre de casi-producto, en la forma:

$$a * b = -ab+b+a$$

Si a es casi-inversible y a^0 es su casi-inverso, se verifica pues:

1') $a * a^0 = 0$

2') $(a * a) * a^0 = a$

Recíprocamente, si se verifica 1') y 2') para $a, a^0 \in J$; a es casi-inversible y su casi-inverso es a^0.

Hemos probado pues que la definición 7.2 es equivalente a esta otra.

DEFINICION. 7.3.- Dada un álgebra de Jordan J diremos que $a \in J$ es casi-inversible y que a^0 es su casi-inverso si se verifican las relaciones 1') y 2').

COROLARIO. 7.4.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I. *Entonces* $a \in J$ *es casi-inversible y su casi-inverso es* a^0 *sii* I-a *admite por inverso* $I-a^0$.

En efecto:

$$(I-a)^2(I-a^0) = I-(a * a) * a^0$$

$$(I-a)(I-a^0) = I-(a * a^0)$$

LEMA. 7.5.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I , *M un ideal de J y* $a \in M$ *casi-inversible. Entonces el casi-inverso de* $a, a^0 \in M$.

En efecto:

$$I-a^0 = (I-a)^{-1} = U^{-1}_{(I-a)}(I-a) = U^{-1}_{I-a}(I-a)^2 - U^{-1}_{I-a}(a^2-a) =$$

$$= I-U^{-1}_{I-a}(a^2-a) \Rightarrow a^0 = U^{-1}_{I-a}(a^2-a) = U_{(I-a)^{-1}}(a^2-a) \in M$$

Donde hemos aplicado la linealidad del operador U_{I-a} y el teorema 5.6..

DEFINICION. 7.6.- Diremos que un subconjunto G de J, álgebra de Jordan, es casi-inversible si todos sus elementos lo son.

LEMA. 7.7.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I, M *ideal casi-inversible (y por tanto propio) de J,* $b \in M$ *y --* $a \in$ *inv(J). Entonces* $a-b \in$ *inv(J).*

En efecto:

$$U^{-1}_{a}(a-b)^2 = U^{-1}_{a}(a^2-2ab+b^2) = U^{-1}_{a}(a^2) - U^{-1}_{a}(2ab-b^2) =$$

$$= I - U^{-1}_{a}(2ab-b^2) \in inv(J) \text{ ya que } U^{-1}_{a}(2ab-b^2) \in M$$

Luego $U^{-1}_{a}(a-b)^2 = U_{a^{-1}}(a-b)^2 \in inv(J) \Rightarrow (a-b) \in inv(J)$

Donde hemos aplicado el corolario 5.7 y IV) del teorema 5.6.

LEMA. 7.8.- *Si* M_1 *y* M_2 *son dos ideales casi-inversibles en el álgebra de Jordan* J *con unidad* I. *Entonces* $M_1 + M_2$ *es un ideal casi-inversible.*

En efecto:

$M_1 + M_2$ es trivialmente un ideal. Sea pues $a \in M_1 + M_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = a_1+a_2 \Rightarrow I-a = I-(a_1+a_2) = I-a_1-a_2 = b-a_2$ y b es inversible.

Luego por el lema anterior $I-a \in inv(J) \Rightarrow a \in q\text{-}inv(J)$.

LEMA. 7.9.- *Sea* J *un álgebra de Jordan con unidad* I *y* $a \in J$ *casi-inversible. Entonces la clase* $a + M$ *es casi-inversible en* J/M, *donde* M *es un ideal de* J.

Recíprocamente si $a+M$ *es casi-inversible en* J/M, *donde* M *es un ideal casi-inversible, entonces* a *es casi-inversible en* J.

En efecto:

Sea a^0 el casi-inverso de a. Entonces a^0+M es el casi-inverso de $a+M$ en J/M como es facil de comprobar.

Recíprocamente si $a+M$ es casi-inversible en J/M , M - ideal casi-inversible, entonces existe $c+M$ casi-inverso de $a+M$ y $U_{I+M-(a+M)}(I+M-(c+M))^2 = I+M$.

Así pues $U_{I-a}(I-c)^2 + M = I + M \Rightarrow U_{I-a}(I-c)^2 = I-b$ para algun b perteneciente a $M \Rightarrow U_{I-a}(I-c)^2 \in inv(J) \Rightarrow I-a \in inv(J)$. Luego a es casi-inversible. Donde hemos aplicado el teorema 5.6 y el lema 7.7.

TEOREMA. 7.10.- *Dada J, álgebra de Jordan con unidad* I , *existe un ideal casi-inversible R(J) que contiene a todos los ideales casi-inversibles. Además J/R(J) no contiene ideales casi-inversibles salvo el cero.*

En efecto:

Consideremos el conjunto:

$$X = \{ M \ / \ M \text{ ideal casi-inversible de } J \}$$

y sea $R(J) = \sum_{M \in X} M$ definido en la forma:

$$m \in R(J) \text{ sii } m = \sum_{j=1}^{n} m_j \ / \ m_j \in M_j \in X$$

Evidentemente $R(J)$ es ideal y además casi-inversible en virtud del lema 7.8.

De los lemas 6.6 y 7.9 se sigue que $J/R(J)$ no contiene ideales casi-inversibles salvo el cero.

Este teorema junto con la proposición 7.1 nos permite dar la siguiente definición.

DEFINICION. 7.11.- Sea J un álgebra de Jordan. Definimos el radical de Jocobson de J y notamos $R(J)$, como el máximo de los ideales casi-inversibles de J. .

PROPOSICION. 7.12.- *Sea J un álgebra de Jordan. Entonces:*

$$R(J) = R(\tilde{J}) \cap J$$

En efecto:

Ya que $$(a,0) * (b,\alpha) = ((a * b) - \alpha a, \alpha)$$

$$((a,0) * (a,0)) * (b,\alpha) = ((a * a) * b + \alpha(a^2 - 2a), \alpha)$$

se sigue que $a \notin$ q-inv(J) sii $(a,0) \notin$ q-inv($\tilde{J}$).

Además todo ideal de J es un ideal en $\tilde{J}$.

DEFINICION. 7.13.- Diremos que un álgebra de Jordan es semisimple si su radical de Jocobson es cero.

Si recordamos que en un álgebra asociativa A un elemento $a \in A$ es casi-inversible sii I-a es inversible en el álgebra unitizada A+K y que I-a es inversible en A sii es inversible en A^+ . Y ya que una de las caracterizaciones del radical de Jocobson, $R(A)$, de un álgebra asociativa A viene dada por:

$R(A)$ es el"mas grande" ideal bilatero casi-inversible de A.

Podemos establecer el siguiente lema.

LEMA. 7.14.- *Sea A álgebra asociativa y A^+ el álgebra de Jordan subyacente a A. Entonces si A^+ es semisimple, A también lo es.*

En efecto:

Basta tener en cuenta que todo ideal bilatero en A es un ideal en A^+. Luego $R(A^+) \supseteq R(A)$

8. *COMPLEXIFICACION DE UN ALGEBRA DE JORDAN REAL.*

DEFINICION. 8.1.- Dada un álgebra de Jordan real J, la complexificación $J_{\mathbb{C}}$ de J es el conjunto $J\times J$ dotado de una suma, multiplicación por escalares y producto definidos:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

$$(\alpha+i\beta)\ (a,b) = (\alpha a-\beta b, \alpha b+\beta a)$$

$$(a,b)\ (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

para todo $a,b,c,d \in J$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

LEMA. 8.2.- *Sea J un álgebra de Jordan real. Entonces*

$J_{\mathbb{C}}$ es un álgebra de Jordan compleja y la aplicación $a \longrightarrow (a,0)$ *es un $\mathbb{R}$-monomorfismo de J en $J_{\mathbb{C}}$.*

En efecto:

Es inmediato verificar que $J_{\mathbb{C}}$ es álgebra. Veamos pues que verifica los axiomas A_1 y A_2 de la definición 1.2.

A_1: Trivial

A_2: Equivale a probar que $[R_{(a,b)^2}, R_{(a,b)}] = 0$

Para cada $T \in L(J)$ pondremos $\Psi(T)$: $(a,b) \to (T(a),T(b))$.

$T \to \Psi(T)$ de $L(J)$ en $L(J_{\mathbb{C}})$ es un $\mathbb{R}$-homomorfismo que transforma R_a en $R_{(a,0)}$

$$[R_{(a,b)^2}, R_{(a,b)}] = [R_{(a^2-b^2,2ab)}, R_{(a,b)}] =$$

$$= [R_{(a^2,0)}, R_{(a,b)}] - [R_{(b^2,0)}, R_{(a,b)}] + 2[R_{(0,ab)}, R_{(a,b)}] =$$

$$= [R_{(a^2,0)}, R_{(a,0)}] - [R_{(a^2,0)}, iR_{(b,0)}] - [R_{(b^2,0)}, R_{(a,0)}] +$$

$$+ [R_{(b^2,0)}, iR_{(b,0)}] - 2[iR_{(ab,0)}, R_{(a,0)}] + 2[iR_{(ab,0)}, iR_{(b,0)}] =$$

$$=[R_{(a^2,0)}, R_{(a,0)}] - i[R_{(a^2,0)}, R_{(b,0)}] -$$

$$- [R_{(b^2,0)}, R_{(a,0)}] + i[R_{(b^2,0)}, R_{(b,0)}] +$$

$$- 2i[R_{(ab,0)},R_{(a,0)}] - 2[R_{(ab,0)},R_{(b,0)}] =$$

$$= -i[R_{(a^2,0)},R_{(b,0)}] - [R_{(b^2,0)},R_{(a,0)}] -$$

$$- 2i[R_{(ab,0)},R_{(a,0)}] - 2[R_{(ab,0)},R_{(b,0)}] =$$

$$= -i\{[R_{(a^2,0)},R_{(b,0)}] + 2[R_{(ab,0)},R_{(a,0)}]\} -$$

$$- \{[R_{(a,0)},R_{(b^2,0)}] + 2[R_{(ab,0)},R_{(b,0)}]\} = 0 .$$

Donde hemos aplicado el $\mathbb{R}$-homomorfismo Ψ, el axioma A_2 y la identidad 2.3 para a=b.

El resto es trivial.

TEOREMA. 8.3.- *Sea J un álgebra de Jordan real. Se verifican las siguientes proposiciones:*

I) J posee elemento unidad sii $J_{\mathbb{C}}$ lo posee. Si I *es el elemento unidad de J, entonces* (I,0) *es el elemento unidad de $J_{\mathbb{C}}$.*

II) $a \in inv(J) \Leftrightarrow (a,0) \in inv(J_{\mathbb{C}})$ *y* $(a,0)^{-1} = (a^{-1},0)$

III) $a \in q\text{-}inv(J) \Leftrightarrow (a,0) \in q\text{-}inv(J_{\mathbb{C}})$ *y* $(a,0)^{o} = (a^{o},0)$

IV) $(a,b) \in q\text{-}inv(J_{\mathbb{C}}) \Leftrightarrow (a,-b) \in q\text{-}inv(J_{\mathbb{C}})$

En efecto:

I) Si I es la unidad de J , es trivial probar que (I,0) es la unidad de $J_{\mathbb{C}}$. Por otra parte (u,v) es la unidad de $J_{\mathbb{C}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (a,0)(u,v) = (au,av) = (a,0) \Rightarrow au = a \quad \forall\, a \in J$$

II) Si $a \in inv(J)$, en virtud del monomorfismo $a \to (a,0)$ y de I) $\Rightarrow (a,0) \in inv(J_{\mathbb{C}})$ y $(a,0)^{-1} = (a^{-1},0)$.

Por otra parte si $(a,0)^{-1} = (u,v) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a,0)(u,v) = (au,av) = (I,0) \Rightarrow au = I \\ (a,0)^2(u,v) = (a^2,0)(u,v) = (a^2u,a^2v) = (a,0) \Rightarrow a^2u=a. \end{cases}$$

Luego a es inversible en J .

III) La prueba es análoga a II)

IV) Se prueba también facilmente que si (a^o,b^o) es el casi-inverso de (a,b) entonces $(a^o, -b^o)$ es el casi-inverso de (a,-b) y viceversa.

C A P I T U L O I I

1. ALGEBRAS DE JORDAN NORMADAS.

DEFINICION. 1.1.- Un álgebra A real o compleja dotada de una norma $\| \ \|$, diremos que es normada si verifica:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \qquad \forall \ a,b \in A$$

También se dice que $\| \ \|$ es norma de álgebra sobre A.

Si el espacio lineal subyacente a A es de Banach, diremos que A es normada y completa.

Si A es álgebra asociativa, normada y completa, diremos simplemente que es un álgebra de Banach.

Es inmediato comprobar que si A es álgebra asociativa normada, A^+ también es normada. La recíproca no es, en general, cierta. Una condición suficiente será dada a continuación.

DEFINICION. 1.2.- Diremos que un álgebra asociativa A es semiprima si, el único ideal por la izquierda de A de cuadrado nulo es el cero.

LEMA. 1.3.- *Sea n un número natural y* A *un álgebra asociativa satisfasciendo la identidad* $a^n = 0 \ \forall \ a \in A$. *Entonces* $A^m = \{0\}$, *donde* $m = 2^n - 1$.(18. Appendix C.)

LEMA. 1.4.- *Sea J un álgebra de Jordan normada. Entonces se verifican las siguientes proposiciones:*

I) R_a *y* U_a *son operadores lineales y acotados de J en J (Notaremos* $R_a, U_a \in BL(J)$*).*

II) La aplicación g_R: $a \to R_a$ *de J en* $BL(J)$ *es lineal y continua (mas aun es un homeomorfismo, sobre un subespacio de* $BL(J)$, *si J posee unidad).*

III) La aplicación g_U: $a \to U_a$ *de J en* $BL(J)$ *es continua.*

En efecto:

I) y II) son triviales.

Para probar III) basta tener en cuenta que las aplicaciones:

g: $a \to a^2$ de J en J

Ψ: $T \to T^2$ de $BL(J)$ en $BL(J)$ con la topología fuerte

son continuas y $g_U = 2\Psi \circ g_R - g_R \circ g$

TEOREMA. 1.5.- *Sea A un álgebra asociativa sobre el cuerpo de los números reales o complejos y semiprima, tal que el espacio vectorial subyacente es de Banach. Entonces si A^+ es normada se verifica que, A es también normada.*

En efecto:

Demostraremos que la aplicación de $A \times A$ en A:

$$(1) \quad (a,b) \rightarrow ab$$

es continua $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \exists\ \alpha > 0 \ / \ \|ab\| \leq \alpha \|a\| \|b\|$$

y por consiguiente bastara subtituir la norma dada por otra equivalente: $\| \ \|' = \alpha \| \ \|$

En virtud del teorema de Banach-Steinhaus y con una aplicación particular (15. I, p. 43), bastará probar que la aplicación (1) es separadamente continua.

Sea pues $a \in A$ fijo y consideremos la aplicación lineal de A en A:

$$(2) \quad L_a : b \rightarrow ab$$

ya que $ab = a.b + 1/2[a,b]$, para probar la continuidad de la aplicación L_a, bastará con probar la continuidad de:

(3) $b \to [a,b]$

En virtud del teorema de la Grafica Cerrada, (3) será continua sii:

$$(4)\qquad \left.\begin{array}{c} \{b_n\} \to 0 \\ \{[a,b_n]\} \to b \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0$$

Probamos (4).

a) Sea $\{b_n\} \to 0$ y $\{[a,b_n]\} \to b$. Entonces $b^2 = 0$.

En efecto:

Ya que $\{[a,b_n]\} \to b \Rightarrow \{[a,b_n]^2\} = \{[a,b_n].[a,b_n]\} \to b^2$

y $\qquad [a,b_n]^2 = (ab_n)^2 + (b_n a)^2 - ab_n^2 a - b_n a^2 b_n =$

$$= 2a.U_{b_n}(a) - U_a(b_n^2) - U_{b_n}(a^2)$$

Luego en virtud del lema 1.4, ya que A^+ es normada, se sigue que $\{[a,b_n]^2\} \to 0$ y por tanto $b^2 = 0$.

b) Consideremos el conjunto:

$$M_a = \{ b \in A \ / \ \exists \{b_n\} \ / \{b_n\} \to 0 \text{ y } \{[a,b_n]\} \to b\}$$

veamos que M_a es un ideal de A^+

Trivialmente M_a es variedad lineal y si $b \in M_a$ y

$c \in A$ se tiene:

$[a, b_n . c] = [a, b_n] . c + [a, c] . b_n \Rightarrow \{b_n . c\} \to 0$ y $[a, b_n . c] \to b.c$

Luego $b.c \in M_a$.

De a) se sigue que $(b.c)^2 = 0 \Leftrightarrow (bc+cb)^2 = 0$

para todo $(b,c) \in M_a \times A$

Luego

$$(bc+cb)^2 = bcbc + cbcb + bccb = 0$$

Si multiplicamos a la izquierda por $b \Rightarrow b(cb)^2 = (cb)^3 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda b + cb)^3 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ y } \forall c \in A \text{ y } b \in M_a$$

Si para cada $b \in M_a$ consideramos el conjunto

$$M_{ab} = \{\lambda b + cb \; / \; \lambda \in \mathbb{C}, c \in A\}$$

trivialmente es una variedad lineal y además ideal de A por la izquierda. Y por lo visto anteriormente todos sus elementos son nihilpotentes de orden 3 ($a^3 = 0 \; \forall a \in M_{ab}$).

Por tanto, en virtud del lema 1.3, se verificará que

$$M_{ab}^7 = \{0\} \Rightarrow M_{ab}^8 = \{0\}$$

y aplicando la hipótesis de ser A semiprima se sigue que $M_{ab} = \{0\}$ y ya que $b \in M_{ab} \Rightarrow b = 0$ y por tanto la aplica--

ción (2) es continua.

Consideremos ahora la aplicación:

$$R_a : b \to ba$$

ya que ba = a.b+1/2[b,a], la continuidad de R_a se sigue de lo ya probado, pues [b,a] = -[a,b]

2. SUBALGEBRAS FUERTEMENTE ASOCIATIVAS EN UN ALGEBRA DE JORDAN NORMADA.

LEMA. 2.1.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y completa y sea B una subálgebra de J fuertemente asociativa. Entonces el cierre de B ($\bar{B}$) en J es subálgebra fuertemente asociativa.*

En efecto:

Trivialmente $\bar{B}$ es subálgebra asociativa y para probar que es fuertemente asociativa basta tener en cuenta la continuidad de la aplicación $a \to R_a$ de J en BL(J).

COROLARIO. 2.2.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y completa. Entonces toda subálgebra B fuertemente asociativa maximal de J es cerrada.*

Trivial por el lema anterior.

COROLARIO. 2.3.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad normada y completa y sea $a \in J$. Entonces existe una subálgebra B de J, plena, cerrada, fuertemente asociativa y por supuesto conmutativa tal que $a \in B$.*

En efecto:

La prueba se sigue del corolario I. 5.11 y del corolario anterior.

Por consiguiente el álgebra engendrada por un elemento $a \in J$ y la unidad puede ser sumergida en una autentica álgebra de Banach conmutativa.

3. *ELEMENTOS INVERSIBLES EN UN ALGEBRA DE JORDAN NORMADA.*

LEMA. 3.1.- *Sea J un álgebra con unidad* I *, normada y completa y sea* $a \in J$ *tal que* $\sum a^n$ *es convergente. Entonces se verifica que* I-a *es inversible y su inverso es* $(I-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$

En efecto:

Probamos que se verifica (1) y (2) de la definición I. 5. 2.

Sea $S_n = I + a + \ldots\ldots + a^n$

$$I-a^{n+1} = (I-a)(I+a+\ldots+a^n) = (I-a)S_n$$

Ya que por hipótesis $\{S_n\} \to c$ y $a^n \to 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_n (I-a^{n+1}) = I = \lim_n (I-a)S_n = (I-a)c$$

Luego se verifica (1).

Ya que el cierre del álgebra engendrada por a y la unidad I, $\overline{\mathbb{C}\{a,I\}}$, es álgebra de Banach y

$$c, I-a \in \overline{\mathbb{C}\{a,I\}} \Rightarrow c^2(I-a) = c(c(I-a)) = cI = c$$

Luego se verifica (2).

COROLARIO. 3.2.- *Sea J un álgebra de Jordan en las hipótesis del lema anterior. Entonces se verifica que, la bola abierta centrada en* I *y de radio* 1 , $B(I,1)$ *contiene únicamente elementos inversibles.*

En efecto:

Sea $a \in B(I,1)$ y consideremos la serie $\sum (I-a)^n$ que evidentemente es convergente ya que lo es en norma. El resto se sigue del lema anterior.

Es bien conocido que en un álgebra de Banach A con unidad el conjunto de los elementos inversibles es abierto. Las pruebas presentadas se apoyan en el corolario anterior y en el hecho de que si $a \in inv(A)$ y $ab \in inv(A) \Rightarrow b \in inv(A)$ o bien en el corolario 3.2 y en el hecho de que si a es inversible entonces la aplicación L_a es un homeomorfismo de A en si mismo (20). Y otras en donde la asociatividad es fundamental.

Los siguientes contraejemplos nos ponen de manifiesto que estas técnicas no pueden ser utilizadas en álgebra de Jordan.

Consideremos el álgebra asociativa $\mathcal{M}$ de las matrices reales 2×2 y el álgebra de Jordan $\mathcal{M}^+$.

Ejemplo (1):

Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $A, B \in \mathcal{M}$

Entonces: $A.B = 1/2\ (AB+BA) = 1/2 \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Se tiene que A es inversible en $\mathcal{M}^+$ y así mismo lo es también A.B y sin embargo no lo es B. Recordemos que de -- acuerdo con las definiciones I.5.1 y I.5.2 A es inversible en $\mathcal{M}^+$ sii lo es en $\mathcal{M}$.

Ejemplo (2):

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A, B \in \mathcal{M}$, entonces

$L_A(B) = A.B = 1/2(AB+BA) = 0$. Con lo que L_A no es inversible mientras que A sí lo es.

TEOREMA. 3.3.- *El conjunto de los elementos inversibles, inv(J), en un álgebra de Jordan J con unidad normada y completa es un abierto.*

En efecto:

Es bien conocido que en el álgebra de Banach con unidad BL(J), el conjunto inv(BL(J)) es abierto.

También en virtud del teorema de los isomorfismos de Banach, se tiene que, si

$$U_a \in BL(J) \quad y \quad U_a \in inv(L(J)) \Rightarrow U_a^{-1} \in BL(J).$$

Por el teorema I.5.6 se tiene

$$a \in inv(J) \Leftrightarrow U_a \in inv(L(J)) \Leftrightarrow U_a \in inv(BL(J)).$$

Luego por el lema 1.4.III)

$$inv(J) = g_U^{-1}(inv(BL(J)))$$

es abierto.

LEMA. 3.4.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad, normada y completa. Entonces la aplicación* $g : a \to a^{-1}$

de $inv(J)$ en sí mismo es un homeomorfismo.

En efecto:

Bastará probar la continuidad de g.

Consideremos las siguientes aplicaciones:

$g_1 : a \to (0,a)$ de J en $L(J)\times J$ (con la suma y norma canonicas)es trivialmente lineal y continua.

$g_U : a \to U_a$ de J en $BL(J)$, continua por el lema 1.4

$g_2 : T \to T^{-1}$ de $inv(BL(J))$ en si mismo, continua por ser $BL(J)$ álgebra de Banach.

$g_3 : T \to (T,0)$ de $L(J)$ en $L(J)\times J$ es así mismo lineal y continua.

$g_4 : (T,a) \to T(a)$ de $L(J)\times J$ en J que es también lineal y continua.

Ahora bien:

$$g(a) = g_4 \circ (g_3 \circ g_2 \circ g_U + g_1)(a) = U_a^{-1}(a) = a^{-1} \quad \forall a \in inv(J)$$

Donde hemos aplicado el teorema I.5.6.

Luego g es continua por ser suma y composición de aplicaciones continuas.

TEOREMA. 3.5.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad normada y completa. Entonces se verifica que la aplicación* $g : a \to a^{-1}$ *de inv(J) en sí mismo es diferenciable y su diferencial en* $a_0 \in inv(J)$ *es* $-U_{a_0^{-1}}$.

En efecto:

Por definicón, g será diferenciable en $a_0 \in inv(J)$ y su diferencial es $-U_{a_0^{-1}}$ si :

$$\lim_{a \to a_0} \frac{\| g(a) - g(a_0) + U_{a_0^{-1}}(a-a_0) \|}{\| a-a_0 \|} = 0$$

Ahora bien en A^+, donde A es álgebra asociativa con unidad construida sobre un cuerpo conmutativo de caracteristicas distinta de 2, se tiene:

$$(2) \quad g(a) - g(a_0) + U_{a_0^{-1}}(a-a_0) = a^{-1} - a_0^{-1} + U_{a^{-1}}(a-a_0) =$$

$$= U_{a_0^{-1}} \circ U_{(a-a_0)}(a^{-1})$$

Luego por el teorema de Macdonald con inversos la igualdad (2) se verificará para J . (También puede probarse aplicando U_{a_0} a (2) y haciendo uso del teorema I.5.6).

Por otra parte es inmediato probar que $\| U_a \| \leq 3 \| a \|^2$

así pues:

$$\|g(a) - g(a_0) + U_{a_0^{-1}}(a-a_0)\| = \|U_{a_0^{-1}} \circ U_{(a-a_0)}(a^{-1})\|$$

$$\|U_{a_0^{-1}}\| \, \|U_{(a-a_0)}\| \, \|a^{-1}\| \leq \|U_{a_0^{-1}}\| \, 3\|a-a_0\|^2 \, \|a^{-1}\|$$

Dividiendo esta última desigualdad por $\|a-a_0\|$ y tomando limite para $a \to a_0$ se concluye la prueba teniendo en cuenta el lema 3.4 y la continuidad de la aplicación norma.

4. *EL ESPECTRO. TEOREMAS BASICOS.*

DEFINICION. 4.1.- Sea J un álgebra de Jordan compleja con unidad I. El espectro de un elemento $a \in J$ es el conjunto de números complejos, que notaremos $Sp(J,a)$, definido:

$$Sp(J,a) = \{z \in \mathbb{C} \;/\; zI-a \notin inv(J)\}$$

Cuando no haya lugar a confusión notaremos simplemente $Sp(a)$.

Si B es un subálgebra plena de J , evidentemente se verifica

$$Sp(B,a) = Sp(J,a)$$

Por el corolario I.5.11 dado $a \in J$, donde J es un álgebra de Jordan con unidad, existe $\mathcal{B}$ subálgebra plena, asociativa y por supuesto conmutativa tal que $a \in \mathcal{B}$. Esto nos va ha permitir reducir el estudio de problemas en J , relacionados con el espectro de un elemento, a su estudio en el álgebra asociativa $\mathcal{B}$. No obstante, los teoremas clasicos, en álgebras de Banach, seran probados directamente.

PROPOSICION. 4.2.- *Sea J_1 y J_2 álgebras de Jordan complejas con unidad y g un homomorfismo de J_1 en J_2 tal que conserva la unidad. Entonces*

$$Sp(J_2, g(a)) \subseteq Sp(J_1, a)$$

En efecto:

$$a-zI \in inv(J_1) \Rightarrow g(a-zI) \in inv(J_2) \text{ y } g(a-zI) = g(a) - zg(I)$$

Luego si $z \in Sp(J_2, g(a)) \Rightarrow z \in Sp(J_1, a)$

DEFINICION. 4.3.- Sea J álgebra de Jordan normada y - sea $a \in J$. Definimos el radio espectral de a, que notaremos r(a):

$$r(a) = \inf\{\|a^n\|^{1/n} \ / \ n = 1,2,...\}$$

Evidentemente es una buena definición ya que

$$0 \leq \|a^n\|^{1/n} \leq \|a\| \quad \forall n = 1,2,\ldots\ldots$$

PROPOSICION. 4.4.- *Sea J álgebra de Jordan normada y sea* $a \in J$. *Entonces*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

En efecto:

Sea $r(a)$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y elijamos k / $\|a^k\|^{1/k} < r(a) + \varepsilon$ Cualquiera que sea n podemos escribir $n = p(n)k + q(n)$ con $p(n)$ y $q(n)$ enteros no negativos, $q(n) \leq k-1$ y $1/n\, q(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego $1/n\, p(n)k \to 1$ cuando $n \to \infty$.

$$\|a^n\|^{1/n} = \|a^{p(n)k + q(n)}\|^{1/n} \leq \|a^k\|^{1/n\, p(n)} \|a\|^{1/n\, q(n)} \to$$

$$\to \|a^k\|^{1/k} < r(a) + \varepsilon \text{ cuando } n \to \infty.$$

Así pues $\|a^n\|^{1/n} < r(a) + \varepsilon$ para n suficientemente grande y $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

Por otra parte la definición se sigue que $r(a) \leq \|a^n\|^{1/n}$ para todo n. Así pues:

$$r(a) \leq \|a^n\|^{1/n} < r(a) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ y } n \text{ suficientemente grande.}$$

De donde se concluye la prueba.

Esta prueba aparece en (6.I, p. 11)

COROLARIO. 4.5.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I *normada y completa y sea* $a \in J$ *tal que* $r(a) < 1$. *Entonces* I-a *es inversible.*

En efecto:

Podemos elegir $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ / $r(a) < \alpha < 1$ y por la proposición anterior $\|a^n\| < \alpha^n$, para n suficientemente grande. Por consiguiente la serie $\sum a^n$ será convergente. Ahora solo queda - aplicar el lema 3.1.

TEOREMA.4.6.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I *normada y completa. Entonces*

$$Sp(BL(J),R_a) \subseteq 1/2(Sp(a) + Sp(a)) \quad \forall a \in J$$

En efecto:

a) $\{R_a, R_{a^2}\}$ es un conjunto conmutativo en el álgebra de Banach $BL(J)$. Con ayuda del lema de Zorn, es facil probar que existe una subálgebra $\mathcal{B}$ conmutativa plena y cerrada de $BL(J)$ tal que $\{R_a, R_{a^2}\} \subseteq \mathcal{B} \subseteq BL(J)$.

b) Se prueba también que, si $\mu \in Sp(R_a) \Leftrightarrow \exists\, g$ homomorfismo no nulo de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{C}$ tal que $g(R_a) = \mu$ (43. II, p. 47).

c) $\forall z \in \mathbb{C}$, $U_{a-zI} = 2R^2_{a-zI} - R_{(a-zI)^2} =$

$$= U_a - 2zR_a + z^2 I \in \mathcal{B}.$$

Donde hemos aplicado la linealidad del operador $a \to R_a$ -

d) Si $g(U_{a-zI}) = 0 \Rightarrow z \in Sp(a)$ ya que por c), b) y el teorema I.5.6:

$$g(U_{a-zI}) = 0 \Rightarrow 0 \in Sp(U_{a-zI}) \Rightarrow U_{a-zI} \notin inv(\mathcal{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-zI \notin inv(\mathcal{J}) \Rightarrow z \in Sp(a).$$

e) Sea $\mu \in Sp(R_a) \Rightarrow \exists\, g$ homomorfismo tal que $g(R_a) = \mu$

Veamos que es posible encontrar $z \in \mathbb{C} \,/\, g(U_{a-zI}) = 0$.

$g(U_{a-zI}) = g(U_a) - 2zg(R_a) + z^2 = 0$. Ecuación de segundo grado en $\mathbb{C}$ que admite dos soluciones en z; z_1, z_2 distintas a no. Además $z_1+z_2 = 2\,\mu$

El resto de la prueba se sigue de d).

TEOREMA. 4.7.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I, *normada y completa. Entonces* Sp(a), $a \in J$, *es un compacto de* $\mathbb{C}$.

En efecto:

a) Sp(a) es cerrado pues la aplicación de $\mathbb{C}$ en J

$$f : z \to a-zI$$

es trivialmente continua y

$$\{z \in \mathbb{C} \ / \ a-zI \in \text{inv}(J)\} = f^{-1}(\text{inv}(J))$$

b) Sp(a) es acotado. Concretamente:

$$z \in Sp(a) \Rightarrow |z| \leq r(a)$$

pues si $z > r(a)$ entonces $r(a/z) < 1$ y el corolario 4.5 garantiza que $I-a/z \in \text{inv}(J) \Rightarrow a-zI \in \text{inv}(J) \Rightarrow z \notin Sp(a)$.

COROLARIO. 4.8.- *Sea J en las hipótesis del teorema anterior. Entonces* $r(R_a) = r(a)$.

En efecto:

Si $z \in Sp(R_a) \Rightarrow z = 1/2(z_1+z_2) \ / \ z_1, z_2 \in Sp(a)$ y ya que $|z_1| \leq r(a)$ y $|z_2| \leq r(a) \Rightarrow |z| \leq r(a)$ y esta desigualdad es cierta $\forall z \in Sp(R_a) \Rightarrow r(R_a) \leq r(a)$ (Recordemos que en el álgebra de Banach BL(J), $r(R_a) = \max\{|z| \ / \ z \in Sp(R_a)\}$)

Por otra parte $a^{n+1} = R_a^n(a) \Rightarrow \|a^{n+1}\| \leq \|R_a^n\| \ \|a\| \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\|a^{n+1}\|^{1/n+1})^{n+1/n} \leq \|R_a^n\|^{1/n} \ \|a\|^{1/n}$$

Luego tomando $\lim_{n\to\infty}$ en ambos miembros de la desigualdad, se tiene:

$$r(a) \leq r(R_a)$$

COROLARIO. 4.9.- *Sea J en las hipótesis del corolario anterior y sean* a,b $\in$ J *tal que* $\{a,b,c\}$ *es una parte asociativa de* $J, \forall c \in J$. *Entonces*

$$r(ab) \leq r(a)r(b) \quad y \quad r(a+b) \leq r(a) + r(b).$$

En efecto:

Nuestras hiótesis implican claramente:

$$R_{ab} = R_a R_b = R_b R_a$$

Ahora bien en el álgebra de Banach BL(J) la tesis de nuestro corolario es cierta para elementos que conmutan. Por tanto

$$r(ab) = r(R_{ab}) = r(R_a R_b) \leq r(R_a)r(R_b) = r(a)r(b)$$

$$r(a+b) = r(R_{a+b}) = r(R_a + R_b) \leq r(R_a) + r(R_b) = r(a) + r(b)$$

DEFINICION. 4.10.- Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y D un abierto de $\mathbb{C}$. La aplicación f de D en X se dice que es holomorfa sobra D si es diferenciable (en el sentido de Fréchet) en cada punto de D.

Ya que en este caso la aplicación derivada, que notaremos f', se identifica con un vector de X, $f'(z) = zx$, f será holomorfa en D sii:

$$(1) \qquad \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \quad \text{existe en } X$$

Una condición necesaria para que se verifique (1) es que

$$(2) \qquad \lim_{z \to z_o} x'\left(\frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}\right) \quad \text{exista para cada}$$

$x' \in X'$

Donde por X' designamos el dual topologico de X.

Ahora bien, la verificación de (2) significa que la función $x' \circ f$ de D en $\mathbb{C}$ sea holomorfa en el sentido usual.

Reciprocamente el Teorema de Dunford (16. III, p.93) nos asegura que si $x' \circ f$ es holomorfa $\forall x' \in X'$, entonces f es diferenciable.

Haciendo uso de estas nociones se puede desarrollar una teoria de funciones de $\mathbb{C}$ en X, analoga a la teoria ordinaria de funciones complejas. Así por ejemplo, se puede probar el Teorema de Cauchy para funciones holomorfas, la formula integral de Cauchy, Teorema de Cauchy-Hadamard, Principio del maximo y por consiguiente el Teorema de Liouville, etc. (16. III).

TEOREMA. 4.11.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I, *normada y completa y sea* $a \in J$. *Entonces la aplicación del* *abierto* $\mathbb{C}$-Sp(a) *en* J:

$$g : z \to (a-zI)^{-1}$$

es holomorfa.

En efecto:

g podemos descomponerla:

$$z \xrightarrow{g_1} a-zI \xrightarrow{g_2} (a-zI)^{-1}$$

g_1 es trivialmente diferenciable (por consiguiente continua) y su diferencial se identifica con -I

g_2 es continua y diferenciable por el teorema 3.5 y su diferencial es $-U_{(a-zI)^{-1}}$

Luego g es continua y diferenciable por ser composición de dos aplicaciones continuas y diferenciables. Además:

$$g'(z_o) = g_2'(g_1(z_o)) \; g_1'(z_o) = -U_{(a-z_oI)^{-1}}(-I) =$$

$$= (a-z_oI)^{-2}$$

TEOREMA. 4.12.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I, *normada y completa y sea* a $\in$ J. *Entonces se verifica:*

a) $Sp(a) \neq \phi$

b) $\exists\, z_o \in Sp(a) \;/\; |z_o| = r(a)$

En efecto:

a) Para $z \in \mathbb{C}$ / $|z| > r(a)$ la serie $\sum (a/z)^n$ es normalmente convergente con lo que por el lema 3.1 I-a/z es inversible y $(I-a/z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a/z)^n$. Entonces

$$g(z) = (zI-a)^{-1} = 1/z \sum_{n=0}^{\infty} a^n/z^n \underset{z \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

g es holomorfa por el teorema anterior y acotada en el infinito. Luego si Sp(a) fuese vacio, g sería una función - entera acotada en $\mathbb{C}$ y por consiguiente una constante, en virtud del Teorema de Liouville. Pero por lo visto, esta constante necesariamente sería cero, lo cual es imposible.

b) La serie $\sum a^n/z^{n+1}$ es el desarrollo de Laurantz centrado en cero de la función g y tiene por corona (degenerada) de convergencia $\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| > r(a)\}$ en virtud del Teorema de Cauchy-Hadamard y de la proposición 4.4. Luego ha de exis-- tir z_o (punto de no analiticidad de g) tal que $|z_o| = r(a)$ y $z_o \notin \mathbb{C}\text{-Sp}(a) \Leftrightarrow z_o \in \text{Sp}(a)$.

5. *COMPLEXIFICACION DE UN ALGEBRA DE JORDAN REAL Y NORMADA.*

DEFINICION. 5.1.- Sea Y un subconjunto de un espacio - lineal X construido sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Diremos que Y es absolutamente convexo si

$$x,y \in Y, \quad \alpha,\beta \in K\ (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})\ \text{y}\ |\alpha| + |\beta| \leq 1 \Rightarrow \alpha x+\beta y \in Y$$

DEFINICION. 5.2.- Sea Y un subconjunto de un espacio lineal X construido sobre K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Definimos la envolvente absolutamente convexa de Y que notamos por $|c_o|(Y)$, como la intersección de todos los subconjuntos absolutamente - convexos de X que contiene a Y.

TEOREMA. 5.3.- *Sea J un álgebra de Jordan real y normada, sea $J_{\mathbb{C}}$ la complexificada de J, sea $U = \{a \in J \ / \ \|a\| < 1\}$ sea $V = |C_o|(U \times \{o\})$ y sea p_V el funcional de Minkowski de V. Entonces se verifica:*

I) p_V *es una norma sobre el álgebra* $J_{\mathbb{C}}$.

II) $V = \{a \in J \ / \ p_V(a) < 1\}$

III) $\max(\|a\|, \|b\|) \leq p_V((a,b)) \leq 2 \max(\|a\|, \|b\|)$, $a,b \in J$

IV) $p_V((a,0)) = \|a\|, \quad a \in J$.

V) $J_{\mathbb{C}}$ *con la norma* p_V *es completa cuando J lo es.*

La prueba es identica a la presentada en (6. I, p. 68)

COROLARIO. 5.4.- *En las hipótesis del teorema anterior* *se verifica que* p_V *es la mayor norma sobre* $J_{\mathbb{C}}$ *tal que su - rectrición a* J *coincide con la norma* $\| \ \|$ *original de* J.

En efecto:

Sea $a \in J_{\mathbb{C}}$ y $p_V(a) < 1$ implica por II) que $a \in V \Rightarrow$

$$a = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)(a_k, 0) \ / \ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R} \text{ y } a_k \in U, \quad \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k + i\beta_k| \leq 1$$

Sea $\| \ \|'$ otra norma sobre $J_{\mathbb{C}}$ tal que su restricción a coincide con $\| \ \|$

$$\|a\|' = \| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)(a_k, 0)\|' \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k + i\beta_k| \ \|(a_k, 0)\|' =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k + i\beta_k| \ \|a_k\| < 1$$

Luego ya que si $p_V(a) < 1 \Rightarrow \|a\|' < 1$ se sigue que

$$\|a\|' \leq p_V(a) \qquad \forall a \in J_{\mathbb{C}}$$

LEMA.- 5.5.- *Sea* J *un álgebra de Jordan sin unidad y normada. Entonces el álgebra unitizada* $\tilde{J} = J + K$ $(K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ *se puede dotar de una norma tal que el monomorfismo* $a \to (a, 0)$ *de* J *en* $\tilde{J}$ *es un monomorfismo isometrico.*

En efecto:

Para cada $(a, \alpha) \in \tilde{J}$ definimos:

$$(1) \qquad \|(a,\alpha)\| = \|a\| + |\alpha|$$

que trivialmente es una norma sobre el espacio lineal subyacente a $\tilde{J}$.

Por otra parte:

$$\|(a,\alpha)(b,\beta)\| = \|(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta)\| = \|ab+\alpha b+\beta a\| + |\alpha\beta| \leq$$

$$\leq \|a\| \, \|b\| + |\alpha| \, \|b\| + |\beta| \, \|a\| + |\alpha| \, |\beta| =$$

$$= (\|a\| + |\alpha|)(\|b\| + |\beta|) = \|(a,\alpha)\| \, \|(b,\beta)\|$$

Luego $\tilde{J}$ es álgebra normada.

El resto es trivial.

TEOREMA. 5.6.- *Toda álgebra de Jordan J real, sin unidad y normada puede ser sumergida mediante un monomorfismo isometrico en un álgebra de Jordan con unidad, normada y compleja.*

En efecto:

Por el lema anterior J puede sumergirse mediante un monomorfismo isometrico en un álgebra de Jordan con unidad, real y normada. Ahora aplicariamos el teorema 5.3. IV) y el lema I. 8.2.

6. EL TEOREMA DE LA APLICACION ESPECTRAL. CALCULO FUNCIONAL.

LEMA. 6.1.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja con unidad, sea* a $\in$ J *y sea P el álgebra de las funciones polinomicas de* $\mathbb{C}$ *en* $\mathbb{C}$. *Notamos por p(a) el elemento de J dado por* $p(a) = \alpha_o I+\alpha_1 a+.....+\alpha_n a^n$, $n \in N$, *donde*

$$p(z) = \alpha_o+\alpha_1 z+....+ \alpha_n z^n \in P$$

Evidentemente p(a) *esta bien definido.*

Entonces la aplicación: $p \rightarrow p(a)$ *de P en J es un homomorfismo.*

La prueba es trivial sin mas que tener en cuenta la asociatividad de las potencias del elemento a.

TEOREMA. 6.2.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja con unidad* I , *sea* $a \in J$ *y sea* $p \in P$ *no constante. Entonces se verifica:*

$$Sp(p(a)) = \{p(z) \ / \ z \in Sp(a)\}$$

En efecto:

Sea $z_o \in \mathbb{C}$, entonces existen $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_o \in \mathbb{C}$ /

$$z_o-p(z) = \alpha_o(\alpha_1-z)(\alpha_2-z)....(\alpha_n-z), \quad \alpha_o \neq 0$$

Por consiguiente, en virtud del lema anterior

$$z_o I-p(a) = \alpha_o(\alpha_1 I-a)\ldots(\alpha_n I-a)$$

Ya que p es no constante y en virtud del corolario - I.5.11 $z_o I-p(a)$ es no inversible sii $\alpha_k I-a$ es no inversible para algun k, es decir, sii $\alpha_k \in Sp(a)$.

Luego $z_o \in Sp(p(a))$ sii $z_o - p(z) = 0$ para algun $z \in Sp(a)$

Una prueba alternativa de este teorema puede darse -- utilizando el Teorema de Cohn-Shirhov.

Nota.- Hasta ahora toda la teoria expuesta en este capitulo, salvo el apartado 2, se ha desarrollado a nivel de álgebra de Jordan (en el teorema anterior se puede utilizar la otra versión indicada). Sin embargo en la proxima definición y por consiguiente en los teoremas 6.4 y 6.7, la propiedad asociativa es esencial.

DEFINICION. 6.3.- Sea J álgebra de Jordan compleja con unidad, sea $a \in J$ y sea $f \in R(a)$, donde $R(a)$ es el álgebra de las funciones racionales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ cuyos polos no pertenecen a Sp(a). Así pues $f = p/q$ / $p, q \in P$ y q no admite ceros en Sp(a).

Por el teorema 6.2, $0 \notin Sp(q(a))$ y por consiguiente -- $q(a) \in inv(J)$. Podemos pues definir:

$$f(a) = p(a)(q(a))^{-1}$$

Ya que la representación de f por p/q es unica, salvo factores comunes del numerador y denominador, se sigue por el corolario I.5.11, que el elemento $f(a)$ es independiente de la elección de p,q.

TEOREMA. 6.4.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja con unidad y sea* $a \in J$. *Entonces la aplicación* $f \to f(a)$ *es un homomorfismo de* $R(a)$ *en J que extiende el homomorfismo de* $P(a)$ *en J y además se verifica:*

$$Sp(f(a)) = \{f(z) \ / \ z \in Sp(a)\} \qquad f \in R(a), f \neq C^{te}$$

En efecto:

La primera parte es evidente por lo ya conocido y la segunda es análoga al teorema 6.2.

Evidentemente toda función $f \in R(a)$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{$ polos de $f \}$ que es entorno de $Sp(a)$.

El siguiente lema es bien conocido. Una prueba elemental puede verse en (6. I, p. 29) o en (23.T.1.I,p. 66).

LEMA. 6.5.- *Sea D un abierto de* $\mathbb{C}$ *y sea* $K \subset D$, *K compacto. Entonces es posible encontrar un abierto acotado W al que llamaremos envolvente del par* (K,D) *tal que:*

I) $K \subset W \subseteq D$

II) La frontera de W, ∂W, *es unión finita de curvas* -

rectificables contenidas en $\mathcal{D}$ y además ∂W rodea positivamente una sola vez a cada punto de K.

Con ayuda de este lema y los teoremas 4.7 y 4.11, podemos establecer la siguientes definición.

DEFINICION. 6.6.- Dados J álgebra de Jordan compleja, con unidad I, normada y completa, $a \in J$, $\mathcal{D}$ un entorno abierto de Sp(a) y $f \in H(\mathcal{D})$ (álgebra de las funciones complejas holomorfas en $\mathcal{D}$). Notamos por $f(a)$ el elemento de J definido por:

$$f(a) = 1/2\pi i \int_{\partial W} f(z)(zI-a)^{-1} dz$$

donde W es la envolvente del par $(Sp(a), \mathcal{D})$.

Para que sea una buena definición es preciso ver que $f(a)$ no depende del W elegido. Este hecho nos lo da, precisamente, la versión de la formula integral de Cauchy para este caso.

TEOREMA. 6.7.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja con unidad, normada y completa, sea $a \in J$ y $\mathcal{D}$ un entorno abierto de $Sp(a)$. Entonces :*

I) Dada $f \in H(\mathcal{D})$, $f(a)$ es independiente de la elección de la envolvente W del par $(Sp(a), \mathcal{D})$.

II) La aplicación $f \to f(a)$ es un homomorfismo de $H(D)$ en J que extiende el homomorfismo natural $f \to f(a)$ de $R(a)$- en J.

III) Dado un entorno compacto K de $Sp(a)$ contenido - en D, la aplicación $f \to f(a)$ es continua con respecto a la - convergencia uniforme sobre K.

IV) $Sp(f(a)) = \{f(z) \;/\; z \in Sp(a)\}$, $f \in H(D)$.

En virtud del corolario 2.3, la prueba queda reducida al caso de un álgebra de Banach que además es conmutativa. Una excelente demostración puede verse en (6.I, p. 33) o -- bien en(28.I, p. 12-17).

C A P I T U L O I I I

1. EL PROBLEMA DE LA UNICIDAD DE LA NORMA.

TEOREMA. 1.1.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I, *normada y completa y sea M un ideal de J. Entonces* $\overline{M}$ *es un ideal propio sii M lo es.*

En efecto:

$\overline{M}$ es trivialmente un ideal.

M es propio $\Leftrightarrow$ I $\notin$ M $\Leftrightarrow$ M no contine elementos inversibles $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow M \subset [\mathrm{inv}(J) \Leftrightarrow \overline{M} \subseteq [\mathrm{inv}(J) \Leftrightarrow I \notin \overline{M} \Leftrightarrow \overline{M}$ es propio.

Donde hemos aplicado el lema I.6.2 y el teorema II.3.3.

COROLARIO. 1.2.- *Sea J en las mismas hipótesis del teorema anterior. Entonces, si M es ideal maximal de J, M es - cerrado.*

PROPOSICION. 1.3.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y completa y M un ideal cerrado de J. Entonces J/M es un álgebra de Jordan normada y completa.*

En efecto:

Sabemos que J/M es álgebra de Jordan. También es bien conocido que el cociente de un espacio de Banach por una variedad lineal cerrada es un nuevo espacio de Banach, donde hemos definido la norma:

$$(1) \quad \|a+M\| = \{\inf \|a+c\| \; / \; c \in M\} \quad \forall a \in J$$

Finalmente:

$$\|(a+M)(b+M)\| = \|ab+M\| = \inf\{\|ab+c\| \; / \; c \in M\} \leq$$

$$\leq \|ab+(ad+eb+ed)\| = \|(a+e)(b+d)\| \leq$$

$$\leq \|a+e\| \, \|b+d\| \quad \forall e,d \in M \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|(a+M)(b+M)\| \leq \|a+M\| \, \|b+M\|$$

LEMA. 1.4.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad* I, *y simple. Sean* $\| \ \|$ *y* $\| \ \|'$ *dos normas sobre el espacio lineal subyacente a J que la dotan de estructura de álgebra - normada y completa. Consideremos el conjunto:*

$$M = \{a \in J \; / \; \exists \{a_n\} \; / \; \{a_n\} \xrightarrow{\| \ \|} 0 \text{ y } \{a_n\} \xrightarrow{\| \ \|'} a\}$$

Entonces se verifica que $M = \{0\}$

En efecto:

Demostraremos que M es un ideal y que $I \notin M$ es decir - M es propio. Luego $M = \{0\}$ ya que J es simple.

a) M es trivialmente un ideal.

b) M es propio:

Sea $a \in M \Rightarrow \exists \{a_n\} \subset J / \{a_n\} \xrightarrow{\| \ \|} 0 \Rightarrow \exists \{z_n\} \subset \mathbb{C} /$

$/ z_n \in Sp(a_n)$ (por el teorema II.4.12) y $\{z_n\} \to 0$ ya que por el teorema II.4.7 $|z_n| \leq \|a_n\|$

Ahora bien de $\{a_n\} \xrightarrow{\| \ \|'} a$ y de lo anterior, se deduce - que $\{a_n - z_n I\} \xrightarrow{\| \ \|'} a$ y $a_n - z_n I$, $\forall$ n, es no inversible.

Luego, por el teorema II. 3. 3, a es no inversible y por consiguiente $I \notin M$.

TEOREMA. 1.5.- *Sea J un álgebra de Jordan con unidad y simple. Sean $\| \ \|$ y $\| \ \|'$ dos normas sobre el espacio lineal - subyacente a J que la dotan de estructura de álgebra normada y completa. Entonces ambas normas son equivalentes.*

En efecto:

Consideremos la aplicación identidad:

$$i: a \to a$$

del espacio de Banach $(J, \| \ \|)$ en el espacio de Banach $(J, \| \ \|')$

Sea $\{a_n\} \subset J$ tal que:

$\{a_n\} \xrightarrow{\| \ \|} 0$ y $\{a_n\} = i\{a_n\} \xrightarrow{\| \ \|'} a$; por el lema anterior a= 0 y por el Teorema de la Grafica Cerrada, i es continua; ya que es biyectiva, se sigue, del Teorema de los isomorfismos de Banach que es bicontinua.

Luego i es un homeomorfismo lineal de $(J,\| \|)$ en -- $(J,\| \|')$ y $\| \|$, $\| \|'$ son equivalentes.

TEOREMA. 1.6.- *El conjunto de los elementos casi-inversibles de un álgebra de Jordan J normada y completa es -- abierto.*

En efecto:

Las aplicaciones:

$$a \rightarrow I-a \text{ de } J \text{ en } J \text{ , si } J \text{ posee unidad}$$

$$a \rightarrow (-a,1) \text{ de } J \text{ en } \tilde{J}$$

son continuas.

El resto se sigue del teorema II.3.3 y de que

$$q\text{-inv}(J) = \{a \in J \ / \ I-a \in \text{inv}(J)\}$$

$$q\text{-inv}(J) = \{a \in J \ / \ (-a,1) \in \text{inv}(\tilde{J})\}.$$

respectivamente.

TEOREMA. 1.7.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y - completa y sea* $a \in J \ / \ r(a) < 1$. *Entonces* a *es casi-inversible y su casi-inverso* a^{o} *viene dado por* $a^{o} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{n}$

En efecto:

Si J posee unidad la prueba queda reducida al corolario II.4.5 y el lema II.3.1.

Sea pues J sin unidad

a será casi-inversible en J sii $(0,1)-(a,0) = (-a,1)$ es inversible en $\tilde{J}$.

Ahora bien por el lema II.5.5 $r((a,0)) = r(a) < 1$, luego del corolario II.4.5 se sigue que $(-a,1)$ es inversible y además por el corolario I.7.4, $(0,1) - (a^o,o)$ es su inverso. Luego por el lema II.3.1:

$$(0,1) - (a^o,0) = \sum_{n=0}^{\infty}(a,0)^n = (a,0)^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a^n,0) = (0,1) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(a^n,0) \Rightarrow -(a^o,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(a^n,0) \Rightarrow a^o = -\sum_{n=1}^{\infty}a^n$$

TEOREMA. 1.8.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y completa, sea M un ideal modular propio de J y sea u una unidad modular para M. Entonces se verifica:*

I) $\|u-a\| \geq 1 \ \ \forall a \in M$

II) El cierre de M es un ideal modular propio de J.

En efecto:

I) Supongamos que $\exists a \in M \ / \ \|u-a\| < 1$. Entonces, en virtud del teorema 1.7, u-a admite un casi-inverso $(u-a)^o \equiv b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ bu-ba+a-u-b = 0 $\Rightarrow$ u = (bu-b)-ba+a

Contradicción con II) del teorema I.6.8.

II) Evidentemente los elementos de $\overline{M}$ verifican I), luego $\overline{M}$ es propio y además modular en virtud de I) del teorema I.6.8.

COROLARIO. 1.9.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y completa. Entonces se verifica que, cada ideal maximal modular de J es cerrado.*

En efecto:

La prueba se sigue del apartado II) del teorema anterior.

DEFINICION. 1.10.- Diremos que un álgebra de Jordan es fuertemente semisimple si la intersección de sus ideales maximales modulares es cero.

TEOREMA. 1.11.- *Sea J un álgebra de Jordan fuertemente semisimple normada y completa. Entonces se verifica la unicidad de la norma, es decir: cualquier otra norma definida sobre J, que dote a J de estructura de álgebra normada y completa, es equivalente a la dada.*

En efecto:

Sea M un ideal maximal modular de J. Por el lema I.6.6

el corolario 1.9 y la proposición 1.3; J/M es un álgebra de Jordan con unidad,(si u es unidad modular para M, u+M es - unidad del álgebra J/M) simple, normada y completa.

También se verifica que la sobreyección canónica:

$$J \xrightarrow{j} J/M$$

es continua.

Consideremos la aplicación identidad i de $(J,\|\ \|)$ en - $(J,\|\ \|')$ y sea $\{a_n\} \subset J$ tal que

$$\{a_n\} \xrightarrow{\|\ \|} 0 \text{ y } \{a_n\} = i\{a_n\} \xrightarrow{\|\ \|'} a$$

$\{a_n\} \xrightarrow{\|\ \|} 0 \Rightarrow \{a_n + M\} \xrightarrow{\|\ \|} M$ por la continuidad de j

$\{a_n\} = i\{a_n\} \xrightarrow{\|\ \|'} a \Rightarrow \{a_n + M\} \xrightarrow{\|\ \|'} a+M$ por la continuidad de j.

Ahora bien, por el teorema 1.5 en J/M todas las normas son equivalentes $\Rightarrow$ a+M = M $\Rightarrow$ a $\in M$ y esto es cierto cualquiera que sea M, ideal modular maximal de J , y a fijo. Por tanto, a pertenece a la intersección de todos los M y por -- consiguiente a = 0, por ser J fuertemente semisimple.

El resto se sigue, como en el teorema 1.5, del Teorema de la Grafica Cerrada y del Teorema de los isomorfismos de Banach.

TEOREMA. 1.12.- (Johnson). *Sea A un álgebra de Banach semisimple. Entonces se verifica la unicidad de la norma de A.* (6.III, p. 130).

LEMA. 1.13.- *Sea A un álgebra asociativa semisimple. Entonces A es semiprima.* (6.IV, p. 155).

TEOREMA. 1.14.- *Sea A álgebra real o compleja y asociativa. Supongamos que A^+ es semisimple, normada y completa. Entonces en A^+ se verifica la unicidad de la norma.*

En efecto:

Por el lema I.7.14 A es semisimple $\Rightarrow$ por el lema anterior, A es semiprima. En virtud del teorema II.1.5 las normas de álgebra completas de A^+ son las mismas que las normas de álgebras completas de A. El teorema 1.12 concluye la demostración.

CUESTION ABIERTA. Probar la unicidad de la norma de álgebra en un álgebra de Jordan normada, completa y semisimple.

2. *PROPIEDAD TOPOLOGICA DEL RADICAL DE JACOBSON DE UN ALGEBRA DE JORDAN.*

TEOREMA. 2.1.- *Sea J un álgebra de Jordan normada y completa. Entoces se verifica que, el radical de Jacobson de J* *es un cerrado de J.*

En efecto:

No se pierde generalidad, en virtud de la proposición I.7.12, si suponemos que J posee unidad.

Se tiene que:

Si a es no inversible y $m \in R(J) \Rightarrow a+m$ es no inversible ya que, en virtud del lema I.7.7, si a+m fuese inversible - $a+m-m = a \in inv(J)$. Contradicción.

Vamos a probar que $\overline{R(J)}$ es también un ideal casi-inversible, con lo que evidentemente será $R(J) = \overline{R(J)}$, en virtud de la definición del radical.

Trivialmente $\overline{R(J)}$ es un ideal.

Sea pues $\{b_n\} \to b$ / $b_n \in R(J)$ y a no inversible $\Rightarrow a+b_n$ es no inversible, y ya que los elementos no inversibles forman un conjunto cerrado $\Rightarrow$ a+b es no inversible. Luego:

$$b \in \overline{R(J)} \text{ y a es no inversible} \Rightarrow a+b \text{ no inversible.}$$

Por consiguiente si $b \in \overline{R(J)}$ y a es inversible $\Rightarrow$ a+b es in-- versible. En particular para $a = -I \Rightarrow b-I$ es inversible $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $I-b$ inversible $\Leftrightarrow$ b es casi-inversible.

COROLARIO. 2.2.- *Sea J en las hipótesis del teorema - anterior. Entonces J/R(J) es álgebra de Jordan normada completa y semisimple.*

C A P I T U L O I V

1. RANGO NUMERICO DE UN ELEMENTO DE UN ESPACIO LINEAL, COMPLEJO Y NORMADO.

DEFINICION. 1.1.- Dado un espacio lineal complejo y -- normado X, fijamos un elemento $I \in X$ / $\|I\| = 1$ al que llamaremos elemento "distinguido" de X. En el caso de que X sea - un álgebra normada con unidad I y $\|I\| = 1$, diremos que X es un álgebra unital. (I será siempre el elemento distinguido)

NOTACION.- X va a ser un espacio lineal complejo y normado con un elemento distinguido I. Por X' notaremos el -- dual topológico de X.

$$B(X') = \{x' \in X' \ / \ \|x'\| \leq 1\}$$

DEFINCION. 1.2.- Sea el conjunto:

$$D(X,I) = \{x' \in B(X') \ / \ x'(I) = 1\}$$

Evidentemente $D(X,I) \neq \phi$, en virtud del Teorema de Hahn-Banach.

Se define el rango numérico de un elemento $x \in X$, y notaremos $V(X,x,I)$ o simplemente $V(x)$, como el conjunto de los - números complejos:

$$V(x) = \{x'(x) \ / \ x' \in D(X,I)\}$$

A los elementos de $D(X,I)$ se les llama estados normalizados ("states").

LEMA. 1.3.- *Sea* Y *un subespacio lineal de* X *tal que* $I \in Y$. *Entonces*

$$V(Y,y) = V(X,y) \quad \forall\, y \in Y$$

La prueba es idéntica a la presentada en (5.I,p. 16) para álgebras unitales.

LEMA. 1.4.- $D(X,I)$ *es un subconjunto convexo y compacto con la topología debil-*.*

TEOREMA. 1.5.- *Se verifican las siguientes proposiciones:*

I) $V(x)$ *es un subconjunto no vacio, convexo y compacto de* $\mathbb{C}$.

II) $V(\alpha I+\beta x) = \alpha+\beta V(x)$ y $V(x+y) \subset V(x)+V(y)$

$x,y \in X$ y $\alpha\ \beta \in \mathbb{C}$

III) $|z| \leq \|x\| \quad \forall\, z \in V(x)$.

En efecto:

I) Se sigue del lema anterior y de la debil-* continuidad de la aplicación $x' \to x'(x)$ de X' en $\mathbb{C}$

II) y III) triviales por la definición 1.2.

DEFINICION. 1.6.- Definimos el radio numérico de un elemento $x \in X$,y notamos $v(x)$:

$$v(x) = \max\{|z| \;/\; z \in V(x)\}$$

Del teorema 1.5, II) se deduce que $v(.)$ es una seminorma sobre X.

$v(x) = \max\{|z| \;/\; z \in V(x)\} = 0 \Rightarrow V(x) = \{x'(x) \;/\; x' \in D(X,I)\} = 0$

Por tanto si $D(X,I)$ es total (es decir: $x'(x) = 0$ $\forall x' \in D(X,I) \Rightarrow x = 0$) se sigue que, si $v(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ y por consiguiente $v(.)$ sería una norma sobre X.

Por definición se dice que I es vértice de la bola unidad o simplemente vértice, si $D(X,I)$ es total. De aquí que, el radio numérico,respecto de un punto vértice, sea una norma sobre X. El problema radica en detectar los puntos vértices.

A nivel de espacios de Banach, se sabe que los vértices son invariantes bajo isometrias y que cada punto vértice es punto extremo de la bola unidad (7).

Para el caso de álgebras de Banach unitales, se sabe que la unidad es un vértice y que los elementos unitarios ($\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$) son vértices pero no al reves (7.ej. 2, p. 221).

También es sabido que $v(.)$,respecto de la unidad I tal que $\|I\| = 1$, es una norma,sobre el espacio lineal subyacente a un álgebra de Banach unital, equivalente a la de partida -

(5.I, p. 34).

Respecto a la posibilidad de ser v(.) una norma de álgebra sobre un álgebra de Banach unital A , se sabe que, si $r(a) = v(a)$, entonces A es conmutativa y $v(a)$ es una norma de álgebra sobre el álgebra A, equivalente a la de partida. (5.I, p. 40).

Es bien sabido (6.I, p. 19) que si A es un álgebra de Banach conmutativa entonces $r(a)$ es una seminorma de álgebra sobre el álgebra A . Sin embargo no podemos afirmar lo mismo para el radio numérico.

Para álgebras de Jordan unitales y completas también - se verifica que v(.), respecto a la unidad,es una norma lineal equivalente a la de partida y en consecuencia la unidad es un vertice.(Teorema 2.5 y corolario 2.6)

La prueba de Moore (44. 31,p.100)del hecho de que - A' (donde A es álgebra unital y compleja) es la envolvente lineal de $D(A,I)$, vale también para el caso Jordan.

LEMA. 1.7.- *Sean X,Y espacios lineales complejos y normados y g una isometria lineal de X en Y , conservando el - elemento distinguido. Entonces se verifica que*

$$V(X,x) = V(Y,g(x)), \quad x \in X$$

En efecto:

Sea y' un state de Y $\Rightarrow$ $y' \circ g$ es un state de X

Luego $V(Y,g(x)) \subseteq V(X,x)$.

Reciprocamente; considerando a X como subespacio lineal de Y, si x' es un state de X', en virtud del Teorema de -- Hahn-Banach, x' puede extenderse a un state de Y'.

Luego $V(X,x) \subseteq V(Y,g(x))$.

LEMA. 1.8.- *Sea* X *un espacio lineal, complejo y normado con elemento distinguido* I . *Entonces:*

$$V(x) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} E(z, \|zI - x\|)$$

donde $E(z,\|zI - x\|)$ *es el disco centrado en* z *y radio* $\|zI-x\|$

La prueba es análoga a la presentada en (6.I, p. 52) - para un álgebra asociativa, compleja y unital.

DEFINICION. 1.9.- Sea X un espacio lineal complejo, - normado con elemento distinguido I. Diremos que un elemento $x \in X$ es hermitiano sii $V(x) \subset \mathbb{R}$. Al conjunto de los elementos hermitianos de X lo notaremos H(X). Evidentemente H(X) es una variedad lineal real.

2. RANGO NUMERICO EN ALGEBRAS DE JORDAN

Nota.- A lo largo de este apartado y salvo indicación contraria J va a ser un álgebra de Jordan compleja, unital y completa.

Se sabe que si A es un álgebra asociativa normada con unidad, es posible dotar a A de una norma de álgebra equivalente a la original con la cual A es unital (6.I, p. 19). Así pues, tenemos asegurada la existencia de álgebras de Jordan unitales y completas a nivel de álgebras de Jordan subyacentes a álgebras asociativas unitales y completas.

También podemos asegurar la existencia de álgebras de Jordan excepcionales unitales y completas ya que Sherman en (38) prueba que, el álgebra excepcional M_3^8 real (álgebra de las matrices de orden 3×3, hermitianas cuyos elementos son los números de Cayley, con las operaciones suma comun de matrices y producto de Jordan) puede ser normada definiendo:

$$\|A\| = \inf\{\alpha \ / \ \alpha \geq 0, \ -\alpha I \leq A \leq \alpha I\}$$

donde I es la unidad de M_3^8 y $\leq$ el orden parcial definido en M_3^8 en la forma usual. Además M_3^8 es completa.

CUESTION ABIERTA: Dada un álgebra de Jordan J normada con unidad I / $\|I\| \neq 1$. ¿Es posible encontrar otra norma $\| \ \|'$ de álgebra sobre J tal que $\|I\|' = 1$ y además sea equivalente a la primitiva?

TEOREMA. 2.1.- *Sea* $a \in J$. *Entonces* $Sp(a) \subseteq V(a)$. *En particular si* $a \in H(J) \Rightarrow Sp(a) \subset \mathbb{R}$

En efecto:

Sea $z_o \in \mathbb{C} - V(a)$, entonces por el lema 1.8 existe $z \in \mathbb{C}$ /

/ $|z-z_o| > \|zI-a\| \Rightarrow \|(z-z_o)^{-1}(zI-a)\| < 1 \Rightarrow r((z-z_o)^{-1}(zI-a)) < 1$

Luego por el corolario II.4.5, $I-(z-z_o)^{-1}(zI-a) \in inv(J)$

$\Rightarrow (z-z_o)(I-(z-z_o)^{-1}(zI-a)) = a-Iz_o \in inv(J) \Rightarrow z_o \in \mathbb{C}-Sp(a)$.

Así pues si $z_o \in Sp(a) \Rightarrow z_o \in V(a)$.

TEOREMA. 2.2.- *Sea* $a \in J$. *Entonces*: $\max\{Re\ z \ /\ z \in V(a)\} =$

$= Sup\{1/\alpha \log\|\exp(\alpha a)\| \ /\ \alpha > 0\} = \lim_{\alpha \to 0^+} 1/\alpha \log\|\exp(\alpha a)\|$

En efecto:

En virtud del lema 1.3, la prueba puede ser restringida al cierre del álgebra engendrada por a y la unidad $\overline{\mathbb{C}\{I,a\}}$, que es asociativa, unital y completa y en la que nuestro teorema es cierto (6.I, p. 55).

COROLARIO. 2.3.- *Sea* $a \in J$. *Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

I) $a \in H(J)$

II) $\|\exp(i\alpha a)\| = 1 \ /\alpha \in \mathbb{R}$

En efecto:

Si $a \in H(J)$, en virtud del teorema 1.5:

$$\max \operatorname{Re} V(ia) = \max \operatorname{Re} V(-ia) = 0$$

El resto se sigue del teorema 2.2.

LEMA. 2.4.- *La aplicación* g_R: $a \to R_a$ *de* J *en* $BL(J)$ *es una isometria lineal de* J *en* $BL(J)$ *que conserva las unidades.*

En efecto:

Evidentemente g_R es lineal, biyectiva y conserva la unidad. Además:

$\|R_a\| \leq \|a\|$ y $\|a\| = \|R_a(I)\| \leq \|R_a\|\|I\| = \|R_a\|$ (I unidad de J)

Luego $\|a\| = \|R_a\|$

TEOREMA. 2.5.- $v(.)$ *es una norma en el espacio lineal subyacente a* J *equivalente a la de partida; concretamente:*

$$1/e\|a\| \leq v(a) \leq \|a\|, \quad \forall a \in J$$

En efecto:

Es sabido que si A es un álgebra de Banach compleja y unital y $a \in A$ entonces: $1/e\|a\| \leq v(a) \leq \|a\|$ (6.I, p. 56)

Ahora por el lema anterior y el lema 1.7 se sigue:

$$1/e\|a\| = 1/e\|R_a\| \leq v(R_a) = v(a) \leq \|R_a\| = \|a\| \ ,\forall a \in J$$

COROLARIO. 2.6.- $D(J,I)$ *es un conjunto total en* J'.

En efecto:

Si $a \neq 0 \Rightarrow v(a) \neq 0 \Rightarrow \exists f \in D(J,I) \ / \ f(a) \neq 0$

LEMA. 2.7.- $a \in J$ *es hermitiano sii* $R_a \in BL(J)$ *es hermitiano.*

En efecto:

La prueba se sigue de los lemas 2.4 y 1.7.

TEOREMA. 2.8.- *Sea A un álgebra de Banach compleja y unital y sea* $a \in H(A)$. *Entonces*: $r(a) = \|a\|$ (6.I, p. 57).

TEOREMA. 2.9.- *Sea* $a \in H(J)$. *Entonces*: $r(a) = \|a\|$.

En efecto:

$$r(a) = r(R_a) = \|R_a\| = \|a\|$$

Donde hemos aplicado el corolario II. 4. 8, el lema 2.7, el teorema 2.8 y el lema 2.4.

LEMA. 2.10.- *Sean* $a,b \in H(J)$. *Entonces se verifica:*

$$\max(\|a\|,\|b\|) \leq \|a+ib\|$$

y en consecuencia $H(J) + iH(J)$ *es suma topológica directa.*

En efecto:

Por los teoremas 2.9 , 2.1 y 2.5:

$\|a\| = \max\{|f(a)| \ / \ f(I) = 1 = \|f\|\} \leq$

$\leq \max\{|f(a) + if(b)| \ / \ f(I) = 1 = \|f\|\} \leq \|a+ib\|$

Análogamente $\|b\| \leq \|a+ib\|$

Ahora $a+ib = 0 \Rightarrow$ por el teorema 1.5 $\Rightarrow V(a) = -iV(b) = 0$ y por los teoremas 2.9 y 2.1 se sigue $a = b = 0$.

LEMA. 2.11.- *Sea A un álgebra de Banach compleja unital. Entonces* $H(A)$ *es un espacio de Banach real y*

$$i(ab-ba) \in H(A) \text{ } para \text{ } a,b \in H(A).$$

(6.V, p. 206).

LEMA. 2.12.- *Si* $a,b,c \in H(J) \Rightarrow [R_a,[R_b,R_c]] \in H(BL(J))$

En efecto:

En virtud de los lemas 2.7 y 2.11 se tiene que

$i[R_a,i[R_b,R_c]] = -[R_a,[R_b,R_c]] \in H(BL(J)) \Rightarrow$

$\Rightarrow [R_a,[R_b,R_c]] \in H(BL(J))$.

COROLARIO. 2.13.- $a,b,c, \in H(J) \Rightarrow [a,b,c] \in H(J)$

En efecto:

Basta tener en cuenta la identidad I.2.6: $R_{[a,b,c]} = [[R_c,R_a],R_b]$ el lema anterior y el lema 2.7.

DEFINICION. 2.14.- En un álgebra asociativa con unidad y normada, diremos que un elemento es casi-nihilpotente si su radio espectral es nulo.

TEOREMA. 2.15.- *Sea A un álgebra asociativa y normada. Entonces si* $[a,b]$ *conmuta con* a *(ó* b*) se verifica que* $[a,b]$ *es casi-nihilpotente.* (21).

LEMA. 2.16.- *Sea* $a \in H(J)$ *y sea* $a^2 = b+ic$ / $b,c \in H(J)$. *Entonces se verifica:*

1) $[R_a,R_b] = [R_a,R_c] = 0$

2) $[R_b,R_c] = 0$

En efecto:

1) $0 = [R_a,R_{a^2}] = [R_a,R_{b+ic}] = [R_a,R_b] + i\,[R_a,R_c]$ y

ya que $0,\ i[R_a,R_c] \in H(BL(J)) \Rightarrow [R_a,R_b] \in H(BL(J))$ y como también $i\,[R_a,R_b] \in H(BL(J) \Rightarrow [R_a,R_b] = 0 \Rightarrow [R_a,R_c] = 0$

Donde hemos aplicado los lemas 2.7 y 2.11

2) Por la identidad I.2.6, el teorema I.2.4 y 1) se tiene:

$[R_{a^2},[R_b,R_c]] = R_{[R_c,R_b]a^2} = R_{2a[R_c,R_b]a} = 0$ ya que

$[R_c,R_b]a = c(ba) - b(ca) = R_cR_a(b) - R_bR_a(c) =$

$= R_aR_c(b) - R_aR_b(c) = a(cb) - a(bc) = 0$

Luego $0 = [R_{a^2},[R_b,R_c]] = [R_{b+ic}, [R_b,R_c]] =$

$$= [R_b,[R_b,R_c]] + i[R_c,[R_b,R_c]]$$

Ahora por el lema 2.12 y por el mismo razonamiento que en 1) se verifica:

$$[R_b,[R_b,R_c]] = [R_c,[R_b,R_c]] = 0$$

Luego por el teorema 2.15 se verifica que $[R_b,R_c]$ es casi-nihilpotente $\Leftrightarrow$ $r([R_b,R_c] = r(i[R_b,R_c]) = 0$ y por el lema 2.11 y el teorema 2.8 $\Rightarrow \|i[R_b,R_c]\| = 0 \Rightarrow [R_b,R_c] = 0$.

Nota.- Dado $D \subset \mathbb{C}$ notamos por coD la cápsula convexa de D.

LEMA. 2.17.- *Sea A un álgebra de Banach compleja y unital y sea* $a = b+ic \in A$, *donde* $b,c \in H(J)$ *y* $bc = cb$. *Entonces:*

$$V(a) = \text{co } Sp(a).$$

(6.V, p. 206).

TEOREMA. 2.18.- *Sea* $a \in H(J)$ *y sea* $a^2 = b+ic$ / $b,c \in H(J)$. *Entonces* $a^2 \in H(J)$.

En efecto:

$R_{a^2} = R_{b+ic} = R_b+iR_c$ y por el lema 2.16 $R_bR_c = R_cR_b$.

Así pues, por el lema anterior:

$$V(R_a 2) = \text{co } Sp(BL(J), R_a 2)$$

Ahora bien por los teoremas II.4.6, II.6.2 y 2.1 y ya que a es hermitiano se sigue:

$$Sp(BL(J), R_a 2) \subseteq 1/2(Sp(J, a^2) + Sp(J, a^2)) =$$

$$= 1/2(Sp(J, a)^2 + Sp(J, a)^2) \subseteq \mathbb{R}^+$$

Luego por la definición de co $Sp(BL(J), R_a 2)$ se sigue

$$V(a^2) = V(R_a 2) = \text{co } Sp(BL(J), R_a 2) \subseteq \mathbb{R}^+$$

3. *ELEMENTOS POSITIVOS EN UN ALGEBRA DE JORDAN COMPLEJA UNITAL Y COMPLETA.*

Nota.- J va a ser un álgebra de Jordan compleja, unital y completa y I su unidad.

DEFINICION. 3.1.- Diremos que $a \in J$ es un elemento positivo si:

$$a \in H(J) \text{ y } Sp(a) \subset \mathbb{R}^+$$

Al conjunto de los elementos positivos de J lo notaremos por pos(J) y si $a \in \text{pos}(J)$, notaremos $a \geq 0$.

LEMA. 3.2.- *Sea* $a \in H(J)$. *Entonces:*

$$V(a) = \text{co } Sp(a)$$

En efecto:

En virtud del corolario II.2.3 y el lema 1.7 la prueba queda reducida al caso asociativo. (5.I, p. 53).

COROLARIO. 3.3.- $a \in pos(J)$ *sii* $V(a) \subset \mathbb{R}^+$

COROLARIO. 3.4.- $a \in pos(J)$ *sii* $R_a \in pos(BL(J))$.

En efecto:

La prueba se sigue del lema 1.7 , del lema 2.4 y del - corolario anterior.(El concepto de pos(BL(J)) es análogo al que venimos tratando).

COROLARIO. 3.5.- pos(J) *es un cono convexo en* H(J).

Trivial por el corolario 3.3 y el teorema 1.5.

TEOREMA. 3.6.- pos(J) *nos define un orden parcial en J compatible con la estructura de espacio de Banach subyacente.*

En efecto:

Ya que pos(J) es un cono convexo y $pos(J) \cap (-pos(J)) = 0$ la relación:

$$a \geq b \overset{def}{\Leftrightarrow} a-b \geq 0$$

es una relación de orden parcial compatible con la estructura de espacio lineal real de J .

Para ver que es compatible con la estructura de espacio de Banach hace falta probar que pos(J) es cerrado. Esto es evidente ya que:

si $\{a_n\} \to a \Rightarrow \{f(a_n)\} \to f(a)$ para $f \in D(J,I)$ y $\mathbb{R}^+$ es cerrado.

Así pues se verifican las siguientes propiedades:

1) $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \in J \end{array}\right\} \Rightarrow a+c \leq b+c$

2) $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c \leq b+d$

3) $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ \alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha a \leq \alpha b$

4) $\{a_n\} \leq \{b_n\}$, $\{a_n\} \to a$ y $\{b_n\} \to b \Rightarrow a \leq b$

5) $0 \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \|b\|$. En efecto:

$0 \leq b \Rightarrow b \leq \|b\| \ I \Rightarrow a \leq \|b\| \ I \Leftrightarrow \|b\| \ I - a \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|b\| - \alpha \geq 0 \ / \ \alpha \in V(a) \Rightarrow$ por el teorema 2.9 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|b\| - \|a\| \geq 0$

4. ALGEBRAS DE JORDAN CON INVOLUCION.

DEFINICION. 4.1.- Sea X un espacio lineal y complejo. Una involución sobre X es una aplicacion $x \longrightarrow x^*$ de X en X -

que satisface los siguientes axiomas:

1) $(x+y)^* = x^* + y^*$

2) $(\alpha x)^* = \alpha x^*$ $\quad \forall x,y \in X \quad y\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

3) $(x^*)^* = x$

Se dice también que $*$ es una involución lineal sobre X.

DEFINICION. 4.2.- Sea X un espacio lineal complejo y - sea $x \in X$. Se dice que x es simétrico con respecto a la involución $*$, definida sobre X, si $x^* = x$. Al conjunto de los elementos simétricos lo notaremos por Sim(X).

LEMA. 4.3.- *Sea* X *un espacio lineal complejo y sea* V *un subespacio lineal real de* X *tal que* $X = V \oplus iV$. *Entonces la aplicación:*

$$u+iv \rightarrow u-iv \ , \ u,v \in V$$

es una involución lineal sobre X *con* $\mathrm{Sim}(X) = V$

La prueba es muy facil.

DEFINICION. 4.4.- Un álgebra de Jordan J compleja con involución, es un álgebra de Jordan J compleja dotada de una involución lineal $*$ que satisface el axioma:

$$(ab)^* = a^*b^*, \ \forall a,b \in J$$

También se di-ce que $*$ es una involución de álgebra --

sobre J .

LEMA. 4.5.- *Sea J un álgebra de Jordan compleja con involución y sea* V *un subespacio lineal real de J / $J = V \oplus iV$ Supongamos que* V *es cerrado para la aplicación* $a \longrightarrow a^2$. *Entonces la aplicación:*

$$a+ib \rightarrow a-ib \qquad a,b \in V$$

es una involución de álgebra sobre J con $\mathrm{Sim}(J) = V$.

En efecto:

En virtud del lema 4.3 y ya que:

$$ab = 1/2(a+b)^2 - 1/2(a^2+b^2)$$

bastará probar que $(a^2)^* = (a^*)^2$ para $a \in J$

Sea $a \in J \Rightarrow a = b+ic$ / $b,c \in V$

$a^2 + (a^*)^2 = (b+ic)^2 + (b-ic)^2 = 2(b^2-c^2) \in V$

$1/i(a^2 - (a^*)^2) = 4bc = 2(b+c)^2 - 2b^2 - 2c^2 \in V$

Ya que $a^2 = 1/2\ (a^2+(a^*)^2) + i\ 1/2i(a^2 - (a^*)^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a^2)^* = 1/2\ (a^2 + (a^*)^2) - i\ 1/2i(a^2 - (a^*)^2) = (a^*)^2$.

5. *JV-ALGEBRAS.*

DEFINICION. 5.1.- Diremos que un álgebra de Jordan J compleja unital y completa es una JV-álgebra si

$$J = H(J) + iH(J).$$

COROLARIO. 5.2.- *Sea J una JV-álgebra. Entonces* H(J)- *es una subálgebra real de J unital y cerrada.*

La prueba se sigue del teorema 2.18 y del hecho de que si $\{a_n\} \to a$ / $\{a_n\} \subset H(J) \Rightarrow \{f(a_n)\} \to f(a)$ para $f \in D(J,I)$.

TEOREMA. 5.3.- *Sea J una JV-álgebra. Entonces la aplicación de J en J definida por* $a+ib \overset{*}{\to} a-ib$ *es una involución de álgebra sobre J con* $\mathrm{Sim}(J) = H(J)$ *y además continua* .

En efecto:

La primera parte se sigue del teorema 2.18 y de los lemas 2.10 y 4.5.

Ahora por el lema 2.10

$$\|(a+ib)^*\| = \|a-ib\| \leq \|a\| + \|b\| \leq 2\|a+ib\|$$

CUESTION ABIERTA.- ¿Es $*$ definida por el teorema anterior, una isometía sobre una JV-álgebra?.

Con la norma $\| \ \|$ dada lo es para A^+ siendo A una B*-álgebra, en virtud del corolario 5.8 que veremos a continuación.

Ahora bien, en cualquier caso se puede sustituir la -- norma de partida $\| \ \|$ por la norma equivalente:

$$\|a\| = \max \|a\|, \|a^*\|$$

y que trabaja de igual manera que la previa a efectos de --

rango numerico.

DEFINICION. 5.4.- Un álgebra asociativa A compleja con involución, es un álgebra asociativa A compleja dotada de una involución lineal $*$ que satisface el axioma:

$$(ab)^* = b^* a^* \qquad a,b \in A$$

DEFINICION. 5.5.- Una B^*-álgebra A es un álgebra de - Banach compleja dotada de una involución $*$ tal que :

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \qquad \forall\, a \in A$$

LEMA. 5.6.- *Un elemento a de una B^*-álgebra unital es simetrico sii a es hermitiano.* (6.I, p. 67).

LEMA. 5.7.- *Sea* X *un espacio lineal complejo y* $*$ *una - involución sobre* X *. Entonces el conjunto de los elementos simétricos de* X, *Sim*(X), *es un subespacio lineal real de* X *y Sim*$(X) \oplus i$ *Sim*$(X) = X$. (6.I, p. 63).

COROLARIO. 5.8.- *Sea* A *una B^*-álgebra unital. Entonces* A^+ *es una JV-álgebra.*

La prueba se sigue de los lemas 5.6 y 5.7.

DEFINICION. 5.9.- Una V-álgebra A es un álgebra compleja de Banach y unital tal que

$$A = H(A) + i\, H(A)$$

TEOREMA. 5.10.- (Vidav-Palmer). *Sea A una V-álgebra. Entonces A es una B*-álgebra con respecto a la involución definida por*

$$(a+ib)^* = a-ib \ / \ a,b \in H(A)$$

(6.V, p. 211).

DEFINICION. 5.11.- Diremos que un subconjunto C de un álgebra de Jordan con involución $*$ es autoadjunto si

$$a \in C \Rightarrow a^* \in C$$

TEOREMA. 5.12.- *Toda subálgebra B cerrada, autoadjunta y con la unidad de una JV-álgebra es a su vez una JV-álgebra.*

La prueba es trivial sin mas que tener en cuenta el lema 1.3 y

$$\text{si } a \in B \Rightarrow a = b+ic \Rightarrow a^* = b-ic \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 1/2\,(a+a^*) \in B \quad y \quad c = 1/2i\,(a-a^*) \in B$$

COROLARIO. 5.13.- *Sea J una JV-álgebra y $a \in H(J)$. Entonces la subálgebra cerrada engendrada por a y la unidad I, $\overline{\mathbb{C}\{a,I\}}$ es una B*-álgebra (por supuesto conmutativa).*

En efecto:

$\overline{\mathbb{C}\{a,I\}}$ es autoadjunta y asociativa. Luego por el teorema anterior, es una V-álgebra. El resto se sigue del Teorema de Vidav-Palmer.

LEMA. 5.14.- *Sea J una JV-álgebra. Entonces:*

$$si \quad a \in H(J) \Rightarrow a^2 \in pos(J).$$

En efecto:

Por el teorema 2.18 $a^2 \in H(J)$ y por el teorema II.6.2 - se sigue que $Sp(a^2) \subset \mathbb{R}^+$

DEFINICION. 5.15.- Dada un álgebra de Jordan J real - con unidad, normada y completa, diremos que J es una JB-álgebra si se verifican:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \|a^2\| = \|a\|^2 \\ 2) & \|a^2\| \leq \|a^2+b^2\| \end{array}\right. \quad \forall a,b \in J$$

Un estudio de este tipo de álgebras puede verse en(39).

TEOREMA. 5.16.- *Sea J una JV-álgebra. Entonces* H(J) *es una JB-álgebra.*

En efecto:

En virtud del corolario 5.2 bastará probar que los elementos de H(J) verifican 1) y 2) de la definición anterior.

1) Se verifica en virtud del corolario 5.13.

2) Por el lema 5.14, $a^2, b^2 \in pos(J)$ para $a,b \in H(J)$.

Ahora de la propiedad 5) del teorema 3.6, ya que $0 \leq a^2 \leq a^2+b^2$, se sigue: $\|a^2\| \leq \|a^2+b^2\|$.

CUESTION ABIERTA.- Si J es una JB-álgebra. ¿Existe una JV-álgebra J' tal que $H(J') = J$?.

B I B L I O G R A F I A

(1) L. V. AHLFORS. Complex Analysis. McGrau-Hill Book Company. New York, London, Sydney; 1966.

(2) A. A. ALBERT. A structure theory for Jordan algebras. Annals of Mathematics, Vol. 45, n°3, (1947), 546-567.

(3) A.A. ALBERT. On a certain algebra of quantum mechanics. Annals of Mathematics, Vol. 35, n°1, (1934), 65-

(4) E.M. ALFEN, F.W. SHULTZ and E.T. STØRMER. A Gelfand-Neumark Theorem for Jordan algebras. Preprint Series. Matematsk Institutt, Universitetet i Oslo. Mathematics n°19 (1975).

(5) F.F. BONSALL-J. DUNCAN. Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras. Cambridge at the University Press; (1971).

(6) F.F. BONSALL-J. DUNCAN. Complete Normed Algebras. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York; 1973.

(7) H.F. BOHNENBLUST-S.KARLIN. Geometrical properties of the unit sphere of Banach Algebras. Annals of Mathematics, Vol. 62, n°2, (1955), 217-229.

(8) N. BOURBAKI. Algebre I. Chapitres 1 a 3. Hermann. Paris; 1970.

(9) N. BOURBAKI. Theorie des Ensembles. Hermann. Paris; 197o

(10) A. BROWDER. Introduction to Function Algebras. W.A.Benjamin, INC. New York, Amsterdam; 1969.

(11) A.L. BROWN-A. PAGE. Elements of Functional Analysis. Van Nostrand Reinhold. New York, Cincinnati, Toronto, Mel---bourne; 1970.

(12) J.DIXMIER. Les C*-Algebres et leurs representations. Gauthier-Villars. Paris; 1969.

(13) E. EFFROS-E. STØRMER. Jordan Algebras of self-adjoint --operators. Trans. Amer. Math. Soc. 127, (1967), 313-316.

(14) I. GELFAND, D. RAIKOV and G. SHILOV. Commutative normed Rings. Chelsea Publishiny Company. Bronx, New York; 1964

(15) A. GROTHENDIECK. Topological Vector Spaces. Gordon and -Breach, Science Publishers. New York, London, Paris; 1973

(16) E. HILLE-R. S. PHILLIPS. Funtional Analysis and Semi--Groups. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island; 1957.

(17) N. JACOBSON. Structure and Representations of Jordan Algebras. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 39. Providence; --1968.

(18) N. JACOBSON. Structure of rings. Third edition. Amer. - Math. Soc. Coll. Publ. 37, Providence; 1968, Appendix C.

(19) P. JORDAN, J. von NEUMANN and E. WIGNER. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Annals of Mathematics, Vol. 35, nº1, (1934)

(20) R.V. KADISON. A representation theory for commutative - topological algebra. Mem. Amer. Math. Soc. 7 (1951).

(21) D.C. KLEINECKE. On operator commutators. Proc. Amer. -- Math. Soc. 8, (1957), 535-536.

(22) KOECHER von MAX. Analysis in reellen Jordan-Algebren. - Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. IIa; (1958); 67-74.

(23) A. MARKUSHEVICH. Teoria de las funciones analiticas. MIR. Moscu; 1970.

(24) N.H. McCOY. The Theory of Rings. Chelsea Publishing Company. Bronx, New York; 1973.

(25) K. McCRIMMON. A general theory of Jordan rings. Proc. - N.A.S. Vol. 56, (1966), 1072-1079.

(26) K. McCRIMMON. Macdonald's Theorem with inverses. Pacific Journal of Mathematics. Vol. 21, nº2, (1967), 315-325.

(27) K. McCRIMMON. The radical of a Jordan algebra. Proc. N. A.S. 62, (1969), 671-678.

(28) R.D. MOSAK. Banach Algebras. The University of Chicago Press. Chicago and London; 1975.

(29) M.A. NAIMARK. Normed Algebras. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands; 1972.

(30) J. von NEUMANN. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part. I). Rec. Math.(Mat. Sbornik) N.S., 1, (1936), 415-484.

331) A. RODRIGUEZ. Algebras de Banach (Curso de Doctorado, 1975-76). Universidad de Granada. Por aparecer.

(32) A. RODRIGUEZ. Contribución a la Teoría de las C*-Algebras con unidad. Tesis Doctoral. Universidad de Granada; 1974.

(33) A. RODRIGUEZ. Derivaciones en algebras normadas y conmutatividad. Cuadernos del Departamento de Estadistica Matematica n°2, 51-68. Granada; 1975

(34) A. RODRIGUEZ. La continuidad del producto de Jordan implica la continuidad del producto ordinario en el caso semiprimo. Por aparecer.

(35) A. RODRIGUEZ. Rango numérico en álgebras normadas no aso

ciativas. Por aparecer.

(36) A. RODRIGUEZ. Teorema de estructura de los Jordan-isomorfismos de C*-álgebras. Aparecerá en revista Hispano Americana.

(37) I.E. SEGAL. Postulates for General quantum mechanics. - Annals of Mathematics, Vol. 48, nº4, (1947), 930-948.

(38) S. SHERMAN. On Segal's postulates for general quantum - mechanics. Annals of Mathematics, Vol. 64, nº3, (1956), 593-601.

(39) E. STØRMER. Jordan algebras of type I. Acta Math.115, - (1966), 165-184.

(40) E. STØRMER. On the Jordan structure of C*-Algebras. - Trans. Amer. Math. Soc. 120, (1965), 438-447.

(41) A.E. TAYLOR. Introduction to Functional Analysis. John Wiley Sons, Inc; 1958.

(42) D.M. TOPPING. Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Amer. Math. Soc. 53, (1965),

(43) W. ZELAZKO. Banach Algebras. Elsevier Publishing Company. Amsterdam, London, New York; 1973.

B I B L I O G R A F I A
A D I C I O N A L

(44) F.F. BONSALL-J. DUNCAN. Numerical Ranges II. Cambridge University Press; (1973).

(45) T.A. SPRINGER. Jordan Algebras and Algebraic Groups. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York;(1973).