



*ugr*

Universidad  
de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

TRABAJO FIN DE GRADO

# INTERPRETACIÓN DE LAS FRACCIONES POR ALUMNOS DE 5.º DE PRIMARIA

Alumno: MARÍA GONZÁLEZ FERNÁNDEZ

Curso 2015-2016

## ÍNDICE

1. Introducción.....	1
2. Metodología.....	7
3. Resultados.....	8
4. Conclusiones.....	17
5. Referencias bibliográficas.....	20
6. Anexos.....	22

## 1. INTRODUCCIÓN

Los números racionales no aparecen formalmente antes del segundo ciclo de la Educación Primaria. Sin embargo, desde los primeros años el escolar se relaciona con la medida de magnitudes, como la longitud, el tiempo, o el peso y en todas ellas aparecen medidas racionales como medio metro, un cuarto de hora o un cuarto de kilo, empleando normalmente una notación verbal.

Durante el segundo ciclo de Primaria se lleva a cabo la introducción de los números fraccionarios y la fracción para expresar particiones y relaciones. Como señalan Flores y Torralbo (2011), las fracciones son un contenido muy complejo para los alumnos de primaria, y no sólo para ellos sino también para, el profesor, pues encuentra gran complejidad a la hora de explicarlo.

Por ello, sería de gran ayuda conocer cuáles son los conocimientos previos que tienen nuestros alumnos sobre este concepto matemático, cómo lo interpretan, cuál es su nivel de profundidad, y las posibles deficiencias de su conocimiento. Las deficiencias que encontramos en el campo de las fracciones ya han sido estudiadas en otros trabajos como el de INCE (2002).

Conocer mejor a nuestros alumnos nos facilitará escoger cuál sería la metodología más adecuada para que comprendan bien las matemáticas. Esto requiere un gran esfuerzo por parte del maestro de educación primaria, ya que es el responsable de la enseñanza inicial y el aprendizaje de esta materia. Es por ello que siempre debe estar actualizando su conocimiento y el de sus alumnos. En este caso, las fracciones son difíciles de aprender y enseñar, por lo que la enseñanza inicial es muy importante.

Las grandes carencias de los estudiantes en el tema de fracciones han llevado a investigadores durante décadas a intentar mejorar la comprensión de este tema. En estudios sobre este tema, Castro (2010) destaca varios trabajos (como Ball, 1990; Cramer, Post y del Mas, 2002; Jones, 2006; Newton, 2008), donde se estudian las dificultades que presentan los alumnos en el conocimiento y manejo de las fracciones, que han sido un problema y lo continúan siendo, tanto en los maestros en ejercicio como en los alumnos.

Vergnaud (1983) argumenta el por qué de esta gran dificultad, sostiene que el desarrollo de las fracciones está relacionado con otros temas y que presentan muchas diferencias

con el campo conceptual de los números enteros. Las fracciones adquieren diferentes significados según los contextos en los que se emplean. Por ejemplo, Flores y Torralbo (2011) proponen varios de estos significados: parte-todo, cociente, medida, razón y operador, que lo definiremos más adelante. El conocimiento de estos significados, su interpretación y utilizarlos como elementos de aprendizaje forman parte del bagaje intelectual que debe poseer un profesor de matemáticas.

Las fracciones engloban un campo muy amplio de investigación. En este estudio nos centraremos en conocer cómo expresan unos alumnos de 5° de Primaria el significado que les atribuyen a las fracciones. El instrumento con el que llevaremos a cabo la investigación lo hemos extraído de un trabajo elaborado por Castro (2010).

A lo largo de todos estos años, muchos investigadores han estudiado el pensamiento matemático de nuestros alumnos, lo que quiere decir, que se trata de un problema actual, que persiste en nuestras aulas. Esto implica que deberíamos mejorar el conocimiento de nuestros alumnos, conociéndolos y la vez estaríamos mejorando nuestra labor como docente.

## **Objetivos**

La finalidad principal de este trabajo es describir el significado que un grupo de alumnos de 5° de Educación Primaria atribuyen a las nociones matemáticas de fraccionar y repartir.

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1. Seleccionar y justificar un cuestionario con el que elicitamos ideas, imágenes y conceptos sobre las nociones “fraccionar” y “repartir”.
2. Identificar y categorizar los significados que sobre “fraccionar” y “repartir” expresan los alumnos de 5° de Educación Primaria.
3. Analizar las relaciones que surgen entre las eventuales categorías establecidas para interpretar la diversidad de significados sobre “fraccionar” y “repartir”, teniendo en cuenta aspectos verbales y gráficos.

## **Marco teórico**

El origen histórico de los números racionales (Flores y Torralbo, 2011) se encuentra desde la antigüedad, en las acciones de repartir y medir. Es decir, siempre ha existido la

necesidad de repartir o medir algo, como por ejemplo, áreas y longitudes. Los babilonios y egipcios en su época ya dividían la unidad en partes iguales, generando fracciones. Los egipcios resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Entre ellas estaban la distribución del pan, el sistema de construcción de las pirámides y las medidas utilizadas para estudiar el planeta Tierra. Esto lo podemos comprobar en numerosas inscripciones antiguas como *el papiro de Ahmes* o *el Ojo de Horus*.

Por otro lado, los griegos también avanzaron en conocimientos fraccionarios, a partir de la medida de segmentos establecieron relaciones de proporcionalidad dando lugar a las razones entre segmentos. Sin embargo, la matemática árabe a través del Sistema de Numeración decimal fueron los que más manejaron los números racionales, como por ejemplo hizo Fibonacci (1170-1250) resolviendo problemas de cálculos con fracciones, y también lo hizo Simon Stevin (1548-1650) que aportó la notación decimal. (Flores y Torralbo, 2011).

Básicamente, la fracción surge en un contexto de medida y en otro de reparto. Todos estos resultados evolucionaron hasta la concepción que tenemos hoy en día, donde las fracciones representan a los números racionales con sus propias reglas de cálculo y simbolización.

Flores y Torralbo (2011) definen la fracción “... como un par de números enteros, el segundo distinto de cero” (p.193). Según estos autores, actualmente, las fracciones se usan fundamentalmente para repartir, es decir, en situaciones en las que se requiere hacer una partición.

También mencionan otras utilidades, pero principalmente atribuyen que los números racionales están indicados para medir, repartir y por lo tanto, dividir. No obstante, el espectro de usos posibles de las fracciones es más amplio:

- Parte-todo: El número racional expresa una relación multiplicativa entre el número de partes que forman la porción y el total de partes consideradas.
- Cociente: El número racional es visto como la porción que resulta de una división (generalmente reparto) entre dos cantidades. En este caso, el todo es la unidad de la cantidad a repartir.

- Medida: El número racional expresa una comparación multiplicativa entre dos cantidades, tomando como unidad (todo) una de ellas.
- Operador: El número racional expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad (todo), indicando una división en tantas partes iguales como dice el denominador.

Además, los números racionales se suelen representar de 5 maneras básicas: como fracción, número decimal, lenguaje verbal, lenguaje pictórico y también como porcentaje.

¿Qué es entonces *fraccionar*? De nuevo, Flores y Torralbo (2011) indica que fraccionar es partir un todo en trozos iguales. Y, requiere dos condiciones: que las partes sean iguales y que las partes cubran el todo. Así, en un fraccionamiento intervienen, el todo, la parte y la relación entre ellas, que es la fracción.

Dado que en el estudio empírico emplearemos un instrumento usado con estudiantes universitarios, nos interesa justificar su pertinencia para escolares de Educación Primaria. Para ello revisamos la normativa curricular vigente.

Las fracciones se encuentran en el “Bloque 2. Números” según dicta el currículo básico de Educación Primaria (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). Algunas nociones clave que se incluyen en ese bloque son:

- Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo.
- Fracciones propias e impropias.
- Número mixto.
- Representación gráfica.
- Fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador.
- Los números decimales: valor de posición.
- Redondeo de números decimales a las décima, centésima o milésima más cercana.
- Relación entre fracción y número decimal, aplicación a la ordenación de fracciones.
- Operaciones con fracciones.
- Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

Según los estándares de aprendizaje, evaluará si el alumno de 5° de Primaria (pp. 19389-19391):

- Lee, escribe y ordena fracciones en textos numéricos y de la vida cotidiana, utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.
- Interpreta en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas).
- Ordena números enteros, decimales y fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros.
- Reduce dos o más fracciones a común denominador y calcula fracciones equivalentes.
- Ordena fracciones aplicando la relación entre fracción y número decimal.
- Realiza sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Calcula el producto de una fracción por un número.
- Establece la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

Como podemos observar, el currículum también pone hincapié en la parte-todo de una fracción. Se trata de un concepto sencillo a simple vista, pero es bastante complejo y clave para entender el mundo de las fracciones. Godino (2004) propone otras dificultades y errores. Una de las que señala, consiste en que los alumnos atribuyan un significado correcto a la noción de fracción y, por tanto, a cada uno de los enteros que aparecen en la escritura de una fracción. Se trata de una notación nueva para los alumnos de este nivel, ya que hasta este momento sólo conocen los números naturales, es por ello que intentan aplicarle las mismas normas a los números racionales. Castro, Castro, Fernández, Flores y Molina (2015) profundizan en las dificultades con las fracciones y las clasifican en: relacionadas con el uso de los modelos para representar las fracciones, en la que el modelo de la recta numérica presenta más dificultad, y relacionadas con las notaciones decimales y como porcentaje de los números racionales.

Los resultados de varias investigaciones sobre su significado concluyen que interpretar una fracción como una o varias partes de un mismo todo es el modo de uso que menor dificultad presenta. Sin embargo, las dificultades usuales es la consideración del numerador y denominador de una fracción como números aislados, y cuando se trabaja la fracción como parte-todo, ya que les cuesta percibir el todo como unidad individual

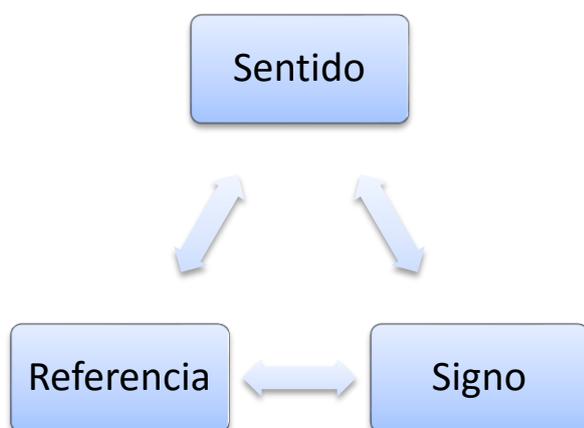
en el modelo discreto, sin embargo, con el modelo de área, no existe este problema, también es el más intuitivo para ellos y es el más utilizado para su representación. Esto ha llevado a profesionales a querer saber más sobre este tema, para mejorar su enseñanza a través de los conceptos que poseen sus propios alumnos. Los siguientes estudios están relacionados con la formación de profesores y su conocimiento sobre las fracciones. Castro (2010) revisa varios de estos estudios y señala algunos centrados en profesores en formación, entre los que destaco los de Lupiáñez (2009), que investiga las competencias que se deben adquirir en las fracciones planteándole a un grupo de profesores en formación qué capacidades quieren que sus alumnos desarrollen en el tema de las fracciones. Toluk-Uçar (2009) llevó a cabo una metodología experimental e investigó el efecto positivo que causa la invención de problemas en la comprensión de las fracciones. Newton (2008), por su preocupación en mejorar la comprensión de las fracciones crea un programa para alumnos de magisterio y consigue erradicar muchos de los errores de algoritmos que solían presentar al inicio del programa. Finalmente, Jones (2006), propone algo que para nosotros es fundamental, la motivación. Comprueba que gracias a ésta, el rendimiento y los resultados de la comprensión en el tema de las fracciones es mucho mejor.

En este TFG la finalidad principal no es indagar sobre los conocimientos que tiene un maestro en formación, sino sobre el significado que le atribuyen a las fracciones que unos alumnos de 5.º de primaria. Pero, ¿qué entenderemos por significado de una noción matemática?

Gómez (2007) hace referencia al triángulo semántico (Figura 1) que establece Frege (1998), que nos será útil en nuestro trabajo. Frege (1998) propone que cualquier concepto matemático está compuesto por tres componentes, que ejemplificamos en el tema de fracciones:

- Sentido: para qué se utilizan las fracciones. Este aspecto lo analizaremos en unos problemas que proponemos, pues ahí se encuentra el verdadero uso de las fracciones.
- Referencia: la definición y sus relaciones como parte de una estructura. En nuestro caso, estudiaremos qué se entiende por fracción.

- **Signo:** cómo se representan las fracciones. Además de simbólicamente, se pueden representar gráficamente mediante un modelo lineal, de área y discreto, así como con representaciones icónicas.



*Figura 1.* Triángulo semántico

Utilizaremos estas tres componentes para analizar el significado de las fracciones que expresan unos alumnos de 5.º de Primaria.

## **2. METODOLOGÍA**

Este estudio, que tiene un carácter exploratorio, se llevó a cabo con un grupo de alumnos de 5.º de Primaria del colegio Ave María San Cristóbal, donde me encontraba durante mi periodo de prácticas. A éstos alumnos se le realizará un cuestionario en el que tienen que responder una serie de preguntas sobre *fracción*, *partir* y *repartir*. Por tanto, se trata de un estudio réplica, lo único que cambia en este caso, es el contexto.

Es un cuestionario de respuesta abierta propuesto y validado por Castro (2010) en una investigación centrada en maestros en formación inicial, y ha sido posible aplicar, sin adaptaciones con niños de 9 años, ya que las preguntas son de un nivel apropiado a esta edad en virtud de la revisión curricular que hemos realizado. Incluyo en el Anexo 1 el formato del cuestionario tal y como se aplicó. Cada sujeto recibió un cuadernillo compuesto por 4 hojas. La primera recoge la presentación e identificación mientras que las posteriores presentan una pregunta por cara.

El tiempo de aplicación fue de 50 minutos. El cuestionario se aplicó durante el tercer trimestre del curso 2015-2016, y se recogieron 21 cuestionarios.

Las preguntas responden a la siguiente estructura:

Las preguntas 1 y 2 tienen un esquema idéntico. Cada una está formada por dos cuestiones relativas a fraccionar y repartir, respectivamente. Se pide explicar verbalmente qué se entiende por esas dos nociones y realizar un dibujo que muestre lo que son. Estas preguntas se centran en la componente *referencia* del significado.

La pregunta 3 se refiere a la descripción de situaciones a partir de 3 ilustraciones relacionadas con fraccionar y repartir. Tiene que ver con la componente *signo*.

Las preguntas 4 y 5 piden la invención de problemas sobre fraccionar y repartir, relacionándose con la componente *sentido*.

El cuestionario, no será propuesto como un examen, se le intentará dar la menor importancia posible, para que ningún alumno se sienta presionado y lo haga lo mejor que pueda y sin tener miedo a responder.

### **3. RESULTADOS**

Al ser un cuestionario de respuesta abierta, para unificar la información hemos establecido una clasificación de éstas. La clasificación está basada en las propias respuestas dadas por los estudiantes. Si una o más respuestas coinciden literalmente en estructura, forma y figura, se considerarán como iguales. Sin embargo, en la parte de la invención de problemas, se ha encontrado mucha diversidad en cuanto a operaciones, por lo que hemos decidido establecer una clasificación según si el problema es aditivo o multiplicativo y el subtipo (cambio, comparación, combinación, proporcionalidad y producto cartesiano), como clasifican Flores y Torralbo (2011) .

## **Análisis de las respuestas a la actividad 1**

### **Actividad 1.1**

Respecto a las respuestas sobre qué es fraccionar, podemos encontrar diferentes categorías de verbos que los escolares usan para definirlos: Dividir en partes iguales; Dividir y repartir trozos, y contar las partes que se cogen; Dividir o repartir en partes iguales y coger partes; Repartir; Repartir en partes iguales; Partir algo en partes iguales; Quitar partes.

En la Tabla 1 se muestra la frecuencia de cada respuesta. Según los datos obtenidos, la mayoría asocia la idea de fracción a repartir: un 33,3 % ha respondido repartir en partes iguales y sólo un alumno consiguió dar una respuesta más elaborada y resultante de las anteriores: “dividir o repartir en partes iguales y coger partes”. Todos menos uno, asocian fraccionar con acciones de dividir, repartir y partir, pero no todos responden a partes iguales, éstos son una minoría de la clase, en concreto, 7 alumnos. En general, la respuesta ha sido acertada.

**Tabla 1. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 1.1**

<b>Categorías</b>	<b>Frecuencia</b>
Dividir en partes iguales	3 (14,2%)
Dividir y repartir trozos, y contar las partes que se cogen	5 (23,8%)
Dividir o repartir en partes iguales y coger partes	1 (4,7%)
Repartir	1 (4,7%)
Repartir en partes iguales	7 (33,3%)
Partir en partes iguales	3 (14,2%)
Quitar partes	1 (4,7%)

### Actividad 1.2

En este apartado comprobaremos cómo expresan gráficamente estas mismas ideas y qué tipo de ilustraciones aparecen en relación a la pregunta anterior. El modelo lineal (recta numérica) y el discreto no tienen presencia. Dentro del modelo de área, se distingue el uso de círculos y cuadriláteros en las respuestas. En la Tabla 2 aparece un recuento de éstos. También se observa que un 61,9% ha respondido utilizando un círculo como modelo de área, que son un total de 13 alumnos. Ocho de ellos han coloreado las partes y 5 lo han dejado sin colorear. En segundo plano queda el rectángulo con un 38,1% de la clase que lo ha usado como modelo de área. Son 8 alumnos de los cuales sólo 3 han coloreado las partes. Si tenemos en cuenta, tanto círculos como rectángulos coloreados, serían 11 los alumnos que han respondido bien a esta pregunta.

**Tabla 2. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 1.2**

Categorías			Frecuencia
Modelo discreto			0 (0%)
Modelo de recta numérica			0 (0%)
Modelo de área	Círculo	Coloreado	8 (38,1%)
		Sin colorear	5 (23,8%)
	Rectángulo	Coloreado	3 (14,3%)
		Sin colorear	5(23,8%)

## Análisis de las respuestas a la actividad 2

### Actividad 2.1

Respecto a la pregunta: *¿Qué es repartir?* las respuestas lo definen usando una gran variedad de verbos: Dividir algo en partes iguales; Dividir sin que sobre nada; Repartir algo en partes iguales; Dar una porción/trozo a alguien; Dar una porción/trozo igual a alguien; Trocear y dar algo a alguien; Coger un trozo; Numerador y denominador. Algunos han usado la propia acción de repartir para definir este concepto. Otros lo han asociado a la idea de dividir, dar, trocear y coger partes.

Según los datos obtenidos (Tabla 3), la mayoría asocia la idea de fracción a la idea de dar una porción igual a alguien. Quizá sea esta la respuesta que más se acerca a la idea de repartir, junto a la de repartir en partes iguales. Son 11 alumnos los que han logrado acercarse más a la respuesta correcta. El otro 50% ha respondido de manera incompleta y reducida, asocian la idea de repartir a dividir una parte, pero algunos olvidan coger las partes, y otros, sin embargo, olvidan dividir en partes iguales.

**Tabla 3. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 2.1**

Categorías	Frecuencia
Dividir algo en partes iguales	2 (9,5%)
Dividir sin que sobre nada	1 (4,8%)
Repartir algo en partes iguales	5 (23,8%)
Dar un trozo a alguien	3 (14,3%)
Dar un trozo igual a alguien	6 (28,6%)
Trocear y dar algo a alguien	1 (4,8%)
Coger un trozo	1 (4,8%)
Otros	1 (4,8%)

## Actividad 2.2

Al contrario que en la actividad 1.2, las ilustraciones que se usan para mostrar la idea de repartir incluyen el modelo discreto; es decir, los alumnos en su mayoría asocian la idea de repartir con objetos que deben coger ciertas personas y que están divididos en partes iguales. Esos objetos de los que hablan suelen ser, trozos de pizza, canicas, pelotas, bombones, tarta, etc. En la Figura 2, 3, 4 y 5, se muestran algunos ejemplos de modelo discreto que han propuestos nuestros alumnos.

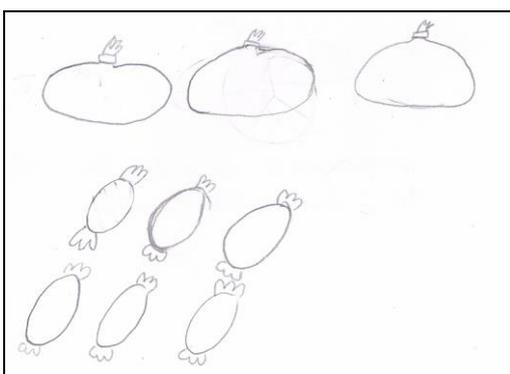


Figura 2. Ejemplo de modelo discreto

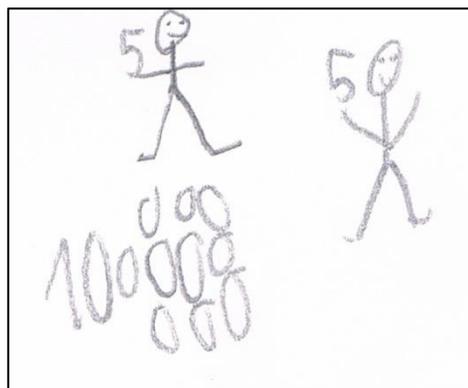


Figura 3. Ejemplo de modelo discreto

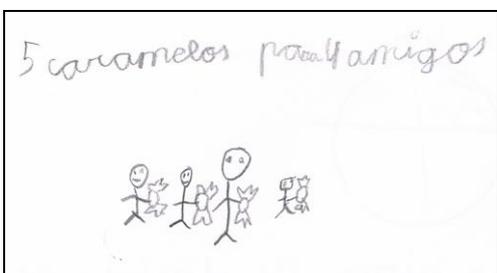


Figura 4. Ejemplo de modelo discreto

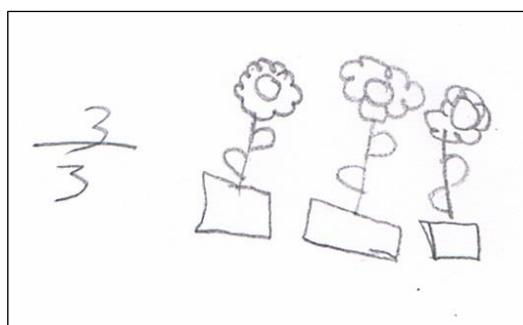


Figura 5. Ejemplo de modelo discreto

Nueve alumnos han respondido con el modelo discreto (Tabla 4), pero 11 han respondido con el modelo de área. De éstos, 9 han utilizado el círculo y la mayoría lo ha coloreado. Solamente 2 han usado el rectángulo y uno de los 21 alumnos no ha respondido. Según las ilustraciones, parece ser que el concepto de *repartir* lo tienen mucho más claro y no habido duda a la hora de representarlo. Todas las respuestas completadas han sido acertadas.

**Tabla 4. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 2.2**

Categorías			Frecuencia
Modelo discreto			9 (42,9%)
Modelo de recta numérica			0 (0%)
Modelo de área	Círculo	Coloreado	6 (28,6%)
		Sin colorear	3 (14,3%)
	Rectángulo	Coloreado	2 (9,5%)
		Sin colorear	0 (0%)
No responde			1 (4,8%)

### Análisis de las respuestas a la actividad 3

La actividad tres está compuesta por tres gráficos (Figura 6) que analizaremos de manera individual.

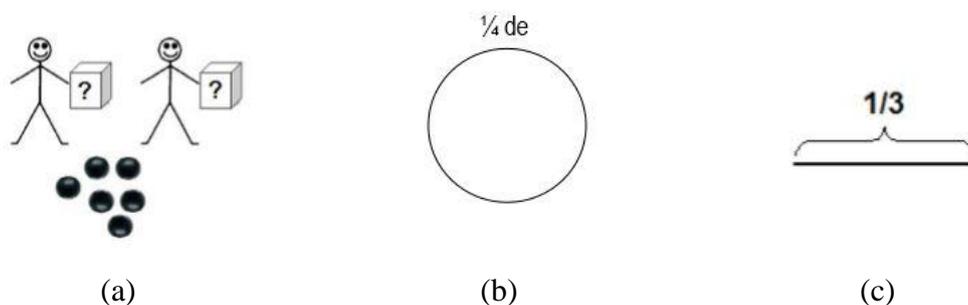


Figura 6. Gráfico actividad 3.1(a), gráfico actividad 3.2(b) y gráfico actividad 3.3(c)

#### Actividad 3.1

En este primer caso (Anexo 1), los alumnos deben inventar un problema asociado a la imagen que aparece. Las respuestas de los alumnos de 5.º están relacionadas con problemas de tipo aditivo y multiplicativo y no se ha encontrado ningún caso donde la respuesta tenga relación con conceptos fraccionarios. Por tanto, con interés de estudiar esos casos, se hará una clasificación de los tipos de problemas que han inventado. Los resultados muestran 4 problemas aditivos, 15 problemas multiplicativos y 2 sin responder (Tabla 5).

Los problemas aditivos que proponen son de cambio y de comparación. Tres de los problemas de cambio se resuelven con una resta o una suma que, en general, son parecidos al siguiente: “Mi amigo Carlos y yo tenemos tres pelotas cada uno. Si le doy

una a Carlos. ¿Cuántas me quedan?”. También proponen: “Pedro y David tienen 6 pelotas entre los dos. David le da una pelota a Pedro. ¿Cuántas pelotas tiene Pedro?”. Ese problema no se puede resolver con una sola operación; tiene muchas soluciones. Mientras que uno de ellos propone uno de comparación “Pepa y Pepe van a comprar 6 pelotas y la van a repartir entre los dos. La abuela le regala a Pepa 29 pelotas más por su Comunión. ¿Cuántas pelotas tiene Pepa más que Pepe?”. Este problema no requiere operaciones. Si tienen las mismas pelotas y luego a una le dan 29, ésta tiene 29 más que el otro.

Por otro lado, los 15 problemas multiplicativos que han propuesto son todos de proporcionalidad. Uno de ellos se resuelve con una multiplicación (usada como suma reiterada): “Hay tres cajas con 3 bombones cada una, ¿Cuántos bombones hay en total?”. Los restantes se resuelven mediante una división de tipo partitivo: “Carlos y Víctor quieren repartir 6 balones de fútbol. ¿Cuántos balones le corresponderá a cada uno?”. No encontramos ningún caso de un problema de producto cartesiano ni de comparación multiplicativa.

**Tabla 5. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 3.1**

Categorías		Frecuencia
Problemas aditivos	Cambio	3 (14,3%)
	Comparación	1 (4,8%)
Problemas multiplicativos	Proporcionalidad	15 (71,4%)
	Comparación	0 (0%)
	Producto cartesiano	0 (0%)
No responde		2 (9,5%)

### Actividad 3.2

En esta actividad, el dibujo que aparece en la ilustración es un círculo con la notación “ $\frac{1}{4}$ ” en la parte superior (Figura 6(a)). La mayoría de los alumnos ha dibujado dos líneas que dividen el círculo en cuatro partes y ha sombreado una, es decir, han hecho una representación de la fracción mostrada. Además, han sido muchas las ideas que han surgido de esta ilustración, que vamos a clasificar dependiendo del tipo de problema que sea (Tabla 6).

Más del 50% de los alumnos han propuesto un problema aditivo de cambio, que se resuelve mediante una resta. Hay dos problemas de combinación, como el siguiente: “Mi amigo y yo hemos comprado una pizza partida en cuatro trozos y lo tenemos que repartir entre nosotros dos”. “Yo me como  $\frac{2}{4}$  y mi amigo se come  $\frac{1}{4}$ . ¿Cuántos trozos nos hemos comido?” Este problema sí tiene fracciones; de hecho, formalmente se resolvería con dos operaciones: una suma ( $\frac{2}{4}$  más  $\frac{1}{4}$ ) y luego divido eso, que es lo que nos hemos comido ( $\frac{3}{4}$ ) por la fracción que representa un trozo ( $\frac{1}{4}$ ) y eso da como resultado 3, que son los trozos que se han comido.

Todos los problemas multiplicativos que se proponen son de proporcionalidad (Tabla 6). Sólo uno de ellos se resuelve con una multiplicación (entendida como suma repetida) y tres con una división (una partitiva y dos cuotitiva). Este ejemplo muestra uno de los problemas propuestos de división partitiva: “Víctor tiene una pizza la divide en cuatro porciones y son 4 amigos. ¿Cuántos trozos de pizza come cada uno?” Dos ejemplos de división cuotitiva son los siguientes: “En un cumpleaños han pedido una pizza y tienen que repartirla entre 10 amigos. ¿Habrá para todos?” Se entiende que cada uno tiene que recibir  $\frac{1}{4}$  pues en otro caso no tiene solución. Si entendemos eso, el problema se resuelve con un producto de entero por fracción ( $10 \times \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$ ) y como la pizza entera son  $\frac{4}{4}$  y  $\frac{10}{4} > \frac{4}{4}$ , entonces no hay para todos. ; “Hemos estado en una fiesta y a cada niño le han dado un trozo de tarta. Si estaba partida en 4 trozos. ¿Cuántos niños pudieron comer?” No requiere operación: la respuesta es 4 porque se partió en 4 trozos.

Casi todos los problemas propuestos son de una etapa, es decir, se resuelven con una sola operación. Son problemas que muestran claramente cómo entienden ellos el significado de repartir, en este caso lo asocian a partir trozos de algo, como pizzas o tartas, y que tienen que repartirlo entre ciertas personas. Por tanto, estos ejemplos nos sirven para saber que identifican ese uso aunque no recurran expresamente a las fracciones para representarlo.

**Tabla 6. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 3.2**

	Categorías	Frecuencia
Problemas aditivos	Cambio	10 (47,6%)
	Combinación	2 (9,5%)
Problemas multiplicativos	Proporcionalidad	6 (28,6%)
	Comparación	0 (0%)
	Producto cartesiano	0 (0%)

No responde	3 (14,3%)
-------------	-----------

### Actividad 3.3

Esta actividad parece que ha tenido una mayor dificultad, respecto a que se tenía que inventar un problema a partir de una recta con la notación  $\frac{1}{3}$ . Parece ser que de este modo no se visualiza de igual manera la representación de una posible fracción, al contrario que con el modelo de área en el ejercicio anterior. De hecho, han sido 7 alumnos los que han dejado el ejercicio sin responder. Los 14 alumnos restantes, siguen proponiendo problemas de tipo aditivo y multiplicativo (Tabla 7).

Doce de ellos responden con un problema aditivo de cambio que se resuelve con una resta “Alex y Rubén compran una tarta de chocolate y se han comido un trozo. ¿Cuántos sobran?”, “Un niño compra una tarta para el cumpleaños de su hermana, si tiene tres trozos y se comen  $\frac{1}{3}$ . ¿Cuánta tarta queda?” o “Tenía tres trozos de pizza y me han quedado dos. ¿Cuántos trozos me he comido?”. En los problemas multiplicativos se proponen dos problemas de proporcionalidad que se resuelven con una división partitiva.

La mayoría propone problemas de una sola etapa, excepto dos alumnos. El problema es de tipo aditivo y consta de dos etapas: “Mi abuela me ha traído un bizcocho. Lo ha partido en tres trozos y me he comido uno. Luego ella ha cogido otro. ¿Cuántos trozos quedan? La primera parte se resuelve con una suma para calcular las partes que ha cogido y la segunda parte, que responde a la pregunta, se resuelve con una resta, es decir, se le quitaría al todo las partes que se han cogido.

En definitiva, se trata de un gráfico más complejo para crear un problema asociado con las fracciones, ya que están acostumbrados a visualizar este concepto mediante el modelo de área, donde normalmente se relaciona con objetos de la misma forma, rectangular o circular, refiriéndose a tartas, pizzas, bizcochos,...

**Tabla 7. Categorías para clasificar las respuestas de la actividad 3.3**

	Categorías	Frecuencia
Problemas aditivos	Problemas de cambio	12 (57,1%)
Problemas multiplicativos	Proporcionalidad	2 (9,5%)
	Comparación	0 (0%)
	Producto cartesiano	0 (0%)
No responde		7 (33,3%)

### **Análisis de las respuestas a la actividad 4**

La ilustración que aparece en la actividad 4 hace alusión a una colección de cromos compuesta por 48 cromos. Se dice que tiene 24 cromos a lo que el 86% de la clase pregunta “¿Cuántos cromos le faltan para completar la colección?”. Por tanto, estamos hablando de problemas de tipo aditivo y en su mayoría todos son de cambio (resta) y de una sola etapa (Tabla 8). No obstante, hay excepciones. Uno de los alumnos propone un problema de cambio que se resuelve con dos sumas: “Si tiene 24 cromos y le regalan 28 para su cumpleaños, y luego 100 más para su comunión, ¿Cuántos tiene en total?”.

De nuevo, ninguno de ellos inventa un problema que se resuelva usando fracciones. Pero sí tienen claro cuál es el todo y cuáles son las partes de ese todo, y por tanto, como han demostrado en sus ejemplos, saben darle un sentido y uso en diferentes situaciones.

**Tabla 8. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 4**

Categorías		Frecuencia
Problemas aditivos	Problemas de cambio	18 (85,7%)
Problemas multiplicativos		0 (0%)
No responde		3 (14,3%)

### **Análisis a las respuestas a la actividad 5**

Si en el apartado anterior se plantearon solo problemas de tipo aditivo, en esta actividad aparecen problemas de tipo multiplicativo casi en el 100% de los sujetos (solo uno de ellos no respondió) (Tabla 9). El que más destaca está relacionado con el significado de división partitiva. Catorce alumnos asocian su idea utilizando las mismas partes por las que se compone el enunciado de la actividad 5 añadiendo preguntas u otras informaciones. La mayoría coincide en este enunciado: “Se han partido dos tartas, y se reparten entre tres amigas, ¿Cuántos trozos le tocarán a cada una?” Algunos añaden “¿Sobraré tarta?” De nuevo, ponen en práctica la idea de repartir.

Los problemas de proporcionalidad se enuncian de la siguiente manera: “Tengo dos tartas para repartir a 6 amigas. Cada una se ha comido dos trozos y no sobra nada. ¿En cuántos trozos había partido la tarta?”. Este es más complejo. Si son 6 amigas y cada una se ha comido 2 trozos, hay  $6 \times 2 = 12$  trozos. Como son dos tartas, cada una se divide en  $12 : 2 = 6$  trozos. Es de dos etapas, la primera multiplicación de proporcionalidad y la segunda división de proporcionalidad. Aquí se asocia tanto la idea de fraccionar como

de repartir. Las dos acciones están presentes en el problema. En el problema de división cuotitiva se quiere repartir a un grupo de tres personas dos trozos de bizcocho; se pregunta si será posible si hay tres bizcochos. De éstos últimos, encontramos dos ejemplos.

La mayoría coincide en asociar un todo que se divide en partes y que deben de coger o repartir. Por lo que, una vez más muestran un uso positivo de las fracciones en diferentes contextos.

**Tabla 9. Categorías para clasificar las respuestas a la actividad 5**

Categorías		Frecuencia
Problemas aditivos		0 (0%)
Problemas multiplicativos	Proporcionalidad	20 (95,2%)
	Comparación	0 (0%)
	Producto cartesiano	0 (0%)
No responde		1 (4,8%)

#### 4. CONCLUSIONES

El principal propósito de este estudio era describir el significado que un grupo de alumnos de 5° de Primaria atribuyen a los conceptos matemáticos de fraccionar y repartir. Para ello, se seleccionó un cuestionario propuesto anteriormente para maestros en formación inicial. Elegí este instrumento por recomendación de mi tutor y porque creemos que es la mejor forma de que un alumno deje por escrito lo que piensa e interpreta libremente sobre el concepto de fracción. De esta manera, también facilita la recogida de datos y el análisis posterior de éstos.

Una vez aplicado el cuestionario, identificamos y categorizamos los significados sobre fraccionar y repartir que expresan los alumnos de 5.º de Primaria. Desde la componente referencia del significado, la mayoría lo asocian con acciones como dividir, partir, trocear, repartir y dar o coger partes. No todos tienen el concepto tan claro, pero la mayoría demuestra saber asociar e interpretar el significado de estos conceptos.

Respecto a la componente del signo, descubrimos que la representación más usada corresponde con el modelo de área en forma de círculo. Expresan en general una figura dividida con una parte coloreada, reflejo de unos de los significados de las fracciones: parte-todo. El modelo discreto solo lo usaron algo más del 40% de los 21 alumnos para

representar el concepto de repartir. Y en ningún caso se usó el modelo de recta numérica, lo cual puede explicarse por la dificultad reconocida de esta forma de presentación por Castro, Castro, Fernández, Flores y Molina (2015).

Posteriormente, creamos un sistema de clasificación y categorización para los problemas 3, 4 y 5. La escasa creación de problemas que se resuelvan mediante una fracción como tal, y la diversidad de enunciados diferentes, hace que tengamos que replantearnos el sentido de estos problemas. La gran mayoría proponen problemas de tipo aditivo y multiplicativo, por lo que a raíz de éstos se establecieron las demás categorías.

En el primer gráfico de la actividad 3 destacan los problemas de división partitiva, que muestra la relación que establecen los alumnos el concepto dividir junto con repartir y junto con el modelo discreto que presenta la figura. En el segundo gráfico casi un 48% de los escolares propone un problema de cambio que se resolverá mediante una resta. Muestran la idea de un todo que divide en partes y se toman partes, otra idea fundamental para el conocimiento de las fracciones. En la última ilustración de esta actividad consideramos que ha existido una pequeña dificultad, ya que siete alumnos dejaron la respuesta en blanco. Comprobamos como el modelo de recta numérica complica la visualización y relación de ésta con las fracciones; los alumnos encuentran una mayor dificultad a la hora de identificar una recta con un objeto de su entorno o en el uso que tendría en las fracciones.

En las actividades 4 y 5 los enunciados propuestos muestran la idea de coger partes de un todo, el cual se propone a través de problemas de cambio. Y también muestran la idea de repartir, interpretada mediante problemas división partitiva por dos tercios de los alumnos.

Podemos concluir, según los problemas que se han propuesto la componente del sentido, es decir, qué usos le dan a las fracciones. La mayoría utiliza las fracciones en contextos de uso cotidiano, especialmente para partir y repartir trozos de tarta, bizcocho, pizza u otros objetos.

No ha sido fácil, llegar a estas conclusiones, ya que he ido encontrando algunas limitaciones a lo largo del trabajo. En primer lugar, se estimó 20 minutos para realizar el cuestionario, que finalmente se realizó en una hora a las 9 de mañana. Pero el tiempo no

fue el problema, sino algunas dificultades que encontraron los alumnos a la hora de interpretar los gráficos y problemas. En ese caso, me vi bastante limitada en dar una respuesta sin poner ejemplos, para evitar influir en su respuesta, ya que debía ser 100% propia.

Por otro lado, la categorización de las respuestas de las 3 últimas actividades no fue fácil. Había demasiada variedad en los enunciados y ninguno se resolvía utilizando las fracciones como tal. Finalmente, elegí clasificarlos en problemas aditivos y multiplicativos. Realmente, era lo que se estaba utilizando, aunque de una manera no directa, también se estaba usando el concepto de fraccionar, repartir y partir.

Con este trabajo, he aprendido muchísimas cosas que me servirán para mi formación profesional como docente. En primer lugar, he aprendido a realizar el diseño de una investigación gracias al apoyo de profesionales, en este caso, mis agradecimientos a mi tutor del Trabajo Fin de Grado. En segundo lugar, las conclusiones de esta investigación me han llevado a plantearme la importancia de conocer los pensamientos que tienen nuestros alumnos sobre cualquier concepto matemático u otro campo, ya que gracias al estudio de éste se entenderían las dificultades que pueden presentar nuestros alumnos, nos ayudaría a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y podrían ponerse medios para solucionarlas. Pero si no se estudia dónde está el problema, jamás podrá solucionarse, en este caso, estamos hablando de las dificultades que suelen presentar el tema de las fracciones. En la mayoría de los casos, el problema radica en el profesor, ya que los alumnos están limitados a lo que ese profesor transmita y en la manera en la que lo transmita, que también influye. Además, existirá cualquier tipo de necesidad que presente cualquier alumno. El esquema analítico del significado en torno a tres componentes me ha resultado útil para lograr ese propósito.

Y por último, también he aprendido la necesidad que debe tener un docente en formarse con continuidad, analizar todos sus procesos didácticos para cambiar y seguir mejorando, para adaptarse a nuevos alumnos, ya que todos no tienen las mismas necesidades, y la responsabilidad que tiene en ellos y en los conocimientos que transmita. Por ello, ha de comprobar si esos objetivos han sido bien transmitidos y de esta manera también se evitarán dificultades posteriores.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D. (1990). *Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division*. Journal for Research in Mathematics Education, 21(2), 132-144
- Castro, E., Castro, E., Fernández-Plaza, J. A., Flores, P. y Molina, M. (2015). Enseñanza y aprendizaje de los números racionales y sus operaciones. En P. Flores & L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 233-239). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Cramer, K., Post, T. R., & del Mas, R. C. (2002). *Initial fraction learning by fourth and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum*. Journal for Research in Mathematics Education, 33(2), 111-144.
- Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 191-200). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.
- Godino, J. D. (Director) (2004). *Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada. Descargado el 17 de marzo de 2014 de <http://www.ugr.es/local/jgodino>.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.
- INCE (2002). *Sistema Estatal de Indicadores de la Educación 2002*. Madrid: MEC.
- Jones, K. K. (2006). *Beyond a relational understanding of fractions: elements of instruction that contribute to preservice teachers' knowledge and motivation*. Unpublished doctoral dissertation. University of Maryland, USA.
- Lupiáñez, J.L. (2009). *Expectativas de Aprendizaje y Planificación Curricular en un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España. Descargado el 6 de Marzo de 2016 de: <http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/18504188.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de Febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

*BOE*, 52, 19389-19391.

Newton, K. J. (2008). *An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions*. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080-1110.

Rico, L. y Segovia I. (2001). Unidades didácticas: organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Toluk-Uçar (2009). *Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing*. *Teaching and Teacher Education*, 25, 166-175.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academy Press.

## 6. ANEXOS

### Anexo 1. Cuestionario 3

--	--	--	--	--	--

### **Cuestionario 3**



El grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información acerca de ciertos aspectos de interés relacionados con las fracciones.

No es un examen sobre fracciones. Es una encuesta que estudia los usos cotidianos de las fracciones y los repartos.

Se ruega que lo contestes de forma individual con creatividad e interés.

Muchas gracias de antemano.

**Sexo:** <sub>1</sub> Hombre  
<sub>2</sub> Mujer

**Edad:**

**Titulación:** \_\_\_\_\_

**Facultad:** \_\_\_\_\_

**ACTIVIDAD 1. ¿Qué es fraccionar?**

Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar.

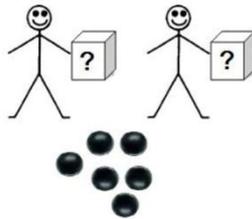
Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar.

## ACTIVIDAD 2. ¿Qué es repartir?

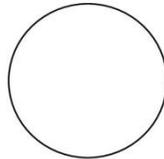
Explica verbalmente que entiendes por repartir.

Haz un dibujo que muestre qué es repartir.

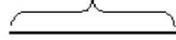
**ACTIVIDAD 3. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones:**



$\frac{1}{4}$  de



**1/3**



**ACTIVIDAD 4. A partir de la siguiente información, inventa distintos enunciados de problemas.**

Tomás dice: "he logrado reunir 24 cromos, la mitad de la colección de la Liga de Fútbol Profesional, el total de la colección son 48".



**ACTIVIDAD 5. A partir de la siguiente información, inventa distintos enunciados de problemas.**

Marta dice: "Tengo dos tartas rectangulares, las repartimos de forma equitativa con dos amigas y a cada una nos corresponden dos partes".

