

T
B
123

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Física Aplicada



TESIS DOCTORAL

RESOLUCION DE LAS ECUACIONES
INTEGRALES MFIE Y EFIE EN EL
DOMINIO DEL TIEMPO PARA
SUPERFICIES CONDUCTORAS
MODELADAS POR PARCHES PLANOS

UNIVERSIDAD DE GRANADA
28 OCT. 1994
COMISION DE DOCTORADO

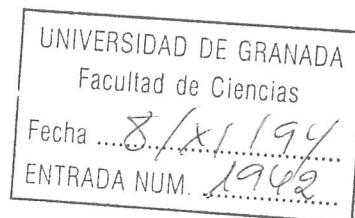
Jesús Francisco Fornieles Callejón

Granada, Octubre de 1994

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 619657298
Nº Copia 121203489



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA
ÁREA DE ELECTROMAGNETISMO



RESOLUCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES MFIE Y EFIE EN EL DOMINIO DEL TIEMPO PARA SUPERFICIES CONDUCTORAS MODELADAS POR PARCHES PLANOS

Memoria presentada por Jesús Francisco Fornieles Callejón para optar
al grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.

Fdo. Jesús Francisco Fornieles Callejón

D. Rafael Gómez Martín, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático de Electromagnetismo del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

y

D. Alfonso Salinas Extremera, Doctor en Ciencias Físicas, Profesor Titular del Área de Electromagnetismo del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

CERTIFICAN

Que el trabajo de investigación que se presenta en esta Memoria, titulado *RESOLUCION DE LA ECUACIONES INTEGRALES MFIE Y EFIE EN EL DOMINIO DEL TIEMPO PARA SUPERFICIES CONDUCTORAS MODELADAS POR PARCHES PLANOS*, ha sido realizado en este Departamento por el Licenciado en Ciencias Físicas D. Jesús Francisco Fornieles Callejón bajo nuestra dirección, y constituye su Tesis Doctoral.

Con esta fecha autorizamos su presentación ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada.

Granada, veinticinco de Octubre de mil novecientos noventa y cuatro.



Fdo. Rafael Gómez Martín



Fdo. Alfonso Salinas Extremera

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los Profesores D. Rafael Gómez Martín y D. Alfonso Salinas Extremera, directores de esta Memoria, por su dirección, y sin cuyo interés, entusiasmo y dedicación no hubiese sido posible la realización de este trabajo.

A D. Bernardo García Olmedo y Dña. Amelia Rubio Bretones por su apoyo y confianza.

A mis compañeros Salvador Gonzalez García e Ignacio Sánchez García, por toda su ayuda, colaboración y experiencias compartidas.

A Isidro Villó Pérez por su apoyo.

Y, a todas aquellas personas que directa o indirectamente han contribuido a la realización de este trabajo.

*A mi madre
y
hermanos
Begoña y Germán*

ESTE TRABAJO HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADO POR LA
COMISIÓN INTERMINISTERIAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA A
TRAVÉS DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN TIC-92-0596.

Indice

1	Justificación y precedentes	1
1.1	Introducción	1
1.2	Posibles dominios de analisis	2
1.3	Posibles enfoques del estudio de OEMT en el DT	4
1.4	Objetivos de esta memoria	5
1.5	Posibles planteamientos numéricos	5
1.6	Antecedentes	8
1.7	Contenido y organización de la Memoria	8
2	Ecuación MFIE	11
2.1	Introducción	11
2.2	Obtención de la ecuación integral	12
2.2.1	Principio de equivalencia	13
2.2.2	Valor principal de la integral de superficie	14
2.2.3	Ecuación MFIE	16
2.3	Estabilidad de la ecuación MFIE	17
2.4	Resolución numérica de la ecuación MFIE.	19
2.4.1	Discretización de la ecuación	19
2.4.2	Elección de funciones base y peso	19
2.4.3	Ecuación MFIE numérica	20
2.5	Resultados	23
2.5.1	Esfera	24
2.5.2	Cilindro con terminaciones semiesféricas.	32
2.5.3	Conoesfera.	38
2.5.4	Cilindro recto.	42
2.5.5	Cubo.	47
3	Ecuación EFIE	53
3.1	Introducción	53

3.2	Obtención de la ecuación integral	53
3.3	Desarrollo de las funciones base	57
3.3.1	Funciones base espaciales	57
3.3.2	Funciones base temporales	65
3.4	Procedimiento de testeo	67
3.5	Ecuación EFIE discretizada	70
3.5.1	Expresión para \vec{J} , ρ y $\partial_t \vec{J}$	70
3.5.2	Expresión para los potenciales $\partial_t \vec{A}$ y ϕ	74
3.5.3	Ecuación EFIE numérica	77
3.5.4	Ecuación EFIE discretizada con un testeo alternativo	82
3.5.5	Inestabilidades, filtro de altas frecuencias	85
3.6	Comportamiento numérico	85
3.6.1	Consideraciones numéricas	85
3.6.2	Modelado	85
3.6.3	Incremento temporal	85
3.6.4	Orden de interpolación temporal	85
3.7	Cálculo del campo de radiación	88
4	Resultados	91
4.1	Dispersión de OEMT por superficies conductoras	92
4.1.1	Introducción	92
4.1.2	Superficies cerradas	93
4.1.3	Superficies abiertas	105
4.1.4	Blancos ocultos	117
4.2	Impedancia de entrada de antenas de banda ancha	122
4.2.1	Introducción	122
4.2.2	Antena auto-complementaria plana	129
4.2.3	Antena biconica	138
4.2.4	Antena de bocina TEM	146
4.2.5	Antena V-cónica	152
	Conclusiones	159
A	Estabilidad de ecuaciones integrales	161
A.1	Introducción	161
A.2	Consistencia, convergencia y estabilidad	162
A.3	Inestabilidades	164
A.4	Métodos para evitar las inestabilidades	166

B	Cálculo de las matrices $\vec{\mathcal{F}}$, \mathcal{C}, \mathcal{G}, $\vec{\mathcal{F}}^e$, $\vec{\mathcal{F}}^{rad}$	169
B.1	Coeficientes de interpolacion temporal	169
B.1.1	Orden de interpolación 2	170
B.1.2	Orden de interpolación 4	172
B.1.3	Ligadura entre la variable temporal y espacial	175
B.1.4	Expresión de los coeficientes en función de R	176
B.2	Desarrollo de las matrices de estructura	181
B.2.1	Expresión de R en función de variables locales sobre los parches fuente	181
B.3	calculo analitico de integrales divergentes de superficie	181
	Bibliografía	183

Indice de Figuras

2.1	Coordenadas locales en torno a la singularidad.	15
2.2	Relación entre las variables temporales.	21
2.3	Base local sobre un parche cuadrado.	22
2.4	Mallado de la esfera.	24
2.5	Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, $\Delta t = 0.13$	25
2.6	Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, $\Delta t = 0.18$	26
2.7	Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, $\Delta t = 0.20$	26
2.8	Campo de radiación dispersado por la esfera, $\Delta t = 0.13$	27
2.9	Campo de radiación dispersado por la esfera, $\Delta t = 0.18$	27
2.10	Campo de radiación dispersado por la esfera, $\Delta t = 0.20$	28
2.11	Relación de distancias entre dos parches vecinos.	29
2.12	Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, ($\Delta t = 0.18$), limitando la aplicación de la técnica de integración.	30
2.13	Campo de radiación dispersado por la esfera, $g = 2.0$ $\Delta t = 0.20$	31
2.14	Mallado del cilindro con terminaciones semiesféricas.	32
2.15	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.20$	33
2.16	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.27$	33
2.17	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.30$	34
2.18	Campo de radiación dispersado por el cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.20$	35
2.19	Campo de radiación dispersado por el cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.27$	35
2.20	Campo de radiación dispersado por el cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.30$	36

2.21	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminación semiesférica, ($\Delta t = 0.27$), limitando la aplicación de la técnica de integración.	37
2.22	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminación semiesférica, ($\Delta t = 0.30$), limitando la aplicación de la técnica de integración.	37
2.23	Mallado de la conoesfera.	38
2.24	Densidad de corriente sobre un punto de la conoesfera, $\Delta t = 0.062$	39
2.25	Densidad de corriente sobre un punto de la conoesfera, $\Delta t = 0.088$	39
2.26	Densidad de corriente sobre un punto de la conoesfera, $\Delta t = 0.1$	40
2.27	Campo de radiación dispersado por la conoesfera, $\Delta t = 0.062$	40
2.28	Campo de radiación dispersado por la conoesfera, $\Delta t = 0.088$	41
2.29	Campo de radiación dispersado por la conoesfera, $\Delta t = 0.1$	41
2.30	Mallado del cilindro recto.	43
2.31	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro recto, $\Delta t = 0.12$	43
2.32	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro recto, $\Delta t = 0.17$	44
2.33	Densidad de corriente sobre un punto del cilindro recto, $\Delta t = 0.20$	44
2.34	Campo de radiación dispersado por el cilindro recto, $\Delta t = 0.12$	45
2.35	Campo de radiación dispersado por el cilindro recto, $\Delta t = 0.17$	45
2.36	Campo de radiación dispersado por el cilindro recto, $\Delta t = 0.20$	46
2.37	Mallado del cubo.	47
2.38	Densidad de corriente sobre un punto del cubo, $\Delta t = 0.08$	48
2.39	Densidad de corriente sobre un punto del cubo, $\Delta t = 0.10$	48
2.40	Densidad de corriente sobre un punto del cubo, $\Delta t = 0.12$	49
2.41	Campo de radiación dispersado por el cubo, $\Delta t = 0.08$	49
2.42	Campo de radiación dispersado por el cubo, $\Delta t = 0.10$	50
2.43	Campo de radiación dispersado por el cubo, $\Delta t = 0.12$	50
3.1	Aplicación del principio de equivalencia al problema general de la dispersión.	54
3.2	Sistema de coordenadas utilizado.	55
3.3	Superficie arbitraria modelada por parches triangulares.	58
3.4	Relación entre orientación de los triángulos y lados con el sentido de referencia para la corriente.	59
3.5	Variables locales asociadas con un lado interno.	60
3.6	Componente normal de la función base en el lado común del par de triángulos T_n^\pm	61
3.7	Relación entre los centroides de un par de triángulos con un lado común.	63

3.8	Vectores definidos localmente sobre un parche.	64
3.9	Discretización de la variable temporal.	66
3.10	Coordenadas locales sobre un parche triangular.	71
3.11	Relación entre parches fuente y parches campo tomando referencias locales en los centros de los triángulos.	74
3.12	Densidad de corriente superficial sobre un punto próximo a una esquina de la placa centrando los potenciales en los centroides de los triángulos, comparada con una solución estable.	81
3.13	Coordenadas locales sobre un parche triangular tomando referencia en los centros de los lados.	83
3.14	Relación entre parches fuente y parches campo tomando referencias locales en los centros de los lados.	84
3.15	Solución obtenida para los coeficientes centrando las magnitudes vectoriales en los centros de los lados.	85
3.16	Estabilidad de la solución en función del incremento temporal utilizado.	86
3.17	Campo de radiación en la dirección monoestática de la placa para distintos ordenes de interpolación.	86
3.18	RCS normalizada en la dirección monoestática de la placa utilizando distinto orden de interpolación.	87
3.19	Coordenadas utilizadas para el cálculo del campo de radiación creado por las corrientes inducidas sobre una superficie conductora.	88
4.1	Modelado de una esfera usando parches triangulares.	94
4.2	Componente dominante de la densidad de corriente inducida sobre el primer punto de impacto de la onda sobre la esfera.	95
4.3	Campo de radiación en back-scatter en el dominio del tiempo dispersado por la esfera.	95
4.4	RCS monoestática de una esfera.	96
4.5	RCS en db monoestática para la esfera.	96
4.6	Modelado de un cilindro con terminaciones semiesféricas utilizando parches triangulares.	98
4.7	Campo dispersado por un cilindro con terminaciones semiesféricas para distintas longitudes del cilindro.	99
4.8	Campo dispersado por un CSE ($L = 4m.$) en back-scatter, soluciones obtenidas con la MEFIE y MFIE.	99
4.9	RCS monoestática del CSE para distintas longitudes del cilindro.	100
4.10	RCS en db del CSE	101
4.11	Modelado de una conoesfera mediante parches triangulares.	102

4.12	Campo de radiación en Back-scatter producido por una conoesfera de 30^0 .	103
4.13	RCS (db) en la dirección monoestática de una conoesfera de 30^0 .	104
4.14	Modelado de una placa cuadrada con 200 triángulos.	106
4.15	Campo de radiación en la dirección $(1, 0, 0)$ para ángulos de incidencia $60^0, 30^0$ y 0^0 respecto a la normal de la placa ($g = 2(m - l)^{-1}$).	106
4.16	Campo de radiación en la dirección $(1, 0, 0)$ para ángulos de incidencia $60^0, 30^0$ y 0^0 respecto a la normal de la placa ($g = 1(m - l)^{-1}$).	107
4.17	Corriente en el centro de una placa de $1.6m$. de lado iluminada con incidencia normal.	108
4.18	Comparación del campo de radiación en back-scatter producido por una placa de $1.6m$. de lado obtenido con DOTIG4 y FDTD.	108
4.19	Modelado de un disco.	109
4.20	Densidad superficial de corriente en el centro del disco para distintos parámetros g y distintos modelados.	110
4.21	Campo de radiación en back-scatter producido por el disco para diferentes mallados.	110
4.22	Valores experimentales y numéricos de la RCS en back-scatter normalizada para un disco.	112
4.23	Modelado de una semiesfera.	113
4.24	Densidad de corriente superficial sobre el primer punto de impacto de la onda con la semiesfera comparada con la de la esfera.	114
4.25	Campo de radiación en back-scatter para la esfera y la semiesfera en el dominio del tiempo.	115
4.26	Transformada de Fourier de la Fig. 4.25.	115
4.27	Campo de radiación observando a 90^0 con respecto a la dirección de iluminación.	116
4.28	Campo de radiación en forward-scatter de la esfera comparado con el de la semiesfera.	116
4.29	Modelado de una placa y una esfera alineadas sobre el eje X con una distancia de separación entre sus centros de $3m$.	117
4.30	Densidad superficial de corriente inducida sobre el centro de la placa cuando no se coloca la esfera comparada con la corriente inducida situando la esfera a $3m$., $5m$. y $12m$.	118
4.31	Campo de radiación en back-scatter por una placa aislada comparado con el producido cuando se coloca una esfera a $3m$., $5m$. y $12m$.	119
4.32	RCS monoestática de la placa comparada con la obtenida al colocar una esfera a $3m$., $5m$. y $12m$.	120

4.33	Campo de radiación en back-scatter iluminando primero la esfera para una distancia de separación entre la esfera y la placa de $3m.$ y $12m.$	120
4.34	Campo de radiación en forward-scatter iluminando en las direcciones $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$	121
4.35	VARIABLES locales para el cálculo de la intensidad de corriente que atraviesa el lado, p	126
4.36	Antena auto-complementaria plana.	129
4.37	Modelado de la antena auto-complementaria plana.	130
4.38	Mallado alternativo de la zona de alimentación en la antena auto-complementaria plana.	131
4.39	Dependencia temporal del voltaje utilizado como fuente de alimentación.	132
4.40	Intensidad de entrada en la antena auto-complementaria plana.	133
4.41	Parte real de la impedancia de entrada de la antena auto-complementaria plana.	134
4.42	Parte imaginaria de la impedancia de entrada de la antena auto-complementaria plana.	134
4.43	Módulo de la impedancia de entrada de la antena auto-complementaria plana.	135
4.44	Voltaje de entrada frente al tiempo con dependencia pulso gaussiano y función error.	137
4.45	Componentes espectrales de la tensión de entrada con dependencia pulso gaussiano y función error.	137
4.46	Antena bicónica.	138
4.47	Modelado de la antena bicónica.	139
4.48	Intensidad de entrada en la antena bicónica.	140
4.49	Parte real de la impedancia de entrada de la antena bicónica.	141
4.50	Parte imaginaria de la impedancia de entrada de la antena bicónica.	142
4.51	Módulo de la impedancia de entrada de la antena bicónica.	142
4.52	Intensidad de entrada en la antena bicónica para $\theta = 30^{\circ}, 42^{\circ}, 50^{\circ}, 58^{\circ}$	144
4.53	Impedancia de entrada de la antena bicónica en función del ángulo de apertura θ	145
4.54	Antena de bocina TEM.	146
4.55	Modelado de la antena de bocina TEM.	148
4.56	Intensidad de entrada en la antena de bocina TEM, $\theta = 14^{\circ}, \phi = 40^{\circ}$	149
4.57	Parte real de la impedancia de entrada para la antena de bocina TEM, $\theta = 14^{\circ}, \phi = 40^{\circ}$	150

4.58	Parte imaginaria de la impedancia de entrada para la antena de bocina TEM, $\theta = 14^{\circ}$, $\phi = 40^{\circ}$	150
4.59	Módulo de la impedancia de entrada para la antena de bocina TEM, $\theta = 14^{\circ}$, $\phi = 40^{\circ}$	151
4.60	Antena V-cónica con ángulo de elevación θ , y de apertura ϕ	152
4.61	Modelado de la antena V-cónica, $\theta = 30^{\circ}$, $\phi = 90^{\circ}$	153
4.62	Intensidad de entrada en la antena V-cónica con $\phi = 40^{\circ}$ y $\theta = 30^{\circ}, 50^{\circ}, 70^{\circ}$.155	
4.63	Intensidad de entrada en la antena V-cónica con $\phi = 90^{\circ}$ y $\theta = 30^{\circ}, 50^{\circ}, 70^{\circ}$.155	
4.64	Módulo de la impedancia de entrada de la antena V-cónica con $\phi = 40^{\circ}$ y $\theta = 30^{\circ}, 50^{\circ}, 70^{\circ}$	156
4.65	Módulo de la impedancia de entrada de la antena V-cónica con $\phi = 90^{\circ}$ y $\theta = 30^{\circ}, 50^{\circ}, 70^{\circ}$	156

Indice de Tablas

4.1	Comparación de las impedancias de entrada teórica y experimental de la antena auto-complementaria plana.	135
4.2	Datos del modelado da la antena bicónica para distintos ángulos de apertura θ	143
4.3	Comparación de las impedancias de entrada teórica y experimental de la antena bicónica para distintos valores del ángulo θ	144
4.4	Comparación de los diferentes resultados para la impedancia de entrada de la antena de bocina TEM, con $\theta = 14^0$, $\phi = 40^0$	151
4.5	Datos del modelado da la antena V-cónica para distintos ángulos de elevación θ , y de apertura ϕ . (En los casos marcados con (*) los seis triángulos de la zona de alimentación no están en el mismo plano).	154
4.6	Comparación de la impedancia de entrada teórica de la antena V-cónica para distintos ángulos de elevación θ , y de apertura ϕ	157

Capítulo 1

Justificación y precedentes

1.1 Introducción

La disponibilidad actual de medios de cálculo muy potentes y el desarrollo de la tecnología necesaria para generar pulsos cortos de gran amplitud (más de 10^3 V) con tiempos de subida pequeños (anchos del pulso del orden de 20 ps.) y de la consiguiente instrumentación de medida compatible con este tipo de señales tales como osciloscopios de muestreo y digitalizadores de señales transitorias han hecho posible por un lado, que pueda abordarse la solución numérica de las complejas ecuaciones que resultan al plantear la interacción de señales electromagnéticas transitorias (OEMT) ¹ con estructuras (blancos o antenas) [Miller and Landt, 1978], [Miller, 1986] y por otro, la aplicación práctica de los resultados a áreas tan importantes como son: la clasificación e identificación de blancos a partir de su respuesta a pulsos cortos de radar, problemas de compatibilidad electromagnética incluyendo la prevención de los efectos de pulsos nucleares electromagnéticos (NEMP) [Bodnar, 1978], [Lee, 1980] y rayos (LEMP) [Perala et al., 1982], la evaluación no destructiva [Tijhuis, 1987], [Rubio and Tijhuis, 1994], y en comunicaciones de banda ancha [Felsen and Marcuvitz, 1973].

Dentro de este contexto, el objetivo de esta memoria es desarrollar dos códigos o programas para el cálculo, mediante un proceso de solución escalonado en el tiempo basado en el método de los momentos, de la interacción de una OEMT con una estructura conductora formada por una superficie cerrada y con curvaturas suaves (programa DOTIG2) o formada por una superficie conductora de geometría arbitraria (programa

¹Denominamos OEMT a señales electromagnéticas que tienen un contenido espectral que se extiende desde frecuencias cero o muy pequeñas hasta la región de las microondas. Dicho de otra forma, señales que tienen un ancho de banda relativo ($\frac{f_H - f_L}{f_H + f_L} \approx 1$) y un ancho de banda absoluto ($f_H - f_L$) que puede llegar hasta los 6Gz. siendo f_H y f_L la menor y mayor frecuencia significativa del espectro de la señal.

DOTIG4). En ambos casos la superficie de la estructura es modelada mediante parches planos. Antes de entrar en detalles sobre los métodos numéricos desarrollados, lo que se deja para capítulos posteriores, comentaremos algunos aspectos fundamentales que sitúen y justifiquen nuestro trabajo.

1.2 Posibles dominios de análisis

Desde el punto de vista numérico y debido a la linealidad de las ecuaciones de Maxwell el estudio de OEMT puede plantearse en el dominio de la frecuencia (DF), esto es, haciendo uso de la simplificación matemática de imponer que todas las magnitudes físicas varíen armónicamente con el tiempo lo que en notación compleja se expresa mediante el factor exponencial $e^{j\omega t}$. La enorme ventaja de este enfoque, justificado porque cualquier ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo admite autofunciones de la forma $e^{j\omega t}$, es que sólo hay que resolver un conjunto de ecuaciones en las variables espaciales en contraposición a tener que resolver en el DT ecuaciones en variables espaciales y temporales.

El análisis en el DF puede extenderse al estudio de la respuesta a una señal transitoria mediante el cálculo de soluciones armónicas sobre el rango de frecuencias adecuado y haciendo uso de la transformada inversa de Fourier. Una alternativa a este enfoque es plantear el problema directamente en el DT y resolver para las variables espaciales mediante un proceso de cálculo escalonado en el tiempo de forma que se verifique el principio de causalidad.

Naturalmente, y a la inversa, pueden obtenerse resultados en el DF a partir del DT mediante la transformada de Fourier. De hecho puede resultar en algunos casos más conveniente y económico desde el punto de vista computacional conseguir resultados en el DF vía DT.

La conveniencia de utilizar un tipo de análisis u otro no debe fundamentarse exclusivamente en la comparación del coste computacional de ambos métodos ya que existen problemas que por su propia naturaleza pueden ser muy ventajosamente, e incluso exclusivamente, tratados planteando su solución en el DT. A continuación citamos algunos ejemplos:

Mayor eficiencia en la solución de determinados problemas.

El análisis en el dominio del tiempo es intrínsecamente capaz de suministrar información, vía FFT, en una amplia zona del espectro correspondiente a armónicos de la excitación con suficiente energía.

Para obtener la misma información en el DF es necesario resolver para muestras consecutivas del espectro de frecuencias. Por tanto, es necesario elegir a priori

aquellas frecuencias donde se piensa que la estructura tendrá un comportamiento interesante. Si se escoge incorrectamente debe proseguirse el análisis hasta conseguir la información necesaria y poder estar razonablemente convencido de que han sido obtenidos los aspectos principales del problema. Éste es especialmente el caso cuando se trata de estudiar estructuras que tienen resonancias muy estrechas o un factor de calidad Q muy alto.

Problemas no lineales.

El comportamiento de antenas y dispersores o blancos puede ser modificado significativamente mediante cargas no lineales. Tales no linealidades pueden ser debidas por ejemplo, a una impedancia dependiente de la intensidad de corriente o a una variación temporal de la impedancia. Aunque tales problemas podrían ser analizados en el dominio de la frecuencia [Sarkar and Weiner, 1976] su estudio resulta más sencillo y natural en el DT [Landt and Miller, 1983], [Gómez et al., 1991], [Gómez et al., 1992].

Obtención de las frecuencias complejas de resonancia del objeto.

Fundamentalmente, todos los métodos de identificación de blancos de radar están basados en la comparación de los parámetros obtenidos por análisis de la señal dispersada por el blanco con los correspondiente a modelos de los posibles blancos esperados (librería de firmas). El modelo almacenado cuyo conjunto de parámetros sea más próximo en un sentido preestablecido al obtenido de la señal reflejada por el blanco real se considera que es el blanco detectado. Esta operación de correlación es muy problemática en la práctica a menos que los parámetros sean independientes del aspecto que el blanco presente a la señal-radar. En este sentido resulta fundamental el resultado demostrado por Baum de que las frecuencias complejas de resonancia del blanco presentan esta independencia ("singularity expansion method") [Baum, 1971], [Kay and Marple, 1981]. Estas frecuencias de resonancia pueden obtenerse usando técnicas de modelación paramétricas para analizar la respuesta de un blanco a una OEMT [Gómez and Carrión, 1986].

Separación temporal (Time gating).

Una característica que resulta muy atractiva en el tratamiento en el dominio del tiempo es la separación temporal con que aparece la contribución de los centros de radiación y eco de las diferentes partes de un objeto. Esta separación temporal ocurre debido a la velocidad finita de la propagación de la luz (principio de causalidad) y puede ser explotada tanto experimentalmente como computacionalmente para incrementar la calidad de los datos y la eficiencia de la solución. En la experimentación en el dominio del tiempo se pueden obtener, haciendo uso de la

separación temporal, medidas no contaminadas dentro del "tiempo limpio" previo a la llegada de reflexiones al sistema de medida. En el dominio de la frecuencia esto se traduce en desplazamientos de fases que dan lugar a efectos de interferencias.

Mayor claridad en la interpretación de algunos fenómenos electromagnéticos.

El análisis en el DT ofrece una perspectiva diferente de la que se obtiene en el DF y ello permite profundizar y obtener un mayor entendimiento de muchos fenómenos electromagnéticos [Gómez et al., 1992], [García and González, 1993]. En este sentido es de destacar la posibilidad que ofrecen los métodos numéricos en el dominio del tiempo de, mediante un postproceso adecuado, visualizar el fenómeno electromagnético en estudio tal y como ocurre en la realidad, esto es, en el dominio espacio-temporal. Esta visualización animada tiene un considerable valor científico y educacional ya que permite un conocimiento mucho más profundo y rápido del problema electromagnético analizado del que sería posible alcanzar en el dominio de la frecuencia.

1.3 Posibles enfoques del estudio de OEMT en el DT

Desde la perspectiva del análisis en el DT de OEMT es posible elegir entre diferentes formas de abordar el problema. Éstas incluyen:

Técnicas de aproximación.

Muchos de los primeros trabajos de análisis en el DT y que motivaron el estudio posterior mediante métodos más potentes están basados en la aproximación de la física óptica [Kennaugh and Moffat, 1965].

Análisis teórico.

Sólo algunos problemas básicos pueden ser resueltos de forma analítica. Son ejemplos el análisis de los campos asociados a sistemas rariantes elementales o en forma aproximada, de antenas de hilo recto [Gómez et al., 1985], [Franceschetti and Pappas, 1974], [Rubio, 1985].

Métodos numéricos.

Es bien conocido el tremendo impacto que el desarrollo de los modernos ordenadores ha tenido sobre muchas áreas de la ciencia y la tecnología. Gracias a ellos ha sido posible resolver problemas científicos y técnicos que de otra forma serían o bien inabordable o bien áreas exclusivas de métodos experimentales. Dentro de estas áreas se encuentran muchos problemas electromagnéticos y concretamente la radiación y dispersión de OEMT. Efectivamente, si queremos conocer el resultado de la interacción de OEMT con estructuras más realistas que las elementales

mencionadas anteriormente, los métodos analíticos resultan inviables y se ha de recurrir necesariamente al desarrollo de métodos numéricos que permitan resolver las ecuaciones del modelo matemático que describe el problema físico que tenemos planteado.

Métodos experimentales.

Junto al desarrollo de los ordenadores y de los métodos numéricos ha tenido lugar el de la tecnología necesaria para generar señales electromagnéticas transitorias y el de la instrumentación compatible necesaria para tomar medidas directas de la respuesta a OEMT de diferentes antenas y blancos [Miller, 1986], [Baum, 1976].

1.4 Objetivos de esta memoria

El objetivo concreto que nos planteamos en esta memoria es el de estudiar en el DT la interacción de una OEMT con una estructura conductora arbitraria siendo el medio que rodea a dicha estructura el espacio libre. El contenido espectral de la OEMT se extiende desde frecuencias cero o bajas hasta frecuencias máximas correspondientes a longitudes de onda tales que $\frac{L}{\lambda} \sim 5$. Esta situación presenta gran interés práctico porque en ella se encuentran muchos problemas relacionados con el estudio de antenas y características de blancos de radar. De hecho es el rango de frecuencias correspondientes a longitudes de onda comenzando con la mitad del tamaño del objeto e incrementando hasta varias veces su máxima dimensión, el que transporta la información esencial con respecto a la dimensión total, forma aproximada y composición material del objeto [Lin and Ksienski, 1981] por lo que resulta el más adecuado para la determinación de las características físicas de la estructura. La razón es que a estas frecuencias tiene lugar la máxima interacción entre las diferentes partes del objeto.

1.5 Posibles planteamientos numéricos

Aunque las ecuaciones de Maxwell son la base para estudiar cualquier problema electromagnético, dependiendo de las manipulaciones previas que de ellas hagamos para obtener las ecuaciones de partida para resolver numéricamente un determinado problema, podemos distinguir entre métodos diferenciales (basados en la solución directa de las ecuaciones de Maxwell) ó en los métodos integrales en los que la ecuación de partida es una ecuación integral (realmente integro-diferencial) en términos de las fuentes.

La diferencia fundamental entre ambas es el propagador de campo empleado. La forma diferencial usa las ecuaciones rotacionales para propagar los campos, lo que en sentido computacional significa que el campo en un punto es un "promedio pesado"

de los campos vecinos. Por otra parte, la forma integral usa la función de Green como propagador, en cuyo caso el campo en un punto dado viene determinado por una integración sobre las fuentes que lo causan. El fundamento de la formulación diferencial a la solución de las ecuaciones rotacionales de Maxwell en el dominio del tiempo es que la solución se lleva a cabo dentro de un volumen que encierra completamente a la estructura a modelar. Una dificultad asociada al método es la necesidad de introducir en problemas abiertos, una condición de absorción en el contorno (ABC) del volumen modelado para que sea posible truncar el espacio problema. Debido a la necesidad de cubrir el espacio, dichos métodos dan lugar a cierta dispersión y anisotropía de origen numérico. Técnicas basadas en la solución de las ecuaciones diferenciales son el de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) [Taflove and Umashankar, 1990], el de la matriz de líneas de transmisión (TLM) [Johns and Gostache, 1988] y el de los elementos finitos (FETD) [Sovetri and Costache, 1990].

La formulación integral se caracteriza porque en ella se encuentra implícitamente contenida la condición de radiación. En su formulación se hace uso de la función de Green del problema y presenta la ventaja de que lo reduce en una dimensión e incluso permite reducir un problema tridimensional a monodimensional mediante la modelación por una malla de hilos la superficie del objeto cuya interacción con una señal electromagnética queremos conocer. Consecuentemente la formulación integral y su solución mediante el método de los momentos (MM) se considera como la forma más efectiva para tratar problemas de interacción de OEM con estructuras que cumplan que su dimensión máxima L sea menor o igual que 5λ y cuya función de Green pueda ser utilizada eficientemente como es el caso de superficies conductoras en el espacio libre. Para el caso de más altas frecuencias aunque el MM es aplicable en principio, su uso en la práctica es inviable debido a la gran cantidad de información que es necesario manejar para tener en cuenta la interacción mutua entre diferentes partes de la estructura.

Como consecuencia de lo comentado en este apartado y en el 1.4, desde el punto de vista numérico la forma más adecuada de abordar el problema que nos planteamos es el de la formulación integral y su solución mediante el MM.

Dentro del MM es posible elegir diversas alternativas que corresponden a la posibilidad de plantear las condiciones de contorno en la superficie de la estructura en términos del campo magnético (ecuación integral para el campo magnético MFIE) o el eléctrico (ecuación integral para el campo eléctrico EFIE)². Al elegir entre una u otra ecuación juega un papel importante (como siempre a la hora de decidirse por un método numérico u otro) el tipo de problema que nos planteemos, la geometría del

²Aunque todos los métodos numéricos comentados en este apartado tienen su contrapartida en el dominio de la frecuencia, en lo que sigue, daremos por sobre-entendido que nos referimos al dominio del tiempo. Así los términos MFIE y EFIE se refieren a su formulación en el DT.

objeto y sus características constitutivas (en este caso un conductor perfecto). En este sentido, un aspecto fundamental es si la estructura es abierta o cerrada. Para un objeto abierto no es aplicable la MFIE siendo absolutamente necesario resolver la EFIE [Poggio and Miller, 1973a]. Para superficies cerradas y sin aberturas, ambas ecuaciones son válidas y conducen, de acuerdo con el teorema de unicidad, a la misma solución. Sin embargo, la ecuación MFIE es más fácil de resolver debido a que en ella la incógnita aparece a la vez fuera y dentro de la integral (ecuación de Fredholm de segunda clase), a que en su núcleo no aparecen derivadas espaciales y sobre todo a que presenta singularidades de menor orden que la EFIE (ecuación de Fredholm de primera clase). La MFIE tiene como principal ventaja el admitir algoritmos más simples que la EFIE para su solución. Sin embargo, presenta a su vez el gran inconveniente de que debido a que en la formulación no se incluye la ecuación de continuidad, el hacer un tratamiento aproximado de la densidad superficial de la corriente, implica que las densidades de carga quedan muy mal caracterizadas, no siendo aplicable a problemas en los que se necesite evaluar los campos eléctricos cercanos. Tratamientos más precisos de la densidad superficial de corriente [Marx, 1993] pueden conducir a una ecuación muy inestable. Como se comentó anteriormente el trabajo realizado en esta tesis se ha enfocado hacia la resolución numérica de ambas ecuaciones y esto se hace en ambos casos partiendo de un modelo por parches de la superficie conductora. Esta forma de modelar, absolutamente necesaria en el caso de la MFIE, constituye una alternativa en el caso de la EFIE [Gómez et al., 1992], [Miller and Landt, 1978]. Efectivamente, como es bien conocido, la ecuación EFIE admite la posibilidad de tratar estructuras formadas por hilos delgados conectados o no entre sí. Este hecho ha sido aprovechado para en el caso de superficies continuas sustituir éstas por un modelo equivalente formado por un red o malla de hilos delgados. La razón es que este tipo de modelado simplifica considerablemente los algoritmos necesarios para resolver la ecuación EFIE. Sin embargo, la fiabilidad de los resultados obtenidos al modelar una superficie continua mediante una malla de hilos delgados, es cuestionable en lo que se refiere al cálculo de campos cercanos y de parámetros relacionados con ellos. Por esta razón y aunque existen criterios para elegir el modelo de malla de hilos que minimizan errores, es conveniente resolver la EFIE para geometrías formadas por superficies continuas utilizando un modelado por parches [Lee et al., 1976].

1.6 Antecedentes

La solución numérica de la MFIE y EFIE aplicada a superficies modeladas por parches ha sido abordada por diferentes autores en las últimas décadas. La referencias [], [],

[], [], son básicas para seguir la evolución del trabajo que se ha desarrollado en este campo Mieras y Bennett [Bennett and Mieras, 1981b] fueron los primeros en resolver la ecuación EFIE para calcular la respuesta de un cuerpo conductor modelado por parches planos rectangulares [Bennett and Ross, 1978], [Bennett and Mieras, 1981b], y la MFIE en [Bennett and Weeks, 1968]. Sin embargo, esta clase de parches no es adecuada para modelar geometrías arbitrarias y con bordes irregulares. Este problema puede ser soslayado modelando mediante parches planos triangulares y utilizando el mismo conjunto de funciones bases espaciales propuestas por Rao para resolver la EFIE en el dominio de la frecuencia [Rao et al., 1982], [Umashankar et al., 1986]. Para representar la variación temporal en [Rao et al., 1982] se propone la utilización de funciones base triangulares y se aproximan las derivadas temporales mediante diferencias finitas.

Un gran inconveniente en la solución de las ecuaciones integrales utilizando un procedimiento escalonado en el tiempo es la acumulación de errores de discretización que pueden conducir a oscilaciones exponencialmente crecientes en instantes avanzados de la respuesta. Las razones de la existencia de soluciones inestables en las ecuaciones discretizadas, junto con métodos para evitarlas, se pueden encontrar en [Salinas, 1991], [Smith, 1988a], [Tijhuis, 1987].

1.7 Contenido y organización de la Memoria

De acuerdo con los comentarios anteriores, podemos resumir el contenido de la memoria diciendo que se han desarrollado los programas: DOTIG2 (realmente lo que se ha hecho es una nueva versión de una previo ya existente desarrollado en [Salinas, 1991]), y DOTIG4. El primero, DOTIG2, calcula la interacción de una OEMT con una superficie conductora cerrada y el segundo, DOTIG4, lo hace para una superficie conductora de geometría arbitraria. DOTIG2 se basa en la solución de la MFIE y DOTIG4 en la de la EFIE. En ambos casos el modelado se hace mediante parches (rectangulares para la MFIE) y triangulares para la EFIE.

Con objeto de presentar de una forma coherente los fundamentales características de ambos programas, y los resultados con ellos obtenidos, el contenido de la memoria se ha organizado de la siguiente forma:

- En el capítulo 2 se desarrolla una versión mejorada del programa DOTIG2. De acuerdo con la idea apuntada previamente, las posibilidades de este programa están limitadas al cálculo de la RCS de una superficie cerrada, por lo que su potencia y grado de aplicabilidad es mucho menor que el del programa DOTIG4. La razón de su desarrollo se ha debido, fundamentalmente, a que al ser considerablemente más fácil de resolver era conveniente utilizarlo como "banco de prueba" para el

estudio de refinamientos de los algoritmos numéricos que podían ser trasladados a la solución de la EFIE. El fin que se persigue en estos algoritmos es: por un lado retrasar la aparición de las inestabilidades y por otro mejorar la calidad de los resultados. El retraso de la aparición de las inestabilidades debido al nuevo tratamiento numérico evita o retrasa la utilización de filtros que estabilicen la señal lo que a su vez supone una mejora de los resultados, ya que la utilización de filtros en algunos casos afectan a la calidad de los resultados. Al final del capítulo se muestran ejemplos y resultados que ponen de manifiesto estas afirmaciones.

- En el capítulo 3 se desarrollan los fundamentos teóricos y algoritmos que fundamentan el programa DOTIG4. En este algoritmo se hace uso de la experiencia obtenida en el desarrollo del programa DOTIG2. Se incluye un estudio de su comportamiento numérico y aplicación de técnicas que nos aseguren su estabilidad.
- En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos con DOTIG4 al aplicarlo al estudio de problemas tanto de dispersión como de radiación. De hecho el capítulo consta de dos grandes apartados. En el primero se aplica DOTIG4 al cálculo de la RCS tanto de superficies abiertas como cerradas (en este caso también se comparan los resultados proporcionados por DOTIG2), y en el segundo se aplica al estudio de antenas de banda ancha tales como: antena autocomplementaria plana, antena bicónica, antena de bocina TEM, y antena V-cónica.

Con objeto de hacer más fácil la lectura del contenido de la tesis, se ha procurado trasladar a apéndices todos aquellos desarrollos matemáticos que no se consideran fundamentales para un seguimiento coherente del contenido.

La validación de los resultados obtenidos con uno y otro programa se ha hecho en base a la comparación de éstos con los siguientes tipos de resultados:

Teóricos, en los casos en que ha sido posible (por ejemplo la esfera, o algunos tipos de antena como la autocomplementaria plana o la bicónica).

Numéricos, utilizando otros programas desarrollados dentro del Grupo de Electromagnetismos de Granada (basados en FDTD), o haciendo uso de datos expuestos en la bibliografía.

Experimentales, obtenidos también a partir de la bibliografía.

Finalmente también conviene señalar que se han desarrollado programas de pre y postproceso para modelar la geometría de las estructuras analizadas de acuerdo con las necesidades de uno u otro programa.

Capítulo 2

Ecuación MFIE

2.1 Introducción

En general todos los procesos de solución escalonada en el tiempo, y en particular el formalismo integral, pueden generar una solución inestable. Esta inestabilidad se manifiesta en un crecimiento exponencial de las variables en el tiempo, y su aparición se debe a los errores asociados a la discretización de la ecuación para su tratamiento numérico [Canning, 1989], [Marx, 1993]. Estos errores son la causa principal en la aparición de inestabilidades, ya que se van acumulando en el proceso de solución escalonado en el tiempo.

El objetivo de este capítulo es el desarrollo de una versión mejorada del algoritmo para la resolución de la MFIE propuesto en [Salinas, 1991] (DOTIG2). Para ello, se ha hecho un tratamiento numérico más preciso de la ecuación integral, y se comparan los resultados que se obtienen con las distintas versiones del programa. Se pretende un fin doble, reducir los errores numéricos que se cometen en la solución de la ecuación con un costo computacional adicional no elevado, y por tanto, evitar o retrasar la aparición de inestabilidades. La aplicación de filtros para estabilizar la señal se puede realizar de esta forma en instantes más avanzados, con lo que la solución no estará sometida a los efectos de éstos.

La mejora del programa DOTIG2 nos va a servir para mostrar como pueden influir en las inestabilidades los errores de discretización. A la vez se extraen conclusiones que nos permitirán desarrollar en el próximo capítulo un nuevo algoritmo para la resolución de la EFIE para superficies conductoras.

En el siguiente apartado se describe la ecuación integral, se analiza su resolución numérica por el método de los momentos y se realiza un nuevo tratamiento numérico en el que se respeta el principio de causalidad. En líneas generales, el nuevo método es una mejora al algoritmo desarrollado en [Salinas, 1991].

Con objeto de hacer más clara la lectura del capítulo, en el apéndice A se definen y analizan las condiciones de consistencia, estabilidad y convergencia de la ecuación MFIE, como una ecuación tipo de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda clase. Los resultados que se exponen se pueden trasladar (con algunas modificaciones) a otro tipo de ecuaciones integrales como la EFIE. También se comentan los métodos más importantes que existen para evitar la aparición de inestabilidades actuando directamente sobre la solución.

Por último, con objeto de validar los métodos propuestos, se presentan los resultados obtenidos para diferentes figuras canónicas.

2.2 Obtención de la ecuación integral

Para obtener la ecuación MFIE, nos basaremos en [Bennett and Weeks, 1968], [Salinas, 1991]. Desde el punto de vista teórico y de acuerdo con el teorema de unicidad puede utilizarse la ecuación EFIE o MFIE para hallar la corriente inducida en la superficie de un cuerpo sobre el que incide una onda electromagnética arbitraria. Sin embargo desde el punto de vista numérico la elección de la ecuación EFIE (ecuación de Fredholm de primera clase) o de la MFIE (ecuación de Fredholm de segunda clase) está condicionada por el tipo de problema que nos planteemos.

En principio la MFIE puede parecer preferible porque la función incógnita aparece a la vez fuera y dentro de la integral, y su núcleo no contiene derivadas espaciales y presenta singularidades del tipo $1/R^n$ de menor orden. Sin embargo, en el caso de hilos y superficies muy delgadas, con aberturas o con radios de curvaturas pequeños la MFIE no es aplicable.

Esto es debido, en el caso de superficies delgadas o con aberturas, al hecho de que la discontinuidad del campo magnético está asociada a la diferencia de valores de las densidades de corriente eléctrica inducida en ambas caras de la superficie. Para el caso de hilos delgados la causa es el que en el núcleo de la integral aparecen senos de ángulos muy pequeños. Para superficies con radios de curvatura muy pequeño ésta se debe a la dificultad analítica de evaluar la integral para puntos muy próximos a la superficie [Poggio and Miller, 1973a].

El objetivo de este capítulo es analizar y desarrollar un nuevo algoritmo para la resolución numérica de la ecuación MFIE con el que se intenta obtener una mayor estabilidad en las soluciones. En dicho análisis se pretende actuar sobre las causas que producen las inestabilidades.

En el apartado siguiente se presenta una deducción detallada de la ecuación MFIE.

2.2.1 Principio de equivalencia

Cuando una señal electromagnética transitoria incide sobre un cuerpo conductor cerrado, el campo total, en cualquier punto exterior del cuerpo viene dado por

$$\vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^s \quad (2.1)$$

donde \vec{H}^i es el campo incidente y \vec{H}^s el campo dispersado por el cuerpo conductor. Las fuentes de este último campo son las densidades de corriente inducidas en el conductor.

Para calcular estas corrientes se hará uso del principio de equivalencia, que permite sustituir la superficie dispersora por una distribución de corriente equivalente determinada por la condición de contorno para el campo magnético \vec{H} . Como consecuencia, la ecuación integral se plantea en términos de las corrientes superficiales equivalentes. Una vez determinadas estas corrientes, es posible calcular el campo en cualquier punto del espacio.

El campo dispersado \vec{H}^s viene dado por

$$\vec{H}^s(\vec{r}, t) = \nabla \wedge \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (2.2)$$

donde

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dS' \quad (2.3)$$

siendo S' la superficie del cuerpo dispersor. \vec{r} es el vector de posición del punto campo. \vec{r}' es el vector de posición del punto fuente. $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Evaluando

$$\nabla \wedge \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla \wedge \vec{J} + \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \vec{J} \quad (2.4)$$

$$\nabla \wedge \vec{J} = \frac{-\vec{R}}{Rc} \wedge \partial_{t'} \vec{J} \quad (2.5)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{-\vec{R}}{R^3} \quad (2.6)$$

Sustituyendo (2.4), (2.5), (2.6) en (2.2) se obtiene

$$\vec{H}^s(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.7)$$

El campo total viene dado por

$$\vec{H} = \vec{H}^i + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.8)$$

Para evaluar \vec{J} a partir de la ecuación (2.8) hay que plantear la condición de contorno relativa a la componente tangencial del campo magnético \vec{H} , y por tanto evaluar el campo total en la propia superficie conductora, como un límite por el exterior. Esto implica que el núcleo de la integral se hace singular, por lo que ha de hacerse una evaluación cuidadosa de la integral en este punto.

2.2.2 Valor principal de la integral de superficie

De lo comentado anteriormente se hace necesario evaluar el límite

$$\vec{I}(\vec{r}'', t) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.9)$$

donde \vec{r}'' está situado en la superficie y \vec{r} es un punto exterior a la misma.

Para evaluar la ecuación (2.9) es conveniente dividir la integral en dos partes

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \quad (2.10)$$

donde

$$\vec{I}_1 = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'_- S'_\epsilon} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.11)$$

$$\vec{I}_2 = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'_\epsilon} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.12)$$

siendo S'_ϵ un elemento pequeño de superficie que rodea a \vec{r}'' .

El límite en la ecuación (2.11) no contiene singularidades y viene definido por el valor de la función en el punto \vec{r}''

$$\vec{I}_1(\vec{r}'', t) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'_- S'_\epsilon} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.13)$$

El límite en la ecuación (2.12) se lleva a cabo suponiendo S'_ϵ como una superficie circular (plana) y aproximando por la dirección perpendicular a esta superficie.

Descomponiendo la ecuación (2.12) en los dos sumandos

$$\vec{I}_{2a} = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi c} \oint_{S'_\epsilon} \frac{\partial_{t'}}{R} \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.14)$$

$$\vec{I}_{2b} = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}''} \frac{1}{4\pi} \oint_{S'_\epsilon} \frac{\vec{J}}{R^2} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.15)$$

Definiendo \hat{n} como el vector normal a la superficie, y teniendo en cuenta las condiciones de contorno se puede escribir

$$\vec{J}(\vec{r}'', t') = \hat{n} \wedge \vec{H}(\vec{r}'', t') \quad (2.16)$$

$$\partial_{t'} \vec{J}(\vec{r}', t') = \hat{n} \wedge \partial_{t'} \vec{J}(\vec{r}', t') \quad (2.17)$$

A partir de la Fig. 2.1 tendremos

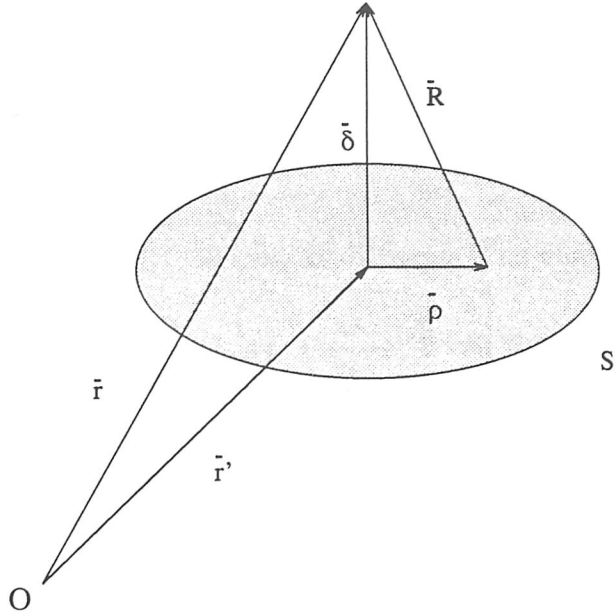


Figura 2.1: Coordenadas locales en torno a la singularidad.

$$R = \sqrt{\rho'^2 + \delta^2}$$

$$\vec{R} = -\rho' \hat{\rho}' + \delta \hat{n}$$

Descomponiendo el doble producto vectorial, aparecen cuatro sumandos

$$\vec{I}_2^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S_{\epsilon'}} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \hat{n} \right] \partial_{t'} \vec{H} dS'$$

$$\vec{I}_2^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S_{\epsilon'}} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \partial_{t'} \vec{H} \right] \hat{n} dS'$$

$$\vec{I}_2^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S_{\epsilon'}} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \hat{n} \right] \vec{H} dS'$$

$$\vec{I}_2^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi c} \int_{S_{\epsilon'}} \frac{1}{R} \left[\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{H} \right] \hat{n} dS'$$

descomponiendo \vec{H} en su componente tangencial y perpendicular a la superficie, y evaluando el campo magnético como constante en $S_{\epsilon''}$ se obtiene

$$\vec{I}_2^1 = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{I}_2^2 &= 0 \\ \vec{I}_2^3 &= \frac{\vec{H}}{2} \\ \vec{I}_2^4 &= \frac{\vec{H} \cdot \hat{n}}{2}\end{aligned}$$

y por tanto

$$\vec{I}_2 = \frac{\hat{n} \wedge \vec{H}}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.8) y teniendo en cuenta que la componente normal del campo magnético se anula en la superficie se obtiene

$$\frac{1}{2} \hat{n} \wedge \vec{H} = \hat{n} \wedge \vec{H}^i + \frac{\hat{n} \wedge}{4\pi} \int_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.18)$$

2.2.3 Ecuación MFIE

Teniendo en cuenta en la ecuación (2.18) la condición de contorno para el campo magnético, se obtiene finalmente la ecuación MFIE

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = 2\hat{n} \wedge \vec{H}^i + \frac{\hat{n} \wedge}{2\pi} \int_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS' \quad (2.19)$$

El primer término del segundo miembro representa la influencia directa del campo incidente sobre la corriente en el punto de observación (\vec{r}, t) . Además, este término determina la conocida aproximación óptica para la corriente superficial. El segundo sumando del segundo miembro representa la influencia de la corriente en otros puntos de la superficie sobre la corriente en (\vec{r}, t) . Se puede observar que la influencia de la corriente en otros puntos sobre la corriente en (\vec{r}, t) está retardada en el tiempo por R/c , donde R es la distancia entre los dos puntos. Esta última circunstancia es la que permite resolver la ecuación mediante un procedimiento de solución escalonada en el tiempo y sin necesidad de inversión matricial.

Es interesante observar que no existe interacción entre corrientes que fluyen en un mismo plano.

El campo de radiación, ([Poggio and Miller, 1973a]), debido a las fuentes inducidas viene dado por

$$\vec{r} \cdot \vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \oint_{S'} \partial_{t'} \vec{J}(\vec{r}', t') \wedge \frac{\vec{r}}{r} dS' \quad (2.20)$$

Cuando se haga referencia al campo dispersado se supone implícitamente que se trata de la componente dada por la ecuación (2.20)

2.3 Estabilidad de la ecuación MFIE

Haciendo uso de la teoría expuesta en el apéndice A, [Rynne, 1985], vamos a estudiar en que condiciones el proceso de solución escalonado en el tiempo de la ecuación MFIE es convergente.

Nos planteamos la resolución del problema de dispersión de un pulso electromagnético por un cuerpo conductor perfecto limitado. Estudiaremos cuerpos cerrados y sin radio de curvatura pequeños de forma que computacionalmente es más eficiente utilizar la ecuación integral del campo magnético MFIE. La expresión de dicha ecuación tal y como ya se expuso anteriormente en (2.19) es

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = 2\hat{n} \wedge \vec{H}^i + \frac{\hat{n} \wedge}{2\pi} \int_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial_{t'}}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS'$$

La superficie S' se divide en un conjunto de parches P_α de área A_α , el tiempo también se discretiza en intervalos Δt con $\Delta t \leq R_{min}/c$. La derivada temporal de la incógnita se obtiene a partir de las funciones base (polinomios de interpolación lagrangiana de orden K) utilizadas para aproximar la dependencia temporal de la corriente. El orden del error que se comete es al menos $O(\Delta t)$ y por tanto $O(h)$. De donde h es una medida del tamaño del mallado. Se puede demostrar fácilmente que asumiendo que la solución J es suficientemente plana y limitada el error de discretización cometido en la integración numérica es $O(h)$.

Con esto vemos que el método es consistente. Nos queda por comprobar que es convergente, para ello, hemos de verificar que se cumple la condición de estabilidad dada por la ecuación (A.5) ó (A.6).

Para mostrar la estabilidad tomamos un punto fijo del mallado y evaluamos el valor de

$$\left| \sum_{m'=0}^m \sum_{\alpha'} \tilde{K}_h(\alpha, \alpha', m, m') \psi(\alpha', m') \right| \quad (2.21)$$

Tomamos el valor de Ψ como la diferencia entre la solución exacta y la solución que se obtiene mediante el proceso de solución que se obtiene mediante el proceso de discretización utilizado. Los vectores $\Psi(\alpha, m)$ tendrán un valor del orden $G(m, \Psi)$ en el m -ésimo instante temporal. Un análisis no realista de la situación nos podría llevar a afirmar a primera vista que la suma de N vectores de magnitud ρ es de magnitud $N\rho$.

Con objeto de encontrar una estimación realista de la ecuación (2.21) debemos tener en cuenta la cancelación de los errores causados por la variación de los vectores $\Psi(\alpha, m)$.

Podemos hacer la suposición de que dichos vectores están arbitrariamente orientados. Esta suposición no es completamente cierta en un sentido estricto de definición estadística de una variable aleatoria, ya que podríamos esperar cierta cantidad de correlación entre los errores de puntos vecinos sobre la superficie. De cualquier forma

teniendo en cuenta la naturaleza oscilatoria de la solución y el hecho de que los vectores Ψ son vectores de superficie, necesariamente pues tienen que cambiar de dirección. Es razonable por tanto pensar que sobre todo el espacio y el tiempo no hay una dirección preferente para los errores. Si esto es así habrá una cancelación de los errores en la sumatoria y por tanto la suposición de que los vectores $\Psi(\alpha, m)$ están arbitrariamente orientados nos da una estimación de la cantidad de cancelación.

Tomando pues los vectores $\Psi(\alpha, m)$ como vectores orientados aleatoriamente en el espacio y el tiempo, podemos considerar las componentes cartesianas de los vectores $\Psi(\alpha, m)$ como variables aleatorias con media 0, y varianza de orden $G^2(m, \Psi)$.

La sumatoria (2.21) se puede tomar como un vector (función de α y m) cuyas componentes son sumas de variables aleatorias, y por tanto con medias nulas. El valor de la magnitud de la sumatoria está dado por tanto por la varianza de las componentes de la suma y esto es igual a la suma de las varianzas individuales (esto es válido para una amplia clase de funciones de distribución de una sola variable).

La contribución de $\Psi(\alpha', m')$ en la ecuación (2.21) está limitada por

$$\frac{1}{2\pi} | \hat{n} \wedge \hat{t} \wedge \hat{r} | \left[\frac{1}{R^2} | \psi(\alpha', m') | + \frac{1}{Rc} | D\psi(\alpha', m') | \right] A'_{\alpha'} \quad (2.22)$$

Teniendo en cuenta que el orden de los distintos factores de dicha ecuación es (en donde \hat{t} es un vector unitario tangente a S en $x_{\alpha'}$)

$$\begin{array}{ll} | \hat{n} \wedge \hat{t} \wedge \hat{r} | & O(h) \quad \text{cuando} \quad | x_{\alpha} - x'_{\alpha} | \text{ es } O(h) \\ y & O(1) \quad \text{cuando} \quad | x_{\alpha} - x'_{\alpha} | \text{ es } O(1) \end{array}$$

$$A_{\alpha'} \sim O(h)$$

$$| \psi(\alpha', m') | = G(m', \psi) \cdot O(1)$$

$$| D\psi(\alpha', m') | = G(m', \psi) \cdot O(1/h)$$

y el número de elementos de $S_{m'}$, encontramos que

$$G^2(m, \psi) = O(h) \sum_{m'=0}^{m-1} G^2(m', \psi) + O(\delta^2(h))$$

Estimación que tal y como se puede apreciar satisface la condición de estabilidad (A.6).

El hecho de que los errores no sean, estrictamente hablando, aleatorios puede incluso llevar a una estabilidad mayor que la predicha por el análisis anterior. La fuente principal de las inestabilidades es el término de la derivada numérica temporal. Por tanto es importante evaluar dicho término prestándole una mayor atención.

2.4 Resolución numérica de la ecuación MFIE.

2.4.1 Discretización de la ecuación

Con objeto de resolver la ecuación integral (2.19) mediante el método de los momentos, es necesario aproximar la superficie S del blanco mediante una superficie poliédrica S' , tal que

$$S \approx S' = \bigcup_{i=1}^{N_s} S'_i$$

donde S'_i representan las N_s superficies planas de las caras del poliedro.

Igualmente la variable temporal se discretiza según

$$t = v\Delta t + t''$$

donde $t'' < \Delta t$ Para resolver la ecuación mediante un proceso de solución escalonado en el tiempo sin necesidad de inversión matricial, el incremento temporal Δt debe cumplir la relación $\Delta t \leq R_{min}/c$. De esta manera es posible expresar la corriente en el instante actual en función de corrientes ya calculadas en instantes anteriores.

2.4.2 Elección de funciones base y peso

Para resolver la ecuación EFIE, se usarán como funciones peso funciones δ de Dirac. Esto equivale a forzar la ecuación integral en los centros de los intervalos espacio-temporales.

Respecto a la elección de las funciones base, se sacará provecho de la circunstancia de que en el núcleo de la ecuación integral no aparecen derivadas espaciales, y como consecuencia, se elegirá como funciones base espaciales, funciones pulso. Esto equivale a suponer que la corriente es constante en cada parche, lo que conlleva:

1. Las líneas de corriente no son cerradas.
2. Los límites de los parches forman singularidades de carga.

Para la variable temporal se utilizarán funciones base del tipo polinomios de interpolación lagrangiana de orden k . Como mínimo k debe ser uno para que podamos efectuar la derivada temporal

$$\vec{J}_j(t''_j) = \sum_{m=n}^{n+k} B_j^{(m)} \vec{J}_{j+m} \quad (2.23)$$

donde n se define, con objeto de no violar el principio de causalidad, para interpolar con términos no posteriores al actual [Popovic et al., 1982].

Esta elección de las funciones base implica en cierta medida una violación del principio de causalidad. No es estrictamente correcto suponer que la densidad de corriente

es constante en cada parche, y utilizar un polinomio de interpolación de orden distinto de cero para desarrollar en la variable temporal. Posteriormente se verá que este hecho puede generar inestabilidades en el proceso de solución.

2.4.3 Ecuación MFIE numérica

Como ya se ha comentado anteriormente, la resolución numérica de la ecuación MFIE se plantea desarrollando la corriente superficial en funciones base pulsos para la variable espacial, y polinomios de interpolación lagrangiana para la variable temporal.

Generalmente la integral se aproxima a una sumatoria donde el núcleo y la variable se evalúa en el centro de cada parche. En este caso se está suponiendo entonces que el retraso también es constante en cada parche, lo que sería cierto sólomente si en la variable temporal las funciones base fueran pulsos. Esto supone una contradicción con el principio de causalidad, y aunque el error puede ser pequeño el proceso de solución escalonado en el tiempo lo puede amplificar.

El tratamiento numérico que se propone en esta memoria de licenciatura (llevar al límite la técnica de subdivisión para evitar las inestabilidades), consiste en una evaluación más exacta de la integral de superficie. El objeto que se persigue es corregir la desviación que la situación anterior nos produce sobre el principio de causalidad. El núcleo de la integral se evalúa hallando la integral de superficie sobre cada parche, y la variable, la densidad de corriente, como sólomente se tiene evaluada en el centro del parche (funciones base pulso para la variable espacial) toma un valor constante pero con el correspondiente retraso evaluado según la distancia del punto del parche sobre el que se integra al punto campo.

Es decir, la ecuación (2.19)

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = 2\hat{n} \wedge \vec{H}^i + \frac{\hat{n} \wedge}{2\pi} \int_{S'} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{\partial t'}{cR} \right] \vec{J} \wedge \frac{\vec{R}}{R} dS'$$

Se expresa en la forma

$$\vec{J}_{ij} \approx 2\hat{n}_i \wedge \vec{H}_{ij}^i + \frac{\hat{n}_i}{2\pi} \wedge \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N_s} \sum_{m=n}^{n+k} (\vec{J}_{p,s+m} \wedge \vec{R}_{ip}) \cdot \int_{s_p} \left[\frac{1}{R^3} + \frac{\partial t''}{R^2} \right] b_s^{(m)} dS'_p \quad (2.24)$$

donde s es el entero más próximo a $t_j - R_{ip}/c$. El subíndice i denota punto campo y el p punto fuente. La dependencia temporal de la corriente la tenemos expresada según

$$\vec{J}_j(t''_j) = \sum_{m=n}^{n+k} B_j^{(m)} \vec{J}_{j+m} \quad (2.25)$$

los coeficientes $B_s^{(m)}$ vienen dados por:

$$B_s^{(m)} = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+k} \frac{t_s'' + t_s - t_{s+q}}{t_{s+m} - t_{s+q}} \tag{2.26}$$

Según se desarrolla en el apéndice B.1 los coeficientes $B_s^{(m)}$ se pueden desarrollar en función de t'' , quedándonos

$$B_s^{(m)} = \frac{1}{D_s^m} (t_s''^4 + t_s''^3 S Q_s^m + t_s''^2 S D P Q_s^m + t_s'' S T P Q_s^m + P Q_s^m) \tag{2.27}$$

Expresión a partir de la cual podemos hallar la derivada temporal como

$$\partial_{t''} B_s^m = \frac{1}{D_s^m} (4t_s''^3 + 3t_s''^2 S Q_s^m + 2t_s'' S D P Q_s^m + t_s'' S T P Q_s^m) \tag{2.28}$$

En la siguiente figura se representan la variable temporal discretizada y la relación entre las distintos parámetros temporales utilizados

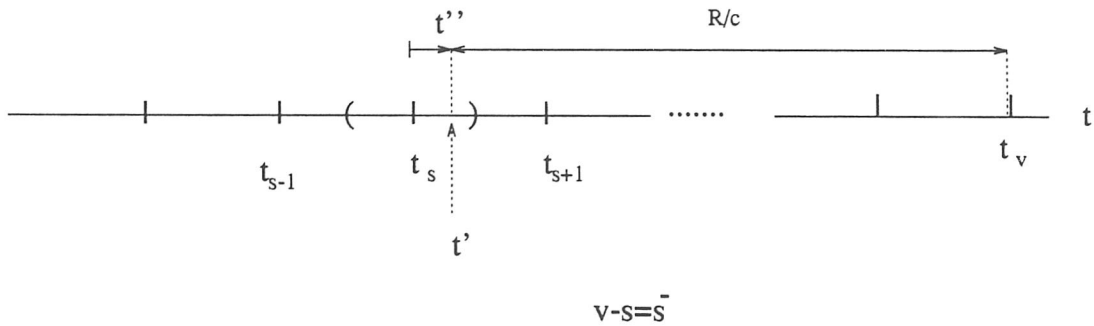


Figura 2.2: Relación entre las variables temporales.

Tal y como se han definido las variable se cumple

$$t_s + t'' = t' = t_v - R/c$$

Con $t_s = s\Delta t$ y $t_v = v\Delta t$. De donde t'' nos queda

$$t'' = \bar{s}\Delta t - R/c$$

Evaluando las distintas potencias de t'' podemos calcular el término

$$\frac{B_s^{(m)}}{R^3} + \frac{\partial_{t''} B_s^{(m)}}{R^2} \tag{2.29}$$

Quedándonos la integral de superficie de la expresión (2.24)

$$\int_{s_p} \left(\frac{B_s^{(m)}}{R^3} + \frac{\partial_{t''} B_s^{(m)}}{R^2} \right) dS'_p = \int_{s_p} \frac{1}{D_s^m} \{ -3R + (2SQ_s^m + 8\bar{S}\Delta t) + \frac{-1}{R} (6\bar{S}^2\Delta t^2 + 3\bar{S}\Delta t SQ_s^m + SDPQ_s^m) + \frac{1}{R^3} (\bar{S}^4\Delta t^4 + \bar{S}^3\Delta t^3 SQ_s^m + \bar{S}^2\Delta t^2 SDPQ_s^m + \bar{S}\Delta t STPQ_s^m + PQ_s^m) \} dS'_p \quad (2.30)$$

Para evaluar la expresión (2.29) si tenemos en cuenta el sistema de coordenadas local que podemos definir sobre cada parche, representado en la Fig. 2.3

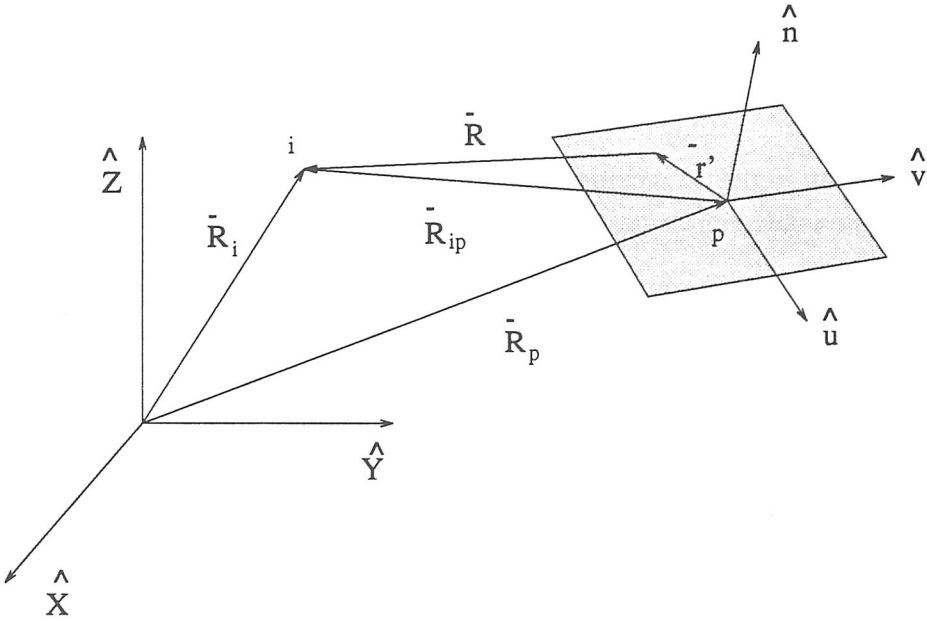


Figura 2.3: Base local sobre un parche cuadrado.

Podemos expresar el vector

$$|\vec{R}| = |\vec{R}_{ip} - \vec{r}'|$$

en el sistema de base local formado sobre el parche como

$$|\vec{R}| = \sqrt{(R_{ipu}^2 + R_{ipv}^2 + R_{ipn}^2) + u^2 + v^2 - 2R_{ipu}u - 2R_{ipv}v} \quad (2.31)$$

De donde los subíndices u, v denotan variables expresadas en la base formada por las dos tangentes al parche y la normal.

A partir de la expresión (2.30) y de (2.31) podemos realizar la integral numérica de superficie. Para ello dividimos el parche (si este es cuadrado) en dos triángulos y

aplicamos el método de integración desarrollado en [Stroud, 1971] para la integral de superficie sobre un dominio triangular.

Para reducir el tiempo de CPU utilizado por los algoritmos en la resolución del problema se definen unas matrices de estructura que corresponden tanto al núcleo de la ecuación como al retraso de las corrientes, lo cual nos minimiza los procesos que se efectúan en el ciclo temporal a costa de aumentar el espacio de memoria necesario para la ejecución del programa.

2.5 Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con el programa DOTIG2 al estudio de la interacción de ondas electromagnéticas transitorias tipo pulso gaussiano con diversas estructuras conductoras perfectas cuya frontera es una superficie cerrada. Dicho programa incorpora tanto la técnica de integración como el filtro de altas frecuencias en el algoritmo. Con objeto de realizar un estudio sobre los distintos problemas que se pueden presentar en la modelación se han analizado las siguientes estructuras:

- Esfera
- Cilindro con terminaciones semiesféricas
- Cono con terminación esférica
- Cilindro recto
- Cubo

La ecuación MFIE es aplicable a estructuras cuya superficie tiene radios de curvatura suaves. La aparición de puntas y filos requiere un mayor grado de aproximación de la ecuación integral para poder aplicar correctamente las condiciones de frontera. Así, esta mayor complicación implica la pérdida de la principal ventaja de la ecuación MFIE: su sencillez. Es por tanto mejor utilizar la ecuación EFIE para los casos más complicados puesto que al mismo tiempo se pueden analizar ejemplos más generales (superficies abiertas y modeladas por hilos). De todas formas, la ecuación MFIE puede darnos información a frecuencias para las que el efecto de las puntas y los filos es despreciable. Esto es, para frecuencias bajas y medias relativas al tamaño eléctrico de la estructura.

Sin embargo, en cuanto a estabilidad ahora nos aparece otro fuente que antes no teníamos el estudiar figuras con superficies suaves: El efecto de la no aplicación de las condiciones de frontera puede aportar resultados inestables en la solución y por tanto invalidarla.

Resulta por tanto útil el análisis de figuras tales como el cono con terminación esférica (cono-esfera), el cilindro recto ó el cubo a fin de poder extraer algunas conclusiones acerca del comportamiento numérico del método de solución escalonado en el tiempo.

La unidad temporal se toma como el tiempo que tarda la luz en recorrer un metro, y se representa por $s * c$. Se ha definido así con objeto de simplificar las expresiones y poder interpretar de forma mas sencilla las gráficas obtenidas.

2.5.1 Esfera

La primera figura que se ha analizado es una esfera de radio $1m.$, cuando sobre ella incide una onda electromagnética transitoria (pulso electromagnético,).

Se ha modelado con 168 parches haciendo uso de un mallado proporcional. En la Fig. 2.4 se representan tanto los parches que modelan la superficie como las normales a estos. La distancia mínima entre los centroides de los parches es $R_{min} = 0.185m$. Se puede observar como los parches que representan la superficie no forman una superficies cerrada. Como se comenta en [Salinas, 1991], la modelación por parches para la MFIE es relativamente fácil aún para estructuras complejas, pues solo es necesario conocer las coordenadas del centro y componentes del vector normal de cada parche así como el valor de su superficie.

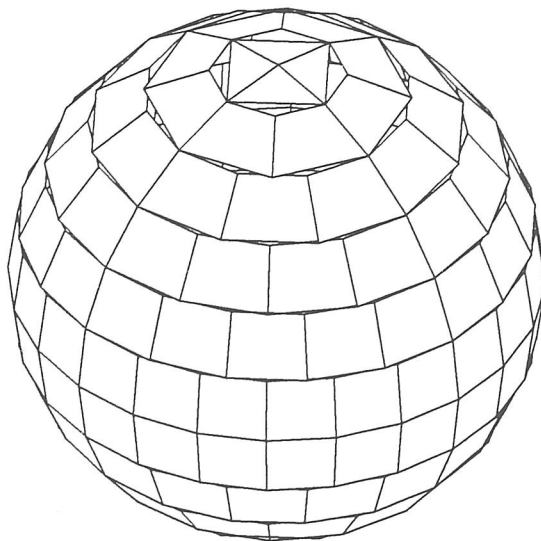


Figura 2.4: Mallado de la esfera.

El campo incidente es un pulso electromagnético en forma de onda plana con vector campo magnético $(1, 0, 0)$, y vector de propagación $(0, 0, -1)$, referidos ambos a un sistema cartesiano con origen en el centro geométrico de la figura. El perfil de la onda es

$$H(z, t) = \exp \frac{[(t - t_{max}) + z]^2}{g^2}$$

donde t_{max} se define para que el pulso empiece a incidir sobre la estructura en $t = 0$ con un valor igual a la centésima parte de su valor máximo. El parámetro g usado ha sido $g = 1. (s * c) - 1$, lo que corresponde a una longitud de onda mínima de $2m.$, es decir, del orden del tamaño del dispersor.

En las Figs. 2.5, 2.6, 2.7, se muestra una de las componentes de la corriente inducida en un punto situado sobre la superficie de la esfera.

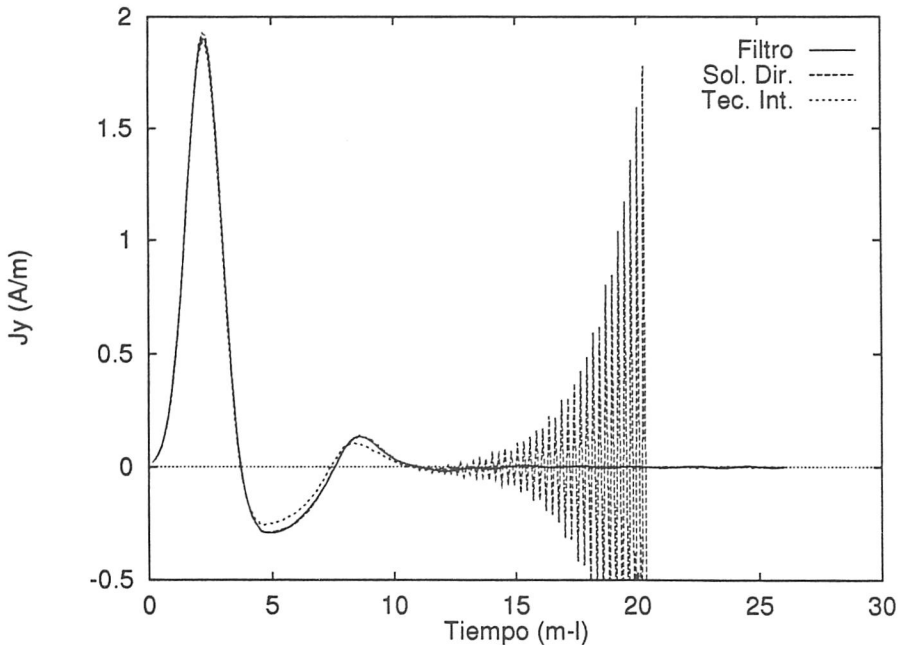


Figura 2.5: Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, $\Delta t = 0.13$.

En la Fig. 2.5 se ha tomado $\Delta t = 0.13$, y se aprecia como tanto el filtro como la técnica de integración aseguran la estabilidad del proceso, mientras que la solución directa es inestable.

Sin embargo en las Figs. 2.6, 2.7 ($\Delta t = 0.18$ y $\Delta t = 0.20$ respectivamente) tenemos que la solución directa permanece estable mientras que la técnica de subdivisión es inestable.

En las Figs. 2.8, 2.9, 2.10, se representa el campo de radiación en la dirección monostática para los diferentes métodos utilizados. El campo de radiación se obtiene a partir de las corrientes y por tanto, se observa que para $\Delta t = 0.13$ la solución obtenida con el filtro como con la técnica de integración es estable, mientras que la solución directa es inestable. Tomando $\Delta t = 0.18$ y $\Delta t = 0.20$, tenemos que la solución directa

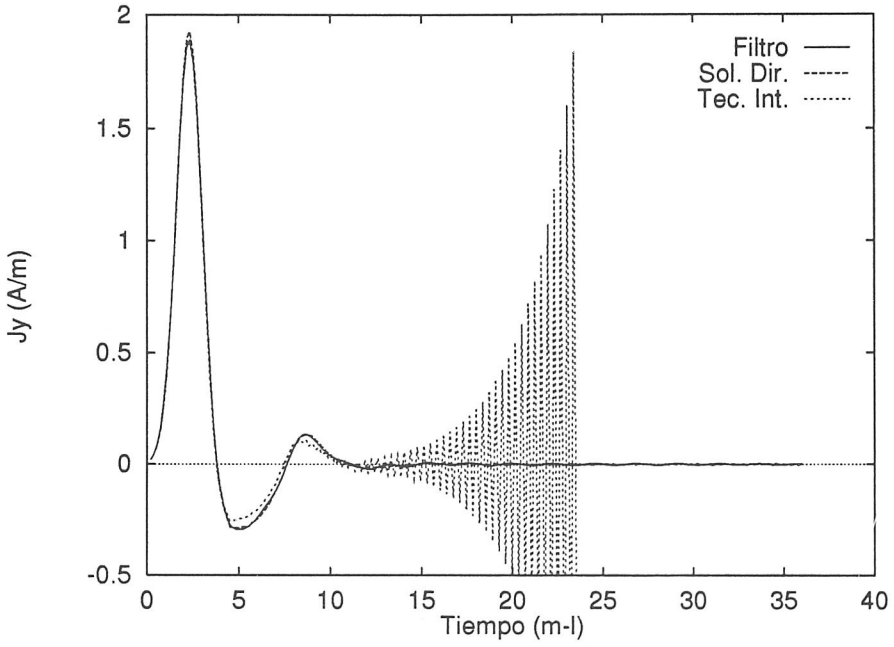


Figura 2.6: Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, $\Delta t = 0.18$.

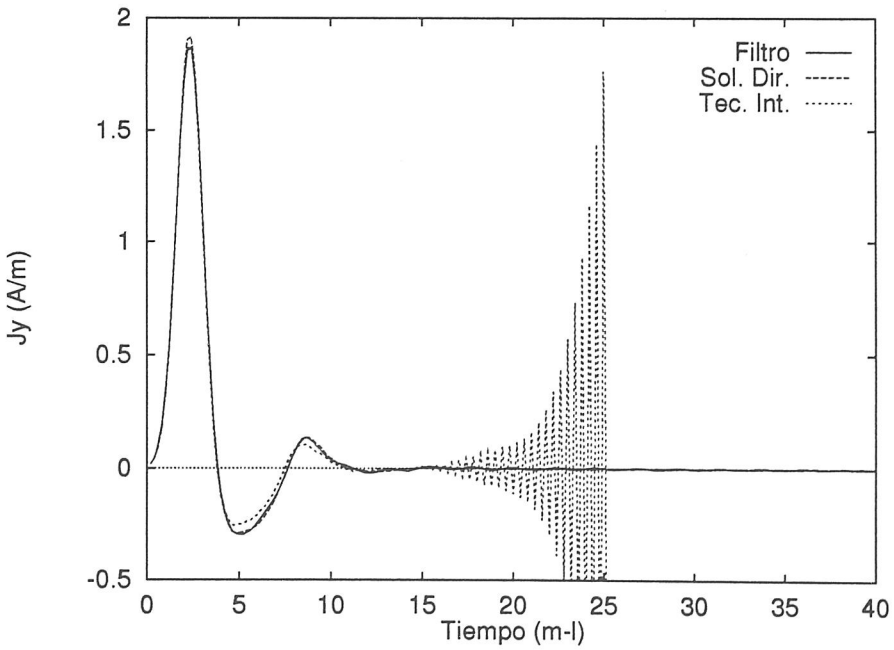


Figura 2.7: Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, $\Delta t = 0.20$.

permanece estable mientras que la técnica de subdivisión es inestable.

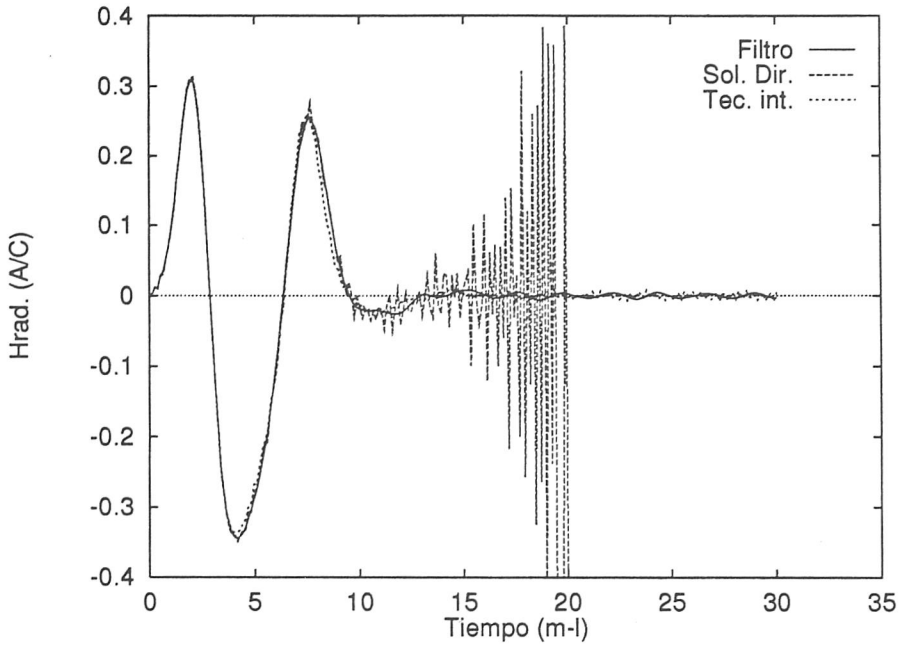


Figura 2.8: Campo de radiación dispersado por la esfera, $\Delta t = 0.13$.

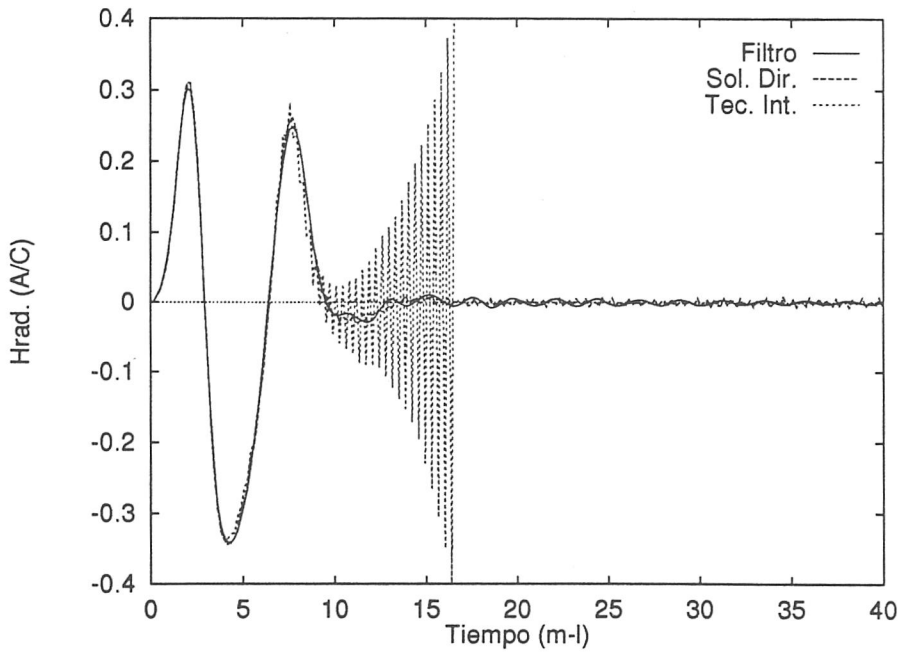


Figura 2.9: Campo de radiación dispersado por la esfera, $\Delta t = 0.18$.

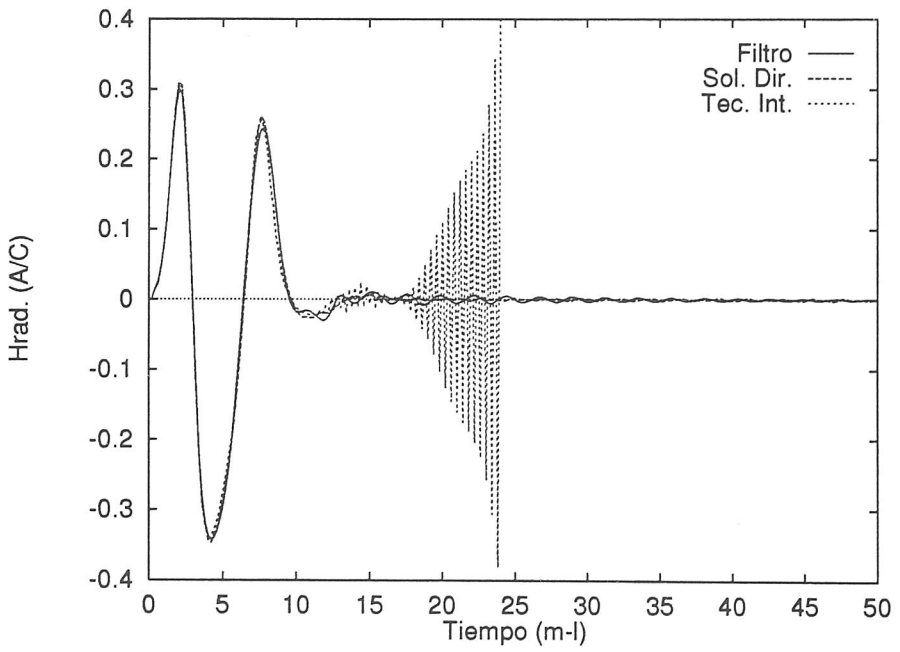
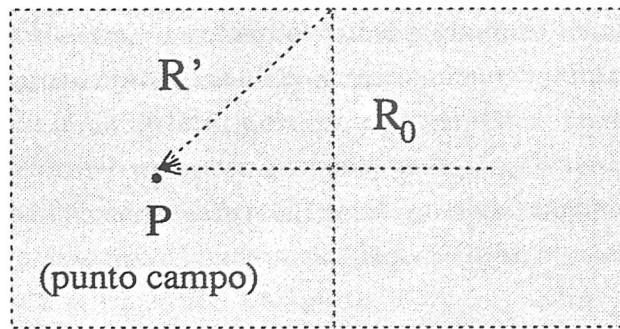


Figura 2.10: Campo de radiación dispersado por la esfera, $\Delta t = 0.20$.



Parche fuente

Figura 2.11: Relación de distancias entre dos parches vecinos.

Vemos por tanto como la solución directa es más inestable al reducir Δt , de acuerdo con las predicciones teóricas. Sin embargo la técnica de subdivisión parece tener en este sentido un comportamiento anómalo, que aclararemos a continuación.

Cuando se aplica la técnica de integración entre parches vecinos se están utilizando los coeficientes de interpolación lagrangiana para una extrapolación. Por ejemplo, tengamos dos parches vecinos (Fig. 2.11) que por simplicidad hemos supuesto cuadrados y de igual tamaño. Si R_0 es la distancia entre centros, la distancia mínima entre el punto campo y algún punto fuente será

$$R' = \frac{R_0}{\sqrt{2}}$$

Así será necesario extrapolar al valor de la corriente en el parche fuente en su futuro inmediato, lo que supone salirse del rango de validez de aplicación de los coeficientes de interpolación. Para evitar esto hay que tomar el valor del incremento temporal como $R_{min}/\sqrt{2}$ siendo R_{min} la distancia mínima entre parches. Así, aunque se efectúa una pequeña extrapolación, esta cae dentro del intervalo temporal. Así en las Figs. 2.5, 2.8, en las que $\Delta t = 0.13 = 0.19/\sqrt{2}$, se observa un comportamiento estable en la solución.

Es curiosa la coincidencia del factor $\sqrt{2}$ con el que determina la condición de Courant para la estabilidad del proceso de solución de diferencias finitas.

El criterio de Courant establece un factor de $\sqrt{3}$ para el caso tridimensional, sin embargo, en nuestro caso estamos considerando parches vecinos en una superficie diferenciable por lo que podemos considerarla como plana.

Es probable por tanto, que la ecuación MFIE deba verificar esta condición para la estabilidad, siempre en el caso de utilizar la técnica de integración.

Para confirmar lo comentado anteriormente se ha procedido de la siguiente manera. Debido a que la interacción entre parches vecinos es muy pequeña (siempre que

la superficie tenga buen comportamiento) podemos aplicar la técnica de subdivisión cuando los parches campo y fuente no sean vecinos. De esta manera, aislamos el efecto de la extrapolación hacia instantes no calculados. Así en la Fig. 2.12, se representa la misma corriente que en la Fig. 2.6 pero integrando para parches no vecinos. En (a) no se integra al evaluar la interacción entre los vecinos más cercanos, y en (b) no se integra al evaluar la interacción entre todos los parches vecinos. Vemos como las inestabilidades han desaparecido.

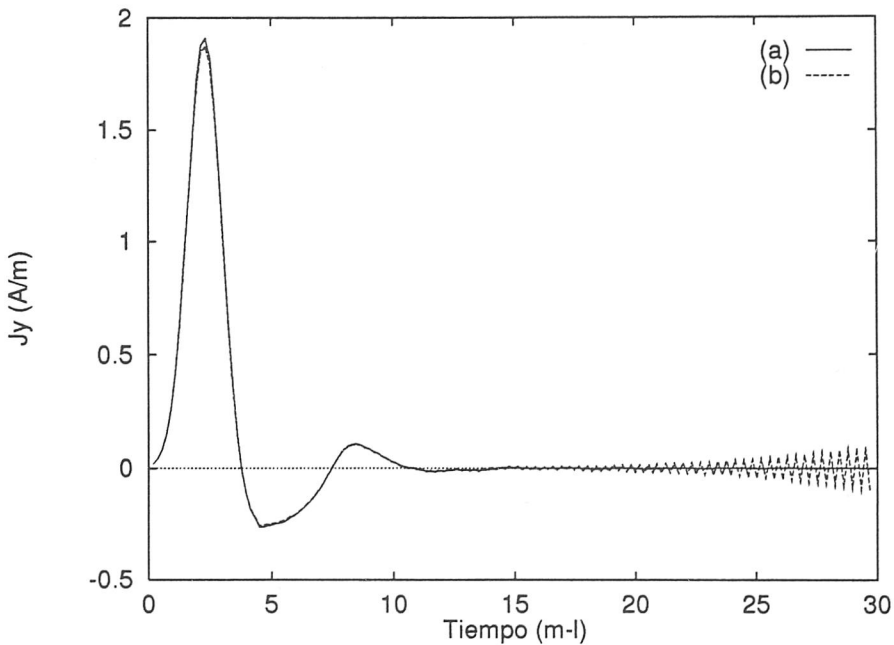


Figura 2.12: Densidad de corriente sobre un punto de la esfera, ($\Delta t = 0.18$), limitando la aplicación de la técnica de integración.

Sin embargo, la estabilidad del proceso parece no depender del incremento temporal utilizado. La causa hay que buscarla en que ahora parece haber desaparecido la causa de las inestabilidades. Es decir, la traslación de las frecuencias de resonancia hacia la parte real del plano complejo no se produce, o se produce de manera no perceptible en la solución. Este hecho no es sorprendente si pensamos que la ecuación integral más estable es la ecuación EFIE para estructuras de hilos. En ella el principio de causalidad es respetado al máximo a través de los polinomios de interpolación y la integración espacial que se efectúa. Para la ecuación MFIE la generación de inestabilidades en las superficies con curvaturas suaves estudiadas proviene pues en gran medida de la violación del principio de causalidad y al aplicar la técnica de integración el principio es respetado.

Otro aspecto a favor de la conclusión anterior es el análisis de la coherencia del propio método. Al desarrollar el tiempo con polinomios hace que aunque las funciones base

espaciales sean pulsos (esto es, constantes) el principio de causalidad obliga a no poder considerar constante espaciotemporal a la corriente.

En todos los casos el filtro de altas frecuencias genera una solución estable, puesto que actúa sobre el efecto y no sobre la causa, ya que la ecuación MFIE no presenta inestabilidades para bajas frecuencias, sin embargo para pulsos no excesivamente anchos, en la parte no iluminada de la esfera el filtro introduce perturbaciones a la señal muy fuertes debidas a la transición brusca que sufre la onda viajera al convertirse en deslizante [Salinas, 1991]. Este efecto se refuerza con la aplicación del filtro de altas frecuencias debido al movimiento global que ejerce sobre los autovalores del círculo unidad.

Esto lo podemos apreciar en la Fig. 2.13 en la que se representa el campo de radiación dispersado por la esfera en la dirección monoestática utilizando un pulso de parámetro $g = 2.0(s * c)^{-1}$ manteniendo el mismo modelado, usando un incremento temporal de $0.2s * c$.

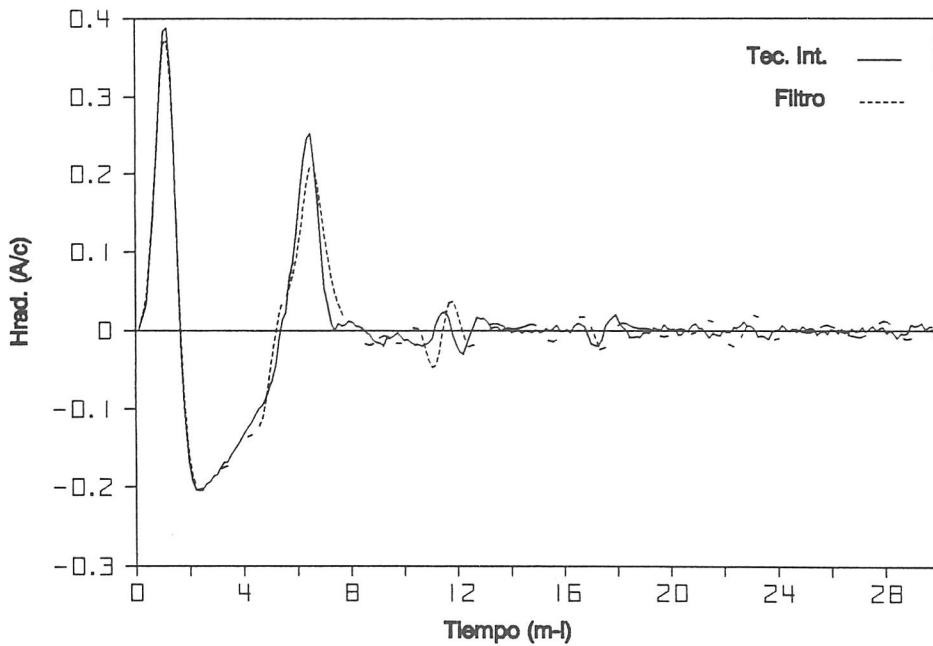


Figura 2.13: Campo de radiación dispersado por la esfera, $g = 2.0 \quad \Delta t = 0.20$.

2.5.2 Cilindro con terminaciones semiesféricas.

La siguiente figura analizada ha sido el cilindro recto con terminaciones semiesféricas. Las dimensiones son $1m.$ de radio, y $6m.$ de longitud total (incluyendo las semiesferas).

En la Fig. 2.14, se representa el mallado del cilindro con terminaciones semiesféricas realizado. Se ha modelado con 272 parches, resultando una distancia mínima entre centroides de $0.28m.$ El campo incidente tiene las mismas características que en el utilizado para la esfera, pero ahora $g = 0.8(s * c)^{-1}$.

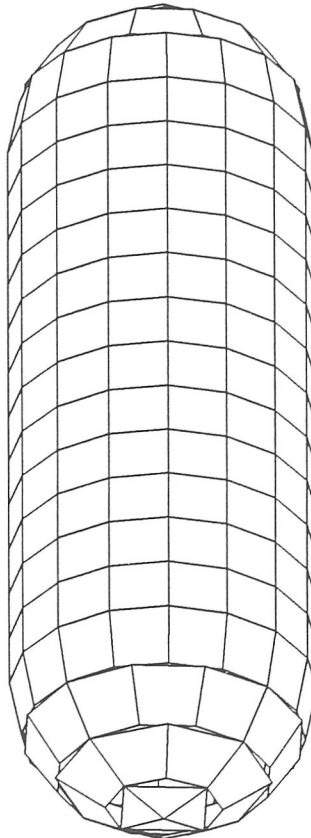


Figura 2.14: Mallado del cilindro con terminaciones semiesféricas.

En las Figs. 2.15, 2.16, 2.17, se representan las corrientes en un punto de la estructura para los diferentes métodos utilizados.

Para esta estructura, debido a su mayor tamaño respecto al ancho del pulso incidente, la solución directa es en todos los casos inestable. Este comportamiento se acusa cuando se reduce el valor del incremento temporal. Por el contrario el filtro de altas frecuencias es siempre estable.

En el caso de la técnica de integración, se confirma de nuevo que cuando se respeta el criterio de Courant, es decir $\Delta t = R_{min}/\sqrt{2}$, el método es estable. En este caso, como

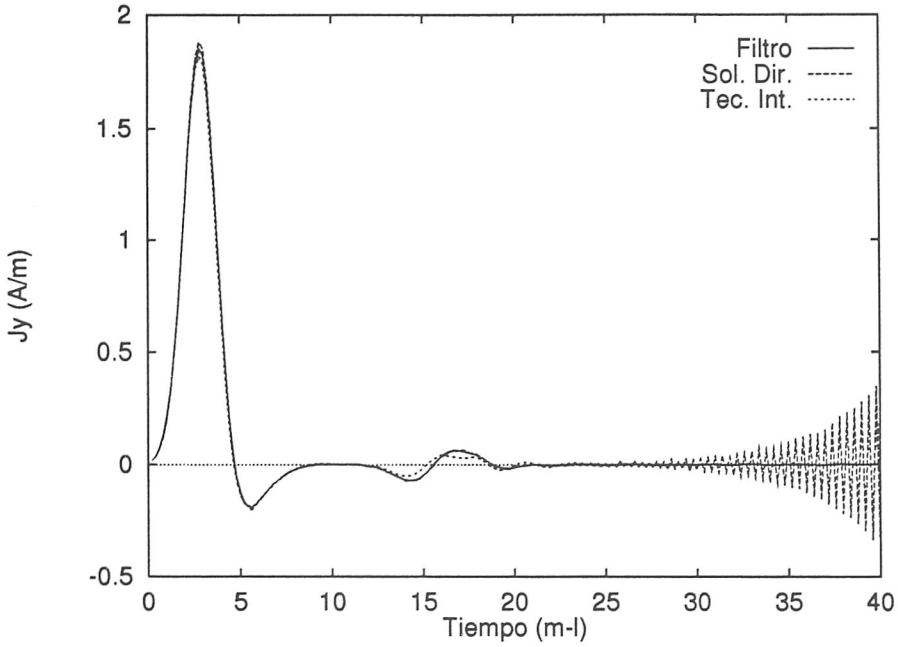


Figura 2.15: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.20$.

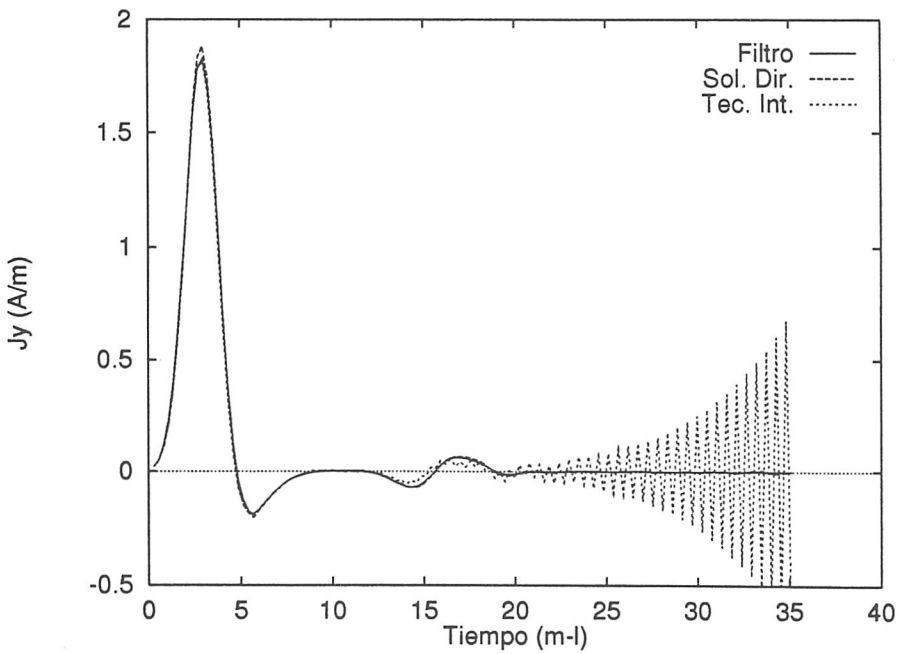


Figura 2.16: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.27$.

$R_{min} = 0.28$, el incremento temporal máximo es de $0.2s * c$.

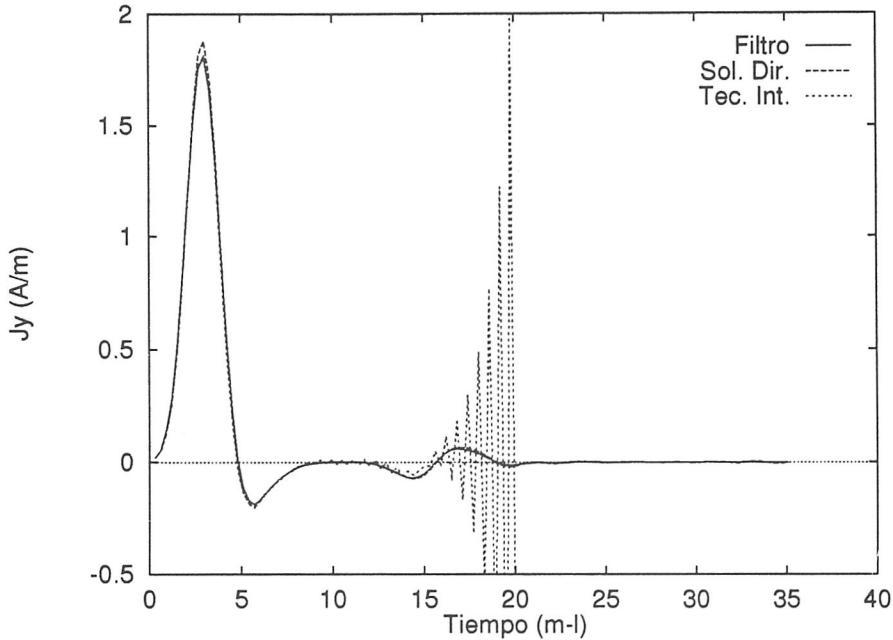


Figura 2.17: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.30$.

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el campo de radiación en función del tiempo en la dirección monoestática para el cilindro con terminaciones semiesféricas.

Las contribuciones al campo dispersado son debidas a la reflexión especular, a las difracciones que se producen con el cambio de radio de curvatura en la unión de las semiesferas con el cuerpo del cilindro, y a las contribuciones de la onda deslizante al desplazarse por la parte oculta de la semiesfera posterior. Puesto que el cambio de radio de curvatura es suave las contribuciones al campo dispersado se pueden considerar fundamentalmente como la reflexión especular y las aportaciones que produce la onda deslizante.

En las Figs. 2.18, 2.19, 2.20, se representa el campo de radiación en la dirección monoestática para los diferentes métodos utilizados.

En cuanto a estabilidad se observa el mismo comportamiento en el campo de radiación que en las corrientes, aunque hay que señalar que las inestabilidades que aparecen en la solución directa en las corrientes van apareciendo cada vez mas tarde en el tiempo conforme vamos aumentando el incremento temporal. En los campos de radiación correspondientes a los incrementos temporales $\Delta t = 0.27$, y $\Delta t = 0.3$, no se aprecian estas inestabilidades debido a que se ha detenido el cálculo en un instante temporal en que estas aún no han aparecido.

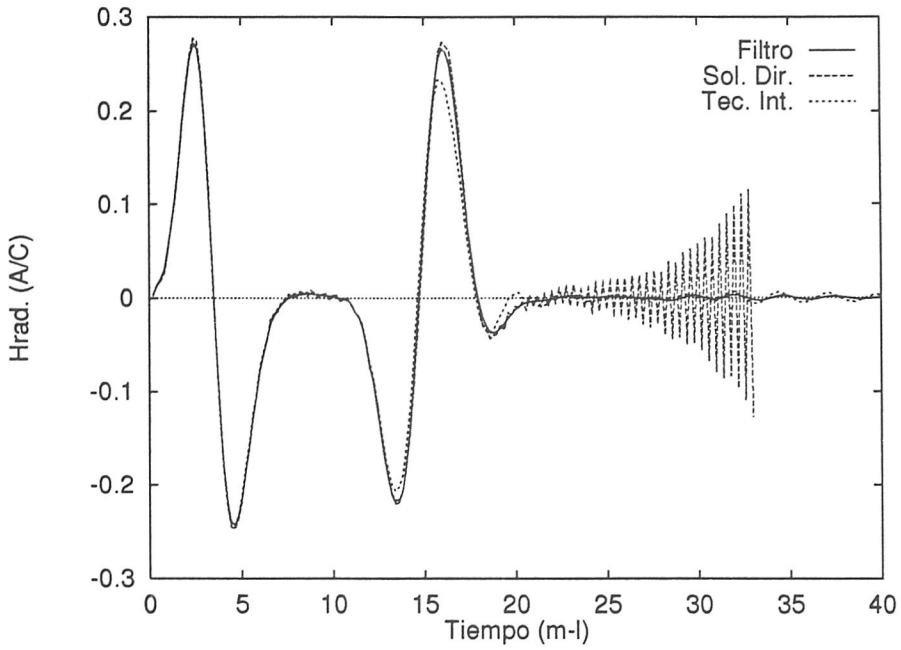


Figura 2.18: Campo de radiación dispersado por el cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.20$.

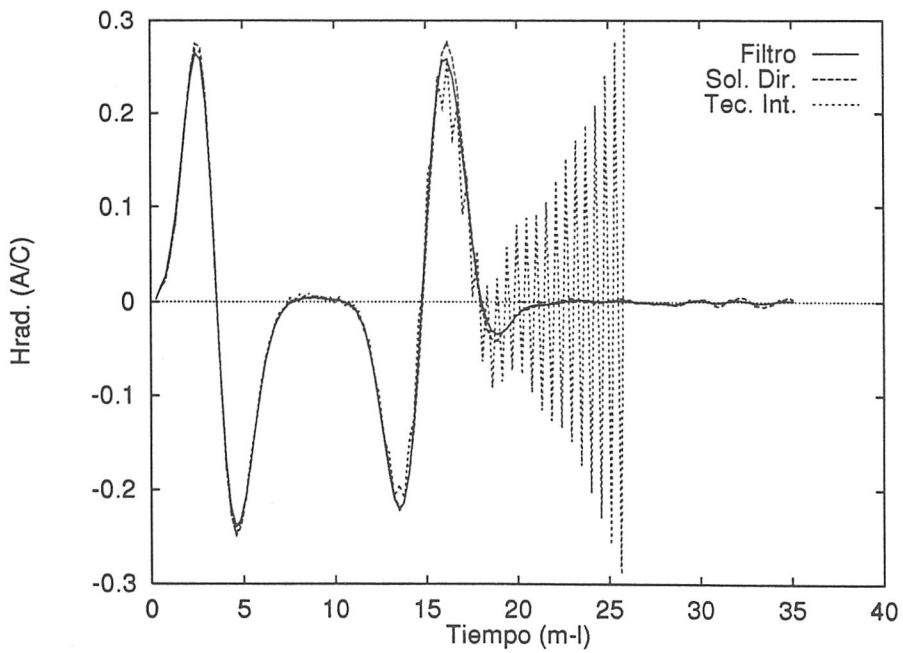


Figura 2.19: Campo de radiación dispersado por el cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.27$.

Se aprecia una menor diferencia en el valor del primer pico del campo de radiación

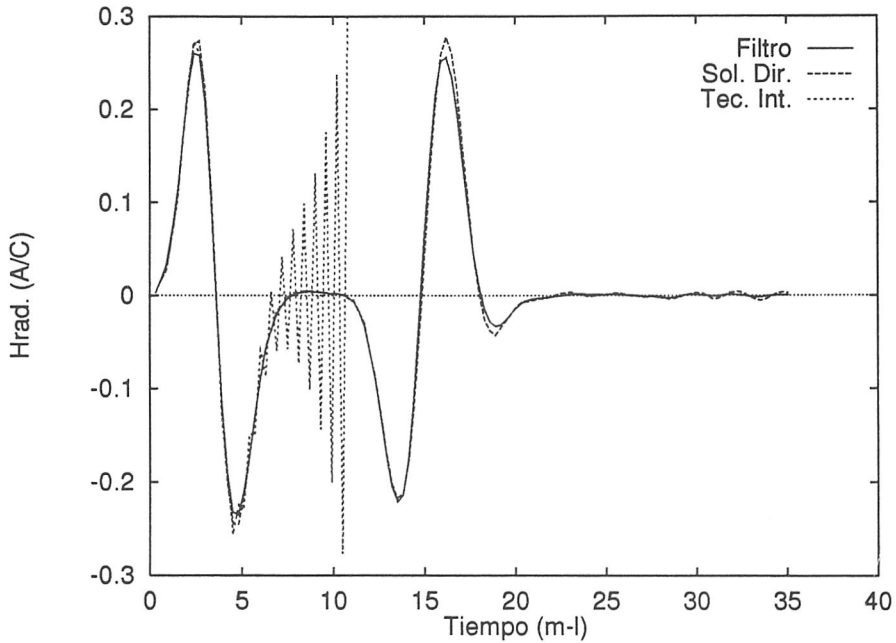


Figura 2.20: Campo de radiación dispersado por el cilindro con terminaciones semiesféricas, $\Delta t = 0.30$.

en la dirección monoestática entre la solución directa y la solución obtenida mediante la técnica de integración. Esto corrobora el hecho de que el método del filtro de altas frecuencias si bien elimina las inestabilidades, también modifica en cierto sentido la señal. En cuanto al segundo pico debido a la onda deslizante las diferencias son menores entre la solución directa y el filtro de altas frecuencias.

En las Figs. 2.21, 2.22, se representan las corrientes obtenidas por la técnica de integración pero integrando solo para obtener la interacción entre parches no vecinos, para $\Delta t = 0.27$, y $\Delta t = 0.30$, respectivamente. En este caso las inestabilidades se eliminan al igual que ocurría con la esfera.

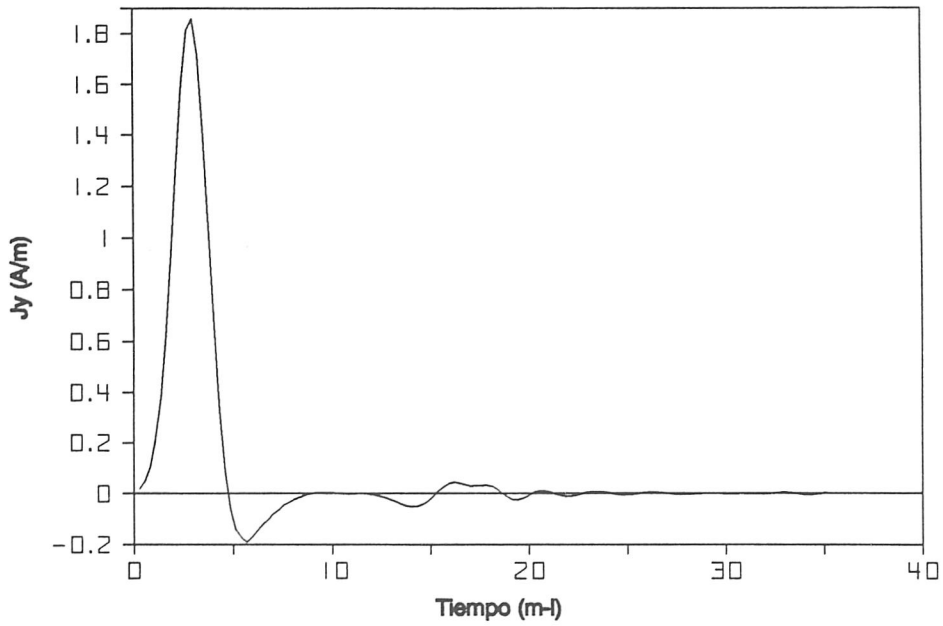


Figura 2.21: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminación semiesférica, ($\Delta t = 0.27$), limitando la aplicación de la técnica de integración.

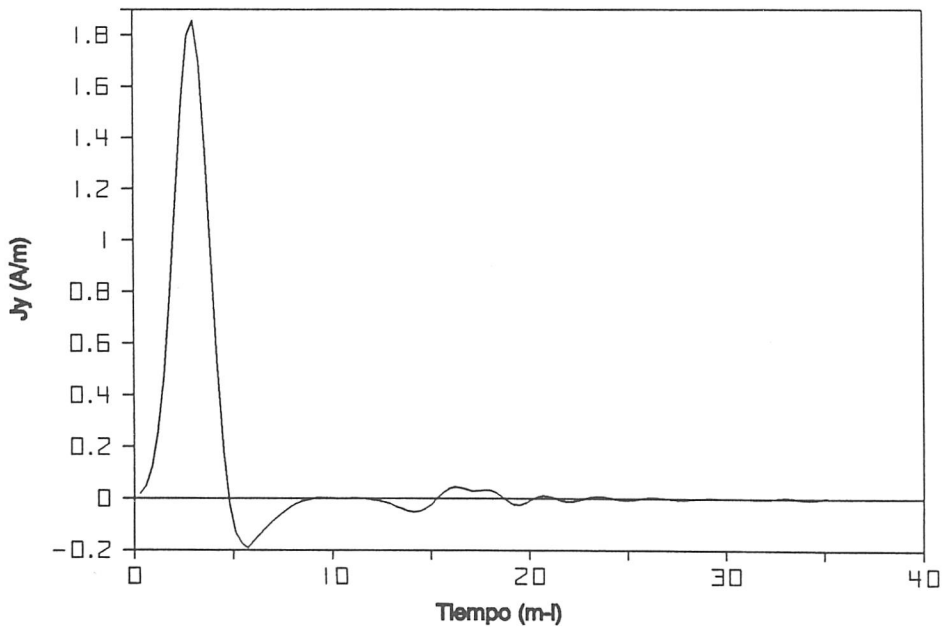


Figura 2.22: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro con terminación semiesférica, ($\Delta t = 0.30$), limitando la aplicación de la técnica de integración.

2.5.3 Conoesfera.

En este apartado vamos a analizar una figura cuya superficie presenta radios de curvatura no suaves, e incluso presenta una punta. Dicha figura es un cono con terminación semiesférica de radio $1m.$, y longitud total $5m.$.

Se ha modelado con 248 parches (Fig. 2.23). El parámetro utilizado en el pulso gaussiano ha sido $g = 0.8(s * c)^{-1}$, irradiando y vibrando el campo incidente como en los casos anteriores.

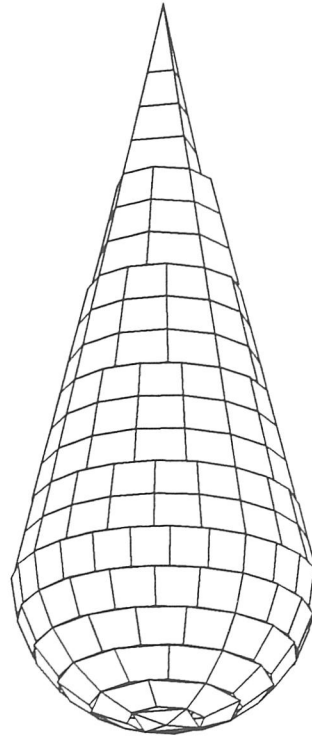


Figura 2.23: Mallado de la conoesfera.

Esta figura presenta una singularidad muy fuerte en la punta. El tratamiento numérico de la ecuación MFIE considera constante la corriente en todos los parches incluidos los que modelan la punta, lo que supone para este caso una aproximación muy burda. Es de prever por tanto la aparición de inestabilidades asociadas a este efecto.

Por otra parte la transición entre el cono y la semiesfera no es suave por lo que la superficie tampoco es diferenciable en estos puntos.

Así pues tenemos a priori tres causas de inestabilidades: la punta, la unión cono-semiesfera y el no comportamiento estricto del principio de causalidad.

En las Figs. 2.24,2.25,2.26, se representa la corriente en un punto de los parches que modelan el pico del cono. El incremento temporal es $\Delta t = 0.062$, $\Delta t = 0.088$, $\Delta t =$

0.1 0.088, respectivamente. La distancia mínima entre parches es $R_{min} = 0.088m$.

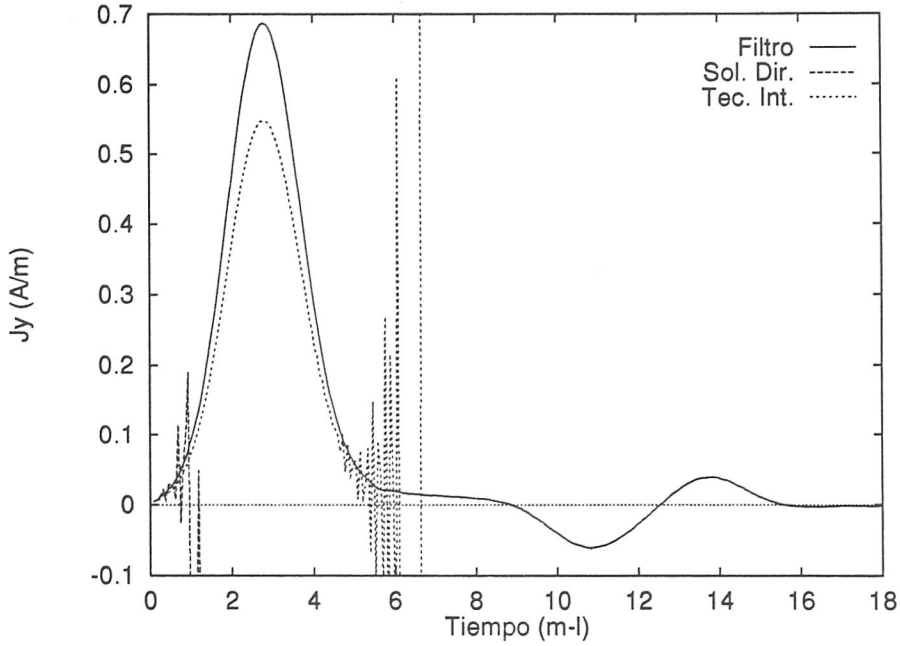


Figura 2.24: Densidad de corriente sobre un punto de la conoesfera, $\Delta t = 0.062$.

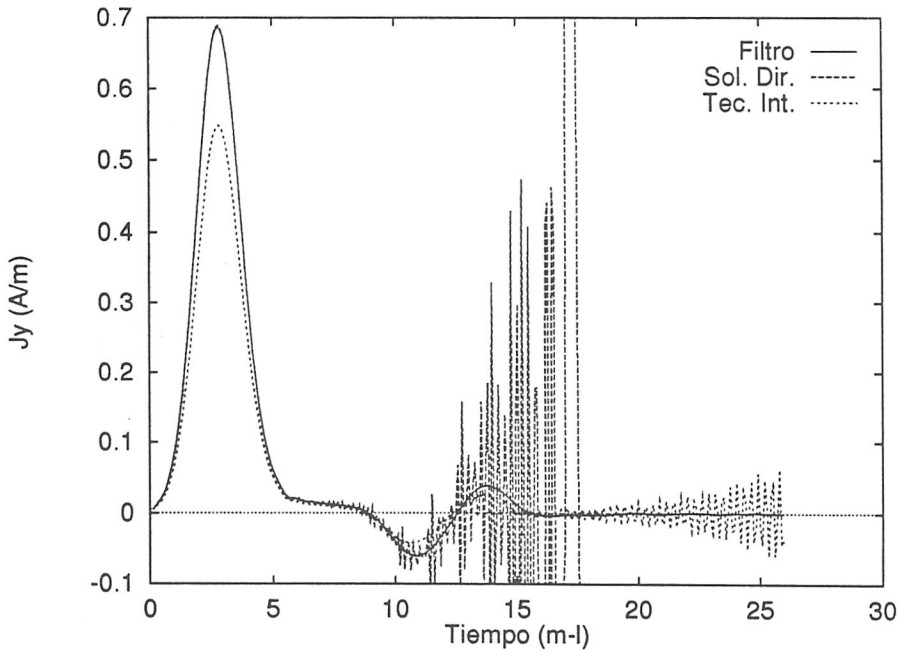


Figura 2.25: Densidad de corriente sobre un punto de la conoesfera, $\Delta t = 0.088$.

En las Figs. 2.27,2.28,2.29, se representa el campo de radiación en la dirección monoesférica para los diferentes métodos utilizados.

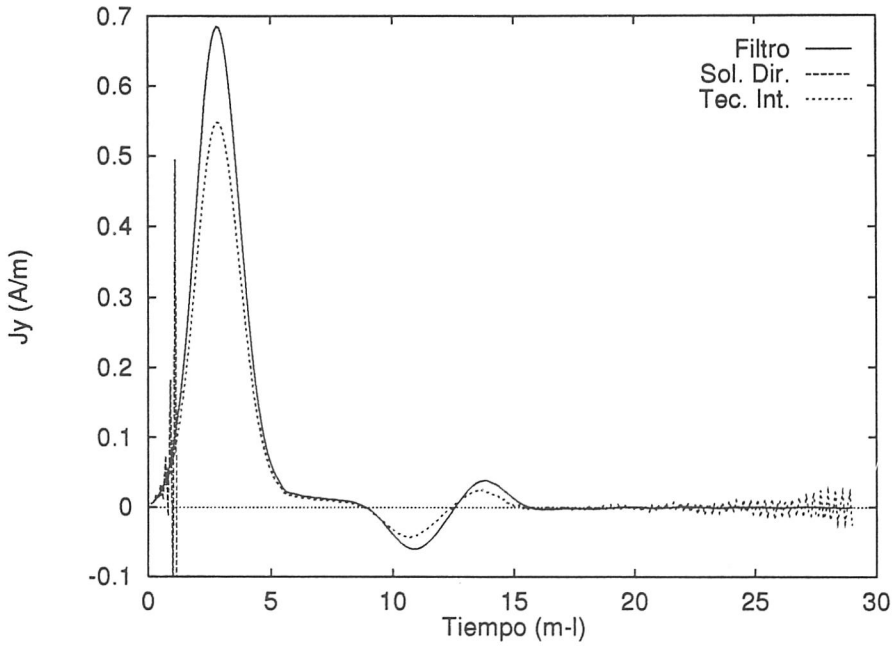


Figura 2.26: Densidad de corriente sobre un punto de la conoesfera, $\Delta t = 0.1$.

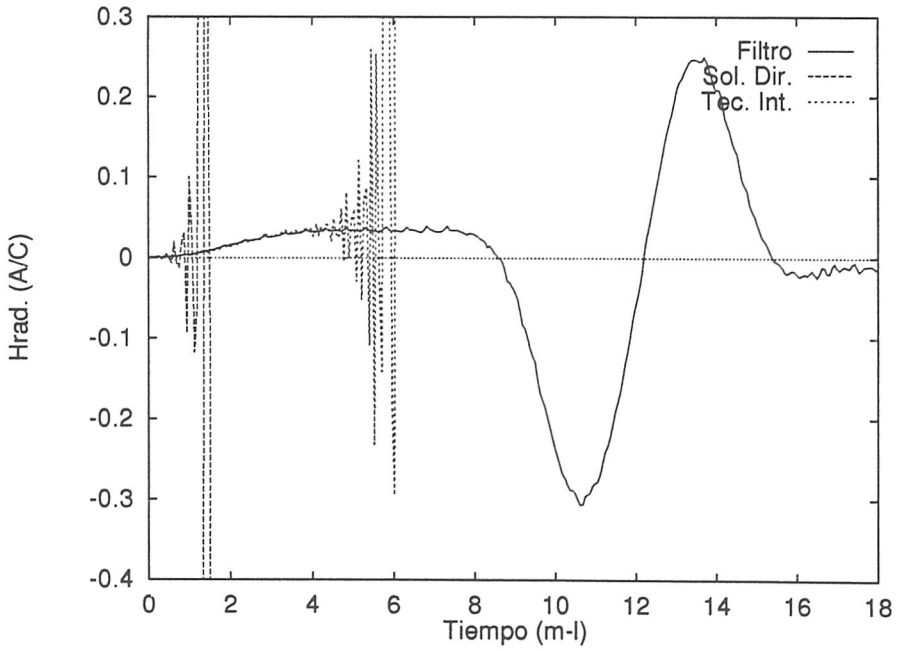


Figura 2.27: Campo de radiación dispersado por la conoesfera, $\Delta t = 0.062$.

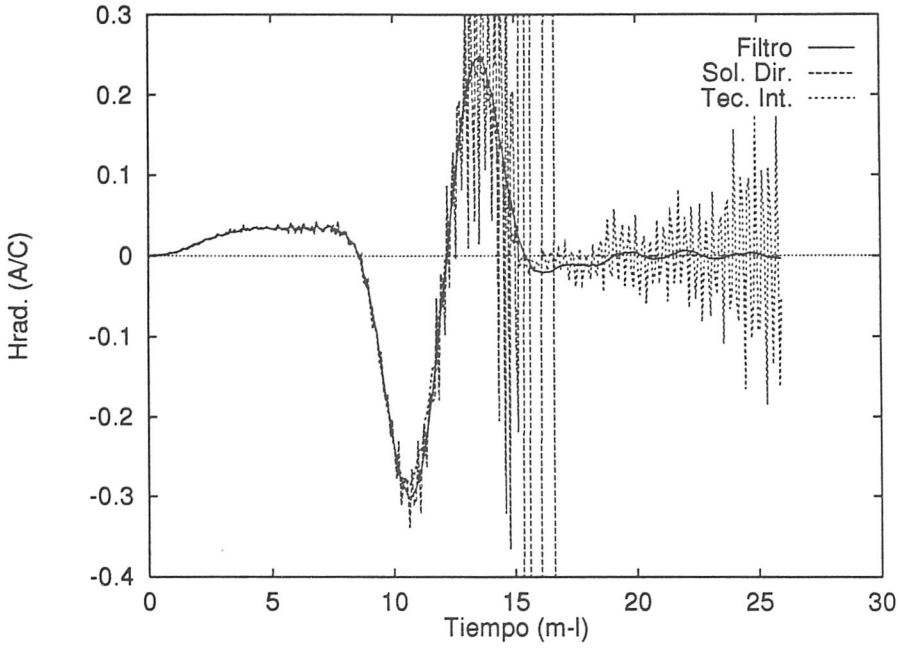


Figura 2.28: Campo de radiación dispersado por la conoesfera, $\Delta t = 0.088$.

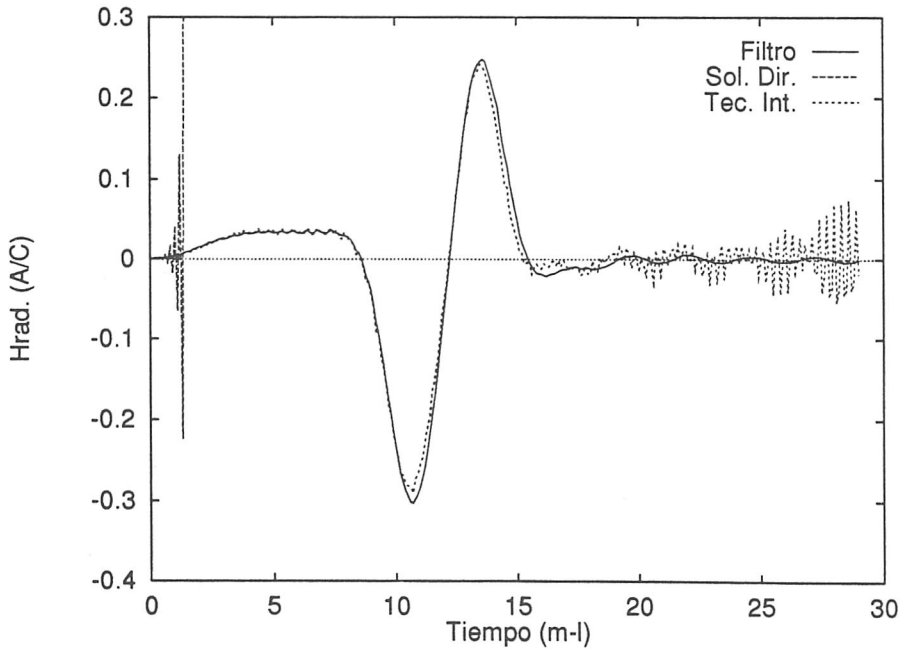


Figura 2.29: Campo de radiación dispersado por la conoesfera, $\Delta t = 0.1$.

La primera conclusión que se puede extraer de las figuras es la no aparición de inestabilidades de bajas frecuencias, como lo demuestra el hecho de que la solución generada por el filtro es siempre estable.

Por otra parte la solución directa presenta un comportamiento anómalo en el sentido de que para Δt ligeramente superior al R_{min} la solución es tremendamente inestable. Debido a su localización temporal, el origen está en la punta. Sin embargo, para $\Delta t = 0.88$, es decir, igual a la distancia mínima de separación entre centroides, la solución es más estable en un sentido doble: las inestabilidades aparecen en tiempos posteriores y la razón de crecimiento es mucho menor.

Esto indica un origen diferente, quizás debido a la discontinuidad entre cono y esfera. Por último para $\Delta t = 0.062$ la solución vuelve a ser tan inestable como al principio. Esto indica que el valor del incremento temporal es crucial en la aparición de inestabilidades asociadas con la punta del cono.

Veamos ahora el comportamiento de la solución obtenida aplicando la técnica de integración. Para $\Delta t = 0.1$ aparecen inestabilidades únicamente para los instantes muy retrasados y el crecimiento es muy lento. Cuando se hace $\Delta t = R_{min}$ las inestabilidades se adelantan pero su crecimiento sigue siendo lento. Parece lógico achacar estas inestabilidades a la discontinuidad cono-esfera. Sin embargo, es sorprendente que las inestabilidades asociadas con la punta y asociadas con la extrapolación no aparezcan, lo que induce a pensar que para este Δt la punta no produce inestabilidades de ningún tipo y que para el resto de los parches, la distancia mínima es tal que $\Delta t \leq R_{min}/\sqrt{2}$. De hecho, en el cono la distancia mínima viene determinada por los puntos situados cerca de la punta, mientras que el resto están más espaciados. Para $\Delta t = 0.062$ aparecen de nuevo las inestabilidades fuertes análogas a las que aparecen con la solución directa pero más retrasadas y asociadas con el mal tratamiento dado a la punta.

2.5.4 Cilindro recto.

Parte de lo comentado anteriormente es corroborado por los resultados obtenidos con el cilindro recto. Las dimensiones son $Radio = 1m.$, y $4m.$ de longitud total. La figura se ha mallado con 272 parches, la distancia mínima entre parches es $R_{min} = 0.18m$. El parámetro del pulso es en este caso $g = 0.8(s * c)^{-1}$. En la Fig. 2.30 pueden verse tanto los parches que modelan la superficie como las normales a estos.

En las Figs. 2.31, 2.32, 2.33, se muestran las corrientes en un punto de la tapa en donde primero incide el campo. Correspondiendo a incrementos temporales de $\Delta t = 0.12$, $\Delta t = 0.17$, y $\Delta t = 0.2$. Sin embargo para $\Delta t = R_{min}/\sqrt{2} = 0.12$, aunque la solución sigue siendo inestable su forma ha cambiado bastante, ya que su razón de crecimiento es mucho menor.

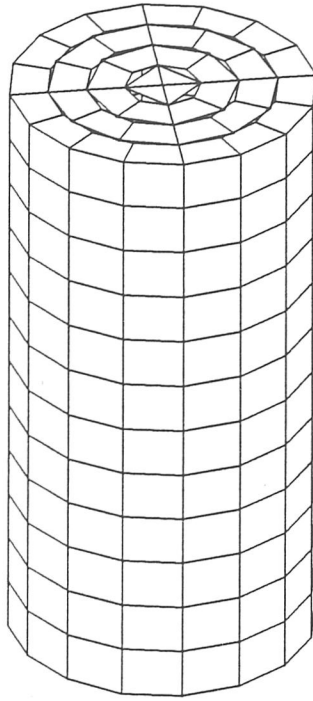


Figura 2.30: Mallado del cilindro recto.

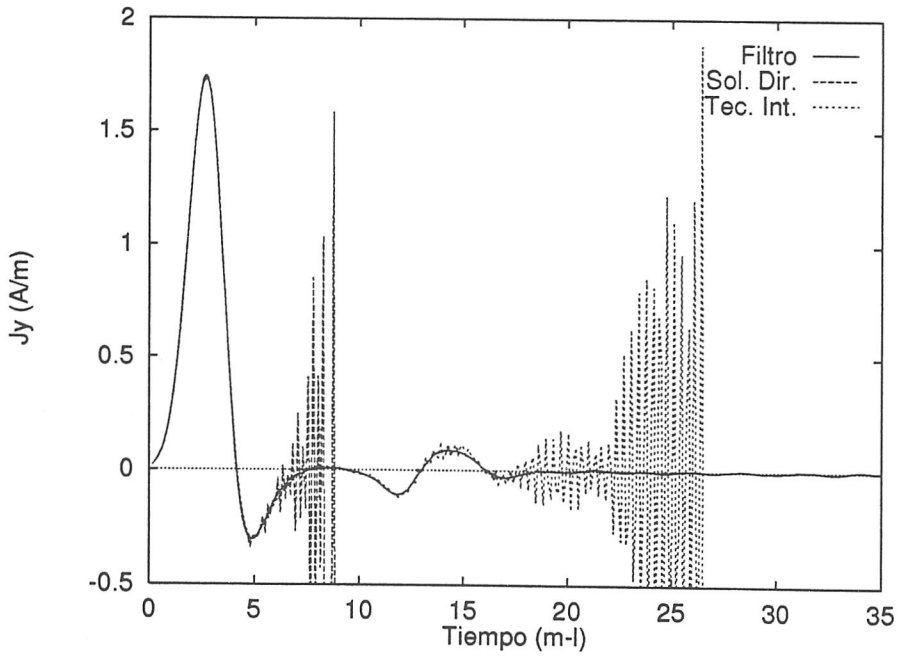


Figura 2.31: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro recto, $\Delta t = 0.12$.

En las Figs. 2.34, 2.35, 2.36, se representa el campo de radiación en la dirección monoestática para los diferentes métodos utilizados.

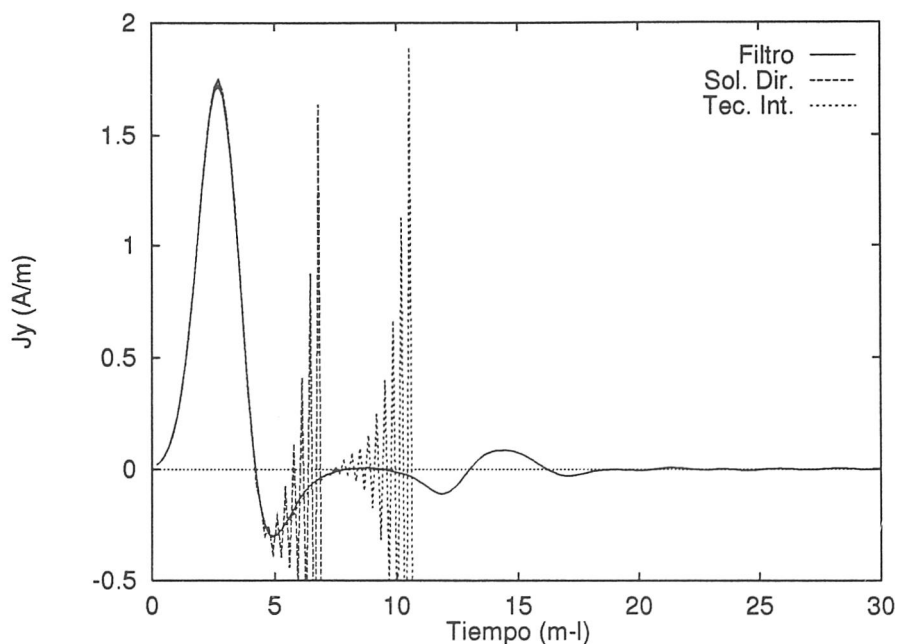


Figura 2.32: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro recto, $\Delta t = 0.17$.

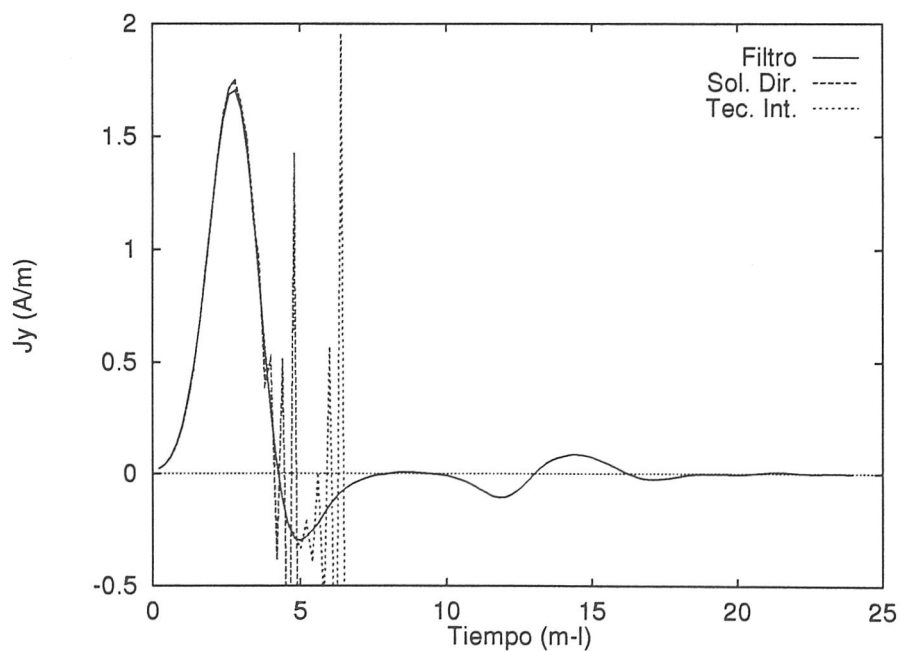


Figura 2.33: Densidad de corriente sobre un punto del cilindro recto, $\Delta t = 0.20$.

Podemos afirmar por tanto que ahora sólo quedan las inestabilidades asociadas a discontinuidad en la derivada de la superficie, mientras que se está respetando el principio de causalidad.

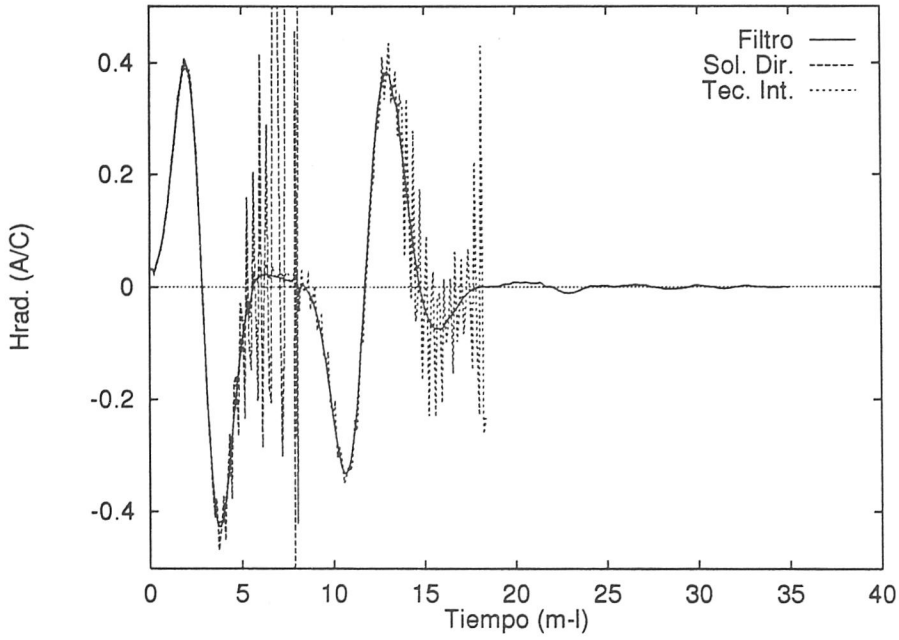


Figura 2.34: Campo de radiación dispersado por el cilindro recto, $\Delta t = 0.12$.

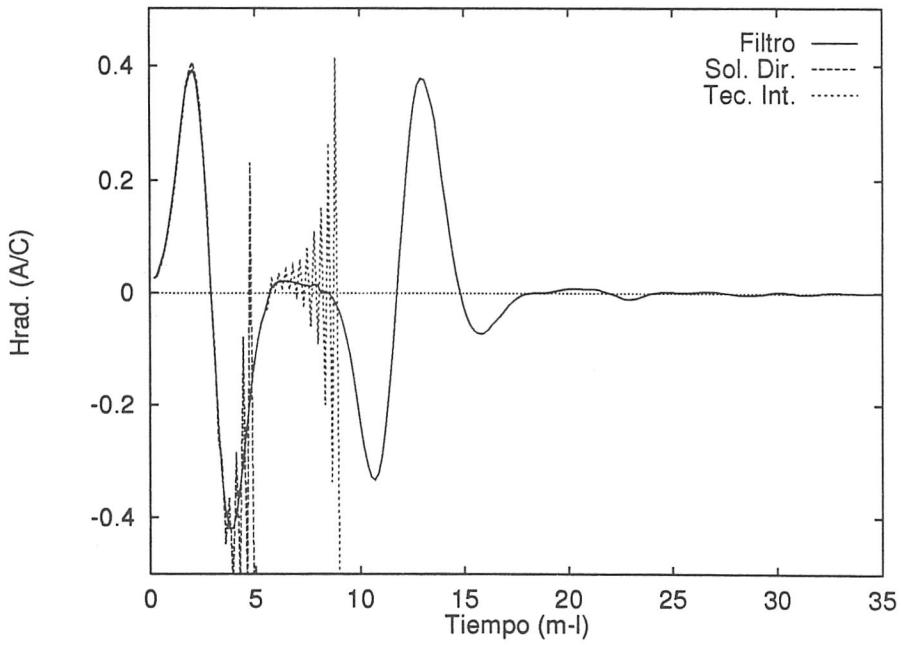


Figura 2.35: Campo de radiación dispersado por el cilindro recto, $\Delta t = 0.17$.

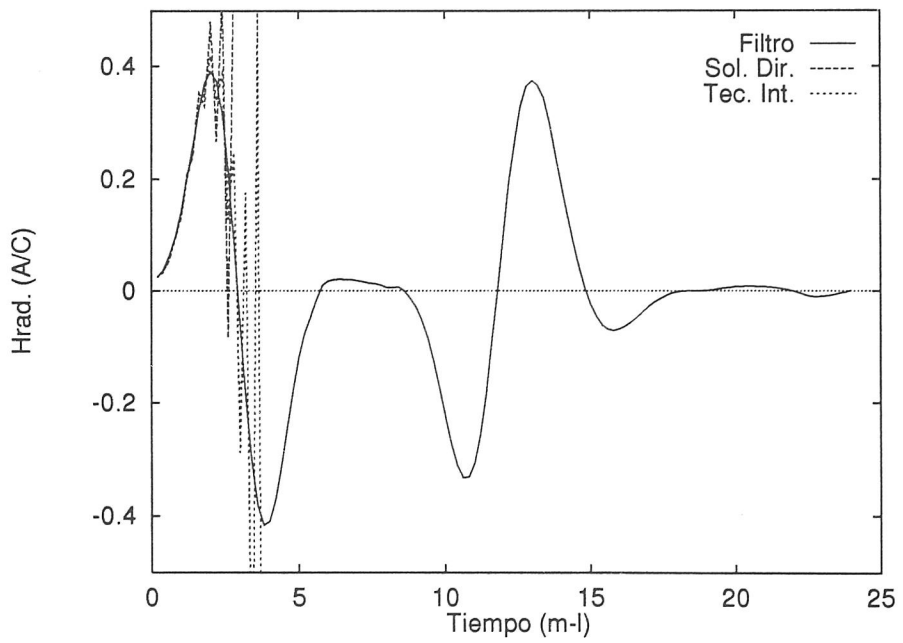


Figura 2.36: Campo de radiación dispersado por el cilindro recto, $\Delta t = 0.20$.

2.5.5 Cubo.

En este apartado se estudia las inestabilidades que aparecen al resolver la MFIE sobre un cubo de $1m.$ de lado, cuando sobre él incide una onda electromagnética transitoria (pulso electromagnético). Se ha modelado con 216 parches, (Fig. 2.37), haciendo uso de un mallado proporcional.

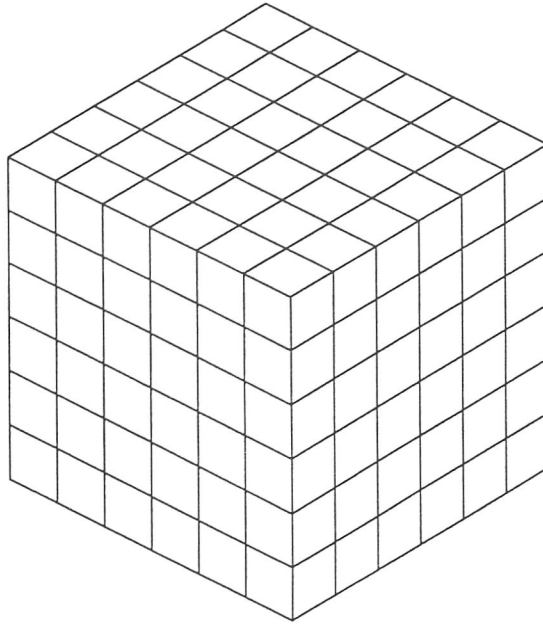


Figura 2.37: Mallado del cubo.

En esta figura se tienen tantos filos como esquinas, por lo que su comportamiento ha de ser análogo al cono con terminación esférica y al cilindro recto. Así en las Figs. 2.38, 2.39, 2.40, se representa la corriente en un punto de la cara por donde empieza a iluminar el campo magnético. El incremento temporal es $\Delta t = 0.08$, $\Delta t = 0.10$ y $\Delta t = 0.12$, respectivamente. La distancia mínima entre parches es $R_{min} = 0.12m.$.

A partir de estas figuras podemos ver como de nuevo no aparecen inestabilidades de bajas frecuencias ya que la solución obtenida con el filtro permanece en todos los casos estable. Sin embargo la solución directa y la obtenida por la técnica de integración aparecen muy inestables. De nuevo aparece un valor crítico de $\Delta t = 0.08$ en que para ambas soluciones las inestabilidades aparecen mas retrasadas en el tiempo, y creciendo mas lentamente.

Esta coincidencia entre el comportamiento de la solución directa e integrada pone de manifiesto que la causa principal de las inestabilidades son las discontinuidades en la derivada de la superficie, sin poder concluirse nada acerca de la discretización.

El mismo comportamiento de la solución podemos observar en las Figs. 2.38, 2.39,

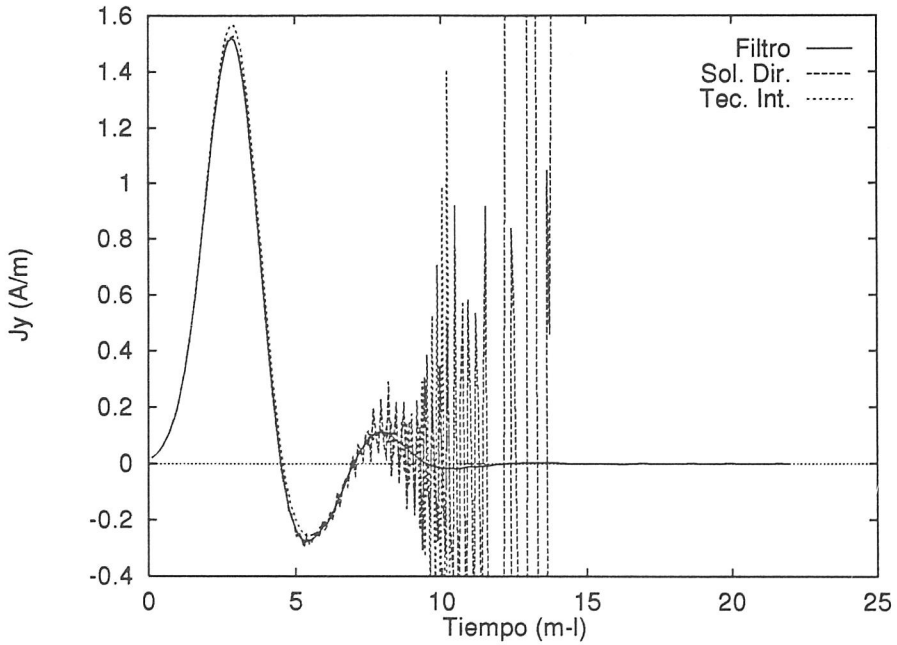


Figura 2.38: Densidad de corriente sobre un punto del cubo, $\Delta t = 0.08$.

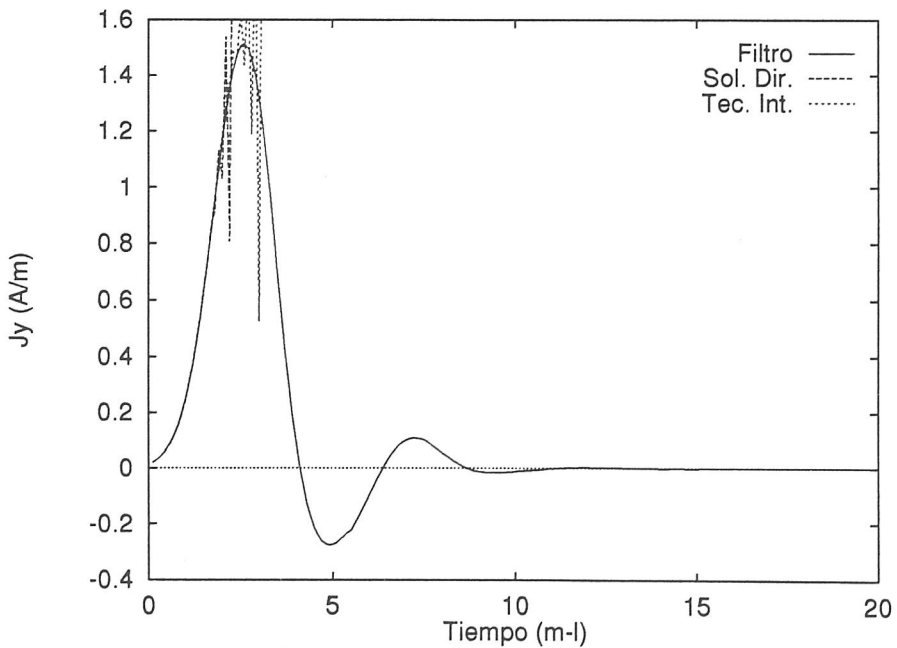


Figura 2.39: Densidad de corriente sobre un punto del cubo, $\Delta t = 0.10$.

2.40, en las que se muestra el campo de radiación dispersado por el cubo en la dirección monoestática.

Sin embargo al efectuar un modelado más fino (384 parches) y eligiendo $\Delta t <$

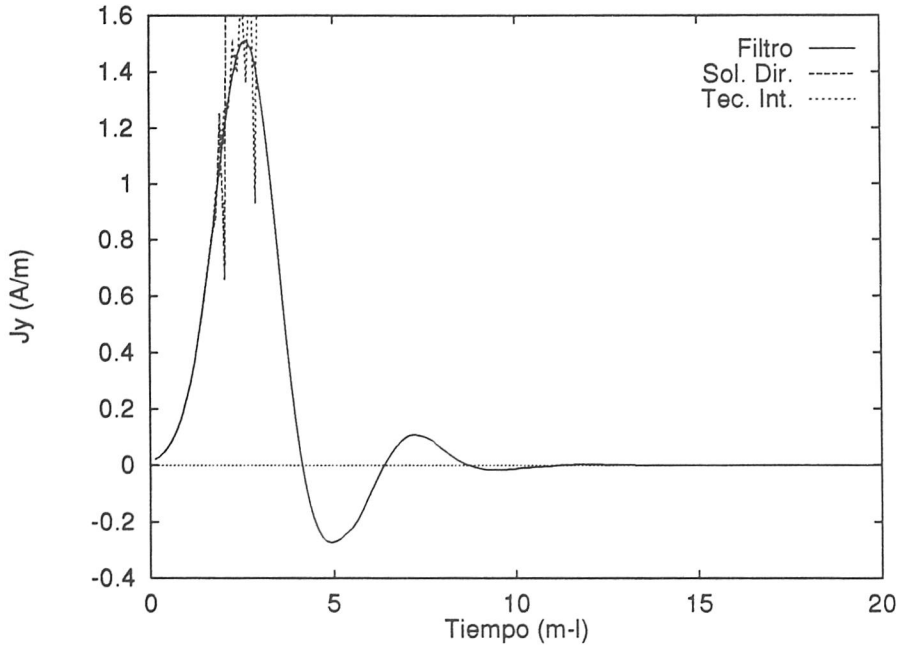


Figura 2.40: Densidad de corriente sobre un punto del cubo, $\Delta t = 0.12$.

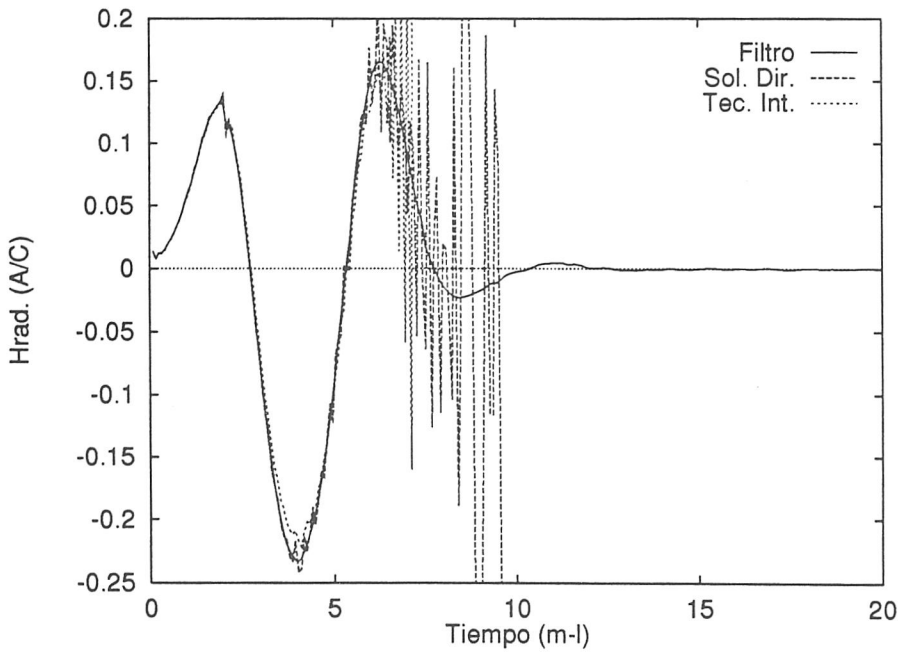


Figura 2.41: Campo de radiación dispersado por el cubo, $\Delta t = 0.08$.

$R_{min}/\sqrt{2} = 0.06$, obtenemos las Figs. 2.41, 2.42, 2.43, que corresponden respectivamente a $\Delta t = 0.05$, y $\Delta t = 0.06$. Vemos como el comportamiento de la solución obtenido a partir de la técnica de integración es análogo en ambos casos. Podemos afirmar que ahora

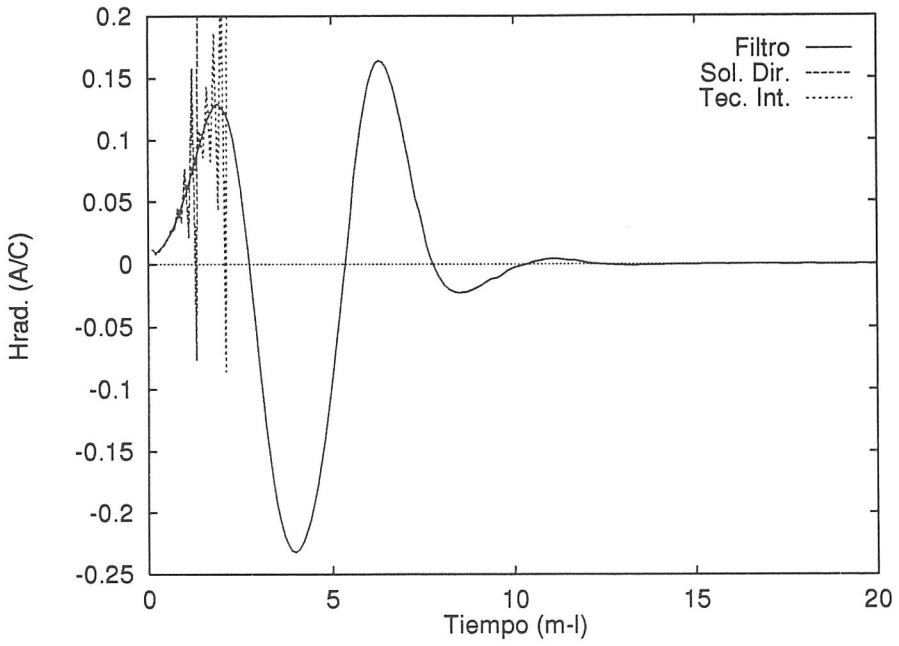


Figura 2.42: Campo de radiación dispersado por el cubo, $\Delta t = 0.10$.

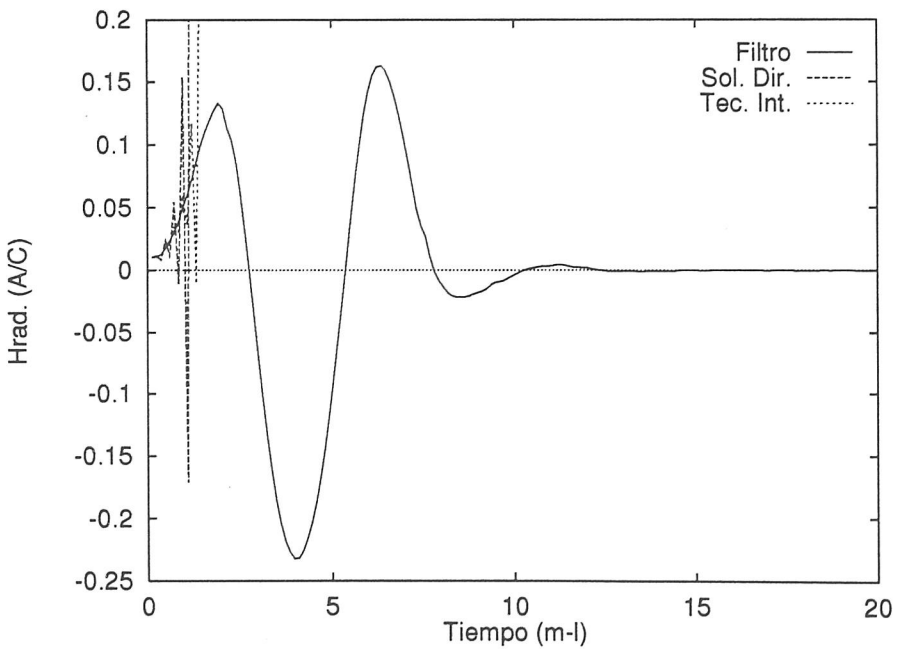


Figura 2.43: Campo de radiación dispersado por el cubo, $\Delta t = 0.12$.

la causa es solamente las discontinuidades. Esto se corrobora con el comportamiento de la solución directa, la cual se ve fuertemente influenciada por el valor del incremento temporal.

Queda por tanto claro, que para figuras no suaves, las causas de las inestabilidades son tanto el proceso de discretización (con la violación del principio de causalidad) como las discontinuidades causadas por filos y picos.

La mezcla de todas las causas hace que el comportamiento numérico de la solución dependa de factores como el mallado, el incremento temporal, orden de interpolación, Es decir, de todos los grados de libertad que tenemos al resolver la ecuación MFIE. Así mismo se pueden producir cancelaciones mutuas.

La técnica de integración anula las inestabilidades asociadas al proceso de discretización y que afectan al no cumplimiento del principio de causalidad. Actúa sobre la causa y no sobre el efecto, como lo hace el filtro de altas frecuencias. Ambos casos tienen, según hemos visto sus ventajas e inconvenientes.

Capítulo 3

Ecuación EFIE

3.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es analizar y desarrollar un algoritmo que permita resolver numéricamente la ecuación integral del campo eléctrico EFIE, para el estudio de la interacción de OEMT con superficies conductoras arbitrarias. Comenzaremos con la obtención de la ecuación integral.

3.2 Obtención de la ecuación integral

En este apartado se desarrolla el planteamiento de la ecuación integral para el campo eléctrico EFIE. Para la obtención de la ecuación integral, tomaremos como referencia la Fig. 3.1, en donde se representa el problema de la dispersión ¹ de forma general.

Sea S' una superficie conductora arbitraria sobre la que incide un campo eléctrico \vec{E}^i (véase Fig. 3.1(a)). El campo total en cualquier punto del espacio viene dado por

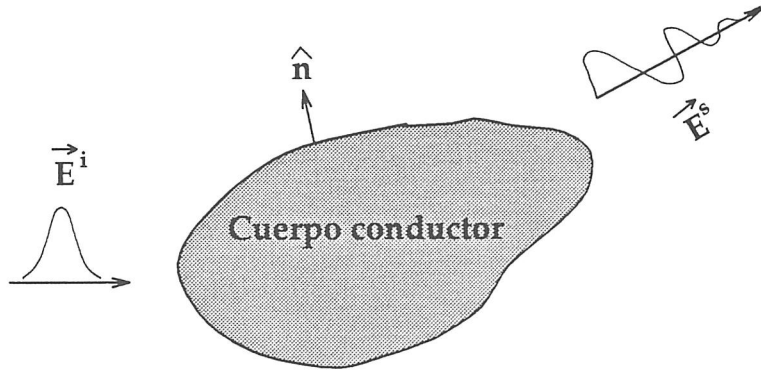
$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^s \quad (3.1)$$

donde \vec{E}^s es el campo dispersado por las corrientes inducidas sobre la superficie conductora.

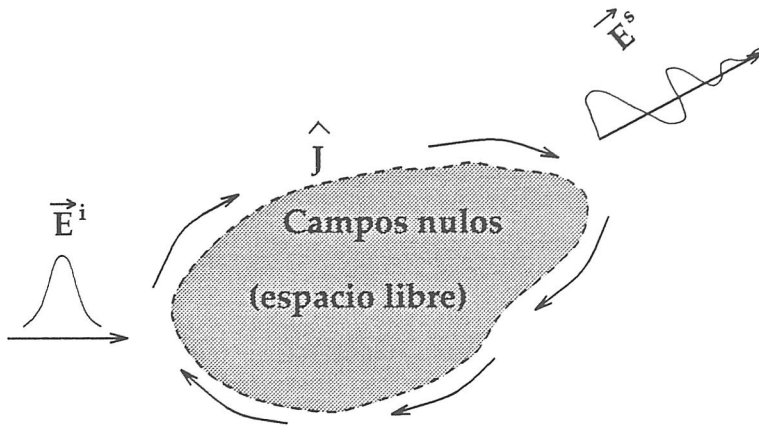
Aplicando el principio de equivalencia [Harrington, 1961], se puede sustituir la superficie dispersora Fig. 3.1(a) por una distribución de corrientes equivalentes Fig. 3.1(b) determinadas, de acuerdo con el teorema de unicidad, por la condición de contorno sobre la componente tangencial del campo eléctrico. La condición de contorno sobre la superficie conductora para el campo eléctrico es

$$\hat{n} \wedge \vec{E} = \hat{n} \wedge (\vec{E}^s + \vec{E}^i) = 0 \quad (3.2)$$

¹Los razonamientos son válidos tanto para un sistema funcionando como dispersor o como antena. La única diferencia entre ambos reside en que la fuente de excitación esté fuera del sistema o contenida en él.



a) Problema general de la dispersión



b) Equivalencia del problema general de la dispersión

Figura 3.1: Aplicación del principio de equivalencia al problema general de la dispersión.

que es equivalente a

$$(\vec{E}^i)_{tang} = -(\vec{E}^s)_{tang} \quad (3.3)$$

El campo eléctrico dispersado lo podemos expresar en función de los potenciales

$$\vec{E}^s(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla \phi(\vec{r}, t) \quad (3.4)$$

donde el potencial vector \vec{A} y el potencial escalar ϕ vienen dados en función de sus fuentes por

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} ds' \quad (3.5)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} ds' \tag{3.6}$$

Como se muestra en la Fig. 3.2 S' es la superficie el cuerpo dispersor, \vec{r} es el vector de posición del punto campo, \vec{r}' es el vector de posición del punto fuente, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ y $t' = t - R/c$ (c velocidad de la luz en el vacío).

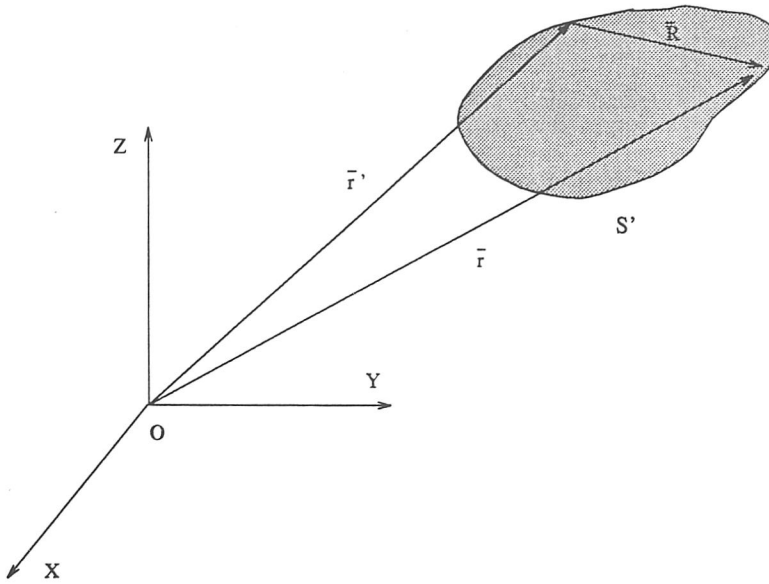


Figura 3.2: Sistema de coordenadas utilizado.

Con el objetivo de eliminar la variable ρ en la ecuación (3.6), hacemos uso de la ecuación de continuidad ²

$$\frac{\partial}{\partial t'} \rho(\vec{r}', t') = -[\nabla' \vec{J}(\vec{r}', t')]_{t'} \tag{3.7}$$

de donde podemos expresar la densidad superficial de carga como

$$\rho(\vec{r}', t') = - \int_{-\infty}^{t'} [\nabla' \vec{J}(\vec{r}', \tau)]_{\tau} d\tau \tag{3.8}$$

A diferencia de otros autores [Rao and Wilton, 1991],[Rynne, 1991], que usan la forma diferencial de la ecuación de continuidad para resolver la EFIE, en esta memoria se hará uso de la relación integral.

² $[\]_{t'}$ denota que ∇' actúa solo sobre la variable espacial.

Si suponemos que para $t \leq 0$ y $\forall \vec{r}' \in S'$ $\vec{E}^i(\vec{r}', t) = 0$, debido a la causalidad del sistema se tendrá que $\forall t \leq 0$ $\vec{J}(\vec{r}', t) = 0$. Introduciendo (3.8) en (3.6) y teniendo en cuenta el razonamiento anterior el potencial escalar queda

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} ds' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{ds'}{R} \int_0^{t'} -[\nabla' \vec{J}(\vec{r}', \tau)]_\tau d\tau \quad (3.9)$$

El campo dispersado lo podemos expresar por tanto

$$\vec{E}^s(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} ds' \right] + \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{ds'}{R} \int_0^{t'} [\nabla' \vec{J}(\vec{r}', \tau)]_\tau d\tau \right] \quad (3.10)$$

Utilizando la condición de contorno (3.3) junto con (3.10), la ecuación integral para cualquier punto \vec{r} , sobre la superficie dispersora S' es

$$\begin{aligned} (\vec{E}^i(\vec{r}, t))_{tang} = & + \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(\vec{r}', t')}{R} ds' \right)_{tang} \\ & - \left(\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{ds'}{R} \int_0^{t'} [\nabla' \vec{J}(\vec{r}', \tau)]_\tau d\tau \right] \right)_{tang} \end{aligned} \quad (3.11)$$

El objetivo que nos planteamos es resolver numericamente la ecuación integro-diferencial (3.11), en donde, la función incógnita es la densidad superficial de corriente. Para ello utilizaremos el método de los momentos (MM).

El método de los momentos es un procedimiento general que resulta extraordinariamente potente para la resolución numérica de las ecuaciones integrales que resultan en muchos problemas físicos [Harrington, 1968], [Finlayson, 1972] y por supuesto del electromagnetismo en general [Harrington, 1967], [Wang, 1991] y de la radiación y dispersión de señales electromagnéticas en particular [Miller and Landt, 1980], [Jones, 1979], [Balanis, 1982], [Elliot, 1981], [Uslenghi, 1978], [Rubio, 1988]. Para resolver la ecuación integral mediante el MM se realiza una discretización del dominio de definición de la función incógnita. La función incógnita, en nuestro caso la densidad superficial de corriente, se desarrolla a partir de unas funciones base espacio-temporales. La solución se halla testeando la ecuación con unas funciones peso. Tenemos pues que:

1. modelar el dominio de definición de la función incógnita,
2. desarrollar unas funciones base con las que expresar las variables,
3. tomar unas funciones peso con las que testear la ecuación (3.11).

Realizaremos pues una discretización espacio-temporal que nos supondrá la primera limitación en la validez de la solución. (véase el apartado 3.6.1)

La superficie dispersora S' la aproximamos por una superficie poliédrica S'' tal que

$$S' \approx S'' = \bigcup_{i=1}^{N_t} S'_i$$

donde cada elemento de superficie S'_i representa una de las caras del poliedro y por tanto es una superficie plana, y N_t es el número de total de caras.

La variable temporal se discretiza dividiendo el tiempo en intervalos de duración Δt que tomaremos constantes. Es decir

$$t = v\Delta t + t'' \quad \text{con} \quad |t''| \leq \Delta t/2$$

Una vez realizada la discretización espacio-temporal, es necesario definir unas funciones base, con las que desarrollar las incógnitas, y unas funciones peso para testear la ecuación integral. En el apartado 3.3 se expone el desarrollo de las funciones base así como la justificación de su elección, y en el apartado 3.4 se describe el procedimiento de testeo de la ecuación.

3.3 Desarrollo de las funciones base

Un aspecto inherente al método de los momentos es, la elección de las funciones base con las que desarrollar la función incógnita, y las funciones peso con las que forzar el cumplimiento de las condiciones de contorno en la superficie de la estructura [Harrington, 1968], [Stutzman and Thiele, 1981], [Moore and Pizer, 1983], [Newman and Kingsley, 1991].

En esta sección estudiaremos, en primer lugar, las funciones base espaciales utilizadas en la resolución numérica de la ecuación EFIE, y en segundo lugar las funciones base temporales. Pasamos pues a la exposición de las primeras.

3.3.1 Funciones base espaciales

De acuerdo con otros autores, que han desarrollado algoritmos para resolver el problema de la dispersión electromagnética transitoria por superficies arbitrarias [Glisson, 1978], [Rao et al., 1982], [Vechinski and Rao, 1992b], [Rynne, 1991], [Arvas et al., 1991], [Horng et al., 1992], la elección de las funciones base espaciales definidas sobre superficies planas triangulares que fueron propuestas originalmente por Glisson en [Glisson, 1978], presentan indudables ventajas [Rao, 1980], [Rao and Wilton, 1991] frente a otros posibles tratamientos de la dependencia espacial de la densidad superficial de

corriente [Wang et al., 1975],[Singh and Adams, 1979],[Bennett and Mieras, 1981b]. En [Wang et al., 1975], se hace uso de funciones base definidas sobre parches triangulares no planos, para resolver la ecuación integral del campo magnético MFIE. En [Singh and Adams, 1979], se utilizan funciones base sinusoidales definidas sobre cuadrilateros planos para resolver la EFIE. En [Bennett and Mieras, 1981b], se resuelve la EFIE utilizando parches cuadrados planos sobre los que se suponen constantes las incógnitas, e imponiendo condiciones de contorno adicionales sobre los fillos y esquinas cuando la superficie es abierta.

En esta memoria, se utilizarán las funciones base espaciales propuestas por Glisson en [Glisson, 1978], ya que han demostrado ser muy apropiadas, para desarrollar la dependencia espacial de la corriente que se induce sobre una superficie conductora excitada por una OEMT,[Rynne, 1991], [Rao and Wilton, 1991], [Gothard et al., 1994].

Para introducir con mayor claridad las funciones base espaciales, vamos primero a definir una serie de variables asociadas al modelado de la estructura. Suponemos que tenemos una aproximación de la superficie dispersora S' mediante un conjunto de parches triangulares. La superficie queda caracterizada pues, por un conjunto de nodos, superficies, triangulares y lados. En la Fig. 3.3, se muestra una superficie arbitraria modelada mediante parches triangulares, señalándose los elementos que la caracterizan.(se hace distinción entre lados internos y lados frontera, por las razones que se verán cuando se desarrolle la densidad superficial de corriente a partir de las funciones base).

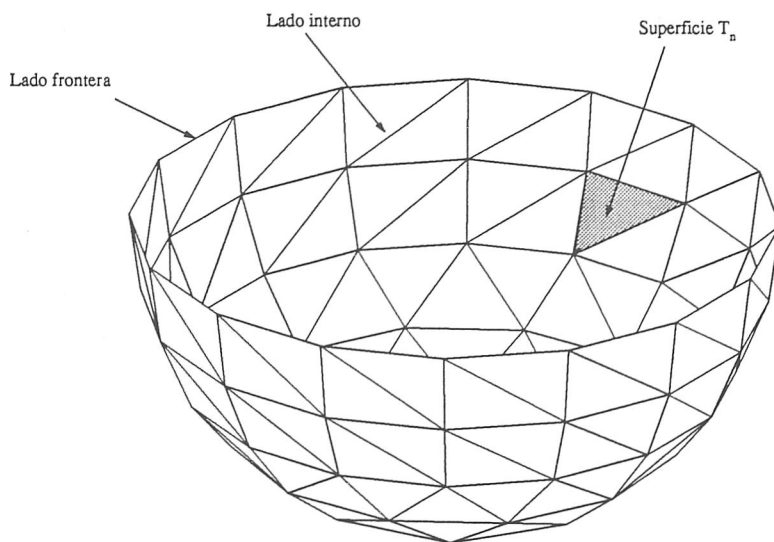


Figura 3.3: Superficie arbitraria modelada por parches triangulares.

Tal y como se representa en Fig. 3.4, para cada lado interno del modelo, tenemos dos

triángulos asociados a él, T_n^+ , T_n^- . En principio, no hay ningún motivo para asignar un signo u otro a cada uno de los triángulos asociados con cada lado interno, siempre que se haga de forma unívoca para cada lado. En la práctica, es conveniente seguir una regla que nos permita decidir el signo de cada triángulo, a la vez que se comprueba la validez del modelado. La designación del signo positivo o negativo de los triángulos asociados con un lado interno, nos determinará además, la dirección de referencia para la corriente asociada con dicho lado. Tomaremos el convenio de numerar los nodos que componen cada triángulo, de forma que, al girar siguiendo el orden de la numeración se obtiene el sentido de la normal. El producto vectorial del vector en la dirección del lado (y sentido el de la numeración de los nodos que forman el lado) con la normal al parche nos da el sentido positivo para la corriente asociada con dicho lado. Una corriente positiva asociada a un lado nos indica que sale del triángulo T_n^+ hacia el triángulo T_n^- .

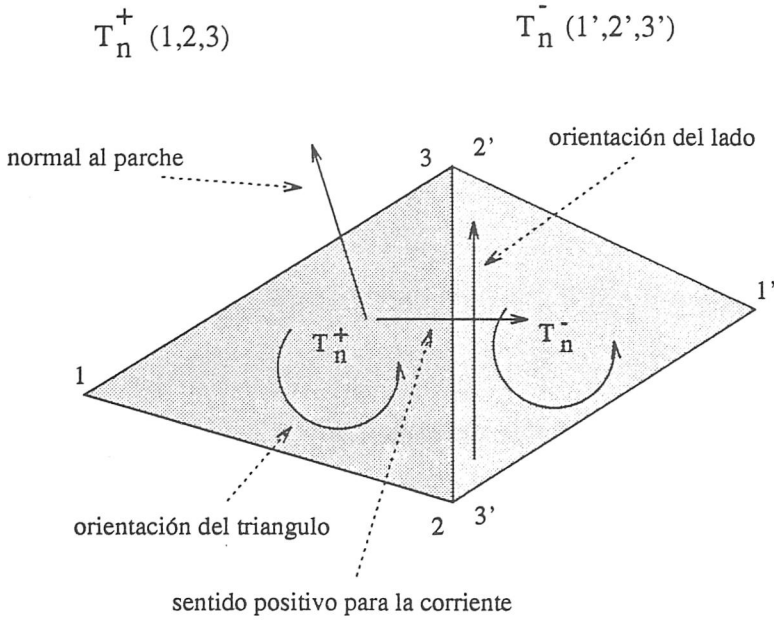


Figura 3.4: Relación entre orientación de los triángulos y lados con el sentido de referencia para la corriente.

Definimos para cada lado interno n del modelado que representa la superficie dispersora la función base vectorial

$$\vec{f}_n(\vec{r}') \equiv \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} (\vec{r}' - \vec{r}_n^{v+}) & \vec{r}' \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} (\vec{r}_n^{v-} - \vec{r}') & \vec{r}' \in T_n^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.12)$$

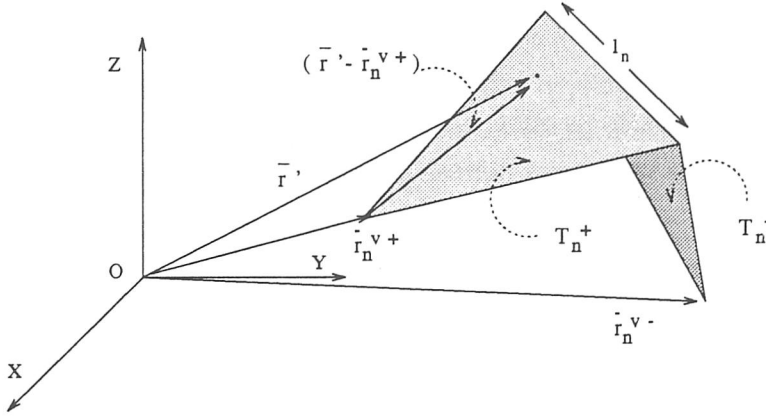


Figura 3.5: Variables locales asociadas con un lado interno.

en donde, como puede verse en la Fig. 3.5, cada una de las variables utilizadas representa

l_n longitud del lado n

A_n^\pm área del triángulo T_n^\pm

$\vec{r}_n^{v\pm}$ vector de posición del vértice del triángulo T_n^\pm opuesto al lado n .

Con el objeto de simplificar las expresiones se utilizarán las definiciones

$$\vec{\rho}_n^+ \equiv \vec{r}' - \vec{r}_n^{v+}$$

$$\vec{\rho}_n^- \equiv \vec{r}_n^{v-} - \vec{r}'$$

A partir de las cuales la definición de la función base (3.12) queda

$$\vec{f}_n(\vec{r}') \equiv \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \vec{\rho}_n^+ & \vec{r}' \in T_n^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \vec{\rho}_n^- & \vec{r}' \in T_n^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.13)$$

La densidad de corriente sobre la superficie se define a partir de las funciones base espaciales introducidas como

$$\vec{J}(\vec{r}', t) \cong \sum_{n=1}^{N_e} \vec{f}_n(\vec{r}') I_n(t) \tag{3.14}$$

donde N_e es el número de lados internos del modelado, y los términos $I_n(t)$ se desarrollarán, en el próximo apartado, a partir de las funciones base temporales y de unos coeficientes que serán las incógnitas a determinar.

A continuación, se presentan las propiedades de las funciones introducidas, que las hacen tan apropiadas para representar la densidad de corriente superficial sobre una superficie conductora. [Glisson, 1978], [Rao et al., 1982].

- (I) Dado un término $\vec{f}_n(\vec{r}') I_n(t)$, se observa, que no presenta componente normal en los filos de los triángulos T_n^\pm (en el resto toma valor nulo) excluyendo el filo común. No existe pues discontinuidad de la densidad de corriente, y por tanto, no se producen densidades lineales de carga en esos lados.

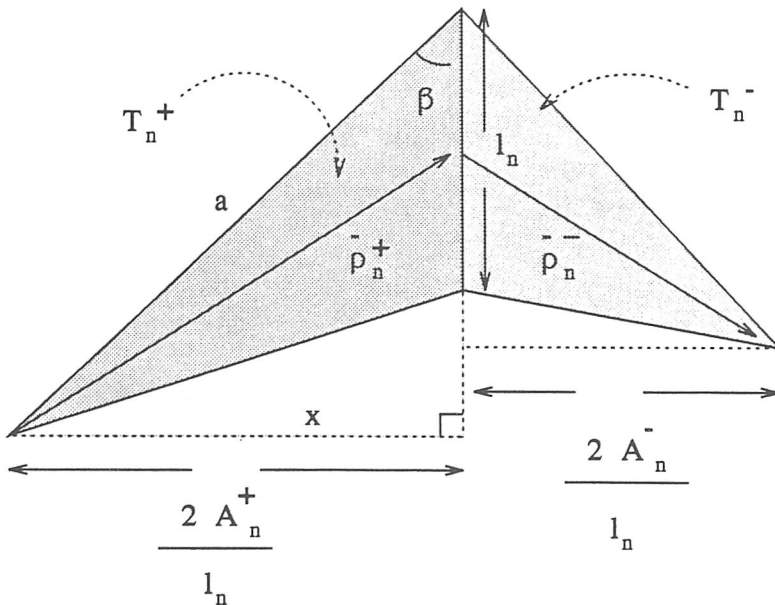
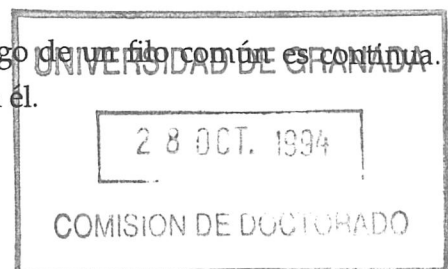


Figura 3.6: Componente normal de la función base en el lado común del par de triángulos T_n^\pm .

- (II) La componente normal de la corriente a lo largo de un filo común es continua. Esto implica que no existe una línea de carga en él.



La componente normal de $\vec{\rho}_n^\pm$ a lo largo del lado n es $2A_n^\pm/l_n$. Como las funciones base están normalizadas a este valor, queda asegurada la continuidad de la componente normal de la corriente al lado n . El valor de la componente normal de \vec{f}_n en el lado n es por tanto la unidad. En la Fig. 3.6 se representa la componente normal de la función base asociada con un lado n sobre ese lado. Dicha componente viene dada por

$$x = 2A_n^\pm/l_n$$

ya que por ejemplo para el triángulo T_n^+ se tiene

$$x \left[\frac{1}{2}a \cos \beta - \frac{1}{2}(a \cos \beta - l_n) \right] = A_n^+$$

(III) (I) junto con (II) nos garantizan que todos los lados están libres de densidades de carga.

(IV) La divergencia superficial de las funciones base viene dada por

$$\nabla_s \vec{f}_n(\vec{r}') = \begin{cases} \frac{l_n}{A_n^\pm} & \vec{r}' \in T_n^+ \\ -\frac{l_n}{A_n^-} & \vec{r}' \in T_n^- \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.15)$$

donde se ha hecho uso de

$$\nabla_s \cdot \vec{f}_n(\vec{r}') = \pm \frac{1}{\rho_n^\pm} \left(\frac{\partial(\rho_n^\pm f_n)}{\partial \rho_n^\pm} \right)$$

La densidad superficial de carga es pues uniforme en cada triángulo. La carga total asociada a cada par de triángulos T_n^\pm , que tiene la forma de un pulso doble y constante [Glisson and Wilton, 1980], es cero y por tanto la carga total en toda la estructura es cero.

(V) El momento de cada función base $(A_n^+ + A_n^-)\vec{f}^{avg}$ viene definido por

$$(A_n^+ + A_n^-)\vec{f}^{avg} \equiv \int_{T_n^+ + T_n^-} \vec{f}_n ds \quad (3.16)$$

y tiene el valor

$$\int_{T_n^+ + T_n^-} \vec{f}_n ds = \frac{l_n}{2}(\vec{\rho}_n^{c+} + \vec{\rho}_n^{c-}) = l_n(\vec{r}_n^{c-} - \vec{r}_n^{c+}) \quad (3.17)$$

donde como se muestra en la Fig. 3.7, $\vec{r}_n^{c\pm}$ es el vector de posición del centroide del triángulo T_n^\pm , y los vectores $\vec{\rho}_n^{c\pm}$ vienen dados por

$$\vec{\rho}_n^{c+} = \vec{r}_n^{c+} - \vec{r}_n^{v+}$$

$$\vec{\rho}_n^{c-} = \vec{r}_n^{v-} - \vec{r}_n^{c-}$$

El valor del **momento** de cada función base se puede obtener a partir de

$$\begin{aligned} \int_{T_n^+ + T_n^-} \vec{f}_n ds &= \int_{T_n^+} \frac{l_n \vec{\rho}_n^{c+}}{2A_n^+} ds + \int_{T_n^-} \frac{l_n \vec{\rho}_n^{c-}}{2A_n^+} ds \\ &= \frac{l_n}{2A_n^+} \int_{T_n^+} \vec{\rho}_n^{c+} ds + \frac{l_n}{2A_n^+} \int_{T_n^-} \vec{\rho}_n^{c-} ds \\ &= \frac{l_n}{2} \left\{ \frac{1}{A_n^+} (\vec{\rho}_n^{c+} A_n^+) + \frac{1}{A_n^-} (\vec{\rho}_n^{c-} A_n^-) \right\} \\ &= l_n \left(\frac{\vec{\rho}_n^{c+}}{2} + \frac{\vec{\rho}_n^{c-}}{2} \right) \\ &= l_n (\vec{r}_n^{c-} - \vec{r}_n^{c+}) \end{aligned} \tag{3.18}$$

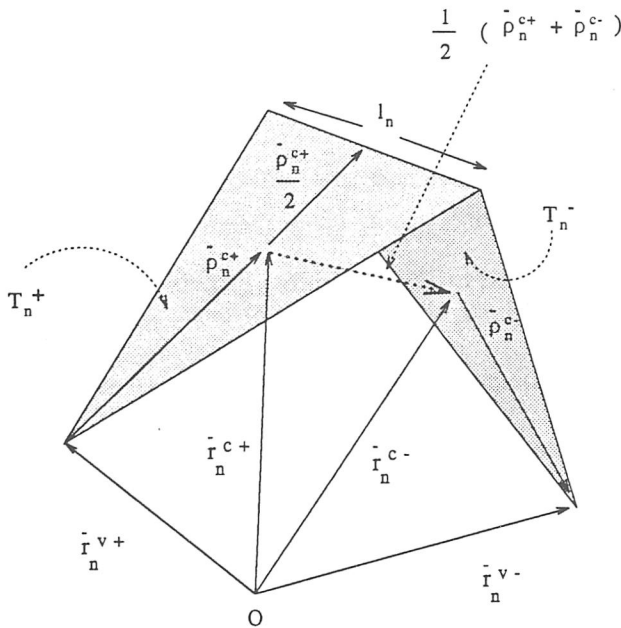


Figura 3.7: Relación entre los centroides de un par de triángulos con un lado común.

Hay que señalar aparte de las propiedades anteriores dos puntos interesantes y que conviene tener en cuenta:

- Recordando la propiedad (II) de las funciones base espaciales, podemos afirmar que cada coeficiente $I_n(t)$, puede ser interpretado como la componente normal de la corriente que atraviesa el lado n , pasando del triángulo T_n^+ al T_n^- en el instante t . En los lados frontera evidentemente no existe pues componente normal de la corriente.
- Para un modelado suficientemente fino, es de esperar, que tanto la dirección como el módulo de la densidad de corriente, se mantengan prácticamente constante espacialmente sobre un determinado triángulo. En cada triángulo tenemos definidas hasta tres funciones base no nulas si éste no tiene ningún lado frontera. Cada una de éstas funciones base varía bastante tanto en módulo como en sentido al evaluarla sobre los diferentes puntos de la superficie del triángulo. Sin embargo, una combinación lineal de éstas puede representar a un vector constante sobre el parche. Esto se puede ver fácilmente a partir de la Fig. 3.8. En ella, sin pérdida de generalidad, se han considerado los vectores $\vec{\rho}_i$ con sentido hacia fuera de los vértices, es decir, el parche tiene signo positivo para todos lados que lo componen.

Definimos

$$\begin{aligned}\vec{a} &\equiv l_2 \vec{f}_1 - l_1 \vec{f}_2 \\ \vec{b} &\equiv l_3 \vec{f}_1 - l_1 \vec{f}_3\end{aligned}\tag{3.19}$$

con

$$\vec{f}_i = l_i / 2A_T \vec{\rho}_i \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

Se puede ver fácilmente que

- \vec{a} , \vec{b} son linealmente independientes, por lo que, forman una base sobre el triángulo.
- Cualquier combinación lineal de ambos vectores es un vector constante sobre la superficie del triángulo A_T .

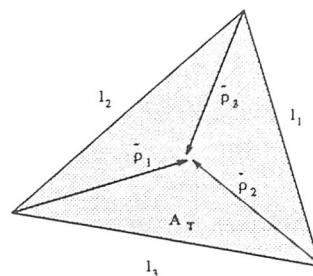


Figura 3.8: Vectores definidos localmente sobre un parche.

Como ya habíamos expuesto anteriormente en la ecuación (3.14), la densidad de corriente sobre la superficie dispersora se expresa

$$\vec{J}(\vec{r}', t) \approx \sum_{n=1}^{N_e} \vec{f}_n(\vec{r}') I_n(t) \quad (3.20)$$

La suma se extiende a todos los lados internos de la estructura, y excluye los que limitan la superficie en el caso de que sea abierta. A partir de las propiedades de la dependencia espacial de las funciones base, y de que estas están definidas solo para los lados internos, se deduce que las componentes normal y paralela de la corriente, \vec{J}_{\parallel} , \vec{J}_{\perp} cumplen las condiciones de filo libre. Estas condiciones son ([Jones, 1964] pp. 569)

$$\begin{aligned} J_{\parallel} &\propto \rho^{-1/2} \\ J_{\perp} &\propto \rho^{1/2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde ρ es la distancia desde el filo libre al punto donde se está evaluando la corriente.

3.3.2 Funciones base temporales

En esta tesis, a diferencia de otros autores [Rao and Wilton, 1991], [Rynne, 1991], [Rao and Sarkar, 1993], con el objetivo de no tener que introducir una discretización en diferencias finitas para el tratamiento de la derivada temporal, se introducen polinomios de interpolación lagrangiana como funciones base temporales. La convergencia del método no está condicionada por tanto a la elección de un incremento temporal que cumpla el criterio de Courant, $\Delta t \leq \Delta s / c\sqrt{2}$ (siendo Δs la separación mínima espacial entre puntos fuente). La interpolación lagrangiana nos permite poder elegir el incremento temporal lo más cercano posible a la distancia mínima entre puntos fuente. Tal y como demuestra [Rynne, 1985], [Rynne and Smith, 1990] y [Smith, 1990], esta elección del incremento temporal hace que la aparición de inestabilidades en la solución se retrase y la razón de crecimiento sea menor. En este sentido, la elección del valor del incremento del intervalo temporal que se puede realizar es la más idónea. En el apéndice A, se presenta un estudio sobre las inestabilidades en el proceso de solución escalonado en el tiempo de ecuaciones integrales, y se puede ver más detalladamente este resultado. La interpolación lagrangiana nos permitirá obtener una formulación matricial del problema.

Como ya se ha comentado anteriormente, utilizaremos funciones base temporales polinomios de interpolación lagrangiana de orden k , con $k \geq 1$ para poder realizar la derivada temporal de la densidad de corriente. (En la práctica $k \geq 2$ debido a las características del modelado, como veremos más adelante).

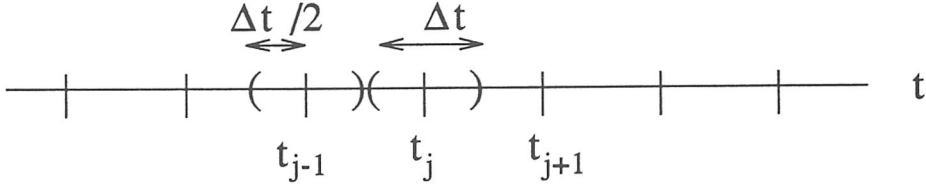


Figura 3.9: Discretización de la variable temporal.

La discretización temporal se representa en la Fig. 3.9. En ella los incrementos temporales se han tomado constantes, cumpliéndose por tanto

$$t_j - t_{j-1} = \Delta t \quad \forall j \quad (3.22)$$

Los coeficiente $I_n(t)$ de la ecuación (3.14) los expresamos como

$$I_n(t) \approx \sum_{m=l}^{l+k} B_j^m(t - t_j) I_{n,j+m} \quad (3.23)$$

siendo $I_{n,v}$ las incógnitas a determinar. Las funciones $B_j^m(t - t_j)$ son los polinomios de interpolación lagrangiana, y vienen dados por

$$B_j^m(t - t_j) = \prod_{\substack{q=l \\ q \neq m}}^{l+k} \frac{t - t_{j+q}}{t_{j+m} - t_{j+q}} \quad (3.24)$$

Definiéndose j de forma que

$$t \in (t_{j-\Delta t/2}, t_{j+\Delta t/2}]$$

con $t_j = j\Delta t$. l es un entero que se definirá en la ecuación discretizada, de forma que, no se interpole nunca con instantes no evaluados, y que quede el intervalo de interpolación lo mas centrado posible en torno a j .

El rango de definición de la interpolación es el intervalo $[t_{j+l}, t_{j+l+k}]$. Hay que señalar que según [Burden and Faires, 1985], y [Smith, 1988b], el desarrollo puede usarse para la extrapolación de puntos fuera del intervalo de definición, aunque con la limitación de que disten "poco" de los extremos. No existe una cota general que nos determine el rango de validez de la extrapolación.

A partir de las expresiones (3.23) y (3.14), la densidad superficial de corriente la podemos poner

$$\vec{J}(\vec{r}', t) \cong \sum_{n=1}^{Ne} \vec{f}_n(\vec{r}') \sum_{m=l}^{l+k} B_j^m(t - t_j) I_{n,j+m} \quad (3.25)$$

de donde reagrupando términos nos queda

$$\vec{J}(\vec{r}', t) \cong \sum_{n=1}^{Ne} \sum_{m=l}^{l+k} \vec{f}_n(\vec{r}') B_j^m(t - t_j) I_{n,j+m} \quad (3.26)$$

3.4 Procedimiento de testeo

Para el testeo de la ecuación integral, usaremos como funciones peso las mismas funciones base (método de Galerkin) introducidas para la variable espacial. Temporalmente forzaremos que se cumpla la ecuación sólo en los centros de los intervalos temporales. Es decir, como función peso temporal se usarán funciones peso delta de Dirac

$$\delta(t - t_v) \quad (v = \{1, \dots, v_f\})$$

Definimos el producto interno

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle \equiv \int_{S'} \vec{f} \cdot \vec{g} ds' \quad (3.27)$$

Testeamos la ecuación (3.3) con las funciones base espaciales \vec{f}_m obteniéndose³

$$\langle \vec{E}^i, \vec{f}_m \rangle = -\langle \vec{E}^s, \vec{f}_m \rangle = \langle [\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi], \vec{f}_m \rangle \quad (3.28)$$

Desarrollando ambos miembros de (3.28) nos queda para el primero

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}^i, \vec{f}_m \rangle &= \int_{S'} \vec{E}^i(\vec{r}', t) \vec{f}_m(\vec{r}') ds' = \int_{T_m^+ + T_m^-} \vec{E}^i(\vec{r}', t) \vec{f}_m(\vec{r}') ds' \\ &= \int_{T_m^+} \vec{E}^i(\vec{r}', t) \vec{f}_m(\vec{r}') ds' + \int_{T_m^-} \vec{E}^i(\vec{r}', t) \vec{f}_m(\vec{r}') ds' \\ &\approx \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t) \int_{T_m^+} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' + \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c-}, t) \int_{T_m^-} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' \\ &= \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t) \int_{T_m^+} \frac{l_m}{2A_m^+} (\vec{r}' - \vec{r}^{v+}) ds' + \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c-}, t) \int_{T_m^-} \frac{l_m}{2A_m^-} (\vec{r}^{v-} - \vec{r}') ds' \\ &= \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t) \frac{l_m}{2A_m^+} (\vec{r}_m^{c+} - \vec{r}^{v+}) A_m^+ + \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c-}, t) \frac{l_m}{2A_m^-} (\vec{r}^{v-} - \vec{r}_m^{c-}) A_m^- \\ &= \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t) l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c-}, t) l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \end{aligned}$$

quedándonos con la última igualdad se tiene

$$\langle \vec{E}^i, \vec{f}_m \rangle = \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t) l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c-}, t) l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \quad (3.29)$$

³hay que señalar que las funciones base \vec{f}_m son vectores tangentes a la superficie, y por tanto, el producto interno definido da el mismo resultado si se lo aplicamos a la componente tangencial a la superficie, ó total de la función vectorial testeada

Se ha aproximado el valor del campo eléctrico sobre cada triángulo por su valor en los respectivos centroides. Con esto nos evitamos evaluar integrales de superficie numéricamente en cada instante de tiempo.

El segundo miembro de (3.28) lo descomponemos en

$$\langle [\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \phi], \vec{f}_m \rangle = \langle \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{f}_m \rangle + \langle \nabla \phi, \vec{f}_m \rangle \quad (3.30)$$

El primer sumando de la ecuación anterior lo podemos desarrollar de igual forma que el producto interno del campo eléctrico incidente por la función peso

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{f}_m \rangle &= \int_{S'} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}', t)}{\partial t} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' = \int_{T_m^+ + T_m^-} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}', t)}{\partial t} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' \\ &= \int_{T_m^+} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}', t)}{\partial t} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' + \int_{T_m^-} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}', t)}{\partial t} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' \\ &\approx \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}, t)}{\partial t} \int_{T_m^+} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}, t)}{\partial t} \int_{T_m^-} \vec{f}_m(\vec{r}') ds' \\ &= \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}, t)}{\partial t} l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}, t)}{\partial t} l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\langle \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{f}_m \rangle = \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}, t)}{\partial t} l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}, t)}{\partial t} l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \quad (3.31)$$

Al igual que para el campo \vec{E}^i se ha tomado el valor de la derivada del potencial vector sobre cada triángulo por su valor en el centroide.

Para hallar el segundo sumando de (3.30) haremos uso de las relaciones vectoriales dadas en [Bladel, 1964], ([Wang, 1991] pp. 199)

$$(\nabla \phi) \cdot \vec{f}_m = \nabla \cdot (\phi \vec{f}_m) - \phi \nabla \cdot \vec{f}_m$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = \nabla_s \cdot \vec{P} + \hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial n}$$

$$\int_S \nabla \cdot \vec{P} ds = \int_C \vec{P} \cdot \hat{n}_c dc - \int_S J(\vec{P} \cdot \hat{n}) ds$$

donde, C es una curva que limita la superficie S si ésta es abierta y si es cerrada se anula, J es la primera curvatura de S , por tanto es cero para superficies planas, y \vec{P} es cualquier magnitud vectorial definida sobre S . Como \vec{f}_m no tiene componente normal en ninguna parte del contorno de S , se deduce que

$$\int_S \nabla_s \cdot (\phi \vec{f}_m) ds = 0$$

y por tanto, el segundo sumando que nos queda por desarrollar, lo podemos poner

$$\langle \nabla \phi, \vec{f}_m \rangle = \int_{S'} [\nabla \phi(\vec{r}', t)] \vec{f}_m(\vec{r}') ds' = - \int_{S'} \phi(\vec{r}', t) (\nabla_s \cdot \vec{f}_m) ds'$$

introduciendo en la ecuación anterior el valor de la divergencia de la función base, y haciendo la aproximación de tomar el valor del potencial escalar sobre todo el parche como su valor en el centroide, nos queda

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi, \vec{f}_m \rangle &= - \left[\int_{T_m^+} \phi(\vec{r}', t) \frac{l_m}{A_m^+} ds' + \int_{T_m^-} \phi(\vec{r}', t) \frac{-l_m}{A_m^-} ds' \right] \\ &\approx -\phi(\vec{r}_m^{c+}, t) \frac{l_m}{A_m^+} A_m^+ + \phi(\vec{r}_m^{c-}, t) \frac{l_m}{A_m^-} A_m^- \\ &= l_m [\phi(\vec{r}_m^{c-}, t) - \phi(\vec{r}_m^{c+}, t)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Introduciendo (3.29), (3.31) y (3.32) en (3.28), para cada función base \vec{f}_m con la que testeamos la ecuación (3.3), se tiene

$$\begin{aligned} \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t) l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + E^i(\vec{r}_m^{c-}, t) l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} &= l_m [\phi(\vec{r}_m^{c-}, t) - \phi(\vec{r}_m^{c+}, t)] \\ &+ \left[\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}, t)}{\partial t} l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}, t)}{\partial t} l_m \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

La ecuación testeada obtenida puede ser interpretada también como la integral de cada miembro de (3.3), a lo largo de un camino lineal C_m . Este camino va desde \vec{r}_m^{c+} a \vec{r}_m^{c-} , y pasa a través del punto medio del lado m . Tomando la aproximación de tomar los valores de \vec{A} , \vec{E} y ϕ en los centroides de los triángulos T_m^\pm , al hacer la integral de línea, se obtiene la ecuación (3.33). Esto es, la ecuación (3.28) es equivalente a

$$\int_{C_m} \vec{E}^i(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}_m = \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_m} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}_m + \int_{C_m} \nabla \phi(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}_m \quad (3.34)$$

La ecuación (3.33) puede ser simplificada eliminando l_m en todos los términos

$$\begin{aligned} \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t) \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + E^i(\vec{r}_m^{c-}, t) \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} &= [\phi(\vec{r}_m^{c-}, t) - \phi(\vec{r}_m^{c+}, t)] \\ &+ \left[\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}, t)}{\partial t} \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}, t)}{\partial t} \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

La forzaremos que se cumpla en los centros de los intervalos temporales, luego para cada instante temporal v y para cada lado interno del modelado, nos queda

$$\begin{aligned} \vec{E}^i(\vec{r}_m^{c+}, t_v) \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + E^i(\vec{r}_m^{c-}, t_v) \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} &= [\phi(\vec{r}_m^{c-}, t_v) - \phi(\vec{r}_m^{c+}, t_v)] \\ &+ \left[\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c+}, t_v)}{\partial t} \frac{\vec{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^{c-}, t_v)}{\partial t} \frac{\vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

La solución de la ecuación anterior es por tanto, aproximadamente, la solución del problema de partida.

3.5 Ecuación EFIE discretizada

Una vez expresada la densidad de corriente usando las funciones base, y obtenida la ecuación testeada, podemos desarrollar ésta con objeto de llegar a un sistema algebraico lineal de ecuaciones. Los errores cometidos en el tratamiento numérico influyen en la aparición de inestabilidades [Tijhuis, 1984], [Rynne, 1986], [Smith, 1988a], [Rynne and Smith, 1990], [Smith, 1990], [Fornieles, 1992]. Por ello, para evitar en lo posible este tipo de inestabilidades se realiza un tratamiento numérico lo más preciso posible.

3.5.1 Expresión para \vec{J} , ρ y $\partial_t \vec{J}$

Para discretizar la ecuación, vamos a definir la densidad de corriente de forma local sobre los parches triangulares fuente y sobre los intervalos temporales. En la Fig. 3.10, se representa un triángulo genérico i , sobre el que se ha elegido el lado s (opuesto al vértice s), y definimos

$$\vec{r}_i'' \equiv \vec{\rho}_{i,s} - \vec{\rho}_{i,s}^c$$

Los vectores $\vec{\rho}_{i,s}$ y $\vec{\rho}_{i,s}^c$ tienen el sentido hacia fuera del vértice correspondiente y vienen dados por

$$\vec{\rho}_{i,s}^c \equiv \vec{r}_i^c - \vec{r}_{i,s}^v \quad (3.37)$$

$$\vec{\rho}_{i,s} \equiv \vec{r}' - \vec{r}_{i,s}^v \quad (3.38)$$

la variable s nos indica el lado del triángulo i al que hacemos referencia, y pertenece al conjunto $\{1, 2, 3\}$. A cada nodo s del triángulo i se le asocia el lado opuesto. A cada lado local l_s del triángulo i le corresponde un lado de la estructura n (con $n \in \{1, 2, \dots, N_e\}$, donde N_e es el número de lados internos del modelado), que es, $n(i, s)$.

Se define

$$\text{sgn}(i, s) \equiv \begin{cases} 1 & i = T_{n(i,s)}^+, \quad n \in \{1, \dots, N_e\} \\ -1 & i = T_{n(i,s)}^-, \quad n \in \{1, \dots, N_e\} \\ 0 & n \notin \{1, \dots, N_e\} \end{cases} \quad (3.39)$$

donde N_e es el número de lados internos de la estructura.

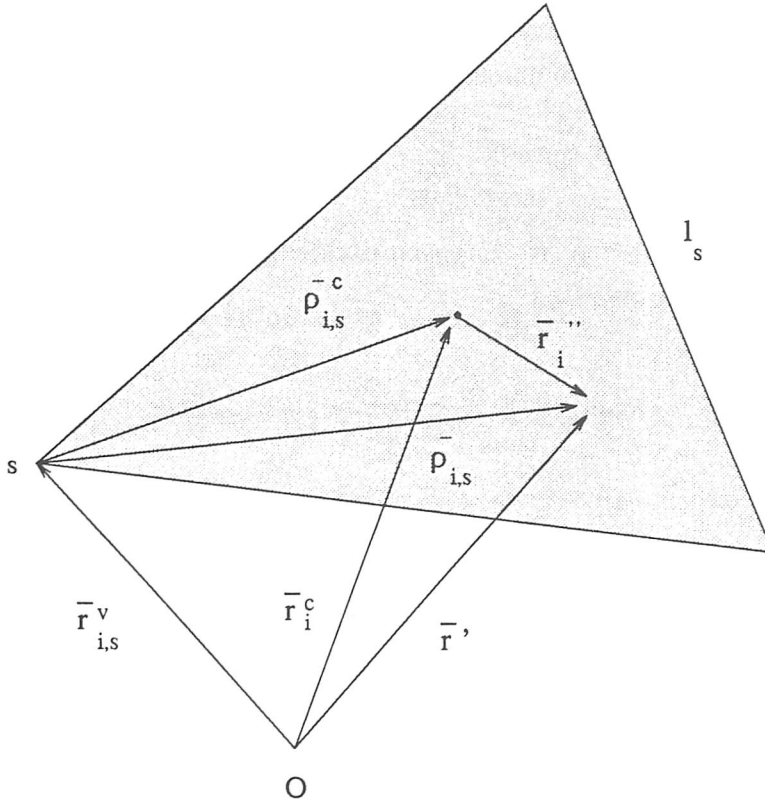


Figura 3.10: Coordenadas locales sobre un parche triangular.

Usando la notación introducida, las funciones base espaciales dadas en (3.13) las podemos poner en función del vector local \vec{r}_i'' como

$$\vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') = \text{sgn}(i, s) \frac{l_{n(i,s)}}{2A^i} (\vec{\rho}_{i,s}^c + \vec{r}_i'') \tag{3.40}$$

y su divergencia

$$\nabla \cdot \vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') = \text{sgn}(i, s) \frac{l_{n(i,s)}}{A^i}$$

Para la variable temporal introducimos ⁴

$$t_j'' \equiv t - t_j \quad \text{con } j \equiv EMC\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \tag{3.41}$$

introduciendo (3.41) en (3.24) se tiene

$$B_j^m(t_j'') = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{l+k} \frac{t_j'' + t_j - t_{j+q}}{t_{j+m} - t_{j+q}} \tag{3.42}$$

⁴ EMC entero más cercano

Con estas definiciones, la expresión general de la densidad de corriente (3.26), la podemos particularizar para el parche i en el intervalo temporal $[t_{j+l}, t_{j+l+k}]$

$$\vec{J}_{i,j}(\vec{r}_i'', t_j'') \approx \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') B_j^m(t_j'') I_{n(i,s),j+m} \quad (3.43)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_j''} \frac{\partial t_j''}{\partial t}$ en donde $\frac{\partial t_j''}{\partial t} = 1$, la derivada temporal de $\vec{J}_{i,j}(\vec{r}_i'', t_j'')$ la podemos expresar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j''} \vec{J}_{i,j}(\vec{r}_i'', t_j'') &= \frac{\partial}{\partial t_j''} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') B_j^m(t_j'') I_{n(i,s),j+m} \\ &= \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right) I_{n(i,s),j+m} \end{aligned} \quad (3.44)$$

la divergencia superficial de la corriente queda

$$\begin{aligned} \left[\nabla \cdot \vec{J}_{i,j}(\vec{r}_i'', t_j'') \right]_{t_j''} &= \left[\nabla \cdot \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') B_j^m(t_j'') I_{n(i,s),j+m} \right]_{t_j''} \\ &= \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} [\nabla \cdot \vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'')] B_j^m(t_j'') I_{n(i,s),j+m} \\ &= \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') B_j^m(t_j'') I_{n(i,s),j+m} \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde teniendo en cuenta (3.40) se ha definido

$$f_{i,s}(\vec{r}_i'') \equiv \text{sgn}(i, s) \frac{l_{n(i,s)}}{A^i} \quad (3.46)$$

Para hallar la expresión de la densidad superficial de carga, descomponemos la integral temporal de la expresión (3.8) en una suma por los intervalos temporales. Haciendo uso de la discretización temporal la expresión (3.8) se puede poner como

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}', t) &= - \int_{-\infty}^t [\nabla' \vec{J}(\vec{r}', \tau)]_{\tau} d\tau \\ &= - \sum_{p=-\infty}^{j-1} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} [\nabla' \vec{J}(\vec{r}', \tau_p)]_{\tau_p} d\tau_p - \int_{-\Delta t/2}^t [\nabla' \vec{J}(\vec{r}', \tau_j)]_{\tau_j} d\tau_j \end{aligned} \quad (3.47)$$

utilizando coordenadas locales e introduciendo (3.45) en (3.47) nos queda

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}(\vec{r}_i'', t_j'') &= - \sum_{p=-\infty}^{j-1} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') B_p^m(\tau_p'') I_{n(i,s),p+m} d\tau_p'' \\ &\quad - \int_{-\Delta T/2}^{t_j''} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') B_j^m(\tau_j'') I_{n(i,s),j+m} d\tau_j'' \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}(\vec{r}_i'', t_j'') = & - \sum_{p=-\infty}^{j-1} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_p^m(\tau_p'') d\tau_p'' I_{n(i,s),p+m} \\ & - \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' I_{n(i,s),j+m} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Con objeto de ahorrar tiempo de cálculo podemos definir

$$SI_{n(i,s),v} \equiv \sum_{p=-\infty}^v I_{n(i,s),p} = \sum_{p=0}^v I_{n(i,s),p} \quad (3.49)$$

en donde, para obtener la última igualdad, se ha hecho uso de la causalidad del sistema ($\forall v \leq 0 \quad I_{n,v} = 0$).

Para la nueva variable $SI_{n(i,s),v}$ se cumple

$$\begin{aligned} SI_{n(i,s),v} &= SI_{n(i,s),v-1} + I_{n(i,s),v} \\ \sum_{p=-\infty}^{j-1} I_{n(i,s),p+m} &= SI_{n(i,s),j-1+m} \end{aligned} \quad (3.50)$$

usaremos la propiedad de la variable $SI_{n,v}$ dada por la primera igualdad, para no tener que evaluar la sumatoria cada vez que sea necesaria. Esto nos supondrá un ahorro de tiempo de cálculo en los programas.

Teniendo en cuenta la igualdad de los intervalos temporales se tiene que

$$\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_p^m(\tau_p'') d\tau_p'' = cte \quad \forall p \quad (3.51)$$

Haciendo uso de (3.50) y (3.51) la expresión para la carga (3.48) se puede poner

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}(\vec{r}_i'', t_j'') = & - \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' \sum_{p=-\infty}^{j-1} I_{n(i,s),p+m} \\ & - \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' I_{n(i,s),j+m} \\ & - \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' SI_{n(i,s),j-1+m} \\ & - \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' I_{n(i,s),j+m} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Las ecuaciones que utilizaremos para expresar posteriormente los potenciales son las expresiones (3.44) y (3.52)

3.5.2 Expresión para los potenciales $\partial_t \bar{A}$ y ϕ

Para evaluar la expresión testeada (3.36) necesitamos discretizar las ecuaciones de los potenciales (3.5), (3.6). Teniendo en cuenta la discretización espacial los potenciales evaluados en el centroide de un parche p , \bar{r}_p^c , los podemos poner como

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}(\bar{r}_p^c, t_v) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \bar{J}(\bar{r}', t')}{R} ds' \Big|_{\bar{r}_p^c, t_v} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \bar{J}(\bar{r}', t')}{R} ds'_i \Big|_{\bar{r}_p^c, t_v} \quad (3.53)$$

$$\phi(\bar{r}_p^c, t_v) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho(\bar{r}', t')}{R} ds' \Big|_{\bar{r}_p^c, t_v} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{\rho(\bar{r}', t')}{R} ds'_i \Big|_{\bar{r}_p^c, t_v} \quad (3.54)$$

con $t' = v\Delta t - \frac{R}{c}$ y según la Fig. 3.11

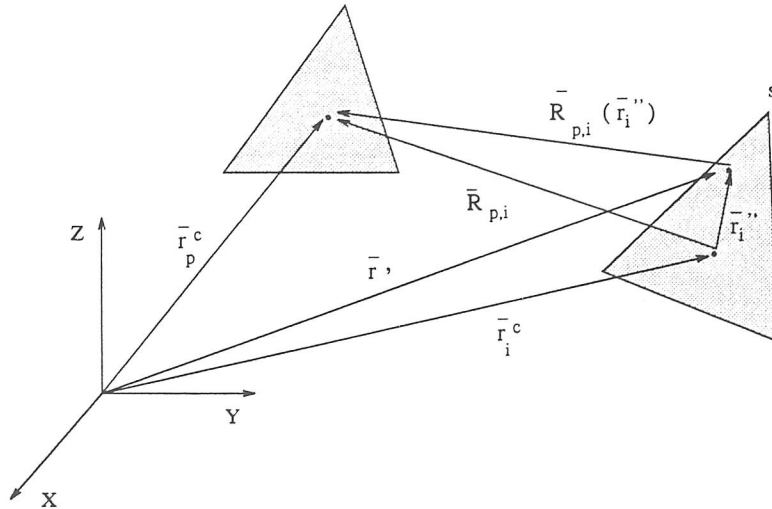


Figura 3.11: Relación entre parches fuente y parches campo tomando referencias locales en los centros de los triángulos.

$$R_{p,i}(\bar{r}_i'') = |\bar{r}_p^c - \bar{r}'| = |\bar{r}_p^c - \bar{r}_i^c - \bar{r}_i''|$$

$$R_{p,i} = |\bar{r}_p^c - \bar{r}_i^c|$$

$$j = EMC\left(v - \frac{R_{p,i}}{c\Delta t}\right)$$

l se tomará de forma tal que no se interpole con instantes futuros (posteriores a v), y $t_j'' = t' - t_j$, (por ejemplo para orden de interpolación 2 si $j = v$ se tomaría $l = -2$).

Démonos cuenta que las fuentes se evalúan en el instante retrasado t' no en el t_v , y esto junto con instante actual nos condiciona la definición de j y l .

Utilizando (3.44) y (3.52) los potenciales (3.53) y (3.54) se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}(\bar{r}_p^c, t_v) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{1}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \bar{f}_{i,s}(\bar{r}_i'') \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right) I_{n(i,s),j+m} ds'_i \\ \phi(\bar{r}_p^c, t_v) &\approx \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{1}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\bar{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' S I_{n(i,s),j-1+m} ds'_i \\ &\quad - \int_{S'_i} \frac{1}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\bar{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' I_{n(i,s),j+m} ds'_i \end{aligned}$$

Introduciendo la integral espacial dentro de las sumatorias se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}(\bar{r}_p^c, t_v) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \int_{S'_i} \frac{\bar{f}_{i,s}(\bar{r}_i'') \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right)}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} ds'_i I_{n(i,s),j+m} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \phi(\bar{r}_p^c, t_v) &\approx \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\bar{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' \int_{S'_i} \frac{ds'_i}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} S I_{n(i,s),j-1+m} \\ &\quad + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} f_{i,s}(\bar{r}_i'') \int_{S'_i} \frac{\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} ds'_i I_{n(i,s),j+m} \quad (3.56) \end{aligned}$$

Definimos las matrices de estructura

$$\begin{aligned} \bar{F}_{p,i,s,m} &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'_i} \frac{\bar{f}_{i,s}(\bar{r}_i'') \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right)}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} ds'_i \\ C_{p,i,s,m} &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} f_{i,s}(\bar{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' \int_{S'_i} \frac{1}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} ds'_i \\ G_{p,i,s,m} &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} f_{i,s}(\bar{r}_i'') \int_{S'_i} \frac{\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''}{R_{p,i}(\bar{r}_i'')} ds'_i \end{aligned}$$

En dichas integrales aparece una singularidad cuando el punto fuente y el punto campo coinciden, esto es, cuando $p = i$. En este caso se calculan analíticamente [Wilton et al., 1984], y cuando $p \neq i$ se utiliza la subrutina de integración numérica dada en [Stroud, 1971]. En el apéndice B se describe en detalle su desarrollo y tratamiento

numérico. En [Rao and Wilton, 1991], [Rynne, 1991] el cálculo de las integrales de superficie que aparecen es simplificado al máximo evaluando las funciones en los centroides y multiplicando por el área de los parches. Esto lleva a que el error de discretización sea considerable y por tanto la estabilidad de la ecuación es menor, ya que como se muestra en [Salinas, 1991] y [Fornieles, 1992] la violación del principio de causalidad y la introducción de errores (aunque sean pequeños) puede llevar a que un proceso de solución escalonado en el tiempo los amplifique. En [Canning, 1989] se muestra como los errores de discretización son un factor muy importante, en la aparición de inestabilidades (en el proceso de solución escalonado en el tiempo) de ecuaciones integrales. En algunos casos, pueden ser una causa mas importante que incluso, el condicionamiento de las matrices resultantes en la aplicación del MM [Canning, 1989]. Los campos dispersados cercanos son muy sensibles a estos errores, y pueden dar lugar a una solución inestable aunque se plantee un sistema muy bien condicionado [Canning, 1991]. Las conclusiones a las que se llega en [Salinas, 1991], [Fornieles, 1992] han sido obtenidas a partir del estudio de la MFIE, y a las que se llega en [Canning, 1989] a partir del estudio de la EFIE sobre cuerpos cilíndricos. En general, no se puede hacer la suposición de que lo que se obtiene en unos métodos numéricos va a ser aplicable a otros. Como se comprueba experimentalmente en esta tesis, un buen tratamiento numérico de la EFIE para superficies conductoras, lleva a una mejora en cuanto a la estabilidad de los resultados obtenidos frente a otros planteamientos.

A partir de la definición de las matrices de estructura, la expresión para los potenciales nos queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}(\vec{r}_p^c, t_v) \approx \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{F}_{p,i,s,m} I_{n(i,s),j+m} \quad (3.57)$$

$$\phi(\vec{r}_p^c, t_v) \approx \sum_{i=1}^{N_t} \left[- \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} C_{p,i,s,m} S I_{n(i,s),j-1+m} - \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} G_{p,i,s,m} I_{n(i,s),j+m} \right] \quad (3.58)$$

que se puede simplificar a

$$\phi(\vec{r}_p^c, t_v) \approx - \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \left[C_{p,i,s,m} S I_{n(i,s),j-1+m} + G_{p,i,s,m} I_{n(i,s),j+m} \right] \quad (3.59)$$

Los sumandos de la ecuación (3.57) incluyen el término $I_{n,v}$ cuando $j + m = v$. En los sumandos de la ecuación (3.59) que llevan como factor las funciones C todas las intensidades que aparecen son en instantes anteriores a v por ser un término de retraso

puro ⁵. Los sumandos que llevan como factor las funciones \mathcal{G} incluyen el término $I_{n,v}$ cuando $j + m = v$.

En las expresiones (3.57) y (3.59), como ya ha sido señalado, l está definido de forma que no se interpole con instantes futuros (es decir, no calculados), por lo que en ellas aparecen las incógnitas en instantes anteriores o iguales a v .

3.5.3 Ecuación EFIE numérica

Para cada lado interno li de la estructura tomamos los triángulos $p1$ y $p2$, y los lados locales de dichos triángulos $s1$ y $s2$, dados por

$$p1 \equiv T_i^+ \quad p2 \equiv T_i^+ \\ s1, s2 \in \{1, 2, 3\} \quad \setminus \quad n(p1, s1) = n(p2, s2) = li$$

con esta notación y teniendo en cuenta (3.37), la ecuación testeada (3.36) se puede poner ⁶

$$\vec{E}^i(\vec{r}_{p1}^c, t_v) \frac{\vec{\rho}_{p1,s1}^c}{2} - \vec{E}^i(\vec{r}_{p2}^c, t_v) \frac{\vec{\rho}_{p2,s2}^c}{2} = [\phi(\vec{r}_{p2}^c, t_v) - \phi(\vec{r}_{p1}^c, t_v)] \\ + \left[\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_{p1}^c, t_v)}{\partial t} \frac{\vec{\rho}_{p1,s1}^c}{2} - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_{p2}^c, t_v)}{\partial t} \frac{\vec{\rho}_{p2,s2}^c}{2} \right] \quad (3.60)$$

Definiendo

$$j1 \equiv EMC(v - \frac{R_{i,p1}}{c\Delta t}) \\ j2 \equiv EMC(v - \frac{R_{i,p2}}{c\Delta t})$$

e introduciendo en la ecuación (3.60) las expresiones de los potenciales (3.57) y (3.59) se tiene

$$\vec{E}^i(\vec{r}_{p1}^c, t_v) \frac{\vec{\rho}_{p1,s1}^c}{2} - E^i(\vec{r}_{p2}^c, t_v) \frac{\vec{\rho}_{p2,s2}^c}{2} = \\ \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m1=l1}^{l1+k} \vec{\mathcal{F}}_{p1,i,s,m1} \frac{\vec{\rho}_{p1,s1}^c}{2} I_{n(i,s),j1+m1} - \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m2=l2}^{l2+k} \vec{\mathcal{F}}_{p2,i,s,m2} \frac{\vec{\rho}_{p2,s2}^c}{2} I_{n(i,s),j2+m2} \\ + \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m1=l1}^{l1+k} \left[\mathcal{C}_{p1,i,s,m1} S I_{n(i,s),j1-1+m1} + \mathcal{G}_{p1,i,s,m1} I_{n(i,s),j1+m1} \right]$$

⁵ Se podría definir un índice l distinto para los sumandos en los que aparece \mathcal{C} de forma que $j - 1 + m$ si pudiese ser igual a v . Esto nos llevaría a una matriz de impedancias que sería menos diagonal dominante (cosa que no nos interesa de cara a la estabilidad), secundariamente además se complicaría la notación.

⁶ fijarse en que la suma de las magnitudes vectoriales de 3.36, pasa a ser diferencia ya que los vectores $\vec{\rho}$ ahora tienen siempre el sentido del vértice al centroide

$$- \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m_2=l_2}^{l_2+k} \left[C_{p2,i,s,m_2} S I_{n(i,s),j_2-1+m_2} + G_{p2,i,s,m_2} I_{n(i,s),j_2+m_2} \right] \quad (3.61)$$

en la que reagrupando términos

$$\begin{aligned} & \bar{E}^i(\bar{r}_{p1}^c, t_v) \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} - E^i(\bar{r}_{p2}^c, t_v) \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2} = \\ & \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \left[\sum_{m_1=l_1}^{l_1+k} (\bar{F}_{p1,i,s,m_1} \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} + G_{p1,i,s,m_1}) I_{n(i,s),j_1+m_1} + C_{p1,i,s,m_1} S I_{n(i,s),j_1-1+m_1} \right. \\ & \left. - \sum_{m_2=l_2}^{l_2+k} (\bar{F}_{p2,i,s,m_2} \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2} + G_{p2,i,s,m_2}) I_{n(i,s),j_2+m_2} + C_{p2,i,s,m_2} S I_{n(i,s),j_2-1+m_2} \right] \quad (3.62) \end{aligned}$$

despejando los términos de corriente en el instante temporal v se obtiene

$$\begin{aligned} & \bar{E}^i(\bar{r}_{p1}^c, t_v) \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} - E^i(\bar{r}_{p2}^c, t_v) \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2} + \\ & \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \left[\sum_{\substack{m_2=l_2 \\ j_2+m_2 < v}}^{l_2+k} (\bar{F}_{p2,i,s,m_2} \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2} + G_{p2,i,s,m_2}) I_{n(i,s),j_2+m_2} + \sum_{m_2=l_2}^{l_2+k} C_{p2,i,s,m_2} S I_{n(i,s),j_2-1+m_2} \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{m_1=l_1 \\ j_1+m_1 < v}}^{l_1+k} (\bar{F}_{p1,i,s,m_1} \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} + G_{p1,i,s,m_1}) I_{n(i,s),j_1+m_1} - \sum_{m_1=l_1}^{l_1+k} C_{p1,i,s,m_1} S I_{n(i,s),j_1-1+m_1} \right] \\ & = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \left[\sum_{\substack{m_1=l_1 \\ j_1+m_1=v}}^{l_1+k} (\bar{F}_{p1,i,s,m_1} \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} + G_{p1,i,s,m_1}) - \sum_{\substack{m_2=l_2 \\ j_2+m_2=v}}^{l_2+k} (\bar{F}_{p2,i,s,m_2} \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2} + G_{p2,i,s,m_2}) \right] I_{n(i,s)} \quad (3.63) \end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned} Z_{li,n} \equiv & \sum_{T_i=T_n^+, T_n^-} \left[\sum_{\substack{m_1=l_1 \\ j_1+m_1=v}}^{l_1+k} (\bar{F}_{p1,T_i,sti,m_1} \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} + G_{p1,T_i,sti,m_1}) \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{m_2=l_2 \\ j_2+m_2=v}}^{l_2+k} (\bar{F}_{p2,T_i,sti,m_2} \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2} + G_{p2,T_i,sti,m_2}) \right] \end{aligned}$$

$$E_{li,v}^I \equiv \bar{E}^i(\bar{r}_{p1}^c, t_v) \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} - E^i(\bar{r}_{p2}^c, t_v) \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2}$$

$$\begin{aligned} E_{li,v}^S \equiv & \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \left[\sum_{\substack{m_2=l_2 \\ j_2+m_2 < v}}^{l_2+k} (\bar{F}_{p2,i,s,m_2} \frac{\bar{\rho}_{p2,s2}^c}{2} + G_{p2,i,s,m_2}) I_{n(i,s),j_2+m_2} \right. \\ & \left. + \sum_{m_2=l_2}^{l_2+k} C_{p2,i,s,m_2} S I_{n(i,s),j_2-1+m_2} - \sum_{\substack{m_1=l_1 \\ j_1+m_1 < v}}^{l_1+k} (\bar{F}_{p1,i,s,m_1} \frac{\bar{\rho}_{p1,s1}^c}{2} + G_{p1,i,s,m_1}) I_{n(i,s),j_1+m_1} \right] \end{aligned}$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{l_1+k} C_{p1,i,s,m1} S I_{n(i,s),j1-1+m1} \right]$$

La ecuación (3.63) se reduce a

$$\sum_{n=1}^{N_e} Z_{li,n} I_{n,v} = E_{li,v}^I + E_{li,v}^S = E_{li,v}$$

$$li = \{1, \dots, N_e\}$$

matricialmente se puede expresar

$$(Z)_{N_e \times N_e} (I_v)_{N_e} = (E_v^I)_{N_e} + (E_v^S)_{N_e} = (E_v)_{N_e} \quad (3.64)$$

Los elementos $(E_v^I)_{N_e}$ son las componentes tangenciales del campo eléctrico incidente en las direcciones dadas por los vectores ρ asociados con cada lado, en los puntos de observación $p1, p2$ (asociados al lado li), y en el tiempo $t_v = v\Delta t$. Los elementos de $(E_v^S)_{N_e}$ son las componentes tangenciales del campo eléctrico dispersado en las direcciones dadas por los vectores ρ asociados con cada lado, en los puntos de observación $p1, p2$ (asociados al lado li), cuyas fuentes son los valores retardados de la densidad superficial de corriente, en puntos y tiempos determinados por el principio de causalidad.

La matriz $(Z)_{N_e \times N_e}$ es una matriz de interacción cuyos elementos son independientes del tiempo, y depende exclusivamente de la estructura del sistema y del proceso de testeo seguido (método de Garlekin [Harrington, 1967]). $(Z)_{N_e \times N_e} (I_v)_{N_e}$ es el campo instantáneo de reacción que fuerza a que se cumpla en cada instante la condición de contorno en toda la estructura. Debido al proceso de testeo seguido, la condición de contorno se cumple en promedio sobre toda la superficie. Si se hubiese seguido una técnica de adaptación por puntos se cumpliría de forma exacta, pero sólo en puntos aislados.

La solución de la ecuación integral EFIE se llevará a cabo mediante un proceso de solución escalonado en el tiempo [Miller and Landt, 1978], [Miller, 1988], [Gómez et al., 1992]. Supuestos conocidos los coeficientes $I_{n(i,s),p} \quad \forall p < v$ planteamos un sistema de N_e incógnitas imponiendo la ecuación (3.64) en el instante temporal v y por lo tanto obtendremos el valor $I_{n(i,s),v} \quad \forall n \in \{1, \dots, N_e\}$.

Efectivamente es posible, resolviendo la ecuación para cada intervalo temporal, calcular la corriente en cada punto de la superficie en un cierto instante en función de:

- (1) sus valores ya calculados en instantes anteriores determinados para cada punto, por el principio de causalidad

(2) de la excitación en cada punto en ese instante

El proceso de solución comienza en $v = 1$, ya que para $t \leq 0$ se supone el campo eléctrico incidente nulo al igual que las corrientes y cargas sobre la superficie, y se realiza hasta el instante temporal en que se quiera conocer la solución.

Estabilidad del algoritmo

La tendencia a la aparición de inestabilidades es un fenómeno común observado en los procesos de solución escalonados en el tiempo. Dichas inestabilidades pueden invalidar la solución [Tijhuis, 1984], [Rynne and Smith, 1990]. La causa de estas inestabilidades se discuten en [Smith, 1990], y se presenta un método para evitar su aparición (filtro de altas frecuencias).

En el algoritmo planteado, existe una causa propia para la aparición de las inestabilidades que no se da en otros procesos de solución escalonado en el tiempo. Esta causa es llamada la solución de la ecuación (3.64). Se demuestra en la práctica que la matriz $(Z)_{N_e \times N_e}$ obtenida está muy mal condicionada, y pequeñas desviaciones en el valor de $(I_v)_{N_e}$ pueden conducir a desviaciones de $(I_{v+1})_{N_e}$ muy grandes. Como la ecuación (3.64) se resuelve en cada instante temporal, la solución obtenida influye en instantes posteriores a través de $(E_v^S)_{N_e}$. El mal condicionamiento de la matriz $(Z)_{N_e \times N_e}$ conduce a un crecimiento muy rápido de los errores, y por tanto, a una solución muy inestable.

Para mostrar este hecho, en la Fig. 3.12, se ha representado la densidad de corriente superficial en un punto próximo a la esquina de una placa cuadrada de $2m$. de lado. La placa ha sido modelada con 72 triángulos y 96 lados internos, siendo la separación mínima entre los centroides de los triángulos de $0.157m$., y la separación mínima entre centros de lados internos $0.1666m$. La placa está situada en el plano YZ , y es iluminada con un campo eléctrico incidente dado por un pulso gaussiano. El pulso tiene un frente de onda plano, esta polarizado en la dirección \hat{z} , y se desplaza en la dirección $-\hat{x}$. El campo eléctrico incidente es descrito por la función (tomando $g = 1$ y las unidad temporal el tiempo que tarda la luz en recorrer un metro ($m - l$))

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = e^{-g^2(t-t_{max})^2} \hat{z}$$

Se compara la solución obtenida con el algoritmo anteriormente descrito (tomando $\Delta t = 0.16$ metros-luz, ya que demuestra ser el mas apropiado en las pruebas realizadas), con la obtenida con el algoritmo descrito en [Rynne, 1991] (evaluando los potenciales en el centroide de los triángulos). En este algoritmo se ha tomado $\Delta t = 0.11$, ya que se necesita que se cumpla la condición de Courant, $\Delta t = \Delta s/\sqrt{2}$, y además otros

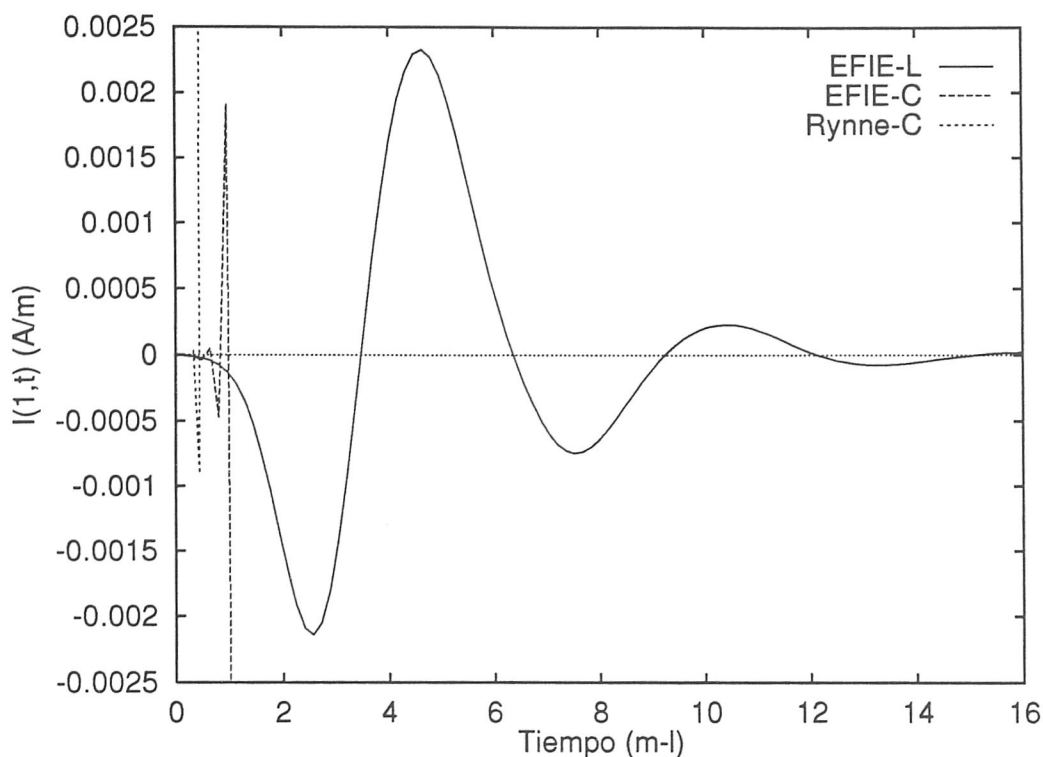


Figura 3.12: Densidad de corriente superficial sobre un punto próximo a una esquina de la placa centrando los potenciales en los centroides de los triángulos, comparada con una solución estable.

incrementos temporales demuestran ser menos apropiados. Como referencia se presenta la solución que se obtiene con la versión final del algoritmo desarrollado en esta tesis.

Se observa como las soluciones obtenidas fijando los potenciales en los centroides de los triángulos presentan fuertes inestabilidades a partir de los primeros instantes temporales. Con el procedimiento que ha sido presentado (en la sección 3.5.3) la solución parece ir mejor hasta algunos instantes temporales más avanzados que la que se presenta en [Rynne, 1991].

Evidentemente la solución que se obtiene con el algoritmo hasta ahora planteado no es válida en ningún sentido.

Nos podríamos plantear evitar las inestabilidades aplicando la técnica de descomposición de valores singulares [Canning, 1991] ó usar otros métodos tales como el filtro de altas frecuencias propuesto en [Smith, 1990], el método de relajación propuesto en [Tijhuis, 1991]. Estas técnicas actúan sobre la causa directamente (la solución), modificando la ecuación y haciéndola estable. Se debe evitar en lo posible esta forma de proceder ya que a veces [Salinas, 1991] la solución puede no representar convenientemente la solución real del problema. Lo ideal sería encontrar un algoritmo estable sin

necesidad de recurrir a actuar sobre la solución, y bien planteado con lo que tendríamos garantizada su convergencia [Rynne, 1986], (apéndice A). Hemos de plantear un procedimiento que nos conduzca a una matriz $(Z)_{N_e \times N_e}$ bien condicionada.

Se observa que la matriz $(Z)_{N_e \times N_e}$ es una matriz con pocos elementos distintos de cero en cada fila. Con el planteamiento desarrollado se tiene que hasta cinco elementos de cada fila n tienen un valor parecido (en el caso de que los triángulos adyacentes al lado n tengan algún lado frontera este número puede ser menor). Estos elementos son el situado en la diagonal, y los situados en las columnas correspondientes, a los cuatro lados (distintos de n) de los dos triángulos que tienen el lado común n . Aparecen también otros elementos distintos de cero, pero con un valor mucho menor comparado con el de los cinco elementos principales. El número de estos elementos distintos de cero, que tienen un valor menor a los principales, depende del orden de interpolación utilizado. La matriz del sistema no es por tanto una matriz diagonal dominante.

En la siguiente sección se plantea un procedimiento de testeo de la ecuación (3.3) que nos lleva a un condicionamiento mejor de la matriz.

3.5.4 Ecuación EFIE discretizada con un testeo alternativo

En general, los elementos de la matriz que nos determinan la solución de la ecuación EFIE, tienen un valor que está en función del modelado de la estructura y del proceso de testeo de la ecuación (3.3) seguido. Con el objeto de conseguir un buen condicionamiento de la matriz $(Z)_{N_e \times N_e}$ para cualquier estructura que se pretenda estudiar, vamos a seguir un proceso de testeo alternativo. Para ello nos vamos a basar en el planteamiento que se propone en [Rao and Wilton, 1991], y que coincide con el que se desarrolla en [Rynne, 1991] como alternativa a situar los potenciales en los centroides de los triángulos.

En las ecuaciones (3.29) y (3.31), haremos la aproximación de tomar el valor de las magnitudes \vec{A} y \vec{E}^i constantes sobre el par de triángulos T_m^\pm , pero evaluándolas en el centro del lado m (que definiremos como \vec{r}_m^e). Es decir, (3.29) y (3.31) se escriben

$$\langle \vec{E}^i, \vec{f}_m \rangle = \vec{E}^i(\vec{r}_m^e, t) l_m \left(\frac{\bar{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\bar{\rho}_m^{c-}}{2} \right) \quad (3.65)$$

$$\left\langle \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{f}_m \right\rangle = \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^e, t)}{\partial t} l_m \left(\frac{\bar{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\bar{\rho}_m^{c-}}{2} \right) \quad (3.66)$$

Con esto la ecuación (3.36) se puede reescribir

$$\vec{E}^i(\vec{r}_m^e, t) \left(\frac{\bar{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\bar{\rho}_m^{c-}}{2} \right) = [\phi(\vec{r}_m^{c-}, t_v) - \phi(\vec{r}_m^{c+}, t_v)] + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^e, t)}{\partial t} \left(\frac{\bar{\rho}_m^{c+}}{2} + \frac{\bar{\rho}_m^{c-}}{2} \right) \quad (3.67)$$

Para discretizar en este caso localmente la densidad superficial de corriente haremos

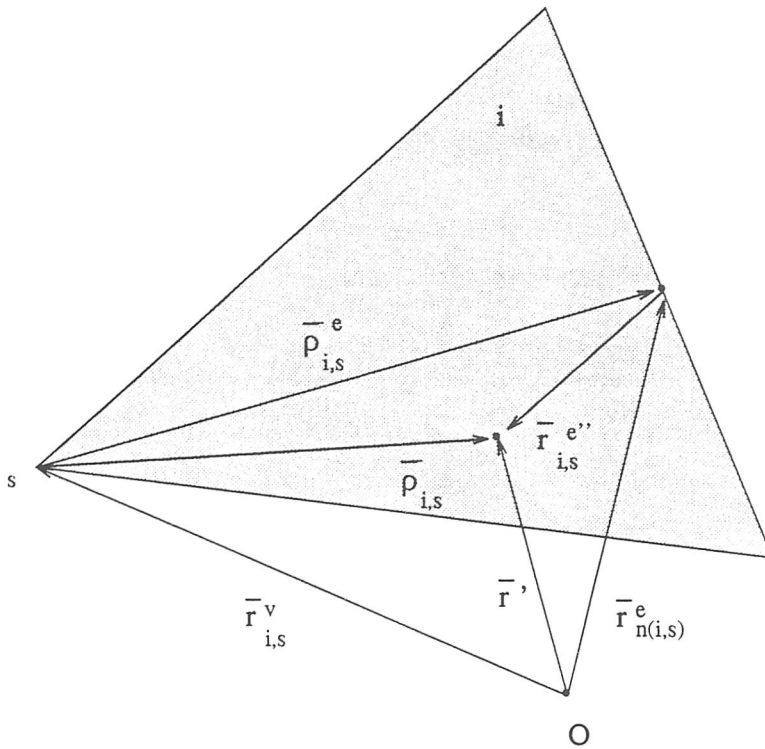


Figura 3.13: Coordenadas locales sobre un parche triangular tomando referencia en los centros de los lados.

uso de la Fig. 3.13. En ella se han definido los vectores

$$\vec{\rho}_{i,s}^e \equiv \vec{r}_{n(i,s)}^e - \vec{r}_{i,s}^v$$

$$\vec{r}_{i,s}^{e''} \equiv \vec{\rho}_{i,s}^e - \vec{\rho}_{i,s}^e$$

$$\vec{\rho}_{i,s}^e = \vec{r}' - \vec{r}_{i,s}^v$$

con esta notación las funciones base espaciales dadas en (3.40) quedan

$$\vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_{i,s}^{e''}) = \text{sgn}(i, s) \frac{l_{n(i,s)}}{2A^i} (\vec{\rho}_{i,s}^e + \vec{r}_{i,s}^{e''}) \tag{3.68}$$

y por tanto la derivada temporal de la densidad superficial de corriente expresada localmente se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t_j''} \vec{J}_{i,j}(\vec{r}', t_j'') = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{f}_{i,s}^e \vec{r}_{i,s}^{e''} \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right) I_{n(i,s),j+m} \tag{3.69}$$

A partir de Fig. 3.14, tomamos

$$R_{i,s}^{li}(\vec{r}_{i,s}^{e''}) = |\vec{r}_{li}^e - \vec{r}'| = |\vec{r}_{li}^e - \vec{r}_{n(i,s)}^e - \vec{r}_{i,s}^{e''}|$$

$$R_{li,n(i,s)} = |\vec{r}_{li}^e - \vec{r}_{n(i,s)}^e|$$

$$t'_{li} = v\Delta t - \frac{R_{i,s}^{li}(\vec{r}_{i,s}^{e''})}{c}$$

Definimos

$$j_{li} \equiv EMC\left(v - \frac{R_{li,n(i,s)}}{c\Delta t}\right)$$

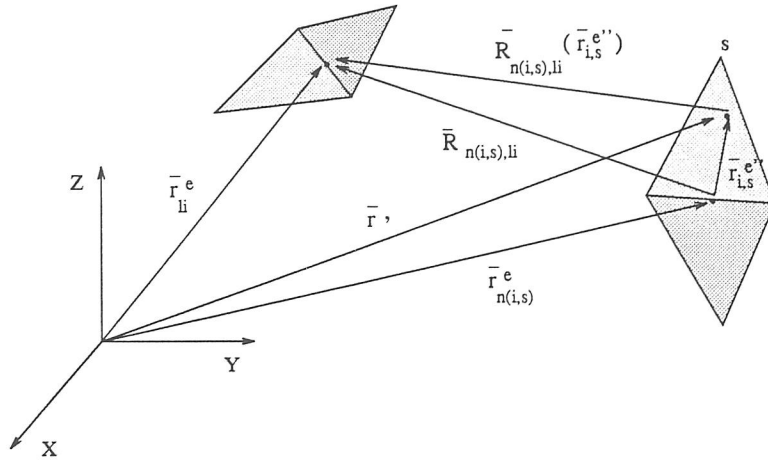


Figura 3.14: Relación entre parches fuente y parches campo tomando referencias locales en los centros de los lados.

La derivada temporal del potencial vector evaluado en los centros del lado li , \vec{r}_{li}^e , se puede poner como

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}_{li}^e, t_v) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(\vec{r}', t'_{li})}{R} ds' \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(\vec{r}', t'_{li})}{R} ds'_i$$

en la que introduciendo (3.69) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}_{li}^e, t_v) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{1}{R_{i,s}^{li}(\vec{r}_{i,s}^{e''})} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_i, e'') \left(\frac{\partial}{\partial t'_{jli}} B_j^m(t'_{jli}) \right) I_{n(i,s),j+m} ds'_i$$

y pasando la integral superficial dentro de las sumatorias

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}_{li}^e, t_v) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \int_{S'_i} \frac{\vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_i, e'') \left(\frac{\partial}{\partial t'_{jli}} B_{jli}^m(t_j li'') \right)}{R_{i,s}^{li}(\vec{r}_{i,s}^{e''})} ds'_i I_{n(i,s),j+m} \quad (3.70)$$

Definimos una nueva matriz de estructura

$$\vec{\mathcal{F}}_{li,i,s,m}^e \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_i'} \frac{\vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_i'') (\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j''))}{R_{i,s}^{li}(\vec{r}_{i,s}'')} ds_i'$$

(hay que señalar que ahora el primer subíndice de $\vec{\mathcal{F}}^e$ indica número de lado campo).

A partir de la cual (3.70) se simplifica a

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}_{li}^e, t_v) \approx \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{\mathcal{F}}_{li,i,s,m}^e I_{n(i,s),j+m} \tag{3.71}$$

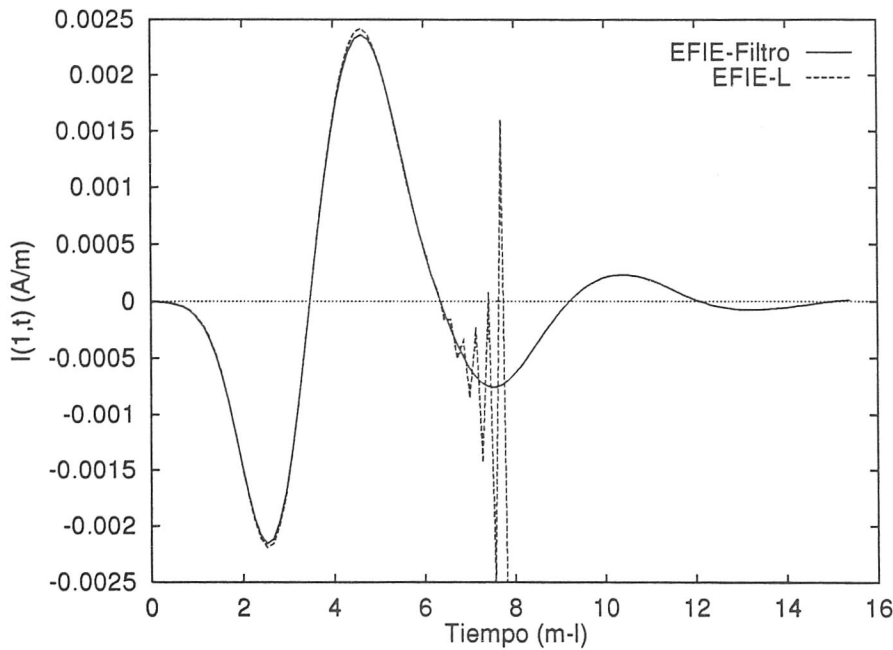


Figura 3.15: Solución obtenida para los coeficientes centrando las magnitudes vectoriales en los centros de los lados.

3.5.5 Inestabilidades, filtro de altas frecuencias

3.6 Comportamiento numérico

3.6.1 Consideraciones numéricas

3.6.2 Modelado

3.6.3 Incremento temporal

3.6.4 Orden de interpolacion temporal

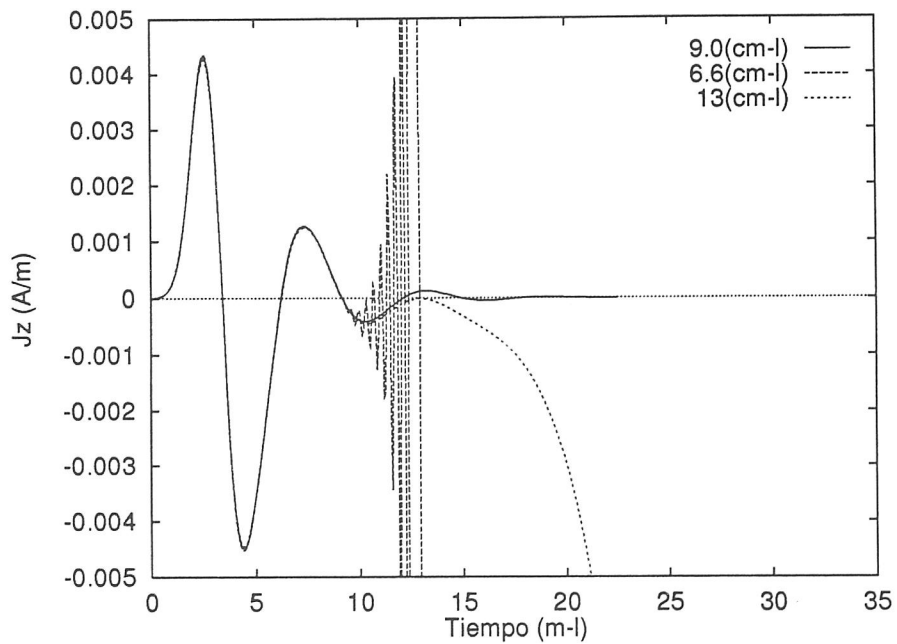


Figura 3.16: Estabilidad de la solución en función del incremento temporal utilizado.

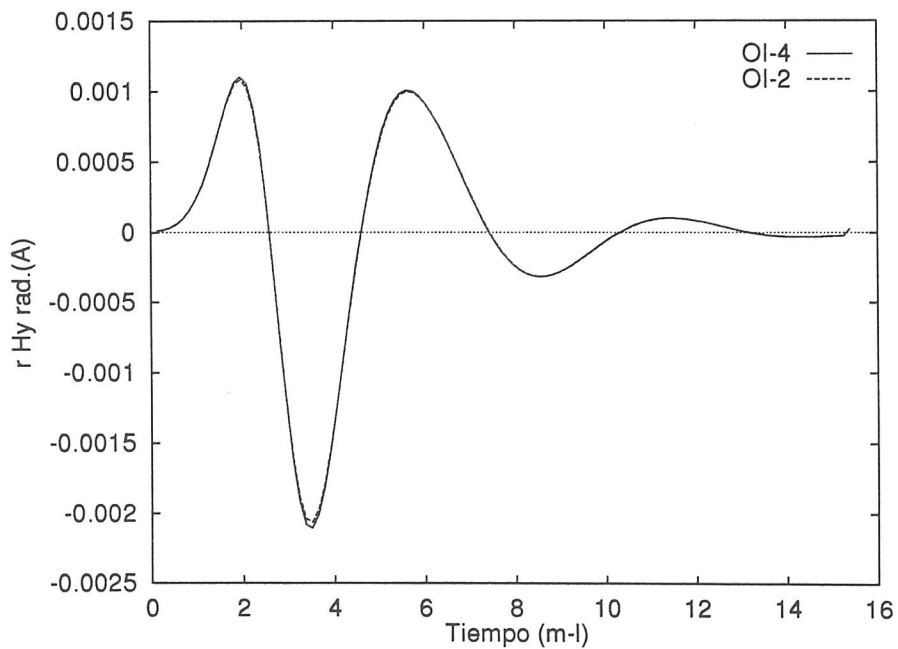


Figura 3.17: Campo de radiación en la dirección monoestática de la placa para distintos órdenes de interpolación.

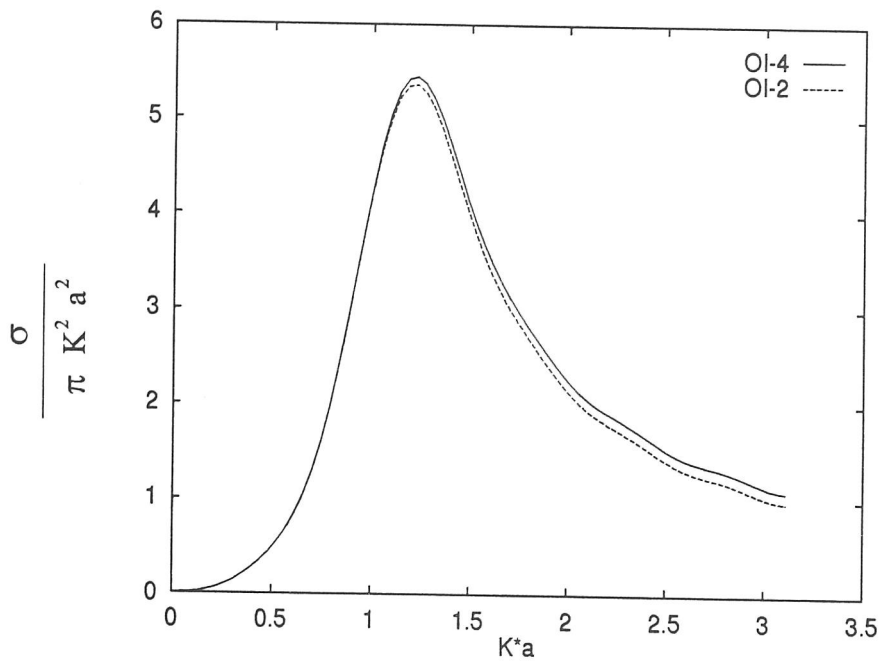


Figura 3.18: RCS normalizada en la dirección monoestática de la placa utilizando distinto orden de interpolación.

3.7 Cálculo del campo de radiación

El campo de radiación debido a las fuentes inducidas sobre la superficie conductora viene dado por ([Poggio and Miller, 1973a])

$$\vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{S'} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(\vec{r}', t')}{R} \wedge \hat{r} ds'$$

Haciendo la aproximación de tomar $R \approx r$ en la amplitud del campo y $R \approx r - r'_\phi$ en el argumento de la densidad superficial de corriente, podemos poner

$$r \vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{S'} \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{r - r'_\phi}{c}) \wedge \hat{r} ds'$$

siendo

$$r'_\phi = \vec{r}' \cdot \hat{r}$$

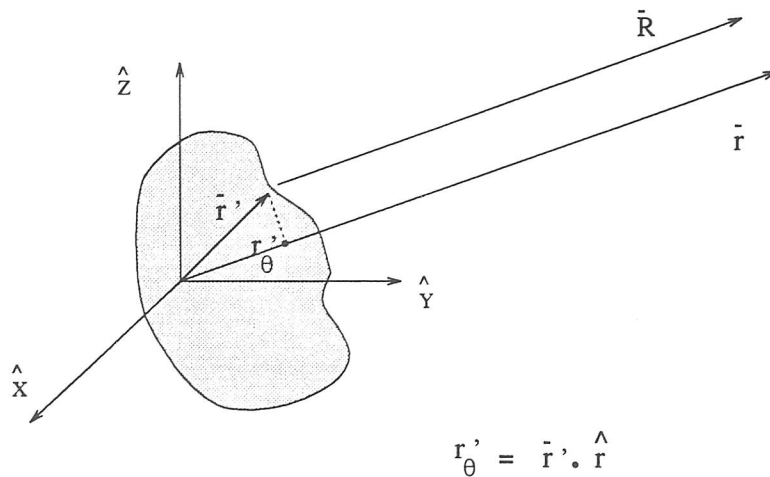


Figura 3.19: Coordenadas utilizadas para el cálculo del campo de radiación creado por las corrientes inducidas sobre una superficie conductora.

con objeto de tener una referencia para el origen de tiempos en el cálculo del campo de radiación, tomaremos el tiempo del primer punto de la estructura que empieza a radiar en la dirección \hat{r} . Este punto lo denotaremos por \vec{r}'_1 , y viene dado por

$$\vec{r}'_1 \in S' \quad \backslash r'_{1,\phi} \geq r'_{i,\phi} \quad \forall i \in \{1, \dots, N_e\}$$

El tiempo para el cálculo del campo de radiación será pues

$$t = v\Delta t + \frac{R_1}{c} = v\Delta t + \frac{(r - r'_{1,\phi})}{c}$$

para cualquier punto de la estructura se tiene

$$t' = t - \frac{R}{c} = v\Delta t + \frac{R_1}{c} - \frac{R}{c}$$

$$t' = v\Delta t + \frac{(r - r'_{1,\phi})}{c} - \frac{(r - r'_\phi)}{c} = v\Delta t + \frac{(r'_\phi - r'_{1,\phi})}{c}$$

De forma similar al proceso seguido en el cálculo numérico de la ecuación integrodiferencial, se desarrolla la densidad superficial de corriente localmente sobre los triángulos, y se ajusta la ecuación a los centros de los intervalos temporales de observación en el punto campo. Con esto el campo de radiación es

$$r\vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{\partial}{\partial t'_j} \vec{J}_{i,j}(\vec{r}_i^{e''}, t'_j) \wedge \hat{r} ds'_i$$

siendo

$$j = EMC\left(v - \frac{(r'_{1,\phi} - r'_{i,\phi})}{c\Delta t}\right)$$

usando la expresión de la densidad superficial de corriente (3.69) nos queda

$$r\vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \frac{\partial}{\partial t''_j} \vec{J}_{i,j}(\vec{r}_i^{e''}, t''_j) \wedge \hat{r} ds'_i$$

y por tanto

$$r\vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{S'_i} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \left[\vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_i^{e''}) \left(\frac{\partial}{\partial t''_j} B_j^m(t''_j) \right) I_{n(i,s),j+m} \right] \wedge \hat{r} ds'_i$$

operando podemos poner

$$r\vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \int_{S'_i} \left[\vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_i^{e''}) \left(\frac{\partial}{\partial t''_j} B_j^m(t''_j) \right) \right] \wedge \hat{r} ds'_i I_{n(i,s),j+m}$$

Definiendo (su cálculo se desarrolla en el apéndice B)

$$\vec{\mathcal{F}}_{i,s,m}^{rad} \equiv \frac{1}{4\pi c} \int_{S'_i} \left[\vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_i^{e''}) \left(\frac{\partial}{\partial t''_j} B_j^m(t''_j) \right) \right] \wedge \hat{r} ds'_i$$

nos queda

$$r\vec{H}^{rad}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{s=1}^3 \sum_{m=l}^{l+k} \vec{\mathcal{F}}_{i,s,m}^{rad} I_{n(i,s),j+m}$$

Debido a que el cálculo del campo de radiación se realiza a partir de las corrientes ya calculadas, el índice inferior de las sumatorias correspondientes a la interpolación lagrangiana se tomará:

- $l = -1$ si $k = 2$
- $l = -2$ si $k = 4$

A partir del campo \vec{H}^{rad} , se puede obtener el campo eléctrico de radiación teniendo en cuenta la relación de onda plana para los campos, esto es,

$$\vec{E}^{rad} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H}^{rad} \wedge \hat{r}$$

en donde \hat{r} es el vector unitario en la dirección de propagación del campo, y $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$. (se supone que es el vacío el medio que rodea al dispersor)

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo los objetivos concretos que se persiguen son:

- Validar el programa DOTIG4 y por tanto los algoritmos que lo fundamentan. Para ello se comparan los resultados obtenidos con los teóricos, experimentales o numéricos encontrados en la bibliografía.
- Mostrar la capacidad del análisis en el dominio del tiempo para poder separar efectos que ocurren en diferentes instantes de tiempo. Esta posibilidad está asociada a la relación lineal existente entre tiempo y distancia. Como consecuencia, eligiendo convenientemente la ventana temporal de observación, es posible aislar las diferentes contribuciones de las respuestas a magnitudes tales como:
 - RCS total [Gómez et al., 1991]
 - Intensidad de entrada en la alimentación de una antena [Booker et al., 1994]
- Estudiar la aplicabilidad del programa DOTIG4 para el cálculo de la impedancia de entrada de antenas de banda ancha.

Con objeto de dar una continuidad a la exposición y hacerla mas comprensible, este capítulo se divide en dos apartados. En el primero se exponen los resultados obtenidos en el estudio de la dispersión de OEMT por superficies conductoras. En el segundo se aplica el programa desarrollado a la resolución la EFIE para el estudio de la radiación de OEMT por antenas con una importante superficie, concretamente nos hemos centrado en el cálculo de la impedancia de entrada de antenas de banda ancha.

4.1 Dispersión de OEMT por superficies conductoras

4.1.1 Introducción

De una forma general se pueden clasificar las causas que contribuyen a la dispersión del campo electromagnético en especulares y no especulares [Thiele, 1982]. La dispersión especular es la que ocurre cuando la señal electromagnética incide normalmente sobre una superficie (caso monoestático) o cuando el ángulo de incidencia no normal es igual al de reflexión (caso biestático). Las contribuciones a la dispersión no relacionadas con las aportaciones especulares las denominaremos no especulares. Éstas están asociadas o bien a discontinuidades geométricas o a discontinuidades en la superficie de iluminación. Los bordes geométricos y contornos de zona iluminada-sombra, son ejemplos de contribuciones a la dispersión no especular.

La dispersión no especular puede a su vez dividirse en dos clases, las que corresponden a ondas que se propagan a lo largo de la superficie, y las que son debidas a una difracción directa en discontinuidades tales como bordes y puntas. En la primera clase, se encuentran las ondas deslizantes y viajeras (*travelling waves*). La onda viajera ocurre en la parte iluminada del blanco, y es debida a las corrientes superficiales inducidas por la componente tangencial del campo incidente a lo largo de la superficie. Si existe una discontinuidad en el objeto, la onda se refleja y devuelve energía hacia el radar [Knott et al., 1985].

Cuando una parte sustancial de la energía se propaga en la parte no iluminada del blanco, por ejemplo, debido a la suavización de los contornos de su geometría para evitar el efecto de la onda viajera, ésta se convierte en la denominada onda deslizante, que se propaga por la parte oculta de la geometría del cuerpo.

Así pues, las ondas viajeras ocurren en regiones iluminadas y las deslizantes en regiones de sombra. Al propagarse a través de la superficie iluminada, la onda viajera recoge energía de la onda incidente y puede aumentar la suya. La onda deslizante al estar restringida a zona de sombras, pierde energía cuando se propaga alrededor de la parte curvada y en sombras del blanco, y por tanto, mientras mayor es la longitud eléctrica del recorrido, más energía pierde. La influencia de la onda deslizante se hace despreciable para la mayoría de los cuerpos con tamaño mayor de una docena de λ [Knott et al., 1985].

La ecuación MFIE se adapta bien al estudio de superficies cerradas con contornos suaves y radio de curvatura no pequeños, por tanto, es adecuada para el estudio de la contribución a la radiación de la onda deslizante. Por otro lado, la ecuación EFIE, se adapta bien al estudio de cualquier tipo dispersión debido a que es aplicable tanto a superficies abiertas como cerradas, con cualquier radio de curvatura.

Puesto que las dos ecuaciones integrales planteadas tienen un dominio de aplicación diferente, vamos a realizar el estudio de la dispersión distinguiendo entre superficies cerradas y superficies abiertas. Para concluir el estudio de la radiación, veremos también un ejemplo para mostrar las posibilidades e interés de la solución de problemas en DT, nos referimos, a los blancos ocultos.

4.1.2 Superficies cerradas

En este apartado vamos a verificar e interpretar los resultados obtenidos, con el algoritmo desarrollado para resolver la EFIE, para las siguientes estructuras:

Esfera

Cilindro con terminaciones semiesféricas

Conoesfera

Esfera

La esfera es un objeto tridimensional simple, del que se conoce el valor teórico de su respuesta al ser excitada con una onda electromagnética. Esta será pues la primera prueba para validar el programa DOTIG4.

Según la Fig. 4.1, se ha modelado una esfera de un metro de radio $a = 1m.$, con 976 triángulos, 1464 lados internos, resultando una distancia mínima de separación entre centroides de $R_{Cmin} = 7.74cm.$ y una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 1.82.$ Esta estructura se ilumina mediante un pulso gaussiano con $g = 2(m - l)^{-1}$, y por tanto, con un contenido espectral máximo $K * a \approx 6.$ Se utiliza un incremento temporal $\Delta t = 8(cm - l).$

En la Fig. 4.2, podemos observar como la corriente inducida en la superficie de la esfera, prácticamente es debida al pulso incidente. La Fig. 4.3 representa el campo de radiación en back-scatter obtenido con DOTIG4 (utilizando la geometría anteriormente descrita), comparado con DOTIG2. Para el cálculo del campo dispersado usando la ecuación MFIE, se ha mallado la esfera con 24 bandas (624 parches) utilizando un incremento temporal $\Delta t = 10(cm - l)$, y un parámetro de pulso $g = 2$ ($\hat{E} = (0, 0, 1)$ $\hat{P} = (0, 1, 0)$). La única diferencia que se aprecia es que la ecuación MFIE recoge los máximos de la señal con unos valores ligeramente superiores a los dados por la ecuación EFIE. En el campo de radiación si se pueden ver claramente las distintas contribuciones. De la solución en el dominio del tiempo para los valores de campo de radiación puede comprobarse que, debido al retraso temporal con el que ocurren las diferentes contribuciones, éstas aparecen claramente diferenciadas. En efecto, en la Fig. 4.3, se observa un primer pico asociado a la reflexión especular seguido por un pulso

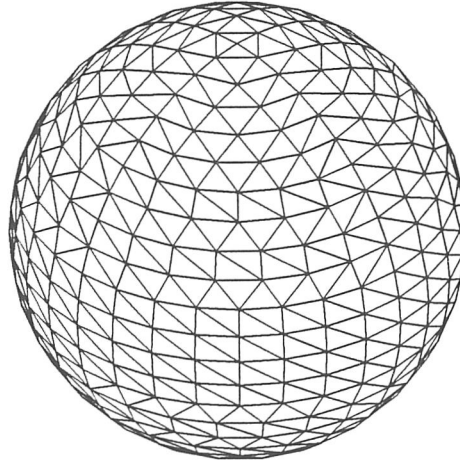


Figura 4.1: Modelado de una esfera usando parches triangulares.

negativo debido a las corrientes inducidas sobre la parte iluminada del blanco, y que vienen determinadas fundamentalmente por el término de óptica física de la ecuación integral. El segundo pico positivo del campo está claramente asociado al efecto de la energía radiada por la onda deslizante al emerger hacia el observador después de propagarse por la parte oculta de la esfera. Estas observaciones quedarán más claras del análisis de los resultados correspondientes al cilindro con tapas semiesféricas (y que será la próxima estructura que se trate).

La Fig. 4.4 representa la RCS monoestática de una esfera en función de su tamaño eléctrico. Se han comparado los resultados de DOTIG4 y DOTIG2 con los valores teóricos obtenidos a partir de la solución en serie de Mie. A altas frecuencias, la energía de las componentes espectrales del pulso incidente es pequeña. Esto nos produce los errores que se observan a valores de $K * a$ cercanos a 6. La solución podría mejorarse aumentando el parámetro g de la señal de excitación, o haciendo cero la señal en el tiempo a partir del instante temporal $14(m - l)$. Se ha preferido dejar así para dar una idea más realista del cómo afectan los errores numéricos a las componentes en frecuencia. Es evidente el excelente acuerdo entre los resultados a bajas frecuencias. Puede observarse que la RCS presenta un pico cerca de $K * a = 1$, y sigue oscilando alrededor del valor πa^2 correspondiente a la óptica geométrica. Estas oscilaciones se hacen más pequeñas a medida que el tamaño eléctrico de la esfera se hace mayor. En la Fig. 4.5, se ha dibujado la RCS en db. En ella se comparan además los resultados con los proporcionados por el algoritmo de diferencias finitas con conformación desarrollado en [González, 1994].

La interpretación de los resultados para la esfera se puede realizar en base a los dos tipos de contribuciones fundamentales que presenta a la dispersión. Debido a la suavidad de la superficie éstas contribuciones son: reflexión especular y onda deslizante.

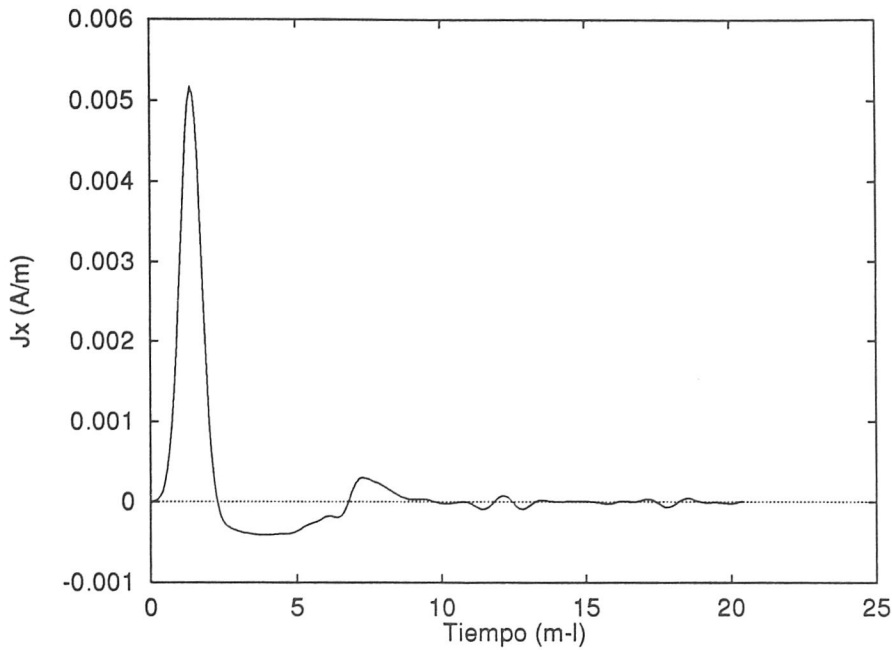


Figura 4.2: Componente dominante de la densidad de corriente inducida sobre el primer punto de impacto de la onda sobre la esfera.

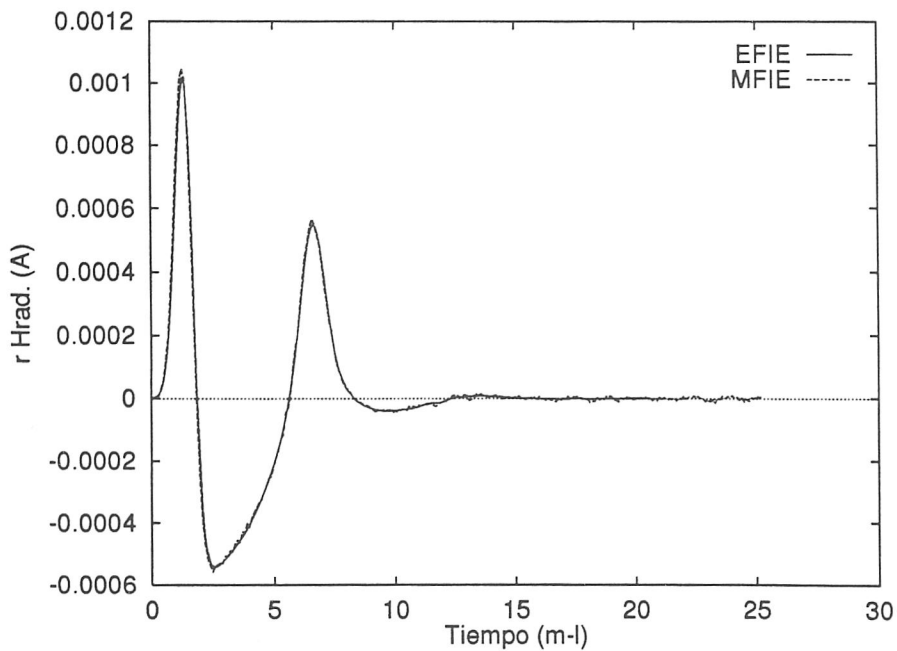


Figura 4.3: Campo de radiación en back-scatter en el dominio del tiempo dispersado por la esfera.

El concepto de onda deslizante permite interpretar las oscilaciones de la curva como

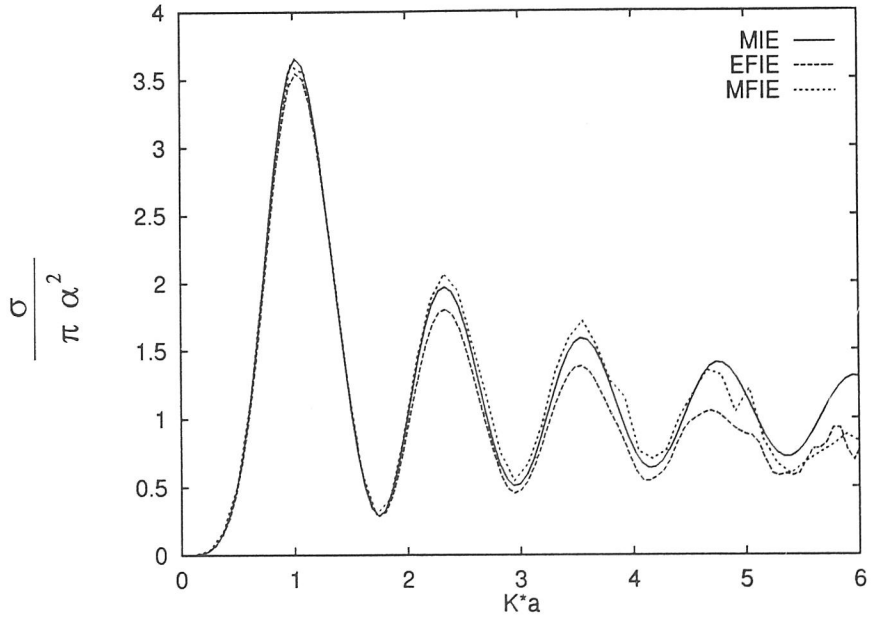


Figura 4.4: RCS monoestática de una esfera.

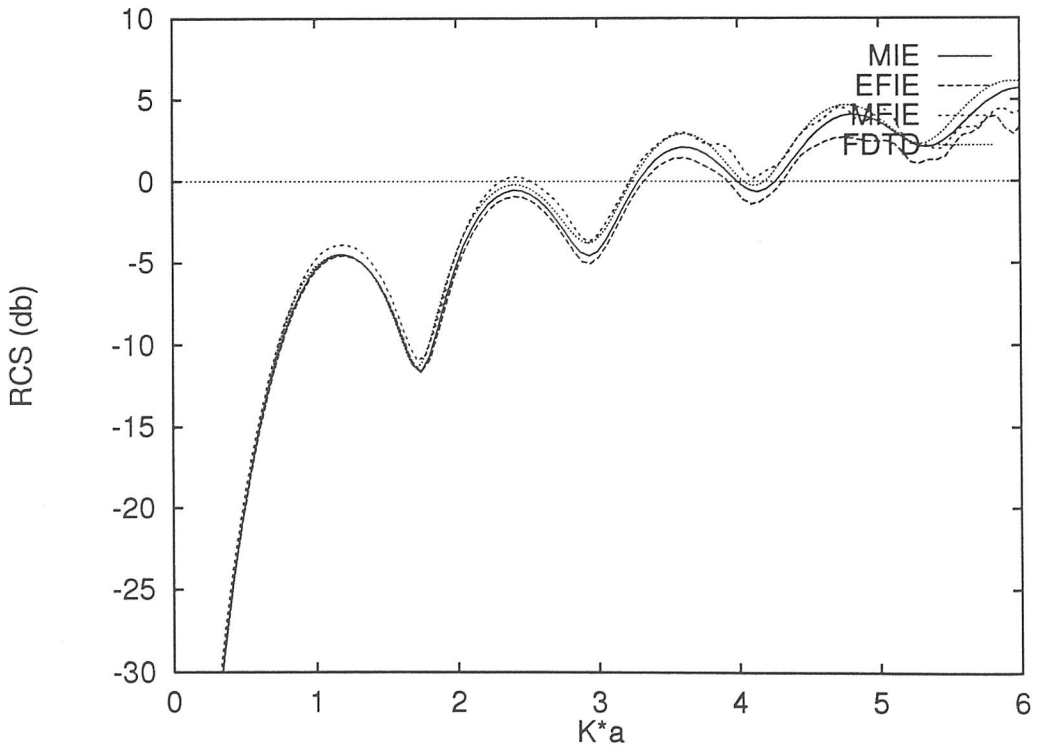


Figura 4.5: RCS en db monoestática para la esfera.

provocada por las dos ondas deslizantes viajando alrededor de la esfera en direcciones

opuestas. Dependiendo del tamaño eléctrico de la esfera, estas dos ondas deslizantes interfieren constructivamente o destructivamente con la correspondiente a la reflexión especular. Como consecuencia, la RCS oscila alrededor del valor determinado por la dispersión especular dada por la física óptica. Cuando la esfera se hace mayor, el valor de la oscilación decrece. Este hecho está asociado al decrecimiento en amplitud de las ondas deslizantes debido a la mayor atenuación al aumentar el camino eléctrico alrededor de la esfera.

Las ondas deslizantes recorren un camino adicional igual al diámetro de la esfera más la mitad de la circunferencia, es decir, una distancia adicional de $(2 + \pi) \cdot a$. El diagrama de interferencias debe tener pues un espacio de pico a pico dado por

$$\Delta K = \frac{2\pi}{(2 + \pi)a}$$

o en intervalos $K \cdot a$

$$\Delta K \cdot a = \frac{2\pi}{2 + \pi} = 1.22$$

En el diagrama de la Fig. 4.4, puede observarse que el espaciado entre picos es aproximadamente dicho valor. Concretamente el valor calculado entre la distancia del segundo y tercer pico es de $\Delta K \cdot a = 1.228$.

Cilindro con terminaciones semiesféricas (CSE)

En la Fig. 4.6, se representa el modelado mediante parches triangulares utilizado en el programa DOTIG4 para estudiar la dispersión de una OEMT por esta estructura. Las semiesferas poseen un radio $a = 1m.$ y el cuerpo del cilindro una longitud $L = 3m.$ Se han utilizado 744 triángulos, 1116 lados internos, resultando una distancia mínima de separación entre centroides de $R_{Cmin} = 12.72cm.$ y una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 1.87.$ Esta estructura se ilumina mediante un pulso gaussiano incidiendo frontalmente (impactando primero en la semiesfera), con $g = 1(m - l)^{-1},$ y por tanto, con un contenido espectral máximo $K * a \approx 3.$ Se utiliza un incremento temporal $\Delta t = 13(cm - l).$

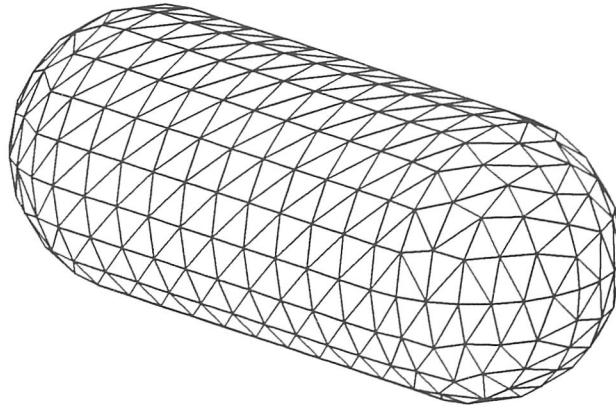


Figura 4.6: Modelado de un cilindro con terminaciones semiesféricas utilizando parches triangulares.

La Fig. 4.7 muestra los resultados de la evolución temporal del campo de radiación en la dirección monoestática, para diferentes dimensiones del CSE, obtenidos con la EFIE. A partir de estos resultados, se observa como para cada cilindro, el efecto de la onda deslizante aparece con distintos retrasos. Obviamente, este retraso es debido al mayor recorrido conforme L aumenta. Nuevamente queda claro como en el dominio del tiempo aparecen separados los efectos que ocurren en puntos distantes entre si, y por tanto, en tiempos diferentes. Así pues, los resultados en DT pueden utilizarse para evaluar la importancia realtiva de los distintos mecanismos de dispersión. En la Fig. 4.8 se comparan los campos dados por la EFIE y la MFIE para un CSE con una longitud $L = 4.$ Se aprecia, al igual que para la esfera, que las únicas diferencias residen en que la MFIE proporciona una amplitud para los valores externos ligeramente superiores a la EFIE. (para la MFIE se han utilizado 552 parches y un incremento temporal $\Delta t = 0.184).$

Las curvas de la Fig. 4.9 representan la RCS monoestática frente a $K * a.$ Como era de esperar, la RCS monoestática (para la incidencia frontal), tiende al valor de la RCS de la esfera πa^2 para frecuencias ópticas. Sin embargo, las oscilaciones alrededor de este

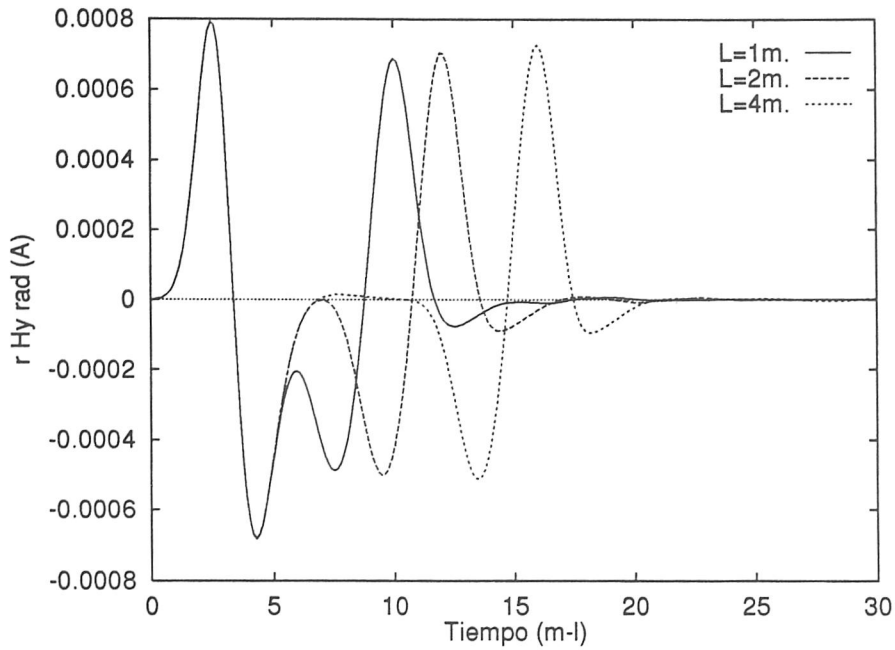


Figura 4.7: Campo dispersado por un cilindro con terminaciones semiesféricas para distintas longitudes del cilindro.

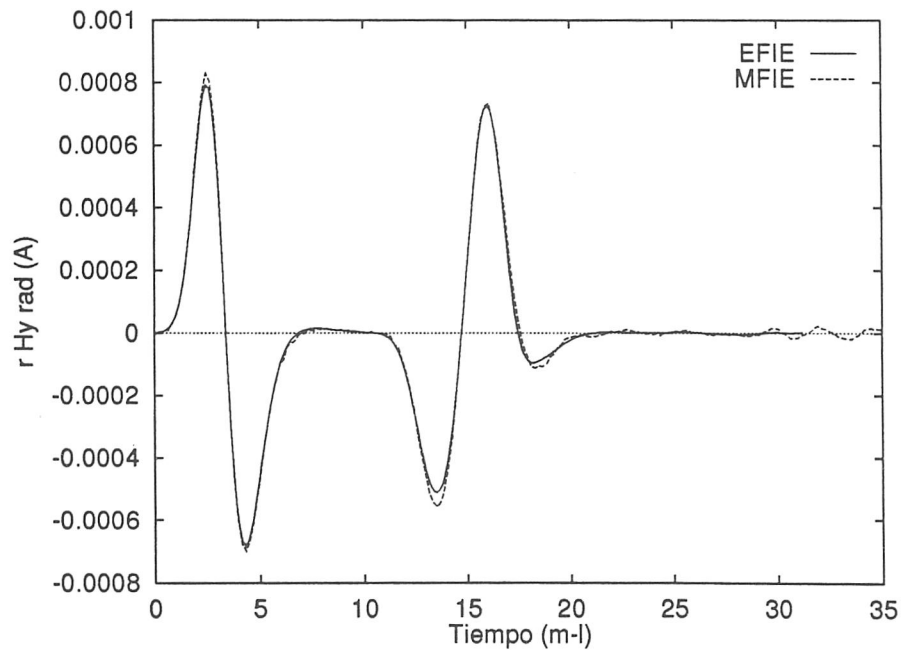


Figura 4.8: Campo dispersado por un CSE ($L = 4m.$) en back-scatter, soluciones obtenidas con la MEFIE y MFIE.

valor en la zona de resonancia es diferente y menos simétrica.

Las contribuciones al campo dispersado están asociadas a la reflexión especular, a las difracciones debidas a cambio de radio de curvatura en la unión de las semiesferas con el cuerpo del cilindro, y a las contribuciones de la onda deslizante al desplazarse por la parte oculta de la semiesfera posterior. Dado que el cambio de curvatura es suave, la contribución adicional a la reflexión especular proviene, fundamentalmente, de la onda deslizante.

Tomando como referencia la esfera del apartado anterior, en el caso del CSE, la distancia adicional recorrida por la onda deslizante con respecto a la debida a la reflexión especular, es de $(2 + \pi) \cdot a + 2L$, o expresándola en intervalos de $K \cdot a$

$$\Delta K \cdot a = \frac{2}{(2 + \pi) + \frac{2L}{a}} = \begin{cases} 0.88 & L = 1m. \\ 0.69 & L = 2m. \\ 0.48 & L = 4m. \end{cases}$$

Estos valores coinciden muy aproximadamente con la distancia entre picos para las diferentes curvas de la Fig. 4.9. En particular, la distancia entre los dos primeros picos para cada curva, en sentido creciente de L , son respectivamente: 0.89, 0.71, 0.49

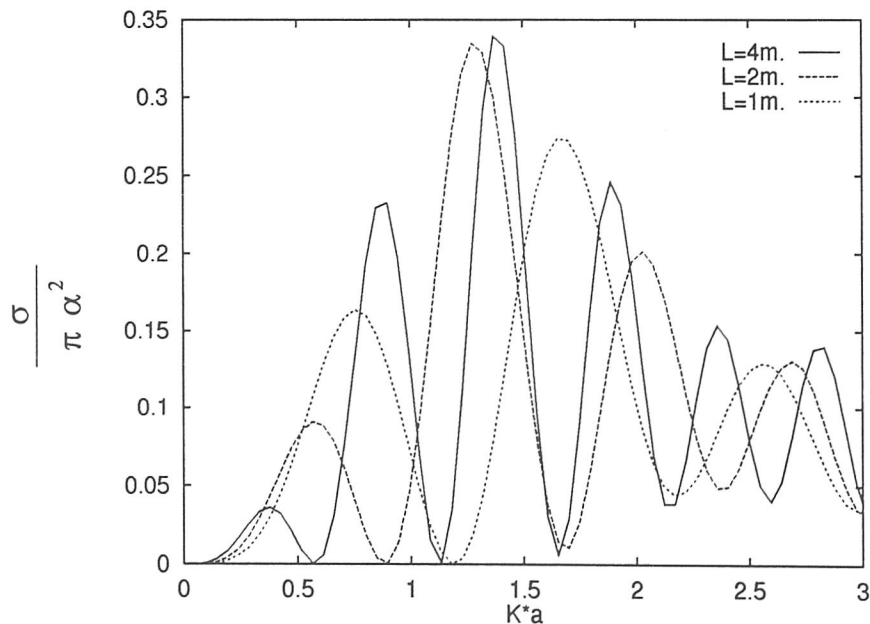


Figura 4.9: RCS monoestática del CSE para distintas longitudes del cilindro.

En la Fig. 4.10, se muestra el valor de la RCS en db. Para una longitud $L = 4m.$, se comparan los resultados dados por la MFIE, EFIE y los valores teóricos dados en

[Poggio and Miller, 1973b]. Se observa pues el excelente acuerdo entre estos resultados y los obtenidos con las ecuaciones integrales. Con objeto de que se pueda apreciar la influencia de la longitud del cilindro en la respuesta, se han dibujado también los resultados para $L = 2m.$ y $L = 1m.$

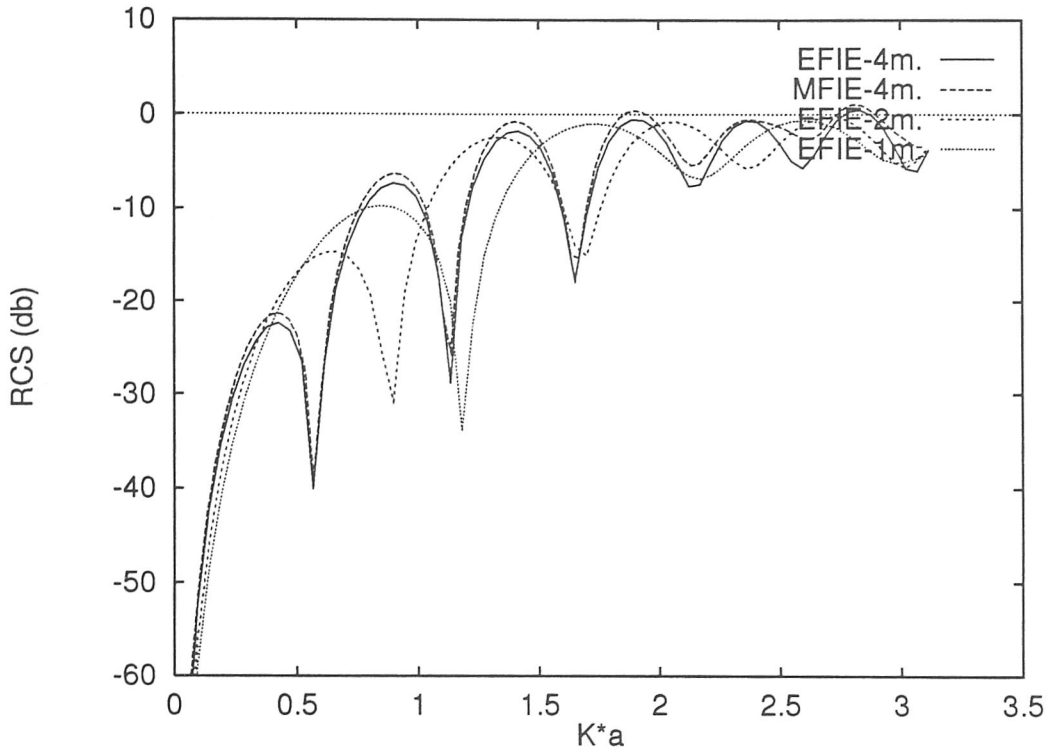


Figura 4.10: RCS en db del CSE

Conoesfera

La conoesfera, Fig. 4.11, presenta interés porque en esta geometría y para incidencia frontal, las contribuciones más importantes a la RCS son debidas a la difracción en la zona de cambio de curvatura, y principalmente a la onda deslizante por la parte oculta de la semiesfera [Knott et al., 1985]. La reflexión especular es muy pequeña. En la Fig. 4.11, se representa el modelado mediante parches triangulares utilizado en la EFIE para estudiar la dispersión de una OEMT por esta estructura. La semiesfera posee un radio $a = 1m.$ y el cuerpo del cono una longitud $L = 1.7320m.,$ por tanto, el ángulo de apertura del cono es de $30^\circ.$ Se han utilizado 2888 triángulos, 432 lados internos, resultando una distancia mínima de separación entre centroides de $R_{Cmin} = 11.1cm.$ y una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 3.46.$ Esta estructura se ilumina mediante un pulso gaussiano incidiendo frontalmente (impactando primero en la punta del cono), polarizado en el eje $Z,$ con $g = 1(m - l)^{-1},$ y por tanto, con un contenido espectral máximo $K * a \approx 3.$ Se utiliza un incremento temporal $\Delta t = 12(cm - l).$

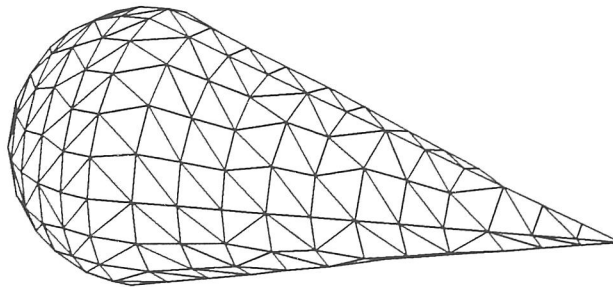


Figura 4.11: Modelado de una conoesfera mediante parches triangulares.

En la Fig. 4.12, se compara el valor del campo dispersado calculado mediante los programas DOTIG2 y DOTIG4, para una conoesfera de ángulo $30^\circ.$ Se incluye también la respuesta de una conoesfera de ángulo $34^\circ.$ Para la MFIE se ha utilizado un cono de las mismas características solo que el modelado posee 208 parches cuadrados (el incremento temporal se ha mantenido igual también). Nuevamente se observa como los resultados en DT pueden utilizarse para evaluar la importancia relativa de los distintos mecanismos de dispersión a partir de su relación con las dimensiones del cuerpo. En efecto, se aprecia en la Fig. 4.12, un primer intervalo temporal en que la reflexión es pequeña debido a que la contribución especular es escasa. Esta parte de la respuesta está seguida de la aportación pequeña de tipo física óptica y difracción en los puntos de cambio de curvatura. Finalmente, se observa la contribución principal de tipo onda deslizante. Esta contribución es semejante a la de la esfera o el CSE, debido a que, la parte posterior de la geometría es una semiesfera. En cuanto a la curva correspondiente a la respuesta de la conoesfera de $34^\circ,$ se aprecia como la reflexión en el primer intervalo

temporal es superior al ser mayor el ángulo del cono, a la vez, el resto de la respuesta se adelanta en el tiempo.

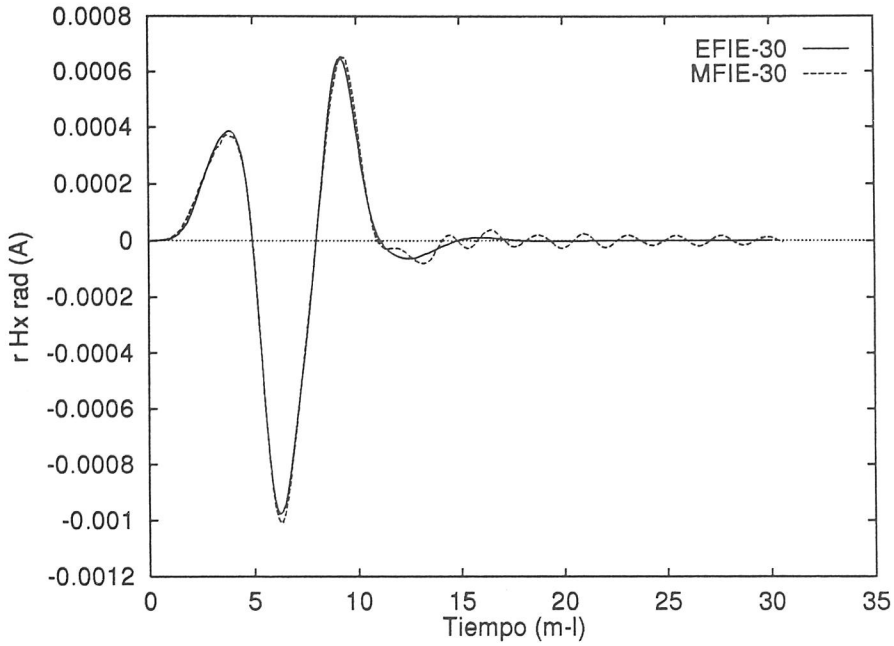


Figura 4.12: Campo de radiación en Back-scatter producido por una conoesfera de 30° .

La Fig. 4.13 contiene la RCS (db) monoestática en escala logarítmica obtenidos a partir de la Fig. 4.12

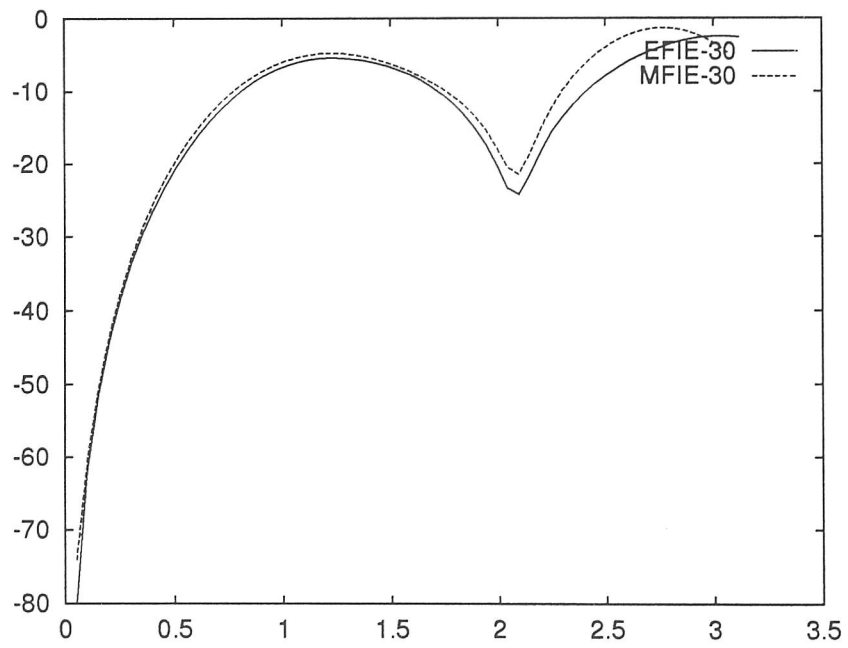


Figura 4.13: RCS (db) en la dirección monoestática de una conoesfera de 30° .

4.1.3 Superficies abiertas

Vamos a presentar a continuación los resultados numéricos obtenidos con el programa DOTIG4, para el estudio de la dispersión de OEMT por superficies conductoras abiertas tales como:

Placa cuadrada

Placa circular plana (Disco)

Semiesfera

Se prestará especial atención a la validación de los datos con otros métodos y a la interpretación de los mismos.

Placa cuadrada

La placa cuadrada ha sido ya utilizada en otros apartados (3.6 - 3.6.2, 3.6.3, 3.6.4) para mostrar el comportamiento numérico del algoritmo. En esta sección se van a estudiar la respuesta de esta geometría frente a distintos ángulos de incidencia, y se van a validar los resultados comparando con el algoritmo basado en el método de diferencias finitas (FDTD) desarrollado en [González, 1994].

Se ha modelado una placa cuadrada de $2m$. de lado según la Fig. 4.14. Está situada en el plano YZ , posee 200 triángulos (todos ellos iguales), 280 lados internos, y resulta una distancia mínima entre centroides $R_{Cmin} = 9.428cm$. Se ilumina mediante una onda plana con el campo eléctrico polarizado en la dirección del eje Z , con $g = 2(m - l)^{-1}$, $\Delta t = 9(cm - l)$, y propagándose en distintos ángulos de incidencia ($\vec{P} = (-1, 0, 0)$ incidencia normal, $\vec{P} = (-0.5, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ 60° respecto a la normal, y $\vec{P} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5, 0)$ 30° respecto a la normal).

En la Fig. 4.15, se ha dibujado el campo de radiación en la dirección $(1, 0, 0)$ ($\theta = 90^\circ$ $\phi = 0^\circ$), para los distintos ángulos de incidencia.

Las características más importantes de las respuestas presentadas en la Fig. 4.15 se pueden interpretar de la siguiente forma: Para incidencia no especular, al principio se recibe la señal devuelta por el borde que comienza a iluminarse la placa. La contribución al campo dispersado es realizada por la onda viajera, tiene la forma del pulso incidente y es de menor amplitud cuanto más nos alejamos de la incidencia normal. En el caso de incidencia normal, se recibe la radiación especular de toda la superficie, y por tanto, la amplitud del máximo es mayor. Al primer pulso positivo le sigue uno negativo debido a las corrientes establecidas en la placa. La primera parte negativa de la señal, pierde la forma del pulso gaussiano (antes de hacerse positiva) a causa de la reflexión directa de la

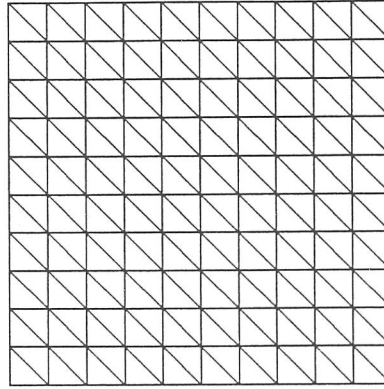


Figura 4.14: Modelado de una placa cuadrada con 200 triángulos.

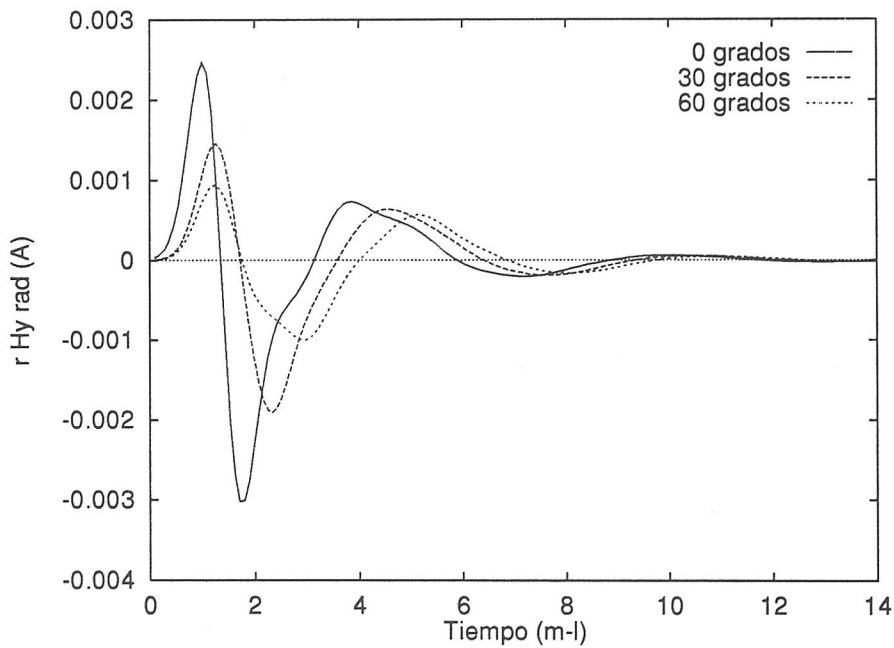


Figura 4.15: Campo de radiación en la dirección $(1, 0, 0)$ para ángulos de incidencia 60° , 30° y 0° respecto a la normal de la placa ($g = 2(m - l)^{-1}$).

corriente en el borde superior (respecto a la dirección del campo incidente) de la placa. El resto de la respuesta corresponde a las reflexiones de borde a borde de las corrientes inducidas en la placa. Utilizando un parámetro de pulso $g = 1(m - l)^{-1}$ (Fig. 4.16), la parte negativa del campo de radiación no pierde la forma del pulso incidente, dándose menos diferencia entre máximos para las distintas direcciones de iluminación.

A continuación, se comparan los resultados obtenidos con el programa desarrollado en esta memoria y los producidos mediante el algoritmo de diferencias finitas desarrollado en [González, 1994]. Para ello se ha modelado una placa con las sigu-

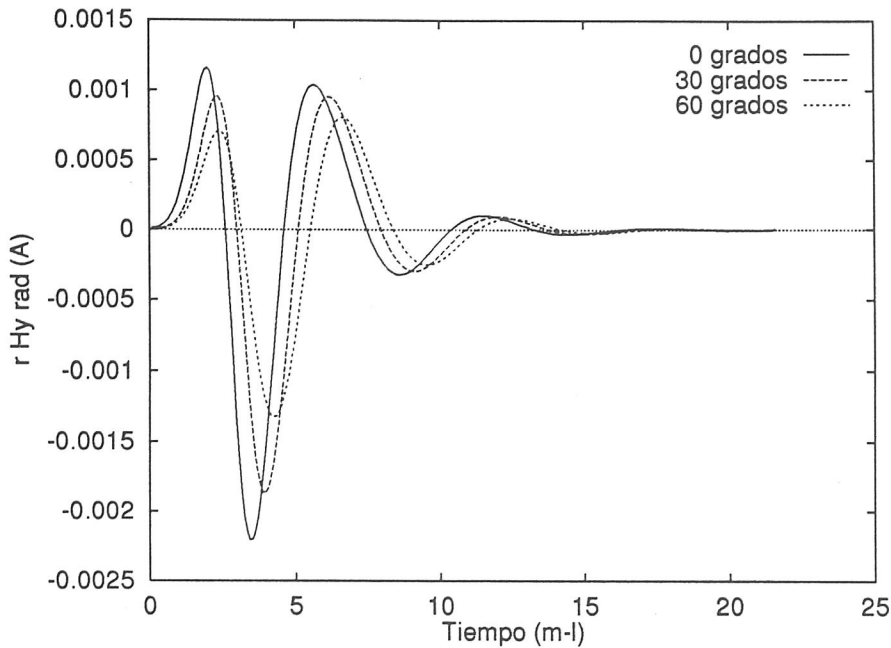


Figura 4.16: Campo de radiación en la dirección $(1, 0, 0)$ para ángulos de incidencia 60° , 30° y 0° respecto a la normal de la placa ($g = 1(m - l)^{-1}$).

ientes características: $1.4m$. de lado, 200 triángulos, $R_{Cmin} = 6.6cm$.. Está situada en el plano XY y el campo eléctrico incidente tiene la dirección del eje X . Se ha utilizado $g = 1.7(m - l)^{-1}$ y $\Delta t = 6.6(cm - l)$. En la Fig. 4.17, se muestra la corriente inducida en el centro de la placa; en la Fig. 4.18, se comparan los resultados dados por DOTIG4 y FDTD. Se aprecian ciertas diferencias en la amplitud de los máximos del campo de radiación. Estas diferencias pueden ser debidas a que la señal proporcionada por FDTD han sido muestreada con un incremento temporal aproximadamente cuatro veces menor. Como se ve en el caso de la placa circular, al usar un Δt menor la amplitud de los máximos se hace ligeramente mayor, y esto se traduce en que las altas frecuencias quedan mejor caracterizadas. En instantes temporales más avanzados, FDTD amortigua antes la señal, y la proporcionada por DOTIG4 se retrasa un poco. Estas últimas diferencias pueden ser debidas a que los métodos son esencialmente distintos (por ejemplo, hay que tener en cuenta que FDTD utiliza una placa de espesor igual a una celda del modelado, mientras que, DOTIG4 supone la superficie sin espesor).

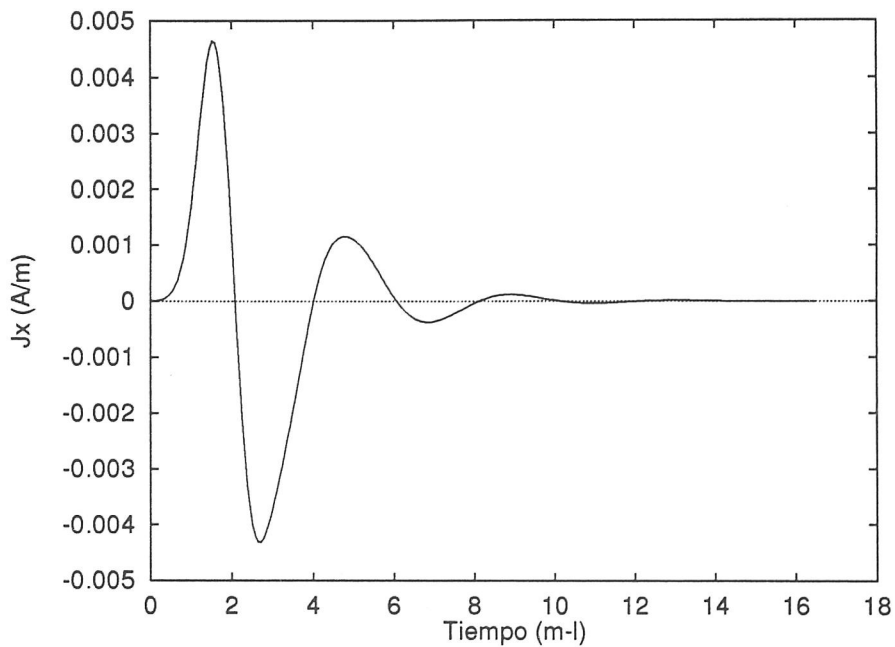


Figura 4.17: Corriente en el centro de una placa de 1.6 m . de lado iluminada con incidencia normal.

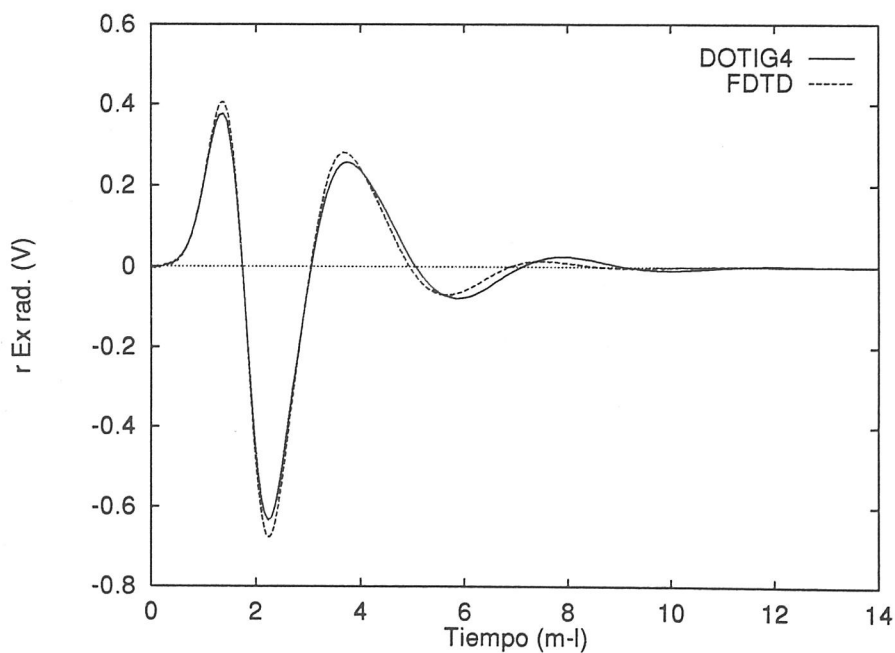


Figura 4.18: Comparación del campo de radiación en back-scatter producido por una placa de 1.6 m . de lado obtenido con DOTIG4 y FDTD.

Disco

El objeto que se va a estudiar en este apartadado es la placa circular plana (disco). Con esta estructura vamos a mostrar algunos aspectos importantes en la validez de los resultados obtenidos para superficies planas abiertas a altas frecuencias.

Se ha tomado un disco de un metro de radio ($a = 1m.$), situado en el plano XY , y se ilumina mediante una onda plana con el campo eléctrico polarizado en la dirección del eje Y , propagándose según el vector $(0, 0, -1)$. En la Fig. 4.19 se representa un disco modelado con 164 triángulos (5 bandas), 232 lados internos, dándose una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 1.95$, y resultando una distancia mínima entre centroides $R_{Cmin} = 8.6cm$.

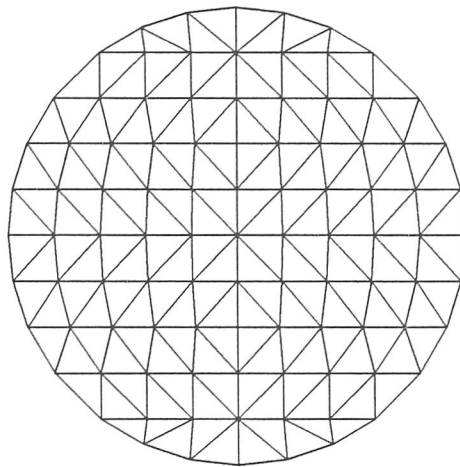


Figura 4.19: Modelado de un disco.

Para mostrar como influyen los parametros g y Δt en los resultados obtenidos a altas frecuencias, se ha realizado pruebas utilizando dos mallados con un mayor número de triángulos al anterior. En uno de estos mallados se ha modelado el disco con 324 triángulos (7 bandas), se da una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 2.71$, 464 lados internos, resultando una distancia mínima entre centroides $R_{Cmin} = 5.3cm.$; y el otro mallado se caracteriza por: $N_t = 516$ (9 bandas), $N_e = 748$, $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 2.4$, $R_{Cmin} = 4.54cm$.

En la Fig. 4.20 se ha representado la densidad superficial de corriente en el centro de la estructura para diferentes los diferentes mallados (d5 modelado con 5 bandas, d7 modelado con 7 bandas), usando parámetros g y valores del incremento temporal Δt distintos. Concretamente se ha utilizado $\Delta t = 9(cm - l)$ para las curvas $d5 - g1$ y $d5 - g2$, $\Delta t = 5.5(cm - l)$ en $d7 - g2$. Se observa como para un mismo g , al usar un incremento temporal menor, se recoge mejor la información en los máximos. En la Fig. 4.21, se dibuja la componente H_x del campo de radiación, para distintos mallados, y se observa también como usando incrementos temporales menores se recoge mejor la amplitud de los máximos.

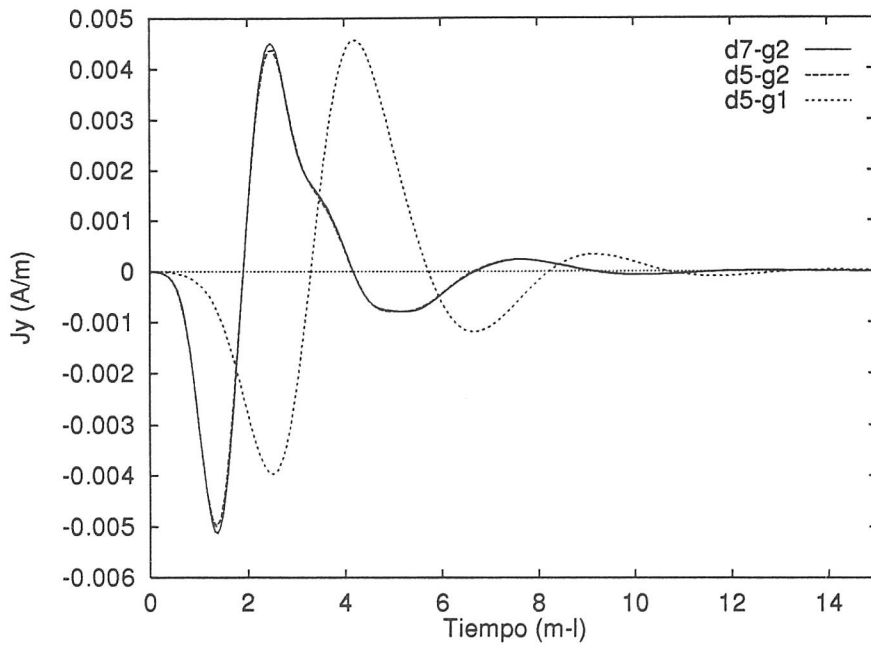


Figura 4.20: Densidad superficial de corriente en el centro del disco para distintos parámetros g y distintos modelados.

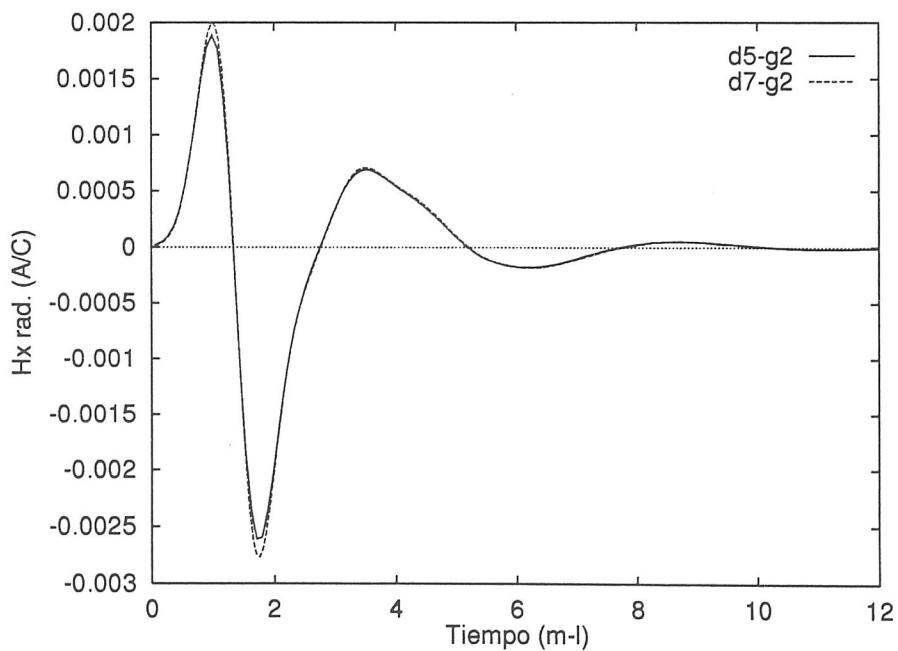


Figura 4.21: Campo de radiación en back-scatter producido por el disco para diferentes mallados.

Se han realizado pruebas con los distintos mallados para otros parámetros g , uti-

lizando desde $g = 1(m - l)^{-1}$ hasta $g = 7(m - l)^{-1}$, y no se detectan grandes diferencias en las señales que se obtienen en el dominio del tiempo. Sin embargo se ha observado que al calcular la sección recta de radar, RCS, en back-scatter a altas frecuencias, se obtienen resultados más amortiguados cuanto mayor es el incremento temporal utilizado para muestrear la señal en el tiempo. Se pone de manifiesto que un mismo mallado alimentado con distintos parámetros g , da una misma respuesta en frecuencia si se utiliza el mismo Δt . Ocurre igual si se utilizan diferentes mallados y se mantiene el incremento temporal. Sin embargo, utilizando un mismo mallado, pero usando distintos Δt , se obtienen mejores resultados cuanto menor es el muestreo temporal. Esto es, la respuesta en frecuencia depende sólo del Δt utilizado para caracterizar la señal en el tiempo. Este hecho se ha observado también para otras figuras tales como la placa cuadrada. Los resultados obtenidos con orden de interpolación 2 y 4 para los mismos casos, señalan que este parámetro no influye en la respuesta en frecuencia.

Lo comentado en el párrafo anterior se pone de manifiesto en la Fig. 4.22. En dicha figura, se compara la RCS en back-scatter normalizada obtenida numéricamente, con los resultados experimentales dados por Hey en [Hey et al., 1956] y extraídos de [Bowman et al., 1987] pp. 569 (el disco utilizado en las medidas experimentales tiene un grosor de 0.00355λ). Se han dibujado con puntos las medidas experimentales, y con líneas los resultados numéricos. Estos últimos han sido para los casos: mallado de 5 bandas con $g = 2(m - l)^{-1}$ y $\Delta t = 9(cm - l)$, mallado de 7 bandas con $g = 5(m - l)^{-1}$ y $\Delta t = 5.5(cm - l)$, mallado de 9 bandas con $g = 5(m - l)^{-1}$ y $\Delta t = 4.6(cm - l)$.

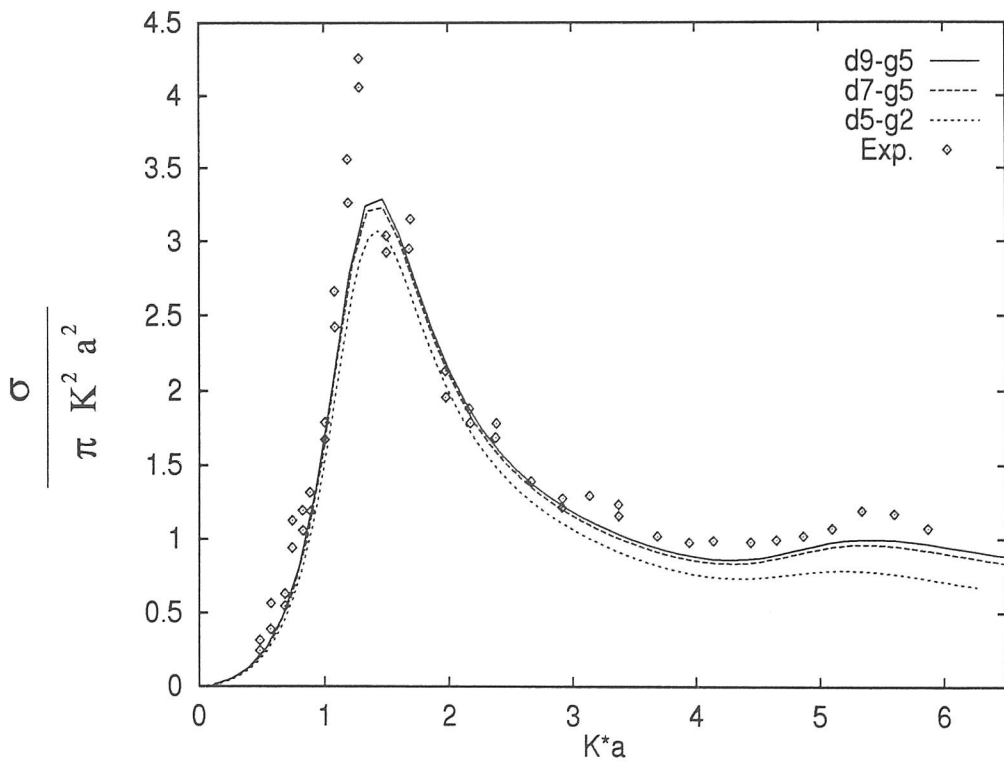


Figura 4.22: Valores experimentales y numéricos de la RCS en back-scatter normalizada para un disco.

Semiesfera

Como ejemplo de superficie abierta curvada vamos a tratar la semiesfera. Para ello, según la Fig. 4.23 se ha modelado una semiesfera de radio $a = 1m$. con 488 triángulos (con una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 1.82$) y 716 lados internos, resultando una distancia mínima entre centroides $R_{Cmin} = 7.74cm$.

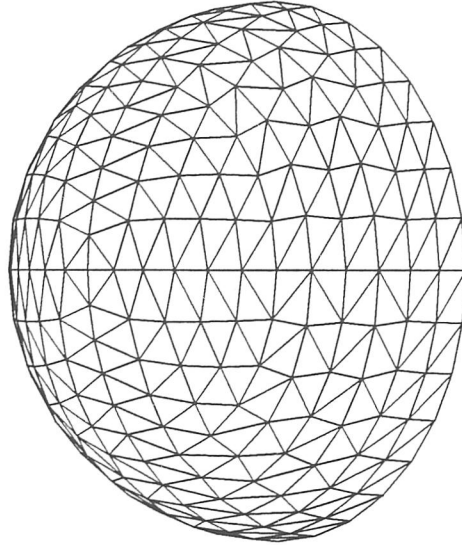
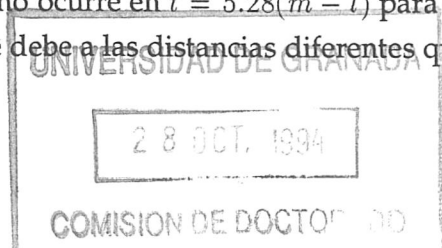


Figura 4.23: Modelado de una semiesfera.

El objeto está situado con su eje de simetría coincidiendo con el eje X , y se ilumina con una onda plana con el campo eléctrico polarizado en la dirección del eje Z y el vector de propagación en la dirección negativa del eje X . Se ha utilizado un parámetro $g = 2(m - l)^{-1}$ y un incremento temporal $\Delta t = 8(cm - l)$. Se comparan los resultados obtenidos para la semiesfera con los producidos por una esfera con las mismas características, salvo que mallada con el doble de triángulos.

En la Fig. 4.24, se representa la corriente inducida en un punto sobre la superficie de la semiesfera comparada con la que se induce en una esfera. En los primeros instantes temporales, antes de que aparezcan los efectos de los bordes frontera, las curvas coinciden. A partir del instante temporal $2(m - l)$, las diferencias se pueden explicar fácilmente teniendo en cuenta que en el borde abierto de la semiesfera las corrientes rebotan bruscamente. Para la esfera la densidad superficial de corriente no sufre esta reflexión y se propaga sobre la parte no iluminada de forma continua. Estos efectos se pueden apreciar también sobre el campo de radiación en back-scatter representado en la Fig. 4.25. La bajada negativa en la semiesfera se debe a la fuerte dispersión producida por la frontera de la semiesfera. El segundo máximo ocurre en $t = 5.28(m - l)$ para la semiesfera y $t = 6.64(m - l)$ para la esfera. Esto se debe a las distancias diferentes que



tienen que recorrer las ondas atravesando la parte no iluminada de los dos objetos.

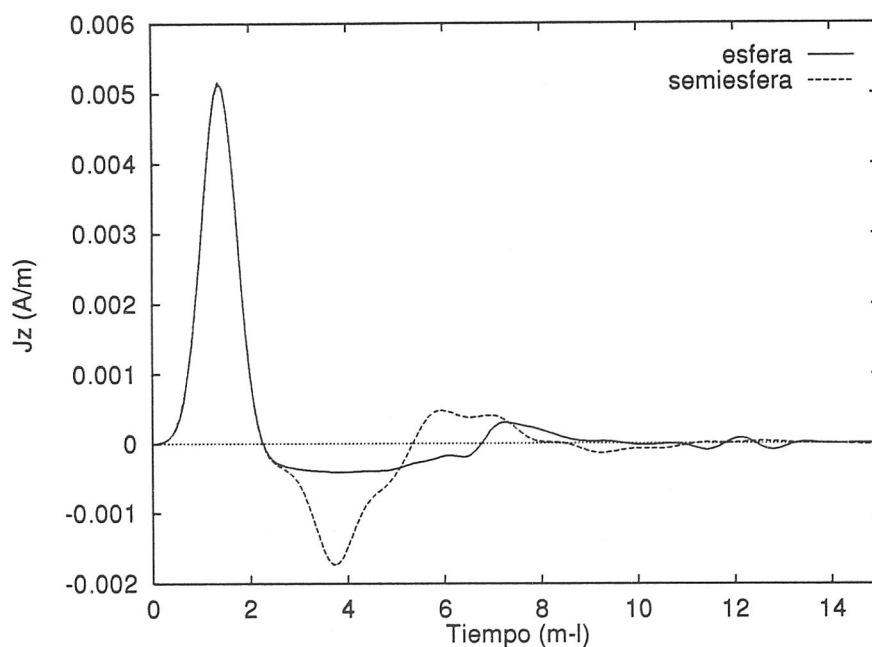


Figura 4.24: Densidad de corriente superficial sobre el primer punto de impacto de la onda con la semiesfera comparada con la de la esfera.

Los campos de radiación en el dominio de la frecuencia en back-scatter se han dibujado en la Fig. 4.26. Se observa como las amplitudes de resonancia son mayores, y además éstas ocurren a longitudes de onda que son aproximadamente el doble que para la esfera (debido a que el tamaño de la semiesfera es aproximadamente es la mitad del de la esfera). El que las amplitudes del campo sean mayores para la semiesfera, se explica a partir del hecho de que los filos y discontinuidades abruptas, tienen una gran importancia en la amplitud de los campos de radiación.

Las diferencias en el campo de radiación se hacen más pronunciadas en otras direcciones de observación. Esto se puede apreciar en las Figs. 4.27 y 4.28, en las que se ha representado el campo en la dirección 90° respecto a la de iluminación, y el campo en forward-scatter respectivamente. Las curvas correspondientes a la esfera y a la semiesfera se separan más entre sí cuanto más nos alejamos de la dirección en back-scatter.

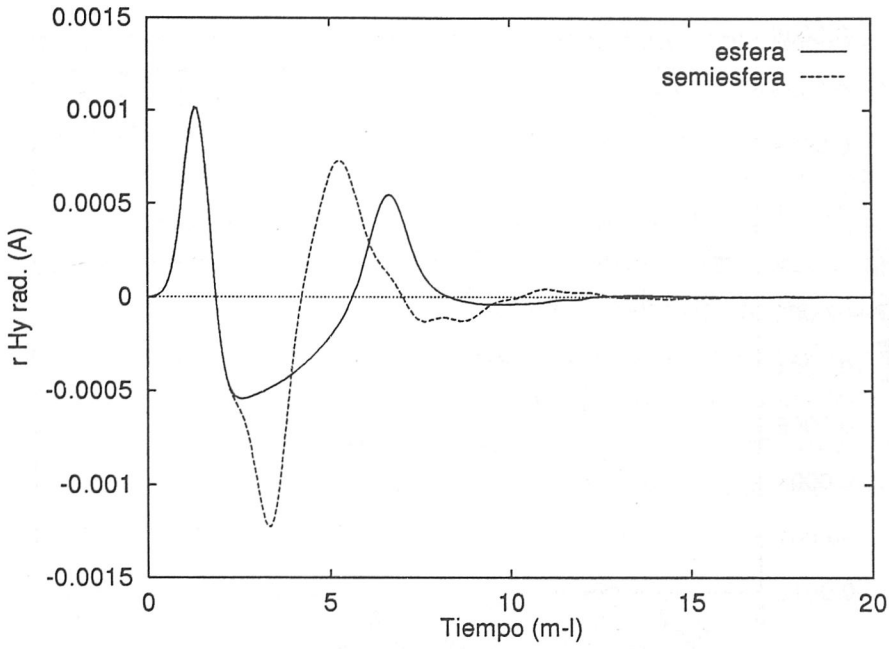


Figura 4.25: Campo de radiación en back-scatter para le esfera y la semiesfera en el dominio del tiempo.

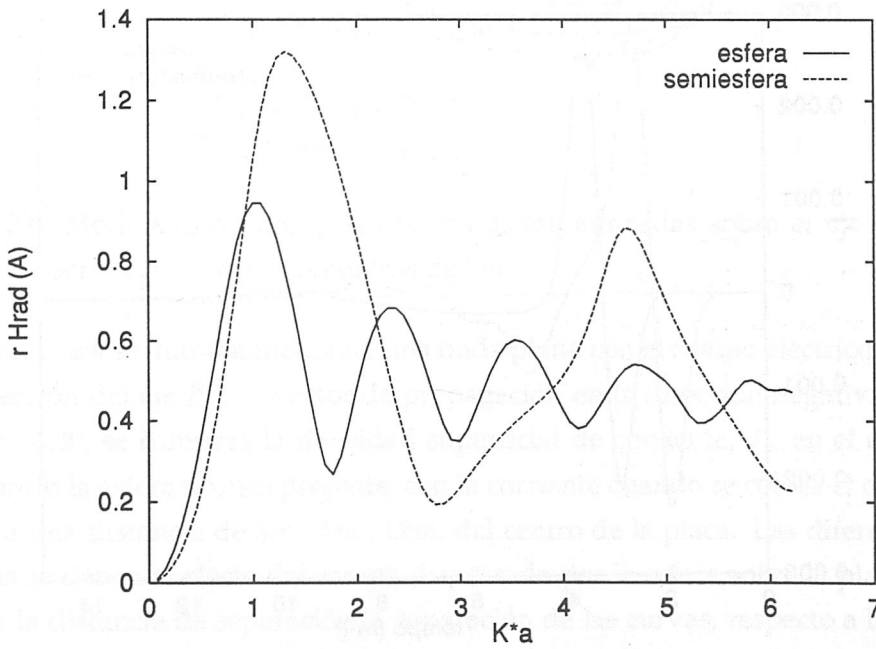


Figura 4.26: Transformada de Fourier de la Fig. 4.25.

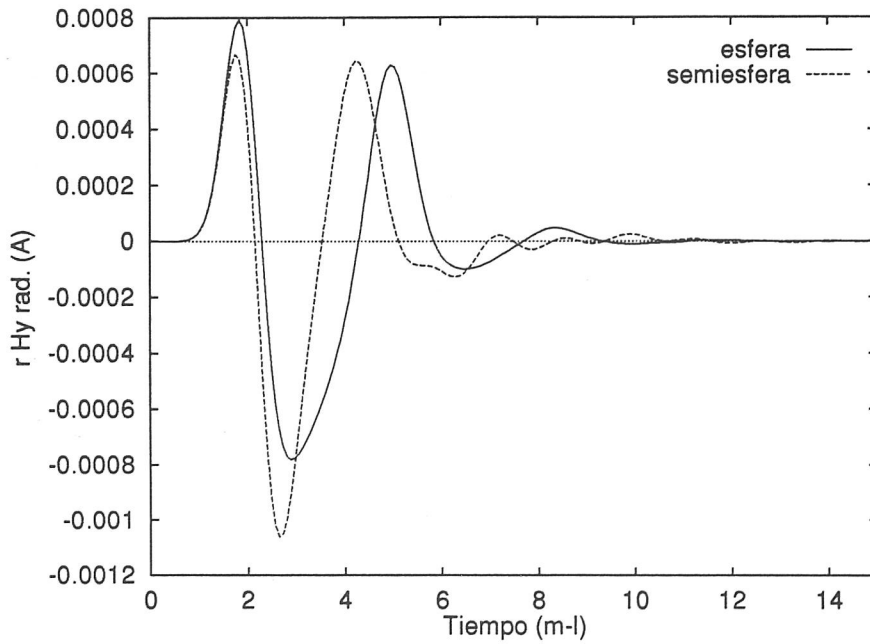


Figura 4.27: Campo de radiación observado a 90° con respecto a la dirección de iluminación.

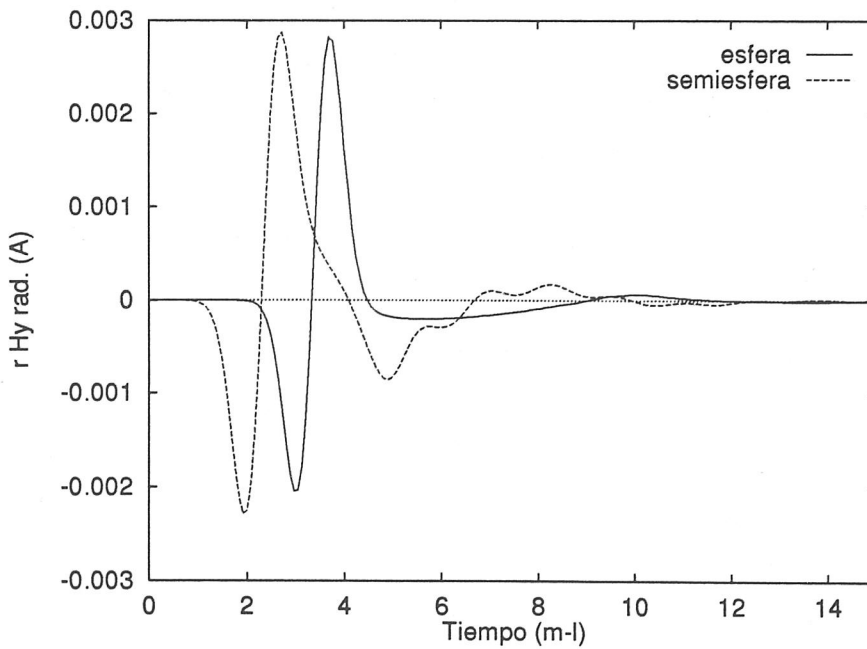


Figura 4.28: Campo de radiación en forward-scatter de la esfera comparado con el de la semiesfera.

4.1.4 Blancos ocultos

En este apartado vamos a tratar un ejemplo que nos permite apreciar una de las ventajas (la fácil interpretación de los resultados), del análisis del problema de la interacción de una OEMT con estructuras conductoras en el dominio del tiempo.

El ejemplo que se va a estudiar es la dispersión electromagnética transitoria por una estructura formada por una placa y una esfera. Se ha elegido una placa de $2m$. de lado situada en el plano YZ , con su centro en el origen de coordenadas, y se ha añadido una esfera de $1m$. de radio con su centro en el punto de coordenadas $(-3, 0, 0)$. Como se muestra en la Fig. 4.29, la placa ha sido modelada con 72 triángulos (todos ellos iguales) y 96 lados internos, obteniéndose una distancia mínima entre centroides $R_{Cmin} = 0.157m$. La esfera se ha mallado dividiéndola en 12 bandas con 256 triángulos (dándose una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 1.78$) y 384 lados internos, resultando una distancia mínima entre centroides $R_{Cmin} = 0.147m$.

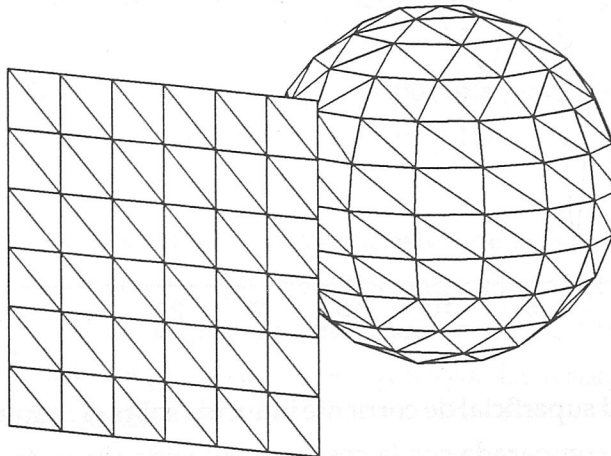


Figura 4.29: Modelado de una placa y una esfera alineadas sobre el eje X con una distancia de separación entre sus centros de $3m$.

La estructura se ilumina mediante una onda plana con el campo eléctrico polarizado en la dirección del eje Z y el vector de propagación en la dirección negativa del eje X . En la Fig. 4.30, se compara la densidad superficial de corriente, J_z , en el centro de la placa cuando la esfera no está presente, con la corriente cuando se coloca el centroide de la esfera a una distancia de $3m$., $5m$., $12m$. del centro de la placa. Las diferencias entre las curvas se deben al efecto del campo dispersado por la esfera sobre la placa. Cuanto menor es la distancia de separación la separación de las curvas, respecto a la respuesta de la placa aislada, se produce en instantes temporales anteriores. Se observa que cuanto mayor es la separación entre las figuras menores son las diferencias (debido a que al aumentar la distancia los campos radiados por la esfera se atenúan). Fijándonos en la

curva correspondiente a una separación de $12m.$ entre los centros de las estructuras, se vé claramente como después de hacerse cero la densidad de corriente en la placa, a los $22(m-l)$, se producen de nuevo unas oscilaciones en la corriente. Esto es debido, a que al estar separado el centro de la esfera $12m.$ de la placa, el pulso llega a su superficie a los $11(m-l)$, por tanto, el campo que radia la esfera no va a interaccionar con la placa hasta aproximadamente el instante temporal $22(m-l)$.

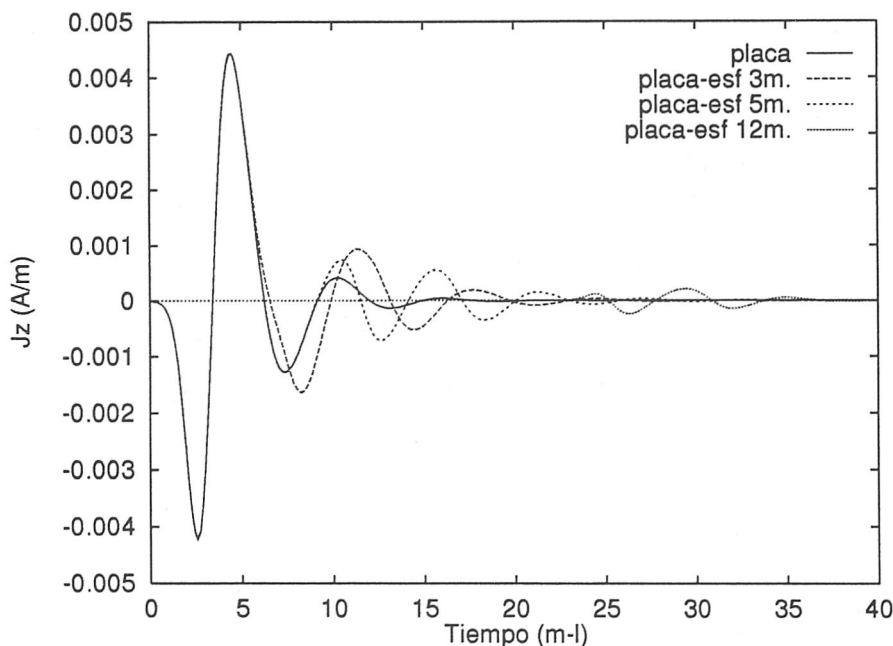


Figura 4.30: Densidad superficial de corriente inducida sobre el centro de la placa cuando no se coloca la esfera comparada con la corriente inducida situando la esfera a $3m.$, $5m.$ y $12m.$

En la Fig. 4.31 se representa el campo de radiación en back-scatter producido por los mismos casos representados en la Fig. 4.30. De nuevo se puede apreciar como el análisis en el dominio del tiempo suministra una información fácil de interpretar en base a los distintos efectos que tienen lugar.

La Fig. 4.32 representa la RCS monoestática para los casos tratados en la Fig. 4.31, excepto el supuesto en el que se coloca la esfera a $3m.$. En estos ejemplos en que la geometría total es más complicada no resulta fácil, a partir del análisis en DF, determinar la influencia de los diferentes mecanismos de dispersión en el resultado final. La RCS de las figuras compuestas presenta oscilaciones en torno al valor de la RCS que presenta la placa aislada. Se observa que cuanto mayor es la separación entre los objetos se dan resonancias a intervalos menores de frecuencia. Cuando la esfera está separada $5m.$ de la placa, el primer mínimo de resonancia ocurre a una longitud de onda de

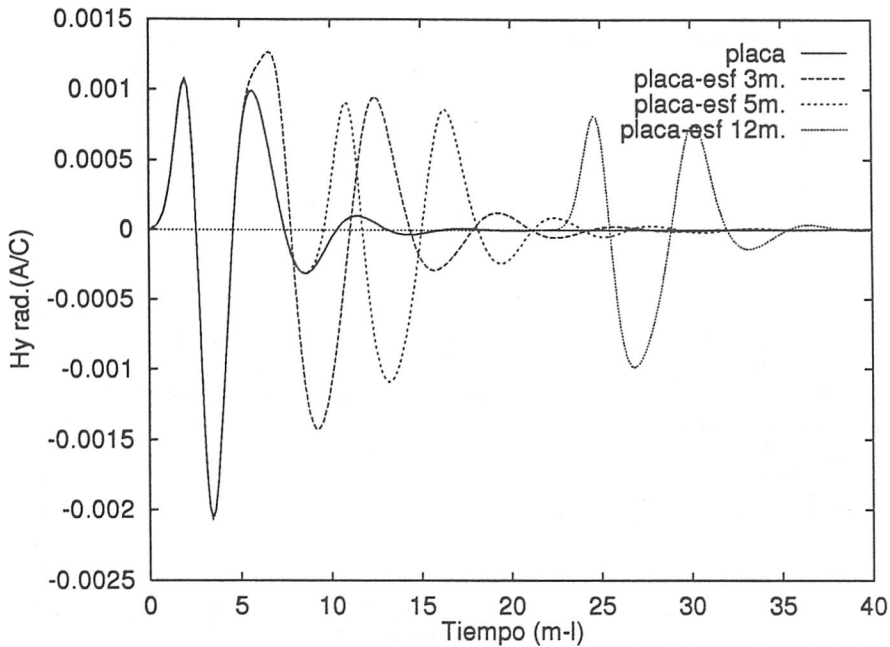


Figura 4.31: Campo de radiación en back-scatter por una placa aislada comparado con el producido cuando se coloca una esfera a 3m., 5m. y 12m.

aproximadamente $6m.$, que es el tamaño característico de la estructura. El resto de los mínimos ocurren a incrementos de longitudes de onda que son el doble del tamaño de la estructura ($\Delta\lambda = 2D_{\text{caract}}$). En el caso de una separación de $12m.$, ocurre igual, sólo que en esta curva al ser la longitud característica mayor las resonancias se observan a intervalos de frecuencia menores.

En el caso de iluminar con una onda propagándose en la dirección positiva del eje X , se obtiene una respuesta parecida, en el sentido, de que se pueden ver las distintas contribuciones a los campos de radiación por las diferentes partes de la estructura. En este caso, véase la Fig. 4.33, el campo de radiación en back-scatter recoge el campo dispersado por la esfera y a continuación el dispersado por la placa, con un tiempo de retraso que depende de la separación de las figuras.

El teorema de reciprocidad ([Welch, 1960],[Cheo, 1965]), para campos variables en el tiempo en el vacío, nos dice que el campo es el mismo si las direcciones del campo incidente y del campo de radiación se intercambian. con objeto de comprobarlo numéricamente en la Fig. 4.34 se ha dibujado el campo de radiación en forward-scatter cuando se ilumina la estructura en las direcciones $(1,0,0)$ y la $(-1,0,0)$, estando las figuras separadas $12m.$ En la curva (a) la onda interacciona primero con la placa y se observa en la dirección $(-1,0,0)$, y en el caso (b) la onda interacciona primero con la esfera y se observa en la dirección $(-1,0,0)$. Los resultados obtenidos coinciden, como el teorema de

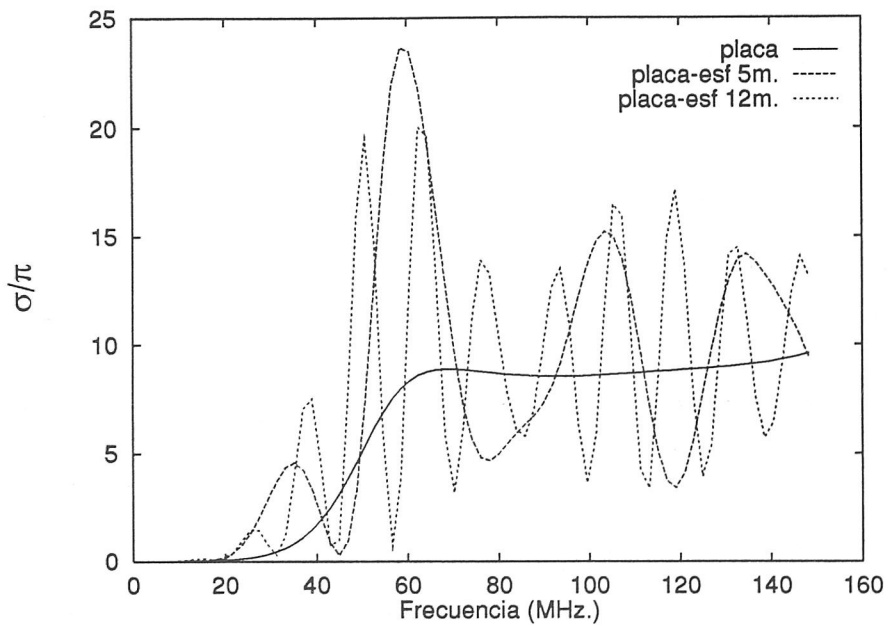


Figura 4.32: RCS monoestática de la placa comparada con la obtenida al colocar una esfera a 3m., 5m. y 12m.

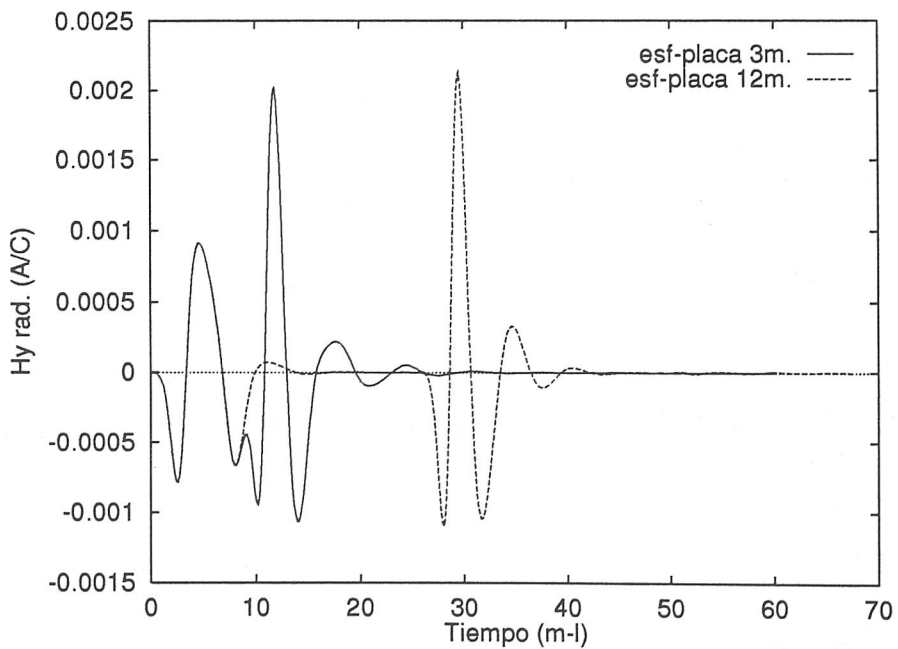


Figura 4.33: Campo de radiación en back-scatter iluminando primero la esfera para una distancia de separación entre la esfera y la placa de 3m. y 12m.

reciprocidad predice, y no se dan diferencias entre ellos apreciables al representarlos.

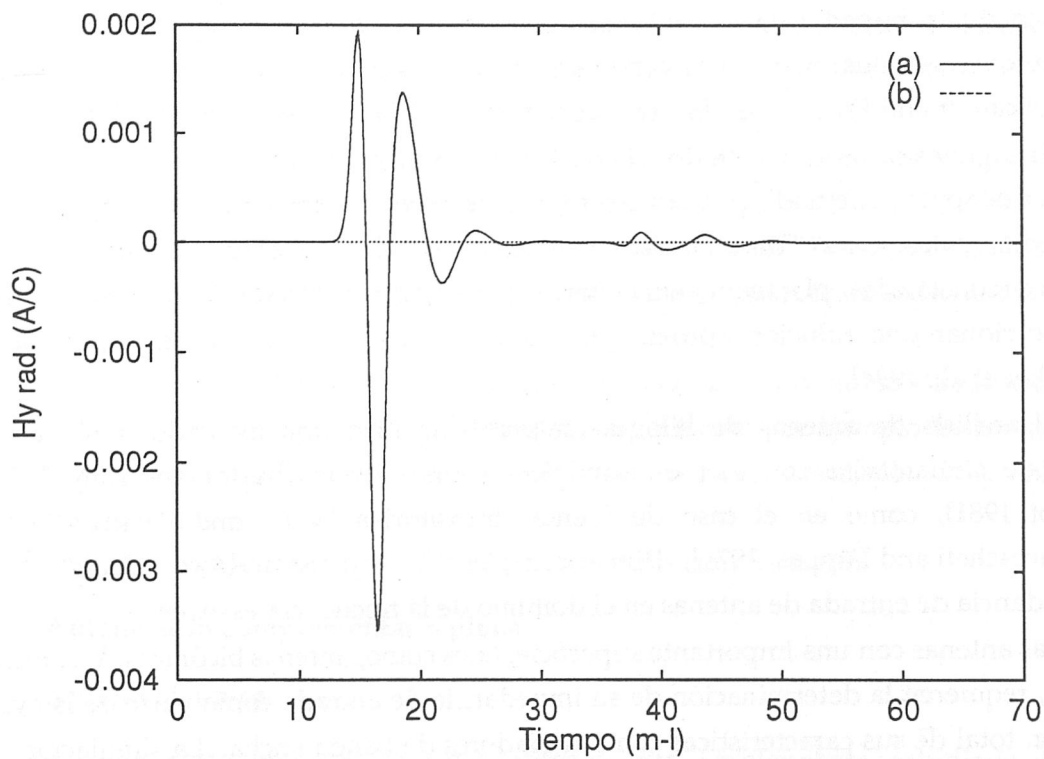


Figura 4.34: Campo de radiación en forward-scatter iluminando en las direcciones $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

4.2 Impedancia de entrada de antenas de banda ancha

4.2.1 Introducción

La impedancia de entrada de una antena es un parámetro de interés considerable, ya que, por ejemplo, para asegurar la máxima transmisión o recepción de potencia, la impedancia del circuito conectado a la antena, y impedancia de entrada de la antena deben estar acopladas [Johnson and Jasik, 1984], [Elliot, 1981], [Kraus, 1950].

Excepto para los tipos más sencillos de configuraciones de antenas, el cálculo teórico de la impedancia de entrada no es una tarea fácil, y para muchos tipos de antenas es usualmente más conveniente hacer una medida experimental directa [Schelkunoff and Friss, 1952], [Stutzman and Thiele, 1981], [Shen et al., 1983].

En algunos casos los resultados obtenidos con aproximaciones analíticas, como "Conformal Mapping Method", pueden estar en desacuerdo con los obtenidos con métodos experimentales, como "Time Domain Reflectometry" (TDR) [Lambert et al., 1994]. En estas circunstancias, planteamientos alternativos como los métodos numéricos pueden proporcionar una solución aproximada, válida para comparar con otros resultados [Booker et al., 1994].

El análisis de antenas de hilo es un problema bien documentado, tanto en el caso de alimentarlas con fuentes armónicas [Burke, 1980], [Burton and King, 1975], [Elliot, 1981], como en el caso de fuentes transitorias [Miller and Blaricum, 1973], [Francescheti and Pappas, 1974], [Rubio et al., 1991]. En general, el cálculo de la impedancia de entrada de antenas en el dominio de la frecuencia es extensa.

Las antenas con una importante superficie, tales como, antenas bicónicas, V-cónicas, ...etc., requieren la determinación de su impedancia de entrada como parte de la evaluación total de sus características como radiadores de banda ancha. La simulación de la zona de alimentación de estas antenas mediante hilos presenta por si misma dos dificultades:

- La unión hilo-superficie.
- Elección del radio de los hilos.

Aunque modelos de unión hilo-superficie se han estudiado [Bhattacharya et al., 1987], [Newman and Pozar, 1978], [Newman and Pozar, 1978], [Bhattacharya et al., 1987] una aproximación simple basada en la modelación de la zona de alimentación mediante parches triangulares, puede dar unos excelentes resultados para el cálculo de la impedancia de entrada. Con esto, se evita tener que introducir en la región de alimentación elementos diferentes a los usados para modelar el resto de la estructura.

En este apartado se realiza un estudio de la aplicación del programa desarrollado para obtener la impedancia de entrada de antenas TEM (antenas que soportan sobre su superficie la propagación de ondas transversales electromagnéticas). El método se basa en la solución de la ecuación EFIE, al alimentar la superficie de la antena con un campo eléctrico localizado, que representa la fuente de voltaje aplicada. La superficie de la antena se modela mediante parches triangulares. Con el tratamiento que se realiza de la zona de alimentación, se evitan las dificultades que aparecen con los modelos mediante hilos [Bhattacharya et al., 1987], [Newman and Pozar, 1978], [Miller and Landt, 1978]. En el planteamiento que vamos a realizar, la zona de alimentación se modela de forma que quede al menos un lado interno sobre el que se aplicará el campo eléctrico localizado. En muchos casos esto supondrá una ligera modificación de dicha zona, pero que como veremos los resultados que se obtienen son muy satisfactorios.

El método que vamos a utilizar es similar en muchos sentidos a cálculos previos que se han realizado en el dominio de la frecuencia [Harrington, 1967], y está basado en la reciente traslación de éstos al dominio del tiempo realizada en [Booker et al., 1994]. El método usado en [Booker et al., 1994] utiliza el algoritmo desarrollado en [Rynne, 1991], para la resolución de la EFIE.

Aunque la interpretación de los resultados en uno u otro dominio de solución es diferente, así como los problemas que puedan surgir (como por ejemplo las inestabilidades en el dominio del tiempo), los principios básicos en la formulación del problema se mantienen iguales.

El método se va a aplicar para estudiar estructuras simples como:

- **Antena auto-complementaria plana**
- **Antena bicónica**

La impedancia de entrada de estas antenas está ampliamente estudiada tanto teóricamente como experimentalmente [Mushiakhe, 1992], [Schelkunoff and Friss, 1952], [Lamensdorf and Susman, 1994], [Booker et al., 1994], y a menudo se usan para calibrar experimentos. Estas antenas nos van a servir para mostrar la validez de la aproximación numérica que se realiza.

También se van a estudiar antenas directivas que producen ondas transversales electromagnéticas esféricas (TEM) como:

- **Antena de bocina TEM**
- **Antena V-cónica**

En estas últimas tienen una gran importancia práctica, y nos van a servir para mostrar algunos aspectos importantes en el modelado de la zona de alimentación. En el caso

de la antena de bocina, los datos se comparan con los obtenidos mediante aproximaciones teóricas y mediante otros métodos numéricos. Para la antena V-cónica, la validez del modelado se comprobará contrastando los resultados obtenidos con el programa DOTIG4 y los predichos por Shen en [Shen et al., 1988].

En todos los casos que se van a tratar, se prestará especial atención a:

- Modelación de la zona de alimentación.
- Interpretación de los resultados en las distintas zonas del espectro.

Los resultados se comparan con valores teóricos y experimentales obteniéndose una buena concordancia entre ambos.

Antes de pasar a la exposición de los resultados obtenidos para las estructuras citadas anteriormente, vamos a mostrar el método que se seguirá para alimentar a las antenas, y como se obtiene la intensidad de corriente en la entrada de la antena a partir de la expresión de la densidad superficial de corriente.

Fuente de alimentación

Como se comentó en el capítulo 3, en el apartado dedicado a la obtención de la ecuación integral EFIE, la única diferencia entre un sistema funcionando como dispersor, o como antena, reside en que la fuente de excitación esté fuera del sistema o contenida en él. La solución del problema nos viene dada por la solución de la ecuación (3.67) en la que ahora el campo eléctrico incidente está localizado en la propia estructura, y representa la fuente de alimentación que se utiliza en el sistema radiante.

En la aplicación del algoritmo para el estudio de la impedancia de entrada de antenas TEM, vamos a simular la fuente de alimentación mediante un campo eléctrico \vec{E}^i localizado. El efecto de dicho campo será producir una diferencia de potencial en su zona de acción que coincida con la tensión de salida de la fuente que alimenta la antena. Nuestro objetivo, es por tanto, aplicar una fuente de tensión, $V(t)$, a lo largo de un lado interno, p , del modelado que representa la superficie de la antena. Para cualquier $\vec{r}' \in S'$, definimos un campo eléctrico incidente de la forma

$$\vec{E}^i(\vec{r}', t) \equiv V(t)\delta(\vec{r}' - \vec{r}_p^e)\hat{d}l_p \quad (4.1)$$

en donde:

$V(t)$, es la fuente de tensión de entrada (que es conocida),

\vec{r}_p^e , es la posición del centro del lado p , en el que se alimenta,

$\delta(\vec{r}' - \vec{r}_p^e)$, es la función delta de Dirac,

$\hat{d}l_p$, es un vector unitario tangente al camino C_p . (recordar que este camino vá desde \vec{r}_p^{c+} a \vec{r}_p^{c-} pasando por \vec{r}_p^e , véase la ecuación (3.34) en la página 69)

Para resolver por tanto la ecuación (3.67) para un campo eléctrico incidente de la forma (4.1), hacemos uso de la ecuación (3.34). Así, para obtener el primer miembro de la ecuación (3.67), necesitamos evaluar la integral

$$\int_{C_m} \vec{E}^i(\vec{r}', t) \cdot \vec{d}l_m$$

para ello, si tenemos en cuenta la definición dada en (4.1), nos queda

$$\int_{C_m} \vec{E}^i(\vec{r}', t) \cdot \vec{d}l_m = \int_{C_m} V(t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_p^e) \hat{d}l_p \cdot \vec{d}l_m = V(t) \delta_{m,p}$$

en donde $\delta_{m,p}$ es el símbolo delta de Kronecker y viene dado por

$$\delta_{m,p} = \begin{cases} 1 & m = p \\ 0 & m \neq p \end{cases}$$

Por tanto la ecuación (3.67), en el caso de aplicarla al estudio de antenas, se escribe

$$V(t) \delta_{m,p} = [\phi(\vec{r}_m^{c-}, t_v) - \phi(\vec{r}_m^{c+}, t_v)] + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_m^e, t)}{\partial t} \left(\frac{\vec{\rho}_m^{c+} + \vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right) \quad (4.2)$$

La solución de (4.2) es formalmente idéntica a la de (3.67). La única diferencia reside en que ha variado la contribución correspondiente al campo eléctrico incidente. En la práctica, es, incluso más sencillo, evaluar los términos

$$V(t) \delta_{m,p}$$

que los correspondientes al campo eléctrico incidente en el problema de la dispersión, dados por

$$\vec{E}^i(\vec{r}_m^e, t) \left(\frac{\vec{\rho}_m^{c+} + \vec{\rho}_m^{c-}}{2} \right)$$

Intensidad de entrada

Para la obtención de la intensidad de entrada, tomaremos como referencia la Fig. 4.35. En ella se han dibujado el par de parches adyacentes al lado en el que se alimenta, lado p . El vector \hat{n}_p , representa el vector unitario perpendicular a la dirección del lado, y está contenido en el plano al que pertenece T_p^- . El resto de variables ya han sido definidas en el capítulo 3 (véase la página 83).

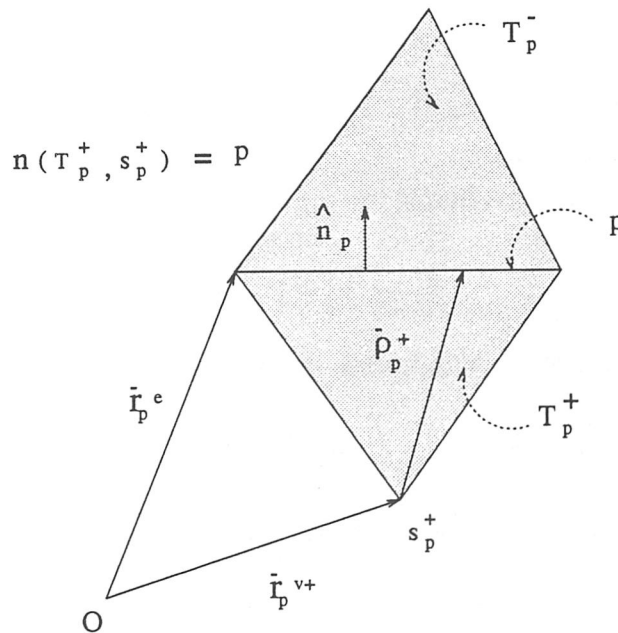


Figura 4.35: Variables locales para el cálculo de la intensidad de corriente que atraviesa el lado, p .

La intensidad de corriente que atraviesa el lado p , y que definiremos ¹ como, \tilde{I}_p , la podemos obtener a partir de la densidad superficial de corriente. Para ello, haremos la integral de línea a lo largo del lado p del producto escalar de la densidad de corriente por el vector \hat{n}_p , esto es,

$$\tilde{I}_p(t) = \int_p \vec{J}_p(t) \cdot \hat{n}_p dl_p$$

donde $\vec{J}_p(t)$, es la densidad superficial de corriente que atraviesa el lado p . En un instante temporal v determinado, podemos poner

$$\tilde{I}_p|_{t=v\Delta t} = \tilde{I}_{p,v} = \int_p \vec{J}_p(t)|_{t=v\Delta t} \cdot \hat{n}_p dl_p \quad (4.3)$$

Por las propiedades de las funciones base, la componente normal de la corriente a lo largo del lado es constante. El valor de la corriente sobre el lado p se puede tomar, de forma equivalente, por su expresión local sobre el triángulo T_p^+ ó T_p^- . Sobre el triángulo T_p^+ , y teniendo en cuenta la ecuación (3.69), podemos poner la densidad superficial de corriente en el intervalo temporal $[t_{j+l}, t_{j+l+k}]$ como

¹se define la intensidad como \tilde{I} , con objeto de no confundirla con los coeficientes, I , que aparecen en la expresión de la densidad superficial de corriente

$$\vec{J}_{T_p^+,j}(\vec{r}_{T_p^+}'' , t_j'') = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=1}^{l+k} \vec{f}_{T_p^+,s}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''}) B_j^m(t_j'') I_{p,j+m}$$

y para un instante temporal $t_v = v \Delta t$ nos queda

$$\vec{J}_{T_p^+}(\vec{r}_{T_p^+}'') \Big|_{t=t_v} = \sum_{s=1}^3 \vec{f}_{T_p^+,s_p^+}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''}) I_{p,v}$$

introduciendo la expresión anterior en (4.3) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{p,v} &= \int_p \left(\sum_{s=1}^3 \vec{f}_{T_p^+,s}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''}) I_{p,v} \right) \cdot \hat{n}_p dl_p \\ &= \int_p \left(\sum_{s=1}^3 \vec{f}_{T_p^+,s}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''}) \cdot \hat{n}_p \right) I_{p,v} dl_p \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$si \quad s \neq s_p^+ \quad \Rightarrow \quad \vec{f}_{T_p^+,s}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''}) \cdot \hat{n}_p = 0$$

nos queda

$$\tilde{I}_{p,v} = I_{p,v} \int_p \vec{f}_{T_p^+,s_p^+}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''}) \cdot \hat{n}_p dl_p \quad (4.4)$$

Para evaluar el producto escalar que aparece dentro de la integral, partimos de la expresión de la función $\vec{f}_{T_p^+,s_p^+}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''})$, que viene dada por (véase (3.68))

$$\vec{f}_{T_p^+,s_p^+}^e(\vec{r}_{T_p^+,s}^{e''}) = sgn(T_p^+, s_p^+) \frac{l_p}{2A_p^+} \left(\vec{\rho}_{T_p^+,s_p^+}^e + \vec{r}_{T_p^+,s_p^+}^{e''} \right)$$

cumpléndose

$$sgn(T_p^+, s_p^+) = +1$$

y por tanto

$$\left(\vec{\rho}_{T_p^+,s_p^+}^e + \vec{r}_{T_p^+,s_p^+}^{e''} \right) \cdot \hat{n}_p = \vec{\rho}_{T_p^+,s_p^+}^e \cdot \hat{n}_p + \vec{r}_{T_p^+,s_p^+}^{e''} \cdot \hat{n}_p = \vec{\rho}_{T_p^+,s_p^+}^e \cdot \hat{n}_p = cte$$

(la última igualdad se cumple ya que, a lo largo del lado p , el producto escalar $\vec{r}_{T_p^+,s_p^+}^{e''} \cdot \hat{n}_p$, es cero, y el término $\vec{\rho}_{T_p^+,s_p^+}^e \cdot \hat{n}_p$ es constante)

A partir de las igualdades anteriores, la intensidad de corriente, que atraviesa el lado p , dada en la ecuación (4.4) nos queda

$$\tilde{I}_{p,v} = I_{p,v} \int_p \frac{l_p}{2A_p^+} \rho_{T_p^+,s_p^+}^0 dl_p = \frac{l_p^2}{2A_p^+} \rho_{T_p^+,s_p^+}^0 I_{p,v} \quad (4.5)$$

donde se ha hecho uso de la definición

$$\rho_{T_p^+, s_p^+}^0 \equiv \vec{\rho}_{T_p^+, s_p^+}^e \cdot \hat{n}_p$$

Conociendo los valores de la intensidad de entrada en los distintos instantes temporales, y el valor del voltaje aplicado, podemos calcular la impedancia de entrada, Z_0 , en el dominio de la frecuencia. Para ello, simplemente tenemos que hacer la transformada discreta de Fourier de las muestras de voltaje e intensidad y hallar su cociente para cada frecuencia. Esto es

$$Z_0(k\Delta f) = \frac{V_p(k\Delta f)}{\tilde{I}_p(k\Delta f)}$$

en donde:

$V_p(k\Delta f)$ y $\tilde{I}_p(k\Delta f)$, son los valores del voltaje e intensidad para cada frecuencia,

$k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$, (siendo N el número de muestras temporales),

Δf , es el incremento de las muestras en frecuencia y viene dado por $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$, (siendo Δt el valor del incremento temporal).

4.2.2 Antena auto-complementaria plana

La antena que vamos a estudiar en primer lugar es la antena auto-complementaria plana representada en la Fig. 4.36. Esta estructura consiste en dos placas triangulares situadas en un mismo plano, y con el ángulo adyacente al vértice común igual a noventa grados. La antena se alimenta en los vértices de las dos placas, mediante una fuente de voltaje aplicada entre los dos vértices, quedando estos separados por una zona de vacío infinitesimal situada entre ambas placas. La antena soporta modos de propagación transversales electromagnéticos (TEM).

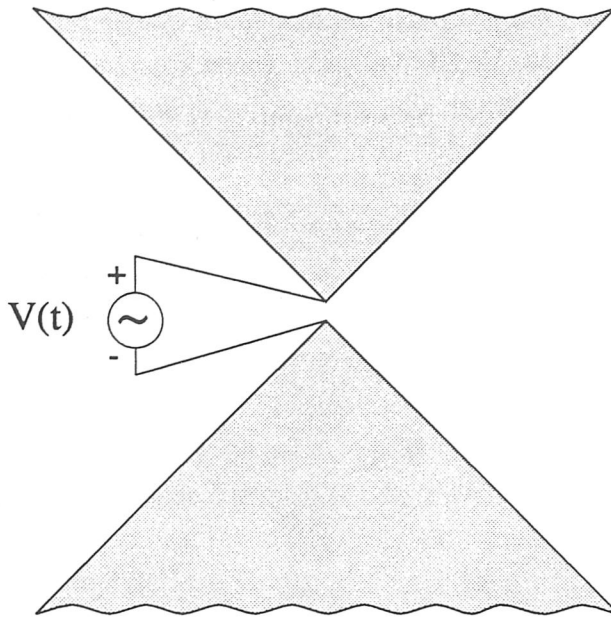


Figura 4.36: Antena auto-complementaria plana.

Si las placas son de una longitud infinita, la impedancia de entrada de la antena es independiente de la frecuencia y tiene el valor de ([Mushiake, 1992])

$$Z_e = \frac{Z_0}{2} = 60\pi \Omega \approx 188.5 \Omega$$

(donde Z_0 es la impedancia característica del vacío).

Es evidente que cualquier modelo que hagamos de la superficie contendrá un número finito de parches. Debemos considerar por tanto una antena coplanar de longitud finita. Si en dicha estructura, alimentamos con una fuente transitoria de corta duración comparada con la longitud de las placas, podremos analizar la intensidad de entrada, en los instantes temporales, en los que aún no se tiene la información de la corriente que se refleja en los bordes opuestos al vértice en el que se alimenta. La intensidad de entrada en esos instantes temporales deberá de tener la forma del voltaje de entrada,

y la impedancia de entrada calculada a partir de ella, debe ser independiente de la frecuencia y de valor $Z_0/2$. Como veremos esto no es exactamente lo que ocurre, aunque si encontraremos una zona del espectro en la que los resultados obtenidos coinciden con los teóricos.

El modelo que vamos a utilizar para representar la antena se muestra en la Fig. 4.37. Las placas tienen una longitud de lado de $0.471m$. (la altura es por tanto $0.333m$.), el mallado contiene 880 parches triangulares, 1259 lados internos, una separación mínima entre centroides de parches de $1.12cm$., y una relación entre superficie de parches máxima y mínima de $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 2$. La única parte del modelado que no representa exactamente la estructura original es la zona de alimentación. Dicha zona ha sido modificada de forma que nos quede un lado interno en ella, sobre el que aplicar el campo eléctrico incidente dado en (4.1), que simula a la fuente de alimentación $V(t)$.

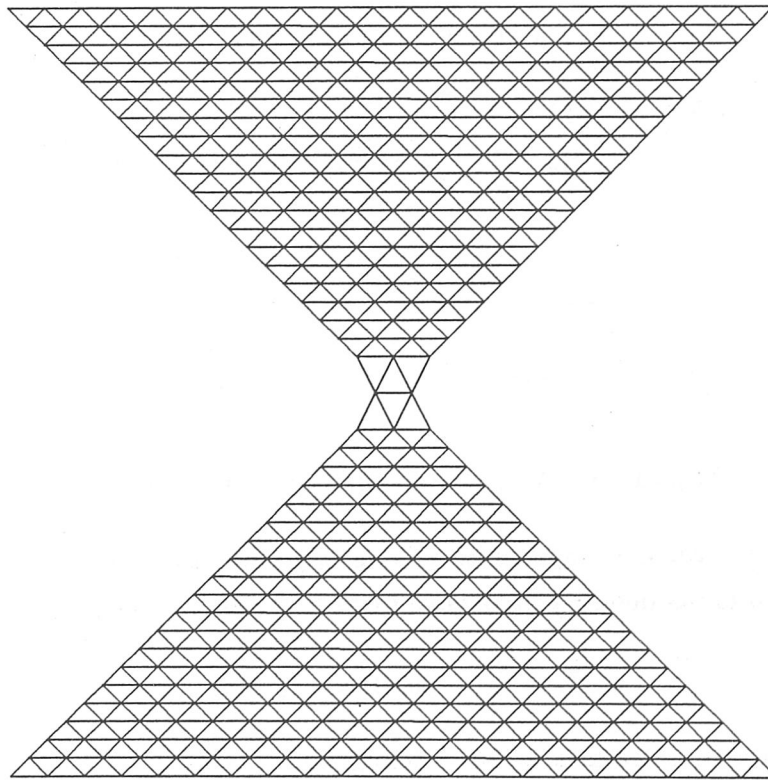


Figura 4.37: Modelado de la antena auto-complementaria plana.

La razón de deformar la zona de alimentación, reside en que una vez realizado el modelo, es difícil introducir la fuente de alimentación de forma que la solución sea exacta y estable. A primera vista, podría pensarse que un modelado como el que se representa en la Fig. 4.38, reproduce la estructura con mayor precisión.

En dicho modelo, el campo eléctrico incidente, se aplica a los dos lados internos

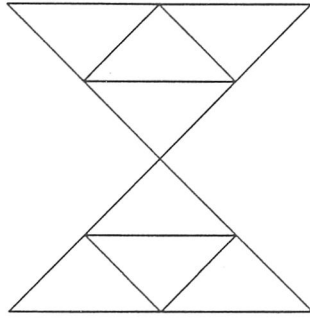


Figura 4.38: Mallado alternativo de la zona de alimentación en la antena auto-complementaria plana.

de los dos triángulos cuyo vértice está situado sobre el eje de simetría. Definiendo correctamente el signo, dicho campo eléctrico induce distribuciones de corrientes y cargas opuestas sobre las dos placas (no hay por tanto carga neta acumulada en la estructura). Alimentando de esa manera, el voltaje efectivo sobre la estructura no es el deseado, ya que hay una acumulación de carga en los dos triángulos de la zona de alimentación. Las cargas y corrientes se propagan por la estructura, pasando de unos triángulos a otros a través de los lados internos. En el mallado alternativo, los dos triángulos situados en la zona central no pueden intercambiar cargas y corrientes entre ellos, sólo lo pueden hacer con el resto de los parches situados en la placa a la que pertenecen. Como no hay restricción sobre la acumulación de carga, hay una discontinuidad en el voltaje del parche que está en el vértice y el resto de la placa. Es decir, el efecto es equivalente a introducir un condensador en los terminales de la fuente de alimentación. Esto se podría solucionar, imponiendo la condición de que localmente en cada uno de los dos parches, con sus vértices sobre el eje de simetría, tenga una carga, ρ , igual a cero. La solución que se obtiene de esta manera está bastante alejada de la solución real. Otros tratamientos de la zona de alimentación pero en los que es necesario alimentar sobre lados internos separados muestran ser poco exactos [Booker et al., 1994].

Así pues, físicamente esta mejor representada la zona de alimentación deformándola un poco, y dejando un solo lado interno sobre el que se alimenta.

Para representar la dependencia temporal de la fuente de alimentación, vamos a utilizar la función error (véase Fig. 4.39), dada por

$$V(t) = V_0 \int_0^t e^{-g^2(x-t_{max})^2} dx \quad (4.6)$$

Donde V_0 es el voltaje máximo y lo tomaremos $V_0 = 1V$, y mediante parámetro g se puede controlar el tiempo de subido. En la Fig. 4.39 se ha utilizado $g = 20(m-l)^{-1}$. El

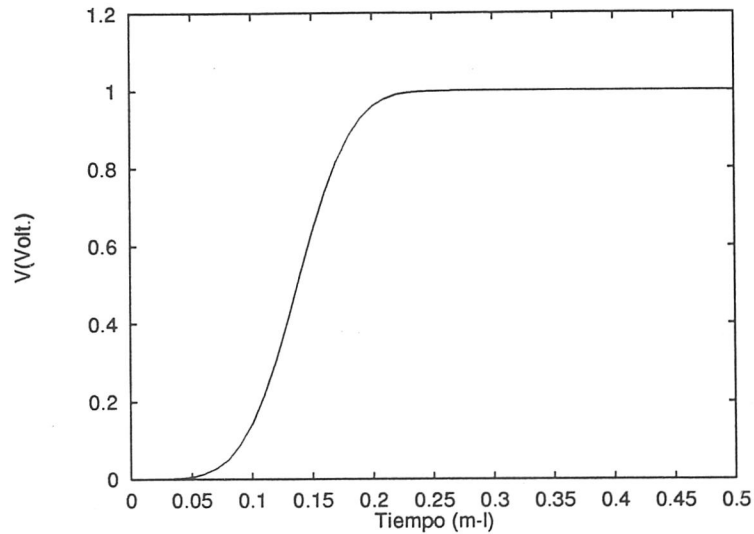


Figura 4.39: Dependencia temporal del voltaje utilizado como fuente de alimentación.

parámetro t_{max} se fija de forma que para $t = 0$ el valor del voltaje sea la centésima parte de su valor máximo. La implementación numérica de la función se ha realizado usando el algoritmo dado en [Press et al., 1989].

La intensidad de corriente, que atraviesa el lado de la antena sobre el que se excita la estructura, al alimentar con la función error, se representa en la Fig. 4.40. El muestreo temporal se ha hecho utilizando $\Delta t = 0.011(m - l)$.

A partir de la Fig. 4.40 se pueden observar dos hechos interesantes:

La intensidad de corriente no reproduce exactamente la fuente de tensión aplicada.

Aparece una ligera oscilación en la señal antes de estabilizarse. Aplicando tensiones con un tiempo de subida mas corto, esas oscilaciones de la intensidad se hacen más pronunciadas, pero convergen hacia un mismo nivel en instantes posteriores. La respuesta no es por tanto independiente de la frecuencia.

Se produce una caída en la señal aproximadamente a los $0.8(m - l)$. Esto es debido a las reflexiones de la densidad superficial de corriente en los bordes de las placas. Hay que señalar, que $0.7(m - l)$, es el tiempo que tarda, aproximadamente, en propagarse la señal por la superficie de la antena hasta el borde de las placas, y volver a la zona de alimentación. A los $0.7(m - l)$, hay que sumarles $0.1(m - l)$, ya que, ese es el tiempo inicial en que la señal comienza a tomar valores significativos distintos de cero. Si la antena fuese infinita, dichas reflexiones no tendrían lugar. Para simular el comportamiento de una antena infinita, se realiza la transformada discreta de Fourier, tomando una ventana temporal con una duración no superior a $0.8(m - l)$.

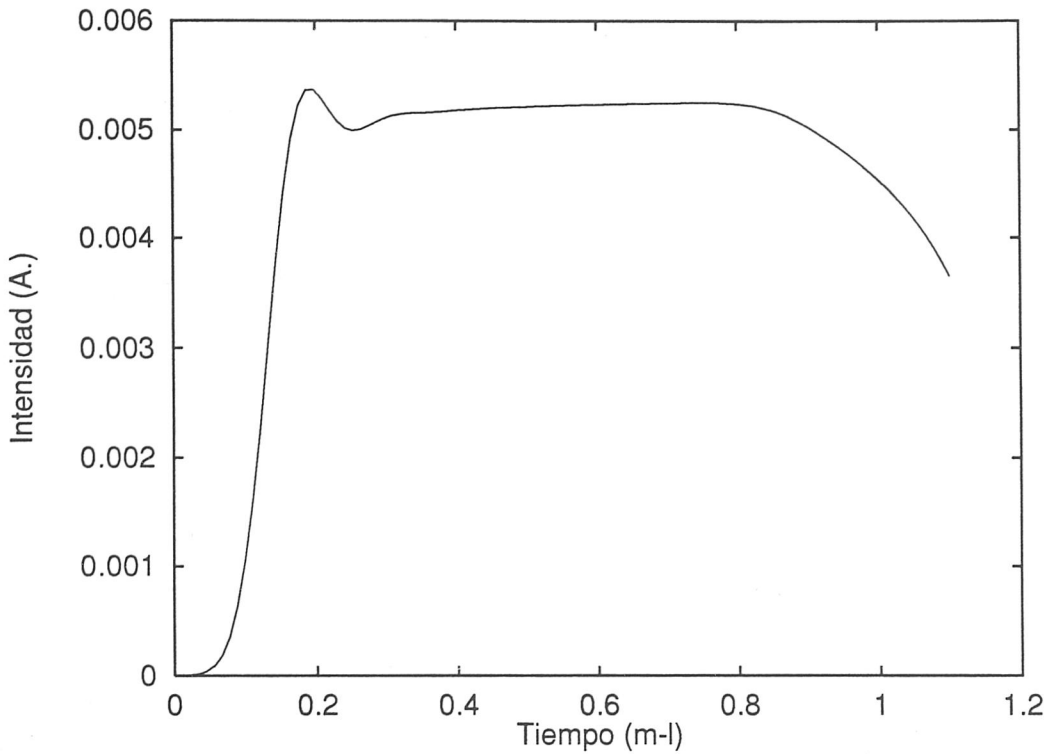


Figura 4.40: Intensidad de entrada en la antena auto-complementaria plana.

En las Figs. 4.41, 4.42, 4.43, se han dibujado la parte real, imaginaria, y módulo de la impedancia de entrada, respectivamente. Es interesante observar como la parte imaginaria de la impedancia de entrada converge a un valor nulo a altas frecuencias de acuerdo con la teoría. En la gráfica correspondiente al módulo se ha representado también el valor teórico de la impedancia de entrada ($Z_e = 188.5\Omega$).

La frecuencia máxima que se representa en el espectro viene dada por la frecuencia de Nyquist, $f_N = \frac{1}{2\Delta t} = 13.6\text{GHz}$. Se observan dos zonas diferenciadas en las gráficas:

La parte baja del espectro, correspondiente a componentes con una longitud de onda grande, comparada con la separación mínima entre centroides. Esta zona se extiende aproximadamente hasta los 3GHz., y corresponde a longitudes de onda mayores a 10cm., siendo la separación mínima entre centroides de 1.12cm.

La parte alta del espectro, en la que se encuentra un límite para las componentes con longitud de onda pequeña. Este límite es para el módulo de la impedancia de entrada de 190.5Ω. Por tanto, la desviación respecto al valor teórico es del 1.1%. En la tabla 4.1 se recogen los valores de la impedancia de entrada para la antena auto-complementaria plana.

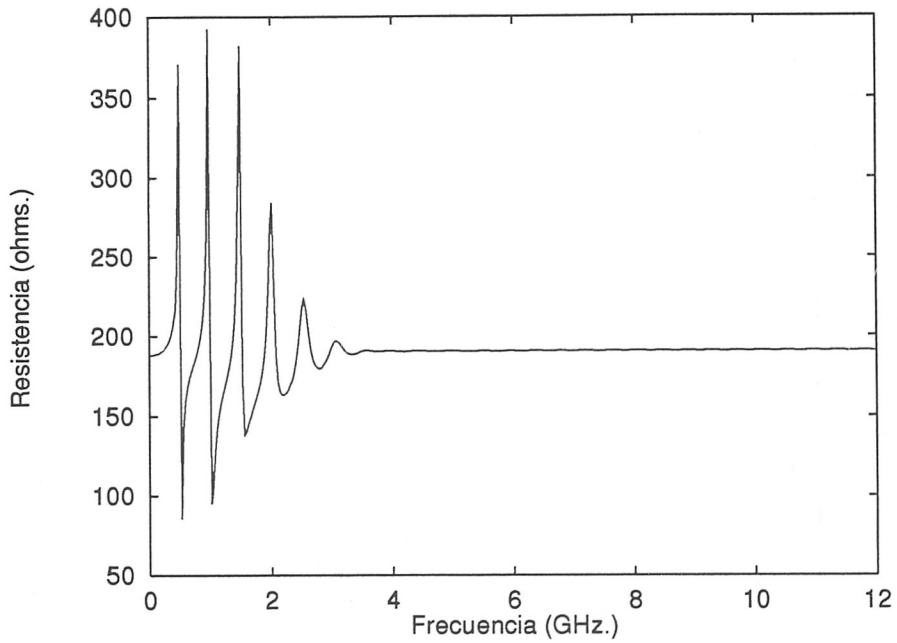


Figura 4.41: Parte real de la impedancia de entrada de la antena auto-complementaria plana.

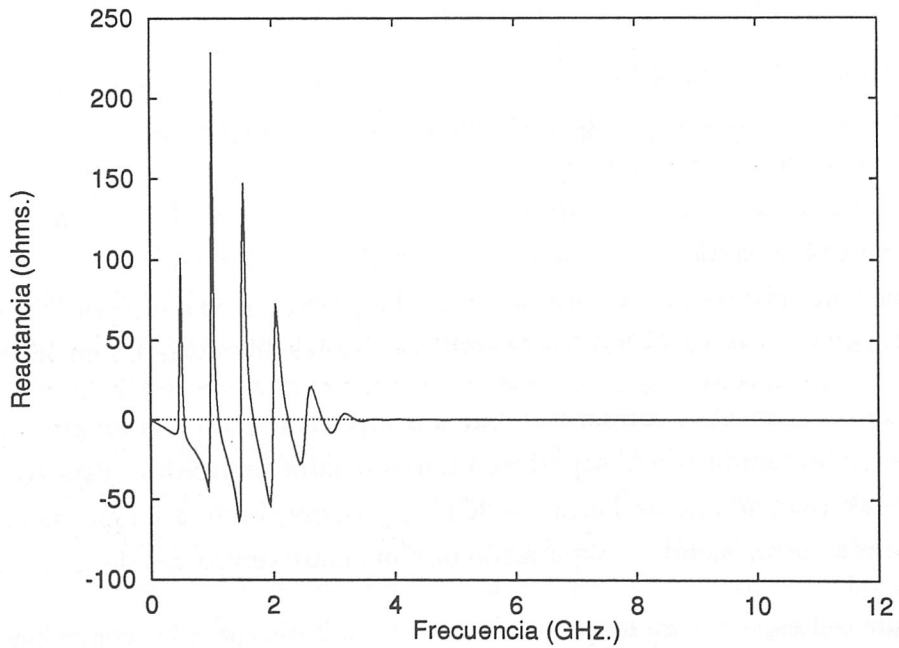


Figura 4.42: Parte imaginaria de la impedancia de entrada de la antena auto-complementaria plana.

Resultados obtenidos con otros ejemplos, en los que se han usado parámetros $g =$

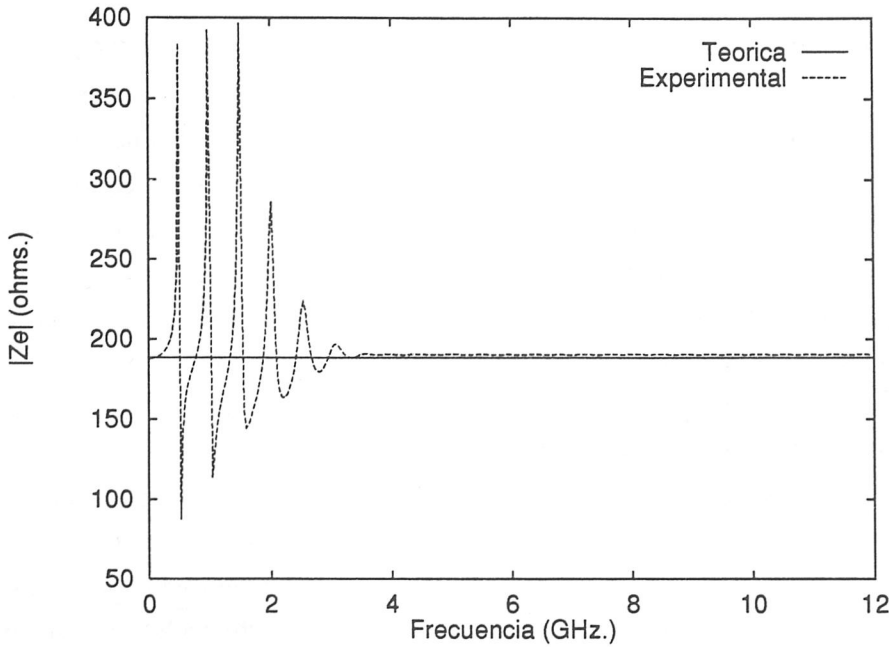


Figura 4.43: Módulo de la impedancia de entrada de la antena auto-complementaria plana.

Z_e Teórica	Z_e Experimental	% error
188.5 Ω	190.5 Ω	1.1 %

Tabla 4.1: Comparación de las impedancias de entrada teórica y experimental de la antena auto-complementaria plana.

5, 10, 30, $60(m-l)^{-1}$, arrojan los mismos resultados. En todos los ejemplos probados, el límite encontrado en la zona alta del espectro siempre está situado muy ligeramente por encima del valor teórico, y nunca se produce una desviación superior al 1.4% respecto de éste. En dichos ejemplos, se ha observado que la convergencia se produce a frecuencias ligeramente superiores cuanto mayor es el parámetro g utilizado. Se han realizado también pruebas con distintos incrementos temporales, $\Delta t = 0.8, 0.9, 1.1(m-l)$, no encontrándose diferencias en los resultados asociadas a la variación de este parámetro.

Antes de pasar a los resultados obtenidos con otro tipo de antenas, vamos a ver los motivos que nos han llevado a utilizar la función error para la alimentación, en lugar del pulso gaussiano. La razón reside en los problemas numéricos que se presentan, si intentamos caracterizar la respuesta hasta la frecuencia de Nyquist utilizando pulsos gaussianos. Las componentes espectrales para un pulso gaussiano con suficiente

contenido energético, llegan hasta una frecuencia máxima, $f_{max} = 0.5g$. Si tomamos parámetros g lo suficientemente grandes, con objeto de tener más componentes espectrales, lo que ocurre es que la señal en el tiempo se hace muy estrecha. En la respuesta que se obtiene, aparecen inestabilidades en instantes temporales poco avanzados. Evidentemente, el hacer un modelado más fino para poder elegir un Δt menor, no nos sirve, ya que, lo que importa es la frecuencia máxima relativa al tamaño de los parches. Sin embargo, la función error si posee componentes con un contenido energético apreciable en las zonas altas del espectro. Se han obtenido resultados de la impedancia de entrada utilizando pulsos gaussianos, y se observa el mismo comportamiento oscilatorio a bajas frecuencias. Las oscilaciones que se obtienen en la impedancia de entrada a bajas frecuencias alimentando con pulsos gaussianos, tienen la misma periodicidad que las que se obtienen alimentando con la función error, aunque existe una diferencia en las amplitudes considerable. A bajas frecuencias, la zona de alimentación presenta un parte reactiva pequeña, pero no nula, que oscila en torno a cero. Este hecho produce pequeñas oscilaciones del módulo de la impedancia de entrada a bajas frecuencias, respecto a su valor teórico. Estas oscilaciones se observan alimentando con pulsos gaussianos, o con la función error, de forma indiferente. Sin embargo, cuando se usa la función error, se obtiene un módulo para la impedancia de entrada a bajas frecuencias con saltos muy bruscos. Estos saltos se deben a que la función de alimentación tiene un espectro con variaciones muy fuertes, (aunque continuas. Véase Fig. 4.45), en la parte baja del espectro. Los pequeños errores (numéricos o introducidos por el propio algoritmo, sobre todo de en el retraso en la respuesta) que se comenten en la determinación de la intensidad de entrada en el dominio del tiempo, conducen, a valores de la intensidad a bajas frecuencias muy diferentes a los que se deberían obtener. Por tanto, al hacer el cociente de las muestras de voltaje e intensidad en el dominio de la frecuencia, aparecen variaciones bruscas de los valores de la impedancia de entrada.

En la Fig. 4.44, se han dibujado la fuente de alimentación con dependencia temporal pulso gaussiano, y con dependencia tipo función error, para un mismo parámetro g (se ha utilizado $g = 20(m - l)^{-1}$). La Fig. 4.45 contiene la transformada discreta de Fourier de las señales representadas en la Fig. 4.44 (se ha representado hasta la frecuencia de Nyquist). Se observa una gran diferencia en sus contenidos espectrales. A altas frecuencias, la función error posee componentes espectrales con valor distinto de cero, mientras que no ocurre lo mismo con la función pulso gaussiano.

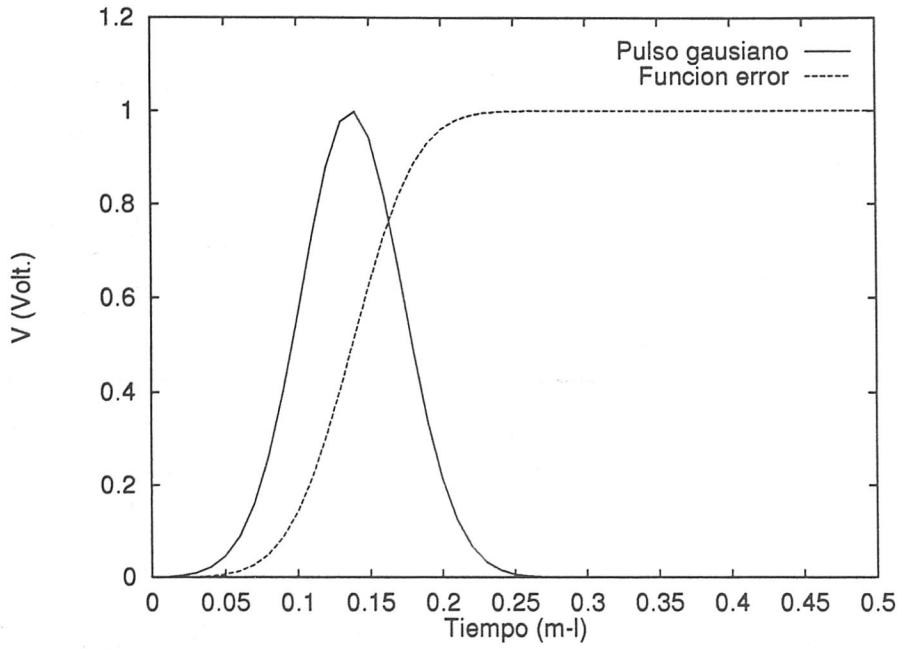


Figura 4.44: Voltaje de entrada frente al tiempo con dependencia pulso gaussiano y función error.

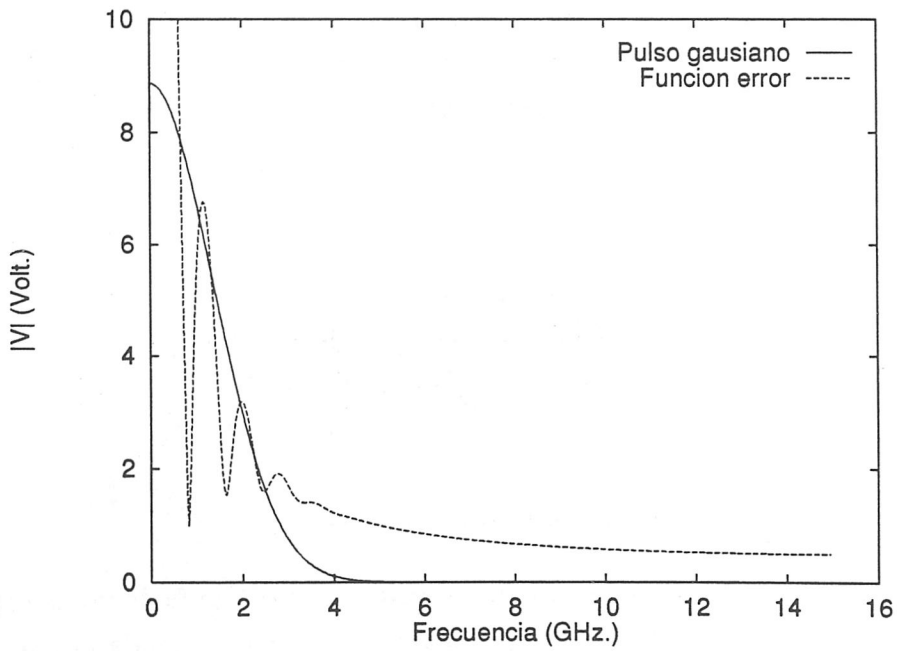


Figura 4.45: Componentes espectrales de la tensión de entrada con dependencia pulso gaussiano y función error.

4.2.3 Antena biconica

La antena auto-complementaria plana es una estructura sencilla. En ella, tanto las placas que la forman, como los parches del modelado son triángulos similares. Con objeto de validar los resultados con una geometría más general, vamos a estudiar la antena bicónica infinita. Esta antena ha sido estudiada en [Wait, 1969], y usada como antena de banda ancha o como radiadora de pulsos durante años.

La antena bicónica, (Fig. 4.46), consiste en dos conos de igual ángulo de apertura, θ , con orientaciones contrarias, con sus vértices situados en un punto común, y con sus ejes de simetría coincidiendo.

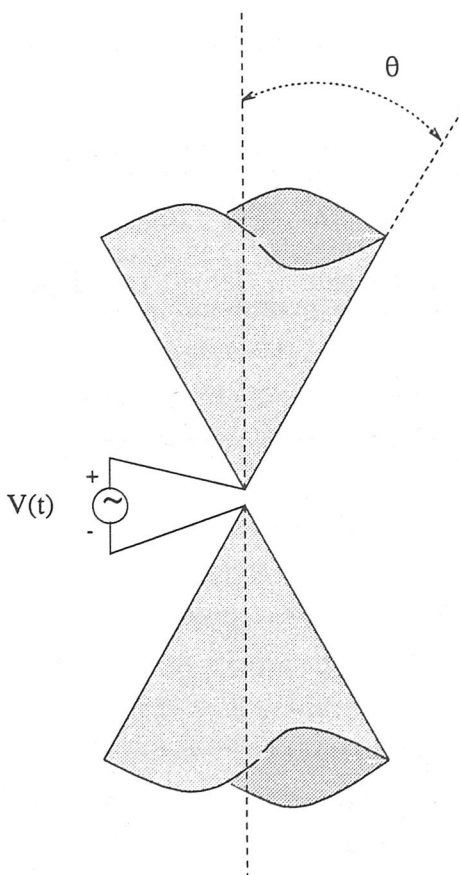


Figura 4.46: Antena bicónica.

Los dos conos se alimentan en su vértice, mediante una fuente de voltaje aplicada en los vértices, estando éstos separados por una pequeña discontinuidad infinitesimal. La antena soporta sobre su superficie la propagación de ondas transversales electromagnéticas esféricas, y los campos electromagnéticos que radia son también ondas TEM esféricas incluso en la región de campo cercano.

Como se muestra en [Stutzman and Thiele, 1981], la impedancia de entrada, Z_e , de

una antena bicónica infinita es

$$Z_e = \frac{Z_0}{\pi} \ln\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (4.7)$$

Para estudiar esta estructura, vamos a considerar una antena bicónica con ángulo de apertura $\theta = 47^\circ$. El modelo que utilizamos para representar la antena se muestra en la Fig. 4.47. Las dimensiones de los conos son: longitud, $L = 0.3147m.$, radio en la base, $r = 0.23m.$, y altura, $h = 0.215m.$. En el mallado de la figura, se han utilizado 984 triángulos y 1388 lados internos. La separación mínima entre centroides es $0.96cm.$, y la relación entre superficie de parches máxima y mínima es $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 2.9$. Para simular la zona de alimentación, se ha introducido un cilindro modelado con 20 parches triangulares.

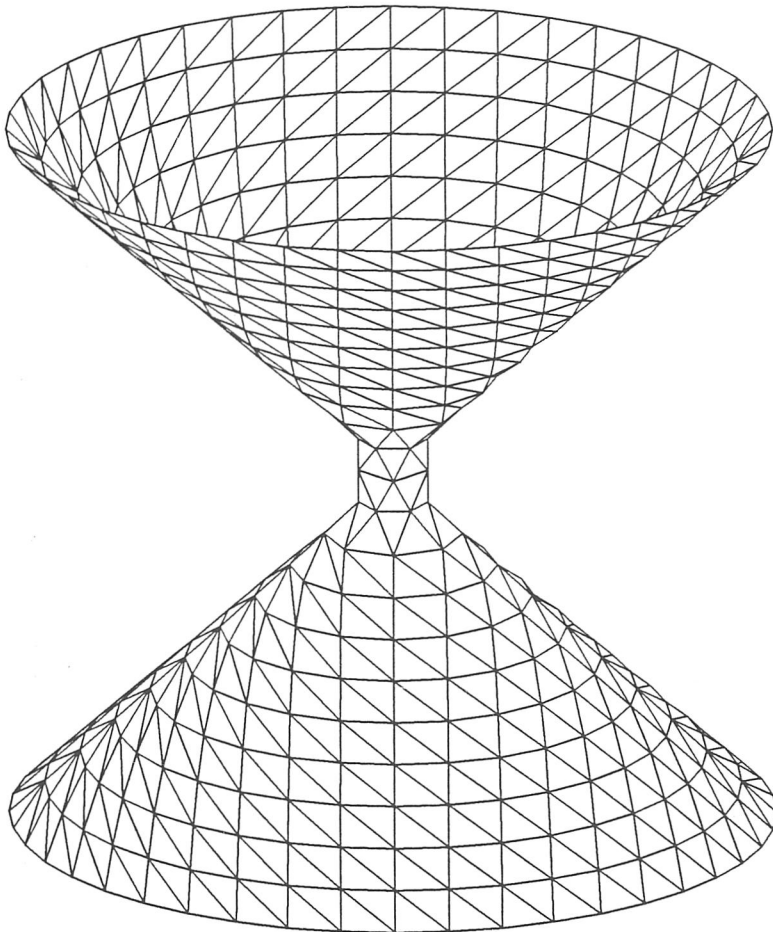
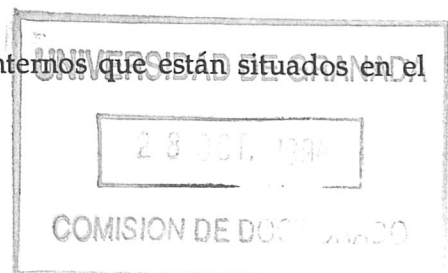


Figura 4.47: Modelado de la antena bicónica.

La fuente de voltaje se define sobre los 4 lados internos que están situados en el



plano $Z = 0$. Hay que tener cuidado al definir el signo de $V(t)$ sobre cada lado en el que se alimenta, ya que, según (4.1), el campo eléctrico incidente que se aplica a cada lado, m , tiene la dirección que va del triángulo T_m^+ al T_m^- . En cada uno de los 4 lados, se le asignará el signo a $V(t)$ de forma que, el campo eléctrico incidente tenga el sentido dado por la dirección positiva del eje Z .

En la Fig. 4.48, se ha dibujado la intensidad de corriente que atraviesa la zona de alimentación, al excitar la antenas con una tensión de entrada dada por la ecuación (4.6). Se ha tomado un parámetro $g = 20(m-l)^{-1}$, y un incremento temporal $\Delta t = 0.95(cm-l)$.

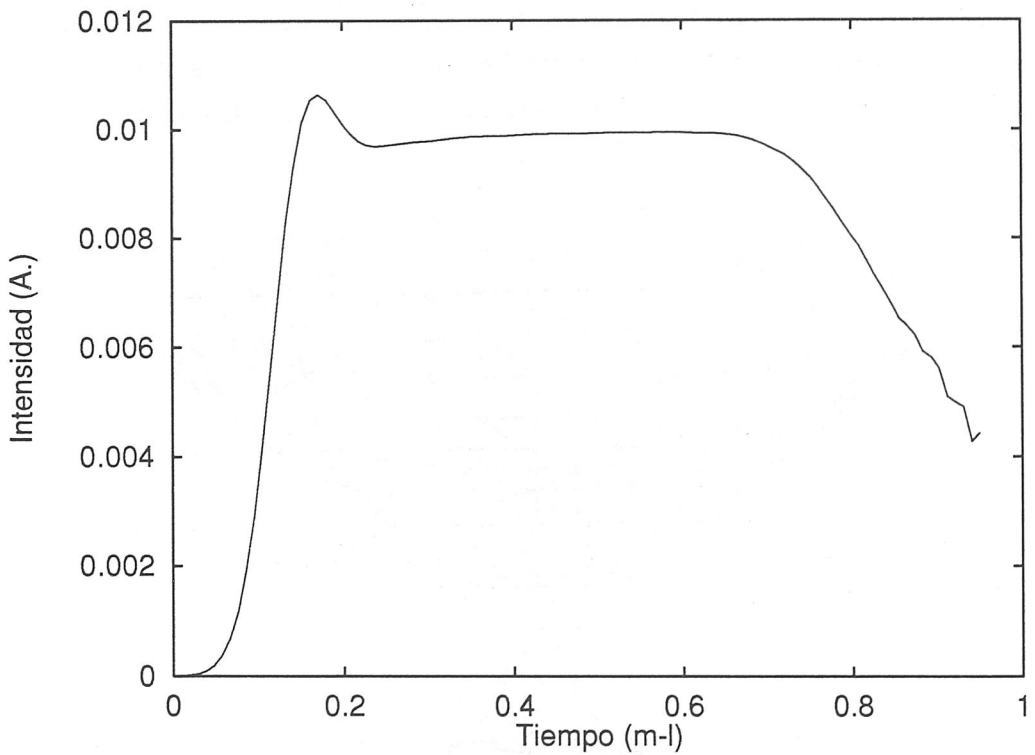


Figura 4.48: Intensidad de entrada en la antena bicónica.

Al igual que ocurría con la antena auto-complementaria plana, la señal no reproduce exactamente el voltaje aplicado. Existe una pequeña oscilación de la intensidad antes de estabilizarse hacia el instante temporal $0.2(m-l)$, que es cuando el voltaje incidente casi ha alcanzado su valor máximo. Se produce una caída aproximadamente a los $0.63(m-l)$, debido a la señal reflejada en los bordes de la estructura. La longitud de la antena es de $0.314m$, y por tanto, la caída se produce en los instantes temporales, que la densidad superficial de corriente ha necesitado para llegar a los bordes, y reflejarse de nuevo hacia la zona de alimentación. En instantes temporales avanzados, aparecen inestabilidades en la solución que tienen un crecimiento exponencial, y llegan a invalidar la solución a partir del instante $1.0(m-l)$. Este problema no nos afecta, pues, sólo nos interesa la

intensidad hasta los instantes en los que aún no ha llegado la señal reflejada a la zona de alimentación.

En las Figs. 4.49, 4.50, 4.51, se han dibujado la parte real, imaginaria y módulo de la impedancia de entrada, respectivamente. Para hacer la transformada discreta de Fourier, se ha tomado una ventana temporal, de forma que, no se tienen en cuenta las reflexiones.

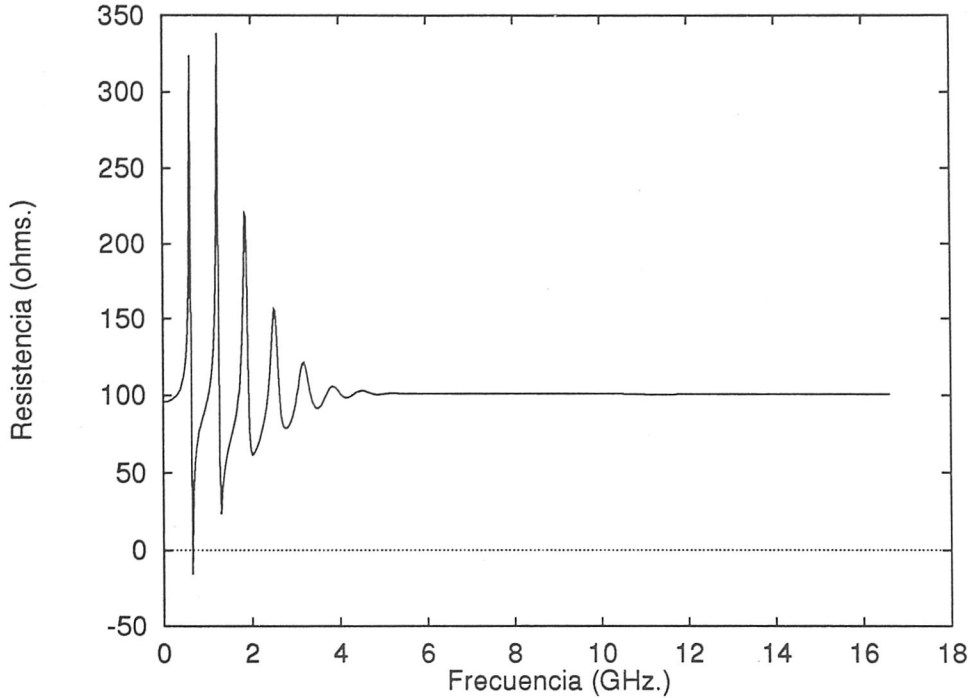


Figura 4.49: Parte real de la impedancia de entrada de la antena bicónica.

En la parte baja del espectro, correspondiente a longitudes de onda mayores que 10 veces la separación mínima entre centroides, no se obtienen los resultados deseados. A altas frecuencias se encuentra un límite para el módulo del impedancia de entrada de valor 100.7Ω . El valor teórico obtenido a partir de la ecuación (4.7), para el ángulo de apertura de $\theta = 47^\circ$, es 99.94Ω . En este caso la desviación respecto al valor teórico es sólo del 0.76%. Con el modelado hasta ahora presentados, se han realizado diversas pruebas con parámetro de pulso $g = 30(m - l)^{-1}$, y tomando $\Delta t = 0.8, 0.95(cm - l)^{-1}$. En líneas generales, se han obtenido resultados similares, encontrándose una desviación para el límite a altas frecuencias del valor de la impedancia de entrada, no superior al 1% respecto al valor teórico, para esta estructura. Los resultados obtenidos con esta estructura son muy exactos.

Se han realizado también pruebas, en las que se han introducido sólo 16 parches en la zona de alimentación, en vez de 20, como posee el modelo representado en la Fig.

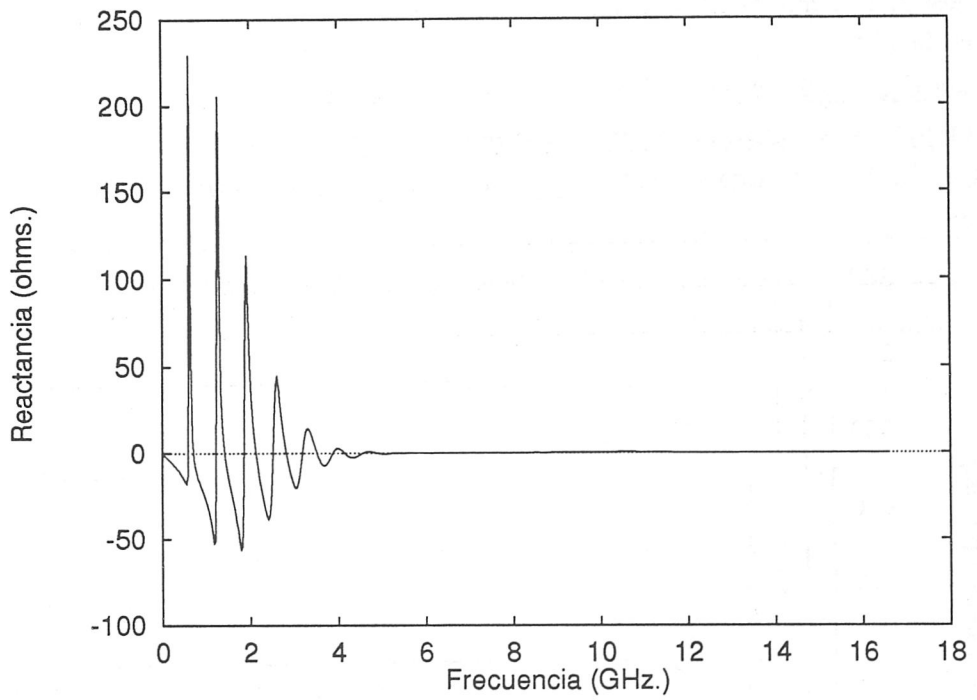


Figura 4.50: Parte imaginaria de la impedancia de entrada de la antena bicónica.

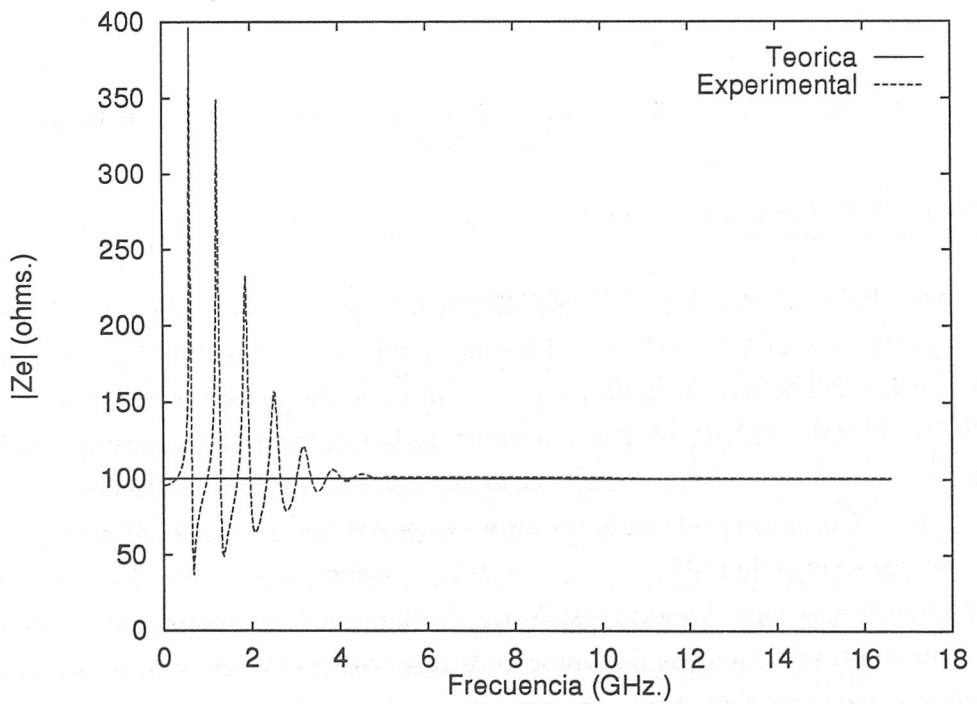


Figura 4.51: Módulo de la impedancia de entrada de la antena bicónica.

4.47, manteniendo igual el mallado del resto de la estructura. En estos casos, el límite

θ	Altura(m.)	Triángulos	Lados internos	$R_{c_{min}}(cm.)$	$\Delta t(cm - l)$	$\frac{S_{max}}{S_{min}}$
30 ⁰	0.27	832	1164	0.750	0.75	3.16
34 ⁰	0.24	792	1108	0.849	0.84	3.20
38 ⁰	0.24	880	1236	0.923	0.92	3.06
42 ⁰	0.21	908	1276	0.862	0.86	3.36
46 ⁰	0.21	984	1388	0.921	0.92	2.85
47 ⁰	0.22	984	1388	0.960	0.95	2.91
50 ⁰	0.21	984	1388	0.996	0.99	3.15
54 ⁰	0.17	984	1388	0.883	0.89	3.55
58 ⁰	0.17	984	1388	0.980	0.98	4.00

Tabla 4.2: Datos del modelado de la antena bicónica para distintos ángulos de apertura θ .

encontrado a altas frecuencias para la impedancia de entrada, ha sido tan sólo unas décimas de ohmio por encima, a los respectivos casos en los que se han usado 20 parches en la zona de alimentación.

Con objeto de verificar la validez del procedimiento, se han modelado distintas antenas bicónicas con diferentes ángulos de apertura θ . Los datos correspondientes a la geometría de los modelos utilizados para cada ángulo θ se exponen en la tabla 4.2. (se recogen los datos que se citan a continuación: valor del ángulo de apertura θ , altura de uno de los conos, número de triángulos, número de lados internos, distancia mínima entre centroides de parches, incremento temporal utilizado, y relación entre la superficie máxima y mínima de los parches del modelado). Los datos correspondientes al ángulo de apertura $\theta = 47^0$, corresponden al ejemplo utilizado con anterioridad representado en la Fig. 4.47.

(los datos correspondientes al ángulo de apertura $\theta = 47^0$, corresponden al ejemplo utilizado con anterioridad representado en la Fig. 4.47).

En la Fig. 4.52, se representa la intensidad de entrada para distintos ángulos θ . Se observa, que cuanto mayor es el ángulo de apertura, la intensidad que atraviesa la zona de alimentación pasando de un cono al otro de la antena es mayor. A partir de estos datos, podemos obtener el valor de la impedancia de entrada en el dominio de la frecuencia. En todos los casos se encuentra un límite a altas frecuencias para Z_e .

El límite para la impedancia de entrada encontrado para cada ejemplo, junto con el valor teórico dado por la ecuación (4.7) se recogen en la tabla 4.3.

Los valores experimentales obtenidos están muy próximos a los teóricos. Se comete

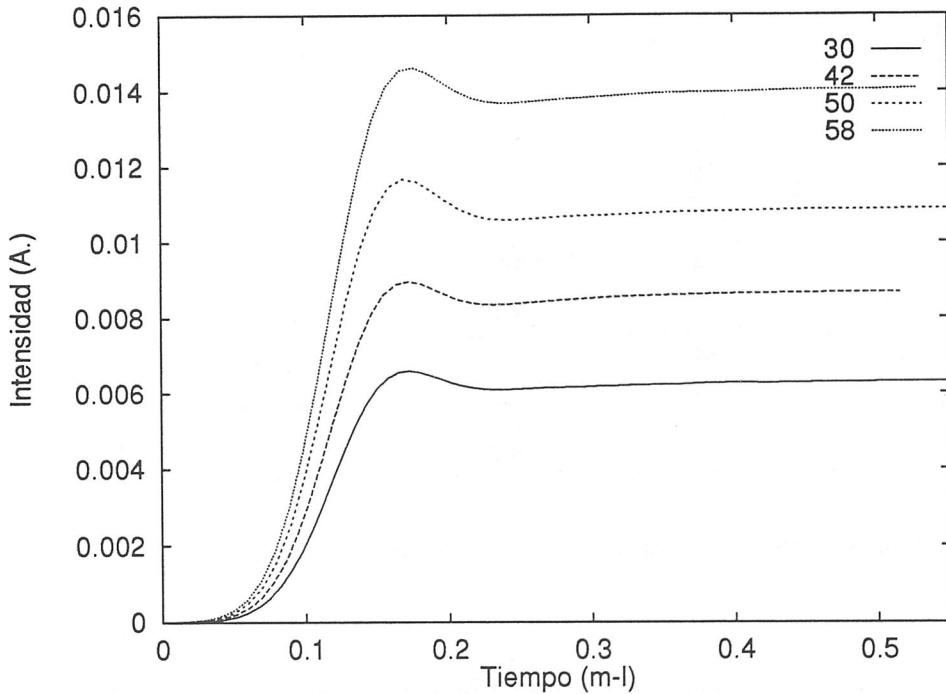


Figura 4.52: Intensidad de entrada en la antena bicónica para $\theta = 30^\circ, 42^\circ, 50^\circ, 58^\circ$.

θ (grados)	Z_e Teórica (Ω)	Z_e Experimental (Ω)	% error
30	158.035	158.3	0.17
34	142.206	142.7	0.35
38	127.940	128.4	0.36
42	114.896	115.4	0.44
46	102.828	103.2	0.36
47	99.9408	100.7	0.76
50	91.5492	91.86	0.34
54	80.9131	81.25	0.42
58	70.8040	71.15	0.49

Tabla 4.3: Comparación de las impedancias de entrada teórica y experimental de la antena bicónica para distintos valores del ángulo θ .

un error siempre por exceso que no se ha podido asociar con ningún parámetro. Se puede afirmar que el modelo de la zona de alimentación utilizado es bastante preciso. En la Fig. 4.53, se han dibujado los valores teóricos y experimentales de la impedancia de entrada recogidos en la tabla 4.3

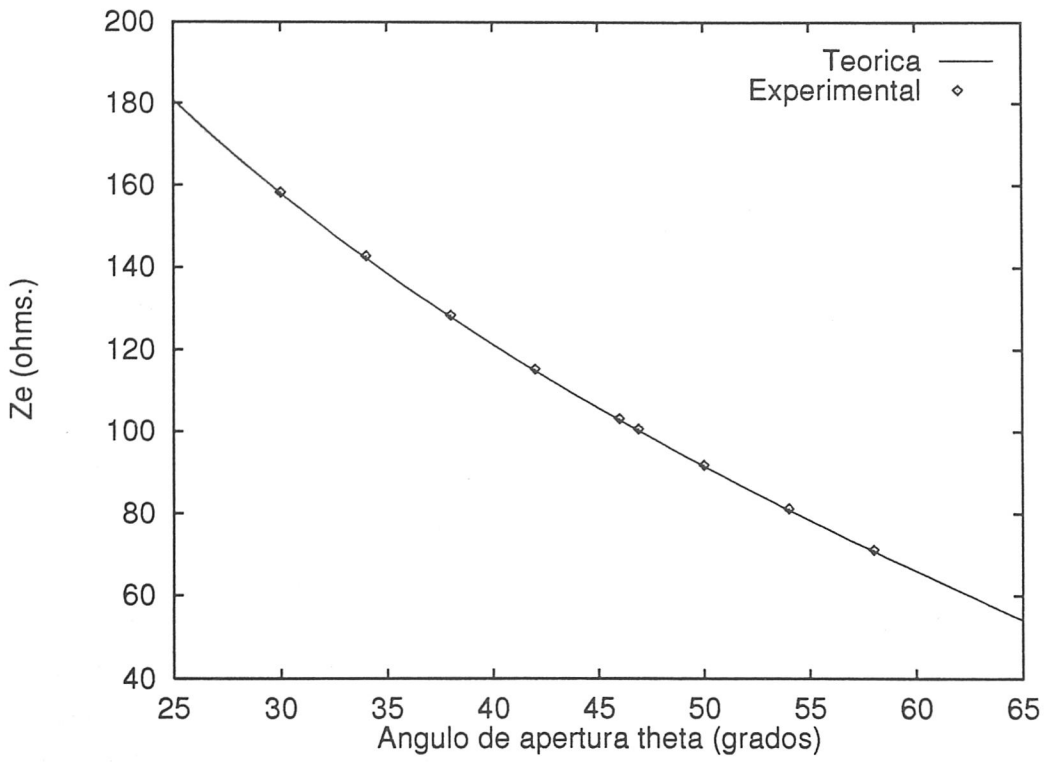


Figura 4.53: Impedancia de entrada de la antena bicónica en función del ángulo de apertura θ .

4.2.4 Antena de bocina TEM

En este apartado, vamos a considerar otro tipo de antenas que tienen importancia práctica, y que nos va a permitir mostrar otros aspectos importantes en el modelado de la zona de alimentación. La antena que vamos a tratar es la antena de bocina transversal electromagnética (antena de bocina TEM). Soporta modos de propagación transversales electromagnéticos, y es a su vez una estructura radiante direccional. Esta clase de antenas poseen gran interés para la radiación direccional de pulsos electromagnéticos [Shen et al., 1988].

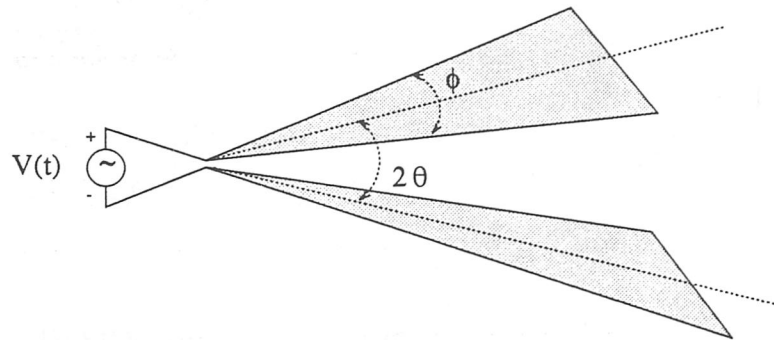


Figura 4.54: Antena de bocina TEM.

La antena direccional de bocina que se va a estudiar, (Fig. 4.54), consiste en dos placas planas triangulares similares que no están situadas en un mismo plano, pero que poseen un vértice común. El plano que contiene el vértice común y al eje de simetría de las placas, es perpendicular a ambas. Las placas sostienen un ángulo de separación 2θ , siendo θ el ángulo de elevación de cada placa respecto al eje de simetría de la estructura. Cada una de las placas es un triángulo isosceles, y llamaremos ϕ al ángulo del triángulo adyacente al vértice común.

Una forma sencilla de generar un mallado de la antena de bocina TEM, consiste en usar el mismo que el realizado para la antena auto-complementaria plana, pero girando las placas por el lado común hasta que formen un ángulo entre ellas igual a 2θ . Este modelado tiene un inconveniente, que es, que la derivada del contorno C_p a lo largo del lado p , es discontinua en dicho lado. La ecuación (4.1) no puede ser aplicada directamente para representar a la fuente de alimentación. Para evitar esta dificultad se puede redefinir la ecuación (4.1) para un \hat{dl}_p apropiado, o simplemente, considerar que la fuente de voltaje es aplicada a una zona de vacío infinitesimal ligeramente desplazada del centro del lado, p . Esto es, en lugar de la ecuación (4.1) podemos utilizar

$$\vec{E}^i(\vec{r}', t) \equiv V(t)\delta(\vec{r}' - \vec{r}_p^{e'})\hat{dl}_p \quad (4.8)$$

donde

$$\vec{r}_p^{e'} = \vec{r}_p^e - \Delta(\vec{r}^e - \vec{r}_p^{c+})$$

siendo $\Delta(\vec{r}^e - \vec{r}_p^{c+})$ un incremento infinitesimal arbitrario del vector $(\vec{r}^e - \vec{r}_p^{c+})$.

Para obtener el primer miembro de la ecuación (3.67), evaluamos la integral

$$\int_{C_m} \vec{E}^i(\vec{r}', t) d\vec{l}_m$$

Haciendo uso de la nueva definición del campo eléctrico incidente se obtiene una ecuación idéntica a la expresión (4.2).

De esta forma se obtienen resultados estables para ángulos de elevación mayores que (aproximadamente) 20° , pero para ángulos menores no se encuentra una solución estable. Este problema limita mucho la aplicabilidad del método, ya que, los ángulos típicos de elevación de este tipo de antenas son iguales o inferiores a 20° .

Existen dos razones interrelacionadas por las que la solución se hace inestable:

- En primer lugar, la posición de las singularidades en la función de transferencia del sistema (polos), dados por el método de la singularidad expandida (SEM), pueden conducirnos a una solución inestable, cuando las dos placas de la estructura están muy cercanas (casi placas paralelas) [Rynne and Smith, 1990].
- En segundo lugar, el algoritmo desarrollado proporciona buenos resultados, cuando el incremento temporal elegido pertenece a un intervalo temporal (no muy amplio) centrado en torno a la distancia mínima entre centroides; para ángulos de elevación pequeños, la distancia entre los centroides de los triángulos cercanos al vértice, puede ser muy pequeña, comparada con la distancia mínima entre los centroides en el resto de la estructura, y por tanto, las posibilidades que tenemos para elegir un incremento temporal que nos dé una solución estable son menores. Puede ocurrir incluso, que para ángulos de elevación pequeños no sea posible obtener una solución estable.

Con ángulos θ mayores que 42° , la separación mínima entre los centroides de los parches se mantiene igual y viene dada por la distancia mínima entre centroides de parches de una misma placa. Para ángulos de elevación menores que 42° , la separación mínima entre centroides decrece con el ángulo de elevación θ , y viene determinada por la distancia entre los centroides de los triángulos adyacentes al lado en el que se alimenta. Por tanto, como ya se ha comentado anteriormente, para ángulos de elevación lo suficientemente pequeños, la distancia entre los centroides de los triángulos de la zona de alimentación es tan pequeña, comparada con la del resto de la estructura, que no se puede obtener una solución estable.

Partiendo de la Fig. 4.37, y con el objeto de asegurarnos que los triángulos de las placas se mantienen convenientemente separados, para cualquier ángulo de elevación θ , podemos mantener los seis parches de la zona de alimentación en un mismo plano, y girar el resto de la placa, hasta la posición deseada.

En la Fig. 4.55, se representa el modelado, que se consigue utilizando el procedimiento anteriormente descrito, para una antena de bocina TEM. La estructura dibujada posee un ángulo de elevación $\theta = 14^\circ$, un ángulo $\phi = 40^\circ$, siendo la altura de los triángulos que componen las placas de $0.333m$. Con esta forma de modelar la zona de alimentación no hay ningún problema en encontrar una solución estable, a la vez que, se tiene un camino lineal cruzando el lado que se alimenta contenido en el plano común a los parches de la región de alimentación.

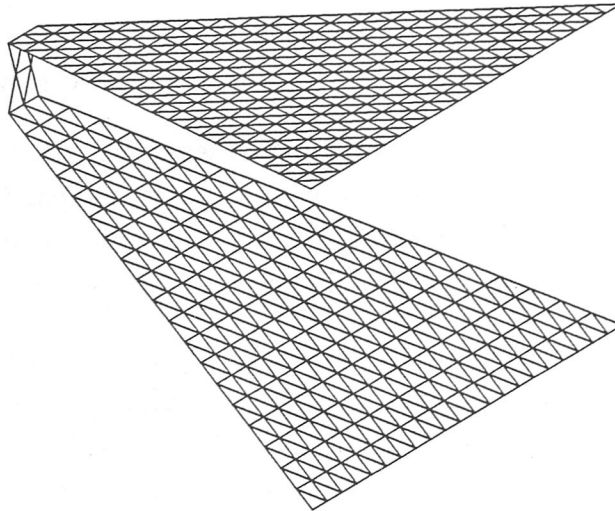


Figura 4.55: Modelado de la antena de bocina TEM.

El modelo contiene 880 parches y 1259 lados internos. La distancia mínima entre centroides es de $0.736cm$., la relación superficie máxima y mínima de los triángulos que componen el mado es $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 1.06$, y el incremento temporal utilizado es $\Delta t = 0.73(cm - l)$.

La estructura descrita es alimentada en el lado central de la zona de alimentación mediante un campo eléctrico incidente dado por (4.1). Se usa como fuente de alimentación, $V(t)$, la función error con un parámetro de pulso $g = 20(m - l)^{-1}$. La intensidad que atraviesa el lado en el que se alimenta se ha dibujado en la Fig. 4.56.

Se observa como la intensidad no reproduce exactamente a la tensión de entrada (dada en la Fig. 4.39). A diferencia de lo que ocurría con la antena auto-complementaria plana y con la antena bicónica, ahora no se produce la pequeña oscilación de la señal antes de estabilizarse. Se encuentra, como era de esperar, que a partir del instante

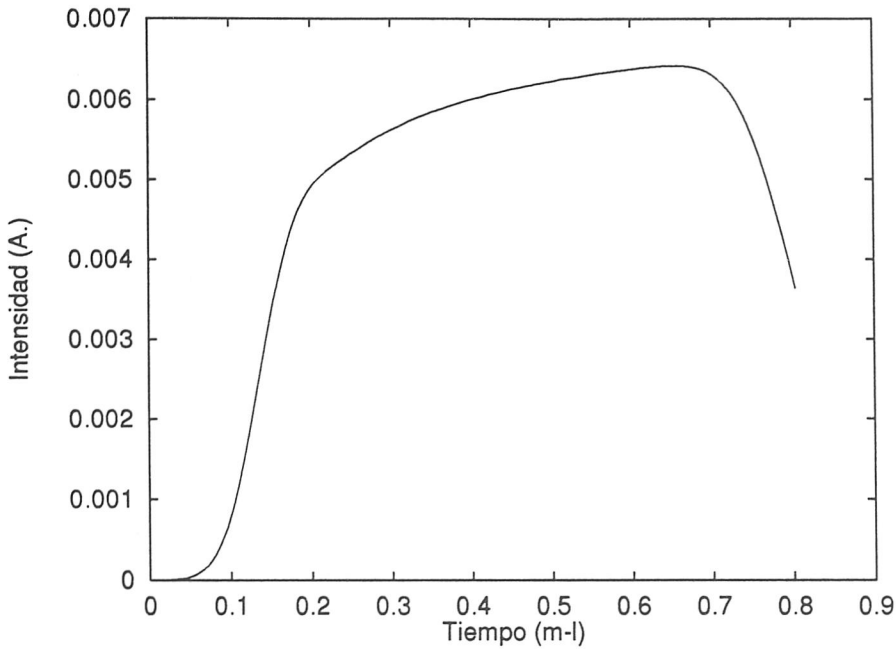


Figura 4.56: Intensidad de entrada en la antena de bocina TEM, $\theta = 14^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

temporal, $t = 0.66(m - l)$, la intensidad empieza a caer debido a las reflexiones de la densidad superficial de corriente en los bordes de las placas.

La parte real e imaginaria de la impedancia de entrada, obtenidas considerando sólo la parte de la intensidad hasta el instante temporal $t = 0.657(m - l)$, se representa en las Figs. 4.57 y 4.58. El módulo se puede ver en la Fig. 4.59.

En este caso, encontramos un límite a altas frecuencias para $|Z_e|$, igual a 155.8Ω . Para la antena de bocina TEM infinita con las características que posee la que estamos tratando, se obtiene según el trabajo de Carrel [Carrel, 1958] una impedancia de entrada $Z_e = 100\Omega$. El cálculo se realiza haciendo una aproximación teórica basada en el método "Conforma Mapping Technique". Los resultados experimentales obtenidos usando reflectometría en el dominio del tiempo, indican, en desacuerdo con los obtenidos por Carrel, que la impedancia de entrada de esta antena es aproximadamente de 150Ω . Booker en [Booker et al., 1994], mediante la resolución numérica de la EFIE utilizando el algoritmo dado en [Rynne, 1991], obtiene para esta estructura $Z_e = 148.1\Omega$. Recientemente en [Lambert et al., 1994], se ha identificado un error en el análisis de Carrel y se plantea una nueva aproximación teórica basada en el método "Conformal Mapping Technique", que apunta hacia una impedancia de entrada para esta antena que se sitúa alrededor de 150Ω . Por tanto, el resultado obtenido con el programa desarrollado en esta tesis, está en concordancia con los métodos desarrollados recientemente para el estudio de este tipo de antenas. A modo de resumen, en la tabla 4.4 se recogen los distintos resultados para

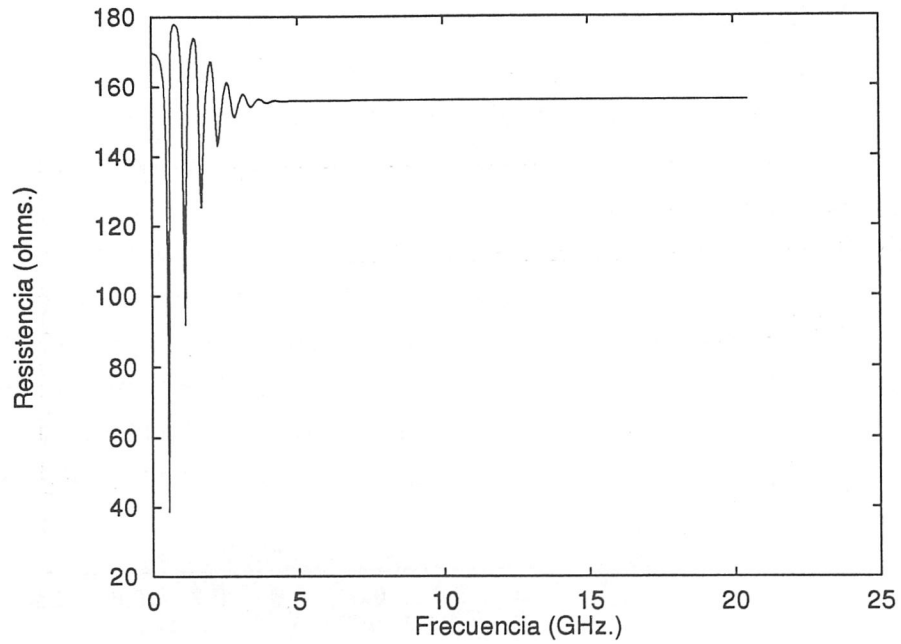


Figura 4.57: Parte real de la impedancia de entrada para la antena de bocina TEM, $\theta = 14^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

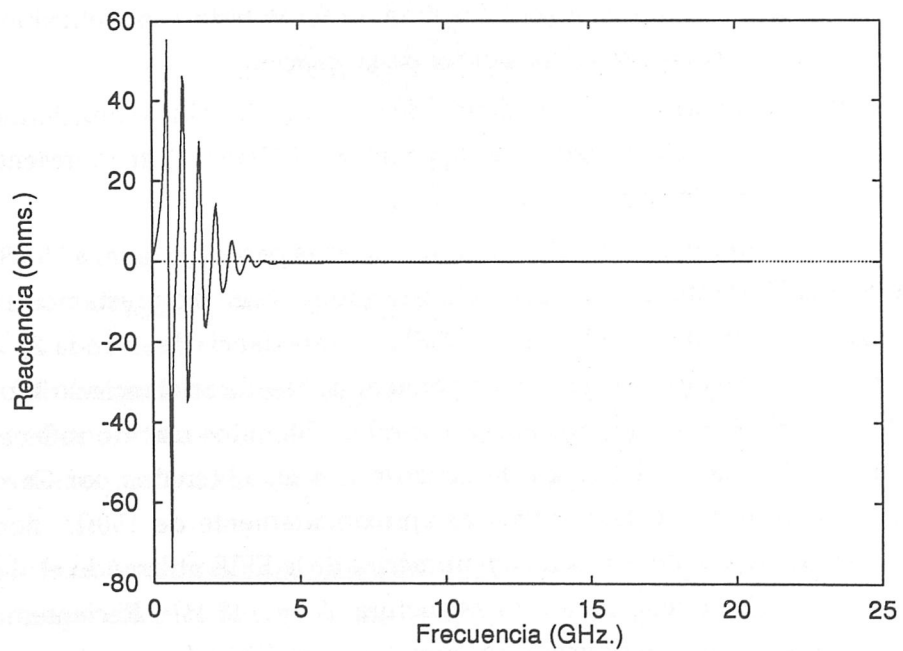


Figura 4.58: Parte imaginaria de la impedancia de entrada para la antena de bocina TEM, $\theta = 14^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

la impedancia de entrada de la antena de bocina TEM citados con anterioridad.

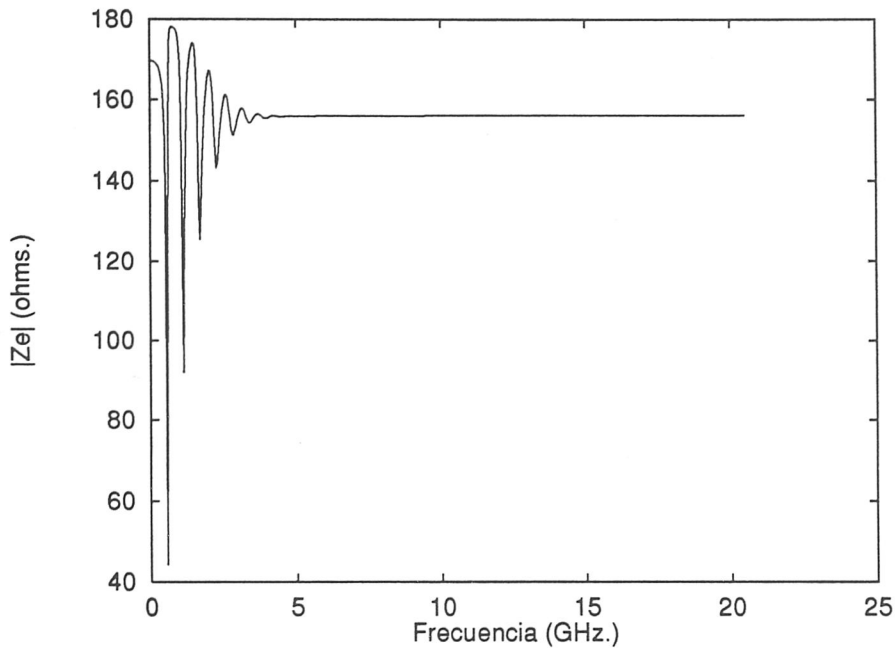


Figura 4.59: Módulo de la impedancia de entrada para la antena de bocina TEM, $\theta = 14^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

Z_e Carrel(1958)	Z_e TDR	Z_e Booker(1994)	Z_e Lambert(1994)	Z_e DOTIG4
$\sim 100\Omega$	$\sim 150\Omega$	148.1 Ω	$\sim 150\Omega$	155.8 Ω

Tabla 4.4: Comparación de los diferentes resultados para la impedancia de entrada de la antena de bocina TEM, con $\theta = 14^\circ$, $\phi = 40^\circ$.

4.2.5 Antena V-cónica

La antena V-cónica la vamos a utilizar para verificar la validez del método utilizado para simular la zona de alimentación usado en el estudio de la antena de bocina TEM. En [Shen et al., 1988], la antena V-cónica está ampliamente descrita, y usaremos los resultados que se obtienen en el citado trabajo para validar los obtenidos con el algoritmo desarrollado en esta tesis.

El diseño básico de una antena V-cónica se representa en la Fig. 4.36. En el caso ideal, la longitud de las superficies que la componen es infinita, y presenta una impedancia independiente de la frecuencia [Shen et al., 1988]. En la práctica, como las dimensiones de la antena han de ser finitas, el ancho de banda que presenta también está limitado. Una de sus características más importantes, es que los campos electromagnéticos que radia son ondas esféricas TEM, incluso en zonas de campo cercano. Antenas de este tipo se usan como alimentadores de pulso para placas paraboloideas, o como antena de infrarojos o submilimétrica [Rutledge et al., 1978].

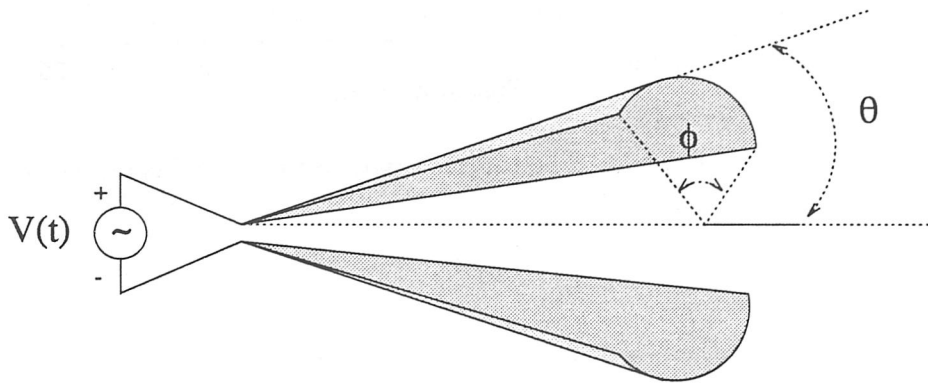


Figura 4.60: Antena V-cónica con ángulo de elevación θ , y de apertura ϕ .

La impedancia de entrada teórica para estas antenas deducida por Shen en [Shen et al., 1988] es

$$Z_e = \frac{Z_0 K(\cos \phi_0)}{2 K(\sin \phi_0)} \quad (4.9)$$

de donde, Z_0 es la impedancia característica del vacío, $Z_0 = 120\pi\Omega$, ϕ_0 es la mitad del ángulo de apertura ϕ , esto es, $\phi_0 = \frac{\phi}{2}$, y $K(x)$ es la integral elíptica completa de primera clase con módulo x , y viene dada por

$$K(\sin \phi_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi_0 \sin^2 \alpha}}$$

$$K(\cos \phi_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d_\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi_0 \sin^2 \alpha}}$$

Hay que señalar que la impedancia de entrada es independiente del ángulo de elevación θ .

En la Fig. 4.61 se ha dibujado el modelado utilizado para el estudio de la antena V-cónica con un ángulo de elevación $\theta = 30^\circ$, y un ángulo de apertura $\phi = 90^\circ$. La región de alimentación contiene 6 triángulos, todos ellos en un mismo plano.

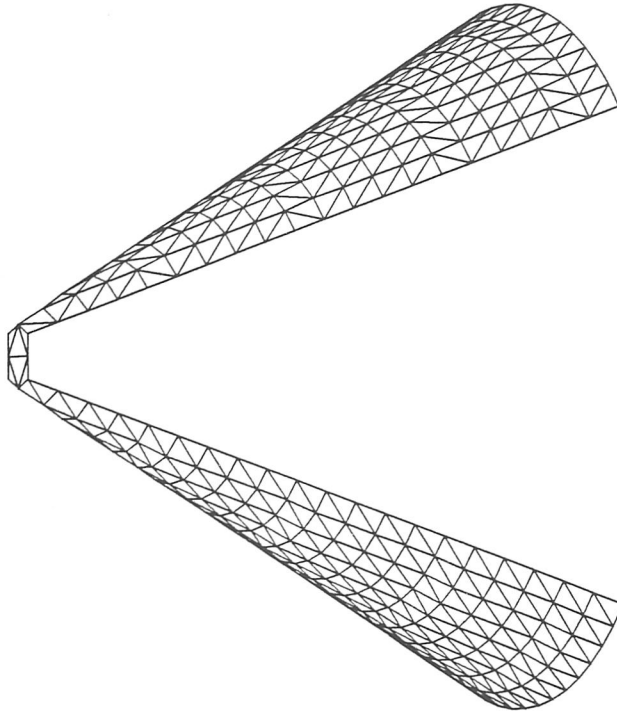


Figura 4.61: Modelado de la antena V-cónica, $\theta = 30^\circ$, $\phi = 90^\circ$.

Con objeto de verificar la validez del procedimiento, se han modelado distintas antenas V-cónicas con diferentes ángulos de apertura ϕ , y de elevación θ . Los datos correspondientes a la geometría de los modelos para cada ángulo ϕ y θ , se exponen en la tabla 4.5. En todos los mallados se han utilizado seis triángulos en la zona de alimentación. En los casos no marcados con el símbolo (*), el modelo es equivalente al dibujado en la Fig. 4.61; En los marcados con (*) los tres triángulos de la zona superior de la alimentación sutienden con los tres de la zona inferior un ángulo de 90° . Estos ejemplos nos sirven para verificar la validez de la ecuación (4.8). Los datos que se recogen en la tabla son los que se citan a continuación: valor del ángulo de apertura ϕ , ángulo de elevación θ , altura de una de las placas, número de triángulos, número de lados internos, distancia mínima entre centroides de parches, incremento temporal

ϕ	θ	Altura(m.)	Triángulos	Lados internos	$Rc_{min}(cm.)$	$\Delta t(cm - l)$	$\frac{S_{max}}{S_{min}}$
(*) 40^0	30^0	0.2887	618	855	0.4036	0.41	2.80
40^0	50^0	0.2143	926	1313	0.4421	0.44	3.17
(*) 40^0	70^0	0.1140	724	1023	0.5394	0.54	2.99
90^0	30^0	0.2887	756	1075	0.6922	0.70	2.83
90^0	50^0	0.2143	756	1077	0.6221	0.62	2.25
(*) 90^0	70^0	0.1140	856	1225	0.6198	0.61	1.60

Tabla 4.5: Datos del modelado de la antena V-cónica para distintos ángulos de elevación θ , y de apertura ϕ . (En los casos marcados con (*) los seis triángulos de la zona de alimentación no están en el mismo plano).

utilizado, y relación entre la superficie máxima y mínima de los parches del modelado.

En las Figs. 4.62, y 4.63, se puede ver la intensidad de entrada en la antena en el dominio del tiempo para los distintos casos estudiados, y recogidos en la tabla 4.5. En la Fig. 4.62, se han dibujado las intensidades correspondientes a un ángulo de apertura $\phi = 40^0$, y en la Fig. 4.63 para el ángulo $\phi = 90^0$. Se observa como para un mismo ángulo de apertura las intensidades prácticamente no varían con el ángulo θ . Si hay diferencias en cuanto a magnitud entre las intensidades correspondientes a ángulos de apertura distintos. En la Fig. 4.62, la curva de intensidad de entrada correspondiente al ángulo $\phi = 40^0$ y $\theta = 30^0$, presenta inestabilidades de baja frecuencia en los últimos instantes temporales. Estas inestabilidades no nos influyen en los resultados en el dominio de la frecuencia en la zona alta del espectro. Por tanto, el límite que encontramos para la impedancia de entrada en este caso es válido.

La validez de los resultados obtenidos puede observarse en las Figs. 4.64, y 4.65, en las que se representa el módulo de la impedancia de entrada obtenido a partir de las Figs. 4.62, y 4.63, y se compara con los valores teóricos dados por la ecuación (4.9).

Los resultados obtenidos son excelentes y están en concordancia con los obtenidos por Shen en [Shen et al., 1988]. Los valores de las impedancias obtenidos se detallan en la tabla 4.6, y se comparan con los determinados por la expresión (4.9). Las discrepancias entre los resultados numéricos y los dados por Shen también se muestran (en términos de desviaciones respecto a los valores de Shen). Las simulaciones numéricas nos muestran que la impedancia de entrada de la antena V-cónica es independiente del ángulo de elevación θ , tal y como obtiene Shen en [Shen et al., 1988]. (hay que señalar que la antena V-cónica con ángulo de elevación $\theta = 90^0$, y ángulo $\phi = 90^0$, es la antena auto-complementaria plana ya estudiada).

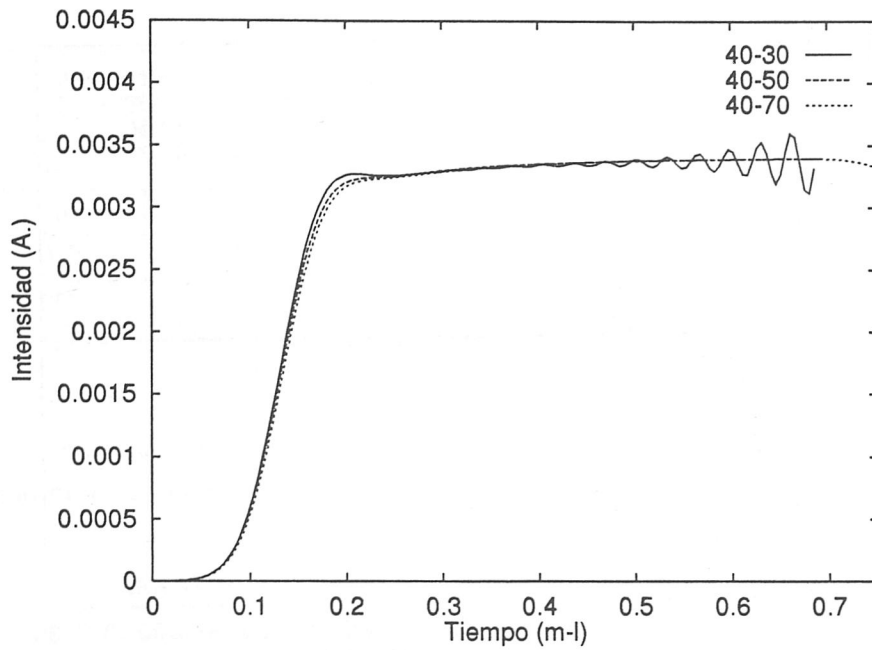


Figura 4.62: Intensidad de entrada en la antena V-cónica con $\phi = 40^\circ$ y $\theta = 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$.

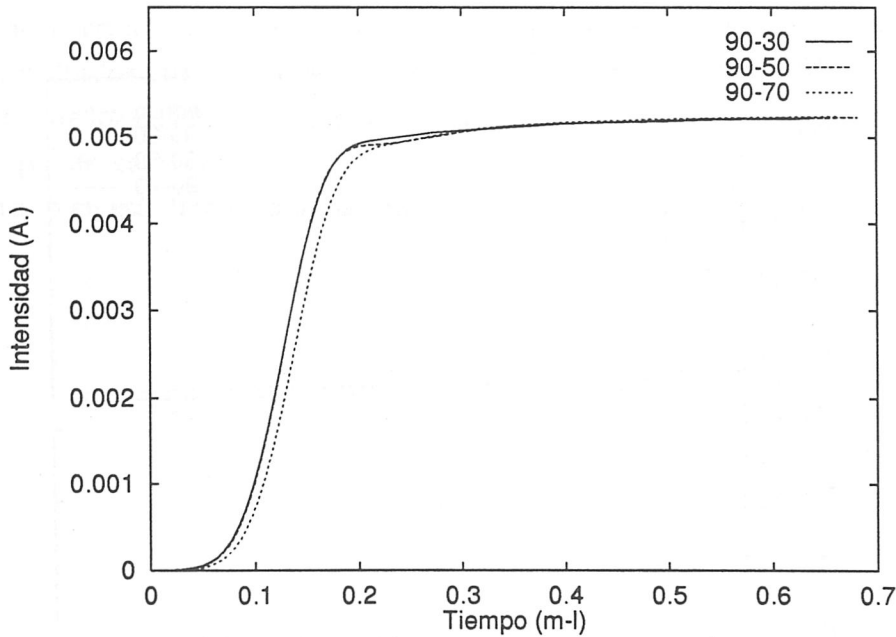


Figura 4.63: Intensidad de entrada en la antena V-cónica con $\phi = 90^\circ$ y $\theta = 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$.

Con objeto de comprobar la tolerancia del algoritmo al mallado que se realiza de la zona de alimentación, se ha realizado una simulación diferente para el caso $\theta = 30^\circ$, $\phi = 40^\circ$. En dicha simulación se han utilizado sólo 4 parches en la región de alimentación,

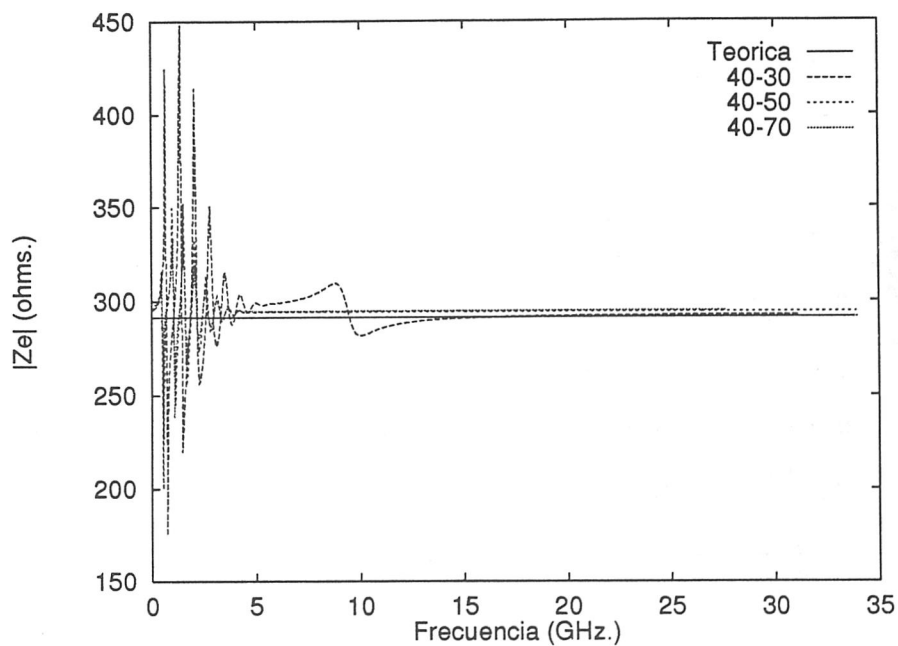


Figura 4.64: Módulo de la impedancia de entrada de la antena V-cónica con $\phi = 40^\circ$ y $\theta = 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$.

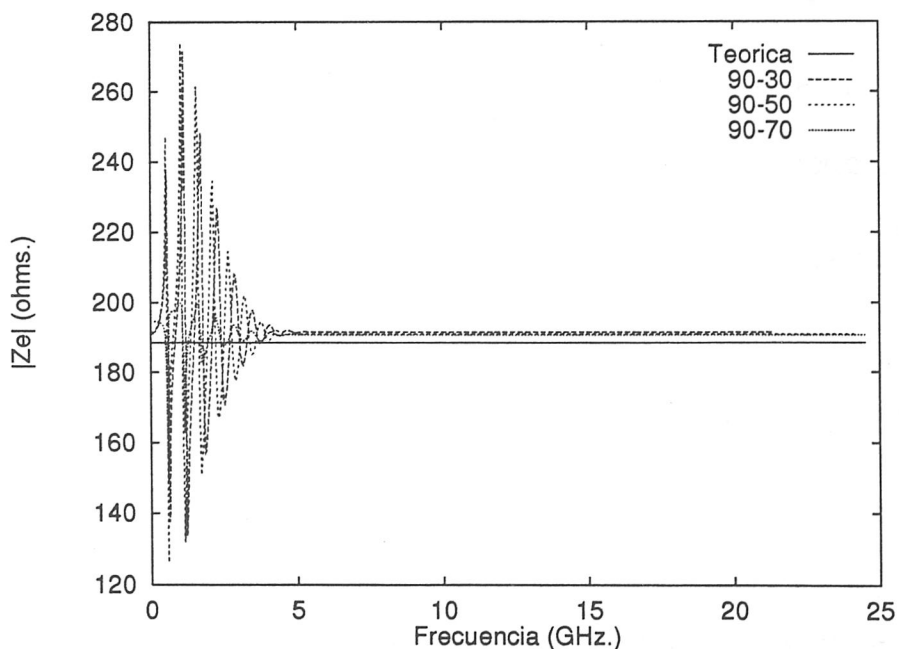


Figura 4.65: Módulo de la impedancia de entrada de la antena V-cónica con $\phi = 90^\circ$ y $\theta = 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$.

situados en un mismo plano. Se ha mallado la estructura con 618 triángulos y 855 lados

ϕ (grados)	θ (grados)	Z_e Teórica (Ω)	Z_e Experimental (Ω)	% error
40 ⁰	30 ⁰	291.4	292.50	0.38
40 ⁰	50 ⁰	291.4	294.35	1.01
40 ⁰	70 ⁰	291.4	294.80	1.17
90 ⁰	30 ⁰	188.5	191.56	1.62
90 ⁰	50 ⁰	188.5	191.06	1.35
90 ⁰	70 ⁰	188.5	190.76	1.20

Tabla 4.6: Comparación de la impedancia de entrada teórica de la antena V-cónica para distintos ángulos de elevación θ , y de apertura ϕ .

internos. La distancia mínima entre centroides es 0.4036cm. , se tiene una relación $\frac{S_{max}}{S_{min}} = 2.80$, y se utiliza un incremento temporal $\Delta t = 0.41(\text{cm} - l)$. En este caso se obtiene un valor de la impedancia de entrada $Z_e = 297.1\Omega$, lo que nos dá una desviación del 1.96% respecto al valor teórico que es 291.4Ω . Podemos afirmar que el modelado que se haga de la estructura nos puede influir en los resultados obtenidos, aunque no sea de una forma crítica. Es importante por tanto un diseño del modelo apropiado para obtener resultados muy precisos.

A partir de los resultados obtenidos con la antena V-cónica y con la antena de bocina TEM, se puede concluir que el los distintos modelos utilizados para representar la alimentación en este tipo de antenas direccionales quedan validados.

Conclusiones

En esta memoria se resuelven mediante el método de los momentos en el dominio del tiempo las ecuaciones integrales MFIE y EFIE para superficies conductoras modeladas por parches planos. Las principales aportaciones realizadas pueden resumirse en:

- Se ha desarrollado un nuevo algoritmo que resuelve la ecuación MFIE para estudiar la **dispersión** de una OEMT por estructuras conductoras **cerradas** modeladas por parches planos. El algoritmo introduce un tratamiento numérico más preciso que reduce los errores introducidos en el proceso de discretización.
- Se ha estudiado el comportamiento de la ecuación MFIE discretizada para distintos tipos de superficies conductoras cerradas obteniéndose las siguientes conclusiones:
 - Para la ecuación MFIE los errores de cometidos en la discretización influyen considerablemente en la aparición de inestabilidades en la solución.
 - En los casos de superficies con curvaturas suaves estudiadas (esfera y cilindro con terminaciones semiesféricas) se obtienen soluciones estables.
 - Para las superficies con discontinuidades en su curvatura (superficies con filos, esquinas y puntas) se obtienen soluciones que son inestables, pero estas aparecen en instantes temporales más avanzados con el nuevo tratamiento que se ha realizado. El efecto de las puntas es menos influyente en la aparición de inestabilidades que el debido a filos y esquinas.
- Se ha desarrollado un nuevo algoritmo, **DOTIG4**, que resuelve la ecuación EFIE para estructuras conductoras **arbitrarias** modeladas mediante parches triangulares planos. Para ello se ha realizado un nuevo tratamiento de la dependencia temporal de las variables utilizando como funciones base polinomios de interpolación lagrangiana de orden dos y cuatro, y funciones peso delta de Dirac. La potencia del nuevo algoritmo radica en su aplicabilidad a superficies conductoras actuando como **dispersores** o como **antenas**.

- Se ha validado el programa DOTIG4 aplicándolo al cálculo de la RCS de distintos objetos y al estudio de antenas de banda ancha, comparando los resultados con los proporcionados por otros métodos numéricos en el dominio del tiempo desarrollados en el Grupo de Electromagnetismo de Granada (FDTD), y con los resultados numéricos, experimentales y teóricos encontrados en la bibliografía en el dominio de la frecuencia, via FFT. Los resultados obtenidos están en concordancia con todos ellos. Como consecuencia de este estudio se han obtenido las siguientes conclusiones:
 - En el modelado es importante que los parches triangulares utilizados sean lo más equiláteros posible, y que se dé una relación entre áreas no mayor a un factor 4 para cualquier par de parches. Cuando no se cumplen estas condiciones la obtención de una solución estable no está asegurada.
 - El orden de interpolación no afecta a la estabilidad de la solución y muy poco a su exactitud.
 - El incremento temporal elegido debe estar lo más próximo posible a la distancia mínima entre puntos campo. Este parámetro afecta mucho a la aparición o no de inestabilidades en la solución.
 - En el caso de antenas se ha realizado un estudio sobre distintas formas de modelar la zona de alimentación, estableciendo unos modelos válidos para los distintos casos que se pueden presentar.
 - Para las antenas de banda ancha estudiadas se ha encontrado un límite para la impedancia de entrada a altas frecuencias que no se desvía más de un 2% con respecto al valor característico de la impedancia de dichas estructuras.
- Se han desarrollado los programas de preproceso de datos que cubren las necesidades de los programas DOTIG2 y DOTIG4.
- Para el tratamiento de las integrales divergentes de superficie que aparecen en el tratamiento numérico se ha realizado un estudio de los distintos métodos existentes, y se ha desarrollado un algoritmo que las calcula analíticamente.

Apéndice A

Estabilidad de ecuaciones integrales

A.1 Introducción

El estudio del problema de la dispersión de ondas electromagnéticas transitorias (OEMT) en el dominio del tiempo se puede plantear en forma diferencial o en forma integral. El formalismo diferencial permite el estudio de dispersores mas grandes y complejos que el formalismo integral. Este último método presenta ventajas a la hora de estudiar problemas en la región de resonancia del objeto, ya que contiene la condición de radiación de forma explícita y el proceso de solución se limita a la superficie de la estructura. En el formalismo integral se expresa la solución en cada instante en función de la solución calculada en instantes anteriores, partiendo de solución nula en $t=0$, [Bennett and Ross, 1978], [Gómez et al., 1991].

La formulación integral se aplica a problemas en dos y tres dimensiones relativas a la dispersión electromagnética por objetos penetrables e impenetrables, [Bennett and Mieras, 1981a], [Salinas, 1991].

Uno de los principales problemas que surgen en el proceso de solución escalonado en el tiempo es la acumulación del error que se comete en cada instante en la solución. Este error aunque sea pequeño al principio puede crecer de forma exponencial e invalidar la solución si su aparición tiene lugar en instantes en los cuales la solución no ha tendido a cero.

En términos generales las causas de las inestabilidades son tanto el proceso de discretización de la ecuación integral y de los operadores que constituyen su núcleo, como de una mala aplicación de las condiciones de frontera en fillos y esquinas del objeto dispersor, [Tijhuis, 1984], [Salinas, 1991], [Rynne, 1985]

La formulación integral del problema se hace usualmente mediante la ecuación integral para el campo eléctrico (EFIE) [Vechinski and Rao, 1992a] o la ecuación integral para el campo magnético (MFIE). Un estudio de ambas ecuaciones con sus ventajas e

inconvenientes se hace en [Salinas, 1991]. Señalar a modo de resumen que la MFIE es apropiada para superficies cerradas con curvatura suave mientras que la EFIE se aplica a problemas mucho más generales.

Puesto que el objetivo de esta apéndice es el estudio de las inestabilidades surgidas en el proceso de solución escalonado en el tiempo de las ecuaciones integrales, y dado que las causas que provocan la aparición de las inestabilidades son las mismas en ambos casos, se ha preferido utilizar la MFIE en una primera etapa debido a la sencillez de su núcleo y por ser una ecuación integral de tipo explícito (ecuación de Fredholm de segunda clase). Esto nos permitirá aislar las dos causas de inestabilidades citadas anteriormente (discretización de la ecuación integral y mala aplicación de las condiciones de frontera en filos y esquinas) y consiguientemente establecer unos criterios para evitar su aparición.

Pretendemos pues establecer técnicas de aplicación que nos garanticen la convergencia del método en el sentido de que el error en cada instante tiende a cero cuando el tamaño característico de la discretización también lo haga.

A.2 Consistencia, convergencia y estabilidad

Sea la ecuación integral

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi^i(\vec{r}, t) + \int_D d\vec{r}' \int_0^{t-R/c} dt' K(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \phi(\vec{r}', t') \quad (\text{A.1})$$

$$r \in D, t \geq 0$$

en donde:

\vec{r} , \vec{r}' vectores de posición de puntos campo y fuente respectivamente. $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$
 C velocidad de la luz. $t' = t - R/c$

ϕ^i campo incidente con $\phi^i(\vec{r}, t) = 0, \forall \vec{r} \in D, t \leq 0$

ϕ , ϕ^i pueden ser funciones escalares o vectoriales dependiendo del problema.

$K(\vec{r}, \vec{r}', t, t')$ es su operador lineal en ϕ .

D es la frontera del obstáculo (o su interior para otros problemas).

Suponemos que la ecuación (A.1) está bien planteada y tiene solución única.

La resolución de la ecuación (A.1) se puede hacer mediante un proceso de solución escalonado en el tiempo y para ello se divide el dominio D en una malla de parches que definen un conjunto de puntos campo \vec{r}_α . Sea h la dimensión típica del mallado: h suele representar la distancia mínima entre puntos del mallado. Se supone que el mallado es suficientemente uniforme. De todas formas la uniformidad del mallado es un factor

determinante en la exactitud pero no tanto en la estabilidad, al menos para la ecuación MFIE [Salinas, 1991].

El tiempo se divide uniformemente en incrementos Δt , de manera que $t = m\Delta t$, $m = 0, 1, 2, \dots$. El Δt debe elegirse con la condición de que $c\Delta t \leq h$ (h distancia mínima entre centros de parches) para dar coherencia al método. (más adelante se estudiará esta cota superior del incremento temporal).

De esta forma la ecuación (A.1) se puede expresar como

$$(1 - \tilde{K}_h(\alpha, \alpha, m, m))\phi(\vec{r}_\alpha, m\Delta t) \simeq \sum_{m'=\infty}^{m-1} \sum_{\alpha'} \tilde{K}_h(\alpha, \alpha', m, m')\phi(\vec{r}_{\alpha'}, m'\Delta t) \quad (\text{A.2})$$

El valor de $\phi(\vec{r}, m\Delta t)$ se obtiene a partir de los valores $\phi(\vec{r}_{\alpha'}, m', \Delta t)$ con $m' \leq m - 1$, siempre que se verifique que $1 - \tilde{K}_h(\alpha, \alpha, m, m) \neq 0 \forall \alpha, m$.

Definición A.1 (error de discretización) Se define el error de discretización $\delta(h)$ como una cota superior de la diferencia obtenida entre la ecuación (A.1) y la ecuación (A.2) aplicada a $\phi(\vec{r}_{\alpha'}, m\Delta t)$.

Sin embargo la solución que proporciona la ecuación (A.2), $\tilde{\phi}_h$, será una aproximación de la solución verdadera ϕ . Por tanto definimos

Definición A.2 (error en la solución) Se define el error en la solución e_m como

$$E_m = \max_{\alpha} | \phi(r_\alpha, m\Delta t) - \tilde{\phi}_h(\alpha, m) | \quad (\text{A.3})$$

El crecimiento exponencial de este error puede invalidar la solución. La convergencia del método supone acotarlo, para lo cual se establece un criterio de convergencia que sugiere dos condiciones:

Condición de consistencia: El error de discretización $\delta(h)$ debe de tender a cero con h .

Condición de estabilidad: La razón de crecimiento del error en la solución debe estar acotada.

La evolución del error en la solución cumple una ecuación que es formalmente idéntica a la propia ecuación integral [Salinas, 1991]. Debido a la duración finita del campo incidente solo es necesario el cálculo de soluciones para $0 \leq t \leq T$ para un tiempo T determinado.

Sea $\Delta t = \gamma h$ para alguna constante $\gamma > 0$, si definimos:

$$E_T(h) = \max_{0 \leq m \leq M(h)} e_m(h) \quad (\text{A.4})$$

(siendo $M(h)$ el entero más próximo a $T/\gamma h$)

podemos establecer la convergencia de un proceso cuando $\forall T > 0$, Si $h \rightarrow 0 \Rightarrow E_t(h) \rightarrow 0$.

Puesto que el error de discretización por si solo no es capaz de hacer inestable la solución es necesario introducir una acotación al operador lineal que define la ecuación integral. Así en [Rynne, 1985] se establecen como condiciones suficientes para la convergencia, por un lado la consistencia del método y por otro la acotación del operador integro-diferencial discretizando, a través de la constante h , constituyendo esta última la condición de estabilidad. Además se demuestra que para cualquier método de solución escalonado en el tiempo que, siendo consistente, verifique la condición de estabilidad:

$$E_T(h) = O(\delta(h)), h \rightarrow 0 \quad (\text{A.5})$$

Cuando h es suficientemente pequeño, $E_t(h)$ crece con el tiempo según $\delta(h)e^{(\beta t/\gamma)}$ (siendo $\beta > 0$). Este resultado tiene como aplicación práctica inmediata el establecer la mejor elección del incremento temporal lo más cercano posible a la distancia mínima entre puntos campo. De esta manera la aparición de inestabilidades se retrasa y al mismo tiempo el algoritmo es más rápido [Salinas, 1991].

La condición de estabilidad que acota al operador integro-diferencial es equivalente a acotar el crecimiento del error en la solución a través de:

$$e_m^2(h) \leq hc \sum_{m'=0}^{m-1} e_{m'}^2(h) + \varepsilon^2(h) \quad (\text{A.6})$$

donde $\varepsilon(h) = O(\delta(h))$, y $c > 0$. La acotación es válida para todo $m\gamma h$ menor que $\bar{h} > 0$ fija.

En el teorema de convergencia es equivalente imponer cualquiera de las dos condiciones de estabilidad.

A.3 Inestabilidades

Las inestabilidades asociadas al proceso escalonado en el tiempo no aparecen como casos aislados sino que son inherentes al propio método de solución y tienen un crecimiento de tipo exponencial. Su aparición se debe a la existencia de soluciones de la ecuación integral homogénea y que tienen la forma: ([Rynne, 1986]

$$\phi_k = (-1)^k c e^{\alpha k}, k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

donde α es constante y c un factor de escala.

Una solución de este tipo genera inestabilidades si $\alpha > 0$.

Es evidente que esta solución exponencial no verifica la condición de contorno de solución nula para $t \leq 0$ [Tijhuis, 1984]. Sin embargo si la solución dada por la ecuación (A.7) es pequeña para k pequeño el campo incidente puede "inicializar" este tipo de solución y debido a su carácter exponencial crecer rápidamente. Además pueden existir varias soluciones con α diferente, pero predominará aquella con α mayor.

El método de la singularidad expandida (SEM) demuestra que la MFIE homogénea tiene un conjunto infinito de soluciones del tipo:

$$\vec{J}_r(\vec{r}, t) = e^{q_r t} \vec{J}_r(\vec{r}) \quad r = 1, 2, \dots$$

donde \vec{r} pertenece a la superficie del dispersor y q_r son los polos del envolvente del operador integro-diferencial [Jones, 1979]. La mayoría de estos polos se sitúan en la parte izquierda del plano complejo y por tanto corresponden a exponenciales decrecientes.

Sin embargo las resonancias internas corresponden a soluciones para las que $q_r = i2\pi f_r$ para una secuencia creciente de f_r .

En teoría, los polos no pueden ser excitados por un campo incidente externo puesto que la integral de acoplo de un campo exterior con los campo resonantes es nula para estos polos [Jones, 1979]. Sin embargo la solución numérica hace que estos polos se exciten, aunque sea a un nivel muy pequeño y los errores numéricos introducidos mueven estos polos hacia la parte derecha del plano complejo, siendo este más acusado para las altas frecuencias, donde los errores son mayores. Concretamente para frecuencias menores que $f_r < 1/(2\Delta t)$ el error cometido será menor (y según los resultados obtenidos poco significativo en el sentido de permanecer los polos muy próximos al eje imaginario) que para $f_r \approx 1/(2\Delta t)$, puesto que en este caso estamos en los límites de la capacidad de muestreo. Así esta resonancia hará que en cada instante la señal cambie de signo y se modele por la exponencial creciente: forma típica de las inestabilidades aparecidas.

En [Rynne, 1985] se demuestra como para la MFIE la contribución más importante a las inestabilidades de la solución proviene de la aproximación numérica de la derivada temporal. En [Rynne, 1986] se estudian diferentes fórmulas de diferencias finitas de la derivada, y que una fórmula centrada genera mayor estabilidad que una directa o inversa. Debido al comportamiento de las inestabilidades esta conclusión se explica debido a las cancelaciones producidas por los cambios de signo.

El uso de una fórmula de mayor orden para expresar la derivada conlleva, según [Rynne, 1986], una mayor precisión, pero también una mayor inestabilidad que la fórmula centrada con menor orden.

A.4 Métodos para evitar las inestabilidades

En [Salinas, 1991] (y bibliografía referida) se hace un estudio de los diferentes métodos orientados a evitar la aparición de inestabilidades en el proceso de solución escalonado en el tiempo. Se analizan el filtro de altas frecuencias (o técnica de suavizado), el método de relajación, y se propone la técnica de subdivisión.

El filtro de altas frecuencias [Smith, 1990] es un método recursivo en el proceso de cálculo. Es decir, la solución obtenida en el instante K sirve para promediar la solución obtenida en el instante $K-1$ (junto con la obtenida en el instante $K-2$). Así, con la nueva solución $K+1$ se vuelve a obtener la solución K . Esto supone trasladar los autovalores cercanos al valor -1 a cero. De esta manera se consigue un filtro de altas frecuencias que anula cualquier inestabilidad asociada con el polo cuya frecuencia de resonancia es cercana a $1/2 \Delta t$. En principio este método introduce poco error en cuanto a la forma de la señal. Sin embargo, como se demuestra en [Salinas, 1991], hay figuras como la esfera, en las que la perturbación introducida es muy grande cuando se analiza la respuesta con señales con un contenido espectral amplio comparado con las dimensiones características del objeto.

El método de relajación [Tijhuis, 1991] permite hacer actuaciones globales sobre la solución a través de un proceso iterativo en el que en cada paso hay que resolver la ecuación para todos los instantes. Este método aunque potente es muy costoso computacionalmente.

La técnica de subdivisión también ha sido propuesta en [Nguyen and Dominek, 1989], pero con muy diferente propósito. Puesto que el estudio de esta técnica es el objetivo de esta memoria su exposición detallada se deja para el siguiente capítulo. Conviene señalar aquí las conclusiones obtenidas en [Salinas, 1991] y [Nguyen and Dominek, 1989]:

Mientras que en [Nguyen and Dominek, 1989] se plantea la técnica como una mejor aproximación a la ecuación integral, en [Salinas, 1991] se plantea como una corrección a la causa del problema.

Por otra parte en [Nguyen and Dominek, 1989] se afirma que la técnica falla para la ecuación MFIE tridimensional. Sin embargo en [Salinas, 1991] se encuentra que la técnica de subdivisión es capaz de generar resultados estables incluso para figuras complejas como la conoesfera.

En cuanto a costo computacional la técnica de subdivisión requiere multiplicar en un factor 4 el tiempo de CPU y un incremento de las necesidades de memoria del mismo orden. El filtro de altas frecuencias multiplica por dos el tiempo de CPU debido a que en cada instante temporal hay que calcular las incógnitas correspondientes a dicho instante y a partir de ellas volver a evaluar las del instante anterior, antes de proceder a calcular

el siguiente instante temporal.

Apéndice B

Cálculo de las matrices

$$\vec{\mathcal{F}}, \mathcal{C}, \mathcal{G}, \vec{\mathcal{F}}^e, \vec{\mathcal{F}}^{rad}$$

En este apéndice, se presentan los cálculos que nos permiten evaluar las matrices de estructura definidas a lo largo del capítulo 3. Las expresiones de estas matrices son

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_{p,i,s,m} &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'_i} \frac{\vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right)}{R_{p,i}(\vec{r}_i'')} ds'_i \\ \mathcal{C}_{p,i,s,m} &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(t_j'') dt_j'' \int_{S'_i} \frac{1}{R_{p,i}(\vec{r}_i'')} ds'_i \\ \mathcal{G}_{p,i,s,m} &\equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} f_{i,s}(\vec{r}_i'') \int_{S'_i} \frac{\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''}{R_{p,i}(\vec{r}_i'')} ds'_i \\ \vec{\mathcal{F}}_{h,i,s,m}^e &\equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'_i} \frac{\vec{f}_{i,s}(\vec{r}_i'') \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right)}{R_{i,s}^h(\vec{r}_i'', s)} ds'_i \\ \vec{\mathcal{F}}_{i,s,m}^{rad} &\equiv \frac{1}{4\pi c} \int_{S'_i} \left[\vec{f}_{i,s}^e(\vec{r}_i'') \left(\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') \right) \right] \wedge \hat{r} ds'_i \end{aligned}$$

Comenzaremos obteniendo el desarrollo de los coeficientes de interpolación temporal.

B.1 Coeficientes de interpolación temporal

Se han hecho los cálculos para orden de interpolación, $k = 2$, $k = 4$. Los motivos de esta elección se describen en el apartado B.1.3.

B.1.1 Orden de interpolación 2

Los coeficientes $B_j^m(t_j'')$ de interpolación lagragiana de orden dos vienen dados por

$$B_j^m(t_j'') = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} \frac{t_j'' + t_j - t_{j+q}}{t_{j+m} - t_{j+q}} \quad (\text{B.1})$$

Definimos

$$D2_j^m \equiv \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_{j+m} - t_{j+q})$$

Para evaluar el numerador de la expresión (B.1)

$$\prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j'' + t_j - t_{j+q})$$

tomamos los números enteros

$$q_1, q_2 \in \{n, \dots, n+2\} \setminus q_i \neq m \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

Con esto el numerador de (B.1) lo podemos poner como

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j'' + t_j - t_{j+q}) &= (t_j'' + t_j + t_{j+q_1})(t_j'' + t_j + t_{j+q_2}) \\ &= t_j''^2 + t_j''[(t_j - t_{j+q_1}) + (t_j - t_{j+q_2})] + (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_2}) \end{aligned}$$

Definiendo

$$SQ2_j^m \equiv \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q})$$

$$PQ2_j^m \equiv \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j - t_{j+q})$$

Teniendo en cuenta la igualdad de los intervalos temporales se tiene que

$$t_j - t_m = (j - m)\Delta t$$

y por tanto

$$D2_j^m = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (m - q)\Delta t$$

$$SQ2_j^m = \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} -q\Delta t$$

$$PQ2_j^m = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} -q\Delta t$$

A partir de estas igualdades, podemos expresar los coeficientes de interpolación como

$$B_j^m(t_j'') = \frac{1}{D2_j^m} (t_j''^2 + t_j'' SQ2_j^m + PQ2_j^m) \quad (B.2)$$

Derivada de los coeficientes de orden 2

A partir de la expresión (B.2) la derivada de los coeficientes se puede poner

$$\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') = \frac{1}{D2_j^m} (2t_j'' + SQ2_j^m) \quad (B.3)$$

Integral de los coeficientes de orden 2

En el tratamiento de la carga nos aparecen las integrales

$$\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' \quad (B.4)$$

$$\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' \quad (B.5)$$

A partir de (B.2) podemos poner la integral indefinida de los coeficientes como

$$\int B_j^m(\tau) d\tau = \frac{1}{D2_j^m} \left(\frac{1}{3} \tau^3 + \frac{1}{2} \tau^2 SQ2_j^m + \tau PQ2_j^m \right)$$

con lo que (B.4) queda

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' &= \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} t_j''^3 + \frac{1}{2} t_j''^2 SQ2_j^m + t_j'' PQ2_j^m \right] \\ &\quad - \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 SQ2_j^m + \left(-\frac{\Delta t}{2}\right) PQ2_j^m \right] \\ &= \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} t_j''^3 + \frac{1}{2} t_j''^2 SQ2_j^m + t_j'' PQ2_j^m + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 SQ2_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) PQ2_j^m \right] \end{aligned}$$

definiendo

$$PQ2I_j^m \equiv \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 SQ2_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) PQ2_j^m$$

nos queda

$$\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} t_j''^3 + \frac{1}{2} t_j''^2 S Q 2_j^m + t_j'' P Q 2_j^m + P Q 2 I_j^m \right] \quad (B.6)$$

y para (B.5) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' &= \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 S Q 2_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) P Q 2_j^m \right] \\ &\quad - \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 S Q 2_j^m + \left(-\frac{\Delta t}{2}\right) P Q 2_j^m \right] \\ &= \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 + 2 \left(\frac{\Delta t}{2}\right) P Q 2_j^m \right] \end{aligned}$$

Definiendo

$$I B 2_j^m \equiv \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 + (\Delta t) P Q 2_j^m \right]$$

podemos poner

$$\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = I B 2_j^m$$

La integral definida pero con el límite inferior igual a cero es

$$\int_0^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 S Q 2_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) P Q 2_j^m \right]$$

Definimos la nueva variable

$$I B 0 2_j^m \equiv \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 S Q 2_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) P Q 2_j^m \right]$$

y por tanto podemos poner

$$\int_0^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = I B 0 2_j^m$$

B.1.2 Orden de interpolación 4

Los coeficientes $B_j^{(m)}$ de interpolación lagragiana de orden cuatro vienen dados por

$$B_j^m(t_j'') = \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} \frac{t_j'' + t_j - t_{j+q}}{t_{j+m} - t_{j+q}} \quad (B.7)$$

Definimos

$$D_j^m \equiv \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} (t_{j+m} - t_{j+q})$$

Para evaluar el numerador de la expresión (B.7)

$$\prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} (t_j'' + t_j - t_{j+q})$$

tomamos los números enteros

$$q_1, q_2, q_3, q_4 \in \{n, \dots, n+4\} \setminus q_i \neq m \quad \forall i \in \{1, \dots, 4\}$$

Con esto el numerador de (B.7) lo podemos poner como

$$\prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+2} (t_j'' + t_j - t_{j+q}) = (t_j'' + t_j - t_{j+q_1})(t_j'' + t_j - t_{j+q_2})(t_j'' + t_j - t_{j+q_3})(t_j'' + t_j - t_{j+q_4})$$

Desarrollando los productos nos queda

$$\begin{aligned} & t_j''^4 + t_j''^3 \{ (t_j - t_{j+q_1}) + (t_j - t_{j+q_2}) + (t_j - t_{j+q_3}) + (t_j - t_{j+q_4}) \} \\ & + t_j''^2 \{ [(t_j - t_{j+q_1}) + (t_j - t_{j+q_2})][(t_j - t_{j+q_3}) + (t_j - t_{j+q_4})] \\ & + (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_2}) + (t_j - t_{j+q_3})(t_j - t_{j+q_4}) \} \\ & + t_j'' \{ [(t_j - t_{j+q_3}) + (t_j - t_{j+q_4})](t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_2}) \\ & + [(t_j - t_{j+q_1}) + (t_j - t_{j+q_2})](t_j - t_{j+q_3})(t_j - t_{j+q_4}) \} \\ & + (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_2})(t_j - t_{j+q_3})(t_j - t_{j+q_4}) \end{aligned}$$

definimos

$$\begin{aligned} SQ_j^m & \equiv \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} (t_j - t_{j+q}) \\ PQ_j^m & \equiv \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} (t_j - t_{j+q}) \\ SDPQ_j^m & \equiv (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_2}) + (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_3}) \\ & + (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_4}) + (t_j - t_{j+q_2})(t_j - t_{j+q_3}) \\ & + (t_j - t_{j+q_2})(t_j - t_{j+q_4}) + (t_j - t_{j+q_3})(t_j - t_{j+q_4}) \\ STPQ_j^m & \equiv (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_2})(t_j - t_{j+q_3}) \\ & + (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_2})(t_j - t_{j+q_4}) \\ & + (t_j - t_{j+q_1})(t_j - t_{j+q_3})(t_j - t_{j+q_4}) \\ & + (t_j - t_{j+q_2})(t_j - t_{j+q_3})(t_j - t_{j+q_4}) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la igualdad de los intervalos temporales se tiene que

$$t_j - t_m = (j - m)\Delta t$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
 D_j^m &= \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} (m - q) \Delta t \\
 SQ_j^m &= \sum_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} -q \Delta t \\
 PQ_j^m &= \prod_{\substack{q=n \\ q \neq m}}^{n+4} -q \Delta t \\
 SDPQ_j^m &= (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_1 q_4 + q_2 q_3 + q_2 q_4 + q_3 q_4) (\Delta t)^2 \\
 STPQ_j^m &= -(q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_4 + q_1 q_3 q_4 + q_2 q_3 q_4) (\Delta t)^3
 \end{aligned}$$

A partir de estas igualdades, podemos expresar los coeficientes de interpolación como

$$B_j^m(t_j'') = \frac{1}{D_j^m} (t_j''^4 + t_j''^3 SQ_j^m + t_j''^2 SDPQ_j^m + t_j'' STPQ_j^m + PQ_j^m) \quad (B.8)$$

Derivada de los coeficientes de orden 4

A partir de la expresión (B.8) la derivada de los coeficientes se puede poner

$$\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(t_j'') = \frac{1}{D_j^m} (4t_j''^3 + 3t_j''^2 SQ_j^m + 2t_j'' SDPQ_j^m + STPQ_j^m) \quad (B.9)$$

Integral de los coeficientes de orden 4

A partir de (B.8) podemos poner la integral indefinida de los coeficientes como

$$\int B_j^m(\tau) d\tau = \frac{1}{D_j^m} \left(\frac{1}{5} \tau^5 + \frac{1}{4} \tau^4 SQ_j^m + \frac{1}{3} \tau^3 SDPQ_j^m + \frac{1}{2} \tau^2 STPQ_j^m + \tau PQ_j^m \right)$$

con lo que (B.4) queda

$$\begin{aligned}
 \int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau'') d\tau'' &= \frac{1}{D_j^m} \left[\left(\frac{1}{5} t_j''^5 + \frac{1}{4} t_j''^4 SQ_j^m + \frac{1}{3} t_j''^3 SDPQ_j^m \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} t_j''^2 STPQ_j^m + t_j'' PQ_j^m \right) - \left(\frac{1}{5} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^4 SQ_j^m \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3 SDPQ_j^m + \frac{1}{2} \left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2 STPQ_j^m + \left(-\frac{\Delta t}{2}\right) PQ_j^m \right) \right]
 \end{aligned}$$

Definiendo

$$PQI_j^m \equiv \left(\frac{1}{5}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^5 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 SQ_j^m + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 SDPQ_j^m - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 STPQ_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)PQ_j^m\right)$$

nos queda

$$\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = \frac{1}{D_j^m} \left[\frac{1}{5}t_j''^5 + \frac{1}{4}t_j''^4 SQ_j^m + \frac{1}{3}t_j''^3 SDPQ_j^m + \frac{1}{2}t_j''^2 STPQ_j^m + t_j'' PQ_j^m + PQI_j^m \right] \quad (B.10)$$

y (B.5) se expresa

$$\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = \frac{1}{D_j^m} \left[2\frac{1}{5}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^5 + 2\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 SDPQ_j^m + (\Delta t)PQ_j^m \right]$$

Definimos la variable

$$IB_j^m \equiv \frac{1}{D_j^m} \left[\frac{2}{5}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 SDPQ_j^m + (\Delta t)PQ_j^m \right]$$

y por tanto podemos poner

$$\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = IB_j^m$$

La integral definida con el límite inferior cero se expresa

$$\int_0^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 SQ_j^m + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 SDPQ_j^m + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 STPQ_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)PQ_j^m \right)$$

Definiendo

$$IB0_j^m \equiv \left(\frac{1}{5}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 SQ_j^m + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 SDPQ_j^m + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 STPQ_j^m + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)PQ_j^m \right)$$

nos queda

$$\int_0^{\Delta t/2} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j'' = IB0_j^m$$

B.1.3 Ligadura entre la variable temporal y espacial

Por el principio de causalidad, la variable temporal t' y t están relacionadas a través de la distancia del punto fuente al punto campo por

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

Trabajaremos usando la unidad temporal el $m - l$, (metro-luz) por lo que¹

$$t' = t - R$$

Para un tiempo $t_v = v\Delta t$ se tiene que

$$t' = t_j + t_j''$$

con

$$j \equiv EMC\left(v - \frac{R}{\Delta t}\right)$$

Definimos el entero auxiliar \bar{j}

$$\bar{j} \equiv EMC\left(\frac{R}{\Delta t}\right)$$

y por tanto

$$t' = v\Delta t - R = j\Delta t + t_j''$$

de donde se deduce que

$$t_j'' = (v - j)\Delta t - R = \bar{j}\Delta t - R$$

Las distintas potencias de t_j'' , que aparecen en las expresiones de los coeficientes B_j^m toman el valor

$$\begin{aligned} t_j'' &= -R + (\bar{j}\Delta t) \\ t_j''^2 &= R^2 - 2R(\bar{j}\Delta t) + (\bar{j}\Delta t)^2 \\ t_j''^3 &= -R^3 + 3R^2(\bar{j}\Delta t) - 3R(\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)^3 \\ t_j''^4 &= R^4 - 4R^3(\bar{j}\Delta t) + 6R^2(\bar{j}\Delta t)^2 - 4R(\bar{j}\Delta t)^3 + (\bar{j}\Delta t)^4 \\ t_j''^5 &= -R^5 + 5R^4(\bar{j}\Delta t) + 10R^3(\bar{j}\Delta t)^2 + 10R^2(\bar{j}\Delta t)^3 \\ &\quad - 5R(\bar{j}\Delta t)^4 + (\bar{j}\Delta t)^5 \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.1.4 Expresión de los coeficientes en función de R

Orden de interpolación 2

Haciendo uso de las expresiones dadas en (B.11), podemos poner la ecuación (B.3) como

$$\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(R) = \frac{1}{D2_j^m} \left[2((\bar{j}\Delta t) - R) + SQ2_j^m \right]$$

¹ habrá que tener en cuenta que $\frac{\partial}{\partial t_{m-1}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_{seg}}$, y para las integrales temporales $\int dt_{m-1} = c \int dt_{seg}$

y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(R) = \frac{1}{D2_j^m} \left[-2R + 2(\bar{j}\Delta t) + SQ2_j^m \right] \quad (B.12)$$

A partir de (B.6), y usando (B.11), la integral de los coeficientes puede ser expresada como

$$\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''(R) = \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{1}{3}(-R^3 + 3R^2(\bar{j}\Delta t) - 3R(\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)^3) + \frac{1}{2}(R^2 - 2R(\bar{j}\Delta t) + (\bar{j}\Delta t)^2)SQ2_j^m + (-R + (\bar{j}\Delta t))PQ2_j^m + PQ2I_j^m \right]$$

Reagrupando las distintas potencias de R nos queda

$$\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''(R) = \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{-1}{3}R^3 + R^2((\bar{j}\Delta t) + \frac{1}{2}SQ2_j^m) - R((\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)SQ2_j^m + PQ2_j^m) + \left(\frac{1}{3}(\bar{j}\Delta t)^3 + \frac{1}{2}(\bar{j}\Delta t)^2SQ2_j^m + (\bar{j}\Delta t)PQ2_j^m + PQ2I_j^m \right) \right] \quad (B.13)$$

Dividiendo (B.12), y (B.13) por R se tiene

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(R)}{R} = \frac{1}{D2_j^m} \left[-2 + \frac{2(\bar{j}\Delta t) + SQ2_j^m}{R} \right] \quad (B.14)$$

$$\frac{\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''(R)}{R} = \frac{1}{D2_j^m} \left[\frac{-1}{3}R^2 + R((\bar{j}\Delta t) + \frac{1}{2}SQ2_j^m) - ((\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)SQ2_j^m + PQ2_j^m) + \frac{\frac{1}{3}(\bar{j}\Delta t)^3 + \frac{1}{2}(\bar{j}\Delta t)^2SQ2_j^m + (\bar{j}\Delta t)PQ2_j^m + PQ2I_j^m}{R} \right] \quad (B.15)$$

Definiendo

$$CORD2_{-1,m} = \frac{2(\bar{j}\Delta t) + SQ2_j^m}{D2_j^m}$$

$$CORD2_{0,m} = \frac{-2}{D2_j^m}$$

$$\begin{aligned}
CORI2_{-1,m} &= \frac{\frac{1}{3}(\bar{j}\Delta t)^3 + \frac{1}{2}(\bar{j}\Delta t)^2 SQ2_j^m + (\bar{j}\Delta t)PQ2_j^m + PQ2I_j^m}{D2_j^m} \\
CORI2_{0,m} &= \frac{-((\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)SQ2_j^m + PQ2_j^m)}{D2_j^m} \\
CORI2_{1,m} &= \frac{(\bar{j}\Delta t + \frac{1}{2}SQ2_j^m)}{D2_j^m} \\
CORI2_{2,m} &= \frac{-1}{3} \frac{1}{D2_j^m}
\end{aligned}$$

Las expresiones (B.14), y (B.15) quedan

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial}{\partial t_j^m} B_j^m(R)}{R} &= \sum_{\alpha=-1}^0 CORI2_{\alpha,m} R^\alpha \\
\frac{\int_{-\Delta t/2}^{t_j^m} B_j^m(\tau_j^m) d\tau_j^m(R)}{R} &= \sum_{\alpha=-1}^2 CORI2_{\alpha,m} R^\alpha \quad (B.16)
\end{aligned}$$

Orden de interpolación 4

Haciendo uso de las expresiones dadas en (B.11), podemos poner la ecuación (B.9) como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_j^m} B_j^m(R) &= \frac{1}{D_j^m} \left[4 \left(-R^3 + 3R^2(\bar{j}\Delta t) - 3R(\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)^3 \right) \right. \\
&\quad \left. + 3SQ_j^m(R^2 - 2R(\bar{j}\Delta t) + (\bar{j}\Delta t)^2) + 2SDPQ_j^m(-R + (\bar{j}\Delta t)) + STPQ_j^m \right]
\end{aligned}$$

y por tanto, reagrupando términos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_j^m} B_j^m(R) &= \frac{1}{D_j^m} \left[-4R^3 + R^2 \left(12(\bar{j}\Delta t) + 3SQ_j^m \right) \right. \\
&\quad \left. - R \left(12(\bar{j}\Delta t)^2 + 6(\bar{j}\Delta t)SQ_j^m + 2SDPQ_j^m \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(4(\bar{j}\Delta t)^3 + 3(\bar{j}\Delta t)^2 SQ_j^m + 2(\bar{j}\Delta t)SDPQ_j^m + STPQ_j^m \right) \right] \quad (B.17)
\end{aligned}$$

A partir de (B.10), y usando (B.11), la integral de los coeficientes puede ser expresada como

$$\begin{aligned}
\int_{-\Delta t/2}^{t_j^m} B_j^m(\tau_j^m) d\tau_j^m(R) &= \frac{1}{D_j^m} \left[\frac{1}{5} \left(-R^5 + 5R^4(\bar{j}\Delta t) + 10R^3(\bar{j}\Delta t)^2 + 10R^2(\bar{j}\Delta t)^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 5R(\bar{j}\Delta t)^4 + (\bar{j}\Delta t)^5 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} SQ_j^m \left(R^4 - 4R^3(\bar{j}\Delta t) + 6R^2(\bar{j}\Delta t)^2 - 4R(\bar{j}\Delta t)^3 + (\bar{j}\Delta t)^4 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} SDPQ_j^m \left(-R^3 + 3R^2(\bar{j}\Delta t) - 3R(\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)^3 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} STPQ_j^m \left(R^2 - 2R(\bar{j}\Delta t) + (\bar{j}\Delta t)^2 \right) \\
 & + PQ_j^m \left(-R + (\bar{j}\Delta t) \right) + PQI_j^m \left. \right]
 \end{aligned}$$

Reagrupando las distintas potencias de R nos queda

$$\begin{aligned}
 \int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''(R) &= \frac{1}{D_j^m} \left[\frac{-1}{5} R^5 + R^4((\bar{j}\Delta t) + \frac{1}{4} SQ_j^m) \right. \\
 & \quad \left. - R^3 \left(2(\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t) SQ_j^m + \frac{1}{3} SDPQ_j^m \right) \right. \\
 & \quad \left. + R^2 \left(2(\bar{j}\Delta t)^3 + \frac{3}{2} (\bar{j}\Delta t)^2 SQ_j^m + (\bar{j}\Delta t) SDPQ_j^m + \frac{1}{2} STPQ_j^m \right) \right. \\
 & \quad \left. - R \left((\bar{j}\Delta t)^4 + (\bar{j}\Delta t)^3 SQ_j^m + (\bar{j}\Delta t)^2 SDPQ_j^m + (\bar{j}\Delta t) STPQ_j^m + PQ_j^m \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{1}{5} (\bar{j}\Delta t)^5 + \frac{1}{4} (\bar{j}\Delta t)^4 SQ_j^m + \frac{1}{3} (\bar{j}\Delta t)^3 SDPQ_j^m \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\bar{j}\Delta t)^2 STPQ_j^m + (\bar{j}\Delta t) PQ_j^m + PQI_j^m \right) \right] \quad (B.18)
 \end{aligned}$$

Dividiendo (B.17), y (B.18) por R se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{\partial}{\partial t_j^m} B_j^m(R)}{R} &= \frac{1}{D_j^m} \left[-4R^2 + R(12(\bar{j}\Delta t) + 3SQ_j^m) - (12(\bar{j}\Delta t)^2 + 6(\bar{j}\Delta t)SQ_j^m + 2SDPQ_j^m) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4(\bar{j}\Delta t)^3 + 3(\bar{j}\Delta t)^2 SQ_j^m + 2(\bar{j}\Delta t)SDPQ_j^m + STPQ_j^m}{R} \right] \quad (B.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''(R)}{R} &= \frac{1}{D_j^m} \left[\frac{-1}{5} R^4 + R^3 \left((\bar{j}\Delta t) + \frac{1}{4} SQ_j^m \right) \right. \\
 & \quad \left. - R^2 \left(2(\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t) SQ_j^m + \frac{1}{3} SDPQ_j^m \right) \right. \\
 & \quad \left. + R \left(2(\bar{j}\Delta t)^3 + \frac{3}{2} (\bar{j}\Delta t)^2 SQ_j^m + (\bar{j}\Delta t) SDPQ_j^m + \frac{1}{2} STPQ_j^m \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left((\bar{j}\Delta t)^4 + (\bar{j}\Delta t)^3 SQ_j^m + (\bar{j}\Delta t)^2 SDPQ_j^m + (\bar{j}\Delta t) STPQ_j^m + PQ_j^m \right) \right. \\
 & \quad \left. \frac{\frac{1}{5} (\bar{j}\Delta t)^5 + \frac{1}{4} (\bar{j}\Delta t)^4 SQ_j^m + \frac{1}{3} (\bar{j}\Delta t)^3 SDPQ_j^m}{R} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\frac{1}{2} (\bar{j}\Delta t)^2 STPQ_j^m + (\bar{j}\Delta t) PQ_j^m + PQI_j^m}{R} \right] \quad (B.20)
 \end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}
 COR_{D-1,m} &= \frac{4(\bar{j}\Delta t)^3 + 3(\bar{j}\Delta t)^2 SQ_j^m + 2(\bar{j}\Delta t)SDPQ_j^m + STPQ_j^m}{D_j^m} \\
 COR_{D0,m} &= \frac{-(12(\bar{j}\Delta t)^2 + 6(\bar{j}\Delta t)SQ_j^m + 2SDPQ_j^m)}{D_j^m} \\
 COR_{D1,m} &= \frac{12(\bar{j}\Delta t) + 3SQ_j^m}{D_j^m} \\
 COR_{D2,m} &= \frac{-4}{D_j^m} \\
 COR_{I-1,m} &= \frac{\frac{1}{5}(\bar{j}\Delta t)^5 + \frac{1}{4}(\bar{j}\Delta t)^4 SQ_j^m + \frac{1}{3}(\bar{j}\Delta t)^3 SDPQ_j^m}{D2_j^m} \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{2}(\bar{j}\Delta t)^2 STPQ_j^m + (\bar{j}\Delta t)PQ_j^m + PQI_j^m}{D2_j^m} \\
 COR_{I0,m} &= -\frac{(\bar{j}\Delta t)^4 + (\bar{j}\Delta t)^3 SQ_j^m + (\bar{j}\Delta t)^2 SDPQ_j^m + (\bar{j}\Delta t)STPQ_j^m + PQ_j^m}{D2_j^m} \\
 COR_{I1,m} &= \frac{2(\bar{j}\Delta t)^3 + \frac{3}{2}(\bar{j}\Delta t)^2 SQ_j^m + (\bar{j}\Delta t)SDPQ_j^m + \frac{1}{2}STPQ_j^m}{D2_j^m} \\
 COR_{I2,m} &= -\frac{2(\bar{j}\Delta t)^2 + (\bar{j}\Delta t)SQ_j^m + \frac{1}{3}SDPQ_j^m}{D2_j^m} \\
 COR_{I3,m} &= \frac{(\bar{j}\Delta t) + \frac{1}{4}SQ_j^m}{D2_j^m} \\
 COR_{I4,m} &= \frac{-1}{5} \frac{1}{D2_j^m}
 \end{aligned}$$

Las expresiones (B.19), y (B.20) quedan

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t_j''} B_j^m(R)}{R} = \sum_{\alpha=-1}^2 COR_{D\alpha,m} R^\alpha \quad (B.21)$$

$$\frac{\int_{-\Delta t/2}^{t_j''} B_j^m(\tau_j'') d\tau_j''(R)}{R} = \sum_{\alpha=-1}^4 COR_{I\alpha,m} R^\alpha \quad (B.22)$$

Bibliografía

- [Arvas et al., 1991] Arvas, E., Rahhal-Arabi, A., Sadigh, A., and Rao, S. M. (1991). Scattering from multiple conducting and dielectric bodies of arbitrary shape. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 33(2):29–38.
- [Balanis, 1982] Balanis, C. A. (1982). *Antenna Theory. Analysis and Design*. New York: Harper and Row.
- [Baum, 1971] Baum, C. E. (1971). *On the Singularity Expansion Method for the Solution of Electromagnetic Interaction Problems*. Interaction Note 88.
- [Baum, 1976] Baum, C. E. (1976). Emerging technology for transient and broadband analysis and synthesis of antennas and scatterers. *IEEE Proceedings*, 64:1598–1615.
- [Bennett and Mieras, 1981a] Bennett, C. L. and Mieras, H. (1981a). Time domain integral equation solution for acoustic scattering from fluid targets. *Journal Acoustic Soc. Am.*, 69:1261–1265.
- [Bennett and Mieras, 1981b] Bennett, C. L. and Mieras, H. (1981b). Time domain scattering from open thin conducting surfaces. *Radio Science*, 16(6):1231–1239.
- [Bennett and Ross, 1978] Bennett, C. L. and Ross, G. (1978). Time domain electromagnetics and its applications. *Proceedings of the IEEE*, 66:299–318.
- [Bennett and Weeks, 1968] Bennett, C. L. and Weeks, W. L. (1968). A technique for computing approximate electromagnetic impulse response of conducting bodies. Technical report, Purdue University Report TR-EE68-11.
- [Bevense et al., 1977] Bevense, R. M., Deadrick, F. J., Miller, E. K., and Okada, J. T. (1977). Validation and calibration of the III transient-electromagnetic measurement facility. Technical report, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore CA, UCRL-52225.
- [Bhattacharya et al., 1987] Bhattacharya, S., Long, S. A., and Wilton, D. R. (1987). The input impedance of a monopole antenna mounted on a cubical conducting box. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-35:756–762.

- [Bladel, 1964] Bladel, J. V. (1964). *Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill.
- [Bodnar, 1978] Bodnar, D. G. (1978). Special joint issue on the nuclear electromagnetic pulse. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 26.
- [Booker et al., 1994] Booker, S. M., Lambert, A. P., and Smith, P. D. (1994). A determination of transient antenna impedance via a numerical solution of the electric-field integral equation. *J. Electromagnetic Waves and Applications*. Pendiente de publicación.
- [Bowman et al., 1987] Bowman, J. J., Senior, T. B. A., and Uslenghi, P. L. E., editors (1987). *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*. Hemisphere Publishing Corporation.
- [Burden and Faires, 1985] Burden, R. L. and Faires, J. D. (1985). *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana.
- [Burke, 1980] Burke, G. J. (1980). *The Numerical Electromagnetic code NEC. Application of the Method of Moment to Electromagnetic Fields*. The SCEEE Press.
- [Burton and King, 1975] Burton, R. W. and King, R. W. P. (1975). Measured current and charges on thin crossed antennas in a plane wave field. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-23(5):657-664.
- [Canning, 1989] Canning, F. X. (1989). Singular value decomposition of integral equations of em and applications to the cavity resonance problem. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 37:1156-1163.
- [Canning, 1991] Canning, F. X. (1991). Protecting efie-based scattering computations from effects of interior resonances. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39(11):1545-1552.
- [Carrel, 1958] Carrel, R. L. (1958). The characteristic impedance of two infinite cones of arbitrary cross-section. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-6:197-201.
- [Cheo, 1965] Cheo, B. R. (1965). A reciprocity theorem for electromagnetic fields with general time dependence. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-13:278-284.
- [Elliot, 1981] Elliot, R. S. (1981). *Antenna Theory and Design*. Prentice-Hall, Inc.
- [Felsen and Marcuvitz, 1973] Felsen, L. B. and Marcuvitz, N. (1973). *Radiation and Scattering on Waves*. Englewood Cliffs, New York: Prentice Hall.

- [Finlayson, 1972] Finlayson, B. A. (1972). *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. New York: Academic Press.
- [Fornieles, 1992] Fornieles, J. F. (1992). Inestabilidades en el proceso de solución escalonado en el tiempo de ecuaciones integrales. aplicaciones a la ecuación integral del campo magnético (mfie). Master's thesis, Universidad de Granada.
- [Franceschetti and Pappas, 1974] Franceschetti, G. and Pappas, C. H. (1974). Pulsed antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-22:651–652.
- [Glisson and Wilton, 1980] Glisson, A. and Wilton, D. R. (1980). Simple and efficient numerical methods for problems of electromagnetic radiation and scattering from surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-28(5):593–603.
- [Glisson, 1978] Glisson, A. W. (1978). *On the Development of Numerical Techniques for Treating Arbitrarily-Shaped Surfaces*. PhD thesis, University of Mississippi.
- [Gómez and Carrión, 1986] Gómez, R. and Carrión, M. C. (1986). Extended prony method applied to noisy data. *Electronics Letters*, 22:613–614.
- [Gómez et al., 1985a] Gómez, R., Carrión, M. C., Khoury, S. A., and García, B. (1985a). Application of maximum entropy spectral analysis to estimation of parameters of arma models by the itif method. *Electronics Letter*, pages 11–613.
- [Gómez and Morente, 1985] Gómez, R. and Morente, J. A. (1985). Analysis of the electric quadrupole radiation in time domain: Application to the large-current radiator. *International Journal Electronics*, 58:921–931.
- [Gómez et al., 1985b] Gómez, R., Morente, J. A., and Bretones, A. R. (1985b). Arrays of hertzian electric dipoles for nonsinusoidal signals. *International Journal Electronics*, 59:435–438.
- [Gómez et al., 1984] Gómez, R., Morente, J. A., and García, B. (1984). Some thoughts about the radiation of the antennas excited by non-sinusoidal currents. *International Journal Electronics*, 57:617–625.
- [Gómez et al., 1986a] Gómez, R., Morente, J. A., and Salinas, A. (1986a). Monopulse technique for an array of linear wire antennas. In *8th Int. Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Wroclaw, Poland.
- [Gómez et al., 1986b] Gómez, R., Morente, J. A., and Salinas, A. (1986b). Time-domain analysis of an array of straight-wire. *Electronics Letters*, pages 316–318.

- [Gómez et al., 1987] Gómez, R., Morente, J. A., and Salinas, A. (1987). Applications of the monopulse technique to a planar array of nonlinear loaded straight-wire coupled antennas. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, pages 169–174.
- [Gómez et al., 1992] Gómez, R., Salinas, A., and Rubio, A. (1992). Time-domain integral equation methods for transient analysis. *IEEE Antennas Propagation Magazine*, 34(3):15–23.
- [Gómez et al., 1991] Gómez, R., Salinas, A., Rubio, A., Fornieles, J., and Martín, M. (1991). Time-domain integral equations for emp analysis. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 4(3):153–162.
- [González, 1994] González, S. (1994). *Contribuciones al Método de las Diferencias Finitas para la Resolución de las Ecuaciones de Maxwell en el Dominio del Tiempo*. PhD thesis, Universidad de Granada.
- [Gothard et al., 1994] Gothard, G. K., Vechinski, D. A., and Rao, S. M. (1994). Computational methods in transient electromagnetics: A selective survey. *IEEE Computational Science & Engineering*, 1(2):50–59.
- [Harrington, 1961] Harrington, R. F. (1961). *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill.
- [Harrington, 1967] Harrington, R. F. (1967). Matrix methods for field problems. *Proc. IEEE*, 55:136–149.
- [Harrington, 1968] Harrington, R. F. (1968). *Field Computation by Moment Methods*. New York : Macmillan.
- [Hey et al., 1956] Hey, J. S., Stewart, G. S., Pinson, J. T., and Prince, P. E. V. (1956). The scattering of electromagnetic waves by conducting spheres and discs. *Proceedings Physic Society (London)*, 69:1038–1049.
- [Horng et al., 1992] Horng, T.-S., Mckinzie, W. E., and Alexopoulos, N. G. (1992). Full-wave spectral-domain analysis of compensation of microstrip discontinuities using triangular subdomain functions. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 40(12):2137–2147.
- [Johns and Gostache, 1988] Johns, P. B. and Gostache, G. (1988). Time domain finite element analysis of 2-d shields. *Wave Motion*, 10:597–610.
- [Johnson and Jasik, 1984] Johnson, R. C. and Jasik, H., editors (1984). *Antenna Engineering Handbook*. McGraw-Hill.

- [Jones, 1964] Jones, D. S. (1964). *Theory of Electromagnetism*. Oxford University Press.
- [Jones, 1979] Jones, D. S. (1979). *Methods in Electromagnetic Wave Propagation*. Oxford University Press.
- [Kay and Marple, 1981] Kay, S. M. and Marple, S. L. (1981). Spectrum analysis, a modern perspective. *IEEE Proceedins*, 69:1380–1419.
- [Kennaugh and Moffat, 1965] Kennaugh and Moffat (1965). Transient and impulse response approximation. *IEEE Proceeding*, 53:893–901.
- [Knott et al., 1985] Knott, E. F., Shaeffer, J. F., and Tuley, M. T. (1985). *Radar Cross Section*. Artech House.
- [Kraus, 1950] Kraus, J. D. (1950). *Electrical and Electronic Engineering Series (Antennas)*. McGraw-Hill.
- [Lambert et al., 1994] Lambert, A. P., Booker, S. M., and Smith, P. D. (1994). Calculation of the characteristic impedance of tem horn antennas using conformal mapping techniques. *Pendiente de Publicación*.
- [Lamensdorf and Susman, 1994] Lamensdorf, D. and Susman, L. (1994). Baseband-pulse-antenna techniques. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 36(1):20–30.
- [Landt and Miller, 1983] Landt, J. A. and Miller, E. K. (1983). Time-domain modeling of non-linear loads. *IEEE Transactions*, AP-31:121–125.
- [Lee, 1980] Lee, K. S. H. (1980). Emp interaction. Technical Report Report N. AFWL-TR-80-402, University of.
- [Lee et al., 1976] Lee, K. S. H., Marin, L., and Castillo, J. P. (1976). Limitations of wire-grid modeling of a closed surface. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, EMC-18(3):123–129. hay diferencias entre la autocapacidad del objeto y la que presenta con el modelo por hilos.
- [Lin and Ksienski, 1981] Lin, H. and Ksienski, A. A. (1981). Optimun frecuencies for aircraft clasification. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, AES-17(5):656–665.
- [Marx, 1993] Marx, E. (1993). Electromagnetic scattering from a dielectric wedge and the single hypersingular integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 41(8):1001–1008.

- [Miller and Landt, 1978] Miller, E. and Landt, J. (1978). Direct time-domain techniques for transient radiation and scattering from wires. *Proceedings of the IEEE*, 68:1396–1423.
- [Miller, 1986] Miller, E. K. (1986). *Time-Domain Measurements in Electromagnetics*. Van Nostrand Reinhold Company, N.Y.
- [Miller, 1987] Miller, E. K. (1987). An overview of time-domain integral equations models in electromagnetics. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, pages 269–293.
- [Miller, 1988] Miller, E. K. (1988). A selective survey of computational electromagnetics. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-36:1281–1305.
- [Miller and Blaricum, 1973] Miller, E. K. and Blaricum, M. L. V. (1973). The short-pulse response of a straight wire. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 21:396–398.
- [Miller and Landt, 1980] Miller, E. K. and Landt, J. A. (1980). Direct time-domain techniques for transient radiation and scattering from wires. *IEEE Proc.*, 68:1396–1423.
- [Moore and Pizer, 1983] Moore, J. and Pizer, R. (1983). *Moment Methods in Electromagnetics. Thechniques and Applications*. Research Studies Press LTD., John Wiley & Sons INC.
- [Morente, 1985] Morente, J. A. (1985). *Estudio de la Radiación y Dispersión de Pulsos Electromagneticos (EMP) en el Dominio del Tiempo*. PhD thesis, Universidad de Granada.
- [Morente and Gómez, 1984] Morente, J. A. and Gómez, R. (1984). Comments on antennas for nonsinusoidal waves radiators. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 26:50.
- [Morgan, 1984] Morgan, M. A. (1984). Time-domain scattering measurement. *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, pages 5–10.
- [Mushiake, 1992] Mushiake, Y. (1992). Self-complementary antennas. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 34(6):23–29.
- [Newman and Kingsley, 1991] Newman, E. and Kingsley, K. (1991). An introduction to the method of moments. *Computer Physics Communications*, 68:1–17.
- [Newman and Pozar, 1978] Newman, E. H. and Pozar, D. M. (1978). Electromagnetic modelling of composite wire and surface geometries. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-26:784–788.

- [Nguyen and Dominek, 1989] Nguyen, T. and Dominek, A. (1989). Stability of a finite difference time domain solution. Technical report, Technical Report n. 721929-7, Grant NSG 1613.
- [Nicolson et al., 1972] Nicolson, A. M., Bennett, C. L., Lamensdorf, D., and Susman, L. (1972). Applications of time domain metrology to the automation of broad band measurements. *IEEE Transactions on Microwave Theory Tech.*, MTT 20:3–9.
- [Perala et al., 1982] Perala, R. A., Rudolph, T., and Eriksen, F. (1982). Electromagnetic interaction of lightning with aircraft. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 24:173–203.
- [Poggio and Miller, 1973a] Poggio, A. J. and Miller, E. K. (1973a). *Integral Equation Solution of Three-Dimensional Scattering Problems*. New York: Pergamon.
- [Poggio and Miller, 1973b] Poggio, A. J. and Miller, E. K. (1973b). *Integral Equations Solutions of Three Dimensional Scattering Problems in Computer Techniques for Electromagnetics*. Oxford: Pergamon Press.
- [Popovic et al., 1982] Popovic, B. D., Dragovic, M. B., and Djordjevic, A. R. (1982). *Analysis and Synthesis of Wire Antennas*. London: Research Studies Press.
- [Press et al., 1989] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T. (1989). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- [Rao, 1980] Rao, S. M. (1980). *Electromagnetic Scattering and Radiation of Arbitrarily-Shaped Surfaces by Triangular Patch Modeling*. PhD thesis, University of Mississippi.
- [Rao and Sarkar, 1993] Rao, S. M. and Sarkar, T. K. (1993). An alternative version of the time-domain electric field integral equation for arbitrary shaped conductors. *IEEE Transactions on antennas and Propagation*, 41(6):831–834.
- [Rao and Wilton, 1991] Rao, S. M. and Wilton, D. R. (1991). Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39(1):56–61.
- [Rao et al., 1982] Rao, S. M., Wilton, D. R., and Glisson, A. W. (1982). Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-30:409–418.
- [Rubio, 1988] Rubio, A. (1988). *DOTIG1, Un Programa para el Estudio en el Dominio del Tiempo de la Interacción de Ondas Electromagnéticas con Estructuras de Hilo*. PhD thesis, Universidad de Granada.

- [Rubio et al., 1991] Rubio, A., Salinas, A., Gómez, R., and Fornieles, J. (1991). About the study in the time domain of junctions between thin wires. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 6(2):2–20.
- [Rubio and Tijhuis, 1994] Rubio, A. and Tijhuis, A. G. (1994). Transient excitation of a straight thin-wire segment over an interface between two dielectric half-space. *Radio Science*.
- [Rutledge et al., 1978] Rutledge, D. B., Schwarz, S. E., and Adams, A. T. (1978). Infrared and submillimetre antennas. *Infrared Physics*, 18:713–729.
- [Rynne, 1985] Rynne, B. P. (1985). Stability and convergence of time marching methods in scattering problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 35:297–310.
- [Rynne, 1986] Rynne, B. P. (1986). Instabilities in time marching methods for scattering problems. *Electromagnetics*, 6:129–144.
- [Rynne, 1991] Rynne, B. P. (1991). Time domain scattering from arbitrary surfaces using the electric field integral equation. *Journal Electromagnetic Waves Applications*, 5:93–112.
- [Rynne and Smith, 1990] Rynne, B. P. and Smith, P. D. (1990). Stability of time marching algorithms for the electric field integral equations. *Journal Electromagnetics Waves Applications*, 4:1181–1205.
- [Salinas, 1991] Salinas, A. (1991). *Nuevas Aportaciones a la Interacción de Ondas Electromagnéticas Transitorias con Estructuras Conductoras*. PhD thesis, Universidad de Granada.
- [Sarkar and Weiner, 1976] Sarkar, T. K. and Weiner, D. D. (1976). Scattering analysis of straight wire scatterers and antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-24:125–131.
- [Schelkunoff and Friss, 1952] Schelkunoff, S. A. and Friss, H. T. (1952). *Antennas: Theory and Practice*. New York: John Wiley and Sons.
- [Shen et al., 1983] Shen, H. M., King, R. W. P., and Wu, T. T. (1983). An experimental investigation of the parallel-plate emp simulator with single-pulse excitation. *IEEE transaction on Electromagnetic Compatibility*, EMC-25:358–366.
- [Shen et al., 1988] Shen, H. M., King, R. W. P., and Wu, T. T. (1988). V-conical antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-36:1519–1525.

- [Singh and Adams, 1979] Singh, J. and Adams, A. T. (1979). A non-rectangular patch model for scattering from surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-27(4):531–535.
- [Smith, 1988a] Smith, P. D. (1988a). Stable numerical methods for integral equations governing the scattering of transients. *Bull. IMA*, 24:166–170.
- [Smith, 1990] Smith, P. D. (1990). Instabilities in time marching methods for scattering: Cause and rectification. *Electromagnetics*, 10:439–451.
- [Smith, 1988b] Smith, W. A. (1988b). *Análisis Numérico*. Prentice-Hall Hispano Americana, S. A.
- [Sovetri and Costache, 1990] Sovetri, J. and Costache, G. (1990). Time domain finite element analysis of 2-d shields. In *Digest of the IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Dallas, Texas*, volume 1, pages 18–21.
- [Stroud, 1971] Stroud, A. H. (1971). *Aproximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall.
- [Stutzman and Thiele, 1981] Stutzman, W. L. and Thiele, G. A. (1981). *Antenna Theory and Design*. Jhon Wiley & Sons.
- [Taflove and Umashankar, 1990] Taflove, A. and Umashankar, K. (1990). The finite-difference time domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interacion. *Electromagnetics*, 10:105–106.
- [Thiele, 1982] Thiele, G. A. (1982). Future directions in computer modelling. Technical report, Aircraft. Report: AFWAL-TR-82-1011.
- [Tijhuis, 1984] Tijhuis, A. G. (1984). Towards a stable marching-on-in-time method for two-dimensional transient electromagnetic scattering problems. *Radio Science*, 19:1311–1317.
- [Tijhuis, 1987] Tijhuis, A. G. (1987). *Electromagnetic Inverse Profiling. Theory and Numerical Implementation*. VNU Science Press, Utrech, The Netherlands.
- [Tijhuis, 1991] Tijhuis, A. G. (1991). *Iterative Technique for the Solution of Integral Equations in Transient Electromagnetic Scattering*, in *PIER 5: Application of conjugate-gradient methods in electromagnetics and signal analysis*. Chapter 13. Elsevier, Amsterdam, The Neatherlands.

- [Umashankar et al., 1986] Umashankar, K., Taflove, A., and Rao, S. M. (1986). Electromagnetic scattering by three-dimensional homogeneous lossy dielectric objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-34:758–766.
- [Uslenghi, 1978] Uslenghi, P. E., editor (1978). *Electromagnetic Scattering*. New York: Academic Press.
- [Vechinski and Rao, 1992a] Vechinski, D. A. and Rao, S. M. (1992a). A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(6):661–665.
- [Vechinski and Rao, 1992b] Vechinski, D. A. and Rao, S. M. (1992b). Transient scattering by conducting cylinders-te case. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(9):1103–1107.
- [Wait, 1969] Wait, J. R. (1969). *Electromagnetic Radiation from conical Structures, in Antenna Theory, Part I*. New-York: McGraw-Hill. ch. 12, pp. 483-522.
- [Wang, 1991] Wang, J. J. H. (1991). *Generalized Moment Methods in Electromagnetics*. John Wiley-Interscience.
- [Wang et al., 1975] Wang, N., Richmond, J., and Gilreath, M. (1975). Sinusoidal reaction formulation for radiation and scattering from conducting surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-23(3):376–382.
- [Welch, 1960] Welch, W. J. (1960). Reciprocity theorems for electromagnetic fields whose time dependence is arbitrary. *IRE Transactions*, AP-8:68–73.
- [Weston, 1959] Weston, V. H. (1959). Pulse return from a sphere. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation (Special Supplement)*, AP-7:s43–s51.
- [Wilton et al., 1984] Wilton, D. R., Rao, S. M., Glisson, A. W., Shaubert, D. H., Al-Bundak, O. M., and Butler, C. M. (1984). Potential integrals for uniform and linear source distribution on polygonal and polyhedral domains. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-32:276–281.