Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán, *Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

HISTORIA DEL SIGNO IGUAL[1]

Marta Molina Encarnación Castro Enrique Castro

martamg@ugr.es encastro@ugr.es ecastro@ugr.es

Universidad de Granada

Prácticamente desde el inicio de las matemáticas en la antigüedad se han utilizado signos para representar conceptos o ideas. Prueba de esta afirmación es la aparición de símbolos matemáticos en documentos egipcios y de la antigua babilonia, como un papiro encontrado en Kahun, en el que el signo ⌐ es utilizado para denotar a la raíz cuadrada, o los símbolos numéricos que aparecen en las tablas babilónicas de Nippur (de 2400 a.c.) (Cajori, 1993). No obstante, no fue hasta los siglos XVI y XVII cuando surgieron la mayoría de los símbolos que utilizamos en la actualidad (Alanis, Cuevas y Menchaca, 1990), sobre todo los más simples, entre ellos el signo igual; uno de los signos más utilizados en las matemáticas en cuyo origen centramos aquí nuestra atención.

En este momento histórico, el renacimiento, la preocupación dentro de las matemáticas era principalmente de carácter instrumental, en dos sentidos: completar el conocimiento de la matemática antigua mediante la divulgación de textos impresos, y perfeccionar los métodos y recursos que previamente habían sido desarrollados en el ámbito de la aritmética, el álgebra y la trigonometría. Debido a las necesidades e intereses de los comerciantes, astrónomos y artistas se desarrollaron innovaciones aritméticas (los números decimales, los logaritmos y las fracciones continuas), se perfeccionó la trigonometría y se creó una nueva rama de la geometría a partir del estudio de la perspectiva. Por otra parte, el álgebra mantuvo su carácter técnico especulativo, siendo su desarrollo guiado por el interés lúdico de la época de abordar cuestiones de gran dificultad (Pastor y Babini, 1997).

En esta época, principalmente en la primera mitad del siglo XVI, el álgebra experimentó un desarrollo de especial importancia al producirse un gran avance hacia la

[1] Este trabajo ha sido desarrollado dentro del proyecto “Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en Educación Matemática” (SEJ2006-09056) financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Económica Europea.

representación de todos los términos y de la solución de un problema por medio de símbolos. Previamente, el simbolismo del álgebra era parcial, siendo la mayoría de los símbolos existentes abreviaciones de las palabras utilizadas para denominar a los conceptos y operaciones; lo que suele denominarse álgebra sincopada. En el siglo XVI se pasó de un álgebra elemental a otra puramente simbólica que permitió el planteamiento de problemas generales y la obtención de soluciones generales. Entonces, los símbolos dejaron de ser utilizados como una mera sustitución pasando a ser considerados en sí mismos y *"la experiencia obtenida durante siglos de laboriosos tanteos se* [condensó] *en procedimientos mecánicos que se pueden aplicar y manejar con un mínimo de razonamiento"* (Bell, 1999, p.133). Gracias a este desarrollo del simbolismo, se produjo, en el siglo siguiente, un importante florecimiento de las matemáticas, en especial de la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, la teoría de probabilidades y la teoría de números (Bell, 1999).

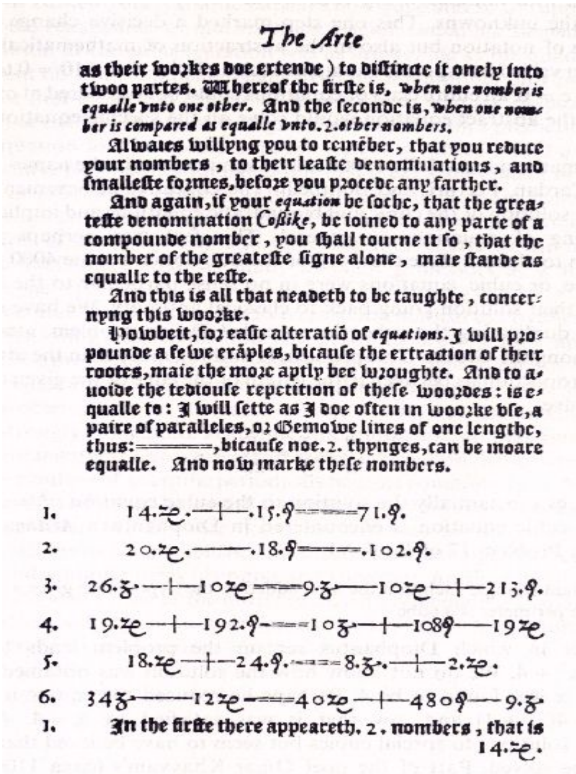
ORIGEN DEL SIGNO IGUAL

En este momento histórico al que nos estamos refiriendo surge el signo "=", uno de los símbolos matemáticos que ha sido adoptado de manera universal y, según Wheeler (1981), uno de los que ha sufrido en mayor medida de un mal uso a lo largo de su evolución. Como la mayoría de los símbolos de la aritmética tuvo un origen algebraico. El primer uso de este signo se le adjudica a Robert Recorde; el matemático de mayor importancia en la Inglaterra del siglo XVI (Boyer, 1986). No obstante, Cajori (1993) reconoce la existencia de un matemático en Bolonia que empleó el mismo signo en sus manuscritos, fechados, probablemente, entre 1550 y 1568.

Robert Recorde
(1510–1558)

Recorde empleó por primera vez el signo igual en su libro de álgebra, "The Whetstone of Witte" (*El aguzador del ingenio o la Piedra de afilar el Ingenio*) publicado en 1557. En este texto también hace uso de los signos más (+) y menos (−) para denotar la suma y la resta, los cuales fueron adoptados de forma general en Inglaterra a partir de este trabajo, pese a haber sido introducidos unos cien años antes (Cajori, 1993).

Esta obra de Recorde es un tratado de álgebra típico del siglo XVI, el primer tratado inglés del álgebra, en el cual, además de las operaciones radicales, los caracteres cósicos (símbolos para las potencias de la incógnita) y la resolución de problemas de primer y segundo grado, hay una parte dedicada a la aritmética (Boyer, 1986; Meavilla, 2001; Stallings, 2000). La Figura 1 muestra la página de dicho texto en la que aparece el primer uso del signo igual, introducido por Recorde con la intención de evitar tediosas repeticiones. Justificó la adopción de dos segmentos de recta iguales explicando "*Pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así* = *, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales"* (Boyer, 1986, p. 349). Con esta afirmación pone de manifiesto el uso de una representación de forma puramente simbólica al no utilizar la abreviación, terminación o comienzo de una palabra, sino un signo especialmente ideado para representar a un concepto o idea (Bell, 1999).


The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other*. And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers*.

Alwaies willyng you to remēber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cossike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to avoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =======, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.

Figura 1: Primer uso del signo igual por Recorde en su libro "The Whetstone of Witte", (Cajori, 1993)[2]

Como puede observarse en la Figura 1, en su uso primigenio este signo era una versión más larga de la que utilizamos en la actualidad. Recorde escribió este signo con los segmentos más largos y más cercanos el uno al otro que en el actual signo "=". De esta

[2] Las expresiones que aparecen en esta figura se traducen al simbolismo moderno de la siguiente forma:
1. $14x + 15 = 71$
2. $20x – 18 = 102$
3. $26x^2 + 10x = 9x^2 – 10x + 213$
4. $19x + 192 = 10x^2 + 108 – 19x$
5. $18x + 24 = 8x^2 + 2x$
6. $34x^2 – 12x = 40x + 408 – 9x^2$

misma forma fue utilizado posteriormente por otros autores tales como Thomas Harriot, en 1631, y De Lagny, en 1733. Por su parte, Weigel en 1693 y Swedenborg en 1716, entre otros, modificaron ligeramente este signo escribieron los dos segmentos muy cortos, y en el caso de Swedenborg, un poco inclinados hacia arriba. En otras ocasiones este signo se ha representado de forma similar al actual pero con los segmentos más distanciados y, en su forma impresa, también ha aparecido escrito como dos unos (11) girados noventa grados a la izquierda (Cajori, 1993).

ADOPCIÓN UNIVERSAL DEL SIGNO IGUAL

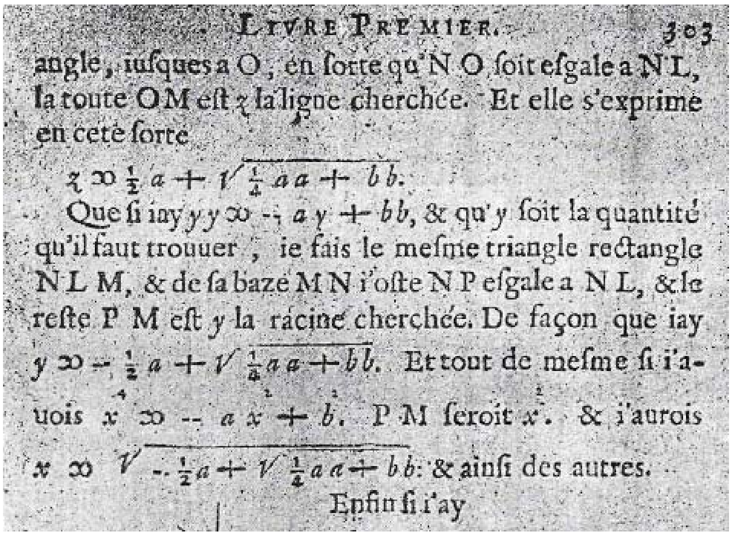
Tras este uso, el signo igual no apareció escrito de nuevo hasta 1618, cuando fue utilizado en un apéndice anónimo, probablemente escrito por Oughtred, en la traducción al inglés por Edward Wright de la obra de Napier "Despcriptio". Además, nuevos signos para la igualdad se siguieron introduciendo, como **[**, usado por Buteo en 1559, dos líneas verticales **||**, empleadas en 1575 por Whilhelm Holtzmann (signo que fue adoptado por algunos matemáticos franceses y daneses durante los siguientes cien años), **)=(**, usado por Leonard y Thomas Digges en 1590, **2|2** y ⊔ , usados por Hérigone en 1634, y una línea vertical | utilizada por Reyher en 1698, entre otros (Cajori, 1993; Meavilla, 2001; Stallings, 2000). Otros signos para la igualdad, utilizados por los matemáticos españoles Hugo de Omerique y Tomás Vicente Tosca en los siglos XVI Y XVII respectivamente, son _^_ y —⌒— (López, 1955).

El mayor rival del signo de Recorde fue el signo utilizado por Rene Descartes introducido en 1637 en su obra "La Géométrie"[3]; un signo parecido al del infinito pero abierto por la izquierda, ∝ , procedente de la contracción de la palabra aequalis, que significa igual (Ver Figura 2) (Cajori, 1993). Desde 1600 a 1800 éste fue el signo utilizado frecuentemente para denotar la igualdad (Meavilla, 2001). Un signo simétrico a éste, ∝ , fue utilizado por Francisco Vieta (s XVI) para representar la igualdad.

El reconocimiento general del signo de Recorde en Inglaterra se produjo hacia 1631, al ser empleado en tres trabajos de gran influencia: "Artis analyticae praxis" de Thomas Harriot, "Clavis mathematicae" de William Oughtred y "Trigonometría" de Richard Norwood (Cajori, 1993). Posteriormente, fue utilizado por John Wallis, Isaac Barrow, e Isaac Newton, facilitando su adopción en Europa. A principios del siglo XVI, la rivalidad con otros signos cesó, siendo en la obra póstuma de Bernoulli "Ars

[3] Fue con esta obra de Descartes cuando el álgebra simbólica formal encontró su culminación, tras años de continuo avance, siendo éste el primer texto matemático en el que toda la notación empleada es semejante a la del álgebra actual (Boyer, 1986).

Conjectandi" (1713) donde tiene lugar uno de los últimos usos del signo de Descartes para la igualdad (Cajori, 1993). Ya a finales del siglo XVII se produjo la adopción casi universal de este signo al ser utilizado por Leibniz (1646–1716) en su notación para el cálculo (Stallings, 2000).



LIVRE PREMIER. 303

angle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Que ſi iay $yy \propto - ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \propto - ax^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{- \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

Enfin ſi i'ay

Figura 2: Página de La géométrie de Descartes en la que se aprecia el símbolo usado por Descartes para denotar la igualdad (Cajori, 1993).

REPRESENTACIONES DE LA IGUALDAD PREVIAS AL SURGIMIENTO DEL SIGNO "="

Previamente al trabajo de Recorde y, especialmente cuando el álgebra se escribía utilizando el lenguaje ordinario, durante el álgebra retórica, en la mayoría de los libros de texto se empleaban palabras completas o abreviaturas para hacer referencia a la igualdad (ej. aequales, aequantur (a veces abreviado como aeq), esgale, faciunt, ghelijck y gleich); notación que siguió siendo utilizada por la mayoría de los matemáticos importantes durante al menos cien años después del trabajo de Recorde.

Sin tanto éxito como Recorde, otros autores previos también introdujeron signos específicos para denotar la igualdad (Cajori, 1993; Meavilla, 2001; Newman, 1968; Ruiz, 1990; Stallings, 2000). Entre ellos destacamos los siguientes:

- un escarabajo que significaba "se convierte en", signo que aparece en el papiro de Rhind (1650 a.c.[4]), el documento matemático más antiguo que se posee;
- **pha o phalam,** utilizado por matemáticos indios (900 a.c.), el cual también aparece en el manuscrito de Bakhshali (reescritura de textos del 200 a.c. al 400 d.c.);

[4] Esta es la fecha de la copia que se posee la cual copió el escriba Ahmes (A'h-mose) de una obra anterior (Baldor, 1962).

- **ι**, usado por Diofanto de Alejandría (250 d.c.), el cual solía utilizar en su trabajo signos procedentes de abreviaturas de palabras dando origen al álgebra sincopada.
- un signo curvo parecido a una inversión del signo $\checkmark$ usado por Al–Qalasadi, (1500 d.c);
- un signo inspirado en la forma de la última letra de la palabra árabe que significa "igualar" usado por al–Qalasadi (siglo XV);
- un guión horizontal, —, utilizado por German Regiomontanus en 1470 y Pacioli en 1494;
- **ae** (de aequalis), utilizado también por Pacioli en 1494;
- tres guiones horizontales, usados por Ghaligai en 1552;
- un espacio negro, empleado por el italiano Cardan en 1539;
- **eq** utilizado por Pérez de Moya en 1558, en el segundo tratado de álgebra en español, según el propio autor reconoce, debido a los caracteres disponibles en la imprenta. Símbolo que se siguió utilizando en ediciones posteriores de este libro.

DIFERENTES SIGNIFICADOS Y USOS DEL SIGNO IGUAL A LO LARGO DE LA HISTORIA

Junto con la existencia de otras formas para denotar la igualdad, la adopción universal del signo "=" estuvo amenazada por el uso que se hacia de él con otros significados (Cajori, 1993; Meavilla, 2001). Concretamente Vieta lo empleó para la diferencia aritmética en 1591 en su "In artem analyticen isagoge", uso que adoptaron otros matemáticos tras la traducción de este texto. Vieta también utilizó el signo igual entre dos números para indicar que eran desiguales. Otros autores como Descartes, Caramuelis, Paricius, Dulaurens, Reyher y Legendre han utilizado este signo para representar más o menos (±), separar la parte entera y decimal en los números decimales (ej., 102=857 denotaba 102.857), separar números en la resolución de problemas aritméticos, representar dos rectas paralelas o para denotar la congruencia de números (lo que es actualmente representado con el signo ≡).

Un uso extraño de este símbolo aparece en el trabajo de Deidier (Cajori, 1993) el cual escribe: $\frac{0+1+2=}{2+2+2=}\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{0.1.4.=5}{4{,}4{,}4{,}=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$. Otro uso inusual del signo igual ha sido encontrado en un texto de aritmética americano "The Columbian Arithmetician" (1811) donde se emplea para la expresión de operaciones encadenadas de la siguiente forma: 1 + 6, = 7, x 6 = 42, ÷ 2 = 21 (Cajori, 1993).

Así mimo, a lo largo de la historia, el signo igual ha sufrido ciertas modificaciones en su escritura para denotar conceptos relacionados con la igualdad. Entre ellas destacamos su uso, por Wolfgang Bolilla (en 1832), con un punto sobre la mitad del segmento superior $\doteq$ para denotar igualdad absoluta, con un punto sobre la mitad del segmento inferior $\underset{\cdot}{=}$ para denotar igualdad de contenido y entre paréntesis A $(=)$ B para indicar que cada valor de A es igual a algún valor o valores de B y viceversa. Este autor también escribió A $(=$ B para indicar que todo valor de A es igual a alguno o algunos valores de B.

Por otra parte, Pasquier empleó, en 1920, una señal de doble igualdad escribiendo un signo igual sobre otro, para denotar la igualdad por definición, lo que en la actualidad se denota a veces por $:=$. En otras ocasiones se ha empleado el signo de Recorde con una efe debajo, $=_{f}$, para denotar que la igualdad es sólo formal y no aritmética, e incluso ha sido empleado con un significado más general para denotar "es explicado por" o "está asociado con". Bellavitis, por su parte, lo empleó en 1832 para denotar la igualdad de vectores, aunque posteriormente adoptó otro signo.

SIGNIFICADOS ACTUALES DEL SIGNO IGUAL

En la actualidad el signo igual es utilizado en una gran diversidad de contextos y con variedad de significados. No siempre es utilizado para denotar una igualdad y, cuando sí lo es, influye el hecho de que en las matemáticas no existe una noción única de igualdad debido a los numerosos ámbitos desde los cuales se puede considerar un determinado objeto matemático, siendo a menudo una cuestión de definición. La igualdad entre dos objetos queda, por tanto, determinada por las relaciones específicas del dominio al que pertenecen dichos objetos (Freudenthal, 1994; Wilhelmi, Godino y Lacasta, en prensa). La consideración del contexto es indispensable para determinar el significado de este signo del que se está haciendo uso. En ocasiones, cosas que no son iguales, tales como las expresiones 2/3 y 4/6, pasan a ser iguales al definirse una relación de equivalencia que las agrupa en una misma clase.

Esta riqueza de significados es mayor si además de los significados de referencia reconocidos dentro de las matemáticas, se consideran significados otorgados a este signo por los alumnos o en los libros de texto escolares de matemáticas. Para poner de manifiesto esta diversidad a la que hacemos referencia, presentamos, a continuación, algunos de los significados que se le otorgan a este signo en el contexto de la aritmética y el álgebra escolar.[5]

- *Propuesta de actividad de cálculo*[6]**.** Significado del signo igual en expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos, encadenados con símbolos operacionales, seguida a su derecha del signo igual (Ej., $16:3=$, $x(x+1)-3x(x+5)=$). Este tipo de expresiones se utilizan en actividades de cálculo de operaciones o simplificación de expresiones, para proponer al alumno una actividad a realizar que no necesariamente ha de abordarse en el formato de una igualdad.

- *Operador*. Significado del signo igual en igualdades o sentencias[7], unidireccionales, compuestas por una cadena de operaciones, dispuesta a su izquierda, y su resultado, dispuesto a la derecha (Ej., 4 x 5 = 20, $x(x-2)+3x^2=4x^2-2x$). En estos casos el signo igual indica la respuesta a un cálculo o simplificación; es interpretado como un operador. Este significado es denominado por algunos autores como significado aritmético u operacional del signo igual (Rojano, 2002; Van Ameron, 2002).

En ocasiones el signo igual es utilizado por los alumnos con este significado para encadenar diferentes operaciones en el cálculo de una cadena de operaciones (Ej., $12+3=15+21=36-9=25$), dando lugar a expresiones matemáticamente incorrectas. En este uso del signo igual la sentencia no está siendo considerada como una totalidad sino como una secuencia unidireccional de izquierda a derecha.

- ***Separador*.** Significado del signo igual otorgado por los alumnos al hacer uso de este signo como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad (Ej., $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x}=x^2+1=x=x^2-x+1=0$, f(x)= x^2= f^2(x)=x^4). En este caso el signo igual relaciona expresiones que pueden no tener relación alguna, siendo pasos sucesivos en la resolución de la actividad en cuestión.

- ***Expresión de una equivalencia condicional (ecuación).*** Este significado del signo igual se encuentra en el contexto del álgebra en situaciones en las que la equivalencia expresada por medio del signo igual sólo es cierta para algún o algunos valores de la variable o variables, pudiendo no existir ninguno (Ej., $x^2+4x=5x-6$).

---

[5] Ver Molina, 2007, para un estudio más detallado.

[6] Este significado del signo igual es identificado por Freudenthal (1994).

[7] Utilizamos el término sentencia numérica para referir a expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen una proposición o enunciado declarativo (expresión completa sin ningún término por determinar). Por ejemplo, son sentencias las siguientes expresiones 5 + 7 = 9 y e^{Π} = 1. Ocurre que toda sentencia verdadera es una igualdad.

- *Expresión de una relación funcional o de dependencia.* Este significado del signo igual se refiere al uso del signo igual para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros (Ej., $l = 2\Pi r$, $y = 3x + 2$). Por ejemplo, éste es el significado del signo igual en fórmulas del área de figuras geométricas.
- *Indicador de cierta conexión o correspondencia.* Significado impreciso del signo igual que refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como, por ejemplo, entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas (Ej.,  = 3; Precio bici = 3*x* + 5, siendo *x* el precio de un balón de baloncesto).
- *Aproximación.* Este significado corresponde a las situaciones en las que este símbolo relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico (Ej., 1/3 = 0.33). En estos casos el signo igual puede ser reemplazado por el signo $\simeq$.
- *Definición de un objeto matemático.* En este caso el signo igual se utiliza para definir un objeto matemático o asignarle un nombre. En algunos contextos se utiliza el símbolo ≡ en vez del signo igual, así ocurre cuando se considera la ecuación o ecuaciones de una recta o plano (Ej., $a^0 = 1$ con a un número natural, f(x) = 2x + 3, r ≡ ax + by + c=0).

DISCUSIÓN

La simbolización que ha sufrido el álgebra a lo largo de la historia de las matemáticas, y en especial en los siglos XVI y XVII, ha sido un paso crucial y condicionante en el desarrollo y florecimiento de todas las áreas de las matemáticas. Este proceso ha sido bastante azaroso hasta época reciente, siendo paulatino el surgimiento de los símbolos que se utilizan de forma universal en la actualidad. Como muestra el caso del signo igual, la adopción universal de un signo para representar un concepto o idea matemática es un proceso largo, inestable y un tanto fortuito. En el camino han desaparecido otros signos candidatos a ser aceptados universalmente y el signo igual ha variado ligeramente en su forma y ha adquirido una mayor diversidad de significados, algunos de ellos muy imprecisos.

REFERENCIAS

Alanis, L., Cuevas, O. y Menchaca, V. (1990). *Lecturas en Educación Matemática. Número Diez. Historia del Álgebra (Parte II): Grecia, India, Arabia, Europa y China.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Baldor, A. (1962). *Aritmética–Teórico Práctica.* Guatemala: Cultural Centroamericana.

Bell, E. T. (1999). *Historia de las matemáticas* (R. Ortiz, Trad.) (2ª Edición). México: Fondo de cultura económica.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover Publications.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenológica didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados). Traducción, notas e introducción de L. Puig.* México D.F.: Cinvestav del IPN.

López, B. (1955). *Breve historia de las matemáticas.* Madrid: Editorial Dossat.

Meavilla, V. (2001). *Aspectos históricos de las matemáticas elementales.* Zaragoza: Prensas Universitárias de Zaragoza.

Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Newman, J. R. (1968). *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Tomo 1. Barcelona: Ediciones Grigalbo.

Pastor, J. R. y Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática Volumen II. Del renacimiento a la actualidad* (3ª edición). Barcelona: Editorial Gedisa.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students´ Access to Significant Mathematical Ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143-163). Mahwak, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Ruiz, A. (1990). *Matemáticas y Filosofía. Estudios Logicistas*. Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Stallings, L. (2000). A Brief History of Algebraic Notation. *School, Science and Mathematics*, *100*(5), 230.

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition form arithmetic to algebra.* Utrecht: CD–β Press y Center for Science and Mathematics Education. Descargado el 9 de Septiembre 2005 de http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/full.pdf.

Wheeler, R. F. (1981). *Rethinking Mathematical Concepts.* Chichester: Ellis Horwood Limited.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (en prensa). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*.