Universidad de Granada

Departamento de Análisis Matemático

OPERADORES EXTREMOS EN ESPACIOS DE BANACH

Programa de Doctorado en Matemáticas

Tesis Doctoral

por

Ana María Cabrera Serrano

Director de Tesis: Juan F. Mena Jurado

Granada, 2017

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autora: Ana María Cabrera Serrano
ISBN: 978-84-9163-287-0
URI: http://hdl.handle.net/10481/47257

A mi padre

Índice general

Derechos de autor

La doctoranda Dña. Ana María Cabrera Serrano y el director de la tesis D. Juan Francisco Mena Jurado.

Garantizan al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección del director de tesis y hasta donde su conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, a 21 de abril de 2017.

Doctoranda	Director de la tesis
Fdo.: Ana María Cabrera Serrano	Fdo.: Juan Francisco Mena Jurado

Agradecimientos

El comienzo de cualquier proyecto es con ilusión, ganas de aprender y disfrutar. La realización de éste es más o menos dura, con días de caída y días en los que toca levantarse, recuperar la ilusión perdida y seguir. Lo que contrasta con el final, cuando te das cuenta que ese proyecto llega a su fin y la nostalgia te inunda al ver todo el camino recorrido. Pero a este sentimiento se une la satisfacción del trabajo realizado, de todo lo aprendido y de las personas que te han acompañado en todo el tiempo empleado o parte de él.

En primer lugar, agradecer a Juan Francisco Mena, mi director de tesis, por su extraordinario trabajo, experiencia, tiempo y dedicación en todos estos años. Gracias por ser la guía y la luz en este camino, en el que no sólo me has enseñado matemáticas sino también a amarlas y disfrutarlas. Sin duda alguna, gracias por tu entrega y confianza en mí.

Quiero darle las gracias a Lina Oliveira, por su acogida tanto en el Instituto Técnico Superior como en Lisboa. Gracias por tu dedicación y trabajo durante mi estancia a tu lado.

Además, me gustaría extender mi agradecimiento a Nieves Jiménez con quién he podido compartir mi pasión por las matemáticas desde que nos conocimos en ese primer curso de carrera. Añadir a todas las personas que me han acompañado y apoyado en este camino desde compañeras de carrera, mis amigas hasta mis abuelos (Antonio e Isabel).

Por último, (y no menos importante) darle las gracias a mi familia. A mis hermanos, Miguel Ángel y Antonio José, que han sido capaces de sacarme de la rutina y aderezar todo este camino con sonrisas y cariño. A mis padres, por dármelo todo, formación académica, educación, valores ... en resumen, TODO.

A mi padre, por ser un ejemplo a seguir (y al que es imposible de igualar) en cuanto a dedicación a su trabajo y a su familia. Gracias por ser mi primer profesor de matemáticas, por transmitirme tu pasión por ellas y por ser la guía en todo momento.

A mi madre, por ser la fuente infinita de ánimos, por levantarme cuando me he caído y por estar a mi lado en este proyecto.

A Pablo, por estar ahí, con su apoyo, comprensión y a veces, con un simple silencio.

Gracias de todo corazón a todos los que habéis formado parte de este precioso proyecto.

Introducción

La presente tesis se enmarca dentro del Análisis Funcional y, en concreto, se centra en la geometría de los espacios de Banach. En este contexto, una de las líneas clásicas es el estudio de la estructura extremal de la bola unidad de un espacio de Banach.

El punto de partida es la presentación de la noción básica de punto extremo, noción puramente algebraica, que formaliza la noción de vértice de un polígono convexo en el plano. Al igual que un polígono convexo en el plano queda determinado, mediante envolvente convexa, por sus vértices, el Teorema de Minkowski–Carathéodory garantiza que, en el espacio euclídeo, cualquier subconjunto convexo y compacto es la envolvente convexa de sus puntos extremos.

Uno de los resultados cruciales del Análisis Funcional es el Teorema de Krein–Milman que generaliza al anterior en espacios de dimensión infinita. La importancia de este teorema se refleja en las numerosas aplicaciones de indudable interés (Teorema de Banach–Stone, Principio de Optimización de Bauer, etc.).

En algunas de estas aplicaciones es fundamental la descripción de los puntos extremos de la bola unidad de dual del espacio de funciones continuas en un espacio compacto y Hausdorff, K, (que notaremos por $\mathcal{C}(K)$) debida a Arens–Kelley [6].

En general, la bola unidad de un espacio de Banach puede carecer de puntos extremos (el ejemplo más simple es el espacio c_0 de sucesiones convergentes a cero). En el caso de que la bola unidad de un espacio de Banach tenga puntos extremos, la descripción de éstos no es tarea fácil, ni siquiera para espacios en una clase concreta. Ya hemos citado el Teorema de Arens–Kelley que describe los puntos extremos del dual de $\mathcal{C}(K)$. En el caso de C^*-álgebras, la descripción de los puntos extremos se debe a Kadison [27] de la que se obtiene que en particular, los puntos extremos de la bola unidad del espacio de operadores en un espacio de Hilbert, son las isometrías y las coisometrías. Si se considera el espacio de operadores entre dos espacios de Banach la existencia y, en su caso, la descripción de operadores extremos es difícil de abordar a plena generalidad.

Un teorema debido a Milman garantiza que todo isomorfismo isométrico entre espacios de Banach es un operador extremo. El análisis de la demostración de este resultado llevó a la noción central de esta memoria que pasamos a presentar, para lo que introducimos la notación requerida.

Dado un espacio de Banach X, denotaremos por B_X y E_X, la bola unidad cerrada de X y el conjunto de puntos extremos de B_X. Si Y es otro espacio de Banach, $L(X,Y)$ denotará el espacio de todos los operadores de X en Y con su norma canónica. Si $Y = \mathbb{K}$, como es habitual, escribiremos $L(X,\mathbb{K}) = X^*$, el dual de X. Si $T \in L(X,Y)$, $T^* \in L(Y^*,X^*)$ denota el operador adjunto de T, definido como $T^*(y^*) = y^* \circ T$ para todo $y^* \in Y^*$.

Dados X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$, se dice que T es un operador nice si verifica $T^*(E_{Y^*}) \subseteq E_{X^*}$.

El concepto de operador nice apareció por primera vez en [41]. Como consecuencia de los teoremas de Krein–Milman y Banach–Alaoglu es de comprobación inmediata que si $T \in L(X,Y)$ es un operador nice, entonces T es un operador extremo, es decir, $T \in E_{L(X,Y)}$.

En el caso de que los espacios de Banach X e Y sean espacios de funciones continuas sobre compactos, los operadores nice coinciden con los operadores de composición, es decir, si K y H son espacios compactos y Hausdorff, un operador T de $\mathcal{C}(K)$ en $\mathcal{C}(H)$ es un operador nice si, y sólo si, existen aplicaciones continuas $\lambda : H \to \mathbb{K}$ con $|\lambda(h)| = 1$, $\forall h \in H$ y $\varphi : H \to K$ tal que

$$T(f)(h) = \lambda(h) f(\varphi(h)), \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K), \forall h \in H.$$

En [9], los autores estudian cuándo todo operador extremo en $L(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ es un operador de composición, es decir cuándo coinciden los operadores extremos y los operadores nice. En el artículo citado se prueba que si K es metrizable, en el caso real, se obtiene que todo operador extremo en $L(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ es un operador nice, cualquiera que sea el espacio compacto y Hausdorff H. La coincidencia entre operadores extremos y operadores nice en $L(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ si H es extremadamente disconexo, para cualquier espacio compacto Hausdorff K, se obtiene en el caso real en [49] y en el caso complejo en [23].

Los resultados citados anteriormente nos llevan a considerar la propiedad de coincidencia de los operadores extremos y los operadores nice en el ámbito general de los espacios de Banach, para lo cual introducimos la clase de espacios de Banach cuyo estudio es el objeto principal de la presente memoria. A partir de este momento consideramos espacios de Banach reales.

Un espacio de Banach X es nice si para cualquier espacio de Banach Y, todo operador extremo en $L(Y, X)$ es un operador nice. Es decir, para cualquier espacio de Banach Y, todo operador $T \in E_{L(Y,X)}$ verifica que $T^*(E_{X^*}) \subseteq E_{Y^*}$.

Se podría plantear la definición correspondiente intercambiando los papeles de los espacios de Banach X e Y. Uno de los primeros resultados de la memoria es que dicha definición no tiene contenido como pone de manifiesto el siguiente enunciado:

Sea X un espacio de Banach, existen un espacio de Banach Y y $T \in E_{L(X,Y)}$ tal que T no es un operador nice.

Mostramos que la clase de los espacios de Banach que son nice es no vacía. Para ello, recordamos una clase de espacios de funciones continuas que engloba a los espacios de funciones continuas definidas en un compacto Hausdorff. Dado L un espacio topológico localmente compacto Hausdorff se define el espacio de las funciones continuas en L que se anulan en el infinito como

$$\mathcal{C}_0(L) = \{f : L \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } \forall \varepsilon > 0, \{t \in L : |f(t)| \geq \varepsilon\} \text{ es compacto}\}.$$

Es claro que toda función en $\mathcal{C}_0(L)$ está acotada y, con la norma uniforme, $\mathcal{C}_0(L)$ es un espacio de Banach. Si I es un conjunto no vacío con la topología discreta, escribiremos $c_0(I)$ en lugar de $\mathcal{C}_0(I)$. Una vez presentados los espacios anteriores obtenemos el siguiente resultado:

$c_0(I)$ es un espacio nice para cualquier I conjunto no vacío.

Finalizamos el Capítulo 1 de la tesis probando que la clase de espacios nice es estable por c_0-sumas.

Comenzamos el Capítulo 2 de la memoria probando uno de los resultados fundamentales para llevar a cabo nuestro estudio de los espacios nice.

Sea X un espacio de Banach tal que existe $e_0^* \in E_{X^*}$ satisfaciendo:

(i) $X^* = \overline{\operatorname{lin}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})}^{w^*}$.

(ii) Para todo $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$, $\|e^* + \mathbb{R}e_0^*\| = 1$.

Entonces X no es nice.

La idea de la demostración es construir una norma equivalente en X cuya bola unidad del dual tenga los mismos puntos extremos que la bola unidad para la norma original de X salvo $\pm e_0^*$.

Una primera consecuencia de este resultado es la caracterización de los espacios de funciones continuas que se anulan en infinito que son nice.

Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces $\mathcal{C}_0(L)$ es nice si, y sólo si, L es discreto. En particular, si K es un espacio compacto y Hausdorff, $\mathcal{C}(K)$ es nice si, y sólo si, K es finito.

Para poder obtener la descripción anterior se utiliza que

$$E_{\mathcal{C}_0(L)^*} = \{\pm\delta_t : t \in L\},$$

siendo δ_t el funcional de evaluación en t. Esta igualdad es bien conocida y es una generalización del Teorema de Arens-Kelley.

Es fácil probar que, si X es un espacio de Banach y L es un espacio localmente compacto y Hausdorff,entonces todo operador $T \in E_{L(X,\mathcal{C}_0(L))}$ verifica que $T^*(\delta_t) \in E_{X^*}$ para cualquier punto aislado t de L. En consecuencia, si L no es discreto, existen un espacio de Banach X, un operador $T \in E_{L(X,\mathcal{C}_0(L))}$ y un punto de acumulación t de L tales que $T^*(\delta_t) \notin E_{X^*}$. Obtenemos el siguiente resultado más fuerte que generaliza [9].

Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff que no es discreto. Entonces existen un espacio de Banach X y un operador $T \in E_{L(X,\mathcal{C}_0(L))}$ tales que $T^*(\delta_t) \notin E_{X^*}$ para cualquier punto de acumulación t de L.

El siguiente objetivo del Capítulo 2 es estudiar los espacios de funciones integrables que son nice. Con este fin desarrollamos una serie de resultados sobre espacios de medida y espacios de funciones integrables que son esencialmente conocidos y que hemos estimado necesario recoger en la memoria. Una vez realizada esta tarea podemos concluir la práctica carencia de espacios de funciones integrables que son nice.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Si $L_1(\mu)$ es nice, entonces $L_1(\mu)$ tiene dimensión uno o dos, esto es, $L_1(\mu)$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}$ o l_∞^2.

Obtenemos una propiedad que verifican todos los espacios de Banach nice que tendrá importantes consecuencias.

Sea X un espacio de Banach nice tal que E_X es no vacío. Entonces

$$| e^*(e) |= 1 \qquad \textit{para cualesquiera } e^* \in E_{X^*} \textit{ y } e \in E_X.$$

Esta propiedad es bastante restrictiva y a partir de ella se obtiene la siguiente consecuencia:

Si X es un espacio reflexivo de dimensión infinita o un espacio de Banach estrictamente convexo que no sea $\mathbb{R}$, entonces X no es nice.

Dedicamos la última parte del Capítulo 2 a caracterizar los espacios de dimensión finita que son nice. En esta caracterización juega un papel fundamental la propiedad anterior que, en el caso de espacios de Banach finito-dimensionales, equivale a que el espacio sea un CL-espacio, una clase introducida por Fullerton en [22] y estudiada por varios autores. Utilizamos los resultados de Lima sobre CL-espacios contenidos en [33] y un resultado de Lindenstrauss y Perles en [35] sobre operadores en espacios de dimensión finita para conseguir nuestro objetivo.

Un espacio reflexivo es nice si, y sólo si, es isométricamente isomorfo a l_∞^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

En el Capítulo 3 nos proponemos caracterizar los espacios L_1-preduales que son nice. La herramienta fundamental, además de las ya establecidas previamente, es la topología estructura, definida en el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad del dual de cualquier espacio de Banach. Esta topología fue considerada por Alfsen y Effros ([4]). Para definir esta topología es necesario introducir la noción de L-sumando que presentamos a continuación.

Sea X un espacio de Banach. Una proyección lineal P de X en X se dice que es una L-proyección en X si verifica

$$\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\| \quad \forall x \in X.$$

Un subespacio (cerrado) de X se dice que es un L-sumando de X si es el rango de una L-proyección en X.

Sobre estas nociones y otras directamente relacionadas (M-proyección, M-sumando y M-ideal) existe una amplia literatura, siendo la monografía [26] la referencia básica. Dado el papel central que juega la topología estructura en los dos últimos capítulos finales, hemos recogido en el trabajo toda la información necesaria para conseguir nuestro objetivo.

Sea X un espacio de Banach. Por definición, la topología estructura en E_{X^*} es aquella cuyos conjuntos cerrados son las intersecciones de L-sumandos de X^* débil*-cerrados con E_{X^*}.

Uno de los resultados principales de la memoria, creemos que de interés en sí mismo, es el que sigue.

Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$ para algún conjunto no vacío I.*

(ii) *$\{\pm e^*\}$ es estructuralmente abierto para todo e^* en E_{X^*}.*

El resultado anterior, que caracteriza los espacios de tipo $c_0(I)$ como aquellos cuya topología estructura es "discreta", tiene un precedente para espacios de Banach complejos [46].

Podemos utilizar ya toda la información disponible para concluir el teorema principal del Capítulo 3.

Sea X un espacio nice tal que $\mathbb{R}e^*$ es un L-sumando en X^* para cualquier e^* en E_{X^*}. Entonces X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$ para algún conjunto no vacío I.

Basta tener en cuenta que la hipótesis en el anterior resultado se verifica en cualquier L_1-predual para alcanzar nuestra meta.

Sea X un L_1-predual nice, entonces X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$ para algún conjunto no vacío I.

Ya que los espacios de funciones continuas son L_1-preduales, se vuelve a obtener la caracterización de dichos espacios que son nice.

Otra familia clásica de espacios de Banach que son L_1-preduales se corresponde con espacios de funciones afines y continuas definidas en ciertos subconjuntos convexos y compactos de un espacio localmente convexo y Hausdorff. Damos las definiciones pertinentes para presentar este tipo de espacios.

Dado un subconjunto convexo y compacto K de un espacio localmente convexo y Hausdorff, una cara F de K se dice que es una cara directa si existe un subconjunto convexo F_0 de K disjunto con F tal que todo x en $K \setminus (F \cup F_0)$ se puede expresar de manera única como

$$c = \alpha y + (1-\alpha) z$$

con $\alpha \in]0,1[$, $y \in F$ y $z \in F_0$.

Se dice que K es un símplex si toda cara cerrada de K es una cara directa.

Una familia de símplices, importante en nuestro estudio, es la que sigue: Dado un conjunto no vacío I, consideramos $l_1(I)$ con la topología débil* como dual de $c_0(I)$. En este espacio localmente convexo y Hausorff el conjunto

$$B^+_{l_1(I)} = \{x \in B_{l_1(I)} : x(i) \geq 0 \ \ \forall i \in I\}$$

es un símplex.

Si K es un convexo y compacto, denotaremos por $\mathcal{A}(K)$ al espacio de funciones afines y continuas en K con la norma del supremo. Denotaremos por $\mathcal{A}_0(K)$ al subespacio de $\mathcal{A}(K)$ formado por todas las funciones que se anulan en un punto extremo fijo de K, que podemos suponer que es el cero. Se puede probar que $\mathcal{A}(K)$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{A}_0(S)$, donde S es un convexo y compacto que contiene a cero como cara directa.

Es sabido que, si K es un símplex, $\mathcal{A}_0(K)$ (respectivamente $\mathcal{A}(K)$) es un L_1-predual. El objetivo del Capítulo 4 es caracterizar los espacios de tipo $\mathcal{A}_0(K)$ que son nice sin presuponer que K es un símplex. Para poder aplicar los resultados previamente obtenidos, la herramienta principal es una caracterización de los L-sumandos de $\mathcal{A}(K)^*$, debida a Perdrizet ([45]), en términos de las caras directas de K.

Teniendo en cuenta que el conjunto de los puntos extremos de K, que denotaremos ∂K, se puede identificar con un subconjunto de $E_{\mathcal{A}(K)^*}$, la topología estructura de $E_{\mathcal{A}(K)^*}$ induce una topología en ∂K llamada la topología facial. Los cerrados de dicha topología son los puntos extremos de las caras directas cerradas de K.

Una vez desarrollada toda la parte técnica que acabamos de exponer sucintamente, podemos enunciar el teorema principal del capítulo.

Sea K un conjunto convexo y compacto que contiene a cero como cara directa y tal que el conjunto de puntos extremos de K que son caras directas es denso en ∂K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{A}_0(K)$ *es nice.*

(ii) $\mathcal{A}_0(K)$ *es isométricamente isomorfo a* $c_0(I)$ *para algún conjunto no vacío* I.

(iii) $\partial K \setminus \{0\}$ *es facialmente discreto.*

(iv) K *es afínmente homeomorfo a* $B^+_{l_1(I)}$ *para algún conjunto no vacío* I.

(v) K *es un símplex,* $\partial K \setminus \{0\}$ *es discreto y* ∂K *es cerrado.*

Se puede deducir de aquí el resultado correspondiente para $\mathcal{A}(K)$, aunque en la memoria se obtiene de manera independiente.

Sea K un conjunto convexo y compacto tal que el conjunto de puntos extremos de K que son caras directas es denso en ∂K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\mathcal{A}(K)$ *es nice.*

(ii) $\mathcal{A}(K)$ *es isométricamente isomorfo a* l^n_∞ *para algún* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) K *es un símplex y* ∂K *es finito.*

El contenido de esta memoria ha sido publicado en los trabajos [10, 11, 12, 13].

Capítulo 1

Operadores nice en espacios de Banach

En este capítulo, que tiene un carácter introductorio, se recopilan las nociones y resultados básicos que motivan el estudio de la estructura extremal. Cabe destacar el Teorema de Krein–Milman y el Teorema de Milman revertido que se utilizarán frecuentemente a lo largo de la memoria.

El análisis de la demostración del Teorema de Milman de que toda biyección lineal isométrica entre espacios de Banach es un operador extremo, conduce a la noción de operador nice, presentada formalmente por primera vez en [41]. La cuestión, considerada en casos particulares, de la coincidencia de los operadores extremos con los operadores nice nos lleva a presentar la clase de los espacios de Banach nice. El estudio de esta clase de espacios de Banach es el objeto principal de esta memoria. Probamos que no existe una noción "simétrica" de espacios de Banach nice.

Para finalizar el capítulo damos ejemplos de espacios de Banach nice y probamos la estabilidad de estos espacios para c_0-sumas.

1.1. Preliminares

En el plano es fácil comprobar que cualquier punto del interior de un triángulo se puede escribir como combinación convexa de sus tres vértices. De igual manera, si se considera un círculo en el plano, todo punto del interior se va a expresar como combinación de los puntos de su frontera. Sin embargo, los vértices del triángulo o los puntos de la frontera del círculo no se pueden escribir como combinación convexa de dos cualesquiera puntos de dichas regiones. Esto nos introduce en la noción fundamental del trabajo, punto extremo. Se trata de un concepto puramente algebraico, el cual aparece formalmente por primera vez en un trabajo de H. Minkowski en 1911.

Definición 1.1.1. Sea A un subconjunto de un espacio vectorial real, se dice que $e \in A$ es un ***punto extremo*** de A si dados $x, y \in A$ y $t \in]0,1[$ se tiene que

$$e = (1-t)x + ty \ \text{ implica que } \ e = x = y.$$

O lo que es lo mismo, un punto es extremo si no pertenece a ningún segmento propio contenido en el conjunto. Notaremos por ∂A al conjunto de los puntos extremos de A.

Dado que la intersección arbitraria de subconjuntos convexos es un subconjunto convexo, para cada subconjunto A, existe un subconjunto convexo más pequeño conteniendo a A, llamado la ***envolvente convexa de*** A, que notaremos por $co(A)$. La siguiente caracterización es inmediata a partir de la definición pero de gran utilidad.

Lema 1.1.2. *Sea X un espacio vectorial real, C un subconjunto convexo de X y $e \in C$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $e \in \partial C$.

(ii) $x, y \in C, \ e = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x = y = e$.

(iii) $x \in X, \ e \pm x \in C \Rightarrow x = 0$.

(iv) *Si F es un subconjunto finito de C y $e \in co(F)$, entonces $e \in F$.*

El primer resultado importante sobre puntos extremos se debe a Minkowski, quien en [40], probó que todo subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^3$ es la envolvente convexa de sus puntos extremos, esto es, que todo punto del subconjunto convexo y compacto se expresa como combinación convexa de los puntos extremos. La generalización de este hecho a $\mathbb{R}^n$ se debe a Carathéodory y el resultado es conocido como Teorema de Minkowski–Carathéodory que enunciamos a continuación.

Teorema 1.1.3. ***(Teorema de Minkowski–Carathéodory)*** *Sea K un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$. Entonces todo punto de K puede expresarse como combinación convexa de, a lo sumo, $n+1$ puntos extremos de K. En particular,*

$$K = co(\partial K).$$

En 1940, M. Krein y D. Milman obtienen una generalización del teorema anterior en espacios de dimensión infinita (ver [28]). Dicho teorema nos asegura que, bajo ciertas condiciones, un subconjunto convexo y compacto se puede reconstruir a partir de sus puntos extremos (por envolvente convexo-cerrada). En particular, se garantiza la existencia de puntos extremos.

Teorema 1.1.4. ***(Teorema de Krein–Milman)*** *Sea X un espacio localmente convexo y Hausdorff y K un subconjunto compacto de X. Entonces*

$$K \subset \overline{co}(\partial K).$$

En particular, K tiene puntos extremos, y además, si K es convexo entonces se da la igualdad.

Existe una especie de recíproco del Teorema de Krein–Milman que nos dice que el conjunto de puntos extremos de un convexo y compacto es, en cierto sentido, el mínimo subconjunto que lo genera por envolvente convexo-cerrada.

Teorema 1.1.5. ***(Teorema de Krein–Milman revertido)*** *Sea X un espacio localmente convexo y Hausdorff y K un subconjunto no vacío, convexo y compacto de X y sea A un subconjunto de K tal que $K = \overline{co}(A)$. Entonces $\partial K \subset \overline{A}$.*

Puesto que cualquier subconjunto denso en ∂K genera K por envolvente convexo-cerrada, lo único que podemos concluir es que $\overline{\partial K}$ es el mínimo subconjunto cerrado de K que genera a K por envolvente convexo-cerrada. Por lo que, cabe preguntarse si el conjunto de los puntos extremos de un conjunto convexo y compacto, ∂K, es cerrado, pero incluso en el caso de dimensión finita esto no es cierto.

El Teorema Krein–Milman sirvió como punto de partida para la investigación de la estructura extremal de los conjuntos convexos en espacios de dimensión infinita. Existen numerosas aplicaciones de dicho teorema. Una aplicación directa es el resultado básico en Teoría de Optimización, el "Principio de Optimización de Bauer".

Teorema 1.1.6. ***(Principio de Optimización de Bauer)*** *Si K es un subconjunto no vacío convexo y compacto de un espacio localmente convexo y real y f es una función cóncava semicontinua inferiormente definida en K, entonces f alcanza su mínimo en un punto extremo de K.*

Es claro que un enunciado equivalente es que una función convexa y semicontinua superiormente alcanza su máximo en un punto extremo de dicho conjunto.

A partir de ahora centramos nuestra atención en el ámbito de los espacios normados. A lo largo de la memoria todos los espacios normados serán espacios reales. Si X es un espacio normado, por B_X y S_X notaremos la bola unidad cerrada de X y la esfera unidad de X, esto es,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \qquad \text{y} \qquad S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Mientras que notaremos $E_X = \partial B_X$. Es fácil probar que $E_X \subseteq S_X$. Si $E_X = S_X$, entonces diremos que X es un espacio estrictamente convexo. Un ejemplo de ello son los espacios de Hilbert.

Si X es un espacio normado de dimensión infinita, B_X no es compacta para la topología de la norma y, por tanto, no se puede aplicar el Teorema de Krein–Milman. De hecho, existen espacios de Banach cuya bola unidad no tiene ningún punto extremo, siendo el caso más simple el espacio c_0 de sucesiones convergentes a cero donde es fácil comprobar que $E_{c_0} = \emptyset$. Si X^* es el dual topológico de X, entonces B_{X^*} es débil*-compacta por el Teorema de Banach–Alaoglu y el Teorema de Krein–Milman garantiza la existencia de puntos extremos en B_{X^*}, es decir, E_{X^*} es no vacío y genera B_{X^*} por envolvente convexa débil*-cerrada.

Utilizando el Teorema de Banach–Alaoglu junto con el Teorema de Hahn–Banach y el Principio de Optimización de Bauer, se obtiene el siguiente hecho conocido (ver, por ejemplo [19, Fact 3.119]) que se utilizará con profusión a lo largo de la memoria.

Proposición 1.1.7. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, para cada x en X, existe e^* en E_{X^*} tal que $\| x \| = e^*(x)$.*

Uno de los resultado más útiles en las aplicaciones es el Teorema de Arens–Kelley que describe los puntos extremos de la bola unidad del dual del espacio de funciones continuas definidas en un espacio compacto y Hausdorff que enunciamos a continuación. Como es habitual, dado K un espacio topológico compacto y Hausdorff, notaremos por $\mathcal{C}(K)$ el espacio de todas las funciones continuas definidas en K con valores en $\mathbb{R}$, con la norma uniforme.

Teorema 1.1.8. *Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff. Entonces:*

(i) $E_{\mathcal{C}(K)} = \{f \in \mathcal{C}(K) : |f(t)| = 1 \quad \forall t \in K\}$.

(ii) *(Arens–Kelley)* $E_{\mathcal{C}(K)^*} = \{\lambda\delta_t : |\lambda| = 1,\ t \in K\}$ *donde δ_t es el funcional de evaluación en t.*

Como señala Elton Lacey en [29, pag. 53], los puntos extremos de la bola unidad de $\mathcal{C}(K)^*$ juegan un papel importante en el análisis de K, $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(K)^*$.

Una aplicación importante del Teorema de Arens–Kelley es la demostración del Teorema de Banach–Stone. Demostrado en el caso separable por S. Banach ([8]) y en el caso general por M. H. Stone ([53]).

Teorema 1.1.9. ***(Teorema de Banach–Stone)*** *Sean K y H espacios compactos y Hausdorff. Entonces $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{C}(H)$ son linealmente isométricos si y sólo si, K y H son homeomorfos.*

De hecho el Teorema de Banach–Stone describe todos los isomorfismos isométricos entre dos espacios de funciones continuas en términos de los homeomorfismos de los correspondientes espacios compactos.

Otro resultado importante, que se puede obtener como consecuencia de los Teoremas de Krein–Milman y Banach–Alaoglu, es el Teorema de Stone–Weierstras que incluye como caso particular, el resultado clásico que asegura la densidad (en la topología de la convergencia uniforme) de las funciones polinómicas en el espacio de las funciones continuas reales en un intervalo cerrado.

1.2. Puntos extremos en espacios de operadores

A partir del Teorema de Krein–Milman el estudio de los puntos extremos de conjuntos convexos ha ido tomando más relevancia. De hecho, la mera descripción de los puntos extremos de la bola unidad de un espacio normado no es tarea fácil, incluso, trabajando con clases muy concretas de espacios normados. Éste es el caso cuando uno considera espacios de operadores, situación que planteamos a continuación. Si X e Y son dos espacios normados sobre $\mathbb{R}$, denotaremos por $L(X, Y)$ al espacio vectorial formado por todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y también llamado ***espacio de operadores de*** X ***en*** Y. En el que consideraremos la norma canónica de operadores,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\}.$$

Si $X = Y$ entonces escribiremos $L(X)$ en lugar de $L(X, X)$. Los conceptos previos tienen una denominación y notación propias que pasamos a presentar.

Definición 1.2.1. Sean X e Y espacios normados y $T \in B_{L(X,Y)}$, diremos que T es un ***operador extremo*** si T es un punto extremo de $B_{L(X,Y)}$. Al conjunto de los operadores extremos en $L(X, Y)$ lo denotaremos por $E(X, Y)$.

Si $Y = \mathbb{R}$, entonces $L(X, \mathbb{R}) = X^*$ tiene puntos extremos en abundancia como ya se ha comentado. Ahora bien, si $X = \mathbb{R}$, $L(\mathbb{R}, Y)$ es isométricamente isomorfo a Y con lo que si $E_Y = \emptyset$ (por ejemplo, $Y = c_0$) no existen operadores extremos. Esta situación, incluso en el caso más sencillo, pone de manifiesto una cierta asimetría de la estructura extremal de $L(X, Y)$ con respecto a X e Y.

Por otro lado, a cada operador $T \in L(X, Y)$ entre espacios normados se le puede asociar de forma canónica una nueva aplicación lineal y continua de Y^* en X^*.

Definición 1.2.2. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Llamamos ***operador adjunto*** de T, denotado por T^*, a la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ dada por

$$T^*(y^*) = y^* \circ T, \qquad \text{para todo } y^* \text{ en } Y^*.$$

Es de comprobación imnediata que T^* es (débil*-débil*)-continuo. De hecho, cualquier operador de Y^* en X^* que sea (débil*-débil*)-continuo es el adjunto de un operador de $L(X,Y)$.

El siguiente teorema, obtenido por Milman [39] es un primer logro en el camino para describir los operadores extremos. El Teorema de Milman muestra, en particular, que $B_{L(X)}$ tiene al menos un punto extremo.

Teorema 1.2.3. *(**Teorema de Milman**) Si T es una biyección lineal isométrica de X en Y, entonces T es un operador extremo.*

Demostración. El operador adjunto T^* es una biyección lineal isométrica de Y^* en X^*, por lo que transforma los puntos extremos de B_{Y^*} en puntos extremos de B_{X^*}. Para probar que T es un operador extremo, supongamos que $T = \frac{1}{2}(U+V)$, donde $U, V \in B_{L(X,Y)}$. Sea $y^* \in E_{Y^*}$, entonces

$$T^*(y^*) \in E_{X^*} \quad \text{y} \quad T^*(y^*) = \frac{1}{2}(U^*(y^*) + V^*(y^*)).$$

Ya que $U^*(y^*)$, $V^*(y^*) \in B_{X^*}$ y $T^*(y^*) \in E_{X^*}$, $T^*(y^*) = U^*(y^*) = V^*(y^*)$. Luego, por la linealidad y débil*-continuidad de T^* junto con el Teorema de Krein–Milman tenemos

$$T^*(y^*) = U^*(y^*) = V^*(y^*), \quad \forall y^* \in B_{Y^*}$$

entonces $T^* = U^* = V^*$ y, por tanto, $T = U = V$. □

El siguiente resultado es un recíproco parcial del teorema anterior, el cual apareció por primera vez en [35].

Teorema 1.2.4. *Sea X un espacio euclídeo de dimensión finita. Si $T \in E(X,X)$, entonces T es una isometría.*

Es fácil dar un ejemplo de un operador extremo que no es una biyección lineal isométrica, incluso cuando el operador está definido en un espacio finito-dimensional. Considérese por ejemplo, $X = \mathbb{R}^2$ con la norma del máximo, $\|(x,y)\| = \text{máx}\{|x|,|y|\}$. Entonces B_X es el cuadrado con vértices $(\pm 1, \pm 1)$. Definimos el operador $T : X \to X$ dado por

$$T(x,y) = (x,x).$$

Evidentemente $\|T\| = 1$ y, por tanto, $T \in B_{L(X)}$. Además, T es un operador extremo. En efecto, supongamos que $T = \frac{1}{2}(U + V)$, donde $U, V \in B_{L(X)}$. Entonces, $(1,1) = T(1,0) = \frac{1}{2}(U(1,0) + V(1,0))$, pero $(1,1)$ es un punto extremo de la bola unidad, por tanto $U(1,0) = V(1,0) = (1,1)$. De manera análoga, obtenemos que $U(1,-1) = V(1,-1) = (1,1)$. Puesto que U y V coinciden en los elementos de una base de $\mathbb{R}^2$, se sigue que $U = V$. Por tanto, T es un operador extremo y, claramente, T no es una isometría, ya que no es inyectiva. De hecho, la propiedad que aparece en el teorema anterior caracteriza los espacios de Hilbert entre los espacios normados de dimensión finita como muestra M. A. Navarro en [42] en el siguiente resultado.

Teorema 1.2.5. *Sea X un espacio de Banach finito-dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X es un espacio de Hilbert.*

(ii) *Todo operador extremo en X es una isometría.*

(iii) *La bola unidad de $L(X)$ es la envolvente convexa de sus isometrías.*

(iv) *La bola unidad de $L(X)$ es la envolvente convexo-cerrada de sus isometrías.*

Es conocido que los operadores extremos en espacios de Hilbert son las isometrías y las coisometrías (cuando el adjunto de un operador es una isometría). En el caso de un espacio de Hilbert infinito dimensional se puede probar la existencia de coisometrías que no son inyectivas y, por tanto, no son isometrías. Con respecto a la afirmación (iv) se ha demostrado recientemente en [44] que dicha afirmación es cierta para el caso de un espacio de Hilbert real de dimensión infinita.

Un análisis de la demostración del Teorema de Milman pone de manifiesto la propiedad de las biyecciones lineales isométricas utilizada y es que su adjunto transforma puntos extremos de la bola unidad del espacio inicial en puntos extremos de la bola unidad del espacio de llegada. Este hecho motiva el siguiente concepto, que será fundamental en el presente trabajo. Esta noción fue introducida por primera vez en 1970 por P. D. Morris y R. R. Phelps en [41], aunque apareció implícitamente en un trabajo previo realizado por R. M. Blumenthal, J. Lindenstrauss y R. R. Phelps, [9].

Definición 1.2.6. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$, diremos que T es un ***operador nice*** si

$$T^*(E_{Y^*}) \subset E_{X^*}.$$

Al conjunto de operadores nice en $L(X,Y)$ lo notaremos por $N(X,Y)$.

El término nice no lo traduciremos del inglés, ya que no hemos encontrado una traducción adecuada en español.

Es claro que una biyección lineal isométrica es un operador nice. Siguiendo la demostración del Teorema de Milman obtenemos que todo operador nice es siempre un operador extremo.

Proposición 1.2.7. *Sean X e Y espacios normados y sea $T \in L(X,Y)$ un operador nice, entonces T es un operador extremo.*

Demostración. Como T es nice, es decir, $T^*(E_{Y^*}) \subset E_{X^*}$, usando la linealidad y continuidad de T^* para las respectivas topologías débil-* de los espacios Y^* y X^* y el Teorema de Krein–Milman, tenemos que

$$T^*(B_{Y^*}) = T^*(\overline{\mathrm{co}}^{w^*}(E_{Y^*})) \subseteq \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(E_{X^*}) = B_{X^*}.$$

Por tanto, $\|T^*\| = 1$. Basta seguir la demostración del Teorema de Milman para probar que T es un operador extremo. $\square$

1.3. Espacios de Banach nice

Si notamos por $I(X,Y)$ al conjunto de operadores en $L(X,Y)$ que son biyecciones lineales isométricas, obtenemos la siguiente cadena de inclusiones ciertas para cualesquiera espacios de Banach:

$$I(X,Y) \subseteq N(X,Y) \subseteq E(X,Y).$$

Como ejemplo de estas inclusiones, el operador identidad en un espacio normado X es siempre un punto extremo de la bola unidad de $L(X)$. Por lo que surge de manera natural plantearse cuándo se produce la igualdad entre dichos conjuntos. De hecho, como ya se ha comentado, si X es un espacio de Hilbert de dimensión finita, se tiene que $E(X,X) = I(X,X)$. Si X es de dimensión infinita, los operadores nice en X son las coisometrías y, de este hecho, como se ha dicho ya, se puede concluir que

$$I(X,X) \neq N(X,X) \neq E(X,X).$$

J. C. Navarro y M. A. Navarro en [43] tratan la igualdad entre las biyecciones lineales isométricas y los operadores nice.

Si X e Y son isométricamente isomorfos, la igualdad $I(X,Y) = N(X,Y)$ equivale a $I(X,X) = N(X,X)$. En [43] se prueba la existencia de espacios de Banach de dimensión infinita para los que se verifica la anterior igualdad. Hasta la fecha, la existencia de un espacio de Banach de dimensión infinita en el que todo operador extremo es un isomorfismo isométrico es un problema abierto. Con respecto a la igualdad $N(X,Y) = E(X,Y)$, como ya hemos comentado, en general, existen operadores extremos que no son nice. De hecho, el siguiente ejemplo muestra de manera fácil que puede ocurrir que entre dos espacios de Banach no existan operadores nice mientras que todo operador de norma uno es extremo.

Tomemos como X el espacio más sencillo que podemos tomar, $\mathbb{R}$, consideremos $T \in L(\mathbb{R}, Y) \equiv Y$ dado por

$$T(\alpha) = \alpha y_0$$

donde y_0 pertenece a Y y $T(1) = y_0$. Teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$, $T^* : Y^* \to \mathbb{R}$ está dado por

$$T^*(y^*)(\alpha) = y^*(T(\alpha)) = y^*(\alpha y_0) = \alpha y^*(y_0)$$

luego, $T^*(y^*) = y^*(y_0) = J_Y(y_0)(y^*)$ para todo y^* perteneciente a Y^* y por tanto, $T^* = J_Y(y_0)$.

De esta manera obtenemos que T es nice si, y sólo si $T^*(E_{Y^*}) \subseteq E_{\mathbb{R}}$ donde $E_{\mathbb{R}} = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| = 1\}$. Por tanto, el operador es nice si, y sólo si, $|y^*(y_0)| = 1$ para todo y^* en E_{Y^*}. Es claro que $T \in E(\mathbb{R}, Y)$ si, y sólo si, y_0 pertenece a E_Y. Basta considerar Y un espacio de Hilbert para obtener que todo operador de norma uno en $L(\mathbb{R}, Y)$ es extremo y no existen operadores nice en $L(\mathbb{R}, Y)$.

Los primeros en plantear el problema de la igualdad de los operadores extremos y los operadores nice fueron Blumenthal, Lindenstrauss y Phelps en [9], en el caso de operadores entre espacios de funciones continuas. Pero en este caso también la respuesta es negativa en general. Como se ha señalado anteriormente la estructura extremal de los espacios de tipo $\mathcal{C}(K)^*$ con K un espacio topológico compacto y Hausdorff está determinada, lo cual facilita el estudio de los operadores nice. De hecho, un operador entre espacios de funciones continuas es nice si (y sólo si) es un operador de composición. Específicamente, si K y H son espacios compactos y Hausdorff, un operador $T \in L((\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ es nice si, y sólo si, existe un punto extremo e de la bola unidad de $\mathcal{C}(H)$ y una aplicación continua $\varphi : H \to K$ tales que

$$Tf = e(f \circ \varphi), \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K).$$

En el trabajo citado, [9], se prueba que si K y H son compactos y Hausdorff y, además, K es metrizable, entonces todo operador extremo de $L(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ es nice.

Posteriormente, se realizaron trabajos en los que se obtenía la coincidencia de los operadores nice y los operadores extremos en $L(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ imponiendo condiciones sobre K, H o sobre el propio operador. Por otro lado, M. Sharir en sus trabajos [51, 52] muestra condiciones suficientes para asegurar la existencia de operadores extremos que no son nice en $L(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ para convenientes espacios compactos y Hausdorff. Esto es, para un conveniente espacio topológico compacto y Hausdorff K existe un espacio compacto y Hausdorff H y un operador extremo que no es nice.

Puesto que existen espacios compactos K tales que $N(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H)) = E(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ para todo espacio H y también, existen espacios compactos H tales que $N(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H)) = E(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(H))$ para todo espacio K, nos interesa, por tanto, abordar el caso general en el que se produce la igualdad entre los operadores extremos y los operadores nice entre espacios de Banach. Para ello, presentamos la siguiente noción.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio de Banach, diremos que es un ***espacio nice*** si para cualquier espacio de Banach Y se verifica que $N(Y, X) = E(Y, X)$.

En vista de la definición, cabe plantearse una definición dual en la que se intercambien los papeles entre los espacios X e Y, esto es, si dado X espacio de Banach se verifica $N(X, Y) = E(X, Y)$ para todo Y espacio de Banach. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que no existe este tipo de espacios.

Proposición 1.3.2. *Sea X un espacio de Banach, entonces existe un espacio de Banach Y tal que $N(X, Y) \neq E(X, Y)$.*

Demostración. Dado Y un espacio de Banach, podemos considerar el espacio de Banach $X \oplus_2 Y$, esto es, el espacio vectorial $X \oplus Y$ dotado con la norma $\| (x, y) \| = \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2}$. Consideremos el operador $T : X \to X \oplus_2 Y$ definido por $T(x) = (x, 0)$ para todo x en X. Nótese que

$$\| T(x) \| = \| x \| \leq \| (x, y) \| \quad \text{para cualesquiera} \quad x \in X \quad \text{y} \quad y \in Y$$

así, para x en S_X, $\| T(x) \| = 1$ y $\| T \| = 1$.

Veamos que T es un operador extremo.

Sea S en $L(X, X \oplus_2 Y)$ tal que $\| T \pm S \| \leq 1$. Entonces $S(x) = (S_1(x), S_2(x))$ para todo x en X, donde $S_1 \in L(X)$ y $S_2 \in L(X, Y)$. Así pues, para cada x en S_X tenemos

$$\begin{aligned} \| x \pm S_1(x) \|^2 &\leq \| x \pm S_1(x) \|^2 + \| S_2(x) \|^2 \\ &= \| (x, 0) \pm (S_1(x), S_2(x)) \|^2 \\ &= \| T(x) \pm S(x) \|^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Como Id_X (el operador identidad en X) es un operador extremo, obtenemos que $S_1 = 0$. Por lo tanto, para cada x en S_X tenemos que

$$1 + \| S_2(x) \|^2 = \| x \|^2 + \| S_2(x) \|^2 \leq 1$$

y como consecuencia, $S_2 = 0$. Luego, $S = 0$ y T es un operador extremo en $L(X, X \oplus_2 Y)$.

Comprobemos ahora que T no es un operador nice.

Vía la identificación $(X \oplus_2 Y)^* = X^* \oplus_2 Y^*$, el operador adjunto $T^* : X^* \oplus_2 Y^* \to X^*$ está dado por

$$T^*(x^*, y^*) = x^* \text{ para cualesquiera } x^* \in X^* \text{ y } y^* \in Y^*.$$

Sea y^* en E_{Y^*}, entonces $(0, y^*) \in E_{X^* \oplus_2 Y^*}$, y

$$T^*(0, y^*) = 0 \notin E_{X^*}.$$

De esta manera, T no es un operador nice. □

Una vez visto que no es posible una versión dual de espacio nice, nos planteamos estudiar qué espacios cumplen dicha definición. Comenzamos mostrando que la clase de espacios de Banach nice es no vacía.

Para ello, presentamos el espacio $c_0(I)$, para un conjunto no vacío I, definido como

$$c_0(I) = \{x : I \to \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \{i \in I : |x(i)| \geq \varepsilon\} \text{ es finito}\}.$$

Es claro que todo elemento de $c_0(I)$ está acotado y se puede comprobar que $c_0(I)$ con la norma uniforme es un espacio de Banach. También es rutinario comprobar que $c_0(I)^*$ se identifica con $l_1(I)$, el espacio de las familias absolutamente sumables en I, con la correspondiente norma. Es decir,

$$l_1(I) = \{x : I \to \mathbb{R} : \sum_{i \in I} |x(i)| < +\infty\}$$

y, para $x \in l_1(I)$, se define $\| x \| = \sum_{i \in I} |x(i)|$.

Proposición 1.3.3. *Sea I un conjunto no vacío, entonces $c_0(I)$ es un espacio nice.*

Demostración. La inclusión $E(X, Y) \supseteq N(X, Y)$ es siempre cierta para cualesquiera espacios de Banach, en particular si $Y = c_0(I)$. Por tanto, basta probar que $E(X, c_o(I)) \subseteq N(X, c_0(I))$ para cualquier espacio de Banach X. Para todo elemento i de I, denotamos por

$$e_i^* : c_0(I) \to \mathbb{R}$$

el funcional definido por $e_i^*(x) = x(i)$. Es fácil comprobar que

$$E_{c_0(I)^*} = \{\pm e_i^* : i \in I\}.$$

Sea T un operador extremo en $L(X, c_0(I))$ y $x_i^* = T^*(e_i^*)$. Probemos que x_i^* es un punto extremo de X^*, $x_i^* \in E_{X^*}$, para todo i en I y así obtener que T es un operador nice. Supongamos que existe i_0 en I tal que $x_{i_0}^* \notin E_{X^*}$, entonces existirían y^*, z^* en B_{X^*} con $y^* \neq z^*$ tales que $x_{i_0}^* = \frac{1}{2}(y^* + z^*)$. Consideremos $S_1, S_2 : X \to c_0(I)$ dados por

$$S_1(x)(i) = \begin{cases} y^*(x) & \text{si} \quad i = i_0 \\ T(x)(i) & \text{si} \quad i \neq i_0 \end{cases}$$

$$S_2(x)(i) = \begin{cases} z^*(x) & \text{si} \quad i = i_0 \\ T(x)(i) & \text{si} \quad i \neq i_0 \end{cases}$$

es claro que S_1, $S_2 \in L(X, c_0(I))$. Además, se tiene que $\| S_1 \| \leq 1$, pues para todo x en X se tiene

$$\|S_1(x)\| = \sup_{i \neq i_0} \{|T(x)(i)|, |y^*(x)|\} \leq \|x\|.$$

Análogamente, $\| S_2 \| \leq 1$ y $S_1 \neq S_2$. Luego, $T = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$, lo cual es contradicción, ya que T es un operador extremo por hipótesis. Por tanto, $T^*(e_i^*)$ es un elemento de E_{X^*} para todo i en I y así, $T \in N(X, c_0(I))$. $\square$

En el caso que el conjunto I es finito con $card(I) = n$, entonces $c_0(I) = l_\infty^n$, obteniendo de esta manera un espacio de Banach nice.

Si consideramos $I = \mathbb{N}$ en el resultado anterior obtenemos

$$E(X, c_0) = N(X, c_0)$$

para cualquier espacio de Banach X. Sin embargo, puede ocurrir que ambos conjuntos sean vacíos para muchos espacios de Banach X. En este caso, si X es un espacio de Banach en el que no es posible encontrar sucesiones en E_{X^*} débil*-nulas, entonces $E(X, c_0) = N(X, c_0) = \emptyset$. Como ejemplo de esta situación, tomemos $X = \mathcal{C}(K)$ donde K es cualquier espacio topológico compacto y Hausdorff. Si x^* es un elemento de $E_{\mathcal{C}(K)^*}$, por el Teorema de Arens–Kelley, será de la forma $x^* = \lambda \delta_t$ donde $|\lambda| = 1$ y t en K. Para cualquier f en $\mathcal{C}(K)$ se tiene que

$$x^*(f) = \lambda \delta_t(f) = \lambda f(t).$$

Tomemos $f \equiv 1$ entonces $x^*(1) = \lambda\delta_t(1) = \lambda 1(t) = \lambda$. Luego, si x_n^* pertenece a $E_{\mathcal{C}(K)^*}$ para todo n en $\mathbb{N}$, entonces $\{x_n^*\}$ no es débil*-convergente a cero.

Existen casos sencillos en los que se pueden describir los operadores nice y los extremos. Consideremos el caso $Y = c$, donde c es el espacio de sucesiones de escalares convergentes. Como no vamos a obtener una coincidencia entre los operadores nice y los extremos de $L(X, c)$, podemos concluir entonces que c no es un espacio nice. Como veremos en un corolario posterior, si consideramos el espacio $L(\mathcal{C}(K), c)$ la situación mejora.

Proposición 1.3.4. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $T \in E(X, c)$.

(ii) Existe $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{w^*} x^*$ *con* $x_n^* \in E_{X^*}$ *y* $x^* \in X^*$ *tal que*

$$T(x) = \{x_n^*(x)\}, \quad \textit{para todo } x \in X.$$

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Sean

$$e_n^*(x) = x(n) \quad (\text{con } n \in \mathbb{N}, x \in c) \quad \text{y } e_\infty^*(x) = \text{lím}\{x(n)\} = x(\infty).$$

Como $\{e_n^*\} \xrightarrow{w^*} e_\infty^*$ en c^* y T^* es (débil*-débil*)-continua, entonces

$$\{T^*(e_n^*)\} = \{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} T^*(e_\infty^*) = x^*,$$

esto es, existe x^* en X^* tal que $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$. Es claro que para todo n, $T(x) = \{x_n^*(x)\}$ para x en X. Veamos que x_n^* es un elemento de E_{X^*}. Razonemos por reducción al absurdo, si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0}^* \notin E_{X^*}$, entonces $x_{n_0}^* = \frac{1}{2}(y_{n_0}^* + z_{n_0}^*)$ donde $y_{n_0}^*, z_{n_0}^* \in B_{X^*}$, $y_{n_0}^* \neq z_{n_0}^*$. Consideremos

$$S_1(x)(n) = \begin{cases} T(x)(n) & si \quad n \neq n_0 \\ y_{n_0}^*(x) & si \quad n = n_0 \end{cases}$$

$$S_2(x)(n) = \begin{cases} T(x)(n) & si \quad n \neq n_0 \\ z_{n_0}^*(x) & si \quad n = n_0 \end{cases}.$$

Es claro que $\|S_1\| \leq 1$ y $\|S_2\| \leq 1$. Entonces, $T = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ y, por tanto, $T \notin E(X, c)$, contradicción.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Supongamos que $T = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$, donde $\|S_1\| \leq 1$ y $\|S_2\| \leq 1$. Entonces $T^*(e_n^*) = x_n^* = \frac{1}{2}(S_1^*(e_n^*) + S_2^*(e_n^*))$, como $x_n^* \in E_{X^*}$, se tiene que $S_1^*(e_n^*) = S_2^*(e_n^*)$ para todo n en $\mathbb{N}$. Luego,

$$S_1(x)(n) = S_1^*(e_n^*)(x) = S_2^*(e_n^*)(x) = S_2(x)(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto, $S_1(x) = S_2(x)$ para todo x en X, esto es, $T \in E(X, c)$. $\square$

Proposición 1.3.5. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $T \in N(X, c)$.

(ii) *Existe* $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{w^*} x^*$ *con* $x_n^* \in E_{X^*}$ *y* $x^* \in E_{X^*}$ *de manera que*

$$T(x) = \{x_n^*(x)\}_{n\in\mathbb{N}}, \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración.

El espacio c se identifica con el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (la compactación por un punto de $\mathbb{N}$). Utilizando el Teorema de Arens–Kelley se obtiene que $E_{c^*} = \{\pm e_n^* : n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$ donde, como en la demostración de la proposición anterior,

$$e_n^*(x) = x(n) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}) \quad \text{y} \quad e_\infty^*(x) = \lim\{x(n)\}.$$

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Como $T \in E(X, c)$ por la proposición anterior, existe $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{w^*} x^*$ con x_n^* en E_{X^*} para todo n en $\mathbb{N}$, tal que $T(x) = \{x_n^*(x)\}$, para todo x en X. Además, $x^* = T^*(e_\infty^*)$, como $e_\infty^* \in E_{c^*}$ y T es nice, entonces x^* es un elemento de E_{X^*}.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Ahora tenemos que $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{w^*} x^*$, es decir, para todo x en X se tiene que $\{x_n^*(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \to x^*(x)$. Como $\{x_n^*(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a c para todo x en X, el operador $T : X \to c$ dado por

$$T(x) = \{x_n^*(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

está bien definido y como $\|T(x)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n^*(x)|\} \leq \|x\|$ entonces, $T \in L(X, c)$.

Además, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos

$$T^*(e_n^*)(x) = e_n^*(\{x_k^*(x)\}_{k\in\mathbb{N}}) = x_n^*(x)$$

y

$$T^*(e_\infty^*)(x) = e_\infty^*(\{x_k^*(x)\}_{k\in\mathbb{N}}) = x^*(x)$$

pero esto es cierto para todo x en X, entonces $T^*(e_n^*) = x_n^* \in E_{X^*}$ y $T^*(e_\infty^*) = x^* \in E_{X^*}$, lo que implica que $T^*(E_{c^*}) \subseteq E_{X^*}$ y por tanto, $T \in N(X, c)$. $\square$

Teniendo en cuenta estos dos resultados obtenemos la siguiente consecuencia:

Corolario 1.3.6. *Sea X un espacio normado tal que E_{X^*} es débil*-cerrado, entonces $E(X, c) = N(X, c)$. En particular, $E(\mathcal{C}(K), c) = N(\mathcal{C}(K), c)$ para cualquier K espacio compacto y Hausdorff.*

Sin embargo, para probar que c no es nice, basta encontrar un espacio X con una sucesión de puntos en E_{X^*} que sea débil*-convergente y cuyo límite no sea un punto extremo. Por ejemplo, si tomamos $X = c_0$ y consideramos para cada n en $\mathbb{N}$, $e_n^* \in E_{c_0^*}$, es claro que $\{e_n^*\} \xrightarrow{w^*} 0$ y 0 no es un punto extremo de c_0^*, luego, el operador $T : c_0 \to c$ definido por $T(x) = \{e_n^*(x)\}$ (con $x \in c_0$), es decir, $T(x) = x$ (con $x \in c_0$) es un operador extremo que no es nice.

Acabamos este capítulo probando la estabilidad de los espacios nice para c_0-sumas. Sea I un conjunto no vacío y sean X_i espacios de Banach con $i \in I$, definimos el espacio vectorial

$$\bigoplus_{c_0} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} : \forall \varepsilon > 0 \ \ \{i \in I : \|x_i\| \geq \varepsilon\} \text{ es finito } \}$$

que dotado con la norma $\|\{x_i\}_{i\in I}\| = \sup\{\|x_i\| : i \in I\}$ es un espacio de Banach.

Análogamente, se define

$$\bigoplus_{l_1} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} : \sum_{i\in I} \|x_i\| < +\infty\},$$

que con la norma $\|\{x_i\}_{i\in I}\| = \sum_{i\in I} \|x_i\|$ es un espacio de Banach.

Proposición 1.3.7. *Sea I un conjunto no vacío y sea para cada $i \in I$, X_i un espacio de Banach nice. Entonces $\bigoplus_{c_0} X_i$ es un espacio nice.*

Demostración. Sea Y un espacio de Banach y sea $T : Y \to \bigoplus_{c_0} X_i$ un operador extremo. Para todo i en I, el operador $T_i = p_i \circ T$ es extremo, donde $p_i(\{x_i\}) = x_i$. En efecto, supóngase que existe i_0 en I de manera que $T_{i_0} \notin E(Y, X_{i_0})$, entonces existiría también un operador no nulo $S_{i_0} \in L(Y, X_{i_0})$ tal que $\|T_{i_0} \pm S_{i_0}\| \leq 1$. Construimos el operador no nulo $S \in L(Y, \bigoplus_{c_0} X_i)$ dado por

$$S(y)(i) = \begin{cases} S_{i_0}(y) & si \quad i = i_0 \\ 0 & si \quad i \neq i_0 \end{cases}$$

de manera que $\|T \pm S\| \leq 1$, lo que es una contradicción con que T es un operador extremo.

Veamos que el operador T es nice. Téngase en cuenta la igualdad

$$(\bigoplus_{c_0} X_i)^* = \bigoplus_{l_1} X_i^*.$$

Así, veamos que el operador adjunto $T^* : \bigoplus\limits_{l_1} X_i^* \to Y^*$ conserva los puntos extremos. Sea x^* un punto extremo de $\bigoplus\limits_{l_1} X_i^*$, entonces existirá i_0 en I tal que $x_{i_0}^* \in E_{X_{i_0}^*}$ y $x_i^* = 0$ para todo $i \neq i_0$. Luego,

$$T^*(x^*)(y) = x^*(T(y)) = x_{i_0}^*(T_{i_0}(y)) = T_{i_0}^*(x_{i_0}^*)(y)$$

de donde $T^*(x^*) = T_{i_0}^*(x_{i_0}^*) \in E_{Y^*}$. Por tanto, el operador T es nice y así, el espacio $\bigoplus\limits_{c_0} X_i$ es nice. □

Como caso particular de este resultado tenemos el siguiente corolario para la suma de dos espacios de Banach nice.

Corolario 1.3.8. *Sean X e Y dos espacios de Banach nice, entonces $X \bigoplus_\infty Y$ es un espacio nice.*

Capítulo 2

Espacios de Banach nice: condiciones necesarias

Comenzamos este capítulo con uno de los resultados fundamentales de la memoria para el estudio de los espacios de Banach que son nice.

A continuación, aplicamos este resultado para probar que los espacios de funciones continuas definidas en un espacio localmente compacto y Hausdorff, L, que se anulan en infinito, $\mathcal{C}_0(L)$, son nice si, y sólo si, el espacio localmente compacto y Hausdorff L es discreto. Concluimos esta sección mostrando que si un espacio localmente compacto y Hausdorff L no es discreto, existen un espacio de Banach X y un operador extremo T de X en $\mathcal{C}_0(L)$ tal que $T^*(\delta_t) \notin E_{X^*}$ para todo t punto de acumulación de L.

El siguiente objetivo es estudiar los espacios de funciones integrables que son nice. A fin de utilizar el teorema principal, desarrollamos una serie de resultados sobre espacios de medida y los correspondientes espacios de funciones integrables, que esencialmente son conocidos, y algunos de los cuales usaremos en el siguiente capítulo.

Finalizamos el capítulo estableciendo una condición necesaria para espacios de Banach nice con algún punto extremo. Este resultado nos permite concluir la no existencia de espacios de Banach nice que sean estrictamente convexos (salvo $\mathbb{R}$) o reflexivos de dimensión infinita. Nos centramos en el resto del capítulo en caracterizar los espacios de Banach nice de dimensión finita. Para ello, nos basamos en resultados de A. Lima sobre operadores extremos en espacios finito-dimensionales.

2.1. Criterio básico para el estudio de espacios nice

Empezamos presentando un resultado que será fundamental a lo largo de la memoria para el estudio de los espacios de Banach nice aunque su demostración tiene un carácter puramente técnico.

Teorema 2.1.1. *Sea X un espacio de Banach tal que existe $e_0^* \in E_{X^*}$ el cual satisface:*

(i) $X^* = \overline{\mathrm{lin}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})}^{w^*}$.

(ii) Para cada $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$, existe $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $x^{**}(e_0^*) = 0$ y $x^{**}(e^*) = 1$.

Entonces X no es nice.

Demostración. Comenzamos definiendo una nueva norma $\| \cdot \|_0$ en X de la siguiente manera

$$\| x \|_0 = \max\{\| x \|, | 2e_0^*(x) |\} \quad (x \in X).$$

Dado que vamos a trabajar con dos normas en X, para evitar confusiones notaremos por $X = (X, \| \cdot \|)$ y $X_0 = (X, \| \cdot \|_0)$. Las normas $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_0$ son equivalentes en X, puesto que

$$\| x \| \leq \| x \|_0 \leq 2 \| x \| \quad \text{para todo } x \in X$$

entonces $B_{X_0} \subseteq B_X$, lo que implica que $B_{X^*} \subseteq B_{X_0^*}$.
Como $| 2e_0^*(x) | \leq \| x \|_0$, obtenemos que $\pm 2e_0^*$ pertenece a $B_{X_0^*}$ y, se tiene que $\mathrm{co}(B_{X^*} \cup \{\pm 2e_0^*\}) \subseteq B_{X_0^*}$.
Comprobemos la otra inclusión, sea $f \in B_{X_0^*} \setminus \mathrm{co}(B_{X^*} \cup \{\pm 2e_0^*\})$. Como $\mathrm{co}(B_{X^*} \cup \{\pm 2e_0^*\})$ es débil*-compacto, por el Teorema de Hahn-Banach tenemos que existe x en X tal que $f(x) > g(x)$ para todo $g \in \mathrm{co}(B_{X^*} \cup \{\pm 2e_0^*\})$, en particular, $f(x) > \pm 2e_0^*(x)$, de donde, $f(x) > |2e_0^*(x)|$. Sea $h \in B_{X^*}$ tal que $h(x) = \|x\|$, entonces $f(x) > h(x) = \|x\|$. Luego, $f(x) > \|x\|_0$ y $\|f\|_0^* \leq 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto,

$$B_{X_0^*} = \mathrm{co}(B_{X^*} \cup \{\pm 2e_0^*\}).$$

Consideremos el operador $T : X_0 \to X$ definido por $T(x) = x$. Vamos a probar que T es un operador extremo y no es nice. El operador $T^* : X^* \to X_0^*$ está dado por $T^*(x^*) = x^*$ para todo x^* en X^*, luego $T^*(e_0^*) = e_0^* \notin E_{X_0^*}$ y así, T no es nice.

Afirmamos que $E_{X_0^*} = (E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}) \cup \{\pm 2e_0^*\}$.
Como $B_{X_0^*} = \mathrm{co}(B_{X^*} \cup \{\pm 2e_0^*\})$, el Teorema de Milman nos da que $E_{X_0^*} \subset E_{X^*} \cup \{\pm 2e_0^*\}$. Es claro que e_0^* no pertenece a $E_{X_0^*}$, por lo que $E_{X_0^*} \subset (E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}) \cup \{\pm 2e_0^*\}$. Obviamente $\{\pm 2e_0^*\} \subset E_{X_0^*}$.

Vamos a probar que $E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\} \subseteq E_{X_0^*}$.

Supongamos que $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$ y $e^* \notin E_{X_0^*}$. Podemos escribir entonces $e^* = \frac{1}{2}(y_1^* + y_2^*)$, para $y_i^* \in B_{X_0^*}$, $i = 1, 2$, $y_1^* \neq y_2^*$, y ponemos $y_i^* = \alpha_i x_i^* + (1 - \alpha_i) r_i^*$, donde $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $x_i^* \in B_{X^*}$ y $r_i^* \in [-2e_0^*, 2e_0^*]$, $i = 1, 2$. Obtenemos

$$e^* = \frac{\alpha_1 x_1^* + \alpha_2 x_2^*}{2} + \frac{1}{2}[(1 - \alpha_1) r_1^* + (1 - \alpha_2) r_2^*].$$

Por (ii), existe x^{**} en $B_{X^{**}}$ tal que $x^{**}(e_0^*) = 0$ y $x^{**}(e^*) = 1$. Luego,

$$x^{**}(e^*) = 1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 x^{**}(x_1^*) + \alpha_2 x^{**}(x_2^*)) \leq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \leq 1.$$

Por tanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, y obtenemos $e^* = \frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)$ con $x_1^* \neq x_2^*$, lo que contradice que e^* sea un elemento de E_{X^*}.

Una vez que la afirmación ha sido probada, vamos a mostrar que T es un operador extremo. Sean S_1, S_2 en $L(X_0, X)$ con $\| S_1 \| \leq 1$, $\| S_2 \| \leq 1$ tales que $T = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$. Entonces $T^* = \frac{1}{2}(S_1^* + S_2^*)$. Se deduce de la afirmación que $T^*(e^*) \in E_{X_0^*}$ para todo e^* en $E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$, ya que $\|S_1^*(e^*)\|_0 \leq 1$, $\|S_2^*(e^*)\|_0 \leq 1$ concluimos

$$T^*(e^*) = S_1^*(e^*) = S_2^*(e^*) \quad \text{para todo} \quad e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}.$$

Teniendo en cuenta que S_1^* y S_2^* son lineales y débil*-débil*-continuas, por (i), $S_1^* = S_2^*$ y, en consecuencia, $S_1 = S_2$. Luego, T es un operador extremo que no es nice y, por tanto, X no es nice. $\square$

En el teorema anterior se supone la existencia de un punto extremo del espacio dual que verifica dos condiciones, la primera de ellas sugiere una cercanía al resto de puntos extremos en su conjunto y la segunda establece que individualmente se puede separar de cada uno de los puntos extremos.

Téngase en cuenta que, como consecuencia del Teorema de Krein–Milman, la primera condición equivale a que $e_0^* \in \overline{\mathrm{lin}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})}^{w^*}$.

Observación 2.1.2. Si tenemos que $e_0^* \in \overline{E_{X^*} \setminus \{e_0^*\}}^{w^*}$, entonces la condición (i) del teorema se verifica. De hecho, si $e_0^* \in \overline{E_{X^*} \setminus \{e_0^*\}}^{w^*}$, entonces $e_0^* \in \overline{E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}}^{w^*}$, así $-e_0^* \in \overline{E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}}^{w^*}$ y por tanto, $B_{X^*} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})$. Luego,

$$X^* = \overline{\mathrm{lin}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})}^{w^*}$$

y obtenemos que (i) se verifica.

Es claro que, si para cada $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$ existe $x \in B_X$ tal que $e_0^*(x) = 0$ y $e^*(x) = 1$, se verifica la condición (ii) del teorema anterior.

La segunda condición del teorema anterior admite una formulación equivalente como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.1.3. *Sean X un espacio de Banach y $e_0^* \in E_{X^*}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para cada $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$, existe $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $x^{**}(e_0^*) = 0$ y $x^{**}(e^*) = 1$.

(ii) Para cada $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$, $\| e^* + \mathbb{R}e_0^* \| = 1$.

Demostración.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Sean $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por (i), existe x^{**} en $B_{X^{**}}$ tal que $x^{**}(e_0^*) = 0$ y $x^{**}(e^*) = 1$. Es claro que

$$1 = | x^{**}(e^* + \alpha e_0^*) | \leq \| x^{**} \| \| e^* + \alpha e_0^* \| \leq \| e^* + \alpha e_0^* \|$$

y por tanto, $\| e^* + \alpha e_0^* \| \geq 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego, $\| e^* + \mathbb{R}e_0^* \| \geq 1$ y así, obtenemos la afirmación (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$. Consideremos $M = \mathbb{R}e_0^*$. Por el Teorema de Hahn–Banach, existe x^{**} en M° con $\| x^{**} \|= 1$ tal que

$$x^{**}(e^*) =\| e^* + \mathbb{R}e_0^* \|= 1.$$

Obviamente, $x^{**}(e_0^*) = 0$. $\square$

A continuación vamos a obtener varias consecuencias importantes del Teorema 2.1.1 en los espacios de Banach clásicos.

2.2. Espacios $\mathcal{C}_0(L)$ nice

Sea L un espacio topológico, se denota por L' el conjunto de puntos de acumulación de L. Dado un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff (esto es, L es Hausdorff y cada punto de L tiene un entorno compacto) se define la compactificación de Alexandroff de L como el espacio $\widehat{L} = L \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto distinguido añadido para L y donde podemos definir una topología en $\widehat{L}$ tomando los entornos de ∞ como conjuntos de la forma $\{\infty\} \cup U$ con U un subconjunto de L tal que $L \setminus U$ es compacto. Así, el nuevo espacio definido $\widehat{L}$ es compacto y Hausdorff que contiene a L como subespacio topológico.

De esta manera podemos introducir una clase de espacios clásicos, que son conocidos. Dado un espacio localmente compacto y Hausdorff L, denotamos por $\mathcal{C}_0(L)$ el espacio de todas las funciones continuas en L que se anulan en el infinito, esto es, funciones f real-valuadas en L que son continuas y para las cuales, dado cualquier $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in L \ : \ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto. $\mathcal{C}_0(L)$ se identifica con las funciones continuas en $\widehat{L}$ que se anulan en ∞, por lo que $\mathcal{C}_0(L)$ es un espacio de Banach con la norma del supremo. Por último, si L es compacto, es claro que $\mathcal{C}_0(L) = \mathcal{C}(L)$.

El siguiente objetivo es obtener una caracterización de los puntos extremos de $B_{\mathcal{C}_0(L)^*}$ análoga al Teorema de Arens–Kelley. Dado que $\mathcal{C}_0(L)$ se identifica con un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(\widehat{L})$ del que conocemos los puntos extremos de la bola unidad del dual, el siguiente resultado, de interés en sí mismo, nos ayudará en nuestro objetivo.

Proposición 2.2.1. *Sean X un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Para cada $y^* \in E_{Y^*}$, existe x^* un elemento de E_{X^*} tal que $x^*_{|_Y} = y^*$.*

Demostración. Sea $K = \{z^* \in B_{X^*} : z^*_{|_Y} = y^*\}$. Por el Teorema de Hahn-Banach, K es no vacío y es un subconjunto de B_{X^*} convexo y débil*-cerrado. Luego, K es débil*-compacto por el Teorema de Banach-Alaoglu. Por el Teorema de Krein-Milman, K tiene algún punto extremo x^*. Si x_1^*, $x_2^* \in B_{X^*}$ verifican que $x^* = \frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)$, entonces $y^* = x^*_{|_Y} = \frac{1}{2}(x^*_{1|_Y} + x^*_{2|_Y})$. Ya que y^* pertenece a E_{Y^*} y $x^*_{1|_Y}$, $x^*_{2|_Y}$ pertenecen a B_{Y^*} se tiene que $x^*_{1|_Y} = x^*_{2|_Y} = y^*$, es decir, x_1^*, x_2^* son elementos de K y, por ser x^* un punto extremo de K, se tiene que $x^* = x_1^* = x_2^*$, es decir, x^* es un elemento de E_{X^*} con $x^*_{|_Y} = y^*$. $\square$

Estamos en disposición de obtener la descripción anunciada de los puntos extremos de $B_{\mathcal{C}_0(L)^*}$.

Proposición 2.2.2. *Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff, entonces*

$$E_{\mathcal{C}_0(L)^*} = \{\pm\delta_t : t \in L\}.$$

Demostración. Vamos a demostrarlo por doble inclusión.

$E_{\mathcal{C}_0(L)^*} \subseteq \{\pm\delta_t : t \in L\}$. Sea x^* en $E_{\mathcal{C}_0(L)^*}$, como $\mathcal{C}_0(L)$ se identifica con el conjunto $M = \{f \in \mathcal{C}(\widehat{L}) : f(\infty) = 0\} \subseteq \mathcal{C}(\widehat{L})$, entonces x^* pertenece a E_{M^*}. Por la proposición anterior, tenemos que existe y^* punto extremo de $\mathcal{C}(\widehat{L})$ tal que $y^*_{|M} = x^*$. Luego, por el Teorema de Arens–Kelley, y^* va a ser de la forma $y^* = \pm\delta_t$ con $t \in L \cup \{\infty\}$. Si $t = \infty$ entonces $\delta_{\infty_{|M}} = 0$, por lo tanto, $y^* = \pm\delta_\infty$ no es un punto extremo de M^*. Por consiguiente, $t \in L$ y así, $x^* = \pm\delta_t$.

$E_{\mathcal{C}_0(L)^*} \supseteq \{\pm\delta_t : t \in L\}$. Debemos probar que si $t \in L$, entonces δ_t es un punto extremo de $\mathcal{C}_0(L)^*$. Supongamos que

$$\delta_t = \frac{1}{2}(x^* + y^*)$$

donde x^*, $y^* \in B_{\mathcal{C}_0(L)^*}$. Por el Teorema de Hahn–Banach existen $\widehat{x}^*$ y $\widehat{y}^*$ en $B_{\mathcal{C}(\widehat{L})^*}$ tales que

$$\widehat{x}^*_{|\mathcal{C}_0(L)} = x^* \quad \text{y} \quad \widehat{y}^*_{|\mathcal{C}_0(L)} = y^*.$$

Si consideramos f en $\mathcal{C}(\widehat{L})$ entonces $f - f(\infty)1$ va a ser una función de $\mathcal{C}_0(L)$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\delta_t(f - f(\infty)1) &= f(t) - f(\infty) \\
&= \frac{1}{2}(x^*(f - f(\infty)1) + y^*(f - f(\infty)1)) \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{x}^*(f - f(\infty)1) + \widehat{y}^*(f - f(\infty)1)) \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{x}^*(f) - f(\infty)\widehat{x}^*(1) + \widehat{y}^*(f) - f(\infty)\widehat{y}^*1)) \\
&= \frac{1}{2}(\widehat{x}^*(f) + \widehat{y}^*(f)) - \frac{1}{2}(\widehat{x}^*(1) + \widehat{y}^*(1))f(\infty).
\end{aligned}$$

Si $t \in \widehat{L}$, denotamos por $\widehat{\delta}_t$ el funcional de evaluación en t para $\mathcal{C}(\widehat{L})$, es decir, $\widehat{\delta}_t(f) = f(t)$, para toda f en $\mathcal{C}(\widehat{L})$. Luego,

$$\widehat{\delta}_t(f) = \frac{1}{2}(\widehat{x}^*(f) + \widehat{y}^*(f)) + \left[1 - \frac{1}{2}(\widehat{x}^*(1) + \widehat{y}^*(1))\right] \widehat{\delta}_\infty(f),$$

esto es, $\widehat{\delta}_t = \frac{1}{2}(\widehat{x}^* + \widehat{y}^*) + \lambda\widehat{\delta}_\infty$, por lo tanto, $\widehat{\delta}_t - \lambda\widehat{\delta}_\infty = \frac{1}{2}(\widehat{x}^* + \widehat{y}^*)$ siendo $\lambda = 1 - \frac{1}{2}(\widehat{x}^*(1) + \widehat{y}^*(1)) \geq 0$. Tomando normas tenemos:

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\delta}_t - \lambda\widehat{\delta}_\infty\| =& \|\frac{1}{2}(\widehat{x}^* + \widehat{y}^*)\| \leq \frac{1}{2}(\|\widehat{x}^*\| + \|\widehat{y}^*\|) \leq 1 \\
\|\widehat{\delta}_t - \lambda\widehat{\delta}_\infty\| =& 1 + \lambda \text{ (como consecuencia del Lema de Urysohn),}
\end{aligned}$$

lo que implica que $\lambda = 0$. Luego, $\widehat{\delta}_t = \frac{1}{2}(\widehat{x^*} + \widehat{y}^*)$ y como $\|\widehat{x}^*\| \leq 1$, $\|\widehat{y}^*\| \leq 1$, entonces $\widehat{x}^* = \widehat{y}^* = \widehat{\delta}_t$ por lo que, $x^* = y^* = \delta_t$ y por tanto, podemos concluir que δ_t es un punto extremos de $\mathcal{C}_0(L)^*$. □

Vamos a necesitar la siguiente versión del Lema de Urysohn en espacios localmente compactos para poder determinar cuándo los espacios $\mathcal{C}_0(L)$ son nice.

Proposición 2.2.3. (Lema de Urysohn) *Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff y sean s, t en L tales que $s \neq t$. Entonces existe f en $B_{\mathcal{C}_0(L)}$ tal que $f(s) = 0$ y $f(t) = 1$.*

Existe una versión general del Lema de Urysohn para espacios localmente compactos y Hausdorff en el que se separa un compacto y un cerrado disjuntos del espacio mediante una función continua con soporte compacto.

Estamos ya en disposición de caracterizar los espacios $\mathcal{C}_0(L)$ que son nice.

Corolario 2.2.4. *Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff tal que L' es no vacío. Entonces $\mathcal{C}_0(L)$ no es nice.*

Demostración. Sea t en L'. Por la Proposición 2.2.2, $\delta_t \in E_{\mathcal{C}_0(L)^*}$. Comprobemos que se verifican las hipótesis del Teorema 2.1.1. Si $x^* \in E_{\mathcal{C}_0(L)^*} \setminus \{\pm\delta_t\}$, por la Proposción 2.2.2, existe $s \in L \setminus \{t\}$ tal que $x^* = \pm\delta_s$. Podemos suponer que $x^* = \delta_s$. Por la proposición anterior (2.2.3), para cada $s \in L \setminus \{t\}$ existe $f_s \in B_{\mathcal{C}_0(L)}$ tal que $\delta_t(f_s) = f_s(t) = 0$ y $\delta_s(f_s) = f_s(s) = 1$ y entonces la hipótesis (ii) del teorema se verifica.

Probemos ahora que $\delta_t \in \overline{E_{\mathcal{C}_0(L)^*} \setminus \{\delta_t\}}^{w^*}$. Como $t \in L'$, entonces existe una red $\{s_i\}_{i\in I}$ en $L \setminus \{t\}$ tal que $\{s_i\}_{i\in I} \rightarrow t$, y por continuidad, $\{f(s_i)\}_{i\in I} = \{\delta_{s_i}(f)\}_{i\in I} \rightarrow f(t) = \delta_t(f)$ para $f \in \mathcal{C}_0(L)$, así, $\{\delta_{s_i}\}_{i\in I} \xrightarrow{w^*} \delta_t$. Teniendo en cuenta la Observación 2.1.2, tenemos que $\mathcal{C}_0(L)^* = \overline{\mathrm{lin}(E_{\mathcal{C}_0(L)^*} \setminus \{\pm\delta_t\})}^{w^*}$, donde se está teniendo en cuenta la igualdad obtenida en la Proposición 2.2.2. Por lo tanto, ya estamos en condiciones de aplicar el Teorema 2.1.1 para concluir que $\mathcal{C}_0(L)$ no es nice. $\square$

Como consecuencia de este corolario y de la Proposición 1.3.3 obtenemos:

Corolario 2.2.5. *Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff, entonces $\mathcal{C}_0(L)$ es nice si, y sólo si, L es discreto. En particular, si K es un espacio compacto y Hausdorff, entonces $\mathcal{C}(K)$ es nice si, y sólo si, K es finito.*

Este resultado lo volveremos a obtener en el próximo capítulo como consecuencia de que los espacios $\mathcal{C}_0(L)$ son L_1-preduales.

Tal como acabamos de probar si L' es no vacío, entonces $\mathcal{C}_0(L)$ no es nice. Esto garantiza la existencia de un espacio de Banach X y un operador extremo, T, de X en $\mathcal{C}_0(L)$ tal que para algún $t_0 \in L$ se tiene que $T^*(\delta_{t_0}) \notin E_{X^*}$. Es fácil comprobar que t_0 ha de ser un punto de acumulación de L. A continuación probaremos que, de hecho, se puede obtener un resultado mejor. A saber, se prueba la existencia de un espacio de Banach X y un operador extremo de X en $\mathcal{C}_0(L)$ tal que $T(\delta_t) \notin E_{X^*}$ para todo $t \in L'$.

Teorema 2.2.6. *Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff tal que L' no es vacío. Entonces, existe un espacio de Banach X y un operador extremo T en $L(X, \mathcal{C}_0(L))$ tal que $T^*(\delta_t) \notin E_{X^*}$ para todo t en L'.*

Demostración. Sean $M = L'$ y, para cada $t \in M$, denotamos por e_t el elemento de $l_\infty(M)$ dado por $e_t(s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \neq t \\ 1 & \text{si} \quad s = t \end{cases}$; y por e_t^* el elemento de $l_\infty(M)^*$ definido por $e_t^*(y) = y(t)$ $(y \in l_\infty(M))$. Sea Y un subespacio vectorial de $l_\infty(M)$ con una norma $\|\cdot\|_Y$ tal que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach que satisface las siguientes propiedades:

(1) $e_t \in B_Y$ para cada t en M y $\overline{\mathrm{lin}\{e_t : t \in M\}}^{\|\cdot\|_Y} = Y$.

(2) $\{e_t^* : t \in M\}$ es un subconjunto acotado de $(Y, \|\cdot\|_Y)^*$.

(Por ejemplo, podemos tomar $Y = l_p(M)$ (con $1 \leq p < \infty$) ó $Y = c_0(M)$). Consideremos $X = \mathcal{C}_0(L) \times Y$ con la norma dada por

$$\| (f, y) \| = \max\{\| f \|_\infty, \| y \|_Y, \sup_{t \in M} | f(t) \pm y(t) |\}.$$

Veamos que $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_\infty$ son equivalentes en $\mathcal{C}_0(L) \times Y$ con lo cual $\| \cdot \|$ es completa. En efecto, es claro que

$$\max\{\| f \|_\infty, \| y \|_Y\} \leq \| (f, y) \| .$$

Por (2) existe $k > 0$ tal que $\| e_t^* \|_Y \leq k$ para todo $t \in M$, por tanto

$$\begin{aligned} \sup_{t \in M} | f(t) \pm y(t) | &\leq \| f \|_\infty + \sup_{t \in M} | e_t^*(y) | \\ &\leq \| f \|_\infty + k \| y \|_Y \\ &\leq (1 + k) \max\{\| f \|_\infty, \| y \|_Y\} \end{aligned}$$

y de aquí,

$$\| (f, y) \| \leq (1 + k) \max\{\| f \|_\infty, \| y \|_Y\}.$$

Obsérvese que

$$\| (f, 0) \| = \| f \|_\infty \quad \text{para todo } f \in \mathcal{C}_0(L).$$

Definimos el operador $T : \mathcal{C}_0(L) \times Y \to \mathcal{C}_0(L)$ dado por $T(f, y) = f$. Es claro que T es un operador lineal y continuo de norma uno. Además,

$$T^* : \mathcal{C}_0(L)^* \to \mathcal{C}_0(L)^* \times Y^*$$

está definido por $T^*(x^*) = (x^*, 0)$ para todo $x^* \in \mathcal{C}_0(L)^*$, y $T^*(\delta_s) = (\delta_s, 0)$ para todo $s \in L$. Veamos que si t está en M entonces $(\delta_t, 0)$ no es un punto extremo de $(\mathcal{C}_0(L) \times Y)^*$. Si $\| (f, y) \| \leq 1$, tenemos que

$$| (\delta_t, \pm e_t^*)(f, y) | = | f(t) \pm y(t) | \leq \| (f, y) \| \leq 1,$$

luego, $\| (\delta_t, \pm e_t^*) \| \leq 1$. Por tanto, para todo $t \in L'$, $T^*(\delta_t) \notin E_{X^*}$.

Probemos ahora que T es un operador extremo.

Sea $S : \mathcal{C}_0(L) \times Y \to \mathcal{C}_0(L)$ un operador lineal y continuo de manera que $\| T \pm S \| \leq 1$. Entonces, para todo (f, y) en $\mathcal{C}_0(L) \times Y$ con $\| (f, y) \| \leq 1$, se tiene que

$$\| f \pm S(f, y) \|_\infty = \| T(f, y) \pm S(f, y) \|_\infty \leq 1$$

y en particular,

$$\| f \pm S(f,0) \|_\infty \leq 1 \ \text{ para todo } f \in \mathcal{C}_0(L) \ \text{ con } \| f \|_\infty \leq 1.$$

Como $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}_0(L)}$ es un operador extremo en $\mathcal{L}(\mathcal{C}_0(L))$, obtenemos

$$S(f,0) = 0 \ \text{ para todo } f \in \mathcal{C}_0(L).$$

Luego, para todo (f,y) en $\mathcal{C}_0(L) \times Y$ con $\| (f,y) \| \leq 1$,

$$\| f \pm S(0,y) \|_\infty \leq 1.$$

Si t pertenece a M, para todo f en $\mathcal{C}_0(L)$ con $\| (f,e_t) \| \leq 1$, tenemos

$$\| f \pm S(0,e_t) \|_\infty \leq 1.$$

Para todo k en L, $k \neq t$, existe f_k en $B_{\mathcal{C}_0(L)}$ tal que $f_k(t) = 0$ y $f_k(k) = 1$, luego $\| (f_k, e_t) \| = 1$. Entonces,

$$| f_k(k) \pm S(0,e_t)(k) | = | 1 \pm S(0,e_t)(k) | \leq \| f_k \pm S(0,e_t) \| \leq 1,$$

por tanto,

$$S(0,e_t)(k) = 0 \ \text{ para todo } k \in L, k \neq t.$$

Como $S(0,e_t) \in \mathcal{C}_0(L)$ y $t \in M = L'$, obtenemos

$$S(0,e_t)(k) = 0 \ \text{ para todo } k \in L,$$

esto es,

$$S(0,e_t) = 0 \ \text{ para todo } t \in M,$$

así, $S(0,y) = 0$ para todo y en $\overline{\mathrm{lin}\{e_t : t \in M\}}^{\|\cdot\|_Y} = Y$.

Ahora $S(f,y) = S(f,0) + S(0,y) = 0$, es decir, $S = 0$, lo que finaliza la demostración. □

El resultado anterior, para el caso de L compacto y Hausdorff, fue obtenido en [9], en cuya demostración está inspirada la que aparece aquí para el caso de L localmente compacto y Hausdorff.

2.3. Espacios $L_1(\mu)$ nice

Nuestro siguiente objetivo es describir los espacios $L_1(\mu)$ que son nice. De nuevo el Teorema 2.1.1 va a ser la pieza clave para la caracterización de dichos espacios.

Recordemos que si Ω es un conjunto y Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, entonces (Ω, Σ) es un espacio medible. Un espacio de medida, (Ω, Σ, μ), es un espacio medible en el que se ha definido una medida positiva μ sobre la σ-álgebra de sus conjuntos medibles. Se dice que μ es una medida σ-finita si todo conjunto de Σ es una unión numerable de conjuntos de medida finita. Notaremos por $L_1(\mu)$ el espacio de funciones integrables del espacio de medida (Ω, Σ, μ) y por $L_\infty(\mu)$ el espacio de funciones esencialmente acotadas en (Ω, Σ, μ).

En primer lugar, necesitaremos el siguiente resultado clásico que nos describe el dual de $L_1(\mu)$ cuya demostración se puede encontrar en [14, Apendix B].

Proposición 2.3.1. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tal que μ es σ-finita. Entonces $\Phi : L_\infty(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)^*$ dado por*

$$\Phi(g)(f) = \int fg \; d\mu \qquad (g \in L_\infty(\mu), f \in L_1(\mu))$$

es un isomorfismo isométrico de $L_\infty(\mu)$ sobre $L_1(\mu)^*$.

Sea A un conjunto, notaremos por χ_A a la función característica de A, esto es, $\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in A \\ 0 & \text{si} \quad t \notin A \end{cases}$. A continuación describimos los puntos extremos de la bola unidad de $L_\infty(\mu)$.

Proposición 2.3.2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, entonces*

$$E_{L_\infty(\mu)} = \{e \in L_\infty(\mu) : |e(t)| = 1 \text{ c.p.d.}\}.$$

Demostración. Sea $e \in L_\infty(\mu)$ tal que $|e(t)| = 1$ c.p.d., entonces es claro que e es un punto extremo de $L_\infty(\mu)$.

Veamos la otra inclusión. Tomemos $e \in E_{L_\infty(\mu)}$ y consideremos el conjunto $Z = \{t \in \Omega : |e(t)| > 1\}$ entonces $\mu(Z) = 0$. Definimos $\varphi(t) = (1 - |e(t)|)\chi_{\Omega\setminus Z}(t)$, es claro que

$$|e(t) \pm \varphi(t)| \leq 1 \text{ c.p.d.}$$

por tanto $\|e \pm \varphi\|_\infty \leq 1$, luego $\varphi = 0$ c.p.d. y en consecuencia, $|e(t)| = 1$ c.p.d. □

Una vez descritos los puntos extremos de $L_\infty(\mu)$, para aplicar el Teorema 2.1.1 necesitamos distinguir que $L_1(\mu)$ sea de dimensión finita o infinita. En lo que sigue describimos los espacios $L_1(\mu)$ de dimensión finita y damos una propiedad característica del caso de dimensión infinita. Estos resultados son esencialmente conocidos aunque no hemos encontrado una referencia apropiada.

En lo sucesivo, si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y $A \in \Sigma$, (A, Σ_A, μ_A) es el espacio de medida dado por

$$\Sigma_A = \{B \cap A : B \in \Sigma\} \text{ y } \mu_A = \mu_{|\Sigma_A}.$$

Damos a continuación el concepto de átomo que nos será necesario en lo que sigue.

Definición 2.3.3. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $F \in \Sigma$. Se dice que F es un ***átomo*** si $\mu(F) > 0$ y para todo $A \in \Sigma$ con $A \subseteq F$ se verifica que $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = \mu(F)$.

Téngase en cuenta, que puede ocurrir que F sea un átomo de medida infinita. El siguiente resultado es puramente técnico aunque su demostración no es tediosa.

Proposición 2.3.4. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida tal que existe F_0 átomo con $\mu(F_0) < +\infty$. Entonces existe $\Gamma \subseteq \Sigma$ que verifica:*

1. *F es un átomo con $\mu(F) < +\infty$, para cada $F \in \Gamma$.*
2. *Si $F_1, F_2 \in \Gamma$ y $F_1 \neq F_2$, entonces $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.*
3. *Si F_1 es un átomo con $\mu(F_1) < +\infty$ tal que $F_1 \cap F = \emptyset$ para todo $F \in \Gamma$, entonces $F_1 \in \Gamma$.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{A} \subseteq \Sigma : \mathcal{A} \neq \emptyset$ y verifica las condiciones 1 y 2 $\}$ con el orden $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$ si $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$. Comprobemos que $(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto inductivo. $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pues $\{F_0\} \in \mathcal{F}$. Consideremos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una cadena, $\mathcal{C} = \{\mathcal{A}_i : i \in I\}$. Sea $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Tenemos que $\mathcal{A}$ verifica la condición 1.

Sean F_1, F_2 en $\mathcal{A}$ con $F_1 \neq F_2$, entonces existe i, j en I de manera que $F_1 \in \mathcal{A}_i$ y $F_2 \in \mathcal{A}_j$. Por ser $\mathcal{C}$ una cadena, existe k en I tal que $F_1, F_2 \in \mathcal{A}_k \in \mathcal{F}$ lo que implica que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Entonces, $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ y verifica las condiciones 1 y 2, luego, $\mathcal{A}$ pertence a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{A}_i \leq \mathcal{A}$, para todo i en I.

Por tanto, $(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto inductivo y, por el Lema de Zorn, existe $\Gamma \in \mathcal{F}$ maximal. Veamos que Γ verifica las condiciones del enunciado. En efecto, $\Gamma \subseteq \Sigma$ y verifica 1 y 2. Sea F_1 un átomo con $\mu(F_1) < +\infty$ tal que $F_1 \cap F = \emptyset$, para todo $F \in \Gamma$. Entonces $\Gamma^* = \Gamma \cup \{F_1\} \in \mathcal{F}$ y $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Por ser Γ maximal se verifica que $\Gamma = \Gamma^*$, y por tanto, F_1 pertenece a Γ. $\square$

Proposición 2.3.5. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida sin átomos de medida finita y tal que existe $A \in \Sigma$ con $0 < \mu(A) < +\infty$. Entonces existe $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $A_n \in \Sigma$ y $0 < \mu(A_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$. En particular, $L_1(\mu)$ es de dimensión infinita.*

Demostración. Como A no es un átomo existe $A_1 \in \Sigma$ tal que $A_1 \subseteq A$ y $0 < \mu(A_1) < \mu(A)$. Construimos la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por inducción: para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$ de manera que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq A, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{para todo } i, j = 1, \ldots, n \text{ con } i \neq j$$

y se verifica que $\mu(A_k) > 0$, para todo $k = 1, \ldots, n$ y $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) < \mu(A)$.

Para $n = 1$, ya se ha definido A_1. Supuesto que hemos encontrado $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con las propiedades anteriores, entonces

$$+\infty > \mu(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) > 0.$$

Por la hipótesis, $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ no es un átomo, luego existe A_{n+1} en Σ tal que

$A_{n+1} \subseteq A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ y

$$0 < \mu(A_{n+1}) < \mu(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

por tanto, $\sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) < \mu(A)$ y $A_{n+1} \cap A_k = \emptyset$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Veamos, para concluir, que $\{\chi_{A_n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L_1(\mu)$ es un conjunto linealmente independiente. En efecto, sean $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_{n_j}} = 0$. Entonces, para todo $i = 1, \ldots, k$ se tiene

$$0 = \int_{A_{n_i}} \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_{n_j}} \right) d\mu = \alpha_i \mu(A_{n_i})$$

de donde $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Luego, $\{\chi_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito de $L_1(\mu)$ linealmente independiente. $\square$

Nótese que la existencia de un conjunto de medida finita no nula en un espacio de medida (Ω, Σ, μ) equivale a que el espacio de funciones integrables $L_1(\mu)$ no se reduzca a cero.

Proposición 2.3.6. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y F un átomo de medida finita. Entonces $\dim(L_1(\mu_F)) = 1$.*

Demostración. Utilizamos que las funciones simples integrables son densas en el espacio de las funciones integrables (ver [48, Teorema 3.2.8]). Por tanto,

$$L_1(\mu_F) = \overline{\text{lin}}^{\|\cdot\|_1} \{\chi_A : A \in \Sigma, A \subseteq F, 0 < \mu(A) < +\infty\}.$$

Por ser F un átomo, para cualquier $A \in \Sigma, A \subseteq F, 0 < \mu(A) < +\infty$ se verifica $\mu(A) = \mu(F)$, luego $\chi_A = \mathbf{1}$ en $L_1(\mu_F)$, donde $\mathbf{1}$ denota la función constantemente 1, y por tanto, $L_1(\mu_F) = \mathbb{R}\mathbf{1}$. $\square$

Esencialmente lo que hemos demostrado en este enunciado es que una función integrable sobre un átomo de medida finita es constante.

Podemos ya caracterizar los espacios de funciones integrables de dimensión finita.

Proposición 2.3.7. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida tal que $L_1(\mu)$ es de dimensión finita $n \geq 1$. Entonces $L_1(\mu)$ es isométricamente isomorfo a l_1^n.*

Demostración. Por ser $\dim(L_1(\mu)) \geq 1$, existe A en Σ tal que $0 < \mu(A) < +\infty$. Por la Proposición 2.3.5, existe F_0 un átomo de medida finita y, por la Proposición 2.3.4, existe Γ una colección de átomos de medida finita, disjuntos dos a dos y tal que cualquier átomo de medida finita que no pertenezca a Γ tiene intersección no vacía con algún elemento de Γ. Es claro que $\{\chi_F : F \in \Gamma\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $L_1(\mu)$, luego Γ es finito. Es decir, $\Gamma = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ con $k \leq n$.

Sea $\Omega^* = \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{k} F_j$ en Σ. Si $F \subseteq \Omega^*$ es un átomo de medida finita, entonces $F \cap F_j = \emptyset$, para todo $j = 1, \ldots k$, de donde $F \in \Gamma$. De esta manera, existirá $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $F = F_j$, luego $F_j = \emptyset$, lo cual es un absurdo. Luego Ω^* no contiene átomos de medida finita. Ya que $L_1(\mu_{\Omega^*}) \subseteq L_1(\mu)$, se tiene que $\dim(L_1(\mu_{\Omega^*})) < +\infty$. Por la Proposición 2.3.5, $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = +\infty$, para todo $A \subseteq \Omega^*$, $A \in \Sigma$, o lo que es lo mismo, $L_1(\mu_{\Omega^*}) = \{0\}$. Por tanto, la aplicación

$$\Phi : L_1(\mu) \longrightarrow L_1(\mu_{F_1}) \oplus_1 \cdots \oplus_1 L_1(\mu_{F_k})$$

dada por

$$\Phi(f) = (f_{|_{F_1}}, \ldots, f_{|_{F_k}}) \qquad\qquad (f \in L_1(\mu))$$

es una biyección lineal isométrica y en consecuencia, $k = n$. Por la Proposición 2.3.6, $\dim(L_1(\mu_{F_i})) = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$ y, se puede comprobar fácilmente, que la aplicación

$$\Psi : L_1(\mu_{F_1}) \oplus_1 \cdots \oplus_1 L_1(\mu_{F_n}) \longrightarrow l_1^n$$

definida por

$$\Psi(f_1, \ldots, f_n) = \left(\int_{F_1} f_1 d\mu, \ldots, \int_{F_n} f_n d\mu \right)$$

(con $(f_1, \ldots, f_n) \in L_1(\mu_{F_1}) \oplus_1 \cdots \oplus_1 L_1(\mu_{F_n})$) es una biyección lineal isométrica, lo que acaba la demostración. $\square$

Proposición 2.3.8. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida tal que $L_1(\mu)$ es de dimensión infinita. Entonces existe $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A_n \in \Sigma$, $0 < \mu(A_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.*

Demostración. Distingamos dos casos:

a) Si Ω no tiene átomos de medida finita, el resultado es consecuencia de la Proposición 2.3.5.

b) Si Ω tiene átomos de medida finita, sea Γ como en la Proposición 2.3.4. Podemos encontrarnos con que Γ sea infinito o finito.

   Si Γ es infinito, existe $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Gamma$ infinito numerable que verifica las condiciones del enunciado.

   Si Γ es finito, esto es, $\Gamma = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$. Sea $\Omega^* = \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. Entonces Ω^* no contiene átomos de medida finita. Es claro que $L_1(\mu)$ es (isométricamente) isomorfo a $L_1(\mu_{\Omega^*}) \oplus L_1(\mu_{F_1}) \oplus \cdots \oplus L_1(\mu_{F_n})$ y $\dim(L_1(\mu_{F_k})) = 1$, para todo $k = 1, \ldots, n$, por lo que $\dim(L_1(\mu_{\Omega^*})) = +\infty$. Por la Proposición 2.3.5, tenemos que existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \in \Sigma$, $A_n \subseteq \Omega^*$, $0 < \mu(A_n) < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Esto concluye la demostración. □

Ya tenemos todas los ingredientes necesarios para estudiar los espacios de tipo $L_1(\mu)$ que son nice. Pero aprovechando la Proposición 2.3.6, podemos caracterizar los puntos extremos de la bola unidad de $L_1(\mu)$, un resultado conocido que nos será de utilidad en el siguiente capítulo.

Teorema 2.3.9. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces, $E_{L_1(\mu)}$ es no vacío si, y sólo si, Ω tiene átomos de medida finita. En cuyo caso,*

$$E_{L_1(\mu)} = \left\{ \pm \frac{1}{\mu(F)} \chi_F : F \subseteq \Omega \text{ es átomo y } \mu(F) < +\infty \right\}.$$

Demostración. Supongamos que $E_{L_1(\mu)} \neq \emptyset$. Sea $f \in E_{L_1(\mu)}$, vamos a probar que $F = \operatorname{sop}(f) = \{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}$ es un átomo. Ya que $\|f\|_1 = 1$, $\mu(F) > 0$. Si F no es un átomo, existe $A_1 \subseteq F$, $A_1 \in \Sigma$ tal que $0 < \mu(A_1) < \mu(F)$. Luego, $A_2 = F \setminus A_1 \in \Sigma$ y $\mu(A_2) > 0$. Entonces,

$$1 = \|f\|_1 = \int_F |f| \, d\mu = \int_{A_1} |f| \, d\mu + \int_{A_2} |f| \, d\mu.$$

De donde $\alpha_1 = \int_{A_1} |f| \, d\mu > 0$, $\alpha_2 = \int_{A_2} |f| \, d\mu > 0$ con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Sean $f_k = \frac{1}{\alpha_k} f \chi_{A_k}$ $(k = 1, 2)$. Entonces $\|f_1\|_1 = \|f_2\|_1 = 1$ y es claro que

$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ con $f_1 \neq f_2$ (en $L_1(\mu)$) lo que contradice que $f \in E_{L_1(\mu)}$. Ya que $\int_F |f|\, d\mu = 1$ y F es un átomo, podemos concluir que F tiene medida finita. Por la Proposición 2.3.6, existe α en $\mathbb{R}$ tal que $f_{|F} = \alpha \mathbf{1}$ (en $L_1(\mu_F)$) y $1 = \|f\|_1 = \int_F |f|\, d\mu = \int_F |\alpha|\, d\mu = |\alpha|\mu(F)$. Luego, $\alpha = \pm\frac{1}{\mu(F)}$. Por tanto, $f = \pm\frac{1}{\mu(F)}\chi_F$. Acabamos de probar que si $E_{L_1(\mu)} \neq \emptyset$,

$$E_{L_1(\mu)} \subseteq \left\{\pm\frac{1}{\mu(F)}\chi_F : F \subseteq \Omega \text{ es átomo y } \mu(F) < +\infty\right\}.$$

Finalizamos la demostración probando que, si F es un átomo de medida finita, entonces $\frac{1}{\mu(F)}\chi_F \in E_{L_1(\mu)}$. En efecto, sea $f \in L_1(\mu)$ tal que $\|\frac{1}{\mu(F)}\chi_F \pm f\|_1 \leq 1$ entonces

$$\int_{\Omega\setminus F} |f| d\mu + \int_F \left|\frac{1}{\mu(F)}\mathbf{1} \pm f\right| d\mu \leq 1. \qquad (*)$$

De donde $\int_F |\frac{1}{\mu(F)}\mathbf{1} \pm f| d\mu \leq 1$. Por la Proposición 2.3.6, $\dim(L_1(\mu_F)) = 1$ y, por tanto, $\frac{1}{\mu(F)}\mathbf{1} \in E_{L_1(\mu_F)}$. Luego $f_{|F} = 0$ (en $L_1(\mu_F)$), es decir, $f\chi_F = 0$ (en $L_1(\mu)$). A partir de $(*)$,

$$1 \geq \int_{\Omega\setminus F} |f| d\mu + \int_F \frac{1}{\mu(F)}\mathbf{1} d\mu = \int_{\Omega\setminus F} |f| d\mu + 1.$$

Luego, $\int_{\Omega\setminus F} |f| d\mu = 0$, lo que implica que $f\chi_{\Omega\setminus F} = 0$ (en $L_1(\mu)$). Es decir, $f = 0$ (en $L_1(\mu)$) y $\frac{1}{\mu(F)}\chi_F \in E_{L_1(\mu)}$. $\square$

Pasamos a caracterizar los espacios de tipo $L_1(\mu)$ que son nice.

Teorema 2.3.10. *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tal que μ es σ-finita. Si $\dim(L_1(\mu)) > 2$, entonces $L_1(\mu)$ no es nice.*

Demostración. Si $L_1(\mu)$ es de dimensión finita, por la Proposición 2.3.7, tenemos que $L_1(\mu)$ es isométricamente isomorfo a l_1^n con $n = \dim(L_1(\mu)) > 2$. Podemos aplicar el Teorema 2.1.1, considerando $e_0^* = (1, \ldots, 1)$. Ahora $l_\infty^n = \text{lin}(E_{l_\infty^n} \setminus \{\pm e_0^*\})$ ya que es fácil comprobar que $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, donde

$$e_1^* = (-1, 1, 1, \ldots, 1)$$

$$e_2^* = (1, -1, 1, \ldots, 1)$$

$$\cdots$$

$$e_i^* = (1, 1, \ldots, 1, \overset{i}{-1}, 1, \ldots, 1)$$

$$\cdots$$

$$e_n^* = (1, 1, \ldots, 1, -1)$$

tales que $e_i^* \in E_{l_\infty^n}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y así la condición (i) del Teorema 2.1.1 se satisface. Para (ii), sea $e^* \in E_{l_\infty^n} \setminus \{\pm e_0^*\}$, existen i, j en $\{1, \ldots, n\}$ tales que $e^*(i) = 1$ y $e^*(j) = -1$. Entonces tomamos $x \in B_{l_1^n}$ como

$$x = (0, \ldots, \overset{i}{\frac{1}{2}}, \ldots, \overset{j}{\frac{-1}{2}}, \ldots, 0).$$

Así, $e_0^*(x) = 0$ y $e^*(x) = 1$. Por lo tanto, l_1^n no es nice.

Si $L_1(\mu)$ es de dimensión infinita, entonces $L_1(\mu)^* = L_\infty(\mu)$ por la Proposición 2.3.1. Vamos a aplicar el Teorema 2.1.1 con $e_0^* \equiv 1 \in E_{L_\infty(\mu)}$. Teniendo en cuenta la Observación 2.1.2, vamos a probar que $e_0^* \in \overline{E_{L_\infty(\mu)} \setminus \{e_0^*\}}^{w^*}$.

Sea U un débil*-entorno básico de 0 en $L_\infty(\mu)$. Entonces existen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ en $L_1(\mu)$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$U = \{\varphi \in L_\infty(\mu) : \left|\int_\Omega f_i(t)\varphi(t)\ d\mu\right| < \varepsilon \text{ para todo } \ i = 1, \ldots, k\}.$$

Por la Proposición 2.3.8, existen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ conjuntos medibles tales que $A_n \cap A_m = \emptyset$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$ y $0 < \mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces, para f en $L_1(\mu)$ tenemos que

$$+\infty > \int_A f\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\ d\mu \quad \text{así} \quad \left\{\int_{A_n} f\ d\mu\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N(f, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $n \geq N(f, \varepsilon)$

$$\left|\int_{A_n} f\ d\mu\right| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, dados $f_1, f_2, \ldots, f_k \in L_1(\mu)$ y $\varepsilon > 0$, existe N en $\mathbb{N}$ tal que $| \int_{A_N} f_i d\mu |< \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Si consideramos

$$e^*(t) = \begin{cases} \ \ 1 & \text{si} \quad t \in \Omega \setminus A_N \\ -1 & \text{si} \quad t \in A_N, \end{cases}$$

entonces tenemos que $\{t \in \Omega : e^*(t) \neq e_0^*(t)\} = A_N$ y ya que $\mu(A_N) > 0$, se tiene que $e^* \neq e_0^*$. Además, por Proposición 2.3.2, $e^* \in E_{L_\infty(\mu)}$. Por otra parte,

$$\left| \int_\Omega f_i(t)(e^*(t) - e_0^*(t))d\mu \right| = \left| \int_{A_N} f_i(t)(e^*(t) - e_0^*(t))d\mu \right| =$$

$$= \left| 2 \int_{A_N} f_i(t)d\mu \right| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Luego, $e^* \in e_0^* + U$ y por consiguiente, $e_0^* \in \overline{E_{L_\infty(\mu)} \setminus \{e_0^*\}}^{w^*}$.

El siguiente paso es probar que se verifica la condición (ii) del Teorema 2.1.1. Sea e^* en $E_{L_\infty(\mu)} \setminus \{\pm e_0^*\}$, entonces $|e(t)| = 1$ c.p.d. (Proposición 2.3.2). Consideremos los siguientes conjuntos

$$A = \{t \in \Omega : e^*(t) = 1\} \ \text{ y } B = \{t \in \Omega : e^*(t) = -1\},$$

nótese que $\mu(A) > 0$ y $\mu(B) > 0$ por ser $e^* \neq \pm e_0^*$. Puesto que μ es una medida σ-finita, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ con $\mu(\Omega_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap \Omega_n)$ y $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap \Omega_n)$. Por tanto, existe n en $\mathbb{N}$ de manera que $A_0 := A \cap \Omega_n$ es un conjunto medible con $0 < \mu(A_0) < +\infty$ y tal que $e^*(t) = 1$ para todo $t \in A_0$. Análogamente para B, vamos a obtener un conjunto medible B_0 tal que para todo $t \in B_0$, $e^*(t) = -1$ con $0 < \mu(B_0) < +\infty$. Definamos ahora

$$f = \frac{1}{2\mu(A_0)} \chi_{A_0} - \frac{1}{2\mu(B_0)} \chi_{B_0}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\| f \|_1 &= \int | f | \ d\mu \\ &= \int \left(\frac{1}{2\mu(A_0)} \chi_{A_0} + \frac{1}{2\mu(B_0)} \chi_{B_0} \right) \ d\mu \\ &= \frac{\mu(A_0)}{2\mu(A_0)} + \frac{\mu(B_0)}{2\mu(B_0)} = 1,\end{aligned}$$

esto es, $f \in B_{L_1(\mu)}$. Veamos que $e_0^*(f) = 0$ y $e^*(f) = 1$:

$$\begin{aligned}e_0^*(f) &= \int f \ d\mu \\ &= \int \left(\frac{1}{2\mu(A_0)} \chi_{A_0} - \frac{1}{2\mu(B_0)} \chi_{B_0} \right) \ d\mu \\ &= \frac{\mu(A_0)}{2\mu(A_0)} - \frac{\mu(B_0)}{2\mu(B_0)} = 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}e^*(f) &= \int e^*(t) f(t) \ d\mu \\ &= \int e^*(t) \left(\frac{1}{2\mu(A_0)} \chi_{A_0} - \frac{1}{2\mu(B_0)} \chi_{B_0} \right) \ d\mu \\ &= \int (\chi_A - \chi_B) \frac{1}{2\mu(A_0)} \chi_{A_0} \ d\mu - \int (\chi_A - \chi_B) \frac{1}{2\mu(B_0)} \chi_{B_0} \ d\mu \\ &= \int \frac{1}{2\mu(A_0)} \chi_{A_0} \ d\mu + \int \frac{1}{2\mu(B_0)} \chi_{B_0} \ d\mu \\ &= \frac{\mu(A_0)}{2\mu(A_0)} + \frac{\mu(B_0)}{2\mu(B_0)} = 1.\end{aligned}$$

Así, la condición (ii) se verifica y podemos aplicar el Teorema 2.1.1 para obtener que $L_1(\mu)$ no es un espacio nice. $\square$

En este resultado es necesario excluir los casos en los que $\dim(L_1(\mu))$ es 1 ó 2, pues si $\dim(L_1(\mu)) = 1$ obtenemos que $L_1(\mu)$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}$ y en el caso que la dimensión sea 2, isométricamente isomorfo a l_∞^2, y ambos son espacios nice.

2.4. Espacios reflexivos nice

Nuestro próximo objetivo es caracterizar los espacios finito-dimensionales que son nice. Establecemos a continuación una condición necesaria para que un espacio sea nice. Aunque su demostración es sencilla el resultado nos permite probar que un gran número de espacios de Banach no son nice y además jugará un papel importante para determinar los espacios finito-dimensionales que son nice.

Proposición 2.4.1. *Sea X un espacio de Banach nice tal que E_X es no vacío. Entonces*

$$| e^*(e) |= 1 \quad \textit{para cualesquiera } e^* \in E_{X^*} \ \textit{ y } \ e \in E_X.$$

Demostración. Por hipótesis, X es un espacio nice, esto es, $N(Y, X) = E(Y, X)$ para todo espacio de Banach Y. En particular, si consideramos Y el cuerpo tenemos $N(\mathbb{R}, X) = E(\mathbb{R}, X)$. Sea e un elemento de E_X y sea T el operador de $L(\mathbb{R}, X) \equiv X$ definido por $T(\alpha) = \alpha e$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces T es un operador extremo y por tanto es nice, esto es,

$$T^*(e^*) \in E_{\mathbb{R}^*} \equiv E_{\mathbb{R}} \text{ para todo } e^* \in E_{X^*}.$$

Así, $T^*(e^*)(\alpha) = e^*(T(\alpha)) = e^*(\alpha e) = \alpha e^*(e)$ de donde podemos concluir que $T^*(e^*) \in E_{\mathbb{R}}$, lo que implica que

$$| e^*(e) |= 1 \text{ para todo } e^* \in E_{X^*}.$$

□

La propiedad que se describe en este resultado está fuertemente relacionada con ciertas propiedades de intersección de bolas (ver [32, Theorem 2.2]). Sin embargo, esta propiedad no es una condición suficiente para ser nice. Lo que pone de manifiesto este resultado es que ser un espacio nice es muy restrictivo. Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente corolario.

Corolario 2.4.2. $\mathbb{R}$ *es el único espacio nice estrictamente convexo.*

Demostración. Sea X un espacio estrictamente convexo, supongamos que $dim(X) \geq 2$. Sea $e^* \in E_{X^*}$ y $x \in \ker(x^*) \cap S_X$. Por ser X estrictamente convexo, $x \in E_X$ y $e^*(x) = 0$ con lo que X no es nice por la proposición anterior. $\square$

El siguiente resultado fue obtenido por G. López, M. Martín y R. Payá en [37]. Para su demostración los autores utilizan el l_1-Teorema de Rosenthal [47] y el Teorema de Fonf [21], que consiste en una mejora del resultado obtenido por Lindenstrauss y Phelps, en el que se detalla que el conjunto de los puntos extremos de X no puede ser numerable en el caso de X sea un espacio reflexivo de dimensión infinita.

Proposición 2.4.3. ([37, Proposition 2]) *Sea X un espacio de Banach real y supóngase que existe un conjunto infinito $A \subset S_X$ tal que $\mid e^*(a) \mid= 1$ para todo $a \in A$ y para todo $e^* \in E_{X^*}$. Entonces, X contiene una copia (isomorfa) de c_0 o bien l_1.*

Combinando el resultado anterior y la Proposición 2.4.1 obtenemos que los espacios de Banach reflexivos infinito-dimensionales no pueden ser nice.

Proposición 2.4.4. *Sea X un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita. Entonces, X no es un espacio nice.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita que es nice. Por la Proposición 2.4.1,

$$\mid e^*(e) \mid= 1 \quad \text{para cualesquiera } e^* \in E_{X^*} \quad \text{y } e \in E_X.$$

Por ser X reflexivo, $B_X = \overline{\text{co}}(E_X)$, y por ser X de dimensión infinita, E_X es un conjunto infinito. La Proposición 2.4.3 nos dice que X contiene a c_0 o bien a l_1, lo que contradice la reflexividad de X. $\square$

El objetivo final de este capítulo es describir los espacios finito-dimensionales que son nice. Para este tipo de espacios, los finito-dimensionales, la condición expuesta en Proposición 2.4.1 ha sido estudiada en conexión con la clase de CL-espacios. El concepto de CL-espacio fue introducido por R. Fullerton en 1960 [22] y dichos espacios fueron estudiados por Lindenstrauss [34], Lima [31, 32, 33] y Martín y Payá [38]. En el ámbito de los espacios de Banach clásicos, ejemplos de CL-espacios son $L_1(\mu)$ para una medida μ arbitraria, y sus preduales isométricos, en particular, $\mathcal{C}(K)$ con K un espacio compacto y Hausdorff ([31, §3]). Antes de formalizar la definición de CL-espacio, veamos unas nociones previas que son familiares.

Definición 2.4.5. Sea X un espacio vectorial real y $C \subseteq X$ convexo (no vacío), diremos que un conjunto convexo $F \subset C$ es ***cara de*** C si dados x, y en C y t en $]0,1[$ tal que $tx + (1-t)y \in F$ entonces x, $y \in F$.

Diremos que F es una ***cara maximal de*** C si F es una cara propia que no está estrictamente contenida en ninguna cara propia de C.

En el siguiente resultado recogemos algunas propiedades de las caras de la bola unidad de un espacio normado.

Lema 2.4.6. *Sea X un espacio normado. Entonces se verifica:*

(i) Para cada $x \in S_X$, existe una cara propia mínima F_x de B_X tal que $x \in F_x$.

(ii) B_X tiene caras maximales.

(iii) Si F es una cara propia de B_X, entonces $F \subseteq S_X$.

Demostración. Es claro que si F es una cara propia de B_X, entonces $0 \notin F$.

(i) Sea $x \in S_X$. Existe x^* en S_{X^*} tal que $x^*(x) = 1$. Entonces $F_0 = \{y \in B_X : x^*(y) = 1\}$ es una cara propia de B_{X^*} con $x \in F_0$.

Para concluir la demostración basta considerar que la intersección de todas las caras de B_X que contienen a x es una cara de B_X.

(ii) Como consecuencia de (i) y del comentario inicial, es fácil comprobar que la clase de caras propias de B_X con el orden de la inclusión es un conjunto inductivo, por lo que el resultado es consecuencia del Lema de Zorn.

(iii) Sea $x_0 \in F$ con $0 <\| x_0 \|< 1$ entonces

$$x_0 = \frac{1+ \| x_0 \|}{2} \frac{x_0}{\| x_0 \|} + \frac{1- \| x_0 \|}{2} \frac{-x_0}{\| x_0 \|}$$

en donde $\alpha = \frac{1+\|x_0\|}{2} \in]0,1[$. Como F es una cara entonces $\frac{x_0}{\|x_0\|}, \frac{-x_0}{\|x_0\|} \in F$, así $0 \in F$ y por tanto, $F = B_X$. □

Damos a continuación la definición de CL-espacio.

Definición 2.4.7. Un espacio de Banach X es un CL-***espacio*** si para cada cara maximal F de B_X se tiene que $B_X = \mathrm{co}(F \bigcup -F)$.

En el caso finito-dimensional Lima establece la siguiente caracterización de los CL-espacios.

Teorema 2.4.8. [33, Theorem 2.3] *Sea X un espacio Banach de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es un CL-espacio.

(2) X^* es un CL-espacio.

(3) $\mid e^*(e) \mid = 1$ para cualesquiera $e^* \in E_{X^*}$ y $e \in E_X$.

(4) Si $e \in E_X$ y $x \in X$ son tales que $\|x\| = 1$ y $e \notin F_x$, entonces $\|x - e\| = 2$.

Lindenstrauss y Perles en [35], estudian el conjunto de los operadores extremos de $L(X, X)$ y uno de sus principales teoremas es el siguiente, el cual nos sirve para poder caracterizar a los espacios finito-dimensionales nice.

Teorema 2.4.9. [35, Theorem 1.1] *Las siguientes tres afirmaciones, en relación a un espacio de Banach finito-dimensional X, son equivalentes:*

(1) $T \in E(X, X),\ e \in E_X \Rightarrow Te \in E_X$.

(2) $T_1, T_2 \in E(X, X) \Rightarrow T_1 \circ T_2 \in E(X, X)$.

(3) $\{T_i\}_{i=1}^m \subseteq E(X, X) \Rightarrow \| T_1 \circ \cdots \circ T_m \| = 1$ para todo m.

Haciendo uso de los operadores nice, podemos reescribir la condición (1) del teorema anterior, obteniendo el siguiente resultado en cuya demostración utilizaremos el hecho de que, por ser X de dimensión finita, $T \in E(X, X)$ si, y sólo si, $T^* \in E(X^*, X^*)$. En consecuencia, X verifica la condición (2) del teorema anterior si, y sólo si, X^* la verifica.

Corolario 2.4.10. *Sea X un espacio de Banach finito-dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $T \in E(X,X)$, $e \in E_X \Rightarrow T(e) \in E_X$.

(ii) $N(X,X) = E(X,X)$.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Si X verifica la condición (i), entonces X satisface la condición (1) del Teorema 2.4.9, lo que equivale a que X cumpla la condición (2). Por tanto, X^* verifica (2), que por el teorema anterior, equivale a (1). Dado $T \in E(X,X)$ se tiene que $T^* \in E(X^*, X^*)$, por lo que teniendo en cuenta (1), $T^*(E_{X^*}) \subseteq E_{X^*}$, luego $T \in N(X,X)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Ya que la composición de operadores nice es nice, X satisface la condición (2) del teorema anterior, lo que equivale a que se verifique (1) que es la condición (i) del corolario. □

Enunciamos a continuación varios resultados de Lima sobre CL-espacios y operadores extremos que nos serán necesarios para poder obtener la caracterización de los espacios finito-dimensionales nice.

Lema 2.4.11. [33, Lemma 3.5] *Sea $X = l_1^3 \oplus_\infty \mathbb{R}$ y sea $Y = l_\infty^3 \oplus_1 \mathbb{R}$. Entonces existen $T \in E(X,Y)$ y $e \in E_X$ tales que $T(e) \notin E_Y$.*

El siguiente resultado es un caso particular de [33, Corollary 3.6].

Lema 2.4.12. [33, Corollary 3.6] *Sea X un CL-espacio de dimensión finita. Supongamos que existe una isometría $I : l_\infty^4 \to X$ tal que $I(E_{l_\infty^4}) \subseteq E_X$. Entonces existen $T \in E(X, l_1^4)$ y $e \in E_X$ tales que $T(e) \notin E_{l_1^4}$.*

En los dos resultados anteriores, se concluye la existencia de un operador extremo que no es nice (el operador T^*).

Teorema 2.4.13. [33, Theorem 6.5 and Theorem 4.1] *Supongamos que X es un CL-espacio finito-dimensional que satisface que si $T \in E(X,X)$, $e \in E_X \Rightarrow Te \in E_X$. Entonces X es isométrico a $l_1^m \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{p}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3$ ó a $l_\infty^n \oplus_\infty l_1^3 \oplus_\infty \overset{k}{\cdots} \oplus_\infty l_1^3$ donde $m,n,p,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para obtener la caracterización de espacios finito-dimensionales que son nice.

Teorema 2.4.14. *Sea X un espacio de Banach finito-dimensional. Entonces X es nice si, y sólo si, X es isométricamente isomorfo a l_∞^n para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La condición necesaria se sigue de la Proposición 1.3.3. Para probar la condición suficiente, tengamos en cuenta que por Proposición 2.4.1 y Teorema 2.4.8, X es un CL-espacio. Por el Corolario 2.4.10, X satisface la condición (1) del Teorema 2.4.9. Por tanto, el Teorema 2.4.13, nos dice que X es $l_1^m \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{p}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3$ ó $l_\infty^n \oplus_\infty l_1^3 \oplus_\infty \overset{k}{\cdots} \oplus_\infty l_1^3$ donde m, n, p, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ahora tenemos que probar que las únicas posibilidades son $m = 0$ y $p = 1$, ó $m = 1, 2$ y $p = 0$ en el primer caso, y $k = 0$, en el segundo.

Comenzamos viendo que X no puede ser de la forma $l_1^m \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{p}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3$ con $p \geq 2$. Para ello, consideremos $Z = X^* = l_\infty^m \oplus_\infty l_1^3 \oplus_\infty \overset{p}{\cdots} \oplus_\infty l_1^3$ y el operador $I : l_\infty^4 \to Z$ definido por

$$I(x, y, z, t) = (x, \overset{m}{\ldots}, x, \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, 0, \frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}, 0, x, 0, 0, \ldots, x, 0, 0).$$

Tenemos que $I(E_{l_\infty^4}) \subseteq E_Z$ e I es una isometría. Entonces, por el Lema 2.4.12, existe $T \in E(Z, l_1^4)$ y $z \in E_Z$ tales que $T(z) \notin E_Y$. De aquí, obtenemos que $T^* \in E(l_\infty^4, X)$ y que T^* no es un operador nice, por lo tanto, podemos concluir que X no es nice.

Veamos ahora los casos para $p = 0$ y $p = 1$:

Si $p = 0$ entonces $X = l_1^m$ y aplicando el Teorema 2.3.10 obtenemos que X no es nice si $m \geq 3$.

Si $p = 1$ y $m \geq 2$, entonces basta considerar el espacio $Z = l_\infty^m \oplus_\infty l_1^3$ y construir el operador $I : l_\infty^4 \to Z$ dado por

$$I(x, y, z, t) = (x, y, x, x, \ldots, x, \frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}, 0).$$

De manera que obtenemos que $I(E_{l_\infty^4}) \subseteq E_Z$ e I es una isometría, y aplicando de nuevo el Lema 2.4.12 podemos concluir que $Z^* = X$ no es nice.

Si $p = 1$ y $m = 1$, consideramos $Z = \mathbb{R} \oplus_\infty l_1^3$ y aplicando el Lema 2.4.11, tenemos que $Z^* = X$ no es nice.

En resumen, si $X = l_1^m \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{p}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3$ entonces $(m, p) = (1, 0), (2, 0)$ o $(0, 1)$, esto es, $X = \mathbb{R}, l_\infty^2$ or l_∞^3.

Ahora, probemos que X no puede ser de la forma $X = l_\infty^n \oplus_\infty l_1^3 \oplus_\infty \overset{k}{\cdots} \oplus_\infty l_1^3$ con $k \geq 1$. Sabemos que l_1^3 satisface las hipótesis del Teorema 2.1.1. Luego, de igual manera que en la demostración de este teorema, existe un espacio de Banach X_0 y un operador lineal $T_0 : X_0 \to l_1^3$ el cual no es un operador nice. Además, T_0 verifica $T_0^*(A_0) \subseteq E_{X_0^*}$, donde $A_0 \subseteq E_{l_\infty^3}$ y $\mathrm{lin}(A_0) = l_\infty^3$.

Si $k \geq 1$, consideremos el operador

$$T : l_\infty^n \oplus_\infty X_0 \oplus_\infty \overset{k}{\cdots} \oplus_\infty l_1^3 \to l_\infty^n \oplus_\infty l_1^3 \oplus_\infty \overset{k}{\cdots} \oplus_\infty l_1^3$$

definido por

$$T(y, x_1, x_2, \ldots, x_k) = (y, T_0(x_1), x_2, \ldots, x_k).$$

Nótese que $T^* : l_1^n \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{k}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3 \to l_1^n \oplus_1 X_0^* \oplus_1 \overset{k}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3$ viene dado por

$$T^*(y^*, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*) = (y^*, T_0^*(x_1^*), x_2^*, \ldots, x_k^*).$$

Como $T^*(x^*) \in E_{l_1^n \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{k}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3}$, para todo $x^* \in A$ con $A \subseteq E_{l_1^n \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{k}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3}$ tal que $\mathrm{lin}(A) = l_1^n \oplus_1 l_\infty^3 \oplus_1 \overset{k}{\cdots} \oplus_1 l_\infty^3$, entonces T es un operador extremo que no es nice. Por lo tanto, $k = 0$, y así, $X = l_\infty^n$. $\square$

Teniendo en cuenta la Proposición 2.4.4 y el teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.15. *Sea X un espacio de Banach reflexivo. Entonces X es nice si, y sólo si, X es isométricamente isomorfo a l_∞^n para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Capítulo 3

L_1-preduales nice

El objetivo fundamental de este capítulo, central en esta memoria, es caracterizar los espacios L_1-preduales que son nice. La herramienta básica es la topología estructura, una topología que se puede definir en el conjunto de los puntos extremos del dual de cualquier espacio de Banach. Con el fin de presentar la topología estructura, dedicamos la primera sección del capítulo a dar las nociones necesarias para ello, a saber los conceptos de L-sumando y M-ideal. Recopilamos las propiedades que nos serán útiles para conseguir nuestros objetivos. Todos estos resultados son conocidos, pero dada la importancia de estas herramientas hemos considerado oportuno hacer un desarrollo pormenorizado de los mismos.

En la segunda sección presentamos la topología estructura y destacamos como resultado novedoso la caracterización de los espacios de Banach isométricos a $c_0(I)$ como aquellos cuya topología estructura es discreta.

Finalizamos el capítulo, probando que los únicos L_1-preduales nice son del tipo $c_0(I)$ para algún conjunto no vacío I.

3.1. L-sumandos y M-ideales

Comenzamos este capítulo introduciendo las nociones necesarias para el concepto de topología estructura. Dado un subespacio M de un espacio de Banach X, notaremos por M° el ***polar*** de M en X^* dado por

$$M^\circ = \{f \in X^* : f(m) = 0 \ \ \forall m \in M\}.$$

La referencia básica para los siguientes conceptos y resultados relacionados es [26].

Definición 3.1.1. Sea X un espacio de Banach.

(1) Una proyección lineal P, esto es, $P : X \to X$, $P^2 = P$, se dice que es una L***-proyección*** si

$$\| x \| = \| P(x) \| + \| x - P(x) \| \quad \text{para todo} \ \ x \in X.$$

(2) Una proyección lineal P es una M***-proyección*** si

$$\| x \| = \max\{\| P(x) \|, \| x - P(x) \|\} \quad \text{para todo} \ \ x \in X.$$

(3) Un subespacio cerrado M de X se dice que es un L***-sumando*** si es el rango de una L-proyección, esto es, si existe una L-proyección P tal que $P(X) = M$. Un subespacio cerrado M de X se dice que es un M***-sumando*** si es el rango de una M-proyección.

(4) Un subespacio cerrado M de X se dice que es un M***-ideal*** si M° es un L-sumando en X^*.

En las definiciones anteriores cabe pensar que falta el concepto de L-ideal, pero en realidad un L-ideal es automáticamente un L-sumando. Aunque ocasionalmente en la bibliografía se puede encontrar el término L-ideal como sinónimo de L-sumando, como por ejemplo en [3, 4].

Veamos que los L-sumandos y M-sumandos verifican buenas propiedades de aproximación. En el enunciado notaremos por $B(x, r)$, la bola cerrada de centro x y radio r.

Proposición 3.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Entonces se verifica:*

(i) *Sea P una L-proyección en X y $M = P(X)$. Entonces, para cada x en X, $P(x)$ es el único elemento en M que verifica*

$$\| x + M \| = \| x - P(x) \| .$$

(ii) *Sea P una M-proyección en X y $M = P(X)$. Entonces, para cada x en X y m en M se verifica que $\| x + M \| = \| x - m \|$ si, y sólo si, $\| m - P(x) \| \leq \| x + M \|$. Es decir,*

$$\{m \in M : \| x + M \| = \| x - m \|\} = B(P(x), \| x + M \|) \cap M.$$

Demostración.

(i) Sean x en X y m en M, tenemos que

$$\| x - m \| = \| P(x) - m \| + \| x - P(x) \| \geq \| x - P(x) \| .$$

De donde, $\| x - P(x) \| = \| x + M \|$ y $\| x - m \| = \| x + M \|$ si, y sólo si, $\| P(x) - m \| = 0$ lo que equivale a $m = P(x)$.

(ii) Sean x en X y m en M, tenemos que

$$\| x - m \| = \max\{\| P(x) - m \|, \| x - P(x) \|\} \geq \| x - P(x) \| .$$

De donde, $\| x - P(x) \| = \| x + M \|$. Además, $\| x - m \| = \| x + M \|$ si, y sólo si, $\| P(x) - m \| \leq \| x + M \|$. □

Corolario 3.1.3. *Si M es un L-sumando (respectivamente M-sumando) de X, existe una única L-proyección (resp. M-proyección) P en X tal que $P(X) = M$.*

La siguiente proposición muestra la dualidad entre L- y M-proyecciones, que es útil para conseguir propiedades de M-sumandos a través de los L-sumandos (y al contrario).

Proposición 3.1.4. *Sea X un espacio de Banach y $P : X \to X$ una proyección. Entonces,*

(i) *P es una L-proyección si, y sólo si, P^* es una M-proyección.*

(ii) P es una M-proyección si, y sólo si, P^* es una L-proyección.

Demostración. Probamos, en principio, solo una implicación de (i) y otra de (ii). Las otras implicaciones se obtendrán fácilmente a partir de las anteriores.

(i) Sea P una L-proyección. Es claro que P^* es una proyección por lo que basta probar que

$$\| x^* \| = \max\{\| P^*(x^*) \|, \| x^* - P^*(x^*) \|\} \qquad \text{para } x^* \in X^*.$$

Como $\| P^*(x^*) \| \leq \| x^* \|$ y $\| (Id - P)^*(x^*) \| \leq \| x^* \|$ para todo x^* en X^*, tenemos que

$$\max\{\| P^*(x^*) \|, \| x^* - P^*(x^*) \|\} \leq \| x^* \| .$$

Para probar la otra desigualdad, sea x en S_X. Entonces para x^* en X^* se tiene

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &= |x^*(P(x) + x - P(x))| \\ &\leq |x^*(P(x))| + |x^*(x - P(x))| \\ &= |P^*(x^*)(P(x))| + |(Id - P^*)(x^*)(x - P(x))| \\ &\leq \| P^*(x^*) \| \| P(x) \| + \| (Id - P^*)(x^*) \| \| x - P(x) \| \\ &\leq \max\{\| P^*(x^*) \|, \| x^* - P^*(x^*) \|\}(\| P(x) \| + \| x - P(x) \|) \\ &= \max\{\| P^*(x^*) \|, \| x^* - P^*(x^*) \|\} \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $\| x^* \| \leq \max\{\| P^*(x^*) \|, \| x^* - P^*(x^*) \|\}$.

(ii) Supongamos que P es una M-proyección. Para $x, y \in B_X$ se sigue que

$$\| P(x) + (Id - P)(y) \| = \max\{\| P(x) \|, \| (Id - P)(y) \|\} \leq 1$$

así que, para x^* en X^*,

$$|P^*(x^*)(x) + (Id - P^*)(x^*)(y)| = |x^*(P(x) + (Id - P)(y))| \leq \| x^* \| .$$

Esto implica que $\| P^*(x^*) \| + \| (Id - P^*)(x^*) \| \leq \| x^* \|$, esto es, P^* es una L-proyección.

Probemos ahora las implicaciones que faltan. Sea P^* una M-proyección, entonces, por lo que acabamos de probar, P^{**} es una L-proyección en X^{**}.

Teniendo en cuenta que $P^{**} \circ J_X = J_X \circ P$ (es decir, $P^{**}_{|X} = P$) se obtiene que P es una L-proyección en X. Análogamente se prueba utilizando (i) que si P^* es una L-proyección, entonces P es una M-proyección. □

Teniendo en cuenta que si P es una proyección en X, se tiene que

$$P(X)^\circ = \ker(P^*) = (Id - P^*)(X^*)$$

se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.5. *Sea X un espacio de Banach. Entonces se verifica:*

(i) Si M es un L-sumando de X, entonces M° es un M-sumando de X^*.

(ii) Si M es un M-sumando de X, entonces M° es un L-sumando de X^*. Es decir, todo M-sumando de X es un M-ideal de X.

La siguiente propiedad es de uso frecuente a lo largo del capítulo.

Lema 3.1.6. *Sean X un espacio de Banach y M, N subespacios cerrados no triviales de X tal que $X = M \oplus_1 N$. Entonces*

$$E_X = E_M \cup E_N.$$

Demostración. Vamos a demostrarlo por doble inclusión. Sea x en E_X y supongamos que $x = m + n$ con $m \in M \setminus \{0\}$ y $n \in N \setminus \{0\}$, entonces

$$\| x \| = 1 = \| m \| + \| n \|$$

y

$$x = \| m \| \frac{m}{\| m \|} + \| n \| \frac{n}{\| n \|}$$

con $\| m \|, \| n \| \in]0, 1[$ y $\frac{m}{\|m\|} \neq \frac{n}{\|n\|}$, ya que $M \cap N = \{0\}$. Lo que es una contradicción. Luego, $x \in M$ o $x \in N$, es decir,

$$E_X \subseteq E_M \cup E_N.$$

Recíprocamente, sean x en E_M e y en X tales que $\| x \pm y \| \leq 1$. Sea $y = m + n$ con $m \in M$ y $n \in N$, entonces

$$\| x \pm y \| = \| x \pm m \| + \| n \| \leq 1,$$

lo que implica que $\| x \pm m \| \leq 1$ con $m \in M$ y $x \in E_M$, de donde $m = 0$. Entonces tenemos que

$$\| x \| + \| n \| = 1 + \| n \| \leq 1.$$

Luego, $n = 0$ y por tanto, $y = 0$, obteniendo así, que x es un punto extremo de B_X. $\square$

Pasamos a definir una relación de orden en la clase de todas las L-proyecciones de un espacio de Banach.

Definición 3.1.7. Si P y Q son L-proyecciones en el espacio de Banach X, definimos el siguiente orden

$$P \leq Q \text{ si, y sólo si, } PQ = P.$$

Es de comprobación inmediata que el orden definido cumple las propiedades de reflexividad y transitividad, esto es,

- Reflexividad: $P \leq P$.

- Transitividad: Sean P, Q y R tres L-proyecciones.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si } P \leq Q & \text{entonces} & PQ = P \\ \text{Si } Q \leq R & \text{entonces} & QR = Q \end{array}\right\} \Rightarrow PR = PQR = PQ = P \Rightarrow P \leq R.$$

Si $P \leq Q$ y $Q \leq P$, entonces $PQ = P$ y $QP = Q$. Para demostrar que se cumple la propiedad antisimétrica es necesario probar la conmutatividad de dos L-proyecciones, lo que hacemos a continuación.

Proposición 3.1.8. *Sean P y Q L-proyecciones en un espacio de Banach X, entonces:*

(i) $PQ = QP$.

(ii) PQ *es una L-proyección en X.*

(iii) $P + Q - PQ$ *es una L-proyección en X.*

Demostración.

(i) Sean P y Q L-proyecciones. Entonces, para x en X, se tiene

$$\begin{aligned}\| Q(x) \| &= \| PQ(x) \| + \| (Id-P)Q(x) \| \\ &= \| QPQ(x) \| + \| (Id-Q)PQ(x) \| + \\ &\quad + \| Q(Q(x)-PQ(x)) \| + \| (Id-Q)(Q(x)-PQ(x)) \| \\ &= \| QPQ(x) \| + 2 \| PQ(x) - QPQ(x) \| + \| Q(x) - QPQ(x) \| \\ &\geq \| Q(x) \| + 2 \| PQ(x) - QPQ(x) \|\end{aligned}$$

de donde $PQ = QPQ$. Aplicando lo anterior a las L-proyeciones P y $Id - Q$ obtenemos $P(Id-Q) = (Id-Q)P(Id-Q)$ lo que equivale a $QP = QPQ$, y por tanto, obtenemos el resultado.

(ii) Por (i), tenemos que PQ es una proyección, y es una L-proyección puesto que, para cada x en X, se tiene

$$\begin{aligned}\| x \| &= \| Q(x) \| + \| (Id-Q)(x) \| \\ &= \| PQ(x) \| + \| Q(x) - PQ(x) \| + \| x - Q(x) \| \\ &\geq \| PQ(x) \| + \| x - PQ(x) \| \\ &\geq \| x \| .\end{aligned}$$

(iii) Ya que $Id-P$ y $Id-Q$ son L-proyecciones en X, por (ii) $(Id-P)(Id-Q)$ es una L-proyección en X, con lo cual

$$Id - (Id-P)(Id-Q) = P + Q - PQ$$

es una L-proyección en X. □

Veamos cómo la conmutatividad repercute en el orden de las L-proyecciones.

Corolario 3.1.9. *Sean P y Q dos L-proyecciones en X. Entonces*

(i) $P \leq Q$ *si, y sólo si,* $P(X) \subseteq Q(X)$.

(ii) $P + Q - PQ = \sup\{P, Q\}$.

(iii) $(P + Q - PQ)(X) = P(X) + Q(X)$. *Como consecuencia, si M_1 y M_2 son L-sumandos entonces $M_1 + M_2$ es un L-sumando.*

(iv) $\ker(P + Q - PQ) = \ker(P) \cap \ker(Q)$.

(v) $PQ = \text{ínf}\{P, Q\}$.

Demostración.

(i) Por definición, $P \leq Q$ si, y sólo si, $P = PQ = QP$, donde en la última igualdad se utiliza la Proposición 3.1.8.(i). A su vez, $P = QP$ equivale a que $P(X) \subseteq Q(X)$.

(ii) Tenemos que $P(P + Q - PQ) = P + PQ - PQ = P$, es decir, $P \leq P + Q - PQ$. Análogamente, (teniendo en cuenta que $PQ = QP$) se verifica que $Q \leq P + Q - PQ$. Sea R una L-proyección en X tal que $P \leq R$ y $Q \leq R$. Entonces, tenemos que $RP = PR = P$ y $RQ = QR = Q$. Luego, $R(P + Q - PQ) = P + Q - PQ$, y por tanto, $R \leq P + Q - PQ$. Con lo que $P + Q - PQ$ es el mínimo mayorante de P y Q.

(iii) Sea $S = P + Q - PQ$, entonces es claro que

$$S(X) = (P + Q - PQ)(X) \subseteq P(X) + Q(X).$$

Por (ii), $P \leq S$ y $Q \leq S$ y por (i), $P(X) \subseteq S(X)$ y $Q(X) \subseteq S(X)$ y esto acaba la prueba.

(iv) Es claro que

$$\ker(P) \cap \ker(Q) \subseteq \ker(P + Q - PQ).$$

Si $x \in \ker(P + Q - PQ)$, entonces $P(x) + Q(x) - PQ(x) = 0$. Por (ii), $P \leq P + Q - PQ$, luego

$$0 = P(P + Q - PQ)(x) = P(x),$$

es decir, $x \in \ker(P)$. De la misma forma $x \in \ker(Q)$ y, por tanto, $x \in \ker(P) \cap \ker(Q)$.

(v) Tenemos que $PQ \leq P$ y $PQ \leq Q$. Sea R una L-proyección tal que $R \leq P$ y $R \leq Q$, entonces $RP = R$ y $RQ = R$. A partir de aquí, $RPQ = RQ = R$, luego $R \leq PQ$. Es decir, PQ es el máximo minorante de P y Q. $\square$

Con los resultados obtenidos hasta ahora podemos concluir que el conjunto de todas las L-proyecciones en un espacio de Banach X con el orden introducido tiene estructura de retículo. El resultado que sigue a continuación nos dice, esencialmente, que el retículo de las L-proyecciones es completo, es decir, toda familia de L-proyecciones tiene supremo. En el enunciado aparecen redes de L-proyecciones. Recordemos que una red en un conjunto cualquiera es una aplicación de un conjunto dirigido en dicho conjunto. Una red en un conjunto ordenado es creciente si conserva el orden.

Teorema 3.1.10. *Sean X un espacio de Banach y $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una red creciente de L-proyecciones en X. Entonces $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge puntualmente hacia una L-proyección, P, en X. Además, $P = \sup\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.*

Demostración. Sea x en X, entonces $\| P_\gamma(x) \| \leq \| x \|$ para todo γ en Γ. Sea $\alpha = \sup\{\| P_\gamma(x) \|: \gamma \in \Gamma\}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe γ_0 en Γ tal que $\| P_{\gamma_0}(x) \| > \alpha - \varepsilon$. Para $\gamma \geq \gamma_0$ se tiene que $P_\gamma \geq P_{\gamma_0}$, luego $P_{\gamma_0}P_\gamma = P_{\gamma_0}$, así

$$\begin{aligned}\| P_\gamma(x) \| &= \| P_{\gamma_0}P_\gamma(x) \| + \| P_\gamma(x) - P_{\gamma_0}P_\gamma(x) \| \\ &= \| P_{\gamma_0}(x) \| + \| P_\gamma(x) - P_{\gamma_0}(x) \| .\end{aligned}$$

Luego

$$\| P_\gamma(x) - P_{\gamma_0}(x) \| = \| P_\gamma(x) \| - \| P_{\gamma_0}(x) \| < \varepsilon,$$

por tanto, para todo γ, $\gamma' \geq \gamma_0$, $\| P_\gamma(x) - P_{\gamma'}(x) \| < 2\varepsilon$. Se concluye que $\{P_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una red de Cauchy en X y $\{P_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma} \to P(x) \in X$. Ya que P_γ es lineal para todo γ en Γ, se obtiene que P es lineal; y de la igualdad

$$\| x \| = \| P_\gamma(x) \| + \| x - P_\gamma(x) \|$$

para cualesquiera $\gamma \in \Gamma$ y $x \in X$, se obtiene $\| x \| = \| P(x) \| + \| x - P(x) \|$ para todo x en X.

Para probar que P es una L-proyección en X solo queda comprobar que P es una proyección. Fijemos x en X. Sea γ en Γ, para todo $\gamma' \geq \gamma$ se tiene que $P_\gamma P_{\gamma'} = P_\gamma$, luego para todo $\gamma' \geq \gamma$ y $x \in X$, $P_\gamma(P_{\gamma'}(x)) = P_\gamma(x)$. Tomando límite en γ', la continuidad de P_γ nos da

$$P_\gamma(P(x)) = P_\gamma(x) \qquad \forall \gamma \in \Gamma \tag{$*$}$$

luego $P(P(x)) = P(x)$. Es decir, $P^2 = P$ y P es una L-proyección. Además, de $(*)$ se obtiene $P_\gamma \leq P$ para todo γ en Γ.

Para finalizar la demostración, veamos que P es el mínimo mayorante de $\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. En efecto, sea Q una L-proyección en X tal que $P_\gamma \leq Q$ para todo γ en Γ. Entonces,

$$P_\gamma Q(x) = P_\gamma(x) \qquad \forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in X.$$

Luego,

$$PQ(x) = P(x) \qquad \forall x \in X,$$

es decir, $P \leq Q$, lo que acaba la prueba. $\square$

Teniendo en cuenta el Corolario 3.1.3, si M es un L-sumando en X, existe un único L-sumando en X, que notaremos por $M^\sharp$, tal que $X = M \oplus_1 M^\sharp$ y al que llamaremos ***L-sumando complementario*** de M.

Teorema 3.1.11. *Sea $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de L-sumandos en un espacio de Banach X.*

(i) $\overline{\mathrm{lin}}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right)$ *es un L-sumando cuyo L-sumando complementario es* $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\sharp$.

(ii) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ *es un L-sumando y su L-sumando complementario es* $\overline{\mathrm{lin}}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\sharp\right)$.

Demostración. Sea, para cada $\lambda \in \Lambda$, P_λ la L-proyección en X tal que $P_\lambda(X) = M_\lambda$. Notemos $M = \overline{\mathrm{lin}}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right)$.

(i) Consideremos $\Gamma = \{F \subseteq \Lambda : F \text{ es finito}\} = \mathcal{P}_F(\Lambda)$, con el orden de la inclusión es un conjunto dirigido. Usando el Corolario 3.1.9, para cada $F \in \mathcal{P}_F(\Lambda)$ se define

$$P_F = \sup\{P_\lambda : \lambda \in F\}.$$

Entonces P_F es una L-proyección en X con $P_F(X) \subseteq M$, por el Corolario 3.1.9, y $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una red creciente de L-proyecciones en X.

El teorema anterior nos dice que $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge puntualmente hacia una L-proyección P y $P_\gamma \leq P$ para todo γ en Γ. En particular, $P_\lambda \leq P$ para todo λ en Λ, de donde $P_\lambda(X) = M_\lambda \subseteq P(X)$ para todo λ en Λ y, por tanto, $M = \overline{\text{lin}}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \subseteq P(X)$.

Sea x en $P(X)$, entonces

$$x = P(x) = \lim\{P_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}$$

y $P_\gamma(x)$ pertenece a M para todo γ en Γ, por lo tanto x pertenece a M. Así, queda probado que $P(X) = M$ y M es un L-sumando. Veamos que $\ker(P) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ker(P_\lambda)$. En efecto, si $P_\lambda(x) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, entonces $P_\gamma(x) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ (por el Corolario 3.1.9), luego $P(x) = 0$. Recíprocamente, si $P(x) = 0$, entonces

$$0 = P_\lambda P(x) = P_\lambda(x) \qquad \forall \lambda \in \Lambda,$$

luego x pertenece a $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ker(P_\lambda)$, lo que concluye la demostración.

(ii) Aplicamos el apartado anterior, (i), a la familia de L-sumandos $\{\ker(P_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} = \{M_\lambda^\sharp : \lambda \in \Lambda\}$. Entonces, obtenemos que $\overline{\text{lin}}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\sharp\right)$ es un L-sumando cuyo L-sumando complementario es $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^{\sharp\sharp} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. $\square$

3.2. La topología estructura

El siguiente lema es un resultado puramente técnico que se utilizará para probar que la intersección de M-ideales es un M-ideal.

Lema 3.2.1. *Sean M_1, M_2 M-ideales en un espacio de Banach X. Entonces,*

$$(M_1^\circ + M_2^\circ) \cap B_{X^*} = \mathrm{co}[\ (M_1^\circ \cap B_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap B_{X^*})].$$

Demostración. Demostremos la igualdad por doble inclusión. Es claro que $\mathrm{co}[\ (M_1^\circ \cap B_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap B_{X^*})] \subseteq (M_1^\circ + M_2^\circ) \cap B_{X^*}$. Para la otra inclusión, sean P_1, P_2 las L-proyecciones en X^* con $P_1(X^*) = M_1^\circ$ y $P_2(X^*) = M_2^\circ$. Consideremos $P = P_1 + P_2 - P_2P_1$. Entonces, por el Corolario 3.1.9, P es una L-proyección con $P(X^*) = M_1^\circ + M_2^\circ$. Sea x^* en B_{X^*}, tenemos que

$$\begin{aligned}\| P_1(x^*) \| + \| P_2(x^* - P_1(x^*)) \| &\leq \| P_1(x^*) \| + \| x^* - P_1(x^*) \| \\ &= \| x^* \| \leq 1.\end{aligned}$$

Consideremos ahora, x^* en $(M_1^\circ + M_2^\circ) \cap B_{X^*}$, entonces

$$x^* = P(x^*) = P_1(x^*) + P_2(x^*) - P_2P_1(x^*).$$

Si $P_1(x^*) = 0$, obtenemos que $x^* = P_2(x^*)$ pertenece a M_2°. Por otro lado, $P_2(x^*) - P_2P_1(x^*) = 0$ implica que $x^* = P_1(x^*)$ está en M_1°. En ambos casos se concluye

$$x^* \in \mathrm{co}[\ (M_1^\circ \cap B_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap B_{X^*})].$$

Supongamos que $P_1(x^*) \neq 0$ y $P_2(x^*) - P_2P_1(x^*) \neq 0$, entonces

$$x^* = \| P_1(x^*) \| \frac{P_1(x^*)}{\| P_1(x^*) \|} + \| P_2(x^*) - P_2P_1(x^*) \| \frac{P_2(x^*) - P_2P_1(x^*)}{\| P_2(x^*) - P_2P_1(x^*) \|}$$

con $\| P_1(x^*) \| + \| P_2(x^*) - P_2P_1(x^*) \| \leq 1$. Luego,

$$x^* \in \mathrm{co}[\ (M_1^\circ \cap B_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap B_{X^*})],$$

con lo que concluye la demostración. □

Proposición 3.2.2. *Sean M_1, M_2 M-ideales en un espacio de Banach X. Entonces,*

$$M_1^\circ + M_2^\circ = (M_1 \cap M_2)^\circ.$$

En consecuencia, $M_1 \cap M_2$ es un M-ideal en X.

Demostración. Por el Teorema de Banach–Alaoglu, $M_1^\circ \cap B_{X^*}$ y $M_2^\circ \cap B_{X^*}$ son débil*-compactos (y convexos), luego $\operatorname{co}[\,(M_1^\circ \cap B_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap B_{X^*})]$ es débil*-compacto. Por el lema anterior, $(M_1^\circ + M_2^\circ) \cap B_{X^*}$ es débil*-compacto. El Teorema de Krein-Šmulian ([14, Theorem 12.1]) nos da que $M_1^\circ + M_2^\circ$ es débil*-cerrado.

Por otro lado, es claro que $M_1^\circ + M_2^\circ \subseteq (M_1 \cap M_2)^\circ$. Vamos a probar la otra inclusión. Ya que $M_1^\circ + M_2^\circ$ es débil*-cerrado, si $x^* \notin M_1^\circ + M_2^\circ$, por el Teorema de Hahn-Banach existe x en X tal que $x^*(x) \neq 0$ y $z^*(x) = 0$, para todo z^* en $M_1^\circ + M_2^\circ$. Luego $y_1^*(x) = 0$, para todo y_1^* en M_1°, e $y_2^*(x) = 0$ para todo y_2^* en M_2°. Nuevamente, el Teorema de Hahn-Banach nos dice que $x \in M_1 \cap M_2$ y $x^*(x) \neq 0$, por lo que $x^* \notin (M_1 \cap M_2)^\circ$. Una vez probado que $(M_1 \cap M_2)^\circ = M_1^\circ + M_2^\circ$, por el Corolario 3.1.9, $M_1^\circ + M_2^\circ$ es un L-sumando, y en consecuencia, $M_1 \cap M_2$ es un M-ideal en X. □

El concepto de M-ideal en X nos permite definir una topología en el conjunto E_{X^*}, que va a ser una de las herramientas fundamentales para poder alcanzar el objetivo en este capítulo. Esta topología fue introducida por Alfsen y Effros en [4] y estudiada posteriormente por un amplio grupo de autores.

Proposición 3.2.3. *Sea X un espacio de Banach y sea*

$$\mathcal{F} = \{M^\circ \cap E_{X^*} : M \text{ es un } M\text{−ideal en } X\}.$$

Se verifica:

(i) $\emptyset,\ E_{X^*} \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es una familia en* $\mathcal{F}$, *entonces* $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}$, *entonces* $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

Demostración.

(i) Es claro, teniendo en cuenta que $\{0\}$ y X son M-ideales (triviales) de X.

(ii) Para cada λ en Λ, existe M_λ M-ideal en X, tal que $F_\lambda = M_\lambda^\circ \cap E_{X^*}$. Entonces

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ\right) \cap E_{X^*}.$$

Si $M = \overline{\text{lin}}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right)$, es claro que $M^\circ = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^\circ$, que es un L-sumando de X^* por el Teorema 3.1.11.(ii). Luego M es un M-ideal en X y $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = M^\circ \cap E_{X^*}$, lo que acaba la demostración.

(iii) Sean F_1, F_2 en $\mathcal{F}$, existen M_1 y M_2 M-ideales de X con $F_1 = M_1^\circ \cap E_{X^*}$ y $F_2 = M_2^\circ \cap E_{X^*}$. Por el Lema 3.2.1 tenemos que

$$(M_1^\circ + M_2^\circ) \cap B_{X^*} = \text{co}[\,(M_1^\circ \cap B_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap B_{X^*})],$$

lo que implica $(M_1^\circ \cap E_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap E_{X^*}) = (M_1^\circ + M_2^\circ) \cap E_{X^*}$. Por la Proposición 3.2.2, $(M_1^\circ \cap E_{X^*}) \cup (M_2^\circ \cap E_{X^*}) = (M_1 \cap M_2)^\circ \cap E_{X^*}$. Por tanto, $F_1 \cup F_2 = (M_1 \cap M_2)^\circ \cap E_{X^*}$ y concluimos que $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ ya que $M_1 \cap M_2$ es un M-ideal por la Proposición 3.2.2. $\square$

La proposición anterior nos dice que los conjuntos de la forma $M^\circ \cap E_{X^*}$, donde M es un M-ideal en X constituyen la familia de cerrados de una topología en E_{X^*}, llamada la ***topología estructura***.

Esta topología nunca es Hausdorff, puesto que si $F \subseteq E_{X^*}$ es estructuralmente cerrado, entonces $x^* \in F$, si, y sólo si, $-x^* \in F$. Por esta razón, vamos a considerar el espacio cociente $E_{X^*}/\sim$ (donde $x^* \sim y^*$ si, y sólo si, $x^* = \pm y^*$) equipado con la correspondiente topología cociente, el cual vamos a denotar por $(E_{X^*})_\sigma$.

Es decir, en $(E_{X^*})_\sigma$ se considera la más grande topología que hace continua la aplicación $\pi : E_{X^*} \to (E_{X^*})_\sigma$, dada por $\pi(x^*) = \{x^*, -x^*\}$.

Ya que la topología estructura viene definida por los subconjuntos cerrados, vamos a caracterizar los cerrados de $(E_{X^*})_\sigma$.

Proposición 3.2.4. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, $C_0 \subseteq (E_{X^*})_\sigma$ es cerrado si, y sólo si, existe C estructuralmente cerrado tal que $\pi(C) = C_0$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Si C_0 es cerrado en $(E_{X^*})_\sigma$ entonces $C = \pi^{-1}(C_0)$ es estructuralmente cerrado pues π es continua, de donde

$$\pi(C) = \pi(\pi^{-1}(C_0)) = C_0.$$

($\Leftarrow$) Si $C_0 = \pi(C)$ con C estructuralmente cerrado, entonces

$$\pi^{-1}(C_0) = \pi^{-1}(\pi(C)) = C \cup -C = C.$$

Donde hemos utilizado que los conjuntos estructuralmente cerrados son simétricos. Por tanto, $\pi^{-1}(C_0)$ es estructuralmente cerrado y, concluimos que C_0 es cerrado en $(E_{X^*})_\sigma$. $\square$

Es claro que la topología estructura en E_{X^*} es más pequeña que la topología débil*. En consecuencia, si una red en E_{X^*} converge en la topología débil* hacia un elemento de E_{X^*}, se tiene que dicha red converge en la topología estructura hacia ese elemento. En el siguiente lema, que aparece en [4], se analiza la situación en la que una red en E_{X^*} converge en la topología débil* hacia un elemento no nulo de X^*.

Por el Teorema 3.1.11, si x^* pertenece a X^*, la intersección de todos los L-sumandos débil*-cerrados de X^* que contienen a x^* es un L-sumando débil*-cerrado que, obviamente, es el más pequeño L-sumando débil*-cerrado de X^* que contiene a x^* y que notaremos por N_{x^*}.

Lema 3.2.5. [4, Lemma 3.8] *Sea $\{e_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ una red en E_{X^*} tal que $\{e_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma} \xrightarrow{w^*} x^* \in X^* \setminus \{0\}$. Entonces, para cada $e^* \in N_{x^*} \cap E_{X^*}$, $\{e_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge en la topología estructura hacia e^*.*

Demostración. Sean $e^* \in N_{x^*} \cap E_{X^*}$ y $G \subseteq E_{X^*}$, tal que G es estructuralmente abierto con $e^* \in G$. Entonces existe M subespacio cerrado de X tal que M° es L-sumando de X^* y $E_{X^*} \setminus G = M^\circ \cap E_{X^*}$. En consecuencia, $e^* \notin M^\circ$.

Si $x^* \in M^\circ$, entonces $N_{x^*} \subseteq M^\circ$ y tendríamos que $e^* \in M^\circ$, lo que es absurdo. Luego, $x^* \notin M^\circ$, es decir, $x^* \in X^* \setminus M^\circ$ que es débil*-abierto. Luego, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que para todo $\gamma \geq \gamma_0$, $e_\gamma^* \in X^* \setminus M^\circ$, esto es, $e_\gamma^* \in G$ para todo $\gamma \geq \gamma_0$, lo que concluye la demostración. $\square$

El siguiente lema es un resultado puramente técnico.

Lema 3.2.6. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, existe $I \subseteq E_{X^*}$ tal que*

$$I \cup (-I) = E_{X^*}, \qquad I \cap (-I) = \emptyset.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{A \subseteq E_{X^*} : \forall x^* \in E_{X^*}, x^* \in A \text{ ó } -x^* \in A\} \\ &= \{A \subseteq E_{X^*} : E_{X^*} = A \cup (-A)\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$ (puesto que $E_{X^*} \in \mathcal{F}$). En $\mathcal{F}$ definimos el siguiente orden: $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, $A_1 \leq A_2$ si, y sólo si, $A_2 \subseteq A_1$. Probemos que este orden es inductivo. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ una cadena. Consideremos $A_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$. Veamos que $A_0 \in \mathcal{F}$. Sea $x^* \in E_{X^*}$, puesto que para todo A en $\mathcal{C}$, A pertenece a $\mathcal{F}$, entonces o bien $x^* \in A$ o bien $-x^* \in A$. Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{A \in \mathcal{C} : x^* \in A \text{ y } -x^* \notin A\} \\ \mathcal{C}_2 &= \{A \in \mathcal{C} : -x^* \in A \text{ y } x^* \notin A\} \\ \mathcal{C}_3 &= \{A \in \mathcal{C} : x^* \in A \text{ y } -x^* \in A\}.\end{aligned}$$

Entonces, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$. Si $A \in \mathcal{C}_1$ y $B \in \mathcal{C}_2$ tenemos que, o bien

(1) $A \subseteq B$ lo que implica que $x^* \in B \in \mathcal{C}_2$. Contradicción.

o bien

(2) $B \subseteq A$ lo que implica que $-x^* \in A \in \mathcal{C}_1$. Contradicción.

Luego, o bien $\mathcal{C}_1 = \emptyset$, en cuyo caso $-x^* \in A$, para todo $A \in \mathcal{C}$, por tanto, $-x^* \in A_0$; o bien, $\mathcal{C}_2 = \emptyset$, así, $x^* \in A$, para todo $A \in \mathcal{C}$, lo que implica que $x^* \in A_0$. Lo que prueba que $E_{X^*} = A_0 \cup (-A_0)$, es decir, $A_0 \in \mathcal{F}$ y, evidentemente, $A \leq A_0$ para todo $A \in \mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene elementos maximales. Sea I un elemento maximal de $\mathcal{F}$, entonces $I \cup (-I) = E_{X^*}$. Sea x_0^* en $I \cap (-I)$, es decir, $x_0^* \in I$ y $-x_0^* \in I$. Consideremos $I_0 = I \setminus \{x_0^*\} \subsetneqq I$, es fácil comprobar que

$$E_{X^*} = I_0 \cup (-I_0)$$

en contra de la maximalidad de I. Luego, $I \cap (-I) = \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema, que tiene interés en sí mismo, va a ser crucial para poder conseguir nuestro objetivo en este capítulo, describir los espacios L_1-preduales que son nice. Nuestro resultado va en la línea de caracterizar ciertas clases distinguidas de espacios de Banach que son L_1-preduales a través de propiedades de la topología estructura. Precedentes de lo que acabamos de comentar se pueden consultar, por ejemplo, en [16, 20, 46, 54]. Creemos que nuestro resultado es original aunque existe una versión para espacios de Banach complejos debida a Rao [46, Theorem 4.6].

Teorema 3.2.7. *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$ para algún conjunto no vacío I.

(ii) $(E_{X^*})_\sigma$ es discreto.

Demostración.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Como X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$, entonces X^* es isométricamente isomorfo a $l_1(I)$ y así, $E_{X^*} = \{\pm\delta_i \ : \ i \in I\}$ donde $\delta_i(x) = x(i)$ para todo x en $c_0(I)$. Sea i_0 en I, entonces

$$M = \{x \in c_0(I) \ : \ x(i) = 0, \ \forall i \neq i_0\} = \mathbb{R}e_{i_0}.$$

Es claro que M es un M-sumando y, por tanto, es un M-ideal de $c_0(I)$. Teniendo en cuenta la anterior identificación de E_{X^*}, se tiene que

$$M^\circ \cap E_{X^*} = \{\pm\delta_i : \delta_i(e_{i_0}) = 0\} = E_{X^*} \setminus \{\pm\delta_{i_0}\}$$

y el conjunto $\{\pm\delta_{i_0}\}$ es abierto en la topología estructura en E_{X^*}. Por tanto, podemos concluir que $(E_{X^*})_\sigma$ es discreto.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* En primer lugar, probamos que $\overline{E_{X^*}}^{w^*} \subseteq E_{X^*} \cup \{0\}$. Sea $x^* \in \overline{E_{X^*}}^{w^*} \setminus \{0\}$, entonces existe $\{e^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \xrightarrow{w^*} x^*$, con $e^*_\gamma \in E_{X^*}$ para todo γ en Γ. Por el Lema 3.2.5 tenemos que $\{e^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge en la topología estructura hacia e^*, para todo $e^* \in N_{x^*} \cap E_{X^*}$.

Como la topología estructura es discreta se tiene que existe γ_0 en Γ tal que, para todo $\gamma \geq \gamma_0$, $e^*_\gamma = \pm e^*$ y como $\{e^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $x^* = \pm e^*$ y por tanto, $x^* \in E_{X^*}$.

Aplicando el lema anterior (Lema 3.2.6), tenemos que existe I tal que $E_{X^*} = I \cup (-I)$. Definimos la aplicación $T : X \to c_0(I)$ dada por

$$T(x) = J_X(x)_{|_I} \qquad \text{(con } x \in X\text{)},$$

es decir, $T(x)(e^*) = e^*(x)$ para todo $e^* \in I$ y $x \in X$. Veamos que, para $x \in X$, $T(x) \in c_0(I)$. Sea $\varepsilon > 0$ y

$$A_\varepsilon = \{e^* \in I : |e^*(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x^* \in B_{X^*} : |x^*(x)| \geq \varepsilon\} = K_\varepsilon.$$

Ya que K_ε es débil*-compacto por el Teorema de Banach–Alaoglu, se tiene que si A_ε fuese infinito tendría un punto de débil*-acumulación x^* en K_ε y

$$x^* \in \overline{A_\varepsilon}^{w^*} \subseteq \overline{E_{X^*}}^{w^*} \subseteq E_{X^*} \cup \{0\}.$$

Además, $x^* \neq 0$, pues $x^* \in K_\varepsilon$, luego $x^* \in E_{X^*}$. Por lo que, x^* sería un punto de débil*-acumulación de E_{X^*} lo que contradice que (E_{X^*}, w^*) es discreto por serlo la topología estructura. Luego A_ε es finito para todo $\varepsilon > 0$ y, por tanto, $T(x) \in c_0(I)$ para todo $x \in X$. Es claro que T es lineal, veamos que es isométrica. Para ello, sea x en X, entonces

$$\begin{aligned} \| T(x) \| &= \sup\{|e^*(x)| : e^* \in I\} \\ &= \sup\{|e^*(x)| : e^* \in I \cup (-I)\} \\ &= \sup\{|e^*(x)| : e^* \in E_{X^*}\} \\ &= \| x \| . \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se ha usado la Proposición 1.1.7.

Para probar que T es sobreyectiva, basta probar que, para cada $i \in I$, $e_i \in T(X)$. En efecto, una vez probado esto, tendríamos que

$$\overline{\text{lin}}\{e_i : i \in I\} = c_0(I) \subseteq \overline{T(X)}^{\|\cdot\|} = T(X),$$

ya que $T(X)$ es cerrado por ser T una isometría y X un espacio de Banach. Sea $i_0 = e_0^*$ en I, entonces $\{\pm e_0^*\}$ es estructuralmente abierto, luego existe M M-ideal de X tal que $M^\circ \cap E_{X^*} = E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$. Entonces

$$\overline{\text{lin}}^{w^*}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}) \subseteq M^\circ \quad \text{y} \quad e_0^* \notin M^\circ.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, existe x_0 en X tal que $e^*(x_0) = 0$, para todo $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$ y $e_0^*(x_0) = 1$. Veamos que $T(x_0) = e_{i_0}$. En primer lugar, $T(x_0)(i_0) = e_0^*(x_0) = 1$. Si $i \in I \setminus \{i_0\}$ entonces $e^* = i \neq \pm i_0 = \pm e_0^*$ y se tiene que $T(x_0)(i) = e^*(x_0) = 0$. $\square$

3.3. L_1-preduales

Estamos en condiciones ya de obtener el resultado principal de este capítulo que se obtiene fácilmente del teorema que sigue, cuyo enunciado es más general aunque aparecen unas hipótesis de tipo más técnico que aprovecharemos en el capítulo siguiente.

Teorema 3.3.1. *Sea X un espacio de Banach nice. Supongamos que el conjunto*

$$A = \{e_0^* \in E_{X^*} : \ \| e^* + \mathbb{R}e_0^* \| = 1 \text{ para todo } e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}\}$$

satisface $\overline{\operatorname{lin}(A)}^{w^*} = X^*$. Entonces X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$, para algún conjunto no vacío I.

Demostración. Sea e_0^* en A. Del Teorema 2.1.1 y la Proposición 2.1.3, obtenemos que $X^* \neq \overline{\operatorname{lin}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})}^{w^*}$. Por el Teorema de Krein–Milman, $e_0^* \notin \overline{\operatorname{lin}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})}^{w^*}$. Por el Teorema de Hahn–Banach, existe x_0 en X tal que $e_0^*(x_0) = 1$ y $e^*(x_0) = 0$ para todo $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.1.7, tenemos que $\| x_0 \| = 1$. Definimos $P : X \to X$ por $P(x) = e_0^*(x)x_0$. Es claro que $P(x_0) = x_0$, luego P es una proyección lineal y $\| P \| = 1$. Veamos que $\| I_X - P \| \leq 1$.

Sea x en X. Por la Proposición 1.1.7,

$$\| (I_X - P)(x) \| = \max\{e^*(x - P(x)) \ : \ e^* \in E_{X^*}\}.$$

Teniendo en cuenta que $e_0^*(x - P(x)) = 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \| (I_X - P)(x) \| &= \max\{e^*(x - P(x)) \ : \ e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}\} \\ &= \max\{e^*(x) \ : \ e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}\} \\ &\leq \| x \| . \end{aligned}$$

Para cualquier x en X, tenemos que

$$\| P(x) \| \leq \| x \| \ \text{ y } \ \| (I_X - P)(x) \| \leq \| x \|,$$

y entonces $\max\{\| P(x) \|, \| (I_X - P)(x) \|\} \leq \| x \|$. De nuevo por la Proposición 1.1.7

$$\begin{aligned}
\| x \| &= \max\{e^*(x) \ : \ e^* \in E_{X^*}\} \\
&= \max\{e^*(x - P(x)) + e^*(P(x)) \ : \ e^* \in E_{X^*}\} \\
&= \max\{| e_0^*(P(x)) |, e^*(x - P(x)) \ : \ e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}\} \\
&\leq \max\{\| P(x) \|, \| x - P(x) \|\}.
\end{aligned}$$

De donde se sigue que P es una M-projección en X y $P(X) = \mathbb{R}x_0$ es un M-sumando en X. Luego, $(\mathbb{R}x_0)^\circ \cap E_{X^*} = E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$ es estructuralmente cerrado. Acabamos de probar que $\{\pm e_0^*\}$ es estructuralmente abierto para cada e_0^* en A. En consecuencia A es estructuralmente abierto. Por tanto, existe un M-ideal M en X tal que $M^\circ \cap E_{X^*} = E_{X^*} \setminus A$.

Vamos a probar que $A = E_{X^*}$. Supongamos que $A \neq E_{X^*}$. El operador $T : M \to X$ definido por $T(x) = x$ satisface que $T^*(e^*) = 0$ para todo e^* en $E_{X^*} \setminus A$ y así, podemos concluir que T no es nice. Si probamos que T es un operador extremo, obtenemos una contradicción y nuestra afirmación será cierta. Primero vamos a probar que $T^*(A)$ es un subconjunto de E_{M^*}. En efecto, sean e^* en A e y^* en M^* tales que

$$\| T^*(e^*) \pm y^* \| = \| e^*_{|M} \pm y^* \| \leq 1.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, existe z^* en X^* que satisface $z^*_{|M} = y^*$. Luego

$$\| (e^* \pm z^*)_{|M} \| = \| e^* \pm z^* + M^\circ \| \leq 1.$$

Denotemos por Q a la (única) L-proyección de X^* sobre M°. Por el Lema 3.1.6, $A \subseteq \ker(Q)$. De aquí y de la Proposición 3.1.2.(i), podemos deducir que

$$\| e^* \pm z^* + M^\circ \| = \| e^* \pm (z^* - Q(z^*)) \| \leq 1.$$

Como e^* está en E_{X^*}, obtenemos que $z^* - Q(z^*) = 0$, esto es, $z^* = Q(z^*)$ es un elemento de M°, y concluimos que $y^* = z^*_{|M} = 0$. Esto prueba que $T^*(e^*)$ pertenece a E_{M^*}.

Veamos ahora que T es un operador extremo. Para tal fin, sea S en $L(M, X)$ tal que $\| T \pm S \| \leq 1$. Por tanto, para cada e^* en A se tiene que

$$\| T^*(e^*) \pm S^*(e^*) \| \leq \| T^* \pm S^* \| \leq 1.$$

Ya que acabamos de probar que $T^*(e^*) \in E_{M^*}$ para cada e^* en A, concluimos que $S^*(e^*) = 0$ para cada e^* en A. Teniendo en cuenta la débil*-continuidad de S^* y que $\overline{\mathrm{lin}(A)}^{w^*} = X^*$, obtenemos que $S^* = 0$, es decir, $S = 0$ y T es un operador extremo.

Acabamos de probar nuestra afirmación, $A = E_{X^*}$. Puesto que previamente hemos demostrado que $\{\pm e_0^*\}$ es estructuralmente abierto para cada e_0^* en A, obtenemos que $(E_{X^*})_\sigma$ es discreto. Basta con aplicar el Teorema 3.2.7 para terminar la demostración. $\square$

Observación 3.3.2. Teniendo en cuenta el Lema 3.1.6 y la Proposición 3.1.2, es claro que si X es un espacio de Banach y e_0^* en E_{X^*} verifica que $\mathbb{R}e_0^*$ es un L-sumando en X^*, entonces $\| e^* + \mathbb{R}e_0^* \| = 1$ para todo e^* en $E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$.

Haciendo uso de la observación anterior, obtenemos la siguiente consecuencia del Teorema 3.3.1.

Corolario 3.3.3. *Sea X un espacio de Banach nice tal que*

$$\overline{\mathrm{lin}\{e_0^* \in E_{X^*} \ : \ \mathbb{R}e_0^* \text{ es un } L\text{−sumando en } X^*\}}^{w^*} = X^*.$$

Entonces X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$, para algún conjunto no vacío I.

El siguiente resultado consigue el principal objetivo de describir los espacios L_1-preduales nice. Recordamos que un espacio de Banach es un ***L_1-predual*** si existe un espacio de medida (Ω, Σ, μ) tal que X^* es isométricamente isomorfo a $L_1(\Omega, \Sigma, \mu) = L_1(\mu)$.

Corolario 3.3.4. *Sea X un L_1-predual. Entonces X es nice si, y sólo si, X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$, para algún conjunto no vacío I.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.3, sólo necesitamos probar la condición suficiente. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida tal que $X^* = L_1(\mu)$. Sea e_0^* en E_{X^*}. Por el Teorema 2.3.9, existe un átomo F de (Ω, Σ, μ) con medida finita tal que $e_0^* = \pm \frac{1}{\mu(F)} \chi_F$. Consideremos $P : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ definida por $P(f) = f\chi_F$ (con f en $L_1(\mu)$). Es claro que P es una L-proyección en $L_1(\mu)$ con $P(L_1(\mu)) = L_1(\mu_F) = \mathbb{R}\chi_F$ por la Proposición 2.3.6. Es decir, $\mathbb{R}e_0^*$ es un L-sumando para cada e_0^* en E_{X^*}. Por el Teorema de Krein–Milman,

X verifica las hipótesis del Corolario 3.3.3 de donde se concluye que X es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$. $\square$

Los espacios L_1-preduales contienen clases particulares de espacios muy interesantes algunos de los cuales ya han aparecido previamente. Lazar y Lindenstrauss, en [30], muestran todas las relaciones entre clases de espacios en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(S) \arrow[r] & \mathcal{A}_0(S) \arrow[drr] & & \\
\mathcal{C}(K) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{C}_0(L) \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[u] \arrow[dr] & & \{X : X^* = L_1(\mu)\} \\
 & \mathcal{C}_\Sigma(K) \arrow[r] & \mathcal{C}_\sigma(K) \arrow[r] & G \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde

$\mathcal{C}(K)$-espacios: espacios de funciones continuas en espacios compactos y Hausdorff K;

$\mathcal{C}_0(L)$-espacios: espacios de funciones continuas en un espacio locamente compacto y Hausdorff L que se anulan en el infinito;

$\mathcal{C}_\sigma(K)$-espacios: espacios de todas las funciones continuas f en un espacio compacto y Hausdorff K que satisfacen $f(\sigma k) = -f(k)$ para todo k en K, con $\sigma : K \to K$ homeomorfismo involutivo (esto es, $\sigma^2 = Id$);

$\mathcal{C}_\Sigma(K)$-espacios: los espacios $\mathcal{C}_\sigma(K)$ en los cuales el homeomorfismo σ no tiene puntos fijos;

M-espacios: subretículos de espacios $\mathcal{C}(K)$, equivalentemente, espacios X que pueden ser representados de la siguiente forma: existe un espacio compacto y Hausdorff K y un conjunto de ternas $\{s_\alpha, t_\alpha, \lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ con Λ un conjunto de índices, s_α, t_α en K y $\lambda_\alpha \geq 0$ tales que X es el conjunto de todas las funciones de $\mathcal{C}(K)$ que satisfacen $f(s_\alpha) = \lambda_\alpha f(t_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Lambda$;

G-espacios: espacios cuya definición coincide con la descripción de los M-espacios salvo que los escalares λ_α son números reales arbitrarios;

$\mathcal{A}(S)$-espacios: espacios de las funciones afines y continuas en un símplex de Choquet S. La definición de símplex de Choquet aparecerá en el siguiente capítulo.

$\mathcal{A}_0(S)$-espacios: espacios de las funciones afines y continuas en un símplex de Choquet S que se anulan en un punto extremo fijo de S, estos espacios se conocen como los espacios símplex.

En todos los espacios de funciones consideramos la norma del supremo.

En el diagrama, $A \to B$ significa que cada clase del espacio A es también de la clase B. A partir del diagrama es posible obtener la intersección de dos clases como el origen común a ambas. Es decir,

$$\mathcal{A}_0(S) \cap G = M,$$

$$\mathcal{A}(S) \cap G = \mathcal{C}(K),$$
$$M \cap \mathcal{C}_\sigma(K) = \mathcal{C}_0(L),$$
$$M \cap \mathcal{C}_\Sigma(K) = \mathcal{C}(K).$$

Además, existen propiedades que caracterizan a algunas de estas clases entre todos los espacios de Banach cuyos duales son L_1-espacios. Sea X un espacio de Banach tal que $X^* = L_1(\mu)$, para algún μ. Entonces

(i) X es un $\mathcal{A}(S)$-espacio si, y sólo si, E_X es no vacío.

(ii) X es un $\mathcal{C}_\Sigma(K)$-espacio si, y sólo si, E_{X^*} es débil*-cerrado.

(iii) X es un $\mathcal{C}(K)$-espacio si, y sólo si, E_X es no vacío y E_{X^*} es débil*-cerrado.

(iv) X es un G-espacio si, y sólo si, $\overline{E_{X^*}}^{w^*} \subseteq [0,1]E_{X^*}$.

(v) X es un M-espacio si, y sólo si, $\overline{\partial F}^{w^*} \subseteq [0,1]\partial F$, para alguna cara maximal F de B_{X^*}.

(vi) X es un $\mathcal{C}_\sigma(K)$-espacio si, y sólo si, $\overline{E_{X^*}}^{w^*} \subseteq E_{X^*} \cup \{0\}$.

(vii) X es un $\mathcal{A}_0(S)$-espacio si, y sólo si, X puede ser ordenado de manera que X^* es un $L_1(\mu)$ como espacio de Banach ordenado.

Todas estas propiedades se encuentran en [20, 30, 31, 34, 36].

Destacamos los G-espacios, que es una clase de espacios introducida por Grothendieck en [25]. Grothendieck conjeturó la coincidencia entre los G-espacios y los L_1-preduales. Sin embargo, fue Lindenstrauss en [34, Theorem

6.9], quien probó que los G-espacios son L_1-preduales. Además, en esta última referencia ([34]) encontramos un ejemplo de un L_1-predual el cual no es un G-espacio. Ya que el conjunto de puntos extremos del espacio es no vacío, el espacio es isométricamente isomorfo a algún $\mathcal{A}(S)$.

En el capítulo 2, en el Corolario 2.2.5 se caracterizaban los espacios $\mathcal{C}_0(L)$. Ahora vamos a obtener dicho resultado como consecuencia del Corolario 3.3.4 y del Teorema de Banach-Stone clásico, damos una nueva demostración usando el hecho de que $\mathcal{C}_0(L)$ es un L_1-predual.

Corolario 3.3.5. *Sea L un espacio localmente compacto y Hausdorff. Si $\mathcal{C}_0(L)$ es nice, entonces L es discreto. En particular, si K es un espacio compacto y Hausdorff, entonces $\mathcal{C}(K)$ es nice si, y sólo si, K es finito.*

Demostración. Si $\mathcal{C}_0(L)$ es nice, como $\mathcal{C}_0(L)$ es un L_1-predual, por el Corolario 3.3.4 tenemos que $\mathcal{C}_0(L)$ es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$. Sea

$$\Phi : L \to (E_{\mathcal{C}_0(L)^*}, w^*)$$

la aplicación dada por $t \longmapsto \delta_t$. Es claro que Φ es continua e inyectiva. Como acabamos de probar, existe $T : c_0(I) \to \mathcal{C}_0(L)$ isomorfismo isométrico. Si Ψ es la restricción de T^* a $E_{\mathcal{C}_0(L)^*}$, entonces $\Psi : (E_{\mathcal{C}_0(L)^*}, w^*) \to (E_{c_0(I)^*}, w^*)$ es un homeomorfismo. La aplicación $\Psi \circ \Phi : L \to (E_{c_0(I)^*}, w^*)$ es una aplicación continua e inyectiva. Teniendo en cuenta que $(E_{c_0(I)^*}, w^*)$ es discreto, es fácil concluir que L es discreto. $\square$

Capítulo 4

Espacios de funciones afines y continuas nice

Como ya señalamos al final del capítulo anterior, $\mathcal{A}(K)$, el espacio de funciones afines y continuas en un conjunto convexo y compacto, K, de un cierto tipo (símplex de Choquet) es un L_1-predual y, por tanto, podemos aplicar el Corolario 3.3.4 para concluir que este espacio es nice si, y sólo si, $\mathcal{A}(K)$ es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$ para algún conjunto no vacío I. Además, los únicos L_1-preduales que tienen algún punto extremo en su bola unidad son del tipo $\mathcal{A}(K)$ con K un símplex de Choquet. Teniendo en cuenta que la bola unidad de $c_0(I)$ carece de puntos extremos si I es infinito, podemos afirmar que, si K es símplex de Choquet, $\mathcal{A}(K)$ es nice si, y sólo si, es isométricamente isomorfo a l_∞^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

El objetivo de este capítulo es caracterizar los convexos y compactos K tal que $\mathcal{A}(K)$ es nice, sin presuponer que K es un símplex de Choquet. Para ello, la herramienta principal será el Corolario 3.3.3. La primera tarea es estudiar todos los conceptos necesarios en el ámbito de los espacios $\mathcal{A}(K)$. El principal resultado, debido a Perdrizet, es la caracterización de los L-sumandos de $\mathcal{A}(K)^*$, lo que nos lleva a describir los M-ideales de $\mathcal{A}(K)$ y la topología estructura de $\mathcal{A}(K)$ en términos de K. Una vez realizada esta labor de traducción, para poder aplicar el Corolario 3.3.3 a los espacios $\mathcal{A}(K)$ se requiere imponer a K una condición adicional que se verifica automáticamente en el caso de que K sea un símplex de Choquet. Con esta condición adicional sobre K los espacios $\mathcal{A}(K)$ que son nice se corresponden con aquellos en que K es un símplex con un número finito de puntos extremos.

Finalizamos el capítulo estudiando los espacios $\mathcal{A}_0(K)$, que también aparecieron en el capítulo anterior como una clase particular de L_1-preduales si K es un símplex y que contienen como clase a los espacios $\mathcal{A}(K)$. Para $\mathcal{A}_0(K)$ seguimos las mismas pautas que para $\mathcal{A}(K)$ con las complejidades técnicas correspondientes. Con las mismas condiciones citadas sobre K probamos que $\mathcal{A}_0(K)$ es nice si, y sólo si, K es afínmente homeomorfo a la cara positiva de la bola unidad de $l_1(I)$ para algún conjunto no vacío I.

4.1. El espacio $\mathcal{A}(K)$ y su dual. Caras directas de K

Comenzamos presentando el ambiente en el que vamos a trabajar. Sea K un subconjunto convexo y compacto de algún espacio (real) localmente convexo y Hausdorff E. Denotaremos por $\mathcal{A}(K)$ al espacio de todas las funciones (reales) afines y continuas en K con la norma uniforme.

Proposición 4.1.1. *Sea K un conjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo y Hausdorff E. Entonces, la aplicación $\delta : t \longmapsto \delta_t$ de K en $\mathcal{A}(K)^*$ con su topología débil* es un homeomorfismo afín de K sobre $\delta(K)$.*

Demostración. Tenemos que comprobar que δ es inyectiva. Sean s, t en K tales que $s \neq t$. Como K es subconjunto de un espacio localmente convexo y Hausdorff E, el Teorema de Hahn-Banach nos da la existencia de x^* en E^* tal que $x^*(s) \neq x^*(t)$ y $f = x^*_{|K} \in \mathcal{A}(K)$. Luego $\delta_t(f) = x^*(t) \neq x^*(s) = \delta_s(f)$ y por tanto, δ es inyectiva. De la definición de la topología débil*, se tiene que δ es continua. Por ser K compacto, δ es un homeomorfismo de K sobre $\delta(K)$. □

Este resultado nos permite identificar K con $\delta(K)$, como subconjunto convexo y débil*-compacto de $\mathcal{A}(K)^*$ y notamos $\delta(K) \equiv K$. A continuación, mostramos una serie de propiedades, en las que se van a describir la bola unidad de $\mathcal{A}(K)^*$ y el conjunto de sus puntos extremos.

Proposición 4.1.2. *Sea K un conjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo y Hausdorff E. Entonces, se verifica:*

(i) $B_{\mathcal{A}(K)^*} = \mathrm{co}(K \cup -K)$.

(ii) $K = \{x^* \in B_{\mathcal{A}(K)^*} : x^*(1) = 1\}$.

(iii) $E_{\mathcal{A}(K)^*} = \partial K \cup -\partial K$.

Demostración.

(i) En la dualidad $(\mathcal{A}(K)^*, \mathcal{A}(K))$ tenemos que

$$\begin{aligned} K^\circ &= \{f \in \mathcal{A}(K) : |f(t)| \leq 1, \quad \forall t \in K\} \\ &= B_{\mathcal{A}(K)}. \end{aligned}$$

Luego, $K^{\circ\circ} = B^{\circ}_{\mathcal{A}(K)} = B_{\mathcal{A}(K)^*}$. Por el Teorema del Bipolar ([14, Theorem 1.8]), obtenemos que $B_{\mathcal{A}(K)^*} = \overline{\mathrm{co}}^{w^*}(K \cup -K)$. Como K es convexo y débil*-compacto, podemos concluir que $B_{\mathcal{A}(K)^*} = \mathrm{co}(K \cup -K)$.

(ii) Notemos $A = \{y^* \in B_{\mathcal{A}(K)^*} : x^*(1) = 1\}$. Tomemos $x^* \in A$, entonces existen $\alpha \in [0,1]$ y $s, t \in K$ tales que $x^* = \alpha\delta_s - (1-\alpha)\delta_t$. Como x^* es un elemento de A entonces

$$x^*(1) = 1 = \alpha + \alpha - 1,$$

luego $\alpha = 1$ y, por tanto, $x^* = \delta_s \in K$. Luego $A \subseteq K$ y la inclusión $K \subseteq A$ es clara.

(iii) Por (i), tenemos que $B_{\mathcal{A}(K)^*} = \mathrm{co}(K \cup -K)$. Por el Teorema de Krein–Milman revertido (Teorema 1.1.5),

$$E_{\mathcal{A}(K)^*} \subseteq \overline{K \cup -K}^{w^*} = K \cup -K.$$

Luego, $E_{\mathcal{A}(K)^*} \subseteq \partial K \cup -\partial K$.

Veamos la otra inclusión. Sean $t \in \partial K$ y $x^*, y^* \in B_{\mathcal{A}(K)^*}$ con $\delta_t = \frac{1}{2}(x^* + y^*)$, entonces

$$1 = \frac{1}{2}(x^*(1) + y^*(1)),$$

de donde $1 = x^*(1) = y^*(1)$. Por (iii), $x^* = \delta_x$ e $y^* = \delta_y$ con $x, y \in K$. Así, $t = \frac{1}{2}(x+y)$ pero como t es un punto extremo de K, tenemos que $t = x = y$. Por lo que, $x^* = y^*$ y podemos concluir que δ_t pertenece a $E_{\mathcal{A}(K)^*}$. □

Una vez descritas las propiedades generales de $\mathcal{A}(K)^*$, observamos que como K es convexo, el cono generado por K (es decir, los múltiplos positivos de K) genera un orden en $\mathcal{A}(K)^*$. Pero sólo vamos a necesitar los elementos positivos que presentamos a continuación.

Definición 4.1.3. Sea x^* en $\mathcal{A}(K)^*$, se dice que x^* es un ***elemento positivo***, $x^* \geq 0$, si x^* pertenece a $\mathbb{R}^+_0 K$.

Destacamos las siguientes propiedades de los elementos positivos de $\mathcal{A}(K)^*$.

Proposición 4.1.4. *(i) Sea x^* en $\mathcal{A}(K)^*$, entonces $x^* \geq 0$ si, y sólo si, $\| x^* \|= x^*(1)$.*

(ii) Sean $x^* \geq 0$ e $y^* \geq 0$, entonces para todo α, $\beta \geq 0$ se tiene que $\| \alpha x^* + \beta y^* \|= \alpha \| x^* \| +\beta \| y^* \|$.

(iii) Si x^* es un elemento de $B_{\mathcal{A}(K)^*}$, entonces existen $x_1^* \geq 0$, $x_2^* \geq 0$ tal que $x^* = x_1^* - x_2^*$ y $\| x^* \|=\| x_1^* \| + \| x_2^* \|$.

Demostración.

(i) Si $x^* \geq 0$, por definición tenemos que $x^* \in \mathbb{R}_0^+ K$, esto es, $x^* = \lambda\delta_t$ con $\lambda \geq 0$ y $t \in K$. Por lo que $\| x^* \|=\| \lambda\delta_t \|= \lambda = x^*(1)$.

Si $\| x^* \|= x^*(1) \neq 0$, entoces $\frac{1}{x^*(1)}x^* \in B_{\mathcal{A}(K)^*}$ y $\frac{1}{x^*(1)}x^*(1) = 1$. Por la Proposición 4.1.2.(ii), existe t en K tal que $\frac{1}{x^*(1)}x^* = \delta_t$ lo que acaba la demostración.

(ii) Teniendo en cuenta que x^* e y^* son elementos positivos, se tiene que

$$\| \alpha x^* + \beta y^* \| \geq (\alpha x^* + \beta y^*)(1) = \alpha x^*(1) + \beta y^*(1) = \alpha \| x^* \| + \beta \| y^* \| .$$

(iii) Podemos suponer que $x^* \neq 0$, entonces $\frac{x^*}{\|x^*\|} \in B_{\mathcal{A}(K)^*}$. Por la Proposición 4.1.2.(i), existen α en $[0, 1]$ y x, y en K tales que

$$\frac{x^*}{\| x^* \|} = \alpha\delta_x - (1 - \alpha)\delta_y$$

de donde

$$x^* = \alpha \| x^* \| \delta_x - (1 - \alpha) \| x^* \| \delta_y.$$

Basta considerar $x_1^* = \alpha \| x^* \| \delta_x$ y $x_2^* = (1-\alpha) \| x^* \| \delta_y$ para concluir la demostración. $\square$

El siguiente paso es introducir una serie de conceptos y propiedades haciendo uso de las nociones de cara y cara maximal dadas en el capítulo 2 (Definición 2.4.5), pues traduciremos toda la información de los resultados obtenidos en términos de éstos.

La principal referencia para lo sucesivo es [1]. La siguiente proposición recoge unas propiedades que nos serán de gran utilidad.

Proposición 4.1.5. *Sea K un conjunto convexo y compacto. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *K es una cara de $B_{\mathcal{A}(K)^*}$.*

(ii) *Si F es una cara de K, entonces F es una cara de $B_{\mathcal{A}(K)^*}$.*

(iii) *Si F es una cara de K, entonces $\operatorname{lin}(F) \cap K = F$.*

Demostración.

(i) Si $x^*, y^* \in B_{\mathcal{A}(K)^*}$ y $\alpha \in]0,1[$ con $\alpha x^* + (1-\alpha)y^* \in K$, entonces $\alpha x^*(1) + (1-\alpha)y^*(1) = 1$, por tanto $x^*(1) = y^*(1) = 1$ y por la Proposición 4.1.2.(ii), $x^*, y^* \in K$.

(ii) De comprobación inmediata a partir de (i).

(iii) Es claro que $F \subseteq \operatorname{lin}(F) \cap K$. Para la otra inclusión, si $x \in \operatorname{lin}(F) \cap K$ entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ e $y_1, y_2 \in F$ tales que $x = \alpha y_1 - \beta y_2$. De manera que $x(1) = 1 = \alpha y_1(1) - \beta y_2(1) = \alpha - \beta$, de donde $\alpha = 1 + \beta$ y así,

$$y_1 = \frac{1}{1+\beta} x + \frac{\beta}{1+\beta} y_2.$$

Si $\beta = 0$, entonces $x = y_1 \in F$. Si $\beta > 0$, entonces por ser F cara se tiene que $x \in F$. Por tanto, $\operatorname{lin}(F) \cap K = F$.

□

Definición 4.1.6. Sea $A \subseteq K$, el ***conjunto complementario*** A^c es la unión de todas las caras de K disjuntas de A.

En general, A^c no es convexo (basta pensar en el conjunto complementario de un vértice de un cuadrado del plano). El siguiente resultado muestra que la convexidad es la única condición que le falta a A^c para ser una cara.

Proposición 4.1.7. *Sea $A \subseteq K$ tal que A^c es convexo, entonces A^c es una cara de K.*

Demostración. Podemos suponer que A^c es no vacío. Sean $\alpha \in]0,1[$ y $x, y \in K$ tales que $\alpha x + (1-\alpha)y \in A^c$. Existe G una cara de K tal que $G \cap A = \emptyset$ y $\alpha x + (1-\alpha)y \in G$. Por ser G una cara de K, se tiene que $x, y \in G$ y, por tanto, x, $y \in A^c$. □

La denominación de conjunto complementario queda justificada por el siguiente resultado.

Proposición 4.1.8. ([1, Proposition II.6.5]) *Sean K un conjunto convexo y compacto. Si F es una cara cerrada de K, entonces $K = \mathrm{co}(F \cup F^c)$.*

Presentamos ahora la noción central de este capítulo, que fue dada por Alfsen y Andersen, en 1969 ([2]).

Definición 4.1.9. Sea K un conjunto convexo y compacto. Una cara F de K se dice que es una ***cara directa*** si F^c es convexo y cada punto en $K \setminus (F \cup F^c)$ puede ser representado de manera única como una combinación convexa de un punto de F y otro punto de F^c.

El término cara directa es la traducción del francés "face directe" que se corresponde con el término inglés "split face".

El conjunto vacío $\emptyset$ y todo el conjunto K son caras directas (impropias).

En la siguiente proposición recogemos las propiedades de cara directa que necesitaremos para conseguir nuestro objetivo en este capítulo.

Proposición 4.1.10. *Sea K un conjunto convexo y compacto.*

(i) Si F es una cara directa de K, entonces $(F^c)^c = F$ y, por tanto, F^c es una cara directa.

(ii) Si F es una cara directa de K, entonces $\mathcal{A}(K)^* = \mathrm{lin}(F) \oplus \mathrm{lin}(F^c)$.

Demostración.

(i) Tenemos que $F \cap F^c = \emptyset$, y por ser F cara, $F \subseteq (F^c)^c$.

Supongamos que existe $x \in (F^c)^c \setminus F$, entonces existe G una cara de K con $G \cap F^c = \emptyset$ tal que $x \in G$. Por ser F una cara directa, existe $\alpha \in]0,1[$ de manera que $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ con $y \in F$ y $z \in F^c$, ya que x no pertenece a $F \cup F^c$. Pero $x \in G$ y G es una cara, por tanto $y, z \in G$, lo que contradice el hecho de que $G \cap F^c = \emptyset$.

(ii) Como $K = \text{co}(F \cup F^c)$, se obtiene $\text{lin}(F) + \text{lin}(F^c) = \mathcal{A}(K)^*$ por la Proposición 4.1.2. Sea $x^* \in \text{lin}(F) \cap \text{lin}(F^c)$, entonces existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en $\mathbb{R}_0^+$, x_1, x_2 en F e y_1, y_2 en F^c tales que $x^* = \alpha x_1 - \beta x_2 = \gamma y_1 - \delta y_2$, o lo que es lo mismo,

$$\alpha x_1 + \delta y_2 = \beta x_2 + \gamma y_1$$

de donde se tienes que $\alpha + \delta = \beta + \gamma$. Distingamos los siguientes casos:

1) Si $\alpha + \delta = 0$, se tiene que $\alpha = 0 = \delta = \beta = \gamma$ y entonces $x^* = 0$.

2) Si $\alpha + \delta > 0$ y $\alpha = 0$ entonces $\delta = \beta + \gamma > 0$ y podemos escribir

$$y_2 = \frac{\beta}{\beta + \gamma} x_2 + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} y_1 \quad \in \ \text{co}(F \cup F^c).$$

Como la descomposición es única, ha de ser $\beta = 0$. (Si $\beta > 0$ y $\gamma = 0$ entonces $y_2 = x_2 \in F \cap F^c$; si $\beta > 0$ y $\gamma > 0$, por ser F^c una cara, se tiene que $x_2 \in F \cap F^c$). Luego, $x^* = 0$.

3) Si $\alpha + \delta > 0$ y $\delta = 0$ entonces $\alpha = \beta + \gamma$ y se puede escribir

$$x_1 = \frac{\beta}{\beta + \gamma} x_2 + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} y_1$$

entonces obtenemos que $\gamma = 0$ y de ahí, $x^* = 0$.

4) Si $\alpha + \delta > 0$ y $\alpha > 0$, $\delta > 0$, tenemos que

$$\frac{\alpha}{\alpha + \delta} x_1 + \frac{\delta}{\alpha + \delta} y_2 = \frac{\beta}{\beta + \gamma} x_2 + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} y_1 \ \in \ \text{co}(F \cup F^c).$$

Ya que F es una cara directa, la descomposición es única, por lo que

$$x_1 = x_2$$

y

$$\frac{\alpha}{\alpha + \delta} = \frac{\beta}{\beta + \gamma} \Rightarrow \alpha = \beta$$

luego, $x^* = 0$.

Por tanto, $\mathcal{A}(K)^* = \text{lin}(F) \oplus \text{lin}(F^c)$. □

Una vez que tenemos el concepto de cara directa podemos introducir la noción de símplex.

Definición 4.1.11. Un conjunto convexo y compacto se dice que es un ***símplex de Choquet*** (o brevemente símplex) si toda cara cerrada es una cara directa.

Esta definición no es la original dada por Choquet en [15] sino una caracterización dada por Ellis en [18]. Presentamos a continuación un tipo particular de símplices que nos aparecerán en el resultado principal del capítulo.

Proposición 4.1.12. *Sea I un conjunto no vacío. Consideremos*

$$B^+_{l_1(I)} = \{x \in B_{l_1(I)} : x(i) \geq 0 \quad \forall i \in I\}$$

dotado de la topología débil en $l_1(I)$ visto como dual de $c_0(I)$. Entonces $K = B^+_{l_1(I)}$ es un símplex.*

Demostración. Tenemos que K es convexo y débil*-compacto, por el Teorema de Banach-Alaoglu. Es fácil comprobar que $\partial K = \{e_i : i \in I\} \cup \{0\}$. Veamos que toda cara cerrada de K es directa.

Sea F una cara cerrada de K ($F \neq K$), entonces

$$F = \overline{\text{co}}^{w^*}(\partial F) = \overline{\text{co}}^{w^*}(F \cap \partial K).$$

Sea $A = \{i \in I : e_i \in F\}$, distinguimos dos casos.

1) Si $0 \notin F$ (en particular, A es finito), entonces $F \cap \partial K = \{e_i : i \in A\}$ y $F = \text{co}\{e_i : i \in A\} = \{x \in K : \sum_{i \in A} x(i) = 1\}$. Veamos que

$$F^c = \{x \in K : x(i) = 0 \quad \forall i \in A\} = G.$$

En primer lugar, G es una cara de K y $G \cap F = \emptyset$, luego $G \subseteq F^c$.

Sea x en $K \setminus G$, entonces existe i_0 en A tal que $x(i_0) \neq 0$.

Si $\sum_{i \in A} x(i) = 1$, entones x es un punto de F y, por tanto, $x \notin F^c$.

Si $0 < \sum_{i \in A} x(i) < 1$, definimos $y(i) = \begin{cases} \frac{x(i)}{1-x(i_0)} & \text{si} \quad i \neq i_0 \\ 0 & \text{si} \quad i = i_0 \end{cases}$ entonces $y \in K$ con

$$x = x(i_0)e_{i_0} + (1 - x(i_0))y \qquad (0 < x(i_0) < 1).$$

Luego, si F_0 es una cara de K tal que $x \in F_0$, entonces $e_{i_0} \in F_0 \cap F$, es decir, si F_0 es una cara de K tal que $F_0 \cap F = \emptyset$, entonces $x \notin F_0$, y esto equivale a $x \notin F^c$. Por tanto, $F^c \subseteq G$.

2) Si $0 \in F$, tenemos que $F \cap \partial K = \{e_i : i \in A\} \cup \{0\}$ y $F = \overline{\text{co}}^{w^*}(\{e_i : i \in A\} \cup \{0\}) = \{x \in K : x(i) = 0 \;\; \forall i \in I \setminus A\}$. Veamos que
$$F^c = \{x \in K : \sum_{i \in I \setminus A} x(i) = 1\} = G.$$
Primero, G es una cara de K y $G \cap F = \emptyset$, luego $G \subseteq F^c$.

Sea $x \notin G$ (esto es, $x \notin F$). Si $x \neq 0$, entonces $0 < \alpha = \sum_{i \in I \setminus A} x(i) < 1$.

Definimos
$$y(i) = \begin{cases} \frac{x(i)}{\alpha} & \text{si} \quad i \in I \setminus A \\ 0 & \text{si} \quad i \in A \end{cases}$$
$$z(i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \in I \setminus A \\ \frac{x(i)}{1-\alpha} & \text{si} \quad i \in A \end{cases}$$
entonces $z \in F$, $y \in G$ y $x = \alpha y + (1-\alpha) z$ con $0 < \alpha < 1$. Si F_0 es una cara de K tal que $x \in F_0$, entonces $z \in F_0$, luego $F \cap F_0 \neq \emptyset$ y, por tanto, $x \notin F^c$. Si $x = 0$, es claro que $x \notin F^c$.

En el caso 1), tenemos
$$F = \{x \in K : \sum_{i \in A} x(i) = 1\} \;\; \text{y} \;\; F^c = \{x \in K : x(i) = 0 \;\; \forall i \in A\}.$$
Dado x en $K \setminus (F \cup F^c)$, entonces podemos escribir
$$x = \alpha y + (1-\alpha) z, \quad \text{con} \;\; \alpha \in]0,1[, y \in F, z \in F^c$$
siendo $\alpha = \sum_{i \in A} x(i)$ (único), $y(i) = \begin{cases} \frac{x(i)}{\alpha} & \text{si} \quad i \in A \\ 0 & \text{si} \quad i \in I \setminus A \end{cases}$ y
$z(i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \in A \\ \frac{x(i)}{1-\alpha} & \text{si} \quad i \in I \setminus A \end{cases}$.

En el caso 2), tenemos
$$F = \{x \in K : x(i) = 0 \;\; \forall i \in I \setminus A\} \;\; \text{y} \;\; F^c = \{x \in K : \sum_{i \in I \setminus A} x(i) = 1\}.$$

Dado x en $K \setminus (F \cup F^c)$, entonces podemos escribir

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z, \quad \text{con } \alpha \in]0,1[, y \in F, z \in F^c \ \text{(únicos)}$$

siendo $0 < 1-\alpha = \displaystyle\sum_{i \in I \setminus A} x(i) < 1$, $y(i) = \begin{cases} \frac{x(i)}{\alpha} & \text{si} \quad i \in A \\ 0 & \text{si} \quad i \in I \setminus A \end{cases}$ y

$z(i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \in A \\ \frac{x(i)}{1-\alpha} & \text{si} \quad i \in I \setminus A \end{cases}$. □

En lo sucesivo, el hecho de que $B^+_{l_1(I)}$ con la topología débil* es un espacio símplex, va a ser importante y de gran utilidad.

4.2. M-ideales en $\mathcal{A}(K)$. Topología estructura

En el siguiente teorema describimos los L-sumandos de $\mathcal{A}(K)^*$. Este resultado será fundamental para poder aplicar el Corolario 3.3.3 a los espacios $\mathcal{A}(K)$. También lo utilizaremos para describir los M-ideales de $\mathcal{A}(K)$ y la topología estructura en $E_{\mathcal{A}(K)^*}$. El resultado se debe a Perdrizet ([45]) cuya demostración, esencialmente, es la que aparece a continuación.

Teorema 4.2.1. *Sea K un conjunto convexo y compacto en un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces, $J \subseteq \mathcal{A}(K)^*$ es un L-sumando de $\mathcal{A}(K)^*$ si, y sólo si, existe una cara directa F de K tal que $J = \mathrm{lin}(F)$.*

Además, si F es cara directa de K, se tiene que $\mathrm{lin}(F)$ es débil-cerrado si, y sólo si, F es cerrado en K.*

Demostración. Sea J un L-sumando de $\mathcal{A}(K)^*$ y P la L-proyección en $\mathcal{A}(K)^*$ con $P(\mathcal{A}(K)^*) = J$ y $\ker(P) = N$.

Es claro que $F = J \cap K$ es convexo. Veamos que F es una cara de K. Supongamos que existen $t \in]0,1[$ e $y, z \in K$ tales que $x = ty + (1-t)z \in F$. Entonces

$$x = P(x) = tP(y) + (1-t)P(z)$$

luego,

$$\| x \| = 1 \leq t \| P(y) \| + (1-t) \| P(z) \| \leq t \| y \| + (1-t) \| z \| = 1$$

de donde se obtiene

$$\| P(y) \| = \| y \| = \| P(y) \| + \| y - P(y) \|,$$

y por tanto, $y \in J \cap K = F$. Análogamente, $z \in J \cap K = F$. Esto es, F es una cara de K.

Veamos que la cara complementaria de F es $F^c = N \cap K$. Ya que N es un L-sumando, por lo que acabamos de probar, $N \cap K$ es una cara de K y

$$N \cap K \cap F = N \cap J \cap K = \{0\} \cap K = \emptyset.$$

Luego, $N \cap K \subseteq F^c$.

Comprobemos que se verifica la otra inclusión. Sea G una cara de K con $F \cap G = \emptyset$. Si $x \in G \subseteq K$, entonces $x \notin F$, por lo que $x \notin J$ y esto implica que $P(x) \neq x$. Si suponemos que $P(x) \neq 0$, entonces

$$x = \| P(x) \| \frac{P(x)}{\| P(x) \|} + \| x - P(x) \| \frac{x - P(x)}{\| x - P(x) \|}$$

y

$$\| P(x) \| + \| x - P(x) \| = \| x \| = 1.$$

Por ser G una cara de K, es una cara de $B_{\mathcal{A}(K)^*}$ por la Proposción 4.1.5.(ii), luego

$$\frac{P(x)}{\| P(x) \|} \in G \subseteq K \quad \text{y} \quad \frac{P(x)}{\| P(x) \|} \in J \cap K = F$$

lo cual es una contradicción, ya que $F \cap G = \emptyset$. Luego $P(x) = 0$, es decir, $G \subseteq N \cap K$, y por tanto, $F^c \subseteq N \cap K$.

Tenemos definidas ya $F = J \cap K$ y su cara complementaria $F^c = N \cap K$.

Sea $x \in K \setminus (F \cup F^c)$, entonces $P(x) \neq x$ y $P(x) \neq 0$ con $\| P(x) \| + \| x - P(x) \| = \| x \| = 1$. De donde,

$$x = \| P(x) \| \frac{P(x)}{\| P(x) \|} + \| x - P(x) \| \frac{x - P(x)}{\| x - P(x) \|}.$$

Como K es una cara de $B_{\mathcal{A}(K)^*}$ (Proposición 4.1.5), entonces se tiene que

$$\frac{P(x)}{\| P(x) \|}, \frac{x - P(x)}{\| x - P(x) \|} \in K$$

luego,

$$\frac{P(x)}{\| P(x) \|} \in J \cap K = F \quad \text{y} \quad \frac{x - P(x)}{\| x - P(x) \|} \in \ker(P) \cap K = F^c.$$

Luego, $K = \mathrm{co}(F \cup F^c)$.

Veamos que la descomposición es única. Si $x \in K \setminus (F \cup F^c)$, existen $t \in]0, 1[$, $y \in F$ y $z \in F^c$ con $x = ty + (1 - t)z$. Entonces $P(x) = ty$, luego

$$t = \| P(x) \|, \quad y = \frac{P(x)}{\| P(x) \|}, \quad z = \frac{x - ty}{1 - t} = \frac{x - P(x)}{1 - \| P(x) \|}.$$

Además, es claro que $\mathrm{lin}(F) = \mathrm{lin}(J \cap K) \subseteq J$. Para la otra inclusión,

$$J \subseteq \mathcal{A}(K)^* = \mathrm{lin}(K) = \mathrm{lin}(F \cup F^c)$$

entonces,

$$J = P(J) \subseteq \mathrm{lin}(P(F \cup F^c)) = \mathrm{lin}(F).$$

Por tanto, $J = \mathrm{lin}(F)$.

Supongamos ahora que F es una cara directa de K. Entonces $\mathcal{A}(K)^* = \mathrm{lin}(F) \oplus \mathrm{lin}(F^c)$ por la Proposición 4.1.10.(ii).

Sea P la proyección lineal de $\mathcal{A}(K)^*$ con $P(\mathcal{A}(K)^*) = \mathrm{lin}(F)$ y $\ker(P) = \mathrm{lin}(F^c)$. Si x es un elemento de K, entonces existen $t \in [0,1]$, $y \in F$ y $z \in F^c$ tales que

$$x = ty + (1-t)z$$

obtenemos

$$P(x) = ty \geq 0$$

$$x - P(x) = (1-t)z \geq 0.$$

De donde se concluye

$$P(x^*) \geq 0, \quad x^* - P(x^*) \geq 0$$

para cualquier $x^* \geq 0$.

Veamos que P es una L-proyección.

Sea x^* en $\mathcal{A}(K)^*$. Por la Proposición 4.1.4.(iii), existen $x_1^*, x_2^* \in \mathcal{A}(K)^*$ tales que $x^* = x_1^* - x_2^*$, $x_1^* \geq 0$, $x_2^* \geq 0$ con $\| x^* \| = \| x_1^* \| + \| x_2^* \|$. Entonces

$$\begin{aligned}
\| P(x^*) \| + \| x^* - P(x^*) \| &\leq \| P(x_1^*) \| + \| x_1^* - P(x_1^*) \| + \\
&\qquad + \| P(x_2^*) \| + \| x_2^* - P(x_2^*) \| \\
&= \| x_1^* \| + \| x_2^* \| \\
&= \| x^* \| \\
&\leq \| P(x^*) \| + \| x^* - P(x^*) \|
\end{aligned}$$

en donde se utiliza que $P(x_i^*) \geq 0$ y $x_i^* - P(x_i^*) \geq 0$ con $i = 1, 2$, y la Proposición 4.1.4.(ii). Por tanto, P es una L-proyección con imagen $\mathrm{lin}(F)$.

Por último, nos queda probar el "además"del teorema.

Sea F una cara directa de K tal que $\text{lin}(F)$ es débil*-cerrado, entonces por la Proposición 4.1.5.(iii), $F = \text{lin}(F) \cap K$ es cerrado en K. Recíprocamente, si F es cerrado en K entonces se tiene que $\text{co}(F \cup -F)$ es débil*-cerrado (por ser F convexo y compacto en K). Por el Teorema de Banach–Dieudonneé, $\text{lin}(F)$ es débil*-cerrado si $\text{lin}(F) \cap B_{\mathcal{A}(K)^*}$ es débil*-cerrado.

Veamos que $\text{lin}(F) \cap B_{\mathcal{A}(K)^*} = \text{co}(F \cup -F)$.
Es claro que $\text{co}(F \cup -F) \subseteq \text{lin}(F) \cap B_{\mathcal{A}(K)^*}$. Sea $x^* \in \text{lin}(F) \cap B_{\mathcal{A}(K)^*}$, por la Proposición 4.1.4.(iii), existen $x_1^* \geq 0$, $x_2^* \geq 0$ tales que $x^* = x_1^* - x_2^*$ y $\| x^* \| = \| x_1^* \| + \| x_2^* \|$. Por lo ya demostrado, existe P una L-proyección en $\mathcal{A}(K)^*$ con imagen $\text{lin}(F)$. Como $x^* = P(x^*) = P(x_1^*) - P(x_2^*)$, se tiene

$$\| x^* \| \leq \| P(x_1^*) \| + \| P(x_2^*) \| \leq \| x_1^* \| + \| x_2^* \| = \| x^* \|$$

luego,

$$\| x_i^* \| = \| P(x_i^*) \| = \| P(x_i^*) \| + \| x_i^* - P(x_i^*) \| \qquad (i = 1, 2)$$

por lo tanto,

$$x_i^* = P(x_i^*) \in \text{lin}(F) \quad (i = 1, 2) \qquad \text{y} \quad x_i^* \geq 0.$$

Si $x_i^* \neq 0$ $(i = 1, 2)$, se tiene que $\frac{x_i^*}{\|x_i^*\|} \in \text{lin}(F) \cap K = F$. Entonces se puede escribir

$$x^* = \| x_1^* \| \left(\frac{x_1^*}{\| x_1^* \|} \right) + \| x_2^* \| \left(-\frac{x_2^*}{\| x_2^* \|} \right) \in \text{co}(F \cup -F)$$

ya que $\| x_1^* \| + \| x_2^* \| = \| x^* \| \leq 1$.

Si $x_1^* = 0$ ó $x_2^* = 0$, entonces tenemos tres situaciones distintas:

- Si $x_1^* = x_2^* = 0$, se tiene que $x^* = 0 \in \text{co}(F \cup -F)$.
- Si $x_1^* = 0$ y $x_2^* \neq 0$, entonces $x^* = \| x_2^* \| \, (-\frac{x_2^*}{\|x_2^*\|}) \in \text{co}(F \cup -F)$, ya que $\| x_2^* \| \leq 1$.
- Si $x_1^* \neq 0$ y $x_2^* = 0$, obtenemos que $x^* = \| x_1^* \| \, (\frac{x_1^*}{\|x_1^*\|}) \in \text{co}(F \cup -F)$, puesto que $\| x_1^* \| \leq 1$. $\square$

Este teorema nos va a permitir escribir toda la información obtenida en los anteriores capítulos en el ámbito de $\mathcal{A}(K)$ y como consecuencia de éste obtenemos el siguiente corolario, que nos especifica cuáles son los M-ideales de $\mathcal{A}(K)$.

Corolario 4.2.2. *Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{A}(K)$. Entonces, M es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$ si, y sólo si, existe F cara directa cerrada de K tal que $M = \{f \in \mathcal{A}(K) : f(F) = \{0\}\}$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea M un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$, entonces M° es un L-sumando débil*-cerrado de $\mathcal{A}(K)^*$. Por el teorema anterior, existe F una cara directa cerrada tal que $M^\circ = \operatorname{lin}(F)$. En la dualidad $(\mathcal{A}(K), \mathcal{A}(K)^*)$ se verifica

$$M = M^{\circ\circ} = \operatorname{lin}(F)^\circ = \{f \in \mathcal{A}(K) : f(F) = \{0\}\}.$$

($\Leftarrow$) Sea F una cara directa cerrada, entonces $\operatorname{lin}(F)$ es un L-sumando débil*-cerrado de $\mathcal{A}(K)^*$ y $M = \operatorname{lin}(F)^\circ$. De donde

$$M^\circ = \operatorname{lin}(F)^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{lin}(F)}^{w^*} = \operatorname{lin}(F)$$

entonces, M° es un L-sumando y por tanto, M es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$.

□

El siguiente resultado es otra consecuencia del teorema anterior, en el que se va a describir la topología estructura en los puntos extremos del dual de $\mathcal{A}(K)$. La topología estructura en el conjunto de puntos extremos del dual de un espacio de Banach se definió en la Proposición 3.2.3 en términos de los M-ideales de dicho espacio.

Corolario 4.2.3. *Sea K un conjunto convexo y compacto. Entonces un subconjunto A de $E_{\mathcal{A}(K)^*}$ es estructuralmente cerrado si, y sólo si, existe F cara directa cerrada de K tal que $A = \partial F \cup -\partial F$.*

Demostración. $A \subseteq E_{\mathcal{A}(K)^*}$ es estructuralmente cerrado si, y sólo si, existe J un L-sumando débil*-cerrado en $\mathcal{A}(K)^*$ tal que

$$A = J \cap E_{\mathcal{A}(K)^*} = J \cap (\partial K \cup -\partial K).$$

Aplicando el teorema anterior, tenemos que A es estructuralmente cerrado si, y sólo si, existe F cara directa cerrada de K tal que

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{lin}(F) \cap (\partial K \cup -\partial K) \\ &= \operatorname{lin}(F) \cap \partial K \cup \operatorname{lin}(F) \cap (-\partial K) \\ &= F \cap \partial K \cup (-F) \cap (-\partial K) \\ &= \partial F \cup (-\partial F). \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado que $\operatorname{lin}(F) \cap K = F$ (Proposición 4.1.5). □

4.3. Espacios $\mathcal{A}(K)$ nice

Como tenemos descrita la topología estructura en $\mathcal{A}(K)$ y teniendo en cuenta que $\partial K \subseteq E_{\mathcal{A}(K)^*}$ podemos definir una topología en ∂K.

Definición 4.3.1. Sea K un conjunto convexo y compacto. Se define la ***topología facial*** de ∂K como la topología inducida por la topología estructura de $E_{\mathcal{A}(K)^*}$ en ∂K. Es decir, $A \subseteq \partial K$ es ***facialmente cerrado*** si, y sólo si, existe F cara directa cerrada de K tal que

$$A = (\partial F \cup -\partial F) \cap \partial K = \partial F = F \cap \partial K.$$

Effros, en 1967, introdujo por primera vez el concepto de topología facial para símplex ([17]). Más tarde, Alfsen y Effros en sus artículos [3, 4] destacarían propiedades de dicha topología, aunque todas ellas y toda la información referente a la topología facial están recogidas en [1].

Notemos que en algunos casos la topología facial puede ser trivial. Consideremos un cuadrado en el plano, entonces las únicas caras directas que tiene son las triviales, por lo que la topología facial coincide con la topología trivial. Esto pone de manifiesto que la topología facial no es siempre Hausdorff (ver [1, Theorem II.7.8]). Se conoce que la topología facial de K es Hausdorff si, y sólo si, K es un símplex de Bauer, es decir, un símplex cuyos puntos extremos son un conjunto cerrado (en la topología de K). En general, ∂K va a ser siempre facialmente compacto (ver [1, Proposition II.6.21]). Del hecho de que la topología facial es una topología en ∂K, obtenemos el siguiente resultado que usaremos después.

Proposición 4.3.2. *Si F_1 y F_2 son caras directas cerradas de K, entonces $\mathrm{co}(F_1 \cup F_2)$ es una cara directa cerrada de K.*

Demostración. Los conjuntos ∂F_1 y ∂F_2 son facialmente cerrados, luego $\partial F_1 \cup \partial F_2$ es facialmente cerrado. Por tanto, existe F una cara directa cerrada de K tal que $\partial F = \partial F_1 \cup \partial F_2$. A partir de aquí,

$$F = \overline{\mathrm{co}}(\partial F) = \overline{\mathrm{co}}(\partial F_1 \cup \partial F_2).$$

Teniendo en cuenta que F_1 y F_2 son convexos y compactos, es fácil concluir que $\overline{\mathrm{co}}(\partial F_1 \cup \partial F_2) = \mathrm{co}(F_1 \cup F_2)$. $\square$

De hecho, es cierto que la envolvente convexa de caras directas es una cara directa ([1, Corollary II.6.8]).

Ahora vamos a trabajar con la topología estructura y para ello recordemos que en el capítulo anterior se definió $(E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$ como el espacio cociente $E_{\mathcal{A}(K)^*}/\sim$ equipado con la correspondiente topología cociente y la aplicación $\pi : E_{X^*} \to (E_{X^*})_\sigma$ definida por $\pi(x^*) = \{x^*, -x^*\}$. A continuación identificamos $(E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$ con ∂K dotado de la topología facial para lo que usamos el siguiente resultado de fácil demostración.

Lema 4.3.3. *Dado $A \subseteq (E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$, se tiene que A es cerrado si, y sólo si, existe F cara directa cerrada de K tal que $A = \pi(\partial F)$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.4, A es cerrado si, y sólo si, existe $A_0 \subseteq E_{\mathcal{A}(K)^*}$ estructuralmente cerrado con $\pi(A_0) = A$. Por el Corolario 4.2.3, A es cerrado si, y sólo si, existe F cara directa cerrada de K con

$$A = \pi(\partial F \cup -\partial F) = \pi(\partial F).$$

□

Proposición 4.3.4. *La aplicación $\psi = \pi_{|\partial K} : \partial K \to (E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$ es un homeomorfismo cuando en ∂K se considera la topología facial.*

Demostración. Ya que $E_{\mathcal{A}(K)^*} = \partial K \cup -\partial K$, es claro que ψ es biyectiva. Si $A \subseteq \partial K$ es facialmente cerrado, entoces $A = \partial F$ para alguna cara directa cerrada de K y, por el lema anterior, $\psi(A) = \pi(A) = \pi(\partial F)$ es cerrado en $(E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$. Si A es cerrado en $(E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$, de nuevo por el lema anterior, existe F cara directa cerrada con $A = \pi(\partial F)$, de donde

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(A) &= \pi^{-1}(\pi(\partial F)) \cap \partial K \\ &= (\partial F \cup -\partial F) \cap \partial K \\ &= \partial F\end{aligned}$$

que es un conjunto facialmente cerrado en K. □

Pasamos ya a enunciar uno de los principales resultados de este capítulo.

Teorema 4.3.5. *Sea K un conjunto convexo y compacto. Supongamos que el conjunto de puntos extremos de K que son caras directas es denso en el conjunto de puntos extremos de K. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{A}(K)$ *es nice.*

(ii) $\mathcal{A}(K)$ *es isométricamente isomorfo a* l_∞^n *para algún* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) K *es un símplex y* ∂K *es finito.*

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Por la Proposición 4.1.2.(iv), tenemos que

$$E_{\mathcal{A}(K)^*} = \partial K \cup -\partial K = \{\ \pm\delta_t : t \in \partial K\}.$$

Sea t una cara directa de K. Notemos $A = \{\pm\delta_t : t \text{ es una cara directa de } K\}$. Por el Teorema 4.2.1, $\mathbb{R}\delta_t$ es un L-sumando en $\mathcal{A}(K)^*$. Dicho de otra forma, se verifica que

$$A \subseteq \{e^* \in E_{\mathcal{A}(K)^*} : \mathbb{R}e^* \text{ es un } L\text{-sumando en } \mathcal{A}(K)^*\} = B.$$

Ahora, vamos a probar que $E_{\mathcal{A}(K)^*} \subseteq \overline{A}^{w^*}$. Sea e_0^* en $E_{\mathcal{A}(K)^*}$, entonces existe un punto extremo t de K, tal que $e_0^* = \pm\delta_t$. Por la hipótesis, existe una red $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en K convergiendo a t tal que t_γ es una cara directa de K para todo γ en Γ. Entonces $\{\delta_{t_\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge a δ_t en la topología débil* de $\mathcal{A}(K)^*$. Por lo tanto, queda probada la afirmación. Haciendo uso del Teorema de Krein-Milman, $B_{\mathcal{A}(K)^*} = \overline{\text{co}}^{w^*}(E_{\mathcal{A}(K)^*}) = \overline{\text{co}}^{w^*}(B)$ y, en consecuencia, $\overline{\text{lin}(B)}^{w^*} = \mathcal{A}(K)^*$. Por el Corolario 3.3.3, podemos concluir que $\mathcal{A}(K)$ es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$ para algún conjunto no vacío I. Como $\mathcal{A}(K)$ tiene puntos extremos, entonces I es un conjunto finito.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como $\mathcal{A}(K)$ es isométricamente isomorfo a l_∞^n, tenemos una biyección de $E_{\mathcal{A}(K)^*}$ sobre $E_{(l_\infty^n)^*} = E_{l_1^n}$ y $E_{l_1^n}$ es un conjunto finito. Ya que, ∂K se identifica con un subconjunto de $E_{\mathcal{A}(K)^*}$, obtenemos que ∂K es finito. Por el Teorema 3.2.7 y la Proposición 4.3.4, la topología facial de ∂K es discreta. En consecuencia, todo punto de ∂K es una cara directa de K. Si F es una cara cerrada de K, entonces $F = \text{co}(\partial F)$ (sin cerrar porque el conjunto ∂F es finito) y, por la Proposición 4.3.2, F es cara directa de K. Queda probado que K es un símplex.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Por ser K un símplex, todo punto de ∂K es una cara directa y, por tanto, facialmente cerrado. Luego, por ser ∂K finito, la topología facial en ∂K es discreta y, por la Proposición 4.3.4, $(E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$ es discreto. Por el

Teorema 3.2.7, $\mathcal{A}(K)$ es isométricamente isomorfo a $c_0(I)$. Ya que $E_{c_0(I)} \neq \emptyset$, I es finito y $\mathcal{A}(K)$ es isométricamente isomorfo a l_∞^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Claro con la Proposición 1.3.3. $\square$

Nota 4.3.6. *En el teorema anterior, la hipótesis de la densidad de los puntos extremos que son cara directa en el conjunto de los puntos extremos, sólo se utiliza en la demostración de* $(i) \Rightarrow (ii)$. *Es decir,* $(ii) \Leftrightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ *es cierto para cualquier convexo y compacto* K.

4.4. Espacios $\mathcal{A}_0(K)$ nice

Vamos a considerar un tipo particular de subespacios de las funciones afines y continuas en un convexo y compacto. De hecho estos subespacios son una generalización de los espacios de tipo $\mathcal{A}(K)$ con K convexo y compacto como ponemos de manifiesto a continuación.

Dado un conjunto convexo y compacto K, fijemos un punto extremo de K, que podemos suponer que es el cero, se define

$$\mathcal{A}_0(K) = \{f \in \mathcal{A}(K) : f(0) = 0\}.$$

Es claro que $\mathcal{A}_0(K)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{A}(K)$ y, por tanto, es un espacio de Banach.

Proposición 4.4.1. *Sea K un conjunto convexo y compacto. Existe S convexo y compacto tal que $\{0\}$ es una cara directa de S y $\mathcal{A}(K)$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{A}_0(S)$.*

Demostración. Sea E un espacio localmente compacto y Hausdorff tal que $K \subseteq E$, entonces $E \times \mathbb{R}$ es un espacio localmente convexo y Hausdorff con la topología producto. Consideremos

$$S = \operatorname{co}(K \times \{1\} \cup \{(0,0)\}) \subseteq E \times \mathbb{R}$$

que es convexo y compacto. Veamos que $0 = (0,0) \in S$ es una cara directa de S. En primer lugar, es claro que

$$S = \{(\alpha x, \alpha) : \alpha \in [0,1], x \in K\}.$$

Veamos que $K \times \{1\}$ es una cara de S. Si $t \in]0,1[$,

$$t(\alpha x, \alpha) + (1-t)(\beta y, \beta) \in K \times \{1\}$$

con $\alpha, \beta \in [0,1]$, $x, y \in K$, se tiene que $t\alpha + (1-t)\beta = 1$ de donde $\alpha = \beta = 1$ lo que nos da

$$(\alpha x, \alpha) = (x,1), \quad (\beta y, \beta) = (y,1) \in K \times \{1\}.$$

Es claro que $0 \notin K \times \{1\}$, luego $K \times \{1\} \subseteq \{0\}^c$. Sea F una cara de S y $(\alpha x, \alpha) \in F$ con $\alpha \in]0,1[$. Se tiene que $\alpha(x,1) + (1-\alpha)(0,0) \in F$ y, por ser

F cara de S, se tendría que $0 \in F$. Luego, si $0 \notin F$ entonces $(\alpha x, \alpha) \in F$ implica que $\alpha = 1$. Es decir, $F \subseteq K \times \{1\}$ y, por tanto $\{0\}^c \subseteq K \times \{1\}$. Esto es, $\{0\}^c = K \times \{1\}$ que es convexo y $S = \mathrm{co}(\{0\} \cup \{0\}^c)$. Si $(\alpha x,\ \alpha)$ es un elemento de $S \setminus (K \times \{1\} \cup \{0\})$ con $\alpha \in]0,1[$, entonces

$$(\alpha x, \alpha) = t(y, 1) + (1-t)(0,0)$$

con $t \in]0,1[$ e $y \in K$, luego $t = \alpha$, $\alpha x = ty = \alpha y$ de donde $y = x$. Por tanto, la descomposición es única y $\{0\}$ es cara directa de S. Consideremos la aplicación $\Phi : \mathcal{A}_0(S) \to \mathcal{A}(K)$ dada por $\Phi(f)(x) = f(x,1)$ con $f \in \mathcal{A}_0(S)$ y $x \in K$.

Es claro que Φ está bien definida, es lineal e isométrica.

Para concluir, probamos que Φ es sobreyectiva. Dada $g \in \mathcal{A}(K)$, para $y \in S \setminus \{0\}$ existe un único $\alpha \in]0,1]$ y $x \in K$ tal que $y = (\alpha x, \alpha)$. Se define $f(y) = \alpha g(x)$ y $f(0,0) = 0$. Es decir, si $\alpha \in [0,1]$ y $x \in K$ se define $f(\alpha x, \alpha) = \alpha g(x)$. Sean $t \in]0,1[$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ y $x, y \in K$ se tiene

$$f(t(\alpha x, \alpha) + (1-t)(\beta y, \beta)) = f(t\alpha x + (1-t)\beta y, t\alpha + (1-t)\beta).$$

Si $\alpha \neq 0$ o $\beta \neq 0$ entonces,

$$\begin{aligned} f(t(\alpha x, \alpha) + (1-t)(\beta y, \beta)) &= f(t\alpha x + (1-t)\beta y, t\alpha + (1-t)\beta) \\ &= f((t\alpha + (1-t)\beta)\frac{t\alpha x + (1-t)\beta y}{t\alpha + (1-t)\beta}, t\alpha + (1-t)\beta) \\ &= (t\alpha + (1-t)\beta) g(\frac{t\alpha x + (1-t)\beta y}{t\alpha + (1-t)\beta}) \\ &= t\alpha g(x) + (1-t)\beta g(y) \\ &= tf(\alpha x, \alpha) + (1-t) f(\beta y, \beta) \end{aligned}$$

Si $\alpha = \beta = 0$ entonces

$$0 = f(0,0) = f(t(0,0) + (1-t)(0,0)) = tf(0,0) + (1-t)f(0,0).$$

Por tanto, f es afín.

Veamos la continuidad de f. Sean $(\alpha x, \alpha) \in S \setminus \{0\}$ con $\alpha \in]0,1]$ y $x \in K$. Si $\{(\alpha_i x_i, \alpha_i)\}_{i \in I} \to (\alpha x, \alpha)$ donde $\alpha_i \in [0,1]$ y $x_i \in K$, entonces

$\{\alpha_i x_i\}_{i\in I} \to \alpha x$ y $\{\alpha_i\}_{i\in I} \to \alpha \neq 0$. De donde $\{x_i\}_{i\in I} \to x$, y por ser g continua, se tiene $\{g(x_i)\}_{i\in I} \to g(x)$, entonces

$$\{\alpha_i g(x_i)\}_{i\in I} = \{f(\alpha_i x_i, \alpha_i)\}_{i\in I} \to \alpha g(x) = f(\alpha x, \alpha).$$

Luego f es continua en $(\alpha x, \alpha)$.

Sea, ahora, $\{(\alpha_i x_i, \alpha_i)\}_{i\in I} \to (0,0)$, entonces $\{\alpha_i\}_{i\in I} \to 0$ y para todo $i \in I$, $g(x_i) \in g(K)$ que es acotado, por ser g continua, luego

$$\{\alpha_i g(x_i)\}_{i\in I} = \{f(\alpha_i x_i, \alpha_i)\}_{i\in I} \to 0 = f(0,0).$$

Por tanto, f es continua, con lo que $f \in \mathcal{A}_0(S)$. Es claro que $\Phi(f) = g$. $\square$

Una vez que tenemos definida la aplicación que identifica los espacios de funciones afines, para poder establecer cuándo $\mathcal{A}_0(K)$ es nice necesitamos el siguiente resultado técnico sobre los M-ideales de un espacio de Banach.

Proposición 4.4.2. *Sean X un espacio de Banach, M un M-ideal de X e $Y \subseteq X$ un subespacio cerrado con $M \subseteq Y$, entonces M es M-ideal de Y.*

Demostración. Comenzamos identificando $Y^* \cong X^*/Y^\circ$, y el polar de M en Y se identifica con M°/Y° ($Y^\circ \subseteq M^\circ$). Sea $P : X^* \to M^\circ$ la L-proyección con $P(X^*) = M^\circ$. Se define $\hat{P} : X^*/Y^\circ \to M^\circ/Y^\circ$ por $\hat{P}(x^* + Y^\circ) = P(x^*) + Y^\circ$.

Veamos que está bien definida: sean $x_1^*, x_2^* \in X^*$ con $x_1^* - x_2^* \in Y^\circ$, entonces $P(x_1^*) - P(x_2^*) = x_1^* - x_2^* \in Y^\circ$ luego $P(x_1^*) + Y^\circ = P(x_2^*) + Y^\circ$ y, por tanto, $\hat{P}$ está bien definida, es lineal y es una proyección con imagen M°/Y°.

Comprobemos que es una L-proyección. Si $y^* \in Y^\circ \subseteq P(X^*)$,

$$\| x^* - P(x^*) + y^* \| = \| x^* - P(x^*) \| + \| y^* \|$$

luego, $\| x^* - P(x^*) + Y^\circ \| = \| x^* - P(x^*) \|$ para todo $x^* \in X^*$.

Si $y^* \in Y^\circ$,

$$\begin{aligned} \| P(x^*) + Y^\circ \| + \| x^* - P(x^*) \| &\leq \| P(x^*) + y^* \| + \| x^* - P(x^*) \| \\ &= \| x^* + y^* \| . \end{aligned}$$

Luego, $\| P(x^*) + Y^\circ \| + \| x^* - P(x^*) \| \leq \| x^* + Y^\circ \|$. Es decir,

$$\| \hat{P}(x^* + Y^\circ) \| + \| (x^* + Y^\circ - \hat{P}(x^* + Y^\circ) \| \leq \| x^* + Y^\circ \|$$

y, por tanto, $\hat{P}$ es una L-proyección. $\square$

En general, si M es un M-ideal de Y no tiene por qué ser un M-ideal de X. Nuestro próximo objetivo es probar que esto es así si suponemos, además, que Y es un M-ideal de X. Este resultado se puede encontrar en [7], pero aquí damos una demostración más directa.

Proposición 4.4.3. *Sea M un M-ideal de X y P la L-proyección en X^* con rango M°. Entonces la aplicación $\Phi : \ker(P) \to M^*$ dada por $\Phi(x^*) = x^*_{|_M}$ (con $x^* \in \ker(P)$) es un isomorfismo isométrico de $\ker(P)$ sobre M^*.*

Demostración. Es claro que Φ es lineal. Por el Teorema de Hahn–Banach, para $y^* \in M^*$, existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*_{|_M} = y^*$. Entonces $x^* - P(x^*) \in \ker(P)$ y $\Phi(x^* - P(x^*)) = x^*_{|_M} = y^*$. Esto prueba que Φ es sobreyectiva. Para ver que Φ es isométrica, sea $x^* \in \ker(P)$,

$$\| \Phi(x^*) \| = \| x^*_{|_M} \| = \| x^* + M^\circ \| = \| x^* - P(x^*) \| = \| x^* \| .$$

Esto acaba la demostración. $\square$

Corolario 4.4.4. *Sea M un M-ideal de X. Entonces para cada $y^* \in M^*$, existe un único $x^* \in X^*$ tal que $\| x^* \| = \| y^* \|$ y $x^*_{|_M} = y^*$.*

Demostración. Sea P la L-proyección en X^* con rango M°. Sean x_1^*, x_2^* elementos de X^* tales que $x^*_{1_{|_M}} = x^*_{2_{|_M}} = y^*$ y $\| x_i^* \| = \| y^* \|$ $(i = 1, 2)$. Entonces $x_1^* - x_2^* \in M^\circ$ y $x_i^* - P(x_i^*)_{|_M} = x^*_{i_{|_M}} = y^*$. Por la proposición anterior $\| x_i^* - P(x_i^*) \| = \| y^* \| = \| x_i^* \|$ $(i = 1, 2)$. Luego, $P(x_i^*) = 0$ $(i = 1, 2)$. De donde $x_1^* - x_2^* = P(x_1^* - x_2^*) = 0$ y, por tanto, $x_1^* = x_2^*$. $\square$

Proposición 4.4.5. *Sean X un espacio de Banach y $M \subseteq Y \subseteq X$ tal que M es un M-ideal de Y e Y es un M-ideal de X. Entonces M es un M-ideal de X.*

Demostración. Sea P la L-proyección de X^* sobre Y° y P_1 la L-proyección de Y^* sobre $M^p = \{y^* \in Y^* : y^*(M) = \{0\}\}$ (el polar de M en Y). Sea $\Phi : \ker(P) \to Y^*$ definido por $\Phi(x^*) = x^*_{|_Y}$ (con $x^* \in \ker(P)$), el isomorfismo isométrico dado en la Proposición 4.4.3. Definimos $\widehat{P} : X^* \to X^*$ mediante

$$\widehat{P}(x^*) = P(x^*) + \Phi^{-1}(P_1(x^*_{|_Y})).$$

Además, si $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}
\widehat{P}(\widehat{P}(x^*)) &= \widehat{P}[P(x^*) + \Phi^{-1}(P_1(x^*_{|_Y}))] \\
&= \widehat{P}[P(x^*)] + \widehat{P}[\Phi^{-1}(P_1(x^*_{|_Y}))] \\
&= P(x^*) + \Phi^{-1}(P_1(x^*_{|_Y})) \\
&= \widehat{P}(x^*)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $\Phi(\Phi^{-1}(y^*)) = \Phi^{-1}(y^*)_{|_Y} = y^*$.

Si $x^* \in M^\circ$, entonces $x^*_{|_Y} \in M^p$ con lo cual

$$\widehat{P}(x^*) = P(x^*) + \Phi^{-1}(x^*_{|_Y}) = P(x^*) + x^* - P(x^*) = x^*.$$

Además, ya que $Y^\circ \subseteq M^\circ$ se tiene que, $P(X^*) = Y^\circ \subseteq M^\circ$. De la misma manera $\Phi^{-1}(P_1(x^*_{|_Y})) \in M^\circ$, para todo $x^* \in X^*$. Luego, $\widehat{P}(X^*) = M^\circ$.

Sea $x^* \in X^*$, entonces

$$\begin{aligned}
\| x^* \| &= \| P(x^*) \| + \| x^* - P(x^*) \| \\
&= \| P(x^*) \| + \| x^*_{|_Y} \| \\
&= \| P(x^*) \| + \| P_1(x^*_{|_Y}) \| + \| x^*_{|_Y} - P_1(x^*_{|_Y}) \| \\
&= \| P(x^*) \| + \| \Phi^{-1}P_1(x^*_{|_Y}) \| + \| \Phi^{-1}(x^*_{|_Y} - P_1(x^*_{|_Y})) \| \\
&= \| P(x^*) + \Phi^{-1}P_1(x^*_{|_Y}) \| + \| \Phi^{-1}(x^*_{|_Y}) - \Phi^{-1}P_1(x^*_{|_Y}) \| \\
&= \| \widehat{P}(x^*) \| + \| x^* - P(x^*) - \Phi^{-1}(P_1(x^*_{|_Y})) \| \\
&= \| \widehat{P}(x^*) \| + \| x^* - \widehat{P}(x^*) \|
\end{aligned}$$

Queda demostrado que $\widehat{P}$ es una L-proyección en X^* con rango M° y, en consecuencia, M es un M-ideal de X. □

Lo primero que vamos a hacer es describir los puntos extremos de la bola unidad de $\mathcal{A}_0(K)^*$.

Proposición 4.4.6. *Sea $\{0\}$ una cara directa de K. Entonces*

$$E_{\mathcal{A}_0(K)^*} = \{\pm\widehat{\delta}_t : t \in \partial K \setminus \{0\}\}.$$

Donde $\widehat{\delta}_t = \delta_{t|_{\mathcal{A}_0(K)}}$.

Demostración. Sea $A = \{\widehat{\delta_t} : t \in K\}$. En la dualidad $(\mathcal{A}_0(K), \mathcal{A}_0(K)^*)$ se tiene que $A^\circ = B_{\mathcal{A}_0(K)}$, de donde $A^{\circ\circ} = B_{\mathcal{A}_0(K)^*}$. El Teorema del Bipolar ([14, Theorem 1.8]) nos da que $B_{\mathcal{A}_0(K)^*} = \overline{\text{co}}^{w^*}(A \cup -A)$. Es fácil comprobar que A es un subconjunto convexo y débil*-compacto de $\mathcal{A}_0(K)^*$, con lo cual $B_{\mathcal{A}_0(K)^*} = \text{co}(A \cup -A)$. El Teorema de Krein–Milman revertido (Teorema 1.1.5) nos da que $E_{\mathcal{A}_0(K)^*} \subseteq A \cup -A = \{\pm\widehat{\delta_t} : t \in K\}$ y, por tanto,

$$E_{\mathcal{A}_0(K)^*} \subseteq \{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial K \setminus \{0\}\}.$$

Para la otra inclusión, sea $t \in \partial K \setminus \{0\}$,

$$\| \widehat{\delta_t} \| = \| \delta_{t_{|\mathcal{A}_0(K)}} \| = \| \delta_t + \mathcal{A}_0(K)^\circ \| = \| \delta_t + \mathbb{R}\delta_0 \| = \| \delta_t \| = 1$$

donde se ha utilizado $\delta_t \in E_{\mathcal{A}(K)^*}$, $\mathbb{R}\delta_0$ es un L-sumando de $\mathcal{A}(K)^*$ por el Teorema 4.2.1, y el Lema 3.1.6. Sean $\widehat{x^*}, \widehat{y^*} \in B_{\mathcal{A}_0(K)^*}$ tal que $\widehat{\delta_t} = \frac{1}{2}(\widehat{x^*} + \widehat{y^*})$. Por el Teorema de Hanh–Banach, existen x^*, y^* en $B_{\mathcal{A}(K)^*}$ tales que $x^*_{|\mathcal{A}_0(K)} = \widehat{x^*}$ e $y^*_{|\mathcal{A}_0(K)} = \widehat{y^*}$. Luego $\frac{1}{2}(x^* + y^*)_{|\mathcal{A}_0(K)} = \widehat{\delta_t}$, de donde

$$1 = \| \widehat{\delta_t} \| \leq \| \frac{1}{2}(x^* + y^*) \| \leq \frac{1}{2}(\| x^* \| + \| y^* \|) = 1$$

y $\frac{1}{2}(x^* + y^*)$ es una extensión equinórmica de $\widehat{\delta_t}$. Por el Corolario 4.2.2, $\mathcal{A}_0(K)$ es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$ y el Corolario 4.4.4 nos da $\frac{1}{2}(x^* + y^*) = \delta_t$ y como δ_t es un punto extremo de $\mathcal{A}(K)^*$ (Proposición 4.1.2.(iii)) se tiene que $x^* = y^* = \delta_t$ y, por tanto, $\widehat{x^*} = \widehat{y^*} = \widehat{\delta_t}$. $\square$

En el siguiente resultado vamos a describir los conjuntos estructuralmente cerrados de $\mathcal{A}_0(K)$ en términos de caras directas cerradas de K.

Proposición 4.4.7. *Sea $A \subseteq E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$. Entonces A es estructuralmente cerrado si, y sólo si, existe F cara directa cerrada de K tal que*

$$A = \{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial F \setminus \{0\}\}.$$

Demostración. Si M es un subconjunto cerrado de $\mathcal{A}_0(K)$, notaremos por M^p al polar de M en $\mathcal{A}_0(K)$.

($\Rightarrow$) Como A es estructuralmente cerrado en $E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$, existe M un M-ideal de $\mathcal{A}_0(K)$ tal que $A = M^p \cap E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$. $\mathcal{A}_0(K)$ es M-ideal de $\mathcal{A}(K)$ por el Corolario 4.2.2. Por la Proposición 4.4.5, M es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$ y, entonces $M^\circ \cap K = F$ es una cara directa cerrada de K por Teorema 4.2.1 y Proposición 4.1.5.(iii). Veamos que $A = \{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial F \setminus \{0\}\}$.

Si $t \in \partial F \setminus \{0\}$, se tiene que $\delta_t \in M^\circ \cap K$ lo que implica que $\widehat{\delta_t}$ pertenece a M^p y $\widehat{\delta_t}$ es un elemento de $E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$ (por el resultado anterior) de donde $\{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial F \setminus \{0\}\} \subseteq M^p \cap E_{\mathcal{A}_0(K)^*} = A$.

Sea $x^* \in A = M^p \cap E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$, entonces por el resultado anterior existe $t \in \partial K \setminus \{0\}$ tal que $x^* = \pm\widehat{\delta_t}$. Ya que $\widehat{\delta_t} \in M^p$, es claro que $\delta_t \in M^\circ$, luego $\delta_t \in M^\circ \cap K = F$. Por tanto, $t \in \partial K \setminus \{0\} \cap F = \partial F \ \setminus \{0\}$. En consecuencia, $A \subseteq \{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial F \setminus \{0\}\}$.

($\Leftarrow$) Si F es una cara directa cerrada de K, se tiene que $F_0 = \mathrm{co}(F \cup \{0\})$ es una cara directa cerrada de K por la Proposición 4.3.2. Entonces, por el Corolario 4.2.2, $M = \{f \in \mathcal{A}(K) : f(F_0) = 0\}$ es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$ con $M \subseteq \mathcal{A}_0(K)$ y $M^\circ \cap K = F_0$, por el Teorema 4.2.1 y Proposición 4.1.5.(iii).

Si $t \in \partial F \setminus \{0\}$, es claro que $\widehat{\delta_t} \in M^p \cap E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$ debido a la proposición anterior.

Recíprocamente, si $\widehat{\delta_t} \in M^p$ con $t \in \partial K \setminus \{0\}$, entonces $\delta_t \in M^\circ$ con $t \in \partial K \setminus \{0\}$, por lo que $t \in M^\circ \cap K = F_0$, esto es, $t \in \partial F_0$ y $t \neq 0$, de donde $t \in \partial F \setminus \{0\}$ y tenemos que $M^p \cap E_{\mathcal{A}_0(K)^*} \subseteq \{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial F \setminus \{0\}\}$. Luego $A = M^p \cap E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$ y M es M-ideal de $\mathcal{A}_0(K)$ por Proposición 4.4.2. Concluimos que A es estructuralmente cerrado. $\square$

Proposición 4.4.8. *La aplicación $\Phi : \partial K \setminus \{0\} \to (E_{\mathcal{A}_0(K)^*})_\sigma$ dada por $\Phi(t) = \{\pm\widehat{\delta_t}\} = \pi(\widehat{\delta_t})$ es un homeomorfismo cuando en $\partial K \setminus \{0\}$ se considera la topología facial (inducida).*

Demostración. Comenzamos observando que la aplicación Φ es biyectiva ya que $E_{\mathcal{A}_0(K)^*} = \{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial K \setminus \{0\}\}$.

Veamos que si consideramos un subconjunto cerrado en $\partial K \setminus \{0\}$ obtenemos un cerrado en la imagen. Sea $C \subseteq \partial K \setminus \{0\}$ facialmente cerrado entonces existe F cara directa cerrada de K tal que $C = (\partial F) \cap (\partial K \setminus \{0\}) = \partial F \setminus \{0\}$, luego el conjunto $\{\pm\widehat{\delta_t} : t \in \partial F \setminus \{0\}\}$ es estructuralmente cerrado en $\mathcal{A}_0(K)^*$

por la proposición anterior. Haciendo su imagen mediante la aplicación π, tenemos que

$$\pi(\{\pm\widehat{\delta}_t : t \in \partial F \setminus \{0\}\}) = \pi(\{\pm\widehat{\delta}_t : t \in C\}) = \pi(\{\widehat{\delta}_t : t \in C\}) = \Phi(C)$$

es cerrado en $(E_{\mathcal{A}_0(K)^*})_\sigma$ por la Proposción 3.2.4.

Sea ahora, C_0 un cerrado en $(E_{\mathcal{A}_0(K)^*})_\sigma$. Por la Proposición 3.2.4 existe $C \subseteq E_{\mathcal{A}_0(K)^*}$ estructuralmente cerrado tal que $\pi(C) = C_0$. Por la proposición anterior, existe F cara directa cerrada de K tal que $C = \{\pm\widehat{\delta}_t : t \in \partial F \setminus \{0\}\}$ de donde

$$C_0 = \pi(C) = \pi(\{\pm\widehat{\delta}_t : t \in \partial F \setminus \{0\}\}) = \Phi(\partial F \setminus \{0\})$$

y, por tanto, $\Phi^{-1}(C_0) = \partial F \setminus \{0\}$ es facialmente cerrado en $\partial K \setminus \{0\}$. □

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para caracterizar cuándo los espacios de funciones afines que se anulan en un punto fijo son nice.

Teorema 4.4.9. *Sea K un conjunto convexo y compacto conteniendo a cero de manera que $\{0\}$ es una cara directa de K. Supongamos que el conjunto de todos los puntos extremos de K que son caras directas es denso en el conjunto de todos los puntos extremos de K. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{A}_0(K)$ *es nice.*

(ii) $\mathcal{A}_0(K)$ *es isométricamente isomorfo a* $c_0(I)$ *para algún conjunto no vacío* I.

(iii) $\partial K \setminus \{0\}$ *es facialmente discreto.*

(iv) K *es afínmente homeomorfo a* $B^+_{l_1(I)}$ *para algún conjunto no vacío* I.

(v) K *es un símplex,* $\partial K \setminus \{0\}$ *es discreto y* ∂K *es cerrado.*

Demostración. Para comenzar consideramos el siguiente conjunto

$$A = \{\pm\widehat{\delta}_t : t \neq 0 \text{ es una cara directa de K}\}.$$

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Si $t \neq 0$ es cara directa entonces, por el Corolario 4.2.2, $\ker(\delta_t)$ es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$ y $\mathcal{A}_0(K)$ es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$. Por la Proposición

3.2.2, se tiene $\ker(\widehat{\delta}_t) \subseteq \mathcal{A}_0(K)$ es un M-ideal de $\mathcal{A}(K)$, y por la Proposición 4.4.5, se concluye que $\ker(\widehat{\delta}_t)$ es un M-ideal de $\mathcal{A}_0(K)$. Entonces

$$A \subseteq \{e^* \in E_{\mathcal{A}_0(K)^*} : \mathbb{R}e^* \text{ es un } L\text{-sumando en } \mathcal{A}_0(K)^*\}.$$

Teniendo en cuenta que $E_{\mathcal{A}_0(K)^*} = \{\pm\widehat{\delta}_t : t \in \partial K \setminus \{0\}\}$, la demostración puede ser finalizada siguiendo los mismos argumentos que en el Teorema 4.3.5.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Es consecuencia de la Proposición 4.4.8 y del Teorema 3.2.7.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ De (ii) deducimos que existe un débil*-homeomorfismo lineal isométrico de $\mathcal{A}_0(K)^*$ sobre $c_0(I)^*$. Como ya se ha comentado, $c_0(I)^* = l_1(I)$ y $E_{l_1(I)} = \{\pm e_i : i \in I\}$, donde $e_i(j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in I)$. Teniendo en cuenta que K puede ser embebido en $B_{\mathcal{A}_0(K)^*}$ y $E_{\mathcal{A}_0(K)^*} = (\partial K \cup -\partial K) \setminus \{0\}$, por medio del anterior homeomorfismo de $B_{\mathcal{A}_0(K)^*}$ sobre $B_{l_1(I)}$ tenemos un subconjunto convexo y compacto Ω de $B_{l_1(I)}$ que contiene a cero de manera que es afínmente homeomorfo a K y tal que $E_{l_1(I)} = (\partial\Omega \cup -\partial\Omega) \setminus \{0\}$. Si hacemos una apropiada elección de signos podemos definir un homeomorfismo afín T de $B_{l_1(I)}$ sobre $B_{l_1(I)}$ de manera que

$$\partial T(\Omega) = \{e_i : i \in I\} \cup \{0\}.$$

Por el Teorema de Krein–Milman, $T(\Omega) = \overline{\text{co}}^{w^*}(\{e_i : i \in I\} \cup \{0\})$. Se comprueba que

$$\overline{\text{co}}^{w^*}(\{e_i : i \in I\} \cup \{0\}) = B^+_{l_1(I)}.$$

Ahora, si juntamos todo podemos concluir que K es afínmente homeomorfo a $B^+_{l_1(I)}$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Por la Proposición 4.1.12, $B^+_{l_1(I)}$ es un símplex y, por tanto, K es también un símplex. Es de fácil comprobación que $K_0 = B^+_{l_1(I)}$ verifica que ∂K_0 es cerrado y $\partial K_0 \setminus \{0\}$ es discreto y, por tanto, lo mismo es cierto para K.

$(v) \Rightarrow (ii)$ Por [1, Proposition II.3.13] la aplicación $T : \mathcal{A}(K) \to \mathcal{C}(\partial K)$ definida por $T(f) = f_{|\partial K}$ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}(K)$ sobre $\mathcal{C}(\partial K)$ y, por tanto, $T_{|\mathcal{A}_0(K)}$ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}_0(K)$ sobre $T(\mathcal{A}_0(K)) = \{f \in \mathcal{C}(\partial K) : f(0) = 0\}$. Como $\partial K \setminus \{0\}$ es discreto, el espacio $T(\mathcal{A}_0(K))$ es isométricamente isomorfo a $c_0(\partial K \setminus \{0\})$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Claro con la Proposición 1.3.3. □

Nota 4.4.10. *Sólo para demostrar* $(i) \Rightarrow (ii)$ *se utiliza la hipótesis de la densidad de los puntos extremos que son cara directa en el conjunto de los puntos extremos. Es decir, para cualquier convexo y compacto* K *se verifica* $(ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Rightarrow (i)$.

Cabe señalar que existen ejemplos de conjuntos convexos y compactos que no son símplex en los que todo punto extremo es una cara directa ([5, Example 2.1 and 2.2]). Así mismo existen conjuntos convexos y compactos en los que tanto el conjunto de puntos extremos que son cara directa como su conjunto complementario son densos en el conjunto de puntos extremos [24, Proposition 13]. En ambos casos se verifica la hipótesis de los Teoremas 4.3.5 y 4.4.9 y se obtiene como consecuencia que los correspondientes espacios de funciones afines y continuas no son nice.

En el caso de un símplex obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4.11. *Sea* K *un símplex. Entonces, se verifica:*

(i) $\mathcal{A}_0(K)$ *es nice si, y sólo si,* $\mathcal{A}_0(K)$ *es isométricamente isomorfo a* $c_0(I)$ *para algún conjunto no vacío* I.

(ii) $\mathcal{A}(K)$ *es nice si, y sólo si,* ∂K *es finito.*

El resultado anterior también se puede obtener como consecuencia del Corolario 3.3.4. Para ello hay que tener en cuenta que, si K es un símplex, $\mathcal{A}_0(K)$ es un L_1-predual como se muestra en el diagrama de la página 86. Lacey, en [29, Theorem 19.2] prueba que $\mathcal{A}(K)$ es un L_1-predual cuando K es un símplex.

Summary

This dissertation is devoted to study a class of Banach spaces in which the class of extreme operators agree with the more restricted class called nice operators. This agreement has been previously considered in different types of Banach spaces. We fix some notation in order to give the accurate notions we are going to deal with.

Only real Banach spaces will be considered in this dissertation. If X is a Banach space, then B_X, S_X, and E_X will stand for the closed unit ball of X, the sphere of X, and the set of extreme points of B_X, respectively. Given another normed space Y, we denote by $L(X,Y)$ the space of all continuous linear operators from X into Y endowed with its canonical norm. When $Y = \mathbb{R}$, we will write X^*, the dual space of X, instead of $L(X,\mathbb{R})$. For T in $L(X,Y)$ we define $T^* \in L(Y^*,X^*)$, the adjoint operator of T, by $T^*(y^*) = y^* \circ T$ for all y^* in Y^*. Once we have introduced the basic notation we can explain the main results of each chapter.

Chapter 1: Nice operators into Banach spaces

First of all we recall some classical results concerning the extremal structure such as the Krein–Milman Theorem, Bauer's minimum principle, and the Arens–Kelley Theorem.

We focus our attention on extreme operators in Banach spaces. In order to motivate the main notion in our work we state the following theorem due to Milman.

Theorem 1.1. ***(Milman)*** *Every isometric linear bijection between Banach spaces is an extreme operator.*

The analysis of the proof of this result justifies the following definition.

Definition 1.2. Let X and Y be Banach spaces and T in $L(X,Y)$. We say that T is a ***nice operator*** if $T^*(E_{Y^*}) \subseteq E_{X^*}$.

It is easy to prove that every nice operator is an extreme operator. It is also easy to find an extreme operator which is not a nice operator. Even before its formal appearance for the first time in [41], the coincidence of nice and extreme operators had been considered in the context of spaces of continuous functions in [9]. Afterwards Sharir in [50] proved that every extreme operator between L_1-spaces is a nice operator.

An elementary checking gives that, for any Banach space Y, every extreme operator from Y into $\mathbb{R}$ is a nice operator. We wonder what kind of Banach spaces share with the scalar field the above property. We introduce the class of Banach spaces which we are going to study in this dissertation.

Definition 1.3. Let X be a Banach space. We say that X is ***nice*** if, for any Banach space Y, every extreme operator from Y into X is a nice operator.

We first prove that there is not a "dual"version of nice Banach spaces.

Theorem 1.4. *Let X be a Banach space. Then there exist a Banach space Y and an extreme operator T form X into Y which is not a nice operator.*

Next we show that the class of nice Banach spaces is not trivial. We recall that, given a nonempty set I, the vector space

$$c_0(I) = \{x : I \to \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \{i \in I : |x(i)| \geq \varepsilon\} \text{ is finite}\}$$

with the supremum norm is a Banach space.

Proposition 1.5. *Let I be a nonempty set. Then $c_0(I)$ is a nice Banach space.*

We finish this chapter by proving the stability of nice Banach spaces for c_0-sums.

Proposition 1.6. *Let I be a nonempty set and X_i a nice Banach space for each $i \in I$. Then $\bigoplus_{c_0} X_i$ is a nice Banach space.*

Chapter 2. Nice Banach spaces: necessary conditions

In this chapter we state one of the main tools for the study of nice Banach spaces.

Theorem 2.1. *Let X be a Banach space such that there exists $e_0^* \in E_{X^*}$ satisfying:*

(i) $X^* = \overline{\operatorname{lin}(E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\})}^{w^*}$

(ii) *For all* $e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}$, $\|e^* + \mathbb{R}e_0^*\| = 1$.

Then X is not nice.

As a consequence of this result we can characterize spaces of continuous functions that are nice. We recall that, for a locally compact Hausdorff space L, we denote by $\mathcal{C}_0(L)$ the space of continuous functions on L vanishing at infinity with the supremum norm. Moreover, for $t \in L$, we denote by δ_t the evaluation mapping at t. It is easy to prove that $E_{\mathcal{C}_0(L)^*} = \{\pm\delta_t : t \in L\}$.

Corollary 2.2. *Let L be a locally compact Hausdorff space, then $\mathcal{C}_0(L)$ is nice if and only if L is discrete. In particular, if K is a compact Hausdorff space, then $\mathcal{C}(K)$ is nice if and only if K is discrete.*

In fact, we prove a stronger result which generalizes [9, Theorem 2].

Theorem 2.3. *Let L be a locally compact Hausdorff space which is not discrete. Then there exist a Banach space X and an extreme operator T from X into $\mathcal{C}_0(L)$ such that $T^*(\delta_t) \notin E_{X^*}$ for any cluster point t of L.*

We need some technical results involving measure theory in order to conclude the “almost”lack of L_1-spaces which are nice.

Theorem 2.4. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a σ-finite measure space. If $L_1(\mu)$ is nice, then $L_1(\mu)$ has dimension one or two, that is, $L_1(\mu)$ is isometrically isomorphic either to $\mathbb{R}$ or l_∞^2.*

We give another necessary condition for a Banach space to be nice.

Proposition 2.5. *Let X be a nice Banach space such that E_X is a nonempty set, then*

$$| e^*(e) |= 1 \qquad \textit{for all } e^* \in E_{X^*} \textit{ and } e \in E_X.$$

As an immediate consequence of this property we obtain.

Corollary 2.6. *Let X be a strictly convex Banach space different from $\mathbb{R}$. Then X is not nice.*

Taking into account [37, Proposition 2] we get the following result.

Proposition 2.7. *Let X be an infinite-dimensional reflexive Banach space. Then X is not nice.*

In view of the above result, our next goal is to get a characterization of nice finite-dimensional spaces. In order to do this, we use results of Lindenstrauss, Perles and Lima ([33, 35]) which allow us to prove the following.

Theorem 2.8. *Let X be a finite-dimensional Banach space. Then, X is nice if and only if X is isometrically isomorphic to l_∞^n for some $n \in \mathbb{N}$.*

Chapter 3. Nice L_1-preduals

The main aim of this chapter is to describe the L_1-preduals which are nice. We need to introduce the "structure topology", a topology defined in the set of the extreme points of the dual of any Banach space. This topology was first considered by Alfsen and Effros in [4]. The main reference for the notions related to the structure topology is [26].

Definition 3.1. Let X be a Banach space, a linear continuous projection P from X into X is said to be an ***L-projection*** in X if it satisfies

$$\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\| \qquad \text{for all } x \in X.$$

The range of an L-projection in X is called an ***L-summand*** of X.

If M is an L-summand of X it is easy to check that there is a unique L-projection P in X such that

$$M = P(X).$$

Definition 3.2. Let X be a Banach space. The sets $J \cap E_{X^*}$, where J runs through the weak*-closed L-summands of X^*, are the family of closed sets of a topology in E_{X^*}, called ***the structure topology***.

It is clear that this topology is never Hausdorff, so we consider in E_{X^*} the relation $e_1^* \sim e_2^*$ if and only if $e_1^* = \pm e_2^*$. We denote by $(E_{X^*})_\sigma$ the corresponding quotient space endowed with the quotient topology of the structure topology. One of the main results is the following characterization of $c_0(I)$ by means of the structure topology. There is a complex version of this result due to T. S. S. R. K. Rao [46, Theorem 4.6].

Theorem 3.3. *Let X be a Banach space. Then the following assertions are equivalent.*

(i) X is isometrically isomorphic to $c_0(I)$ for some nonempty set I.

(ii) $(E_{X^*})_\sigma$ is discrete.

We have now all the tools to get our aim which we will obtain as a consequence of the following technical statement.

Theorem 3.4. *Let X be a nice Banach space. Assume that the set*

$$A = \{e_0^* \in E_{X^*} : \ \| e^* + \mathbb{R}e_0^* \| = 1 \ for\ all\ e^* \in E_{X^*} \setminus \{\pm e_0^*\}\}$$

satisfies $\overline{\operatorname{lin}(A)}^{w^*} = X^*$. Then X is isometrically isomorphic to $c_0(I)$ for some nonempty set I.

For proving the following result, we use the fact that, if X is an L_1-predual, then $\mathbb{R}e^*$ is an L-summand of X^* for all e^* in E_{X^*}.

Corollary 3.5. *Let X be an L_1-predual. Then X is nice if and only if X is isometrically isomorphic to $c_0(I)$ for some nonempty set I.*

Chapter 4. Nice continuous affine functions spaces

We introduce the notation concerning the Banach spaces we are going to deal with in this chapter. Given a compact convex subset K of some Hausdorff locally convex space, we will denote by $\mathcal{A}(K)$ the Banach space of (real) continuous affine functions on K with the supremum norm.

First we identify K with a weak*-compact convex subset of the unit ball of $\mathcal{A}(K)^*$. Keeping in mind this identification, and writing ∂K for the set of extreme points of K, we have $E_{\mathcal{A}(K)^*} = \partial K \cup -\partial K$. Next we give a notion which is relevant for our study.

Definition 4.1. Let K be a compact convex subset of a Hausdorff locally convex space. We say that a face F of K is a ***split face*** if there exists a face F_0 of K such that $F \cap F_0 = \emptyset$ and, for all $x \in K \setminus (F \cup F_0)$, there exist unique $\alpha \in]0,1[$, $y \in F$, and $z \in F_0$ such that

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z.$$

We say that K is a ***simplex*** if every closed face of K is a split face.

Relevant examples of simplex are the following. Given a nonempty set I, we consider $l_1(I)$ as the dual space of $c_0(I)$ with the weak*-topology. Then,

$$B^+_{l_1(I)} = \{x \in B_{l_1(I)} : x(i) \geq 0 \quad \forall i \in I\}$$

is a weak*-compact convex subset of $l_1(I)$ which is a simplex.

In this chapter we try to characterize the spaces $\mathcal{A}(K)$ which are nice. In order to use the results proved in Chapter 3 we need to translate the tools developed there to the case of $\mathcal{A}(K)$. For doing this, the aim result is the following theorem due to Perdrizet.

Theorem 4.2. [45, Proposition 5.6] *Let K be a compact convex set and let J be a subspace of $\mathcal{A}(K)$. Then J is a weak*-closed L-summand of $\mathcal{A}(K)^*$ if and only if there exists a closed split face F of K such that $J = \operatorname{lin}(F)$.*

The above result allows us to describe the structure topology in $E_{\mathcal{A}(K)^*}$. We define the facial topology in ∂K as the restriction of the structure topology in $E_{\mathcal{A}(K)^*}$ and so ∂K with the facial topology is homeomorphic to $(E_{\mathcal{A}(K)^*})_\sigma$. With all this information we can stablish the following result.

Theorem 4.3. *Let K be a compact convex set such that the set of points of K which are split faces is dense in ∂K. Then the following assertions are equivalent:*

(i) *$\mathcal{A}(K)$ is nice.*

(ii) *$\mathcal{A}(K)$ is isometrically isomorphic to l_∞^n for some $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) *K is a simplex and ∂K is finite.*

We finish this chapter by studying a class of Banach spaces which contains the class $\mathcal{A}(K)$. Let K be a compact convex set such that 0 is a split face of K. We define $\mathcal{A}_0(K)$ the space of all continuous affine functions on K vanishing at zero. It is clear that $\mathcal{A}_0(K)$ is a closed subspace of $\mathcal{A}(K)$ and so it is a Banach space. It can be proved that, for any compact convex set K, there exists a compact set S containing zero as a split face such that $\mathcal{A}(K)$ is isometrically isomorphic to $\mathcal{A}_0(S)$. We prove that

$$E_{\mathcal{A}_0(K)^*} = (\partial K \setminus \{0\}) \cup -(\partial K \setminus \{0\}).$$

By using the above results and some technical adaptations we can state the following theorem.

Theorem 4.4. *Let K be a compact convex set containing zero as a split face and such that the set of points of K which are split faces is dense in ∂K. Then the following assertions are equivalent:*

(i) *$\mathcal{A}_0(K)$ is nice.*

(ii) *$\mathcal{A}_0(K)$ is isometrically isomorphic to $c_0(I)$ for some nonempty set I.*

(iii) *$\partial K \setminus \{0\}$ is facially discrete.*

(iv) *K is affinely homeomorphic to $B^+_{l_1(I)}$ for some nonempty set I.*

(v) *K is a simplex, $\partial K \setminus \{0\}$ is discrete, and ∂K is closed.*

It is known that, when K is a simplex, $\mathcal{A}(K)$ and $\mathcal{A}_0(K)$ are L_1-preduals. In this case the following corollary can be also deduced from the result about nice L_1-preduals.

Corollary 4.5. *Let K be a simplex. Then the following assertions hold.*

(i) *$\mathcal{A}(K)$ is nice if and only if ∂K is finite.*

(ii) *$\mathcal{A}_0(K)$ is nice if and only if $\mathcal{A}_0(K)$ is isometrically isomorphic to $c_0(I)$ for some nonempty set I.*

All results in this work are taken from the papers [10, 11, 12, 13].

Bibliografía

[1] E. M. Alfsen. Compact convex sets and boundary integrals. Springer-Verlag, New York, 1971.

[2] E. M. Alfsen and T. B. Andersen. Split faces of compact convex sets. *Proc. London Math. Soc.* 21 (1970), 415-441.

[3] E. M. Alfsen and E. G. Effros. Structure in real Banach spaces. I. *Ann. of Math.* 96 (1972), 98-128.

[4] E. M. Alfsen and E. G. Effros. Structure in real Banach spaces. II. *Ann. of Math.* 96 (1972), 129-173.

[5] L. Asimow and A. J. Ellis. Convexity theory and its applications in Funtional Analysis, Academic Press, 1980.

[6] R. F. Arens and J. L. Kelley. Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space. *Trans. A. M. S.* 62 (1947), 499-508.

[7] E. Behrends. M-structure and the Banach-Stone theorem, Lecture notes in Math., 736. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[8] S. Banach. Théorie des opérations linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932.

[9] R. M. Blumenthal, J. Lindenstrauss and R. R. Phelps. Extreme operators into $C(K)$. *Pacific J. Math.* 15 (1965), 747-756.

[10] A. M. Cabrera-Serrano and J. F. Mena-Jurado. Extreme operators whose adjoints preserve extreme points. *J. Convex Anal.* 22 (2015), 247-258.

[11] A. M. Cabrera-Serrano and J. F. Mena-Jurado. Facial topology and extreme operators. *J. Math. Anal. Appl.* 427 (2015), 899-904.

[12] A. M. Cabrera-Serrano and J. F. Mena-Jurado. Nice operators into G-spaces. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (To appear) DOI: 10.1007/s40840-015-0155-8.

[13] A. M. Cabrera-Serrano and J. F. Mena-Jurado. Nice operators into L_1-preduals. *Rev. Mat. Complut.* (To appear) DOI: 10.1007/s13163-016-0219-9.

[14] J. B. Conway. A course in Functional Analysis. Springer-Verlag, New York, 1990.

[15] G. Choquet. Existence unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémeaux dans les cônes convexes. *Séminaire Bourbaki* 139 (1956), 15.

[16] E. G. Effros. On a class of real Banach spaces. *Israel J. Math.* 9 (1970), 430-458.

[17] E. G. Effros. Structure in simplexes. *Acta Math.* 117 (1967), 103-121.

[18] A. J. Ellis. A facial characterization of Choquet simplexes. *Bull. Lond. Math. Soc.* 9 (1977), 326-327.

[19] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant J. and V. Zizler. Funtional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry. Springer-Verlag, New York, 2001.

[20] H. Fakhoury. Préduaux de L-espace: Notion de Centre. *J. Funct. Anal.* 9 (1972), 189-207.

[21] V. P. Fonf. One property of Lindenstrauss-Phelps spaces. *Funct. Anal. Appl.* 13 (1979), 66-67.

[22] R. E. Fullerton. Geometrical characterization of certain function spaces. *Proc. Inter. Sympos. Linear spaces* (Jerusalen 1960), 227-236.

[23] A. Gendler. Extreme operators in the unit ball of $L(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(Y))$ over the complex field. *Proc. Amer. Math. Soc.* 57 (1976), 85-88.

[24] A. Gleit. On the construction of split-face topologies. *Trans. Amer. Math. Soc.* 194 (1974), 291-299.

[25] A. Grothendieck. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L_1. *Canad. J. Math.* 7 (1955), 552-561.

[26] P. Harmand, D. Werner and W. Werner. M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras. Springer-Verlang. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1547, 1993.

[27] R. V. Kadison. Isometries of operator algebras. *Ann. of Math.* 54 (1951), 325-338.

[28] M. Krein and D. Milman. On extreme points of regular convex sets. *Studia Mathematica.* 9 (1940), 133-138.

[29] H. E. Lacey. The Isometric theory of classical Banach spaces. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[30] A. J. Lazar and J. Lindenstrauss. Banach spaces whose duals are L_1 spaces and their representing matrices. *Acta Math.* 126 (1971), 165-194.

[31] Å. Lima. Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 227 (1977), 1-62.

[32] Å. Lima. Intersection properties of balls in spaces of compact operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 28 (1978), 35-65.

[33] Å. Lima. On extreme operators on finite-dimensional Banach spaces whose unit balls are polytopes. *Ark. Mat.* 19 (1981), 97-116.

[34] J. Lindenstrauss. Extension of compact operators. *Mem. Amer. Math. Soc.* 48 (1964).

[35] J. Lindenstrauss and M. A. Perles. On extreme operators in finite-dimensional spaces. *Duke Math. J.* 36 (1969), 301-314.

[36] J. Lindenstrauss and D. E. Wulbert. On the classification of the Banach spaces whose duals are L_1 spaces. *J. Funct. Anal.* 4 (1969), 332-349.

[37] G. López, M. Martín and R. Payá. Real Banach spaces with numerical index 1. *Bull. London Math. Soc.* 31 (1999), 207-212.

[38] M. Martín and R. Payá. On CL-spaces and almost-CL-spaces. *Arkiv Mat.* 42 (2004), 107-118.

[39] D. Milman. Isometry and extremal points. (Russian) Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 59 (1948), 1241-1244.

[40] H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, Vol II, Leipzig, 1911. Reprinted Chelsea Publishing Co., New York, 1967.

[41] P. D. Morris and R. R. Phelps. Theorems of Krein-Milman type for certain convex sets of operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* 150 (1970), 183-200.

[42] M. A. Navarro. Some characterizations of finite-dimensional Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 223 (1998), 364-365.

[43] J. C. Navarro-Pascual and M. A. Navarro. Nice operators and surjective isometries. *J. Math. Anal. Appl.* 426 (2015), 1130-1142.

[44] J. C. Navarro-Pascual and M. A. Navarro. Unitary operators in real von Neumann algebras. *J. Math. Anal. Appl.* 386 (2012), 933-938.

[45] F. Perdrizet. Espaces de Banach ordonnés et idéaux. *J. Math. Pures et Appl.* 49 (1970), 61-98.

[46] T. S. S. R. K. Rao. Characterizations of some classes of L^1-preduals by Alfsen-Effros structure topology. *Israel J. Math.* 42 (1982), 20-32.

[47] H. P. Rosenthal. A characterization of Banach spaces containing l_1. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 71 (1974), 2411-2413.

[48] W. Rudin, Análisis real y complejo, Editorial Alhambra, Madrid, 1979.

[49] M. Sharir. Characterizations and properties of extreme operators into $\mathcal{C}(Y)$. *Israel J. Math.* 12 (1972), 174-183.

[50] M. Sharir. Extremal structure in operator spaces. *Amer. Math. Soc.* 186 (1973), 91-111.

[51] M. Sharir. A counterexample on extreme operators. *Israel J. Math.* 24 (1976) (no. 3-4), 320-337.

[52] M. Sharir. A non-nice extreme operator. *Israel J. Math.* 26 (1977) (no. 3-4), 306-312.

[53] M. H. Stone. Applications of the Theorey of Boolean rings to general topology. *Trans. Amer. Math. Soc.* 41 (1937), 375-481.

[54] U. Uttersrud. On M-ideals and the Alfsen-Effros structure topology. *Math. Scand.* 43 (1978), 369-381.