Mathieus 115 Exomer:

20.a.5.

20.

20.a 5.

20.


ANALYSIS GEOMETRICA
AVCTORE
D. ANTONIO HVGONE
DE OMERIQVE
D.D. JOSEPHO BONET
CAMPODARVE
DICATA
herrera feci
Hisp.s año 1696

ANALYSIS GEOMETRICA SIVE NOVA, ET VERA METHODVS RESOLVENDI TAM PROBLEMATA GEOMETRICA, QVAM ARITHMETICAS QVÆSTIONES.

PARS PRIMA DE PLANIS.

AVTHORE
D. ANTONIO HVGONE
DE OMERIQVE,
SANLVCARENSE.

AD
ILLVSTREM DOMINUM
D. IOSEPHVM
BONET CAMPODARVE.

GADIBVS typis Christophori de Requena, anno Domini 1698.
CVM PRIVILEGIO.

ILLVSTRI DOMINO

D. JOSEPHO BONET CAMPODARVE.

DVplici iure, Ampliſsime Vir, Analyſis mea Te Patronum quærit, à ſua enim officioſa gratitudine impulſa, & à ſtudioſa nobilitate tua correpta ad Te confugit. Nondum embryon titillabat in mente, & iam favores Dominationis tuæ prælibabat, concitabatur fætus & partus tandem in lucem editur, vt ſi quid emolumenti Orbis Mathematicus exinde hauriat, liberalitati tuæ potius, quam ſtudio meo debitum fateatur. Iure ergo hac devincta obligatione, quod beneficium recipit, obſequium reddit. Nil minus, quam Solia, & Murices omni tempore Matheſi fuere patrocinium; non vt tam alta protectione ab invidia muniatur, cum ſibi præcipuum vendicet aſſertas veritates ratione potius, quam authoritate, propugnare; ſed vt in centro quieſcat, & propria explendeſcat ſede, cum nihil magis Principibus, & Magnatibus hoc ſtudij genere analogicum videatur. Iure igitur hoc attracta magnete ſub auſpicijs tuis Analyſis mea, &

quieſcere,& explendeſcere intendit. Tu enim antonomaſticè *El Contador* vocaris, &, quos natura ſortitus es, ſplendoribus fulges. Quid de Te, quid de tuis Maioribus dicam? Modeſtiæ tuæ inſtitutis arceor, obſervantiæ meæ ſtimulis vrgeor; ſed dum vtriſque cogor, me cũctis ſatisfeciſſe arbitror, ſi ea dumtaxat, quæ de Te omnibus ſatis nota ſuſpiciuntur, & de Tuis apud alios fusè ſcripta legũtur, breviter expoſuero.

Ex Cæſar-Auguſta Aragonum Capitali Cæſarea Ciuitate, quà natus, Matritum te penè pubentem contuliſti, vt ardentem ſpiritum in Regali ſervitio, quæſtoris munere, ſi poſſes, exerceres; ſiquidem inter cæteras humanas litteras, quibus operam navaſti, Mathematicus genius in Arithmetica Te ita practicè detinuit, vt nova compendia circa minutias, prius quam duodecimum annum ageres in publicam vtilitatem ederes; ea tamen, quæ ad rationum libros ducendos pertinebant, tibi metipſi ſervans, quod quibuſdam, qui Regia conventione, & authoritate Galeonum Claſſes inſtruendas ſuſceperant, anſam tribuit, vt tanti momẽti negotium dexteritati tuæ commendarent, Te, licet invitum, Gades attrahendi, vbi magis in hac directione mirandum, quam Exteris, quorum ex omnibus nationibus plurimi extant, imitandum præſtaſti. Non tibi propriæ negotiationes ex voto ſucceſſerunt,

runt,quod rursus occasio fuit, vt Te,& quæstorem hæc Regalis Vectigalium arx,& Ciuem hoc Illustrissimum totius Orbis Emporium obtinerent. Nec meritis tuis debiti defuerunt honores. Indiarum Comercij Regio titulo Quæstor condecoraris,& cæterarum expeditionum primus tot solus amplecteris , quot pluribus indigebant Quæstoribus. Nil fit quin directione tua dispositum , & integritati tuæ commissum in Regalis Ærarij cedat incremẽtum, & in mirabilis dexteritatis tuæ laudem, & æstimationem resultet: Quid ad vtrumque non contribuisti laboris ? Ad negotiorum exitus novas subministrasti formulas , & ad calculi facilitatem novas invenisti praxes, ita vt instantaneæ operationes in quantitatibus magnis , eis , quas logarithmi exhibent , longè præstantiores videantur. Novi tamen tabularum canonis clavem tibi reservas , donec publicam facias , quod , ni assiduæ occupationes præpedirent , iam esses executus. Quid mirum , si Te Natura habilem, & paternæ habilitatis hæredem fecerit. Sumptuosissimi pro Antiqua, Augusta, & Regia fundatione , atque celeberrimi pro pio, provido, & prudenti studio Illustrissimorum Senatorum, Xenodochij, quod Cæsar-Augustæ decus, & toti orbi miraculum est , Rationalis fuit D. Orontius Bonet Dom. Tuæ dignissimus Parens, ita præ cæteris in hac facul-

tate

tate expeditus, vt si aliquid arduum occurreret computandum, quod ad Magistratum spectaret, statum illi commissum esset, in quibus insignem peritiam suam, quemadmodum in cæteris in ipso Consistorio eximij consilij sui sententiam vltro contribuebat.

Non tui Gadibus degentis oblita est Aragonia, Te potius litteris sub Regis nomine citatorijs ad generalia Regni Commitia, pro ipsius coronatione celebranda, & iterum, iterumque ad ea deinceps celebrata, convocavit, vt in *Infantionum stamento* ipse interesses, quemadmodum Pater tuus in munera in gubernatione Civitatis, & Regni Quiritibus solis obtinenda, conscriptus astiterat.

Hæc quidem in testimonium nobilitatis tuæ dicta sufficerent; non tamẽ ideo gloriosa cognomina tua silentio relinquam. Floret in Vrbe Jacca primorum Regum sede antiquissima Domus Bonet, quæ in duas divisa Dominos agnoscit, vnius D. Antonium Bernardum Bonet, & alterius D. Petrum Paulum Bonet, quorum hic nepos, ille consobrinus est Dom. Tuæ. Coronatur clarissimo sanguine de La-Sala, & Abarca nodo ita stricto, vt vtraque familia La-Sala, & Bonet Capellæ S. Michaelis in Cathedrali Ecclesia sitæ, atque à Joanne de La-Sala, & Joanna Bonet consortibus fundatæ, vsu, dominio, & Patronatu æquè fungantur, quemadmodum Capellæ in foro vulgo *de* *el Campo* erectæ ad oſtenſionem, quæ quotannis fit corporis S. Oroſiæ Pyreneorum montium Patronæ, dominio fruuntur, & concurrentià cum Capitulo Eccleſiaſtico, & Sæculari Senatu eo die, qui in perpetuam memoriam Sacri Corporis traditionis, anno 759, Iudice Ciuitatis Martino de La-Sala factæ, feſtus celebratur.

Arduum equidem foret, nec hæc epiſtola capere poſſet, ſi clariſsimas ſtirpes La-Sala, & Abarca, quibus præter alias, tua ſplendet illaqueata, ſeorſim deſcribendas ſuſciperem. De ſtricta tamen vnione ambarum aliquid ſaltem referam. Dominus Domus Abarca, Arcis Olim in qua ipſius progenitor D. Sancius Abarca, huius nominis primus, coronatus fuit Rex, Palatij hodie Comitis de La-Roſa, trium quas habebat filiarum vnam Duci Gandiæ, alteram Duci Villæformoſæ, & tertiam Domino Domus La-Sala vxores tradidit. Conſanguinitatem alia connectarunt connubia. D. Franciſcus de La-Sala vxorem duxit D. Franciſcam Abarca, cui parentes fuere D. Philipus Abarca Dominus eiuſdem Domus, & D. Franciſca Iñiguez æquè Regio ſanguine D. Garciæ Iñiguez ſecundi Regis Suprarbis, primi Garci-Ximenez, & Reginæ D. Iñigæ primogeniti, procreata. D. Joſephus de La-Sala Dominus Samanès in Domo Abarca cum filia Domini Gauini matrimonium contraxit.

D. Pe-

D. Petrus de La-Sala, & Abarca Domui Ximenez pariter à Regibus descendenti nuper Sororem dedit in matrimonium cum filio eiusdem Domus, cui mater erat D. Hyeronima Bonet, consobrina tua, & D. Michaelis Hyeronimi Bonet in Cathedrali Jaccensi Ecclesia Canonici, Viri ingenio, prudentia, & litteratura celeberrimi dignissima Soror. Nec vlterius pergam quin prius prædicti D. Petri, quem hospitem tibi carissimum cognovi, mortem tecum condoleam. Quid non expectandum erat à nobili Iuvene, qui Regis servitio deditus, dux iam factus, & Septam profectus ita accensum spiritum contra Mauros exercuit, vt magis quam hostibus proprio ardori succubuerit: sistam tamen cùm tibi D. Josephus Antonius Torrejon La-Sala, & Abarca consobrinus tuus tibi solamini fuerit, qui morte D. Petri successor Domus, & spiritus hæres ipsius memoriam suscitare, & Maiorum suorum vestigia insequi aggreditur, cui si arma placent, ipsius Pater D. Josephus Torrejon La-Sala, & Abarca, qui pro servitijs, & Regi, & Patriæ factis Castelli Speluncæ Castellanus effici tandem meruit, exemplar præclarum est. Si vero litteris incumbere lubeat, quid non imitandum præstat Doctissimus avunculus eius D. D. Blasius Torrejon La-Sala & Abarca, in Cathedrali Jaccensi Ecclesia Archidiaconus Gorgæ, Olim Ecclesiæ, Iudex, & Vicarius

rius Generalis Archiepiſcopatus Hiſpalenſis, nunc tandem in S. Tribunali Aragoniæ Apoſtolicus Inquiſitor, qui ita eruditus, & prudens eminet, vt omnes, qui eum noverint, tam voce, quam ſcriptis ſuaviter in ſtuporem rapiat.

Non ſolum Jaccæ Domus Bonet floreſcit, huius enim cognominis viris illuſtribus ditatæ plures extant in Orbe, quarum illa origo. Ita earum, quæ per totam Aragoniam diſperſæ, nobiliſsimæ ſuſpiciuntur, tua illi propinquiſſima fatetur; licet non deſit alia quæ ſibi principium omnium adiudicet. Sed quamvis propter immemorialem antiquitatem anceps ſit origo, ſtat pro te monumentum, Vulgo *Salva de Infançonia*, quod in Barcinonenſi archivo cuſtoditur, vnde conſtat Regem Alphonſum in Commitijs Oppido Alagon, anno 1289 celebratis, Joannem Bonet civem Oppidi Alfajarin claro ſanguine huius cognominis procreatum, & Oppido Grañen oriundum declaraſſe, ex quo ædes extant in oppidis ipſis, necnon Sallen, & La-Freſneda.

Ex prædicto Oppido Alagon Matritum profectus illuſtris. Vir D. Ioannes Paulus Bonet Monaſterij Clariſſarum Virginum Patronus, Ordinis S. Jacobi Eques, Regis Philippi IV. Dapifer, atque in Sacro, & Supremo Aragoniæ Conſilio ſuæ Maieſtatis à ſecretis, ingenioſiſsimum librum mutos loqui docentem in lucem edidit, atque mirabiles dotes, quibus præditus erat, ad Galliam, Italiam, & Mauritaniam Legatus ostendit.

In Valentia D. Jacobus Pallàs Regio sanguine cretus de Domo Pallàs in Cattalonia sita, Comitum de Sinarcas progenitor, D. Elisabetham Bonet vxorem duxit, & tanti Viri virtute, & splendore non parum condecoraris.

Nec deest qui ex hoc Principatu Cattaloniæ Bonetes originarios faciat, asserens exinde se in Aragoniam contulisse, quando sub victoriosis Regis D. Jacobi vulgo el *Conquistador* vexillis hi fortissimi viri contra Mauros belligerantes ita virtute, & strenuitate præclaruerunt, vt recuperatà Valentia, & subiugatis Balearibus tantum in Maiorica territorij Nicolaus Bonet nactus fuerit, quantum Oppidum Santanì mandato Regis D. Jacobi II. anno 1300 fundatum, & alia plura occupare videntur.

Nec tantæ gloriæ exors remansit Nauarra: Extat enim exinde Castellum, cui insignia sunt argentea Aquila expansis alis, quæ ingenij, & audaciæ symbolum heroicum cognomen Bonet posteritati commemorat.

Nec Gallia hac gloria caruit, absque alia enim origine, quin immemoriali huius clarissimi cognominis possessione, Viris omni tempore illustribus vigentia, in oppidis Poyton, & Nivernois palatia eminent.

Italia tandem quot, quantosque Viros litteris,

teris, & armis, immo, & ſanctitate celleberrimos, hoc nobiliſsimo cognomine inſignitos, ſortita fuerit, quis recenſebit? Pro me loquatur Joannes Petrus Crecenſis, qui dum Amphiteatrum Romanum ſcriberet, iam à 1200 retro annis Bonetes floruiſſe aſſerit, eorumque gloriæ anguſtos totius Orbis terminos exiſtimat. Inter plurimos, quorum geſta refert, magnum illum Senatorem Bonete, quo Mediolanum conſcripto Patre honorabatur, commemorat, & Cremonam, quia tanti Viri patria, inter alia, fælicẽ reputat. Venerabilem Cominum Bonet, inter alios martyres æquites S. Afræ Brixiæ annumeratum, comminiſcitur, qui pro defenſione S. Romanæ Eccleſiæ, dum ipſa contra Henricum Germanorum Regem, ob ſchiſma, quod in Italia proteruus ſuſcitaverat, bella gerebat, ſanguinem effudit. Euſebium Bonete fortiſsimum Chriſti militem in eodem bello calamo, & enſe dimicantem deſcribit. Sanctum tandem Euſebium (ne omnes repetam) quem ſanguine, & virtutibus ipſius Magiſter S. Hyeronimus nobiliſsimum extollit, nec ipſius æmulus Rufinus perficiari audet, immò S Eccleſia in eiuſdem lectionibus approbat, hac illuſtriſſima ſtirpe procreatum affirmat.

Præter Caſtellum, pileum, ſive Virretum (quod Itali Bonete proferunt, nos vero ſi more Jaccenſi vtimur, aut Cattalonico dicimus Bonet) ratione huius Inclyti cognominis, vt

pote

pore fortitudinis, & ingenij expreſsio propria, nobilitatis tuæ iure inſignia conſervas. Sunt qui litteris principium tribuunt, alij vero, qui potius quam Minervæ, Martis hæredes eſſe gloriantur, pileum Regis, quadam traditione, fuiſſe aſſerunt, quem perditum expugnato Caſtello, è hoſtium manibus extorſit Vir ille illuſtris, & fortis, qui propterea Caſtello, & pileo inſignitus, & Bonet cognominatus ſtirps creditur omnium. Litteris nigrum Virretum favet in aliquibus Scutis depictum; in alijs vero purpureus pileus arma reſonat, vtrumque profecto eis, qui tot ſæculis, litteris, & armis pares fulſerunt convenire videtur.

Quod autem ad aliud attinet cognomen Campodarve brevius me expediam, ſed non minora dicam. Illi fortiſsimi Viri, qui Æterni Regis Vexillum, dum Mauros tanto tempore Hiſpanas Prouincias infeſtantes in Campis Jacetanis profligabant, ſuper arbore aſpicere meruerũt, Inclyti ſunt progenitores tui. Quod quidem miraculum campum, qui paleſtra, montem, qui teſtis, Regem, qui dux tantæ victoriæ fuerant, hoc glorioſo cognomine honoravit. Rex enim Suprarbis dictus fuit, primus ſcilicet Aragoniæ, Progenitor vero tuus Campodarbe, ſive Campodarve cognominatus, an quia in ipſo prælio ſtrenuus miles præ cæteris excelluerit, vti & ipſe Campus etymon ſumpſerit, an vero ab ipſo Regio ſangui-

ne

ne originem traxerit, apud Cronologicos non invenitur. Hoc quidem postremum Robur & Crux, quæ in miraculi testimonium primi Regis insignia sunt , & Scutum venustanr tuum suadere videntur. Verum quomodocumque sit antiquissimam huius cognominis nobilitatem Castella , quorum alterum in Oppido Campodarve in prædicto Campo, eodem nomine fundato, alterum in Oppido Boltaña, æquè testantur. Istius Dominus, Præsentis avus, sororem habuit D. Catharinam Campodarve, quam paternam aviam obtinere , & tam præclari sanguinis particeps fieri meruisti.

Te igitur beneficum, Mathematicum , & generosum Analysis mea Mæcenatem iure merito exquisivit. Officia gratitudinis meæ benignus accipe , & amicitiam erga me iam pridem habitam prosequitor , atque in publicum emolumentum sub diuina protectione fœlix viue, diu viue.

Dominationis Tuæ

Obsequentissimus Servitor

D. Antonius Hugo de Omerique.

R.A.

R. A. P. JACOBI KRESA,
Societatis Jesu in Collegio Imperiali Matritensi Mathematum Professoris Regij
CENSVRA.

POTENTISSIME DOMINE.

EX mandato Celsitud. V. legi librum, cui titulus: Analysis Geometrica, *Auctore D. Antonio Hugone de Omerique cive Gaditano, quem in lucem publicam edere desiderat. Perlegi opus insigne, nec mole mirandum, nec quæstionibus, quas pertractat peregrinum, sed novitate, ac facilitate methodi rarum, & vniversalitate resolvendi problemata singulare, quæ enim ab alijs per varios gyros, & labyrinthos deprehensa tandem fuère, vno eodemque tramite percurrit, & invenit, & multa solo proponendi modo Resoluta iam ostendit, & demōstrat; OEdipum dicerem in multis, qui Problema vno versu, non in medium, sed in vniversum orbem currere compellat. Multi Analysim speciosam tentarunt, & insignia monumenta Reipublicæ literariæ reliquerunt, multi resolutiouem Geometricam tractarunt, & egregiam Mathematis operam in eo locarunt, sed hæc Analysis Geometrica vtrumque amplexa fæliciorem sortem nacta mihi videtur in fertili solo Bœticæ, & celeberrimo portu Gaditano, vt eius Resolutiones vel poma Hesperidum aurea, vel lectas Americæ opes non in-*

injuria dicere possem, si conferantur cum Authoribus, quos ad marginem citat dum eadem Problemata proponit. Selegit rara Quæsita Antecessorum, & quos fœlices reperit quia tempore præcesserunt in proponendo, fœlicius antecedit in resolvendo, aperto latissimo philomathis campo percurrendi cætera, quæ Antiquis vel invia, vel prærupta fuerunt. Quare typis dignissimum opus censeo, futurum gratissimum omnibus, & Reipublicæ literariæ perutile. Sic censeo, salvo, &c. In Collegio Imperiali Matritensi Societatis JESV. 13. Decembris 1697.

Jacobus Kresa.

SVMMA PRIVILEGIJ.

CArolus II. Dei Gratia Hispaniarum Rex, &c. Diplomate suo sanxit, ne quis librum cui titulus est: *Analysis Geometrica*, Authore D. Anton. Hugone de Omerique citra ipsius authoris voluntatem proximis decem annis imprimat, aut alibi terrarum impressum in Castellæ Regni ditiones importet, venalemque habeat: qui secus faxit confiscatione librorum, & alià gravi pœna multabitur. Vti latius patet in eodem diplomate dato Matriti 21. Decembris 1697. à D. Francisco Daza Regio Secretario referendato, & apud D. Raphaelem Saenz de Maza registrato.

LICENTIA ORDINARII.

D. D. Antonius Portillo, & Cardos Inquisitor Ordinarius, Vicarius Generalis Matritensis ad impressionem huius libri, cui titulus est: *Analysis Geometrica*, Authore D. Antonio Hugone de Omerique, licentiam concessit, vt latius ex ipsa licentia constat. Data Matriti die 5. Decembris 1697.

TAXA.

TAxatum est folium sex marauitinis, vt patet ex certificatione D. Raphaelis Saenz Maza. Datà Matriti die 27 Januarij 1698.

R.A.P. JOSEPHI DE CAÑAS Societatis Iesu in Collegio Gadicensi Olim Matheseos Professoris Regij, de Analysi Geometrica D. Antonij Hugonis de Omerique

IVDICIVM.

QVi primus ferri ex affrictu Herculei lapidis verticitatem, atque immobilem in vtrumque polum conversionem sagaci observatione notavit, is profecto ingentium vtilitatum, & emolumentorum segete humanum ditauit genus, & sibi tam præclari inuenti gloriâ nomen immortale quæsiuit. Nota erat satis superque veteribus illis philosophis huius lapidis raptrix ferri vis: tamen maximam illam, & nobilissimam virtutem, quâ scilicet ferro illitus, & affrictus illud Boream versus asiduò spectare faciat eorum observationes nè verbo quidem attigere. Hinc totam veterum nauigandi Occeanum solertiam in notitia stellarum Promontoriorum, terrarum, littorumque diversitate positam; qui si in alto mari vbi præter cœlum, & vndam nihil pateret, tempestatis sæuitia depulsi deprehenderētur, nauis dirigendæ disciplinam nullam tenuerunt aliam, quam quæ Astrorum, Solis, & Lunæ situ, motuque commonstrabatur; si tamen casu non infrequenti cœlum nubilum, aut obscurum Astrorum inspectione prohiberet, tum imaginaria quadam locorum, ad quæ tendebant, conceptione, aut visis fortè marinis avi-

avibus, aut demum ventorum impetu, & aquarum cursu, pro itineris duce vti cogebantur. Quo factum est vt immensa telluris spatia nostra ætate detecta, & toto interjecto occeano diuulsa nisi tam diuini inventi beneficio, vt antiquis ignorata ita nobis perpetua oblivione sepulta mansissent. Haud absimile quidem Euclidianis elementis accidisse neminem mihi inficiari existimem, qui Hugonianam istam Analysim sedula meditatione perpenderit. Enim vero Geometricam Analysim hucvsque in cassum plurimi è nobilissimis huius ætatis ingenijs (vt veteres omittam) tentavere, in quibus palmam sibi prærripere ausi sunt Vieta, Descartes, Schooten symbolis quibusdam adjuti latentis quantitatis, & obuolutæ speciem, & imaginem subobscure repræsentantibus. His tamen sæpe longis itineribus portum tenuere, sæpius viæ difficultate, quasi vi tempestatis depulsi, retro acti sunt; numquam tamen Geometrica demonstratione (licet de ijs concinnandis eruditum ediderit tractatũ Schooten) viam, quam monstrarunt vtcumque sternere potuere. Inerat ea vis Euclidianis elementis: abdita tamen, & incomperta, vt in magnete verticitas, quam non casu aliquo, vti de magnete perhibetur, sed acri & pœnè diuino ingenio, nec minus indefesso studio primitus detectam novo isto connatu à lucidissimo, & eximio Viro D. Antonio Hugone de Omerique serio pronunciare non abnuam. Cur hæc asseram? In promptu est Analysis ipsa, dum seuera, sed attenta meditatione percurra-

ratur: maiora præstat quã spondet. Hucusque littora, & promontoria in Geometrica navigatione legebantur: nunc Occeanum totius Geometriæ, quantus quantus est, certis itineribus adiri posse pronũcio: atque adeo tantam huic facultati nostra ætate, & vno opere isto accessionem factam, quantam retro actis quindecim sæculis suis in eruditis elementorũ commentationibus Arabes, Græci, Latinique non fecere quidem, sed facturos se receperunt. Si quis etiam nunc ingenio suo confisus inquisitionem de integro suscipere affectet, mihi assensurum non despero, nisi eo præiudicio agatur, quo maxima pars hominum præsentibus non æqua in antiquitatem propendet, & credit nos antiquorum pensa, & inventa longo intervallo æquare non posse; & si noua alicuius scientiæ accessio tentetur, hunc huiusce rei euentum fore, vt aut in ipsa incidat, quæ ab antiquitate libata sunt, aut sanè in alia, quæ ab antiquitate iam pridem indicata, & reiecta in oblivionem iam merito cessere; aut spreta gente, & facultate humana vtriusque temporis, sive antiqui, sive novi, auctiore scientiarum statu plane desperato, quæ obstetricante suo, aut suorum labore non parturiunt, sensuum fallacias, & iudicij infirmitatem reputare non dubitant. At ea est huius scientiæ maiestas, quæ sibi suis calculis authoramentum conciliet; & ea est huius noui operis solidarum demonstrationum constantia, & acolouthia, vt quemlibet quantumvis renuentem, vel nuda tantum elementorum notitia imbutum facili-

li

li negotio in ſentētiam trahat. Quo maximæ auctori amiciſsimo gratiæ habendæ ſunt, qui Rempublicam litterariam ætate, & ſeculo adeo eruditis tali honorario auxit, quò nullus profectò aut excogitare ſolertius, aut capeſſere fortius, aut exequi ſubtilius, aut perficere fœlicius potuiſſet. Et à quo, vt à maximo huius ætatis ingenio, mihi longa conſuetudine noto, maiora ſperare auguror: faxit Deus, illi vita ſuperſit: altiorem ſi ſupereſt, ſtatum Geometria, quam hucvſque obtinuit, è Bœtica noſtra Hiſpania nanciſcetur. Sic opto, & D.O.M. præcor. In Domo Profeſſa Hiſpalenſi Societ. Ieſu Kalend. Februar. A. M.DC.XC.VIII.

Joſephus de Cañas.

R. A. P. Caroli Povvel

Societatis Jeſu in Collegio Gadicenſi Matheſeos Profeſſoris Regij in Analyſi Geometrica D. Antonij Hugonis de Omerique

IVDICIVM.

N*Obile, vt creditur, foret metallum argentum viuum, vulgo mercurius, ſi ſua non ſibi obeſſet ſubtilitas, nam pondere auro, colore argento affinis, principiumque agnoſcitur vniverſale omnium, ſed potius his omnibus renunciat, leueſque evaneſcit in auras, quam medijs quibuſcumque ad ſoliditatis finem perducatur. Non hoc vnicè de in-*

inconſiſtenti hoc terræ dono profero; habet Mathematica, quæ cæteroqui ſolidas confert ſcientias, etiã ſuum mercurium, Analiticam inquam ſtatiça virtute æquilibrantem potentias, Arithmetica ſpecie pollentem, principiumque vniverſalis Matheſeos; ſed vſque nunc ſoliditatis geometricæ impatientem. Cum eſſet in ſtatu pure numeroſo, qualem eam nouerat Diophantus, vſque adeo informis erat, vt confuſis quantitatibus primitivis, nil niſi rem diſcretam, hancque in particulari tantũ, cuderet, donec Franciſcus Vieta prædictas quantitates contra violentiam concuſsionum ita ſymbolis involuit vt etiam rem continuam, & in vniverſali proderet: Verum quæ ſymbolis incluſi, tam valide imaginationi præcluſit, vt ſummo Franciſci à Schooten nixu, vix aliqua improbe, nedum in concinnè inde excludi potuerint. Nunc tandem Eximius Vir D. Antonius Hugo de Omerique, Analyſim olim à Platone ideatam, ad Geometricam conſiſtentiam, quod vnice deſiderabatur, perduxit, cathegoriamque nobilium ſcientiarum hoc mercurio in pretioſum metallum conſolidato auxit. Rem vere magnam! Non tamen, vt in magnis fierit ſolet, auget propterea apparatum, mediaue quibus tantum finem aſſequitur, quin potius miſſas facit Vietæ ſpecies vt expeditius, materiam ſub proprijs coloribus contemplatur vt clarius, rerum propenſionibus attendit, vt connaturalius, incognita æque omnia in communi eorum cauſa inſequitur vt compendioſius, in ſimplicioribus quantita-

ti-

tibus versatur, vt facilius, prospicit gressus faciẽdos, vt securius, scopum expandit vt certius, Geometricè licet argumentãdo Arithmetica complectitur vt vniversalius, verbis cooperatur vt efficacius, ritè concinnata adhibet elementa vt elegantius, differentes aperit vias vt iucundius, & ex certa scientia præeligit commodiores vt vtilius problema simul solvat, construat, & demonstret. Elementa inquam ritè concinnata adhibet, nam quæ sexcenti alij Interpretes commentati sunt, ideo formidine cuiusque legentis animum inquietarunt, quod laborarent ignorantia huiusce finis, sive, vt ita dicam, obiecti attributionis vnicè docentis quæ & qualia esse debeant elementa ad se conducentia; vnde asserere audeam plus emolumenti ex huius analyseos introductione in elementa redundare, quam ex sexcentorum hucvsque Interpretum lucubrationibus. Hanc nudam potius descriptionem, quam exquisitam laudem expediuit complacentia mea quadriennis, quam in dies augere non desinit, iugis huius analyseos exercitatio, Deo de re tam vtili dentur gratiæ, Authori congratulatio, mihi detentionis in limine venia. In Collegio Gadicensi Societatis Jesu 20 Januarij 1698.

Carolus Povvel.

LEC-

LECTORI

EArum, quas inter vitæ varietates digerere potui, has lucubrationes Geometricas tibi Lector amice ſincero impertior animo. Vnum rogo, propoſitiones, tam quas cum Authoribus in margine citatis conferre poteris, quam reliquas à me excogitatas, ante omnia diſcutere velis, methodumque ſi habueris potiorem, Orbi Mathematico, qui tot ſæculis anxius eam inquiſiuit, decludere digneris, primus ero, qui tibi grates referam; ſin vero veram viam analyticam in hac prima parte aperuiſſe videar, gratus incede, benignus corrige, fœlix promove, & reliqua, quæ ſuperſunt, expecta. Vale.

ERRORES CORRIGENDI

Pag.	*Lin.*	*Error.*	*Corrige.*
3.	1.	conceſsit	conceſsi
6.	17.	media	mediam
7.	8.	quorum	quarum.
20.	20.	vel	&
33.	1 & 13	dimiando	dimidiando
38.	7.	4.	3.
45.	6.	ſit	ſi
	15.	permant	perm.ant.
	16.	vt *c.b.b.*&	vt *c. b.* &
49.	2.	Societati	Societatis
50.	23.	multiplicator vel diviſor factus	multiplicationem, vel diviſionem factam
51.	15.	ſubtractio	ſubtrahendo
	33	deprehentur	deprehendetur
53.	36.	imprimam	impropriam
55.	23.	extremas	extremos
	24.	mutu	mutua
	25.	productioni	productione
57.	25.	E	Et
60.	2.	ſubtractionem ratione	ſubtractionem rationum
63.	30.	Joannis	Joannes
68.	14.	argumentatur	argumentamur
69.	4.	idcm	idem
70.	6.	4*bxa*	4*bax*
71.	15.	concludẽtem	concluderem
77.	14.	eadem	eamdem
84.	9.	cadet	cadat
	18.	*fb*	*fc*
88.	6.	ſit	ſi
	11.	e	&
	13.	rec	rectos
89.	4.	omnibus	cum omnibus

	7.	altitudinem	altitudinum
91.	14.	ſufficere	ſufficeret
	21.	vnam	vna
96.	7.	linea	lineæ
	19.	animadvertiſſe	animaduertiſſet
108.	in fig.	*a.b.x.a.q.*	*a.b.x.c q.*
113.	14	*bg*	*kg*
	16.	*bk* ad *bg*	vt *bk* ad *kg*
114.	7.	*ac* ad *bc*	*ab* ad *bc*
117.	10.	inveniatur	inveniantur
122.	21.	$24\frac{2}{1}$	$24\frac{1}{2}$
135.	1.	numerus	numeros
140.	8.	quod ſi	ſi
141.	14.	at	ad
152.	11.	$\frac{1}{2}bx$	$1\frac{1}{2}bx$
158.	penult.	ſit	ſi
169.	13.	*xb*	*xc*
	14.	*xc*	*xb*
173.	22.	differentiæ	aggregata
177.	11.	eſt	&
180.	11.	ſit	ſit ſi
184.	7.	*ab*	*bg*
	8.	*bg*	*ab*
189.	2.	triangulæ	triangula
192.	7.	1 *ab*	$\frac{1}{3}$ *ab*
198.	1.	manifeſtum	manifeſta
199.	13.	fueri	fuerit
207.	5.	*bc*	*ac*
210.	5.	*axd*	*bxd*
217.	11.	*aby*	*dby*
229.	11.	*yzv*	*yzx*
233.	in fig.	deeſt alia recta *bx*	
242.	in margine	17.	27.
250.	5.	ergo	ergo rectangulum *abx* ad
260.	16.	ſit	ſi
270.	18.	*ayb*	*ayc*
279.	9.	*mp*	*md*

281.	15.	æquales	æqualia
293.	11.	*bax*	*abx*
303.	20.	itaque rectangulum *gyk* quadrato *m* erit æquale. Dele totum.	
305.	16.	vrſupandæ.	vſurpandæ
318.	11 & 13.	$7\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$
323.	5	*bc* ad *bx*	*bd* ad *bx*, & divid. vt *ax* ad *xc* ita *xd* ad *bx*.
326.	14.	$+2\frac{1}{2}xb$	$+12\frac{1}{2}xb$
333.	in fig.	*k*	*x*
335.	10.	*g* & *k*	*g* & *h*
	ibidem	ijs	ea
347.	16.	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$
360.	8.	elyſim	ellipſim
361.	28.	*xy*	*vy*
364.	10.	ſi	ſit
392.	8	*bc*	*ac*
405.	18.	quartam	quartum
	21.	ſi	ſic
	30.	75	95
	32.	integris	in integris
408.	9.	nuris	numeris
409.	11.	ex	eſt
412.	penult.	7.	17
413.	9.	ſit	fit
414.	13.	*aya* — 216	*aya* — 219
416.	16.	minime	minimæ
417.	8.	emergi	emergere
418.	9.	*ya* + q	*yax* + q
427.	5.	22	42
	6.	41	21
429.	2.	ſuas	ſuos
430.	11.	radices	radices ſemiſsium
432.	1.	binomi	binomij
434.	5.	differentia	differentiæ
437.	30.	cum 1 & 2	cum 3 & 2
440.	antepen.	quadratum	quadratum ſinus.

ANA.

ANALYSIS GEOMETRICA INTRODVCTIO.

QVID SIT ANALYSIS.

POstquam elementis Geometricis instructus fuerit, qui Geometra vocari cupit, fructumque colligere laboris sui: aliquam sibi viam paratam habere debet, cuius ope vim, & facultatem cuiuscumque Geometricæ propositionis resolutionem inveniendi acquirat.

Hæc quidem via, quæcumque illa sit, analysis, seu resolutio dicitur, & omnium consensu ita definitur. *Assumptio quæsiti tamquam concessi, per ea, quæ deinceps consequuntur ad aliquod concessum procedens.* Regressus verò à concesso ad quæsitum *Synthesis*, seu compositio nominatur. Verum enim vero ista definitio nihil nobis certi promittit. In assumptione quidem quæsiti tamquam concessi aliqua inest interdum difficultas, in eo consistens, quod data, & quæsita adcommodam contiguitatem reduci debeant. Iam verò posito quæsito tamquam concesso, quænam ex multis quæ deinceps consequuntur eligemus? Quorsum tendimus? Hæc omnia profecto nobis incerta reliquerunt Authores, vnde fit, quod quando abstrusa, & intricata inter data, & quæsita est connexio, hæreat analysta, quò se convertat nesciens. Fateantur omnes, neque veterum quisquam perficiari auderet cum postquam tot, tantaque volumina hac de re conscripsissent, vt nobis tradit Pappus initio libri septimi; nullam tamen habuisse veram rationem resolvendi, ex ipsorum propositionibus non temerè suspicentur iuniores. Ex recentioribus autem Algebræ speciosæ cultores hanc vim resolvendi sibi adiudicare videntur. Vtinam æquè facilis, ac resolutio algebrica, esset geometrica demonstratio; sed tantum abest, vt postquam multos annos in concinnandis demonstracionibus geometricis ex calculo Algebrico consumpsissem, violentam esse methodũ in Geometricis putaverim, viamque omnino Geometricam ineundam concluserim.

Analysim igitur nostram nos ita definimus.

Assump-

Aſſumptio quæſiti tamquam conceſsi, per neceſſarias conſequentias ad certum, & determinatum finem progrediens. Hæc equidem definitio nobis ſecurum greſſum promittere videtur. Conabimur promiſſa adimplere ; ſed quoniam arduam nimis aggredimur materiam, ſcopum tetigiſſe nobis ſuadere non audemus; ſuſpiciendos potius tantorum virorum, qui de reſolucione ſcripſere veneramur labores, atque fælicioribus ingenijs noſtros iudicandos, promovendoſque, ſi forte conducere viſi fuerint, relinquimus.

DE FINE ANALYSEOS.

OMnium problematum, quæ proponi poſſunt, reſolutio ita ſe habet (mirabile dictu) vt evolutis eorum conditionibus, magnitudo incognita, alij magnitudini notæ æqualis tandem appareat, vel tantum neceſſe ſit medium, ſeu quartum terminum proportionalem, vel duos terminos, quorum ſumma, aut differentia nota ſit, duobus datis terminis reciprocos invenire. Vel, quod in idem recidit: ex quatuor terminis proportionalibus datis extremis, dataque ſumma, aut differentia mediorum, ſingulos exhibere. Quod cum ita ſit, hoc problema, quod paſsim conſtruendum occurrit, in elementis expreſſum haberi debebat. Sunt

 enim

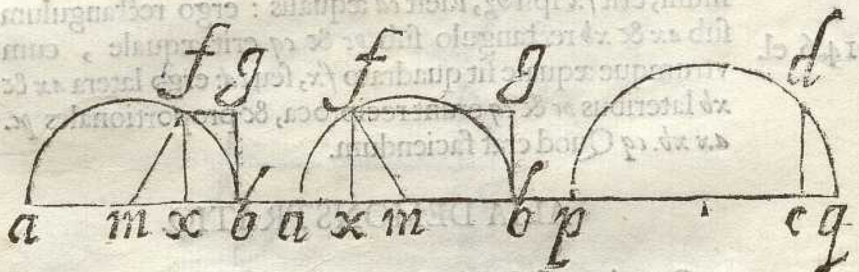
enim elementa quædam principia demonstrata, & ab omnibus ſuppoſita, vt à probationibus, & effectionibus communibus, & frequentibus abſtinere liceat. Itaque illud oſtendendum, & elementis adiungendum iudicavimus. Cæterum cum magnitudinum reciprocarum, vel vtraque linea recta, vel vtraque planum eſſe poſsint, vel denique mixtum ex vtraque altera ſit linea recta, & altera planum (quo in caſu ſumma, aut differentia petitur ab ipſo plano, & potentia rectæ) hoc loco de duobus primis accidentibus, quæ ad problemata plana pertinent, agemus. Tertium veró, & quæ ex eo oriuntur ad problemata ſolida ſpectantia, vt in noſtræ methodi explicatione commodius procedere poſsimus, ſpeciali tractationi ſolidorum reſervabimus. Hoc tamen animadverſum volumus, problema planum ideó vocari, non quia in illo de planis agitur; ſed quia illius conſtructio vna ad ſummum media proportionali indiget. Solidum vero non quia ſolida tractantur, quod in problemate plano contingere ſolet; ſed quoniam duas ſaltem medias proportionales opportet inuenire.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA

ELEMENTIS ADDENDA.

DVAS RECTAS, QVARVM SVMMA, aut differentia nota sit, duabus rectis datis reciprocas invenire.



DATA SVMMA.

Oporteat primo duas rectas invenire *ax* & *xb*, quarum summa sit data *ab*, datis *pc* & *cq* reciprocas.

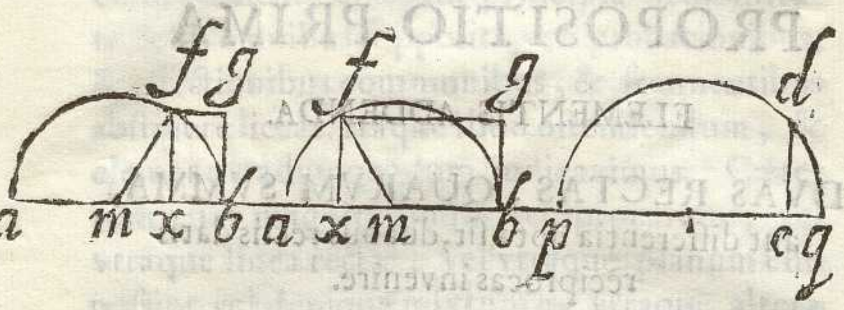
CONSTRVCTIO.

Inter *pc* & *cq* media inveniatur *cd*, cui æqualis ex vtrovis termino *b* rectæ datæ *ab* perpendicularis excitetur *bg*, 13.6. el. ipsique *ab* parallela ducatur *gf*, occurrens semicirculo super eandem *ab* descripto in *f*, & demittatur perpendicularis *fx*. Dico *ax*. *xb*, quarum summa est data *ab*, reciprocas esse datis *pc* & *cq*.

DEMONSTRATIO.

Cum enim ex constructione sit *bgfx* parallelogram- 34.1. el.

mum,



mum, erit *fx* ipsi *bg*, ideſt *cd* æqualis: ergo rectangulum
14.6. el. ſub *ax* & *xb* rectangulo ſub *pc* & *cq* erit æquale, cum vtrumque æquale ſit quadrato *fx*, ſeu *cd*: ergo latera *ax* & *xb* lateribus *pc* & *cq* erunt reciproca, & proportionales *pc. ax xb. cq* Quod erat faciendum.

ALIA DEMONSTRATIO.

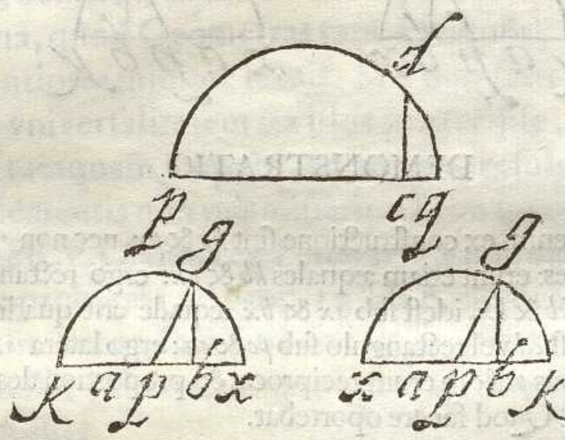
5. 1. el. Quoniam *ab* diviſa eſt æqualiter in *m* & inæqualiter in *x* erit rectangulum *a x b* cum quadrato *mx* æquale qua-
47. 1. el. drato *mb*, ſeu *mf*; ſed quadratum *mf* æquatur quadratis *mx* & *xf*: ergo quadrata *mx* & *xf* æqualia erunt rectangulo *axb* cum quadrato *mx*, & dempto communi quadrato *mx*, remanebit rectangulum *axb* æquale quadrato *xf*, ſeu *cd*, ideſt rectangulo *pcq*: ergo latera *ax* & *xb* lateribus *pc* & *cq* erunt reciproca, & proportionales *pc ax. xb cq*. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

Oportet autem rectam *cd*, mediam ſcilicet inter reciprocas datas *pc* & *cq*, non maiorem eſſe, quam *mb*, ſemiſumma videlicet partium reciprocarum quæſitarum *ax* & *xb*; aliter enim ſemicirculus *afb* rectam non caperet *fx* ipſi *cd* æqualem, vnde impoſsibile erit problema illud, quod talibus

libus partibus construi debeat, vt ex ipsa constructione satis apparet. Prætereat quoniam in constructione liberum est alteram partem *ax* iam pro parte maiore, iam pro minore constituere, poterit propterea problema talibus partibus construendum non raro duas accipere solutiones. Quod semel monuisse sufficiat.

DATA DIFFERENTIA.

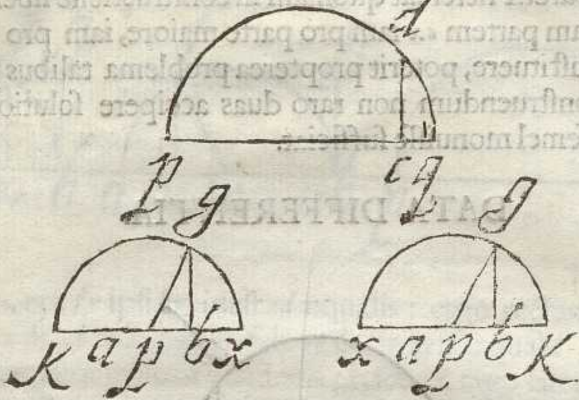


Oporteat secundo duas rectas invenire *ax* & *bx*, quarum differentia sit data *ab*, reciprocas datis *pc* & *cq*, vel ipsi *cd*, quæ media est inter illas.

CONSTRVCTIO.

Ex vtrovis termino *b* rectæ datæ *ab* perpendicularis erigatur *bg* ipsi *cd* æqualis, bisectaque *ab* in *p* ducatur *pg*, cuius intervallo semicirculus describatur *k g x*. Dico *ax*, & *bx*, quarum differentia est data *ab*, reciprocas esse datis *pc* & *cq*, seu ipsi *cd*.

DE-



DEMONSTRATIO.

Cum enim ex constructione sint *kp* & *px*, nec non *ap* & *pb* æquales: erunt etiam æquales *kb* & *ax*: ergo rectangulum sub *kb* & *bx*, idest sub *ax* & *bx* æquale erit quadrato *bg*, hoc est *cd* vel rectangulo sub *pc* & *cq*: ergo latera *ax* & *bx* lateribus *pc* & *cq* erunt reciproca, & proportionales *pc*. *ax*. *bx*. *cq*. Quod facere oportebat.

DETERMINATIO.

Possumus in constructione alteram partem *ax* iam pro parte maiore, iam pro minore accipere, vnde aliquando problema talibus partibus construendum duas poterit solutiones admittere.

ALIA DEMONSTRATIO.

6.2.el. Quoniam *ab* divisa est bifariam in *p*, & ei adijcitur *bx*, seu *xa*, erit rectangulum sub *ax* & *bx* cum quadrato *pb*
47.1.el. æquale quadrato *px*, idest *pg*, seu quadratis *pb* & *bg*: ergo demp-

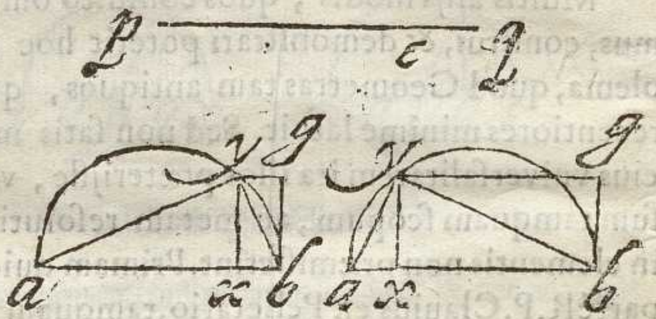
dem pto communi quadrato *pb*, erit rectangulum ſub *ax* & *bx* æquale quadrato *bg*, ideſt *cd*, vel rectangulo ſub *pc* & *cq*, atque latera *ax* & *bx* lateribus *pc* & *cq* erunt reciproca, & proportionales *pc. ax. bx. cq.* Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Multis alijs modis, quos conſulto omittimus, conſtrui, & demonſtrari poterit hoc problema, quod Geometras tam antiquos, quam recentiores minime latuit. Sed non ſatis miror eius vniverſalitatem ita illos præterijſſe, vt ipſum tamquam ſcopum, ac metam reſolutionis in elementis non præmiſſerint. Primam quidem partẽ R.P. Clauius ex Pelletario, tamquam ſpeciale problema, ad prop. 13. lib. 6. elementorum attulit. Secundam ſanè eadem facilitate afferre potuiſſet, ſi vtrarumque ſimul vtilitas ipſi obvia fuiſſet.

PROPOSITIO II.

DUO QVADRATA, QUORUM SVMma, aut differentia nota sit, duobus quadratis datis reciproca invenire.



DATA SVMMA.

Sint primo invenienda duo quadrata *ay. by*, quorum ſumma ſit quadratum datum *ab*, datis quadratis *pc*, & *cq* reciproca.

CONSTRVCTIO.

Ad datas *ab.pc.cq* quarta inveniatur *bg*, & ipſi reciproca inveniantur (per præcedentem) ſegmenta *ax. xb*, & connectantur *ay. by*. Dico quadrata *ay, by*, quorum ſumma eſt quadratum *ab* reciproca eſſe quadratis *pc*, & *cq*.

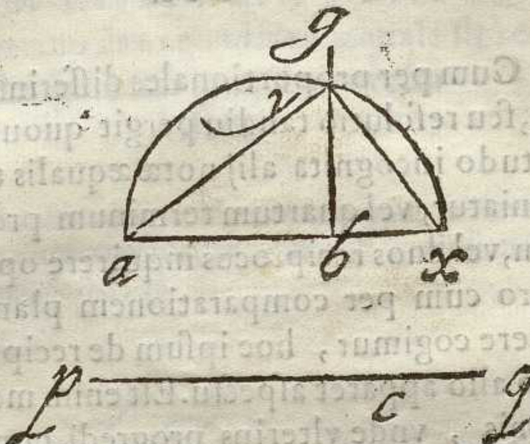
DEMONSTRATIO.

Cum enim ex conſt. *ab* ad *pc* ſit vt *cq* ad *bg*, hoc eſt ad *xy*, Et, ob ſimilitudinem triangulorum *aby xby*, *ab* ad *ay* ſit

ſit vt by ad xy: erit ex æquo pc ad ay vt by ad cq. Ergo etiam eorum quadrata erunt proportionalia, quod erat faciendum.

DATA DIFFERENTIA.

Sint ſecundo inveniẽda duo quadrata ay & by, quorum differẽtia ſit quadratum datũ ab datis quadratis pc & cq reciproca.



CONSTRVCTIO.

Ad datas ab. pc. cq quarta inveniatur bg, cui (per præcedentem) reciproca inveniantur ſegmenta ax. bx, quorum differentia ſit ab, deſcribatur ſemicirculus $a\,y\,x$ ſecans bg. in y & ducantur ay. xy. Dico quadrata ay & by, quorum differentia eſt quadratum datum ab reciproca eſſe quadratis datis pc & cq.

DEMONSTRATIO.

Cum enim ex conſtructione ſit ax ad bg vt bg ad bx, & per 8.6.el. ſit ax. ad xy, vt xy ad bx; æquales erunt bg & xy. Eſt autem ex conſtr. ab ad pc, vt cq ad bg, hoc eſt ad xy, & ob ſimilitudinem triangulorum aby. bxy eſt ab ad ay, vt by ad xy: ergo ex æquo erit pc ad ay, vt by ad cq, & eorum quadrata erunt proportionalia. Quod facere oportebat.

DE ÆQVATIONIBVS QUADRATIS.

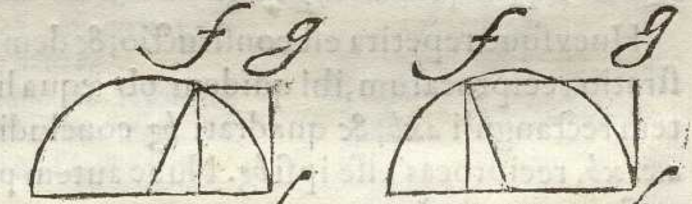
Cum per proportionales disserimus, analysis, seu resolutio tandiu pergit quousque magnitudo incognita alij notæ æqualis tandem inveniatur, vel quartum terminum proportionalem, vel duos reciprocos inquirere oporteat. At vero cum per comparationem planorum arguere cogimur, hoc ipsum de reciprocis sæpe sub alio apparet aspectu. Est enim meta resolutionis, vnde vlterius progredi non expedit, quædam æquatio, quæ quamvis in proportionales resoluta, partes reciprocas redderet inveniendas; nihilominus in se ipsa manens, finis resolutionis haberi debet proprijssimus.

Hæc igitur vltima æquatio tripliciter accidit, & quamvis per modum corollarij primæ Propositionis explicari poterat; vberioris doctrinæ gratia tribus sequentibus propositionibus eam explanare conabimur.

PROPOSITIO III.

RECTAM INVENIRE, CUIVS QVAdratum cum dato quadrato æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & alia recta data.

Sint datæ rectæ *ab. bg* & oporteat rectam *ax* invenire cuius quadratum cum quadrato dato *bg* æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & data *ab*.



Hoc eſt reſoluere hanc æquationem, vel aliam eiuſdem formæ.

$$axa + bgb \; \text{—}\Lambda\text{—} \; bax.$$

CONSTR. & DEMONSTR.

Conſtituãtur *ab. bg* ad rectos angulos, biſectaque *ab* in *m*, centro *m* intervallo *am* ſemicirculus deſcribatur, & ipſi *ab* parallela ducatur *gf*, demittaturque perpendicularis *fx*, quæ æqualis erit ipſi *gb*. Dico tam *ax*, quam *xb*, rectam eſſe, de qua quæritur.

Quo-

Quoniam enim *ab* divisa est æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*: erit rectangulum à *xb* cum quadrato *mx* seu *xm* æquale quadrato *am*, seu *mf*, idest quadratis *mx*, & *xf*, vnde dempto communi quadrato *mx* remanebit rectangulum *axb* æquale quadrato *xf*, seu *bg*.

Hucvsque repetita est constructio, & demonstratio reciprocarum, ibi quidem ob æqualitatem rectanguli *axb*, & quadrati *bg* concluditur *ax*. *xb*. reciprocas esse ipsi *bg*. Nunc autem propositum concludemus.

Quoniam igitur rectangulum *axb* æquale est quadrato *bg*, addito communi quadrato *ax*, erit quadratum *ax* cum
prop. 3. quadrato *bg* æquale rectangulo *axb* cum quadrato *ax*, hoc
2. elem. est rectangulo *bax*. Igitur rectam invenimus *ax*, &c.

Eodem modo ostenditur rectam *xb* problema efficere, quia cum quadratum *bg* æquale sit rectangulo *axb*, addito communi quadrato *xb*; erit quadratum *xb* cum quadrato *bg*. æquale rectangulo *axb* cum quadrato *xb*, idest rectangulo *abx*. Igitur rectam *xb*, &c. Quod erat faciendum.

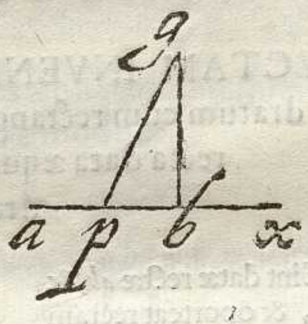
PRO-

PROPOSITIO IV.

RECTAM INVENIRE, CVIVS QVAdratum æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & alia recta data, vna cum quadrato dato.

Sint datæ rectæ *ab*, & *bg* oporteatque invenire rectam *ax*, cuius quadratum æquale ſit rectangulo ſub ipſa *ax* & data *ab*. vna cum quadrato dato *bg*.

Hoc eſt reſolvere hanc æquationem, vel aliam eiuſdem formæ.



$$axa \;\_\Lambda\_\; xab + bgb$$

CONSTR. & DEMONSTR.

Inclinentur *ab*. *bg* ad rectos angulos, biſectaque *ab* in *p* ducatur *pg*, cui æqualis ponatur *px*. Dico *ax* eſſe rectam, de qua quæritur.

Quoniam enim *ab* biſecta eſt in *p*, & ei adijcitur *bx*: erit
rectangulum *axb* cum quadrato *pb* æquale quadrato *px*, 6.2. el.
ſeu *pg*, ideſt quadratis *pb*, & *bg*, & dempto communi qua-
drato *pb*: erit rectangulum *axb* æquale quadrato *bg*. 47.1. el.

Ecce eadem conſtructio, & demonſtratio reciproc-

cipro-

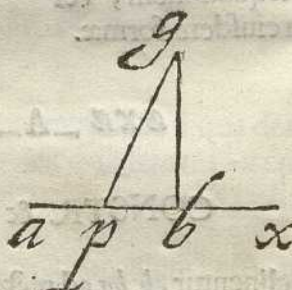
ciprocarum, ibi enim concluditur (propter æqualitatem) *ax*, & *xb* reciprocas esse ipsi *bg*: propositum autem ita concludetur.

Quoniam rectangulum *axb* æquale est quadrato *bg*, ad-
2.2.el. dito communi rectangulo *xab*: erunt rectangula *axb*, & *xab*, ideſt quadratum *ax* æquale rectangulo *xab*, & quadrato *bg*. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO V.

RECTAM INVENIRE, CVIUS QVAdratum cum rectangulo sub ipsa, & alia recta data æquale sit dato quadrato.

Sint datæ rectæ *ab*, & *bg*, & oporteat rectam invenire *bx*, cuius quadratum cum rectangulo *abx* æquale sit quadrato *bg*.



Hoc est resolvere hanc æquationem, vel aliam similem.

$$bxb + abx \;\_\Lambda\_\; bgb.$$

CONSTR. & DEMONSTR.

Inclinentur *ab bg* ad rectos angulos, & divisa *ab* bifariam

riam in *p*, ducatur *pg*, cui æqualis fiat *px*. Dico *bx* rectam eſſe, de qua quæritur. 6.2.el.
Quoniam igitur biſecta eſt *ab* in *p*, & adijcitur *bx*: erit rectangulum *axb* cum quadrato *pb* æquale quadrato *px*, ideſt *pg*, vel quadratis *pb*, & *bg*. Vnde dempto communi 47.1.el.
quadrato *pb* erit rectangulum *axb* æquale quadrato *bg*.

Huc vſque, eadem eſt conſtructio, & demonſtratio reciprocarum, immo prop. antecedentis.

Quoniam rectangulum *axb* æquale eſt quadrato *bg*; & etiam æquale rectangulo *abx*, cum quadrato *bx*: erit quadratum *bx* cum rectangulo *abx* æquale quadrato *bg*, quod 3.2.el.
erat oſtendendum.

Sunt igitur conſpectus æquationum quæ vocantur quadratæ, in hunc modum.

$$axa + bgb \;\text{—}\Lambda\text{—}\; ab{:}ax.$$

$$axa \;\text{—}\Lambda\text{—}\; ab{:}ax + bgb.$$

$$bxb + ab{:}bx \;\text{—}\Lambda\text{—}\; bgb.$$

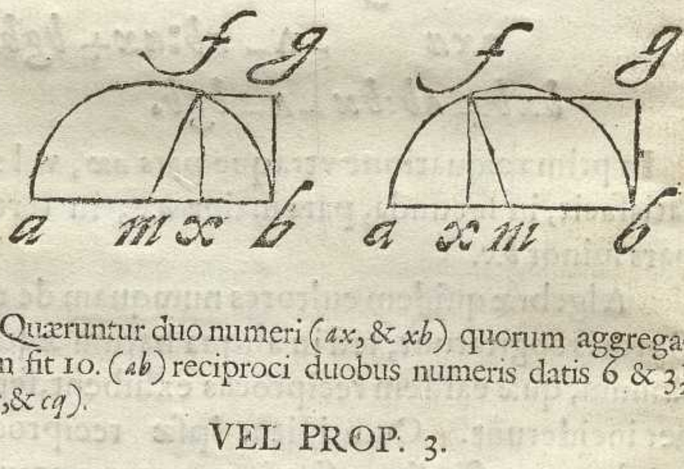
In prima æquatione vtraque pars *ax*, vel *xb* ſatisfacit, in ſecunda, pars maior *ax*, in tertia pars minor *bx*.

Algebræ quidem cultores numquam de reciprocis cogitarunt; ſed in aliquã harum æquationum, quæ eaſdem reciprocas exhibent, ſemper inciderunt. Cum igitur ipſæ reciprocæ æquè veræ rectæ lineæ ſint, neque vna earum dignoſci poſsit, quin altera ſimul innoteſcat, non ideo radices falſæ iure vocari videntur ſiquidem nihil falſi ſortiantur.

RESOLVTIO IN NVMERIS PARTIVM reciprocarum, & æquationum, quæ vocantur quadratæ.

Quando problema in numeris resolvendum proponitur, hoc est cum quantitates magnitudinum in numeris exprimuntur, facile ex prædictis regulam sibi quisque eruere poterit; rem nihilominus exemplis placet explicare.

DATA SVMMA.



Quæruntur duo numeri (*ax*, & *xb*) quorum aggregatum sit 10. (*ab*) reciproci duobus numeris datis 6 & $3\frac{1}{2}$ (*pc*, & *cq*).

VEL PROP. 3.

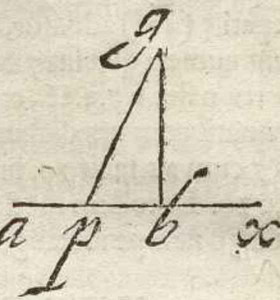
Quæritur numerus (*ax* vel *xb*) cuius quadratum cum quadrato dato 21 (*bg*, seu *fx*) æquale sit rectangulo sub ipso numero (*ax* vel *xb*) & dato numero 10 (*ab*.) Dimidium aggregati (*ab*) 10 est 5. (pro *mf* seu *mb*) à cuius quadradrato 25 si auferatur 21. (productum à 6 & $3\frac{1}{2}$, quod quadratum *fx* seu *bg* representat) remanebit 4. cuius √. (idest radix quadrata) est 2. (pro *mx*) qui numerus 2 si dimidio aggregati 5 (*am*) addatur, & ab ipso (*mb*) auferatur, provenient numeri quæsiti 7 & 3. (pro *ax*, & *xb*) erunt enim proportionales $6.7.3.3\frac{1}{2}$, eritque tam 7 quam 3 numerus qui æquationem prædictam efficit, quia 49 quadratum ipsius 7 cum 21 facit 70. productum videlicet sub ipso 7, & dato 10. Et eodem modo 9 quadratum ipsius 3 cum 21 facit 30 nempe rectangulum sub ipso 3, & dato 10.

ALIVD EXEMPLVM.

Quæruntur duo numeri, quorum summa sit 8 reciproci datis numeris 7, & 2. Vel. Quæritur numerus, cuius quadratum cum quadrato dato 14. æquale sit producto sub ipso, & dato numero 8.

Dimidium aggregati 8 est 4 à cuius quadrato 16. auferatur 14 (productum à 7, & 2. vel quadratum datum 14) & remanebit 2, cuius radix est $\sqrt{2}$. quæ si addatur ipsi 4, & ab eo auferatur, provenient numeri quæsiti $4 + \sqrt{2}$, & $4 - \sqrt{2}$. qui reciproci sunt datis numeris 7, & 2. quia proportionales sunt $7, 4+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2}, 2$. Et tam $4+\sqrt{2}$. quam $4-\sqrt{2}$. æquationi propositæ satisfacit, quadratum enim $18 + 8\sqrt{2}$. ipsius $4+\sqrt{2}$. cum quadrato 14. facit $32 + 8\sqrt{2}$, quod aggregatum æquale est producto sub ipso $4+\sqrt{2}$. & dato 8. Et eodem modo quadratum $18 - 8\sqrt{2}$, ipsius $4-\sqrt{2}$ cum quadrato 14 facit $32 - 8\sqrt{2}$, nempe rectangulum, vel productum sub ipso $4-\sqrt{2}$, & dato 8.

DATA DIFFERENTIA.



Quæruntur duo numeri (*ax* & *bx*) quorum differentia (*ab*) sit 12 reciproci datis numeris (*pc*, & *cq*) 7 & 4.

VEL PROP. 4.

Quæritur numerus (*ax*) cuius quadratum æquale sit rectangulo sub ipso (*ax*) & dato numero 12 (*ab*) vna cum quadrato dato 28 (*bg*)

VEL PROP. 5.

Quæritur numerus (*bx*) cuius quadratum cum rectangulo sub ipso (*bx*) & dato numero 12 (*ab*) æquale sit quadrato dato 28. (*bg*)

Dimidium differentiæ (*ab*) 12 est 6. cuius quadrato 36 (*pb*) addatur 28 (productum sub *pc*. *cq* 7 & 4. vel quadratū datum 28 & exurgent 64, cuius √ est 8. (pro *pg* seu *px*) si igitur prædictum dimidium (*cp* seu *pb*) 6. addatur ipsi 8. vel ab eo auferatur, provenient numeri quæsiti (*ax* & *bx*) 14, & 2. qui omnia complent. Sunt enim 14, & 2 reciproci datis numeris 7, & 4. quia proportionales sunt 7. 14. 2. 4. Et numerus maior 14. æquationem efficit prop. 4. quia quadratum 196. ipsius 14. æquale est rectangulo sub ipso 14 & dato 12 nempe 168 vna cum quadrato dato 28. Et numerus minor 2. æquationem efficit prop. 5. quia 4. quadratum ipsius 2. cum 24. rectangulo sub ipso 2. & dato 12 facit 28, nempe quadratum datum 28.

ALIVD EXEMPLVM.

Quæruntur duo numeri quorum differentia sit 14. reciprociciproci datis numeris 18 & 2.

Vel quæritur numerus cuius quadratum æquale sit rectangulo sub ipso, & dato numero 14 vna cum dato quadrato 36.

Vel quæritur numerus cuius quadratum cum rectangulo sub ipso, & dato numero 14 æquale sit quadrato dato 36.

Dimidium differentiæ 14 est 7. cuius quadrato 49 si addatur 36 (productum sub 18, & 2, vel quadratum datum 36) componetur 85, cuius radix quadrata est $\surd 85$, & addito, & abblato dimidio differentiæ nempe 7. erunt $\surd 85 + 7$, & $\surd 85 - 7$. numeri quæsiti, differunt enim 14, & reciproci sunt datis 18, & 2 quia sunt proportionales 18. $\surd 85 + 7$. $\surd 85 - 7$. 2. Atque $134 + 14 \surd 85$. quadratum maioris $\surd 85 + 7$ æquale est rectangulo sub ipso $\surd 85 + 7$, & dato 14. nempe $98 + 14 \surd 85$, vna cum quadrato dato 36. Et tandem $134 - 14 \surd 85$. quadratum minoris $\surd 85 - 7$, cum $14 \surd 85 - 98$ producto sub ipso $\surd 85 - 7$, & dato 14. facit 36. qui æqualis est quadrato dato 36.

DE QVADRATIS RECIPROCIS, VEL de æquatione quadrato-quadrata.

In numeris eodem modo resolvitur prop. 2. ac prima resoluta est, hoc solum addito, nempe quod ex inventis numeris extrahantur radices. Nam si duos numeros oporteat exhibere, quorum quadrata æqualia sint dato quadrato 10, & datis quadratis 6 & $3\frac{1}{2}$ reciproca; quærendi erunt duo numeri, quorum summa sit 10 datis 6 & $3\frac{1}{2}$ reciproci, & per præcedentem operatiotionem obtinebimus 7 & 3, quorum radices sunt √.7, & √.3 pro quæsitis numeris, &c.

Hic obiter notandum est magnitudines, quas Arithmetici, & etiam Geometræ, qui ex calculo Algebrico demonstrationes Geometricas concinnāt, quadrato-quadratum, quadrato-cubum, &c. vocant, per proportionem simplicem, aut compositam explicari debere. Nam altiorem magnitudinem sub tribus dimensionibus, nempe sub longitudine, latitudine, & profunditate natura concludit, neque alias noscit.

DE ARGVMENTATIONE.

Quæcumque sit connexio inter data, & quæsita ad proportionalitatem, vel ad æqualitatem naturaliter revocatur, vnde in resolutionibus per proportionales, vel per æqualitatem, argumentari oportet, eodem scilicet modo, quo ipsa resolutio, commodius, & proprius secundum præscriptas conditiones, instituenda videatur. In vtroque modo signis +, & ---, hoc est plus, & minus vti licet, nam vbi Geometria his vocibus vtitur, his characteribus claritatis, & brevitatis gratia vtendum videtur.

Cum autem per proportionales disserendo, omnes modos, qui ex lib. 5. elem. erui possunt, vsurpare debeamus, non inconsultum erit, omnes

nes argumentationes, quæ ibi habentur, & aliquas, quas illis adiungimus recensere, & simul omnes aliquo vniversali conceptu demonstrare, in gratiam eorum, quibus demonstrationes elementorum circa hanc rem molestæ fiunt.

Nomina quibuscumque magnitudinibus imponere liberum est, & ab omnibus vsitatum. Quis enim magnitudinem quamlibet conceptam vocari *a*, vel *b*, prohibebit? Quis denominatorem cuiuscumque rationis *m*, vel *p* interdicet nominari? Ita similiter cum dicimus sit *a* quæcumque magnitudo; cur non concipere licebit numerum, lineam, planum, vel solidum? Et cum dicimus sit *a* quævis magnitudo, & sit *ap*, alia magnitudo composita quidem ex ipsa *a* iuxta quamlibet multiplicationem *p*, cur non concipiendæ erunt magnitudines *ap* & *a* eiusdem generis, quarum habitudo sit ipsa *p*? Illa scilicet multiplicatio secundum quam ipsa *ap* continet ipsam *a*, vel ab ea continetur. His positis sit pro huius rei fundamento sequens propositio.

PROP.

Prop. Fundamentalis.

PROPOSITIS QUIBUSCUMQUE QUAtuor magnitudinibus proportionalibus factum sub extremis æquale est facto sub medijs: & contra.

Sint a, & b duæ quælibet magnitudines, & sint ap, & bp aliæ duæ compositæ quidem ex ipsis a, & b iuxta quãcumque multiplicationem p: ergo erit eadem ratio inter ap, & a, quam inter bp, & b, quandoquidem ipsa ap continet ipsam a, vel ab ea continetur, eodem modo, ac ipsa bp ipsam b continet, vel ab ea continetur; nimirum per multiplicationem eamdem: ergo $ap. a. bp. b.$ sunt quatuor magnitudines verè, & realiter proportionales: ergo apb factum sub extremis æquale patet apb facto sub medijs; ergo concipiantur vel numeri, vel lineæ, vel plana, vel solida, generaliter demonstratum est factum sub extremis æquale esse facto sub medijs.

ALITER.

Sit ratio, quæ inter duas magnitudines quascumque eiusdem generis a, & b existit $\frac{a}{b}$, hoc est a dividenda (seu potius deprimenda) per b, & sit $\frac{c}{d}$ ratio inter c & d, & sic omnes rationes more arithmetico exprimantur. Hoc posito.

Sint primo quatuor quæcumque magnitudines proportionales $a. b. c. d.$ Dico ad factum sub extremis æquale esse bc facto sub medijs. Cum enim ex hypothesi sint proportionales $a. b. c. d$; erit ratio $\frac{a}{b}$ æqualis rationi $\frac{c}{d}$ ergo si æqualiter eleventur per b erit a æqualis $\frac{bc}{d}$, & si

iterum

iterum eleventur per d erit ad æquale bc; ergo ad factum sub extremis æquale erit bc facto sub medijs.

Sint secundo $a.b.c.d.$ quatuor magnitudines, ita vt factum ad sub extremis æquale sit facto bc sub medijs. Dico propositas magnitudines proportionales esse. Cum enim ex hypothesi sit ad æquale bc; si æqualiter deprimantur per d erit a æqualis $\frac{bc}{d}$, & si iterum deprimantur per b erit $\frac{a}{b}$ æqualis $\frac{c}{d}$, hoc est ratio $\frac{a}{b}$ æqualis rationi $\frac{c}{d}$: ergo $a.b.c.d.$ sunt proportionales, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc facilè colligitur, si propositis quatuor terminis $a.b.c.d.$ factum sub extremis ad maius fuerit facto sub medijs bc : rationem a ad b maiorem esse ratione c ad d. Nam cum ad supponatur maius, quam bc, si æqualiter deprimantur per d, erit a maior quam $\frac{bc}{d}$ & si iterum deprimantur per b erit $\frac{a}{b}$ maior quam $\frac{c}{d}$ hoc est ratio a ad b maior ratione c ad d. Et contra si ratio $\frac{a}{b}$ maior fuerit ratione $\frac{c}{d}$, elevando per b, erit a maior quam $\frac{bc}{d}$, & iterũ elevando per d erit ad factum sub extremis maius bc facto sub medijs, &c.

Eodem modo ostenditur si propositis quatuor terminis factum sub extremis minus fuerit facto sub medijs, rationem primi ad secundum minorem esse ratione tertij ad quartum, & contra, &c.

Per hanc vnicam propositionem omnes modi argumentandi, à se invicem independenter, demonstrantur.

FORMULÆ ARGVMENTANDI PER PROPORTIONALES.

def.12. 5.

ALTERNANDO.

Alternando arguitur, cum, propositis quatuor terminis proportionalibus, comparatur antecedens ad antecedentem.

Sint prop.	*ap. a. bp. b.*
Ergo altern. sunt prop.	*ap. bp. a. b.*
Qnia sub extremis, & medijs	*apb.*

Si antecedentes fuerint diversi generis, alternatio locum non habet. Noluerunt enim Geometræ inter magnitudines heterogeneas considerare rationem. Ego vero alternationem non horrerem, tum quia ratio inter homogeneas poterit conservari, tum etiam quia inter lineam, & planum (exempli gratia) rationem constituere licet: illam scilicet latitudinem, quæ provenit ex applicatione plani ad lineam. Vnde si duo plana ad duas lineas applicata, vtrumque vtrique, latitudines produxerint æquales: absurdum non existimo dicere, quod ita se habeat (secundum quantitatem, idest latitudinem) alterum planum, ad suam rectam (deprimentem) vt reliquum planum ad rectam suam. Maximè cum verum sit, esse vt planum ad planum ita recta ad rectam, nam aliter latitudines non efficerent æquales.

NOTA.

Hunc modum argumentandi per alternationem, sive per

per mutationem non memini ap ud Authores obſervatum vidiſſe, niſi quando propoſitis quatuor terminis proportionalibus, ſecundus, & tertius eorum loca permutant. Sed pari ratione primus, & quartus loca permutare poſſunt. Nam ſi fuerint proportionales *a.b.c.d.* erit *ad* —Λ— *bc*, & permutando etiam erunt proportionales *d.b.c.a.* quia eodem modo *ad* —Λ— *bc*.

Sint prop.	*a. b. c. d.*
Ergo alter S.P.	*d. b. c. a.*
Quia ſemper	*ad* —Λ— *bc*

Pari iure ſi fuerit factum *ab*, ideſt ſub *a* & *b* ad factum *cd*, ideſt ſub *c* & *d*, vt *f* ad *g*: erit factum ſub extremis *abg* facto ſub medijs *cdf* æquale. Et ſecundus & tertius inter ſe, & primus, & quartus inter ſe dimenſiones poterunt permutare, poterimus inquã dicere ergo permutando, *a* ad *c* erit, vt factum *df* ſub *d* & *f* ad factum *bg* ſub *b* & *g*: Quia factum ſub extremis *abg* facto ſub medijs *cdf* eſt æquale, vti erat ante permutationem. Et ſic de reliquis dimenſionibus.

Sint prop.	*ab. cd. f. g.*
Et erit.	*abg* —Λ— *cdf.*
Ergo alt.S.P.	*a. c. df. bg.*
quia etiam erit.	*abg* —Λ— *cdf.*

Hunc modum permutandi dimenſiones terminorum proportionalium lectoribus commendamus, quia ipſe in noſtra methodo non parvam præbet facilitatem.

INVERTENDO.

Arguitur, cum conſequens ad antecedentem comparatur. def. 13. 5.

Sint prop.	*ap. a. bp. b.*
Ergo inv.S.P.	*a. ap. b. bp.*
quia ſub extrem. & med.	*apb.*

COM-

COMPONENDO.

def.14. Arguitur, cum aggregatum rationis (ideſt terminorum rationis) ad conſequentem comparatur.
5.p.18.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo comp.S.P.	*ap+a.*	*a.*	*bp+b.*	*b.*
Quia ſub extrem.& med.	*apb+ab.*			

Huic modo argumentandi duos ſequentes adiungit R.P. Clauius, omnino vtiles, & neceſſarios.

PER COMPOSITIONEM RATIONIS CONVERSAM.

Arguitur, cum aggregatum rationis antecedenti comparatur.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per comp.R.conv.S.P.	*ap+a.*	*ap.*	*bp+b.*	*bp.*
Quia ſub extr.& med.	*appb+apb.*			

PER COMPOSITIONEM RATIONIS CONTRARIAM.

Arguitur, quando antecedens ad aggregatum rationis comparatur.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per comp.R.contr.S.P.	*ap.*	*ap+a.*	*bp.*	*bp+b.*
Quia ſub extr.& med.	*appb+apb.*			

DI-

DIVIDENDO.

Arguitur, cum differentia rationis (idest inter terminos rationis) confertur consequenti. def.15. pro.17. Lib.5. el.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo diuid. S.P.	*ap—a.*	*a.*	*bp—b.*	*b.*
Quia sub ext.& med.		*apb—ab.*		

Huic etiam modo duos sequentes, duobus prioribus correspondentes, adiungit R.P. Clavius.

PER DIVISIONEM RATIONIS CONVERSAM.

Arguitur, cum consequens ad differentiam, rationis comparatur.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per diuis. R. conv. S.P.	*a.*	*ap—a.*	*b.*	*bp—b.*
Quia sub ext.& med.		*apb—ab.*		

PER DIVISIONEM RATIONIS CONTRARIAM

Arguitur, quando antecedens confertur differentiæ, quà superatur à consequente.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo per diuis. R. cont. S.P.	*ap.*	*a—ap.*	*bp.*	*b—bp.*
Quia sub ext.& med.		*apb—appb.*		

CON-

CONVERTENDO.

Arguitur, quando antecedens ad differentiam rationis
def.16. comparatur.

5.	Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
pro.19.	Ergo conv. S.P.	*ap.*	*ap--a.*	*bp.*	*bp--b.*
	Quia sub extr. & med.		*appb--apb.*		

VT VNVS AD VNUM, ita aggregata.

Argumentari licet, quando, vt quilibet antecedens ad
p.12.5. suum consequentem, ita infertur esse omnes antecedentes simul, ad omnes consequentes simul. Oportet tamen, vt sint eiusdem generis, vt in alternatione diximus.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo vt 1. ad 1. ita agg. & S.P.	*ap.*	*a.*	*ap+bp.*	*a+b.*
Quia sub extr. & med.		*aap+apb.*		

VEL ETIAM SIC.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo vt agg. ita 1. ad 1.	*ap+bp.*	*a+b.*	*bp.*	*b.*
Quia sub ext. & med.		*apb+bbp.*		

Hic modus argumentandi contrariam argumentationem non habet apud Euclidem, neque in modis argumentandi enumeratur. Cum autem vtilis sit ad ommittendam alternationem; vt eo vti liceat sequens modus, qui

qui illi contrarius est, elementis adiungendus videtur.

VT VNVS AD VNVM, ita differentiæ.

Arguere licet quando, vt quilibet antecedens ad ſuum conſequentem, ita infertur eſſe differentiam duorum antecedentium, ad differentiam duorum conſequentium, & è contra.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo vt 1. ad 1. ita diff.	*ap.*	*a.*	*ap—bp.*	*a—b.*
Quia ſub ext. & med.		*aap—apb.*		

VEL ETIAM SIC.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo vt diff. ita 1. ad 1. & S.P.	*ap—bp.*	*a—b.*	*bp.*	*b.*
Quia ſub ext. & med.		*apb—bbp.*		

EX ÆQVALITATE.

Ita ex æqualitate arguere licet.

Supponantur prop.	*a.*	*b.*	*d.*	*e.*
Et etiam.	*b.*	*c.*	*e.*	*f.*
Ergo ex æqual. S.P.	*a.*	*d.*	*c.*	*f.*
Et altern.	*a.*	*c.*	*d.*	*f.*

Demonſtratio patet clariſsima, quia ratio *a* ad *d* in prima proportione eſt, vt *b* ad *e*; ſed ratio *b* ad *e* in ſecunda proportione eſt vt *c* ad *f*: ergo ratio *a* ad *d* vna, eademque eſt cum ratione *c* ad *f*.

EX ÆQVALITATE.

Iterum ex æqualitate arguitur hoc modo.

Sint prop.	*a.*	*b.*	*e.*	*f.*
Et etiam.	*b.*	*c.*	*d.*	*c.*
Ergo ex æqual. S.P.	*a.*	*c.*	*d.*	*f.*

Demonstratio liquet, quia in prima proportione factum *af* æquale est *be*; sed in secunda, *be* est æquale *cd*; ergo *af* erit æquale *cd*; ergo *a. c. d. f.* erunt proportionales, cum eadem æqualia facta restituant.

Hos duos modos arguendi ex æqualitate paulo aliter tradit Euclides. Sint, *inquit*, tres magnitudines *a. b. c*, & prop.22 & 23.5. el. aliæ tres *d. e. f.* vel æqualiter plures, sintque proportionales *a. b. d. e*, & etiam sint proportionales *b. c. e. f*; ergo ex æqualitate (*infert ille*) erunt proportionales *a. c. d. f.* Vbi notandum, vim conclusionis in eo positam esse, quod *a. b. d. e*, & etiam *b. c. e. f* sint proportionales: ergo quod sint ex vna parte *a. b. c*, & ex altera *d. e. f*, quid ad rem? Idem dicendum est de secundo modo, & in vtroque, cur ratio ordinata, & perturbata definiatur, planè nescio: in primo enim rationem def.18. & 19.5. el. communem, directam, vel alternam video, & in secundo reciprocam, vtramque legitimè ordinatam.

Porro quomodocumque consideretur, ex eo infertur conclusio, quod in vtraque proportione duo existant æquales termini, nempe *b*, & *e*. Vnde legitimè inter reliquos fit comparatio.

DIMIDIANDO, VEL DVPLICANDO.

p.15.5. Præter dictos modos, frequenter arguitur duplicando, tri-

triplicando,&c. vel dimiando, aut tripartiendo, &c. vel omnes terminos, vel antecedentes, vel consequentes, vel denique duos, qui vnam rationem constituunt.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo duplicando antec. S.P.	*2ap.*	*a.*	*2bp.*	*b.*
Quia sub extr. & med.		*2apb.*		

Et sic de cæteris. Vnde hic modus, elevandi, & deprimendi vocari poterat, vt vniversalis intelligatur.

DIMIDIANDO, ET DVPLICANDO.

Hunc modum argumentandi addere prædictis summa nos cogit commoditas, quæ ex eo oritur.

Dimiando igitur, & duplicando, vel duplicando, & dimidiando, argumentari licet, quando duplicatur antecedens vnius rationis, & alterius consequens dimidiatur, & contra.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo dupl. & dimid. S.P.	*2ap.*	*a.*	*bp.*	$\frac{1}{2}$*b.*
Quia sub extr. & med.		*apb.*		

VEL SIC.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo dimid. & dupl. S.P.	*ap.*	$\frac{1}{2}$*a.*	*2bp.*	*b.*
Quia sub ext. & med.		*apb.*		

Idem procedit triplicando, & tripartiendo, & sic deinceps, vnde hic modus, elevandi, & deprimendi simul vocari poterit.

COMPONENDO, ET DIVIDENDO.

Componendo,& diuidendo ſimul, vel è contra diuidendo,& componendo, arguere licet, quando aggregatum rationis differentiæ comparatur, vel differentia aggregato.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo comp.& div.	*ap+a,*	*ap—a,*	*bp+b,*	*bp—b.*
Quia ſub ext r.& med.	*appb—ab.*			

VEL SIC.

Sint prop.	*ap.*	*a.*	*bp.*	*b.*
Ergo diuid.& comp.	*ap—a.*	*ap+a,*	*bp—b,*	*bp+b.*
Quia ſub ext.& med.	*appb—ab.*			

Hunc modum elegantiſsimum experimur,& facilè, ſi ſtylus noſter non placuerit, fas erit oſtendere, vt elementis illum liceat adiungere. Nam compon. fiunt aggregata in ratione conſequentium,& ſimiliter diuid. differentiæ rationum remanent in eadem ratione conſequentium; vnde aggregata,& differentiæ eamdem ſeruant rationem. Eadem facilitate, ſiqui alij fuerint, qui in elementis non extent, demonſtrari poterunt. Hæc de proportionalibus. Tranſeamus iam ad argumenta rationum inæqualium.

FORMVLÆ ARGVMENTANDI PER RATIONES INÆQVALES.

Om-

Omnes argumentationes, quibus in proportionalibus, ideſt in duabus æqualibus rationibus, vtimur, in duabus etiam rationibus inæqualibus, cum opus fuerit, vſurpare debemus. Huiuſmodi argumentandi fundamentum iecimus in Corollario propoſitionis fundamentalis, quibus hæc adde.

Sint duæ quæcumque magnitudines *a*, & *b*, & ſint aliæ duæ eiuſdem generis *am*, & *bp*. compoſitæ quidem ex ipſis *a*, & *b*, iuxta quaslibet inæquales multiplicationes *m*, & *p*, quarum *m* ſupponatur maior. Ratio igitur *am* ad *a* maior erit, quam ratio *pb* ad *b*, quando quidem *am* pluries continet ipſam *a*, quam *bp* ipſam *b*, ex eo quod *m* ponatur maior, quam *p*: ergo hæ quatuor magnitudines *am. a. bp. b.* duas rationes inæquales conſtituunt, in quibus *bam* factum ſub extremis maius patet *abp* facto ſub medijs, quia ſi æqualiter deprimantur per *ab* remanebunt *m*, & *p*, quarum *m* ponitur maior. His poſitis ita procedere licet.

ALTERNANDO.

Sit ratio.	*am.*	*a.*	$+q.$	*bp.*	*b.*
Ergo altern.	*am.*	*bp.*	$+q.$	*a.*	*b.*
Quia factum.	*bam.*		$+q.$	*abp.*	

Quod ita lege, ſit ratio *am* ad *a* maior quam ratio *bp* ad *b*: ergo alternando erit ratio *am* ad *bp* maior, quam ratio *a* ad *b*. Demonſtratur quia *bam* factum ſub extremis maius eſt *abp* facto ſub medijs, ex præcedentibus.

Si autem antecedentes non fuerint eiuſdem generis, idem dicendum eſt, quod in proportionalibus.

His characteribus ob brevitatem vtimur, videlicet $+q$. hoc eſt maior quam , vel maius quam, & $-q$. hoc eſt minor, vel minus quam.

In hunc modum reliquæ omnes argumentationes inſtitui, & demonſtrari poterunt, quas conſulto omittimus, ne nimis prolixi videamur.

N O T A.

In magnitudinibus proportionalibus *ap*. *bp*. *a*. *b*. poſuimus *p* pro numero, quo magnitudines *a* & *b* auctæ ſunt , quapropter omnes quatuor eamdem ſpeciem conſervant. Sed ſcitu dignum arbitramur, ipſam *p* ſupponi poſſe pro nova dimenſione. Itaque ſi *a* & *b* lineæ rectæ fuerint, & ipſas æqualiter , ideſt ſub æqualibus angulis, elevatas concipiamus per rectam *p*. provenient plana *ap* & *bp*, quæ inter ſe erunt in eadem ratione, quam habent inter ſe baſes *a*, & *b*, & manifeſtum fit id ipſum, quod in prima prop. lib. 6. elem. oſtenditur. Et eodem modo ſi *a* & *b* plana fuerint reſultabunt *ap* & *bp* ſolida in eadem ratione, &c.

Præ

Præterea si a & b numeri primi ponantur, & ap & bp numeri compositi, quorum communis mensura sit p, omnia, quæ de numeris primis, & compositis in elementis ostenduntur, facili negotio expedientur.

Nolumus tamen prædictos modos arguendi, in quæstionem revocare, neque super his in arcnam descendere, vnusquisque commodiores demonstrationes eligere poterit, cum nobis sufficiat prædictas veritates suppositas habere.

Hoc tamen monere volumus demonstrationes proportionalium hunc in modum etiam institui posse. Supponamus quatuor magnitudines proportionales $a.b.c.d$, quo posito: per propositionem fundamentalem erit ad factum sub extremis, bc facto sub medijs æquale.

Ergo si fuerint prop.	$a.$	$b.$	$c.$	$d.$
Erunt etiam comp. prop.	$a+b.$	$b.$	$c+d.$	$d.$
Quia sub extr. & med.	$ad+bd.$	—∧—	$bc+bd$	
& auf. bd.	ad	—∧—	bc	

Quemadmodum æqualia erant ante compositionem. Et sic de cæteris.

DE RATIONE COMPOSITA.

Ratio ex rationibus componi dicitur quan- do do rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Ita definitio 5. lib. 6. elementorum. Et quoniam Authores, vt hanc definitionem explicent, ad numeros confugiunt; nos abstractius, & vniversalius rem breviter explanare conabimur.

Porro quid ratio sit nos docet definitio 4. lib. 5. elementorum, videlicet ratio est comparatio duarum magnitudinum eiusdem generis inter se, secundum habitudinem, idest quatenus vna alteram continet, vel ab altera continetur. Rationis vero quantitas illa est, quæ ijsdem terminis ipsius rationis (sive illi numeri, sive lineæ, sive plana, sive solida sint) constituitur, quod diversum est à denominatore rationis. Est enim denominator ille numerus, qui rationaliter, vel irrationaliter explicat quoties antecedens contineat consequentem. In quantitate discreta facta comparatione numeri ad numerum ratio patet, & vtrisque terminis quantitas constituta conspicitur, & insuper dividendo antecedentem per consequentem denominator innotescit. Verbi gratia.

Sint duo numeri 12 & 3. Si igitur comparatur 12 ad 3 secundum habitudinem, hæc comparatio dicitur ratio; si verò ipsi 12 & 3 accipiuntur, quatenus ipse 12 divisibilis est per ipsum 3, hæc assumptio amborum quantitas est illius

illius rationis; si tandem numerus 12 dividitur per numerum 3 quotiens 4 denominator est eiusdem rationis, ostendit enim , & exprimit habitudinem, hoc est quod numerus 12 quater contineat numerum 3.

In quantitate autem continua res aliter se habet, nam ratio, & ipsius rationis quantitas semper expressæ liquent; verum rationis denominator ocultus manet, quod enim in quantitate discreta natura dispensavit fieri, in continua prohibuit. Sint duæ rectæ lineæ *a* & *b*, si comparamus *a* ad *b* secundum habitudinem, dicimus ratio *a* ad *b*, & huius rationis quantitas iisdem *a* & *b* conficitur, & dicimus *a* per *b*, quatenus magnitudinem *a* divisibilem concipimus per magnitudinem *b*. Cæterum ars non extat ad dividendam *a* per *b*, ita vt nobis scire liceat quomodo *a* contineat *b*, hoc est quoties *b* metiatur ipsam *a*, & insuper quanta sit pars remanens, vt denominator rationis *a* ad *b* (qui numerus est) exhiberi posit.

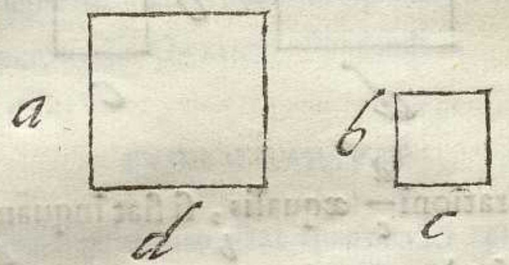
Hinc si *a*, & *b* duæ quælibet magnitudines fuerint eiusdem generis, & litteræ *a* & *b*, quibus ipsæ magnitudines denotantur , instar minutiæ hoc modo disponantur $\frac{a}{b}$, representata manebit tam ratio, quam ipsius rationis quantitas. Ratio quidem cum fractionem proferamus

mus *a* ad *b*, quantitas verò cum ipſam pronunciemus *a* per *b*, quibus poſitis omnia, quæ de ratione compoſita inveſtigari, & demonſtrari debeant, facili negotio poterunt obtineri.

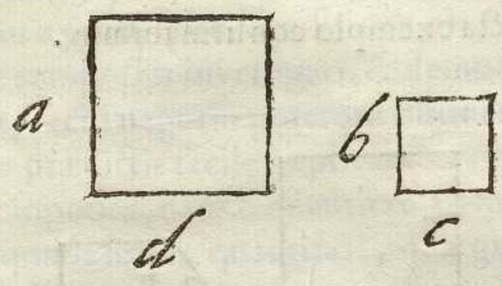
Ex prædictis facile explicabimus quid ſit ratio compoſita, nam ſi quantitas alicuius rationis æqualis fuerit quantitati, quæ gignitur ex multiplicatione quantitatum aliquarum rationum, illam rationem ex his rationibus compoſitam eſſe dicimus (nec minus verè illam his omnino æqualem dicere poſſumus) ſint duæ rationes $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{c}$, quarum quantitates ſunt $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{c}$, ſi igitur hæ duæ quantitates ſecundum leges fractorum inter ſe multiplicentur, proveniet quantitas $\frac{ab}{bc}$, quæ ſi deprimatur per ipſam *b*, reſultabit quantitas æquivalens $\frac{a}{c}$, quæ rationem repreſentat *a* ad *c*: ergo ratio $\frac{a}{c}$ æqualis eſt vtriſque rationibus $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{c}$, & ex illis compoſita dicitur, at itaque argumentari poſſumus, vt *a* ad *b*, & *b* ad *c*, ita eſt *a* ad *c*, & loco rationis ſimplicis *a* ad *c* ſubrogare poſſumus rationem compoſitam *a* ad *b*, & *b* ad *c*, & è contrà, quia reſpectus *a* ad *c*, vtriſque reſpectibus *a* ad *b*, & *b* ad

b ad c æquivalet.

Prædicta exemplo confirmabimus.



Sint duo parallelogramma rectangula, primum ſub lateribus a, & d, ſecundum ſub b & c contenta. Factum igitur ad ſub lateribus a, & d aream continet primi, factum vero bc ſub lateribus b & c aream ſecundi compræhendit, quare vt factum ad ad factum bc, ita eſt parallelogrammum ad parallelogrammum. Sed ratio $\frac{ad}{bc}$, ideſt facti ad factum, componitur ex rationibus $\frac{a}{b}$, & $\frac{d}{c}$ (nam ſi hæ duæ quantitates $\frac{a}{b}$, & $\frac{d}{c}$ inter ſe multiplicentur eamdem quantitatem producent $\frac{ad}{bc}$) ergo vt factum ad ad factum bc, ita eſt a ad b, & d ad c. Et ſi fiat



ratio $\frac{b}{q}$ rationi $\frac{d}{c}$ æqualis, si fiat inquam vt *d* ad *c*, ita *b* ad *q*, quantitas $\frac{b}{q}$, quantitati $\frac{d}{c}$ erit æqualis; ac proinde si quantitates $\frac{a}{b}$, & $\frac{b}{q}$ inter se multiplicentur, quantitas proveniens $\frac{ab}{bq}$, hoc est, si deprimatur per *b*, quantitas $\frac{a}{q}$ æqualis erit quantitati $\frac{ad}{bc}$: ergo vt *a* ad *b*, & *d* ad *c*, ita est *a* ad *q*, &c.

His ita præmissis sequentes propositiones observa.

N V M. I.

Si fuerint quæcumque magnitudines eiusdem generis: ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus intermedijs.

Sint $\qquad a.\ b.\ c.\ d.$ &c.

Dico $\qquad$ vt $a.b.$ & $b.c.$ & $c.d.$ ita $a.d.$

Sint

Sint magnitudines $a.b.c.d.$&c. Dico rationem primæ a ad vltimam d. componi ex rationibus intermedijs a ad b, & b ad c, & c ad d. Nam si harum rationum quantitates $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ inter se multiplicentur, quantitas proveniet $\frac{abc}{bcd}$ quæ, si deprimatur per bc, relinquet quantitatem $\frac{a}{d}$, hoc est rationem a ad d. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc liquido constat quomodo ratio simplex composita fiat, & composita in simplicem convertatur. Si enim fuerit ratio a ad b, & inter terminos a & b. quilibet eiusdem generis interjiciatur x: erit vt a ad b ita a ad x, & x ad b, quia quantitates $\frac{a}{x}$ & $\frac{x}{b}$ quantitatem producunt $\frac{ax}{xb}$, hoc est, deprimendo per x, quãtitatem $\frac{a}{b}$. Et eodem modo si plures interjiciantur quantitates.

$a.$ $b.$

vt $a.b$ ita $a.x$ & $x.b.$

Si vero quantitas fuerit composita $\frac{ac}{bd}$, videlicet quæ componitur ex rationibus a ad b, & c ad d, ipsamque in rationem simplicem convertere velimus. Fiat ratio $\frac{b}{g}$, vni ex componentibus $\frac{c}{d}$, æqualis, hoc eſt fiat vt *c* ad *d* ita *b* conſequens alterius rationis ad *g*. Vnde ratio $\frac{ac}{bd}$ æqualis erit rationi $\frac{ab}{bg}$, hoc eſt, deprimendo per *b*, rationi $\frac{a}{g}$. Et loco rationis compoſitæ $\frac{ac}{bd}$ ſubrogare poterimus rationem ſimplicem æqualem $\frac{a}{g}$, & ita deinceps ſi ex pluribus rationibus compoſita ſit ratio.

NVM. 2.

Si fuerint duæ rationes compoſitæ æquales: facta ſub antecedentibus vnius, & conſequentibus alterius inter ſe erunt æqualia.

Sit vt *a*. *b* & *c*. *d*. ita *f*. *g*. & *h*. *k*.
Dico *a c g k* ⊔ *f h b d*.

Sit vt *a* ad *b*, & *c* ad *d*, ita *f* ad *g*, & *h* ad *k*. Dico factum ſub antecedentibus primæ rationis *a* & *c*, & conſequentibus ſecundæ *g* & *k* nempe *acgk* æquale eſſe facto *f h b d*, ſcilicet ſub antecedentibus ſecundæ *f*, & *h*, & conſequentibus primæ *b* & *d*.

Eſt enim vt *a* ad *b*, & *c* ad *d* ita factum *ac* ad factum *bd*, & ſimiliter vt *f* ad *g*, & *h* ad *k*, ita factum *fh* ad factum *gk*: Ergo vt *ac* ad *bd* ita erit *fh*. ad *gk*, & factum ſub extremis *acgk*. facto ſub medijs *f h b d* æquale. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc conſtant duo elegantiſsimi modi argumentandi in rationibus compoſitis. Videlicet permutationis, & inverſionis. Poſſunt enim tam antecedentes inter ſe quam conſequentes inter ſe in qualibet ratione compoſita permutari. Et ſi ratio compoſita rationi compoſitæ fuerit æqualis: quilibet antecedens vnius, & quilibet conſequens alterius etiam poſſunt permutari. Et præterea, quælibet ratio vnius inverti poterit, hoc eſt poterit ad alteram tranſponi inverſè ſumpta, nam ſemper facta ſub antecedentibus vnius, & conſequentibus alterius erunt inter ſe æqualia.

PERMVTANDO.

Sit vt *a. b*, & *c. d.* ita *f. g.* & *h. k.*
Ergo permant. vt *c b. b.* & *a. d.* ita *h. g.* & *f k.*
Nam. *c a g k* —Λ— *b f b d.*

Videlicet facta ſub antecedentibus vnius, & conſequentibus alterius ſemper ſunt inter ſe æqualia, vti in principio erant.

Eodem modo.

Sit vt *a. b*, & *c. d.* ita *f. g*, & *h. k*
Ergo permut. conſeq. vt *a. d*, & *c. b* ita *f. k*, & *h. g.*
Nam facta. *a c g k* —Λ— *f h d b.*
&c.

RVRSVS PERMVTANDO.

Sit vt *a. b.* & *c. d.* ita *f. g.* & *h. k.*
Ergo perm. ant. & conſ. vt *g. h* & *k. d.* ita *f. a.* & *h. c*
Nam facta. *gk ac* —∧— *fh bd.*

Nempe facta ſub antecedentibus vnius, & conſequentibus alterius ſemper inter ſe permanent æqualia.

INVERTENDO.

Sit vt *a. b*, & *c. d* ita *f. g*, & *h. k*
Ergo invert. vt *a. b.* ita *f. g*, & *h. k*, & *d. c*
Nam *agkc* —∧— *fhdb.*

Et quemadmodum ratio *c* ad *d* ad alteram partem æquationis tranſpoſita eſt inverſa, ita ſimiliter quælibet alia ratio, vel etiam omnes ex vna ad alteram partem tranſponi poterunt, ſi inverſæ ſumantur: nam ſemper facta ſub antecedentibus vnius rationis, & conſequentibus alterius inter ſe erunt æqualia, quemadmodum æqualia erant ante inverſionem.

N V M. 3.

Si fuerint quæcumque proportiones: facta ſub terminis homologis proportionalia erunt.

Sint proportionales	*a.*	*b.*	*c.*	*d.*
Et etiam ſint prop.	*g.*	*h.*	*k.*	*l.*
Dico facta eſſe prop.	*ag.*	*bh.*	*ck.*	*dl.*

Sunt

Sunt enim in prima proportione rationes æquales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ & in secunda $\frac{g}{h}$ & $\frac{k}{l}$. Igitur si multiplicētur quantitates æquales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ per quantitates æquales $\frac{g}{h}$ & $\frac{k}{l}$, provenient quantitates æquales $\frac{ag}{bh}$ & $\frac{ck}{dl}$, & erit vt factum *ag* ad factum *bh*, ita factum *ck* ad factum *dl*. Facta ergo sub terminis homologis, &c Quod erat ostendendum. Et eodem modo proceditur si plures fuerint proportiones.

COROLLARIUM 1.

Hinc manifestum fit, si fuerint duæ proportiones *a. b. c. d.* & *g. h. k. l.* hanc oriri proportionalitatem compositam, videlicet vt *a* ad *b*, & *g* ad *h* ita esse *c* ad *d*, & *k* ad *l*. Nam vt factum *ag* ad *bh* ita est *ck* ad *dl*.

COROLLARIUM 2.

Hinc etiam colligitur, si fuerit quælibet proportionalitas composita. Verbi gratia.

Ut *a* ad *b* & *g* ad *h*, ita *c* ad *d*, & *k* ad *l*; fuerit autem vna ratio illarum *a* ad *b*, vni rationi harum *c* ad *d* æqualis: reliquam rationem *g* ad *h*, reliquæ rationi *k* ad *l* esse etiam æqualem. Cum enim sit vt *a* ad *b*, & *g* ad *h* ita *c* ad *d*, & *k* ad *l*: erunt quantitates æquales $\frac{ag}{bh}$ & $\frac{ck}{dl}$; sed ponuntur quantitates æquales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: igitur, dividendo illas per istas, remanebunt quantitates æquales $\frac{g}{h}$ & $\frac{k}{l}$, eritque ratio g ad h rationi k ad l, æqualis. Vt proponebatur.

Hæc sane nobis de ratione composita dicta sufficiunt. Sed quoniam asserimus rationem compositam æqualem omnino esse rationibus componentibus; vnde quisque inferre potest ipsam rationem compositam aggregatam esse ipsarum rationum componentium (circa quam rem non parum inter Authores controvertitur) non ideo inconsultum erit algorithmum rationis, quem R. P. Carolus Powel è Societate Iesu Olim Leodij, nunc Gadibus Matheseos Professor docet, curiosis impertiri.

R. P.

R. P. CAROLI POVVELL Societati Iesu, in Collegio eiusdem Societatis Gadibus Regij Professoris Mathematicæ.

ALGORITHMVS RATIONVM.

QVandoquidem obiectum Mathematicæ est quantitas in abstracto, haud aliter discernere potest inter quantitates diversas eiusdem generis, quam ratione inæqualitatis, nam æqualitas hìc idem sonabit ac identitas, quæ ex duobus terminis requisitis ad constituendam rationem, facit tantum vnum, estque proinde in rationibus nihil, sive medium inter positivas & negativas, hoc est maioris, & minoris inæqualitatis. Def. 3. 5. el.

Infinitis porro modis induci potest in quantitates eiusdem generis inæqualitas, hoc est ratio; comprehenduntur autem à nobis tantum illi quos suppeditat Arithmetica, per Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, Divisionem, Compositionem, & Resolutionem potentiarum, omnes citra mutationem speciei quantitatum in quas agunt.

Compositio potentiarum, innominata licet ab Arithmeticis, vendicat sibi quintum locum, iure quo multiplicatio tertium, superstruitur enim illi, quemadmodum illa additioni; resolutio potentiarum, sicut & divisio, duplex est, & vsque adeo, vt quantumvis arithmeticè operando idem sit, dato dividendo, & divisore eiusdem speciei exquirere numerum quotientem, ac dato dividendo, & numero diviſore, quærere eiuſdem ſpeciei cum dividendo partem quotam, tamen longe diverſo modo datà potētià, & radice exquiratur Numerus exponens, & data potentia cum Exponente quæratur radix, nam ille, quantumcumque eo indiguerint viginti illi viri qui ipſos viginti annos laborando Canones Logarithmorum condiderunt, vſque adhuc ſumma improbitate laborat.

Hæ operationes, ſex licet numero, tres tantum ſpecies perfectas rationum conſtituunt, nam binæ, & binæ operando contrariè producunt eaſdem, tantum in diverſo ſtatu negativo vel poſitivo; Primam, educunt additio vel ſubtractio per quantitatem denominatricem eiuſdem ſpeciei cum terminis æqualibus propoſitis, addendo, vel ſubtrahendo eam vni eorum in diſcrimen ab altero: & vocatur Arithmetica. Secundam. Multiplicatio, vel diviſio per numerum multiplicantem, vel dividentem vtrumvis terminum, & vocatur geometrica. Tertiam. Compoſitio, vel reſolutio potentiarum per numerum exponentem agentem in alterutrum terminorum, & vocatur potentialis.

Antequam omnium ſpecimen exhibeatur, iuvat præmonere exponentem fractum v.g. $\frac{1}{3}$, nihilo minus quam multiplicator, vel diviſor fractus, operari contrariè ſono vocum, extrahendo radicem cum facere præ ſe fert potentiam, & vice verſà, quod eo diligentius notandum, in quantum Arithmetici necdum mentionem fecerunt potentiarum fractarum, quas tamen non eſt huius loci exponere.

	3. 3.
Proponatur aliquod vnum bis positum.	27a ⌴Λ⌴ 27a.
Antecedenti addatus, vel consequenti sub-	3.
trahatur quantitas	3a.
vtrovis modo fit eadem ratio arithme-	3. 3. 3. 3.
tica positiva.	30a ad 27a, vt 27a ad 24a.
Nam si ex antecedente subtrahatur	3. 3.
consequens	27a. 24a.
Vtrobique deprehendetur denomi-	3.
nator	3a.
Qui antecedenti subtr. vel conseq. ad-	3 3
d. restituet æqualitatem.	27a ⌴Λ⌴ 27a, &c.
Ubi si antecedenti subtrahatur conse-	3.
quens	27a.
Deprehentur denominator in adden-	
do & subtractio nullus	o.
Nam antecedenti vel conseq. additus	3. 3.
vel subtr. æquation. relinquit intactã	27a ⌴Λ⌴ 27a.
Sed si antecedenti subtrahatur , vel	3.
conseq. addat. eadem quantitas	3a.
Fiet eadem ratio quæ ante, sed nega-	3. 3. 3. 3.
tiva	24a ad 27a, vt 27a ad 30a.
Nam si ex anteced. per operationem	3. 3.
imptopriam subtr. consequens	27a. 30a.
Deprehendetur denominator qui an-	3.
te, sed negans	— 3a.
Qui antecedenti suo modo subtr. vel	3. 3.
conseq. add. restituet æqualitat.	27a ⌴Λ⌴ 27a. &c.
Antecedens multiplicetur vel	1
conseq. dividatur per numerum	3a.
	4. 3 3 2
Fit eadem ratio geometrica positiva	81a ad 27a. vt 27a ad 9a.
Nam si antecedens altero modo divi-	3. 2.
datur à consequente	27a. 9a.
Deprehentur idem denominator	3a.
Qui antecedentem dividens, vel con-	3. 3.
sequent. mult. restituet æqualitat.	27a ⌴Λ⌴ 27a. &c.

Vbi

Vbi si antecedens dividatur à conseq.	$\overset{3.}{27a.}$
Deprehendetur denomin. in multipl. & dividend. nullus	1.
Nam antecedent. vel conseq. multit. vel divi. æqualitat. relinquit intactã	$\overset{3.}{27a}$ —∧— $\overset{3.}{27a.}$
Sed si antecedens divid. vel conseq. multit. per eundem numerum	$\overset{1.}{3a.}$
Fiet eadem ratio quæ ante, sed negativa.	$\overset{2.}{9a}$ ad $\overset{3.}{27a}$, vt $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{4.}{81a.}$
Nam si antecedens per operationem impropriam dividat. à conseq.	$\overset{3.}{27a}$ $\overset{4.}{81a.}$
Deprehendet. denominat. qui ante sed deprimens	$\frac{1}{3a^{1}}$
Qui antecedent. suo modo divid. vel conseq. multit. restituet æqualitat.	$\overset{3.}{27a}$ —∧— $\overset{3.}{27a.}$
Anteced. agatur in potentiam, vel conseq. in radicem per numerum	3.
Fit eadem ratio potentialis positiva	$\overset{9.}{19683a}$ ad $\overset{3.}{27a}$, vt $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{1.}{3a}$
Nam si antecedens conferat porentiã cum conseq.	$\overset{3.}{27a.}$ $\overset{1.}{3a.}$
Deprehendetur idem denominator	3.
Qui antecedent. agens in radicem vel conseq. in potent. restituet æqualit.	$\overset{3.}{27a}$ —∧— $\overset{3.}{27a.}$
Vbi si antecedens mensuretur à conseq. vt radice	$\overset{3.}{27a.}$
Deprehendetur denominat. in potentijs nullus	1.
Nam in anteced. vel conseq. agens, æqualit. relinquit intactam	$\overset{3.}{27a}$ —∧— $\overset{3.}{27a.}$
Sed si anteced. agatur in radic. vel conseq. in potent. per eundem numer.	3.
Fiet eadem ratio quæ ante, sed negativa.	$\overset{1.}{3a}$ ad $\overset{3.}{27a}$, vt $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{9.}{19683a.}$
Nam si anteced. per operation. improprimam mensuretur à conseq.	$\overset{3.}{27a.}$ $\overset{9.}{19683a.}$

De-

Deprehendetur denominator qui ante sed extrahens $\frac{1}{3}$

Qui antecedent. agens suo modo in radic. vel conſ. in pot. reſtit. æqualit. $27a^{3} \;\text{—A—}\; 27a^{3}$.

Comperto qua ratione rationes 1. ponantur poſitivè, neutiquam, & negativè, hoc eſt quomodo addantur, & ſubtrahantur æqualitati, ſive nihilo rationis, quandoquidem denominatores eius arithmeticus o, geometricus 1, & potentialis item 1 nihil tribuant vtrivis termino de novo vnde diſtinguantur (nam omne quod eſt ſine reſpectu ad aliud eſt vnum) eadem citra dubium methodo erunt addendæ, & ſubtrahendæ alicui, hoc eſt invicem, quæque in ſua ſpecie, licebitque fundare ſaltem rationem arithmeticam inter rationes, eodem iure quo ipſæ dantur, hoc eſt quo per ſe ipſas ſe diſtinguunt ab æqualitate ſive nihilo, quæ proinde, ſicut o in abſolutis, poteſt in reſpectivis eſſe terminus huiuſcemodi rationis; & ex prædictis ſunt arithmeticè proportionales.

$$\text{Rationes} \begin{cases} \text{arithmeticæ } 30a^{3} \text{ ad } 27a^{3}. \\ \text{geometricæ } 81a^{4} \text{ ad } 27a^{3}. \\ \text{potential. } 19683a^{9} \text{ ad } 27a^{3}. \end{cases} > 27a^{3}.\text{ad } 27a^{3} < \begin{cases} 24a^{3} \text{ ad } 27a^{3}. \\ 9a^{2} \text{ ad } 27a^{3}. \\ 3a^{1} \text{ ad } 27a^{3}. \end{cases}$$

Correſpondentibus arithmeticè denominatoribus arithmeticis $+3a^{3}.0.-3a^{3}$, geometricè geometricis $\frac{3a.}{1}$ 1. $\frac{1}{3a}$, & geometricè potentialibus $\frac{3}{1}$ 1. $\frac{1}{3}$ vtrique enim æquè denotant repetitam operationem, hi multiplicationem vnitatis per quam conſequens, vt radix multiplicans, eſt *vnum*; illi additionem conſequentis poſiti extra ſtatum nihili, nihilo.

Cum ergo addenda eſt, vel ſubtrahenda ratio rationi, exquiratur vnius illarum denominator, ope cuius aliquo

ex

ex modis prædictis alteri prout prius æqualitati applicetur, & feriato termino per denominatorem immutato, ratio summa vel residua manebit pœnes terminum novum, & alterum à denominatore immunem; quod non est aliud quam per regulam trium, operando ad modum rationum, rationem protrahere, vel contrahere quantitatem alterius rationis applicatæ ad terminum communem vtrique; hinc ex solo intuitu constat definitionem illam 20. lib. 5. Euclidis, qua inter quaslibet quantitates ordine positas, ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus intermedijs, in omni genere rationis, non indigere expositione quam adhibent nonnulli in remedium tantum erroris à se prius commissi in expositione ipsius rationis: & quandoquidem rationes potentiales indigeant commodiori modo hoc idem præstandi, & regula trium in illis sit parum vsitata, iuvabit, & sufficiet inibi tantum exempla facere: proinde.

Proponatur ratio aliqua potentialis $b^{144.}$ ad $b^{12.}$

Cui sit addenda ratio $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$

Huius mensurato anteced. à conf. quæratur denom. 3.

Qui antecedent. alterius cubicans, vel è conseq. extrahens radicem tertiam, facit potentialiter proportionales $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$, vt $b^{432.}$ ad $b^{144.}$ vel vt $b^{12.}$ ad $b^{4.}$

Et connectit duas ration. per terminum commun. $b^{144.}$ vel $b^{12.}$

Quo constituto in medio $b^{432.}$ $b^{144.}$ $b^{12.}$ vel $b^{144.}$ $b^{12.}$ $b^{4.}$

Manet ratio summa pœnes extremas $b^{432.}$ ad $b^{12.}$, vt b^{144} ad $b^{4.}$

Ex alia vel eadem ratione $b^{144.}$ ad $b^{12.}$

Sit subtrahendaque ante addita est ratio $27a^{3.}$ ad $3a^{1.}$

Denominata a 3

Ex

Ex antec. alterius extrahatur radix 3. vel cubicetur conseq
Fiet potential. proport. $27a^{3}$ ad $3a^{1}$, vt b^{144} ad b^{48} vt b^{36} ad b^{12}.
Et connectentur duæ rationes per terminum communem b^{144} vel b^{12}.

Quo constituto in extremo sic b^{144} b^{48} b^{12} vel sic b^{144} b^{36} b^{12}.
Manebit ratio differentialis pœnes reliquos b^{48} ad b^{12}, vt b^{144} ad b^{36}.

Ratio ergo b^{144} ad b^{12}. maior est ratione b^{144} ad b^{12} per rationem denominatricem. $27a^{3}$ ad $3a^{1}$.

Ratio autem b^{144} ad b^{12} maior est ratione b^{48} ad b^{12} per eandem rationem denominatricem. $27a^{3}$ ad $3a$

Ergo sunt arithmetice proportionales rationes potentiales b^{144} ad b^{4}, b^{144} ad b^{12}, & b^{48} ad b^{12}.
Correspondētib. geometricæ denominatorib. 36. 12. & 4. nec non arithmetice rationibus geometricis exponentium 144 ad 4, 144 ad 12, & 48 ad 12. ad differentiam 3 ad 1. proinde in exponentibus datur vbique specimen rationum geometricarum.

Quod regula trium alio modo executioni mandetur quam qui ordinariè adhibeatur, facit præter conformitatem cum doctrinà præcedente ipsa rei necessitas, nam in potentijs nihil datur correspondens æquationi producendæ inter terminos medios, & extremas proportionis actos in invicem, quia potentia non ex mutua, sed ex identica productioni exurgit. Quod simul est in causa cur rationes potentiales nequeant per sequentem viam compositionis, agendo terminos homologos iuxta institutum ratiotionum in invicem, addi vel subtrahi, qui est commodior quatenus evitat terminos negativos, vel fractos, & à denominatoribus præscindit, prout sequitur.

Proponatur ratio arithmetica $16a^{3}$ ad $4a^{3}$.

Cui sit addenda ratio $27a^{3}$ ad $24a^{3}$.

Addatur antecedens antecedenti, & consequens consequenti ecce summa rationum $43a^{3}$ ad $28a^{3}$.

Ex eadem vel alia ratione $16a^{3}$ ad $4a^{3}$.

Sit subtrahenda quæ ante addita est ratio $27a^{3}$ ad $24a^{3}$,

Hoc est inversa seu facta negativa $24a^{3}$ ad $27a^{3}$.

Addatur vt ante, ecce differentia rationum $40a^{3}$ ad $31a^{3}$.

Sunt ergo arithmetice proportionales rationes

$43a^{3}$ ad $28a^{3}$; $16a^{3}$ ad $4a^{3}$, & $40a^{3}$ ad $31a^{3}$.

Existente communi denominatrice ratione $27a^{3}$ ad $24a^{3}$.

Correspondentibus item arithmeticè denominatoribus $15a^{3}$. $12a^{3}$, & $9a^{3}$

Ita vt summa denominatorum $12a^{3}$, & $3a^{3}$.

Sit denominator summæ, & differentia differentiæ.

Deberet subtractio sine inversione exerceri per subtractionem, nisi interdum immineret periculum terminorũ negativorum, sicut & in geometricis per divisionem, nisi ob periculum fractorum, prout sequitur.

Pro-

Proponatur ratio geometrica $144a^2b^2$ ad $12ab$.

Cui sit addenda ratio $27a^3$ ad $9a^2$.

Antecedens ducatur in antecedentem: & consequens in consequent. ecce summa rationum $3888a^5b^2$ ad $108a^3b$.

Ex eadem vel alia ratione $144a^2b^2$ ad $12ab$.

Sit subtrahẽda quæ ante add. est ratio sic invers. $9a^2$ ad $27a^3$.

Ecce differentia rationum $1296a^4b^2$ ad $324a^4b$.

Sunt ergo arithmetice proportionales rationes $3888a^5b^2$ ad $108a^3b$, $144a^2b^2$ ad $12ab$, & $1296a^4b^2$ ad $324a^4b$

Existente communi denominatore ratione $27a^3$ ad $9a^2$

Correspondentib. geometr. denominatorib. $36a^2b$. $12ab$. $4b$. Ita vt in geometricis æque ac potentialibus productum denominatorum $12ab$, & $3a$ sit denominator summæ, & quotiens differentiæ.

Ratio huius processus patet ex eo quod si vni rationum addatur hoc modo æqualitas expressa in antecedente alterius bis posito, quod vtique rationem non lædet, & alteri similiter in consequente huius, rite disponentur rationes additioni iuxta priorem modum, quia consequens vnius, & antecedens alterius conflabuntur æque ex consequente, & antecedente earumdem primo oblatis; prout hic conspectui exhibetur. *Ax.* 16. & 20. 1 p. 15. 5. 1. 6. & 25. 11.

Sunto rationes arithmetic. addend. $16a^3$ ad $4a^3$, & $27a^3$ ad $24a^3$.

Iuxta dicta sic vtriq; addit. æqual. $27a^3$ —Λ— $27a^3$ ⋈ $4a^3$ —Λ— $4a^3$

E manebit summa pœnes extrema $43a^3$ ad $31a^3$, & $31a^3$ ad $28a^3$.

Nam æqualitas in medio, cum idem ſic ac identitas, poteſt

3. 3. 3.

ſic contrahi 43a. 31a. 28a.

Et relinquentur pure rationes addendæ ad communem terminum in medio, hoc eſt ſublato illo addentur. Idem eveniet in geometricis interiecto 324 a4b ijſdem terminis ſummæ qui ſuperius producti ſunt. Demonſtrata ſic additione, ſupervacaneum eſt ſubtractionem commonſtrare, cum pendeat ex toto ab additione.

Comperto qua ratione rationes primo & denuo ponantur tam poſitive, quam negative, hoc eſt quomodo addantur, & ſubtrahantur nihilo vel invicem, eadem citra dubiũ methodo poterit iterato addi & ſubtrahi quævis determinata nihilo, & de inceps quotieſcumque libuerit, hoc eſt ſaltem pedetentim (deficientibus etiamſi modis hiſce compendioſioribus, & æquivalentibus) multiplicari per numernm poſitivum, vel negativum, nec non in vicibus integris menſurari à minori: dividi etiam per numerum, ſed aliter; & cum diviſor eſt numerus primus, per ſimplicem quantumvis difficilem operationem: licebitque fundare etiam rationẽ geometricam inter rationes. Cœteroqui etiamſi foret poſsibilis ductio rationis in rationem, iuxta placita huiuſcemodi operationis, mutaretur ſpecies vtriuſvis ductarum, & infinitaretur, hoc eſt impoſsibilitaretur ratio inter productam, & quamvis producentium.

3. 3.

Proponatur ratio aliqua arithmetica 27a ad 24a.

Multiplicanda per numerum 3.

Multiplicetur vterque terminus per 3, fiet 3. 3.

ratio tripla præcedentis. 81a ad 72a.

3. 3.

Altera vel eadem ratio 27a ad 24a.

Sit dividenda item per 3.

Dividatur vterque terminus per 3, fiet ra- 3. 3.

tio ſubtripla præcedentis 9a ad 8a.

Sunt

Sunt ergo geometrice proportionales rationes

$\overset{3.}{81a}$ ad $\overset{3.}{72a}$, $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{3.}{24a}$, & $\overset{3.}{9a}$ ad $\overset{3.}{8a}$.

Existente communi denominatore numero 3.

Correspondentibus item geometricè denominatoribus

$\overset{3.}{9a}$. $\overset{3.}{3a}$. $\overset{3}{1a}$.

Ita vt triplum denominatoris $3a$ sit denominator rationis triplæ, & subtriplum subtriplæ.

Proponatur ratio geometrica $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{2.}{9a}$.

Multiplicanda per 3.

Cubicetur vterque terminus, fiet $\overset{9.}{19683a}$ ad $\overset{6.}{729a}$.

Altera vel eadem ratio $\overset{6.}{64b}$ ad $\overset{3.}{8b}$.

Sit dividenda item per 3.

Extrahat. ex vtroq; termino radix cubica, fiet $\overset{2.}{4b}$ ad $2b$.

Sunt ergo geometricè proportionales rationes

$\overset{9.}{19683a}$ ad $\overset{6.}{729a}$, $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{2.}{9a}$, $\overset{6.}{64b}$ ad $\overset{3.}{8b}$, & $\overset{2.}{8b}$ ad $\overset{1.}{2b}$.

Correspondentib. potent. denomin. $\overset{3.}{27a}$. $\overset{1.}{3a}$. $\overset{3.}{8b}$. & $\overset{1.}{2b}$.

Ita vt cubus denominatoris $3a^{1}$, sit denominator rationis triplæ, & radix cubica denominatoris $8b^{3}$, denominator subtriplæ.

Hic modus procedendi fundatus in compositione quæ cum rationibus potentialibus addendis non quadrat, nedum multiplicandis quadrabit, proinde confungiendum est in his ad illum quo in progressionibus ratio quæcumque, & qualiscumque continuatur pedetentim versus vtramvis partem certum numerum terminorum, vel inter datos extremos quæritur medius ad quem ratio ab vno extremo versus alterum certum numerum vicium con-

continuata, præcisè pertingat, & fundatur in simplici additione, vel subtractionem ratione prout sequitur.

Proponatur ratio potentialis $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{1.}{3a}$.
Multiplicanda per 3.
Cubicetur denominator 3, & ex antecedente extrahatur radix, vel potius conseq. agatur in potentiam expositam à cubo 27, & ecce inter terminum novum, & innovatum ratio tripla propositæ $\overset{27.}{7625597484987a}$ ad $\overset{1.}{3a}$.
Eadem vel altera ratio $\overset{64.}{b}$ ad $\overset{8.}{b}$.
Sit dividenda etiam per 3.
Extrahatur radix cub. ex denomin. 8, & per radicem 2.
Extrahatur ex anteced. radix vel quadretur vt ante conseq. & ecce ratio subtripla $\overset{16.}{b}$ ad $\overset{8.}{b}$.
Sunt ergo geometric. proport. in ratione tripla rationes $\overset{27.}{7625597484987a}$ ad $\overset{1.}{3a}$, $\overset{3.}{27a}$ ad $\overset{1.}{3a}$, $\overset{64.}{b}$ ad $\overset{8.}{b}$, $\overset{16.}{b}$ ad $\overset{8.}{b}$.
Correspondentib. potential. denominatorib. 27. 3. 8. 2. & in exponentibus datur simul specimen rationum geometricarum: ita vt denominatores vtriusque generis eisdem subiaceant legibus. De arithmeticis supervacaneum est simile in gradu remissiori commentari.

Porro inter duas rationes exquirere denominatorem geometricum (si forte integer est) defectu artis specialis, est exercere pedetentim multiplicationem minoris donec æquet maiorem numerando additiones; tantum in arithmeticis valet etiam divisio denominatoris maioris per illum minoris, ob rationem superius allatam.

Sed improprietas est sermonis loquendo de *interesse*, vt termini vno plures annis fructificationis ita proponantur quasi magis in illis quam in rationibus correspondentibus numero annorum versaretur cardo difficultatis; neque minor ineptia monstratur in indagando duos medios con-

continuè proportionales inter extremos datos, quasi omnium numerorum maxime facilis captu binarius, esset offendiculo,& non potius ternarius cum reliquis primis qui semper æqualis sunt pertinaciæ hìc in trisectione, & reliquis divisionibus rationum geometricarum, & alibi in divisionibus angulorum, quorum conceptus geometricè respectivus ad totum circuitum circuli, facit vt aliquo modo illos sibi vendicet status rationum geometricarum.

Falluntur ergo qui quantitates rationum geometricarum statuunt in earum denominatoribus de quibus non egit Euclides,nam (quidquid sit de arithmeticis omnium rationum maximè materialibus) huiusmodi denominatores simul & rationum potentialium (de quibus nemo licet ordine sequentibus hactenus commentatus est) in omni rigore sunt numeri qua rationales, qua irrationales, & quod quælibet ratio habet quantitatis, mutuatur à cōtinua non à discretà; error surrepsit in denominando quasdam rationes à numeris *duplam, triplam*, &c. quod aliqui incauti ita intellexerunt quasi in geometricis locum haberent *binarij, ternarij*,&c. non animadvertentes huiuscemodi voces *dupla, tripla*,&c. hìc appellare supra antecedentem *duplum, triplum*,&c.consequentis, non ipsas rationes quæ in se sunt *vnæ*, neque dicuntur *dupla, tripla*, &c.nisi relate ad aliam cuius sunt *duplicatæ, triplicatæ*,&c. Et sic fatente Christophoro Clavio intellexerunt Euclidem Interpretes nonnulli, inter quos nominat solummodo Federicum Commandinum,est vero eiusdem sententiæ Zambertus, Nicolaus Tartalea,qui inter cætera, ad hunc locum, arguens Campanum errorum in expositione huius definitionis 10. lib. 5. commissorum (si fortè Campanus fuit ille expositor) salubriter monet cavendum esse à ponendis exemplis rerum alio spectantium in numeris: Athanasius Kircherus in sua Musurgia l. 3. c. 3. sub titulo *De Logistica Rationum*;& quidem nullibi vehementior instantia fieri potest quam hìc, quis enim Musi- *Def.* 10 5.

cæ

cæ intelligens neget intervallum quod dicitur diapente, hoc est quinta, componi ex additione tertiæ minoris ad tertiam maiorem? Notum est autem tertiam minorem confici ex sonis in ratione 6 ad 5, maiorem in ratione 5 ad 4, & quintam vt 6 ad 4, quæ est, iuxta dicta, summa rationum præcedentium, ergo si vera est additio intervallorum, vera etiam est illa rationum. Est item M. Ozanam in suo Dictionario Mathematico Gallice edito, ad definitionem rationis compositæ, quamvis sibi postea contradicat versans adhuc in Arithmetica, cum definit rationem inter duas rationes geometricas esse rationem geometricam denominatorum, & super hoc male struit cum P. Gregorio à Sancto Vincentio, & alijs proportionalitatem rationum geometricarum arihmeticam loco geometricæ: & Ionas More Eques in sua Arithmetica Anglice scriptà: plures citare non sinit librorum parcitas. Verum ad exemplum tanti viri, præcurrente Volumnio Rodulpho, deviarunt non pauci, inter quos Gregorius à Sancto Vincentio, qui hac maxime ex causa vitiavit suam Quadraturam Circuli; Andreas Tacquet in Elementis, Ægidius Franciscus Gotignies in sua Logistica vniversali, Bernardus Lamy, Joannes VVallis, & alij subijcientes rationes geometricas legibus fractorum, etiamsi hi essentialiter sint numeri, illæ, fatente Gregorio à Sancto Vincentio, quantitatis tantum in obliquo: cœteroqui si adeo satagimus abstrahere à rationibus geometricis quod habent quantitatis, vel saltem certas quantitates earum loco substituere, quæ cum illis strictam analogiam ineant, numeri denominatores (quos aliqui interpretes ad def. 5. 6. abutentes verbis Euclidis, vocant quantitates rationum, cum constet quantitates, quæ ad efficiendam rationem ex rationibus compositam, inter se multiplicantur, esse ipsarum terminos, quin & numerus multiplicatus per numerum, non producit plusquam numerum) deficiunt in eo quod intendere debeant operationes gradum vnum vt proxi-

mè

mè inferioribus in rationibus correſpondeant : qui verò perficiunt ſunt Logarithmi certæ cuipiam rationi, e: g: decuplæ, aſſumptæ in vnitatem aptati, nam reductis omnibus rationibus geometricis ad minimum conſequentem 1, ideſt ad denominatores loco antecedentium, & incapacem denominandi geomrtricè vnitatem loco conſequentis, & collatis omnibus cum denominatore 10, vt radice, ipſi 10 obtinget exponens 1, denominatoribus maioribus numero 10, Logarithmi maiores vnitate, minoribus minores, hoc eſt fracti, denominatori æqualitatis vnitati, omnis potentiæ incapaci, 0, minus quam vnitati, id eſt fractis denominatoribus rationum negativarum minoris inæqualitatis, Logarithmi negativi, & horum Logarithmorum additio correſpondebit additioni, rationum denominatarum à numeris quorum ſunt Logarithmi, ſubtractio ſubtractioni, &c, Et, quod fortaſsis à paucis animadverſum eſt, diviſio maioris per minorem, menſurationi vnius rationis per alteram.

De rationibus arithmeticis, & potentialibus allatis præcipuè ad clariorem expoſitionem geometricarum, ſuperfluum eſt ſermonem ex dictis ſponte fluentem amplius protrahere.

Difficultates R. P. Christophori Clavij (cui ſoli benè reſpondiſſe eſt cœteris omnibus ſatisfeciſſe) omnes offendunt in rationibus quas vocat, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, nondum à quoquam in debito ſtatu negativo collocatis, adeoque vere vrſit adverſarios ſuos, ſi verum eſt voluiſſe illos, ſtatus negativi immemores, ſemper loqui de rationibus maioris inæqualitatis; cum ille, & defenſor illius contra Meibomium Ioannis VVallis, in ſtatu vti crediderunt fracto, ab hiſce offendiculis liberi incederent; verum quidem eſt, numeros fractos multum ſymbolizare cum negativis, vti patet in Logarihmis, adeoque ſpeciem veritatis præ ſe fert eorum diſcurſus, qui tamen hallucinari deprehendetur in alijs rationibus non geometri-

In lib. ad hoc edito, & in ſua hiſtoria Algebr. c. 20.

cis; solique statui negativo debetur hæc prerrogativa omnes pari cum libertate percurrere ; neque inconsequens esse videtur credere illos qui relationes minoris inæqualitatis propter denominatores geometricos fractos habent pro rationibus fractis , easdem propter denominatores arithmeticos negativos habituros , vel saltem habere debere, pro negativis; quod tamen videtur absurdum cum inquantitatibus absolutis , quod sub vna consideratione est negativum vel fractum, idem sub omni consideratione soleat esse negativum, vel fractum.

Obijcit præterea P. Clavius, quod si Compositio Rationum est earum additio , Euclidis definitio 10. l.5. hac de re vertatur in theorema, adeoque indigeat demonstratione. Respondet Nicolaus Tartalea super hoc Campano, Euclidem non asserere *esse* , sed *dici* rationes secum compositas *duplicatam. triplicatam, &c.* Sed & solet Euclides in suis definitionibus indifferenter vti vocabulis *est*, & *dicitur* ad significandum ea quæ ex ipsis terminis debent esse nota, inter quæ tam in hac def. 10. quam 20. l.5. Secutus communem notionem , quod quæ in communi extremo connectuntur habeantur pro additis; definivit in 10. quomodo ratio eadem sibi addita multiplicetur, & in 20. quomodo quæcumque rationes in longum addantur; demonstrat vero ad prop. 23. l. 6. Compositionem per ductionem ab hac additione non differre, reducendo eam ad statum huius, quo argumento vti conatur P. Clavius ad demonstrandum exinde illud quod fit ducendo sive multiplicando non posse esse aliud quam multiplicationem; sed potius retorquendum est argumentum, dicendo id quod fit extendendo in longum , non posse esse aliud quam additionem, præsertim manente materiali rationis poenes ipsos terminos, quomodocumque nobis placitum fuerit comparationem inter eos facere.

ad fin. l.9.

Obijcit D. Ioannes VVallis, adhibito textu Græco, duplicem esse compositionem rationum, vnam per additionem,

cap. 20. histor. Alg.

nem, alteram per multiplicationem, adeoque Euclidi conformem esse doctrinam Clavij. Respondet Commandinus, Juniores proportionem definitam 14 vel decimo quinto loco in lib. 5. apposuisse, neque compositionem magnitudinum eandem esse quæ compositio proportionum, augetur quidem per eam denominator vnitate, sed quanti hoc intersit rationis, aliunde petendum est, nam denominator exiguus sic auctus multum, grandis parum rationem auget.

Duplicitas quæ magis vrget est comparationis, quæ videtur inferre inter duas rationes minoris inæqualitatis, vnam simul esse maiorem, & minorem altera; nam quæ est plus minoris inæqualitatis, ad communem consequentem præbebit minorem antecedentem, ergo est minor; & *p. 8. 5.* potest simul esse *duplicata*, vel *triplicata*, &c. alterius, ergo in linea multiplicationis est maior, & evertitur totus *def. 10. 5.* fere liber quintus Elementorum. Respondetur negativa sub respectu arithmetico, prout fere vnice conferuntur rationes in l. 5. esse maiora quo minus recedunt à nihilo; at sub respectu geometrico, vt minus efficacia in multiplicando, esse minora:

Sic --4 in hac Analogia arithmetica +4. +2. --2. --4.
Est minor quam --2, at in hac geometrica +4. +2. --4. --2.
Est maior, nam vtrobique prior ratio +4 ad +2 est maioris inæqualitatis, ergo est posterior arithmetica --2 ad --4 & geometrica --4 ad --2. Et idem contingit fractionibus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{2}$ sub respectu geometrico 4 ad 2 vt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4}$.
& potentiali 4 ad 2 vt $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{2}$.

Quod affert P. Clavius de antecedente, & consequente vt agente, & passo, & non vtroque agente vel vtroque passo, alienum est ab ipsa definitione rationis, quæ consistit inter duas quantitates eiusdem generis: sed si lubet exhibere specimen doctrinæ rationum in agentibus solis, haud malo loco erimus; nam sunt agentia alia alijs vehementiora, in ijsdem gradibus cum operationibus arithmeticis ſupra citatis. Homo agens nudis viribus in pondus, addit vires nihilo; ſi adiuvatur ab alio, adduntur vires viribus, & eſt virtus compoſita duorum ad illam unius in ratione arithmetica denominata à viribus auxiliatricibus alterius; ſi ſolus adhibet vectem, multiplicat vires in ratione geometrica denominata à vicibus quibus longitudo vectis à potentia ad hypomoclion continet diſtantiam ab hypomoclio ad paſſum; ſi adiuvatur ab altero etiam cum vecte ſimiliter immediate agente in paſſum, augetur virtus multiplicata per additionem alterius item multiplicatæ, in ratione arithmetica ab illa denominata, quaſi nulla adeſſet multiplicatio, quæ ſiſtit quæque in ſuo vecte: ſed ſi vectem agit in vectem, prout fit per axes in peritrochio, multiplicationem addit multiplicationi, & producit virtutem compoſitam quæ eſt ad illam vnius vectis in ratione geometrica facti ex longitudinibus amborum, ad ſolam longitudinem dicti vectis, denominata à longitudine alterius, intelligendo ſemper per longitudines vectium vices quibus pars ſpectans ad potentiam continet alteram ſpectantem ad pondus; componitur autem ratio geometrica ad vtramvis vectis vnius, in ratione arithmetica denominata ab altera vectis alterius: ſi adhibet plures vectes æquales agentes in invicem, auget vires primi in ratione potentiali denominata à numero eorum, & rationem primi vectis per eundem multiplicat: quæ omnia ad amuſſim quadrant doctrinæ hic traditæ, viderint adverſarij ſi tam vniverſaliter, & conſecutivè ſuam ita materiæ applicare valeant.

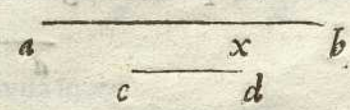
FOR-

FORMVLÆ ARGUMENTANDI PER LIB. 2. ELEMENTORUM.

ARGUMENTATIONES LIB. 2. ELEmentorum, omnes de diuisione rectæ lineæ versantur, quodquidem vnam constituit implicitam conditionem, in quacumque propositione, in qua de comparatione planorum agitur, & recta aliqua occurrit diuisa, aut diuidenda. Quoniam igitur harum argumentationum frequentissimus, & vtilissimus est vsus, breviter de illis stylo nostro verba faciemus.

PER 1.2. ELEMENT.

Per primam lib. 2. Elementorum arguitur, cum asseritur, rectangulum sub duabus rectis lineis æquale esse rectangulis sub altera earum, & singulis segmentis alterius



Sint duæ rectæ lineæ *ab*, & *cd*, quarum *ab* diuisa sit in quotcumque partes *ax*, & *xb*, & *c*.

Ergo per 1.2.el. $ab{:}cd \;\underline{\wedge}\; ax{:}cd + xb{:}cd.$

PER 2.2. ELEM.

Arguitur quando diuisa recta vtcumque, concluditur rectangula ſub tota, & quolibet ſegmentorum æqualia eſſe quadrato totius

a x *b*

Sit recta *ab* vtcumque diviſa in *x*
Ergo per 2.2.elem. *abx* + *bax* —Λ— *aba*.

PER 3. 2. ELEM.

Per 3.2.arguitur quando diviſa recta vtcumque, aſſeritur rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis, vna cum quadrato prædicti ſegmenti

a x *b*

Sit recta *ab* diviſa vtcumque in *x*
Ergo per 3.2.el. *abx* —Λ— *axb* + *xbx*.
Vel etiam, ergo *bax* —Λ— *axb* + *axa*.

PER 4. 2. ELEM.

Per 4.2.argumentatur quando diviſa recta vtcumque, dicitur quadratum totius æquale eſſe quadratis ſegmentorum, vna cum duplo rectangulo ſub ipſis contento.

a x *b*

Sit recta *ab* diviſa vtcumque in *x*.
Ergo per 4.2.el. *aba* —Λ— *axa* + *xbx* + 2 *axb*.

PER 5. 2. ELEM.

Per 5.2.arguitur, quando diviſa recta in æqualia, & non æqualia, aſſeritur rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis, vna cum quadrato intermediæ ſectionum æquale eſſe quadrato dimidiæ.

Sit

a m x b

Sit recta *ab* diuisa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*.
Ergo per 5.2.el. $axb + mxm$ —Λ— ama.

PER 6. 2. ELEM.

Per 6.2. argumentatur quando diuisa recta bifariam, ei alia adijcitur, & asseritur, rectangulum sub composita, & adjecta, vna cum quadrato dimidiæ æquale esse ei, quod ex dimidia, & adjecta, tamquam ab vna linea describitur quadrato.

a m b x

Sit recta *ab* bifariam secta in *m*, & ei adijciatur *bx*.
Ergo per 6.2.el. $axb + ama$ —Λ— mxm.

PER 7. 2. ELEM.

Per 7.2. arguitur quando diuisa vtcumque linea recta, infertur quadrata totius, & vnius segmentorum æqualia esse duplo rectangulo sub tota, & dicto segmento, vna cum quadrato alterius.

a x b

Sit recta *ab* vtcumque diuisa in *x*.
Ergo per 7.2.el. $aba + axa$ —Λ— $2bax + xbx$
Vel etiam, ergo $aba + xbx$ —Λ— $2abx + axa$

PER 8. 2. ELEM.

Per 8.2. arguitur, quando diuisa recta vtcumque, concluditur quadruplum rectanguli sub tota, & vno segmentorum, vna cum quadrato alterius, æquale esse ei, quod à tota,

tota, & dicto segmento, tamquam ab vna recta describitur quadrato

v a x b y

Sit recta *ab* vtcumque divisa in *x*, & fiat *by* ipsi *xb* æqualis.
Ergo per 8.2.el. $4abx + axa$ —Λ— *aya.*
Uel fiat *va* ipsi *ax* æqualis.
Ergo per 8.2.el. $4bxa + xbx$ —Λ— *vbv.*

PER 9. 2. ELEM.

Per 9.2. arguitur quando divisa recta in æqualia, & non æqualia, asseritur quadrata partium inæqualium æqualia esse duplo quadrato dimidiæ, vna cum duplo quadrato intermediæ.

a m x b

Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*.
Ergo per 9.2.el. $axa + xbx$ —Λ— $2ama + 2mxm$.

PER 10. 2. ELEM.

Arguitur quando divisa recta bifariam, ei adijcitur alia, & concluditur quadrata compositæ, & adiectæ, æqualia esse duplo quadrato dimidiæ vna cum duplo quadrato intermediæ (idest eius, quæ à dimidia, & adiecta componitur.)

a m b x

Sit recta *ab* bisecta in *m*, & ei adijciatur *bx*
Ergo per 10.2.el. $axa + bxb$ —Λ— $2ama + 2mxm$.

Hæ sunt æquationes, quæ in lib. 2. elementorum ex divisione rectæ lineæ originem trahunt. Sed quoniam Eu-

cli-

clides, eiusque interpretes æqualitatem tantum inter quadrata, & rectangula contemplati sunt; non abs re erit, si Lectorem meum monitum velim, ipsos eodem modo inter rhombos, & parallelogramma æquiangula æqualitatem contemplari potuisse, vt doctrina vniversalior evaderet. Itaque primum theorema sic ego proponerem.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcumque segmenta: factum sub illis duabus rectis in quovis angulo æquale erit factis in eodem angulo sub insecta, & singulis segmentis divisæ.

Et expositis duabus figuris parallelogrammis, quarum vna sub angulo recto, & altera sub alio quovis angulo contineretur, iisdem verbis, de rectangulis, & quibusvis parallelogrammis concluderem propositum. Et eodem modo de reliquis theorematibus, quæ de sectione rectæ lineæ versantur. Quod, cum opus fuerit, quisque exequi poterit.

Præterea monere volumus has propositiones lib. 2. el. In terminis vniversalioribus explicari debuisse, propterea quod recta, quæ intermedia vocatur, iam semidifferentia, iam semisumma sit partium inæqualium, vt manifestum fiet in subsequentibus.

DE

DE PRINCIPIJS elementarijs.

Omne problema ab alio independenter resolvi debet, videlicet ex ſolis principijs elementarijs, quapropter omnia illa principia vniverſalia, à quibus reſolutionis ars dependere videatur, in elementis debent contineri. Sunt qui magna, & erudita volumina ſcripſere, propoſitionibus plena, quarum concatenatio ita indiſſolubilis perſiſtit, vt vel vnam propoſitionem intelligere nequeas ni omnes antecedentes perceperis. Sunt etiam qui adeo meditatione magnitudinum delectantur, vt ſpeciales, & peculiares connexiones, quas inter illas ſpeculantur, nobis ſtatim proponunt. Immo cum aliquod reſolverint problema, ipſum ceu theorema tradunt, tamquam regulam ad tale problema reſolvendum. Vnde fit, quod infinita ferè exiſtant particularia præcepta, quibus inacceſsibilis (aliunde facilis, & iucunda) videatur Geometria.

Uerè duo præcipua Geometram decere exiſtimo, nimirum elementa perficere, & analyſim promovere. Perficientur quidem elementa, ſi illa tantum theoremata complectantur, quæ vniverſales, & primitivas doceant magnitudinum

con-

connexiones , & illa ſolum problemata contineant, quæ vniverſales effectiones erudiant. Hæc ſola, principia ſanè vocantur, reliqua enim omnia tam theoremata, quam problemeta ad artem reſolutivam pertinent. Promovebitur vero analyſis, ſi ad vniverſalem modum reſolvendi præcepta faciliora tradantur. Vtrumque iam alijs relinquimus, & interim ſequentes propoſitiones, quæ nobis neceſſariæ viſæ ſunt, per modum corollarij, aut ſcholij in elementis explicatas cupimus. Nam quamvis mens erat loco huius introductionis, ipſa elementa (ſervato ordine propoſitionum Euclidis) arbitratu noſtro concinnata præmittere ; nos á propopoſito abſtinere temporis incommoditas coegit.

Quod enim elementa perficere oporteat, ex eo perſpicuum fit, quod plerique omnes Scriptores, vel ipſa comprimere, vel ipſa protrahere conati fuerint; infœliciter tamen. Qui enim brevitatem affectarunt, plura omiſerunt neceſſaria, qui verò integritati conſuluerunt, plura aggregarunt inutilia. Et omnes (quod mirum eſt) nævulos, quibus elementa laborant, & qui Matheſeos nitorem deturpare videntur, prætermiſſos reliquerunt.

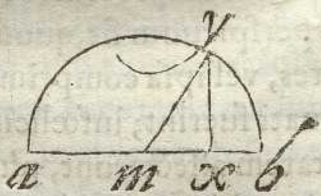
In ipſo limine Iohannes Luneſclos parallogiſmum deprehendit. In prima enim prop. lib. 1 ſe circulos interſecaret negat, non quia falſum;

ſed quia non oſtenſum. Superpoſitio in quarta, & octava eiuſdem libri mechanicam olet. Propoſitio 42. diminuta proponitur, & determinata demonſtratur. Et huiuſmodi alia multa, quæ inſinuare ſufficiat; plura quidem, quam vt hic recenſeri poſsint.

PROPOSITIO VI.

Scholiō ad prop 5.2.el. Differentia duorum quadratorum æqualis eſt rectangulo ſub aggregato, & differentia laterum.

Sint duo latera *mb*. *mx*. Et fiat *am* ipſi *mb* æqualis, deſcriptoque ſuper *ab* ſemicirculo, erigatur perpendicularis *xy*, & iungatur *my*. Quoniam igitur *ab* diviſa eſt æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*, erit



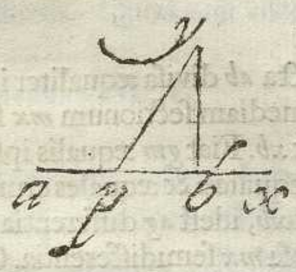
5.2.el. rectangulum *axb* cum quadrato *mx* æquale quadrato *mb*, ſeu *my*, hoc eſt quadratis *xy*, & *mx*: ergo dempto communi quadrato *mx*, erit quadratum *xy*, diffe-
47. 1. el. rentia ſcilicet quadratorum *my*, ideſt *mb*, & *mx*, æquale rectangulo *axb*, hoc eſt ſub *ax* (ſumma laterum *am*, ideſt *mb*, & *mx*) & *xb* (differentia eorumdem) Quod erat oſtendendum.

ALITER.

Sint

Sint duo latera *pb.px*, & fiat *ap* ipſi *pb* æqualis, erigaturque perpendicularis *by*, ita vt ducta *py* æqualis ſit ipſi *px*. Quoniã igitur *ab* biſecta eſt in *p*, & adijcitur *bx*: erit rectangulum *axb* cum quadrato *pb* æquale quadrato *px*, ſeu *py*, hoc eſt quadratis *pb*, & *by*, vnde dempto communi quadrato *pb*, remanebit quadratum *by*, differentia videlicet quadratorum *py*, ideſt *px*, & *pb* æquale rectangulo *axb*, ideſt ſub *ax* (aggregato laterum *px* & *pb*, ideſt *ap*) & *bx* (differentia eorumdem *px*, & *pb*.) Quod erat oſtendendum.

Scholiõ ad prop 6.2.el.



6, 2. el.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſitione perſpicuum eſt, ſi recta *ab* dividatur æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*: rectangulum *axb* æquale eſſe differentiæ quadratorum *mx*, & *mb*.

Et etiam ſi recta *ab* dividatur bifariam in *p*, & ei adijciatur *bx*: rectangulum *axb* æquale eſſe differentiæ quadratorum *px* & *pb*.

PROPOSITIO VII.

Si recta linea diviſa fuerit in partes æquales, & inæquales: intermedia ſectionum ſemidifferentia eſt partium inæqualium. *Scholiõ ad 5.2. elem.*

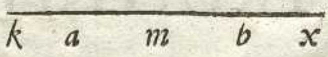
Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*. Dico intermediam sectionum *mx* semidifferentiam esse partium *ax*, & *xb*. Fiat *gm* æqualis ipsi *mx*, & quoniam *am*, & *mb* sunt æquales: & æquales erunt residuæ *ag*. *xb*: Igitur inter *ax*, & *xb*, idest *ag* differentia erit *gx*, idest dupla *mx*, adeoque ipsa *mx* semidifferentia. Quod ostendere oportebat.

CORROLLARIUM.

Hinc facile infertur differentiam quadratorum *ax* & *xb* æqualem esse rectangulo sub *ab* & 2*mx*, idest dupla *mx*, videlicet sub aggregato, & differentia laterum, vel quod idem est, duplo rectangulo sub *ab* & *mx*.

PROPOSITIO VIII.

Schol. ad 6.2. *el.* Si recta linea divisa fuerit bifariam, & ei adijciatur quæpiam: intermedia sectionum, idest composita ex dimidia, & adiecta, semisumma est adiectæ, & compositæ ex tota, & adiecta.



Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & ei quæpiam adijciatur *bx*. Dico intermediam sectionum *mx* semisummam esse partium *ax*, & *bx*. Fiat *ka* ipsi *bx* æqualis. Quoniam igitur *am*, & *mb*, nec non *ka*, & *bx* sunt æquales, & æquales

les erunt *km*, & *mx*: ergo *kx* summa erit partium *ax* , & *bx*, ideſt *ka*, adeoque *mx* ſemiſumma. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM 1.

Hinc manifeſtum fit rectangulum ſub *ab* & 2*mx*. ideſt dupla *mx*, vel quod idem eſt duplum rectangulum ſub *ab*, & *mx* æquale eſſe differentiæ quadratorum *ax*. *bx* , videlicet ſub aggregato, & differentia laterum.

COROLLARIVM 2.

Etiam patet ſemidifferentiam *am* partium *ax*, & *bx* , & ſemiſummam earumdem *mx*, partem maiorem componere *ax*. Item differentiam inter eadem ſemidifferentiam *mb* , & eamdem ſemiſummam *mx*, partem eſſe minorem *bx*. Hoc ipſum inferre licet ex antecedente propoſitione.

PROPOSITIO IX.

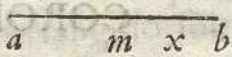
Schol.
Duo quadrata æqualia ſunt quadrato differen- ad 7.2.
tiæ laterum vna cum duplo rectangulo ſub el.
ijſdem lateribus comprehenſo.

Sint duo quadrata, quorum latera ſint rectæ *ab*, & *ax*. Sunt

Sunt igitur bina quadrata *xb*, & *ax* æqualia quadrato *xb*,
7.2.el. nempe differentiæ laterum *ab*, & *ax*, vna cum duplo rectangulo *bax*, videlicet sub iisdem lateribus *ab*, & *ax* comprehenso. Ergo duo quadrata, &c. Quod erat ostendendum.

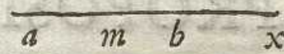
PROPOSITIO X.

Schol. ad 9. 2. el. **Duo quadrata æqualia sunt duplo quadratorum semisummæ, & semidifferentiæ laterum.**



Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & inæqualiter in *x*. Sunt igitur quadrata *ax*, & *xb* æqualia duplo quadratorum
9.2. el. *am*, & *mx*; sed *am* est semisumma laterum *ax*, & *xb*; & *mx* eorundem semidifferentia: ergo quadrata *ax*, & *xb* æqua-
per 7. huius lia sunt duplo quadratorum semisummæ *am*, & semidifferentiæ laterum *mx*. Quod erat ostendendum.

ALITER.

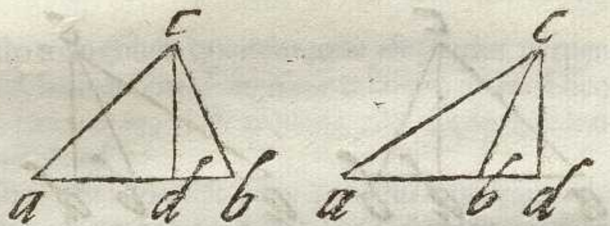


Sit recta *ab* divisa æqualiter in *m*, & ei adijciatur quæpiam *bx*. Sunt igitur quadrata *ax*, & *bx* æqualia duplo qua-
10.2. el. dratorum *am*, & *mx*; sed *am* est semidifferentia, & *mx* semisumma laterum *ax*, & *bx*. Igitur quadrata *ax*, & *bx* æ-
per 8. huius. qualia sunt duplo quadratorum semisummæ, & semidifferentiæ laterum, nempe *mx*, & *am*. Quod erat ostendendum.

PRO-

PROPOSITIO XI.

In omni triangulo differentia quadratorum laterum æqualis est differentiæ quadratorum, quæ fiunt à segmentis baseos. *Schol. ad 47. 1.el.*



Sit triangulum quodcumque *abc*, cuius perpendiculum *cd*, sitque latus *ac*, latere *bc* maius. Dico differentiam inter quadrata *ac*, & *cb* æqualem esse differentiæ inter quadrata *ad*, & *db*. Cum enim quadratum *ac* æquale sit quadratis *ad* & *cd*, quadratum vero *bc* æquale quadratis *db*, & *cd*: erit (auferendo æqualia ab æqualibus) differentia inter quadrata *ac*, & *bc* æqualis differentiæ inter quadrata *ad*, & *db*. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

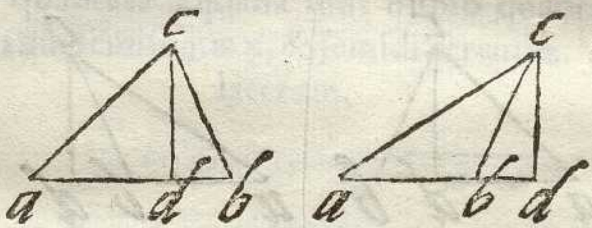
Cum autem differentia quadratorum *ad db* æqualis sit (*per 6. huius*) rectangulo sub aggregato, & differentia partium: perspicuum fit, in omni triangulo differentiam quadratorum laterum æqualem esse rectangulo sub aggregato, & differentia segmentorum baseos.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Schol. ad 47. 1. el.

In omni triangulo quadrata laterum, & ſegmentorum baſeos permutatim ſumpta inter ſe ſunt æqualia.



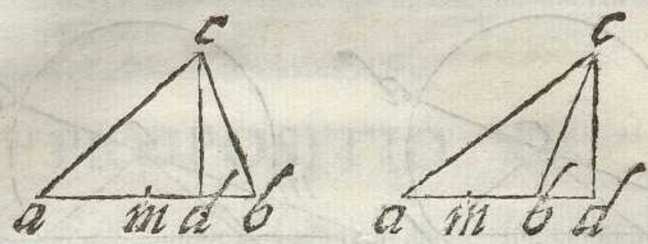
Sit triangulum *acb*, cuius perpendiculum *cd*. Dico quadrata lateris *ac*, & alterni ſegmenti *db* æqualia eſſe quadratis lateris *cb*, & alterni ſegmenti *ad*.

Eſt enim quadratum *ac* æquale quadratis *ad*, & *dc*: ergo addito quadrato *db*, erunt quadrata *ac*, & *db* æqualia quadratis *ad*, & *dc*, & *db*, hoc eſt quadratis *ad* & *cb*. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIII.

Schol. ad 9. & 10. l. 2. elem.

In omni triangulo quadrata laterum ſimul ſumpta æqualia ſunt duplo quadratorum ſemibaſis, intermediæ, & perpendiculi,



Esto triangulum quodcumque *abc*, cuius perpendiculum *cd*, basis autem *ab* divisa sit bifariam in *m*. Dico quadrata laterum *ac*, & *bc* æqualia esse duplo quadratorum *am*. *md*, & *cd*.

Cum enim quadratum *ac* æquætur quadratis *ad*, & *cd*, quadratum vero *cb* quadratis *db*, & *cd*: erunt quadrata *ac*, & *bc* æqualia quadratis *ad*, & *ab* cum duobus quadratis *cd*; sed quadrata *ad*, & *db* (per 9. & 10. lib. 2. elem.) æquantur duobus quadratis *am*, & duobus *md*: ergo quadrata *ac*, & *bc* æqualia erunt duplo quadratorum *am*, *md*, & *cd*. Quod erat ostendendum.

NOTA.

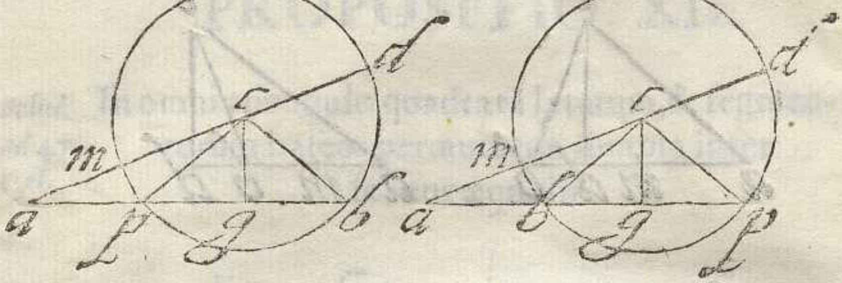
Si recta ducatur *mc*, poterit ipsa rectarum *md*, & *dc* quadrata, quare quadrata laterum *ac*, & *cb* æqualia erunt duobus quadratis *am*, & duobus *mc*.

PROPOSITIO XIV.

In omni triangulo, rectangulum sub aggregato, & differentia laterum æquale est rectangulo sub aggregato, & differentia segmentorum baseos.

Schol. ad 36. 3.el.

 Esto



Esto tam oxygonium, quam ambligonium triangulum *acb*, latera *ac*, & *cb*, basis *ab*, & perpendiculum *cg*. Minore latere *cb* vt radio circulus describatur *bpd*, secans basim *ab* (productam in ambligonio triangulo) in *p*. Ducatur *pc*, & latus *ac* protrahatur ad *d*. Erit igitur in vtroque triangulo *ad* summa laterum, & *am*. Eorumdem differentia, eritque in oxygonio basis *ab* aggregatum segmentorum, & *ap* ipsorum differentia: sed in ambligonio *ap* erit aggregatum, & ipsa basis *ab* differentia segmentorum sui ipsius *ag*, & *bg*: ergo (*per 36.3. elem.*) rectangulum *dam* sub aggregato, & differentia laterum æquale erit rectangulo *bap* sub aggregato, & differentia (vel sub differentia, & aggregato) segmentorum baseos, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Scholiō ad 14. l.6. el. Cum igitur rectangula sint æqualia *dam*. *bap*. erit (*ex 14. lib. 6. el.*)

IN OMNI TRIANGVLO.

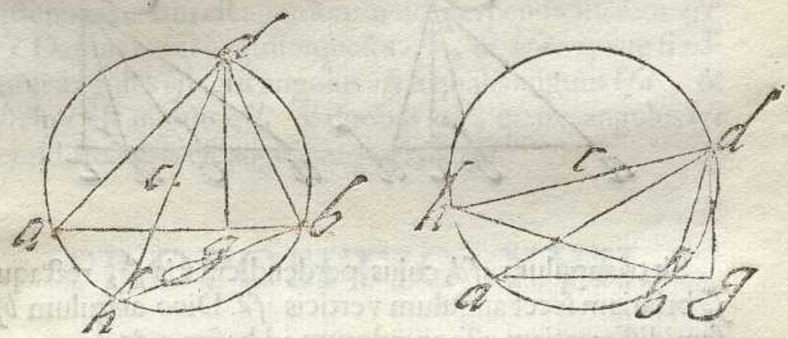
Vt *ab* basis
Ad *ad* summam laterum.
Ita *am* differentia laterum.
Ad *ap* summam, siue differentiam segmentorum baseos.

Vide-

Videlicet ſummam in ambligonio, differentiam in oxygonio triangulo.
Et etiam quadrando, dimidiando, &c.

PROPOSITIO XV.

In omni triangulo: rectangulum ſub lateribus æquale eſt rectangulo ſub perpendiculo, & diametro circuli circumſcripti. *Scholiō ad 14. 6.elem.*



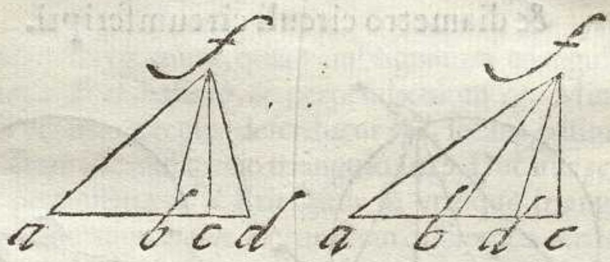
Sit triangulum *adb*, cuius altitudo *dg*, & circumſcribatur circulus, cuius centrum *c*, ducatur diameter *dh*, & iungatur *hb*. Dico rectangulum ſub lateribus *adb* æquale eſſe rectangulo ſub perpendiculo *dg*, & diametro circuli circumſcripti *dh*.

Quoniam enim anguli *a*, & *h* ſunt æquales (vt pote inſiſtentes ſuper eamdem *db*) & anguli *g*, & *dbh* in ſemicirculo recti; erunt triangula *adg* *dbh* ſimilia, quare vt *ad* ad *dg*, ita erit *dh* ad *db*: ergo rectangulum ſub lateribus *adb* æquale erit rectangulo ſub perpendiculo *dg*, & diametro *dh*. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XVI.

Schol. ad 31. 3. el.

In omni triangulo angulus comprehensus à perpendiculari, & recta, quæ angulum verticis bifariam diuidit, semidifferentia est angulorum ad basim.



Sit triangulum *afd*, cuius perdendicularis *fc*, rectaque *fb* bifariam secet angulum verticis *afd*. Dico angulum *bfc* semidifferentiam esse angulorum ad basim *a*, & *d*.

Perpendicularis *fc* cadet intus. Cum enim anguli *a*, & *afc*, idest anguli *a*. *afb*, & *bfc* æquales sint angulis *cfd*, & *d*. (quia vtraque pars recto est æqualis) si addatur angulus *bfc*; erunt anguli *a*, & *afb*, & duo anguli *bfc* æquales angulis *bfc*. *cfd*. & *d*, idest angulis *bfd*, & *d*. Vnde si auferantur anguli æquales *afb*. *bfd*: remanebunt angulus *a*, & duo anguli *bfc* æquales angulo *d*. Superat igitur angulus *d*. angulum *a* duobus angulis *bfc*, adeoque angulus *bfc* semidifferentia est eorumdem.

Perpendicularis *fb* cadat extra. Quoniam igitur angulus *adf* æqualis est internis *dfc*, & *dcf*; angulus vero rectus *dcf* æquatur angulis *a*, & *afc*: erit angulus *adf* æqualis angulis *a*. *afc*, & *dfc*, hoc est angulis *a*. *afd*, & duobus *dfc*, vel angulis *a*, duobus *bfd*, & duobus *dfc*, vel tandem angulis

a. &

a, & duobus *bfc*. Superat igitur angulus *adf* angulum *a* duobus angulis *bfc*. Itaque ſemidifferentia eoremdem erit angulus *bfc*. Quod erat oſtendendum.

N O T A.

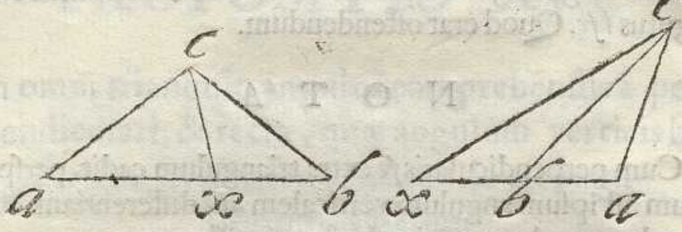
Cum perpendicularis *fc* extra triangulum cadit, perſpicuum eſt ipſum angulum verticalem *afd* differentiam eſſe angulorum ad perpendicularem *afc*. *dfc*.

At vero cum perpendicularis *fc* cadit intra, ipſe angulus *bfc* (qui ſemidifferentia eſt angulorum ad baſim) ſemidifferentia etiam eſt angulorum ad perpendicularem *afc*. *cfd*. Dantur enim anguli æquales *afb*, & *bfd*, quare ſi addatur angulus *bfc*: erit angulus *afc* æqualis angulis *bfd*, & *bfc*, hoc eſt angulis *cfd*, & duobus *bfc*, quare angulus *bfc* ſemidifferentia eſt angulorum *afc*, & *cfd*.

PROPOSITIO XVII.

In omni triangulo ſi à vertice ad baſim (etiam protractam, ſi opus fuerit) recta ducatur cum vno laterum angulum conſtituens æqualem angulo ad baſim, ipſi lateri oppoſito: erit quadratum ipſius lateris æquale rectangulo ſub baſe, & ſegmento contermino. Rectangulum vero ſub lateribus æquale rectangulo ſub baſe, & ipſa recta ducta. *Schol. ad* 8.6. *el.*

Sit



Sit quodvis triangulum *abc*, & à vertice *c* in basim *ab* recta ducatur *cx*. faciens cum latere *ac* angulum *acx* æqualem angulo *abc* ipsi lateri *ac* opposito. Dico quadratum ipsius lateris *ac* æquale esse rectangulo sub base *ab*, & segmento contermino *ax*. Rectangulum verò sub lateribus *acb* æquale rectangulo sub base *ab*, & ipsa recta ducta *cx*.

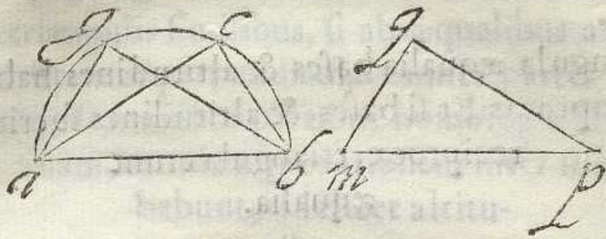
Cum enim angulus *acx* angulo *abc* sit æqualis, & angulus *bac* communis, triangula erunt similia *abc*, & *axc*: ergo erit vt *ab* ad *ac*, ita *ac* ad *ax*, & quadratum *ac* æquale rectangulo sub *ab*, & *ax*. Et etiam erit vt *ab* ad *bc*, ita *ac* ad *cx*, & rectangulum sub *ac*, & *bc* rectangulo sub *ab*, & *cx* æquale. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVIII.

Si triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint: ratio laterum vnius trianguli circa maiorem angulum maior erit ratione laterum alterius circa minorem angulum. Et è contra si ratio laterum vnius trianguli circa alium angulum maior fuerit ratione laterum alterius circa alium angulum ille isto erit maior.

Schol. ad 23. 6. el.

Sint



Sint duo quæcumque triangula *acb. mqp*, angulos *c.* & *q.* æquales habentia, sitque angulus *m* maior angulo *a*. Dico rationem *mp.* ad *mq.* maiorem esse ratione *ab.* ad *ac.* Et è contra si ratio *mp* ad *mq* maior fuerit ratione *ab* ad *ac*, angulum *m.* maiorem esse angulo *a*.

Circa *acb* segmentum circuli describatur angulum capiens *acb*, & fiat angulus *bag* angulo *m* æqualis, & iungatur *gb*. Erit igitur angulus *g* in eodem segmento æqualis angulo *c*, idest *q*; ac proinde similia erunt triangula *agb*. *mqp*. Est autem *ag* minor quam *ac* quia remotior à centro: ergo ratio *ab ag*, idest ratio *mp. mq* maior erit ratione *ab ac*.

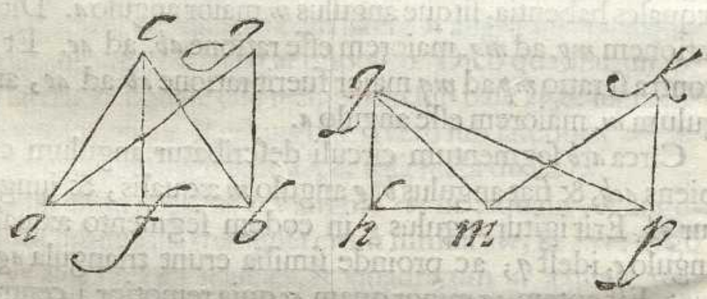
Conversam autem hoc modo ostendemus. Si igitur ratio *mp. mq* maior fuerit ratione *ab ac*, fiat vt *mp* ad *mq*, ita *ab* ad *ag*, quæ necessario erit minor quam *ac*, vt sit ratio *mp. mq*, idest *ab. ag* maior ratione *ab. ac*, vti ponitur: ergo punctum *g* cadet in peripheria inter *a*, & *c*: ergo angulus *bag*, idest angulus *m*, angulo *bac* maior erit, quod ostendere oportebat.

Hæc propositio aliquando vtilis esse poterit, & illis adijci, quas R. P. Clavius in Scholio prop. 23. lib. 6. el. num. 1. & 4. attulit.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Schol. ad 15. 6. el. Triangula æqualia baſes & altitudines habent reciprocas: Et ſi baſes, & altitudines fuerint reciprocæ, triangula erunt æqualia.



Sit triangula æqualia *abc*, & *mpq*, & primi ſit baſis *ab*, & altitudo *cf*, ſecundi vero baſis *mp*, & altitudo *qh*. Dico proportionales eſſe *ab mp. qh cf.*

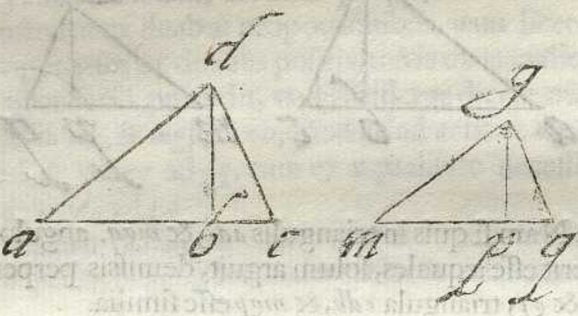
Fiant ſuper eaſdem baſes *ab*, & *mp*, & ſub eorum altitudinibus *bg*, & *pk*, in angulis rectis *b*, & *p* triangula *abg*, & *mpk*, quæ æqualia erunt propoſitis, è inter ſe: ergo triangula *abg*, & *mpk*, ideſt *abc*, & *mpq*, circa æquales angulos rec- *15.6.el.* *b*, & *p* latera habent reciproca, ideſt baſes, & altitudines, & proportionales ſunt *ab mp pk bg*, hoc eſt *ab mp qh cf.*

Pari ratione ſi baſes, & altitudines fuerint reciprocæ, hoc eſt ſi fuerint proportionales (in triangulis *abc*, & *mpq*.) *ab mp. qh cf*, vel (in ipſis æqualibus *abg*, & *mpk*) *ab mp pk bg*: triangula erunt æqualia inter ſe *abg*, & *mpk*: ergo etiam ipſis æqualia *abc*, & *mpq*. Quod erat oſtendendum.

PRO-

PROPOSITIO XX.

In triangulis ſimilibus, ſi ab æqualibus angulis demittantur perpendicula: omnes partes vnius trianguli, omnibus partibus homologis alterius vnam, eamdemque rationem inter ſe habebunt, videlicet altitudinem. Schol. ad 4. 6. el.



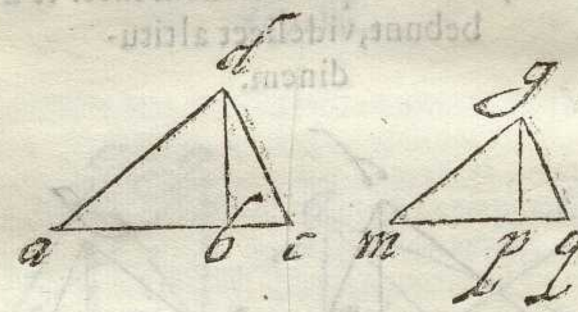
Sint duo triangula ſimilia *acd*, & *mqg*; ſintque anguli *a. c. d.* angulis *m. q. g.* æquales, & ab æqualibus *d*, & *g* perpendiculares cadant *db*, & *gp*. Cum igitur *a*, & *m*, inter ſe, nec non *c*, & *q* inter ſe ponantur æquales, & ad *b*, & *p* ſint recti, triangula ad altitudinem vnius *abd*, & *bcd* triangulis ad altitudinem alterius *mpg*, & *pqg* erunt ſimilia, vtrumque vtrique, quapropter vt *bd* ad *pg*, ita erit *ad* ad *mg*, & ita *ab* ad *mp*, & ita *dc* ad *gq*, & ita *bc* ad *pq*. Vt igitur altitudines ita ſunt partes vnius ad partes homologas alterius. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc patet triangula ſimilia, æqualia etiam eſſe, ſi præterea pars aliqua vnius, parti homologæ alterius fuerit æqualis, nam proportio erit æqualitatis.

N O T A.

Totalis æqualitas duorum triangulorum ex tribus conditionibus, quarum vna saltem sit æqualitatis, procedit. Vbi notandum, quod æqualitas duorum angulorum in triangulis non sit conditio æqualitatis, sed tantum propor-



tionis. Nam si quis in triangulis *adc*, & *mgq*. angulos *a*, & *m* dixerit esse æquales, solum arguit, demissis perpendiculis *db*, & *gp*, triangula *adb*, & *mgp* esse similia.

Itaque totalis æqualitas duorum triangulorum ex tribus partibus æqualibus, nempe ex tribus lateribus, in prop. 8. lib. 1. element. ostenditur. Ex duabus verò partibus æqualibus, & vna proportione, scilicet ex duobus lateribus, & angulo comprehenso, in prop. 4. Et denique ex vna parte æquali, & duabus proportionibus, videlicet ex duobus angulis, & vno laterum in prop. 26. eiusdem libri.

Hic quidem sistit Euclides, qui perpendicula, & segmenta baseos, & anguli verticalis, ab ipsis perpendiculis facta, cum de æqualitate totali triangulorum ageret, neglexit. Nos autem operæpretium duximus tyrones animadvertere, ipsa perpendicula, & segmenta, partes etiam esse præcipuas triangulorum, & ex ipsis, illas tres conditiones, à quibus eorum totalis æqualitas dependet, constitui posse, v.g. Si in triangulis *adc*, & *mgq*. latus *ad*, & angulus *adc* æqualia fuerint lateri *mg*, & angulo *mgq*, & præterea bases,

&

& altitudines proportionales; æqualia, & ſimilia, ideſt totaliter æqualia erunt triangula, &c.

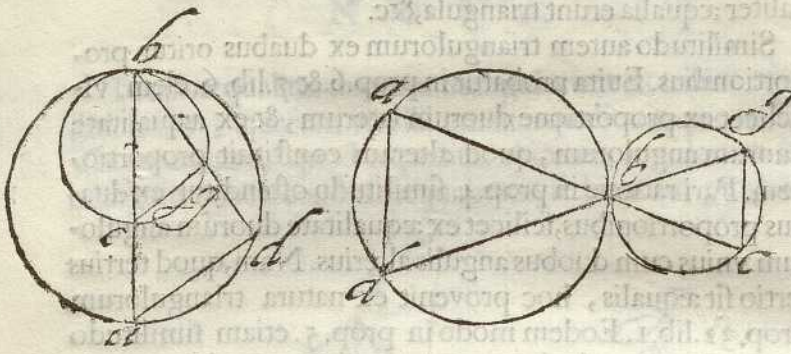
Similitudo autem triangulorum ex duabus oritur proportionibus. Et ita probatur in prop. 6. & 7. lib. 6. elem. videlicet ex proportione duorum laterum, & ex æqualitate duorum angulorum, quod alteram conſtituit proportionem. Pari ratione in prop. 4. ſimilitudo oſtenditur ex duabus proportionibus, ſcilicet ex æqualitate duorum angulorum vnius cum duobus angulis alterius. Nam, quod tertius tertio ſit æqualis, hoc provenit ex natura triangulorum prop. 32. lib. 1. Eodem modo in prop. 5. etiam ſimilitudo demonſtratur ex duabus proportionibus, nam licet ex tribus proponatur; ex duabus poſitis, tertia ex æqualitate rationis neceſſario procedit, vnde ſufficere dicere triangula eſſe ſimilia *adc*, & *mgp*, ex eo, quod *ad* ad *ac* ſit vt *mg* ad *mq*, & *ad* ad *dc* vt *mg* ad *gq*, cum ex æqualitate neceſſario ſit *ac* ad *dc*, vt *mq* ad *gq*.

Ita ſimiliter triangula erunt ſimilia ſi angulus angulo fuerit æqualis, & proportionales baſes, & altitudines, &c.

Hæc quidem ſufficiunt, vt quiſque totalem æqualitatem ex tribus conditionibus, quarum vnam ſaltem ſit æqualitatis: & ſimilitudinem ex duabus proportionibus, proponere, & demonſtrare poſſit.

PROPOSITIO XXI.

Si duo circuli ſe mutuo tetigerint, per contactum autem quælibet ducatur recta, ſimilia ſegmenta ſecabit, atque in puncto contactus in ratione diametrorum dividetur.



Sint duo circuli *abd*, *bgc* se interius, vel exterius contingentes in *b* puncto, per quod recta quælibet ducatur *dbg*. Per centra autem ducatur *abc*, quæ necessario transibit per *b*, & iungantur *ad*, & *gc*.

Quoniam igitur anguli *d*, & *g* in semicirculo sunt recti, & ad *b* æquales, erunt in triangulis *abd*, & *bgc*, reliqui *a*, & *c* etiam æquales, videlicet quos capiunt segmenta *db*, & *bg*, quare ipsa similia erunt. Et quoniam triangula *abd*, & *bgc* sunt æquiangula erit recta *db* ad rectam *bg*, vt diameter *ab* ad diametrum *bc*, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

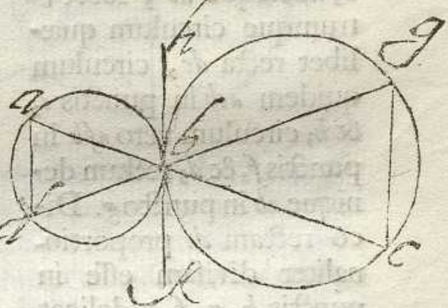
Hinc manifestum fit si per contactum duorum circulorum se interius, vel exterius, contingentium, duæ quælibet ducantur rectæ triangula fieri similia, qualia essent triangula *abd*, & *bgc*, etiam si *abc* non transiret per centra, quia vtraque dividitur in *b*. in ratione diametrorum, vnde latera circa communem angulum *b*. sunt proportionalia.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Si circa duo triangula ſimilia ſub eodem vertice, & baſibus parallelis conſtituta, circuli deſcribantur: ſeſe in eodem vertice contingent.

Hæc propoſitio converſa eſt antecedentis.



Sint duo triangula ſimilia *abd*, & *cbg* ſub eodem vertice *b*, & baſibus parallelis conſtituta. Circa triangulum alterum *cbg* circulus *cbg* deſcribatur, & per *b* tangens ducatur *hk*. Deinde circa triangulum reliquum *abd* circulus deſcribatur *abd*.

Quoniam ex conſtructione *bc* ſecat, & *bk* tangit circulum *cbg* erit angulus *g* angulo *cbk* æqualis; ſed ob ſimilitudinem triangulorum, angulus *g* æquatur angulo *d*: ergo æquales erunt anguli *cbk*, & *d*; ſed angulus *cbk* æquatur angulo *abh*: ergo angulus *abh* æqualis erit angulo *d*, quare (per converſam 32.3.elem.) *ab* ſecat, & *bh* tangit circulum *abd*; ſed *bh* etiam ex conſt. tangit circulum *cbg*: ergo circuli *abd*, & *cbg* ſe contingent in *b*, quod oſtendere oportebat.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Si duo circuli se intersecuerint: recta, quæ vtrumque circulum secat, proportionaliter dividetur à peripherijs, & recta, quæ puncta intersectionum coniungit.

Circuli *acb. afb.* se intersecent in punctis *a*, & *b*, ductaque *ab*, secet vtrumque circulum quælibet recta *dc*, circulum quidem *acb* in punctis *c*, & *h*; circulum vero *afb* in punctis *f*, & *d*; rectam denique *ab* in puncto *g*. Dico rectam *dc* proportionaliter divisam esse in punctis *h. g. f.* videlicet proportionales esse *fc. gf. dh. hg*.

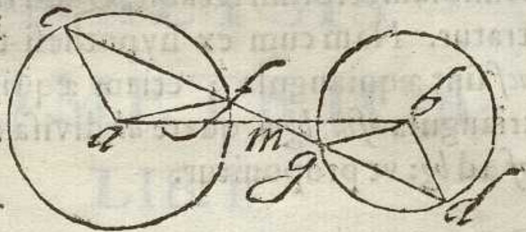
Quoniam enim in circulo *acbh* sunt proportionales *ag. gc. gh. gb*, & in circulo *afbd*. proportionales *ag. gf. dg. gb*: erunt ex æqualitate proportionales *gc. gf. dg. gh.* & dividendo *fc. gf. dh. gh.* quod erat, &c.

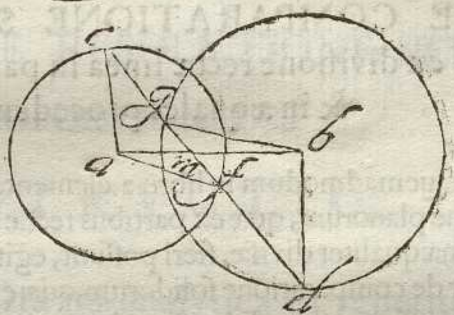
PROPOSITIO XIV.

Si recta, quæ centra iungit duorum circulorum, in ratione semidiametrorum dividatur, & per punctum divisionis quælibet recta ducatur, similia segmenta secabit.

Quan-

Quando circuli se contingunt, recta quæ centra iungit, in ipso contactus puncto, in ratione dividitur semidiametrorũ, & recta, quæ per contactum ducitur similia segmenta secat, vt ostensum est, *prop.21.huius.*





Sint iam duo circuli se non contingentes *cf*, & *gd*, quorum centra *a*, & *b*, ducatur *ab*, & dividatur in *m* in ratione semidiametrorum, & per *m* quælibet ducatur recta *cd*, secans circulum *cf* in *c*, & *f*, circulum vero *gd* in *g*, & *d*, iunganturque *ac*, & *af*, nec non *bg*, & *bd*.

Quoniam ex constructione est *am* ad *mb*, vt *ac* ad *bd*, & altern. *am* ad *ac*, vt *mb* ad *bd*, & anguli ad *m* sunt æquales, similia erunt triangula *acm*, & *mbd*, adeoque angulus *c* angulo *d* æqualis; sed angulo *c* æquatur angulus *cfa*, & angulo *d* angulus *bgd*: ergo in triangulis *acf*, *bgd* reliquus *caf* reliquo *gbd* erit æqualis, quare similia erunt segmenta *cf*, & *gd*. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Conversa ita proponi potest. Si recta duos circulos secans, similia segmenta secet; transiens per rectam, quæ centra iungit: ipsam in ratione semi-

semidiametrorum secabit. Quod facile demonstratur. Nam cum ex hypothesi triangula *bgd. acf* sint æquiangula; etiam æquiangula erunt triangula *afm. bgm*, quare *ab* divisa erit in *m*, vt *af* ad *bg*: vt proponitur.

DE COMPARATIONE SOLIDORVM ex divisione rectæ linea in partes æquales, & in æquales procedentium.

Quemadmodum in libro 2. elementorum de comparatione planorum, quæ ex partibus rectæ lineæ æqualiter, & inæqualiter divisæ, fieri possunt, egit Euclides: Ita similiter de comparatione solidorum, quæ ex ipsa divisione effici possunt, agere debuisse videtur. Sunt enim tam hæc, quam illa, principia necessaria. Quod cum R. P. Jacobus Kresa è Societate Iesu Olim in Academia Olomucensi in Moravia, & in Vniversitate Pragensi in Bohemia, nunc in Collegio Imperiali Matriti Mathematum Professor, erga me semper humanissimus, & methodi meæ conscius, animadvertisse; in elementis Euclidis, quæ Hispano idiomate in lucem edidit, ipsa principia posuit. Quæ nos in secunda parte huius operis, in qua de resolutione problematum solidorum agere intendemus, recensebimus.

His omnibus ita præmissis, Methodum iam nostram aggrediamur.

ANA-

ANALYSIS GEOMETRICA.

LIB. I.

AGENS DE RESOLVTIONE PER PROPORTIONALES.

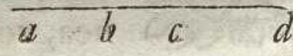
INSTRVCTIO.

TOta ars analytica in repetitione, & reductione terminorum problematis consistit. Repetitio quidem fit, cum aliqua linea, vel aliquis angulus positione mutatur; reductio verò cum magnitudo aliqua, vel aliqua ratio in aliam convertitur æqualem. Quando autem, & quomodo repetitio, & reductio fieri debeant, docet ipsa necessitas magistra rerum, & ipsa Natura dictat. Itaque oportet nos monitos esse in hoc artificio totam rem consistere, vt cautè procedamus in resolutionibus, & terminos poblematis ita repetamus, vel reducamus, vt exinde commodiores consequentias eruere possimus. Sequentes admonitio-nes obſerva, quæ ad noſtram methodum conducunt.

ADMONITIO 1.

Omnis linea incognita, & quæſita in puncto aliquo ignoto terminatur, vnde, vt confuſio vitetur, puncta incognita vltimis litteris alphabeti, *v. z. y. x*, &c. notari debent, vt à punctis notis *a. b. c. d.* &c. diſtinguantur, & ſi opus fuerit vnum, idemque punctum duabus litteris annotari poteſt, quando ſcilicet in eo linea aliqua nota, & aliqua incognita concurrunt.

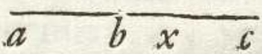
ADMONITIO 2.



In nominandis magnitudinibus morem antiquum conſervamus. Factum ſub rectis *ab*, & *bc*, hoc eſt rectangulum; ſeu parallelogrammū ſub *ab*, & *bc* in quocumque angulo comprehenſum, *abc* ſcribimus, vel etiam hoc modo *ab*:*bc* duobus videlicet punctis interjectis, præcipue quando puncto communi carent illæ rectæ, ſub quibus factum continetur, vt ſi factum ſub rectis *ab*, & *cd* ſcribere velimus, brevitatis gratia, ipſum hoc modo *ab*:*cd* denotanotabimus. Quadratum verò,vel etiã rhombum ex recta *ab* deſcriptum , ſeu deſcrib endum *aba* ſcribemus , cubum tandem ex ipſa *ab* efficiendum ab^3. indicabimus, hoc eſt factum ſub tribus æqualibus dimenſionibus *ab. ab. ab.* & ſic de cæteris,mappa enim analytica prolixitatem non patitur.

DEFINITIO PRIMA.

Rationem additivam dicimus, cuius termini ad additionem , ideſt ad compoſitionem diſpoſiti ſunt. Rationem vero ſubtractivam, quando ad ſubtractionem,hoc eſt ad diviſionem apti reperiuntur.



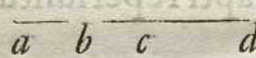
Sit recta *ac* diviſa in punctis *b* , & *x* : rationem igitur, quæ inter *ab*, & *bx* exiſtit, additivam dicimus,quia termini *ab*, & *bx* totam *ax* componunt. Rationem verò inter *ax* , & *bx* ſubtractivam vocamus, quia termini *ax*,& *bx* recta differunt *ab*, & ſic de alijs

ADMONITIO 3.

Si in analyſi ordo ſervetur litterarum ſicuti in figura puncta procedunt, ex ſola earum inſpectione manifeſtum erit, an ratio additiva, ſubtractivave ſit, & conſequenter an componere, vel dividere oporteat. In ratione enim *ac. ax*, quæ ſubtractiva eſt, punctum commune *a* neceſſariò alternat, quod in ratione additiva *ab. bx*, vel *bx. ab.* accidere non poteſt, ſi prædictus ordo ſervetur.

ADMONITIO 4.

Quamlibet rationem ex additiva in ſubtractivam, & ex ſubtractiva in additivam convertere licet repetitione alterutrius termini.



Si enim rationem additivam inter *ab*, & *bd* in ſubtractivam convertere velimus, fiat *bc* ipſi *ab* æqualis, & ita ratio inter *bc*, & *bd*, ideſt *ab*, & *bd*, ſubtractiva erit. Et ſimiliter ſi rationem ſubtractivam *bd. bc* in additivam oporteat revocare, fiat *ab* ipſi *bc* æqualis, & ratio *bd. ab*, quæ eadem eſt cum ratione *bd. bc*, erit additiva, & ſic de alijs.

ADMONITIO 5.

Quando propositta aliqua proportione, in recta linca existente, per proportionales argumentari oportet;nullo alio modo procedere licet, nisi per compositionem, vel per divisionem. Itaque si vtraque ratio additiva fuerit, componendo, vel per compositionem; si verò subtractiva, dividendo, vel per divisionem arguere debebit Analysta. Ita vt eo semper argumento vtatur, quod ad conservationem terminorum notorum commodius videatur.

Cæterum si vna ratio additiva, & altera subtractiva fuerit, vel hæc in additivam, vel illa in subtractivam reducenda erit, vt vtraque sit eiusdem generis. Quod facile per præcedentem admonitionem obtinetur, & semper obseruari debet, quando termini rationis reducendæ cogniti sunt. Attamen si extiterint incogniti, & eorum summa, aut differentia nota fuerit, plærumque maiore claritate res expedietur per prop. 7. & 8. Introductionis, quarum notitia, differentia terminorum rationis additivæ, & aggregatum rationis subtractivæ exprimi possunt; vnde per divisionem, vel compositionem arguere licebit.

DE-

DEFINITIO SECVNDA.

Rationem communem vocamus illam, quæ duabus proportionibus communis exiſtit, ſive ipſa directa, ſive reciproca ſit.

Sint duæ proportiones *a. b. d. e.* & *b. c. e. f*, quarum vtraque duos habet æquales terminos *b*, & *e* rationem directam inter ſe conſtituentes.

a.	*b.*	*d.*	*e.*
b.	*c.*	*e.*	*f.*

Hanc igitur rationem, communem vocamus, quia communis eſt vtriſque analogijs.

Eodem modo ſint duæ proportiones *a.b.e.f*, & *b. c. d. e*, quarum vtraque duos ſortitur terminos æquales *b*, & *e*, rationem inter ſe reciprocam efficientes.

a.	*b.*	*e.*	*f.*
b.	*c.*	*d.*	*e.*

Hanc igitur rationem, communem vocamus, quia communis eſt vtriſque proportionibus.

ADMONITIO 6.

Si igitur duæ fuerint proportiones rationem habentes communem: ex æqualitate arguere licebit. Si verò ratio defuerit communis, ipſa introducenda erit, vt vlterius progregredi poſsimus. Quod quidem reductione alicuius rationis in aliam ipſi æqualem fieri poteſt.

Et eodem modo ſi aliqua proportio in triangulo, aliave figura exiſtat, & termini deſint ad progreſſum: neceſſario repetitione alicuius anguli nova proportio adhibenda erit, vt in duabus proportionibus duo conſtituantur æquales termini, & ex æquo arguere valeamus. Vnde perſpicuum fit illum angulum tranſponendum eſſe, qui cum angulis, & lineis figuræ tam cognitis, quam incognitis commodiorem præbeat ſimilitudinem triangulorum.

ADMONITIO 7.

Poſito iam quæſito, tamquam conceſſo totus conatus eò tendere debet, vt magnitudines notæ ſemper retineantur in argumentationibus, & punctum incognitum extinguatur, & evaneſcat quantum fieri poſsit. Et cum Analyſta conſcius ſit, in vna proportione rationem additivam, ſeu ſubtractivam; & in duabus proportionibus rationem communem conſtituendam eſſe, ſi iam conſtituta non ſit, per neceſſarias conſequentias ad finem problematis perveniet. Hoc eſt per neceſſarias conſequentias analyſim perſequetur, donec

mag-

magnitudo incognita alij magnitudini notæ æqualis appareat, vel punctum incognitum in quarto termino proportionali, vel in duobus medijs, sive extremis, quorum summa, aut differentia nota sit, tandem reperiatur, nam quartus proportionalis, vel duo reciproci satisfacient, & solutum erit problema.

ADMONITIO 8.

Finita denique analysi, ordo constructionis, & demonstrationis manifestus, & expressus apparet. Nam ad constructionem nil aliud requiritur, nisi id ipsum efficere, quod in analysi factum, seu faciendum supponitur. Et ad demonstrationem nil aliud, nisi à fine analyseos incipiendo, ijsdem; seu contrarijs argumentationibus ad principium retrogradiendo progredi. Nam si analysis alternando, invertendo, aut convertendo arguit, etiam synthesis alternare, invertere, aut convertere debet. Cæterum si analysis componit, synthesis dividit, & è contra, &c.

Exemplis præcepta perspicua fient.

PRO-

PROPOSITIO I.

Datam rectam ac, vtcumque divisam in b, rursus secare in x, inter b, & c, vt $ax.\ xc.\ bx$ sint proportionales.

Vide Franciscũ Schooten de concin. demõstrationibus.

$$a \quad b \quad x \quad c \quad q$$

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ax.$	$xc.$	$xc.$	$bx.$	
Ergo componendo E.P.	$ac.$	$xc.$	$bc.$	$bx.$	
Fiat cq ═ bc			$cq.$		
Et quia vt agg. ita est 1. ad 1. E.P.	$aq.$	$bc.$	$cq.$	$bx.$	12.5.el
Ergo solutum.					

DECLARATIO.

In hac propositione quæsitum est, vt rectæ $ax.\ xc.\ bx.$ proportionales fiant: ergo ex ipsa definitione analyseos poni debent, tamquam iam factæ proportionales $ax.xc.xc.bx.$ Hoc posito, quis non videt primam rationem $ax.\ xc.$ additivam, & etiam additivam secundam rationem $xc.\ bx$? Ergo necessario per compositionem progrediendum erit; neque aliud nobis excogitare expedit. Ergo componerunt proportionales $ac.\ xc.\ bc.\ bx.$ & ecce tibi punctum incognitum x in duobus terminis extinctum. Rursus quis non videt inter terminos adhuc incognitos $xc.\ bx$ rationem additivam? Ergo reliqua ratio inter terminos notos $ac.\ bc$, quæ subtractiva est, in additivam debet revocari. Fiat proinde cq ipsi bc æqualis, & erit ratio inter $ac.\ cq.$ (quæ eadem

$$\overline{a \quad b\ x\ c \quad q}$$

est cum ratione *ac. bc*) etiam additiva, sicuti est ratio *xc. bx*.
12.5.el. Sunt autem aggregata antecedentium, & consequentium, vt vnus antecedens ad vnum consequentem : ergo vt aggregata ita vnus ad vnum, & exurgent proportionales *aq. bc. cq. bx.* Et punctum incognitum *x* tantummodo manet in quarto termino tribus notis terminis proportionali. Ergo solutum est problema ex sola consideratione rationum; immo ex sola inspectione litterarum, & in mappa analytica ordo constructionis, & demonstrationis manifestus, & expressius apparet.

CONST. ET DEMONST.

Fiant, *cq* ipsi *bc* æqualis, & proportionales *aq. bc. cq. bx*. Dico *ax. xc. bx* esse proportionales.

Cum enim sit *aq* ad *bc*, vt *cq* ad *bx* ex const. (& differentiæ sint vt vnus ad vnum) erit *ac* ad *xc*, vt *cq*, idest *bc* ad *bx*: ergo divid. erit *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *bx*. Quod erat faciendum.

Vide argum. in Introd. vt vnus ad vnũ. ita diff. *In mappa perceptibilior patet analysis, quam si profluente discursu exponeretur. Immo constructio, & demonstratio ita simul patent, vt vlterior explicatio quasi superflua videatur. Facta enim constructione, demonstratio à fine incipiens in hunc modum debet proferri.*

DE.

DEMONSTR.

Quoniam ex constr.+ S.P.	*aq.*	*bc.*	*cq.*	*bx.*	+ Sunt Proportionales
Et vt diff. ita est 1. ad 1.+ E.P.	*ac.*	*xc.*	*cq.*	*bx.*	+ Erunt Proportionales
Ideſt			*bc.*		
Ergo divid. E.P.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*bx.*	

Quod erat faciendum.

Nos tamen ſemper ſyntheſim, more antiquo, explicabimus in gratiam eorum, qui in ipſa mappa ſiſtere nolint.

ALITER.

Loco argumentationis vt aggregata, ita vnus ad vnum, componendo, & alternando arguere licet.

ANALYSIS.

Sint igit, prop.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*bx.*
Ergo comp. E.P.	*ac.*	*xc.*	*bc.*	*bx.*
Et altern.	*ac.*	*bc.*	*xc.*	*bx.*
Fiat *cq* —A— *bc.*		*cq.*		
Et comp. E.P.	*aq.*	*cq.*	*bc.*	*bx.*

Ergo ſolutum.

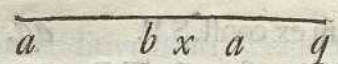
CONSTR.

Vt antea.

DEMONSTR.

Cum enim ex conſtr. ſit *aq* ad *cq* vt *bc* ad *bx*, & divid. *ac* ad *cq*, ideſt ad *bc*, vt *xc* ad *bx*, & altern. *ac* ad *xc*, vt *bc* ad *bx*: erit divid. *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *bx*. Quod erat faciendum.

ALITER.



Brevius problema poterit expediri hoc modo.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*bx.*
Ergo comp. E.P.	*ac.*	*xc.*	*bc.*	*bx.*

Ergo ſolutum, cum manifeſtum ſit rectam *bc* dividendam eſſe in *x* in ratione *ac* ad *bc*.

CONSTR. ET DEMONST.

10.6.*el.* Dividatur *bc* in *x* in ratione *ac* ad *bc*, ita vt ſit *ac* ad *xc*, vt *bc* ad *bx*. Et diuid. erit *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *bx*. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Hæc omnia ſanè naturaliſsima videntur, tam in lineis, quam in numeris. In lineis quidem, quia cum *bx* ex analogia innoteſcat, punctum *x* determinabitur, & ſimul vtraque *ax*, & *xc*; in numeris verò, quia ſi ipſi *bx* addatur nota *ab*, cognita erit quantitas *ax*, & ſi ex nota *bc* auferatur ipſa *bx*, remanebit quantitas *cx* manifeſta.

Ve-

Verum si è principio rectam ax, seu xc resolutam velimus, oportebit commodam argumentationem eligere, vt terminus resolvendus retineatur.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ax.$	$xc.$	$xc.$	$bx.$
Ergo per comp. E. P.	$ax.$	$ac.$	$xc.$	$bc.$

Ergo solutum. Nam si ac dividatur in x in ratione ac ad bc, erit tam ax, quam xc positione, & longitudine manifesta.

Nos autem nullam incognitarum determinatè quærimus; de breviore, & faciliore modo resolvendi punctum incognitum tantum curamus, cùm semel cognito, sit resolutio peracta.

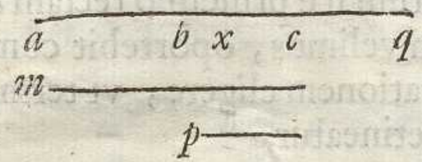
Porro si magnitudines, quæ conditiones, constituunt, separatæ proponantur, ad commodam contiguitatem facile reducentur.

Sit idem problema ita propositum.

PROBLEMA.

Tres rectas proportionales invenire ita vt data m sit aggregatum primæ, & secundæ, data verò p aggregatum secundæ, & tertiæ.

Super

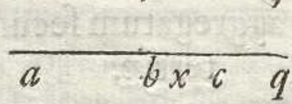


Super quamlibet rectam indefinitam *aq* ſupponatur *ax* prima,& fiat *ac* ipſi *m* æqualis, vnde neceſſario *xc* erit ſecunda. Fiat denique *cb*, ipſi *p* æqualis , & erit *bx* tertia. Itaque reductio erit peracta, cum *ax* prima,& *xc* ſecunda, totam *ac*, ideſt datam *m* componant, ſecunda verò *xc*, & tertia *bx* totam *bc*, ideſt datam *p* conſtituant. Et cum oporteat proportionales facere *ax*. *xc*. *bx*, analyſis omnino, vt antea inſtituenda erit, & ſic de alijs eſt intelligendum.

Analyſis profecto noſtra quæſtiones arithmeticas eodem modo expedit , ac problemata geometrica, ſupponendo rectas lineas pro numeris , & quamvis prædicta doctis ſufficerent , placet vberioris explicationis gratia ob oculos exempla ponere.

QVÆSTIO ARITHMETICA.

Tres numeros proportionales invenire , vt ſumma primi, & ſecundi ſit 35 , ſumma verò ſecundi, & tertij ſit 14.



Exponatur quælibet recta *ac*, & intelligatur valere 35, dividatur in *x*,& quæſitorum numerorum primus , & ſe-

cun-

cundus erunt *ax*, & *xc*. Ponatur alia *bc*, quæ concipiatur valere 14, & erit *bx* tertius: ergo ſolum reſtat proportionales facere rectas *ax*. *xc*. *bx*, quæ quæſitos numeros repreſentant. Repetatur analyſis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax*.	*xc*.	*xc*.	*bx*.
Ergo comp. E.P.	*ac*.	*xc*.	*bc*.	*bx*.
Fiat *cq* — Λ — *bc*			*cq*.	
Ergo vt agg. ita 1. ad 1. & E.P.	*aq*.	*bc*.	*cq*.	*bx*.
Ergo reſolutio eſt manifeſta.				

RESOLVTIO.

Si 49 (*aq*) aggregatum 35, & 14, dat 14 (*bc*) quid dabit 14? (*cq*) Dabit 4 (pro *bx*) & tantus erit numerus tertius: ergo ſecundus erit 10, cum vterque ſit 14: ergo primus erit 25, cum primus, & ſecundus ſint 35.

Sunt igitur tres quæſiti numeri 25. 10. 4, in quibus tres præſcriptæ conditiones inveniuntur, quod arithmeticè examinatur, & geometricè, ſi opus fuerit, demonſtrari poterit.

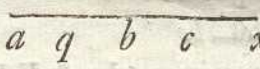
Fusè quidem hanc primam propoſitionem explicuimus, vt nobis in ſequentibus breviores eſſe liceat.

PRO-

PROPOSITIO II.

Vide Franc. Schootē. de concin. demonstr.

Datam rectam ac ſectam in b, protrahere ad x, ita vt ax. bx. cx. ſint proportionales.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	ax.	bx.	bx.	cx.
Ergo divid. E.P.	ab.	bx.	bc.	cx.
Fiat qb —∧— bc			qb.	
Ergo vt diff. ita 1. ad 1. & E.P.	aq.	bc.	qb.	cx.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiant qb, & bc æquales, & proportionales aq. bc. qb. cx. Dico factum.

Cum enim ſit aq ad bc, vt qb ad cx, erit ab ad bx, vt qb, ideſt bc ad cx (hoc eſt aggregata vt vnus ad vnum) & comp. ax ad bx, vt bx ad cx. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

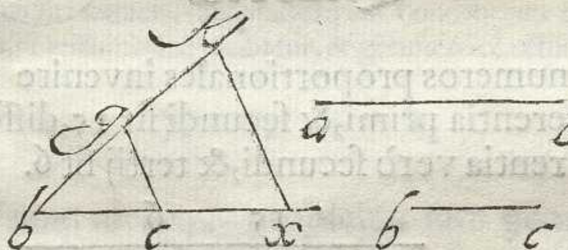
14.5.el. Quoniam bx maior eſt, quam cx, neceſſario data ab maior debet eſſe, quam data bc. Aliter impoſsibile eſſet problema, vt perſpicuum eſt in analyſi, quare de ſimilibus determinationibus, quas quilibet obſervare poterit, raro curā geremus.

SCHO-

SCHOLION.

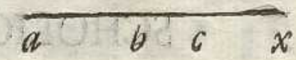
In elementis hæc propoſitio neceſſaria videtur, nimirum: Duas rectas, quarum ſumma , aut differentia nota ſit, in data ratione ad inveni-re. *Primam partem R. P. Clauius in Scholio ad prop. 10. lib. 6. Elementorum attulit. Pari iure ſecundam afferre debuit. Et quamvis doctis ſatis obvia ſit; placet tamen ipſam hic ita proponere, & demonſtrare.*

Ad datam differentiam duas rectas inuenire in data ratione.



Oporteat invenire duas rectas bx, & cx, quarum differentia ſit bc , in ratione data vt ab ad bc. Ponantur ex b, quemlibet angulum facientes, bk, & bg datis ab, & bc æquales, iunctaque gc, ducatur ipſi parallela kx. Et erit bx ad cx, bk ad bg, ideſt vt ab ad bc, vt oportebat.

Hoc poſito propoſitum problema brevius poterit expediri.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ax.$	$bx.$	$bx.$	$cx.$
Ergo divid. E.P.	$ab.$	$bx.$	$bc.$	$cx.$
Ergo solutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Ad datam differentiam *bc* inveniantur *bx*, & *cx* in ratione *ac* ad *bc*, & proportionales erunt *ab. bx. bc. cx*, & compon. *ax. bx. bx. cx.* vt oportebat.

QVÆSTIO.

Tres numeros proportionales invenire, vt differentia primi, & secundi sit 15, differentia verò secundi, & tertij sit 6.

Valeat *ab.* 15. & *bc.* 6, sitque *ax* numerus primus: ergo secundus erit *bx*, differunt enim 15. vt petitur: ergo tertius erit *cx*, quia *bx*, & *cx*, secundus, & tertius differunt 6. vt oportet. Ergo solum restat proportionales facere *ax. bx. cx.* Instituatur analysis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax.*	*bx.*	*bx.*	*cx.*
Ergo divid. E.P.	*ab.*	*bx.*	*bc.*	*cx.*
Fiat *qb* — A — *bc*			*qb.*	
Ergo vt diff. ita 1. ad 1. & E.P.	*aq.*	*bc.*	*bc.*	*cx.*
Ergo solutum.	9.	6.	6.	4.

RESOLVTIO.

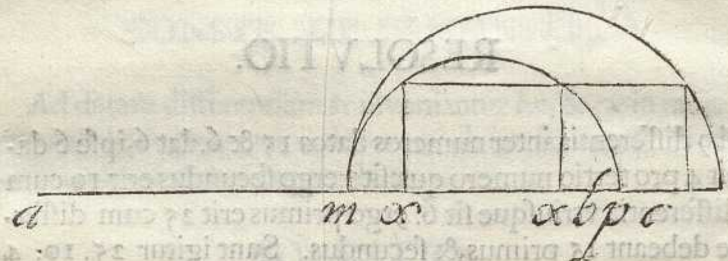
Si 9 differentia inter numeros datos 15 & 6. dat 6, ipse 6 dabit 4 pro tertio numero quæsito: ergo secundus erit 10 cum differentia vtriusque sit 6: ergo primus erit 25 cum differre debeant 15 primus, & secundus. Sunt igitur 25. 10. 4 tres quæsiti numeri, tres præscriptas conditiones amplectentes, vt arithmeticè probatur, & geometricè ostenditur.

NOTA.

Vnum idemque problema tam geometricum, quam arithmeticum diversis modis proponi potest. v.g. Rectam, vel numerum invenire *ax*, à quo si auferantur seorsim recta data *ab*, vel numerus datus 15, & recta data *ac*, vel numerus datus 21: sint proportionales ipsa recta quæsita, & residuæ, vel ipse numerus quæsitus, & residui, hoc est *ax. bx. cx.*

PROPOSITIO III.

Datam rectam ac diviſam in b, rurſus ſecare in x inter a, & b, vt ſint proportionales $ax. xc. xb.$



Quoniam igitur in proportionalibus $ax. xc. xc. xb.$ prima ratio eſt additiva, ſecunda verò ſubtractiva, perſpicuum eſt iuxta inſtructionem, vel hanc in additivam, vel illam in ſubtractivam eſſe convertendam. Sed quoniam termini ſunt incogniti, biſecetur ac in m, & erit $2mx$ differentia partium ax, & xc, & ſimiliter biſecetur bc in p, & erit $2xp$ aggregatum partium xc, & xb. Vnde per diviſionem, vel per compoſitionem procedere licebit.

per 7. Introd.

per 8.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ax.$	$xc.$	$xc.$	$xb.$
Ergo comp. E.P.	$ac.$	$xc.$	$2xp.$	$xb.$
Et dimid. anteced.	$mc.$	$xc.$	$xp.$	$xb.$
Ergo convert. E.P.	$mc.$	$mx.$	$xp.$	$bp.$

Er-

Ergo ſolutum. Quia cum punctum incognitum x in terminis medijs tantum exiſtat, vlterius progredi non licet. Et quoniam nulla extat ratio, vnde inferre poſsimus, quænam ex incognitis mx, & xp ſit altera maior: erit in arbitrio noſtro accipere in conſtructione mx iam pro parte maiore iam pro minore, & duæ exurgent diverſæ ſolutiones, quibus eadem conuenit demonſtratio.

CONSTR. ET DEMONST.

Biſecentur ac in m, & bc in p, ipſiſque mc, & bp, ſeu pc, reciprocæ inveniatur mx, & xp, quarum ſumma ſit mp. Dico factum. *prop. 1. Introd.*

Sunt enim ex conſtr. proportionales $mc.\ mx.\ xp.\ bp.$ & convert. $mc.\ xc.\ xp.\ xb$, & duplicando antecedentes $ac.\ xc.\ 2xp.\ xb$; ſed $2xp$, ideſt dupla xp aggregatum eſt terminorum xc; & xb: ergo divid. erunt proportionales $ax.\ xc.\ xc.\ xb$. Quod erat faciendum.

ALITER.

Poſſumus, vt dictum eſt, per diviſionem procedere hoc modo.

ANALYSIS.

Sint igit, prop.	$ax.$	$xc.$	$xc.$	$xb.$
Ergo divid. E.P.	$2mx.$	$xc.$	$bc.$	$xb.$
Et dimid. anteced.	$mx.$	$xc.$	$bp.$	$xb.$
Ergo per comp. E.P.	$mx.$	$mc.$	$bp.$	$xp.$

Ergo ſolutum.

CONSTR. Vt antea.

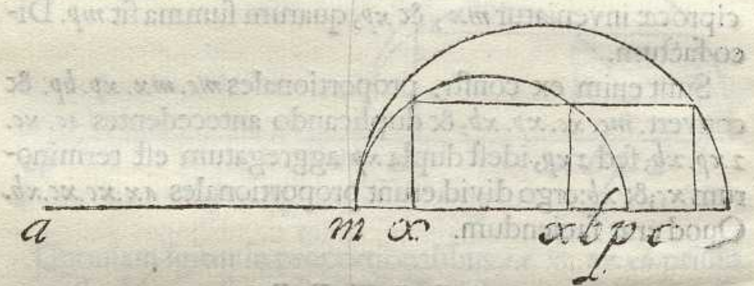
DE-

DEMONSTR.

Sunt enim ex conſt. proportionales *mx. mc. bp. xp*, & per divisionem *mx. xc. bp. xb*, & duplicando antecedentes 2*mx. xc. bc. xb*; ſed 2*mx* differentia eſt terminorum *ax*, & *xc*: ergo comp. erunt proport. *ax. xc. xc. xb.* Quod facere oportebat.

per 7. Introd.

ALITER.



Poſſumus etiam per compoſitionem, & diviſionem ſimul, procedere, & problema brevius reſolvere. Hoc modo.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*xb.*
Ergo comp. & divid. E.P.	*ac.*	2*mx.*	2*xp*	*bc.*
Et dimidiando omnes	*mc.*	*mx.*	*xp.*	*bp.*

Ergo ſolutum, & conſtructio vt antea.

DEMONSTR.

Sunt enim ex conſt. proportionales *mc. mx. xp. bp*, & duplicando omnes *ac. 2mx. 2xp. bc*; ſed *ac* eſt ſumma, &

2*mx*

$2mx$ differentia terminorum ax, & xc, & eodem modo $2xp$, & bc summa sunt, & differentia terminorum xc, & xb: ergo dividendo, & componendo simul, erunt proportionales $ax. xc. xc. xb$. Quod oportuit facere.

Si quadratum ex dimidio summæ reciprocarum quæsitarum minus fuerit rectangulo sub reciprocis notis: problema construi non poterit, vt animaduertimus in prop. 1. Introductionis. Et quamvis hæc admonitio sufficiat: placet tamen id ipsum vberioris doctrinæ gratia, ex ipsa analysi demonstrare.

DETERMINATIO.

Si rectangulum sub mc, & bp maius fuerit quadrato dimidiæ mp non erunt proportionales $ax. xc. xc. xb$.

Cum enim maximum rectangulum mxp, nempe, quod mx & xp comprehendere possunt, æquale sit $\frac{1}{4}$ mpm, idest quadrato ex dimidia mp, quo maius ponitur rectangulum sub mc, & bp: erit propterea rectangulum sub mc, & bp maius rectangulo mxp: ergo ratio $mc. mx$ maior erit ratione $xp. bp$, & convert. ratio $mc. xc$ maior ratione $xp. xb$, & duplicando antecedentes ratio $ac. xc$. maior ratione $2xp. xb$, & tandem dividendo, ratio $ax. xc$. maior ratione $xc. xb$: ergo $ax. xc. xb$. non erunt proportionales, vt oportebat. *Vide propsit. fundam Introd.*

In hunc modum hanc limitationem, quæ frequenter occurrit, poterit analysta, cum opus fuerit, demonstrare, & cautus procedere in determinatione problematis quando duas rectas reciprocas inquirat, hoc est an ipsum impossibile sit, an

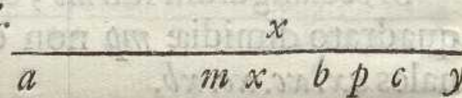
verò

verò vnam tantum, vel duas accipere poſsit ſolutiones, quod ſemel, & iterum monuiſſe ſufficiat. Nos enim raro de conſtructionibus, & determinationibus curabimus.

ALITER.

Quando vna ratio fuerit additiva, altera verò ſubtractiva, & termini incogniti: ſæpe facilior, & ſemper elegantior erit prædictus modus reſolvendi. Attamen repetitione alterutrius termini vtramque rationem eiuſdem naturæ conſtituere poſſumus, & problema aliter demōſtrare, vt diximus in Inſtructione.

Dividantur *ac*, & *bc* in *m*, & *p* bifariam.



ANALYSIS

Sint igit. prop.	*ax.*	*xc.*	*xc.*	*xb.*
Fiat *cy* $\llcorner\!\wedge\!\lrcorner$ *xb.*				*cy.*
Ergo comp. E.P.	*ac.*	*xc.*	*xy.*	*xb.*
Et dimid. anteced.	*mc.*	*xc.*	*xp.*	*xb.*
Et convert.	*mc.*	*mx.*	*xp.*	*bp.*
Ergo ſolutum.				

CONST. ET DEMONST.

Biſecentur *ac*, & *bc* in *m*, & *p*, & ipſis *mc*, & *bp* reciprocæ

in

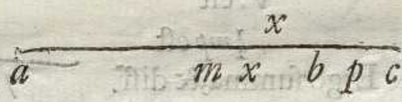
Inveniantur *mx*, & *xp*, quarum summa sit *mp*. Dico factum. Fiat *cy* ipsi *xb* æqualis, & erunt *xp*, & *py* æquales.

Est enim ex constr. *mc* ad *mx*; vt *xp* ad *bp*, & convert. *mc* ad *xc*, vt *xp* ad *xb*, & duplicando antecedentes *ac* ad *xc*, vt *xy* ad *xb*, idest ad *cy*: ergo dividendo erit *ax* ad *xc*, vt *xc* ad *cy*, idest ad *xb*. Quod erat faciendum.

Eodem modo repeti poterit terminus *ax*, vt ratio *ax* ad *xc*, in subtractivam revocetur.

QVÆSTIO.

Tres numeros proportionales exhibere, vt summa primi, & tertij sit 29, summa verò primi, & secundi sit 35.



Valeat quælibet recta *ac* 35, divisaque in *x* sint *ax*, & *xc* primus, & secundus. Valeat alia recta *ab*. 29, & quia *ax* est primus, erit *xb* tertius: ergo oportet proportionales facere rectas *ax*. *xc*. *xc*. *xb*, quæ tres quæsitos numeros repræsentant. Repetatur analysis.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xc*.	*xc*.	*xb*.
Ergo comp. E.P.	*ac*.	*xc*.	2*xp*.	*xb*.
Et dimid. anteced.	*mc*.	*xc*.	*xp*.	*xb*.
Ergo convert. E.P.	*mc*.	*mx*.	*xp*.	*bp*.

Ergo $\frac{1}{2}mp + \sqrt{\frac{1}{4}mpm - mc}: bp.$

Et $\frac{1}{2}mp - \sqrt{\frac{1}{4}mpm - mc}: bp.$

Erunt valoreses reciprocarum *mx*, & *xp*, vt constat ex prop. 1. Introductionis.

RESOLVTIO.

Datur *ac* ⌐Λ⌐ 35, vnde *mc* ⌐Λ⌐ $17\frac{1}{2}$
Et *ab* ⌐Λ⌐ 29.
Ergo *bc* ⌐Λ⌐ 6. vnde *bp* ⌐Λ⌐ 3.
Ergo *mp* ⌐Λ⌐ $14\frac{1}{2}$
Et $\frac{1}{2}$*mp* ⌐Λ⌐ $7\frac{1}{4}$, cuius quadr. $52\frac{9}{16}$

mc: in *bp*, idest $17\frac{1}{2}$ in 3 est $52\frac{8}{16}$

Differentia $\frac{1}{16}$
V. est $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$*mp* est $7\frac{1}{4}$.

Ergo summa, & diff. $7\frac{1}{2}$ & 7
pro *mx*. & *xp*

Ergo si *mx* sit $7\frac{1}{2}$ erit *ax* 25, quia *am* est $17\frac{1}{2}$
& erit *xc*. 10.
& *xb*. 4.

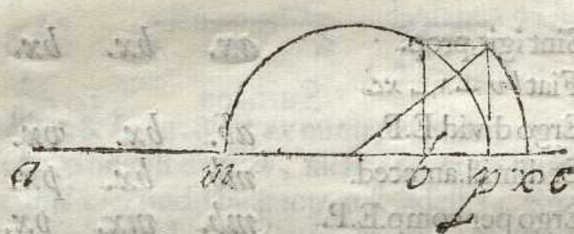
Sed si *mx* sit 7. erit *ax*. $24\frac{1}{2}$, quia *am* est $17\frac{1}{2}$
& erit *xc*. $10\frac{1}{2}$
& *xb*. $4\frac{1}{2}$.

Sunt igitur tres quæsiti numeri 25. 10. 4, & etiam $24\frac{2}{1}$. $10\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. nam tam hi, quam illi præscriptas conditiones adimplent.

PROPOSITIO IV.

Datam rectam *ac*, vtcumque divisam in *b*, iterum dividere in *x* inter *b*, & *c*, vt sint proportionales *ax. bx. xc.*

Bisecentur *ab*, & *bc* in *m*, & *p*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*bx.*	*bx.*	*xc.*
Ergo comp. E. P.	*2mx.*	*bx.*	*bc.*	*xc.*
Et dimid. anteced.	*mx.*	*bx.*	*pc.*	*xc.*
Ergo convert. E. P.	*mx.*	*mb.*	*pc.*	*px.*
Ergo solutum.				

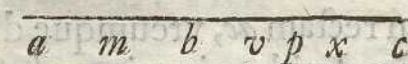
CONST. ET DEMONST.

Bisecentur *ab*, & *bc* in *m*, & *p*, ipsisque *mb*, & *bp* (seu *pc*) reciprocæ inveniantur *mx*, & *px*, quarum differentia sit *mp*. Dico factum. *prop. 1. Introd.*

Sunt enim ex constr. proportionales *mx. mb. pc. px*, & convert. *mx. bx. pc. xc*, & duplicando antecedentes *2mx. bx. bc. xc*; sed *2mx* aggregatum est partium *ax*, & *bx*: ergo dividendo erunt proportionales *ax. bx. bx. xc.* Quod erat faciendum. *prop. 8. Introd.*

 ALI-

ALITER.



ANALYSIS.

Sint igit, prop.	$ax.$	$bx.$	$bx.$	$xc.$
Fiat bv —Λ— $xc.$				$bv.$
Ergo divid. E.P.	$ab.$	$bx.$	$vx.$	$xc.$
Et dimid. anteced.	$mb.$	$bx.$	$px.$	$xc.$
Ergo per comp. E.P.	$mb.$	$mx.$	$px.$	$pc.$
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONST.

Biſecentur ab, & bc in m, & p, ipſiſque mb, & pc (ſeu bp) reciprocæ inveniantur mx. px, quarum differentia ſit mp. Dico factum. Agatur bv ipſi xc æqualis, & quoniam bp, & pc ſunt æquales, etiam reſiduæ vp, & px inter ſe, & compoſitæ bx, & vc inter ſe, erunt æquales. Cum igitur ſit ex conſtructione mb ad mx: vt px ad pc: erit per diviſ. mb ad bx, vt px ad xc, & duplicando antecedentes ab ad bx, vt vx ad xc, ideſt ad bv, componendoque ax ad bx, vt vc, ideſt bx ad xc. Quod erat faciendum.

QVÆSTIO.

Tres numeros proportionales invenire, vt primus, & ſecundus differant 15; ſecundus verò, & tertius componant 14.

$a \quad m \quad b \quad px \quad c$

Valeant ab. 15, & bc 14, & ſit ax numerus primus: ergo ſecundus erit bx, cum differant ab, ideſt 15: ergo tertius erit xc, quia cum bx ſecundo facit totam bc, ideſt 14. Ergo fieri debent proportionales $ax. bx. bx. xc$. Biſecentur ab in m, & bc in p, & repetatur.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	ax.	bx.	bx.	xc
Ergo comp. E. P.	$2mx$.	bx.	bc.	xc.
Et dimid. ant.	mx.	bx.	pc.	xc.
Et convert.	mx.	mb.	pc.	px.

Ergo $\frac{1}{2}mp + \sqrt{\frac{1}{4}mpm + mb} : pc$

Et $-\frac{1}{2}mp + \sqrt{\frac{1}{4}mpm + mb} : pc$

Erunt valores numerorum mx, & px, vt explicatum eſt in prop. 1. Introductionis.

RESOLVTIO.

Datur ab —Λ— 15
Et bc —Λ— 14
Ergo mp —Λ— $14\frac{1}{2}$
Et $\frac{1}{2}mp$ —Λ— $7\frac{1}{4}$ eius quadr. $52\frac{9}{16}$
mb in pc idest $7\frac{1}{2}$ in 7. est $52\frac{8}{16}$

Summa $105\frac{1}{16}$
√. est $10\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}mp$. est $7\frac{1}{4}$

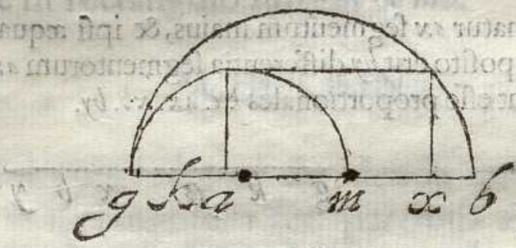
Ergo summa, & diff. $17\frac{1}{2}$ & 3. pro mx, & px. Ergo si mx fuerit $17\frac{1}{2}$ erit ax 25. quia am est $7\frac{1}{2}$, vel si px fuerit 3 erit ax 25, quia ap est 22.

Determinato primo, qui valet 25, erit secundus 10, vt differant 15, & tertius erit 4, vt cum secundo componat 14, & proportionales erunt 25. 10. 4. vt oportebat.

PRO-

PROPOSITIO V.

Datam rectam *ab* ita secare in *x*, vt rectangulum sub segmentis *ax*, & *xb* æquale sit rectangulo sub differentia eorundem, & data *ka*.



A.

Bisecetur *ab* in *m*, & erit 2*mx* differentia segmentorum *ax*. *xb*, itaque conditio erit, vt rectangulum *axb* rectangulo sub *ka*, & 2*mx* sit æquale, vel vt sint proportionales *ka*. *ax*. *xb*, 2*mx*. Fiat *ga* dupla ipsius *ka*. Prop. 7. Introd.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ka.*	*ax.*	*xb.*	2*mx.*
Ergo dimid. & duplic. E. P.	*ga.*	*ax.*	*xb.*	*mx.*
Et per comp.	*ga.*	*gx.*	*xb.*	*mb.*
Ergo solutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat *ga* dupla ipsius *ka*, divisaque *ab* bifariam in *m*, ipsis

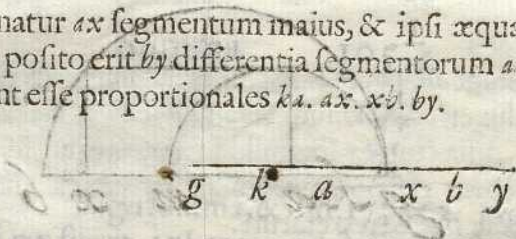
ga,

prop. 1. Introd. *ga*, & *am*, seu *mb*, reciprocæ inveniantur *gx*, & *xb*, quarum summa sit *gb*. Dico factum.

Sunt enim ex constr. proportionales *ga*. *gx*. *xb*. *mb*, & per divis. *ga*. *ax*. *xb*. *mx*, dimidiandoque, & duplicando *ka*. *ax*. *xb*. 2 *mx*; sed 2 *mx* differentia est segmentorum *ax*, & *xb*: ergo rectangulum *axb* æquale erit rectangulo sub data *ka*, & differentia eorumdem segmentorum 2 *mx*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Supponatur *ax* segmentum maius, & ipsi æqualis recta *xy*, quo posito erit *by* differentia segmentorum *ax*, & *xb*: ergo debent esse proportionales *ka*. *ax*. *xb*. *by*.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ka*.	*ax*.	*xb*.	*by*.
Ergo per comp. E. P.	*ka*.	*kx*.	*xb*.	*xy*.
Idest				*ax*.
Fiat *gk* ⌐ ⌐ *ka*.	*gk*.			
Ergo per comp. E. P.	*gk*.	*gx*.	*xb*.	*ab*.
Ergo solutum				

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipsis rectis datis *ab*, & *ka*, seu *gk*, reciprocæ inveniantur *gx*, & *xb*, quarum summa sit *gb*, idest aggregatum ipsius *ab*, & duplæ *ka*. Dico factum. Ponatur *xy* ipsi *ax* æqualis.

Cum igitur sit ex constr. *gk* ad *gx*, vt *xb* ad *ab*: erit per divi-diuiſionem *gk*, ideſt *ka* ad *kx*, vt *xb* ad *ax*, ideſt ad *xy*: ergo erit per diuiſionem *ka* ad *ax*, vt *xb* ad *by*. Ergo rectangulum *axb* æquale erit rectangulo ſub data *ka*, & differentia partium *by*. Quod erat faciendum.

NOTA.

Hæc reſolutio coincidit cum præcedente, propterea quod rectangulum ſub *gk* & *ab* æquale ſit rectangulo ſub *ga*, & *mb*.

SCHOLION.

Sanè cum recta *ab* diuidenda proponitur in *x*, vt rectangulum ſub partibus æquale ſit rectangulo ſub differentia earumdem, & data *ka*: nulla exprimitur ratio, vnde inferre liceat, an *ax* ſit ſegmentum maius, an minus. Vnde perinde erit ipſum ſupponere minus.

k a x g m b

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ka.*	*ax.*	*xb.*	*2xm.*
Fiat *ag* —∧— *2ka.*	*ag.*			
Ergo dupl. & dim. S.P.	*ag.*	*ax.*	*xb.*	*xm.*
Et conuert.	*ag.*	*xg.*	*xb.*	*mb.*

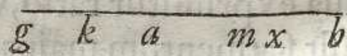
Ergo ſolutum, & patet conſtructio, & demonſtratio.

At quamvis in priore analysi recta *gb* aggregatum erat duplæ *ka*, & simplicis *ab*, in hac autem posteriore est earumdem differentia: non ideo inferri debet duplex resolutio; sed vna eademque ex vtraque analysi concipi, quandoquidem à fine vtriusque retrogradiendo, ad idem principium legitimè perveniatur, nimirum ad terminos *ka. ax. xb. 2xm*; seu *2mx*, nullo alio facto discrimine inter illos, nisi, vt *ax* iam maior, iam minor sit, quam *xb*.

Hinc mirabilem affinitatem reciprocarum, iam data summa, iam data differentia quisque contemplari poterit.

QVÆSTIO.

Datum numerum 24 in duas partes dividere, vt rectangulum sub ipsis factum æquale sit facto sub ipsarum partium differentia, & dato numero $22\frac{1}{2}$.



Valeat *ab*. 24. & *ka* valeat $22\frac{1}{2}$, & sint partes quæsitæ *ax*, & *xb*, quarum differentia erit *2mx*, si *ab* dividatur bifariam in *m*. Ergo conditio est, vt sint proportionales *ka. ax. xb. 2mx*. Repetatur analysis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ka.*	*ax.*	*xb.*	*2mx.*
Fiat *ga* = *2ka.*	*ga.*			
Ergo dupl. & dim. S.P.	*ga.*	*ax.*	*xb.*	*mx.*
Et per compos.	*ga.*	*gx.*	*xb.*	*mb.*

Ergo

Ergo resolutum, & pro incognitis gx, & xb, iuxta explicationem reciprocarum prop. 1. Introd.

Habebimus $\frac{1}{2}gb + \sqrt{\frac{1}{4}gbg - ga:mb}$

Et $\frac{1}{2}gb - \sqrt{.\frac{1}{4}gbg - ga:mb}$

RESOLVTIO.

Dantur ab —Λ— 24, & ka —Λ— $22\frac{1}{2}$

Ergo mb —Λ— 12. & ga —Λ— 45

Vnde gb —Λ— 69, summa ga, & ab

Et $\frac{1}{2}gb$ —Λ— $34\frac{1}{2}$, cuius quadr. $1190\frac{1}{4}$

ga in bm, est	540
Differentia est	$650\frac{1}{4}$
$\sqrt{}$. est	$25\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}gb$ est	$34\frac{1}{2}$
summa, & diff.	60. & 9.

Sunt igitur 60, & 9. valores incognitarum gx, & xb.

Ergo si xb valeat 9, ax valebit 15, & numerus datus 24 divisus erit in 15, & 9, quorum differentia 6 multiplicata per numerum datum $22\frac{1}{2}$ exhibebit 135, qui numerus æqualis est facto sub partibus 15, & 9. vt oportebat.

ALITER.

Idem profecto obtinebitur si posterior analysis instituta fuisset, in qua gb differentia erat datarum ab, & ag.

Erant enim prop. $ag.\ xg.\ xb.\ mb.$

Vnde $\frac{1}{2}gb + \sqrt{.\frac{1}{4}gbg + ag:mb}.$

Et $-\frac{1}{2}gb + \sqrt{.\frac{1}{4}gbg + ag:mb}.$

Valores erunt incognitarum xg, & xb.

Dantur ab —∧— 24, & ka —∧— $22\frac{1}{2}$
Ergo mb —∧— 12, & ag —∧— 45
Vnde gb —∧— 21. diff. inter ab, & ag.
Et $\frac{1}{2}gb$ —∧— $10\frac{1}{2}$ eius quadr. $110\frac{1}{4}$.

ag in mb	540
Summa	$650\frac{1}{4}$
$\sqrt{}$. est	$25\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}gb$. est	$10\frac{1}{2}$
Summa, & diff.	36. & 15. pro

incognitis xg, & xb: ergo si xb valeat 15, ax valebit 9. & numerus 24 divisus erit in 9, & 15. vt antea.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Datam rectam *ad* sectam in *b*, & *c* vtcumque, iterum secare in *x* inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* æquale sit *dxc* rectangulo. Hoc est vt sint proportionales *ax. xc. xd. bx.*

Vide R. P. Greg. à S. Vincen. l. 1. prop. 64. tom. 1.

ANALYSIS.

Sint igit. prop:	*ax.*	*xc.*	*xd.*	*bx.*
Ergo comp. E. P.	*ac.*	*xc.*	*bd.*	*bx.*

Ergo solutum, cum pateat *bc* diuidendam esse in *x* in data ratione *ac* ad *bd*.

CONST. ET DEMONST.

Diuidatur *bc* in *x* in ratione data, *ac* ad *bd*, vt sint proportionales *ac. xc. bd. bx*, vnde diuid. erunt etiam proportionales *ax. xc. xd. bx.* Quod erat faciendum.

QVÆSTIO.

Datum numerum 8. ita in duas partes diuidere, vt rectangulum sub vna parte, & aggregato ipsius partis, & numeri dati 12 æquale sit rectangulo sub altera parte, & aggregato eiusdem partis, & numeri dati 4.

Va-

$$\overset{12}{\overline{a\quad b}}\;\overset{8}{\overline{x\quad c}}\;\overset{4}{\overline{c\quad d}}$$

Valcant *bc* 8. *ab*. 12. & *cd*. 4. & sint partes quæsitæ *bx*, & *xc*. Ergo conditio est, vt rectangulum *axb*, rectangulo *dxc* sit æquale.

ANALYSIS.

Sint igit.	$axb \sqcap dxc$
Ergo E.P.	$ax.\ xc.\ xd.\ bx.$
Et comp.	$ac.\ xc.\ bd.\ bx.$

Ergo solutum, cum pateat numerum datum *bc*, idest 8. diuidendum esse in ratione data *ac* ad *bd*.

RESOLVTIO.

Si 32 (aggregatum *ac*, & *bd*) dat 8. (*bc*) 12 (*bd*) dabit 3 (pro *bx*) vel si 32 dat 8, *ac* 20 dabit 5. pro *xc*

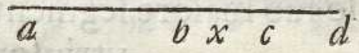
Sunt igitur partes quæsitæ 3 & 5. nam si ipsi 3. addatur 12 componetur 15, & rectangulum sub 3, & 15. erit 45. & si ipsi 5 addatur 4, constituetur 9, & rectangulum sub 5, & 9 erit etiam 45, vt oportebat.

SCHOLION.

Hæc eadem quæstio in his terminis proponi poterit.

Qua-

Quatuor numerus proportionales exhibere, vt summa primi, & secundi sit 20, secundus & tertius differant 4, & summa tertij, & quarti componat 12.



Exponatur quælibet recta *ac*, quæ valere intelligatur 20, divisaque in *x* sint *ax*, & *xc*, primus, & secundus. Ponatur alia *cd*, quæ valeat 4: ergo *xd* erit tertius. Ponatur alia *bd*, quæ valeat 12: ergo quartus erit *bx*, & solum restat proportionales facere *ax*. *xc*. *xd*. *bx*. Repetatur analysis.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax*.	*xc*.	*xd*.	*bx*.
Ergo comp. E.P.	*ac*.	*xc*.	*bd*.	*bx*.

Ergo solutum. Nam cum *bd* valeat 12, & *cd* sit 4, erit *bc*. 8, qui dividendus erit in ratione *ac* ad *bd*, idest 20 ad 12, & venient 5. & 3. pro *xc*, & *bx*, idest pro secundo, & quarto, vnde primus erit 15, & tertius 9. & omnes quatuor 15. 5. 9. 3, qui asignatas conditiones sortiuntur.

PROPOSITIO VII.

Datam rectam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & ſegmento minore æquale ſit rectangulo ſub maiore ſegmento, & differentia vtriuſque.

$\overline{a \quad m \; x \; b}$

Prop. 7. Introd. Sit data *ab* dividenda in *x*, vt petitur, biſecetur in *m*, & erit 2*mx* differentia ſegmentorum *ax*, & *xb*, vnde conditio erit, vt rectangulum ſub *ab*, & *xb* æquale ſit rectangulo ſub *ax*, & 2*mx*, vel vt ſint proportionales *ab*. 2*mx*. *ax*..*xb*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab*.	2*mx*.	*ax*.	*xb*.
Et dimid. primos	*am*.	*mx*.	*ax*.	*xb*.
Ergo per comp. E.P.	*am*.	*ax*.	*ax*.	*ab*.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Biſecetur *ab* in *m*, & inter *am*, & *ab* media inveniatur *ax*. Dico factum.

Sunt enim ex conſtr. proportionales *am*. *ax*. *ax*. *ab*, & per diviſ. *am*. *mx*. *ax*. *xb*, & duplicando primos *ab*. 2*mx*. *ax*. *xb*: ergo rectangulum ſub tota *ab*, & ſegmento minore *xb* æquale erit rectangulo ſub ſegmento maiore *ax*, & differentia vtriuſque 2*mx*. Quod erat faciendum.

ALI-

ALITER.

Esto data ab dividenda, &c. Bisecetur in m, & supponatur xz ipsi ax æqualis, quo posito erit bz differentia segmentorum ax, & xb, idest xz, & xb.

$$\overline{\;a\quad m\;x\;b\quad z\;}$$

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ab.$	$bz.$	$ax.$	$xb.$
Ergo per comp. E.P.	$ab.$	$az.$	$ax.$	$ab.$
Et dimid. primos	$am.$	$ax.$	$ax.$	$ab.$

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Secetur ab bifariam in m, & inter am, & ab media inveniatur ax. Dico factum. Ponatur xz ipsi ax æqualis.

Quoniam igitur ex constr. sunt proportionales $am.\ ax.\ ax.\ ab.$ & duplicando primos $ab.\ az.\ ax.\ ab$, & per divis. $ab.\ bz.\ ax.\ xb$: erit rectangulum sub tota ab, & segmento minore xb æquale rectangulo sub segmento maiore ax, & differentia vtriusque bz. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VIII.

Vide Carolũ Renaldinũ de resol. & comp. t.3. pag. 452.

Latus reperire, à quo ablatis duobus datis lateribus, residua constitutam inter se habeant rationem.

$a \quad \overline{b\ c\ x} \quad \overline{m\ p\ q}$

Sint latera data *ac*, & *ab*, ratio data *mq* ad *mp*, & sit latus quæsitum *ax*: ergo residua erunt *bx*, & *cx*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*bx.*	*cx.*	*mq.*	*mp.*
Ergo divid. E.P.	*bc.*	*cx.*	*pq.*	*mp.*
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiant proportionales *pq. mp. bc. cx.* Dico *ax* esse latus quæsitum, quia comp. erit vt *mq* ad *mp*, ita *bx* ad *cx*. Quod facere oportebat.

N O T A.

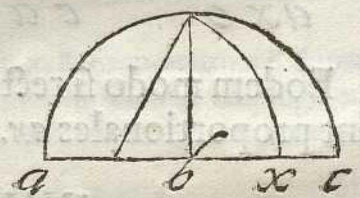
Brevius quidem res expediri potest. Nam posito quæsito tanquam concesso, hoc est vt fiant proportionales *bx.cx.mq.mp.* resolutio patet, cum manifestum sit ad datam differentiam *bc.* rectas esse inveniendas *bx. cx.* in ratione data *mq.* ad *mp.* Quod per scholion prop. 2. huius facile obtinetur.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Secta linea recta in duas partes vtcumque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint proportionales. *Vide R. P. Claviũ ad prop. 17 lib. 6. el. à S. Vincen. l. 1. prop. 77*

Esto data *ac* vtcumque divisa in *b*, & sit *bc* dividenda in *x*, vt sint proportionales *ab. bx. xc.*



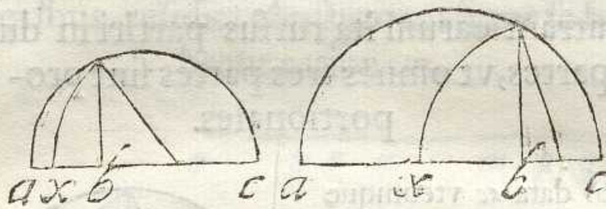
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab.*	*bx.*	*bx.*	*xc.*
Ergo per comp. E.P.	*ab.*	*ax.*	*bx.*	*bc.*
Ergo solutum,				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Ipsis *ab*, & *bc* reciprocæ inveniantur *ax*, & *bx*, quarum differentia sit ipsa *ab*, hoc est fiant proportionales *ab. ax. bx. bc*, & per divis. erit *ab* ad *bx*, vt *bx* ad *xc*. Quod facere oportebat. *Prop. 1. Introd.*

SCHOLION.



Eodem modo si recta *ab* esset dividenda, vt sint proportionales *ax.xb.xb.bc.*

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ax.*	*xb.*	*xb.*	*bc.*
Ergo comp. E.P.	*ab.*	*xb.*	*xc.*	*bc.*

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio, & etiam obvium est, quod si *ab* minor fuerit in hoc casu, quam *bc* proportionem esse minoris inæqualitatis, maioris verò si maior fuerit, quam dupla, & omnino æqualitatis si dupla fuerit.

PRO-

PROPOSITIO X.

Vide R. P. Zarageoz. Geom. magna in minim. tom. 2. prob. 20

Datam rectam diuidere, vt alia data ſit media inter ſegmentum maius, & differentiam vtriuſque.

g ——

a x b z

Eſto diuidenda data ab in x, & ſupponatur xz ſegmento maiori ax æqualis, quare bz differentia erit ſegmentorum ax, & xb. ſitque data g, quæ inter ax, & bz debeat eſſe media.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	$ax.$	$g.$	$g.$	$bz.$
Ergo duplic. primos E.P.	$az.$	$2g.$	$g.$	$bz.$
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

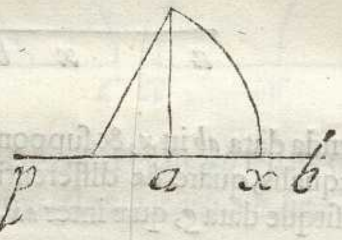
At datam g, & ipſius duplam ($2g$) reciprocæ inueniantur az, & bz, quarum differentia ſit ab, & biſecetur az in x. Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſint proportionales $az.\ 2g.\ g.\ bz$: erun dimidiando primos, etiam proportionales $ax.\ g.\ g.\ bz$. Quod faciendum erat.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Datam rectam *ab* extrema, ac media ratione secare in *x*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab.*	*ax.*	*ax.*	*xb.*
Fiat *pa* —Λ— *ab.*	*pa.*			
Ergo per comp. E.P.	*pa.*	*px.*	*ax.*	*ab.*
Ergo solutum				

CONSTR. & DEMONST.

Fiat *pa* ipsi *ab* æqualis, & eidem reciprocæ inveniantur *px*, & *ax*, quarum differentia sit *pa*, idest ipsa *ab*. Dico factum. *prop. 1. Introd.*

Cum enim ex constr. sit *pa* ad *px*, vt *ax* ad *ab*: erit per divis. *pa*, idest *ab* ad *ax*, vt *ax* ad *xb*. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Ecce propositionem celebrem, quæ apud Euclidem,

dem, & alios multos per comparationem planorum involuta demonstratur, per proportionales tantum expeditam.

Eadem facilitate invenietur tota, dato altero segmentorum

Dato segmento maiore.

Esto data ab segmentum maius, sitque invenienda tota ax divisa in b extrema, ac media ratione.

ANALYSIS.

Sint igit. prop. $ax.$ $ab.$ $ab.$ $bx.$

Ecce in limine ipso analysecs problema resolutnm. Nam si datæ ab inveniantur reciprocæ ax, & bx, quarum differentia sit ipsa ab: erit vt tota ax ad segmentum maius ab, ita idem ad segmentum minus xb, vt oportebat.

Dato segmento minore.

Sit tandem data ab segmentum minus, & sit invenienda tota ax divisa in b extrema, ac media ratione.

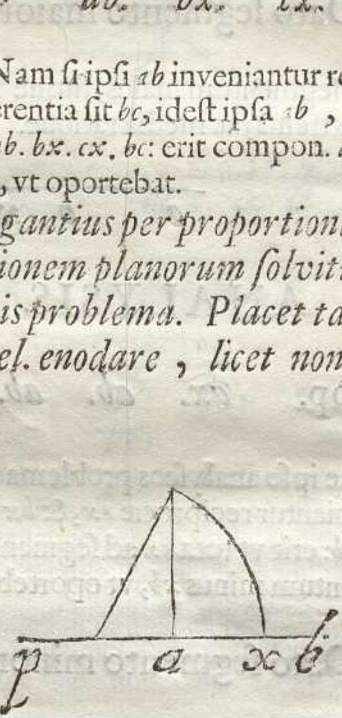
a b c x

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*bx.*	*bx.*	*ab.*
Fiat *bc* —Λ— *ab.*				*bc.*
Ergo divid. E. P.	*ab.*	*bx.*	*cx.*	*bc.*

Ergo solutum. Nam si ipsi *ab* inveniantur reciprocæ *bx*, & *cx*, quarum differentia sit *bc*, idest ipsa *ab* , hoc est si fiant proportionales *ab. bx. cx. bc*: erit compon. *ax*. ad *bx* , vt *bx* ad *bc*, idest ad *ab*, vt oportebat.

Semper elegantius per proportionales , quam per comparationem planorum solvitur , cum fieri potest, quoduis problema. Placet tamen propositum per lib. 2. el. enodare , licet non sit id ipsum huius loci.



ANALYSIS.

Sit	*axa* —Λ— *abx*
Ergo addit. *bax* erit	*axa* + *bax* —Λ— *abx* + *bax*
Idest per 2. 2. el.	*aba*
Et si fiat *pa* —Λ— *ab.*	*axa* + *pax* —Λ— *aba.*
Ergo solutum.	

CON-

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat *pa* ipsi *ab* æqualis, & inveniatur *ax*, cuius quadratum cum rectangulo *pax*, sit æquale quadrato *ab*. Dico factum. *per 5. Introd.*

Cum enim quadratum *ax* cum rectangulo *pax*, idest *bax* æquale sit quadrato *ab*, sive rectangulis *bax*, & *abx*: erit subtracto rectangulo *bax*, quadratum *ax* æquale rectangulo *abx*. Quod faciendum erat.

PROPOSITIO XII.

Ad duas rectas datas, aliam in proportione harmonica invenire. *Vide R. P. Claviū ad prop. 17 lib. 6. el.*

SIT INVENIENDA MEDIA.

Ad datas *ac. ab* sit invenienda media *ax* in proportione harmonica.

Proportio harmonica constituitur, cum trium terminorum ita se habet primus ad tertium, vt differentia primi, & secundi ad differentiam secundi, & tertij.

Sunt igitur termini.	*ac.*	*ax.*	*ab.*	
Et differentiæ.		*xc.*	*bx.*	
Ergo conditio, vt sint prop.	*ac.*	*ab.*	*xc.*	*bx.*

ANALYSIS.

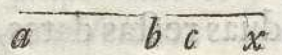
Sint igit. prop. *ac. ab. xc. bx.*

Ergo solutum, cum pateat *bc* diuidendam esse in *x* in ratione *ac. ab.*

CONST. ET DEMONST.

Diuidatur *bc* in *x* in ratione *ac* ad *bc*, vt sint proportionales *ac. ab. xc. bx*. Dico *ac. ax. ab* esse in proportione harmonica, quia extremi sunt, vt differentiæ.

SIT INVENIENDA MAIOR.



Ad datas *ac. ab* sit inuenienda maior *ax* in proportione harmonica.

Sunt igit. termini *ax. ac. ab.*

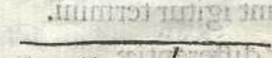
Et differentiæ *cx. bc.*

Ergo conditio vt sint prop. *ax. ab. cx. bc.*

Ergo solutum, cum manifestum sit ad datam differentiam *ac*, rectas esse inueniendas *ax. cx.* in ratione *ab. bc*, vt sint prop. *ax. ab. cx. bc*, & erunt extremi, vt differentiæ.

Per Schol. prop. 2. huius.

SIT INVENIENDA MINOR.



Ad datas *ac. ab* sit inuenienda minor *ax* in proportione harmonica.

Erunt

Erunt termini.	*ac.*	*ab.*	*ax.*	
Et differentiæ.		*bc.*	*xb.*	
Ergo conditio vt ſint prop.	*ac.*	*ax.*	*bc.*	*xb.*

Ergo ſolutum. Patet enim rectam *ab* dividendam eſſe in *x* in ratione *ac. bc*, vt ſint proportionales *ac. ax. bc. xb.* Itaque extremi erunt vt differentiæ.

SCHOLION.

Tres ſunt præcipuæ proportiones, ſeu medietates, de quibus ſit mentio apud Authores, videlicet Arithmetica, geometrica, & harmonica, quibus alias addiderunt Antiqui, alias Recentiores, omnes videre licet in lib. 3. Collectionum Pappi Alexandrini. Cum autem diverſitas oriatur ex diverſis modis comparandi terminos, & differentias inter ſe: analyſis noſtra quamcumque medietatem eadem facilitate, qua harmonicam expedivit, expedire poterit.

PROPOSITIO XIII.

Datam rectam ita ſecare, vt ſegmenta, & alia recta data proportionem harmonicam conſtituant.

Dato ſegmento maiore.

Sit primo datum ſegmentum maius aq, & ſit data ab diuidenda in x, vt $aq.\ ax.\ xb$ ſint in proportione harmonica. Biſecetur ab in m, & erit $2mx$ differentia ſegmentorum ax, & xb. per prop. 7. Introductionis.

Erunt igitur termini		$aq.$	$ax.$	$xb.$
Et differentiæ.		$xq.$	$2mx.$	
Et conditio, vt ſint prop.	$aq.$	$xb.$	$xq.$	$2mx.$

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$aq.$	$xb.$	$xq.$	$2mx.$
Fiat bc —Λ— $2aq$.	$bc.$			
Ergo dupl. & dimid. E. P.	$bc.$	$xb.$	$xq.$	$mx.$
Et per compoſ.	$bc.$	$xc.$	$xq.$	$mq.$
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONST.

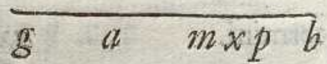
Fiat bc dupla datæ aq, biſectaque ab in m, ipſis bc, & mq

 reci-

reciprocæ inveniantur xc, & xq, quarum differentia sit qc. Dico factum.

Sunt enim ex conſt. proportionales $bc. xc. xq. mq.$ & per diviſ. $bc. xb. xq. mx$, & dimidiando, & duplicando $aq. xb. xq. 2mx.$ videlicet extremi, vt differentiæ: ergo $aq. ax. xb.$ erunt in harmonica proportione. Quod erat faciendum.

Dato ſegmento minore.



Eſto data pb ſegmentum minus, & ſit data ab dividenda in x, vt $ax. xb. pb$ ſint in proportione harmonica. Biſecetur ab in m, & erit $2mx$ differentia ſegmentorum ax, & xb, prop. 7. Introductionis.

Erunt termini.	$ax.$	$xb.$	$pb.$	
Et differentiæ,	$2mx.$	$xp.$		
Et conditio vt ſint prop.	$ax.$	$pb.$	$2mx.$	$xp.$

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ax.$	$pb.$	$2mx.$	$xp.$
Fiat ga —Λ— $2pb$.		$ga.$		
Ergo duplic. & dimid. S.P.	$ax.$	$ga.$	$mx.$	$xp.$
Et comp.	$gx.$	$ga.$	$mp.$	$xp.$

Ergo ſolutum, & manifeſta conſtructio, & demonſtratio.

Data

Data media.

a g m q x b

Sit tandem data *ab* dividenda in *x*, & sit data *qb* media. Fiat *ag* eidem *qb* æqualis.

Erunt termini.	*ax.*	*qb.* seu *ag.*	*xb.*	
Et differentiæ.	*gx.*		*qx.*	
Et conditio, vt sint prop.	*ax.*	*xb.*	*gx.*	*qx.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xb.*	*gx.*	*qx.*
Et divid.	*2mx.*	*xb.*	*gq.*	*qx.*
Et dimid. anteced.	*mx.*	*xb.*	*mq.*	*qx.*
Ergo per comp. E. P.	*mx.*	*mb.*	*mq.*	*mx.*

Ergo solutum, & in ipsa analysi ordo patet constructionis, & demonstrationis, cum satis perspicuum sit *gq* duplam esse ipsius *mq*, propterea, quod *ab* bisecta sit in *m* (vt *2mx* differentia sit partium *ax*, & *xb*.) & *ag* facta sit ipsi *qb* æqualis.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Datam rectam ac divisam in b, rursus secare in x inter b, & c, ita vt ax ad duplam bx sit vt ipsa bx ad xc.

$a \quad p \quad b \quad q \quad x \quad c \qquad\qquad z$

Quoniam igitur fieri debent proportionales $ax.\ 2bx.\ bx.\ xc.$ fiat xz dupla ipsius bx; & pb tertia pars ab; & bq tertia pars bc. ad quod nos vrget analysis.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	$ax.$	$2bx.$	$bx.$	$xc.$
Hoc est		$xz.$		
Ergo per compos. E.P.	$ax.$	$az.$	$bx.$	$bc.$
Et tripartiendo conseq.	$ax.$	$px.$	$bx.$	$bq.$
Et divid.	$ap.$	$px.$	$qx.$	$bq.$
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

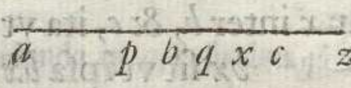
Fiat pb tertia pars rectæ ab, & bq tertia pars rectæ bc, ipsisque ap, & bq reciprocæ inveniantur px, & qx, quarum differentia sit ipsa pq. Dico factum. Ponatur xz dupla ipsius bx, & erit px triens totius az.

Cum enim ex const. sint proportionales $ap.\ px.\ qx.\ bq$, & compon. $ax.\ px.\ bx.\ bq$, & triplicando consequentes $ax.$

$az.$

az. bx. bc: erit per divis. *ax* ad *xz*, ideſt ad duplam *bx*, vt ipſa *bx* ad *bc*. Quod facere oportebat.

SCHOLION.



Eodem modo procedere licet ſi recta *ac* diviſa in *b*, iterum dividenda ſit in *x* inter *b*, & *c*, vt ſint proportionales *ax*. 3*bx*. *bx*. 2*xc*.

Fiat *pb* —Λ— $\frac{2}{5}$ *ab*, & *bq* —Λ— $\frac{2}{5}$ *bc*.
Hoc eſt $2\frac{1}{2}$ *pb* —Λ— *ab*, & $2\frac{1}{2}$ *bq* —Λ— *bc*.

ANALYSIS.

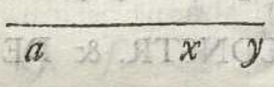
Sint igit. prop.	*ax*.	3*bx*.	*bx*.	2*xc*.
Et dimid. conſeq.	*ax*.	$1\frac{1}{2}$*bx*.	*bx*.	*xc*.
Fiat *xz* —Λ— $1\frac{1}{2}$ *bx*		*xz*.		
Ergo per compoſ. E.P.	*ax*.	*az*.	*bx*.	*bc*.
Et part. conſeq. per $2\frac{1}{2}$.	*ax*.	*px*.	*bx*.	*bq*.
Et divid.	*ap*.	*px*.	*qx*.	*bq*.

Ergo ſolutum. Neque vlla ineſt dificultas, vt intelligatur $2\frac{1}{2}$ *px*. æqualem eſſe ipſi *az*, cum $2\frac{1}{2}$*bx*: ſit æqualis *bz*, & $2\frac{1}{2}$*pb* —Λ— *ab*, vnde $2\frac{1}{2}$*pb*, & $2\frac{1}{2}$*bx*, ideſt $2\frac{1}{2}$*px* æqualis erit toti *az*. Et ſic de alijs.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Duas rectas invenire in ratione data tam directa, quam reciproca.



c d
f g

Sint inveniendæ duæ rectæ *ay*, & *ax* in ratione directa *c* ad *d*, & in ratione reciproca *f*, & *g*.

CONDITIONES.

Vt sint proport.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Vt sint prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*

Quis ergo non videt rationem directam *c* ad *d* in aliam æqualem convertendam esse, cuius alter terminorum sit vel *f*, vel *g*; vel rationem reciprocam *f*, & *g* in aliam æqualem revocandam, cuius alter terminorum sit vel *c*, vel *d*, vt ratio communis statuatur, & ex æquo arguere liceat?

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Fiant prop. *c.d.g.p.*			*g.*	*p.*
Sint etiam prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Ergo ex æqual. E. P.	*f.*	*ax.*	*ax.*	*p.*

Est enim in vtraque proportione communis ratio *ay* ad *g*, cum in prima non iam termini *c*, & *d*; sed *g*, & *p* ad comparationem assumantur. Ergo resolutum est problema ex sola reductione terminorum ad argumentum ex æqualitate, hoc est vt in vtraque proportione duo æquales termini existant ita dispositi, vt inter reliquos fieri possit comparatio. In ipsa igitur analysi patet constructio, & demonstratio.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *c* ad *d* ita *g* ad *p*, & inter *f*, & *p* media inveniatur *ax*, vt autem *d* ad *c* ita fiat *ax* ad *ay*. Dico rectas *ay*, & *ax*, quæ constructæ sunt in ratione *c* ad *d* reciprocas esse ipsis *f*, & *g*.

Cum enim ex constr. sit *f* ad *ax*, vt *ax* ad *p*, & *ay* ad *ax*, vt *c* ad *d*, idest vt *g* ad *p*: erit ex æqualitate *ay* ad *g*, vt *f* ad *ax* (communis ratio *ax* ad *p*.) Duas igitur rectas *ay*, & *ax* exhibuimus, &c. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Vt ex æqualitate rationis commode argumentari liceat, hæc tria notanda occurrunt. Primum est singulas proportiones in se resolvendas esse, si iam resolutæ non fuerint. Secundum, ex commoda reductione alicuius rationis, communem rationem statuendam esse, si iam constituta non sit. Tertium est, vnam tantum conditionem earum, quas inventæ lineæ habere debent, demonstrandam esse, nam reliquæ pertinent ad constructionem.

Hinc

Hinc manifestum fit, analysim aliter, & aliter institui posse.

ALITER.

Sint prop.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Fiant prop. *c. d. h. g.*			*h.*	*g.*
Sint etiam prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Ergo ex æquo E. P.	*h.*	*ay.*	*ay.*	*f.*

Est enim communis ratio *g. ax.*

ALITER.

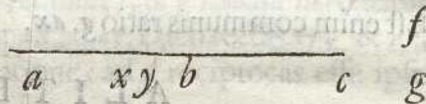
Sint igit. prop.	*ay.*	*ax.*	*c.*	*d.*
Et etiam.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Fiant prop. *c. f. g. k.*			*c.*	*k.*
Ergo ex æquo E. P.	*k.*	*ax.*	*ax.*	*d.*

Nam communis ratio est *ay. c*, &c.

PROPOSITIO XVI.

Ad datam rectam duas rectas in proportione harmonica invenire, quæ tamen inter se habeant rationem datam.

DATO EXTREMO MAIORE.



Sit primo data ab extremum maius, & ratio data f ad g. Et sint quæsitæ lineæ ay, & ax.

Erunt termini.	ab.	ay.	ax.	
Differentiæ.		yb.	xy.	
Conditio vt sint prop.	ab.	ax.	yb.	xy.
Conditio vt sint prop.	ay.	ax.	f.	g.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	ab.	ax.	yb.	xy.
Fiat bc = ab.	bc.			
Ergo vt 1. ad 1. ita agg. & E.P.	ab.	ax.	yc.	ay.
Sed etiam S.P.	ay.	ax.	f.	g.
Ergo ex æqual. E.P.	g.	f.	ab.	yc.

Quia communis ratio est ax ad ay. Ergo solutum, cum punctum y sit determinatum.

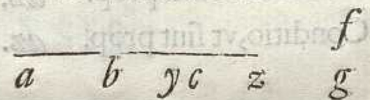
CONS-

CONST. ET DEMONST.

Fiat *bc* ipsi *ab* æqualis, & vt *g* ad *f* ita *ab* ad *yc*, & ita *ax* ad *ay*. Dico rectas *ay*, & *ax*, quæ constructæ sunt in ratione data *f* ad *g*, esse ad datam *ab* in proportione harmonica.

Cum enim ex const. sit *ab*, idest *bc* ad *yc*, vt *ax* ad *ay*: erit convert. *ab* ad *yb*, vt *ax* ad *xy*, & altern. *ab* ad *ax*, vt *yb* ad *xy*: ergo *ab*. *ay*. *ax* proportionem harmonicam constituent, cum sint extremi, vt differentiæ. Duas igitur rectas, &c. Quod erat faciendum.

DATO EXTREMO MINORE.



Sit secundo data *ab* extremum minus, ratio data *f* ad *g*, & quæsitæ lineæ *az*, & *ay*.

Erunt termini.	*az.*	*ay.*	*ab.*	
Differentiæ.		*yz.*	*by.*	
Conditio, vt sint prop.	*az.*	*ab.*	*yz.*	*by.*
Conditio, vt sint prop.	*az.*	*ay.*	*f.*	*g.*

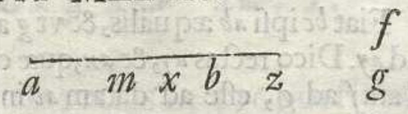
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*az.*	*ab.*	*yz.*	*by.*
Fiat *bc* —Λ— *ab.*		*bc.*		
Ergo vt 1. ad 1. ita diff.	*az.*	*ab.*	*ay.*	*yc.*
Sed etiam S.P.	*az.*	*ay.*	*f.*	*g.*
Ergo ex æquo E.P.	*f.*	*g.*	*ab.*	*yc.*

Quia communis ratio est *az* ad *ay*. Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

DA-

DATA MEDIA.



Sit tandem data *ab* media, ratio data *f* ad *g*, & rectæ *az*, & *ax* sint, de quibus quæritur.

Erunt termini.		*az.*	*ab.*	*ax.*
Differentiæ,		*bz.*	*xb.*	
Conditio vt sint prop.	*az.*	*ax.*	*bz.*	*xb.*
Conditio, vt sint prop.	*az.*	*ax.*	*f.*	*g.*

ANALYSIS.

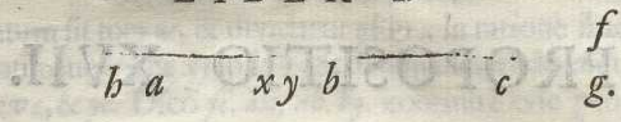
	Sint igit. prop.	*az.*	*ax.*	*bz.*	*xb.*
	Bisecetur *ab* in *m*.				
	Ergo vt 1. ad 1. ita diff. & E. P.	*az.*	*ax.*	*ab.*	*2mx.*
per 7. Introd.	Et dimidiando vltimos.	*az.*	*ax.*	*am.*	*mx.*
	Sed etiam S. P.	*az.*	*ax.*	*f.*	*g.*
	Ergo ex æquo E. P.	*f.*	*g.*	*am.*	*mx.*

Ergo solutum; & patet constructio, & demonstratio.

SCHOLION.

Similiter procedendum erit sit ratio data sit reciproca.

Sint



Sint inveniendæ duæ rectæ *ay*, & *ax* ad datam *ab*, extremum maius, in proportione harmonica; reciprocæ tamen datis *f*, & *g*.

Erunt termini.	*ab.*	*ay.*	*ax.*	
Differentiæ.		*yb.*	*xy.*	
Condit. vt sint prop.	*ab.*	*ax.*	*yb.*	*xy.*
Condit. vt sint prop.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab.*	*ax.*	*yb.*	*xy*
Fiat *bc* —Λ— *ab*	*bc.*			
Ergo vt 1. ad 1. ita agg. & E.P.	*ab.*	*ax.*	*yc.*	*ay.*
Sed etiam S.P.	*ay.*	*f.*	*g.*	*ax.*
Fiant prop. *ha. f. g. ab.*		*ha.*	*ab.*	
Ergo ex æqual. E.P.	*yc.*	*ay.*	*ay.*	*ha.*
Et comp.	*ac.*	*ay.*	*hy.*	*ha.*

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

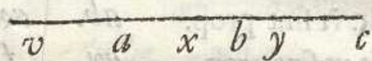
Eodem modo si datum fuerit extremum minus, vel media, quæ omnia, nè excercitandi voluptatem studiosis adimam, consultò indigesta relinquo.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Vide Franc. Vietam in Pseudomesolabo.

Quatuor rectarum continuè proportionalium dato aggregato, tum extremarum, tum mediarum, singulas exhibere.



Sit data recta *ab* aggregatum mediarum, & data *bc* aggregatum extremarum. Oportet igitur ipsas *ab*, & *bc* ita secare in *x*, & *y*, vt sint continuè proportionales *yc*. *ax*. *xb*. *by*. Hoc est, vt sint prop. *yc*. *ax*. *xb*. & etiam *ax*. *xb*. *by*. Supponatur *va* ipsi *yc* æqualis, vnde *vy* toti *ac* æqualis erit.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*yc*.	*ax*.	*ax*.	*xb*.
Idest	*va*.			
Ergo comp. E.P.	*vx*.	*ax*.	*ab*.	*xb*.
Sint etiam prop.	*ax*.	*xb*.	*xb*.	*by*.
Ergo per comp. E.P.	*ax*.	*ab*.	*xb*.	*xy*.
Ex æquo ig. E.P.	*vx*.	*ab*.	*ab*.	*xy*.

Ergo solutum, cum aggregatum extremarum *vx*. & *xy*. sit toti *ac* æquale.

CONSTR. & DEMONSTR.

Inveniantur ipsi *ab* reciprocæ rectæ *h*, & *k*, quarum aggregregregatum sit tota *ac*, & dividatur *ab* in *x* in ratione *h* ad *ab*, ponanturque *xv*, & *xy* ipsis *h*, & *k* æquales, vnde æquales erunt *va*, & *yc*. Dico *yc. ax. xb. by.* continuè esse proportionales.

Cum enim ex constr. sit *h*, idest *vx* ad *ax*, vt *ab* ad *xb*, erit divid. *va*, idest *yc* ad *ax*, vt *ax* ad *xb*. Est autem ex constr. *vx* ad *ab*, vt *ab* ad *xy*: ergo ex æquo *ax* ad *xb* erit vt *ab* ad *xy*, & 1. ad 1. vt differentiæ, hoc est *ax* ad *xb*, vt *xb* ad *by*. Igitur continuè proportionales erunt *yc. ax. xb. by.* Quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum fit aggregata esse proportionalia, ea, quæ ex prima, & secunda, ex secunda, & tertia, atque ex tertia, & quarta conflantur, cum ostensæ sint proportionales rectæ *vx. ab. xy.*

QVÆSTIO.

Quatuor numerorum continuè proportionalium summa primi, & quarti est 12, summa verò secundi, & tertij 8. quæruntur singuli.

OPERATIO.

Datur *bc* —Λ— 12.
Et *ab* —Λ— 8.
Ergo *ac* —Λ— 20. omnes quatuor
Et $\frac{1}{2}$ *ac* —Λ— 10. quadr. 100.
ab —Λ— 8. quadr. 64.
Diff. 36.
√. est 6.
$\frac{1}{2}$ *ac*. 10.
Summa 16. pro *vx*. primo, & secund.
Diff. 4. pro *xy*. tertio, & quarto.

vx —Λ— 16.
ab —Λ— 8. *ab*. *ab*.
si 24. dat 8. 8. dabit $2\frac{2}{3}$ pro tertio. *xb*.
Ergo $5\frac{1}{3}$ pro secund.
Et $10\frac{2}{3}$ pro primo.
Et $1\frac{1}{3}$ pro quarto.

Sunt igitur quatuor numeri continuè proportionales $10\frac{2}{3}$. $5\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{3}$. $1\frac{1}{3}$, de quibus quærebatur.

ALIA.

Summa primi, & quarti est 10, summa secundi, & tertij 6. quæruntur singuli continuè proportionales.

OPERATIO.

bc — A — 10
ab — A — 6
Ergo ac — A — 16
Et $\frac{1}{2}ac$ — A — 8 quad. 64
ab — A — 6 quad. 36
Diff. 28
$\sqrt{}$.est $2\sqrt{}.7.$
$\frac{1}{2}ac$ 8
Summa $8+2\sqrt{}7$.pro prim.& secund.
Diff. $8-2\sqrt{}7$. pro tertio,& quart.

$8+2\sqrt{}7.$
$ab.$ 6

Ergo si $14+2\sqrt{}7.$ dat 6 quid 6?
Vel si $7+\sqrt{}7.$ dat 3 quid 6?
Elev.per $7-\sqrt{}7$.per $7-\sqrt{}7$
Vel si 42 dat $21-3\sqrt{}7$.quid 6?
Vel si 7 dat $21-3\sqrt{}7$.quid 1? dabit $3-\frac{3}{7}\sqrt{}7$ pro tert.
Ergo $3+\frac{3}{7}\sqrt{}7$ pro secun.
Et $5+1\frac{4}{7}\sqrt{}7$ pro prim.
Et $5-1\frac{4}{7}\sqrt{}7$ pro quart.

Sunt igitur quatuor numeri continuè proportionales, de quibus quæritur.

$5+1\frac{4}{7}\sqrt{}7,\ 3+\frac{3}{7}\sqrt{}7,\ 3-\frac{3}{7}\sqrt{}7,\ 5-1\frac{4}{7}\sqrt{}7.$

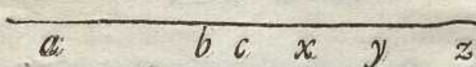
E X A M E N.

	$5 + 1\tfrac{4}{7}\sqrt{7}$	$3 + \tfrac{3}{7}\sqrt{7}$	$3 - \tfrac{3}{7}\sqrt{7}$	$5 - 1\tfrac{4}{7}\sqrt{7}$
Vel	$35 + 11\sqrt{7}$	$21 + 3\sqrt{7}$	$21 - 3\sqrt{7}$	$35 - 11\sqrt{7}$
	$21 - 3\sqrt{7}$	$21 + 3\sqrt{7}$	$21 - 3\sqrt{7}$	$21 + 3\sqrt{7}$
	$735 + 231\sqrt{7}$	$441 + 63\sqrt{7}$	$441 - 63\sqrt{7}$	$735 - 231\sqrt{7}$
	$-231 - 105\sqrt{7}$	$63 + 63\sqrt{7}$	$63 - 63\sqrt{7}$	$-231 + 105\sqrt{7}$
	$504 + 126\sqrt{7}$ —Δ—	$504 + 126\sqrt{7}$,	$504 - 126\sqrt{7}$ —Δ—	$504 - 126\sqrt{7}$

Ergo cum rectangulum sub primo, & tertio æquale sit quadrato secundi, & rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertij: continuè proportionales erunt inventi numeri.

PROPOSITIO XVIII.

Quatuor rectarum continuè proportionalium data differentia tum extremarum, tum mediarum, singulas invenire.



Sit data *ac* differentia extremarum, & data *bc* differentia mediarum, sit *ax* prima, vnde *cx* erit quarta, sit *by* secunda, & *cy* erit tertia, & omnes quatuor *ax*. *by*. *cy*. *cx*, quas continuè proportionales oportet facere.

Supponatur *bz* ipsi *ax* æqualis, & erit *xz* ipsi *ab* etiam æqualis.

CON-

CONDITIONES.

Vt sint proport.	ax.	by.	by.	cy.
Vt sint prop.	by.	cy.	cy.	cx.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	ax.	by.	by.	cy.
Idest	bz.			
Et divid.	yz.	by.	bc.	cy.—
Sint etiam prop.	by.	cy.	cy.	cx.
Et conv.	by.	bc.	cy.	xy.—
Ergo ex æquo E. P.	yz.	bc.	bc.	xy.

Ergo solutum cum xz summa extremarum yz, & xy sit ipsi ab æqualis.

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipsi bc reciprocæ inveniantur duæ rectæ m, & p, quarum summa sit ipsa ab, & vt m ad bc ita fiat by ad cy, ponanturque yz, & xy ipsis m, & p æquales, vnde xz, & ab, nec non bz, & ax æquales erunt. Dico ax. by. cy. cx esse in continua analogia. *Vide Schol. prop. 2. huius.*

Cum enim ex constr. sit m, idest yz ad by, vt bc ad cy: erit comp. bz, idest ax ad by, vt by ad cy. (vt oportet.) Rursus cum yz ad by sit vt bc ad cy, & etiam ex construct. sit yz ad bc, vt bc ad xy: erit ex æquo by ad cy, vt bc ad xy (ratio communis yz ad bc) & 1. ad 1. vt differentiæ, hoc est by ad cy, vt cy ad cx, vt oportet, continue igitur proportionales erunt ax. by. cy. cx. Quod erat faciendum.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc patet differentias esse proportionales primæ, & secundæ, secundæ, & tertiæ, atque tertiæ, & quartæ, cum ostensæ sint proportionales *yz. bc. xy.*

PROPOSITIO XIX.

Quatuor rectarum continuè proportionalium dato aggregato tum primæ, & secundæ, tum tertiæ, & quartæ singulas invenire.

a x b y c q

Sit *ab* aggregatum primæ, & secundæ, & *bc* tertiæ, & quartæ, & omnes quatuor continuè proportiona'es sint *ax. xb. by. yc.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xb.*	*xb.*	*by.*
Et comp.	*ab.*	*xb.*	*xy.*	*by.*—
Sint etiam prop.	*xb.*	*by.*	*by.*	*yc.*
Et per comp.	*xb.*	*xy.*	*by.*	*bc.*—
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*xy.*	*xy.*	*bc.*

Ergo si inter *ab*, & *bc* media inveniatur *cq*, ipsi æqualis erit *xy*.

Erant

Erant autem prop.	*xb.*	*xy.*	*by.*	*bc.*
Ideſt.		*cq.*		
Ergo agg. vt 1. ad 1.	*xy.*	*bq.*	*by.*	*bc.*
Ideſt.	*cq.*			

Ergo ſolutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Inter *ab*, & *bc* media inveniatur *cq*, & vt *cq* ad *bq* ita fiat *by* ad *bc*, ponaturque *xy* ipſi *cq* æqualis. Dico *ax. xb. by. yc.* eſſe in continua analogia.

Cum enim ex conſtr. ſit *cq*, ideſt *xy* ad *bq*, vt *by* ad *bc*: erit *xb* ad *cq*, ideſt ad *xy*, vt *by* ad *bc* (hoc eſt diff. vt 1. ad 1.) & per diviſ. *xb* ad *by*, vt *by* ad *yc*. vt oportet.

Rurſus cum *xb* ad *xy* ſit vt *by* ad *bc*, & ex conſtr. ſit *ab* ad *xy*, vt *xy* ad *bc*: erit ex æquo *ab* ad *xb*, vt *xy* ad *by*. (communis ratio *xy. bc.*) & divid. *ax* ad *xb*, vt *xb* ad *by*, vt oportet. Quatuor igitur, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

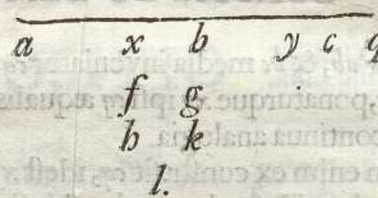
Patet aggregata eſſe proportionalia illa quæ ex prima, & ſecunda, ex ſecunda, & tertia, atque ex tertia, & quarta conficiuntur, cum oſtenſæ ſint proportionales *ab. xy. bc.* Quod etiam in antecedentibus manifeſtum fuit.

Eodem modo proceditur datis differentijs.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Datas rectas ab, & bc secare in x, & y, vt ay ad xc sit vt f ad g, atque xb ad yc vt h ad k.



CONDITIONES.

Vt sint prop.	$ay.$	$xc.$	$f.$	$g.$
Vt sint prop.	$xb.$	$yc.$	$h.$	$k.$

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$ay.$	$xc.$	$f.$	$g.$ —
Et etiam.	$xb.$	$yc.$	$h.$	$k.$
Sive si fiat			$bc.$	$cq.$
Ergo agg. vt 1. ad 1.	$xc.$	$yq.$	$h.$	$k.$ —
Vel si fiat			$g.$	$l.$
Ergo ex æquo E. P.	$ay.$	$yq.$	$f.$	$l.$

Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt h ad k ita bc ad cq, & ita g ad l, dividatur aq in y in ratione f ad l, & fiat ay ad xc, vt f ad g, vt petitur. Dico xb ad yc, esse vt h ad k.

Cum

Cum enim ex constr. sit *ay* ad *yq*, vt *f* ad *l*; & *ay* ad *xc*, vt *f* ad *g*: erit ex æquo *xc* ad *yq*, vt *g* ad *l*, idest vt *bc* ad *cq*, & quia differentiæ sunt vt vnus ad vnum, erit *xb* ad *yc*, vt *bc* ad *cq*, idest vt *h* ad *k*, vt petitur. Rectas igitur *ab*, & *bc* divisimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Si prius quam analysim aggrediaris, præscriptas conditiones perspexeris, satis tibi obvium erit, terminum *xb* ad terminum *xc* reducendum esse, vt ex æqualitate rationis arguendo, punctum *x* extinguatur, quemadmodum nos persecuti sumus. Sed notare oportet simili artificio terminum *xb* ad terminum *xc* revocari potuisse, vt idem eveniret, & ita similiter terminum *ay* ad terminum *yc*, vel *yc* ad *ay* converti debuisse, vt punctum *y* prius evanesceret. Vnde manifestum fit analysim aliter, & aliter institui posse.

PROPOSITIO XXI.

Datas rectas *ab*, & *bc* ita dividere in *x*, & *y*, vt ſint proportionales *ax*. *xb*. *by*. *yc*, & etiam *ay*. *xc*. *g*. *h*.

k a q x b y c — *g* — *h* —

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xb.*	*by.*	*yc.*
Ergo comp. E.P.	*ab.*	*xb.*	*bc.*	*yc.* —
Sint etiam prop.	*ay.*	*xc.*	*g.*	*h.*
Vel ſi fiat			*ac.*	*qc.*
Ergo diff. vt 1. ad 1.	*yc.*	*qx.*	*g.*	*h.*
Vel ſi fiat			*bc.*	*ka.* —
Ergo ex æquo E.P.	*qx.*	*ka.*	*xb.*	*ab.*
Et agg. vt 1. ad 1.	*qb.*	*kb.*	*xb.*	*ab.*

CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *g* ad *h* ita *ac* ad *qc*, & ita *bc* ad *ka*, & vt *qb* ad *kb* ita *xb* ad *ab*, & ita *yc* ad *bc*. Dico factum.

Eſt enim ex conſtr. *ab* ad *xb*, vt *bc* ad *yc*, & erit divid. *ax* ad *xb*, vt *by* ad *yc*, vt oportebat. Sed etiam ex conſtr. eſt *qb* ad *kb*, vt *xb* ad *ab*, & quia differentiæ ſunt vt vnus ad vnum, erit *qx* ad *ka*, vt *xb* ad *ab*. Erat autem *ab* ad *xb*, vt *bc* ad *yc*: ergo ex æquo erit *yc* ad *qx*, vt *bc* ad *ka*, ideſt vt *ac* ad *qc*. Hoc eſt (quia differentiæ ſunt vt vnus ad vnum) *ay* ad *xc*,

vt

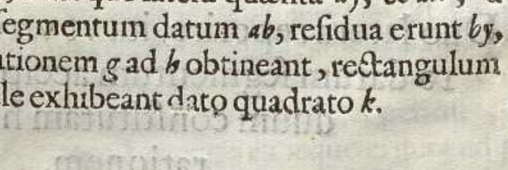
vt *ac* ad *qc*, ideſt vt *g* ad *h*, vt oportebat. Rectas igitur *ab*, & *bc* diviſimus,&c. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Si recta *g* minor eſſet, quam recta *h*, punctum *q* ante punctum *a* caderet, & operatio eadem eſſet.

PROPOSITIO XXII.

Duo latera exhibere, ita vt ſi ab vtroque datum dematur ſegmentum, reſidua ſint in data ratione; rectangulum verò ſub ipſis reſiduis æquale ſit dato plano.



Factum iam eſto, ſuntoque latera quæſita *ay*, & *ax*, à quibus ſi dematur ſegmentum datum *ab*, reſidua erunt *by*, & *bx*, quæ datam rationem *g* ad *h* obtineant, rectangulum verò ſub ipſis æquale exhibeant dato quadrato *k*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*by.*	*bx.*	*g.*	*h.*
Fiant prop. *g. h. k. l.*			*k.*	*l.* —
Sed per conditionem	*by : bx*	— ∧ —	*k : k.*	
Vnde erunt prop.	*by.*	*k.*	*k.*	*bx.* —
Ergo ex æqual. E. P.	*l.*	*bx.*	*bx.*	*k.*
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *g* ad *h* ita *k* ad *l*, & inter *l*, & *k* media inveniatur *bx*, vt autem est *h* ad *g* ita fiat *bx* ad *by*. Dico *ay*, & *ax* rectas esse quæsitas. Si enim ab vtraque datum dematur segmentum *ab*, erunt residuæ *by*, & *bx* ex constructione, vt *g* ad *h* (vt petitur) sive vt *k* ad *l*; sed etiam ex constr. *l* ad *bx*, est vt *bx* ad *k*: ergo ex æquo erit *by* ad *k*, vt *k* ad *bx* (communis ratio *bx* ad *l*:) ergo rectangulum sub *by*, & *bx*, æquale erit quadrato *k* (vt petitur) Rectas igitur exhibuimus *ay*, & *ax*, &c. quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIII.

Vide Renald. pagin. 462. to. 3.

Duo latera reperire, ita vt vtrumque ab altero datum segmentum accipiens ad residuum constitutam habeat rationem.

Sint

x a b c q y f h
g

Sint datæ rectæ *ab*, & *bc*, & oporteat invenire rectas *xb*, & *by*, ita vt si recta *xb* à recta *by* segmentum acceperit *bc*, sit composita *xc* ad residuam *cy*, vt *f* ad *g*. Si verò recta *by* à recta *xb* segmentum acceperit *ab*, sit composita *ay* ad residuam *xa* vt *g* ad *h*. Ergo.

CONDITIONES.

Vt sint prop.	*xc.*	*cy.*	*f.*	*g.*
Et etiam	*ay.*	*xa.*	*g.*	*h.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xc.*	*cy.*	*f.*	*g.*
Sive si fiat			*ac.*	*cq.*
Ergo diff. vt 1. ad 1. & E. P.	*xa.*	*qy.*	*f.*	*g.*
Sint etiam prop.	*ay.*	*xa.*	*g.*	*h.*
Ergo ex æquo E. P.	*h.*	*f.*	*qy.*	*ay.*

Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *f* ad *g*, ita *ac* ad *cq*, & vt *h* ad *f* ita *qy* ad *ay* (hoc est vt differentia, qua *f* superat *h*, ad ipsam *f*, ita *aq* ad *ay*.) Et tandem vt *g* ad *h* ita *ay* ad *xa*. Dico factum.

Est enim ex constr. *ay* ad *xa*, vt *g* ad *h*, vt petitur, & etiam est vt *h* ad *f*, ita *qy* ad *ay*: ergo ex æquo erit *xa* ad *qy*, vt *f* ad *g*, sive vt *ac* ad *cq*, & quia differentiæ sunt vt vnus ad vnum, erit *xc* ad *cy*, vt *f* ad *g*, vt petitur. Rectas igitur exhibuimus *xb*, & *by*, &c. Quod oportebat facere.

SCO-

SCHOLION.

In hoc problemate nil aliud determinandum apparet, nisi quod recta *f* maior debeat esse, quam recta *h*.

PROPOSITIO XXIV.

Datas rectas *ab. bc. cd.* secare in *x. y. z.* his conditionibus.

f.	*g.*		
p.	*q.*	*k.*	*a x b q y c z d p*
h.	*l.*	*m.*	

CONDITIONES.

Vt sint proport.	*ay.*	*xc.*	*f.*	*g.*
Et etiam	*xb.*	*cz.*	*p.*	*q.*
Nec non	*bz.*	*yd.*	*h.*	*l.*

ANA-

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ay.*	*xc.*	*f.*	*g.*—
Sint etiam prop.	*xb.*	*cz.*	*p.*	*q.*
Vel si fiant prop.			*bc.*	*qc.*
Ergo agg. vt 1. ad 1. & E.P.	*xc.*	*qz.*	*p.*	*q.*
Vel si fiant			*g.*	*k.*—
Ex æquo igitur E.P.	*qz.*	*ay.*	*k.*	*f.*—
Sint etiam prop.	*bz.*	*yd.*	*h.*	*l.*
Vel si fiat			*bp.*	*ad.*
Ergo diff. vt 1. ad 1. & E.P.	*zp.*	*ay.*	*h.*	*l.*
Vel si fiat			*m.*	*f.*—
Ergo ex æquo E.P.	*qz.*	*zp.*	*k.*	*m.*

Ergo solutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *p* ad *q* ita *bc* ad *qc*, & ita *g* ad *k*, & vt *h* ad *l* ita *bp* ad *ad*, & ita *m* ad *f*. Deinde diuidatur *pq* in *z* in ratione *k.* ad *m*, vt sint proportionales *qz. zp. k. m.* Et cum punctum *z* notum sit, fiat *bz* ad *yd*, vt *h* ad *l*, & *ay* ad *xc*, vt *f* ad *g*, & completæ erunt prima, & tertia conditio. Dico etiam esse proportionales *xb. cz. p. q.* quod secundam conditionem constituit.

Cum enim ex constr. sit *bz* ad *yd*, vt *h* ad *l*, idest vt *bp* ad *ad*: erit *zp* ad *ay*, vt *h* ad *l*, siue vt *m* ad *f* (hoc est differentiæ vt vnus ad vnum.) Sed etiam ex construct. est *qz* ad *zp*, vt *k* ad *m*: ergo ex æquo erit *qz* ad *ay*, vt *k* ad *f*. (Ratio communis *zp. m.*(sed ex constr. est *ay* ad *xc*, vt *f* ad *g*: igitur ex æqualitate erit *xc* ad *qz*, vt *g* ad *k* (Ratio communis *ay. f*) idest vt *bc* ad *qc*, & quia differentiæ sunt vt vnus ad vnum: erit *xb* ad *cz*, vt *bc* ad *qc*, idest vt *p* ad *q*, vt per secundam conditionem requiritur. Rectas igitur *ab. bc. cd.* diuisimus, &c. quod facere oportebat.

SCHOLION.

Eadem facilitate problemata expediri poterunt, quando quatuor, aut plures rectæ dividendæ fuerint in totidem puncta incognita.

QVÆSTIO.

Datos tres numeros 11. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$. ita ſingillatim in duas partes dividere, vt ſex numeri conſtituantur his conditionibus.

Vt ſumma primi, ſecundi, & tertij ad ſummam ſecundi, tertij, & quarti ſit, vt 4 ad 3.
Vt ſecundus ad quintum ſit vt 3 ad 1.
Ut ſumma tertij, quarti, & quinti, ad ſummam quarti, quinti, & ſexti ſit, vt 3 ad 2.

ANALYSIS.

Sint dati numeri *ab. bc. cd*, & dividantur in *x. y. z.* ergo ſex numeri quæſiti erunt *ax. xb. by. yc. cz. zd.*

Sit vt 4 ad 3 ita *f* ad *g*.
Et vt 3 ad 1 ita *p* ad *q*.
Et vt 3 ad 2 ita *h* ad *l*.

Ergo analyſis omnino vt antea erit inſtituenda, vnde ſequens oritur.

OPE-

OPERATIO.

Fiat vt p ad q ita bc ad qc.
Ideſt vt 3 ad 1 ita $7\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$
& ita g. ad k.
Ideſt 3. ad 1.
Fiat vt l ad h ita ad ad bp.
Ideſt vt 2 ad 3 ita 22 ad 33
& ita f ad m.
Ideſt 4 ad 6.
Eſt autem bc —Λ— $7\frac{1}{2}$.
Eſt erat qc —Λ— $2\frac{1}{2}$.
Ergo erit bq —Λ— 5.
Sed erat bp —Λ— 33.
Ergo erit qp —Λ— 28.
Fiat vt $m + k$ ad k ita pq ad qz
Ideſt vt 7. ad 1. ita 28 ad 4
Sed qc eſt $2\frac{1}{2}$
Ergo erit cz $1\frac{1}{2}$ pro quinto.
Ergo erit zd 2. pro ſexto.

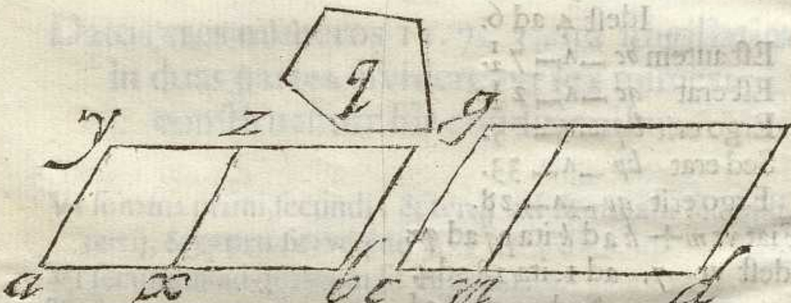
Fiat vt q ad p ita cz ad xb
Ideſt vt 1 ad 3 ita $1\frac{1}{2}$ ad $4\frac{1}{2}$ pro ſecundo
Ergo $6\frac{1}{2}$ pro primo.

Fiat vt g ad f ita xc ad ay
Ideſt vt 3 ad 4 ita 12 ad 16
Sed eſt ab 11
Ergo by erit 5 pro tertio.
Et yc erit $2\frac{1}{2}$ pro quarto.

Sunt igitur ſex quæſiti numeri $6\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. 5. $2\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 2, quos invenire oportebat.

PROPOSITIO XXV.

Prop. 28 & 29. l. 6. elem. Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens, vel excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato.



PRIMA PARS.

Sit primo ad datam *ab* applicandum parallelogrammum *axz* æquale rectilineo dato *q*, deficiensque parallelogrammo *bxz*, quod simile sit parallelogrammo dato *dcg*. Ad latus *cg* in angulo *c* constituatur parallelogrammum
45. 1. el. *mcg* æquale rectilineo dato *q*.

ANALYSIS.

14. 6. el.	Ob æqual. *axz. mcg.* S.P.	*cm.*	*ax.*	*xz.*	*cg.*
4. 6. el.	Et ob simil. *bxz. dcg.* S.P.	*cd.*	*cg.*	*xb.*	*xz.*
	Ergo ex æqual. E.P.	*cm.*	*ax.*	*xb.*	*cd.*

Ergo solutum.

CON-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat parallelogrammum *mcg* rectilineo dato *q* æquale, & ipsis *cm*, & *cd* reciprocæ inveniantur *ax*, & *xb*, quarum ſumma ſit data *ab*. Deinde in angulo *x* æquali ipſi *c* proportionales fiant *cd*. *cg*. *xb*. *xz*. (hoc eſt parallelogrammum facere *bxz*. ſimile dato *dcg*) compleaturque totum *bxy*. Dico parallelogrammum *axz*, quod ex conſt. deficit parallelogramo *bxz* ſimili dato *dcg*, æquale eſſe rectilineo dato *q*.

Cum enim ſint proportionales ex conſtr. *cm*. *ax*. *xb*. *cd*, & ex ſimilitudine parallelogrammorum *bxz*. *dcg*, *cd*. *cg*. *xb*. *xz*: erunt ex æqualitate proport. *cm*. *ax*. *xz*. *cg* (communis ratio *xb*. *cd*.) ergo parallelogrammum *axz* æquale erit parallelogrammo *mcg*, ideſt rectilineo dato *q*. Quod erat faciendum.

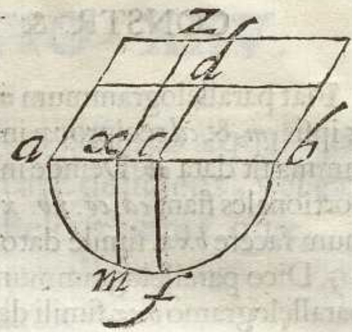
DETERMINATIO.

Si media inter *cd*, & *cm* maior foret ſemiſſe datæ *ab*, perſpicuũ eſt iuxta determinationem prop. 1. Introd. problema conſtrui non poſſe. Vnde ſatis ſuperque conſtat id ipſum, quod in prop. 27. lib. 6. elem. oſtenditur: libet tamen hoc theorema ſtylo noſtro reſolvere, & demonſtrare.

THEOREMA.

Omnium parallelogrammorum ad eamdem rectam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus, maximum eſt id, quod à dimidia deſcribitur. prop. 27 6. el.

Sint ad datam *ab* applicata duo parallelogramma *axz. acd*, parallelogrammis defficientia ſimilibus *bxz. bcd*. Dico parallelogrammū *acd.* ſuper dimidia *ac* deſcriptum maximum eſſe omnium, &c.



ANALYSIS.

Si igitur *axz* non eſt minus quam *acd*.

Vide	Sit fieri poteſt.	*axz* +q. *acd*.
coroll.	Ergo diſſolu.ratio.	*ax. ac.* +q. *cd. xz.*
propoſ.	Sed ob ſimil. *bxz. bcd.*	*cd. xz.* —∧— *cb. xb.*
funda-ment.in	Ergo ratio.	*ax. ac* +q. *cb. xb.*
Introd.	Et producendo.	*axb* +q. *acb.*

Quod fieri non poteſt: ergo reſolutum eſt theorema, cuius demonſtratio, vel à principio negativè, vel à fine affirmativè ita ſe habet.

CONSTR.

Super *ab* deſcribatur ſemicirculus, & ex punctis *x*, & *c* excitentur perpendiculares *xm. cf*.

DEMONSTR.

Si igitur *axz* non eſt minus quam *acd*, ſit maius, ſi fieri poteſt: ergo diſſolvendo erit ratio *ax* ad *ac* maior ratione *cd* ad *cd* ad *xz*; sed ob similitudinem *bxz*. *bcd* ratio *cd* ad *xz*. æquatur rationi *cb* ad *xb*: ergo ratio *ax* ad *ac* maior erit ratione *cb* ad *xb*: ergo rectangulum *axb* sub extremis, idest quadratum *xm* maius erit rectangulo *acb* sub medijs, idest quadrato *cf*, quod fieri non potest, cum *xm* minor sit, quam *cf* (per 15.3.elem.) ergo *axz* minus erit quam *acd*. Quod ostendere oportebat.

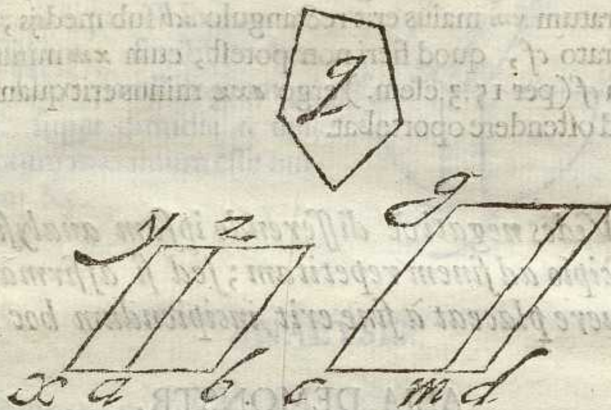
Vides negativè differendo ipsam analysim à principio ad finem repetitam; sed si affirmativè arguere placeat à fine erit incipiendum hoc modo.

ALIA DEMONSTR.

Cum igitur *axb*, idest quadratum *xm* minus sit quam *acb*, idest quadratum *cf* (15.3.elem.) erit dissolvendo ratio *ax* ad *ac* minor ratione *cb* ad *xb*; sed ratio *cb* ad *xb* æquatur rationi *cd* ad *xz* (ob similitudinem *bxz*. *bcd*) ergo ratio *ax* ad *ac* minor erit ratione *cd* ad *xz*: ergo (producendo) *axz* factum sub extremis minus erit *acd* facto sub medijs. Quod ostendere oportebat.

SE-

SECVNDA PARS.



Sit secundo ad datam *ab* applicandum parallelogrammum *bxy* æquale rectilineo dato *q* (vel parallelogrammo *mcg*, quod ei æquale sit factum) excedens parallelogrammo *axy*, quod simile sit parallelogrammo dato *dcg*.

ANALYSIS.

Ob æqualit. *bxy. mcg.* S.P.	*cm.*	*xb.*	*xy.*	*cg.*
Et ob similit. *axy. dcg.* S.P.	*cd.*	*cg.*	*xa.*	*xy.*
Ergo ex æqual. E.P.	*cd.*	*xa.*	*xb.*	*cm.*

Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

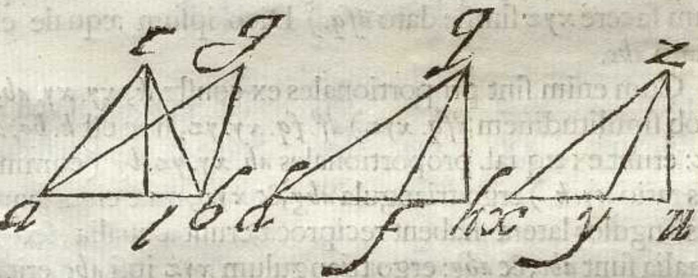
Ipsis *cd*, & *cm* reciprocæ inveniantur *xa*, & *xb*, quarum differentia sit data *ab*, & in angulo *x*, æquali ipsi *c*, fiant proportionales *cd. cg. xa. xy.* (hoc est parallelog. facere *axy* dato *cdg* simile.) Dico parall. *bxy* ad datam *ab* applicatum

tum, excedensque parallelog. *axy* simili dato *dcg*, æquale esse rectilineo dato *q*.

Cum enim sint proportionales (ex const.) *cd. xa. xb. cm.* & (ob similitudinem *axy. dcg*) *cd. cg. xa. xy*: erunt ex æqualitate proportionales *cm. xb. xy. cg.* (communis ratio *xa. cd.*) ergo parallelogrammum *bxy* æquale erit parallelog. *mcg*, idest ex constr. rectilineo dato *q*. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO XXVI.

Triangulum dato æquale, & alteri dato simile constituere.



Sit inveniendum triangulum *xyz* æquale dato *abc*, & simile dato *dfq*.

Super eamdem basim *ab*, & inter parallelas *ab*, & *cg* in angulo *abg* æquali dato *f*, triangulum fiat *abg*, quod æquale erit ipsi *abc*, eruntque anguli *abg. f.* & *y.* æquales.

ANALYSIS.

Ob æqual. *abg. xyz*. S.P.	*ab.*	*xy.*	*yz.*	*bg.*	15.6.el. 5.6.el.
Ob simil. *dfq. xyz*. S.P.	*df.*	*fq.*	*xy.*	*yz.*	
Fiant prop. *k. ab. df. fq.*	*k.*	*ab.*			
Ergo ex æqual. E.P.	*k.*	*xy.*	*xy.*	*bg.*	
Ergo solutum.					

CON-

CONSTR. & DEMONST.

Fiant proportionales *fq. df. ab. k*, & inter *k* & *bg*. media invenietur *xy*. In angulo autem *y* æquali dato *f* fiant proportionales *df. fq. xy. yz*, & iungatur *xz* (hoc eſt triangulum facere *xyz* ſimile dato *dfq*.) Dico ipſum æquale eſſe dato *abc*.

Cum enim ſint proportionales ex conſtr. *k, xy. xy. ab*, & (ob ſimilitudinem *dfq. xyz*) *df. fq. xy. yz*, hoc eſt *k. bg. xy. yz*: erunt ex æqual. proportionales *ab. xy. yz. bg* (communis ratio *xy. k*) ergo triangula *abg*, & *xyz*, quæ circa æquales angulos latera habent reciproca, erunt æqualia; ſed æqualia ſunt *abc*, & *abg*: ergo triangulum *xyz* ipſi *abc* erit æquale. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Si conſtituere oporteret parallelogrammum dato æquale, & alteri dato ſimile: excepto nomine omnia convenient, quia nobis perinde eſt plana *xyz. abg. dfq*, triangula, ac parallelogramma concipere.

Præterea quoniam propoſitum problema

po-

positione; non tamen longitudine resolutum est propterea quod quantitas *bg* sciri non potest, nisi à trigonometria petatur determinatis gradibus angulorum. Oportet ideo, vt in numeris resolvi posit problema, ad perpendicula recurrere, quæ ex datis lateribus manifesta fiunt.

Inveniantur igitur perpendiculares *cl. qh* in triangulis datis *abc. dfq*, & trianguli quæsiti *xyz* esto perpendicularis *zv*. Cum ergo bases, & altitudines in triangulis æqualibus sint reciprocæ, & in similibus proportionales, eadem facilitate procedet analysis. *Prop.* 19 & 20. *Introd.*

ANALYSIS.

Ob æqual. *abc. xyz.* S.P.	*ab.*	*xy.*	*zv.*	*cl.*
Et ob simil. *dfq. xyz.* S.P.	*df.*	*qh.*	*xy.*	*zv.*
Fiant prop. *qh. df. cl. m.*	*m.*	*cl.*		
Ergo ex æqual. E.P.	*m.*	*xy.*	*xy.*	*ab.*

Ergo solutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

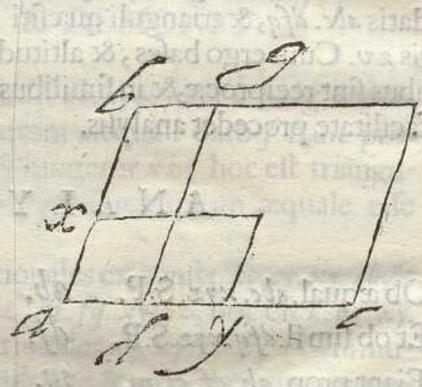
Fiat vt *qh* ad *df*, ita *cl* ad *m*, & inter *m*, & *ab* media inveniatur *xy*. Vt autem *df* ad *xy*, ita fiat *qd* ad *xz*, & *qf* ad *zy*; & *qh* ad *zv*, & factum erit triangulum *xyz* dato *dfq* simile. Dico ipsum dato *abc* æquale esse.

Cum enim ex const. sint proportionales *m. xy. xy. ab.* & etiam (ob similitudinem triangulorum *dfq. xyz*) *df. qh. xy. zv*, idest *m. cl. xy. zv*: erunt ex æquo proportionales *ab. xy. zv. cl.* (communis ratio *xy. m.*) ergo triangula *abc. xyz*, quæ bases, & altitudines habent reciprocas, æqualia erunt. Quod facere oportebat.

PROPOSITIO XXVII.

Ex dato parallelogrammo, parallelogrammum æquiangulum abſcindere, quod dati ſit imperata pars, & cuius latera ſint in ratione data.

Sit parallelogrammum datum *cab*, ex quo abſcindere oporteat parallelogrammum *yax*, quod tertia pars ſit totius *cab*, & cuius latera *ax*, & *ay* ſint in ratione data *ab* ad *g*.



Fiat *ad* tertia pars ipſius *ac*, & erit parallelogrammum *dab* triens totius *cab*, & ipſi æquale erit conſtituendum *yax*.

1. 6. el.

ANALYSIS.

Ob æqual. *dab*. *yax*. S.P.	*ad*.	*ay*.	*ax*.	*ab*.
Sed debent eſſe proport.	*ax*.	*ay*.	*ab*.	*g*.
Ergo ex æqual. E.P.	*ad*.	*ay*.	*ay*.	*g*.

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONST.

Inter *ad*, & *g* media inveniatur *ay*, & fiat *ax* ad *ay*, vt *ab* ad *g*. Dico factum.

Sunt

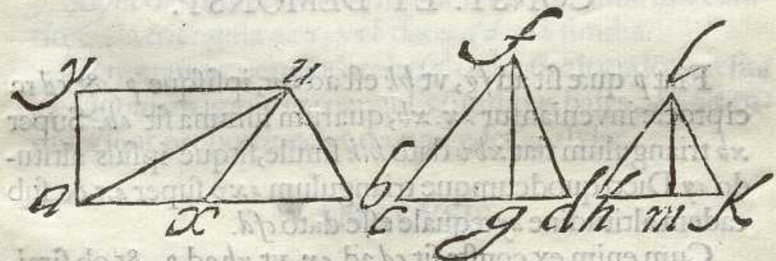
Sunt enim ex conſt. proportionales *ax. ay. ab. g*, vt oportebat, & etiam *ad. ay. ay. g*: ergo ex æquo erit *ad* ad *ay*, vt *ax* ad *ab*. (communis ratio *ay. g.*) & parallelogrammum *yax* æquale ipſi *dab*, ideſt trienti totius *cab*, vt oportebat. Ex dato igitur parallelogrammo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Perſpicuum eſt rectam *g* non maiorem rectà *ac* dari debere, vt triangulum abſcindi poſsit.

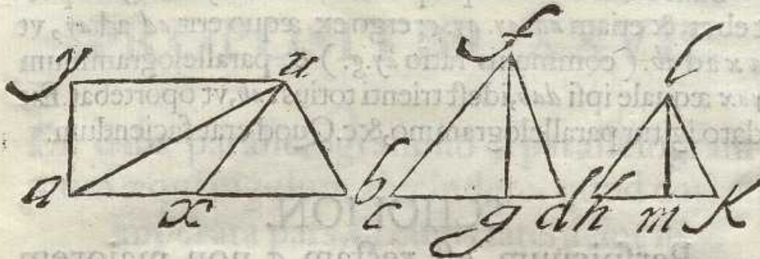
PROPOSITIO XXVIII.

Super datam rectam duo triangula ſub eadem altitudine conſtituere, quorum vnum æquale, alterum verò ſimile ſint duobus datis triangulis.



Super datam *ab* ſint conſtituenda ſub eadem altitudine duo triangula *axv. xbv*, hoc quidem ſimile dato *hlk*, illud vero æquale dato *cfd*.

Demittantur perpendicula *fg. lm*. Et ſit altitudo quæſita *ay*. Et quoniam in triangulis æqualibus, baſes, & altitudines ſunt reciprocæ, & in ſimilibus proportionales, in hunc modum inſtituetur analyſis. prop. 19 & 20. Introd.



ANALYSIS

Ob æqual. *axv. cfd*. S.P.	*cd.*	*ax.*	*ay.*	*fg.*
Et ob simil. *xbv. hkl*. S.P.	*xb.*	*ay.*	*hk.*	*lm.*
Vel si fiant prop.			*p.*	*fg.*
Ergo ex æquo. E.P.	*cd.*	*ax.*	*xb.*	*p.*
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

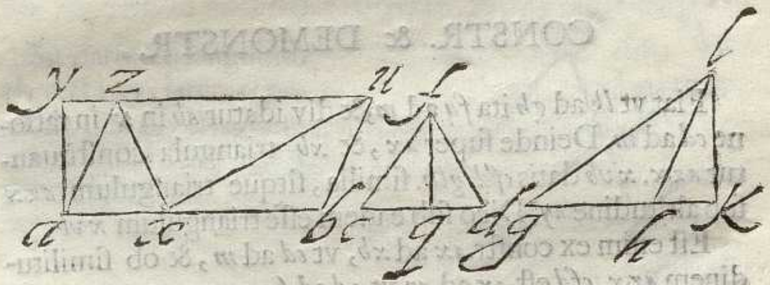
Fiat *p* quæ sit ad *fg*, vt *hk* est ad *lm*, ipsisque *p*, & *cd* reciprocæ inveniantur *ax. xb*, quarum summa sit *ab*. Super *xb* triangulum fiat *xbv* dato *hlk* simile, sitque ipsius altitudo *ay*. Dico quodcumque triangulum *axv* super *ax*, & sub eadem altitudine *ay* æquale esse dato *cfd*.

Cum enim ex constr. sit *cd* ad *ax*, vt *xb* ad *p*, & ob similitudinem *xbv. hlk* sit *xb* ad *ay*, vt *hk* ad *lm*, idest ex constr. vt *p* ad *fg*: erit ex æquo *cd* ad *ax*, vt *ay* ad *fg* (communis ratio *xb. p.*) ergo triangula erunt æqualia *axv. cfd*, cum habeant bases, & altitudines reciprocas. Super rectam igitur datam, &c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Super datam rectam duo triangulæ constituere sub eadem altitudine, duobus datis triangulis similia.



Super datam rectam *ab*, sub eadem altitudine sint constituenda triangula *azx*, *xvb* datis *cfd*. *glh* similia.

Demittantur perpendicula *fq*. *lk*. Et sit altitudo quæsita *ay*. Quoniam igitur in triangulis similibus bases, & altitudines sunt proportionales, ita procedet analysis. *prop.20 Introd.*

ANALYSIS.

Ob simil. *azx*. *cfd*. S.P.	*ax*.	*ay*.	*cd*.	*fq*.
Et ob simil. *xbv*. *ghl*. S.P.	*xb*.	*ay*.	*gh*.	*lk*.
Vel si fiant prop.			*m*.	*fq*.
Ergo ex æquo E.P.	*ax*.	*xb*.	*cd*.	*m*.
Ergo solutum.				

CON-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *lk* ad *gh* ita *fq* ad *m*,& div idatur *ab* in *x* in ratione *cd* ad *m*. Deinde ſuper *ax*, & *xb* triangula conſtituantur *azx*. *xvb* datis *cfd*. *glh*. ſimilia, ſitque triangulum *azx* ſub altitudine *ay*. Dico ſub eadem eſſe triangulum *xvb*.

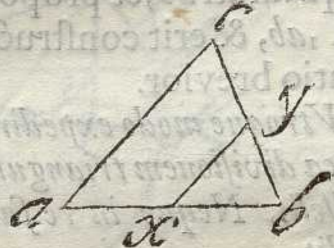
Eſt enim ex conſtr. *ax* ad *xb*, vt *cd* ad *m*, & ob ſimilitudinem *azx*. *cfd* eſt *ax* ad *ay* vt *cd* ad *fq*: ergo ex æquo erit *xb* ad *ay*, vt *m* ad *fq*, hoc eſt ex conſtr. vt *gh* ad *lk*; ſed triangula *xvb*. *glh* ſunt ſimilia, quare *gh* ad *lk* debet eſſe vt *xb* ad altitudinem: ergo *ay* altitudo erit trianguli *xbv*. Super datam igitur rectam duo triangula,&c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Triangulum datum rectà vni laterum parallela in quaſcumque rationes diuidere.

Sit datum triangulum *abc* rectà *xy*, lateri *ac* parallela, ita dividendum, vt triangulum *xby* tertia pars ſit ipſius *abc*.



ANALYSIS

Sit igitur	$xby \;{-}\!\Lambda\!{-}\; \frac{1}{3}abc.$			
Ergo S. P.	$\frac{1}{3}ab.$	$xb.$	$by.$	$bc.$
Sed ob ſimil. S.P.	$ab.$	$bc.$	$xb.$	$by.$
Ergo ex æquo E.P.	$ab.$	$xb.$	$xb.$	$\frac{1}{3}ab.$
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *ab*, & ipſius tertiam partem media inveniatur *xb*, ducaturque ipſi *ac* parallela *xy*. Dico factum.

Cum enim ſint proport. ex conſtr. *ab.xb.xb.*$\frac{1}{3}$*ab*, & ob ſimil. *ab. bc. xb. by*; erunt ex æquo prop. $\frac{1}{3}$*ab. xb. by. bc* (ratio communis *xb.ab.*) ergo triangulum *xby* triens erit totius *abc*. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

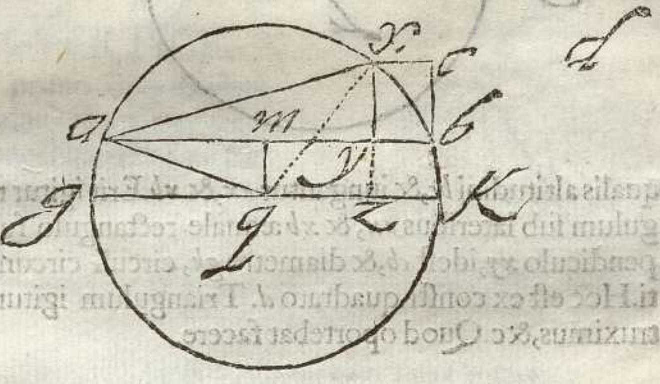
Ex prop. 19. lib. 6. elem. conſtat triangula ſimilia eſſe in duplicata ratione laterum homologorum, hoc eſt vt quadrata ipſorum laterum; vnde quadratum *xb* æquabitur trienti quadrati *ab*, & proportionales erunt *ab. xb. xb.* $_{1}$*ab*, & erit conſtructio eadem, & demonſtratio brevior.

Vtroque modo expediri poterunt omnes caſus circa diviſionem trianguli lineis vni laterum parallelis. Neque in re facillima nos detineri expedit.

PROPOSITIO XXXI.

Data base, altitudine, & rectangulo sub cruribus invenire triangulum.

Vide Vietam appendicul. 1.



Esto triangulum, de quo quæritur *axb*. Datur basis *ab*, altitudo *bc*, & rectangulum *axb* sub lateribus æquale ponitur quadrato *d*. Circumscribatur circulus, cuius diameter *gk*.

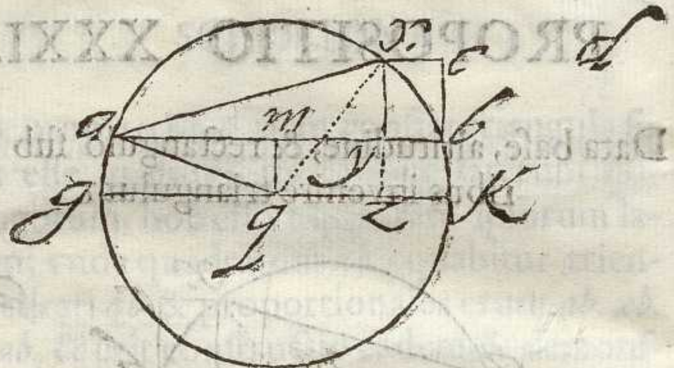
ANALYSIS

Sint igitur prop.	*d.*	*ax.*	*xb.*	*d.*
Sed per 15. Introd. S.P.	*cb.*	*ax.*	*xb.*	*gk.*
Ergo ex æquo E.P.	*cb.*	*d.*	*d.*	*gk.*

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *cb* ad *d* ita *d* ad *gk*. Et circa diametrum *gk* circulus describatur, in quo aptetur *ab*, & ipsi normalis *xy*, æ-



Vide Vietam Appendicul. 1.

qualis altitudini *bc*, & iungantur *ax*, & *xb*. Erit igitur rectangulum sub lateribus *ax*, & *xb* æquale rectangulo sub perpendiculo *xy*, id est *cb*, & diametro *gk*, circuli circumscripti. Hoc est ex constr. quadrato *d*. Triangulum igitur construximus, &c. Quod oportebat facere.

SCHOLION.

Si in numeris proponatur problema, bisecta *ab* in *m*, & *gk* in *q*, ducantur *aq*, & *qx*, protrahaturque *xy* ad *z*. In triangulo igitur rectangulo *amq* notæ sunt *am*, & *aq*, quare *mq*, id est *yz* nota erit, & quia *xy* datur, erit cognita tota *xz*, vnde in triangulo rectangulo *qxz* innotescet *qz*, id est *my*, adeoque nota fient segmenta baseos *ay*, & *yb*, & exinde latera trianguli *ax*, & *xb*, &c.

PRO-

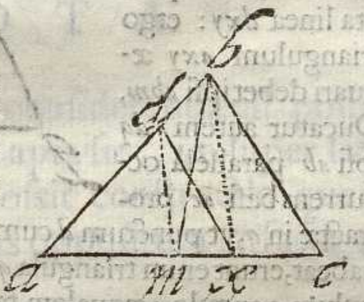
PROPOSITIO XXXII.

Datum triangulum ex dato puncto in data ratione dividere.

Vide R. P. Tacquet in Geomet pract. c. 14. l. 2. R. P. Zarag. in Geomet. magn. tom. 2. probl. 8.

EX VERTICE.

Sit primo dividendum triangulum *abc* ex vertice *b* in ratione data *am* ad *mc*. Ergo si ducatur *bm* factum erit quod petitur, sunt enim triangula *abm*, & *mbc*, vt bases *am*, & *mc*. per 1. 6. elem.



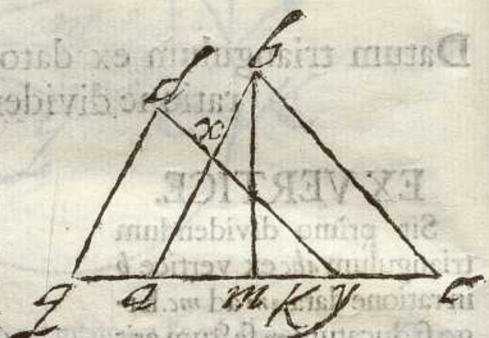
EX PVNCTO IN LATERE.

Sit secundo dividendum ex dato in latere puncto *d*, & sit quæsita linea *dx*. Ergo triangulum *dax* æquari debet triangulo *bam*, & cum habeant communem angulum *a* latera erunt reciproca. Quare si fiat vt *ad* ad *ab* ita *am* ad *ax*, & ducatur *dx*. Factum erit quod postulatur.

NOTA.

In hoc casu considerare oportet an positio puncti dati commoda sit ad divisionem vnius, vel vtriusque laterum oppositorum, in ratione data, vt pateat an constructio variari possit, partes tamen divisionis semper inter se æquales erunt, & solutio vnica.

EX PVNCTO EXTRA.



Sit tertio dividendum triangulum *abc* ex dato extra illud puncto *d*, & sit quæsita linea *dxy*: ergo triangulum *axy* æquari debet ipsi *abm*. Ducatur autem *dq* ipsi *ab* parallela occurrens basi *ac* protractæ in *q*, vt punctum *d* cum triangulo *abc* connexionem habeat, erunt enim triangula *qdy*, & *axy* similia, hoc est angulum *q* angulo *a* æqualem facere.

ANALYSIS

Ob æqual. *abm*. *axy*. S.P.	*ab.*	*ax.*	*ay.*	*am.*
Fiant prop. *qd*. *ab*. *am*. *ak*.	*qd.*			*ak.*
Et ob simil. *qdy*. *axy*. S.P.	*qd.*	*qy.*	*ax.*	*ay.*
Ergo ex æquo. E.P.	*qy.*	*ay.*	*ay.*	*ak.*
Et divid.	*qa.*	*ay.*	*ky.*	*ak.*
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *qd* ad *ab* ita *am* ad *ak*, & ipsis *qa*, & *ak* reciprocæ inveniantur *ay*, & *ky*, quarum differentia sit ipsa *ak*, iungaturque *dy* secans latus *ab* in *x*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales *qa*. *ay*. *ky*. *ak*, & compon. *qy*. *ay*. *ay*. *ak*, & (ob similitudinem triangulorum

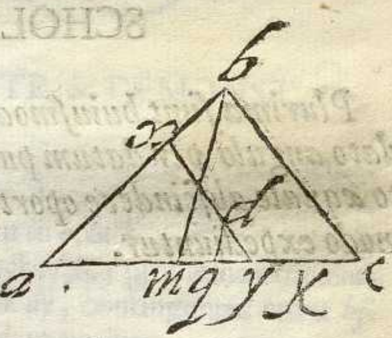
rum *qdy. axy*) *qd. qy. ax. ay*: erunt ex æquo proportionales *qd. ax. ay. ak.* (communis ratio *qy. ay*) hoc eſt ex conſtr. *ab. ax. ay. am*: ergo triangula *abm. axy*, quæ circa commu-nem angulum *a* latera habent reciproca, erunt æqualia, adeoque vt triangulum *abm* ad triangulum *mbc*, hoc eſt vt *am* ad *mc*, ita erit triangulum *axy* ad quadrilaterum *xycb*. Triangulum igitur *abc* diviſimus, &c. quod facere oportebat.

N O T A.

Etiam in hoc caſu conſideranda eſt poſitio dati puncti *d*, an ipſa apta ſit, vt ſuper latus oppoſitum *bc* fieri poſsit conſtructio quem-admodum ſuper latus oppoſitum *ac* facta eſt.

EX PVNCTO INTRA.

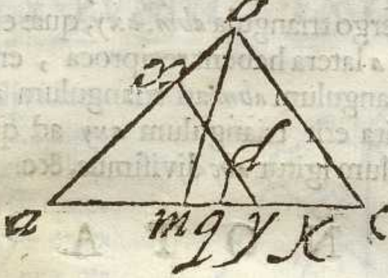
Sit quartò dividendum triangulum *abc* ex dato in-tra illud puncto *d*, & ſit quæſita linea *xdy*. Ducatur *dq* ipſi *ab* parallela, & ana-lyſis eodem modo proce-det vti in caſu antecedente.



ANALYSIS.

Ob æqual. *abm. axy.* S.P.	*ab.*	*ax.*	*ay.*	*am.*
Fiant prop. *qd. ab. am. ak.*	*qd.*			*ak.*
Et ob ſimil. *qdy. axy.* S.P.	*qd.*	*qy.*	*ax.*	*ay.*
Ergo ex æqual. E.P.	*qy.*	*ay.*	*ay.*	*ak.*
Et per diviſ.	*aq.*	*ay.*	*yk.*	*ak.*

Ergo



Ergo solutum, & manifestum constructio, & demonstratio. Cæterum cum ipsis *aq*, & *ak* reciprocas oporteat invenire *ay*, & *yk*, quarum summa sit ipsa *ak*, notandum erit an problema imposibile sit, an vero vnam, duasve solutiones admittat. Et etiam vtrum super latus *bc*, vel super latus *ab* fieri posit constructio, quod à positione pendet puncti dati, vt in antecedentibus casibus.

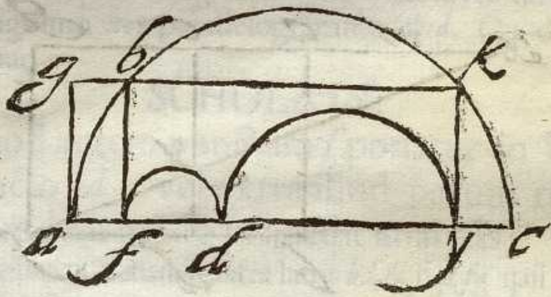
SCHOLION.

Plurima sunt huiusmodi problemata, vt si ex dato angulo per datum punctum triangulum dato æquale abscindere oporteret, quæ omnia eodem modo expediuntur.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Semicirculo existente *abc*, & puncto *d*, describere in *ac* per *d* semicirculum, ita vt si ducatur contingens *fb* sit ipsi *ad* æqualis. *Vide Pappum lib. 7. prop. 87*



ANALYSIS, CONSTR. & DEMONST.

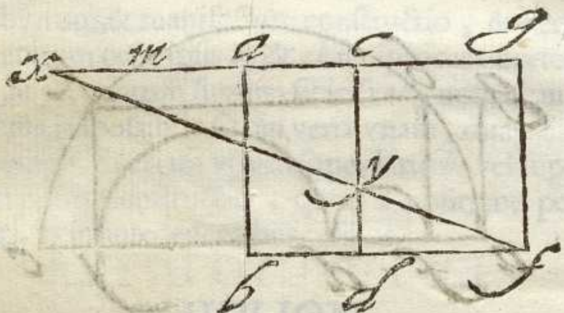
Hoc problema facillimum est. Si enim perpendicularis excitetur *ag* ipsi *ad* æqualis, ducaturque ipsi *ac* parallela *gk*, secans, circumferentiam in *b*, & *k*, & demittantur perpendiculares *bf*, & *ky*: puncta *f*, & *y* problema efficient, quia descriptis semicirculis *fd*. *dy*, contingentes erunt *bf*. *ky*, & æquales ipsi *ga*, idest *ad*, vt petitur.

Quod si *ad* maior fueri dimidio ipsius *ac* problema construi non posse, perspicuum est, quia eam non caperet semicirculus, vt ad primam propositionem Introd. animadvertimus, ac propterea hanc determinationem in huiusmodi problematibus semper omittimus. Si autem *ad* dimidio *ac* fuerit æqualis, vnica erit resolutio, si vero minor duas accipiet noster casus.

PROPOSITIO XXXIV.

Vide Pappum lib. 7. prop. 164.

Parallelogrammo dato *abdc*, à dato puncto *f* rectam ducere *fyx*, & facere triangulum *xcy* æquale parallelogrammo dato *abdc*.



Quoniam igitur triangulum *xcy* æquari debet parallelogrammo *ad*: erit parallelogrammum sub *xc*, & *cy* duplum parallelogrammi *ad*: quare si fiat *ma* ipsi *ac* æqualis, erit parallelogrammum sub *mc*, & *cd* parallelogrammo sub *xc*, & *cy* æquale. Compleatur parallelogrammum *dfgc*, & erit *gf* ipsi *cd* æqualis.

ANALYSIS.

Sit igitur	*xc:cy*	— A —	*mc:cd.*	
Ergo S.P.	*mc.*	*xc.*	*cy.*	*cd.*
Sed ob simil *xcy*. *xgf*. S.P.	*xg.*	*gf.*	*xc.*	*cy.*
Idest		*cd.*		
Ergo ex æqual. E.P.	*xg.*	*xc.*	*xc.*	*mc.*
Et divid.	*cg.*	*xc.*	*xm.*	*mc.*
Ergo solutum.				

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

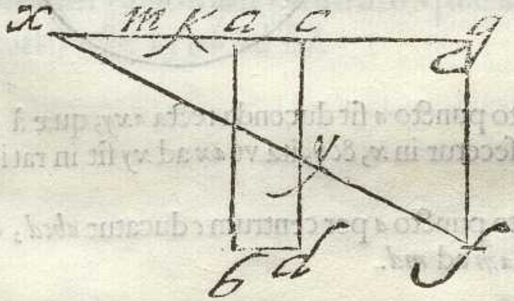
Fiat *mc* dupla ipsius *ac*, & compleatur parallelogrammum *dfgc*, ipsisque *cg*, & *mc* reciprocæ inveniantur *xc*, & *xm*, quarum differentia sit *mc*, & iungatur *xf* secans latus *cd* in *y*. Dico factum.

Est enim ex const. *cg* ad *xc*, vt *xm* ad *mc*, & compon. *xg* ad *xc*, vt *xc* ad *mc*; sed ob similitudinem triangulorum *xcy*. *xgf* est *xg* ad *gf*, idest ad *cd* vt *xc* ad *cy*: igitur ex æqualitate *mc* ad *xc* erit vt *cy* ad *cd*: ergo parallelogrammum sub *xc*, & *cy* æquale erit parallelogrammo sub *mc*, & *cd*, & dimidiando triangulum *xcy* parallelogrammo *abcd*. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quod autem punctum *f* ponatur in latere protracto *bd*, vel extra illud parum refert. Nam eodem modo procedit analysis.

Sit datum punctum *f* extra latus *bd*, & fiat *fg* ipsi *cd* parallela.



ANALYSIS.

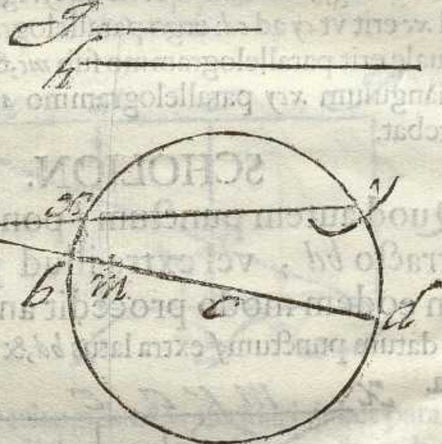
Sit igit.	*xc:cy*	—Λ—	*mc:cd.*	
Ergo S. P.	*mc.*	*xc.*	*cy.*	*cd.*
Vel si fiant	*kc.*			*fg.*
Sed ob simil. S.P.	*xc.*	*cy.*	*xg.*	*gf.*
Ergo ex æquo E.P.	*kc.*	*xc.*	*xc.*	*xg.*
Et per divis.	*kc.*	*xk.*	*xc.*	*cg.*

Ergo solutum; & manifesta constructio, & demonstratio.

Vide R. P.Greg. tom. I. lib. 3. prop.46 de quadratura circuli.

PROPOSITIO XXXV.

Ex dato puncto rectam ducere, quæ à dato circulo secetur in data ratione.



Ex dato puncto *a* sit ducenda recta *axy*, quæ à dato circulo *bxy* secetur in *x*, & *y*, ita vt *ax* ad *xy* sit in ratione data *g* ad *h*.

Ex dato puncto *a* per centrum *c* ducatur *abcd*, & fiat vt *g* ad *h* ita *am* ad *md*.

ANALYSIS.

	Sint igit. prop.	*ax.*	*xy.*	*am.*	*md.*
36.3.&	Ergo per comp. E.P.	*ax.*	*ay.*	*am.*	*ad.* —
14.6.*el.*	Sed S.P.	*ad.*	*ay.*	*ax.*	*ab.* —
	Ergo ex æqual. E.P.	*am.*	*ax.*	*ax.*	*ab.*
	Ergo solutum				

CON-

CONSTR. & DEMONST.

Inter *am*, & *ab* media inveniatur *ax*, quæ ex dato puncto *a* circulo occurrat in *x*, & producatur ad *y*. Dico *ax* ad *xy* esse vt *am* ad *md*, idest vt *g* ad *h*.

Est enim ex constr. *am* ad *ax*, vt *ax* ad *ab*; sed *ad* ad *ay* est vt *ax* ad *ab*: ergo vt *am* ad *ax* ita erit *ad* ad *ay*, & altern. vt *am* ad *ad* ita *ax* ad *ay*: ergo per divis. vt *am* ad *md* ita erit *ax* ad *xy*, quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quoniam *ab* minima, & *ad* maxima sunt omnium, quæ ex dato puncto *a* in datum circulum duci possunt, perspicuum propterea est minimam rationem omnium, quæ assignari debeant, esse vt *ab* ad *bd*.

PROPOSITIO XXXVI.

Dato circulo, per datum in eo punctum rectam ducere, quæ in dato puncto secetur in ratione data.

Circulus *bdy* sit datus, & per datum in eo punctum *a* oporteat rectam ducere *xay* ita vt *xa* ad *ay* sit in ratione data vt *g* ad *h*.

Per centrum *c*, & datum punctum *a* diameter ducatur *bd*.

ANALYSIS

	Sint igitur prop.	*xa.*	*ay.*	*g.*	*h.*
	Vel si fiant			*ad.*	*k.*
35.3.&	Sed S. P.	*ba.*	*xa.*	*ay.*	*ad.*
14.6.el.	Ergo ex æqual. E. P.	*ba.*	*ay.*	*ay.*	*k.*
	Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *g* ad *h* ita *ad* ad *k*, & inter *ba*, & *k* media invenia-

tur

tur *ay*, quæ ex puncto dato *a* circulo occurrat in *y*, & protrahatur *ya* ad *x*. Dico *xa* ad *ay* esse vt *g* ad *h*. Quoniam enim ex constr. est *ba* ad *ay* vt *ay* ad *k*; & vt *ba* ad *ay* ita *xa* ad *ad*: igitur *xa* ad *ad* erit vt *ay* ad *k*, & altern. *xa* ad *ay*, vt *ad* ad *k*, idest vt *g* ad *h*, quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quoniam autem *ba* maxima, & *ad* minima sunt omnium, quæ per datum punctum *a* duci possunt, patet proprerea maximam rationem, quæ ipsis *xa*, & *ay* asignari potest, esse vt *ba* ad *ad*.

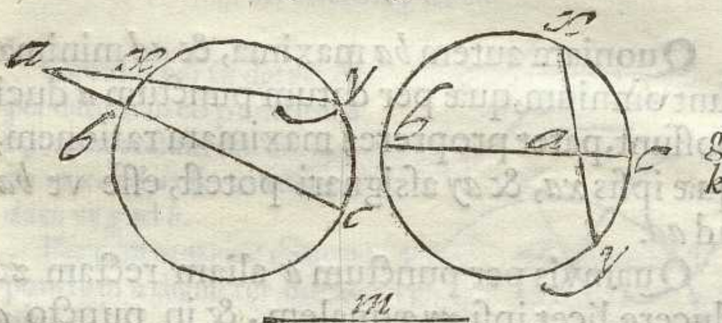
Quamvis per punctum *a* aliam rectam *zv* ducere licet ipsi *xy* æqualem, & in puncto *a* in eadem ratione divisam (nam cum *ay*, & *az* æquales fiant, & æquales erunt *ax*, & *av*, quia æqualiter distabunt à centro) non tamen ideò dicendum erit problema duas admittere solutiones; sed vnam tantum, quæ positione variari poterit, quod etiam in antecedente propositione fieri potest, & etiam in alijs multis.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Vide Marinum Getaldum in Apollonio redivivo, probl. 1.

In dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.



In dato circulo *bxc*, ex puncto *a* siue extra, siue intra dato, oportet rectam ducere *axy*, ita vt aptata sit *xy* æqualis datæ *m*.

ANALYSIS

Ducatur per centrum, & per datum punctum *a* recta *abc*, & per 35. & 36. 3. elem. erunt proportionales *ab. ay. ax. ac.* Ergo solutum, cum aggregatum, seu differentia ipsarum *ay*, & *ax* sit data *m*.

CONST. ET DEMONST.

Ipsis *ab. ac* reciprocæ inveniantur duæ rectæ lineæ *g*, & *k*, quarum differentia sit data *m*, quando punctum *a* extra circulum datur; vel quarum summa sit ipsa *m*, quando intra

intra circulum fuerit datum punctum a. Ex quo aptetur ay æqualis ipsi g, & producatur ad x. Dico xy æqualem esse datæ m.

Est enim ex constructione ab ad g, vt k ad bc; sed (per 35. & 36. 3. elem.) ab ad ay est vt ax ad bc: ergo cum ay facta sit æqualis ipsi g: erit ax ipsi k æqualis. Data autem m iam aggregatum iam differentia est ipsarum g, & k: ergo etiam ipsarum ay, & ax Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Perspicuum est datam rectam m numquam posse diametro bc maiorem esse (quia in circulo maxima est diameter) neque mediâ proportionali inter ab, & ac minorem, quando punctum a intra circulum fuerit datum (vt patet ex limitatione prop. 1. Introd.) Potest tamen alia aptari ex puncto, vel per punctum a, quæ æqualis sit ipsi ay, vel xy, & duæ erunt positiones; sed vnica resolutio quoad longitudinem in vtroque casu.

IN NVMERIS.

Sit primo datum punctum extra circulum, valeatque ab. 18. & ac. 50, & data m 25. Ergo duos numeros oportet invenire, quorum differentia sit 25 reciprocos ipsis 18. & 50. Ergo per prop. 1. Introductionis.

$\frac{1}{2}m$. $12\frac{1}{2}$. quadratum	$156\frac{1}{4}$
Factum sub 18, & 50.	900
Summa	$1056\frac{1}{4}$
V. est	$32\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}m$ est	$12\frac{1}{2}$
Summa, & differentia	45 & 20.

Est igitur ay. 45. & ax 20, quorum differentia xy est 25. vt oportebat.

Sit

Sit secundo punctum *a* intra circulum, & valeat *ab* 18, & *ac*. 50 & data *m* 65. Ergo duos numeros oportet invenire, quorum summa sit 65 reciprocos ipsis 18 & 50.

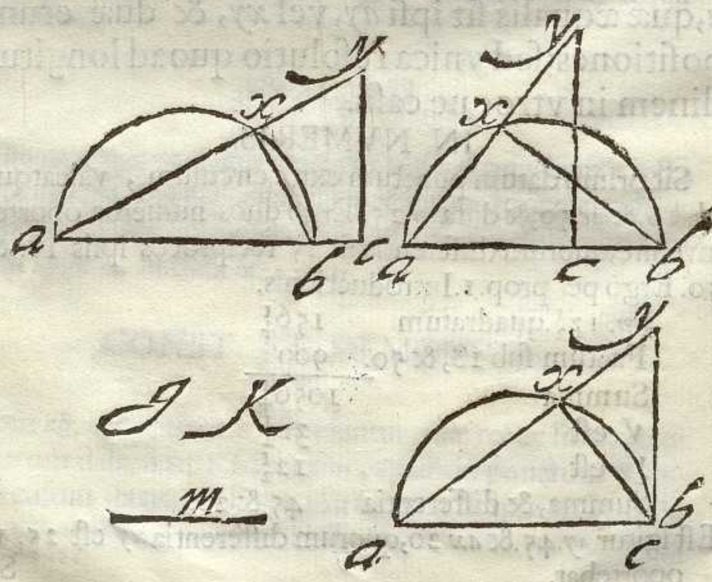
$\frac{1}{2}m$. $32\frac{1}{2}$ quadrat.	$1056\frac{1}{4}$
Factum sub 18 & 50	900
Differentia	$156\frac{1}{4}$
$\surd$. est	$12\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}m$ est	$32\frac{1}{2}$
Summa, & differentia	45 . & 20.

Est igitur *ay* 45 . & *ax* 20: ergo tota *xy* 65, vt oportebat.

Vide Marinum Getaldum in Apollonio redivivo, probl. 2.

PROPOSIT. XXXVIII.

Dato semicirculo, & recta linea ad diametrum perpendiculari, inter ipsam rectam, & circumferentiam semicirculi ponere lineam rectam magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat.



Sit datus semicirculus axb, & ad diametrum ab perpendicularis cy, oportet ex a rectam ducere axy, ita vt intercepta xy æqualis sit rectæ datæ m. Ducatur xb, & similia erunt triangula axb, & ayc; cum habeant angulos rectos axb, & c, & a communem.

ANALYSIS.

Ob simil. $abx.acy$. S.P. $ab.\ \ ax.\ \ ay.\ \ ac.$
Ergo solutum, cum differentia inter ax, & ay debeat esse data m.

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipsis ab, & ac duæ rectæ lineæ reciprocæ g, & k inveniantur, quarum differentia sit data m, & ex a aptetur ay æqualis maiori ipsarum k, secans circumferentiam in x. Dico xy æqualem esse datæ m.

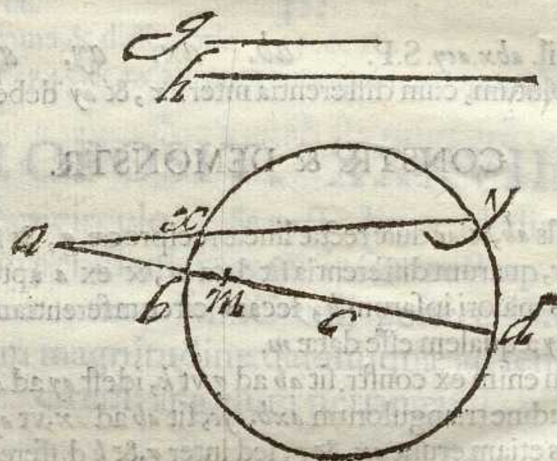
Cum enim ex constr. sit ab ad g vt k, idest ay ad ac, & ex similitudine triangulorum axb, ayc, sit ab ad ax, vt ay ad ac, æquales etiam erunt ax, & g; sed inter g, & k differentia est recta m: ergo etiam inter ax, & ay. Posita est igitur xy æqualis datæ m. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quando diameter protracta fuerit, satis obvium est omnibus, minimam, quæ inter circumferentiam, & perpendicularem interijci potest, ipsum esse segmentum bc.

PROPOSITIO XXXIX.

Ex dato puncto in datum circulum rectam ducere, vt rectangulum sub segmentis æquale sit dato plano.



Ex dato puncto *a* in datum circulum *axd* rectam oporteat ducere *axy*, vt rectangulum sub segmentis *ax.xy* sit æquale rectangulo sub datis *g*, & *h*, vel, quod idem est, vt sint proportionales *g. ax. xy. h*. Ex *a* per centrum *c* recta ducatur *abcd*.

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*g.*	*ax.*	*xy.*	*h.*
Sive si fiant prop.	*ab.*	*ax.*	*xy.*	*am.*
Sed per 36.3.el. S.P.	*ad.*	*ay.*	*ax.*	*ab.*
Ergo ex æquo E.P.	*ad.*	*ay.*	*am.*	*xy,*
Et vt 1. ad 1. ita differ.	*ad.*	*ay.*	*md.*	*ax.*
Idest vt supra.	*ax.*	*ab.*		
Ergo solutum.				

CONS

CONSTR. & DEMONST.

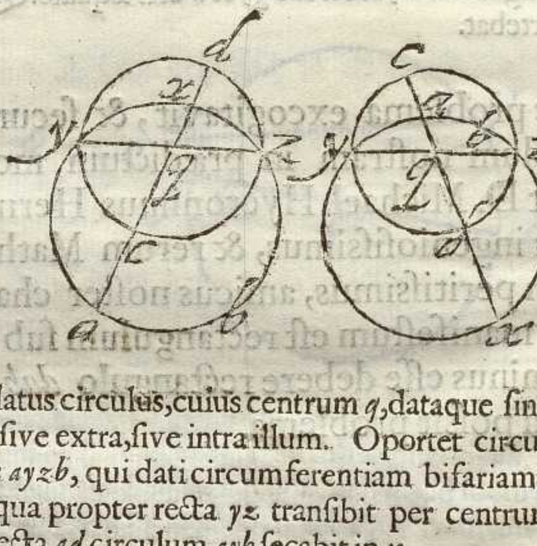
Fiat vt *ab* ad *g* ita *h* ad *am*, & inter *md*, & *ab* media inveniatur *ax*, quæ protrahatur ad *y*. Dico factum.

Cum enim ſit ex conſtr. *md* ad *ax*, vt *ax* ad *ab*, & per 36.3.el. *ad* ad *ay*, vt *ax* ad *ab*: erit ex æquo *ad* ad *ay*, vt *md* ad *ax*, & quia vt vnus ad vnum ita ſunt differentiæ, erit *ad* ad *ay*, ideſt *ax* ad *ab*, vt *am* ad *xy* quare rectangulum *axy* rectangulo *bam*, ideſt ſub *g*, & *h* erit æquale. Quod facere oportebat.

Hoc problema excogitavit, & ſecundum methodum noſtram in prædictum modum reſolvit D. Michael Hyeronimus Hernando iuvenis ingenioſiſsimus, & rerum Mathematicarum peritiſsimus, amicus noſter chariſsimus, & manifeſtum eſt rectangulum ſub datis *g*, & *h* minus eſſe debere rectangulo *dab*, vt conſtrui poſsit problema.

PROPOSITIO XXXX.

Dato circulo, datiſque duobus punctis, ſive extra, ſive intra illum: per data duo puncta circulum deſcribere, qui dati circuli peripheriam biſariam ſecet.



Sit datus circulus, cuius centrum *q*, dataque ſint puncta *a*, & *b*, ſive extra, ſive intra illum. Oportet circulum deſcribere *ayzb*, qui dati circumferentiam biſariam ſecet in *y*, & *z*, qua propter recta *yz* tranſibit per centrum *q*. Et ducta recta *ad* circulum *ayb* ſecabit in *x*.

ANALYSIS

	In circulo *cyd*. S.P.	*cq*.	*yq*.	*qz*.	*qd*.
35.3.*el*.	Et in circulo *ayx*. S.P.	*aq*.	*yq*.	*qz*.	*qx*.
	Ergo ex æquo E.P.	*aq*.	*cq*.	*qd*.	*qx*.

Ergo ſolutum.

CONS-

CONST. ET DEMONST.

Per *q* centrum ex vtrovis datorum puncto *a* recta ducatur *acqd*, & fiant proportionales *aq. cq. qd. qx*. Per puncta autem *x. a. b.* circulus describatur *axb*, secans priorem in puncto *y*, ex quo per *q* ducatur recta *yqz*. Dico circulum *axb* in punctis *y*, & *z* bifariam dividere circumferentiam circuli dati *cd*.

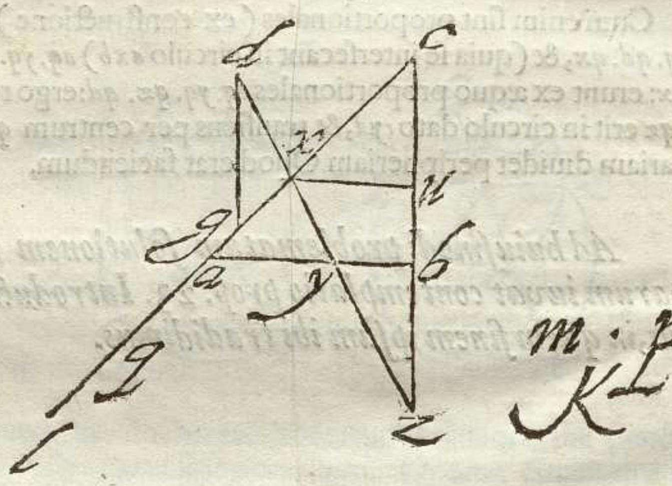
Cum enim sint proportionales (ex constructione) *aq. cq. qd. qx*, & (quia se intersecant in circulo *axb*) *aq. yq. qz. qx*: erunt ex æquo proportionales *cq. yq. qz. qd*: ergo recta *yqz* erit in circulo dato *cyd*, & transiens per centrum *q* bifariam diuidet peripheriam. Quod erat faciendum. ex conu. 35. lib. 3. el.

Ad huiusmodi problematum solutionem non parum iuvat contemplatio prop. 23. Introductionis, in quem finem ipsam ibi tradidimus.

PRO-

PROPOSITIO XXXXI.

Dato triangulo *abc*, ex dato extra illud puncto *d* rectam ducere *dxyz*, ita vt interceptæ *xy*, & *yz* sint in ratione data *m* ad *p*.



Ducatur *dg* ipsi *bc* parallela, hoc est angulum *d* angulo *z* æqualem facere, & ex puncto *x* ipsi *ab* parallela intelligatur *xv*.

CONDITIONES.

Ex condit. S.P.	*m*.	*p*.	*xy*.	*yz*.
Vel per 2.6.el.			*vb*.	*bz*.
Ob simil. *dgx*. *xcz*. S.P.	*dg*.	*gx*.	*cz*.	*xc*.
Ob simil. *abc*. *xvc*. S.P.	*ac*.	*bc*.	*ax*.	*vb*.

ANA-

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*m.*	*p.*	*vb.*	*bz.*	—
Et etiam.	*ac.*	*bc.*	*ax.*	*vb.*	
Fiant prop.	*k.*	*m.*			—
Ergo ex æquo E.P.	*p.*	*k.*	*bz.*	*ax.*	
Fiant prop.	*cb.*	*qa.*			
Ergo vt 1. ad 1. & E.P.	*p.*	*k.*	*cz.*	*qx.*	
Fiant prop.	*gd.*	*lq.*			—
Et sint etiam prop.	*dg.*	*gx.*	*cz.*	*xc.*	—
Ergo ex æquo E.P.	*lq.*	*qx.*	*gx.*	*xc.*	
Et per comp.	*lq.*	*lx.*	*gx.*	*gc.*	
Ergo solutum.					

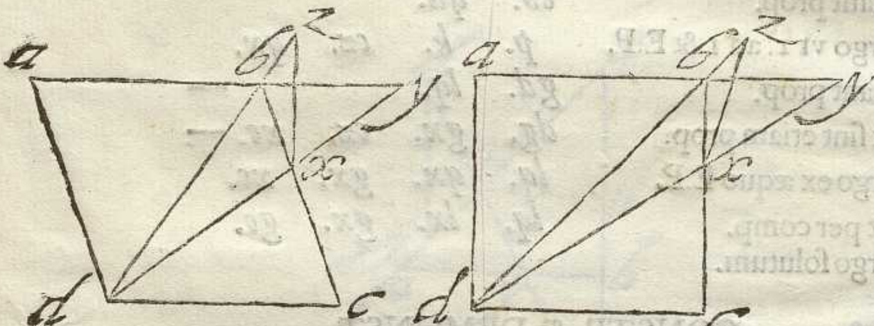
CONSTR. & DEMONST.

Ducatur *dg* ipsi *bc* parallela, & vt *bc* ad *ac* ita fiat *m* ad *k*, & vt *p* ad *k* ita *cb* ad *qa*, & ita *gd* ad *lq*, ipsisque *lq*, & *gc* reciprocæ inveniantur *lx*, *gx*, quarum differentia sit *lg*. Per *x* ducatur *dxyz*. Dico factum. Ducatur ipsi *ab* parallela *xv*.

Cum enim ex constr. sit *lq* ad *lx*, vt *gx* ad *gc*, & per divis. *lq* ad *qx* vt *gx* ad *xc*, & ob similitudinem triangulorum *dgx*. *xcz* sit *dg* ad *cz*, vt *gx* ad *xc*: erit ex æquo *dg* ad *lq*, idest *cb* ad *qa* vt *cz* ad *qx*, & (quia vt 1. ad 1. ita sunt differentiæ) *cb* ad *qa*, hoc est *p* ad *k*, vt *bz* ad *ax*. Est autem (ob similitudinem triangulorum *abc*. *xvc*) *ac* ad *bc*, idest *k* ad *m*, vt *ax* ad *vb*: ergo ex æquo erit *m* ad *p*, vt *vb* ad *bz* (Ratio communis *k*. *ax*.) idest *xy* ad *yz*. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXXII.

Dato quadrato, ſive rhombo *abcd*, ex angulo *d* ad oppoſitum protractum latus *ab* rectam ducere *dxy*, & facere *xy* æqualem rectæ datæ *m*.



ANALYSIS.

Sit igitur.	*xy*	$\underline{\;\wedge\;}$	*m*.	
Per 2.6.elem.S.P.	*ab*.	*by*.	*dx*.	*xy*. —
Fiat angulus	*dxz*	$\underline{\;\wedge\;}$	*dby*.	
Et ob ſimil. *dxz*. *dby*. E.P.	*db*.	*by*.	*dx*.	*xz*. —
Ergo ex æquo E.P.	*db*.	*ab*.	*xy*.	*xz*.
Sed angulus	*xbz*	$\underline{\;\wedge\;}$	*dby*, ſive *dxz*.	
Ergo ob ſimil. *dxz*. *xbz*. E.P	*dz*.	*xz*.	*xz*.	*bz*.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *db* ad *ab* ita *m* ad *g*, cui reciprocæ invenian-

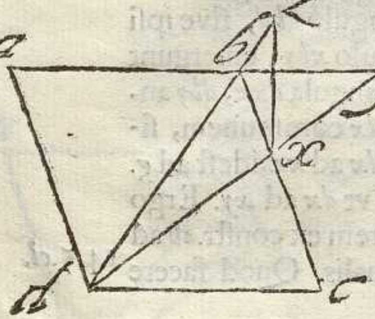
tur

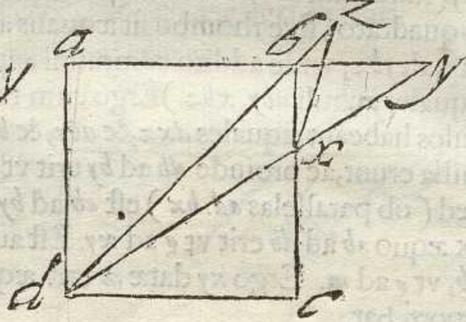
tur *dz. bz*, quarum differentia sit *db*. Ponatur ex puncto *z*. recta *zx* ipsi *g* æqualis,& per *x* ducatur *dxy*. Dico *xy* æqualem esse datæ *m*.

Cum enim ex constr. sit *dz* ad *g*, vt *g* ad *bz*, hoc est *dz* ad *xz*, vt *xz* ad *bz*: triangula erunt æquiangula *dzx*,& *bzx*, 5.6.*el.* eritque angulus *dxz* æqualis angulo *xbz*, hoc est angulo *dby* (sunt enim *dby*,& *xbz* anguli æquales, cum angulus *dbc* in quadrato, sive rhombo sit æqualis angulo *abd*, sive ipsi æquali *ybz*, vnde addito communi angulo *xby*, emergunt æquales anguli *dby. xbz.*) Ergo cum triangula *dxz*, *dby* angulos habeant æquales *dxz*,& *aby*; & *bdx* communem, similia erunt, ac proinde *db* ad *by* erit vt *dx* ad *xz*, idest ad *g*. Sed (ob parallelas *ad. bx*) est *ab* ad *by*, vt *dx* ad *xy*. Ergo ex æquo *ab* ad *db* erit vt *g* ad *xy*. Est autem ex constr. *ab* ad *db*, vt *g* ad *m*. Ergo *xy* datæ *m* erit æqualis. Quod facere 14.5.*el.* oportebat.

ALITER.

Aliter etiam problema ingredi possumus, videlicet per 4.6.elementorum.





ANALYSIS.

Per 4.6.el.S.P.	*ad.*	*dy.*	*bx.*	*xy.*
Fiat angulus.	*bzx* —Λ— *y*			
Et cum angulus.	*dby* —Λ— *xbz.*			
Similia erunt triang.	*dby.* Λ *xbz.*			
Et prop.	*db.*	*dy.*	*bx.*	*xz.*
Ergo ex æquo E.P.	*db.*	*ad.*	*xy.*	*xz.*
Et ob simil. *dzx. bzx.*	*dz.*	*xz.*	*xz.*	*bz.*
Ergo solutum.				

CONSTRVCTIO.

Vt antea.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ex constr. *dz* ad *g* est vt *g* ad *bz*, idest *dz* ad *xz*, vt *xz* ad *bz*: triangula erunt æquiangula *dzx*, & *bzx*, adeoque angulus *bxz* angulo *bdx* æqualis ; sed angulus

xbz

xbz æquatur angulo dby: ergo ſimilia erunt triangula dby, & xbz, & erit db ad dy, vt bx ad xz, ideſt ad g. Eſt autem (ob ſimilitudinem triangulorum ady. bxy) ad ad dy, vt bx ad xy: igitur ex æquo db ad ad erit vt xy ad g. Sed ex conſtr. eſt db ad ad, vt m ad g: ergo xy datæ m erit æqualis. Quod faciendum erat.

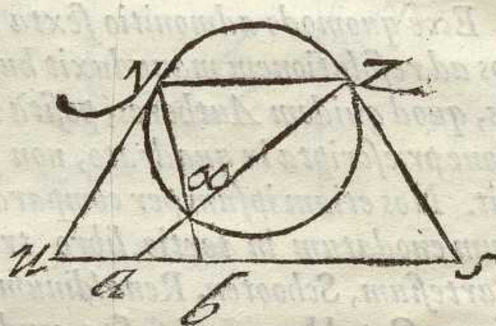
SCHOLION.

Ecce quomodo admonitio ſexta Introductionis nos ad reſolutionem manuduxit huius problematis, quod quidem Authores, poſitâ tantum conditione præſcripta in quadrato, non parum vexavit. Nos etiam ipſum per comparationem planorum enodatum in tertio libro trademus. Vide Carteſium, Schooten, Renaldinum, &c. Et Marinum Getaldum, qui poſita conditione in quadrato, aut rhombo problema reſoluit.

PROPOSIT. XXXXIII.

Vide Pappū lib. 7. pr. 105 Circulo positione dato *xyz*, & datis duobus punctis, extra illum, *a*, & *b*, ab ipsis si inflectatur *axb*, & producatur, facere *yz* ipsi *ab* parallelam.

Dato circulo, datisque punctis *a* & *b* : oportet quærere punctū *x*, per quod si ducantur *bxy*, & *axz* faciant *yz* ipsi *ab* parallelam.



ANALYSIS

Sint igit. parallelæ		*ab.*	*yz.*	
Et ob simil. *axb.yxz.* E.P.	*ab.*	*bx.*	*yz.*	*yx.*
Fiat angulus	*byv* —Λ— *yzx*, sive *bax.*			
Et E.P. ob simil. *ybv.yxz.*	*yz.*	*yx.*	*yb.*	*vb.*
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*bx.*	*yb.*	*vb.*
Et rectangulum	*abv* —Λ— *ybx*, vel quad. tan. *b.*			
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiat rectangulum *abv* æquale quadrato tangentis *b*, idest

ideſt eius, quæ ex *b* contingat circulum, ductaque tangente *vy*, iungatur *yb* ſecans circulum in *x*, & per *x* ducatur *axz*, & connectatur *yz*. Dico ipſam datæ *ab* eſſe parallelam.

Cum enim rectangula *abv*. *ybx* ſint inter ſe æqualia (quia vtrumque eſt æquale quadrato tangentis *b*, illud quidem ex conſtructione, hoc verò ex 36. 3 elem.) erit *ab* ad *bx*, vt *yb* ad *vb*, ac propterea triangula erunt æquiangula *abx*. *vby*, & angulus *v* angulo *x* æqualis. Sed (quia *vy* tangit, & *yb* ſecat) angulus *vyb* angulo *z* eſt æqualis: ergo triangula erunt ſimilia *vyb*. *yxz*, & *yz* ad *yx* erit vt *yb* ad *vb*: ergo ex æquo *ab* ad *bx* erit vt *yz* ad *yx*, ac proinde triangula erunt æquiangula *abx*. *xyz*, & angulus *abx* angulo *xyz* æqualis: igitur parallelæ erunt rectæ *ab*, & *yz*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint igitur parallelæ	*yz*. *ab*.	
Ergo angulus	*yza* —Λ— *baz*.	29.1.*el*.
Fiat angulus	*byv* —Λ— *yza*.	
Ergo angulus	*byv* —Λ— *baz*.	
Ergo in circulo ſunt	*y*. *x*. *a*. *v*.	22.3.*el*.
Ergo rectangulum	*vba* —Λ— *ybx*.	36.3.*el*.
Sed rectangulum	*ybx* —Λ— quad.tang. *b*.	36.3.*el*.
Ergo rectangulum	*vba* —Λ— quad.tang *b*.	
Ergo ſolutum.		

CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum *vba* quadrato tangentis *b* æquale, & ducatut tangens *vy*, iunctàque *yb* circulum ſecante in *x*,

duca-

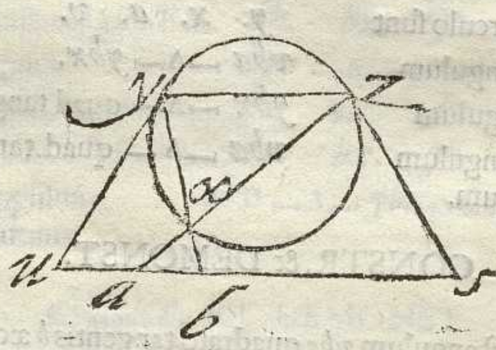
ducatur *axz*, & connectatur *yz*, quam dico datæ *ab* esse parallelam.

Cum enim rectangulum *vba* æquale sit quadrato tangentis *b*, cui etiam æquale est rectangulum *ybx*: erunt rectangula inter se æqualia *vba*, & *ybx*, quare puncta *y. x. a. v.* erunt in circulo: ergo angulus *byv* quadrilateri *yvax*, angulo externo *baz* erit æqualis, sed quia *vy* tangit, & *yb* secat, angulus *byv* æquatur angulo *yza*: ergo anguli alterni *yza. baz* inter se erunt æquales, & rectæ proinde *yz. ab.* parallelæ. Quod faciendum erat.

Hæc resolutio per lib. 3. elem. eamdem exhibet constructionem, quâ Pappus vsus est.

ALITER.

Profecto quando angulus *byv* factus supponebatur æqualis angulo *yza*; pari iure supponi poterat angulus *azs* angulo *byz*, siue *aby* æqualis, vnde in hunc modum variari poterat.



ANA-

ANALYSIS.

Sit igitur parallelæ	*ab.*	*yz.*			
Ergo ob simil. *axb.yxz*. E.P	*ab.*	*ax.*	*yz.*	*xz.*	
Fiat angulus	*azs* —Λ— *byz.*				
Et ob simil. *azs.yxz*. E.P.	*yz.*	*xz.*	*az.*	*as.*	
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*ax.*	*az.*	*as.*	
Et rectangulum	*bas* —Λ— *zax*, sive quad.tang. *a.*				

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio. Etiam per 3.lib.elem.instituí poterit.

ANALYSIS.

Sint igitur parallelæ	*yz.*	*ab.*			
Ergo angulus	*byz* —Λ— *yba.*				29.1.*el.*
Fiat angulus	*azs* —Λ— *byz.*				
Ergo angulus	*azs* —Λ— *yba.*				
Ergo in circulo sunt puncta	*z.*	*x.*	*b.*	*s.*	22.3.*el.*
Ergo rectangul. (36.3.*el.*)	*sab* —Λ— *zax*, sive quad.tang. *a.*				

Ergo solutum, & manifesta constructio, & demonstratio.

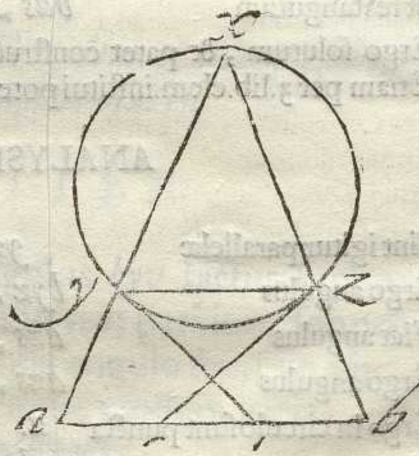
PRO-

PROPOSIT. XXXXIV.

Vide Pappi l.7. propos.107

Circulo positione dato *xyz*, & datis duobus punctis (extra illum) *a*, & *b*: inflectere *axb*, & facere *yz* ipsi *ab* parallelam.

Hoc problema parum, vel nihilo differt ab antecedente.



ANALYSIS.

	Sint igitur parallelæ	*yz.*	*ab.*
	Fiat angulus	*vyz* —Λ—	*x.*
29.1.*el.*	Sed ob parallelas, angulus	*vyz* —Λ—	*yva.*
	Ergo angulus	*yva* —Λ—	*x.*
22.3.*el.*	Ergo in circulo sunt	*x. y. v.*	*b.*
36.3.*el.*	Ergo rectangulum	*bav* —Λ—	*xay.*
36.3.*el.*	Sed rectangulum	*xay* —Λ—	quad.tang.*a.*
	Ergo rectangulum	*bav* —Λ—	quad.tang.*a.*
	Ergo solutum.		

CON-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat rectangulum *bav* æquale quadrato, tangentis *a*, ideſt eius rectæ, quæ à puncto *a* circulum contingit, & ducatur tangens *vy*, per *y* autem ducatur *ax*, iungaturque *xb* ſecans, circumferentiam in *z*, & connectatur *yz*. Dico *yz* ipſi *ab* eſſe parallelam.

Quoniam igitur rectangulum *bav* æquale eſt quadrato contingentis *a*. (ideſt eius, quæ à puncto *a* circulum contingit) & eidem quadrato æquale eſt rectangulum *xay*: æqualia erunt rectangula *bav*. *xay*, & ideo puncta *x*. *y*. *v*. *b*. erunt in circulo, & anguli *yva*, & *x* æquales (quandoquidem externus *bvy*, & *x* duobus rectis æquãtur) ſed angulus *vyz* angulo *x* eſt æqualis (quia *vy* tangit, & *yz* ſecat) ergo æquales erunt inter ſe anguli *vyz*. *yva*, adeoque parallelæ *yz*. *ab*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint igitur parallelæ		*yz*.	*ab*.
Fiat angulus		*yzs* —Λ—	*x*.
Sed ob parallelas, angulus		*yzs* —Λ—	*zsb*.
Ergo angulus	—Λ—	*zsb* —Λ—	*x*.
Ergo in circulo ſunt		*x*. *z*. *s*.	*a*.
Ergo rectangulum		*abs* —Λ—	*xbz*.
Sed rectangulum	—Λ—	*xbz* —Λ—	quad. tang. *b*.
Ergo rectangulum	—Λ—	*abs* —Λ—	quad. tang. *b*.

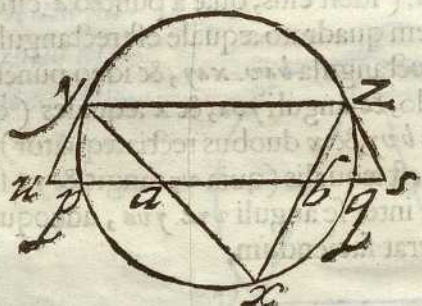
Ergo ſolutum, & patet conſtructio, ex qua eadem *yz* provenit.

Per proportionales etiam duobus modis variari poterit analyſis.

Ff PRO-

PROPOSIT. XXXXV.

Vide Pappū l.7. propos.108 Circulo *xyz* poſitione dato, & datis duobus punctis (intra illum) *a*, & *b*. ab ipſis inflectere *axb*, & facere *yz* ipſi *ab* parallelam.



ANALYSIS.

Sint igitur parallelæ —— *yz*. *ab*.
Ergo angulus —Λ— *yzx* —Λ— *abx*.
Fiat angulus —Λ— *xyv* —Λ— *yzx*.
Ergo angulus —— *xyv* —Λ— *abx*.
ex conv. Ergo in circulo ſunt —— *y*. *v*. *x*. *b*.
22.3.el. Ergo rectangulum —Λ— *yax* —Λ— *vab*.
35.3.el. Sed rectangulum —Λ— *yax* —Λ— cuilibet per *a*
35.3.el. Ergo rectangulum *vab* —Λ— cuilibet per *a*
Ergo ſolutum.

CON-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat rectangulum *vab* æquale cuilibet per *a*, puta *paq*, & ducatur contingens *vy*. Per *a* ducatur *yx*, & *xz* per *b*, iungaturque *yz*. Dico *yz* ipsi *ab* parallelam esse.

Quoniam enim rectangulum *vab* rectangulo *yax* (idest *paq*) est æquale, erunt puncta *y. v. x. b.* in circulo. Quare anguli *xyv. abx* (super eamdem *vx*) æquales erunt; sed quia *vy* tangit, & *yx* secat, angulus *vyx* angulo *yzx* est æqualis: igitur, & æquales erunt anguli *yzx. abx*, ac propterea *yz. ab* parallelæ. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint igitur parallelæ	*yz.* *ab.*
Ergo angulus	*xyz* —Λ— *xab.*
Fiat angulus	*xzs* —Λ— *xyz.*
Ergo angulus	*xzs* —Λ— *xab.*
Ergo in circulo sunt	*a. x. s. z.*
Ergo rectangulum.	*abs* —Λ— *xbz,*
Sed rectangulum	*xbz* —Λ— cuilibet per *b.*
Ergo rectangulum	*abs* —Λ— cuilibet per *b.*

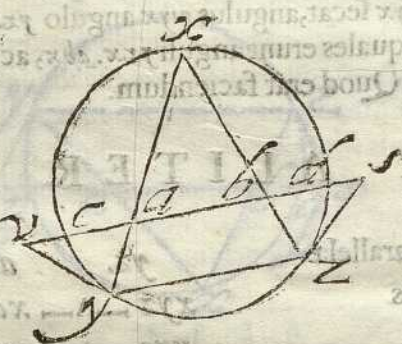
Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

Etiam per proportionales duobus modis problema expediri poterit.

PROPOSIT. XXXXVI.

Vide Pappi l. 7. propos. 109

Circulo positione dato *xyz*, & datis duobus punctis (intra illum) *a*, & *b*, inflectere *axb*, ita vt *yz* sit parallela ipsi *ab*.



ANALYSIS

Sint igit. parallelæ	*yz*.	*ab*.
Ergo angulus	*abx* —Λ— *yzx*.	
Fiat angulus	*ayv* —Λ— *abx*.	
Ergo angulus	*ayv* —Λ— *yzx*.	
Et in circulo sunt	*x*. *v*. *y*. *b*.	
Ergo rectangulum	*vab* —Λ— *xay*.	
Sed rectangulum	*xay* —Λ— cuilibet per *a*.	
Ergo rectangulum	*vab* —Λ— cuilibet per *a*.	
Ergo solutum.		

CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum *v a b* æquale cuilibet per *a* (puta *cad*) Ducatur tangens *vy*, & per *a* recta *yx*, & per *b* recta *xz*, iungaturque *yz*. Dico *yz*. *ab* esse parallelas.

Quoniam igitur rectangulum *v a b* factum est æquale cuilibet per *a* (quale est *caa*) & eidem æquale est rectangulum *x a y*: æqualia erunt rectangula *vab*. *xay*, quapropter puncta *x*. *v*. *y*. *b*. erunt in circulo, & anguli *ayv*. *abx* (super eamdem *xv*) æquales inter se, sed quia *vy* tangit, & *xy* secat, angulus *ayv* angulo *yzx* est æqualis: igitur æquales erunt anguli *yzv*. *abx*, adeoque parallelæ *yz*. *ab*. Quod erat faciendum.

Etiam hoc modo eadem proveniet yz.

ALITER.

Sint igitur parallelæ	*ab*. *yz*.	
Ergo angulus	*bax* —Λ— *zyx*.	
Fiat angulus	*szb* —Λ— *zyx*.	
Ergo angulus	*szb* —Λ— *bax*.	22.3.*el.*
Et in circulo sunt	*x*. *a*. *z*. *s*.	35.3.*el.*
Ergo rectangulum	*abs* —Λ— *xbz*.	
Sed rectangulum	*xbz* —Λ— cuilibet per *b*.	
Ergo rectangulum	*abs* —Λ— cuilibet per *b*.	

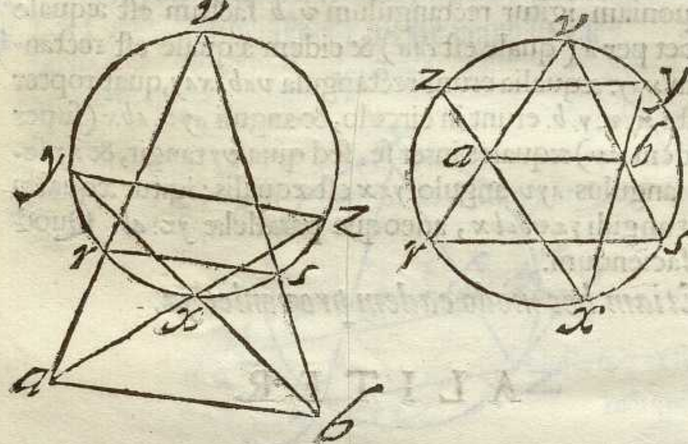
Ergo solutum, cum rectangulum *abs* fieri possit æquale cuilibet per *b*, quale est *cbd*.

PRO-

PROPOSIT. XXXXVII.

Vide Vietam in Apollon. Gallo probl. 8.

Datis duobus punctis, & circulo, per data duo puncta circulum describere, qui datum contingat.



Hoc problema duas admittit solutiones, sive extra, sive intra circulum dentur puncta.

Sint data puncta *a. b.* (extra, vel intra) & datus circulus *yxz.*

ANALYSIS.

Esto *x* punctum contactus: ergo si per *x* protrahantur ad circumferentiam (vti factum est in antecedentibus) rectæ *az*, *by*, ita vt iuncta *yz* sit ipsi *ab* parallela: erunt ttiangula *axb. yxz* sub eodem vertice *x* similia, ac proinde circulus, qui per puncta *a.x.b.* descriptus fuerit, circulum *yxz* contingét in *x.* vt petitur.

prop.22 Introd.

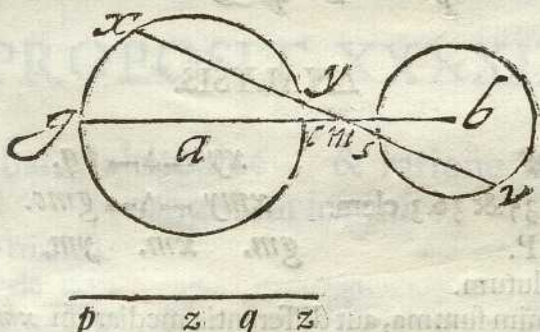
Eodem modo sit *v* punctum contactus: ergo si inflectatur *avb*, ita vt iuncta *rs* eidem *ab* sit parallela: erunt triangula *avb. rvs* sub eodem vertice *v* similia, & circulus, qui per puncta *a.v.b.* descriptus fuerit circulum *yxz* continget in *v.* vt petitur.

Ergo solutum est problema, & manifesta constructio, & demonstratio.

PRO-

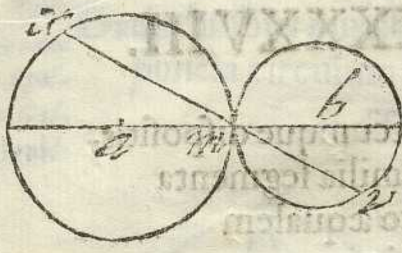
PROPOSIT. XXXXVIII.

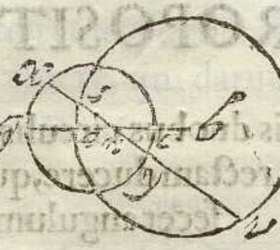
Datis duobus circulis, vtcumque dispositis, rectam ducere, quæ similia segmenta secet angulum dato æqualem capientia.

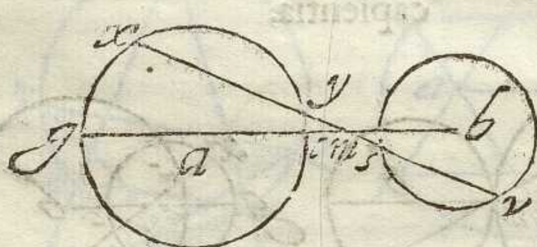


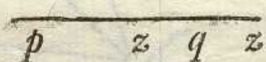
Sint duo circuli se non contingentes *xy*, & *sv*, quorum centra *a*, & *b*, iungatur *ab*, & in ratione semidiametrorum dividatur in *m*. Et per *m* rectam oporteat ducere *xv*, quæ segmenta secet *xy*, & *sv* angulum capientia dato *d* æqualem.

Producatur *am*, & fiat diameter *gc*; à circulo autem *xy* segmentum abscindatur capiens angulum dato æqualem, sitque ipsius subtensa recta *pq*. ANA-









ANALYSIS.

Sit igitur *xy* —Λ— *pq*.
Sed per 35.& 36.3.elem. *xmy* —Λ— *gmc*.
Ergo E.P. *gm*. *xm*. *ym*. *mc*.
Ergo solutum.

Est enim summa, aut differentia mediarum *xm*, & *ym* semper nota, videlicet *xy*, ideſt *pq*, summa quidem si circuli se secuerint, differentia vero si se non secuerint.

CONST. ET DEMONST.

Fiant quæ iam dicta sunt, & ipsis *gm*, & *mc* reciprocæ inveniantur *pz*, & *zq* quarum summa sit *pq* (si circuli se secuerint) vel *pz*, & *qz*, quarum differentia sit ipsa *pq* (si non

non se secuerint) & ex puncto *m* aptetur *mx* ipsi *pz* æqualis, & producatur ad *v*, secans circulum *xy* in *x*, & *y*, circulum vero *sv* in *s*, & *v*. Dico segmenta *xy*, & *sv* angulos capere dato æquales.

Quoniam igitur ex constructione est *gm* ad *pz*, vt *zq* ad *mc*: erit rectangulum *pzq* æquale rectangulo *gmc*; sed rectangulo *gmc* æquale est rectangulum *xmy*: ergo rectangula erunt æqualia *pzq*, & *xmy*, & quoniam *xm* facta est æqualis ipsi *pz*, æquales erunt *xy*, & *pq*; sed *pq* segmentum subtendit, quod angulum capit dato æqualem: ergo segmentum *xy* etiam eumdem angulum capiet, & similiter segmentum *sv*, quia similia sunt segmenta *xy*, & *sv*, cum recta *xv* transeat per *m* punctum, in quo recta, quæ centra iungit *ab* divisa est in ratione semidiametrorum. *prop. 24 Introd.*

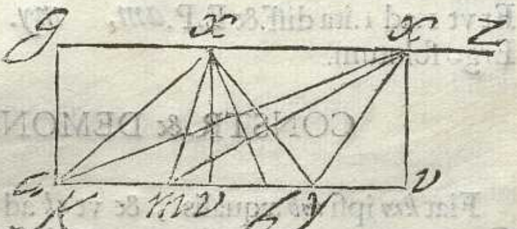
Si circuli se tetigerint in *m*, & ex *m* aptetur *mx* ipsi *pq* æqualis, & protrahatur ad *v* factum erit. Datis igitur duobus circulis vtcumque dispositis, &c. Quod faciendum erat.

PROPOSIT. XXXXIX.

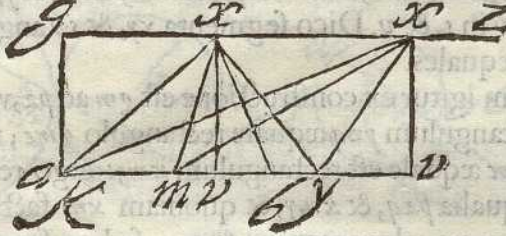
Data base, altitudine, & ratione laterum triangulum invenire.

Vide Vietam appendicula 1

Esto triangulum, de quo quæritur *axb* super data base *ab* in altitudine data *ag*, & ratio laterum *ax*. *xb* sit data, vt *am* ad *mb*.



Ipsi *ab* parallela ducatur *gz*, & iungatur *xm*, quæ bifariam dividet angulum *axb*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xb.*	*am.*	*mb.*
Ergo per 3.6. el. angulus.	*mxb* —Λ— *axm.*			
Fiat angulus	*bxy* —Λ— *bax.*			
Et erit angulus	*mxy* —Λ— *axm* + *bax.*			
Ideſt externo			*ymx.*	
Ergo per 6.1. el.	*xy* —Λ— *my.*			
Sed ob ſimil. *axy. bxy.* S.P.	*ay.*	*xy.*	*xy.*	*by.*
Ideſt		*my.*	*my.*	
Et divid.	*am.*	*my.*	*mb.*	*by.*
Fiat *km* —Λ— *mb*			*km.*	
Et vt 1. ad 1. ita diff. & E.P.	*am.*	*my.*	*ak.*	*mb.*
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONST.

Fiat *km* ipſi *mb* æqualis, & vt *ak* ad *mb* ita *am* ad *my*. Centro autem *y* intervallo *my* arcus deſcribatur, qui ſi non peruenerit ad rectam *gz*, problema reddet impoſsibile, ſi vero ipſam tetigerit, vnicam dabit ſolutionem, duplicem tandem ſi ſecuerit. Secet iam in punctis *x*. *x*, & iungantur

$ax . mx . bx$. Dico triangula axb esse de quibus quæritur.

Estenim ex constr. am ad my, vt ak ad mb, & (quia vnus ad vnum est vt differentiæ) erit am ad my, vt km, idest mb ad by, & compon. ay ad my, vt my ad by, hoc est ex constr. ay ad xy, vt xy ad by: ergo triangula $axy . bxy$ (quæ circa communem angulum latera habent proportionalia) erunt æquiangula, adeoque angulus bxy angulo bax erit æqualis; sed (ob æquales $my . xy$) angulus mxy æqualis est angulo ymx, siue internis axm, & bax: ergo (auferendo æqualia ab æqualibus) remanebunt anguli æquales axm, & mxb, quare ax ad xb erit vt am ad mb. Quod facere oportebat.

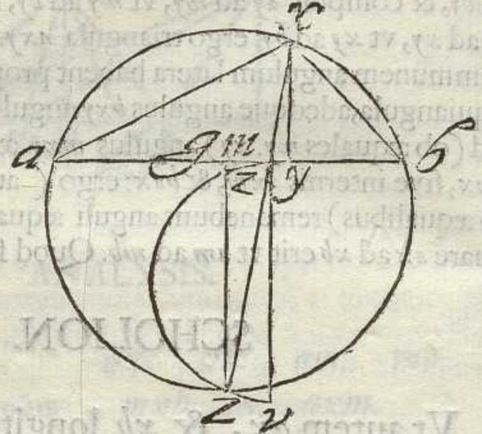
SCHOLION.

Vt autem ax, & xb longitudine innotescant, demittatur perpendiculum xv, quod longitudine notum erit, vtpote æquale rectæ longitudine datæ ag, & in triangulo mxy, cuius latera $my . xy$. cognoscuntur, nota fient segmenta $mv . vy$. & exinde $av . vb$, & consequenter $ax . xb$.

ALITER.

Esto triangulum, de quo quæritur *axb* super data base *ab*, in altitudine *xy* datæ *h* æquali, cuius latera *ax*. *xb*. sint in data ratione vt *am* ad *mb*.

Circumscribatur circulus, & ducatur *xmz*, quæ bifariã dividet angulum *axb*.



ANALYSIS *h*

Sint igitur prop.	*ax*.	*xb*.	*am*.	*mb*.
Ergo angulus.		*axz* ⊥∧⊥ *zxb*.		
Et S.P.	*am*.	*mx*.	*mz*.	*mb*.
Fiat angulus		*zmv* ⊥∧⊥ *mxy*.		
Et ob simil. *mxy*. *mzv*. E.P.	*xy*.	*mx*.	*mz*.	*mv*.
Idest	*h*.			
Ergo ex æqual. E.P.	*h*.	*am*.	*mb*.	*mv*.
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *h* ad *am* ita *mb* ad *mv*, quæ datæ *ab* perpendicularis ponatur, & super ipsam semicirculus describatur *vzm*. Si igitur bisectã *ab* in *g*, demissa perpendicularis *gz* ipsum semicirculum nec tangat, nec secet, construi non poterit problema, si tetigerit vnica erit resolutio, duplex verò si secuerit. Secet iam in punctis *z*. *z*. & per puncta *a*. *z*. *b*.

cir-

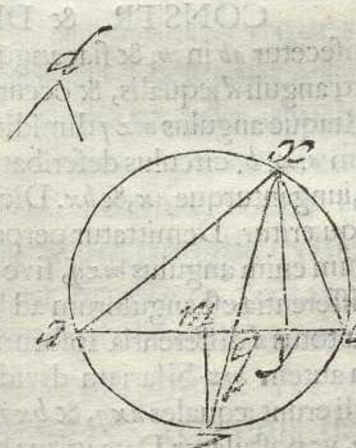
circulus deſcribatur, ductaque per m recta zmx, iungantur ax. xb. & demittatur perpendicularis xy. Dico triangula axb eſſe de quibus quæritur.

Sunt enim ex conſtr. triangula ſimilia mzv. mzg, & mxy, quare xy ad mx eſt vt mz ad mv, & quoniam puncta a. x. b. z. ſunt in circulo, eſt am ad mx, vt mz ad mb: ergo ex æquo erit xy ad am vt mb ad mv; ſed ex conſtr. eſt h ad am, vt mb ad mv, æqualis igitur erit xy datæ h. Et quoniam gz rectam ab bifariam ſecat, & ad angulos rectos, erunt arcus az. zb, ideſt anguli axz. bxz æquales, ac proinde ax ad xb erit vt am ad mb. Triangulum igitur iam oxygonium, iam ambligonium exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

Ecce incidimus in ingenioſam ſolutionem Vietæ tranſpoſitione cuiuſdam anguli.

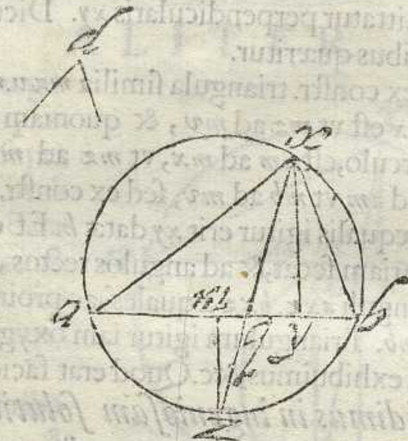
PROPOSITIO L.

Data baſe, ratione laterum, & differentia angulorum ad baſim: triangulum conſtituere.



Sit triangulum, de quo quæritur axb, cuius baſis ab ſit data, & ratio laterum, vt aq ad qb, differentia autem angulorū ad baſim ſit datus angulus d. Ergo ſi ducatur qx bifariam dividet angulū axb, eritque, ductà perpendiculari xy, angulus qxy ſemidifferentia angulorum ad baſim, adeoque æqualis dimidio anguli dati d. Biſecetur ab in m.

prop.16 Introd.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	ax.	xb	aq.	qb.
Fiat angulus	mzq	—∧—	qxy.	
Sed angulus	qxy	—∧—	$\frac{1}{2}d$.	
Ergo angulus	mzq	—∧—	$\frac{1}{2}d$.	
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Biſecetur ab in m, & fiat angulus mqz dimidio complementi anguli d æqualis, & occurrat qz perpendiculari mz in z. Itaque angulus mzq dimidio d erit æqualis. Per puncta autem $a.$ $z.$ $b.$ circulus deſcribatur azb, & protrahatur zq ad x, iunganturque ax, & bx. Dico triangulum axb eſſe, de quo quæritur. Demittatur perpendicularis xy.

Cum enim angulus mzq, ſive ipſi æqualis qxy (qui ſemi differentia eſt angulorum ad baſim) æqualis ſit dimidio d: erit totus d differentia ipſorum angulorum, vt petitur. Cum autem mz bifariam dividat circumferentiam azb, anguli erunt æquales axq, & bxq, adeoque ax ad xb, vt aq ad qb, vt poſtulatur. Data igitur baſe, &c. Quod erat faciendum.

ANA-

ANALYSIS GEOMETRICA.

LIB. II.

AGENS ADHVC DE RESOLVTIONE PER PROPORTIONALES.

INSTRUCTIO

LIber primus per ſimplices rectas proportionales problematum ſolutionem expedivit. Hic autem ſecundus liber id ipſum proſequitur, & problemata enodare aggreditur, quorum alia per argumenta rationis compoſitæ commodiſsimè reſolvuntur; alia ex ſola conſtitutione terminorum datorum, apparent reſoluta. Itaque ſi duo plana duabus rectis (vel etiam duobus planis) proportionalia exiſtant, neque per 1.6. elem. ad ſimplices rectas ipſa plana revocari poſsint; adhibendæ erunt argumentationes rationis compoſitæ. At vero ſi, propoſito problemate, ex terminis datis, figura conſtitui poſsit, cui ſimilis ſit figura quæ-

quæsita (quod quidem sæpius accidere solet) constituenda erit similitudo, & per rationem compositam , vel ex similitudine arguendo problema facillimè enodabitur.

PROPOSITIO I.

Datam rectam *ac*, sectam in *b*, rursus secare in *x*, inter *a*, & *b*, vt quadratum *ax* ad rectangulum *xbc* sit vt *f* ad *g*, sive vt *ga* ad *bc*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axa.*	*xbc.*	*ga.*	*bc.*
Ergo producendo	*axa:bc*	$\sqcup\!\Lambda\!\sqcup$	*xbc:ga.*	
Et deprimendo per *bc.*	*axa*	$\sqcup\!\Lambda\!\sqcup$	*xb:ga.*	
Et dissolvendo E.P.	*ga.*	*ax.*	*ax.*	*xb.*
Et per compos.	*ga.*	*gx.*	*ax.*	*ab.*
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Ipsis *ga*, & *ab* reciprocæ inveniantur *gx*, & *ax*, quarum differentia sit *ga*. Dico factum.

Cum enim sint ex constr. proportionales *ga. gx. ax. ab*, & per divis. *ga.ax.ax.xb*: erit quadratum *ax* rectangulo sub *ga*, & *xb* æquale, & elevando per *bc*, erit factum sub *ax.ax.*

bc æquale facto sub *ga. xb. bc*, vnde dissolvendo erunt proportionalia *axa. xbc. ag. bc*. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Hanc methodum deprimendi, & elevandi magnitudines non omnibus, in problematibus omnino planis, placituram puto; ipsa tamen naturalissima videtur, nam, præter quam doctrinæ solidorum facile aptari potest, per simplicem considerationem quatuor proportionalium demonstratur, quandoquidem, si duo facta æqualia, æquiangula fuerint, quomodocumque poterunt in terminos proportionales dissolvi, qui si producantur eadem facta restituant. Maximè cum hæc methodus non exigat, vt ipsa solida construantur (quod quidem improprium, & molestum in problemate plano à Geometris meritò iudicatur) sed solum constructa concipit, & planam omnino constructionem instituendam docet. Cum tamen analysim nostram omnes modos resolvendi amplecti credamus, alias afferemus solutiones.

ALITER.

g a x b c

Vide argum. alternationis in Introd. pag. 17.

Sint prop.	*axa.*	*xbc.*	*ga.*	*bc.*
Sive permut.dimenſ.	*ax.*	*xb.*	*bc:ga.*	*bc:ax.*
Ideſt per 1.6.elem.	*ax.*	*xb.*	*ga.*	*ax.*
Ergo per compoſ.E.P.	*ax.*	*ab.*	*ga.*	*gx.*

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipſis *ab. ag* reciprocæ inveniantur *ax. gx*, quarum differentia ſit *ga*. Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſit *ax* ad *ab*, vt *ga* ad *gx* : erit per diviſ. *ax* ad *xb*, vt *ga* ad *ax*, ſive vt rectangulum ſub *ga*, & *bc* ad rectangulum ſub *ax*, & *bc*: ergo permutando dimenſiones, erit quadratum *ax* ad rectangulum *xbc* vt *ga* ad *bc*. Quod erat faciendum.

Aliter ex ratione compoſita.

g a x b c

	Sint igit. prop.	*axa. xbc. ga. bc.*
num. II	Ideſt vt	*ax.xb*, & *ax.bc* ita *ga. bc.*
num. I.	Et invert. vt	*ax.xb.* ita *ga. bc.* & *bc.ax.*
de ratio	Ideſt vt	*ax.xb.* ita *ga.* *ax.*
ne com-	Et per comp. vt	*ax.ab* ita *ga.gx.*
poſita in	Ergo ſolutum.	
Introd.		

CONS-

CONSTR. & DEMONST.

Ipſis *ab*, & *ga* reciprocæ inveniantur *ax*, & *gx*, quarum differentia ſit *ga*. Dico factum.

Eſt enim ex conſtr. *ax* ad *ab*, vt *ga* ad *gx*, & per diviſ. *ax* ad *xb*, vt *ga* ad *ax*, vel vt *ga* ad *bc*, & *bc* ad *ax* : ergo invert. erit *ax* ad *xb*, & *ax* ad *bc*, hoc eſt quadratum *ax* ad rectangulum *xbc*, vt *ga* ad *bc*. Quod erat faciendum.

Aliter ex 1.6. elem.

g a x b c

Sint igit. prop.	*axa. xbc. ga. bc.*
Fiat rectangulum	*ga:xb* —Λ— *axa.*
Ideſt fiant prop.	*ga. ax. ax. xb.*
Et per comp. E.P.	*ga. gx. ax. ab.*
Ergo ſolutum.	

CONST. ET DEMONST.

Ipſis *ga*. & *ab* reciprocæ inveniantur *gx*, & *ax*, quarum differentia ſit *ga*, hoc eſt fiant proportionales *ga. gx. ax. ab*, & per diviſ. *ga. ax. ax. xb*, & erit rectangulum ſub *ga*, & *xb* æquale quadrato *ax*: ergo quadratum *ax*, ideſt rectangulum ſub *ga*, & *xb* ad rectangulum *xbc* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *ga* ad *bc*. Quod erat faciendum.

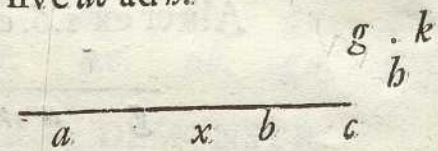
N O T A.

Hunc vltimum modum reſolvendi præferendum exiſtimo, cum niſi neceſſitas vrgeat ad ſolida aſcendere, vel ad rationem compoſitam recurrere non deceat.

PROPOSIT. II.

Vide Renaldin. pag. 487. pag. 461.

Datam rectam *ac*, sectam in *b*, rursus secare in *x*, inter *a*, & *b*, vt rectangulum *cax* ad rectangulum *xbc* sit in ratione data *g* ad *k*, sive *ac* ad *h*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop. *cax. xbc. ac. h.*
Ergo si fiat *xbc* —∧— *ax : h.*
Erit solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *bc* ad *h* ita *ax* ad *xb*, hoc est dividatur *ab* in *x* in ratione *bc* ad *h*, & erit rectangulum sub *ax*, & *h* æquale rectangulo *xbc*. Ergo rectangulum *cax* ad *xbc*, idest ad rectangulum sub *ax*, & *h* (ob eamdem altitudinem *ax*) erit vt *ac* ad *h*. Quod erat faciendum.

A L I T E R.

Sint igit. prop. *cax. xbc. g. k.*
Hoc est vt *ac. bc.* & *ax. xb.* ita *g. k.*
Et invert. vt *ax. xb.* ita *g. k* & *bc. ac.*
Ergo solutum.

num. II deratione composit.

CONS-

CONSTR. & DEMONST.

Fiat *ax* ad *xb* vt *g* ad *k*, & *bc* ad *ac* (hoc est vt rectangulum sub *g*, & *bc* ad rectangulum sub *k*, & *ac*) & erit invertendo *ac* ad *bc*, & *ax* ad *xb*, ideſt rectangulum *cax* ad rectangulum *xbc*, vt *g* ad *k*. Quod erat faciendum.

ALITER.

Sint prop.	*cax*.	*xbc*.	*ac*.	*h*.
Sive permut. dimens.	*ax*.	*xb*.	*ac*:*bc*.	*h*:*ac*.
Ideſt per 1.6.el.	*ax*.	*xb*.	*bc*.	*h*.
Ergo ſolutum.				

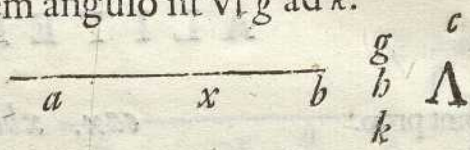
CONSTR. & DEMONSTR.

Dividatur *ab* in *x*, vt *ax* ad *xb* ſit vt *bc* ad *h*, ſive vt rectangulum ſub *ac*: & *bc* ad rectangulum ſub *h*, & *ac* , & erit permutando dimenſiones rectangulum *cax* ad rectangulum *xbc*, vt *ac* ad *h*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO III.

Datam rectam ab ita secare in x, vt parallelogrammum sub ax, & data g, in angulo dato c ad parallelogrammum sub xb, & data h in eodem angulo sit vt g ad k.



ANALYSIS.

Sint igit. prop. $ax:g.\quad xb:h.\quad g.\quad k.$
Ergo si fiat $ax:k \ \_\Lambda\_ \ xb:h.$
Factum erit quod petitur.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt h ad k ita ax ad xb; & in angulo dato c æquali, fiant parallelogramma tum sub ax, & g, tum sub xb, & h. Dico ipsa esse, vt g ad k.

Cum enim ex constr. sit vt h ad k ita ax ad xb: erunt parallelogramma æqualia sub ax, & k, atque sub xb, & h: ergo parallelogrammum sub ax, & g ad parallelogrammum sub xb, & h, idest sub ax, & k (ob eamdem altitudinem ax) erit vt g ad k. Quod erat faciendum.

Etiam permutando dimensiones, vel invertendo rationes expediri poterit problema vt factum est in antecedentibus.

PROPOSITIO IV.

Datam rectam *ab* secare in *x*, vt differentia quadratorum *ax*, & *xb* ad rectangulum *axb* sit vt *p* ad *q*, seu vt *ab* ad *ga*. *Vide Renald. tom. 2. pa. 478. & 517.*

k g a m x b

Dividatur *ab* bifariam in *m*, & erit 2*mx* differentia partium *ax*, & *xb*, eritque rectangulum sub *ab*, & 2*mx* (videlicet sub aggregato, & differentia laterum) æquale differentiæ quadratorum *ax*, & *xb*. Fiat *ka* dupla ipsius *ga*. *Per 7. Introd.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ab:2mx. axb. ab. ga.*
Ergo si fiat	*ga:2mx* —∧— *axb.*
Factum erit quod postulatur.	
Sint ergo prop.	*ga. ax. xb. 2mx.*
Et duplic. & dimid.	*ka. ax. xb. mx.*
Et per comp.	*ka. kx. xb. mb.*
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONST.

Fiat *ka* dupla ipsius *ga*, & rectis *ka*, & *am* (seu *mb*) reciprocæ inveniantur *kx*, & *xb*, quarum summa sit *kb*. Itaque proportionales erunt *ka. kx. xb mb*, & per divis. *ka. ax. xb. mx*, & dimidiando, & duplicando *ga. ax. xb. 2mx*: ergo rectangulum sub *ga*, & 2*mx* rectangulo *axb* erit æquale.

le. Ergo rectangulum ſub ab, & $2mx$, ideſt differentia quadratorum ax, & xb, ad rectangulum axb, ideſt ſub ga, & $2mx$ (ob eamdem altitudinem $2mx$) erit vt ab ad ga. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO V.

Datam rectam *ab* dividere in *x*, vt rectangulum ſub differentia partium *ax*, & *xb*, & data *ga* ad rectangulum ſub ipſis partibus conſtitutam habeat rationem vt *p* ad *q*, ſive vt *ga* ad *ha*.

k g h a m x b

prop. 7. Introd. Dividatur ab bifariam in m, & erit $2mx$ differentia partium ax, & xb: ergo conditio eſt vt rectangulum ſub ga, & $2mx$ ad rectangulum axb ſit vt ga ad ha. Fiat ka dupla ipſius ha.

ANALYSIS

Sint igit. prop.	$ga{:}2mx.\quad axb.\quad ga.\quad ha.$
Ergo ſi fiat	$axb \;\underline{\;\Lambda\;}\; ha{:}2mx.$
Solutum erit	
Sint ergo prop.	$2mx.\quad xb.\quad ax.\quad ha.$
Et dimid. & duplic.	$mx.\quad xb.\quad ax.\quad ka.$
Ergo comp. E.P.	$mb.\quad xb.\quad kx.\quad ka.$
Ergo ſolutum.	

CONS-

CONSTR. & DEMONST.

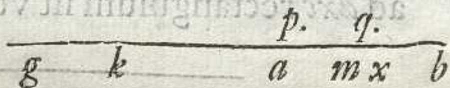
Fiat *ka* dupla ipsius *ha*, ipsisque *ka*, & *am* (idest *mb*) reciprocæ inveniantur *xb*, & *kx*, quarum summa sit *kb*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales *mb. xb. kx. ka*, & divid. *mx. xb. ax. ka*, & duplicando, & dimidiando *2mx. xb. ax. ha*: erit rectangulum sub *2mx*, & *ha* rectangulo *axb* æquale: ergo rectangulum sub *ga*, & *2mx* ad rectangulum *axb*. idest sub *2mx*, & *ha* (ob eamdem altitudinem *2mx*.) erit vt *ga* ad *ha*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VI.

Datam rectam *ab* bisectam in *m*, ita dividere in *x*, vt rectangulum *abx* ad bina rectangula sub *ax*, & *mx*, & sub *ab*, & *mx*. sit vt *p* ad *q*.

Vide Renaldin. to. 3 pag. 479.



Perspicuum est si fiat *ka* ipsi *ab* æqualis rectangulum *kxm* æquari rectangulis sub *ax*, & *mx*, atque sub *ab*, idest *ka*, & *mx*. Ergo conditio est vt sint proportionalia *abx. kxm. p q.* *per 1.2. el.*

Fiat vt *p* ad *q* ita *ab* ad *gk*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*abx. kxm. ab. gk.*
Ergo si fiat Solutum erit	*xb:gk* —Δ— *kxm.*
Sint ergo prop.	*gk. kx. mx. xb.*
Et per compos.	*gk. gx. mx. mb.*
Ergo solutum.	

p. q.

g k a m x b

CONSTR. & DEMONSTR.

Ipsis *gk*, & *mb* reciprocæ inveniantur *gx*, & *mx*, quarum differentia sit *gm*, itaque proportionales erunt *gk. gx. mx. mb*, & per divis. *gk. kx. mx. xb*, vnde rectangulum sub *gk*, & *xb* rectangulo sub *kx*, & *mx* erit æquale. Ergo rectangulum *kxm*, idest sub *xb*, & *gk* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *ab* ad *gk*, sive vt *p* ad *q*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO VII.

Datam rectam *ad*, sectam in *b*, & *c*, iterum secare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* ad *dxc* rectangulum sit vt *ac* ad *xc*.

g a b x c d

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb.*	*dxc.*	*ac.*	*xc.*
Sive per 1.6. el.			*ac:xd.*	*dxc.*
Ergo per 14.5. el.		*axb* —Λ—	*ac:xd.*	
Et E. P.	*ac.*	*ax.*	*bx.*	*xd.*
Fiat *ga* —Λ— *ac.*	*ga.*			
Ergo per comp. E. P.	*ga.*	*gx.*	*bx.*	*bd.*
Ergo solutum.				

CONS-

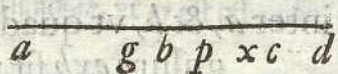
CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat *ga* rectæ *ac* æqualis, ipsisque *ga*. *bd* reciprocæ inveniantur *gx*. *bx*, quarum differentia sit *gb*. Dico factum.

Est enim ex constr. *ga* ad *gx*, vt *bx* ad *bd*, & per divis. *ga*, idest *ac* ad *ax*, vt *bx* ad *xd*, quare rectangulum *axb* rectangulo sub *ac*, & *xd* erit æquale: ergo rectangulum *axb*, idest sub *ac*, & *xd* ad rectangulum *dxc*, ob eamdem altitudinem *xd*, erit vt *ac* ad *xc*. Quod erat faciendum.

PROPOSIT. VIII.

Datam rectam *ad*, sectam in *b*, & *c*, rursus secare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *cax* ad *xcd* rectangulum sit vt *bx* ad *bp*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*cax.*	*xcd.*	*bx.*	*bp.*
Et permut. dimens.	*ax.*	*xc.*	*bx:cd.*	*bp:ac*
Vel si fiat				*cd:gb*
Et per 1.6. el. E. P.	*ax.*	*xc.*	*bx.*	*gb.*
Et comp.	*ac.*	*xc.*	*gx.*	*gb.*
Ergo solutum.				

a g b p x c d

CONST. ET DEMONST.

Fiat rectangulum sub *cd*, & *gb* rectangulo sub *bp*, & *ac* æquale, ipsisque *ac*, & *gb* reciprocæ inveniantur *xc*, & *gx*, quarum summa sit *gc*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sit *ac* ad *xc* ad *xc*, vt *gx* ad *gb*; erit divid. *ax* ad *xc*, vt *bx* ad *gb*, sive vt rectangulum sub *bx*, & *cd* ad rectangulum sub *cd*, & *gb*, hoc est sub *bp*, & *ac*: ergo permutando dimensiones rectangulum *cax* ad rectangulum *xcd* erit vt *bx* ad *bp*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO IX.

Vide R. P. à S. Vincen. tom. I. lib. I. prop. 84.

Datam rectam *ac*, sectam in *b*, rursus secare in *x*, inter *a*, & *b*, vt quadratum *ax* ad rectangulum *cxb* sit vt *mp* ad *gp*.

a x b c *m g p k y*

Inter *mp*, & *gp* intelligatur interjecta quædam *py*.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*axa.*	*cxb.*	*mp.*	*gp.*
Ergo si fiant prop.	*ax.*	*xc.*	*mp.*	*py.*
per III. de rati. compos. Et etiam.	*ax.*	*xb.*	*py.*	*gp.*

Solutum erit. Nam facta sub terminis homologis erunt pro-

proportionalia, videlicet *axa. cxb. mpy. gpy*, ideſt per 1. 6. el. *axa. cxb. mp. gp.* vt petitur.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xc.*	*mp.*	*py.*
Et per compoſ.	*ax.*	*ac.*	*mp.*	*my.*
Fiant prop. *ab. ac. mp. mk.*		*ab.*	*mk.*	—
Sint etiam prop.	*ax.*	*xb.*	*py.*	*gp.*
Et per compoſ.	*ax.*	*ab.*	*py.*	*gy.* —
Ergo ex æquo E.P.	*py.*	*gy.*	*mk.*	*my.*
Et per diviſ.	*py.*	*gp.*	*mk.*	*ky.*
Ergo ſolutum.				

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *ab* ad *ac*, ita *mp* ad *mk*, ipſiſque *gp. mk* reciprocæ inveniantur *py. ky*, quarum differentia ſit *pk*. Itaque proportionales erunt *py. gp. mk. ky*, & per compoſ. *py. gy. mk. my*. Denique fiat *ax*, quæ ſit ad *ab*, vt *py* eſt ad *gy*, ſeu *mk* ad *my*. Dico ſactum.

Cum enim ſit *ax* ad *ab* vt *py* ad *gy*: erit per diviſ. *ax* ad *xb* vt *py* ad *gp*. Rurſus cum *ax* ad *ab* ſit vt *mk* ad *my*, hoc eſt (ob proportionales *ab. ac. mp. mk*) *ax* ad *ac* vt *mp* ad *my*: erit per diviſ. *ax* ad *xc*, vt *mp* ad *py*: erat autem *ax* ad *xb* vt *py* ad *gp*: ergo facta ſub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet quadratum *ax* ad rectangulum *cxb*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, hoc eſt vt *mp* ad *gp*. Quod erat faciendum.

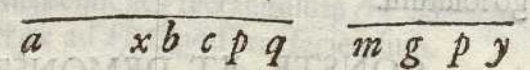
ALI-

ALITER.

Si in ipſa analyſi punctum *y* prius extinguatur, ita evadet conſtructio.

Sit iterum dividenda *ab*,&c. & debeant proportionales fieri, vt antea.

ax.	*xc.*	*mp.*	*py.*
ax.	*xb.*	*py.*	*gp.*



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xc.*	*mp.*	*py.*	
Et per compoſ.	*ax.*	*ac.*	*mp.*	*my.*	
Fiant prop. *mg. mp. ac. ap.*		*ap.*	*mg.*		—
Sint etiam prop.	*ax.*	*xb.*	*py.*	*gp.*	
Et compon.	*ab.*	*xb.*	*gy.*	*gp.*	
Fiant prop. *mg. gp. ab. bq.*	*bq.*			*mg.*	
Et comp. E. P.	*xq.*	*xb.*	*my.*	*mg.*	—
Et ex æquo.	*xq.*	*xb.*	*ap.*	*ax.*	
Et conv.	*xq.*	*bq.*	*ap.*	*xp.*	
Ergo ſolutum.					

CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *mg* ad *mp* ita *ac* ad *ap*, & vt *mg* ad *gp*, ita *ab* ad *bq*, ipſiſque *ap. bq.* reciprocæ inveniantur *xq*, & *xp*, quarum differentia ſit *pq*. Dico factum.

Est

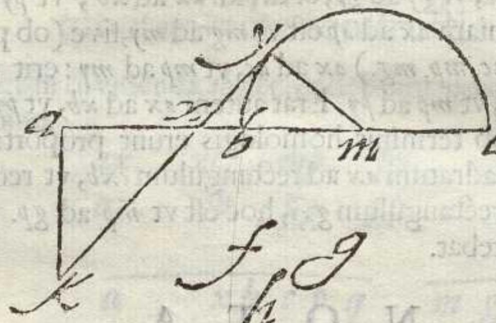
Est enim *xq* ad *bq* vt *ap* ad *xp* ex constr. & conv. *xq* ad *xb*, vt *ap* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *mg*, vt *xq* ad *xb*, seu vt *ap* ad *ax*. Et quoniam *xq* ad *xb* est vt *my* ad *mg*: erit divid. *bq* ad *xb*, vt *gy* ad *mg* (hoc est ob proportionales *mg. gp. ab. bq.*) *ab* ad *xb*, vt *gy* ad *gp*, & divid. *ax* ad *xb*, vt *py* ad *gp*. Rursus quoniam *ax* ad *ap* est vt *mg* ad *my*, sive (ob proportionales *ap. ac. mp. mg.*) *ax* ad *ac*, vt *mp* ad *my*: erit per divis. *ax* ad *xc*, vt *mp* ad *py*. Erat autem *ax* ad *xb*, vt *py* ad *gp*: ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet quadratum *ax* ad rectangulum *cxb*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, hoc est vt *mp* ad *gp*. Quod facere oportebat.

NOTA.

Quod autem proportionales fieri debeant *mg. mp. ac. ap.* ex subsequentibus pendet, itaque hæc reductio suspensa manet, donec pervenitur ad proportionales *ab. xb. gy. gp*, & necessitas patet reducendi terminum *gy* ad terminum *my*, qui supra extat, quod fieri non potest, nisi terminus *mg* vsurpetur, & proportionales fiant *mg. gp. ab. bq*, vnde proportionales emergunt comp. *xq. xb. my. mg*, & compertum fit statuendas esse proportionales *mg. mp. ac. ap*, vt ratio communis stabilita sit *mg. my*, & ex æquo arguendo evanescat punctum *y*.

ALI-

ALITER.



Sit dividenda *ab* in *x* vt quadratum *ax* ad rectangulum *cxb* sit vt *f* ad *g*.

Super *bc* semicirculus describatur *byc*, vt tangens *xy* rectangulum posſit *cxb*.

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*axa.*	*xyx.*	*f.*	*g.*
Sive si fiat			*h:h.*	*bmb.*
Et E. P.	*ax.*	*xy.*	*h.*	*bm.*
Sive				*my.*
Fiat angulus		*xak* ⊔∧⊔	*xym.*	
Et E. P.	*ax.*	*xy.*	*ak.*	*my.*
Ergo per 14.5.el.		*ak* ⊔∧⊔	*h.*	

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt g ad *f* ita quadratum *bm* ad quadratum rectæ *ak*, quæ cum *ac* angulum constituat rectum, & ducatur tan-
gens

gens ky ſecans ab in x. Dico factum.

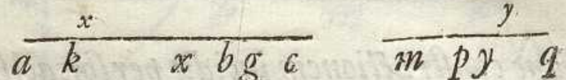
Sunt enim ſimilia triangula rectangula axk. xym, quare ax ad xy erit vt ak ad my, ideſt ad mb, adeoque quadratum ax ad quadratum xy, ideſt ad rectangulum cxb, vt quadratum ak ad quadratum mb, ideſt vt f ad z. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

In hanc conſtructionem incidit perſpicaciſsimum ingenium Ex^mi. Principis Rogerij Ventemiglia, qui prius (præter alias ſcientias) Matheſim calluerat, quam viginti annos ætatis ſuæ compleviſſet. Et ipſam mihi, qui illi problema reſolvendum propoſueram, dignatus fuit Matriti degens tranſmittere.

PROPOSITIO X.

Datam rectam *ac* divisam in *b* iterum dividere in *x*, inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* ad quadratum *xc* sit vt *mp* ad *pq*.



Interjiciatur inter *mp*. *pq* quædam *py*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb*.	*xcx*.	*mp*.	*pq*.
Ergo si fiant prop.	*ax*.	*xc*.	*mp*.	*py*.
Et etiam prop.	*xb*.	*xc*.	*py*.	*pq*.
Solutum erit, cum hoc fieri possit.				
Sint ergo prop.	*ax*.	*xc*.	*mp*.	*py*.
Et per compos.	*ax*.	*ac*.	*mp*.	*my*.
Fiant prop. *mq*. *mp*. *ac*. *ak*.		*ak*.	*mq*.	—
Sint etiam prop.	*xb*.	*xc*.	*py*.	*pq*.
Et per divis.	*bc*.	*xc*.	*yq*.	*pq*.
Fiant prop. *mq*. *pq*. *bc*. *gc*.	*gc*.			*mq*.
Ergo per divis. E. P.	*xg*.	*xc*.	*my*.	*mq*.—
Et ex æqualitate.	*xg*.	*xc*.	*ak*.	*ax*.
Et per divis.	*xg*.	*gc*.	*ak*.	*kx*.

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *mq* ad *mp* ita *ac* ad *ak*, & vt *mq* ad *pq* ita *bc* ad *gc*. ipsisque *gc*. *ak* reciprocæ inveniantur *xg*. *kx*, quarum summa sit *kg*. Dico factum.

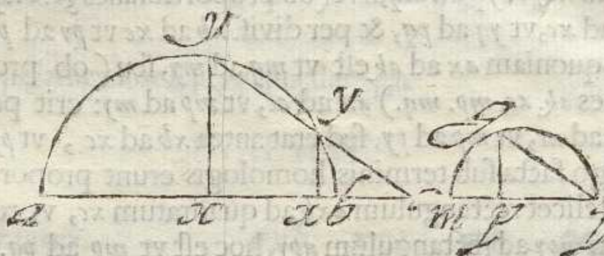
Est enim ex const. *xg* ad *gc* vt *ak* ad *kx*, & per compos. *xg* ad *xc* vt *ak* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *mq*, vt *xg* est ad *xc*, sive *ak* ad *ax*. Et quoniã *xg* ad *xc* est vt *my* ad *mq*: erit per divis. *gc* ad *xc*, vt *yq* ad *mq*, sive (ob proportionales *gc*. *bc*. *pq*. *mq*.) *bc* ad *xc*, vt *yq* ad *pq*, & per divis. *xb* ad *xc* vt *py* ad *pq*. Rursus quoniam *ax* ad *ak* est vt *mq* ad *my*, seu (ob proportionales *ak*. *ac*. *mp*. *mq*.) *ax* ad *ac*, vt *mp* ad *my*: erit per divis. *ax* ad *xc*, vt *mp* ad *py*; sed erat antea *xb* ad *xc*, vt *py* ad *pq*. Ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet rectangulum *axb* ad quadratum *xc*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *qpy*, hoc est vt *mp* ad *pq*. Quod facere oportebat.

NOTA.

Ex constructione exacta perspicuum fiet an problema impossibile sit, an vero vnam, duasve solutiones admittat iuxta determinationem prop. 1. Introductionis.

ALITER.

Sit recta *ac*, diuisa in *b*, iterum diuidenda in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* ad quadratum *xc* sit in ratione data vt *mp* ad *pq*.



ANALYSIS.

Esto factum, & super *ab* semicirculus describatur, vt perpendicularis *xy* rectangulum possit *axb*, ducaturque *cy*. Perspicuum igitur est, ex terminis rationis datæ triangulum constitui posse, cui simile debeat esse triangulum *xyc*. Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *mp*. *pq* sit media *pg*, ductaque *gq*, fiat angulus *acy* angulo *pqg* æqualis. Si igitur crus *cy* semicirculo super *ab* descripto non occurrerit, problema construi non poterit, sit tetigerit vnica erit resolutio. At vero si secuerit in punctis *y*. *y*, demittantur perpendiculares *yx*. *yx*. Dico *ab* sectam esse in punctis, *x*. *x*, vt petitur.

Sunt

Sunt enim triangula *xyc* triangulo *pgq* similia, quare *xy* ad *xc* erit vt *pg* ad *pq*, adeoque quadratum *xy*, ideſt rectangulum *axb* ad quadratum *xc*, vt quadratum *pg* ad quadratum *pq*, hoc eſt vt *mp* ad *pq*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XI.

Datam rectam *ac*, ſectam in *b*, protrahere ad *x*, vt rectangulum *axc* ad quadratum *bx* ſit vt *mp* ad *gp*.

Inter *mp*, & *gp* interjiciatur quædam *yp*.

ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*axc.*	*bxb.*	*mp.*	*gp.*	
Ergo ſi fiant prop.	*ax.*	*bx.*	*mp.*	*yp.*	
Et etiam.	*cx.*	*bx.*	*yp.*	*gp.*	
Factum erit quod petitur.					
Sint ergo prop.	*ax.*	*bx.*	*mp.*	*yp.*	
Et convert.	*ax.*	*ab.*	*mp.*	*my.*	
Fiant prop.		*fa.*	*gm.*		—
Sint etiam prop.	*cx.*	*bx.*	*yp.*	*gp.*	
Et per diviſ.	*bc.*	*bx.*	*gy.*	*gp.*	
Vel ſi fiant prop.	*bq.*			*gm.*	
Ergo divid. E.P.	*xq.*	*bx.*	*my.*	*gm.*	—
Et ex æqualitate	*xq.*	*bx.*	*fa.*	*ax.*	
Et per compoſ.	*xq.*	*bq.*	*fa.*	*fx.*	
Ergo ſolutum.					

CONS-

$f \quad a \quad b \quad c \quad x \quad q \qquad g \quad m \quad y \quad p$

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *gm* ad *mp* ita *ab* ad *fa*, & vt *gm* ad *gp* ita *bc* ad *bq*, ipsisque *bq. fa.* reciprocæ inveniantur *xq. fx*, quarum summa sit *fq*. Dico factum.

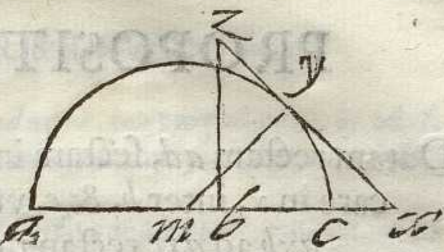
Cum enim sit ex constr. *xq* ad *bq* vt *fa* ad *fx*: erit per divis. *xq* ad *bx*, vt *fa* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *gm*, vt *xq* ad *bx*, sive vt *fa* ad *ax*. Cum igitur *xq* ad *bx* sit vt *my* ad *gm*: erit compon. *bq* ad *bx*, vt *gy* ad *gm*, sive (ob proportionales *bq. bc. gp. gm.*) *bc* ad *bx*, vt *gy* ad *gp*, & per divis. *cx* ad *bx*,
nu. III. de rat. compos. vt *yp* ad *gp*. Rursus cum *ax* ad *fa*, sit vt *gm* ad *my*, sive (ob proportionales *fa. ab. mp. gm*) *ax* ad *ab*, vt *mp* ad *my*: erit convert. *ax* ad *bx* vt *mp* ad *yp*; sed erat antea *cx* ad *bx*, vt *yp* ad *gp*. Ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, hoc est rectangulum *axc* ad quadratum *bx*, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, sive vt *mp* ad *gp*. Quod faciendum erat.

ALITER.

Datam rectam *ac* sectam in *b* producere ad *x*, vt rectangulum *axc* ad quadratum *bx* sit vt *p* ad *q*.

Des-

Deſcribatur ſuper *ac* ſemicirculus, vt tangens *xy* rectangulum poſsit *axc*. Biſecetur *ac* in *m*, & iungatur *my*.



ANALYSIS

Sint igit. prop.	*axc.*	*bxb.*	*p.*	*q.*
Ideſt	*xyx.*			
Vel ſi fiat			*ff*	*gg.*
Et E.P.	*xy.*	*bx.*	*f.*	*g.*
Fiat angulus		*xbz*	—Λ—	*myx.*
Et ob ſimil. *bzx.ymx.* E.P.	*xy.*	*bx.*	*my.*	*bz.*
Ideſt			*mc.*	
Ergo ex æquo E. P.	*f.*	*g.*	*mc.*	*bz.*
Et quadrando	*ff.*	*gg.*	*mcm.*	*bzb.*
Ideſt	*p.*	*q.*		
Ergo ſolutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *p* ad *q* ita quadratum *mc* ad aliud, cuius latus ſit *bz*, quæ ad *ac* perpendicularis ponatur, & ex *z* tangens ducatur *zyx*. Dico factum.

Sunt enim ſimilia triangula rectangula *myx.bzx*, quare *xy* ad *xb* erit vt *my* ad *bz*, adeoque quadratum *xy*, ideſt rectangulum *axc* ad quadratum *bx*, vt quadratum *my*, ideſt *mc* ad quadratum *bz*, hoc eſt vt *p* ad *q*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Datam rectam *ad*, ſectam in *b*, & *c*, rurſus ſecare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* ad *dxc* rectangulum ſit vt *mp* ad *gp*.

a b x c d f k *m g p y*

Interjiciatur *py* inter *mp*, & *gp*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb.*	*dxc.*	*mp.*	*gp.*
Ergo ſi fiant prop.	*ax.*	*xd.*	*mp.*	*py.*
Et etiam.	*bx.*	*xc.*	*py.*	*gp.*

Solutum erit. Nam facta ſub terminis homologis propoſitam reſtituent analogiam.

nu. III, de rati. compoſ.

Sint igit. prop.	*ax.*	*xd.*	*mp.*	*py.*
Et per compoſ.	*ax.*	*ad.*	*mp.*	*my.*
Fiant prop. *mg. mp. ad. ak.*		*ak.*	*mg.*	—
Sint etiam prop.	*bx.*	*xc.*	*py.*	*gp.*
Et compon.	*bc.*	*xc.*	*gy.*	*gp.*
Fiant prop.	*cf.*			*mg.*
Ergo comp. E.P.	*xf.*	*xc.*	*my.*	*mg.* —
Et ex æqualitate.	*xf.*	*xc.*	*ak.*	*ax.*
Et convert.	*xf.*	*cf.*	*ak.*	*xk.*

Ergo ſolutum.

CONS-

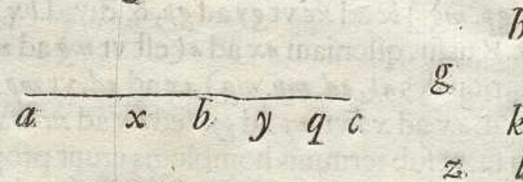
CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *mg* ad *mp* ita *ad* ad *ak*, & vt *mg* ad *gp* ita *bc* ad *cf*, ipsisque *cf*. *ak* reciprocæ inveniantur *xf*. *xk*, quarum differentia sit *fk*. Dico factum.

Est enim ex const. *xf* ad *cf*, vt *ak* ad *xk*, & convert. *xf* ad *xc*, vt *ak* ad *ax*. Fiat *my*, quæ sit ad *mg*, vt *xf* est ad *xc*, sive vt *ak* est ad *ax*. Et quoniam *xf* ad *xc* est vt *my* ad *mg* : erit divid. *cf* ad *xc* vt *gy* ad *mg*, hoc est (ob proportionales *cf*. *bc*. *gp*. *mg*) *bc* ad *xc* vt *gy* ad *gp*, & divid. *bx* ad *xc* vt *py* ad *gp*. Rursus quoniam *ax* ad *ak* est vt *mg* ad *my*, sive (ob proportionales *ak*. *ad*. *mp*. *mg*) *ax* ad *ad*, vt *mp* ad *my* : erit per divis. *ax* ad *xd* vt *mp* ad *py*; sed *bx* ad *xc* erat vt *py* ad *gp*: ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, scilicet rectangulum *axb* ad *dxc* rectangulum, vt rectangulum *mpy* ad rectangulum *gpy*, hoc est vt *mp* ad *gp*. Quod faciendum erat. *nu. III. de rati. compos.*

PROPOSIT. XIII.

Datas rectas *ab*, & *bc* ita secare in *x*, & *y*, vt rectangulum *axb* ad *byc* rectangulum sit vt *g* ad *h*; rectangulum verò sub *ax*, & *yc*, ad rectangulum sub *xb*, & *by* sit vt *g* ad *k*.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*axb*.	*byc*.	*g*.	*h*.
Et etiam	*ax:yc*.	*xb:by*.	*g*.	*k*.
Ergo si fiant prop.	*ax*.	*by*.	*g*.	*z*.
Nec non	*xb*.	*yc*.	*z*.	*h*.
Et etiam	*ax*.	*by*.	*g*.	*z*.
Nec non	*yc*.	*xb*.	*z*.	*k*.
Ex æquo E. P.	*k*.	*z*.	*z*.	*h*.

Et cognita erit *z*: vnde facilis apparet progressus.

Sint ergo prop.	*ax*.	*by*.	*g*.	*z*.
Vel si fiat			*ab*.	*bq*.
Ergo diff. vt 1. ad 1. & E. P.	*xb*.	*yq*.	*g*.	*z*.
Sint etiam prop.	*xb*.	*yc*.	*z*.	*h*.
Vel si fiat			*g*.	*l*.
Et ex æqual. E, P.	*yc*.	*l*.	*yq*.	*z*.

Ergo solutum □

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Inter k, & h media inveniantur z, & vt g ad z ita fiat ab ad bq, & vt z ad h, siue vt k ad z ita g ad l. Deinde fiant proportionales $yc.\ l.\ yq.\ z$, & etiam $xb.\ yc.\ g.\ l$. Dico factum. *per Scholi. prop. 2. lib. 1.*

Cum enim sit yc ad l, vt yq ad z, & xb ad yc, vt g ad l: erit ex æquo xb ad yq, vt g ad z, siue ex constr. vt ab ad bq, vnde (quia differentiæ sunt vt vnus ad vnum) erit ax ad by, vt ab ad bq, idest vt g ad z. Est autem xb ad yc, vt g ad l, idest vt z ad h: ergo facta sub terminis homologis erunt proportionalia, videlicet rectangulum axb ad rectangulum byc, vt rectangulum sub g, & z ad rectangulum sub z, & h, hoc est vt g ad h, vt oportebat. Rursus quoniam ax ad by est vt g ad z, & yc ad xb, vt h ad z, idest vt z ad k, erunt facta proportionalia sub terminis homologis, nempe rectangulum sub ax, & yc, ad rectangulum sub by, & xb, vt rectangulum sub g, & z ad rectangulum sub z, & k, hoc est vt g ad k, vt oportebat. Rectas igitur ab, & bc, &c. Quod erat faciendum. *nu. III. de rat. compos.*

QVÆSTIO.

Oporteat duos datos numeros (ab, & bc) 16, & 13 ita singillatim in duas partes diuidere, vt factum sub partibus 16 ad factum sub partibus 13 sit vt 3 ad 2 (vt g ad h) factum verò sub prima parte ipsius 16, & secunda parte ipsius 13 ad factum sub secunda 16, & prima 13 sit vt 25 ad 24, siue vt 3 ad $\frac{72}{25}$ (idest vt g ad k.)

Sint partes quæsitæ $ax.\ xb.\ by.\ yc$, & ex præcedente analysi hæc sequitur.

OPERATIO.

Inter *h*, & *k*. 2 & $\frac{72}{25}$ media est $\frac{12}{5}$ pro *z*, fiat vt *z* ad *h* ita *g* ad *l*, ideſt vt $\frac{12}{5}$ ad 2 ita 3 ad $2\frac{1}{2}$, & inter *z*, & *l*. $\frac{12}{5}$, & $2\frac{1}{2}$ differentia erit $\frac{1}{10}$ pro *l* -- *z*.

Fiat vt *g* ad *z* ita *ab* ad *bq*, hoc eſt vt 3 ad $\frac{12}{5}$ ita 16 ad $12\frac{4}{5}$, & inter *bc*, & *bq*, ideſt 13, & $12\frac{4}{5}$ differentia erit $\frac{1}{5}$ pro *qc*.

Fiat vt *l* - *z* ad *qc*, ita *l* ad *yc*, hoc eſt vt $\frac{1}{10}$ ad $\frac{1}{5}$ ita $2\frac{1}{2}$ ad 5 pro *yc*. ſecunda parte ipſius 13, vnde prima erit 8 (pro *by*.) Fiat tandem vt *z* ad *k* ita *yc* ad *xb*, ideſt vt $\frac{12}{5}$ ad $\frac{72}{25}$ ita 5 ad 6 pro *xb* ſecunda parte numeri dati 16, vnde prima erit 10.

Sunt igitur 10. 6. 8. 5. partes, de quibus quæritur, quæ conditiones aſsignatas adimplent.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Datas rectas *ab*, & *bc* ita ſecare in *x*, & *y*, vt rectangulum *abx* ad *cby* rectangulum, ſit vt *g* ad *h*: rectangulum vero *acx* ad *ayc* rectangulum ſit vt *g* ad *k*.

h

l. a q x b y c g k

z

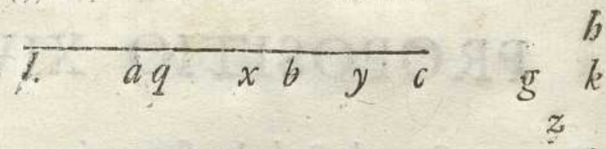
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*abx*.	*cby*.	*g*.	*h*.
Et etiam.	*acx*.	*ayc*.	*g*.	*k*.
Ergo ſi fiant prop.	*ab*.	*bc*.	*z*.	*h*.
Et etiam	*xb*.	*by*.	*g*.	*z*.

Manifeſta erit ſolutio. Cum autem *z* prima fronte innoteſcat, ita erit progrediendum.

Sint igit. prop.	*xb*.	*by*.	*g*.	*z*.
Vel ſi fiant			*bc*.	*qb*.
Ergo agg. vt 1. ad 1. & E.P.	*xc*.	*qy*.	*g*.	*z*.
Et per 1. 6. el.	*acx*.	*ac:qy*.	*g*.	*z*.
Sed debent eſſe prop.	*acx*.	*ayc*.	*g*.	*k*.
Ergo ex æquo E. P.	*ac:qy*.	*ayc*.	*z*.	*k*.
Vel ſi fiant			*ac*.	*la*.
Sive per 1.6.el.			*ac:qy*.	*la:qy*.
Ergo ex 14.5.el.		*ayc* —∧— *la:qy*.		
Et E.P.	*la*.	*ay*.	*yc*.	*qy*.
Et per compoſ.	*la*.	*ly*.	*yc*.	*qc*.
Ergo ſolutum.				

CONS-



CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat z ad h vt ab eſt ad bc, & vt g ad z ita bc ad qb, & vt z ad k ita ac ad la. Ipſis autem la, & qc reciprocæ inveniantur ly, & yc, quarum ſumma ſit lc. Et tandem fiat xb ad by vt g ad z. Dico factum.

Cum enim xb ad by ſit vt g ad z, & ab ad bc, vt z ad h: facta ſub terminis homologis erunt proportionalia, ſcilicet rectangulum abx ad rectangulum cby, vt rectangulum ſub g, & z ad rectangulum ſub z, & h, hoc eſt vt g ad h, vt oportebat. Rurſus cum xb ad by ſit vt g ad z, ſive vt bc ad qb, erunt aggregata vt vnus ad vnum, hoc eſt xc ad qy, ſive rectangulum acx ad rectangulum ſub ac, & qy, vt g ad z. Eſt autem la ad ly, vt yc ad qc, & per diviſ. la ad ay, vt yc ad qy, quare rectangulum ayc æquale erit rectangulo ſub la, & qy: ergo rectangulum ſub ac, & qy ad rectangulum ayc (nempe ſub la, & qy) erit vt ac ad la, ſive vt z ad k; ſed erat rectangulum acx ad rectangulum ſub ac, & qy, vt g ad z: ergo rectangulum acx ad ayb rectangulum erit ex æquo, vt g ad k, vt oportebat (ratio communis, ſeu termini comparationis, ſi mavis, rectangulum ſub ac, & qy, & recta z.) Rectas igitur ab, & bc diviſimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XV.

Quatuor terminos proportionales exhibere, ita vt primus ad quartum ſit in ratione data *g* ad *k* , ſecundus verò ad tertium in ratione etiam data *m* ad *p*, & præterea aggregatum ſecundi, & quarti ſit datum , nempe recta *ab*.

					g.	*k.*	*q.*
x	*y*	*a*	*z*	*b*	*m.*	*p.*	*f.*

Sint quatuor termini, de quibus quæritur *xy. az. ya. zb.*

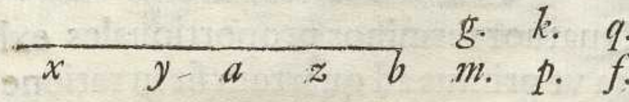
CONDITIONES

Vt ſint prop.	*xy.*	*az.*	*ya.*	*zb.*
Vt ſint prop.	*xy.*	*zb.*	*g.*	*k.*
Vt ſint prop.	*az.*	*ya.*	*m.*	*p.*
Vt	*az+ zb* —∧— *ab.*			

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy.*	*az.*	*ya.*	*zb.*
Et etiam	*zb.*	*xy.*	*k.*	*g.*
Ergo rectang. E. P.	*xy:zb.*	*az:xy.*	*ya:k.*	*zb:g.*
Ideſt per 1.6.el.	*zb.*	*az.*		
Sunt autem prop.	*az.*	*ya.*	*m.*	*p.*
Vel ſi fiat			*k.*	*q.*
Vnde	*az:q* —∧— *ya:k.*			
Ergo ſubſtit. E. P.	*zb.*	*az.*	*az:q.*	*zb:g.*
Et permut. dimenſ.	*zbz.*	*aza.*	*q.*	*g.*
Vel ſi fiant			*qq.*	*ff.*
Et erunt prop.	*zb.*	*az.*	*q.*	*f.*
Et compon.	*ab.*	*az.*	*q+f.*	*f.*
Ergo ſolutum.				

CONS.



CONST. ET DEMONST.

Fiat vt m ad p ita k ad q, & inter q, & g media inveniatur f, dividaturque ab in z in ratione q ad f. Itaque az, & zb erunt ſecundus,& quartus terminus, vt petitur. Deinde vt m ad p, ſeu vt k ad q ita fiat az ſecundus ad ya tertium, & vt k ad g ita zb quartus ad xy primum,vt petitur. Dico xy. az. ya. zb. etiam eſſe proportionales.

Cum enim ſit zb ad az vt q ad f: erit etiam quad. zb ad quad. az, vt quad. q ad quad. f, ideſt vt q ad g. Hoc eſt permutando dimenſiones zb ad az vt rectangul. ſub az, & q ad rectang. ſub zb, & g; ſed rectangulum ſub az, & q æquatur rectangulo ſub ya, & k (cum ſint proportionales az. ya. k. q.) ergo vt zb ad az, vel vt rectang. ſub zb. & xy ad rectang. ſub az, & xy, ita erit rectang. ſub ya, & k ad rectang. ſub zb, & g. Eſt autem vt zb ad xy ita k ad g: ergo deptimeudo antecedentem analogiam per iſtam, vt xy ad az ita erit ya ad zb. Quatuor igitur terminos proportionales exhibuimus &c. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Tantæ molis eſt fugere aliquando principia ſolida in problematibus planis, placet propterea more arithmetico eamdem propoſitionem hunc in modum reſolvere.

CON-

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & g. & k. & q. \\ \hline x & y & a & z & b & m. & p. & f. \end{array}$$

CONDITIONES.

Vt sint prop.	$xy.$	$az.$	$ya.$	$zb.$
Et etiam	$xy.$	$zb.$	$g.$	$k.$
Et etiam	$az.$	$ya.$	$m.$	$p.$
Seu si fiat			$k.$	$q.$
Vt sit	$az + zb \;\llcorner\!\wedge\!\lrcorner\; ab.$			

ANALYSIS.

Per 1. & 2. cond. est $\quad \dfrac{az{:}ya.}{zb.} \;\llcorner\!\wedge\!\lrcorner\; \dfrac{zb{:}g}{k.}$ quia $\llcorner\!\wedge\!\lrcorner\; xy.$

Ergo producendo $\quad az{:}ya{:}k \;\llcorner\!\wedge\!\lrcorner\; zbz{:}g.$

Sed per 3. condit. $\quad ya{:}k \;\llcorner\!\wedge\!\lrcorner\; az{:}q.$

Ergo subst. erit $\quad aza{:}q \;\llcorner\!\wedge\!\lrcorner\; zbz{:}g.$

Et E.P. $\quad g.\ q.\quad aza.\ zbz.$

Vel si f sit media $\quad gg{:}\ ff.$

Ergo latera E.P. $\quad g.\ f.\quad az.\ zb.$

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

QVÆSTIO.

Quatuor numeros exhibere proportionales ita vt primus ad quartum sit vt 8 ad 5, secundus ad tertium vt 7 ad 4, & aggregatum secundi, & quarti sit 27.

Hæc quæstio supponendo g, & k valere 8, & 5, & m, & p. 7, & 4, &c. expediri potest, vt antea. Placet nihilominus ita procedere.

 Sint

$x \quad y \quad a \quad z \quad b$

Sint quæſiti numeri *xy. az. ya. zb.* ita vt *ab* ſumma ſecundi, & quarti valeat 27.

ANALYSIS.

	Sint igit. prop.	$xy.$	$az.$	$ya.$	$zb.$
	Et etiam.	$zb.$	$xy.$	$5.$	$8.$
nu. III.	Ergo rectang. E.P.	$xy{:}zb.$	$az{:}xy.$	$5ya.$	$8zb.$
de rati.	Ideſt per 1.6.el.	$zb.$	$az.$	$5ya.$	$8zb.$
compoſ.	Sed etiam S.P.	$az.$	$ya.$	$7.$	$4.$
	Vel ſi fiat			$5.$	$2\frac{6}{7}$
	Ergo	$2\frac{6}{7}\,az$ —∧— $5.ya.$			
	Et ſubſtit. E.P.	$zb.$	$az.$	$2\frac{6}{7}\,az.$	$8zb.$
	Ideſt augendo per 7.			$20az.$	$56zb$
	Et deprim. per 4.			$5az.$	$14zb$
	Ergo per 16.6.el.	$14zbz$ —∧— $5aza.$			
	Et E.P. per 14.6.el.	$14.$	$5.$	$aza.$	$zbz.$
	Vel per 20.6.el.	$196.$	$70.$		
	Ergo etiam latera E.P.	$14.$	$\sqrt{70}.$	$az.$	$zb.$
	Et per comp.	$14.$	$14+\sqrt{70}$	$az.$	$ab.$
	Ideſt				$27.$

Ergo ſolutum, & manifeſtum fit analyſim noſtram numeros etiam admittere, ſi illis operari placuerit, abſque præiudicio demonſtrationis.

OPE-

OPERATIO.

Si $14 + \sqrt{70}$ dat 14. quid 27?
Elev. per $14 - \sqrt{70}$ $\quad 14 - \sqrt{70}$.
Vel si 126. dat $196 - 14\sqrt{70}$ quid 27?
Vel si 9. dat $14 - \sqrt{70}$ quid 27?
Vel si 1. dat $14 - \sqrt{70}$ quid 3? dabit quidem $42 - 3\sqrt{70}$ pro secundo numero *az*.
Ergo $-15 + 3\sqrt{70}$ pro quarto *zb*.
Est enim 27. aggregatum vtriusque.

Nunc si 5 dat 8 quid $-15 + 3\sqrt{70}$? dabit quidem

$-24 + 4\frac{4}{5}\sqrt{70}$ pro primo numero *xy*.

Mox si 7 dat 4. quid $42 - 3\sqrt{70}$? dabit quidem

$24 - 1\frac{5}{7}\sqrt{70}$. pro tertio numero *ya*.

Erunt igitur quatuor quæsiti numeri.

$$-24 + 4\tfrac{4}{5}\sqrt{70},\quad 42 - 3\sqrt{70},\quad 24 - 1\tfrac{5}{7}\sqrt{70},\quad -15 + 3\sqrt{70}.$$

$$\begin{array}{lcl} -15 + 3\sqrt{70} & & 42 - 3\sqrt{70} \\ \hline +360 - 72\sqrt{70} & & 1008 - 72\sqrt{70} \\ +1008 - 72\sqrt{70} & & 360 - 72\sqrt{70} \\ \hline 1368 - 144\sqrt{70} & \text{—}\Lambda\text{—} & 1368 - 144\sqrt{70} \end{array}$$

Qui etiam sunt proportionales, cum factum sub extremis facto sub medijs sit æquale, vt patet. Quatuor igitur numeros exhibuimus, &c. Quod facere oportebat.

Etiam per præcedentem analysim, more arithmetico, quæstio enodari poterit, & quidem brevius, operatio verò eadem erit.

PROPOSIT. XVI.

Datam circuli diametrum *ab* ita ſecare in *x*, vt perpendicularis *xy* ad ſegmentum *xb* ſit in ratione data vt *mp* ad *mq*.

ANALYSIS.

Ducatur *by*, & patet ex terminis rationis datæ triangulum poſſe fieri, cui ſimile ſit triangulum *xyb*. Ergo ſolutum.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Conſtituantur ad angulos rectos *mp.mq*, ductaque *pq* fiat angulus *aby* angulo *q* æqualis, & demittatur perpendicularis *xy*. Erunt igitur triangula rectangula *xyb*. *mpq* ſimilia, quare *xy* ad *xb* erit vt *mp* ad *mq*. Quod facere oportebat.

SCHOLION.

Quoniam propoſitum problema poſitione tantum eſt reſolutum, placet aliam analyſim inſtituere, vnde quanta ſit *xy*, vel *xb* ſcire poſſimus.

ALI-

ALITER.

Sint igit. prop.	$xy.$	$xb.$	$mp.$	$mq.$	
Et quadrando.	$xyx.$	$xbx.$	$mpm.$	$mqm.$	
Sive per 8.6.el.	$axb.$				
Hoc est per 1.6.el.	$ax.$	$xb.$	$mpm.$	$mqm.$	
Et compon.	$ab.$	$xb.$	$mpm + mqm.$	$mqm.$	
Ergo solutum.					

CONSTR. & DEMONSTR.

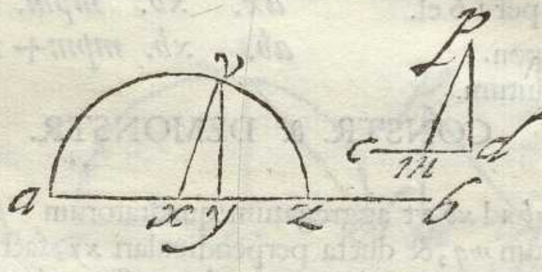
Fiat *ab* ad *xb* vt aggregatum quadratorum *mp. mq* ad quadratum *mq*, & ducta perpendiculari *xy*, factum erit. Nam dividendo erit *ax* ad *xb*, sive rectangulum *axb* ad quadratum *xb*, hoc est quadratum *xy* ad quadratum *xb*, vt quadratum *mp* ad quadratum *mq*, adeoque *xy* ad *xb*, vt *mp* ad *mq*. Quod erat faciendum.

Quod si semicirculus datus *ayb* non iam semicirculus; sed portio circuli proponatur ad primam analysim confugiendum erit, & quanta sit *xy*, aut *xb* à trigonometria petendum determinatis quantitatibus *ab. mp. mq*, & valore anguli *ayb*.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Dato aggregato trium proportionalium, dataque ratione mediæ ad differentiam extremarum: ſingulas exhibere.



Sit aggregatum data recta *ab*, & ratio data *dp* ad *cd*. Sint quæſitæ partes *ay*. *zb*. *yz* quo poſito, ſi recta *az* biſecta ſupponatur in *x*: erit 2*xy* differentia extremarum, & deſcripto ſemicirculo *avz*, erectâque perpendiculari *yv*: erit ipſa rectæ *zb* æqualis. Ergo ſi iungatur *xv* perſpicuum erit ex terminis rationis datæ triangulum poſſe fieri, cui ſimile debeat eſſe *xvy*.

prop. 7. Introd.

ANALYSIS

Inclinentur *cd*, & *dp* ad rectos angulos, biſectaque *cd* in *m* ducatur *mp*.

Et ob ſimil. *xvy*. *mpd*. E.P.	*xv*.	*vy*.	*mp*.	*pd*.
Ideſt	*ax*.	*zb*.		
Et duplic. anteced.	*az*.	*zb*.	2*mp*.	*pd*.

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONST.

Dividatur *ab* in *z* in ratione duplæ *mp* ad *pd*, & ſuper *az*, bi-

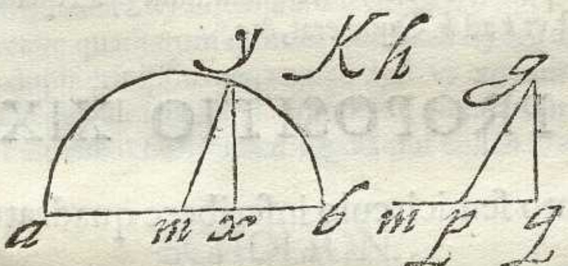
bisectà in x, semicirculus describatur avz, & fiat angulus zxv angulo dmp æqualis, demittaturque perpendicularis vy. Dico ay. zb. yz esse, de quibus quæritur.

Cum enim ex constr. triangula sint similia xvy. mpd, erit xv, idest ax ad vy, vt mp ad pd, & duplicando antecedentes az ad vy, vt $2mp$ ad pd; sed ex constr. est az ad zb, vt $2mp$ ad pd: æquales igitur erunt vy, & zb, ac proinde proportionales ay. zb. yz, vt petitur. Rursus ob similitudinem xvy. mpd erit vy, idest zb ad xy vt dp ad mp, & duplicando consequentes, zb (media) ad duplam xy (differentiam extremarum ay, & yz) vt dp ad cd, vt postulatur. Dato igitur aggregato. &c. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XVIII.

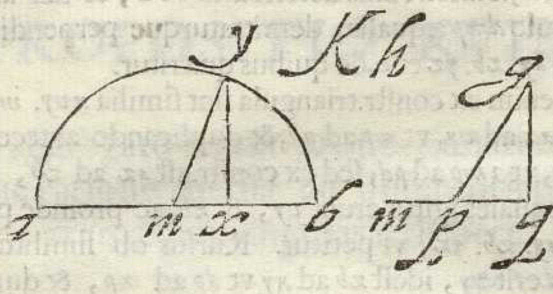
Vide Renald. tom. 3. pag. 406.

Datam rectam ab secare in x, vt rectangulum sub partibus, ad quadratum differentiæ earumdem habeat datam rationem k ad h.



Factum iam sit, & describatur super ab, bisectà in m, semicirculus ayb, vt perpendicularis xy rectangulum possit axb. Quoniam igitur mx semidifferentia est partium ax. xb, ductà my, patet ex terminis rationis datæ, triangulum posse fieri, cui simile sit triangulum mxy. prop. 7. Introd.

CONS-



CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *k* ad *h* ita quadratum quodpiam *gq* ad quadratum *mq*. Inclinentur ad angulos rectos *mq*. *gq*, & bisecetur *mq* in *p*, ductaque *pg*, fiat *mb* ad *mx*, vt *pg* est ad *pq*, erectaque perpendiculari *xy*, iungatur *my*. Dico factum.

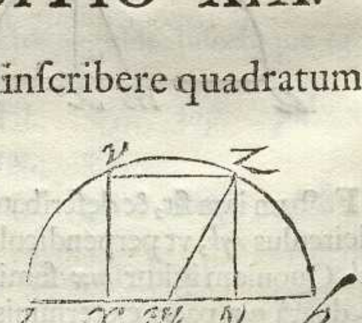
Quoniam igitur *my*, ideſt *mb* eſt ad *mx*, vt *pg* ad *pq* : similia erunt triangula rectangula *myx*. *pgq*, quare *xy* ad *mx* erit vt *gq* ad *pq*, & duplicando conſequentes *xy* ad duplam *mx* vt *gq* ad *mq*, adeoque quadratum *xy*, ideſt rectangulum *axb* ad quadratum duplæ *mx*, ideſt ad quadratum differentiæ partium *ax*, & *xb*, vt quadratum *gq* ad quadratum *mq*, ideſt vt *k* ad *h*. Quod erat, &c.

7.6.el.

PROPOSITIO XIX.

In dato ſemicirculo inſcribere quadratum.

Factum iam ſit, & in ſemicirculo dato *avb* inſcriptum ſit quadratum *xyzv*. Biſecetur diameter *ab* in *m*, & ducatur *mz*.



ANA-

ANALYSIS.

Quoniam igitur quadrati latera sunt inter se æqualia, æquales propterea erunt rectæ *xv*, & *yz*, & æqualiter distabunt à centro *m*, quare *xm*, & *my* erunt æquales : ergo *my* dimidia erit ipsius *zy*: ergo quadratum *mz*, idest quadratum *mb* quinque poterit quadrata *my* (siquidem *yz*, vt pote dupla ipsius *my*, quatuor potest quadrata *my*.) Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

Inter *mb*, & ipsius quintam partem media inveniatur proportionalis *my*, fiatque ei æqualis *xm*, & excitentur perpendiculares *xv*, & *yz*, & connectantur *vz*, & *mz*. Dico *xyzv* quadratum esse, de quo quæritur.

Quoniam igitur quadratum *my* æquale est ex constr. rectangulo sub *mb*, & ipsius quinta parte : erunt quintuplicando, quinque quadrata *my* æqualis quadrato *mb* , idest *mz*; sed quadratum *mz* æquale est quadratis *my*, & *yz*: ergo quinque quadrata *my* æqualia erunt quadratis *my*, & *yz*, ac propterea *yz* quadratum quatuor quadratis *my* erit æquale: ergo *yz* dupla erit ipsius *my*, nempe ipsi *xy* æqualis , sed etiam sunt æquales *xv*, & *yz*: ergo *xyzv* quadratum erit in semicirculo dato constitutum. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Hoc problema proponi potest hoc modo:

Datam *ab* dividere in *y*, vt rectangulum sub segmentis æquale sit quadrato differentiæ eorumdem.

PROPOSIT. XX.

In data portione circuli quadratum constituere.

Esto iam factum, & in portione circuli data *avb*, constitutum sit quadratum *xyzv*, & bisecetur *ab* in *m*, ducaturque *mz*.

ANALYSIS.

Quoniam igitur *xv*, & *yz* sunt æquales, æqualiter distabunt à centro, adeoque *xm*, & *my* erunt æquales: ergo *yz* dupla erit ipsius *my*: ergo triangulum effici poterit, cui simile debeat esse triangulum *myz*.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Exponatur quævis *gh*, & ad angulos rectos ipsius dupla ponatur *hk*, iungaturque *gk*. Deinde angulo *g* angulus fiat æqualis *bmz*, & demittatur perpendicularis *zy*, factàque *xm* ipsi *my* æquali, erigatur perpendicularis *xv*, iungaturque *vz*.

Quoniam igitur triangula rectangula *myz*. *ghk* sunt æquiangula, erit vt *my* ad *yz* ita *gh* ad *hk*; sed *hk* dupla est ipsius *gh*: ergo *yz* dupla erit ipsius *my*, adeoque ipsi *xy* æqualis; sed *xv*, & *yz* sunt æquales: ergo *xyzv* quadratum erit

de,

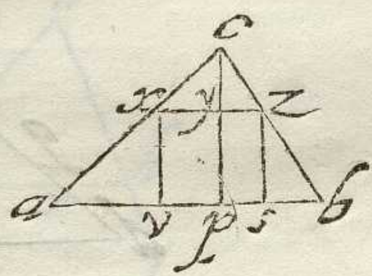
de quo quæritur. In data igitur portione, &c. Quod erat faciendum.

In hunc modum etiam antecedens problema solvi poterit positione.

PROPOSITIO XXI.

In dato triangulo quadratum inscribere.

In triangulo dato *abc* inscriptum iam sit quadratum *svxz*. Demittatur perpendicularis *cp* secans latus *xz* in *y*, & erit *yp* singulis lateribus quadrati æqualis.



ANALYSIS.

Ob simil. *abc.xzc*.S.P.	*ab.*	*cp.*	*xz.*	*cy.*	
Idest			*yp.*		*prop.20*
Ergo solutum.					*Introd.*

CONSTR. & DEMONST.

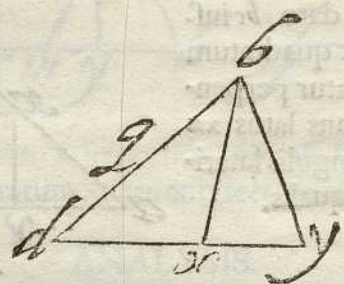
Dividatur perpendicularis *cp* in *y* in ratione basis *ab* ad ipsam *cp*, & per *y* ipsi *ab* parallela ducatur *xz*, demittanturque perpendiculares *xv*, & *zs*. Dico *xzsv*. esse quadratum, de quo quæritur.

Cum enim in triangulis similibus bases, & altitudines sint proportionales, erit *ab* ad *cp* vt *xz* ad *cy*; sed ex constr. *ab* ad *cp* est vt *yp* ad *yc*: ergo *xz* ipsi *yp* erit æqualis; sed ob parallelismum *xz*, & *vs* inter se, & *vx*. *yp*. *zs* inter se sunt æquales: ergo *xzsv* quadratum erit. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXII.

Vide Renald. tom.3. pag. 337.

In triangulo *dby* datur latus *db*, & angulus ad verticem *dby* bisectus ponitur à recta *bx*, & ratio rectanguli *dby* ad rectangulum *dxy* est vt *f* ad *g*, seu vt *db* ad *qb*: quæruntur puncta *x*, & *y*.



ANALYSIS

Sint igit. prop.	*dby.*	*dxy.*	*db.*	*qb.*
Ideſt per 1.6.el.			*dby.*	*qby.*
Ergo per 14.5.el.		*dxy* —Λ—	*qby.*	
Et E.P.	*qb.*	*dx.*	*xy.*	*by.*
Ideſt per 3.6.el.			*dx.*	*db.*
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

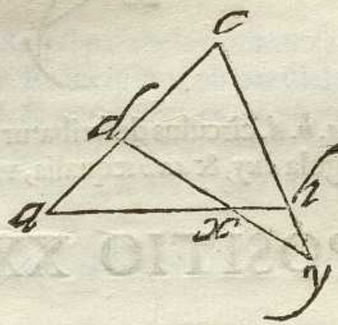
Inter *qb*, & *db* media inveniatur *dx*, quæ ex puncto *d* rectæ *bx* occurrat in *x*, & protrahatur ad *y*. Dico factum.

Eſt enim *qb* ad *dx* ex conſtr. vt *dx* ad *db*, & ex 3.6.el. vt *xy* ad *by*, quare rectangulum *dxy* æquale erit rectangulo *qby*: ergo rectang. *dby* ad rectang. *dxy*, ideſt *qby* (ob eamdem altitudinem *by*) erit vt *db* ad *qb*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Dato triangulo *abc* oporteat ex puncto in latere dato *d* rectam ducere *dxy* ita vt rectangulum *dxy*, rectangulo *axh* sit æquale.



ANALYSIS.

Sit igit. rectang. $dxy \;\underline{\Lambda}\; axh.$

Ergo E.P. $dx.\quad ax.\quad xh.\quad xy.$

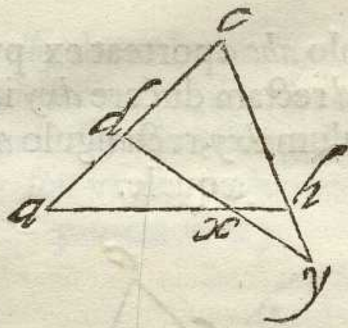
Ergo solutum. Nam cum anguli ad *x* sint æquales, & latera circa illos proportionalia, similia erunt triangula *dxa*, & *xhy*.

CONSTR. & DEMONST.

Ad rectam datam *ad*, & punctum *d* angulus fiat *ady*, angulo *ahy* æqualis, & cum anguli ad *x* sint æquales, similia erunt triangula *adx*, & *xhy*, & erit *dx* ad *ax*, vt *xh* ad *xy*: ergo rectangulum *dxy* rectangulo *axh* erit æquale. Quod faciendum erat.

ALI-

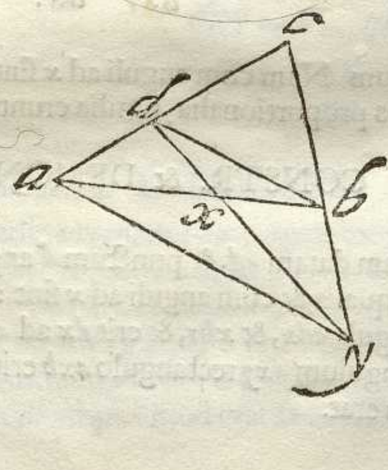
ALITER.



35.3.el. Si per puncta *a. h. d.* circulus describatur secans latus *ch* in *y*: erunt rectangula *dxy*, & *axh* æqualia, vt oportet.

PROPOSITIO XXIV.

Dato triangulo *abc* ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, ita vt triangula *adx*, & *bxy* sint æqualia.



ANALYSIS.

Sint igit. triang. dxa —Λ— bxy.
Ergo per 15.6. el. E. P. $dx.\quad xb.\quad xy.\quad ax.$
Ergo solutum.

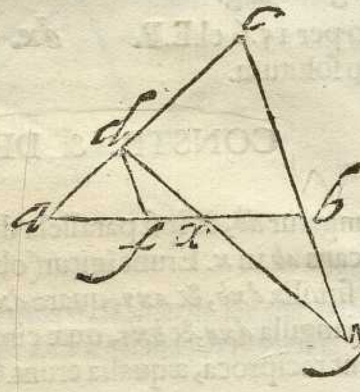
CONSTR. & DEMONSTR.

Iungatur *db*, & ipsi parallela ducatur *ay*, connectaturque *dy* secans *ab* in *x*. Erunt igitur (ob parallelas *db*, & *ay*) triangula similia *dxb*, & *axy*, quare *dx* ad *xb* erit vt *xy* ad *ax*: ergo triangula *dxa*, & *bxy*, quæ circa angulos æquales latera habent reciproca, æqualia erunt. Quod oportebat facere.

ALIA DEMONSTRATIO.

Ob parallelas *db*, & *ay*, erunt triangula æqualia *ady*, & *aby*, demptoque communi *axy*, remanebunt æqualia triangula *dxa*, *bxy*. Quod oportebat facere.

ALITER.



Ducatur lateri *cb* parallela *df*, quod idem est ac facere angulum *fdx* angulo *y* æqualem.

ANALYSIS.

Sint igit.triang.		*axd* —Λ— *bxy*.		
Ergo per 15.6.el.E.P.	*dx*.	*xb*.	*xy*.	*ax*.
Sed ob simil. *fdx*. *xby*. S.P.	*xb*.	*xy*.	*fx*.	*dx*.
Ergo ex æquo E.P.	*ax*.	*xb*.	*xb*.	*fx*.
Et comp.	*ab*.	*xb*.	*fb*.	*fx*.
Ergo solutum.				

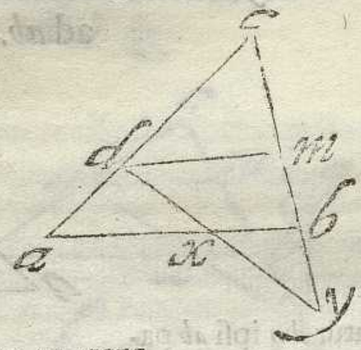
CONSTR. & DEMONSTR.

Ducatur *df* lateri *cb* parallela, & dividatur *fb* in *x* in ratione ipsius *fb* ad *ab*, vt sint proportionales *ab*. *xb*. *fb*. *fx*, & divid. *ax*. *xb*. *xb*. *fx*; cum autem ob similitudinem triangulorum *fdx*. *xby* sint proportionales *xb*. *xy*. *fx*. *dx*: erunt ex æquo proportionales *dx*. *xb*. *xy*. *ax*. (ratio communis *fx*. *xb*.) ergo triangula *axd*. *bxy*, quæ circa communem angulum *x* latera habent reciproca, æqualia erunt. Quod oportebat facere.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Dato triangulo *abc*, ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, & facere rectangula *dyx*, & *abx* æqualia.



Ducatur ipſi *ab* parallela *dm*.

ANALYSIS.

Sit igitur	*dyx* —∧— *abx*.			
Ergo E.P.	*ab*.	*dy*.	*xy*.	*xb*.
Sed ob ſimil. *xby*. *dmy*. S.P.	*xy*.	*xb*.	*dy*.	*dm*.
Ergo ex æquo E.P.	*ab*.	*dy*.	*dy*.	*dm*.
Ergo ſolutum.				

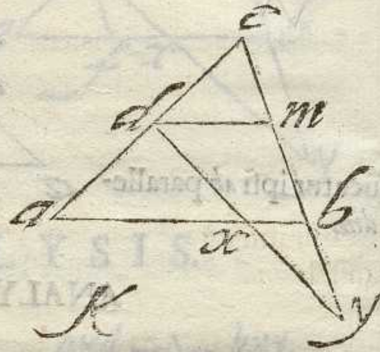
CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *ab*, & *dm* media inueniatur *dy*, quæ ex puncto *d* occurrat lateri *cb* in *y*, ſecans *ab* in *x*. Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſit *ab* ad *dy*, vt *dy* ad *dm*, & ob ſimilitudinem *dym*, & *xyb*, ſit *dy* ad *dm*, vt *xy* ad *xb*: erit ex æquo *ab* ad *dy*, vt *xy* ad *xb*, & rectangulum *dyx* rectangulo *abx* æquale. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXVI.

Dato triangulo *abc*, ex puncto in latere dato *d* rectam ducere *dxy*, & facere rectangula *dyx*. *abx* in ratione data vt *k* ad *ab*.



Ducatur *dm* ipsi *ab* parallela.

ANALYSIS

Sint igit. prop.	*dyx*.	*abx*.	*k*.	*ab*.
Sive per 1.6.el.			*k:bx*.	*abx*.
Ergo per 14.5 .el.		*dyx* — Λ —	*k:bx*.	
Et E.P.	*k*.	*dy*.	*xy*.	*bx*.
Ideſt ob ſimil. *yxb*. *ydm*.			*dy*.	*dm*.

Ergo ſolutum.

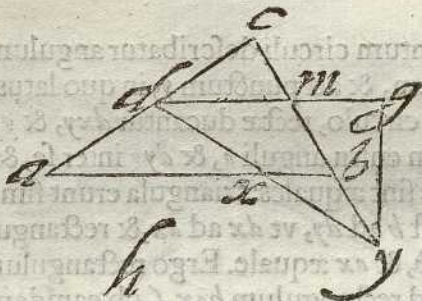
CONSTR. & DEMONSTR.

Inter *k*, & *dm* media inveniatur *dy*. Dico factum. Eſtenim *k* ad *dy*, vt *dy* ad *dm*, ideſt vt *xy* ad *xb* (ob ſimilitudinem triangulorum *yxb*, & *ydm*) quare rectangula *dyx*, & ſub *k*, & *xb* erunt æqualia. Ergo rectangulum *dyx*, ideſt ſub *k*, & *xb*, ad rectangulum *abx* (ob eamdem altitudinem *xb*)erit vt *k* ad *ab*. Quod faciendum erat.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Dato triangulo *abc* ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, & facere rectangulum *ydx* ad rectangulum *bax*, vt *h* ad *ab*.



Ducatur ipsi *ab* parallela *dm*.

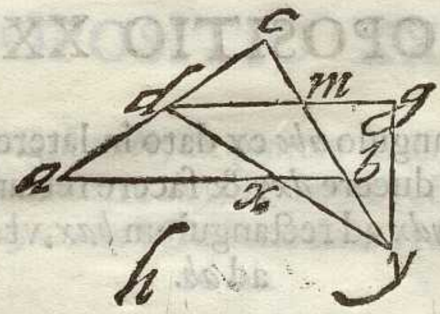
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ydx. bax. h. ab.*
Sive per 1.6.el.	*h:ax. bax.*
Ergo per 14.5.el.	*ydx* —∧— *h:ax.*
Et erunt prop.	*h. dy. dx. ax.*
Fiat angulus	*dyg* —∧— *a.*
Et erunt prop.	*dg. dy. dx. ax.*
Ergo	*dg* —∧— *h.*
Ergo solutum.	

CONST. ET DEMONST.

Ipsi *ab* parallela ducatur *dg* datæ *h* æqualis, & super *dg*

 seg-



ſegmentum circuli deſcribatur angulum capiens angulo *a* æqualem, & ad punctum *y*, in quo latus *cb* protractum ſecatur à circulo, rectæ ducantur *dxy*, & *gy*. Dico factum.

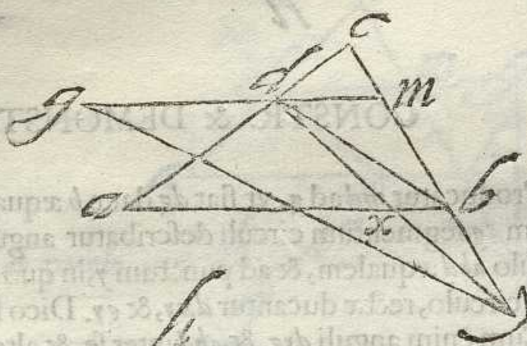
Cum enim anguli *a*, & *dyg* inter ſe, & altern. *axd*, & *xdg* inter ſe ſint æquales: triangula erunt ſimilia *axd*. *dgy*, & erit *dg*, ideſt *h* ad *dy*, vt *dx* ad *ax*, & rectangulum *ydx* rectangulo ſub *h*, & *ax* æquale. Ergo rectangnlum *ydx*, ideſt ſub *h*, & *ax* ad rectangulum *bax* (ob eamdem altitudinem *ax*) erit vt *h* ad *ab*. Quod facere oportebat.

PRO-

PROPOSIT. XXVIII.

Dato triangulo *abc*, ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, ita vt rectangulum *ydx* ad *abx* rectangulum, sit vt *h* ad *ab*.

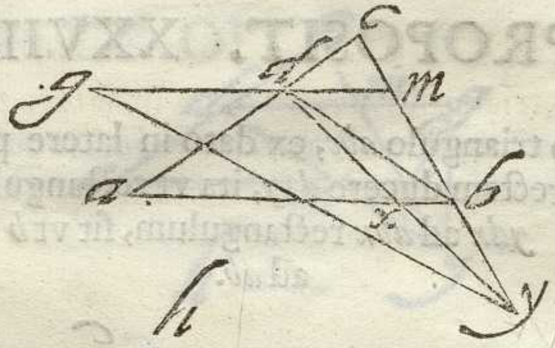
Iungatur *db*, & ipsi *ab* parallela ducatur *dm*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ydx*. *bax*. *h*. *ab*.
Sive per 1.6.el.	*h:ax*. *abx*.
Ergo per 14.5.el.	*ydx* —Δ— *h:xb*.
Et erunt prop.	*h*. *dy*. *dx*. *xb*.
Fiat angulus	*dyg* —Δ— *abd*.
Et ob simil. *dgy*.*dxb*.E.P.	*dg*. *dy*. *dx*. *xb*.
Ergo	*dg* —Δ— *h*.
Ergo solutum.	

CONS-



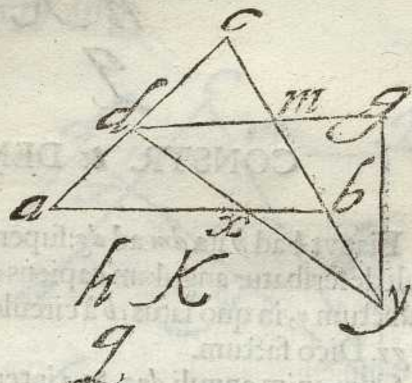
CONSTR. & DEMONST.

Producatur *md* ad *g*, vt fiat *dg* datæ *h* æqualis, & ſuper ipſam *dg* ſegmentum circuli deſcribatur angulum capiens angulo *abd* æqualem, & ad punctum *y*, in quo latus *cb* ſecatur à circulo, rectæ ducantur *dxy*, & *gy*. Dico factum.

Cum enim anguli *dyg*, & *abd* inter ſe, & alterni *dxb*, & *xdg* inter ſe ſint æquales: triangula erunt ſimilia *dyg*, & *dxb*, & erit *dg*, ideſt *h* ad *dy* vt *dx* ad *xb*, & rectangulum *ydx* rectangulo ſub *h*, & *xb* æquale. Ergo rectangulum *ydx*, ideſt ſub *h*, & *xb*, ad rectangulum *abx* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *h* ad *ab*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIX.

Dato triangulo *abc*, ex dato in latere puncto *d* rectam ducere *dxy*, ita vt rectangulum *dxy* ad *axb* rectangulum sit vt *h* ad *k*.

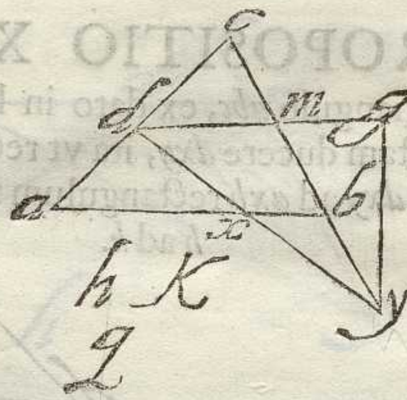


Ducatur ipsi *ab* parallela *dm*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*dxy. axb. h. k.*
Hoc est vt	*dx. ax,* & *xy. xb.* ita *h. k.*
Sive ob simil. *dyn. xyb.*	& *dy. dm.*
Idest E. P.	*ydx. dm:ax. h. k.*
Vel si fiat	*q. dm.*
Vel per 1.6. el.	*q:ax. dm:ax.*
Ergo per 14.5. el.	*ydx* —∧— *q:ax.*
Et erunt prop.	*q. dy. dx. ax.*
Fiat angulus	*dyg* —∧— *a.*
Et erunt prop.	*dg. dy. dx. ax.*
Ergo	*dg* —∧— *q.*
Ergo solutum.	

CONS-



CONSTR. & DEMONSTR.

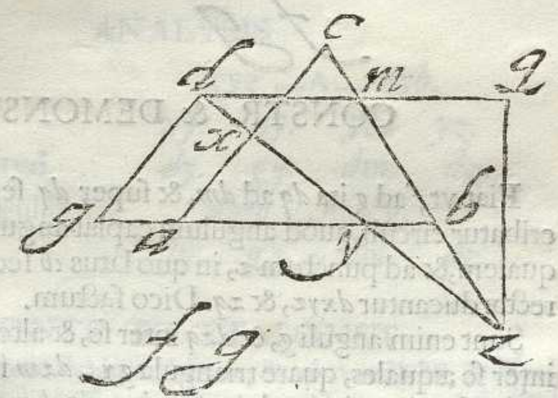
Fiat vt *k* ad *h* ita *dm* ad *dg*: ſuper quam ſegmentum circuli deſcribatur angulum capiens angulo *a* æqualem, & ad punctum *y*, in quo latus *cb* à circulo ſecatur, ducantur *dxy*, & *gy*. Dico factum.

Cum enim anguli *dyg*, & *a* inter ſe, & alterni *xdg*, & *axd* inter ſe, ſint æquales: ſimilia erunt triangula *dyg*. *axd*, & erit *dg* ad *dy*. vt *dx* ad *ax*, & rectangulum *ydx* rectangulo ſub *dg*, & *ax* æquale. Ergo rectangulum *ydx* (ideſt ſub *dg*, & *ax*) ad rectangulum ſub *dm*, & *ax* erit vt *dg* ad *dm*, ideſt vt *h* ad *k*. Sed ratio rectanguli *ydx* ad rectangulum ſub *dm*, & *ax*: componitur ex ratione *dx* ad *ax* , & ratione *dy* ad *dm*, hoc eſt (ob ſimilitudinem triangulorum *dym*, & *xyb*.) ratione *xy* ad *xb*: ergo vt *dx* ad *ax*, & *xy* ad *xb*, hoc eſt vt rectangulum *dxy* ad rectangulum *axb* ita erit *h* ad *k*. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

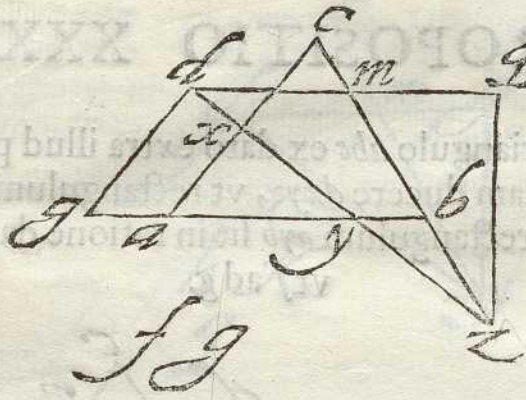
Dato ttiangulo *abc* ex dato extra illud puncto *d* rectam ducere *dxyz*, vt rectangulum *xyz* ad rectangulum *ayb* ſit in ratione data vt *f* ad *g*.



Ducantur lateribus *ac*, & *ab* parallelæ *dg*,& *dm*.

ANALYSIS.

Sint igit.prop. *xyz*. *ayb*. *f*. *g*.
Ideſt vt *xy*. *ay*,& *yz*. *yb*. ita *f*. *g*.
Sive ob ſimilitud. *dy*. *gy*,& *dz*. *dm*.ita *f*. *g*.
Vel ſi fiat *k*. *dm*.
Ergo invert. *dy*.*gy*. ita *k*. *dm*,& *dm*. *dz*. *nu. II. de rat. compoſ.*
Ideſt ita *k*. *dz*.
Fiat angulus *dzq* ⎯∧⎯ *g*.
Et E.P. *dy*. *gy*. *dq*. *dz*.
Ergo *k* ⎯∧⎯ *dq*.
Ergo ſolutum.



CONSTR. & DEMONST.

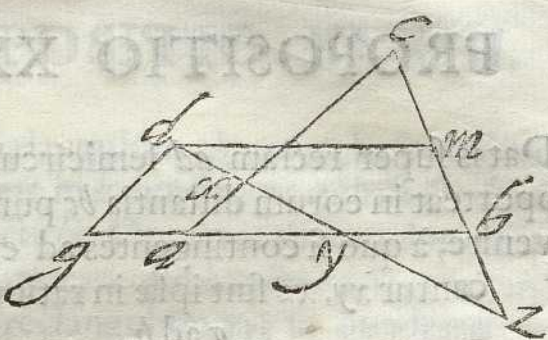
Fiat vt *f* ad *g* ita *dq* ad *dm*, & ſuper *dq* ſegmentum deſcribatur circuli,quod angulum capiat angulo *g*, ſive *a*, æqualem,& ad punctum *z*, in quo latus *cb* ſecatur à circulo, rectæ ducantur *dxyz*, & *zq*. Dico factum.

Sunt enim anguli *g*, & *dzq* inter ſe, & alterni *gyd*, & *ydq* inter ſe æquales, quare triangula *gyd*, *dzm* ſimilia erunt, & vt *dy* ad *gy* ita erit *dq* ad *dz*, ſive ita erit *dq* ad *dm*, & *dm* ad *dz*, & invert. vt *dy* ad *gy*, & *dz* ad *dm* ita *dq* ad *dm*; ſed vt *dy* ad *gy* ita eſt *xy* ad *ay* (ob parallelas *gd. ax.*) & vt *dz* ad *dm*, ita eſt *yz* ad *yb*(ob parallelas *dm. yb.*) ergo vt *xy* ad *ay*,& *yz* ad *yb*, hoc eſt vt rectangulum *xyz* ad rectangulum *ayb* ita erit *dq* ad *dm*, ideſt *f* ad *g*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXXI.

Dato triangulo *abc* ex puncto extra illud dato *d* rectam ducere *dxyz*, & facere rectangula æqualia *xyz*, & *ayb*.

Ducatur dg lateri ac parallela, & dm parallela lateri ab.



ANALYSIS

Sit igit.	xyz ⊐ ayb.
Ergo E.P.	$xy.\ ay.\ yb.\ yz.$
Ideſt ob ſimilitud.	$dy.\ gy.\ dm.\ dz.$
Ergo ſi fiat angulus.	dzm ⊐ g.
Erunt prop.	$dy.\ gy.\ dm.\ dz.$
Ergo ſolutum.	

CONST. ET DEMONST.

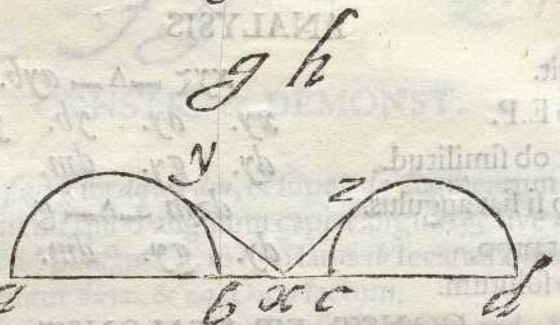
Ducantur dg, & dm lateribus ac, & ab parallelæ, & ſuper dm ſegmentum circuli deſcribatur angulum capiens angulo g, vel a æqualem, & ad punctum z, in quo latus cb ſecatur à circulo, recta ducatur $dxyz$. Dico factum.

Cum enim angulus dzm angulo g, ſive a, factus ſit æqualis: erunt (ob parallelifmum) triangula inter ſe ſimilia axy. gdy. dmz. ybz. Quare dy ad gy, ideſt xy ad ay, erit vt dm ad dz, ideſt vt yb ad yz, & rectangulum xyz rectangulo ayb æquale. Quod erat faciendum.

Eodem modo procedere licebit quando punctum intra triangulum datum fuerit, vel quando conditio æqualitatis, vel proportionis variata proponatur. Non enim omnes caſus excogitabiles exprimi poſſunt.

PROPOSITIO XXXII.

Datis super rectam *ad* semicirculis *ayb. czd*, oporteat in eorum distantia *bc* punctum *x* invenire, à quo si contingentes ad circulos ducantur *xy. xz* sint ipsæ in ratione data *g* ad *h*.



Hæc propositio eadem est cum propositione 12. huius libri. Nam tangentium *xy*, & *xz* quadrata, æqualia sunt rectangulis *axb*, & *dxc* vtrumque vtrique, quapropter cum ratio tangentium data sit, data etiam erit ratio quadratorum, videlicet rectangulorum *axb*, & *dxc*. Ergo conditio est, vt data *ad* diuisa in *b*, & *c*, rursus diuidatur in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangula *axb*. *dxc* sint in ratione data, quod factum est in prædicta propositione.

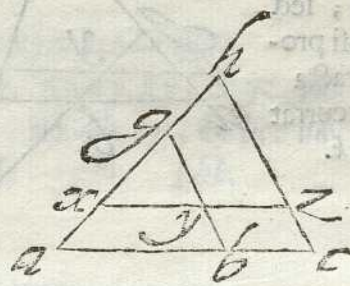
Hinc videre licet vnum idemque problema sub diuersis aspectibus apparere posse.

PROPOSITIO XXXIII.

Sit datum triangulum *abc*, cuius basis *ac* diviſa ſit vtcumque in *b* puncto, ex quo ducta ſit vtcumque recta *bg*. Oporteat rectam ducere ipſi *ac* parallelam *xyz*, quæ à recta *bg* ſecetur in *y*, ita vt rectangulum *xyz* ſit quadrato rectæ datæ *m* æquale.

Vide Renald tom. 3. pag. 333.

Hoc problema duos habet caſus, vel enim recta *bg* vni laterum *hc* eſt parallela, vel non



CASVS PRIMVS.

Sit *bg* lateri *hc* parallela, quo poſito erit *yz* ipſi *bc* æqualis.

ANALYSIS.

Sit igitur	*xyz* ═ *mm*.			
Ergo E.P.	*xy*.	*m*.	*m*.	*yz*.
Ideſt				*bc*.
Sed ob ſimil. *abg*. *xyg* S.P.	*ab*.	*ag*.	*xy*.	*xg*.

Ergo ſolutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

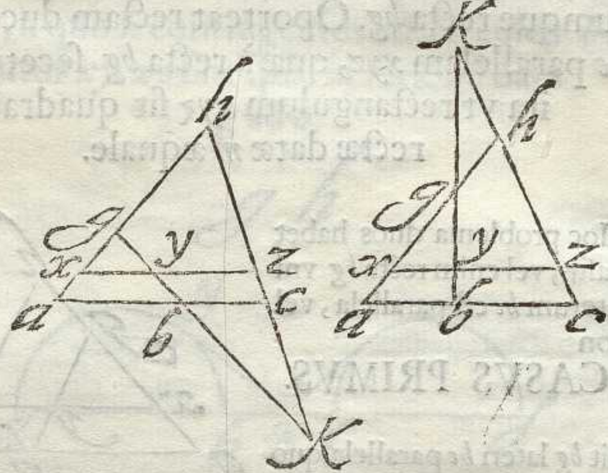
Fiat vt *bc* ad *m* ita *m* ad aliam, puta *f*, & vt *ab* ad *ag* ita *f* ad *xg*. Per *x* ducatur ipſi *ac* parallela *xyz*. Dico factum.

Cum enim ex conſtruct. ſit *ab* ad *ag*, vt *f* ad *xg*, & ob ſimilitudinem *abg*, *xyg*. ſit *ab* ad *ag*. vt *xy* ad *gx* : erit *xy* rec-

rectæ f æqualis ; sed ex constr. est bc , idest ipsi æqualis yz ad m, vt m ad f, hoc est ad xy : ergo rectangulum xyz quadrato m erit æquale. Quod erat faciendum.

CASVS SECVNDVS.

Non sit iam bg parallela lateri ch ; sed ipsi protracta occurrat in k.



m. p. q.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	xy.	m.	m.	yz.
Sed ob simil. abg. xyg. S.P.	xy.	gy.	ab.	bg.
Sive si fiat			m.	p.
Ergo ex æquo E.P.	m.	yz.	gy.	p. —
Sed ob simil. yzk. bck. S.P.	yz.	yk.	bc.	bk.
Vel si fiat			m.	q. —
Ergo ex æquo E.P.	yk.	q.	p.	gy.
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt ab ad bg ita m ad p, & vt bc ad bk ita m ad q, ipsisque

que p. q reciprocæ inveniantur gy. yk, quarum summa in prima figura, sive quarum differentia in secunda figura, sit gk. Et tandem per y ipsi abc parallela ducatur xyz. Dico factum.

Cum enim ex constr. sit yk ad q, vt p ad gy, & ob similitudinem yzk. bck sit yz ad yk, vt bc ad bk, idest vt m ad q: erit ex æquo m ad yz, vt gy ad p. Sed ob similitudinem abg. xyg est xy ad gy, vt ab ad bg, hoc est vt m ad p. Ex æquo igitur erit xy ad m, vt m ad yz. Quod facere oportebat.

ALITER.

Sit	xyz — Λ — mm.
Sed est vt	xyz. gyk. ita xy. gy, & yz. yk.
Idest ob simil.	ita ab. bg, & bc. bk.
Ergo E.P.	xyz. gyk. abc. gbk.
Idest	$m\,m$.
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

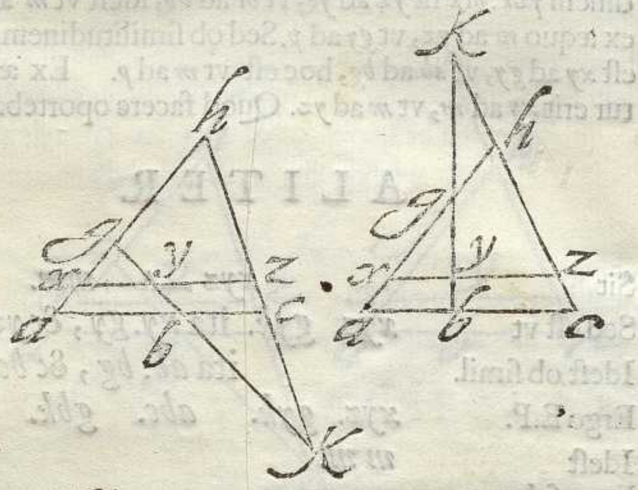
Fiat vt rectangulum abc ad gbk rectangulum ita quadratum m ad aliud, cuius lateri inveniantur reciprocæ gy. yk quarum summa, aut differentia sit gk, vt antea. Itaque rectangulum gyk quadrato m erit æquale: per y ducatur xyz. Dico factum.

Est enim vt rectangulum xyz ad gyk rectangulum, ita xy ad gy, & yz ad yk, sive ob similitudinem ita ab ad bg, & bc ad bk, hoc est ita rectangulum abc ad gbk rectangulum; sed ex constr. vt abc ad gbk ita est quadratum m ad rectangulum gyk. Ergo rectangulum xyz quadrato m erit æquale. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLION.

Si iniunctum esset rectam *xyz* ipsi *ac* parallelam ducere, quæ in *y* secta foret in ratione data, in hoc secundo casu vt *m* ad *d* ecce



	m.	*p.*	*q.*	*d.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy.*	*yz.*	*m.*	*d.*
Sed ob simil. *xyg. abg.* S. P.	*xy.*	*gy.*	*ab.*	*bg.*
Sive si fiat			*m.*	*p.*
Ergo ex æquo E. P.	*gy.*	*p.*	*yz.*	*d.*
Sunt autem ob simil. prop.	*yz.*	*yk.*	*bc.*	*bk.*
Sive si fiat			*d.*	*q.*
Ergo ex æquo E. P.	*gy.*	*yk.*	*p.*	*q.*

Et solutum erit, notaque constructio, & demonstratio. Et omnibus satis obvia determinatio totius problematis.

Huc vsque dicta de resolutione per proportionales sufficere videntur. Transeamus iam ad resolutionem per comparationem planorum. A-

ANALYSIS GEOMETRICA.

LIB. III.

AGENS DE RESOLVTIONE PER comparationem planorum.

INSTRUCTIO.

CVm problema propoſitum per ſimplices terminos euolui, tractarique poteſt, facillimè per argumentationes proportionalium analyſis expeditur. At verò cum per terminos compoſitos, hoc eſt ſignis plus, vel minus affectos, problema enodari debet, argumentationes lib. 2. elementorum neceſſario erunt vrſupandæ, donec propoſita proportio, ſeu æquatio ad ſimplicimos terminos fuerit reducta. Cum igitur prædicta argumentatio lib. 2. el. nil aliud ſit, quam aliqua plana in alia æqualia convertere, perſpicuum eſt totum ſcopum analyſeos in eo conſiſtere, quod plana incognita ad alia nota, vel saltem notiora, seu commodiora reducantur. Sic enim æqualia pro æqualibus subrogando, æqualia æqualibus addendo, vel ab æqualibus auferendo æqualia, tandiu prosequitur analysis vsque dum vel magnitudo incognita alij notæ æqualis, vel ad alias notas proportionalis appareat, vel tandem ad duas partes reciprocas inueniendas, seu ad aliquam trium æquationum, de quibus facta est mentio prop. 3.4.5. Introductionis deveniamus, & problema resolutum habeamus.

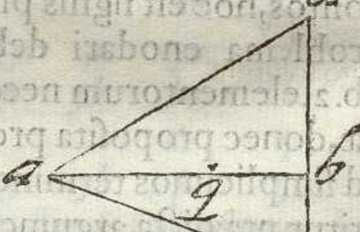
PROPOSITIO I.

Vide Franci. Schootẽ de concinandis demonst.

Data *ab* vtcumque secta in *q*: ex eius termino *b* perpendicularem excitare *bx*, ita vt coniuncta *ax* æqualis sit ipsis *qb*, & *bx* simul sumptis.

ANALYSIS.

Perspicuum est, si fiat *bd* ipsi *qb* æqualis, angulos *xad*. *xda* constituendos esse æquales. Ergo solutum.



CONS-

CONSTR. & DEMONST.

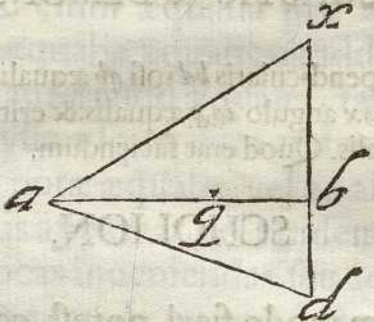
Cadat perpendicularis *bd* ipſi *qb* æqualis, iunctàque *ad*, angulus fiat *dax* angulo *adx* æqualis:& erit *ax* ipſi *xd*,ideſt *bx*, & *qb* æqualis. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Eodem modo fieri poteſt conſtructio in quocumque angulo *abx*,præter rectum, propoſito,quo in caſu,quanta ſit *ax* à trigonometria petendum eſt. In noſtro autem caſu ita procedere licet.

ANALYSIS.

Sit igitur	ax	—∧—	$bx + bd$
Et quad.per 4.2.el.	axa	—∧—	$bxb + bdb + 2dbx$
Sed per 47.1.el.	axa	—∧—	$bxb + aba$.
Ergo	$bxb + aba$	—∧—	$bxb + bdb + 2dbx$
Et auf. bxb.	aba	—∧—	$bdb + 2dbx$
Ergo ſolutum.			



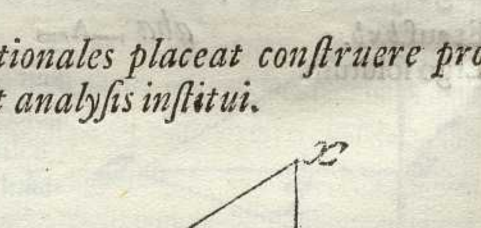
CONSTR. & DEMONSTR.

A quadrato *ab* quadratum auferatur *bd*, & residuum applicetur ad duplam *bd*, & sit latitudo proveniens *bx*. Hoc est quadratum facere *bd* cum duplo rectangulo *dbx* æquale quadrato *ab*, quare addendo quadratum *bx*, erunt quadrata *ab*, & *bx*, hoc est erit quadratum *ax* æquale quadratis *bx*, & *bd* cum duplo rectangulo *dbx*, idest quadrato *xd*: igitur ipsa *ax* ipsi *xd*, idest *bx*, & *bd* erit æqualis: quod faciendum erat.

ALITER.

Si per proportionales placeat construere problema, ita poterit analysis institui.

Bisecetur *qb* in *m*, & supponatur *by* ipsi *bx* æqualis



ANALYSIS.

Sit igit.	$ax \;\sqsupset\!\!\sqsubset\; qb + bx.$
Sed per 47.1.el.	$axa \;\sqsupset\!\!\sqsubset\; aba + bxb.$
Hoc eſt	$qyq \;\sqsupset\!\!\sqsubset\; aba + byb.$
Ergo auf. byb.	$qyq - byb \;\sqsupset\!\!\sqsubset\; aba.$
Ideſt per 6. Introd.	$2{:}qb{:}my.$
Ergo E.P.	$2qb. \quad ab. \quad ab. \quad my.$
Ergo ſolutum.	

CONST. ET DEMONST.

Biſecetur *qb* in *m*, & fiat vt dupla *qb* ad *ab* ita *ab* ad *my*. Erigatur *bx* ipſi *by* æqualis, & iungatur *ax*. Dico factum.

Cum enim ſit 2*qb* ad *ab*, vt *ab* ad *my*: erit rectangulum ſub 2*qb*, & *my*, hoc eſt differentia quadratorum *qy*, & *by* æqualis quadrato *ab*, quare addito quadrato *by*, ideſt *bx*: erit quadratum *qy* æquale quadratis *ab*, & *bx*, hoc eſt quadrato *ax*: ergo ipſa *ax* ipſi *qy*, ideſt ipſis *qb* , & *bx* æqualis erit. Quod facere oportebat.

PRO-

PROPOSITIO II.

Datam rectam in duas partes secare, quarum quadrata æqualia sint dato plano.

Esto data *ab* dividenda in *x*, vt quadrata *ax*. *xb*. æqualia sint quadrato dato *pq*. Bisecetur *ab* in *m*.

ANALYSIS.

Sint igit. $axa + xbx \;\underline{\Lambda}\; pqp.$
Sed per 9.2.el. $axa + xbx \;\underline{\Lambda}\; 2ama + 2mxm.$
Ergo $2ama + 2mxm \;\underline{\Lambda}\; pqp.$
Et dimidiand. $ama + mxm \;\underline{\Lambda}\; \frac{1}{2}pqp.$

Ergo solutum. Vlterius enim progredi non licet, cum quantitas ignota *mxm* æquari possit quantitati cognitæ. Vnde problematis constructio patet, & etiam determinatio. Nam si à dimidio quadrati *pq* auferri non possit quadratum *am*, problema erit impossibile.

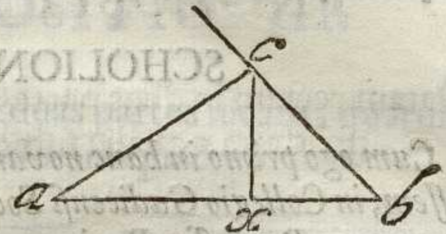
CONSTR. & DEMONST.

A dimidio quadrati *pq* (idest à quadrato rectæ, quæ media sit inter *pq*, & $\frac{1}{2}pq$) auferatur quadratum *am*, & quadrati residui sit latus *mx*. Itaque quadrata *am*. *mx* æquabuntur dimidio quadrati *pq*, & duplicando, duo quadrata *am* , & duo *mx*, hoc est quadrata *ax*, & *xb*. æqualia erunt quadrato *pq*. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLION.

Hoc problema ita positione resolvi potest. Fiat angulus *abc* semirectus, & ex puncto *a* applicetur *ac* æqualis



datæ *pq*, demittaturque perpendicularis *cx*. Dico *ax.xb* esse rectas quæsitas, quia quadratum *ac*, idest *pq* æquale erit quadratis *ax*, & *cx*, idest quadratis *ax*, & *xb*, vt oportebat.

Constat tamen problema construi non posse, si recta *ac* rectam *bc* non atingat.

QVÆSTIO.

Datum numerum 16 in duas partes dividere, quarum quadrata æqualia sint quadrato 200.

Si recta *ab* valeat 16, & quadratum *pq* valeat 200. per præcedẽtem analysim satis manifesta erit resolutio. Placet tamen hoc modo procedere. Sint partes quæsitæ *ax*, & *xb*.

ANALYSIS.

a m x b

Sint igit.	*axa* + *xbx*	—Λ—	200
Idest per 9.2.el.	2*ama* +2*mxm*	—Λ—	200
Idest quia *am* est 8.	128 +2*mxm*	—Λ—	200
Ergo aufer. 128. erit	2*mxm*	—Λ—	72
Et dimidiando	*mxm*	—Λ—	36
Et extrahendo radices	*mx*	—Λ—	6
Ergo, quia *am* est 8. erit	*ax.*	—Λ—	14
Et	*xb.*	—Λ—	2

Sunt

Sunt igitur 14,& 2 numeri,de quibus quærebatur. Quod ex ipsa analysi demonstrari potest.

SCHOLION.

Cum ego primo in hanc novam methodum incidissem; in Collegio Gadicensi Societatis Jesu Mathematum Professor Regius erat R.P. Josephus de Cañas eiusdem Societatis, in omni litterarum genere Vir eruditissimus, qui speciosam Algebram quà plenè imbutus erat, vnicam viam analyticam ad Matheseos penetralia pertingenda, esse credebat. Quid mirum, cum tot doctissimi viri huc vsque id ipsum sibi firmiter habuerint persuasum. Cum igitur ipse Pater analysim circa lineas geometricè versari vidisset, ipsam approbavit, & libenter amplexus fuit. Cupiebat tamen eam circa numeros æquè versantem, vt methodus vniversalis dici posset, non eo contentus, quod ex geometrica analysi operatio arithmetica deduceretur; sed ipsos numeros in analysi colludentes volebat. Id propterea facere conatus sum, an consecutus fuero ex proposita quæstione, & alijs huius operis iudicandum relinquo.

PRO-

PROPOSITIO III.

Datam rectam in duas partes secare, quarum quadrata differant quadrato dato. *Vide Renald tom. 3. pag. 408.*

Esto data *ab* dividenda in *x*, vt differentia quadratorum *ax*. *xb* æqualis sit quadrato *pq*.

Dividatur *ab* bifariam in *m*, & erit $2mx$ differentia partium *ax*. *xb*, eritque rectangulum sub *ab*, & $2mx$, nempe sub aggregato, & differentia laterum, æquale differentiæ quadratorum *ax*.*xb*. Vnde analysis ita procedit. *Per 7. Introd.*

ANALYSIS.

Sit igitur $axa - bxb = pqp$.
Hoc est per 7. Introd. $ab:2mx = pqp$.
Et dissolv. E.P. $ab.\ pq.\ 2mx.$
Ergo solutum

CONSTR. & DEMONSTR.

Ad datas *ab*.*pq* tertia proportionalis inveniatur, cuius dimidia sit *mx*. Dico factum.

Cum enim sint proportionales *ab*. *pq*. $2mx$, rectangulum sub *ab*, & $2mx$, idest differentia quadratorum *ax*.*xb* æquabitur quadrato *pq*. Quod erat faciendum.

QVÆSTIO.

Vide Renald tom. 3. pag. 208.

Datum numerum 13 in duas partes secare, quarum quadrata differant dato numero plano 26.

$a \quad m \quad x \quad b$

Valeat 13 quælibet recta ab, & secetur bifariam in m, & sint partes quæsitæ ax, & xb.

ANALYSIS.

Sint igitur.	$axa - xbx = 26.$
Idest per 6. Introd.	$ab : 2mx$
Vel, quia ab est 13.	$26\, mx.$
Ergo part. per 26. erit	$mx = 1.$
Et quia am est $6\frac{1}{2}$. erit	$ax = 7\frac{1}{2}.$
Et	$xb = 5\frac{1}{2}.$

Sunt igitur $7\frac{1}{2}$, & $5\frac{1}{2}$ numeri, de quibus quærebatur.

PROPOSITIO IV.

Data differentia laterum, dataque summa quadratorum, ipsa latera ad invenire.

Sit data *ab* differentia partium *ax*.*bx*, de quibus quæritur, data autem *pq*, cuius quadrato æquari debeant quadrata *ax*, & *bx*. Bifcecetur *ab* in *m*.

ANALYSIS.

Sint igit.	$axa + bxb$ —Λ— pqp.
Sed per 10.2.el.	$axa + bxb$ —Λ— $2ama + 2mxm$.
Ergo	$2ama + 2mxm$ —Λ— pqp.
Et dimiando	$ama + mxm$ —Λ— $\frac{1}{2}pqp$.
Ergo folutum.	

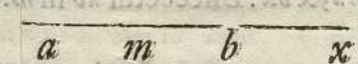
CONSTR. & DEMONST.

A dimidio quadrato *pq* (ideſt eius rectæ, quæ media ſit inter *pq*, & $\frac{1}{2}pq$) auferatur quadratum *am*, ſitque latus quadrati reſidui *mx*. Itaque quadratà *am*. *mx* æquabuntur dimidio quadrato *pq*, & duplicando, duo quadrata *am*, & duo *mx*, ideſt quadrata *ax*, & *bx* æqualia erunt quadrato *pq*. Quod erat, &c.

QVÆSTIO.

Quæruntur duo numeri, qui differant 4, & ipsorum quadrata componant $68\frac{1}{2}$.

Si *ab* valeat 4, & *pq* ſit latus quadrati $68\frac{1}{2}$. per præcedentem analyſim manifeſta erit reſolutio. Placet tamen more arithmetico in hunc modum procedere.



Sint numeri quæſiti *ax*, & *bx*, quorum differentia *ab* ſit 4, & ſemidifferentia *am* ſit 2.

ANALYSIS.

Sint igit.	$axa + bxb$ —Λ—	$68\frac{1}{2}$
Ideſt per 10.2.el.	$2ama + 2mxm$.	
Et dimidiando	$ama + mxm$ —Λ—	$34\frac{1}{4}$
Hoc eſt	4	
Ergo aufer. 4. erit	mxm —Λ—	$30\frac{1}{4}$
Et extrahendo √.	mx —Λ—	$5\frac{1}{2}$
Ergo, quia *am* eſt 2. erit	ax. —Λ—	$7\frac{1}{2}$
Et quia *mb* eſt 2. erit	bx. —Λ—	$3\frac{1}{2}$

Sunt igitur numeri quæſiti $7\frac{1}{2}$, & $3\frac{1}{2}$, qui differunt 4, & ipſorum quadrata componunt $68\frac{1}{2}$, vt oportebat.

PROPOSITIO V.

Data differentia laterum, dataque differentia quadratorum, ipsa latera adinvenire.

Sint $ax.bx$ latera quæsita, quorum differentia sit data ab, sitque data pq, cuius quadrato æquari debeat differentia quadratorum $ax.bx$.

Quoniam igitur bisecta ab in m est mx semisumma partium $ax.\ bx$, & rectangulum sub ab, & $2mx$ (videlicet sub aggregato, & differentia laterum) æquale differentiæ quadratorum $ax.\ bx$; analysis ita se habebit. *per 8. Introd.*

ANALYSIS.

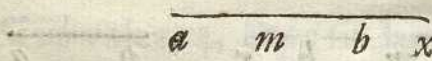
Sit igitur	$axa - bxb = pqp.$
Hoc est per 8. Introd.	$ab{:}2mx = pqp.$
Et dissolv. E. P.	$ab.\ pq.\ pq.\ 2mx.$
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

Ad datas $ab.\ pq$ tertia inveniatur, cuius dimidia sit mx. Itaque proportionales erunt $ab.\ pq.\ 2mx$: quare rectangulum sub ab, & $2mx$, idest differentia quadratorum $ax.\ bx$ æqualis erit quadrato pq. Igitur rectas invenimus $ax.\ bx$, &c. Quod erat faciendum.

QVÆSTIO.

Duos numeros exhibere, qui differant 4, & eorum quadrata 28.



Sint numeri quæsiti *ax*, & *bx*, quorum differentia *ab* valeat 4.

ANALYSIS.

Sint igit.	$axa - bxb \llcorner\!\wedge\!\lrcorner\ 28.$
Ideſt per 8. Introd.	$ab{:}2mx.$
Sive quia *ab* eſt 4.	$8\,mx.$
Ergo part. per 8. erit.	$mx \llcorner\!\wedge\!\lrcorner\ 3\frac{1}{2}$
Et quia *am* eſt 2 erit.	$ax \llcorner\!\wedge\!\lrcorner\ 7\frac{1}{2}$
Et quia *mb* eſt 2 erit	$bx \llcorner\!\wedge\!\lrcorner\ 1\frac{1}{2}$

Sunt igitur $7\frac{1}{2}$, & $1\frac{1}{2}$ numeri, de quibus quærebatur.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Datam rectam ab dividere in x, vt quadrata partium ad quadratum differentiæ earundem ſit vt fh ad hk.

$a \quad m \quad x \quad b \qquad\qquad f \quad g \quad h \quad k$

Biſecetur ab in m, & erit $2mx$ differentia partium $ax.xb$, adeoque $4mxm$ ipſius differentiæ quadratum. *per 7. Introd.*

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$axa + xbx.$	$4mxm. fh. hk$
Ideſt per 9. 2. el.	$2ama + 2mxm$	
Et dimid. conſeq.		$2mxm \quad gh.$
Ergo divid. E. P.	$2ama.$	$2mxm. fg. gh$
Et dimid. primos	$ama.$	$mxm. fg. gh.$
Ergo ſolutum.		

CONST. ET DEMONST.

Fiat gh ipſius hk dimidia, & vt fg ad gh ita quadratum am ad quadratum mx. Dico factum.

Cum enim ſit quadratum am ad quadratum mx, vel duo quadrata am ad duo mx, vt fg ad gh: erunt compon. duo quadrata am, & duo mx, hoc eſt quadrata ax, & xb ad duo quadrata mx, vt fh ad gh, & duplicando conſequentes, quadrata ax, & xb ad quatuor quadrata mx, videlicet ad quadratum differentiæ partium ax, & xb, vt fh ad hk. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSIT. VII.

Datam rectam ab protrahere ad x, vt quadratum ax ad rectangula abx, & axb sit vt mq ad mp.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	axa.	$abx + axb$.	$u\imath q$.	mp.
Ideſt per 2.2.	$axb + xab$			
Ideſt per 3.2.	$axb + abx + aba$			
Ergo conv. E. P.	axa.	aba.	mq.	pq.
Ergo ſolutum.				

CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt pq ad mq ita quadratum ab ad quadratum ax. Dico factum.

Cum enim ſit quadratum ax, ideſt rectangulum axb cum rectangulo xab, vel cum rectangulo abx, & quadrato ab, ad quadratum ab, vt mq ad pq: erit convert. quadratum ax ad rectangula axb, & abx vt mq ad mp. Quod facere oportebat.

QVÆSTIO.

Duos numeros invenire, qui differant 5. ita vt quadratum maioris ad rectangulum ſub ipſis, vna cum rectangulo ſub minore, & differentia vtriuſque ſit vt 9. ad 5.

Va-

Valeat *ab*. 5, & sint quæsiti numeri *ax*, & *bx*, & sit *pq* ad *mp*, vt 9 ad 5. Ergo si analysis, vt antea, instituatur quæ satis commoda videtur, manifesta erit resolutio.

Fiat proinde vt 4, differentia 9, & 5, ad 9, ita 25. quadratum differeutiæ datæ *ad* $56\frac{1}{4}$, cuius √. est $7\frac{1}{2}$ pro *ax*: ergo *bx* erit $2\frac{1}{2}$. Sunt igitur $7\frac{1}{2}$, & $2\frac{1}{2}$ numeri, de quibus quærebatur.

PROPOSIT. VIII.

Datam rectam *ac* vtcumque sectam in *b* rursus secare in *x* inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* æquale sit rectangulo *bxc* cum quadrato *xc*.

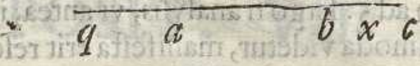
ANALYSIS.

Sit igitur	*axb* —∧— *bxc* + *xcx*.
Sed per 3.2.el.	*bcx* —∧— *bxc* + *xcx*.
Ergo	*axb* —∧— *bcx*.
Et erunt prop.	*ax*. *bc*. *xc*. *bx*.
Fiat *qa* —∧— *bc*.	*qa*.
Ergo comp. E.P.	*qx*. *qa*. *bc*: *bx*.
Ergo solutum.	

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat *qa* ipsi *bc* æqualis, & ipsis *qa*, & *bc*, idest ipsi *bc* reciprocæ inveniantur *qx*. *bx*, quarum differentia sit *qb*. Dico factum.

 Quo-



Quoniam igitur vt *qx* ad *qa* ita est *bc* ad *bx*: erit dividendo vt *ax* ad *qa*, idest ad *bc* ita *xc* ad *bx* : ergo rectangulum *axb* æquale erit rectangulo *bcx*, hoc est rectangulo *bxc* cum quadrato *xc*. Quod erat faciendum.

PROPOSIT. IX.

Datam rectam *ac* vtcumque divisam in *b*, iterum secare in *x*, inter *b*, & *c*, vt rectangulum *axb* æquale sit rectangulo *bxc* cum duobus quadratis *xc*.

ANALYSIS.

Sit igit.	*axb* —Λ— *bxc* + 2 *xcx*.			
Sed per 3.2.el.	*bcx* —Λ— *bxc* + 1 *xcx*.			
Ergo	*axb* —Λ— *bcx* + *xcx*.			
Fiat *cd* —Λ— *bc*, & erit	*bcx* —Λ— *dcx*.			
Ergo	*axb* —Λ— *dcx* + *xcx*.			
Hoc est per 3.2.el.	*axb* —Λ— *dxc*.			
Ergo erunt prop.	*ax*.	*xc*.	*xd*.	*bx*.
Et comp.	*ac*.	*xc*.	*bd*.	*bx*.
Fiat *cf* —Λ— *bd*.			*cf*.	
Ergo vt agg. ita 1. ad 1. & E.P.	*af*.	*bc*.	*cf*.	*bx*.
Ergo solutum.				

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiant *cd.* & *df* ipsi *bc* æquales, & proportionales *af.bc.cf.bx.* Dico factum.

Cum enim vt *af* ad *bc* ita sit *cf* ad *bx*, & vt differentiæ ita vnus ad vnum, erit vt *ac* ad *xc* ita *cf*, idest *bc* ad *bx*, & rectangulum *axb* æquale rectangulo *dxc*, idest rectangulo *dcx*, & quadrato *xc*, vel propter æquales *bc*, & *cd*, rectangulo *bcx*, & quadrato *xc*; sed rectangulum *bcx* æquatur rectangulo *bxc* cum quadrato *xc*: ergo rectangulum *axb* æquale erit rectangulo *bxc* cum duobus quadratis *xc*. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO X.

Datam rectam *ab* ita secare in *x*, vt rectangula sub *ax*, & data *kq*, atque sub *xb*, & data *kp* simul sumpta æquali a sint dato quadrato *m*.

ANALYSIS.

Sint igit. $ax{:}kq + xb{:}kp$ —ʌ— $m.$

Idest per 1.2.el. $ax{:}pq + ax{:}kp + xb{:}kp$ —ʌ— $m.$

Hoc est per eamdem $ax{:}pq + ab{:}kp$ —ʌ— $m.$

Ergo solutum.

CONSTR. & DEMONSTR.

A dato quadrato *m* auferatur rectangulum sub *ab*, & *kp*; & residuum applicetur ad datam *pq*, sitque latitudo proveniens *ax*. Hoc est facere plana sub *ax*, & *pq*, atque sub *ab*, & *kp* æqualia quadrato *m*. Dico factum.

Est enim rectangulum sub *ax*, & *pq* cum rectangulo sub *ab*, & *kp*, idest cum recta ngulis sub *ax*, & *kp*, atque sub *xb*, & *kp*, æquale quadrato *m*; sed rectangula sub *ax*, & *pq*, atque sub *ax*, & *kp* æquantur rectangulo sub *ax*, & *kq* : ergo rectangula sub *ax*, & *kq*, & sub *xb*, & *kp* æqualia erunt dato quadrato *m*. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

Determinatio cuiuscumque problematis ex ipsa patet analysi. Ergo in proposito casu nil aliud determinatur, nisi quod rectangulum sub datis *ab*, & *kp* minus sit quadrato dato *m*.

QVÆSTIO.

Vide Franci. Schootē de concinandis demonst.

Oenopola duplex habet vinum, vnius 8 stufris, alterius 14 stufris constat cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita vt dolium, vel 80 cantharos vini vendere posit 700 stufris.

Quæritur quot cantharos vtriusque ad mixtionem sumere debeat?

Hanc

Hanc quæstionem supponendo *ab* valere 80, *kq*.14, *kp*. 8, & *m* 700. geometrice per præcedentem analysim resolvere, & demonstrare licet. At vero si sola quæritur resolutio, hoc modo procedendum erit.

$a \quad x \quad b$

Valeat quælibet recta *ab* 80, & sit *ax* numerus cantharorum vini 14 stufris, & *xb* numerus cantharorum vini 8 stufris: ergo 14 *ax*, & 8 *xb* æquabuntur 700.

ANALYSIS

Sint igit.		$14ax + 8xb$	—Λ—	700
Idest per 1.2.el.	$6\,ax$	$+\ 8ax + 8xb$	—Λ—	700
Vel per eamdem	$6ax$	$+\ 8ab$	—Λ—	700
Idest, quia *ab* est 80.		640		
Ergo aufer. 640. erit	$6ax$		—Λ—	60
Ex sexti part.	ax		—Λ—	10
Vnde	xb		—Λ—	70

Ergo solutum, & patet 10 cantharos vini 14 stufris, & 70 cantharos vini 8 stufris sumendos esse, cum 10 per 14, & 70 per 8 faciant 700. vt petitur.

ALIA

ALIA QVÆSTIO.

Vide Schooté ibidem. Ancilla forum petit habens $9\frac{1}{2}$ ſtufros, vt ijs poma, & pira emat. Vbi veniens 10 poma ipſi offeruntur 1 ſtufro, & 25 pira 2 ſtufris. Quæritur ſi vtriuſque frutus ſimul 100 habere velit, quot poma, & pira ſeorſim accipere debeat?

Valeat quælibet recta *ab* $9\frac{1}{2}$, & ſit *ax* numerus ſtufrorum, quibus poma, & *xb* numerus ſtufrorum, quibus pira emere debeat. Cum igitur 10 poma 1 ſtufro, & etiam $12\frac{1}{2}$ pira 1 ſtufro offerantur: erunt $10\,ax$, & $12\frac{1}{2}\,xb$ æquales 100.

ANALYSIS.

Sint igit. $10ax + 2\frac{1}{2}xb$ —Λ— 100

Ideſt per 1.2. el. $10ax + 10xb + 2\frac{1}{2}xb$ —Λ— 100

Et per eamdem $10ab + 2\frac{1}{2}xb$ —Λ— 100

Ideſt, quia *ab* eſt $9\frac{1}{2}$ 95.

Ergo auf. 95. erunt $2\frac{1}{2}xb$ —Λ— 5

Et xb —Λ— 2

Vnde ax —Λ— $7\frac{1}{2}$.

Ergo ſolutum, & patet 2 ſtufros in pira, & $7\frac{1}{2}$ in poma impendendos eſſe, cum $7\frac{1}{2}$ ſtufris 75 poma, & 2 ſtufris 25 pira emere poſsit, & ſimul ſint 100 vt petitur.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Datam rectam ab ita secare in x, vt rectangulum axb æquale sit rectangulis sub ax parte maiori, & data g, atque sub xb, & data k.

Fiant mb ipsi g, & ap ipsi k æquales.

ANALYSIS.

Sint igitur.	$axb \;-\!\Lambda\!-\; ax:g + xb:k.$
Hoc est	$axb \;-\!\Lambda\!-\; ax:mb + xb:ap$
Ergo auf. $ax:mb$ erit	$axb - ax:mb \;-\!\Lambda\!-\; xb:ap$
Idest per 1.2.el.	$axm \;-\!\Lambda\!-\; xb:ap$
Ergo E.P.	$ap.\ ax.\ xm.\ xb.$
Et per divis.	$ap.\ px.\ xm.\ mb.$

CONST. ET DEMONST.

Ipsis ap, & mb (idest k, & g) reciprocæ inveniantur px, & xm, quarum summa sit pm (idest differentia qua data ab superat datas g, & k, seu mb, & ap) Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales $ap.\ px.\ xm.\ mb$, & per compos. $ap.\ ax.\ xm.\ xb$: erit rectangulum axm rectangulo sub xb, & ap æquale, & addendo rectangulum sub ax, & mb, erit rectangulum axb rectangulis sub ax, & mb, atque sub xb, & ap æquale. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO

$\overline{a \quad p \quad x \quad m \quad b}$ $\quad \begin{matrix} g \\ k \end{matrix}$

Oportet datas *g*, & *k*, siue *mb*, & *ap* minores esse simul sumptas data recta *ab*, & præterea rectangulum sub ipsis *g*, & *k*, siue *mb*, & *ap* non maius esse quadrato dimidiæ *mp*, ideſt quadrato ſemidifferentiæ inter *ab*, & datas *g*, & *k* simul ſumptas, nam ſi maius fuerit problema conſtrui non poterit, ſi vero æquale vnica erit reſolutio, ſi tandem minus, duæ erunt ſolutiones, vt conſtat ex prop. 1. Introduct.

Quod autem rectæ *g*, & *k* ſimul ſumptæ minores debeant eſſe data *ab*, ex ipſa analyſi ſatis patet, & hoc modo oſtendi poteſt.

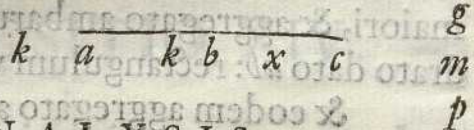
Ponitur axb —ʌ— $ax{:}g + xb{:}k$.
Ergo erit axb maius $ax{:}g$ ſua parte.
Et per 1.6.el. xb maior g.
Ead. ration. erit axb maius $xb{:}k$ ſua parte.
Et per 1.6.el. ax maior k.

Ergo *xb*, & *ax*, ideſt *ab* maior debet eſſe rectis *g*, & *k*. &c.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Datam rectam *ab* protrahere ad *x*, vt differentia quadrati dati *g* super rectangulum *abx* ad quadratum *bx* sit vt *m* ad *p*.



ANALYSIS.

Sint igitur prop.	*gg—abx. bxb. m. p.*
Vel si fiat *abc* —∧— *gg.*	*abc.*
Et erit per 1.2.el.	*ab:xc. bxb. m. p.*
Vel si fiant	*ab. kb.*
Vel per 1.6.	*ab:xc. kb:xc*
Ergo per 14.5. el.	*bxb* —∧— *kb:xc.*
Et E.P.	*kb. bx. bx. xc.*
Et per compos.	*kb. kx. bx. bc.*
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum *abc* quadrato dato *g* æquale, & vt *m* ad *p* ita *ab* ad *kb*, ipsisque *kb*, & *bc* reciprocæ inveniantur *kx*, & *bx*, quarum differentia sit ipsa *kb*. Dico factum.

Sunt enim ex constr. proportionales *kb. kx. bx. bc*, & per divis. *kb. bx. bx. xc*, quare rectangulum sub *kb*, & *xc* quadrato *bx* erit æquale: ergo rectangulum sub *ab*, & *xc*, differentia scilicet inter rectangulum *abc*, idest quadratum *g*, & rectangulum *abx*, ad quadratum *xb*, ideſt ſub *kb*, & *xc* (ob eamdem altitudinem *xc*) erit vt *ab* ad *kb*, ſeu vt *m* ad *p*. Quod oportebat facere.

PROPOSIT. XIII.

Duas rectas exhibere, vt rectangulum ſub maiori, & aggregato ambarum æquale ſi quadrato dato *ab*: rectangulum vero ſub minore, & eodem aggregato æquale quadrato dato *cd*.

Sint rectæ, de quibus quæritur *ax*, & *xy*, quarum *ax* ſit maior, & aggregatum erit *ay*.

ANALYSIS.

Sit igitur	*yax* —Λ— *aba.*
Et etiam	*ayx* —Λ— *cdc.*
Ergo	*yax*+*ayx* —Λ— *aba*+ *cdc.*
Ideſt per 2.2.el.	*aya* —Λ— *aba* +*cdc.*

Ergo cognita iam *ay* notum erit rectangulum *yax*, &c.

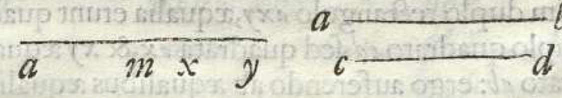
CONSTR. & DEMONSTR.

Inveniatur quadratum *ay* quadratis *ab*, & *cd* æquale, & quadratum *ab* applicetur ad ipſam *ay*, ſitque latitudo proveniens *ax*. Dico *ax*, & *xy* esse rectas, de quibus quæritur.

Quoniam igitur quadratum *ay* factum est æquale quadratis *ab*, & *cd*, & ipsum quadratum *ay* æquatur rectangulis *yax*, & *ayx*: erunt rectangula *yax*, & *ayx* æqualia quadratis *ab*, & *cd*; sed rectangulum *yax* factum est æquale quadrato *ab*, vt oportebat: ergo auferendo ab æqualibus æqualia, remanebit rectangulum *ayx* quadrato *cd* æquale, vt petebatur. Duas igitur rectas exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIV.

Duas rectas invenire, ita vt earum quadrata simul sumpta æqualia sint dato quadrato *ab*: rectangulum vero sub ipsis contentum æquale quadrato dato *cd*.



Sint rectæ lineæ, de quibus quæritur *ax*, & *xy*.

ANALYSIS.

Sint igitur $axa + xyx$ —Λ— aba

Sed etiam $2axy$ —Λ— $2cdc$.

Ergo $axa + xyx + 2axy$ —Λ— $aba + 2cdc$

Hoc est per 4.2.el. aya —Λ— $aba + 2cdc$

Cognita iam *ay* bisecetur in *m*.

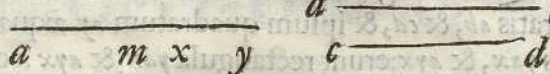
Et per 9.2.el. erunt $axa + xyx$ —Λ— $2ama + 2mxm$

Ergo $2ama + 2mxm$ —Λ— aba

Et dimidiando $ama + mxm$ —Λ— $\frac{1}{2}aba$.

Ergo solutum.

CONS-



CONSTR. & DEMONSTR.

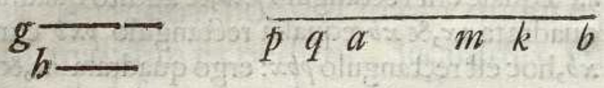
Inveniatur *ay* cuius quadratum æquale ſit quadrato *ab* cum duobus quadratis *cd*, & biſecetur *ay* in *m*. Deinde à dimidio quadrati *ab* auferatur quadratum *am*, & quadrati reſidui latus ſit *mx*. Dico *ax*, & *xy* rectas eſſe, de quibus quæritur.

Quoniam enim quadrata *am*, & *mx* æqualia ſunt dimidio quadrati *ab*: erunt (duplicando) duo quadrata *am*, & duo *mx*, hoc eſt quadrata *ax*, & *xy* quadrato *ab* æqualia, vt oportebat. Eſt autem quadratum *ay* æquale, ex conſt. quadrato *ab* cum duplo quadrato *cd*, & ex 4. 2. el. quadratis *ax*, & *xy* cum duplo rectangulo *axb*: ergo quadrata *ax*, & *xy* cum duplo rectangulo *axy*, æqualia erunt quadrato *ab* cum duplo quadrato *cd*; ſed quadrata *ax*, & *xy* æqualia ſunt quadrato *ab*: ergo auferendo ab æqualibus æqualia, remanebit duplum rectangulum *axb*, duplo quadrato *cd* æquale, adeoque rectangulum *axb* quadrato *cd* æquale, vt petebatur. Duas igitur rectas exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Datam rectam *ab* dividere in *x*, vt quadrata *ax*. *xb* simul sumpta ad rectangulum *abx* sit vt *g* ad *h*.



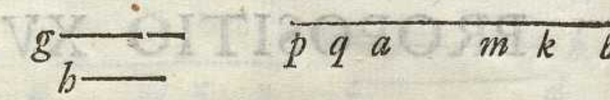
ANALYSIS.

Sint igit.prop.	$axa + xbx.$	$abx.$	$g.$	$h.$
Vel si fiant			$ph.$	$ab.$
Vel per 1.6.el.			$pbx.$	$abx.$
Ergo per 14.5.el.	$axa + xbx$	—Λ—	$pbx.$	
Et auf. *xbx*.	axa	—Λ—	$pbx - xbx.$	
Idest per 3.2.el.			$pxb.$	
Ergo E.P.	$px.$	$ax.$	$ax.$	$xb.$
Et divid.	$pa.$	$ax.$	$2mx.$	$xb.$
Et dimid.anteced.	$qa.$	$ax.$	$mx.$	$xb.$
Et per compos.	$qa.$	$qx.$	$mx.$	$mb.$
Ergo solutum.				

CONST. ET DEMONST.

Fiat vt *h* ad *g* ita *ab* ad *pb*, & agatur *qa* dimidio *pa* æqualis, bisectàque *ab* in *m*, ipsis *qa*, & *mb*, seu *am*, reciprocæ inveniantur *qx*, & *mx*, quarum differentia sit *qm*. Dico factum.

Sunt



Sunt enim ex constr. proportionales *qa. qx. mx. mb*, & per divis. *qa. ax. mx. xb*, & duplicando antecedentes *pa, ax. 2mx. xb*; sed *2mx* differentia est inter *ax*, & *xb*: ergo compon erunt proportionales *px. ax. ax. xb*, quare quadratum *ax* æquale erit rectangulo *pxb*, & addito quadrato *xb*, erunt quadrata *ax*, & *xb* æqualia rectangulo *pxb* cum quadrato *xb*, hoc est rectangulo *pbx*: ergo quadrata *ax*, & *xb*, hoc est rectangulum *pbx* ad rectangulum *abx*, ob eamdem altitudinem *bx*, erunt vt *pb* ad *ab*, idest vt *g* ad *h*. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO

Propositum problema solutum est supponendo rationem datam *g* ad *h* esse maioris inæqualitatis. Oporteat vero determinare problema, hoc est an ipsa ratio æqualitatis, minorisve inæqualitatis dari possit.

Sit.	$axa + xbx \;\_\!\wedge\!\_\; abx.$
Et aufer. *xbx*.	$axa \;\_\!\wedge\!\_\; abx - xbx.$
Idest per 3.2.el.	$axa \;\_\!\wedge\!\_\; axb.$
Et per 1.6.el. erit	$ax \;\_\!\wedge\!\_\; xb.$

Ergo patet problema quamcumque rationem admittere. Nam si ratio *g* ad *h* fuerit æqualitatis erunt plana *axa* + *xbx* æqualia pla-

no

no abx, & partes ax, & xb erunt æquales. Si vero g fuerit maior quā h erunt plana $axa + xbx$ maiora plano abx, & pars ax maior erit parte xb. Si tandem g minor ponatur minora erunt plana $axa + xbx$ plano abx & pars ax minor parte xb.

Tres igitur caſus habet problema, quorum primus, quando g ponitur maior quam h per primam analyſim expeditur, ſecundus vero, quando g & h ſunt æquales, per ijs, quæ proxime dicta ſunt enodatur. Tertius tandem, quando g ponitur minor, hoc modo reſolvitur.

$a \quad q \quad p \quad x \quad m \qquad b$ $\qquad g$ —— h ——

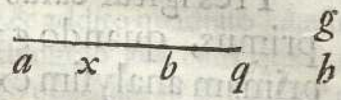
ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$axa + xbx. \quad abx. \quad g. \quad h.$
Vel ſi fiant	$pb. \quad ab.$
Ideſt per 1.6.el.	$pbx. \quad abx.$
Ergo per 14.5.el.	$axa + xbx$ —Λ— $pbx.$
Et aufer. xbx.	axa —Λ— $pbx - xbx.$
Ideſt per 3.2.el.	axa —Λ— $pbx.$
Et E.P.	$px. \quad ax. \quad ax. \quad xb.$
Et divid.	$ap. \quad ax. \quad 2xm. \quad xb.$
Et dimid. anteced.	$aq. \quad xm.$
Et per diviſ.	$aq. \quad qx. \quad xm. \quad mb.$
&c.	

PRO-

PROPOSIT. XVI.

Datam rectam *ab* ita secare in *x*, vt quadratum *ax* cum rectangulo *abx* ad quadratum *xb* sit vt *g* ad *h*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	$axa + abx.$	$xbx.$	$g.$	$h.$	
Vel si fiant			$aq.$	$bq.$	
Ergo divid.	$axa + abx -- xbx.$	$xbx.$	$ab.$	bq	
Idest per 3.2.el.	$axa + axb.$				
Vel per eamdem	$bax.$	$xbx.$	$ab.$	$bq.$	
Vel per 1.6.el.			$ab:ax.$	$bq:ax$	
Ergo per 14.5.el.	$bq:ax$ —Λ— $xbx.$				
Et E.P.	$bq.$	$xb.$	$xb.$	$ax.$	
Et per comp.	$bq.$	$xq.$	$xb.$	$ab.$	
Ergo solutum.					

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat vt *g* ad *h* ita *aq* ad *bq* (hoc est vt differentia qua *g* superat *h* ad ipsam *h* ita *ab* ad *bq*) ipsisque *bq*, & *ab* reciprocæ inveniantur *xq*, & *xb*, quarum differentia sit *bq*. Dico factum.

Sunt enim proportionales *bq. xq. xb. ab*, & per divis. *bq.*

xb.

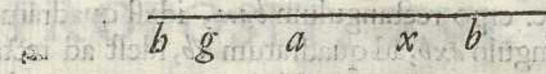
$xb.\ xb.\ ax$, quare rectangulum sub bq, & ax quadrato xb erit æquale: ergo rectangulum bax, idest quadratum ax cum rectangulo axb, ad quadratum xb, idest ad rectangulum sub bq, & ax, erit vt ab ad bq, & compon. quadratum ax cum rectangulo axb, & quadrato xb, idest cum rectangulo abx ad quadratum xb, vt aq ad bp, seu vt g ad h. Quod erat faciendum.

DETERMINATIO.

Oportet rationem datam esse maioris inæqualitatis, nam plana $axa+abx$ maiora sunt xbx plano. Cum solum abx maius sit xbx.

PROPOSIT. XVII.

Datis rectis ab, & bc, secare ab in x, vt quadrata ax, & xc æqualia sint rectangulis axb, & cxb.



ANALYSIS.

Sint igit. $axa + xcx$ —∧— $axb + cxb$.
Ideſt per 1.2.el. $ac{:}xb$
Ergo ad. $2axc$ erunt $axa + xcx + 2axc$ —∧— $ac{:}xb + 2axc$
Ideſt per 4.6.el. aca
Vel ſi fiat gb —∧— ac gbg —∧— $gbx + 2axc$
Et aufer. gbx. erit $gbg - gbx$ —∧— $2axc$.
Ideſt per 2.2.el. bgx
Et E.P. gb. $2ax$. xc. gx.
Et dimid. primos. ha. ax.
Ergo per comp. E.P. ha. hx. xc. gc.
Ergo ſolutum.

CONST. ET DEMONST.

Fiat gb ipſi ac æqualis, & ha ſit eius dimidia, ipſis autem ha, & gc reciprocæ inveniantur hx, & xc, quarum ſumma ſit hc. Dico factum.

Sunt enim ex conſtr. proportionales ha. hx. xc. gc, & per diviſ. ha. ax. xc. gx, & duplicando primos gb. $2ax$. xc. gx, quare rectangulum bgx duplo rectangulo axc erit æquale, & addendo rectangulum gbx, erunt rectangula bgx, & gbx, ideſt quadratum gb, ſeu ac, hoc eſt quadrata ax, & xc cum duplo rectangulo axc æqualia rectangulo gbx, ideſt ſub ac, & xb, vna cum duplo rectangulo axc: ergo ſi auferatur duplum rectangulum axc, remanebunt quadrata ax, & xc æqualia rectangulo ſub ac, & xb, hoc eſt rectangulis axb, & cxb. Quod facere oportebat.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Datis rectis *ab*, & *bc*, secare *ab* in *x* vt quadrata *ax*, & *xc* ad rectangula *axb*, & *cxb* sint in ratione data vt *f* ad *h*.

$$\overset{q}{\overline{g\ f\ q\quad p\quad a\quad x\ b\quad c}}\qquad \frac{f}{h}$$

ANALYSIS.

Sint igitur prop. $axa + xcx.\ \ axb + cxb.\ \ f\ \ h.$

Vel per 1.6.el. $ac{:}xb.$

Vel si fiant $gb.\ \ ac.$

Vel per 1.6.el. $gbx.\ \ ac{:}xb.$

Ergo per 14.5.el. $axa + xcx$ —∧— $gbx.$

Et add. $2axc$. $axa + xcx + 2axc$ —∧— $gbx + 2axc.$

Idest per 4.2.el. $aca.$

Vel si fiat $gbq.$

Et dimid. pbq —∧— $pbx + axc.$

Et auf. pbx. $pbq - pbx$ —∧— $axc.$

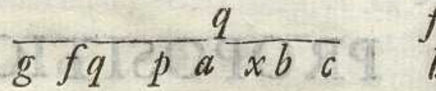
Idest per 1.2.el. $pb{:}qx.$

Ergo E.P. $pb.\ \ ax.\ \ xc.\ \ qx.$

Fiat fa —∧— pb. $fa.$

Ergo per comp. E.P. $fa.\ \ fx.\ \ xc.\ \ qc.$

Ergo solutum.



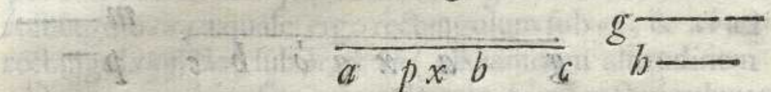
CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt h ad f ſic ac ad gb, & biſecetur in p. Deinde fiat rectangulum gbq quadrato ac æquale, & ponatur fa ipſi pb æqualis. Ipſis autem fa, & qc reciprocæ inveniantur fx, & xc, quarum ſumma ſit fc. Dico factum.

Cum enim ex conſtr. ſit fa ad fx, vt xc ad qc, & per diviſ. fa, ideſt pb ad ax, vt xc ad qx: erit rectangulum ſub pb, & qx rectangulo axc æquale, & addito rectangulo pbx, erunt rectangula ſub pb, & qx, atque pbx, hoc eſt erit rectangulum pbq rectangulis pbx, & axc æquale, & duplicando, rectangulum gbq, ideſt quadratum ac, ſeu quadrata ax, & xc cum duplo rectangulo axc æqualia erunt rectangulis gbx, & duplo axc, vnde dempto communi duplo rectangulo axc, remanebunt quadrata ax, & xc rectangulo gbx æqualia: ergo quadrata ax, & xc, ideſt rectangulum gbx ad rectangulum ſub ac, & xb, ideſt ad rectangula axb, & cxb (ob eamdem altitudinem xb) erunt vt gb ad ac, ideſt vt f ad h. Quod erat faciendum.

PROPOSIT. XIX.

Datam rectam *ac* sectam in *b* rursus secare in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangula *axb*, & *cxb* simul sumpta ad quadratum *xc* sint in ratione data vt *g* ad *h*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb + cxb.*	*cxc.*	*g.*	*h.*
Idest per 1.2.el.	*ac:xb.*			
Vel si fiant			*ac.*	*pc.*
Vel per 1.6.el.	*ac:xb.*	*cxc.*	*ac:xb, pc:xb.*	
Ergo per 14.5.el.	*cxc* —Λ— *pc:xb.*			
Et E.P.	*pc.*	*xc.*	*xc.*	*xb.*
Et convert.	*pc.*	*px.*	*xc.*	*bc.*
Ergo solutum.				

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *g* ad *h* ita *ac* ad *pc*, ipsisque *pc*, & *bc* reciprocæ inveniantur *px*, & *xc*, quarum summa sit ipsa *pc*. Dico factum.

Sunt enim ex constr. proportionales *pc. px. xc. bc*, & convert. *pc.xc.xc.xb*, quare rectangulum sub *pc*, & *xb* quadrato *xc* erit æquale. Ergo rectangulum sub *ac*, & *xb*, idest rectangula *axb*, & *cxb* ad quadratum *xc*, hoc est ad rectangulum sub *pc*, & *xb* (ob eamdem altitudinem *xb*) erunt vt *ac* ad *pc*, idest vt *g* ad *h*. Quod facere oportebat.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Datam rectam *ac* divisam in *b*, rursus dividere in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* ad rectangulum *cxb* sit in ratione data vt *m* ad *p*.

g *a* *x* *q* *b* *b* *c*   *m* —— *p* —

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*axb* + *xcx*.		*cxb*.	*m*.	*p*.
Et comp. per 1. 2. el.	*ac:xb* + *xcx*.		*cxb*.	*m* + *p*.	*p*
Et divid. per 2. 2.	*ac:xb* + *xcb*		*cxb*.	*m*.	*p*.
Ideſt per 3. 2.	*ac:xb* + *xbc* + *bcb*				
Vel ſi fiat *ga* —Λ— *bc*.		*xb:ga*.			
Hoc eſt per 1. 2.	*gc:xb* + *bcb*.		*cxb*.	*m*.	*p*.
Vel ſi fiant				*bcb*.	*cqb*
Ergo vt diff. & E.P.	*gc:xb*.		*cxq*.	*m*.	*p*.
Vel ſi fiant				*gc*.	*bc*.
Vel per 1. 6. el.				*gc:xb*,	*bc:xb*.
Ergo per 14. 5. el.		*bc:xb* —Λ— *cxq*.			
Et E.P.	*bc*.	*xc*.	*xq*.	*xb*.	
Et per diviſ.	*bc*.	*xb*.	*xq*.	*qb*.	

Ergo ſolutum.

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat *ga* ipsi *bc* æqualis, & vt *m* ad *p* ita quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*, & ita *gc* ad *bc*, ipsisque *bc*, & *qb* reciprocæ inveniantur *xb*, & *xq*, quarum differentia sit *qb*. Dico factum.

Cum enim ex constr. sint proportionales *bc*. *xb*. *xq*. *qb*, & per compos. *bc*. *xc*. *xq*. *xb*: erit rectangulum sub *bc*, & *xb* rectangulo *cxq* æquale: ergo rectangulum sub *gc*, & *xb* ad rectangul. *cxq*, idest sub *bc*, & *xb* (ob eamdem altitudinem *xb*) erit vt *gc* ad *bc*, seu vt quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*. Sunt autem aggregata vt vnus ad vnum: ergo rectangulum sub *gc*, & *xb* cum quadrato *bc*, hoc est rectangula sub *ac*, & *xb*, atque sub *xb*, & *ga*, seu *bc*, cum quadrato *bc*, hoc est rectangula sub *ac*, & *xb*, & *xcb* ad rectangulum *cxb* erunt vt quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*, idest vt *m* ad *p*, & compon. rectangulum sub *ac*, & *xb* cum quadrato *xc* ad rectangulum *cxb*, vt aggregatum ex *m*, & *p* ad ipsam *p*, & divid. rectangulum *axb* cum quadrato *xc* ad rectangulum *cxb*, vt *m* ad *p*. Quod erat faciendum.

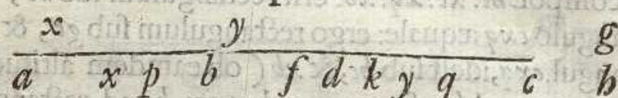
SCHOLION.

Vt autem fiat vt *m* ad *p*, ita quadratum *bc* ad rectangulum *cqb*, perspicuum est constructionem hoc modo instituendam. Fiat vt *m* ad *p* ita quadratum *bc* ad aliud, cuius lateri reciprocæ inveniantur *qb*, & *qc*, quarum differentia sit *bc*.

PRO-

PROPOSIT. XXI.

Datas rectas ab, & bc ita secare in x, & y vt rectangula axb, & byc æqualia sint quadrato dato g: rectangula verò cxb, & ayb æqualia dato quadrato h.



ANALYSIS

Sint igitur	$axb + byc$ —Λ— gg
Et etiam.	$cxb + ayb$ —Λ— hh.
Ergo per 1.2.el.	$ac{:}xb + ac{:}by$ —Λ— $gg + hh$.
Vel si fiat	$ac{:}bq$.
Ergo per 1.6.	$xb + by$ —Λ— bq.
Et erit	xb —Λ— yq.
Et si fiat pq —Λ— ab erit	axb —Λ— pyq.
Ergo per 1.cond.	$pyq + byc$ —Λ— gg.

Bisecentur pq, & bc in f, & k, & ipsa fk in d.

Ergo addendo fyf, & kyk	
Erunt per 6.2.el.	$pfp + bkb$ —Λ— $gg + fyf + kyk$.
Idest per 10.2.	$pfp + bkb$ —Λ— $gg + 2fdf + 2dyd$.

Ergo solutum, & quoniam nulla est ratio vt cognita dy, nequeat positione variari, patet punctum y ante, vel post punctum d assignari posse, vnde manifestum fit problema

duas

duas accipere solutiones. Si enim ponatur dy, erit by maior quam yc, & consequenter xb minor quam ax, propterea quod xb æquatur yq, at vero si ponatur yd, erit by minor quam yc, & consequenter xb maior quam ax.

CONSTR. & DEMONST.

Fiat rectangulum sub ac, & bq quadratis datis g, & h æquale, & ponatur pq æqualis ipsi ab. Deinde bisecentur pq, & bc in f, & k, & ipsa fk in d. Et ab aggregato quadratorum pf, & bk auferatur aggregatum quadrati dati g, & dupli quadrati fd, & quadrati residui accipiatur dimidium, cuius lateri agatur æqualis tam yd, quam dy, & ipsis yq æquales fiant xb, & xb. Dico rectas ax. xb. by. yc. vtroque modo acceptas esse divisiones quæsitas.

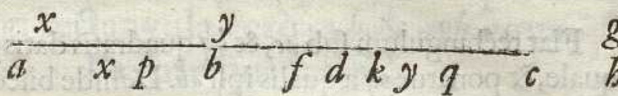
Sunt enim ex constr. quadrata pf, & bk æqualia quadrato g, cum duplo quadratorum fd, & dy, vel fd, & yd, hoc est (per 6. 2. el.) cum quadratis fy, & ky, seu yf, & yk. Vnde (per eandem) si auferantur quadrata fy, & ky, seu yf, & yk, remanebunt rectangula pyq, & byc quadrato g æqualia; sed rectangulum pyq rectangulo axb est æquale (cum ab, & pq, nec non xb, & yq factæ sint æquales) ergo rectangula axb, & byc dato quadrato g erunt æqualia, vt oportebat. Rursus quoniam xb, & yq sunt æquales, erunt xb, & by ipsi bq æquales, & (per 1. 6. el.) rectangula sub xb, & ac, atque sub by, & ac, hoc est rectangula axb, & cxb cum rectangulis byc, & ayb, æqualia erunt rectangulo sub ac, & bq, hoc est quadratis g, & h; sed rectangula axb, & byc ostensa sunt æqualia quadrato g: igitur ab æqualibus auferendo æqualia, remanebunt rectangula cxb, & ayb quadrato h æqualia, vt oportebat. Rectas igitur ab, & bc divisimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Hoc problema placet in numeris proponere, & resolvere.

QVÆSTIO.

Quæruntur quatuor numeri cum his quatuor conditionibus.



1. COND. Aggregatum primi, & secundi sit 16.
2. Aggregatum tertij, & quarti sit 11.
3. Aggregatum productorum, tum sub primo, & secundo, tum sub 3. & quarto sit 72.
4. Aggregatum productorum tum sub secundo, & summa secundi, tertij, & quarti, tum sub tertio, & summa primi secundi, & tertij sit 252.

Exponantur in directum duæ rectæ lineæ *ab*, & *bc*, quæ numeros 16, & 11 representent, & concipiatur quadratum *g* valere 72, & quadratum *h*. 252. divisisque *ab*, & *bc* in *x*, & *y*, erunt quæsiti numeri *ax*. *xb*. *by*. *yc*, & per tertiam conditionem facta *axb*, & *byc* æquabuntur quadrato *g*, & facta *cxb*, & *ayb* per quartam conditionem quadrato *h*. Et ecce tibi quæstio arithmetica in problema geometricum reducta.

Persecutà igitur analysi patet modus resolvendi, & omnium linearum valor facile determinatur in hunc modum.

Quoniam	*gg*	—∧—	72
Et	*hh*	—∧—	252
Erunt *gg*, & *hh*		—∧—	324, idest *ac:bq*.
Sed tota	*ac*	—∧—	27
Ergo	*bq*	—∧—	12
Et quia *ab* seu	*pq*	—∧—	16
Erit	*pb*	—∧—	4
Sed $\frac{1}{2}$*pq* idest	*pf*	—∧—	8
Ergo	*bf*	—∧—	4
Sed $\frac{1}{2}$*bc* idest	*bk*	—∧—	$5\frac{1}{2}$
Ergo	*fk*	—∧—	$1\frac{1}{2}$
Et $\frac{1}{2}$*fk* idest	*fd*	—∧—	$0\frac{2}{4}$

Nunc ad resolutionem. Quadrata *pf*, & *bk* sunt $94\frac{1}{4}$ quadratum autem *g*, & duplum quadratum *fd* sunt $72\frac{18}{16}$, qui numerus si auferatur à numero invento $94\frac{1}{4}$ remanebit numerus $21\frac{2}{16}$, cuius dimidium erit $10\frac{9}{16}$, à quo radix erit $3\frac{1}{4}$ pro *dy*, seu *yd*.

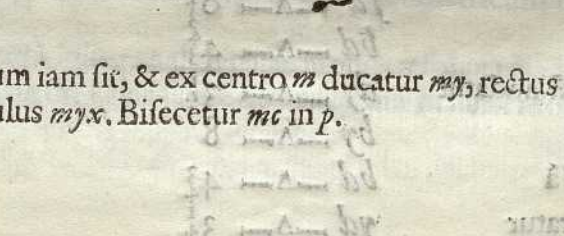
Et quoniam erat	*bf*	—∧—	4
Et	*fd*	—∧—	$0\frac{4}{3}$
Erit	*bd*	—∧—	$4\frac{4}{3}$
Ergo si addatur	*dy*	—∧—	$3\frac{1}{4}$
Erit	*by*	—∧—	8
Sed si à	*bd*	—∧—	$4\frac{3}{4}$
Auferatur	*yd*	—∧—	$3\frac{1}{4}$
Remanebit	*by*	—∧—	$1\frac{1}{2}$

Ergo numerus tertius *by* erit 8, ſeu $1\frac{1}{2}$ vnde quartus *yc* erit 3, ſeu $9\frac{1}{2}$, & cum *bq* ſit 12, & *by* 8 ſeu $1\frac{1}{2}$, erit *yq*, ideſt *xb* numerus ſecundus 4, ſeu $10\frac{1}{2}$, vnde *ax* primus erit 12, ſeu $5\frac{1}{2}$.

Sunt igitur numeri quæſiti tam 12.4.8.3, quam $5\frac{1}{2}$. $10\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $9\frac{1}{2}$. de quibus quærebatur.

PROPOSIT. XXII.

Dato ſemicirculo, cuius diameter *ab* protracta ſit ad *c*: oporteat punctum determinare *x*, inter *b*, & *c*, vt ſi ducatur contingens *xy* æqualis ſit ipſi *xc*.



Factum iam ſit, & ex centro *m* ducatur *my*, rectus igitur erit angulus *myx*. Biſecetur *mc* in *p*.

ANALYSIS.

Sit igitur	$xy -\!\!\Lambda\!\!- xc.$
Sed	$mxm -\!\!\Lambda\!\!- mym + xyx.$
Hoc est	$mbm + xcx.$
Ergo auf. xcx erit	$mxm - xcx -\!\!\Lambda\!\!- mbm.$
Hoc est per 8. Intr.	$mc{:}2px. -\!\!\Lambda\!\!- mbm.$
Et dissolv. E.P.	$mc.\ mb.\ mb.\ 2px.$
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

Dividatur mc bifariam in p, & ad mc, & mb tertia inveniatur, cuius dimidia sit px. Dico si tangens ducatur xy, ipsam æqualem esse rectæ xc. Ducatur my.

Quoniam igitur mc est ad mb, vt mb ad duplam px: erit rectangulum sub mc, & dupla px, hoc est differentia quadratorum mx, & xc æqualis quadrato mb, & addendo commune quadratum xc, erit quadratum mx æquale quadratis mb, idest my, & xc; sed ob angulum rectum y etiam est æquale quadratis my, & xy: igitur quadratum xc quadrato xy erit æquale, adeoque ipsa xy ipsi xc æqualis erit. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Perspicuum est quadratum tangentis xy æquari rectangulo axb, vnde rectangulum axb 35.3.el.
æquari debet quadrato xc, & proportionales erunt $ax.xc.xc.bx$. Et ecce tibi propositio prima lib. 1. quapropter hoc, & illud, vnum idem-

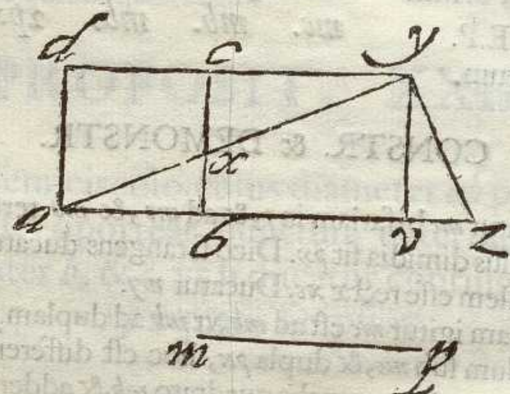
que

que problema esse concludes, cuius resolutio elegantior per proportionales videtur.

Vide Pappũ lib. 7. prop. 72 Cartesium to. 1. pag. 83. & 216. Renald. tom. 3. pag. 314.

PROPOSIT. XXIII.

Dato quadrato *ac*, ex angulo *a* ad oppositum protractum latus rectam ducere *axy*, & facere *xy* datæ *mp* æqualem.



ANALYSIS.

Sit igitur	$xy = mp.$
Fiat angulus	$vyz = xab.$
Et erit triangulum	$axb = vyz.$
Et recta	$ax = yz.$
Et ob simil. *axb. ayz.* S.P.	$ay.\ az.\ ab.\ ax.$
Hinc rectangulum	$yax = baz.$
Est autem per 47. 1. el.	$aza = aya + yzy.$
Idest	$axa.$
Ergo per 7. 2. el.	$aza = 2yax + xyx.$
Hoc est	$2baz + mpm.$
Ergo solutum	

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Inveniatur *az*, cuius quadratum æquale ſit rectangulo ſub ipſa, & dupla *ab*, vna cum quadrato dato *mp*. Deſcribatur ſuper *az* ſemicirculus ſecans protractam *dc* in *y*, ducaturque *axy*. Dico *xy* ipſi *mp* æqualem eſſe. Demittatur normalis *yv*, & iungatur *yz*. per 4. Introd.

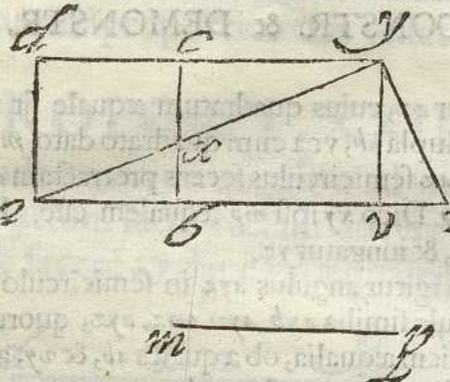
Quoniam igitur angulus *ayz* in ſemicirculo rectus eſt, erunt triangula ſimilia *axb*. *ayv*. *vyz*. *ayz*, quorum *axb*, & *vyz* erunt etiam æqualia, ob æquales *ab*, & *vy*, adeoque *ax* ipſi *yz* æqualis, eritque rectangulum *yax* rectangulo *zab* æquale, cum ob ſimilitudinem triangulorum *axb*. *ayz* proportionales ſint *ay*. *az*. *ab*. *ax*. Eſt autem quadratum *az* æquale quadrato *ay* cum quadrato *yz*, ideſt *ax*; ſed quadrata *ay*, & *ax* æquantur duplo rectangulo *ayx*, ideſt duplo *baz* cum quadrato *xy*. Ergo quadratum *az* æquale erit duplo rectangulo *baz* cum quadrato *xy*; ſed ex conſtructione factum eſt idem æquale duplo rectangulo *baz* cum quadrato *mp*: æqualia igitur erunt quadrata *xy*, & *mp*, adeoque ipſa *xy* datæ *mp* æqualis. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Hoc problema per proportionales reſolutum dedimus prop. 42. lib. 1. & ſi placuerit, ex vltima æquatione huius analyſeos etiam ad proportionales deſcendere, in hunc modum licebit.

Erat	$aza \;\text{—ʌ—}\; 2baz + mpm$
Ergo auf. $2baz$. erit	$aza - 2baz \;\text{—ʌ—}\; mpm$.
Et prop.	$az - 2ab.\ mp.\ mp.\ az.$

Et



Et quærere oportebit ipsi *mp* reciprocas *az*, & *az--2ab*, quarum differentia sit dupla *ab*. Et hoc modo quælibet æquatio in proportionales dissolvi poterit.

Etiam poterit quælibet æquatio quadrata composita ad simplicem revocari hoc modo.

Erat aza —Λ— $2baz + mpm$.
Idest per 2.2.el. $azb + baz$ —Λ— $2baz + mpm$.
Ergo auf. *baz* erit azb —Λ— $baz + mpm$.
Idest per 3.2.el. $bzb + abz$ —Λ— $abz + aba + mpm$
Ergo auf. *abz*. erit bzb —Λ— $aba + mpm$.

Et quærere oportebit quadratum *bz*, quod æquale sit quadratis *ab*, & *mp*. Et eamdem obtinebimus constructionem, quam Pappus tradidit; nos tamen in æquatione composita libenter quiescimus.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

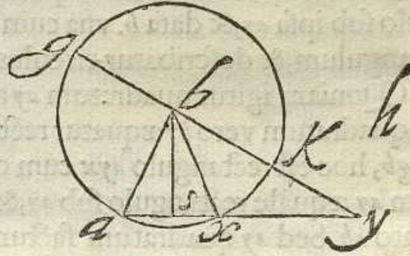
Dato trianguli rectanguli vno laterum circa rectum, dataque differentia ſegmentorum baſeos: triangulum invenire.

Vide Carteſium to. 1. pag. 317. Renald. tom. 3. pag. 412.

DATO MINORE LATERE.

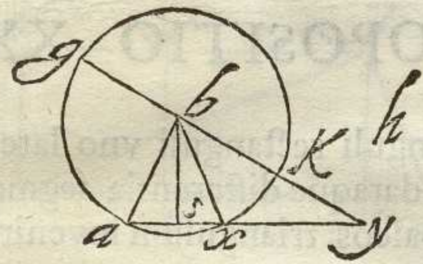
Sit data *ab* latus minus, & data *h* differentia ſegmentorum baſeos. Oporteat, &c.

Data *ab* tamquam radio circulus *agk* deſcribatur, & *xy* differentia ſit ſegmentorum baſeos, quare æquari debet datæ *h*.



ANALYSIS.

Sit igitur	$xy \;\underline{\wedge}\; h.$
Sed per 47.1.el.	$aya \;\underline{\wedge}\; aba + byb.$
Et per 6.2.el.	$byb \;\underline{\wedge}\; gyk + gbg.$
Ideſt	$aba.$
Et per 36.3.el.	$gyk \;\underline{\wedge}\; ayx.$
Ergo	$aya \;\underline{\wedge}\; ayx + 2aba.$
Ideſt	$aya \;\underline{\wedge}\; ay{:}h + 2aba.$
Ergo ſolutum.	



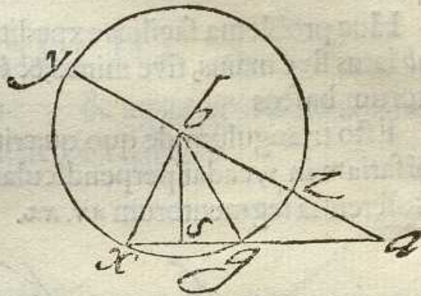
CONSTR. & DEMONSTR.

per 4. Introd. Inveniatur recta *ay*, cuius quadratum æquale ſit rectangulo ſub ipſa *ay*,& data *h*. vna cum duplo quadrato *ab*. Fiat triangulum,& deſcribatur circulus.

Quoniam igitur quadratum *ay* æquatur quadratis *ab*, & *by*,quadratum vero *by* æquatur rectangulo *gyk* cum quadrato *gb*, hoc eſt rectangulo *ayx* cum quadrato *ab*: erit quadratum *ay* æquale rectangulo ſub *ay*,& *xy* vna cum duplo quadrato *ab*. Sed *ay* quadratum factum eſt æquale rectangulo ſub *ay*, & *h* cum duplo quadrato *ab*: ergo rectangulum ſub *ay*,& *xy* cum duplo quadrato *ab*,æquale erit rectangulo ſub *ay*,& *h* cum duplo quadrato *ab*, & dempto communi duplo quadrato *ab*,rectangulum ſub *ay*, & *xy* æquale erit rectangulo ſub *ay*, & *h*, adeoque *xy*,differentia ſegmentorum baſeos, æqualis erit datæ *h*. Triangulum igitur, &c. Quod erat faciendum.

DATO MAIORE LATERE.

Sit data *ab* latus maius, & data *ga* differentia ſegmentorum baſeos.



ANALYSIS.

Quoniam per 47.1.el. $xax \;\text{—}\Lambda\text{—}\; xbx + aba.$

Ideſt $bzb.$

Et per 36.3.el. $xag \;\text{—}\Lambda\text{—}\; yaz.$

Erunt $xax + xag \;\text{—}\Lambda\text{—}\; bzb + yaz + aba.$

Hoc eſt per 6.2.el. $aba \quad + aba.$

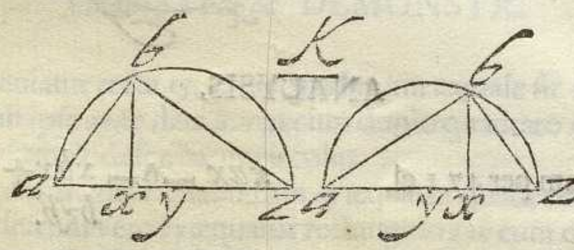
Ergo $xax + xag \;\text{—}\Lambda\text{—}\; 2aba.$

Ergo ſolutum eſt problema, & patet conſtructio, & demonſtratio, ſi inveniatur per 5. Introd. recta *xa*, cuius quadratum cum rectangulo ſub ipſa *xa*, & data *ga* æquale ſit duplo quadrato *ab*.

Dato vtrovis laterum circa rectum.

Hoc problema facilius expeditur per proportionales. Sit *ab* latus ſive maius, ſive minus, & *k* ſemidifferentia ſegmentorum baſeos.

Eſto triangulum, de quo quæritur *abz*, & diviſa baſe *az* bifariam in *y*, cadat perpendicularis *bx*. Erit igitur *xy* ſemidifferentia ſegmentorum *ax. xz.*



ANALYSIS.

prop. 7. Introd. Per 8.6.el.S.P.	*az.*	*ab.*	*ab.*	*ax.*
Ideſt	2*ay.*			
Et dimid. primos	*ay.*	$\frac{1}{2}$*ab.*	*ab.*	*ax.*

Ergo ſolutum, cum inter *ay*, & *ax* differentia ſit data, nempe recta *k*.

CONST. ET DEMONST.

Ipſis *ab*, & $\frac{1}{2}$*ab* reciprocæ inveniantur *ay. ax*, quarum differentia ſit data *k*. Super *az* dupla rectæ *ay* ſemicirculus deſcribatur, & aptetur *ab*, iungaturque *bx*. Dico triangulum *abz* eſſe, de quo quæritur.

Cum enim ex conſtr. ſit *ay* ad $\frac{1}{2}$*ab*, ideſt duplicando, *az* ad *ab*, vt *ab* ad *ax*: erit (per converſam prop. 8.6.elem.) *bx*

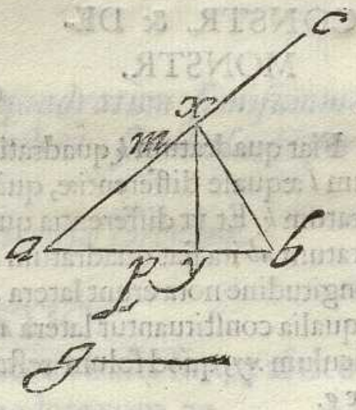
per

perpendicularis, quare segmenta baseos eruut *ax. xz*, quorum semidifferentia *xy* ex constructione æqualis est datæ. *k*. Triangulum igitur, &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXV.

Data base, altitudine , & aggregato laterum: triangulum exhibere.

Vide Vietam appendicul. 1. *R.P. Greg. t.* 1. *prop.* 82.



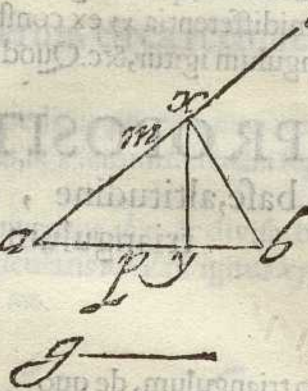
Esto triangulum, de quo quæritur *axb* super data base *ab*, latera autem *ax. xb.* datam *ac* componant , & perpendiculum *xy* æquale sit datæ *g*.

Bisecentur *ac*, & *ab* in *m*, & *p*.

ANALYSIS.

Sit igitur	*xy* —Λ— *g*.
Et sint	*axa* + *xcx* —Λ— *axa* + *xbx*.
per 9. 2. el. & 13. Int.	2*ama* + 2*mxm* ∧ 2*apa* + 2*gg* + 2*pyp*.
Et dimid.	*ama* + *mxm* —Λ— *apa* + *gg* + *pyp*.
Vel si fiat	*k:k* + *pyp*.
Et auf. *k:k*.	*ama* — *k:k* + *mxm* —Λ— *pyp*.
Vel si fiat	*ll* + *mxm*.
Sed per 14. Int. S.P.	*aca*. *aba*. *pyp*. *mxm*.
Ergo subst. E.P.	*aca*. *aba*. *ll* + *mxm*. *mxm*.
Et divid.	*aca* — *aba*. *aba*. *ll*. *mxm*.
Ergo solutum.	

CONS-



CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat quadratum *k* quadratis *ap*, & *g* æquale, & quadratum *l* æquale differentiæ, quà quadratum *am* superat quadratum *k*. Et vt differentia quadratorum *ac*, & *ab* ad quadratum *ab* ita fiat quadratum *l* ad quadratum *mx*. Vnde longitudine nota erunt latera *ax*. *xc*, quibus, super base *ab*, æqualia constituantur latera *ax*. *xb*, & demittatur perpendiculum *xy*, quod solum restat ostendere æquale esse datæ *g*.

Cum igitur ex constr. differentia quadratorum *ac*. *ab* ad quadratum *ab* sit vt quadratum *l* ad quadratum *mx* : erit compon. quadratum *ac* ad quadratum *ab*, vt quadrata *l*, & *mx* ad quadratum *mx*: sed quadratum *ac* ad quadrat. *ab* (per 14. Intr.) est vt quadratum *py* ad quadrat. *mx*: æqualia igitur erunt quadrata *l*, & *mx* quadrato *py*. Sunt autem quadrata *l*, & *k*, quadrato *am* æqualia, & quadrata *ap*, & *g* æqualia quadrato *k*: ergo æqualibus æqualia addẽdo erunt quadrata *am*, & *mx* æqualia quadratis *ap*. *g*. & *py*, & duplicando, duplum quadratorum *am*, & *mx*, idest (per 9. 2. el.) quadrata *ax*, & *xc*, sive ex constr. quadrata *ax*, & *xb*, sive (per 13. Introd.) duplum quadratorum *ap*. *py*, & *xy* æquale erit duplo quadratorum *ap*. *g*, & *py*: ergo dimidiando, & demptis quadratis *ap*. *py* remanebit quadratum *xy* quadrato *g* æquale, adeoque ipsa *xy* ipsi *g* æqualis. Quod facere oportebat.

CO-

COROLLARIVM.

Ex præcedente analysi sequens deducitur analogia ad praxim numerorum haud inutilis.

IN OMNI TRIANGVLO.

Vt differentia quadratorum summæ laterum, & baseos.

Ad quadratum baseos.

Ita est differentia, quà quadratum semisummæ laterum superat quadrata semibasis, & perpendiculi

Ad quadratum semidifferentiæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius basis sit 44 altitudo 12, & summa laterum 52.

OPERATIO.

Summa laterum 52. quadratum 2704

Basis 44. quadratum 1936 terminus secund.

differentia 768 terminus primus

Semisumma lat. 26. quadratum 676.

Semibasis 22 quad. 484.

Altitudo 12. quad. 144.

Summa 628 628

diff. 48. terminus tertius.

Ergo si 768 dat 1936. 48. dabit 121

√. est 11. semidiff. laterum.

est 26 semisumma.

Ergo summa, & differ. 37. & 15 erunt latera trianguli, de quo quæritur.

SCHO-

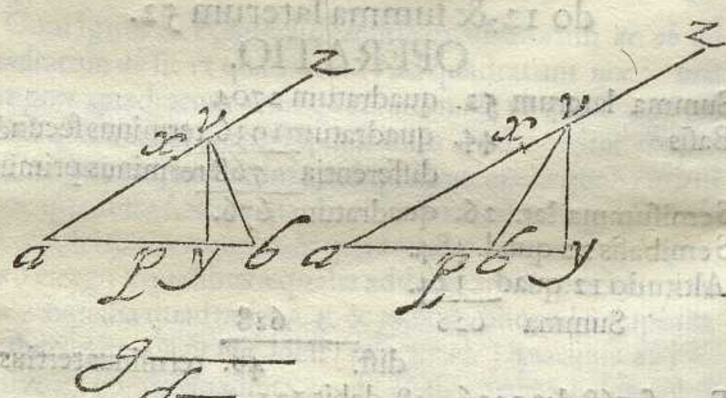
SCHOLION.

Prædicta analysis partes trianguli omnes longitudine notas exhibet; quod quidem præstare nequit ingeniosa constructio Vietæ, cum illa deducta sit ex inventione circuli, qui per duo data puncta transiens, alium contingat

R.P.Gregorius à Sancto Vincentio vt hanc propositionem enodaret ad elypsim recurrit.

PROPOSIT. XXVI.

Vide Vietam ibidem. Data base altitudine, & differentia laterum triangulum constituere.



Esto

Esto triangulum, de quo quæritur *avb* ſuper datam baſim *ab* in altitudine *vy* datæ *g* æquali, & *xv* ſemidifferentia laterum *av*. *vz*, ſive *av*.*vb* ſit datæ *d* æqualis.

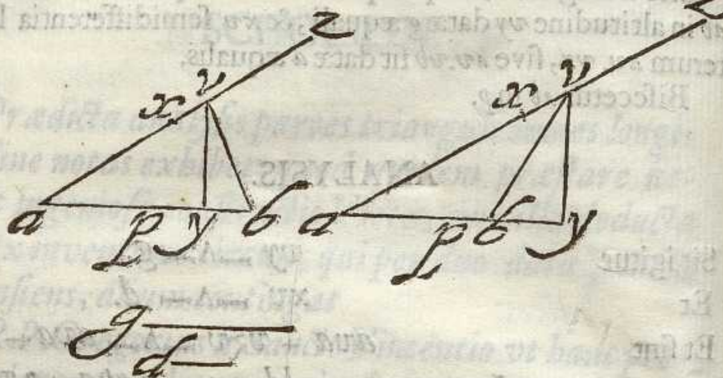
Biſecetur *ab* in *p*.

ANALYSIS.

Sit igitur	$vy \;-\!\wedge\!-\; g.$
Et	$xv \;-\!\wedge\!-\; d.$
Et ſint	$ava + vzv \;-\!\wedge\!-\; ava + vbv.$
per 9.2.el. & 13.Int.	$2axa + 2dd \;-\!\wedge\!-\; 2apa + 2gg + 2pyp.$
Et dimid.	$axa + dd \;-\!\wedge\!-\; apa + gg + pyp.$
Sive ſi fiat	$axa + dd \;-\!\wedge\!-\; kk + pyp.$
Vel auf. *dd*	$axa \;-\!\wedge\!-\; kk - dd + pyp.$
Vel ſi fiat	$axa \;-\!\wedge\!-\; ll + pyp.$
Et auf. *ll*. erit	$axa - ll \;-\!\wedge\!-\; pyp.$
Sed per 14.Int. S.P	$axa. \quad pyp. \quad apa. \quad dd.$
Ergo ſubſt. E.P.	$axa. \quad axa. - ll. \quad apa. \quad dd.$
Et conv.	$axa. \quad ll. \quad apa. \quad apa. - dd.$
Ergo ſolutum.	

CONSTR. & DEMONST.

Fiat quadratum *k* quadratis *ap*, & *g* æquale, & quadratum *l* æquale differentiæ, quà quadratum *k* ſuperat quadratum *d*, & vt differentia quadratorum *ap*, & *d* ad quadratum *ap* ita fiat quadratum *l* ad quadratum *ax*. Rectæ igitur *ax* (iam longitudine notæ) addatur *xv* æqualis datæ *d*, & fiat *xz* ipſi *ax* æqualis, & rectis *av*. *vz*. *ab* triangulum conſtituatur *avb*. Quod baſim habebit datam, & ſemidifferentia laterum *av*. *vb*, ideſt *av*. *vz*, nempe *xv* æqualis erit datæ *d*. Biſecetur *ab* in *p*, & demittatur perpendiculum *xy*, quod dico datæ *g* eſſe æquale.



Cum enim ex constr. quadratum *ax* ad quadratum *l* sit vt quadratum *ap* ad differentiam quadrati *ap* super quadratum *d*: erit convert. quadratum *ax* ad differentiam quadratorum *ax*, & *l*, vt quadr. *ap* ad quad. *d*; sed quadrat. *ax* est ad quadrat *py*, vt quadr. *ap* ad quadrat. *xv*, idest *d*: æqualis igitur erit differentia quadratorum *ax*, & *l* quadrato *py*; seu quadratum *ax* æquale quadratis *l*, & *py*, idest differentiæ quadratorum *k*, & *d* cum quadrato *py*, quare addito quadrato *d* erunt quadrata *ax*, & *d*, quadratis *k*, & *py*, idest quadratis *ap. g.* & *py* æqualia, & (duplicando) duplum quadratorum *ax*, & *d*, idest *xv*, sive per 9. 2. el. quadrata *av*, & *vz*, idest ex constr. *av*, & *vb*, sive per 13. Introd. duplum quadratorum *ap. py*, & *vy* æquale erit duplo quadratorum *ap. g.* & *py*: ergo dimid. & demptis quadratis *ap. py*: quadratum *vy* quadrato *g* erit æquale, adeoque ipsa *vy* ipsi *g* æqualis. Quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione sequens colligitur analogia, vt patet ad finem analyseos.

IN

IN OMNI TRIANGVLO.

Vt differentia quadratorum semibasis, & semidifferentiæ laterum.
Ad quadratum semibaseos.
Ita est differentia, quà quadrata semibasis, & perpendiculi superant quadratum semidifferentiæ laterum.
Ad quadratum semisummæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius basis sit 44 altitudo 12, & differentia laterum 22.

OPERATIO.

Semibasis	22.	quadratum 484 pro secund. termin.
Semidiff. later.	11.	quadratum 121
		differentia 363 pro prim. termino.

Semibasis 22 quad.	484.
Altitudo 12. quad.	144.
Summa	628.
Semidiff. lat. 11. quad.	121.
diff.	507. pro tertio termino.

Si igitur 363. dat 484. 507. dabit 676
V. est 26. pro semis later.
est 11. semidiff.

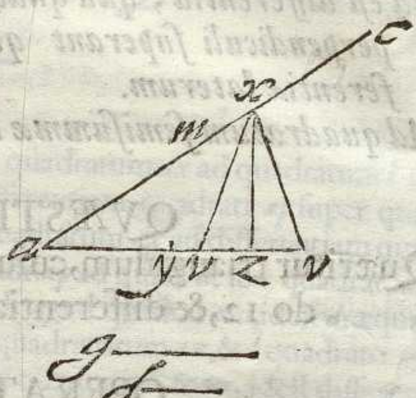
Ergo summa, & differ. 37. & 15 erunt latera trianguli, de quo quæritur.

PROPOSITIO XXVII.

Vide Renald. tom. 3. pag. 456. Marin. probl. 2.

Data altitudine, aggregato laterum, & differentia ſegmentorum baſeos: triangulum conſtituere.

Eſto triangulum, de quo quæritur axv, cuius latera $ax.xv$ datam rectam ac componant, vnde xc, & xv erunt æquales. Si altitudo xz datæ g æqualis, & diviſa tota baſe, ſive ſumma ſegmentorum baſeos av bifariam in y, erit yz ſemidifferentia eorundem ſegmentorum, & æquari debebit datæ d. Biſecetur ac in m.



ANALYSIS.

Sit igitur	$xz = g.$
Et	$yz = d.$
Et ſint	$axa + xcx = axa + xvx.$
Per 9.2.el.& 13.Int.	$2ama + 2mxm = 2aya + 2dd + 2gg$
Et dimidiando	$ama + mxm = aya + dd + gg.$
Vel ſi fiat	$= aya + kk.$
Et auf. kk.	$ama - kk + mxm = aya.$
Vel ſi fiat	$ll. + mxm = aya.$
Sed per 14. Intr. S.P.	$ama. \quad dd. \quad aya. \quad mxm.$
Ergo ſubſt. E.P.	$ama. \quad dd. \quad ll + mxm. \quad mxm.$
Et divid.	$ama - dd. \quad dd. \quad ll. \quad mxm.$
Ergo ſolutum.	

CONS-

CONSTR. ET DEMONSTR.

Fiat quadratum *k* quadratis *d*, & *g* æquale, & quadratum *l*. æquale differentiæ, quà quadratum *am* superat quadratum *k*, & vt differentia quadratorum *am*, & *d* ad quadratum *d*, ita fiat quadratum *l* ad aliud, cuius latus sit *mx*, & nota erunt latera *ax*, & *xc*, siue *xv*. Deinde vt *d* ad *mx* ita fiat *am* ad *ay*, cuius dupla *av* erit basis quæsita, siue segmentorum summa. Constituatur triangulum *axv*, & demittatur perpendicularis *xz*. Dico ipsum triangulum iam oxygonium, iam ambligonium *axv* esse, de quo quæritur.

Sunt enim ex constr. latera *ax*, & *xv*, idest *xc* rectæ datæ *ac* æqualia, & *am* ad *d* est vt *ay* ad *mx*; sed (per 14. Intr.) est *am* ad *yz*, vt *ay* ad *mx*: æqualis igitur erit *yz*, semidifferentia segmentorum baseos, rectæ datæ *d*. Cum autem ex constr. sit differentia quadratorum *am*, & *d* ad quadratum *d*, vt quadratum *l* ad quadratum *mx*, hoc est compon. quadratum *am* ad quadratum *d*, vt quadrata *l*, & *mx* ad quadratum *mx*, & etiam ex const. sit quadratum *am* ad quadratum *d*, vt quadratum *ay* ad quadratum *mx*: erunt quadrata *l*, & *mx* quadrato *ay* æqualia; sed quadratum *l* æquale est differentiæ quà quadratum *am* superat quadratum *k*, idest quadrata *d*, & *g*: ergo additis ipsis quadratis *d*, & *g*, erunt quadrata *am*, & *mx* æqualia quadratis *ay*, *d*, & *g*, idest quadratis *ay*. *yz*, & *g*, & duplicando, erit duplum quadratorum *am*, & *mx*, idest (per 9. 2. el.) quadrat. *ax*, & *xc*, siue ex const. quadrata *ax*, & *xv*, siue (per 13. Intr.) duplum quadrator. *ay*, *yz*, & *xz* æquale duplo quadratorum *ay*. *yz*, & *g*: ergo dimid. & demptis quadratis *ay*. *yz* remanebit quadratum *xz* quadrato *g* æquale, adeoque ipsa *xz*, altitudo trianguli, rectæ datæ *g* æqualis. Triangulum igitur constituimus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Hinc sequens patet analogia.

IN OMNI TRIANGVLO.

Est differentia quadratorum semisummæ laterum, & semidifferentiæ segmentorum baseos.
Ad quadratum semidifferentiæ segmentorum baseos.
Vt differentia, quà quadratum semisummæ laterum superat quadrata semidifferentiæ segmentorum baseos, & perpendiculi.
Ad quadratum semidifferentiæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius altitudo sit 20, aggregatum laterum 81, & differentia segmentorum baseos 27.

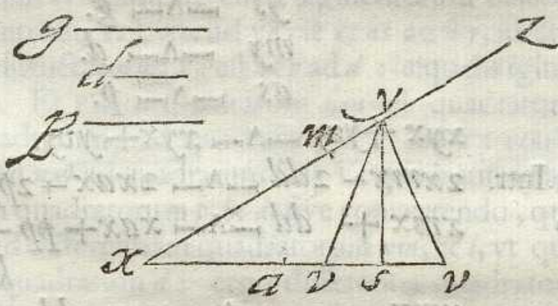
OPERATIO.

Semisumma laterum $40\frac{1}{2}$ quadr. $1640\frac{1}{4}$
Semidiff. segmentor. $13\frac{1}{2}$ quadr. $182\frac{1}{4}$ termin. secundus.
diff. 1458. termin. primus.
Semisumma laterum $40\frac{1}{2}$ quadrat. $1640\frac{1}{4}$
Semidiff. segm. $13\frac{1}{2}$ quadr. $182\frac{1}{4}$
Altitudo 20. quadr. 400.
Summa $582\frac{1}{4}$. $582\frac{1}{4}$
diff. 1058. term. tertius.
Ergo si 1458 dat $182\frac{1}{4}$. 1058 dabit $132\frac{1}{4}$
$\sqrt{}$. est $11\frac{1}{2}$. pro semidif. lat.
Est autem $40\frac{1}{2}$ semisumma.
Ergo summa, & diff. 52, & 29 erunt latera

tera trianguli quæsiti, & quoniam altitudo est data, innotescent segmenta baseos 48, & 21, quorum differentia est 27, vnde basis erit in oxygonio quidem triangulo 69, in ambligonio vero 27, quia vtrisque conveniunt data, quandoquidem in triangulo ambligonio ipsa basis differentia est segmentorum sui ipsius.

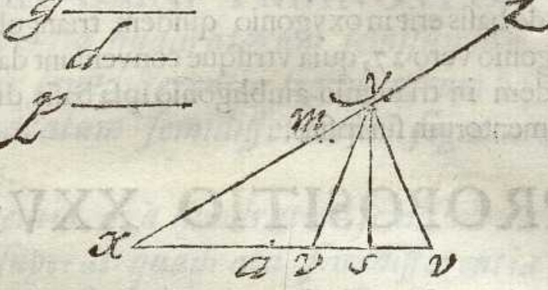
PROPOSITIO XXVIII.

Data altitudine differentia laterum, & differentia segmentorum baseos: triangulum exhibere.



Altitudo data sit *g*, semidifferentia laterum *d*, & semidifferentia segmentorum baseos sit *p*. Esto iam factum, & sit triangulum *xyv*, de quo quæritur. Sint *yv*. *yz*. æquales: Vnde si *xz*, & *xv* bisecentur in *m*, & *a*, demittaturque perpendiculum *ys*: erit *my* semidifferentia laterum, & *as* semidifferentia segmentorum baseos.

ANA-



ANALYSIS.

Sit igitur	$ys \wedge g.$
Et	$my \wedge d.$
Et	$as \wedge p.$
Et sint	$xyx + yzy \wedge xyx + yvy.$
Per 9. 2. el. & 13. Intr.	$2xmx + 2dd \wedge 2xax + 2pp + gg.$
Et dimidiando	$xmx + dd \wedge xax + pp + gg.$
Vel si fiat	$kk.$
Et auf. *dd*.	$xmx \wedge xax + kk - dd.$
Sive si fiat	$ll.$
Sive auf. *ll*.	$xmx - ll. \wedge xax.$
Sed per 14. Intr. S.P.	$xmx.\ xax.\ pp.\ dd.$
Ergo subst. E.P.	$xmx.\ xmx - ll.\ pp.\ dd.$
Et convert.	$xmx.\ ll.\ pp.\ pp - dd.$
Ergo solutum	

CONS-

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat quadratum *k* quadratis *p*, & *g* æquale, & quadratum *l* æquale differentiæ quadratorum *k*, & *d*. Et vt differentia quadratorum *p*, & *d* ad quadratum *p* ita fiat quadratum *l* ad quadratum *mx*. Nota igitur erit *xm*, cui si addatur *my* datæ *d* æqualis, & ipsi *xm* ponatur æqualis *mz*. Innotescent latera *xy*, & *yz*, sive *xy*, & *yv*. Deinde fiat vt *p* ad *d* ita *mx* ad *xa*, cuius dupla *xv* basis erit quæsita, sive segmentorum summa. Constituatur triangulum, iam oxygonium, iam ambligonium *xyv*, & demittatur perpendicularis *ys*. Dico factum.

Est enim *my* semidifferentia laterum *xy*. *yz*. sive *xy*. *yv*, datæ *d* æqualis ex constr.

Est autem *as* semidifferentia segmentorum baseos, & (per 14. Introduct.) *xm* ad *xa* est vt *as* ad *my*, ideſt ad *d*; sed ex construct. *xm* ad *xa* est vt *p* ad *d*: æqualis igitur erit *as* datæ *p*. Et etiam quadratum *xm* ad quadratum *xa* erit vt quadratum *p* ad quadratum *d*; sed ex construct. quadratum *xm* ad quadratum *l* est. Vt quadratum *p* ad differentiam qnadratorum *p*, & *d*, sive convertendo, quadratum *xm* ad differentiam quadratorum *xm*, & *l*, vt quadratum *p* ad quadratum *d*: ergo differentia quadrator. *xm*, & *l* æqualis erit quadrato *xa*, hoc est quadratum *xm* æquale erit quadratis *xa*, & *l*, sive quadrato *xa* cum differentia quadratorum *k*, & *d*, & addito quadrato *d*, erunt quadrata *xm*, & *d*, æqualia quadratis *xa*, & *k*, sive quadratis *xa*. *p*. & *g*, & duplicando, duplum quadratorum *xm*, & *d*, idest *xm*, & *my*, sive (per 9.2. el.) quadrata *xy*, & *yz*, hoc est ex constr. *xy*, & *yv*, sive (ex 13. Intr.) duplum quadratorum *xa*. *as*, & *ys*, idest *xa*. *p*, & *ys* æquale erit duplo quadratorum *xa*. *p*, & *g*: ergo dimid. & demptis quadratis *xa*, & *p* remanebit quadratum *ys* quadrato *g*, æquale, adeoque ipsa *ys* (altitudo trianguli) datæ *g* æqualis. Triangulum igitur constituimus, &c. Quod facere oportebat.

COROLLARIVM.

Hinc manifesta fit sequens analogia.

IN OMNI TRIANGVLO.

Est vt differentia quà quadratum semidifferentiæ segmentorum baseos superat quadratum semidifferentiæ laterum.

Ad ipsum quadratum semidifferentiæ segmentorum baseos.

Ita differentia , quà quadrata semidifferentiæ segmentorum, & perpendiculi superant quadratum semidifferentiæ laterum.

Ad quadratum semisummæ laterum.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius altitudo sit 16, differentia laterum 31, & differentia segmentorum baseos 33.

OPERATIO.

Semidiff. segmentor.	$16\frac{1}{2}$ quadr.	$272\frac{1}{4}$	termin. secundus.
Semidiff. later.	$15\frac{1}{2}$ quadr.	$240\frac{1}{4}$	
	diff.	32	termin. primus,
Semidiff. segmentor.	$16\frac{1}{2}$ quadr.	$272\frac{1}{4}$	
Altitudo	16 quadr.	256.	
	Sum.	$528\frac{1}{4}$.	
Semidiff. laterum	$15\frac{1}{2}$ quad.	$240\frac{1}{4}$	
	diff.	288.	term. tertius.

Ergo si 32 dat $272\frac{1}{4}$. 288 dabit $2450\frac{1}{4}$

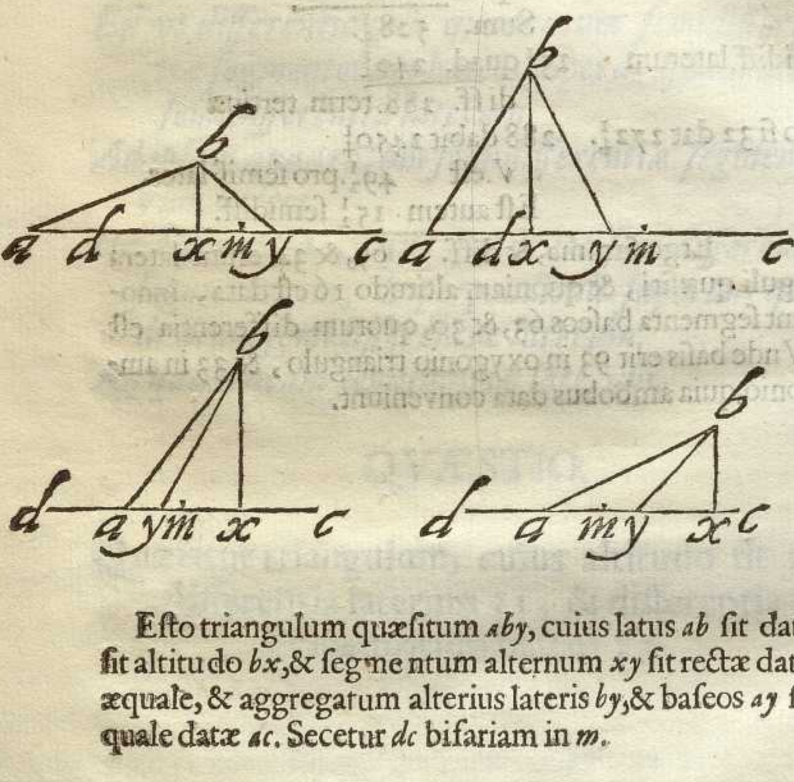
$\sqrt{}$.est $49\frac{1}{2}$.pro semis later.

Est autem $15\frac{1}{2}$ semidiff.

Ergo summa, & diff. 65, & 34 erunt latera trianguli quæsiti, & quoniam altitudo 16 est data, innotescent segmenta baseos 63, & 30, quorum differentia est 32. Vnde basis erit 93 in oxygonio triangulo, & 33 in ambligonio, quia ambobus data conveniunt.

PROPOSITIO XXIX.

Dato latcre, ſegmento baſeos alterno, & aggregato alterius lateris, & baſeos: triangulum conſtituere.



Eſto triangulum quæſitum *aby*, cuius latus *ab* ſit datum, ſit altitudo *bx*, & ſegmentum alternum *xy* ſit rectæ datæ *ad* æquale, & aggregatum alterius lateris *by*, & baſeos *ay* ſit æquale datæ *ac*. Secetur *dc* biſariam in *m*.

ANALYSIS.

Sit igitur $by \ {-}\Lambda{-}\ yc.$
Et sit $xy \ {-}\Lambda{-}\ ad.$
Ergo erit $ax \ {-}\Lambda{-}\ dy.$
Sunt autem per 12.Intr. $aba + xyx \ {-}\Lambda{-}\ byb + axa.$
Hoc est $aba + ada \ {-}\Lambda{-}\ ycy + dyd.$
Vel per 9.2.el. $2dmd + 2mym.$
Ergo bipartiendo $\frac{1}{2}aba + \frac{1}{2}ada \ {-}\Lambda{-}\ dmd + mym.$
Sive $ymy.$
Ergo solutum.

CONST. ET DEMONST.

A dimidio quadratorum *ab. ad* auferatur quadratum *dm*,& latus residui sit *my*,sive *ym*,& fiat *xy*,sive *yx* ipsi *ad* æqualis, & excitetur perpendicularis *xb*,donec occurrat datæ *ab* in *b*, ducaturque *by*. Dico triangula *aby* esse quæsita.

Cum enim ex constr. dimidium quadratorum *ab. ad* æquale sit quadratis *dm*, & *my*: erunt,duplicando, quadrata *ab. ad*, idest ex constr. *ab. xy*, sive (ex 12.Intr.)quadrata *by. ax*, sive(quia *ax*,& *dy* sunt æquales,ob æquales *ad.xy*)quadrata *by. dy* æqualia duplo quadrator. *dm.my*, hoc est (per 2.el.) quadratis *yc. dy* : ergo dempto quadrato *dy*, erit quadratum *by* quadrato *yc* æquale, adeoque ipsa *by* ipsi *yc* æqualis, ac proinde basis *ay*, & latus *by*, idest *yc* rectam datam *ac* component. Triangula igitur constituimus *aby*,&c. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLION.

Perſpicuum eſt tam in oxygonio, quam in ambligonio triangulo duas accipere problema ſolutiones, propterea, quod punctum *y* tam ante, quam poſt punctum *m* conſtitui poſſit, & *my* ſive *ym* ſemper ſemidifferentia ſit ſegmentorum *dy*, & *yc*, quorum ſemiſumma eſt *dm*.

QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius vnum latus ſit 15, ſegmentum baſis alternum 5, & aggregatum alterius lateris, & baſeos 27.

OPERATIO.

Latus datum	15.	quadratum	225
Segmentum datum	5.	quadratum	25
		Summa	250
		Semiſsis	125.
Aggregat. datum	27.		
Sement. datum.	5		
Diff.	22.		
Semiſsis	11.	quadratum	121.
		Diff.	4
		√. eſt	2
		Prædicta ſemiſsis	11
		Summa, & diff.	13. & 9. pro altero latero latere, & reliquo ſegmento baſeos indiſtinctè.

Si.

Si igitur accipiatur 13 pro altero latere, & 9 pro reliquo ſegmento: triangulum conſtituetur, cuius latera erunt 15, & 13, & baſis 14, diviſa quidem in ſegmenta 9, & 5, vnde altitudo erit 12. Si verò accipiatur 9 pro altero latere, & 13. pro reliquo ſegmento: triangulum efficietur, cuius latera erunt 15, & 9, baſis autem 18, diviſa in ſegmenta 13, & 5, vnde altitudo erit √.56. Et vtrumque triangulum ſatisfacit quæſito.

ALIA QVÆSTIO.

Quæritur triangulum, cuius vnum latus ſit 15 ſegmentum alternum 5, & aggregatum alterius lateris, & baſeos 17.

OPERATIO.

Latus datum 15. quadratum 225.
Segment. datum 5. quadratum 25
Summa 250
Dimidium 125

Aggreg. datum 17
Segment. datum 5
Summa 22.
Dimidium 11. quadratum 121
Differ. 4
√. eſt 2
prædictum dim. 11

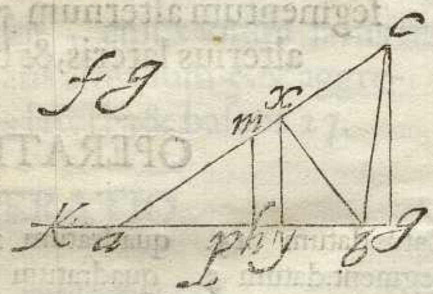
Summa, & diff. 13, & 9 pro altero latere, & reliquo ſegmento. Itaque ſi aſſumantur 13 pro latere, & 9 pro ſegmento, triangulum ambligonium conſtituetur, cuius latera erunt 15, & 13, baſis vero 4. differentia

ſeg-

ſegmentorum ſui ipſius 9,& 5, vnde altitudo erit 12. Si aſſumantur 9 pro latere, & 13 pro ſegmento , triangulum etiam ambligonium efformabitur, cuius latera 15, & 9, baſis autem 8, differentia ſegmentorum ſui ipſius 13, & 5, & altitudo erit $\surd$.65.

PROPOSITIO XXX.

Data baſe, aggregato laterum, & ratione inter latus alterum, & perpendiculum: triangulum invenire.



Sit triangulum quæſitum *axb*, in quo baſis *ab* ſit data , aggregatum laterum *ax*. *xb* ſit data *ac* , & ratio lateris *ax* ad perpendiculum *xy* ſit vt *f* ad *g*.

ANALYSIS, CONSTR. & DEMONST.

Perſpicuum eſt ſi fiat vt *f* ad *g* ita *ac* ad *cg* , & conſtituatur triangulum rectangulum *acg*, à cuius baſe *ag* abſcindatur *ab*, iunctaque *cb* , fiat angulus *cbx* angulo *acb* æqualis: triangulum *axb* eſſe, de quo quæritur, cum latus *xb* æquale ſit ipſi *xc*, & demiſſa perpendiculari *xy*, ſit *ax* ad *xy*, vt *ac* ad *cg*, ideſt vt *f* ad *g*. Quod facere oportebat.

A L I T E R.

Quoniam autem propoſitum problema poſitione, non tamen

tamen longitudine solutum est ; placet propterea aliam analysim instituere, vnde quanta sit *ax*, aut *xb* scire possimus.

Bisecentur *ac*, & *ab* in *m*, & *p*, & demittatur *mh* perpendicularis ad *ab*.

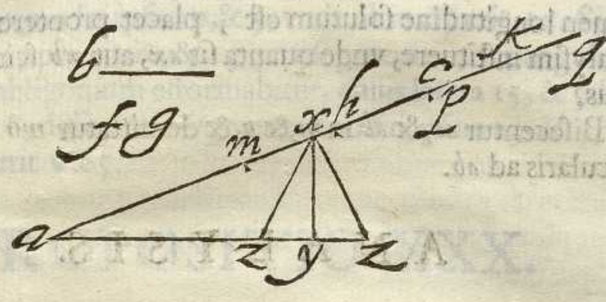
ANALYSIS.

Erunt igit. prop.	*ax.*	*ay.*	*am.*	*ab.*
Et vt diff. ita 1. ad 1.	*mx.*	*by.*	*am.*	*ab.*
Sed per 14. Intr. S. P.	*am.*	*ap.*	*py.*	*mx.*
Vel si fiat	*kb.*	*am.*		
Ergo ex æquo E. P.	*kb.*	*py.*	*ab.*	*by.*
Et vt 1. ad 1. ita diff.	*kb.*	*py.*	*ka.*	*pb.*

Ergo longitudine nota erit *py* semidifferentia segmentorum baseos. Vnde reliquæ partes trianguli longitudine etiam innotescent, & simul constr. & demonstr.

PROPOSIT. XXXI.

Data altitudine, aggregato laterum, & ratione segmentorum baseos: triangulum invenire.



Esto axz triangulum, de quo quæritur, cuius latera ax. xz datam ac componant, altitudo verò xy æqualis sit datæ b, & segmenta baseos ay. yz rationem obtineant datam vt f ad g.

Secetur bifariam ac in m, ponanturque hc, & ck datæ b, idest xy, æquales.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	ay.	yz.	f.	g.
Et quadrando	aya.	yzy.	ff.	gg.
Et divid.	$aya-yzy$.	yzy.	$ff-gg$.	gg.
Hoc est per 11. Intr.	$axa-xcx$			
Sive per 7. Introd.	$ac:2mx$.	yzy.	$ff-gg$.	gg.
Vel per 47.1.el.	$ac:2mx$.	$xcx-hch$.	$ff-gg$.	gg.
Vel si fiat			ac.	hp.
Vel per 1.6.el.			$ac:2mx$.	$hp:2mx$.
Ergo per 14.5.el.	$xcx-hch$	$=$	$hp:2mx$.	
Sive per 7. Introd.	kxh.			
Ergo E.P.	hp.	xh.	xk.	$2mx$.
Et dimid. & duplic.	hq.	xh.	xk.	mx.
Et convert.	hq.	xq.	xk.	mk.
Ergo solutum.				

CONS-

CONSTR. ET DEMONSTR.

Dividatur *ac* bifariam in *m*, & ponantur *hc*, & *ck* datæ *b* æquales. Fiat deinde vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g*, ita *ac* ad *hp*, quæ duplicetur in *q*, & ipsis *hq*, & *mk* reciprocæ inveniantur *xq*, & *xk*, quarum differentia sit *kq*. Et nota erunt latera *ax*, & *xc*. Rectis autem *ax*, & *xy*, quæ datæ *b*, sive *hc*, aut *ck*, sit æqualis, triangulum rectangulum fiat *axy*, & ducatur *xz* ipsi *xc* æqualis, secans *ay* in punctis *z*. *z*. Dico triangulum *axz* iam ambligonium, iam oxygonium esse, de quo quæritur.

Sunt enim ex constr. latera *ax*.*xz* datæ *ac* æqualia, & altitudo *xy* æqualis datæ *b*, itaque solum restat ostendere segmenta baseos *ay*.*yz* esse in ratione data vt *f* ad *g*.

Quoniam igitur ex constr. est *hq* ad *xq*, vt *xk* ad *mk*, & convert. *hq* ad *xh*, vt *xk* ad *mx*, & dimidiando, & duplicando *hp* ad *xh*, vt *xk* ad 2*mx*: erit rectangulum *kxh*, sub medijs, ideſt differentia quadratorum *xc*, & *hc*, sive *xz*, & *xy*, hoc est quadratum *yz* æquale rectangulo sub extremis *hp*, & 2*mx*. Vnde rectangulum sub *ac*, & 2*mx*, videlicet differentia quadratorum *ax*.*xc*, ideſt *ax*.*xz*, sive (per 11. Intr.) differentia quadratorum *ay*.*yz* ad rectangulum sub *hp*, & 2*mx*, ideſt ad quadratum *yz*, erit vt *ac* ad *hp*, sive ex constr. vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g*. Igitur compon. erit quadratum *ay* ad quadratum *yz*, vt quadratum *f* ad quadratum *g*, adeoque *ay* ad *yz*. vt *f* ad *g*. Quod facere oportebat.

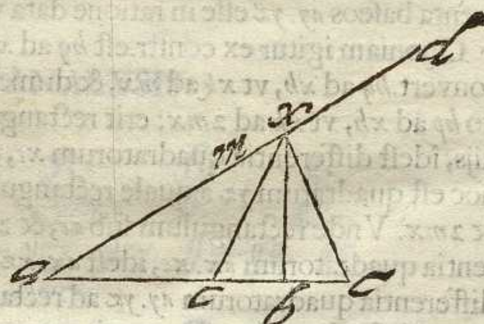
PROPOSITIO XXXII.

Vide Renald. pa. 331. tom. 3.

Data base, aggregato laterum, & ratione segmentorum baseos triangulum exhibere.

Dare basim, & segmentorum rationem, perinde est, ac si ipsa segmenta dentur, nam si fuerit data basis *ac*, & ratio segmentorum vt *s* ad *r*: fiat vt *s* ad *r* ita *ab* ad *bc*, & segmenta erunt *ab*, & *bc*.

Sint igitur segmenta baseos *ab*, & *bc*, atque aggregatum laterum data *ad*: opottet triangulum invenire.



Esto iam factum & trianguli quæsiti *axc* latus *xc* æquale sit ipsi *xd*. Bisecetur *ad* in *m*, vt *2mx* differentia sit ipsarum *ax*, & *xd*, adeoque rectangulum sub *ad*, & *2mx* æquale differentiæ quadratorum *ax*, & *xd*, videlicet sub aggregato, & differentia laterum.

Prop. 7. Introd.

ANALYSIS.

Sit igit.	$xc \sqcup\!\Lambda\!\sqcup xd.$
Sed per 11. Introd.	$axa - xcx \sqcup\!\Lambda\!\sqcup aba - bcb.$
Hoc est	$axa - xdx.$
Vel per 6. Introd.	$ad{:}2mx \sqcup\!\Lambda\!\sqcup aba - bcb.$
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONST.

Differentia quadratorum ab, & bc applicetur ad rectam datam ad, & latitudinis provenientis dimidia sit mx. Itaque rectangulum sub ad, & $2mx$ æquabitur differentiæ quadratorum ab, & bc. Erigatur perpendicularis bx donec occurrat ipsi ax iam longitudine determinatæ, in x, ducaturque xc.

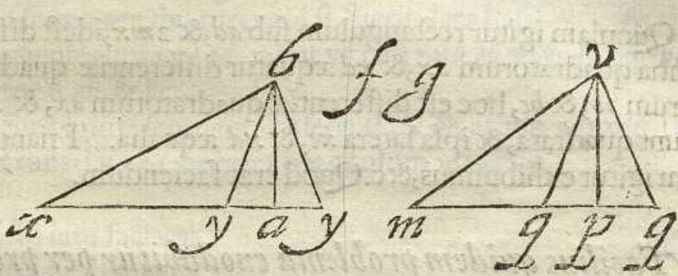
Quoniam igitur rectangulum sub ad, & $2mx$, ideſt differentia quadratorum ax, & xd æquatur differentiæ quadratorum ab, & bc, hoc eſt differentiæ quadratorum ax, & xc: erunt quadrata, & ipſa latera xc, & xd æqualia. Triangulum igitur exhibuimus, &c. Quod erat faciendum.

Facilius quidem problema enodabitur per prop. 16. Introd. Si enim fiat vt ſumma laterum ad ſummam ſegmentorum baſeos, ita ipſorum differentia ad differentiam laterum ſolutum erit. Et id ipſum etiam obtineri poterit ſi vltima æquatio in proportionales diſſolvatur.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Data altitudine, ratione laterum, & ratione segmentorum baseos: triangulum invenire.



Esto triangulum *xby*, de quo quæritur, cuius altitudo *ab* sit data, ratio autem laterum *xb. by* sit data vt *f* ad *g*, ratio vero segmentorum baseos *xa. ay* sit vt *mp* ad *pq*.

Super *mq* triangulum concipiatur *mvq* simile quæsito *xby*, & quoniam in *xby* sola pars patet *ab*, in *mvq* verò partes noscuntur *mp. pq*. Facilius propterea erit quærere *mvq*, quam *xby*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*mv.*	*vq.*	*f.*	*g.*
Et quadr.	*mvm.*	*vqv.*	*ff.*	*gg.*
Et divid.	*mvm—vqv.*	*vqv.*	*ff—gg.*	*gg*
Ideſt per 11. Introd.	*mpm—pqp.*			
Ergo ſolutum.				

CONS-

CONST. ET DEMONST.

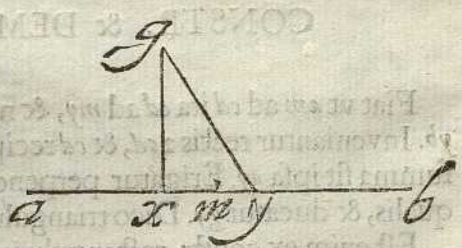
Fiat vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g* ita differentia quadratorum *mp*, & *pq* ad quadratum aliud, cuius latus ſit *qv*, & ex puncto *q* occurrat ipſa *qv* perpendiculari, quæ ex *p* erigatur, in *v*, & iungatur *mv*. Denique triangulo *mvq* ad perpendicularem *ab* ſimile fiat triangulum *xby*. Dico ipſum eſſe, de quo quæritur.

Cum enim ex conſtr. differentia quadratorum *mp*. & *pq*, ideſt differentia quadratorum *mv*, & *vq* ad quadratum *vq* ſit vt differentia quadratorum *f*, & *g* ad quadratum *g* : erit compon. quadratum *mv* ad *vq* quadratum, vt quadratum *f*, ad quadratum *g*, adeoque *mv* ad *vq*, vt *f* ad *g*. Eſt autem triangulum *xby* ex conſtr. ſimile triangulo *mvq*: ergo *xb* ad *by* erit vt *f* ad *g*, & *xa* ad *ay*, vt *mp* ad *pq*. Triangulum igitur tam oxygonium , quam ambligonium *xby* conſtituimus, &c. quod facere oportebat.

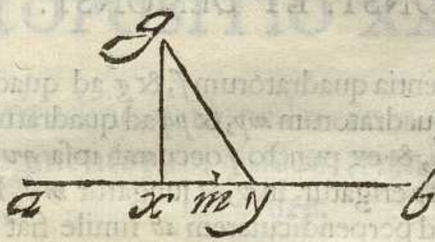
PROPOSIT. XXXIV.

Ex data recta triangulum rectangulum conſtituere dato plano æquale.

Sit data *ab* dividenda in *x*, & *y*, ita vt triangulum rectangulum lateribus conſtitutum *ax*. *xy*, & hypothenuſa *yb* æquale ſit quadrato dato *cd*. Biſecetur *ab* in *m*.



ANA-



ANALYSIS.

Sit igit.	$\frac{1}{2}axy \;{-}\Lambda{-}\; cdc$
Et quadruplic.	$2axy \;{-}\Lambda{-}\; 4cdc.$
Sint etiam	$axa + xyx \;{-}\Lambda{-}\; yby.$
Ergo	$axa + xyx + 2axy \;{-}\Lambda{-}\; yby + 4cdc.$
Vel per 4.2.el.	$aya.$
Ergo auf. *yby* erit	$aya - yby \;{-}\Lambda{-}\; 4cdc.$
Sive per 7.Intr.	$2ab:my.$
Et bipart.	$ab:my \;{-}\Lambda{-}\; 2cdc.$
Ergo E. P.	$ab. \quad 2cd. \quad cd. \quad my.$
Sive	$am. \quad cd.$
Ergo solutum.	

CONSTR. & DEMONSTR.

Fiat vt *am* ad *cd* ita *cd* ad *my*, & nota erunt segmenta *ay*. *yb*. Inveniantur rectis 2*cd*, & *cd* reciprocæ *ax*. *xy*, quarum summa sit ipsa *ay*. Erigatur perpendicularis *xg* ipsi *ax* æqualis, & ducatur *gy*. Dico triangulum *gxy* esse quæsitum.

Est enim ex constr. rectangulum *axy*, idest sub *xg*, & *xy*. duplo quadrato *cd* æquale, quare triangulum rectangulum *gxy* æquale erit dato quadrato *cd*. Est etiam est constr. *am*.

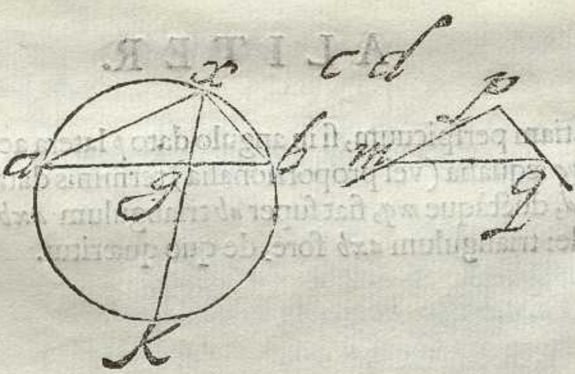
ad

ad cd, sive ab ad $2cd$, vt cd ad my, quare rectangulum sub ab, & my æquale erit duplo quadrat. cd, hoc est ex const. rectangulo axy, & duplicando, duplum rectangulum sub ab, & my, idest differentia quadratorum ay, & yb æqualis erit duplo rectangulo axy. Ergo addito quadrato yb erit quadratum ay, hoc est erunt quadrata ax, & xy cum duplo rectangulo axy æqualia quadrato yb cum duplo rectangulo axy, quo vtrimque dempto, remanebunt quadrata ax. xy, idest xq. xy, sive quadratum gy, quadrato yb æquale, adeoque ipsa gy ipsi yb æqualis. Ex recta igitur ab triangulum rectangulum constituimus, &c. Quod erat faciendum.

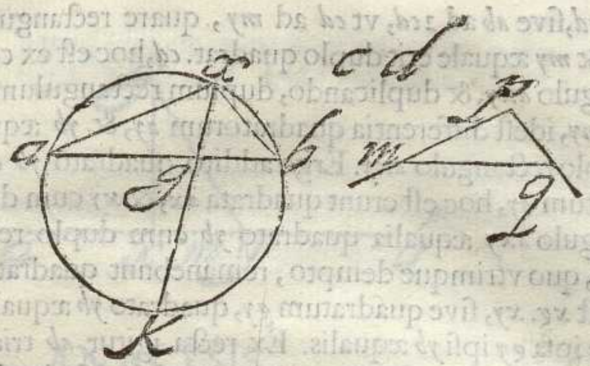
PROPOSITIO XXXV.

Data portione circuli ab in recta ab inflectere ax. xb in ratione data. Vide Papp. lib. 7. propos. 155. Renald. tom. 3. pa. 315.

Hoc idem est ac dicere: Data base, angulo verticis, & ratione laterum triangulum invenire.



Sit data portio circuli axb, & oporteat rectas inflectere ax, xb. in ratione data c ad d.



Hoc est data base *ab*, angulo verticis *axb*, seu *p*, & ratione laterum *ax*.*xb*, vt *c* ad *d*, triangulum invenire.

ANALYSIS, CONSTR. & DEMONST.

Perspicuum est, si compleatur circulus, dividanturque circumferentia quidem *ab* bifariam in *k*, recta autem *ab* in *g*, in data ratione: rectam *kgx* divisuram esse angulum *axb* bifariam, ac proinde rectas *ax*.*xb* fore in ratione data *ag*. *gb*, idest *c* ad *d*.

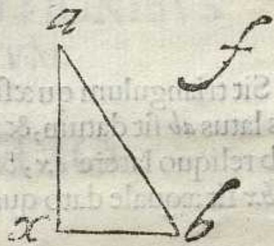
ALITER.

Etiam perspicuum, si in angulo dato *p* latera accipiantur *pm*. *pq* æqualia (vel proportionalia) terminis datæ rationis *c* ad *d*, ductàque *mq*, fiat super *ab* triangulum *axb* ipsi *mpq* simile: triangulum *axb* fore, de quo quæritur.

PROPOSIT. XXXVI.

Data base trianguli rectanguli, datoque rectangulo sub lateribus: triangulum invenire.

Sit triangulum, de quo quæritur *axb*, cuius basis *ab* sit data, & sit rectangulum sub lateribus *axb* æquale dato quadrato *f*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*f.*	*f.*	*xb.*
Et quadrando	*axa.*	*ff.*	*ff.*	*xbx.*

Ergo solutum, cum pateat aggregatum extremorum quadratum esse *ab*.

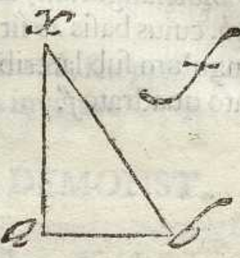
CONSTR. & DEMONSTR.

Quadrato *f* reciproca inveniantur quadrata *ax*, & *xb*, quorum summa sit quadratum datum *ab*. Erit igitur ex rectis *ax. xb. ab* triangulum constitutum rectangulum, & quia quadrata sunt proportionalia, etiam latera proportionalia erunt, videlicet *ax. f. f. xb*, & rectangulum sub *ax. xb* dato quadrato *f* erit æquale. Quod faciendum erat. *Prop. 2.* *Introd.*

PROPOSITIO XXXVII.

Dato trianguli rectanguli vno laterum circa rectum, datoque rectangulo sub reliquo, & hypothenusa: triangulum exhibere.

Sit triangulum quæsitum *axb*, cuius latus *ab* sit datum, & rectangulum sub reliquo latere *ax*, & hypothenusa *bx* sit æquale dato quadrato *f*.



ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*ax.*	*f.*	*f.*	*bx.*
Et quadrando	*axa.*	*ff.*	*ff.*	*bxb.*

Ergo solutum. Patet enim differentiam extremorum quadratum esse *ab*.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Quadrato dato *f* reciproca inueniantur quadrata *ax*. *bx*, quorum differentia sit quadratum datum *ab*. Itaque factum erit triangulum rectangulum *axb*, & quoniam quadrata *ax*. *f*. *f*. *bx* sunt proportionalia, etiam latera proportionalia erunt, & rectangulum sub *ax*, & *bx*, quadrato *f* erit æquale. Quod faciendum erat.

ANALYSIS GEOMETRICA, LIB. IV.

AGENS DE CONDITIONIBVS PROBLEMATVM.

INSTRVCTIO.

Conditiones in quocumque problemate dicuntur connexiones illæ, quas inter ſe obtinere debent datæ, & quæſitæ magnitudines.

Conditiones autem, vel inter ſe ſunt convenientes, vel communes, vel repugnantes. Convenientes quidem dicuntur quando determinatis magnitudinibus ſolum conveniunt. Communes verò quando quibuſcumque, vel ſaltem pluribus magnitudinibus aptantur. Repugnantes tandem quando ſibi adverſantur, & nullis magnitudinibus conformantur.

Hinc problema ſecundum præſcriptas conditiones determinatum, diminutum, impoſsibile,

bile, & abundans dicitur. Determinatum problema eſt quando tot præſcribuntur convenientes conditiones, quot magnitudines incognitæ poſtulantur. Diminutum verò cum plures magnitudines incognitæ depoſcuntur, quam conditiones præbentur, vel ſi totidem dantur, ſunt aliquæ inter ſe communes. Impoſsibile autem, quando propoſitæ conditiones inter ſe repugnant, & nullis magnitudinibus applicari poſſunt. Abundans tandem quando plures conditiones ſtatuuntur, quam incognitæ magnitudines deſiderantur.

Porro conditiones interdum explicitæ, interdum implicitæ proponuntar. Itaque non abs re erit, ſi Analyſta, prius quam reſolutionem aggrediatur, conditiones perpendat, & naturam problematis cognoſcat, vt, ſi completum ſit, determinatas quærat magnitudines; ſi vero diminutum, terminos, vel ordinem omnium reſolutionum poſsibilium exhibeat; ſi autem impoſsibile repugnantiam conditionum oſtendat; & ſi tandem abundans fuerit problema, ſuperfluas, & ineptas reijciat conditiones.

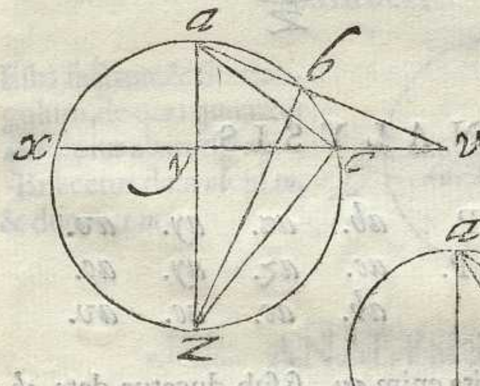
Huc vſque de problematibus completis egimus, de diminutis, & impoſsibilibus nunc reſtat agendum.

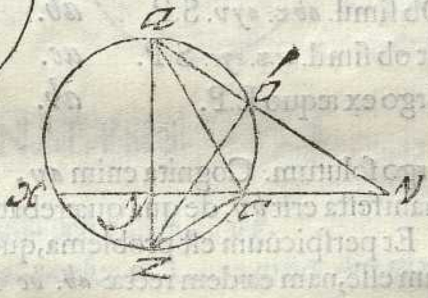
PRO-

PROPOSITIO I.

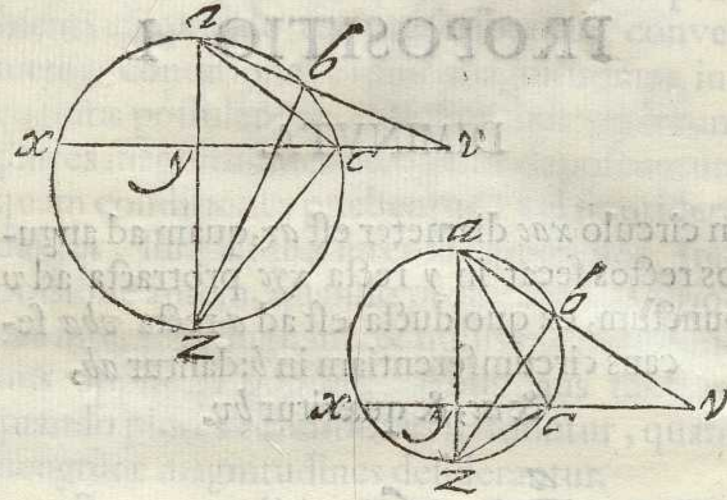
DIMINVTA.

In circulo *xac* diameter est *az*, quam ad angulos rectos secat in *y* recta *xyc* protracta ad *v* punctum, ex quo ducta est ad *a* recta *vba* secans circumferentiam in *b*: dantur *ab*, & *ac*, & quæritur *bv*. *Vide Schoot. ad Cartesium. pa.155.*





Ducantur *bz*, & *cz*, & erunt triangula *abz*. *ayv* inter se, & *acz*, *ayc* inter se similia. Unde patet.



ANALYSIS.

Ob ſimil. *abz. ayv.* S.P.	*ab.*	*az.*	*ay.*	*av.*
Et ob ſimil. *acz. ayc.* S.P.	*ac.*	*az.*	*ay.*	*ac.*
Ergo ex æquo E.P.	*ab.*	*ac.*	*ac.*	*av.*

Ergo ſolutum. Cognita enim *av*, ſi ſub ducatur data *ab*, manifeſta erit *bv*, de qua quærebatur.

Et perſpicuum eſt problema, quoad circulum, diminutum eſſe, nam eædem rectæ *ab. bc* in quocumque circulo aptatæ cuius diameter ſit ipſa *ac* maior eamdem *bv* ſemper exhibebunt.

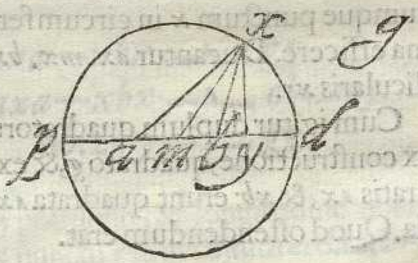
PROPOSITIO II.

DIMINVTA.

Datis duobus punctis a, & b duas rectas inflectere ax. xb, quarum quadrata ſint quadrato dato g æqualia.

Quod idem eſt ac dicere: Data baſe ab, & aggregato quadratorum laterum triangulum exhibere.

Eſto factum, & ſit triangulum, de quo quæritur axb, cuius altitudo xy. Biſecetur data ab in m, & ducatur mx.



ANALYSIS.

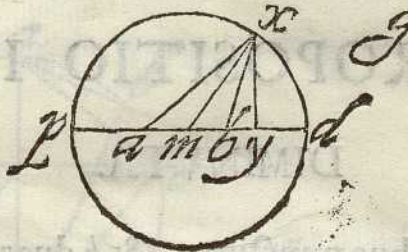
Sint igit. $axa + xbx \ \_\Lambda\_ \ gg.$

Sed per 13. Introd. $axa + xbx \ \_\Lambda\_ \ 2ama + 2mxm$

Ergo $gg. \ \_\Lambda\_ \ 2ama + 2mxm$

Uel ſi auferat. $2ama$ $gg - 2ama \ \_\Lambda\_ \ 2mxm.$

Ergo ſolutum, & cum mx ſit longitudine, & non poſitione nota, patet ipſam, ſemidiametrum poſſe fieri circuli, cuius circumferentia ſit locus puncti quæſiti x.



CONSTR. & DEMONSTR.

A quadrato dato *g* duplum quadrati *am* auferatur, & quadrati residui accipiatur dimidium, cuius latus sit *mx*. Intervallo autem *mx* circulus describatur *pxd*. Dico quodcumque punctum *x* in circumferentia acceptum problema efficere. Ducantur *ax*. *mx*. *bx*, & demittatur perpendicularis *xy*.

Cum igitur duplum quadratorum *am*, & *mx* æquale sit, ex constructione, quadrato *g*, & ex 13. Introductionis, quadratis *ax*, & *xb*: erunt quadrata *ax*, & *xb* quadrato *g* æqualia. Quod ostendendum erat.

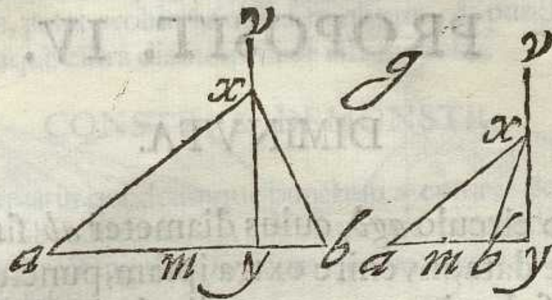
PROPOSIT. III.

DIMINVTA.

Datis duobus punctis *a*, & *b* duas rectas inflectere *ax*. *bx*, quarum quadrata dato quadrato *g* differant.

Quod idem est ac dicere: Data base *a b*, & differentia quadratorum laterum triangulum exhibere.

Esto



Esto iam factum, & sit triangulum axb, de quo quæritur. Demittatur perpendicularis xy, & secetur ab bifariam in m.

ANALYSIS.

Sit igitur $axa - xbx \;-\!\!\wedge\!\!-\; gg$.
Sed per 11. Introd. $axa - xbx \;-\!\!\wedge\!\!-\; ab{:}2my$.
Ergo $ab{:}2my \;-\!\!\wedge\!\!-\; gg$.

Ergo solutum, & cum my positione, & longitudine nota sit, erit perpendicularis ex puncto y in infinitum erecta, locus puncti quæsiti x.

CONSTR. ET DEMONSTR.

Bisecetur ab in m, & ad eamdem ab applicetur quadratum g, sitque latitudo proveniens dupla my, hoc est fiat vt ab ad g, ita g ad aliam, cuius dimidium sit my, itaque rectangulum sub ab, & dupla my quadrato g erit æquale. Ex y autem indefinita erigatur perpendicularis yv. Dico quodcumque punctum x in recta yv assumptum problema efficere. Ducantur ax, xb.

Cum enim rectangulum sub ab, & dupla my æquale sit, ex constr. quadrato g, & ex 11. Introductionis, differentiæ quadratorum ax, & xb: erit ipsa differentia quadrato g æqualis. Quod erat ostendendum.

PROPOSIT. IV.

DIMINVTA.

Vide Schootē ad Cartesium to. 1. pa. 230.

Dato circulo agb, cuius diameter ab ſit poſitione data, invenire extra ipſam, punctum x, à quo ſi demittatur perpendicularis xy, & per idem punctum agatur quædam fg, vtrimque à circumferentia terminata, vt rectangulum fxg vna cum quadrato xy ſit æquale rectangulo ayb.

Sit igitur x punctum, de quo quæritur, & per illud, ducatur kh, ipſi ab parallela, erigatur ex centro c perpendicularis cz, & iungatur ch. Vnde quoniam xy, & zc inter ſe, nec non xz. yc inter ſe ſunt æquales, & rectangulum kxb æquatur cuicumque fxg: facile inſtituetur analyſis.

ANALYSIS.

Sit igitur	$kxh + czc = ayb.$
Sed	$xzx = ycy.$
Ergo erit	$xzx + kxh + czc = ayb + ycy.$
Ideſt per 5.2.el.	$zhz + czc = aca.$
Ideſt per 47.1.	$chc.$

Ergo

Ergo solutum, & quoniam semidiametri $ch.ac$ semper sunt æquales, patet problema esse diminutum, & punctu m x vbicumque extra diametrum ab assumi posse.

CONSTR. & DEMONSTR.

Accipiatur quodcumque punctum x extra ab, & per illud quælibet ducatur fxg, demitaturque perpendicularis xy. Dico rectangulum fxg cum quadrato xy æquari rectangulo ayb.

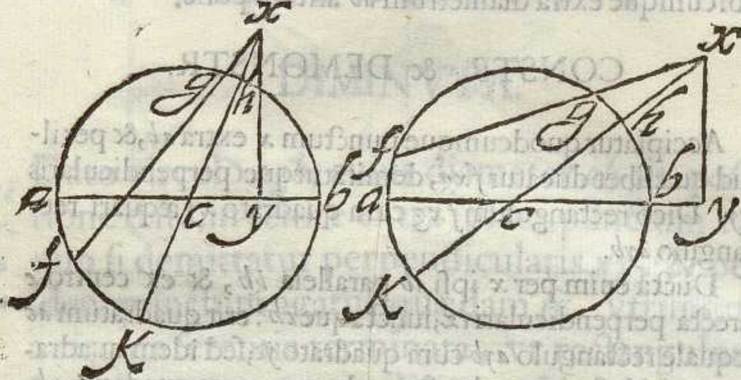
Ducta enim per x ipsi ab parallela kh, & ex centro c erecta perpendiculari cz; iunctaque ch: erit quadratum ac æquale rectangulo ayb cum quadrato yc; sed idem quadratum ac, idest ch æquale est quadrato cz cum quadrato zh, idest cum quadrato xz. & rectangulo kxh: igitur quadratum cz cum quadrato xz, & rectangulo kxh æquale erit rectangulo ayb cum quadrato yc, & si demantur quadrata æqualia $xz.yc$. remanebit quadratum cz, idest xy cum rectangulo kxh, idest cum quolibet fxg per x, æquale rectangulo ayb. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum fit problema quodvis diminutum esse, quando, evolutis conditionibus, vna pars æquationis alteri emergit omnino æqualis, hoc est quando in vtraque parte æquationis eadem, vel eædem magnitudines existunt. Et eodem modo quando æqualitas non dependet à constructione facienda; sed constat aliunde.

SCHO-

SCHOLION.



Cum punctum *x* intra circulum quærebatur æquatio erat *fxg* + *xyx* —Λ— *ayb*. At verò si extra quærendum sit, erit æquatio in fig. 1. *fxg* + *ayb* —Λ— *xyx*. In fig. 2. *fxg* —Λ— *ayb* + *xyx*.

IN FIG. 1.

Sint ig. *fxg* + *ayb* —Λ— *xyx*.
Ideſt *kxh*
Add. *cyc* erunt *kxh* + *ayb* + *cyc* —Λ— *xyx* + *cyc*.
Ideſt per 5.2.el. *kxh* + *aca*
Vel per 6.2.el. *cxc*.

IN FIG. 2.

Sit igitur *kxh* —Λ— *ayb* + *xyx*.
Sed *kck* —Λ— *aca*.
Ergo *kxh* + *kck* —Λ— *ayb* + *aca* + *xyx*.
Ideſt per 6.2. el. *cxc* —Λ— *cyc* + *xyx*.

Ergo ſolutum, & patet punctum *x* vbicumque extra circulum ſumi poſſe, cum ſemper per 47.1.elem. quadratum *cx* æquale ſit quadratis *cy*, & *xy*.

PRO-

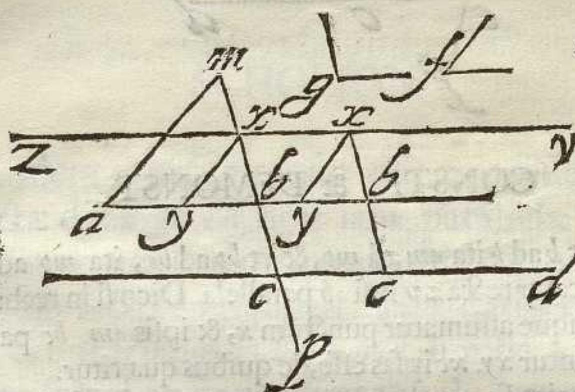
PROPOSITIO V.

DIMINVTA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis *ab*, & *cd*, punctum extra ipsas invenire vt *x*, à quo si in datis angulis *f*, & *g* duæ ducantur rectæ lineæ *xy*. *xc*, ipsæ inter se habeant rationem datam vt *h* ad *k*.

Vide Schootē ad Cartesium to. 1. pa. 226.

h K



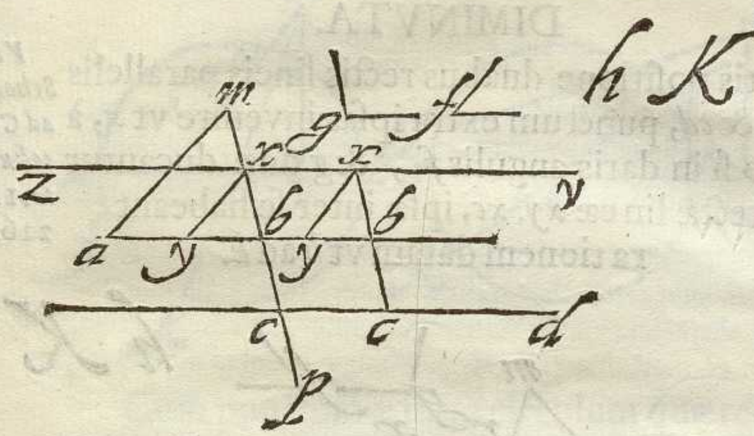
Fiant anguli, *abc* ipsi *g*, & *bam* ipsi *f*, æquales, quibus etiam æquales debent esse anguli *ybc*, & *byx*, quare similia erunt triangula *bam*, & *byx*.

ANALYSIS.

Sint igit. prop.	*xy.*	*xc.*	*h.*	*k.*
Vel si fiat			*am.*	*mp.*
Sed ob similit. S. P.	*xy.*	*xb.*	*am.*	*mb.*
Ergo ex æqual. E. P.	*xc.*	*mp.*	*xb.*	*mb.*
Et vt 1. ad 1. ita diff.	*xc.*	*mp.*	*bc.*	*bp.*

Ergo

Ergo solutum, & patet problema esse diminutum, propterea quod *ab*, & *cd* indeterminatæ proponantur.

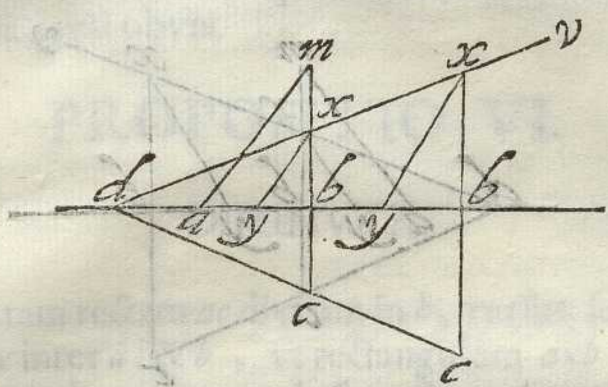


CONSTR. & DEMONST.

Fiat vt *h* ad *k* ita *am* ad *mp*, & vt *bp* ad *bc*, ita *mp* ad *xc*. Per *x* ducatur recta *zv* ipsi *ab* parallela. Dico si in recta *zv* quodcumque assumatur punctum *x*, & ipsis *am*. *bc* parallelæ ducantur *xy*. *xc* ipsas esse, de quibus quæritur.

Cum enim sit *xc* ad *mp*, vt *bc* ad *bp* ex construct. & *xc* ad *mp*, vt *xb* ad *mb* (quia vt vnus ad vnum ita sunt differentiæ) sed ob similitudinem *bam*. *byx* est *xy* ad *xb*, vt *am* ad *mb*: ergo ex æqualitate erit *xy* ad *am* vt *xc* ad *mp* (communis ratio *xb*. *mb*) & altern. *xy* ad *xc*, vt *am* ad *mp*, id est vt *h* ad *k*. Quod erat

SCHO-

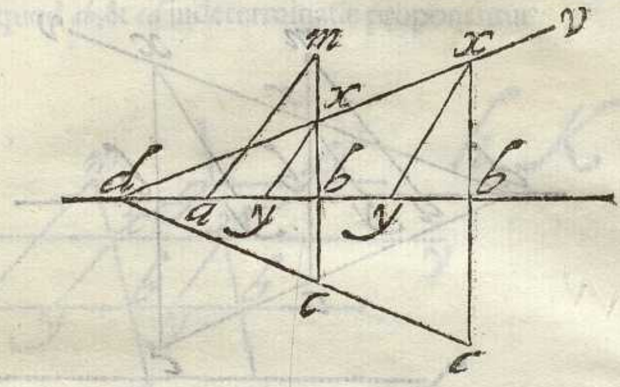


SCHOLION

Eodem prorſus modo erit procedendum ſi rectæ datæ *ab. cd* non iam parallelæ , ſed concurrentes in *d* proponantur.

Nam factis angulis *abc. bam* datis æqualibus, erunt triangula *bam. byx* ſimilia , & invento ſemel ex præcedente analyſi puncto *x*, ſi per illud ex puncto concurſus *d* ducatur indefinita *dv* , erit ipſa locus quæſitus , nam quodcumque punctum in ea acceptum *x*, ductis *xy. xc* ipſis *am. bc* parallelis , problema efficiet, & vt antea demonſtrabitur.

Præterea perſpicuum eſt, cæteris poſitis, illam conditionem, nempe , vt rectæ *xy. xc* ſint in ratione data vt *h* ad *k* in infinitum variari poſſe. Nonnulla afferamus exempla.



Si postuletur quod rectæ $xy.$ xc sint reciprocæ datis $h.$ $k.$ ecce

ANALYSIS.

Sint igit. prop. $xy.$ $h.$ $k.$ $xc.$
Vel si fiant. $am.$ $mp.$
Sed ob simil. S. P. $xy.$ $xb.$ $am.$ $mb.$
Ergo ex æquo E. P. $mp.$ $xc.$ $xb.$ $mb.$

Ergo solutum, & patet constructio, & demonstratio.

Si petatur quod rectæ $xy.xc$ quamdam rectam datam m componant. Ecce

ANALYSIS

Sint igit. $xy + xc \ \underline{\Lambda}\ m.$
Ergo. $xy + xb \ \underline{\Lambda}\ m - bc.$
Sed ob simil. S. P. $xy.$ $xb.$ $am.$ $mb.$
Et comp. $xy + xb.$ $xb.$ $am + mb.$ $mb.$
Ergo subst. E. P. $m - bc,$ $xb.$ $am + mb.$ $mb.$

Ergo solutum, & patet constructio, & demonsmonstratio, & totius problematis determinatio satis est obvia.

PROPOSITIO VI.

DIMINVTA.

Datam rectam *ac* divisam in *b*, rursus secare in *x* inter *a*, & *b*, vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* æquale sit rectangulis tum sub *ac*, & *xb*, tum sub *xc*, & *bc*.

ANALYSIS.

Sint igit.	$axb + xcx$	$\underline{\ \Lambda\ }$	$ac:xb + xcb.$
Ergo auf. xcb.	$xcb.$		$xcb.$
Erit per 2.2. el.	$axb + cxb$	$\underline{\ \Lambda\ }$	$ac:xb.$
Et auf. axb.	$axb.$		$ax:xb.$
Remanebit per 1.2.	cxb	$\underline{\ \Lambda\ }$	$cxb.$

Ergo solutum, & patet problema diminutum esse, adeoque punctum *x* in recta *ab* ad libitum assumi posse.

DEMONSTR.

Dico quodcumque punctum *x* in recta *ab* assumptum problema efficere. Estenim rectangulum *axb* cum rectanr gulo *cxb* æquale rectangulo sub tota *ac*, & ipsa *xb*, queaaddu-

a x b c

addendo rectangulum *xcb*, erit rectangulum *axb* cum rectangulis *cxb*, & *xcb*, idest cum quadrato *xc*, æquale rectangulo ſub *ac*, & *xb* cum rectangulo *xcb*. Quod oſtendere oportebat.

PROPOSIT. VII.

DIMINVTA.

Quatuor rectas proportionales exhibere, ita vt prima ad quartam ſit vt *g* ad *k*, aggregatum verò ſecundæ, & quartæ ſit data *ab*.

x y a z b $\frac{g}{k}$

Sint quatuor rectæ, de quibus quæritur *xy*. *az*. *ya*. *zb*.

CONDITIONES.

Vt ſint prop.	*xy*.	*az*.	*ya*.	*zb*.
Vt ſint prop.	*xy*.	*zb*.	*g*.	*k*.
Vt ſint	$az + zb \;\underline{\wedge}\; ab$.			

Cum igitur tres tantum dentur conditiones, & quatuor quærantur magnitudines, perſpicuum eſt problema eſſe dimi-

diminutum. Ergo quodcumque punctum *z* in recta *ab* assumptum problema efficiet. Nam determinatis *az*, & *zb*, si fiat vt *k* ad *g* ita *zb* ad *xy*, & vt *az* ad *xy* ita *zb* ad *ya*, factum erit, quod facere oportebat.

IN NVMERIS.

In numeris eodem modo proceditur. At vero si integros exhibere, & determinare oporteat, ita examen fieri poterit.

Sint inveniendi quatuor numeri proportionales, ita vt primus ad quartum sit vt 8 ad 5, secundus vero, & quartus componant 100.

Sunto vt antea, *xy*. *az*. *ya*. *zb*, & quoniam integros quærimus, erunt *xy*, & *zb*. 8, & 5, vel eorum multiplices, quia ipsi minimi inter se, & semper erit *az* complementum ad 100, ipsius *zb*.

Et cum tres termini determinari possint; si quartam proportionalem admittant, erunt omnes quatuor, de quibus quæritur, & si omnes resolutiones patebunt. Facto igitur examine, vt patet in mappa, septem inveniuntur solutiones, videlicet 32. 80. 8. 20, & 80. 50. 80. 50, & 96. 40. 144. 60, & 120. 25. 360. 75, & 128. 20. 512. 80, & 144. 10. 796. 90, & tandem 152. 5. 2888. 75, quæ omnes quæstioni satisfaciunt, neque aliæ esse possunt integris.

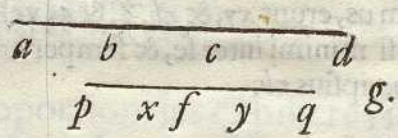
xy.	*az*.	*ya*.	*zb*.
8.	95.		5
16.	90.		10
24.	85.		15
32.	80.	8	20
40.	75.		25
48.	70.		30
56.	65.		35
64.	60.		40
72.	55.		45
80.	50.	80	50
88.	45.		55
96.	40.	144	60
104.	35.		65
112.	30.		70
120.	25.	360	75
128.	20.	512	80
136.	15.		85
144.	10.	796	90
152.	5.	2888	95

PRO-

PROPOSIT. VIII.

DIMINVTA.

Datam rectam *pq* in tres partes diuidere in *x*, & *y*, ita vt tria facta sub singulis earum, & singulis datarum *ad.ac.ab* æqualia sint dato plano *g*.



Hoc est tria facta sub *px. ad*, sub *xy. ac*, & sub *yq ab* æqualia facere plano *g*.

ANALYSIS.

Sint igitur. $px{:}ad + xy{:}ac + yq{:}ab = g.$
Vel per 1.2.el. $xy{:}bc + xy{:}ab.$
Vel per eamdem $px{:}bd + px{:}ab.$
Vel per eamdem $px{:}bd + xy{:}bc + pq{:}ab = g.$

Ergo solutum, & patet problema esse diminutum, cum nulla sit conditio, vnde altera incognitarum *px.xy* innotescat. Quapropter liberum erit punctum *x* in recta *pq* asignare, ita vt vltima æquatio existat. Determinatio igitur puncti *x* ita fieri potest

Sunt

Sunt enim	$px:bd + xy:bc + pq:ab \;\text{—}\!\wedge\!\text{—}\; g.$
Vel auf. $pq:ab$.	$px:bd + xy:bc \;\text{—}\!\wedge\!\text{—}\; g - pq:ab.$
Vel si fiat	$k.$
Ergo	$px:bd \;\text{—}q.\; k.$
Et	$px \;\text{—}q.\; \frac{k.}{bd.}$

Ergo determinatum est punctum x, cum pateat rectam px accipiendam esse minorem latitudine proveniente ex applicatione plani k (id est differentia plani dati g super rectangulum sub pq, & ab) ad rectam bd.

CONSTR. & DEMONST.

A dato plano g auferatur rectangulum sub datis $pq.\ ab$, & residuum applicetur ad rectam bd, sitque latitudo proveniens pf. Dico quodcumque punctum x, inter puncta p, & f acceptum, problema efficere. Deinde à prædicto residuo subtrahatur rectangulum sub px, & bd, & remanens applicetur ad rectam bc, & latitudo resultans erit xy. Itaque rectangula sub px, & bd, atque sub xy, & bc æqualia erunt differentiæ, qua planum g superat rectangulum sub pq, & ab, & addito eodem rectangulo, erunt rectangula sub px, & bd, atque sub xy, & bc, vna cum rectangulo sub pq, & ab, hoc est vna cum rectangulis sub px, & ab, sub xy, & ab, & sub yq, & ab æqualia plano g: sed rectangula sub px, & bd, atque sub px, & ab æquantur rectangulo sub px, & ad, rectangula verò sub xy, & bc, atque sub xy, & ab æquantur rectangulo sub xy, & ac: igitur tria rectangula sub px, & ad, sub xy, & ac, & sub yq, & ab æqualia erunt dato plano g. Quod erat faciendum.

Quod autem px minor debeat esse, quam pf satis manifestum est ex prædicta determinatione.

QVÆS-

QVÆSTIO DIMINVTA.

Centum personæ, scilicet viri, fœminæ, & pueri in diversorio 800 nummos impenderunt. Solvebãt singuli viri 14, singulæ fœminæ 9. & singuli pueri 6 nummos. Quæritur quot viri, fœminæ, & pueri seorsim erant?

Hæc quæstio, supponendo quod pq valeat 100, ad 14, ac 9, & ab 6, Geometricè per præcedentem analysim expeditur. At verò Arithmeticè, vt omnes solutiones in nuris integris pateant, hoc modo procedere licet.

$$\overline{p \quad x \quad y \quad q}$$

Dividatur quælibet recta pq, quæ valeat 100. in x, & y, & sit px numerus virorum, xy fœminarum, & yq puerorum: Ergo

ANALYSIS.

Erunt	$14px + 9xy + 6yq \;-\!\Lambda\!-\; 800.$
Ideſt per 1.2.el.	$3xy + 6xy.$
Et per ipsam	$8px \quad + 6px.$
Et per eamdem	$8px + 3xy + 6pq \;-\!\Lambda\!-\; 800.$
Ideſt quia pq eſt 100.	600
Ergo aufer. 600 erit	$8px + 3xy \;-\!\Lambda\!-\; 200$

Nunc omnes resolutiones poſsibiles in numeris integris hoc modo examinari, & exhiberi poſſunt.

A numero remanente 200 auferatur 8 (quia est 8 *px*) & à residuo iterum 8, & si deinceps:

		200.	
pro *px*.	1.	192.	64. pro *xy*.
	2	184	
	3	176	
	4	168.	56

primus *px*.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
secund. *xy*.	64.	56.	48.	40.	32.	24.	16.	8.
tertius *yq*.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.

donec duo residui numeri multiplices sint ipsius 3 (quia ex 3 *xy*) prima igitur vice habemus 192, qui divisus per 3 dat 64, quare *px*, & *xy* erunt 1 & 64, vnde *yq* erit 35 complementum scilicet ad 100. Quarta autem vice obtinemus 168, qui divisus per 3 exhibet 56, quare *px*, & *xy* erunt 4, & 56, & *yq*. 40. Ita quidem examen progredi potest, sed longe facilius hoc modo. Primi numeri *px* sunt duo inventi valores 1, & 4. & progressio cum eorum excessu 3 dabit 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. Secundi verò numeri *xy* sunt duo inventi valores 64, & 56; & progressio cum eorum excessu 8 exhibebit 64. 56. 48. 40. 32. 24. 16. 8. Tertij denique numeri *yq* sunt duo inventi valores 35, & 40, quorum excessus est 5, & præstabit progressio 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. & terni correspondentes quæstioni satisfacient 1. 64. 35, vel 4. 56. 40. &c. Et ecce tibi octo resolutiones: neque plures erunt in integris.

SCHOLION.

Hæc quidem praxis in multis casibus arithmeticis locum habet. Quapropter alia placet exempla in medium afferre.

EADEM QVÆSTIO IN ALIJS terminis propoſita.

Quidam vult 800 nummos impendere in 100 aves, quarum aliæ 14, aliæ 9, & aliæ 6 nummis conſtant. Quæritur quot aves vnius cuiuſque prætij accipere poſsit?

100.	14. 9. 6.		800	
	8. 3.		600	
			200	
		1	192	64
		2	184	
		3	176	
		4	168	56

primi prætij	1,	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
Secundi	64.	56.	48.	40.	32.	24.	16.	8.
Tertij.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.

Differentia inter maximum, & minimum prætium eſt 8, inter medium, & minimum eſt 3. Ergo ſi à numero abſoluto 800 auferatur 600 (productus ex dato numero diſtinguendo 100, & prætio infimo 6) & fiat examen ſubtrahendo ſemper 8, & dividendo per 3. invenientur octo reſolutiones, vt antea, quarum quælibet ſatis facit quæſtioni.

Eodem modo proceditur quamvis prætia ponantur in numeris fractis.

ALIVD

ALIVD EXEMPLVM.

24 nummi impensi sunt in 24 aves, quarum aliæ $1\frac{1}{2}$ aliæ 1. & aliæ $\frac{1}{2}$ constant. Quæritur quot aves vniuscuiusque prætij emptæ sunt?

Aves	prætia			Nummi	
24.	$1\frac{1}{2}$.	1.	$\frac{1}{2}$.	24.	
Differ.		1.	$\frac{1}{2}$.	12.	factus à 24 in $\frac{1}{2}$.
				12.	residuus.
Elev. per 2.		2.	1.	24.	
				1. 22. 22.	
				2. 20. 20.	

primi prætij	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
secundi	22.	20.	18.	16.	14.	12.	10.	8.	6.	4.	2.
tertij	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.

Differentia inter maximum, & minimum prætium est 1. inter medium, & minimum est $\frac{1}{2}$. Si igitur à numero absoluto 24 nummorum auferatur 12, factus ex numero avium 24 in infimum prætium $\frac{1}{2}$, remanebit 12. A quo si auferatur 1, & dividatur residuus per $\frac{1}{2}$, & ita deinceps. Uel (vt fractiones vitentur) si differentiæ 1, & $\frac{1}{2}$, & residuus 12 multiplicentur per 2, & fiant 2. 1. & 24, & subtrahatur semper 2, & dividatur per 1. Vtroque modo invenientur 11 solutiones, vt patet.

ALIA QVÆSTIO.

Aurifex triplex habet aurum, primum 22, ſecundum 21, & tertium 18 graduum, ex quibus 40 libras auri 20 graduum vult componere. Quæritur quantum ex vnoquoque aſſumere poſsit ad mixtionem?

Grad.	22.	21.	18.		20	
Diff.		4.	3.		40 lib.	
					800	
					720.	ideſt 40 in 18.
					80.	
				1	76.	
				2	72.	24.
				3	68.	
				4	64.	
				5	60.	20.

primi.	2.	5.	8.	11.	14.	17.
ſecundi	24.	20.	16.	12.	8.	4.
tertij	14.	15.	16.	17.	18.	19.

Differentia inter maximum, & minimum gradum eſt 4, inter medium, & minimum eſt 3. Ergo ſi à numero abſoluto 800 (facto ex multiplicatione 40 lib. in 20 grad.) auferatur numerus 720 (factus ex multiplicatione 40 lib. in 18. grad.) & fiat examen auferendo ſemper 4, & dividendo per 3: obtinebimus ſex ſolutiones, videlicet 2. 24. 14, 5. 20. 15, 8. 16. 16, 11. 12. 17, 14. 8. 18, 7. 4. 19. Neque in integris invenientur plures.

SCHO-

SCHOLION

Observatu dignam arbitror mirabilem genesim harum progressionum. Prima enim (quæ ad primum gradum, prætium, &c. spectat) procedit per differentiam secundi, & tertij. Secunda vero (quæ ad secundum pertinet) per differentiam primi, & secundi. Tertia denique (quæ ad tertium concernit) per differentiam primi, & secundi.

Hinc manifestum sit secundum examen omitti posse. Nam ex primo, numeri sunt inventi 2. 24. 14. *& cum sciamus excessum , quo progressiones procedere debent, ipsæ institui poterunt.*

PROPOSIT. IX.

DIMINVTA.

Duos numeros integros exhibere, ita vt quadratum maioris æquale sit rectangulo sub ipsis cum rectangulo sub minore, & numero dato 3, vna cum numero plano dato 219. Et quia plures sunt oporteat determinare omnes.

$a \quad x \quad y$

Sint numeri, de quibus quæritur ay. ax.

ANALYSIS.

Sit igit. $aya \;{-}\!\Lambda\!{-}\; yax + 3ax + 219.$

Et auf. 219. $aya - 219 \;{-}\!\Lambda\!{-}\; yax + 3ax.$

Et partiendo $\dfrac{aya - 216}{ay + 3} \;{-}\!\Lambda\!{-}\; ax.$

Vel facta partitione $ay - 3 - \dfrac{210}{ay + 3} \;{-}\!\Lambda\!{-}\; ax.$

Ergo solutum, cum manifestum sit $ay + 3$ partem fore efficientem numeri 210.

Dvi-

Dividatur igitur 210 in omnes suos efficientes 1, & 210, 2 & 105, 3 & 70, &c. Ergo si à singulis majoribus, numerus dematur 3: erunt residui 207. 102. 67, &c. valores numeri *ay*.

Et si ab ipsis sigillatim auferatur aggregatum alterius coefficientis correspondentis, & numeri 3, remanebunt 203. 97. 61, &c. pro valoribus numeri *ax*.

210		*ay*.	*ax*.
1 .	210 .	207 .	203
2 .	105 .	102 .	97
3 .	70 .	67 .	61
5 .	42 .	39 .	31
6 .	35 .	32 .	23
7 .	30 .	27 .	17
10 .	21 .	18 .	5
14 .	15		

Sunt igitur numeri, de quibus quæritur 207. & 203, vel 102 & 97, vel 67 & 61, vel 39 & 31, vel 32 & 23, vel 27 & 17, vel 18 & 5, vt patet in mappa, & in integris non reperientur plures.

SCHOLION.

In arithmeticis quæstionibus, arithmeticis operationibus vti licet. In arithmetica commune est, quamuis divisor dividendum non metiatur, partitionem persequi, & quotum exprimere per numerum integrum cum fracto. Pari iure in partitionibns analyticis id ipsum sæpissime fieri potest, vnde mirabile compendium oritur ad resolutiones.

Erat

Erat igitur dividendus $aya - 219$. & diviſor $ay + 3$, vnde facta partitione, vt patet in mappa, pars integra eſt $ay - 3$, & pars fracta $\frac{-210}{ay+3}$, & totus quotus $ay - 3 \frac{-210}{ay+3}$,

$$\begin{array}{l|l} aya - 219 & ay - 3 \frac{-210}{ay+3}. \\ \underline{ay + 3} & \\ 0. - 3ay - 219 & \\ \underline{\quad ay + 3} & \\ \quad 0. - 210. & \end{array}$$

& conſtat $ay + 3$ partem eſſe efficientem numeri 210, & perſpicuum fit quomodo huiuſmodi quæſtiones reſolvi debeant.

Quando quæritur de maximis, & minimis, nihil aliud petitur, niſi in problematibus, vel quæſtionibus diminutis determinatio maximæ, & minimæ reſolutionis.

PROPOSIT. X.

IMPOSSIBILIS.

Datas rectas ab, & bc ita dividere in x, & y, vt ſint proportionales $ax. xb. by. yc$, & etiam $ac. ay. ab. ax$.

$\overline{a \quad x \; b \; y \; c}$

ANALYSIS.

Sint igit.prop.	*ax.*	*xb.*	*by.*	*yc.*
Et per compoſ.	*ax.*	*ab.*	*by.*	*bc.*
Sed etiam S.P.	*ac.*	*ay.*	*ab.*	*ax.*
Ergo ex æquo E.P.	*ac.*	*ay.*	*bc.*	*by.*
Et vt diff.ita 1.ad 1.	*ab.*	*ab.*	*bc.*	*by.*

Ergo ſolutum, & patet impoſsibilitas, cum *by* pars, toti *bc* æqualis emergi nequeat.

DEMONSTR.

Dico propoſitum problema impoſsibile eſſe. Si enim fieri poteſt ſint *ab*, & *bc* ita diviſæ in *x*, & *y*, vt petitur. Cum igitur ſint proportionales *ax. xb by. yc.* Et per compoſ. *ax ab. by. bc*, & etiam ſint proportionales *ac. ay. ab. ax*: erunt ex æquo proportionales *ac. ay. bc. by*; ſed vt differentiæ ita eſt vnus ad vnum: ergo vt *ab* ad *ab*, ita erit *bc* ad *by*: ergo *bc*, & *by* erunt æquales pars, & totum, 14.5.el
quod eſt abſurdum. Ergo impoſsibile erit propoſitum problema.

PROPOSITIO XI.
IMPOSSIBILIS.

Duas rectas invenire, quarum quadrata simul sumpta æqualia sint rectangulo sub ijsdem rectis comprehenso.

Sint rectæ quæsitæ *ax*. *ay*.

ANALYSIS.

Sint si fieri potest	*axa* + *aya* —Λ— *yax*.
Ergo erit	*ya* +q. *axa*.
Et deprim. per *ax*.	*ay* +q. *ax*.
Sed etiam erit	*yax* +q. *aya*.
Et deprim. per *ay*.	*ax* +q. *ay*.

Ergo cum *ax* non posit maior, & minor esse quam *ay*, patet impossibilitas, & eodem modo demonstratur.

DEMONSTR.

Dico propositum problema esse impossibile si enim fieri potest sint rectæ, de quibus quæritur *ax*, & *ay*, quarum quadrata *axa*, & *aya* æqualia sint rectangulo sub ijsdem, nempe *yax* : ergo rectangulum *yax* maius erit sua parte, nempe quadrato *ax*, & deprimendo per *ax* : erit *ay* maior quam *ax*; sed etiam *yax* rectangulum maius est sua parte, videlicet quadrato *ay*: ergo deprimendo per *ay*, erit *ax* maior quam *ay*; sed erat minor antea : ergo impossibile erit quod eodem tempore sit maior, & minor. Impossibile igitur erit problema. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XII.

IMPOSSIBILIS.

Datis rectis *ab. bc. cd*, quarum *ab* ſit maior quam *cd*: oportet dividere *bc* in *x*, ita vt rectangula *abx*, & *xcd* ſimul ſumpta æqualia ſint rectangulo *bcd*.

a b x c d

ANALYSIS.

Sint igitur	$abx + xcd$	—Λ—	bcd.
Ergo auf. *xcd* erit	abx	—Λ—	$bcd - xcd$.
Ideſt per 1.2.el.	abx	—Λ—	$bx{:}cd$.
Ergo per 1.6.el.	ab	—Λ—	cd.

Ergo ſolutum, & patet problema impoſſibile eſſe, propterea, quod *ab* ponatur maior, quam *cd*. Quod à principio, vel à fine analyſeos demonſtratur.

DEMONSTR

Dico problema propoſitum eſſe impoſſibile. Si enim fieri poteſt ſit *bc* diviſa in *x*, ita vt rectangula *abx*, & *xcd* æqualia ſint rectangulo *bcd*: ergo auferendo rectangulum *xcd*, erit *abx* rectangulum æquale differentiæ rectangulorum *bcd*, & *xcd*, ideſt rectangulo ſub *bx*, & *cd*: ergo *ab* æqualis erit ipſi *cd*; ſed ponitur maior: ergo impoſſibile erit problema. Quod erat ostendendum.

a b x c d

ALITER.

Cum enim *ab* ponatur maior, quam *cd*, erit rectangulum sub *ab*, & *bx* maius rectangulo sub *bx*, & *cd*, & addito rectangulo *xcd*, erunt rectangula *abx*, & *xcd* rectangulis sub *bx*, & *cd*, atque sub *xc*, & *cd*, hoc est rectangulo *bcd* maiora; sed ponuntur æqualia: ergo impossibile, &c.

PROPOSIT. XIII.

IMPOSSIBILIS.

Datam rectam *ac* vtcumque divisam in *b*, rursus secare in *x* inter *b*, & *c*, ita vt rectangulum *axb* cum quadrato *xc* æquale sit rectangulo *bxc*.

a b x c

ANALYSIS.

Sint igitur	$axb + xcx$ ⊢A⊣ bxc.
Ergo	bxc +q. axb.
Et deprim. per *bx*.	xc +q. ax.
Sed etiam est	bxc +q. xcx.
Et deprim. per *xc*.	bx +q. xc.
Ergo	bx +q. ax.

Quod est impossibile, cum punctum *x* ponatur inter *b*, & *c*.

DE-

DEMONSTR.

Dico propositum problema esse impossibile. Si enim fieri potest, sit bc ita divisa in x, vt rectangulum axb cum quadrato xc æquale sit rectangulo bxc. Ergo rectangulum bxc maius erit sua parte, nempe rectangulo axc, & deprimendo per bx, erit xc maior quam ax. Sed etiam rectangulum bxc maius est sua parte, videlicet quadrato xc, & deprimendo per xc, erit bx maior quam xc; sed xc erat antea maior quam ax: ergo bx multo maior erit quam ax. Quod est absurdum, ponitur enim punctum x inter b, & c. Impossibile igitur, &c. Quod erat ostendendum.

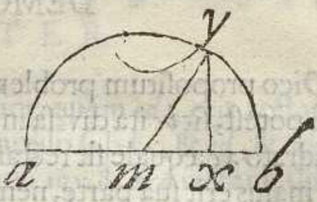
PROPOSITIO XIV.

DE NVMERIS QVADRATIS.

Duos numeros invenire, quorum quadrata, vel numerum quadratum componant, vel numero quadrato differant. *Vide R. P. Claviū ad prop.29 10.el.*

Sint

Sint in triangulo rectangulo *mxy* duo numeri, de quibus quæritur, vel *mx*, & *xy*, quorum quadrata quadratū *my* componunt, vel *my*, & *mx*, quorū quadrata quadrato differunt *xy*. Centro *m* intervallo *my* semicirculus describatur *ayb*.



ANALYSIS, ET SYNTHESIS.

Cum igitur numeri *my*, *mx*. *xy*: debeant esse rationales: perspicuum fit numeros *ax*, & *xb* constituendos esse quadratos (idest in ratione duorum quadratorum) Itaque ipsorum semisumma, & semidifferentia *my*, & *mx*, idest *mb*, & *mx* rationales erunt, & etiam rationalis erit numerus *xy*, vtpote radix illius numeri quadrati ex multiplicatione geniti numerorum *ax*, & *xb*, qui quadrati ponuntur. Ergo si pro *ax*, & *xb* duo numeri assumantur quadrati 1. & 9 (hoc est, si rigor arithmeticus servandus sit, duo numeri laterales 1, & 9, in ratione duorum numerorum quadratorum 1, & 9) erunt ipsorum semisumma, & semidifferentia 5, & 4 valores ipsorum numerorum *my*, & *mx*, eritque 3, valor ipsius *xy*, radix videlicet producti sub 1. & 9, vel (quod in idem recidit, & facilius expeditur) numerus factus ex multiplicatione radicum 1, & 3 quadratorum 1, & 9. Ergo numeri 5. 4. 3. erunt de quibus quæritur, nam quadrata ipsorum 4, & 3. quadratum componunt 25, & quadrata ipsorum 5, & 4 quadrato differunt 9. Et sic invenientur plurimi, & non ipsi tantum, sed omnes in eorum proportione etiam satisfacient quæsito.

Prop. 7. Introd.

COROLLARIVM.

Hinc facile genesis exhiberi poterit omnium huiusmodi numerorum quadratorum in numeris integris. Nam si exponantur omnes numeri quadrati, & assumantur bini, quorum summa, & differentia numeri sint inter se primi: erunt ipsa summa, & differentia, & duplum facti sub radicibus quadratorum, qui assumuntur numeri quæsiti, & sic genesis omnium innotescet.

Exponantur omnes numeri quadrati 1. 4. 9. 16. &c. quorum radices 1. 2. 3. 4. &c. Si igitur assumantur 1. & 4, exhibebunt pro summa, & differentia, & duplo facto sub ipsorum lateribus, sive radicibus, 5. 3. 4. Si assumantur 4, & 9. dabunt 13. 5. 12. Si assumantur 1, & 16. dabunt 17. 15. 8. Si assumantur 9, & 16. dabunt 25. 7. 24. Et sic omnium genesis manifesta fit. Et non solum ipsi quæsito satisfaciunt; sed omnes etiam in ipsorum proportione.

1. 2 .	3.		4 &c.
1. 4 .	9.		16 &c.
5. 3. 4,	13. 5. 12,	17. 15. 8. &c	
			25. 7. 24.

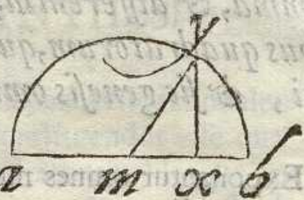
SCHOLION.

Ex hac propositione sequentes praxes manifestæ fiunt.

PRA-

PRAXIS PRIMA.

Omnes numeros integros quadratos inveni-re, qui bini ſumpti dato numero qua-drato integro differant.



Perſpicuum eſt, ſi datus ſit numerus quadratus *xy*, ipſius coefficientes eſſe *ax*, & *xb*, quorum ſemiſumma, & ſemidifferentia *my*, & *mx* erunt, de quibus quæritur. Ergo ſi numerus quadratus datus dividatur in omnes ſuos efficientes: ſemiſumma, & ſemidifferentia binorum coefficientium quæſito ſatisfacient, & ſic omnes ſolutiones patebunt.

Sit iam datus numerus quadratus 144, & oporteat omnes quadratos numeros exhibere, qui bini ſumpti differant dato 144.

Dividatur 144 in omnes ſuos efficientes 1, & 144, 2 & 72, 3 & 48, 4 & 36, 6 & 24, 8 & 18, 9 & 16. (12 & 12 quia nihilo differunt, non ſerviunt.) Aſsignentur ſumma, & differentia binorum coefficientium, 145 & 143, 74 & 70, 51 & 45, &c. & accipiantur ſemiſſes earum, quæ pares ſint 37 & 35, 20 & 16, 15 & 9.

			144.		
	145.	1.	144.	143.	
37.	74.	2.	72.	70.	35
	51.	3.	48.	45.	
20.	40.	4.	36.	32.	16
15.	30.	6.	24.	18.	9
13.	26.	8.	18.	10.	5
	25.	9.	16.	7.	

9, 13 & 5, vt patet in mappa, & ecce quatuor ſolutiones, nam quadrata numerorum 37 & 35, ſive 20 & 16. ſive 15 & 9, ſive 13 & 5, quadrato differunt 144, neque in integris invenientur plures.

Si ſemiſſes accipiantur imparium, vel ſi coeffi-cientes admitantur fracti: ſolutiones in infinitum procedent.

ALITER

Quoniam igitur numeros integros quærimus, brevius res expedietur, ſi quadrans numeri quadrati dati ſit integer, & in ſuos efficientes dividatur. Nam ſumma, & differentia binorum coefficientium ſolutionem exhibebunt.

Si igitur 36 quadrans quadrati dati 144 dividatur in ſuos efficientes 1 & 36, 2 & 18, 3 & 12, 4 & 9. erunt ſumma, & differētia coefficientium 37 & 35, 20 & 16, 15 & 9, 13 & 5, vt antea, de quibus quærebatur.

	144		
	36		
37 .	1	36 .	35.
20 .	2	18 .	16.
15 .	3	12 .	9.
13 .	4	9 .	5.

Si quadrans quadrati dati fuerit fractus, prima operatio erit inſtituenda.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtus fit modus conſtituendi triangula, quorum latera ſint rationalia, & integra Nam ſi pro perpendiculo numerus (ex.g.) ponatur 12, factà operatione prædicta, aſſumi poterunt pro *vno latere & ſegmento baſis contermino bini coefficientes ſive 37 & 35, ſive 20 & 16 &c. & pro reliquo latere, & ſegmento contermino alij duo coefficientes. Itaque triangulum poterit conſtitui in altitudine 12, cuius latera ſint 37 & 20 & ſegmenta baſeos 35 & 16, ſive 37 & 15 & ſegmenta 35 & 9, ſive 37 & 13, & ſegmenta 35 & 5, ſive 20 & 15, & ſegmenta 16 & 9, ſive 20 & 13, & ſegmenta 16 & 5, ſive 15 & 13 & ſegmenta 9 & 5. Et totidem triangula in altitudine 12 conſtitui poterunt oxygonia , & totidem ambligonia. Quia ſi determinatis ſegmentis baſeos, ipſorum ſumma accipiatur pro baſe, triangulum oxygonium efficietur, ambligonium vero ſi pro baſe ipſorum ſegmentorum aſſumatur differentia.*

PRAXIS SECVNDA.

Omnes numeros integros quadratos inveni-re, qui bini ſumpti numero dato differant non quadrato.

Hæc praxis ſecunda idem habet fundamentum ac prima , concipiendo pro quadrato ipſius xy nnmerum planum datum non quadratum.

Sit

Sit datus numerus 168. cuius quadrans 42 dividatur in suos efficientes 1 & 42, 2 & 21, 3 & 14, 6 & 7, & summa, & differentia coefficientium, erunt 43, & 41, 23 & 19, 17 & 11, 13 & 1, & quatuor emergunt solutiones. Nam quadrata numerorum sive 43 & 41, sive 23 & 19, sive 17 & 11, sive 13 & 1 dato numero differunt 168. Vt oportebat.

		168		
		42		
43.	1.		22.	41.
23.	2.		41.	19.
17.	3.		14.	11.
13.	6.		7.	1.

Si quadrans numeri plani dati sit fractus ad primam operationem praxis primæ recurrendum erit.

COROLLARIVM I.

Ex prædictis facile solvitur sequens quæstio.

QVÆSTIO DIMINVTA.

Quæritur numerus, ita vt si ipsi addatur 97, & ab ipso auferatur 23; compositus, & residuus sint numeri quadrati.

Perſpicuum eſt numeros quadratos, de quibus quæritur, inter ſe differre 120, aggregato videlicet datorum 97 & 23. Igitur ſi 30 quadrans ipſius 120 in ſuos efficientes dividatur 1 & 30, 2 & 15, 3 & 10, 5 & 6 ſumma, & differentia coefficientium exhibebunt 31 & 29, 17 & 13, 13 & 7, 11 & 1, quorum quadrata 961 & 841, 289 & 169, 169 & 49, 121 & 1. Et ſi à quadratis aggregatotum 961, 289, 169, 121 auferatur 97; vel ſi quadratis differentiarum 841. 161. 49. 1 addatur 23: erunt ſive reſidui, ſive compoſiti 864. 192. 72 & 24 quorum quilibet ſatisfacit quæſito, & in integris non reperientur plures.

$$\begin{array}{r} 97 \\ \underline{23} \\ 120 \\ 30 \end{array}$$

864.	961.	31.	1	30.	29.	841.	864.
192.	289.	17.	2	15.	13.	169.	192.
72.	169.	13.	3	10.	7.	49.	72.
24.	121.	11.	5	6.	1.	1.	24.

Si quadrans aggregati numerorum datorum non fuerit integer, ad operationem primam praxis primæ confugiendum erit.

COROLLARIVM.

Hinc etiam colligitur modus inveniendi binomium primum.

Cum enim binomium primum ex numero & radice componatur, dummodo numerus maior ſit radice, & differentia potentiarum vtriuſque numerus ſit quadratus: perſpicuum eſt, binomium primum quærere, nil aliud eſſe, quam duos numeros quadratos invenire, qui numero non quadrato differant. Itaque ſi pro parte radicali determiminetur (v.g.) √ 168, & quadrans ipsius plani 168, nempe 42 in suas efficientes dividatur: erunt aggregata coefficientium 43. 23. 17. 13, & quilibet eorum pars erit rationalis, quæ cum √ 168 binomium primum constituet.

Apotome prima, sive residuum primum differentia est ipsarum partium, quibus binomium primum conficitur. Itaque si binomium primum accipiatur 17 + √ 168: apotome prima erit 17 — √ 168. Vnde perinde erit binomium, ac apotomen quærere.

Quod si genesin binomij primi determinare oporteat. Exponātur omnes numeri quadrati 1. 4. 9. 16. &c. quorum radices 1. 2. 3. 4. &c. & sub singulis quadratis annotentur differentiæ, quibus ipsum quadratum quadrata superat ante-

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81,	&c.
	3.	8.	15.	24.	35.	48.	63.	80.	&c.
		5.	12.	21.	32.	45.	60.	77.	&c.
			7.	16.	27.	40.	55.	72,	&c.
				9	20.	33.	48.	65.	&c.
					11.	24.	39.	56.	&c
						13.	28.	45.	&c.
							15.	32,	&c.
								17,	&c.

cedentia (exclusis differentijs, quæ numerum exhibent quadratum) & manifesta fit genesis, de qua quæritur, vt patet in mappa.

Si enim pro parte rationali binomij primi accipiatur (v.g.) 6, pars radicalis erit √ 35, sive √ 32, sive √ 27, sive √ 20, sive √ 11. & sic de cæteris.

Contemplator quæso mirabilem ordinem progressionum quomodocumque ipsas perpendas.

Si verò data parte rationali (v.g.) 8. determinare oporteat omnes partes radicales, quæ cum dato 8. binomium primum

mum constituant. Duplum ipsius 8 nempe 16 dividatur in omnes suas partes componentes 1 & 15, 2 & 14, 3 & 13, 4 & 12, &c. & multiplicatis binis partibus inter se, & extrahendo radices invenientur √ 15. √.28. √.39. √ 48. √55. √.60. √.63, & quælibet earum cum dato numero 8. binomiũ constituet primum, & in integris non erunt plures.

	8.	
	16.	
1	15.	√ 15.
2	14.	√.28.
3	13.	√.39.
4	12.	√ 48.
5	11.	√ 55.
6	10.	√.60.
7	9.	√ 63.

Si accipiantur radices binarum partium componentium, binomium efficietur, quod radix erit binomij determinati. v.g. determinatum iam sit binomium 8 + √ 60, erit inquam ipsius radix, binomium √5 + √3. Compositum quidem ex radicibus numerorum 5 & 3, qui semisses sunt partium componentium 10 & 6, & sic de reliquis.

PRAXIS TERTIA.

Duos numeros planos similes invenire, qui numero quadrato differant.

Numeri plani similes dicuntur, multiplices, seu submultiplices quadratorum. Ergo si duo numeri quadrati quorum differentia non sit numerus quadratus, multiplicentur per ipsorum differentiam, numeri facti erunt plani similes, quorum differentia erit numerus quadratus. Itaque numeri quadrati 4 & 1, multiplicati per ipsorum differentiam

4.	1.
3.	
12.	3.
9.	4.
5.	
45.	20.

tiam

tiam 3 exhibebunt 12 & 3 pro planis quæſitis, & eodem modo 9 & 4 per differentiam 5 dabunt 45 & 20, & ſic in infinitum.

Numeri plani ſimiles hanc ſortiuntur naturam quadratorum, videlicet, quod inter ſe multiplicati, aut diviſi ſemper factum, aut quotum exhibeant quadratum. Hinc ratio patet multiplicandi quadratos per ipſorum differentiam, vt plani ſimiles eveniant.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtus ſit modus inveniendi binomium ſecundum, quod ex radice componitur, & numero, ita vt pars radicalis maior ſit parte rationali, & radix differentiæ potentiarum partium longitudine ſit commenſurabilis cum parte radicali. Itaque binomium ſecundum quærere, idem eſt, ac duos numeros planos ſimiles inquirere, qui numero differant quadrato, vnde facta operatione antecedente, erit radix quadrati maioris multiplicati per diffentiam amborum pars maior, & ipſa differentia pars minor. prop 50 10. el.

Expoſitis igitur quadratis 4 & 1. binomium ſecundum exurget $\sqrt{12} + 3$. Expoſitis 9 & 4. emerget $\sqrt{45} + 5$. Et ita deinceps. Vbi notandum eſt, radicem quadrati minoris multiplicati per differen-	4 . 1. 3 $\sqrt{12} + 3$. bin. 2. 9 . 4 5 $\sqrt{45} + 5$. bin. 2.

tiam quadratorum, commenſurabilem eſſe cum parte maiore, vt $\sqrt{3}$ in primo exemplo cum parte maiore $\sqrt{12}$, & $\sqrt{20}$ in ſecundo cum maiore parte $\sqrt{45}$, &c.

Hinc

Hinc facile erit genesin binomis secundi ostendere.

SCHOLION.

Profecto antiqui magno labore tractabant radicales. Recentiores vero conservando radices in suis minimis terminis operationes reddunt facillimas. Illi quidem si multiplicare oportebat 3 per $\sqrt{2}$, quadrata partium 9 & 2 multiplicabant, & radicem facti, nempe $\sqrt{18}$ pro facto proferebant. Hi vero insinuatione multiplicationis contenti, partes coniungunt, & pro facto $3\sqrt{2}$ exhibent, hoc est ter $\sqrt{2}$. Immo radicem quamlibet, cum id fieri potest, ad minimam denominationem reducunt, deprimendo planum, cuius est radix, per maximum quadratum, quod ipsum metiri potest. Itaque $\sqrt{50}$, deprimendo planum 50 per quadratum 25, ad $5\sqrt{2}$ reducunt, & loco $\sqrt{50}$, iure merito $5\sqrt{2}$ vsurpant.

Quocirca notare oportet radices quadratas vel inter se esse primas, vel compositas, quemadmodum numeri, primi sunt inter se, vel inter se compositi. Itaque $\sqrt{2}$. $2\sqrt{2}$. $3\sqrt{2}$. $4\sqrt{2}$. $5\sqrt{2}$, &c. (quas antiqui $\sqrt{2}$. $\sqrt{8}$. $\sqrt{18}$. $\sqrt{32}$. $\sqrt{50}$. &c. in tota sua denominatione conservabant) esse inter se compositas, hoc est lon-

longitudine commenſurabiles, plane indicant.

Præterea obſervare oportet, quemadmodum omnis numerus omni radici incommenſurabilis eſt longitudine, ita ſimiliter omnem radicẽ omni radici, ſi vtraque in ſua minima denominatione poſita eamdem denominationem non habuerit, incommenſurabilem eſſe, vt ſunt $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$.&c. Et idem intelligendum eſt de radicibus diverſæ ſpeciei.

Ex prædictis facillis colligitur modus inveniendi omnes partes radicales, quæ cum data parte rationali binomium ſecundum conſtituant.

Sit data pars rationalis 15. quæruntur, &c. Quadratum 225 ipſius 15 dividatur in omnes ſuos efficientes 1 & 225, 3 & 75, 5 & 45, 9 & 25, 15 & 15, & (neglectis coefficientibus 1 & 225, 9 & 25, quia ſunt numeri quadrati) ex binis coefficientibus dividatur maior in omnes ſuos efficientes, & dimidium aggregati ipſorũ multiplicatum per $\sqrt{}$. coefficientis minoris, pars erit radicalis, de qua quæritur, & ita innoteſcẽt omnes. Sunt quadrati 225 coefficientes 3 & 75, quorum maior 75 diviſus in ſuos efficientes exhibet 1 & 75, 3 & 25, 5 & 15, quorum aggregata ſunt 76.28.20, & ſemiſſes multiplicatæ per $\sqrt{}$ coefficientis minoris, nempe $\sqrt{3}$, ſunt $38\sqrt{3}$. $14\sqrt{3}$. $10\sqrt{3}$, quarum quælibet ſatisfacit quæſito. Et facta eadem operatione cum reliquis coefficientibus 5 & 45, 15 & 15, vt patet in mappa, erunt omnes partes radicales de quibus quæritur $38\sqrt{3}$. $14\sqrt{3}$. $10\sqrt{3}$. $23\sqrt{5}$. $9\sqrt{5}$. $7\sqrt{5}$. $8\sqrt{15}$. $4\sqrt{15}$.

	15	
	225	
1		225
3		75
		1 . 75. 76. $38\sqrt{3}$
		3 . 25. 28. $14\sqrt{3}$
		5 . 15. 20. $10\sqrt{3}$
5		45.
		1 . 45. 46. $23\sqrt{5}$
		3 . 15. 18. $9\sqrt{5}$
		5 . 9. 14. $7\sqrt{5}$
9		25.
15		15
		1 . 15. 16. $8\sqrt{15}$
		3 . 5. 8. $4\sqrt{15}$.

quarum quælibet cum dato numero 15 binomium secundum constituet. Neque in integris reperientur plures.

Nota si exempli gratia pro parte maiore accipias 10 $\sqrt{}3$. & binomium sit 10 $\sqrt{}3 + 15$, vel in tota sua denominatione $\sqrt{}300 + 15$: radicem differentia potentiarum partium esse 5 $\sqrt{}3$. vel in tota sua denominatione $\sqrt{}75$, semissem videlicet differentiæ coefficientium 5 & 15 multiplicatam per $\sqrt{}3$. & sic de reliquis.

Hinc manifestus fit tibi ordo huius operationis, sunt enim 10 & 5 semisses aggregati, & differentiæ coefficientium 5 & 15, quorum quadrata 100, & 25 plano differunt 75, quare omnibus per 3 multiplicatis plana 300. & 75 quadrato dato 225 differunt, & sic de reliquis.

Sufficiens quidem specimen libri 10. *elem. dedimus, qui totus circa compositionem, & divisionem magnitudinum, sive longitudine tantum, sive longitudine, & potentiâ incommensurabilium versatur. Vt quisque ex prædictis reliquas ex binis nominibus, aliasque magnitudines, de quibus ibi agitur, secundum præscriptas conditiones (quæ omnes diminutæ sunt) inquirere possit. A quo nos etiam vltro abstinemus, quia hac de re plura habemus in nostra Arithmetica, quæ nondum prelum subiuit. Et quemadmodum prædicto libro ea Euclides, quæ ad plana pertinebant, finiuit, ita & nos resolutioni problematum planorum finem imponimus.*

D. O. M.

Omnis laus, honor, & gloria.

APPEN-

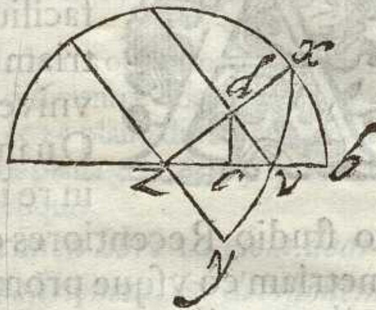
APPENDIX.

ANalysis nostra circa trigonometriam æquè facilè; immo facilius, quam circa geometriam versatur, neque aliter vniversalis dici mereretur. Quanto labore Veteres hac in re insudaverint, & quanto studio Recentiores communem trigonometriam eò vsque promoverint, vnde *datis tribus partibus* triangulum resolvi posit: ijs, qui Authores per legerunt, satis est notum. Vlterius nos progredimur, nostra enim Analysis trigonometrica *datis in vnoquoque triangulorum tribus quibuscumque conditionibus* mappam statuit, per analogias arguit, brevissimis lineis problema solvit, & per logarithmos calculum instituit. Dum tandem, favente tempore, typis mandatur, vnum, vel alterum exemplum (quoad calculum) curiosis porrigere placet.

PROPOSITIO I.

Data altitudine astri in circulo horæ sextæ, elevationem poli investigare, quæ declinationem astri differentiæ ascensionali exhibeat æqualem.

Datur altitudo astri in circulo horæ sextæ, nempe arcus *cd* g. 10. Quæritur altitudo poli *bx*, quæ declinationem astri *yv* æqualem reddat differentiæ ascensionali *zy*.



Analysis nostra quarta argumẽtatione problema soluit, & hanc operationem instituendam docet.

OPERATIO.

Sin.2.g.10. est	9.99335 in logarithmis.
Quadratum	19.98670
Dividatur per 2.	0.30103
Vt ergo dimid.quadr.	19.68567
Ad quad.Radij	20.00000
Ita *sin*.g.10.	9.23967
Ad *sin*.arcus	9.55400
Cuius *sin*.2.est	9.97020
Erat dimid.quad.	19.68567, & naturale 48493 in Radiũ
Ergo agg.dempto Rad.	19.65587, & naturale 45269 in Rad.
Ergo	19.97205. pro summa 93762 in Rad.
Cuius √ est	9.98602 *sin*.2.g.14.27.pro *yv*, vel *zy*.
Ergo	18.50897 pro diff. 03224 in Rad.
Cuius √ est	9.25443. *sin*.2.g.79.39.pro *yv*, vel *zy*.

Est igitur declinatio astri *yv*, sive differentia ascensionalis *zy*, tam g. 14. 27, quam g. 79.39. Vnde quoniam altitudo in circulo horæ sextæ est data g. 10, si accipiantur

pro

pro declinatione g.14.27.in triangulo *zcd* innotescet altitudo poli *bx*, de qua quæritur g 44.6; si verò pro declinatione sumantur g.79.39. erit altitudo poli g.10.10. Idem obtinetur positis in triangulo *zyv* tam pro *zy*, quam pro *yv* iam g.14.27.iam g.79.39.

Constat igitur problema duas admittere solutiones. Nam altitudo poli tam g.44.6.quam g.10.10. quando sydus in circulo horæ sextæ elevatum fuerit g. 10. æqualem exhibebit declinationem syderis differentiæ ascensionali. Sed secunda resolutio soli non convenit, cum maxima ipsius declinatio sit g.23.30.Et notare oportet problema impossibile esse,quando logarithmus, qui *sin*.2.est declinationis, maior appareat radio.

In exemplis nostræ trigonometriæ, operationibus ad proximum minutum contenti sumus, qui maiorem voluerit exactionem secundis vti poterit Itaque quia valorẽ naturalem determinare oportet logarithmi 19.68567, *ipse per Radium deprimitur,& remanet* 9.68567,*qui quæsitus in tabulis sinuum exhibet pro valore naturali* 48493,*vnde,vtroque per Radium multiplicato, logarithmi* 19.68567.*valor est naturalis* 48493 *in Radium. Et eodem modo logarithmus* 19.97205. *accipitur pro summa* 93762 *in Rad. quærendo logarithmũ* 9.97205,*qui respõdet in tabulis summæ naturali* 93763,*& multiplicando per radium,&c.*

Præterea notandũ quoniam in qualibet analogia logarithmica, primus terminus auferri debet à summa 2.*&* 3. *vt quartus appareat, id ipsum obtineri aggregando cum* 1.*&* 2. *termino cõplementum ad* 10 *primi numeri qui locum vnitatis habet*

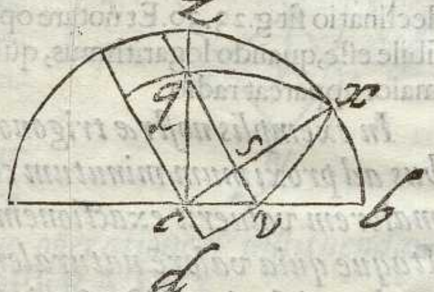
in

in primo termino, & complementum ad 9 reliquorum, & negligendo vnum Radium ad vltimum collectionis.

PROPOSITIO II.

Data horà ortus Aſtri, dataque eius altitudine in verticali primario: elevationem poli, & declinationem Aſtri perſcrutari.

Datur ortus Aſtri in hora quarta, nempe arcus *cd*. g. 30, & altitudo ipſius in verticali primario, videlicet arcus *cq* ponitur g. 22. quæritur altitudo poli *bx*, & declinatio Aſtri *dv*.



Analyſis noſtra quartà argumentatione problema ſolvit, & hanc oſtendit operationem.

OPERATIO.

Sin.2.g.22.eſt	9.96716 in logarithmis
Quadratum	19.93432
Dividatur per 2.	0.30103
Vt igit.dimid.quadr.	19.63329
Ad factum ſub *ſin*.g.22.	9.57357
Et *ſec*. 2.g.30.	10.30103
Ita Radius	10.00000
Ad *tan*.arcus	10.24131
Cuius *ſecans* eſt	10.30322
Erat dimid.quadr.	19.63329, & naturale 42972 in Rad.
Aggreg.dempto Rad.	19.93651, & naturale 86419 in Rad.
Ergo	19.63793 pro diff. 43447 in Rad.
V.eſt	9.81896 *tan*.2.g.56.37 pro *bx*.

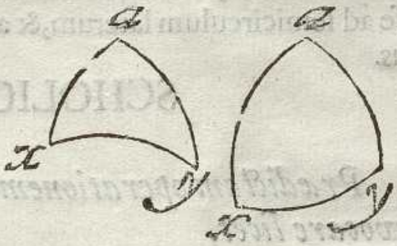
Eſt

Est igitur altitudo poli, de qua quæritur g 56.37, vnde, quia arcus *cd* est datus, triangulum *cdv* exhibebit pro arcu *dv*, idest pro declinatione Astri g. 18.14. Vel quia datur arcus *cq*, triangulum *zqx* dabit pro complemento arcus *qx*, nempe pro declinatione Astri g. 18.14. quæ cum eadem sit vtroque modo quæsita comprobat calculum.

PROPOSIT. III.

Dato angulo verticis, datisque differentià laterum, & differentia angulorum ad basim: triangulum sphæricum exhibere.

Esto triangulum *x a y*, de quo quæritur. Angulus *a* ponitur g. 80. Differentia laterum *xa. ya.* g. 16. Differentia angulorū ad basim *x. y* g. 40.



Analysis nostra septima argumentatione solvit problema, & hanc docet operationem.

OPERATIO.

Vt *tan*. g 20. semidiff. ang. ad basim	9.56106
ad *sin*. g 16. diff. laterum	9.44037
Ita *tan*. 2. g. 40. semianguli verticis	10.07618
ad *k*	9.95549
Vt prædicta *tan*. g. 20.	9.56106
ad *k*	9.95549
Ita prædicta *tan*. 2. g. 40.	10.07618
ad *f*.	10.47061
Est *tan*. g. 8. semidiff. laterum.	9.14780
Ergo aggregatum logarithmorum	19.61841
& divisum per 2.	0.30103
Erit dimidium aggregati	19.31738
Et √.	9.65869

pro

Pro *sin*. g.27.7, vel g.152.53. semisumma laterum.
Est g. 8. g. 8. semidifferentia.
Ergo sum. & diff. g.35.7. & g.19.7. vel g.160.53. & g. 144. 53. Erunt latera trianguli quæsiti.

Duo igitur triangula constitui poterunt sub angulo verticali g.80. Vnius erunt latera *ay*, & *ax* g.35.7. & g.19.7. alterius vero latera *ax*, & *ay* erunt g.160 53. & g. 144. 53, quibus cognitis per communem trigonometriam reliquæ partes vtriusque trianguli determinari poterunt. Nos autem brevius pro angulis primi trianguli invenimus pro *x*. g.72. 59. pro *y*. g.32.59. Et pro angulis secundi, pro *x*. g.107. 1. pro *y*. g.147.1, & pro base vtriusque g. 36. 20. Et perspicuum fit latera, & angulos ad basim vnius complementa esse ad semicirculum laterum, & angulorum ad basim alterius.

SCHOLION.

Prædictam operationem ad hanc analogiam revocare licet.

ANALOGIA.

Vt quadratum *tan*. semidifferentiæ angulorum ad basim.
Ad quadratum *tan*. 2. semianguli verticis.
Ita est rectangulum sub *sin*. differentiæ laterum, & *tan*. semidifferentiæ ipsorum.
Ad duplum quadratum semisummæ laterum.

Vnde cognitis semisummà, & semidifferentià laterum, ipsa latera innotescent, vt anteà.

FINIS.