Me miró de reojo, me sonrió de reojo, abrió nuestro armario y cogió un pañuelo con animales de Hermès que yo le había traído de un viaje antiguo, cuando aún no estábamos casados. Olía bien, un perfume nuevo, no era el Trussardi que le había regalado. Tenía cara de sueño, como si le dolieran los ojos, los ojos de Ranz, estaba guapa. Se puso el pañuelo al cuello y me dijo:

-Así que ya ves.

Y me di cuenta en el acto que esa era la frase que Berta me había dicho cuando apareció en bata detrás de mí y la vi a mis espaldas reflejada en el cristal oscuro de la pantalla después de que yo terminara de ver el video que ella habría visto ya varias veces y aún seguiría viendo y quizá sigue viendo hoy todavía. Por eso, supongo, también yo ahora contesté lo mismo. Me levanté. Le puse a Luisa la mano en el hombro.

-Ya veo -le dije.

'Corazón tan blanco'

Javier Marías

Índice general

Introducción

El objetivo de esta introducción es múltiple. Por una parte trata de incardinar el problema tratado en esta memoria dentro de las distintas ramas del análisis matemático con las que tiene relación, así como relacionarlo con otros problemas más o menos cercanos a éste. Un segundo objetivo es mostrar de manera explícita los antecedentes y soluciones que existían hasta el momento en relación con nuestro problema. Finalmente, el otro objetivo que persigue esta introducción es hacer un resumen de los resultados obtenidos en la memoria.

Dentro del primer desiderátum antes expuesto es necesario también hacer hincapié en un hecho casi extraordinario para los tiempos que corren: el problema estudiado es fácil de explicar, haciendo algunas simplificaciones, a alguien con unos conocimientos mínimos de matemáticas. Veamos cuál es. Supongamos que tenemos G un grupo localmente compacto con su medida de Haar y X un espacio de funciones sobre G. El lector, para no perder perspectiva, no debe pensar en espacios *extraños*, basta con pensar en $L^p(G)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$ o en $C(G)$ o $C_0(G)$. Bien, estos espacios están dotados de forma canónica de una norma completa $\|\cdot\|$, que será, atendiendo a los ejemplos propuestos antes, o bien $\|\cdot\|_p$ o bien $\|\cdot\|_\infty$, y esta norma completa hace que los operadores de traslación por elementos de G sean operadores continuos de $(X, \|\cdot\|)$ en sí mismo. Por ejemplo en el caso en que el grupo sea abeliano, estos operadores están definidos de la siguiente forma. Para $t \in G$ el operador de traslación por t es el operador

$$T_t : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$$

definido, para cada $f \in X$ y $s \in G$ como

$$T_t(f)(s) = f(s+t).$$

Consideremos ahora en X otra norma completa, a la que llamaremos $|\cdot|$ y que haga también continuos a los operadores de traslación por elementos de G (a todos o a algunos) de $(X, |\cdot|)$ en sí mismo. La pregunta que nos planteamos es

¿bajo qué condiciones son equivalentes las normas $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$?

En caso de que ello ocurra diremos que el espacio X tiene unicidad de la norma completa invariante por traslaciones (por todas las traslaciones o por un conjunto de traslaciones).

No se puede negar que el planteamiento del problema es asequible y en ello radica parte de su atractivo. Otra razón por la que el problema resulta atractivo es que, al menos en su planteamiento, los espacios de Banach con los que se va a tratar son espacios *clásicos*. Sin tener ningún tipo de animadversión a los espacios, digamos, más *vanguardistas*, es de justicia reconocer que el clasicismo es un atractivo. Por último, otra razón por la que el problema resulta atractivo, y qué duda cabe que ésta es interesada, es que los resultados obtenidos hasta el momento eran, en cierto modo, particulares y dejaban un amplio campo de trabajo.

Volviendo al problema en sí, la simplicidad del enunciado se torna multiplicidad cuando intentamos catalogar el tipo de condiciones que se pueden considerar. Serán condiciones de varios tipos. Por una parte estará el número de operadores de traslación que exigiremos que sean continuos. Por otra parte serán condiciones sobre la estructura del grupo G y, finalmente, también el resultado dependerá de las distintas posibilidades que le hemos permitido al espacio X. No cabe ninguna duda de que no es esperable que todos los espacios se comporten de igual forma. Si a ello añadimos que el estudio que hacemos repara en la conmutatividad o no del grupo tendremos que la simplicidad del enunciado del problema desaparece por momentos.

Esta memoria se puede ubicar a medio camino entre el análisis armónico y el análisis funcional. De hecho las herramientas que utilizamos proceden de ambas ramas de las matemáticas. En cuanto a las herramientas que tomamos prestadas del análisis armónico hay que puntualizar que difieren bastante cuando nos enfrentamos a grupos abelianos de cuando los grupos carecen de esta característica.

El estudio de la unicidad de la norma completa que hace continuas las traslaciones en un espacio de funciones sobre un grupo localmente compacto no es un tema desconocido en la literatura. Si es cierto que el tema del estudio de la unicidad de la norma que verifica ciertas condiciones ha sido tratado profusamente a lo largo de los últimos años, también es cierto que la relación con lo que nosotros estrictamente trabajamos hay que precisarla. Un primer trabajo al que hay que referirse es [15] donde B. E. Johnson demuestra que toda álgebra de Banach semisimple tiene una única norma de álgebra de Banach (en todo nuestro trabajo cuando nos referimos a la *unicidad* de una norma se entenderá que salvo renormaciones equivalentes). Si G es un grupo localmente compacto entonces es sabido que $L^1(G)$ es un álgebra de Banach semisimple y por tanto $\|\cdot\|_1$ es la única norma de álgebra de Banach en $L^1(G)$, esto es, la única norma completa en $L^1(G)$ que hace continuos los operadores de convolución por elementos de $L^1(G)$.

Esta línea de trabajo, la de estudiar la unicidad de la norma completa que hace continuos los operadores de convolución en un espacio de funciones sobre un grupo localmente compacto sí que ha sido productiva. Si bien es cierto que existe una estrecha relación con nuestro problema (cuando G es discreto los operadores de traslación son operadores de convolución por ciertas funciones en $L^1(G)$), también lo es que, en general, hay una gran diferencia: cuando estudiamos la unicidad de la norma en un espacio X que hace continuos los operadores de convolución por elementos del espacio, estamos tratando con la subálgebra generada por los operadores de convolución dentro del álgebra de los operadores lineales y continuos de X en sí mismo. Esta subálgebra es un álgebra completa. Sin embargo, cuando trabajamos con normas que hacen continuos los operadores de traslación, estamos abocados a trabajar con la subálgebra generada por las traslaciones, que no es completa. Esta diferencia hace que nuestro estudio resulte significativamente más sutil y que las herramientas utilizadas para probar la unicidad de la norma que hace continuas las convoluciones no nos sean de una utilidad inmediata y tengan que ser retocadas sensiblemente.

Otro problema a tener en cuenta en relación con el nuestro es el de la existencia de funcionales lineales en X invariantes por traslaciones y discontinuos. Sobre este tema la literatura es particularmente extensa. Nosotros hemos conseguido también poner en relación ambos problemas obteniendo resultados interesantes.

Ya metidos estrictamente en los resultados previos existentes hasta el momento, referentes al estudio de la norma completa invariante por traslaciones, quizá el trabajo más antiguo donde se trata este problema es autoría de B. E. Johnson ([17]). En este trabajo Johnson no trató de forma explícita el problema que nos ocupa pero, haciendo una lectura desde el punto de vista de nuestros intereses, se puede enunciar el siguiente resultado que es, básicamente, el Theorem 4.1 del citado trabajo.

1.1.9 Corolario. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano. Supongamos que G es no compacto y sea $\|\cdot\|$ una norma completa en $L^1(G)$ que haga que el conjunto de las traslaciones $\{T_t : \ t\in G\}$ de $(L^1(G),\|\cdot\|)$ en sí mismo sea equicontinuo. Entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$.*

Por otra parte nos atrevemos a afirmar que la persona que más información ha aportado al problema de la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones ha sido K. Jarosz. En su magnífico trabajo [14] hay toda una batería de resultados dignos de ser mencionados. Por comenzar con el grupo clásico por antonomasia, cuando trabaja con $G = \mathbb{R}$ obtiene el siguiente resultado.

1.1.10 Teorema. *Sea $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma completa en $L^1(\mathbb{R})$ invariante por la traslación T_t. Entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$.*

Es decir, $L^1(\mathbb{R})$ tiene unicidad de la norma completa que hace continua una traslación no trivial. Pero Jarosz no se queda en el estudio de $L^1(\mathbb{R})$. Cuando trabaja con el toro $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ obtiene el siguiente resultado.

1.3.2 Teorema. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces $L^p(\mathbb{T})$ tiene una única norma invariante por traslaciones.*

Finalmente obtiene también otro resultado, éste no para un grupo concreto, sino en un ambiente más general.

1.3.1 Teorema. *Sea G un grupo abeliano, compacto e infinito. Entonces $L^1(G)$ tiene más de una norma invariante por traslaciones.*

En ese mismo trabajo también prueba que para G abeliano, compacto e infinito tampoco hay unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^\infty(G)$ ni en $C(G)$. Por otro lado Armando R. Villena ha obtenido los siguientes resultados, recogidos en el reciente trabajo [34].

Teorema. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto con grupo dual $\widehat{G}$ conexo. Sean $t \in G$ con $t \neq 0$ y E un espacio de Banach. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma completa en $L^1(G,E)$ invariante por la traslación T_t. Entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$.*

Teorema. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto y no compacto, y sea E un espacio de Banach. Entonces $L^1(G,E)$ tiene una única norma completa invariante por traslaciones.*

Básicamente estos son los resultados existentes hasta el momento. Es de destacar la ausencia de resultados referentes a grupos no abelianos. Evidentemente el caso no abeliano entraña más dificultad que el abeliano.

La presente memoria se articula en dos capítulos y dos apéndices. El primer capítulo trata sobre los resultados obtenidos para grupos abelianos y está dividido en dos secciones principales (aparte de una para generalidades). En la primera trabajamos con grupos no compactos mientras que en las segunda se trabaja con grupos compactos.

El segundo capítulo versa sobre los resultados obtenidos para grupos no abelianos. Hay que hacer notar aquí que, independientemente de las hipótesis propias de cada resultado, hay una hipótesis que permanece fija a lo largo de todo el capítulo. Todos los grupos a los que nos referimos son grupos de Moore, es decir, grupos en los que sus representaciones unitarias e irreducibles son de dimensión finita. Las herramientas utilizadas no nos permiten omitir dicha hipótesis. También este segundo capítulo está dividido en dos secciones principales: una para grupos compactos y otra para grupos no compactos.

Respecto a los apéndices, el primero trata de los resultados sobre continuidad automática utilizados como herramientas en la memoria. Principalmente el *lema de estabilidad* y el *gliding hump argument*. Ambos responden a un mismo principio pero, como allí se demuestra, el *gliding hump argument* es ligeramente más general.

El segundo apéndice es un resumen de los resultados de la teoría de grupos localmente compactos y espacios de funciones sobre ellos que necesitamos en los capítulos anteriores. Aparte de una primera sección de preliminares donde se exponen los resultados generales relativos a grupos localmente compactos, el resto del apéndice está dividido en otras dos secciones. La primera está dedicada a grupos abelianos y en ella se estudia de forma específica la estructura de los grupos compactos y los espacios de funciones sobre ellos, principalmente el grupo dual y la transformada de Fourier. La última sección, dedicada a los grupos no abelianos, está casi íntegramente dedicada al estudio de las representaciones unitarias e irreducibles de un tal grupo y del espacio dual. Estas representaciones son las herramientas básicas a la hora de obtener resultados sobre grupos no abelianos.

En los dos capítulos principales la notación es similar (dentro de lo posible) por lo que conviene explicitarla aquí para poder enunciar los resultados obtenidos. X será un espacio de funciones sobre un grupo localmente compacto G dotado de una norma completa $\|\cdot\|$ que hará continuos todos los operadores de traslación, $\{T_t : t \in G\}$ en caso de que el grupo sea abeliano y los conjuntos de los operadores de traslación izquierda $\{L_t : t \in G\}$ y derecha $\{R_t : t \in G\}$ en el caso no abeliano. En este espacio de Banach X tendremos definida una nueva norma completa $|\cdot|$ que hará continuo cierto conjunto de operadores de traslación y nuestro objetivo es estudiar si ambas normas son equivalentes. Para ello estudiaremos la continuidad del operador identidad $i : (X, |\cdot|) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$. Una forma de medir el "grado" de continuidad de i es estudiar el subespacio separador (véase A.1.1) de dicho operador, definido como

$$\mathfrak{S} = \{f \in X \text{ tales que existe } (f_n) \to 0 \text{ en } (X, |\cdot|) \text{ con } (f_n) \to f \text{ en } (X, \|\cdot\|)\}.$$

Simplificando la exposición, éste será básicamente nuestro escenario. Obsérvese que la continuidad de i es equivalente a que $\mathfrak{S} = \{0\}$. Supongamos ahora que G es abeliano y que X es un subespacio vectorial de $L^1(G)$. El hecho de que $\mathfrak{S} = \{0\}$ es equivalente a que el conjunto Δ definido como

$$\Delta = \left\{\gamma \in \widehat{G} : \ \widehat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ para algún } f \in \mathfrak{S}\right\}$$

sea vacío, donde $\widehat{G}$ es el grupo dual de G y $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de una función $f \in L^1(G)$. El método de demostración consiste en suponer que $\Delta \neq \emptyset$ y llegar a contradicción. Con estos ingredientes y el *lema de estabilidad* obtenemos nuestro primer resultado importante, que es el siguiente.

1.2.1 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano cuyo grupo dual $\widehat{G}$ es conexo. Sean $t \in G \setminus \{0\}$ y X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ con $T_t(X) \subset X$. Entonces cualquier norma completa $\|\cdot\|$ en X invariante por la traslación T_t es más fuerte que la norma $\|\cdot\|_1$. Por consiguiente hay, a lo sumo, una única norma completa en X invariante por la traslación T_t.*

Este resultado es una generalización del Teorema 1.1.10 de K. Jarosz al ser $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ conexo. De este teorema obtenemos una generalización sustituyendo $L^1(G)$ por $M(G)$. También damos un ejemplo que muestra que la conexión del grupo dual es una condición necesaria.

Usando herramientas similares a las descritas, C. Aparicio y A. R. Villena ([2]) han resuelto un problema histórico propuesto por por B. E. Johnson. Este hecho constata la potencia de dichas técnicas. No es sorprendente, por tanto, que ellos hayan obtenido el anterior resultado como corolario.

Otro resultado importante que obtenemos, utilizando técnicas similares, es el siguiente.

1.2.6 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto, y sea X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ invariante por traslaciones. Entonces cualquier norma completa en X invariante por traslaciones es más fuerte que la norma $\|\cdot\|_1$ que X hereda de $L^1(G)$; por tanto existe, como mucho, una única norma completa en X invariante por traslaciones.*

Quizá se vea más claramente el resultado obtenido si consideramos $X = L^1(G)$.

1.2.7 Corolario. *Sea G un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto. Entonces $\|\cdot\|_1$ es la única norma completa en $L^1(G)$ que es invariante por traslaciones.*

Este resultado generaliza el resultado de B. E. Johnson en el sentido de que no hay que exigir equicontinuidad al conjunto de los operadores de traslación. También obtenemos versiones del Teorema 1.2.6 para medidas y para $L^1(G,E)$ cuando E es un espacio de Banach, como ya hiciera A. R. Villena.

En el caso de que el grupo G sea compacto e infinito, uno de los resultados anteriormente citados de K. Jarosz nos informa de que no existe unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^1(G)$. Nosotros hemos afinado un poco más, en el sentido de que, estudiando la estructura de Δ, hemos obtenido que en dicho caso el separador $\mathfrak{S}$ es de dimensión finita. Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado.

1.3.8 Corolario. *Sea G un grupo abeliano y compacto y sea $\|\cdot\|$ una norma completa en $L^1(G)$ invariante por traslaciones. Entonces existe un ideal de dimensión finita $\mathfrak{S}$ de $L^1(G)$ de forma que las correspondientes normas cocientes de $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes en $L^1(G)/\mathfrak{S}$.*

El resultado más importante de la sección 1.3 del primer capítulo es el siguiente, donde se estudia la unicidad de la norma completa que hace continuas las traslaciones en $L^p(G)$ para G compacto y $1 < p < \infty$.

1.3.12 Teorema. *Sea G un grupo abeliano, compacto y conexo, y sea $1 < p < \infty$. Entonces $L^p(G)$ tiene una única norma completa invariante por traslaciones.*

La demostración de este resultado también consiste en demostrar que $\mathfrak{S} = \{0\}$ por reducción al absurdo. Sin embargo es mucho más complicada que las demostraciones de los demás resultados obtenidos en este capítulo. En ella se utiliza de forma fundamental un resultado de J. Bourgain sobre descomposición de funciones en $L^p(G)$ con G compacto y $1 < p < \infty$ (véase el Teorema 1.3.11). El teorema 1.3.12 generaliza el Teorema 1.3.2 de K. Jarosz en el sentido de que el resultado de Jarosz es consecuencia de la compacidad y conexión de $\mathbb{T}$. Parte de los resultados obtenidos en este capítulo han sido recogidos en el trabajo [8], recientemente publicado en *Studia Mathematica* .

En el segundo capítulo, como ya hemos comentado, no existen resultados previos propiamente de grupos no abelianos. Nosotros hemos intentado trasladar, en la medida de lo posible, los resultados obtenidos en el caso abeliano al ambiente no abeliano.

El papel jugado por los caracteres $\gamma \in \widehat{G}$ en el caso abeliano ahora lo jugarán las clases de equivalencia de representaciones unitarias e irreducibles $[\pi]$ que estarán en el espacio dual, al que seguiremos llamando $\widehat{G}$, al fin y al cabo es una generalización del grupo dual y coincide con éste en el caso de que el grupo sea abeliano. También al igual que antes el conjunto Δ, ahora definido por

$$\Delta = \left\{ [\pi] \in \widehat{G} : \ \pi(\mathfrak{S}) \neq \{0\} \right\},$$

jugará el mismo papel que el que tuvo en el caso abeliano. En la sección dedicada a grupos compactos el principal resultado que hemos obtenido es una versión *no abeliana* del Teorema 1.3.12. Para enunciarlo necesitamos codificar una definición que no es estándar.

2.2.2 Definición. *Sea G un grupo compacto. Denotaremos por $L^2_0(G)$ al subespacio de $L^2(G)$ definido por*

$$L^2_0(G) = \left\{ f \in L^2(G) : \ \int_G f(t)dt = 0 \right\}.$$

Se dice que la representación trivial de G en $L^2_0(G)$ está contenida débilmente en la representación regular izquierda de G en $L^2_0(G)$ si existe una red $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en $L^2_0(G)$ con $\|f_\lambda\|_2 = 1$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda - L_t(f_\lambda)\|_2 = 0$$

para cualquier $t \in G$.

Para grupos que no verifican la anterior propiedad obtenemos el siguiente resultado.

2.2.7 Teorema. *Sea G un grupo compacto verificando que la representación trivial de G en $L^2_0(G)$ no está débilmente contenida en la representación regular izquierda de G en $L^2_0(G)$ y sea X, o bien $L^p(G)$ para algún $1 < p \leq \infty$, o bien $C(G)$. Entonces cualquier norma completa $|\cdot|$ en X que sea invariante por traslaciones es equivalente a $\|\cdot\|$, la norma usual de X, es decir a $\|\cdot\|_p$ para $X = L^p(G)$, o a $\|\cdot\|_\infty$ cuando $X = C(G)$.*

La demostración de este teorema, si bien consiste, como es usual, en probar que $\mathfrak{S} = \{0\}$, sin embargo poco tiene que ver con las demostraciones hechas en el caso conmutativo. Quizá la mayor originalidad de ella radique en que hay que abandonar el ambiente de funciones con valores complejos para instalarnos en el ambiente más general de funciones con valores matriciales.

El teorema anterior, junto con otros del capítulo dedicado a grupos abelianos, nos permite hacer un estudio exhaustivo del problema de la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en los espacios $L^p(SO(n))$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $C(SO(n))$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, donde $SO(n))$ es el grupo especial ortogonal de orden n.

En la demostración del siguiente resultado, de enunciado bastante distinto en cuanto a hipótesis, se utilizan las mismas técnicas.

2.2.8 Teorema. *Sea G un grupo compacto y sea $1 < p \leq \infty$. Supongamos que todo funcional lineal invariante por traslaciones izquierda en $L^p(G)$ es un múltiplo de la integral de Haar. Entonces cualquier norma completa $|\cdot|$ en $L^p(G)$ invariante por traslaciones y que haga la aplicación $t \mapsto L_t$ de G en $\mathcal{L}(L^p(G), |\cdot|)$ acotada es equivalente a $\|\cdot\|_p$.*

Por último, también hemos obtenido un resultado negativo para $L^1(G)$ con G compacto e infinito.

2.2.11 Corolario. *Sea G un grupo compacto e infinito. Entonces existe una norma completa $|\cdot|$ en $L^1(G)$ invariante por traslaciones, que hace acotadas las aplicaciones $t \mapsto L_t$ y $t \mapsto R_t$ de G en $\mathcal{L}(L^1(G), |\cdot|)$ y que no es equivalente a $\|\cdot\|_1$.*

Este resultado generaliza al ambiente de grupos no abelianos el similar resultado de K. Jarosz obtenido para G abeliano compacto e infinito.

Los resultados obtenidos en esta sección están recogidos en el trabajo [9], que está aceptado para su publicación en *Journal of Functional Analysis*.

En la última sección trabajamos con grupos de Moore no compactos. Hay dos resultados fundamentales en este capítulo. Para encuadrarlos recordemos que en el estudio dedicado a grupos abelianos se demostraba que, si G es un grupo abeliano, localmente compacto y no compacto, entonces $L^1(G)$ tenía una única norma completa invariante por traslaciones. El hecho de que G no sea compacto, en caso abeliano, es equivalente a que el grupo dual $\widehat{G}$ no tenga puntos aislados. En la línea de generalizar el anterior resultado al ambiente no abeliano se presenta el primer resultado importante de esta sección.

2.3.1 Teorema. *Sea G un grupo de Moore verificando que $\widehat{G}$ no tiene puntos aislados y sea X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ invariante por traslaciones. Entonces cualquier norma completa en X es más fuerte que $\|\cdot\|_1$. Como consecuencia X tiene, a lo sumo, una norma completa invariante por traslaciones.*

Realmente lo que, a estas alturas, nos debe resultar más familiar es el caso particular en que $X = L^1(G)$.

2.3.2 Corolario. *Sea G un grupo de Moore. Supongamos que $\widehat{G}$ no tiene puntos aislados. Entonces $L^1(G)$ tiene una única norma completa invariante por traslaciones.*

Ya para finalizar, hemos intentado buscar cierto recíproco del teorema anterior. Si G es un grupo de Moore σ-compacto e infinito, Saeki, en [30], nos garantiza la existencia de un funcional lineal en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ invariante por traslaciones y discontinuo. Basándonos en este hecho, una curiosa e interesante construcción nos proporciona el siguiente resultado.

2.3.7 Teorema. *Sea G un grupo de Moore σ-compacto e infinito y supongamos que $\widehat{G}$ tiene un punto aislado. Entonces $L^1(G)$ tiene más de una norma completa invariante por traslaciones.*

La conjunción de los dos últimos resultados nos permite obtener una caracterización de los grupos de Moore σ-compactos e infinitos en los que el espacio dual tiene algún punto aislado.

2.3.8 Corolario. *Sea G un grupo de Moore σ-compacto e infinito. Entonces $\widehat{G}$*

tiene algún punto aislado si, y sólo si, $L^1(G)$ tiene más de una norma completa invariante por traslaciones.

Parte de los resultados recogidos en esta segunda sección forman parte del trabajo [10] sometido actualmente a publicación.

Sólo falta nombrar a las personas que me han ayudado a lo largo de la preparación de esta memoria. Si tuviera que nombrarlas a todas y cada una de ellas, y explicar los motivos por los que les estoy agradecido, entonces esta sección de agradecimientos sería más larga que el resto de la memoria, lo que va en contra de la costumbre. Así que me veo obligado a hacer un resumen, a sabiendas de que me olvidaré de personas que deberían ser citadas. Pido perdón por anticipado.

En primer lugar tengo que agradecer a mi familia el apoyo y cariño prestado durante todo este tiempo (no sólo este tiempo, pero es de lo que estamos tratando). Si a la tan manida frase de que *uno es uno y sus circunstancias* hubiera que ponerle tantos por ciento a la parte del *uno* y a la de las *circunstancias*, en mi caso el porcentaje dedicado a las *circunstancias* superaría ampliamente al otro. Eso se lo debo a la familia principalmente.

Ya en un orden más académico debo agradecer a todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático su constante ayuda y comprensión. Para que no quede ninguna duda, quiero decir que cuando me refiero a los compañeros de departamento no sólo me refiero a los profesores y becarios sino también, en este caso especialmente, al personal de administración y servicios; es decir a Conchita. Más lúdicamente, tengo que agradecer las circunstancias que han rodeado la escritura misma de la memoria. Las tardes delante del ordenador no hubieran sido lo mismo sin la presencia de *los enanitos verdes* o de los *mailes* de Isabel.

Por supuesto, los máximos agradecimientos son para Juan Francisco Mena y Armando Villena sin cuyo apoyo, generosidad, respeto, conocimientos, disponibilidad, sugerencias, humildad y, en fin, todo lo que uno espera de un director de tesis y más cosas aún. Sin todo eso esta memoria no se podría haber hecho.

Tampoco puedo olvidarme de Pilar Muñoz. Como ejemplo, ahora mismo, mientras yo escribo estos agradecimientos, ella está vigilando un examen en el que yo también *debería* estar. Es sólo un ejemplo. Hay muchas más cosas por las que darle las gracias, pero son inefables. También tengo que agradecerle a Jerónimo Alaminos que sea, no sólo un magnifico "socorrista informático" (hay literatura para esta expresión), sino un verdadero "socorrista psicológico" que, con su templanza, sentido del humor y amistad, hace que los problemas se vean desde otra óptica, siempre menos grave.

Con especial cariño quiero agradecerle a Camilo Aparicio su contribución al desarrollo de este trabajo. Aunque en el resto de él, si la memoria no me engaña, sólo aparece citado una vez, es de justicia adjudicarle la responsabilidad de la existencia misma de este trabajo. Si hay un responsable prístino de esta memoria, ese responsable es Camilo.

Capítulo 1

Grupos abelianos

1.1. Generalidades

En este capítulo estudiaremos el problema de la unicidad de la norma completa que hace continuas traslaciones en espacios de funciones sobre un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Dividiremos el capítulo en dos secciones, una primera dedicada a grupos no compactos y la segunda a grupos compactos.

La unicidad de la norma se entiende salvo equivalencia, es decir, la unicidad se refiere a la unicidad de la topología inducida. El hecho de que las normas con las que trabajamos sean completas dotará a nuestros espacios de estructura de espacio de Banach. Al trabajar con grupos abelianos la operación del grupo se denotará como suma. Finalmente, respecto a notaciones y convenciones, recordar que nuestro grupo localmente compacto y abeliano tendrá asignada una medida de Haar, λ (en este ambiente de conmutatividad no es necesario distinguir entre medidas izquierda y derecha), respecto a la cual integraremos pero que no irá explícita en la notación.

Nuestro ambiente de trabajo será, en el más general de los casos, un subespacio vectorial X de $\mathbb{C}^G$ donde G es un grupo localmente compacto, abeliano. En este espacio vectorial X se tendrá usualmente una norma completa $\|\cdot\|$ que lo convierte en un espacio de Banach. Nuestra primera definición está relacionada con la invarianza de dicha norma por las traslaciones (Ver B.1.16).

1.1.1 Definición. Sea G un grupo localmente compacto y abeliano y X un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^G$. Si $t \in G$, diremos que X es invariante por la traslación T_t si $T_t(X) \subset X$. Si X es invariante por T_t, para cualquier $t \in G$, diremos que X es invariante por traslaciones.

Si $X \subset M(G)$ se pueden dar definiciones similares de que X sea invariante por la convolución por una medida $\mu \in M(G)$ o ser invariante por convoluciones. Su significado es claro.

Conviene en este momento precisar un concepto esencial en todo el trabajo: la definición de norma invariante por traslaciones.

1.1.2 Definición. Sea G un grupo localmente compacto y abeliano y X un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^G$ invariante por traslaciones. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma completa en X. Diremos que $\|\cdot\|$ es invariante por traslaciones si

$$\{T_t(U) : U \in \tau\} = \tau$$

para cada $t \in G$, donde τ es la topología inducida por $\|\cdot\|$. Si existe un elemento $t \in G$ verificando que $\{T_t(U) : U \in \tau\} = \tau$ entonces diremos que $\|\cdot\|$ es invariante por la traslación T_t.

Como ejemplo, si G es un grupo localmente compacto y abeliano, $X = L^p(G)$, para $1 \leq p \leq \infty$, entonces tenemos que $L^p(G)$ es invariante por traslaciones y la norma $\|\cdot\|_p$ es una norma en $L^p(G)$ invariante por traslaciones.

Al igual que antes, cuando el espacio X sea invariante por convoluciones tendrá sentido hablar de normas completas invariantes por convoluciones o por una convolución en particular. La definición no parece necesario establecerla formalmente.

Los operadores de X en sí mismo que conmutan con las traslaciones constituyen una clase especialmente importante. Un operador S de X en sí mismo se dice que conmuta con una traslación T_t, con $t \in G$, si $ST_t = T_tS$, es decir la composición de T_t y S es conmutativa. Si S conmuta con todas las traslaciones entonces se dice que S conmuta con traslaciones. Conviene puntualizar que en algunos textos a los operadores que conmutan con traslaciones se les llama operadores invariantes por traslaciones. Observada la propiedad que cumplen parece lógico inclinarse por decir que conmutan. De forma análoga, cuando tenga sentido, se pueden definir los operadores que conmutan con convoluciones por medidas.

La repercusión topológica de los operadores de traslación ha sido intensamente estudiada en el ámbito de los operadores que conmutan con las traslaciones: la continuidad de dichos operadores. Es un problema que ha sido estudiado, por ejemplo, en [20] y [16]. Un problema relacionado con el anterior es el de la continuidad de los funcionales lineales que son invariantes por traslaciones.

1.1.3 Definición. Sea $X \subset \mathbb{C}^G$ un subespacio vectorial, donde G es un grupo localmente compacto y abeliano. Un operador $\phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es invariante por la traslación T_t, con $t \in G$, si $\phi(T_t f) = \phi(f)$ para todo $f \in X$. Si ϕ es invariante por T_t para cualquier $t \in G$ entonces se dice que ϕ es invariante por traslaciones.

El problema de determinar la continuidad de los funcionales lineales, en espacios de funciones sobre un grupo G localmente compacto, invariantes por traslaciones ha sido ampliamente estudiado, no solamente en el caso de que G sea abeliano. En los trabajos [4], [12], [22], [23], [30] y [36] se encuentran resultados en conexión con el citado problema.

El problema que nosotros tratamos, aunque resultará estar íntimamente relacionado con los anteriores como veremos más adelante, es otro. Ya hemos comentado en líneas generales en qué consiste. Quizá es el momento de precisar algo más. Trabajaremos con grupos G localmente compactos y abelianos. Consideramos $X \subset \mathbb{C}^G$ un subespacio vectorial dotado de una norma completa que haga continuos ciertos operadores de traslación. Se trata de estudiar bajo qué condiciones, ya sea sobre las traslaciones que son continuas o sobre la estructura del grupo G o del subespacio X, se puede afirmar que la continuidad de las traslaciones determina la norma.

Este problema tiene varios precedentes. Por una parte debemos citar el trabajo de B. E. Johnson ([17]) en el que, si bien no se trata el problema de la unicidad de la topología invariante por traslaciones, sí que nos ha permitido obtener una respuesta parcial a dicho problema. Por otra parte el trabajo de K. Jarosz ([14]) es el primero en el que se estudia la trascendencia de los operadores de traslación en la determinación de la norma de los espacios de funciones sobre grupos localmente compactos. Veamos detenidamente ambos resultados. Para exponer el resultado de Johnson se necesitan varias definiciones.

1.1.4 Definición. Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Un G-módulo de Banach es un espacio de Banach X junto con una aplicación $(t,f) \mapsto tf$ de $G \times X$ en X verificando las siguientes propiedades.

1. La aplicación $f \mapsto tf$ de X en sí mismo es lineal y continua para cualquier $t \in G$.
2. $t(sf) = (t+s)f$ para cualesquiera $t,s \in G$ y $f \in X$.
3. $0f = f$ para todo $f \in X$.

Un G-submódulo de X es un subespacio vectorial X_0 de X verificando que $tf \in X_0$ siempre que $t \in G$ y $f \in X_0$.

Es importante señalar que en la definición de Johnson de G-módulo de Banach se le exige también una condición de equicontinuidad y es que exista una constante $K \in \mathbb{R}^+$ verificando que $\|tf\| \leq K\|f\|$ para todo $t \in G$ y para todo $f \in X$. Cuando el G-módulo cumpla esta condición adicional de equicontinuidad diremos que es un G-módulo de Banach en el sentido de Johnson.

1.1.5 Definición. Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Un G-módulo de Banach X se dice escalar si para todo $t \in G$ existe $\alpha(t) \in \mathbb{C}$ verificando que $tf = \alpha(t)f$ para $f \in X$.

Obsérvese que en la definición de G-módulo escalar si $X \neq \{0\}$ entonces se tiene que $\alpha(0) = 1$ y $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$ para $t, s \in G$. Si exigimos también que la aplicaciones $f \mapsto tf$ de X en sí mismo sean equicontinuas para $t \in G$ entonces la aplicación α está acotada. De aquí se deduciría que entonces $|\alpha(t)| = 1$ para todo $t \in G$. En el caso adicional de que las aplicaciones $t \mapsto tf$ de G en X sean continuas para cualquier $f \in X$ se tendrá entonces que $\alpha \in \widehat{G}$.

Ejemplos de G-módulos de Banach se pueden construir con más o menos pericia. Veamos algunos ejemplos.

- Si G es un grupo localmente compacto y abeliano todos los espacios $C(G)$, $C_0(G)$ y $L^p(G)$, con $1 \leq p \leq +\infty$ son G-módulos de Banach cuando consideramos como acción del grupo sobre el G-módulo la acción dada por las traslaciones por elementos de G. En general, si $X \subset \mathbb{C}^G$ es un subespacio vectorial invariante por traslaciones dotado de una norma completa invariante por traslaciones la anterior acción convierte a X en un G-módulo de Banach. Concretamente es la acción

$$G \times X \longrightarrow X$$

$$(t, f) \mapsto T_t(f)$$

para $t \in G$ y $f \in X$. Salvo mención expresa esta estructura de G-módulo de Banach será la que consideremos en X, cuando X es un espacio de los descritos anteriormente.

- Si G es un grupo localmente compacto y abeliano y X es un espacio de Banach y fijamos $\gamma \in \widehat{G}$ tenemos que la acción $(t,x) \mapsto \gamma(t)x$ de $G \times X \longrightarrow X$ nos proporciona una estructura de G-módulo de Banach en X. Obsérvese que la ausencia de condiciones en X y G hacen que de aquí se obtenga una gran cantidad de G-módulos de Banach concretos.

- Si $G = \mathbb{Z}$, X es un espacio de Banach y fijamos $T : X \longrightarrow X$ un isomorfismo de X, la acción $(n,x) \mapsto T^n(x)$ de $\mathbb{Z} \times X \longrightarrow X$ dota a X de estructura de $\mathbb{Z}$-módulo de Banach.

1.1.6 Definición. Sea G un grupo abeliano localmente compacto y sean X e Y G-módulos de Banach. Una aplicación $S : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de G-módulos si es lineal y $S(tf) = tS(f)$ para cualesquiera $t \in G$ y $f \in X$.

Estas definiciones, junto con la de separador de una aplicación lineal (A.1.1) nos permiten enunciar el resultado de B. E. Johnson al que nos referíamos antes.

1.1.7 Teorema. *[17, Theorem 4.1] Sea G un grupo localmente compacto y abeliano. Sean X e Y G-módulos de Banach en el sentido de Johnson. Sea $S : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de G-módulos y $\mathfrak{S}$ el separador de S. Entonces $\mathfrak{S}$ es suma directa de un número finito de G-submódulos escalares de Y.*

Intentaremos trasladar el anterior resultado a nuestro ambiente. Consideremos como G-módulo de Banach Y $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ y como estructura de G-módulo de Banach la estándar descrita antes. Obsérvese que las condiciones de la definición de G-módulo se cumplen automáticamente y además las traslaciones son equicontinuas en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$, por lo que Y es un G-módulo de Banach en el sentido de Johnson. Como quiera que la aplicación $t \mapsto T_t f$ de G en $(L^1(G), \|\ \|_1)$ es continua [11, Proposition 2.41] para cada $f \in L^1(G)$, en la definición de G-módulo escalar se tiene que $\alpha \in \widehat{G}$.

1.1.8 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano. Consideremos el G-módulo de Banach $(L^1(G), \|\ \|_1)$. Entonces $L^1(G)$ tiene G-submódulos escalares no triviales si, y sólo si, G es compacto.*

Demostración. Supongamos que $X_0 \subset L^1(G)$ es un G-submódulo escalar. Entonces existirá $\alpha \in \widehat{G}$ verificando que $T_t(f) = \alpha(t) f$ para $t \in G$ y $f \in L^1(G)$. Aplicando la transformada de Fourier a la anterior igualdad y evaluando en un carácter $\gamma \in \widehat{G}$ se tiene que

$$\gamma(t)\widehat{f}(\gamma) = \alpha(t)\widehat{f}(\gamma)$$

y entonces

$$(\gamma(t) - \alpha(t))\widehat{f}(\gamma) = 0.$$

Si $X_0 \neq \{0\}$ nos podemos tomar $f \in X_0$ con $f \neq 0$ y el conjunto

$$\Delta = \{\gamma \in \widehat{G} : \ \ \widehat{f}(\gamma) \neq 0\},$$

que es un subconjunto abierto de $\widehat{G}$ (1.1.11). Es claro que se verifica que $\gamma(t) = \alpha(t)$ para todo $\gamma \in \Delta$ y para todo $t \in G$ y entonces $\Delta = \{\alpha\}$ y $\widehat{G}$ es discreto. El teorema de Pontrjagin (B.2.15) nos asegura la compacidad de G.

Por otro lado, si G es compacto y $\alpha \in \widehat{G}$, se tiene que $\alpha \in L^1(G)$. Si definimos ahora $X_0 = \mathbb{C}\alpha$, se tiene que es un G-submódulo escalar de $L^1(G)$ ya que, para $s, t \in G$ y $\xi \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$T_t(\xi\alpha)(s) = \xi\alpha(s+t) = \xi\alpha(s)\alpha(t) = \alpha(t)(\xi\alpha)(s).$$

$\square$

Si ahora consideramos una norma completa $\|\cdot\|$ en $L^1(G)$ invariante por traslaciones, como G-módulo de Banach X el espacio $(L^1(G),\|\cdot\|)$ y como homomorfismo de G-módulos la identidad entre $(L^1(G),\|\cdot\|)$ y $(L^1(G),\|\cdot\|_1)$, obtenemos el siguiente resultado, que es consecuencia del Teorema 1.1.7 y de la definición del subespacio separador (A.1.1).

1.1.9 Corolario. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano. Supongamos que G es no compacto y sea $\|\cdot\|$ una norma completa en $L^1(G)$ que haga que el conjunto de las traslaciones $\{T_t : \ t \in G\}$ de $(L^1(G),\|\cdot\|)$ en sí mismo sea equicontinuo. Entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$.*

Al resultado de Jarosz no es necesario hacerle ninguna adaptación ya que, explícitamente, afirma lo siguiente.

1.1.10 Teorema. *[14, Theorem 3.3] Sea $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma completa en $L^1(\mathbb{R})$ invariante por la traslación T_t. Entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$.*

Veamos ahora nuestra contribución al problema. En lo que queda de sección G será un grupo topológico localmente compacto y abeliano. X también será, salvo que se diga lo contrario, un subespacio vectorial de $L^1(G)$ (no necesariamente cerrado cuando consideramos en $L^1(G)$ la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_1$).

Si en X tenemos dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ diremos que $\|\cdot\|_a$ es más fuerte que $\|\cdot\|_b$ si la topología que induce $\|\cdot\|_a$ contiene a la topología que induce $\|\cdot\|_b$. Así si $\|\cdot\|_a$ es más fuerte que $\|\cdot\|_b$ y $\|\cdot\|_b$ es más fuerte que $\|\cdot\|_a$ entonces ambas normas son equivalentes y las topologías que inducen coinciden.

En este mismo orden de ideas, es fácil demostrar que si $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son dos normas completas en X que son más fuertes que $\|\cdot\|_1$ entonces $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son equivalentes. En efecto, la aplicación identidad de $(X, \|\cdot\|_a)$ en $(X, \|\cdot\|_b)$ tiene gráfica cerrada y, en consecuencia, es continua; esto es, $\|\cdot\|_a$ es más fuerte que $\|\cdot\|_b$. Pero los papeles de ambas normas son intercambiables y se obtiene finalmente que las normas son equivalentes.

Si en X tenemos una norma completa $\|\cdot\|$ escribiremos $\mathfrak{S}_X$, o simplemente $\mathfrak{S}$ cuando no haya confusión posible, para referirnos al subespacio separador de la aplicación identidad de $(X, \|\cdot\|)$ en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$. En este caso, asociado al separador, tenemos el conjunto $\Delta_X \subset \widehat{G}$ definido como

$$\Delta_X = \left\{\gamma \in \widehat{G} : \ \widehat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ para algún } f \in \mathfrak{S}_X\right\}. \tag{1.1}$$

La importancia de Δ_X en el desarrollo posterior radica en que es un medidor del tamaño de $\mathfrak{S}_X$. Esta propiedad junto con otras las hemos recogido en el siguiente resultado.

1.1.11 Lema. *Sea X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ y sea $\|\cdot\|$ una norma completa en X. Entonces se verifican las siguientes propiedades.*

1. *Δ_X es abierto en $\widehat{G}$.*

2. *La norma $\|\cdot\|$ es más fuerte que $\|\ \|_1$ si, y sólo si, $\Delta_X = \emptyset$.*

3. *Si Δ_X es finito, entonces $\dim(\mathfrak{S}_X) < \infty$.*

Demostración. 1. La aplicación $\gamma \mapsto \widehat{f}(\gamma)$ es continua para cualquier $f \in L^1(G)$. Como quiera que

$$\Delta_X = \bigcup_{f \in \mathfrak{S}_X} \left\{\gamma \in \widehat{G} : \ \widehat{f}(\gamma) \neq 0\right\}.$$

Δ_X es una unión de conjuntos abiertos y, por tanto, abierto.

2. $\Delta_X = \emptyset$ si, y sólo si, $\widehat{f}(\gamma) = 0$ para cualesquiera $f \in \mathfrak{S}_X$ y $\gamma \in \widehat{G}$. Pero la transformación de Fourier es inyectiva, así que $f = 0$ para cualquier $f \in \mathfrak{S}_X$ y entonces la inclusión de $(X, \|\cdot\|)$ en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ es continua.

3. Supongamos que $\Delta_X = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ y definamos la aplicación $\Phi : \mathfrak{S}_X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ como $\Phi(f) = (\widehat{f}(\gamma_1), \ldots, \widehat{f}(\gamma_n))$ para $f \in \mathfrak{S}_X$. Φ es claramente lineal y además, si $\Phi(f) = 0$, se tiene que $\widehat{f}(\gamma) = 0$ para $\gamma \in \Delta_X$. Pero para $\gamma \in \widehat{G} \setminus \Delta_X$ también se verifica que $\widehat{f}(\gamma) = 0$ y, en consecuencia, $f = 0$, con lo que Φ es inyectiva. La dimensión de $\mathfrak{S}_X$ coincide pues con la de su imagen por Φ que, en cualquier caso, es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ y, por lo tanto, de dimensión finita.

$\square$

Vamos ahora a utilizar el *lema de estabilidad* (véase A.1.4). El espíritu de dicho lema se recoge en el siguiente resultado. Es la primera vez que el *lema de estabilidad* aparece en esta memoria pero no será la última. Este resultado será usado con profusión.

1.1.12 Lema. *Sea X un subespacio vectorial de $L^1(G)$, sea (t_n) una sucesión de elementos de G verificando que $T_{t_n}(X) \subset X$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y sea (γ_n) una sucesión de caracteres de G. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma completa sobre X invariante por el conjunto de traslaciones $\{T_{t_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces existe un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$(\gamma_1(t_1) - \gamma_{N+1}(t_1)) \cdots (\gamma_N(t_N) - \gamma_{N+1}(t_N))\widehat{f}(\gamma_{N+1}) = 0$$

para cualquier $f \in \mathfrak{S}_X$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los operadores lineales y continuos $T_n : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ y $R_n : (L^1(G), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (L^1(G), \|\cdot\|_1)$ como

$$T_n = \gamma_n(t_n) I_X - T_{t_n} \quad \text{y} \quad R_n = \gamma_n(t_n) I_{L^1(G)} - T_{t_n},$$

donde I denota la aplicación identidad en el espacio correspondiente. Si i es la inclusión de X en $L^1(G)$ se tiene que claramente $iT_n = R_n i$ para cada natural n y entonces el *lema de estabilidad* (A.1.4) nos proporciona un natural N para el que se verifica, en particular, que

$$\overline{(R_1 \cdots R_N)(\mathfrak{S}_X)} = \overline{(R_1 \cdots R_{N+1})(\mathfrak{S}_X)}.$$

Así obtenemos que

$$(R_1 \cdots R_N)(\mathfrak{S}_X) \subset \overline{(R_1 \cdots R_{N+1})(\mathfrak{S}_X)}.$$

Pero observemos que la transformada de Fourier de cada función de este último conjunto se anula en el carácter γ_{N+1}. En efecto, se tiene que

$$[(R_1 \cdots R_{N+1})(f)]^{\widehat{}}(\gamma_{N+1}) = \\ (\gamma_1(t_1) - \gamma_{N+1}(t_1)) \cdots (\gamma_{N+1}(t_{N+1}) - \gamma_{N+1}(t_{N+1}))\widehat{f}(\gamma_{N+1}) = 0$$

para cualquier $f \in \mathfrak{S}_X$ y entonces la transformada de Fourier del cierre del conjunto $(R_1 \cdots R_{N+1})(\mathfrak{S}_X)$ evaluada en γ_{N+1} también vale 0. Por tanto, para $f \in \mathfrak{S}_X$, se tiene también que

$$[(R_1 \cdots R_N)(f)]^{\widehat{}}(\gamma_{N+1}) = \\ (\gamma_1(t_1) - \gamma_{N+1}(t_1)) \cdots (\gamma_N(t_N) - \gamma_{N+1}(t_N))\widehat{f}(\gamma_{N+1}) = 0,$$

como pretendíamos demostrar. $\square$

1.2. Grupos no compactos

En esta sección presentaremos algunos resultados sobre unicidad de la norma invariante por traslaciones. El primer resultado exige la conexión del grupo dual, condición que no puede darse si el grupo es compacto. La demostración de este resultado se basa en el último lema de la sección anterior.

1.2.1 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano cuyo grupo dual $\widehat{G}$ es conexo. Sean $t \in G \setminus \{0\}$ y X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ con $T_t(X) \subset X$. Entonces cualquier norma completa $\|\cdot\|$ en X invariante por la traslación T_t es más fuerte que la norma $\|\cdot\|_1$. Por consiguiente hay, a lo sumo, una única norma completa en X invariante por la traslación T_t.*

Demostración. En principio es fácil darse cuenta que la demostración del teorema consiste en probar que el conjunto Δ_X definido en (1.1) es vacío. La demostración consta de dos pasos. En el primero probaremos que el conjunto $\{\gamma(t) : \gamma \in \Delta_X\}$ es finito. En efecto, si, por el contrario, fuera infinito podríamos encontrar una sucesión de elementos de Δ_X, (γ_n), que cumpla que $\gamma_m(t) \neq \gamma_n(t)$ siempre que n y m sean naturales distintos. Para cualquier natural n podemos encontrar $f_n \in \mathfrak{S}_X$ verificando que $\widehat{f_n}(\gamma_{n+1}) \neq 0$ y entonces se tiene que

$$(\gamma_1(t) - \gamma_{n+1}(t)) \cdots (\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)) \widehat{f_n}(\gamma_{n+1}) \neq 0,$$

pero esto contradice el Lema 1.1.12.

En el segundo paso demostraremos que Δ_X es vacío. Supongamos, para obtener una contradicción, que Δ_X no es vacío. En tal caso, como $\{\gamma(t) : \gamma \in \Delta_X\}$ sería un conjunto finito, existirían $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{T}$ de forma que

$$\Delta_X = \bigcup_{k=1}^{N} \{\gamma \in \Delta_X : \gamma(t) = \lambda_k\}.$$

Los conjuntos $\{\gamma \in \Delta_X : \gamma(t) = \lambda_k\}$ para $k = 1, \ldots, N$ son subconjuntos cerrados de Δ_X disjuntos dos a dos. Por tanto cada uno de ellos es abierto en Δ_X. Como quiera que Δ_X es abierto, los anteriores conjuntos son también abiertos en $\widehat{G}$. Entonces para cada natural $k \in \{1, \cdots, N\}$ el conjunto $\{\gamma \in \Delta_X : \gamma(t) = \lambda_k\}$ es un abierto no vacío de $\widehat{G}$. Fijemos un $k \in \{1, \cdots, N\}$. Elijamos $\gamma_0 \in \{\gamma \in \Delta_X : \gamma(t) = \lambda_k\}$ y sea V un entorno abierto y simétrico de la identidad del grupo $\widehat{G}$, a la que llamaremos e, que verifique

$$\gamma_0 V \subset \{\gamma \in \Delta_X : \gamma(t) = \lambda_k\}.$$

Para cualquier $\gamma \in V$ se tendrá que $\gamma_0(t)\gamma(t) = \lambda_k$ y, por tanto, $\gamma(t) = 1$. El conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} V^n$ es un subgrupo abierto de $\widehat{G}$ y, por la Proposición B.1.12, tendremos que es también cerrado en $\widehat{G}$. Finalmente, teniendo en cuenta que $\widehat{G}$ es conexo, obtenemos que $\cup_{n=1}^{\infty} V^n = \widehat{G}$. Pero entonces se obtiene que $\gamma(t) = 1$ para todo $\gamma \in \widehat{G}$ y esto nos lleva a que $t = 0$, que contradice la hipótesis. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos el siguiente resultado que quizá es más claro o, al menos, responde de una forma más directa al problema objeto de nuestro estudio.

1.2.2 Corolario. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano cuyo grupo dual $\widehat{G}$ es conexo y sea $t \in G \setminus \{0\}$. Entonces $L^1(G)$ tiene una única norma completa invariante por la traslación T_t.*

1.2.3 Nota. Obsérvese que el corolario anterior generaliza el resultado antes comentado de Jarosz (Teorema 1.1.10). De hecho, según acabamos de demostrar la validez del resultado de Jarosz reside en la conexión de $\widehat{\mathbb{R}}$.

Si observamos con detenimiento tanto la demostración del Teorema 1.2.1 como la de los lemas que lo preceden, en los que se basa la demostración de dicho teorema, no es difícil observar que nada impide que X sea un subespacio vectorial de $M(G)$ en vez de ser un subespacio de $L^1(G)$. Realmente la transformada de Fourier tiene su análoga en la transformada de Fourier-Stieltjes y la demostración del siguiente resultado no varía de la del Teorema 1.2.1 más que en la imprescindible sustitución de $L^1(G)$ por $M(G)$.

1.2.4 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano cuyo grupo dual $\widehat{G}$ es conexo. Sean $t \in G \setminus \{0\}$ y X un subespacio vectorial de $M(G)$ invariante por la traslación T_t. Entonces cualquier norma completa en X invariante por la traslación T_t es más fuerte que la norma de la variación total en X. Por consiguiente hay en X a lo sumo una única norma completa invariante por la traslación T_t.*

Cabe preguntarse en este momento si siguen siendo ciertas las tesis de los resultados anteriores si el grupo dual $\widehat{G}$ no es conexo, es decir si la hipótesis de conexión de $\widehat{G}$ es necesaria. La respuesta es negativa. Como muestra el siguiente ejemplo basta con que el grupo dual tenga dos componentes conexas para que no haya una única norma completa invariante por una traslación no trivial.

1.2.5 Ejemplo. Consideremos el grupo aditivo $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, que $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, y la Proposición B.2.9 se tiene que $\widehat{G} = G$, por lo que es claro que $\widehat{G}$ tiene exactamente dos componentes conexas. Se tiene además que $L^1(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R})$ es isomorfo como espacio de Banach a $L^1(\mathbb{R}) \oplus_1 L^1(\mathbb{R})$ mediante la aplicación $f(s,t) \mapsto (f(0,t), f(1,t))$ para $t \in \mathbb{R}$. Si consideramos la traslación por el elemento $(1,0) \in G$, se tiene que

$$T_{(1,0)}(f(0,t), f(1,t)) = (f(1,t), f(0,t))$$

para $t \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach de dimensión infinita siempre existe una norma completa $\|\cdot\|$ en $L^1(G)$ que no es equivalente a $\|\cdot\|_1$. Si definimos una nueva norma $|\cdot|$ en $L^1(G)$ mediante la expresión

$$|(f(1,t), f(0,t))| = \|f(0,t)\| + \|f(1,t)\|$$

para $t \in \mathbb{R}$, se tiene que es una norma completa en $L^1(G)$ no equivalente a la norma canónica de $L^1(\mathbb{R}) \oplus_1 L^1(\mathbb{R})$ y, además, es invariante por la traslación $T_{(1,0)}$, ya que

$$|T_{(1,0)}(f(0,t), f(1,t))| = |(f(1,t), f(0,t))| = \\ \|f(1,t)\| + \|f(0,t)\| = |(f(0,t), f(1,t))|.$$

Así, cuando el grupo dual $\widehat{G}$ no es conexo no es suficiente la continuidad de una única traslación no trivial para garantizar la unicidad de la norma invariante por dicha traslación. Sin embargo exigiendo la continuidad de más traslaciones sí se obtiene unicidad, aunque es necesario exigir una condición adicional al grupo. Esta condición adicional será la no compacidad del grupo. Merece la pena puntualizar que, por el teorema de Pontrjagin, el grupo no es compacto si, y sólo si, el grupo dual $\widehat{G}$ no es discreto. Si, por ejemplo, el grupo dual $\widehat{G}$ tuviera un punto aislado, el hecho de que $\widehat{G}$ sea un grupo topológico, y por tanto homogéneo, implicaría que todos los puntos serían aislados y $\widehat{G}$ sería discreto. Se observa una estrecha relación entre la existencia de puntos aislados en $\widehat{G}$ y la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones. Esta relación aparecerá más veces en nuestro trabajo.

1.2.6 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto, y sea X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ invariante por traslaciones. Entonces cualquier norma completa en X invariante por traslaciones es más fuerte que la norma $\|\cdot\|_1$ que X hereda de $L^1(G)$; por tanto existe, como mucho, una única norma completa en X invariante por traslaciones.*

Demostración. La demostración consistirá otra vez en probar que el conjunto Δ_X definido en (1.1) es vacío. Supongamos que Δ_X no es vacío para obtener una contradicción. Sea $\Gamma_0 = \Delta_X$ y elijamos $\gamma_1 \in \Gamma_0$. Como quiera que G es no compacto, se tiene que el dual $\widehat{G}$ no es discreto (Teorema B.2.15). Entonces Γ_0 es infinito y existirá $t_1 \in G$ de forma que el conjunto abierto $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma_0 : \ \gamma(t_1) \neq \gamma_1(t_1)\}$ es infinito. De esta forma podemos elegir subconjuntos $\Gamma_n \subset G$, elementos $\gamma_n \in \widehat{G}$, y

$t_n \in G$ verificando que $\gamma_n \in \Gamma_{n-1}$ y que el abierto

$$\Gamma_n = \{\gamma \in \Gamma_{n-1} : \gamma(t_n) \neq \gamma_n(t_n)\}$$

es infinito para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia tendremos que $\gamma_n(t_n) \neq \gamma_k(t_n)$ para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$ con $k > n$. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathfrak{S}_X$ verificando que $\widehat{f_n}(\gamma_{n+1}) \neq 0$. Entonces tendremos que

$$(\gamma_1(t_1) - \gamma_{n+1}(t_1)) \cdots (\gamma_n(t_n) - \gamma_{n+1}(t_n))\widehat{f_n}(\gamma_{n+1}) \neq 0$$

para todo natural n, lo que contradice el Lemma 1.1.12. Hemos probado pues que $\Delta_X = \emptyset$.

$\square$

Igual que antes, en el caso particular en que $X = L^1(G)$, obtenemos el siguiente resultado.

1.2.7 Corolario. *Sea G un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto. Entonces $\|\cdot\|_1$ es la única norma completa en $L^1(G)$ que es invariante por traslaciones.*

1.2.8 Nota. El resultado anterior representa una generalización del Corolario 1.1.9, que era, recordemos, una consecuencia de la adaptación a nuestro lenguaje del resultado de B. E. Johnson [17]. En el caso en que G sea no compacto no es necesario que el conjunto de los operadores de traslación sea equicontinuo para obtener unicidad de la norma que hace continuos dichas operadores de traslación.

Al igual que en el Teorema 1.2.4, tanto el Teorema 1.2.6 como el Corolario 1.2.7 siguen siendo ciertos si en sus enunciados sustituimos $L^1(G)$ por $M(G)$.

1.2.9 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto, y sea X un subespacio vectorial de $M(G)$ invariante por traslaciones. Entonces cualquier norma completa en X invariante por traslaciones es más fuerte que la norma de la variación total que X hereda de $M(G)$; por tanto existe, como mucho, una única norma completa en X invariante por traslaciones.*

También caben otro tipo de generalizaciones de los resultados anteriores. Una de ellas consiste en la sustitución de funciones con valores en $\mathbb{C}$ por funciones con valores en un espacio de Banach. Tanto el Teorema 1.2.1 como el Teorema 1.2.6 pueden ser adaptados a este ambiente. Para ello necesitamos el siguiente resultado técnico.

1.2.10 Lema. *Sea G un espacio topológico localmente compacto y sea E un espacio de Banach. Sea $f : G \longrightarrow E$ una función medible Bochner verificando que $x^* \circ f = 0$ casi por doquier para todo $x^* \in E^*$. Entonces $f = 0$ casi por doquier.*

Demostración. Por [24, Teorema en página 157], existe un conjunto $\Delta \subset G$ con $\lambda(G \setminus \Delta) = 0$ y existe un subconjunto separable $M \subset E$ de forma que $f(s) \in M$ para todo $s \in \Delta$. Sea (x_n^*) una sucesión de elementos de E^* que separe los elementos de M. Entonces

$$\{s \in G : \ f(s) \neq 0\} = \{s \in \Delta : \ f(s) \neq 0\} \bigcup \{s \in G \setminus \Delta : \ f(s) \neq 0\}.$$

El segundo conjunto de la anterior unión tiene medida nula y el primero puede ser expresado en la forma

$$\{s \in \Delta : \ f(s) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s \in \Delta : \ x_n^* f(s) \neq 0\}$$

que es unión numerable de conjuntos de medida nula y por tanto es de medida nula.

Hemos probado que el conjunto $\{s \in G: \ f(s) \neq 0\}$ tiene medida 0. $\square$

1.2.11 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano cuyo grupo dual $\widehat{G}$ sea conexo y sea E un espacio de Banach. Sean $t \in G \setminus \{0\}$ y X un subespacio vectorial de $L^1(G,E)$ verificando que $T_t(X) \subset X$. Entonces cualquier norma completa en X invariante por la traslación T_t es más fuerte que $\|\cdot\|_1$. Por consiguiente existe, a lo sumo, una única norma completa en X invariante por la traslación T_t.*

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma completa en X que hace continua la traslación T_t de X en sí mismo, y consideremos la inclusión $i : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (L^1(G,E), \|\cdot\|_1)$. Elijamos $x^* \in E^*$ y consideremos $\phi_{x^*} : (L^1(G,E), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (L^1(G), \|\cdot\|_1)$ definida por $\phi_{x^*}(f)(t) = x^*(f(t))$ para cualesquiera $f \in L^1(G,E)$ y $t \in G$. La composición $\phi_{x^*} i$ va de $(X, \| \ \|)$ en $(L^1(G), \| \ \|_1)$ y, si notamos $\mathfrak{S}$ al separador de $\phi_{x^*} i$ y llamamos

$$\Delta_X = \{\gamma \in \widehat{G}: \ \widehat{f}(\gamma) \neq 0\},$$

se puede repetir exactamente la demostración del Teorema 1.2.1 para obtener que Δ_X es vacío y $\mathfrak{S} = \{0\}$. Es decir $\mathfrak{S}(\phi_{x^*} i) = \{0\}$ y $\phi_{x^*} i$ es continua. Basándonos en el Lema A.1.3 se verifica que $x^*(\mathfrak{S}(i)) = \{0\}$, es decir, que si $f \in \mathfrak{S}(i)$ se tiene que $x^*(f) = 0$ casi por doquier. Como quiera que $x^* \in E^*$, el lema anterior nos garantiza que $f = 0$ casi por doquier y la inclusión es continua, que era lo que pretendíamos demostrar. $\square$

También tenemos una versión del Teorema 1.2.6 con funciones con valores en un espacio de Banach en vez de funciones con valores complejos.

1.2.12 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto y sea E un espacio de Banach. Sea X un subespacio vectorial de $L^1(G,E)$ invariante por traslaciones. Entonces cualquier norma completa $\|\cdot\|$ en X invariante por traslaciones es más fuerte que la norma $\|\cdot\|_1$. En consecuencia hay, a lo sumo, una única norma completa en X invariante por traslaciones.*

La demostración de este último resultado es ya clara si se tienen en cuenta las consideraciones de la prueba del teorema anterior junto con la del Teorema 1.2.6.

Estos dos últimos resultados ya fueron obtenidos en [34] pero utilizando unos métodos mucho más sofisticados.

Observemos en este momento que tanto en el Teorema 1.2.1 como en el Teorema 1.2.6 la labor que ha jugado la inclusión de X en $L^1(G)$ (o en $M(G)$, en un ambiente más general) puede ser desempeñada por un homomorfismo del G-módulo de Banach $L^1(G)$, cuando la acción del grupo G sobre $L^1(G)$ es la acción de traslación. En particular la generalización del Teorema 1.2.1 al ambiente de homomorfismos de G-módulos de Banach quedaría en los siguientes términos.

1.2.13 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano cuyo dual $\widehat{G}$ sea conexo. Sean X un G-módulo de Banach e Y un subespacio vectorial de $L^1(G)$ invariante por traslaciones dotado de una norma completa invariante por traslaciones. Sea $\Phi : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de G-módulos. Entonces Φ es continuo.*

Demostración. Recordemos que la acción en los submódulos X e Y es la traslación por elementos del grupo. Comenzaremos probando primero el caso particular en que $Y = L^1(G)$. Para ello necesitamos la siguiente versión del Lema 1.1.12:

Sean G un grupo localmente compacto, X un G-módulo de Banach, (t_n) una sucesión de elementos de G y (γ_n) una sucesión de caracteres de G. Supongamos que $\Phi : X \longrightarrow L^1(G)$ es un homomorfismo de G-módulos de Banach. Entonces existe un natural $N \in \mathbb{N}$ verificando que

$$(\gamma_1(t_1) - \gamma_{N+1}(t_1)) \cdots (\gamma_N(t_N) - \gamma_{N+1}(t_N))\widehat{f}(\gamma_{N+1}) = 0$$

para cualquier $f \in \mathfrak{S}(\Phi)$.

La prueba del anterior resultado es la misma que la del Lema 1.1.12 cambiando la inclusión $i : X \longrightarrow L^1(G)$ por el homomorfismo Φ.

Si ahora notamos

$$\Delta_\Phi = \left\{ \gamma \in \widehat{G} : \ \widehat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ para algún } \ f \in \mathfrak{S}_\Phi \right\}$$

la demostración se reduce a probar que Δ_Φ es vacío para obtener la continuidad de Φ. Para ello basta repetir la demostración del Teorema 1.2.1 cambiando Δ_X por Δ_Φ con lo que obtenemos que $\Delta_\Phi = \emptyset$ y así Φ es continuo.

En el caso general si llamamos i a la inclusión de Y en $L^1(G)$ el caso particular nos garantiza que $i\Phi$ es continua. Otra vez el Teorema 1.2.1 nos garantiza que i es continua y el Lema A.1.3 nos proporciona que

$$\{0\} = \mathfrak{S}(i\Phi) = \overline{i(\mathfrak{S}(\Phi)}$$

y así se tiene que $\mathfrak{S}(\Phi) = \{0\}$ y Φ es continua. □

De hecho, este resultado generaliza el obtenido por B. E. Johnson en [16] donde prueba la continuidad de un operador de $L^1(\mathbb{R})$ en sí mismo conmutando con una traslación no trivial.

La versión del Teorema 1.2.6 para homomorfismos de G-módulos quedaría de la siguiente forma.

1.2.14 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto. Sean X un G-módulo de Banach e Y un subespacio vectorial de $L^1(G)$ invariante por traslaciones y dotado de una norma completa invariante por traslaciones. Sea $\Phi : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de G-módulos. Entonces Φ es continuo.*

La demostración de este último resultado es ya clara si se observa la prueba del Teorema anterior y como se ha adaptado para ello el Lema 1.1.12.

1.2.15 Nota. Los dos teoremas anteriores pueden ser enunciados cambiando $L^1(G)$

por $M(G)$ como ya hemos hecho otras veces. No parece necesario dar los enunciados resultantes.

1.2.16 Problema. *Los instrumentos que hemos utilizado a lo largo de toda esta sección hacen uso y abuso de la transformada de Fourier y, más concretamente de una propiedad de esta aplicación: la transformada de Fourier de una función de $L^1(G)$ es una función continua. Si bien la transformada de Fourier tiene extensiones fuera de $L^1(G)$ (por ejemplo la transformada de Fourier-Plancherel en $L^2(G)$) estas extensiones no mantienen el carácter de la continuidad de la transformada. Así las herramientas que hemos utilizado no son efectivas cuando salimos del ambiente de $L^1(G)$. En particular es inmediato plantearse el problema del estudio de la unicidad de la norma completa que hace continuas las traslaciones de $L^p(G)$, con $1 < p < +\infty$ cuando G es un grupo localmente compacto, abeliano y no compacto. La relación con lo hecho en esta sección es clara.*

1.3. Grupos abelianos compactos

A lo largo de esta sección vamos a trabajar con un grupo G abeliano, compacto y normalizado, en el sentido de que $\lambda(G) = 1$. Esta última condición no resta generalidad alguna y a nosotros nos facilita enormemente la notación.

Cuando hablamos de la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en espacios de funciones sobre grupos compactos, relacionándolo con lo hecho para grupos no compactos, lo más inmediato es comprobar si los resultados obtenidos y los problemas planteados para grupos compactos son trasladables a espacios de funciones sobre grupos no compactos. Más concretamente, nos preguntamos si el problema planteado en el último párrafo de la sección anterior es resoluble cuando el grupo es compacto; es decir si existe unicidad de la norma completa que hace continuas las traslaciones en $L^p(G)$ con $1 < p < \infty$ y G un grupo compacto, y, por supuesto, también nos planteamos qué ocurre con la versión compacta del Corolario 1.2.7, nos preguntamos si en $L^1(G)$, con G compacto, existe unicidad de la norma completa que hace continuas las traslaciones. En relación con este problema tenemos el resultado siguiente, debido a K. Jarosz, que nos informa que la respuesta a esta cuestión es negativa.

1.3.1 Teorema. *[14, Theorem 3.4] Sea G un grupo abeliano, compacto e infinito. Entonces $L^1(G)$ tiene más de una norma invariante por traslaciones.*

A pesar de que, para nuestro problema, el anterior resultado es negativo, también es cierto que en el mismo trabajo de K. Jarosz se obtiene un resultado positivo, pero para $L^p(\mathbb{T})$ con $1 < p < \infty$.

1.3.2 Teorema. *[14, Theorem 3.5] Sea $1 < p < \infty$. Entonces $L^p(\mathbb{T})$ tiene una única norma invariante por traslaciones.*

Cuando tratamos con grupos compactos existe una estrecha relación, y no sólo en el ambiente abeliano, entre el problema tratado por nosotros, la unicidad de la norma invariante por traslaciones en $L^1(G)$, y un problema mucho más clásico: la existencia de funcionales lineales en $L^1(G)$ invariantes por traslaciones y discontinuos. Sobre este último asunto, la existencia de funcionales lineales invariantes por traslaciones y discontinuos hay una amplia bibliografía, y no sólo concerniente a $L^1(G)$, sino también para otros espacios de funciones sobre un grupo G. También es extensa la literatura sobre dicho problema aunque el grupo no sea compacto. Para tener una visión general del estado del problema es recomendable el trabajo de Meisters ([22]), que recoge los resultados existentes hasta ese momento sobre el tema. También en [4], [12], [23], [30] y [36] aparecen resultados sobre la existencia de funcionales lineales invariantes por traslaciones y discontinuos en distintos espacios de funciones sobre grupos.

Nuestro próximo resultado muestra de forma clara la relación, ya anunciada, entre el clásico problema de la continuidad automática de los funcionales lineales invariantes por traslaciones y el problema que ocupa nuestra atención de la unicidad de las normas invariantes por traslaciones.

1.3.3 Teorema. *Sean G un grupo compacto y abeliano y X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ verificando que la función $1 \in X$. Supongamos que X tiene una norma completa $\|\cdot\|$ invariante por traslaciones y que existe un funcional lineal invariante por traslaciones y discontinuo. Entonces X tiene otra norma completa $|\cdot|$ invariante por traslaciones, que no es equivalente a $\|\cdot\|$ que hace que la aplicación $t \longrightarrow T_t$ de G en $\mathcal{L}(X, |\cdot|)$ sea acotada.*

Demostración. Notaremos ϕ al funcional lineal en X invariante por traslaciones y discontinuo. Variando levemente ϕ podemos obtener otro funcional φ que disfruta de las mismas características que ϕ y que en la función constantemente 1 tome el valor 1, es decir $\varphi(1) = 1$. En efecto, si $\phi(1) = \alpha \neq 0$ definiremos $\varphi = \alpha^{-1}\phi$, y si $\phi(1) = 0$ entonces definiremos $\varphi(f) = \phi(f) + \int_G f(t)dt$, para cada $f \in X$. La normalización de la medida de Haar en grupos compactos nos asegura en este segundo caso que también $\varphi(1) = 1$.

La aplicación de X en sí mismo $f \mapsto 2f - \varphi(f)1$ es claramente lineal, pero además es una biyección. Veamos esto último. Para comprobar que es inyectiva sea $f \in X$ con $2f - \varphi(f)1 = 0$. Entonces $2f = \varphi(f)1$ y aplicando φ a ambos miembros de la igualdad se obtiene que $2\varphi(f) = \varphi(f)\varphi(1) = \varphi(f)$ y, en consecuencia, $\varphi(f) = 0$ de donde se obtiene que $f = 0$. Para comprobar la sobreyectividad es fácil observar, haciendo los cálculos necesarios, que, para cualquier $f \in X$, su preimagen es $1/2(f + \varphi(f)1)$.

El hecho de que la anterior aplicación sea una biyección lineal de X en sí mismo nos asegura que la aplicación $|\cdot|$ definida en X como $|f| = \|2f - \varphi(f)1\|$ es una norma completa en X y el hecho de que φ sea discontinuo nos proporciona que $|\cdot|$ no es equivalente a $\|\cdot\|$. Por último sólo nos falta comprobar que la norma $|\cdot|$ hace continuas las traslaciones. Para ello, tomemos $t \in G$ y $f \in X$, y observemos que

$$\begin{aligned} |T_t f| &= \|2T_t(f) - \varphi(T_t(f))1\| = \|T_t(2f) - \varphi(f)1\| = \|T_t(2f - \varphi(f)1)\| \\ &\leq \|T_t\|\|2f - \varphi(f)1\| = \|T_t\||f|, \end{aligned}$$

lo que demuestra que $T_t : (X, |\cdot|) \longrightarrow (X, |\cdot|)$ es continua para todo $t \in G$ y que la aplicación $t \longrightarrow T_t$ de G en $\mathcal{L}(X, |\cdot|)$ es acotada.. □

Dado que en [30, Theorem 1] se demuestra que si G es un grupo abeliano, infinito, localmente compacto y σ-compacto entonces existe un conjunto infinito no numerable de funcionales lineales invariantes por traslaciones y discontinuos en $L^1(G)$, obtenemos el siguiente resultado.

1.3.4 Corolario. *Sea G un grupo abeliano, compacto e infinito. Entonces $L^1(G)$ tiene más de una norma completa invariante por traslaciones.*

Este resultado, como ya hemos comentado, fue descubierto por K. Jarosz en [14, Theorem 3.3].

A pesar de lo negativo del resultado anterior vamos a intentar obtener algún resultado parcial positivo desde nuestro punto de vista de comparar dos normas invariantes por traslaciones. Una vez visto que cuando tenemos dos normas completas en $L^1(G)$, con G abeliano, compacto e infinito, invariantes por traslaciones, por ejemplo la norma $\|\cdot\|_1$ y otra norma $\|\cdot\|$, puede ocurrir que estas dos normas no sean equivalentes, lo que pretendemos ahora demostrar es que, aún no siendo equivalentes, ambas normas difieren en “ muy poco”. El significado se aclarará en breve. Para dar el resultado necesitamos ciertos requisitos previos.

1.3.5 Lema. *Sean G un grupo abeliano y compacto, $K \subset G$ un subconjunto con interior no vacío y $\Gamma \subset \widehat{G}$ un subconjunto infinito. Entonces el conjunto $\{\gamma_{|K} : \gamma \in \Gamma\}$ es también infinito, donde $\gamma_{|K}$ denota la restricción de γ a K.*

Demostración. Supondremos que el resultado es falso. En este caso podemos encontrar un conjunto finito $\xi_1, \dots, \xi_N \in \Gamma$ de forma que

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \{\gamma \in \Gamma : \ \gamma = \xi_k \text{ en } K\}.$$

Sean $t \in K$ y U un entorno abierto y simétrico de 0 verificando que $t + U \subset K$. Sabemos, por la Proposición B.1.12, que el conjunto $H = \cup_{n=1}^{\infty} (U + \overset{n}{\cdots} + U)$ es un subgrupo abierto y cerrado de G. Por ser G compacto, G/H es finito y entonces se tiene, por la Proposición B.2.8, que G/H coincide con su dual. El Teorema B.2.20 nos da que $\widehat{G/H} = H^{\perp}$ donde, recordemos, $H^{\perp} = \{\gamma \in \widehat{G} : \ \gamma(t) = 1, \text{ para todo } t \in H\}$. Entonces se tiene que

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{N} \{\gamma \in \Gamma : \ \gamma = \xi_k \text{ en } \ K\} = \bigcup_{k=1}^{N} \{\gamma \in \Gamma : \ \gamma = \xi_k \text{ en } U\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{N} \{\gamma \in \Gamma : \ \gamma = \xi_k \text{ en } \ H\} = \bigcup_{k=1}^{N} \{\gamma \in \Gamma : \ \gamma \in \xi_k H^{\perp}\},$$

pero como para cada $k \in \{1, \dots, N\}$ el conjunto $\xi_k H^{\perp}$ es finito, concluiríamos que Γ sería finito, lo que contradice la hipótesis de infinitud sobre Γ. $\square$

Este lema es necesario para la demostración del siguiente resultado.

1.3.6 Lema. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Sean Γ un subconjunto infinito de $\widehat{G}$ y $\gamma_1 \in \Gamma$. Entonces existen $t_1 \in G$ y un subconjunto infinito $\Gamma_1 \subset \Gamma$ verificando que $\gamma_1(t_1) \neq \gamma(t_1)$ para cualquier $\gamma \in \Gamma_1$.*

Demostración. Vamos a construir una sucesión (γ_n) de elementos de Γ y una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de G, (K_n), con interior no vacío y verificando que

$$\gamma_1(t) \neq \gamma_n(t), \text{ para cada } t \in K_{n-1} \text{ y para cada } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Elijamos $\gamma_2 \in \Gamma$ con $\gamma_2 \neq \gamma_1$. Por la continuidad de γ_1 y de γ_2 existirá un compacto K_1 con interior no vacío y de forma que $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ para todo $t \in K_1$.

El conjunto $\{\gamma_{|K_1} : \gamma \in \Gamma\}$ es un conjunto infinito según asegura el lema anterior y por tanto podemos escoger $\gamma_3 \in \Gamma$ con $\gamma_3 \neq \gamma_2$ y $\gamma_3 \neq \gamma_1$ en K_1. Otra vez por continuidad, esta vez de los caracteres γ_3 y γ_1, existirá un compacto $K_2 \subset K_1$ con interior no vacío y de forma que $\gamma_3(t) \neq \gamma_1(t)$ para cualquier $t \in K_2$. Supongamos elegidos $\gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ y $K_1, \ldots, K_{n-1}$ sucesión decreciente de compactos con interior no vacío verificando que

$$\gamma_1(t) \neq \gamma_i(t)$$

para todo $t \in K_{i-1}$ e $i = 1, \ldots, n$. Como $\{\gamma_{|K_{n-1}} : \gamma \in \Gamma\}$ es infinito, podemos elegir $\gamma_{n+1} \in \Gamma$ con $\gamma_{n+1} \neq \gamma_i$ para $i = 1, \ldots, n$ en K_{n-1}. En particular se tiene que $\gamma_{n+1} \neq \gamma_1$ en K_{n-1}. Existirá entonces un compacto con interior no vacío $K_n \subset K_{n-1}$ en donde se verifica que $\gamma_1(t) \neq \gamma_{n+1}(t)$ para $t \in K_n$, como deseábamos. Para terminar la demostración de este lema basta observar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ por compacidad y por tanto podemos tomar $t_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ y $\Gamma_1 = \{\gamma_n : n > 1\}$. □

1.3.7 Teorema. *Sean G un grupo abeliano y compacto y $X \subset L^1(G)$ un subespacio vectorial invariante por traslaciones. Supongamos que en X se tiene una norma completa $\|\cdot\|$ invariante por traslaciones. Entonces el separador $\mathfrak{S}$ de la inclusión de $(X, \|\cdot\|)$ en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ es un subespacio de dimension finita de $L^1(G)$.*

Demostración. Recordemos que el conjunto $\Delta_X = \{\gamma \in \widehat{G} : \widehat{f}(\gamma) \neq 0$, para algún $f \in \mathfrak{S}\}$ es una especie de medidor del tamaño del separador. Para demostrar que $\mathfrak{S}$ tiene dimensión finita basta demostrar que Δ_X es un conjunto finito (Lema 1.1.11).

Supongamos que Δ_X es un conjunto infinito para llegar a una contradicción. En tal caso, aplicando el lema anterior, y eligiendo un carácter $\gamma_1 \in \Delta_X$ obtendríamos un subconjunto $\Gamma_1 \subset \Delta_X$ infinito y un elemento $t \in G$ verificando que $\gamma_1(t_1) \neq \gamma(t_1)$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$. Escojamos ahora $\gamma_2 \in \Gamma_1$, aplicando otra vez el lema anterior obtenemos $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ infinito y $t_2 \in G$ verificando que $\gamma_2(t_2) \neq \gamma(t_2)$ para todo $\gamma \in \Gamma_2$. Obsérvese que también se verifica que $\gamma_2(t_1) \neq \gamma_1(t_1)$.

Repitiendo el proceso obtenemos una sucesión decreciente de subconjuntos infinitos de Δ_X, (Γ_n), una sucesión de elementos de G, (t_n), y una sucesión de elementos de $\widehat{G}$, (γ_n) con $\gamma_n \in \Gamma_{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$ (si llamamos $\Delta_X = \Gamma_0$) y de forma que $\gamma_n(t_n) \neq \gamma(t_n)$ para todo $\gamma \in \Gamma_n$ y $n \in \mathbb{N}$. Esta propiedad nos proporciona que

$$\gamma_n(t_n) \neq \gamma_k(t_n)$$

para k y n naturales con $k > n$.

Finalmente para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $f_n \in \mathfrak{S}$ verificando que $\widehat{f_n}(\gamma_{n+1}) \neq 0$. Con estos elementos elegidos se verifica que, para todo natural n,

$$(\gamma_1(t_1) - \gamma_{n+1}(t_1)) \cdots (\gamma_n(t_n) - \gamma_{n+1}(t_n))\widehat{f_n}(\gamma_{n+1}) \neq 0,$$

lo que contradice el Lema 1.1.12. □

Éste es el sentido en el que hay que entender que, cuando G es compacto y abeliano y $L^1(G)$ está dotado de dos normas completas que hacen continuas las traslaciones, estas normas difieren en " muy poco": la aplicación identidad de $L^1(G)$ con una de ellas en $L^1(G)$ con la otra tiene separador finito dimensional.

1.3.8 Corolario. *Sea G un grupo abeliano y compacto y sea $\|\cdot\|$ una norma completa en $L^1(G)$ invariante por traslaciones. Entonces existe un ideal de dimensión finita $\mathfrak{S}$ de $L^1(G)$ de forma que las correspondientes normas cocientes de $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes en $L^1(G)/\mathfrak{S}$.*

Demostración. El ideal $\mathfrak{S}$ por el que haremos el cociente será el separador de la aplicación identidad de $(L^1(G), \|\cdot\|)$ en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ que, según el teorema anterior, es un subespacio de dimensión finita de $L^1(G)$. Además el hecho de que tanto la norma $\|\cdot\|$ como la norma $\|\cdot\|_1$ sean invariantes por traslaciones hace que $\mathfrak{S}$ sea invariante por traslaciones. Es, por tanto, un ideal de $L^1(G)$. Entonces la aplicación cociente de $(L^1(G), \|\cdot\|)$ en $(L^1(G)/\mathfrak{S}, \|\cdot\|_1)$ es continua y por tanto también lo será la identidad de $(L^1(G)/\mathfrak{S}, \|\cdot\|)$ en $(L^1(G)/\mathfrak{S}, \|\cdot\|_1)$ $\square$

1.3.9 Nota. Al igual que en la sección anterior, tanto el Teorema 1.3.7 como el Corolario 1.3.8 siguen siendo ciertos si sustituimos $L^1(G)$ por $M(G)$ en sus enunciados. En las correspondientes demostraciones bastaría sustituir también $L^1(G)$ por $M(G)$.

El próximo resultado que pretendemos demostrar es, quizá, el más importante de esta sección. Trata sobre la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ con G en el ambiente de esta sección, es decir compacto y abeliano, aunque habrá que imponerle una condición adicional. Los resultados que necesitamos son de distinta índole a los ya utilizados. Por una parte requerimos un lema técnico sobre medibilidad que podría incluirse en la demostración pero que hemos preferido aislarlo para que dicha prueba resulte más transparente. Por otra parte necesitamos un resultado de J. Bourgain que, por la importancia que tiene en nuestra demostración, hemos preferido incluirlo explícitamente en este trabajo en vez de dar la referencia del trabajo original. Comenzaremos por el lema técnico anunciado.

1.3.10 Lema. *Sea Ω un espacio de medida con medida λ de forma que $\lambda(\Omega) = 1$ y (H_n) una sucesión de subconjuntos de Ω con $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega$. Entonces existen naturales m_0 y n_0 verificando que todo subconjunto medible E de Ω con $\lambda(E) \geq 1 - 1/m_0$ verifica que $E \bigcap H_{n_0} \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que no se verifica la tesis del lema, entonces existirían, para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, conjuntos medibles $C_{m,n} \subset \Omega$ con $\lambda(C_{m,n}) \geq 1 - 1/m$ y $H_n \subset \Omega \setminus C_{m,n}$, pero entonces se tendría que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus C_{m,n}) \right).$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lambda(\Omega \setminus C_{m,n}) \leq 1/m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, se seguiría que $\lambda\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus C_{m,n})\right) = 0$ y, en consecuencia, que $\lambda(\Omega) = 0$, lo que contradice la hipótesis de que $\lambda(\Omega) = 1$. $\square$

Veamos ahora el resultado de J. Bourgain.

1.3.11 Teorema. *[4, Proposition 3 y Corollary 4] Sea G un grupo abeliano compacto y conexo y sea $1 < p < \infty$. Entonces existe una constante positiva C y un natural J con la propiedad de que para todo $f \in L^p(G)$ con $\int_G f(t)dt = 0$ existe un conjunto $E_f \subset G^J$ con $\lambda^J(E_f) = 1$, donde λ^J es la medida de Haar normalizada en G^J, verificando que para cualesquiera $(t_1, \ldots, t_J) \in E_f$ existen funciones $f_1^{(t_1,\ldots,t_J)}, \ldots, f_J^{(t_1,\ldots,t_J)}$ en $L^p(G)$ tales que*

$$f = \sum_{j=1}^{J} \left(f_j^{(t_1,\ldots,t_J)} - T_{t_j} f_j^{(t_1,\ldots,t_J)} \right),$$

y, además, se verifica la acotación

$$\int_{G^J} \sum_{j=1}^{J} \|f_j^{(t_1,\ldots,t_J)}\|_p d(t_1, \ldots, t_J) \leq C \|f\|_p.$$

1.3.12 Teorema. *Sea G un grupo abeliano, compacto y conexo, y sea $1 < p < \infty$. Entonces $L^p(G)$ tiene una única norma completa invariante por traslaciones.*

Demostración. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma completa en $L^p(G)$ invariante por traslaciones. Nuestra demostración consistirá en probar que la nueva norma

$\|\cdot\|$ y la norma usual $\|\cdot\|_p$ son equivalentes. Para ello veremos que la aplicación ϕ definida como la identidad de $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$ en $(L^p(G), \|\cdot\|)$ es continua, esto es, que el separador de dicha aplicación, $\mathfrak{S}(\phi)$, se reduce a la función 0.

Un primer paso de la demostración es observar que $\mathfrak{S}(\phi)$ tiene dimensión finita. Para ello es necesario comprobar que $\mathfrak{S}(\phi) = \mathfrak{S}(\phi^{-1})$. Esta propiedad es fácil de demostrar al ser la aplicación ϕ la identidad. En efecto, si tenemos una sucesión de funciones $(f_n) \to 0$ en $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$ y $(f_n) \to f$ en $(L^p(G), \|\cdot\|)$, entonces se tiene que $(f - f_n) \to 0$ en $(L^p(G), \|\cdot\|)$ y $(f - f_n) \to f$ en $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$. Así obtendríamos que $\mathfrak{S}(\phi) \subset \mathfrak{S}(\phi^{-1})$. Análogamente se demuestra que $\mathfrak{S}(\phi^{-1}) \subset \mathfrak{S}(\phi)$, con lo que se tiene la igualdad. Por otro lado, al ser G un grupo compacto con medida de Haar 1, basándonos en la desigualdad de Hölder, se tiene que, para $g \in L^p(G)$,

$$\|g\|_1 = \int_G |g(t)|dt \leq \left[\int_G |g(t)|^p dt\right]^{1/p} \left[\int_G |1|^q dt\right]^{1/q} = \|g\|_p,$$

donde 1 representa la función constantemente igual a 1 en G y $1/p + 1/q = 1$. Esto nos proporciona que, entonces , $g \in L^1(G)$ y $\|g\|_1 \leq \|g\|_p$. Así pues, si $f \in \mathfrak{S}(\phi^{-1})$ existirá $(f_n) \to 0$ en $(L^p(G), \|\cdot\|)$ con $(f_n) \to f$ en $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$ pero, según lo anterior, se verifica también que $(f_n) \to f$ en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ y entonces $\mathfrak{S}(\phi) = \mathfrak{S}(\phi^{-1})$ estará contenido en el separador de la inclusión de $(L^p(G), \|\cdot\|)$ en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$. El separador de dicha inclusión, según hemos visto en el Teorema 1.3.7, tiene dimensión finita y, por tanto, también tiene dimensión finita $\mathfrak{S}(\phi)$.

La segunda parte de la demostración consiste en demostrar que $\mathfrak{S}(\phi) = \{0\}$. Para ello, como viene siendo usual, supondremos que no es $\{0\}$ e intentaremos llegar a una contradicción. Supongamos pues que $\mathfrak{S}(\phi) \neq \{0\}$ y sea $f_0 \in \mathfrak{S}(\phi) \setminus \{0\}$. Existirá un carácter $\gamma \in \widehat{G}$ verificando que $\widehat{f_0}(\gamma) \neq 0$. Este carácter γ permanecerá fijo en lo que queda de demostración. Sea $\mathcal{R}$ el subespacio vectorial de $\mathfrak{S}(\phi)$ definido por

$$\mathcal{R} = \left\{ f \in \mathfrak{S}(\phi) : \ \widehat{f}(\gamma) = 0 \right\},$$

y sea π la proyección canónica de $(L^p(G), \|\cdot\|)$ en $(L^p(G)/\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$, donde $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$

es la norma cociente de $\|\cdot\|$ en $L^p(G)/\mathcal{R}$. Como quiera que $\mathfrak{S}(\phi) \not\subset \mathcal{R}$, ya que $f_0 \in \mathfrak{S}(\phi)$ pero $f_0 \notin \mathcal{R}$, entonces la composición $\pi \circ \phi$ de $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$ en $(L^p(G)/\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$ no es continua. Esta afirmación es la que pretendemos contradecir.

Para $t \in G$ definimos el operador S_t de $(L^p(G), \|\cdot\|_p)$ en $(L^p(G)/\mathcal{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{R}})$ actuando sobre cada $f \in L^p(G)$ por

$$S_t(f) = \gamma(t)\pi(f) - \pi(T_t f).$$

Si definimos, también para $t \in G$, el operador R_t de $L^p(G)$ en sí mismo como $R_t(f) = \gamma(t)f - T_t(f)$, para cada $f \in L^p(G)$, es fácil observar que R_t es un operador continuo de $L^p(G)$ en sí mismo tanto si consideramos en $L^p(G)$ la topología inducida por la norma $\|\cdot\|$ como si consideramos la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_p$. Por otra parte considerando $R_t : (L^p(G), \|\cdot\|) \longrightarrow (L^p(G), \|\cdot\|)$ tenemos que, para cada $t \in G$, se tiene la igualdad

$$S_t = \pi \circ R_t \circ \phi.$$

Veamos que, para cada $t \in G$, S_t es un operador continuo. Para ello vamos a analizar su separador. Se tiene, por el Lema A.1.3 que $\mathfrak{S}(S_t) = \overline{\pi(R_t(\mathfrak{S}(\phi)))}$. Al ser R_t continuo (tanto en la norma $\|\cdot\|_p$ como en la norma $\|\cdot\|$) y conmutar con ϕ, el Lema A.1.2 nos garantiza que $R_t(\mathfrak{S}(\phi)) \subset \mathfrak{S}(\phi)$. Así, para cada $f \in R_t(\mathfrak{S}(\phi))$, se tiene que $f \in \mathfrak{S}(\phi)$ y

$$\widehat{R_t(f)}(\gamma) = \gamma(t)\widehat{f}(\gamma) - \gamma(t)\widehat{f}(\gamma) = 0;$$

por lo que $f \in \mathcal{R}$. Entonces $R_t(\mathfrak{S}(\phi)) \subset \mathcal{R}$ y $\pi(R_t(\mathfrak{S}(\phi))) = \{0\}$ y, en consecuencia, S_t es continuo, como pretendíamos demostrar.

Para el natural J obtenido en el Teorema 1.3.11 y para cada natural n definimos el subconjunto H_n de G^J como

$$H_n = \{(t_1, \ldots, t_J) \in G^J : \ \|S_{t_j}\| \leq n, \text{ para } j = 1, \ldots, J\}.$$

Claramente se tiene que que $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = G^J$.

Sea ahora $f \in L^p(G)$ y definamos $g \in L^p(G)$ como $g = \overline{\gamma} f - \widehat{f}(\gamma)$. Se tiene que $\int_G g(t)dt = 0$ y que $\|g\|_p \leq 2\|f\|_p$. Para esta función g el Teorema 1.3.11 nos proporciona un subconjunto $E_g \subset G^J$ con $\lambda^J(E_g) = 1$ y de forma que si $(t_1,\ldots,t_J) \in E_g$ existen funciones $g_1^{(t_1,\ldots,t_J)},\ldots,g_J^{(t_1,\ldots,t_J)}$ en $L^p(G)$ verificando que

$$g = \sum_{j=1}^{J} \left(g_j^{(t_1,\ldots,t_J)} - T_{t_j} g_j^{(t_1,\ldots,t_J)} \right)$$

y que

$$\int_{G^J} \sum_{j=1}^{J} \|g_j^{(t_1,\ldots,t_J)}\|_p \leq C\|g\|_p.$$

Según el Lema 1.3.10, con $\Omega = G^J$, obtenemos n_0 y m_0 verificando la tesis del lema. Definimos ahora el subconjunto de G^J

$$K = \left\{ (t_1,\ldots,t_J) : \sum_{j=1}^{J} \|g_j^{(t_1,\ldots,t_J)}\|_p \leq Cm_0\|g\|_p \right\}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} Cm_0\|g\|_p \lambda^J(G^J \setminus K) &\leq \int_{G^J \setminus K} \sum_{j=1}^{J} \left\| g_j^{(t_1,\ldots,t_J)} \right\|_p d(t_1,\ldots,t_J) \\ &\leq \int_{G^J} \sum_{j=1}^{J} \left\| g_j^{(t_1,\ldots,t_J)} \right\|_p d(t_1,\ldots,t_J) \leq C\|g\|_p. \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\lambda^J(K) \geq 1 - 1/m_0$ y el Lema 1.3.10 asegura que $K \bigcap H_{n_0} \neq \emptyset$.

Sean $(t_1,\ldots,t_J) \in K \bigcap H_{n_0}$ y llamemos $g_j := g_j^{(t_1,\ldots,t_J)}$ para $j = 1,\ldots,J$, para abreviar. Por estar $(t_1,\ldots,t_J) \in K$ tenemos que $\|g_i\|_p \leq Cm_0\|g\|_p$ para $j = 1,\ldots,J$, y por estar $(t_1,\ldots,t_J) \in H_{n_0}$ se tiene que $\|S_{t_j}\| \leq n_0$ para $j = 1,\ldots,J$.

La descomposición de f queda entonces como sigue:

$$f = \widehat{f}(\gamma)\gamma + \sum_{j=1}^{J} (\gamma g_j - \gamma T_{t_j}(g_j))$$

$$= \widehat{f}(\gamma)\gamma + \sum_{j=1}^{J} (\gamma(t_j)\overline{\gamma(t_j)}\gamma g_j - T_{t_j}(\overline{\gamma(t_j)}\gamma g_j).$$

Si ahora llamamos $f_j = \overline{\gamma(t_j)}\gamma g_j$, para $j = 1, \ldots, J$, se tiene que $\|f_j\|_p = \|g_j\|_p \leq Cm_0\|g\|_p \leq 2Cm_0\|f\|_p$ y

$$f = \widehat{f}(\gamma)\gamma + \sum_{j=1}^{J} (\gamma(t_j)f_j - T_{t_j}(f_j)).$$

Finalmente, aplicando $\pi \circ \phi$ a la función f tenemos que

$$(\pi \circ \phi)(f) = \widehat{f}(\gamma)\pi(\gamma) + \sum_{j=1}^{J} \big(\gamma(t_j)\pi(f_j) - \pi(T_{t_j}(f_j))\big) = \widehat{f}(\gamma)\pi(\gamma) + \sum_{j=1}^{J} S_{t_j}(f_j)$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\|(\pi \circ \phi)(f)\|_{\mathcal{R}} &\leq |\widehat{f}(\gamma)|\|\pi(\gamma)\|_{\mathcal{R}} + \sum_{j=1}^{J} |S_{t_j}(f_j)|_{\mathcal{R}} \\
&\leq \|f\|_p\|\pi(\gamma)\|_{\mathcal{R}} + \sum_{j=1}^{J} \|S_{t_j}\|\|f_j\|_p \\
&\leq \|f\|_p\|\pi(\gamma)\|_{\mathcal{R}} + \sum_{j=1}^{J} 2Cn_0m_0\|f\|_p \\
&= (\|\pi(\gamma)\|_{\mathcal{R}} + 2JCn_0m_0)\,\|f\|_p
\end{aligned},$$

lo que nos informa que la aplicación $\pi \circ \phi$ es continua, contrariamente a nuestra hipótesis.

$\square$

1.3.13 Notas.

- El resultado anterior generaliza el Teorema 1.3.2 donde se establece la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^p(\mathbb{T})$ para $1 < p <$

∞. Según nuestro resultado, el resultado de K. Jarosz es consecuencia de la compacidad y conexión de $\mathbb{T}$.

- Si el grupo G tiene un número finito de componentes conexas, el teorema anterior sigue siendo cierto. Los cambios en la demostración consisten, básicamente, en la aplicación del Teorema 1.3.11 a la restricción de la función g a cada una de las componentes conexas. En [23, Lemma 3 y Theorem 3] se establece el teorema, cuando G tiene un número finito de componentes conexas, para $L^2(G)$ y la generalización a $L^p(G)$ con $1 < p < \infty$ se sigue como en la demostración del Teorema 1.3.11.

- Si el grupo G tiene infinitas componentes conexas la situación es completamente diferente. En [22] se demuestra que $L^2(G)$ posee funcionales invariantes por traslaciones y discontinuos en el caso de que G sea el grupo abeliano, compacto y totalmente disconexo conocido como el "Discontinuo de Cantor", $\mathbb{D}$, ($\mathbb{D} = \{-1, 1\}^{\omega}$). El Teorema 1.3.3 nos garantiza entonces la existencia de varias normas no equivalentes en $L^2(\mathbb{D})$ invariantes por las traslaciones. De hecho siempre que G sea un grupo abeliano, compacto y con infinitas componentes conexas puede hacerse una construcción similar.

Finalmente, puntualizar que podemos dar versiones de los Teoremas 1.3.7 y 1.3.12 para homomorfismos de G-módulos de Banach.

1.3.14 Teorema. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Sea Y un subespacio vectorial de $L^1(G)$ invariante por traslaciones y dotado de una norma invariante por traslaciones.*

1. *Si X es un G-módulo de Banach y $\Phi : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de G-módulos, entonces el separador de Φ, $\mathfrak{S}(\Phi)$, tiene dimensión finita.*

2. *Si* $1 < p < \infty$ *y* $\Phi : L^p(G) \longrightarrow Y$ *es un homomorfismo de G-módulos de Banach, entonces* Φ *es continuo.*

Demostración. Para la demostración de la primera aseveración consideraremos primero el caso particular en que $Y = (L^1(G), \|\cdot\|_1)$. En este caso, para demostrar que $\mathfrak{S}(\Phi)$ tiene dimensión finita, es suficiente demostrar que

$$\Delta_\Phi = \{\gamma \in \ \widehat{f}(\gamma) \neq 0 \ \text{ para algún } \ f \in \mathfrak{S}(\Phi)\}$$

es un conjunto finito (en el Lema 1.1.11 está demostrada esta propiedad del separador pero para el separador de la identidad y Δ_X. La demostración para $\mathfrak{S}(\Phi)$ y Δ_Φ es idéntica). Si suponemos que Δ_Φ es infinito el mismo razonamiento utilizado en el Teorema 1.3.7 nos proporciona una sucesión (γ_n) de elementos de $\widehat{G}$, una sucesión (t_n) de elementos de G y una sucesión (f_n) de elementos de $\mathfrak{S}(\Phi)$ verificando que

$$(\gamma_1(t_1) - \gamma_{n+1}(t_1)) \cdots (\gamma_n(t_n) - \gamma_{n+1}(t_n))\widehat{f_n}(\gamma_{n+1}) \neq 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que contradice la versión del Lema 1.1.12 dada en la demostración del Teorema 1.2.13. En el caso general, llamaremos π a la proyección canónica de $L^1(G)$ sobre $L^1(G)/\mathfrak{S}(i_Y)$ donde $\mathfrak{S}(i_Y)$ es el separador de la inclusión de Y en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$. Teniendo en cuenta que tanto π como $\pi \circ i_Y$ son continuas, se tiene, apoyándonos en el Lema A.1.3, que

$$\overline{\pi(\mathfrak{S}(i_Y \circ \Phi))} = \mathfrak{S}(\pi \circ (i_Y \circ \Phi)) = \mathfrak{S}((\pi \circ i_Y) \circ \Phi) = \overline{\pi(i_Y(\mathfrak{S}(\Phi)))}.$$

Por lo obtenido en el caso particular, tanto $\dim \mathfrak{S}(i_Y) < \infty$ como $\dim \mathfrak{S}(i_Y \circ \Phi) < \infty$, de donde se obtiene que $\dim \mathfrak{S}(\Phi) < \infty$.

Para la segunda afirmación utilizaremos la demostración del Teorema 1.3.12 cambiando ϕ por Φ. Obsérvese que, según la primera afirmación, tenemos que $\mathfrak{S}(\Phi)$ es de dimensión finita. Esto nos permite hacer la segunda parte de la demostración Teorema 1.3.12 cambiando $\mathfrak{S}(\phi)$ por $\mathfrak{S}(\Phi)$ y llegamos a obtener que $\mathfrak{S}(\Phi) = \{0\}$ que equivale a demostrar que Φ es continuo. $\square$

Capítulo 2

Grupos no abelianos

2.1. Generalidades y grupos de Moore

En este capítulo seguiremos estudiando el mismo problema de la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en un espacio de funciones sobre un grupo localmente compacto y, ahora, no necesariamente abeliano. Aunque es necesario notar que, realmente, el ser abeliano es una especificidad de los grupos, sería posible argumentar una disposición contraria en el ordenamiento de los dos capítulos, pero tanto la génesis de los resultados presentados en esta memoria como, incluso, la complejidad de las herramientas utilizadas hacen razonable presentar primero los resultados sobre grupos abelianos y ahora los resultados sobre grupos no abelianos.

Los resultados que vamos a presentar en este capítulo son, en cierta medida, bajo condiciones especiales, versiones no abelianas de los resultados presentados en el capítulo anterior. Esto hace que muchas de las notaciones establecidas en el capítulo anterior que no involucran la conmutatividad del grupo sigan siéndonos útiles, así como otras notaciones, en las que sí interviene la conmutatividad del grupo, tienen que sufrir un ligero cambio para poder sernos útiles en este nuevo ambiente. Veamos algunos ejemplos de lo anterior. En relación con los espacios de funciones invariantes por traslaciones tenemos la siguiente definición (véase B.1.16).

2.1.1 Definición. Sea G un grupo localmente compacto y sea X un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^G$. Si $t \in G$, diremos que X es invariante por la traslación L_t si $L_t(X) \subset X$. Si X es invariante por L_t para cualquier $t \in G$, entonces se dirá que X es invariante por traslaciones izquierda. La definición de subespacio invariante por traslaciones derecha es totalmente análoga cambiando L_t por R_t, y, finalmente, se dice que X es invariante por traslaciones si es invariante tanto por traslaciones izquierda como por traslaciones derecha.

También el concepto de normas completas invariantes por traslaciones tiene ahora una definición acorde con la no conmutatividad del grupo.

2.1.2 Definición. Sea G un grupo localmente compacto y sea X un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^G$ invariante por traslaciones izquierda y sea $\|\cdot\|$ una norma completa en X. Diremos que $\|\cdot\|$ es invariante por traslaciones izquierda si

$$\{L_t(U) : U \in \tau\} = \tau$$

para cada $t \in G$, donde τ es la topología inducida por $\|\cdot\|$. Análogamente, para normas completas en X, se define el concepto de norma invariante por traslaciones derecha y, si X es invariante por traslaciones, se dirá que $\|\cdot\|$ es invariante por traslaciones si es invariante por traslaciones izquierda y derecha.

No parece necesaria la definición de operadores que conmutan con traslaciones izquierda, derecha o, simplemente, que conmutan con traslaciones, siguiendo dichas definiciones las pautas dadas por las definiciones anteriores. También el concepto de funcional lineal invariante por traslaciones definido en el capítulo anterior tiene sus versiones no abelianas en los conceptos de funcional lineal invariante por traslaciones izquierda, derecha o que es invariante por traslaciones cuando sea invariante por ambas.

Para $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ espacios de Banach denotaremos $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ al espacio de Banach de los operadores lineales y continuos de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{Y}$. Cuando $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ lo denotaremos simplemente por $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$. A la norma de un elemento de $\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ la notaremos por $\|\cdot\|$ sin que en la notación vaya explícita cuál es la norma que consideramos en cada momento en $\mathfrak{X}$ y en $\mathfrak{Y}$. De todas formas esto no debe causar confusión alguna.

Las herramientas que utilizamos hacen que tengamos que restringir nuestro estudio a cierta clase de grupos.

2.1.3 Definición. Sea G un grupo localmente compacto. Se dice que G es un grupo de Moore si todas sus representaciones unitarias irreducibles son de dimensión finita.

La clase de los grupos de Moore es muy amplia, como muestra tenemos que tanto los grupos abelianos como los grupos compactos son grupos de Moore. Y entre las consecuencias que tiene para un grupo ser un grupo de Moore destacaremos el ser unimodular, lo cual nos facilitará la escritura al no tener que arrastrar la función modular tanto en los enunciados como en las demostraciones.

La razón por la que tenemos que restringir nuestro estudio a grupos de Moore es que las técnicas que hemos desarrollado necesitan que el espacio de representación de cada una de las representaciones unitarias e irreducibles del grupo G tenga dimensión finita. La trascendencia que para un grupo localmente compacto tiene el hecho de ser Moore puede ser consultada en cualquier manual sobre el tema. Un estudio pormenorizado de las implicaciones que tiene, para un grupo, el hecho de ser Moore se puede consultar en [25].

En lo que sigue de este capítulo utilizaremos la siguiente notación. Si G es un grupo no compacto trabajaremos con un subespacio vectorial X de $L^1(G)$. En el caso de que el grupo sea compacto particularizaremos un poco más y X será $L^p(G)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$ o bien será $C(G)$, el espacio de las funciones continuas sobre G. Si G es compacto llamaremos $\|\cdot\|$ a la norma usual de $L^p(G)$ para $1 \leq p \leq \infty$ o $C(G)$, es decir $\|\cdot\|_p$ o $\|\cdot\|_\infty$. El hecho de que el espacio X tenga unicidad de la norma completa invariante por traslaciones hará que cualquier norma completa invariante por traslaciones sea equivalente a $\|\cdot\|_p$ en el caso de que $X = L^p(G)$ para $1 \leq p \leq \infty$ o equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ en el caso de $C(G)$. Durante esta sección todos los grupos a los que nos refiramos serán grupos de Moore, si bien algunos resultados son ciertos para grupos localmente compactos en general. También en lo sucesivo supondremos que $|\cdot|$ es una norma completa en X invariante por traslaciones. Para probar si esta norma completa $|\cdot|$ es equivalente a la norma usual de X basta y sobra demostrar que la aplicación identidad $i : (X, |\cdot|) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ es continua (véanse los comentarios posteriores al Teorema 1.1.10).

Denotaremos en lo sucesivo por $\mathfrak{A}$ a la subálgebra del álgebra de Banach de los operadores lineales de X en sí mismo generada por los operadores de traslación derecha. Es claro que $\mathfrak{A}$ es una subálgebra tanto de $\mathcal{L}(X, |\cdot|)$ como de $\mathcal{L}(X, \|\cdot\|)$.

Para decidir la continuidad de $i : (X, |\cdot|) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ utilizaremos el subespacio separador de dicha aplicación (véase Definición A.1.1 y los resultados posteriores). Llamaremos $\mathfrak{S}$ a dicho separador. Nuestro objetivo consistirá por tanto en demostrar que $\mathfrak{S} = \{0\}$.

Conviene referir al Apéndice B, en particular a la Sección B.3, para los conceptos con los que el lector no esté familiarizado. Al igual que ocurría en el caso abeliano un medidor del tamaño del separador vendrá dado por el conjunto de las representaciones unitarias e irreducibles que toman valores distintos de 0 en algún punto del separador (en el caso abeliano eran los caracteres que tomaban valores distintos de 0). Definimos, pues, el conjunto

$$\Delta = \left\{ [\pi] \in \widehat{G} : \ \pi(\mathfrak{S}) \neq \{0\} \right\}.$$

Más que el conjunto de las representaciones unitarias e irreducibles que no valen 0 en $\mathfrak{S}$ lo que nos estamos tomando es el conjunto de clases de equivalencia de dichas representaciones. Pero esta definición tiene sentido, ya que si $\pi' \in [\pi]$ y $U : H_\pi \longrightarrow H_{\pi'}$ es el operador de intercambio entre π y π', esto es, $U\pi(t) = \pi'(t)U$ para todo $t \in G$, entonces se tiene que $U\pi(f) = \pi'(f)U$ para todo $f \in X$ y, por tanto $\pi(\mathfrak{S}) = \{0\}$ si, y sólo si, $\pi'(\mathfrak{S}) = \{0\}$. Las propiedades básicas de $\mathfrak{S}$ y de Δ que utilizaremos en los sucesivo vienen recogidas en el siguiente resultado.

2.1.4 Lema. *Se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *$\mathfrak{S}$ es invariante por traslaciones.*

2. *$\mathfrak{S}(i^{-1}) = \mathfrak{S}$ donde i^{-1} es la aplicación identidad de $(X, \|\cdot\|)$ en $(X, |\cdot|)$.*

3. *Si $f \in X$ verifica que $\pi(f) = 0$ para cualquier $[\pi] \in \widehat{G}$ entonces $f = 0$.*

4. *$|\cdot|$ es equivalente a $\|\cdot\|$ si, y sólo si, $\Delta = \emptyset$.*

Demostración. Las dos primeras afirmaciones son de comprobación inmediata. Para la tercera afirmación sea π una representación unitaria e irreducible de G y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de H_π. Entonces se tiene que $\int_G \langle \pi(t)e_i, e_j \rangle f(t)dt = 0$ para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Variando $\pi \in \widehat{G}$ y los elementos e_i y e_j obtenemos que $\int_G \tau(t) f(t)dt = 0$ para cualquier polinomio trigonométrico τ, pero los polinomios trigonométricos son densos en $C(G)$ con la norma uniforme y, por tanto, $\int_G g(t)f(t)dt = 0$ para toda función $g \in C(G)$. El argumento para terminar la prueba es distinto para las distintas posibilidades del espacio X. Para G compacto, si f está en $C(G)$ basta tomarse como función g la función $\overline{f}$ y se obtiene que

$\int_G |f(t)|^2 dt = 0$ de donde se obtiene que $f = 0$. Como las funciones continuas son densas en $L^p(G)$ para $1 \leq p < \infty$ se tiene que en el caso en que $f \in L^1(G)$ basta tomarse también $g = \overline{f}$ y se obtiene que $\int_G |f(t)|^2 dt = 0$ y $f = 0$. Para $f \in L^p(G)$, con $1 < p < \infty$, se tiene que $\int_G g(t) f(t) dt = 0$ para cualquier $g \in L^q(G)$ con $1/p + 1/q = 0$ y la dualidad entre $L^p(G)$ y $L^q(G)$ fuerza que $f = 0$. Para $f \in L^\infty(G)$ se tiene que $\int_G g(t) f(t) dt = 0$ para $g \in L^1(G)$. El hecho de que $L^1(G)^* = L^\infty(G)$ hace que, necesariamente, f tenga que ser 0. Si G no es compacto y $X = L^1(G)$ se repite el mismo argumento que en grupos compactos

Probemos finalmente 4. 3 nos dice que $\Delta = \emptyset$ si, y sólo si, $\mathfrak{S} = \{0\}$ y esta afirmación sabemos que coincide con la equivalencia de las normas $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$. $\square$

Un resultado técnico que utilizaremos más adelante es el siguiente. La demostración no la daremos ya que es el tercer apartado del Lema A.1.3 pero aquí a la constante le hemos llamado de forma distinta y la notación es más acorde con los propósitos que tenemos.

2.1.5 Lema. *Sean $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ y $\mathfrak{Z}$ espacios de Banach y sea Φ un operador lineal de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{Y}$. Entonces existe una constante D_1 verificando que $\|\Psi\Phi\| \leq D_1 \|\Psi\|$ para cualquier $\Psi \in \mathfrak{L}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ que cumpla que $\Psi\Phi$ es continuo.*

La técnica de demostración para probar que la identidad de $(X, |\cdot|)$ en $(X, \|\cdot\|)$ es continua va a utilizar el *gliding hump argument* (Lema A.1.5). El problema que se nos plantea es que, a la hora de trabajar con normas invariantes por traslaciones, estamos involucrando al álgebra $\mathfrak{A}$, que no es completa, y la utilización del *gliding hump argument* no es tan inmediata como se desearía. Los siguientes resultados, encadenados entre sí, son los que permiten al final de la serie aplicar el *gliding hump argument*.

2.1.6 Lema. *Sea G un grupo de Moore, sea π una representación unitaria e irredu-*

cible de G, sea Y un subespacio vectorial de X invariante por traslaciones derecha y sea $x \in H_\pi \setminus \{0\}$. Si $\pi(Y)(x) = \{0\}$, entonces se verifica que $\pi(Y) = \{0\}$.

Demostración. Consideremos el subespacio vectorial M de H_π definido como

$$M = \{y \in H_\pi \colon \; \pi(f)(y) = 0 \text{ para cualquier } f \in Y\}.$$

M es no nulo ya que $x \in M$. Veamos que es invariante por π. Sean $y \in M$ y $t \in G$. Para cada $f \in Y$ se tiene que $R_{t^{-1}}(f) \in Y$ y entonces, teniendo en cuenta la afirmación cuarta del Teorema B.3.7,

$$\pi(f)\pi(t)(y) = \pi(R_{t^{-1}}(f))(y) = 0,$$

y M es invariante por π. Al ser π irreducible se sigue que tiene que ser $M = H_\pi$, de donde $\pi(f) = 0$ para cualquier $f \in Y$. □

2.1.7 Lema. *Sea π una representación unitaria e irreducible de un grupo de Moore G. Entonces existe una aplicación lineal, a la que seguiremos llamando π, de $\mathfrak{A}$ en $\mathcal{L}(H_\pi)$ verificando las siguientes propiedades.*

(i) $\pi(T(f)) = \pi(f)\pi(T)$ *para todo* $f \in X$ *y todo* $T \in \mathfrak{A}$.

(ii) $\pi(R_t) = \pi(t)^{-1}$ *para cada* $t \in G$.

(iii) $\pi(ST) = \pi(T)\pi(S)$ *siempre que* $S, T \in \mathfrak{A}$.

Además, si $\pi' \in [\pi]$ y $U \colon H_\pi \to H_{\pi'}$ es un operador de intercambio entre π y π' entonces se verifica que $U\pi(T) = \pi'(T)U$ para cualquier $T \in \mathfrak{A}$.

Demostración. Sea $T \in \mathfrak{A}$ y supongamos que existen Γ y $\Gamma' \in \mathcal{L}(H_\pi)$ verificando que

$$\pi(T(f)) = \pi(f)\Gamma = \pi(f)\Gamma'$$

para cada $f \in L^1(G)$. Para todo $x \in H_\pi$ tenemos que $\pi(f)(\Gamma - \Gamma')(x) = 0$ para cualquier $f \in X$ y el lema anterior nos asegura que $(\Gamma - \Gamma')(x) = 0$ y, por tanto, $\Gamma = \Gamma'$.

Si denotamos $\mathfrak{B}$ al subespacio vectorial de $\mathfrak{A}$ consistente en los $T \in \mathfrak{A}$ para los que existe $\Gamma \in \mathfrak{L}(H_\pi)$ verificando que $\pi(T(f)) = \pi(f)\Gamma$ para cada $f \in X$, se tiene que $R_t \in \mathfrak{B}$ por la afirmación cuarta del citado Teorema B.3.7, y además $\pi(R_t) = \pi(t)^{-1}$ para cada $t \in G$. Por otro lado si $S, T \in \mathfrak{B}$, entonces

$$\pi((ST)(f)) = \pi(S(T(f))) = \pi(T(f))\pi(S) = \pi(f)\pi(T)\pi(S)$$

para cualquier $f \in X$. Entonces $ST \in \mathfrak{B}$ y $\pi(ST) = \pi(T)\pi(S)$. Se sigue que $\mathfrak{B}$ es una subálgebra de $\mathfrak{L}(X)$ que contiene a las traslaciones derecha y se da la igualdad $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

Para comprobar la última afirmación veamos que, si $f \in X$ y $T \in \mathfrak{A}$, se tiene que $U\pi(T(f)) = \pi'(T(f))U = \pi'(f)\pi'(T)U$ y, por otro lado, que $U\pi(T(f)) = U\pi(f)\pi(T) = \pi'(f)U\pi(T)$. Así $\pi'(T)U = U\pi(T)$. $\square$

2.1.8 Lema. *Sea G un grupo de Moore y sean π y π' dos representaciones unitarias, irreducibles y no equivalentes de G. Si $x \in H_\pi \setminus \{0\}$ e $y \in H_{\pi'} \setminus \{0\}$, entonces existe $T \in \mathfrak{A}$ verificando que $\pi(T)(x) = 0$ y $\pi'(T)(y) \neq 0$.*

Demostración. Si definimos $M = \{\pi(T)(x) \colon \; T \in \mathfrak{A}\}$ es claro que $x \in M$, ya que $x = \pi(R_e)(x)$. Veamos que M es invariante por π. Si $t \in G$ y $u \in M$ es de la forma $u = \pi(T)(x)$, para algún $T \in \mathfrak{A}$, se tiene que

$$\pi(t)(u) = \pi(R_{t^{-1}})\pi(T)(x) = \pi(TR_{t^{-1}})(x) \in M$$

y M es invariante por π como habíamos anunciado. Al ser π irreducible, se tiene que $M = H_\pi$.

Para la demostración del lema propiamente dicha vamos a suponer que no se cumple para intentar obtener una contradicción. Si el resultado es falso entonces podemos definir un operador lineal y continuo $\Gamma : H_\pi \to H_{\pi'}$ mediante la expresión $\Gamma(\pi(T)(x)) = \pi'(T)(y)$. El operador Γ no es constantemente nulo ya que

$$\Gamma(x) = \Gamma(\pi(R_e)(x)) = \pi'(R_e)(y) = y \neq 0.$$

Veamos que Γ realmente es un operador de intercambio entre π y π'. Si $t \in G$, se tiene que, para $T \in \mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned}\Gamma\pi(t)(\pi(T)(x)) &= \Gamma\pi(R_{t^{-1}})(\pi(T)(x)) = \Gamma(\pi(TR_{t^{-1}})(x)) \\ &= \pi'(TR_{t^{-1}})(y) = \pi'(R_{t^{-1}})\pi'(T)(y) = \pi'(t)\Gamma(\pi(T)(x))\end{aligned}$$

y entonces $\Gamma\pi(t) = \pi'(t)\Gamma$. El Lema de Schur (Lema B.3.4) nos garantiza que $\Gamma = 0$, obteniéndose de esta forma la contradicción deseada. $\square$

Este lema que acabamos de demostrar no es más que parte de la demostración del siguiente (ya avisamos que estaban encadenados). Si lo hemos desgajado es para que la exposición resulte más clara.

2.1.9 Lema. *Sea G un grupo de Moore y sea Σ un conjunto infinito de representaciones unitarias, irreducibles de G y no equivalentes entre sí. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Existen sucesiones (π_n) de elementos de Σ, (T_n) en $\mathfrak{A}$ y (x_n) con $x_n \in H_{\pi_n}$ verificando que*

$$\pi_n(T_n)\cdots\pi_n(T_1)(x_n) \neq 0 \text{ y}$$

$$\pi_n(T_{n+1})\cdots\pi_n(T_1)(x_n) = 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Existe un elemento $T \in \mathfrak{A}$ verificando que el conjunto $\{\pi \in \Sigma : \ \pi(T) \neq 0\}$ es no vacío y finito.*

Demostración. Supongamos que no se verifica la segunda afirmación y vamos a elegir las sucesiones de la primera afirmación mediante un proceso recurrente. Como primer paso elegimos $\pi_1 \in \Sigma$ cualquiera, $T_1 = R_e$, y $x_1 \in H_{\pi_1} \setminus \{0\}$. Evidentemente se tiene que

$$\pi_1(T_1)(x_1) = x_1 \neq 0.$$

Supongamos que tenemos elegidos $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \Sigma$, $T_1, \ldots, T_n \in \mathfrak{A}$, y $x_1 \in H_{\pi_1}, \ldots, x_n \in H_{\pi_n}$ de forma que

$$\pi_k(T_k) \cdots \pi_k(T_1)(x_k) \neq 0 \text{ si } k \leq n \text{ y}$$

$$\pi_k(T_{k+1}) \cdots \pi_k(T_1)(x_k) = 0 \text{ si } k < n.$$

Consideremos el elemento $T_1 \cdots T_n \in \mathfrak{A}$. Como $\pi_n(T_1 \cdots T_n) = \pi_n(T_n) \cdots \pi_n(T_1) \neq 0$, teniendo en cuenta que hemos supuesto que la segunda afirmación no se verifica, se tiene que el conjunto $\{\pi \in \Sigma : \pi(T_1 \cdots T_n) \neq 0\}$ es infinito. Elegimos ahora $\pi_{n+1} \in \Sigma \setminus \{\pi_n\}$ y $x_{n+1} \in H_{\pi_{n+1}}$ de forma que $\pi_{n+1}(T_1 \cdots T_n)(x_{n+1}) \neq 0$. El lema 2.1.8 nos proporciona un elemento $T_{n+1} \in \mathfrak{A}$ para el que se verifica que

$$\pi_n(T_{n+1})\Big(\pi_n(T_n) \cdots \pi_n(T_1)(x_n)\Big) = 0$$

y

$$\pi_{n+1}(T_{n+1})\Big(\pi_{n+1}(T_n) \cdots \pi_{n+1}(T_1)(x_{n+1})\Big) \neq 0.$$

Las sucesiones (π_n), (T_n) y (x_n) construidas de la forma anterior satisfacen la primera afirmación, como deseábamos. $\square$

Para el siguiente resultado necesitamos observar que si tenemos $T \in \mathfrak{A}$ y dos representaciones unitarias, irreducibles y equivalentes π y π', entonces $\pi(T) = 0$ si, y sólo si, $\pi'(T) = 0$. Este resultado queda garantizado por la afirmación final del Lema 2.1.7. Además esto hace que tenga sentido el conjunto $\{[\pi] \in \Delta : \pi(T) \neq 0\}$ sobre cuyas propiedades versa el siguiente resultado en el que, ya por fin, se aplica el *gliding hump argument*.

2.1.10 Lema. *Sea G un grupo de Moore. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones.*

(i) *El conjunto Δ es finito.*

(ii) *Existe un $T \in \mathfrak{A}$ de forma que el conjunto $\{[\pi] \in \Delta \colon \ \pi(T) \neq 0\}$ es no vacío y finito.*

Demostración. Si suponemos que no se verifica la primera afirmación entonces el conjunto Δ debe ser infinito y puede jugar el papel que ha jugado Σ en el lema anterior y debe verificar una de las dos afirmaciones que allí se hacen. Como quiera que la segunda afirmación del Lema 2.1.9 es justamente la segunda afirmación que aquí se hace, sólo nos faltaría demostrar que no es posible, para Δ infinito, verificar la primera afirmación del Lema 2.1.9. Supongamos que la verifica para llegar a una contradicción. Si la verificase entonces existirían sucesiones (π_n), (T_n) y (x_n) como en la primera afirmación del Lema 2.1.9. Para cada natural n definiremos el operador lineal y continuo S_n de $(X, \|\cdot\|)$ en H_{π_n} mediante la expresión $S_n(f) = \pi_n(f)(x_n)$ para $f \in X$. También para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que el operador $T_n : (X, |\cdot|) \longrightarrow (X, |\cdot|)$ es continuo y la segunda afirmación del Lema 2.1.9 nos aseguraría que, para $m > n$, se cumple que la composición

$$S_n i_X T_1 \cdots T_m = 0$$

y es, por tanto, trivialmente continua. Esto es claro ya que, si $f \in X$ y $m > n$, entonces se tiene que

$$(S_n i_X T_1 \cdots T_m)(f) = \pi_n((T_1 \cdots T_m)(f))(x_n)$$

$$= \pi_n(f)(\pi_n(T_m) \cdots \pi_n(T_1)(x_n)) = 0.$$

El *gliding hump argument* (Lema A.1.5) nos proporciona un natural n para el que se verifica que la composición $S_n i_X T_1 \cdots T_n$ de $(X, |\cdot|)$ en H_{π_n} es continua. Pero entonces el Lema A.1.3 nos da que

$$\pi_n(\mathfrak{S})\left(\pi_n(T_n)\cdots\pi_n(T_1)(x_n)\right)=0.$$

Teniendo en cuenta que $\mathfrak{S}$ es invariante por traslaciones (Lema 2.1.4), y además $\pi_n(T_n)\cdots\pi_n(T_1)x_n \neq 0$. El Lema 2.1.6 nos da que $\pi_n(\mathfrak{S}) = 0$, que contradice la pertenencia de π_n a Δ. □

2.2. Grupos compactos

Durante esta sección G será siempre un grupo compacto y, como hemos avisado antes $X = L^p(G)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$ o $X = C(G)$. La norma $\|\cdot\|$ será $\|\cdot\|_p$ o $\|\cdot\|_\infty$ respectivamente.

En el lema anterior está una parte importante de la demostración del resultado que pretendemos establecer en esta sección. Quizá sea el momento más idóneo para aclarar qué tipo de resultado pretendemos conseguir. Nuestro objetivo es dar una versión no abeliana, lo más general posible, del Teorema 1.3.12 del capítulo anterior. Sin embargo los intentos de llevar esta labor mediante la simple sustitución de los caracteres por representaciones unitarias e irreducibles han sido infructuosos. El hecho de que el método de demostración no pueda ser trasladado automáticamente nos hace tener que utilizar otras herramientas y quizá lo más novedoso es la parte que viene ahora. Si hasta ahora hemos trabajado con funciones con valores en $\mathbb{C}$, es el momento de cambiar totalmente de punto de vista y movernos en un ambiente nuevo. El hecho de que, si estamos trabajando con grupos de Moore, y, por tanto, con representaciones unitarias e irreducibles de dichos grupos trabajemos con operadores unitarios en un espacio de Hilbert de dimensión finita y que, fijada una base en dicho espacio, la representación venga dada por una matriz unitaria hace que el ambiente matricial aparezca de forma natural en nuestro trabajo. La necesidad de compatibilizar estas matrices que aparecen cuando trabajamos con representaciones con nuestro ambiente natural de funciones con valores en $\mathbb{C}$ nos obliga, en cierto modo, a utilizar funciones con valores matriciales.

Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(X)$ denotará el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con entradas de X. En nuestro ambiente de grupos compactos se tiene que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pueda ser interpretado como las matrices cuadradas de orden n cuyas entradas son funciones constantes y, por tanto, pertenecen a $\mathcal{M}_n(X)$. Si $F = (f_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(L^1(G))$ vamos a definir su integral

$$\int_G F(t)dt = \left(\int_G f_{i,j}(t)dt\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

La invarianza de la integración por traslaciones izquierda hace que, si $F \in \mathcal{M}_n(L^1(G))$, se tenga que

$$\int_G F(st)dt = \int_G F(t)dt, \tag{2.1}$$

para cualquier $s \in G$.

Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador lineal también se puede dar una versión matricial de dicho operador en la forma intuitiva; $T : \mathcal{M}_n(X) \longrightarrow \mathcal{M}_n(X)$ vendrá definido por $T(f_{i,j}) = (T(f_{i,j}))$ para $(f_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(X)$.

En el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(X)$ se pueden definir varias normas que lo doten de estructura de espacio de Banach. Nosotros usaremos la siguiente norma: para $(f_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(X)$, definimos

$$\|(f_{i,j})\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \|f_{i,j}\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual de X. Además, también definimos otra norma en $\mathcal{M}_n(X)$, cuando consideramos en X la norma $|\cdot|$,

$$|(f_{i,j})| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |f_{i,j}|.$$

El siguiente resultado muestra el comportamiento algebraico de estas normas recién definidas.

2.2.1 Lema. *Sean* $F \in \mathcal{M}_n(X), H \in \mathcal{M}_n(C(G)), y A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

(i) $HF, FH \in \mathcal{M}_n(X)$, $\|HF\| \leq \|H\|_\infty \|F\|$, *y* $\|FH\| \leq \|H\|_\infty \|F\|$.

(ii) $|AF| \leq \|A\||F|$ *y* $|FA| \leq \|A\||F|$.

Demostración. En principio démonos cuenta que si $F \in \mathcal{M}_n(X)$ y $H \in \mathcal{M}_n(C(G))$ entonces tanto HF como FH son elementos de $\mathcal{M}_n(X)$.

Además, si $F = (f_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(X)$ y $H = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(C(G))$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|HF\| &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \| \sum_{k=1}^{n} h_{i,k} f_{k,j} \| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|h_{i,k} f_{k,j}\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|h_{i,k}\|_\infty \|f_{k,j}\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|h_{i,k}\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \|f_{k,j}\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|h_{i,k}\|_\infty \|F\| = \|H\|_\infty \|F\|.
\end{aligned}$$

De igual forma se demuestra que $\|FH\| \leq \|H\|_\infty \|F\|$. Los resultados sobre las estimaciones de las normas de AF y FA se hacen de forma similar. Por ejemplo, si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $F = (f_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(X)$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
|AF| &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} f_{k,j} | = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} f_{k,j}| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||f_{k,j}| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |f_{k,j}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||F| = \|A\||F|.
\end{aligned}$$

□

Para continuar trabajando en nuestro problema necesitamos restringir nuestro ámbito de los grupos compactos a cierta categoría.

2.2.2 Definición. Sea G un grupo compacto. Denotaremos por $L^2_0(G)$ al subespacio de $L^2(G)$ definido por

$$L^2_0(G) = \left\{ f \in L^2(G) \colon \int_G f(t)dt = 0 \right\}.$$

Se dice que la representación trivial de G en $L^2_0(G)$ está contenida débilmente en la representación regular izquierda de G en $L^2_0(G)$ si existe una red $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ en $L^2_0(G)$ con $\|f_\lambda\|_2 = 1$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \|f_\lambda - L_t(f_\lambda)\|_2 = 0$$

para cualquier $t \in G$.

Esta propiedad del grupo G en algunos textos (por ejemplo en [31]) recibe el nombre de propiedad de contención débil de media cero. Nuestro interés radica en los grupos compactos G cuya representación trivial en $L^2_0(G)$ no está contenida débilmente en la representación regular izquierda de G en $L^2_0(G)$, es decir los grupos que no tienen la propiedad de contención débil de media cero. La razón de nuestro interés en estos grupos será fácilmente comprensible en breve. Al tratar de adaptar la demostración del Teorema 1.3.12 al ambiente no abeliano chocamos con que una de las propiedades de los grupos con los que se trataba allí es que todo elemento de $L^p(G)$ con $1 < p < \infty$ de media cero tenía una descomposición dada por el Teorema 1.3.11. Cuando el grupo G es compacto, pero no tenemos garantizada la conmutatividad, una descomposición similar es posible si el grupo no tiene la propiedad de contención débil de media cero. Esto supone una restricción importante en cuanto a la gama de grupos con los que podemos trabajar pero, sin embargo, la variedad de espacios de funciones sobre esos grupos de los que podemos obtener información se amplía ligeramente. Aunque la propiedad de que, en un grupo compacto G, su representación trivial en $L_0^2(G)$ no esté contenida débilmente en la representación regular izquierda de G en $L_0^2(G)$, puede parecer una propiedad extraña, afortunadamente para la no inanidad del resultado que obtendremos, la gama de ejemplos de grupos con la anterior propiedad no es vacío. Veamos algunos de ellos.

2.2.3 Ejemplos.

- Drinfeld en [7] y Margulis en [21] demuestran que, para $n \geq 3$, el grupo $G = SO(n)$ es un grupo compacto en el que la representación trivial de G en $L_0^2(G)$ no está débilmente contenida en la representación regular izquierda de G en $L_0^2(G)$. Para más información véase [31] y [33].

- Por otro lado, C. Chou, A. T. M. Lau y J. Rosenblatt demuestran en [5] que en todo grupo de Lie simple, conexo y compacto G que no sea localmente isomorfo a $SO(3)$ ni a $SO(4)$ la representación trivial de G en $L_0^2(G)$ no está débilmente contenida en la representación regular izquierda de G en $L_0^2(G)$. Esto, junto con los ejemplos del apartado anterior, nos da que todo grupo de Lie simple, conexo y compacto G no verifica que su representación trivial en $L_0^2(G)$ está débilmente contenida en la representación regular izquierda de G en $L_0^2(G)$.

- Otros grupos compactos G cuya representación trivial en $L_0^2(G)$ no está débilmente contenida en la representación regular izquierda de G en $L_0^2(G)$ son los grupos $G = \prod_{p \in \mathbb{P}} SL(n, \mathbb{Z}_p)$ para $n \geq 3$, donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números primos (Véase [28]; también en [27] hay ejemplos de tales grupos compactos).

2.2.4 Lema. *Sea G un grupo compacto y supongamos que la representación trivial de G en $L_0^2(G)$ no está contenida débilmente en la representación regular izquierda* *de G en $L^2_0(G)$. Sea $X = L^p(G)$ con $1 < p \leq \infty$ o $X = C(G)$. Entonces se verifica la siguiente condición.*

Existen un natural N, un subconjunto $K \subset G$ y una constante C_1 verificando que cada $f \in X$ tiene una descomposición de la forma

$$f = a + \sum_{k=1}^{N} (f_k - L_{t_k}(f_k)), \tag{2.2}$$

donde $a \in \mathbb{C}$, $t_k \in K$, $f_k \in X$ y $\|f_k\| \leq C_1\|f\|$ para $k = 1, \dots, N$.

Demostración. A lo largo de la demostración X_0 es el subespacio vectorial cerrado de X dado por $X_0 = \{f \in X : \int_G f(t)dt = 0\}$.

La primera observación que hay que hacer es notar que existe un natural N y $t_1, \dots, t_N \in G$ de forma que la aplicación Φ de X_0^N en X_0 definida por

$$\Phi(f_1, \dots, f_N) = \sum_{k=1}^{N} (f_k - L_{t_k}(f_k))$$

para $f_1, \dots, f_N \in X_0$ es sobreyectiva. Esta afirmación resulta ser cierta para $X = L^p(G)$ con $1 < p < \infty$ según está establecido en [31, Proposition], mientras que para $X = L^\infty(G)$ y para $X = C(G)$ la veracidad de la afirmación queda establecida en [35].

El teorema de la aplicación abierta nos garantiza que Φ es abierta y por tanto existe una constante C_1 de forma que cada función f en X_0 puede ser escrita como $\Phi(f_1, \dots, f_N)$ para convenientes $f_1, \dots, f_N \in X_0$ con $\|f_k\| \leq C_1\|f\|$ para $k = 1, \dots, N$. Estos resultados nos garantizan la descomposición deseada de f. Por último, si $f \in X$ basta con aplicar el razonamiento anterior a $f - \int_G f(t)dt$ que está en X_0 y obtenemos lo deseado sin más que considerar $a = \int_G f(t)dt$ y $K = \{t_1, \dots, t_N\}$. $\square$

Obsérvese que en la descomposición anterior el conjunto K es finito y así lo podríamos haber exigido. Sin embargo hemos exigido la existencia de dicho conjunto K, sin especificar su naturaleza para poder aplicar la anterior descomposición en un ambiente más general que el de grupos G en los que su representación trivial en $L^2_0(G)$ no está contenida débilmente en la representación regular izquierda de G en $L^2_0(G)$.

La descomposición (2.2) tiene una importancia fundamental en lo que sigue. Es la análoga a la dada por [4] para grupos abelianos. Sin embargo, a nosotros no nos basta esta descomposición sino que necesitamos una versión con valores matriciales. Esta versión, que vamos a presentar a continuación, involucra también a las representaciones del grupo. Recordemos que si π es una representación unitaria de G de dimensión n y fijamos una base ortonormal en H_π, entonces π viene representada por una matriz (unitaria) $\pi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}_n(C(G))$.

2.2.5 Lema. *Sean G un grupo compacto y $X = L^p(G)$, con $1 < p \leq \infty$, o $X = C(G)$. Supongamos que X verifica la condición (2.2) para conveniente natural N, subconjunto $K \subset G$ y constante C_1. Sea π una representación unitaria e irreducible de G y fijemos una base ortonormal en H_π. Entonces existe un natural M y una constante C_2 de forma que cada $F \in \mathcal{M}_n(X)$ tiene una descomposición de la forma*

$$F = A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1} + \sum_{k=1}^{M} \Big(F_k \pi_{\mathcal{M}}(s_k) - L_{s_k}(F_k) \Big),$$

con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $s_k \in K$, $F_k \in \mathcal{M}_n(X)$, $\|A\| \leq C_2\|F\|$ y $\|F_k\| \leq C_2\|F\|$ para $k = 1,\ldots,M$.

Demostración. El primer paso de la demostración consiste en obtener, para $F \in \mathcal{M}_n(X)$, una descomposición de la forma

$$F = A + \sum_{k=1}^{M} (H_k - L_{s_k}(H_k))$$

con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M = Nn^2$, $s_k \in K$, $H_k \in \mathcal{M}_n(X)$ y $\|H_k\| \leq C_1\|F\|$ para $k = 1,\ldots,M$. Si $F = (f_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(X)$, para cada $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, se tiene que $f_{i,j}$ (por el lema anterior) puede ser escrito de la forma

$$f_{i,j} = a_{i,j} + \sum_{l=1}^{N} \Big(f_{i,j,l} - L_{t_{i,j,l}}(f_{i,j,l}) \Big)$$

con $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, $f_{i,j,l} \in X$, $t_{i,j,l} \in K$ y $\|f_{i,j,l}\| \le C_1 \|f_{i,j}\|$. Sea A la matriz $(a_{i,j})$ y sea $H_{i,j,l}$ la matriz que tiene al elemento $f_{i,j,l}$ en la entrada (i,j) y ceros en las otras entradas. Se tiene que $\|H_{i,j,l}\| = \|f_{i,j,l}\| \le C_1 \|f_{i,j}\| \le C_1 \|F\|$ y también se tiene que

$$F = A + \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (H_{i,j,l} - L_{t_{i,j,l}}(H_{i,j,l})).$$

Si $M = Nn^2$ tenemos la descomposición deseada al principio de esta demostración.

Sea $F \in \mathcal{M}_n(X)$. Por el Lema 2.2.1 $F\pi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}_n(X)$. La descomposición obtenida antes la podemos aplicar a $F\pi_{\mathcal{M}}$ para obtener

$$F\pi_{\mathcal{M}} = A + \sum_{k=1}^{M} (H_k - L_{s_k}(H_k))$$

con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $s_k \in K$, $H_k \in \mathcal{M}_n(X)$ y $\|H_k\| \le C_1 \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty \|F\|$ para $k = 1, \dots, M$. Además el Lema 2.2.1 nos da la siguiente acotación para la norma de la matriz A.

$$\begin{aligned}
\|A\| &\le \|F\pi_{\mathcal{M}}\| + \sum_{k=1}^{M} \Big[\|H_k\| + \|L_{s_k}(H_k)\| \Big] \\
&\le \|F\| \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty + \sum_{k=1}^{M} 2\|H_k\| \le \|F\| \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty + \sum_{k=1}^{M} 2C_1 \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty \|F\| \\
&= (2C_1 M \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty + \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty) \|F\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$F = A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1} + \sum_{k=1}^{M} \Big(H_k {\pi_{\mathcal{M}}}^{-1} - L_{s_k}(H_k) {\pi_{\mathcal{M}}}^{-1} \Big).$$

Si definimos ahora, para cada $k \in \{1, \dots, M\}$, $F_k = H_k {\pi_{\mathcal{M}}}^{-1} \pi_{\mathcal{M}}(s_k)^{-1}$, el mismo Lema 2.2.1 nos proporciona que

$$\|F_k\| \le \|H_k\| \|{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}\|_\infty^2 \le C_1 \|{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}\|_\infty^2 \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty \|F\|$$

para cada $k = 1,\dots,M$. Finalmente, observemos que, para $k = 1,\dots,M$ y $t \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned}L_{s_k}(F_k)(t) = F_k({s_k}^{-1}t) &= H_k({s_k}^{-1}t){\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}({s_k}^{-1}t)\pi_{\mathcal{M}}(s_k)^{-1} \\ &= H_k({s_k}^{-1}t)\pi_{\mathcal{M}}(t^{-1}s_k)\pi_{\mathcal{M}}(s_k)^{-1} = L_{s_k}(H_k)(t){\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}(t)\end{aligned}$$

y se obtiene la deseada descomposición

$$F = A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1} + \sum_{k=1}^{M}\Big(F_k\pi_{\mathcal{M}}(s_k) - L_{s_k}(F_k)\Big).$$

□

En el siguiente resultado se encuentra concentrado todo el trabajo hecho en los lemas precedentes. Aunque el resultado es eminentemente técnico, la importancia de él se verá enseguida.

2.2.6 Lema. *Sea G un grupo compacto y sea $X = L^p(G)$, con $1 < p \leq \infty$, o $X = C(G)$. Supongamos que X verifica la condición (2.2) para convenientes natural N, subconjunto $K \subset G$ y constante C_1. Supongamos también que existe una constante D_2 verificando que*

$$|L_t(f)| \leq D_2|f|$$

para todo $f \in X$ y $t \in K$. Si $T \in \mathfrak{A}$ cumple que $\dim T(\mathfrak{S}) < \infty$, entonces $T(\mathfrak{S}) = \{0\}$.

Demostración. En primer lugar fijaremos π una representación irreducible y unitaria de G de dimensión n y una base ortonormal de H_π.

Denotaremos por $\mathfrak{X}$ al espacio vectorial $\mathcal{M}_n(X)$ cuando en él consideramos la norma $\|\cdot\|$ y denotaremos $\mathfrak{Y}$ al mismo espacio vectorial $\mathcal{M}_n(X)$ pero equipado con la norma $|\cdot|$. Ambos son espacios de Banach. Durante toda esta sección está presente en el ambiente que T es un operador lineal y continuo de $(X,|\cdot|)$ en sí mismo. A su norma la llamaremos $\|T\|$. Situándonos en el ambiente matricial T se transforma en un operador lineal y continuo de $\mathfrak{Y}$ en sí mismo manteniendo la misma norma. Seguiremos llamando T a este operador matricial.

Consideremos ahora

$$\mathfrak{R} = \left\{ T(F) \in \mathfrak{Y} : \; F \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{S}) \text{ y } \int_G T(F)(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt = 0 \right\}.$$

Por hipótesis $\dim T(\mathfrak{S}) < \infty$. Esta característica sigue manteniéndose cuando consideramos T operando en $\mathfrak{Y}$ y por tanto $\dim T(\mathcal{M}_n(\mathfrak{S})) < \infty$. Por tanto, se tiene que $\dim \mathfrak{R} < \infty$. Llamaremos $\mathfrak{Z}$ al espacio cociente $\mathfrak{Y}/\mathfrak{R}$, $|\cdot|_{\mathfrak{Z}}$ a la correspondiente norma cociente en $\mathfrak{Z}$ y Q la aplicación cociente de $\mathfrak{Y}$ sobre $\mathfrak{Z}$.

Sea Φ la aplicación identidad de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{Y}$ y sea D_1 la constante dada por el Lema 2.1.5. Teniendo en cuenta el Lema 2.1.4(ii), es claro que $\mathfrak{S}(\Phi) = \mathcal{M}_n(\mathfrak{S})$.

Para cada $s \in K$ vamos a definir $\Psi_{\pi,s} : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}$ mediante la expresión

$$\Psi_{\pi,s}(F) = F\pi_{\mathcal{M}}(s) - L_s(F)$$

para cada $F \in \mathfrak{Y}$. El operador $\Psi_{\pi,s}$ satisface ciertas propiedades que conviene codificar.

i. $\Psi_{\pi,s}$ es continuo y $\|\Psi_{\pi,s}\| \leq D_2 + \|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty$. Esta afirmación es fácil de comprobar. En efecto, si $F \in \mathcal{M}_n(X)$, tenemos que

$$|\Psi_{\pi,s}(F)| \leq |F\pi_{\mathcal{M}}(s)| + |L_s(F)| \leq |F|\|\pi_{\mathcal{M}}(s)\| + D_2|F| \leq (\|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty + D_2)|F|,$$

de donde se obtiene la continuidad de $\Psi_{\pi,s}$ y la cota para la norma.

ii. $\int_G \Psi_{\pi,s}(F)(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt = 0$ para cada $F \in \mathfrak{Y}$. Esta afirmación se sigue de la invarianza de la integral por traslaciones (teorema B.1.15). Veámoslo.

$$\begin{aligned}
\int_G \Psi_{\pi,s}(F)(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt &= \int_G \Big(F(t)\pi_{\mathcal{M}}(s) - L_s(F)(t) \Big)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt \\
&= \int_G F(t)\pi_{\mathcal{M}}(s)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt - \int_G L_s(F)(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt \\
&= \int_G F(t)\pi_{\mathcal{M}}(s)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt - \int_G F(s^{-1}t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt \\
&= \int_G F(t)\pi_{\mathcal{M}}(s)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt - \int_G F(t)\pi_{\mathcal{M}}(st)dt = 0.
\end{aligned}$$

iii. Si $T \in \mathfrak{A}$, se tiene que $T\Psi_{\pi,s} = \Psi_{\pi,s}T$. Esta afirmación proviene del hecho de que, si $s,t \in G$, entonces $L_sR_t = R_tL_s$ y esta igualdad no es más que la propia manifestación de la asociatividad de la operación en un grupo y así se tiene que

$$\begin{aligned}
T\Psi_{\pi,s}(F) &= T(F\pi_{\mathcal{M}}(s) - L_s(F)) \\
&= T(F)\pi_{\mathcal{M}}(s) - T(L_s(F)) \\
&= T(F)\pi_{\mathcal{M}}(s) - L_s(T(F)) \\
&= \Psi_{\pi,s}T(F),
\end{aligned}$$

para $F \in \mathfrak{Y}$.

iv. $\Psi_{\pi,s}(\mathfrak{S}(\Phi)) \subset \mathfrak{S}(\Phi)$. Esta última afirmación se obtiene de la invarianza por traslaciones de $\mathfrak{S}$ (lemma 2.1.4(i)) así como del hecho de que $\mathfrak{S}(\Phi) = \mathcal{M}_n(\mathfrak{S})$.

Según la afirmación (iv) anterior tenemos que $(T\Psi_{\pi,s})(\mathfrak{S}(\Phi)) \subset T(\mathfrak{S}(\Phi))$. Así, si $F \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}(\Phi)$ se tiene que

$$\int_G T\Psi_{\pi,s}(F)(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt = \int_G \Psi_{\pi,s}(T(F))(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt = 0$$

según se obtiene de la afirmación (ii). Por tanto obtenemos que $T\Psi_{\pi,s}(\mathfrak{S}(\Phi)) \subset \mathfrak{R}$ y la composición

$$QT\Psi_{\pi,s}\Phi$$

es continua para cualquier $s \in K$.

Ahora entra en funcionamiento el Lema 2.2.5. Para cada $F \in \mathfrak{X}$ tenemos la descomposición

$$F = A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1} + \sum_{k=1}^{M} \Big(F_k \pi_{\mathcal{M}}(s_k) - L_{s_k}(F_k) \Big),$$

para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $\|A\| \leq C_2 \|F\|$, $s_k \in K$ y $F_k \in \mathcal{M}_n(X)$ con $\|F_k\| \leq C_2 \|F\|$ para $k = 1, \ldots, M$. Entonces

$$QT\Phi(F) = QT(A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}) + \sum_{k=1}^{M} QT\Psi_{\pi,s_k}\Phi(F_k)$$

y, tomando normas, obtenemos

$$|QT\Phi(F)|_3 \leq |QT(A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1})|_3 + \sum_{k=1}^{M} |QT\Psi_{\pi,s_k}\Phi(F_k)|_3. \tag{2.3}$$

Por otro lado tenemos la acotación

$$\begin{aligned} |QT(A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1})|_3 &\leq |T(A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1})| \leq \|T\| |A{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}| \\ &\leq \|T\| \|A\| |{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}| \leq C_2 \|T\| \|F\| |{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Según el Lema 2.1.5 y la afirmación (i) anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} |QT\Psi_{\pi,s_k}\Phi(F_k)|_3 &= |(QT\Psi_{\pi,s_k})\Phi(F_k)|_3 \leq D_1 \|QT\Psi_{\pi,s_k}\| \|F_k\| \\ &\leq D_1 \|T\| (\|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty + D_2) \|F_k\| \leq D_1 \|T\| (\|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty + D_2) C_2 \|F\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

De las expresiones 2.3, 2.4 y 2.5 se obtiene finalmente que

$$|QT\Phi(F)|_3 \leq \Big(\|T\| C_2 |{\pi_{\mathcal{M}}}^{-1}| + M D_1 \|T\| (\|\pi_{\mathcal{M}}\|_\infty + D_2) C_2 \Big) \|F\|$$

para cada $F \in \mathfrak{X}$ lo que implica que el operador $QT\Phi$ es continuo y, por tanto, $T(\mathfrak{S}(\Phi)) \subset \mathfrak{R}$.

Veamos finalmente que $T(\mathfrak{S}) = \{0\}$. Sea $f \in \mathfrak{S}$, y consideremos fI donde por I entenderemos la matriz identidad de orden n. Se tiene que $fI \in \mathfrak{S}(\Phi)$ y, por tanto, según lo anterior, se tiene que

$$T(fI) \in \mathfrak{R}.$$

Pero esto significa que $\int_G T(fI)(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt = 0$. Pero justamente $\int_G T(fI)(t)\pi_{\mathcal{M}}(t)dt$ es la matriz que representa, en la base de H_π fijada al principio de esta demostración, al operador $\pi(T(f))$. De esta forma se obtiene que $\pi(T(f)) = 0$. Como π es una representación unitaria, irreducible y arbitraria de G, el Lema 2.1.4(iii) nos garantiza que $T(f) = 0$, que era lo que pretendíamos demostrar. □

Estamos ya preparados para el enunciado y la demostración del principal resultado de esta sección.

2.2.7 Teorema. *Sea G un grupo compacto verificando que la representación trivial de G en $L_0^2(G)$ no está débilmente contenida en la representación regular izquierda de G en $L_0^2(G)$ y sea X bien $L^p(G)$ para algún $1 < p \leq \infty$ o bien $C(G)$. Entonces cualquier norma completa $|\cdot|$ en X que sea invariante por traslaciones es equivalente a $\|\cdot\|$, la norma usual de X, es decir a $\|\cdot\|_p$ para $X = L^p(G)$, o a $\|\cdot\|_\infty$ cuando $X = C(G)$.*

Demostración. Supongamos que no se verifica el teorema para llegar a una contradicción. Con la notación arrastrada en esta sección tenemos que el hecho de que la norma $|\cdot|$ no sea equivalente a $\|\cdot\|$ es lo mismo que decir que el conjunto

$$\Delta = \left\{ [\pi] \in \widehat{G} : \ \pi(\mathfrak{S}) \neq \{0\} \right\}$$

sea no vacío como nos asegura el Lema 2.1.4.

El Lema 2.1.10 nos garantiza que, o bien Δ es finito, o bien existe $T \in \mathfrak{A}$ verificando que el conjunto $\{[\pi] \in \Delta : \ \pi(T) \neq 0\}$ es no vacío y finito. Pero si Δ es finito, tomando como $T = R_e$, se tiene que $\{[\pi] \in \Delta :\ \pi(T) \neq 0\}$ es no vacío y finito también. Podemos unificar ambos casos y asumir que existe un $T \in \mathfrak{A}$ con

$$\Sigma = \{[\pi] \in \Delta :\ \pi(T) \neq 0\}$$

no vacío y finito.

Veamos ahora que $\dim T(\mathfrak{S}) < \infty$. Si numeramos $\Sigma = \{[\pi_1], \ldots, [\pi_n]\}$ y nos tomamos $f \in \mathfrak{S}$ de forma que $\pi_k(T(f)) = 0$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces se tiene que $\pi(T(f)) = 0$ si $[\pi] \in \Sigma$, pero si $[\pi] \in \widehat{G} \setminus \Delta$, se tiene que $\pi(f) = 0$ y entonces $\pi(T(f)) = \pi(f)\pi(T) = 0$. Finalmente, si $[\pi] \in \Delta \setminus \Sigma$, se tiene que $\pi(T) = 0$ y, por tanto, $\pi(T(f)) = 0$. Lo que hemos obtenido es que la aplicación $g \mapsto (\pi_1(g), \ldots, \pi_n(g))$ de $T(\mathfrak{S})$ en $\mathcal{L}(H_{\pi_1}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(H_{\pi_n})$ es inyectiva. Como quiera que $\dim \mathcal{L}(H_{\pi_1}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(H_{\pi_n}) < \infty$ se obtiene que $\dim T(\mathfrak{S}) < \infty$, como esperábamos.

Sean ahora $t_1, \ldots, t_N \in G$ los dados por el Lema 2.2.4 y sea $D_2 = \sup\{|L_{t_i}(f)| : f \in X,\ |f| = 1,\ i = 1, \ldots, N\}$. Aplicando el Lema 2.2.6 obtenemos que $T(\mathfrak{S}) = 0$.

Finalmente, sea $[\pi] \in \Delta$ con $\pi(T) \neq 0$. Entonces $\pi(\mathfrak{S})\pi(T) = \pi(T(\mathfrak{S})) = 0$ y el Lemma 2.1.6 nos da que $\pi(\mathfrak{S}) = 0$, que contradice la elección de π. $\square$

Dentro de la gama de ejemplos dados en 2.2.3, a los que se les puede aplicar el anterior teorema quizá los más interesantes sean los grupos especiales ortogonales $SO(n)$.

- Para $n = 1$ el grupo $SO(1) = \{1\}$ y, por tanto, los espacios $L^p(S0(1))$ para $1 \leq p \leq \infty$ y $C(SO(1))$ son de dimensión finita y tienen, obviamente, unicidad de la norma completa que hace continuas las traslaciones.
- Para $n = 2$ se tiene que $SO(2) = \mathbb{T}$. En este caso, para $1 < p < \infty$ se aplica el Teorema 1.3.12 para obtener la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones. Por otra parte [14, Theorem 3.4] nos da la no unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^1(\mathbb{T})$, $L^\infty(\mathbb{T})$ y en $C(\mathbb{T})$.

- El teorema anterior, junto con los comentarios hechos aquí, nos garantiza la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^p(SO(n))$ para $1 < p \leq \infty$ y en $C(SO(n))$ para $n \geq 3$. Para completar el cuadro, nos faltaría conocer cómo se comportan, respecto a la citada unicidad, los espacios $L^1(SO(n))$ cuando $n \geq 3$. Lo veremos al final de esta sección.

Quizá sea el momento de puntualizar un hecho. Cuando G es un grupo compacto en el que la representación trivial de G en $L_0^2(G)$ no está débilmente contenida en la representación regular izquierda de G en $L_0^2(G)$, tenemos la descomposición de una función $f \in L^p(G)$, para $1 < p \leq \infty$, o de $C(G)$ dada en [31] para $f \in L^p(G)$, con $1 < p < \infty$, y en [35] para $f \in L^\infty(G)$ o en $C(G)$, descomposición que ha resultado fundamental para la demostración del Teorema 2.2.7. Pues bien, en los trabajos referenciados lo que se pretendía era la demostración de la continuidad de cualquier funcional lineal, en los espacios citados, invariante por traslaciones. Esta relación entre nuestro problema y la continuidad de los funcionales lineales invariantes por traslaciones es un asunto que ya hemos señalado en caso abeliano. En el caso no abeliano no podía dejar de aparecer esta relación. Más concretamente tenemos el siguiente resultado.

2.2.8 Teorema. *Sea G un grupo compacto y sea $1 < p \leq \infty$. Supongamos que todo funcional lineal invariante por traslaciones izquierda en $L^p(G)$ es un múltiplo de la integral de Haar. Entonces cualquier norma completa $|\cdot|$ en $L^p(G)$ invariante por traslaciones y que haga la aplicación $t \mapsto L_t$ de G en $\mathcal{L}(L^p(G), |\cdot|)$ acotada es equivalente a $\|\cdot\|_p$.*

Demostración. En [30, Theorem 2] se demuestra que si G es un grupo compacto verificando que en $L^p(G)$, para $1 < p \leq \infty$, todo funcional lineal invariante por traslaciones izquierda es un múltiplo de la integral de Haar, entonces existe un natural N, una constante C y un compacto $K \subset G$ de forma que cualquier $f \in L^p(G)$ tiene una representación de la forma

$$f = a + \sum_{k=1}^{N} (f_k - L_{t_k}(f_k)),$$

donde $a \in \mathbb{C}$, los puntos $t_k \in K$ y las funciones $f_k \in L^p(G)$ con $\|f_k\|_p \leq C\|f\|_p$ para $k = 1, \ldots, N$. Por otra parte, la acotación de la aplicación $t \mapsto L_t$ de G en $\mathcal{L}(L^p(G), |\cdot|)$ nos proporciona una constante, a la que llamaremos D_2, para la que se verifica que $|L_t(f)| \leq D_2|f|$ para cualquier $f \in L^p(G)$ y para $t \in G$. Por tanto, estamos bajo la condición (2.2). Esto nos proporciona los instrumentos necesarios para poner en funcionamiento la demostración del teorema anterior y de los lemas en los que se basa esa demostración. □

2.2.9 Notas.

- Démonos cuenta de que si $|\cdot|$ es una norma completa en $L^p(G)$ con G un grupo compacto y $1 < p \leq \infty$, con la propiedad de que todos operadores de traslación izquierda de $(L^p(G), |\cdot|)$ en sí mismo son continuos (es decir, que la norma $|\cdot|$ es invariante por traslaciones izquierda) y que la aplicación que lleva t en $L_t(f)$ de G en $(L^p(G), |\cdot|)$ es continua para cada $f \in L^p(G)$, entonces la aplicación que lleva t en L_t de G en $\mathcal{L}(L^p(G), |\cdot|)$ es acotada. En efecto, la continuidad de la aplicación $t \mapsto L_t(f)$ de G en $(L^p(G), |\cdot|)$ y la compacidad de G implican que la aplicación $t \mapsto L_t(f)$ de G en $(L^p(G), |\cdot|)$ es acotada para cada $f \in L^p(G)$. Finalmente el principio de acotación uniforme nos garantiza que el conjunto $\{L_t : \ t \in G\}$ en $\mathcal{L}(L^p(G), |\cdot|)$ es acotado.

- También de [30, Theorem 2] se obtiene que si $1 < p \leq \infty$ y el grupo G verifica que existe un funcional lineal en $L^p(G)$ invariante por traslaciones izquierda y que no es múltiplo de la integral de Haar, entonces la codimensión del subespacio lineal de $L^p(G)$ generado por $\{f - L_t(f) : \ f \in L^p(G), \ t \in G\}$ no es numerable. Es, por tanto, posible construir un funcional lineal discontinuo ϕ

en $L^p(G)$ que valga cero sobre el subespacio generado por $\{f - L_t(f) : f \in L^p(G),\ t \in G\}$. Pero el hecho de que valga cero en dicho subespacio no es ni más ni menos que sea invariante por traslaciones izquierda.

El anterior comentario ahonda en la relación entre la existencia de funcionales lineales discontinuos invariantes por traslaciones y la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones. El Teorema 1.3.3, como era casi de esperar, tiene una versión no abeliana.

2.2.10 Teorema. *Sea G grupo compacto y sea X, o bien $L^p(G)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$, o bien $C(G)$. Si existe un funcional lineal invariante por traslaciones y discontinuo en X, entonces existe una norma completa $|\cdot|$ en X invariante por traslaciones, que hace que las aplicaciones que llevan $t \mapsto L_t$ y $t \mapsto R_t$ de G en $\mathcal{L}(X, |\cdot|)$ sean acotadas y que no es equivalente a la norma $\|\cdot\|$.*

Demostración. La razón del enunciado del Teorema 1.3.3 no era más que completar la parte abeliana de esta memoria. Sin embargo, a poco que se analice la demostración de aquel teorema, se da uno cuenta que en aquella demostración la hipótesis de conmutatividad sobre el grupo es superficial. Podemos repetir la demostración aunque la comprobación de los detalles no parece necesaria. Si ϕ es el funcional lineal invariante por traslaciones y discontinuo en X, tanto si $\phi(1)$ es igual a 0 como distinto de 0, podemos definir otro funcional ψ que comparta las mismas propiedades que ϕ y que en la función constantemente igual a 1 tome el valor 1.

Al igual que en el Teorema 1.3.3, la aplicación $f \mapsto 2f - \psi(f)1$ es una biyección lineal de X sobre sí mismo y la norma definida como $|f| = \|2f - \psi(f)1\|$ es una norma completa en X que no es equivalente a $\|\cdot\|$. Sean $t, s \in G$. Para cualquier

$f \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} |L_t f| &= \|2L_t(f) - \psi(L_t(f))1\| = \|L_t(2f) - \psi(f)1\| = \|L_t(2f - \psi(f)1)\| \\ &\leq \|L_t\| \|2f - \psi(f)1\| = \|L_t\| |f|, \end{aligned}$$

con lo que se demuestra que $L_t \in \mathcal{L}(X, |\cdot|)$ y que la aplicación $t \mapsto L_t$ de G in $\mathcal{L}(X, |\cdot|)$ está acotada. Exactamente de la misma forma se demuestra que $R_t \in \mathcal{L}(X, |\cdot|)$ para cualquier $t \in G$ y que la aplicación $t \mapsto R_t$ de G en $\mathcal{L}(X, |\cdot|)$ es acotada. □

También hemos de confesar que en [30, Theorem 1] no se exige que el grupo G sea abeliano. Así, de forma similar a como se obtenía el Corolario 1.3.4 del Teorema 1.3.3, se obtiene el siguiente corolario.

2.2.11 Corolario. *Sea G un grupo compacto e infinito. Entonces existe una norma completa $|\cdot|$ en $L^1(G)$ invariante por traslaciones, que hace las aplicaciones $t \mapsto L_t$ y $t \mapsto R_t$ de G en $\mathcal{L}(L^1(G), |\cdot|)$ acotadas y que no es equivalente a $\|\cdot\|_1$.*

Finalmente veamos que este resultado cierra el estudio de la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones para $L^1(SO(n))$ con $n \geq 2$; en este caso el grupo $SO(n)$ es un grupo compacto e infinito y por tanto $L^1(SO(n))$ para $n \geq 2$ no tiene unicidad de la norma completa invariante por traslaciones.

2.2.12 Problema. *Es claro que el problema más fácil (de enunciar) que puede ocurrírsenos en este momento es el estudio de la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^p(G)$ para $1 < p < \infty$, cuando G es un grupo compacto y conexo, por analogía con el resultado obtenido en el caso abeliano. Mientras que allí la compacidad y conexión eran suficientes para dar una descomposición de una función $f \in L^p(G)$ como la dada en el Teorema 1.3.11, que resultaba necesaria para la demostración del resultado, aquí la técnica utilizada por nosotros hace* *que para obtener una descomposición similar, que viene dada por (2.2), se necesiten condiciones más extrañas que la simple conexión, como son las dadas por los enunciados del Teorema 2.2.7 o del Teorema 2.2.8.*

2.3. Grupos no compactos

En esta sección vamos a seguir con nuestro problema pero en el ambiente de grupos de Moore no compactos. Nuestro objetivo es generalizar resultados del capítulo anterior referentes a unicidad de la norma completa en $L^1(G)$ cuando G es no compacto y, ahora, no abeliano. Todo ello siguiendo en el ámbito de los grupos de Moore. Recuérdese que cuando el grupo G es abeliano, es equivalente el hecho de que G sea no compacto al hecho de que el grupo dual $\widehat{G}$ no tenga puntos aislados. En caso no abeliano también existe un resultado similar de dualidad. En [3] L. Bagget demuestra que si G es un grupo localmente compacto y separable entonces G es compacto si, y sólo si, el objeto dual $\widehat{G}$ es discreto. Sin embargo, el hecho de que $\widehat{G}$ no sea un grupo topológico, hace que pueda darse el caso de que $\widehat{G}$ tenga puntos aislados pero G no sea compacto. Por ejemplo, el grupo $SL(2,\mathbb{R})$ es un grupo no compacto pero su objeto dual sí que tiene puntos aislados (Véase [11, Examples 7.6 y Figure 7.3]).

La generalización a grupos de Moore del Corolario 1.2.7 y los resultados adyacentes a él se puede entender entonces en términos de la no compacidad del grupo G o de la no existencia de puntos aislados en $\widehat{G}$. Los resultados que nosotros hemos obtenido van en la segunda dirección. Veamos el principal resultado obtenido en este sentido.

2.3.1 Teorema. *Sea G un grupo de Moore verificando que $\widehat{G}$ no tiene puntos aislados y sea X un subespacio vectorial de $L^1(G)$ invariante por traslaciones. Entonces cualquier norma completa en X invariante por traslaciones es más fuerte que $\|\cdot\|_1$.*

Como consecuencia X tiene, a lo sumo, una norma completa invariante por traslaciones.

Demostración. Sea $i : (X, |\cdot|) \longrightarrow (L^1(G), \|\cdot\|_1)$ el operador de inclusión y supongamos, para llegar a una contradicción, que i no es continuo. Llamaremos, como siempre, $\mathfrak{S}(i)$ al separador del operador i. Entonces se tiene que $\mathfrak{S}(i) \neq \{0\}$. Definamos

$$\Sigma = \left\{ [\pi] \in \widehat{G} : \ \pi(\mathfrak{S}(i)) \neq \{0\} \right\}.$$

Se tiene entonces que Σ no es vacío, pero Σ es un conjunto abierto en $\widehat{G}$. Si Σ es finito, al ser la topología de Fell en $\widehat{G}$ T_1 por ser G Moore ([25, Theorem 12.5.6]), si sigue que $\widehat{G}$ tiene un punto aislado, contradiciendo nuestra hipótesis.

Supongamos, en otro caso, que Σ es infinito. Estamos entonces bajo las hipótesis del Lema 2.1.9 y Σ debe cumplir una de las dos afirmaciones que allí se hacen. Si verifica la segunda afirmación tendremos que existe $T \in \mathfrak{A}$ de forma que el conjunto

$$\Delta = \{[\pi] \in \Sigma : \ \pi(T) \neq 0\}$$

es no vacío y finito. Pero observemos que

$$\Delta = \bigcup_{f \in L^1(G)} \{[\pi] \in \Sigma : \ \pi(T(f)) \neq 0\}$$

que, en la topología de Fell de $\widehat{G}$, es una unión de conjuntos abiertos y, por tanto, abierto. Otra vez se deduce que $\widehat{G}$ debe tener un punto aislado.

Finalmente, si Σ verifica la primera afirmación del Lema 2.1.9 entonces existen sucesiones $(\pi_n) \in \Sigma$, $(T_n) \in \mathfrak{A}$ y (x_n) con $x_n \in H_{\pi_n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo lo que en dicho lema se afirma. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que el operador $T_n : (X, |\cdot|) \longrightarrow (X, |\cdot|)$ es continuo por hipótesis, al igual que si consideramos $T_n : (L^1(G), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (L^1(G), \|\cdot\|_1)$. Aplicando el *lema de estabilidad* se tiene garantizada la existencia de un natural N de forma que se verifica que

$$\overline{T_1 \cdots T_N(\mathfrak{S}(i))} = \overline{T_1 \cdots T_{N+1}(\mathfrak{S}(i))}$$

y, por tanto,

$$T_1 \cdots T_N(\mathfrak{S}(i)) \subset \overline{T_1 \cdots T_{N+1}(\mathfrak{S}(i))}.$$

Si aplicamos a la expresión de la derecha (antes de cerrar) la representación π_N y calculamos su valor en el punto x_N se obtiene que

$$\pi_N\left[T_1 \cdots T_{N+1}(\mathfrak{S}(i))\right](x_N) = \pi_N(\mathfrak{S}(i))\pi_N(T_{N+1}) \cdots \pi_N(T_1)(x_N) = 0$$

y, por tanto, se tendrá que

$$0 = \pi_N\left[T_1 \cdots T_N(\mathfrak{S}(i))\right](x_N) = \pi_N(\mathfrak{S}(i))\pi_N(T_N) \cdots \pi_N(T_1)(x_N).$$

Si notamos $x = \pi_N(T_N) \cdots \pi_N(T_1)(x_N)$, se tiene que $x \neq 0$ y $x \in H_{\pi_N}$. Consideremos el subespacio vectorial M de H_{π_N} definido por

$$M = \left\{y \in H_{\pi_N} : \ \pi_N(\mathfrak{S}(i))(y) = 0\right\}.$$

M es distinto de $\{0\}$ ya que $x \in M$ y, teniendo en cuenta la invarianza de $\mathfrak{S}(i)$ por traslaciones, se obtiene, como ya hemos hecho varias veces, que M es invariante por π_N. La irreductibilidad de π_N implica que debe ser $M = H_{\pi_N}$ y el Lema 2.1.4 nos proporciona que $\pi_N(\mathfrak{S}(i)) = \{0\}$. Sin embargo este resultado contradice la pertenencia de π_N a Σ. $\square$

En el caso particular de que consideremos $X = L^1(G)$ se obtiene el siguiente resultado.

2.3.2 Corolario. *Sea G un grupo de Moore. Supongamos que $\widehat{G}$ no tiene puntos aislados. Entonces $L^1(G)$ tiene una única norma completa invariante por traslaciones.*

Al igual que en el caso abeliano, cabe aquí la generalización de los últimos corolarios al caso de funciones con valores en un espacio de Banach E en vez de funciones con valores en $\mathbb{C}$. Veamos los enunciados.

2.3.3 Corolario. *Sea G un grupo de Moore y sea E un espacio de Banach. Supongamos que $\widehat{G}$ no tiene puntos aislados. Si X es un subespacio vectorial de $L^1(G,E)$ invariante por traslaciones, entonces cualquier norma completa $|\cdot|$ en X invariante por traslaciones es más fuerte que la norma $\|\cdot\|_1$. Como consecuencia hay, a lo sumo, una única norma completa en X invariante por traslaciones.*

Demostración. Consideremos, como es usual, i el operador de inclusión de $(X,|\cdot|)$ en $(L^1(G,E),\|\cdot\|_1)$, y se trata de demostrar que i es continuo. Elijamos $x^* \in E^*$ y definamos el operador $\phi_{x^*} : (L^1(G,E),\|\cdot\|_1) \longrightarrow (L^1(G),\|\cdot\|_1)$ mediante la expresión $\phi_{x^*}(f)(t) = x^*(f(t))$ para cualesquiera $f \in L^1(G,E)$ y $t \in G$. La composición $\phi_{x^*}i$ va de $(X,|\cdot|)$ en $(L^1(G),\|\cdot\|_1)$ y, si notamos $\mathfrak{S}$ al separador del operador $\phi_{x^*}i$, podemos volver a hacer la demostración del Teorema 2.3.1 para obtener que, como $\widehat{G}$ no tiene puntos aislados, $\mathfrak{S} = \{0\}$. Ahora el Lema A.1.3 nos da que $x^*(\mathfrak{S}(i)) = \{0\}$ o, lo que es igual: si $f \in \mathfrak{S}(i)$ entonces $x^*(f) = 0$ casi por doquier. Finalmente el Lema 1.2.10 garantiza que $f = 0$ casi por doquier que era lo deseado.

□

Bajo análogos presupuestos se puede enunciar el siguiente resultado.

2.3.4 Corolario. *Sea G un grupo de Moore y sea E un espacio de Banach. Supongamos que $\widehat{G}$ no tiene puntos aislados. Entonces $L^1(G,E)$ tiene una única norma completa invariante por traslaciones.*

También, basándonos en los resultados obtenidos en el caso abeliano, se pueden dar unas versiones más generales de los resultados anteriores. Nos estamos refiriendo a que el papel hecho por la inclusión i puede ser desempeñado por un homomorfismo ϕ de G-módulos biláteros entre G-submódulos del G-módulo de Banach $L^1(G)$, cuando G es un grupo de Moore con objeto dual sin puntos aislados.

No creemos que sea necesario dar más detalles de cómo quedarían los resultados insinuados.

El hecho de que, para los grupos de Moore con objeto dual sin puntos aislados (como equivalente no abeliano de ser no compacto), se tenga unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en $L^1(G)$, hace pensar en qué ocurre cuando el objeto dual sí que tiene puntos aislados. Si todos sus puntos son aislados y el grupo es separable ya sabemos que eso es equivalente a la compacidad del grupo y, entonces, nuestro Corolario 2.2.11 nos da que $L^1(G)$ no tiene unicidad de la norma completa invariante por traslaciones. Pero, ¿y si sólo tenemos garantizada la existencia de un punto aislado? entonces no tenemos garantizada la compacidad (ya lo hemos comentado anteriormente) y eso hace que la función constantemente igual a 1 no tenga que ser una función de $L^1(G)$ con lo que la demostración en la que se basaba el Corolario 2.2.11 no nos sirve. Veamos qué podemos obtener si tenemos al menos un punto aislado. Porque algo se puede utilizar de la demostración del Teorema 2.2.10 como veremos en breve. Por ejemplo el siguiente lema técnico ya recuerda en algo, al menos formalmente, a la demostración de dicho teorema.

2.3.5 Lema. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal de rango finito y sea $\alpha \neq 0$ con $\alpha \notin \sigma(T_{|T(X)})$ (el espectro de T restringido a $T(X)$). Entonces el operador lineal $x \mapsto \alpha x - T(x)$ de X en X es una biyección.*

Demostración. Para demostrar la inyectividad del operador que se propone supongamos que $\alpha x - T(x) = 0$. Entonces se tiene que $\alpha T(x) = T(T(x))$ de donde, o bien $T(x) = 0$ y, por tanto $\alpha x = 0$ de donde, evidentemente $x = 0$, o bien, si $0 \neq T(x) \in T(X)$ y entonces $\alpha \in \sigma(T_{|T(X)})$, lo que no es posible.

Para la sobreyectividad del operador lo más fácil es construir el operador inverso. Sea $y \in X$ y veamos quién es su preimagen. Si $x \in X$ con $\alpha x - T(x) = y$, se tiene que $\alpha T(x) - T(T(x)) = T(y)$. Es decir, $(\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})(T(x)) = T(y)$, donde I

representa al operador identidad. Así $T(x) = (\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}T(y)$ y entonces

$$x = \frac{1}{\alpha}\left[y + (\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}T(y)\right].$$

Veamos que el x así obtenido verifica efectivamente que $\alpha x - T(x) = y$.

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{\alpha}\left[T(y) + (\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}T(T(y))\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[I_{|T(X)} + (\alpha I_{T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}T_{|T(X)}\right](T(y)). \end{aligned}$$

Pero

$$(\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}(\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)}) = I_{|T(X)}$$

y, por tanto,

$$\alpha(\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1} - (\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}T_{|T(X)} = I_{|T(X)},$$

de donde

$$I_{|T(X)} + (\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}T_{|T(X)} = \alpha(\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}.$$

Sustituyendo en la última expresión que hemos obtenido de $T(x)$ nos queda que

$$T(x) = (\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}(T(y)).$$

Por otro lado se tiene que

$$\alpha x = y + (\alpha I_{|T(X)} - T_{|T(X)})^{-1}(T(y)).$$

Restando estas dos últimas expresiones se tiene que

$$\alpha x - T(x) = y,$$

como queríamos. $\square$

El siguiente resultado es también fundamental en la construcción que perseguimos. Es eminentemente técnico y podría haberse incluido en la demostración de un resultado mayor, pero la extensión de su demostración hace que sea mejor aislarlo como resultado independiente.

2.3.6 Lema. *Sean G un grupo de Moore y $[\pi] \in \widehat{G}$. Sea $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de H_π y supongamos que $[\pi]$ es un punto aislado en la topología de Fell de $\widehat{G}$. Entonces para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ existe un elemento $e_{i,j} \in L^1(G)$ verificando las siguientes afirmaciones.*

1. *Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ la matriz que representa a $\pi(e_{i,j})$ en la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es $E_{i,j}$, la matriz que tiene un 1 en la entrada (i, j) y 0 en las demás entradas.*
2. *Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene*
$$L_t(e_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{k,i}(t) e_{k,j} \text{ para } t \in G. \tag{2.6}$$
3. *Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene*
$$R_t(e_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\pi_{k,j}(t)} e_{i,k} \text{ para } t \in G. \tag{2.7}$$

donde $\pi_{i,j}(t)$ es la entrada (i, j) de la matriz que representa a $\pi(t)$ en la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Demostración. Al ser $[\pi] \in \widehat{G}$ un punto aislado en $\widehat{G}$ se tiene que el ideal de $L^1(G)$ $I = \bigcap_{[\gamma] \in \widehat{G} \setminus [\pi]} \ker(\gamma)$ verifica que $I \neq \{0\}$ y $\ker(\pi) \not\supset I$. Consideremos la restricción de π a I,

$$\pi_{|I} : I \longrightarrow \mathcal{L}(H_\pi).$$

El primer objetivo es observar que es biyectiva. Para la inyectividad, sea $f \in I$ con $\pi(f) = 0$. Como, por definición de I, se tiene que $\gamma(f) = 0$ para todo $[\gamma] \in \widehat{G} \setminus [\pi]$, entonces todas las representaciones unitarias e irreducibles de G valen 0 sobre f y f debe ser 0 y $\pi_{|I}$ es inyectiva.

Para la sobreyectividad consideremos el subespacio vectorial de H_π definido por $\{x \in H_\pi : \pi(I)x = \{0\}\}$. Como hemos hecho otras veces, la invarianza por traslaciones de I hace que $\{x \in H_\pi : \pi(I)x = \{0\}\}$ sea invariante por π y la irreductibilidad de π hace que, o bien $\{x \in H_\pi : \pi(I)x = \{0\}\} = H_\pi$, o bien $\{x \in H_\pi : \pi(I)x = \{0\}\} = \{0\}$. En el primer caso se obtiene que $\pi(I) = \{0\}$, pero la inyectividad de π no permite esa opción. Así que debe verificarse que $\{x \in H_\pi : \pi(I)x = \{0\}\} = \{0\}$. Sea $x_0 \in H_\pi \setminus \{0\}$. Entonces $\pi(I)(x_0) \neq \{0\}$. El subespacio vectorial de H_π definido por $\pi(I)(x_0)$ es también invariante por π y, como no es $\{0\}$, otra vez la irreductibilidad de π nos da que tiene que ser todo H_π. Entonces, atendiendo a [24, Definition 4.2.12 y Theorem 4.2.13], se puede asegurar que $\pi_{|I}$ es sobreyectiva sobre $\mathcal{L}(H_\pi)$.

Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ podemos tomar $e_{i,j} \in I$ verificando que

$$\pi(e_{i,j})(u_k) = \delta_{j,k} u_i$$

para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Se tiene que $\pi(e_{i,j}) \in \mathcal{L}(H_\pi)$ y la matriz que representa al elemento $\pi(e_{i,j})$, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, en la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$, es la matriz $E_{i,j}$; la matriz que tiene un 1 en la entrada (i, j) y 0 en las demás entradas.

Veamos ahora el comportamiento de los elementos $e_{i,j}$ respecto a las traslaciones izquierda y derecha. Elijamos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y $t \in G$. Para determinar $L_t(e_{i,j})$ basta conocer $\gamma(L_t(e_{i,j}))$ para cualquier $[\gamma] \in \widehat{G}$. En primer lugar observemos que, si $[\gamma] \in \widehat{G} \setminus [\pi]$, se tiene que $\gamma(L_t(e_{i,j})) = \gamma(t)\gamma(e_{i,j}) = 0$ ya que $e_{i,j} \in I = \bigcap_{[\gamma] \in \widehat{G} \setminus [\pi]} \ker(\gamma)$. Por otro lado, al considerar el comportamiento de $[\pi]$ sobre $L_t(e_{i,j})$ se tiene que

$$\pi(L_t(e_{i,j})) = \pi(t)\pi(e_{i,j}) = \pi(t)E_{i,j}.$$

En la base $\{u_1,\ldots,u_n\}$ la anterior expresión queda

$$\begin{pmatrix}\pi_{1,1}(t) & \cdots & \pi_{1,n}(t)\\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{n,1}(t) & \cdots & \pi_{n,n}(t)\end{pmatrix}\quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \\ & \downarrow & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&1&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}\end{array} \leftarrow i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0&\cdots&\pi_{1,i}(t)&\cdots&0\\ \vdots& &\vdots& &\vdots\\ 0&\cdots&\pi_{n,i}(t)&\cdots&0\end{pmatrix}\end{array}$$

Es decir, la expresión en la base $\{u_1,\ldots,u_n\}$ de $\pi(L_t(e_{i,j}))$ es $\sum_{k=1}^{n}\pi_{k,i}(t)E_{k,j}$. Pero esta última expresión es también la expresión en dicha base de $\pi\left(\sum_{k=1}^{n}\pi_{k,i}(t)e_{k,j}\right)$. Así se obtiene que

$$L_t(e_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}\pi_{k,i}(t)e_{k,j}.$$

Para las traslaciones derecha se trabaja de forma similar. Si $i,j\in\{i,\ldots,n\}$ y $t\in G$, se tiene, al igual que antes, que si $[\gamma]\in\widehat{G}\setminus[\pi]$ entonces $\gamma(R_t(e_{i,j})) = \gamma(e_{i,j})\gamma(t)^* = 0$ ya que $e_{i,j}\in I = \bigcap_{[\gamma]\in\widehat{G}\setminus[\pi]}\ker(\gamma)$. Al considerar el comportamiento de $[\pi]$ sobre $R_t(e_{i,j})$ se tiene que

$$\pi(R_t(e_{i,j})) = \pi(e_{i,j})\pi(t)^* = E_{i,j}\pi(t)^*.$$

Esto último, en la base $\{u_1,\ldots,u_n\}$, tiene la siguiente expresión matricial.

$$i\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \\ & \downarrow & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&1&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}\end{array}\quad \begin{pmatrix}\overline{\pi_{1,1}(t)} & \cdots & \overline{\pi_{n,1}(t)}\\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\pi_{1,n}(t)} & \cdots & \overline{\pi_{n,n}(t)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots& &\vdots\\ \overline{\pi_{1,j}(t)}&\cdots&\overline{\pi_{n,j}(t)}\\ \vdots& &\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}\leftarrow i$$

Tenemos, al igual que antes, que la expresión en la base $\{u_1,\ldots,u_n\}$ de $\pi(R_t(e_{i,j}))$ es $\sum_{k=1}^{n}\overline{\pi_{k,j}(t)}E_{i,k}$. Es decir, la expresión en la base $\{u_1,\ldots,u_n\}$ de $\pi\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{\pi_{k,j}(t)}e_{i,k}\right)$.

Así se obtiene que

$$R_t(e_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\pi_{k,j}(t)} e_{i,k}.$$

□

Sólo una última puntualización antes de enunciar el resultado perseguido. Si π es la representación con la que estamos trabajando y $s,t \in G$, entonces la traslación izquierda por el elemento t de π evaluado en s queda

$$L_t(\pi(s)) = \pi(t^{-1}s) = \pi(t)^{-1}\pi(s),$$

de donde $\pi(t)L_t(\pi(s)) = \pi(s)$. Si ahora fijamos, como antes, la base $\{u_1,\dots,u_n\}$ de H_π, la expresión de esto último en nuestra base quedaría

$$\pi_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \pi_{i,k}(t) L_t(\pi_{k,j}) \tag{2.8}$$

para $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Análogamente se tiene que, para $s,t \in G$, $R_t(\pi(s)) = \pi(st) = \pi(s)\pi(t)$ y, por tanto, $R_t(\pi(s))\pi(t)^* = \pi(s)$. Al igual que antes, la expresión en la base $\{u_1,\dots,u_n\}$ de esto último queda

$$\pi_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} R_t(\pi_{i,k}) \overline{\pi_{j,k}(t)} \tag{2.9}$$

para cada $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

2.3.7 Teorema. *Sea G un grupo de Moore σ-compacto e infinito y supongamos que $\widehat{G}$ tiene un punto aislado. Entonces $L^1(G)$ tiene más de una norma completa invariante por traslaciones.*

Demostración. Observemos en primer lugar que, al ser G un grupo σ-compacto, [30, Theorem 1] nos garantiza la existencia de un funcional lineal ϕ en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ invariante por traslaciones y discontinuo.

Notaremos $[\pi]$, como era de esperar, al punto aislado de $\widehat{G}$ cuya existencia se afirma en las hipótesis y $\{u_1,\ldots,u_n\}$ a una base ortonormal de H_π que permanecerá fija a lo largo de toda la demostración.

Para $t \in G$ $(\pi_{i,j}(t))$ denotará a la matriz unitaria de orden n asociada a $\pi(t)$ en la base $\{u_1,\ldots,u_n\}$. Vamos a definir un operador $T : L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$ mediante la expresión

$$T(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \phi(\pi_{i,j} f) e_{i,j},$$

donde, para $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $e_{i,j}$ es el dado por el lema anterior. Obsérvese que, para cada $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene que la función $\pi_{i,j} \in C(G)$ y es acotada. Por tanto su producto por una función $f \in L^1(G)$ queda en $L^1(G)$ y tiene sentido aplicarle el funcional ϕ. Es claro que el rango del operador T es finito (el generado por las funciones $e_{i,j}$ con $i,j \in \{1,\ldots,n\}$). Como en el Lema 2.3.5 tomemos $\alpha \neq 0$, $\alpha \notin \sigma(T_{|T(X)})$ de forma que el operador de $L^1(G)$ en sí mismo que a cada $f \in L^1(G)$ le hace corresponder $\alpha f - T(f)$ es una biyección. Este hecho nos permite definir una nueva norma completa en $L^1(G)$ mediante la fórmula

$$|f| = \left\| \alpha f - \sum_{i,j=1}^{n} \phi(\pi_{i,j} f) e_{i,j}) \right\|_1 .$$

Nuestro objetivo es demostrar que esta nueva norma $|\cdot|$ es invariante por traslaciones y que no es equivalente a $\|\cdot\|_1$.

Veamos primero la invarianza de $|\cdot|$ por traslaciones izquierda. Sea $t \in G$ y $f \in$

$L^1(G)$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
|L_t(f)| &= \left\| \alpha L_t(f) - \sum_{i,j=1}^{n} \phi\left(\pi_{i,j} L_t(f)\right) e_{i,j} \right\|_1 \\
\text{(utilizando 2.8)} &= \left\| L_t(\alpha f) - \sum_{i,j=1}^{n} \phi\left(\sum_{k=1}^{n} \pi_{i,k}(t) L_t(\pi_{k,j}) L_t(f)\right) e_{i,j} \right\|_1 \\
&= \left\| L_t(\alpha f) - \sum_{i,j,k=1}^{n} \pi_{i,k}(t) \phi\left(L_t(\pi_{k,j}) L_t(f)\right) e_{i,j} \right\|_1 \\
&= \left\| L_t(\alpha f) - \sum_{i,j,k=1}^{n} \pi_{i,k}(t) \phi\left(\pi_{k,j} f\right) e_{i,j} \right\|_1 \\
&= \left\| L_t(\alpha f) - \sum_{j,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{k,j} f\right) \sum_{i=1}^{n} \pi_{i,k}(t) e_{i,j} \right\|_1 \\
\text{(utilizando 2.6)} &= \left\| L_t(\alpha f) - \sum_{j,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{k,j} f\right) L_t(e_{k,j}) \right\|_1 \\
&= \left\| L_t\left(\alpha f - \sum_{j,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{k,j} f\right) e_{k,j}\right) \right\|_1 \\
&\leq \|L_t\| \left\| \alpha f - \sum_{j,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{k,j} f\right) e_{k,j} \right\|_1 \\
&= \|L_t\| |f|,
\end{aligned}
$$

y de ello se deduce que $|\cdot|$ es invariante por traslaciones izquierda. Veamos que también es invariante por traslaciones derecha. Otra vez para $t \in G$ y $f \in L^1(G)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|R_t(f)| &= \left\| \alpha R_t(f) - \sum_{i,j=1}^{n} \phi\left(\pi_{i,j} R_t(f)\right) e_{i,j} \right\|_1 \\
\text{(utilizando 2.9)} \quad &= \left\| R_t(\alpha f) - \sum_{i,j=1}^{n} \phi\left(\sum_{k=1}^{n} R_t(\pi_{i,k}) \overline{\pi_{j,k}(t)} R_t(f) \right) e_{i,j} \right\|_1 \\
&= \left\| R_t(\alpha f) - \sum_{i,j,k=1}^{n} \overline{\pi_{j,k}(t)} \phi\left(R_t(\pi_{i,k}) R_t(f)\right) e_{i,j} \right\|_1 \\
&= \left\| R_t(\alpha f) - \sum_{i,j,k=1}^{n} \overline{\pi_{j,k}(t)} \phi\left(\pi_{i,k} f\right) e_{i,j} \right\|_1 \\
&= \left\| R_t(\alpha f) - \sum_{i,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{i,k} f\right) \sum_{j=1}^{n} \overline{\pi_{j,k}(t)} e_{i,j} \right\|_1 \\
\text{(utilizando 2.7)} \quad &= \left\| R_t(\alpha f) - \sum_{i,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{i,k} f\right) R_t(e_{i,k}) \right\|_1 \\
&= \left\| R_t \left(\alpha f - \sum_{i,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{i,k} f\right) e_{i,k} \right) \right\|_1 \\
&\leq \|R_t\| \left\| \alpha f - \sum_{i,k=1}^{n} \phi\left(\pi_{i,k} f\right) e_{i,k} \right\|_1 \\
&= \|R_t\| |f|,
\end{aligned}$$

de donde se deduce igualmente que $|\cdot|$ es invariante por traslaciones derecha.

Finalmente, para demostrar que la nueva norma $|\cdot|$ no es equivalente a $\|\cdot\|_1$ nos basta con demostrar que el operador de $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ en sí mismo que lleva f en $\alpha f - \sum_{i,j=1}^{n} \phi(\pi_{i,j} f) e_{i,j}$ no es continuo; pero demostrar esto último es equivalente a demostrar que el operador de $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ en sí mismo que lleva f en $\sum_{i,j=1}^{n} \phi(\pi_{i,j} f) e_{i,j}$ no es continuo. Obsérvese que, al ser las funciones $e_{i,j}$ linealmente independientes para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, la discontinuidad deseada es equivalente a la discontinuidad de alguno de los funcionales en $(L^1(G), \|\cdot\|_1)$ que llevan f en $\phi(\pi_{i,j} f)$, con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Supongamos, con objetivo de obtener una contradicción, que, para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$, el funcional $\psi_{i,j} : (L^1(G), \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{C}$, definido sobre cada función $f \in L^1(G)$ como $\psi_{i,j}(f) = \phi(\pi_{i,j} f)$, es continuo. Si llamamos $\gamma = \pi^*$ se tiene que $\pi\gamma = I_{H_\pi}$, donde I_{H_π} es la identidad en H_π, y entonces, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $\sum_{k=1}^{n} \pi_{i,k}\gamma_{k,i} = 1$, donde $(\gamma_{i,j})$ es la expresión de γ en la base $\{u_1, \dots, u_n\}$. Si $f \in L^1(G)$ se tendrá entonces que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_{i,k}\gamma_{k,i} f = f,$$

y, aplicando el funcional ϕ, se tendrá que

$$\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \pi_{i,k}\gamma_{k,i} f\right) = \phi(f).$$

Tomando módulo se tiene que

$$|\phi(f)| = \left|\phi\left(\sum_{k=1}^{n} \pi_{i,k}\gamma_{k,i} f\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \psi_{i,k}\left(\gamma_{k,i} f\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|\psi_{i,k}\| \|\gamma_{k,i} f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{n} \|\psi_{i,k}\| \|\gamma_{k,i}\|_\infty \|f\|_1,$$

y obtendríamos que ϕ es continuo, lo que nos lleva a una contradicción. $\square$

El anterior teorema, junto con el Corolario 2.3.2, nos da la siguiente curiosa caracterización de los grupos de Moore σ-compactos con puntos aislados en el dual. Es una relación entre la existencia de puntos aislados en el dual de un grupo de Moore σ-compacto, G, y la unicidad de la norma completa que hace continuas las traslaciones en $L^1(G)$

2.3.8 Corolario. *Sea G un grupo de Moore σ-compacto e infinito. Entonces $\widehat{G}$ tiene algún punto aislado si, y sólo si, $L^1(G)$ tiene más de una norma completa invariante por traslaciones.*

2.3.9 Nota. En este segundo capítulo todo nuestro trabajo ha estado restringiéndose a grupos de Moore. Sin embargo tal restricción no es estrictamente necesaria. Realmente lo que hemos utilizado no es que todas las representaciones unitarias e irreducibles sean de dimensión finita. Lo que hemos necesitado es que las representaciones unitarias e irreducibles de dimensión finita separen los puntos del grupo. Los grupos que verifican la anterior condición son llamados grupos MAP (*maximality almost periodic* ; véase [25] para la definición y las propiedades de los grupos MAP). Por tanto se podrían enunciar todos los resultados cambiando la palabra "Moore " por "MAP", y, cuando el el caso de un grupo de Moore elegíamos una representación unitaria e irreducible (que era de dimensión finita), ahora, en el caso de grupos MAP, tendríamos que elegir específicamente una representación del mismo tipo pero exigiendo que sea de dimensión finita.

2.3.10 Problemas. *La relación de problemas abiertos motivados por nuestro trabajo, es tan extensa como clases de grupos hay. Dar, por tanto, una relación de todos los problemas abiertos sería un dislate. Sin embargo sí que se puede, y se debe, comentar los más cercanos a lo hecho aquí.*

- *Un primer problema, digno de intentar ser atajado y muy natural, es estudiar si la hipótesis de σ-compacidad en el Corolario 2.3.8 es necesaria. En una de las direcciones sabemos que no es necesaria pero en la otra dirección es un problema abierto.*

- *Un problema que también está abierto es, extendiendo la gama de grupos en los que trabajamos, el de la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en grupos promediables. Un grupo localmente compacto G se dice promediable si $L^\infty(G)$ tiene una media invariante por traslaciones izquierda, donde una media en $L^\infty(G)$ es un funcional lineal y positivo sobre $L^\infty(G)$ que sobre la función constantemente igual a 1 valga 1. Los grupos promediables contienen tanto a los abelianos como a los grupos de Moore. Además es la* *generalización natural que suele seguirse cuando se estudia una propiedad que afecte a grupos. Primero se suele estudiar en grupos abelianos, después en compactos, seguidamente en Moore y, el siguiente paso natural, suele ser el estudio en grupos promediables. Quizá la definición de grupo promediable no dé una justa medida de su importancia. Para ver la importancia de dichos grupos y las consecuencias que se obtienen de un grupo cuando éste es promediable véase [25].*

- *También la siguiente clase de grupos en los que suele hacerse el estudio de una propiedad de grupos es la clase de los grupos discretos. Respecto a la unicidad de la norma completa invariante por traslaciones en espacios de funciones sobre grupos discretos, el desconocimiento es casi absoluto. Solamente G. A. Willis, en una comunicación particular, nos ha informado que, para el grupo discreto generado por dos elementos, $\mathbb{F}_2$, ha obtenido que $l^1(\mathbb{F}_2)$ y $C_0(\mathbb{F}_2)$ tienen unicidad de la norma completa invariante por traslaciones.*

- *Por último, otro problema que no hemos estudiado, y que es natural plantearse, es el mismo problema de siempre en los grupos $L^p(G)$, con $1 < p$ cuando G no es ni compacto ni abeliano. Por supuesto, no es realista intentar abarcar este problema en toda su generalidad pero se podría empezar por grupos de Moore, MAP, etc...*

Apéndice A

Continuidad automática

A.1. Lema de estabilidad y "gliding hump argument"

El objetivo de la continuidad automática es el estudio de la continuidad de aquellos operadores entre espacios de Banach que gozan de alguna propiedad algebraica especialmente relevante. Esta teoría se ha desarrollado muy especialmente en el campo de las álgebras de Banach, siendo los homomorfismos y las derivaciones las clases de operadores que más atención han recibido. Desde [32], que es quizá el texto más antiguo donde se hace un estudio pormenorizado del tema hasta [6], que es quizá el más actual, hay una amplia gama de textos donde se estudia la continuidad automática de operadores.

En este apéndice vamos a ordenar los resultados más sobresalientes sobre continuidad automática que necesitamos para el desarrollo de nuestro trabajo. El concepto fundamental que vamos a utilizar es el de subespacio separador de un operador lineal.

A.1.1 Definición. Sean X e Y espacios de Banach y $\Phi : X \to Y$ un operador lineal.

El subespacio de Y definido por

$$\mathfrak{S}(\Phi) = \{y \in Y \text{ tales que existe } x_n \to 0 \text{ en } X \text{ con } \Phi(x_n) \to y \text{ en } Y\}$$

se denomina (subespacio) separador de Φ. La noción de separador de un operador lineal es bastante antigua. El separador ya fue utilizado en el estudio de homomorfismos entre álgebras de Banach por Rickart en 1950 (Véase [26]).

La importancia del separador radica en que, en virtud del teorema de la gráfica cerrada, un operador lineal Φ entre espacios de Banach es continuo si, y sólo si, $\mathfrak{S}(\Phi) = \{0\}$. Esta propiedad del subespacio separador justifica que se haya utilizado intensamente en el estudio de la continuidad automática de operadores. Codificamos seguidamente las propiedades del separador que nos son imprescindibles.

A.1.2 Lema. *[32, Lemma 1.2] Sea Φ un operador lineal de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y. Entonces*

1. *$\mathfrak{S}(\Phi)$ es un subespacio cerrado de Y.*
2. *$\mathfrak{S}(\Phi) = \{0\}$ si, y sólo si, Φ es continuo.*
3. *Si T y R son operadores lineales y continuos en X e Y respectivamente y $\Phi T = R\Phi$, entonces $R(\mathfrak{S}(\Phi)) \subset \mathfrak{S}(\Phi)$.*

A.1.3 Lema. *[32, Lemma 1.3] Sea Φ un operador lineal de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y y sea R un operador lineal y continuo de Y en un espacio de Banach Z. Entonces*

1. *$R\Phi$ es continuo si, y sólo si, $R(\mathfrak{S}(\Phi)) = \{0\}$.*
2. *$\overline{R(\mathfrak{S}(\Phi))} = \mathfrak{S}(R\Phi)$.*

3. *Existe una constante M, independiente de R y Z, verificando que si $R\Phi$ es continuo, entonces $\|R\Phi\| \leq M\|R\|$.*

Las demostraciones de los dos lemas anteriores son casi inmediatas y pueden ser consultadas en [32]. En [24] está el siguiente resultado, de capital importancia en todo nuestro trabajo y, en general, en la mayoría de los resultados relacionados con la continuidad de operadores lineales. Se le conoce coloquialmente como *lema de estabilidad* por cuanto que su tesis es la estabilidad de cierta sucesión descendente de subespacios cerrados.

A.1.4 Lema. *[24, Lemma 6.1.17] Sean X e Y espacios de Banach y sean (T_n) y (R_n) sucesiones de operadores lineales y continuos en X e Y respectivamente. Si Φ es un operador lineal de X en Y verificando que $\Phi T_n - R_n\Phi$ es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un natural N verificando*

$$\overline{R_1 \cdots R_n \mathfrak{S}(\Phi)} = \overline{R_1 \cdots R_N \mathfrak{S}(\Phi)}$$

para cualquier natural $n \geq N$.

Más que el resultado anterior nosotros utilizamos un caso particular de él y es cuando se verifica que $\Phi T_n = R_n\Phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que, evidentemente, hace que $\Phi T_n - R_n\Phi$ sea continuo para todo $n \in \mathbb{N}$.

La idea subyacente a la demostración del lema de estabilidad está ya presente en un trabajo de Hausdorff de 1932. La aparición de dicho resultado en el escenario de la continuidad automática se debe a Johnson y Sinclair (Véanse [18] y [19]).

Esa idea latente en el *lema de estabilidad* se puede también manifestar en un principio ligeramente más general que el lema anterior; es el conocido entre los especialistas como *gliding hump argument*, cuya traducción podría ser *argumento de la joroba deslizante.* Parece razonable no traducirlo. La presentación que hacen

Albrecht y Neumann en [1] de este principio es ligeramente más general que la que nosotros damos a continuación.

A.1.5 Lema. *[6] Sean X e Y espacios de Banach, sea (T_n) una sucesión de operadores lineales y continuos en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea S_n un operador lineal y continuo de Y en un espacio de Banach Y_n. Si Φ es un operador lineal de X en Y verificando que*

$$S_n \Phi T_1 \cdots T_n$$

es continuo para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un natural $N \in \mathbb{N}$ de manera que se cumple que

$$S_n \Phi T_1 \cdots T_N$$

es continuo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Realmente nosotros básicamente utilizamos una versión aún más particular del *gliding hump argument* y es cuando

$$S_n \Phi T_1 \cdots T_n = 0$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, aunque la versión clásica es la presentada aquí.

La demostración del *gliding hump argument* puede ser consultada en el trabajo referenciado. Nosotros lo que vamos a dar es la demostración de que el *lema de estabilidad* es, en realidad, una consecuencia de este último resultado. El hecho de que el *gliding hump argument* es más general que el *lema de estabilidad* parece ser un hecho conocido por todos los expertos en la materia pero que, por lo que conocemos, nadie se ha molestado en demostrar. Permítannos en este apéndice dar la demostración de este hecho.

En efecto, supongamos cierto el *gliding hump argument* y sean T_n y R_n operadores verificando las hipótesis del *lema de estabilidad*. Consideramos, para cada

$n \in \mathbb{N}$, el espacio de Banach $Y_n = Y/\mathfrak{S}(R_1 \cdots R_n \Phi)$ y el operador S_n de Y en Y_n la aplicación cociente que, obviamente, es continuo. Para poder aplicar el *gliding hump argument* necesitamos comprobar que $S_n \Phi T_1 \cdots T_n$ es continuo para cualquier natural n, es decir, que $\mathfrak{S}(S_n \Phi T_1 \cdots T_n) = \{0\}$. Pero

$$\mathfrak{S}(S_n \Phi T_1 \cdots T_n) = \overline{S_n(\mathfrak{S}(\Phi T_1 \cdots T_n))} = \overline{S_n(\mathfrak{S}(R_1 \cdots R_n \Phi))}$$

que es igual a $\{0\}$. Así estamos en condiciones de aplicar el *gliding hump argument* y entonces existirá un natural N de forma que $S_n \Phi T_1 \cdots T_N$ es continuo para todo $n \geq N$, es decir, $\mathfrak{S}(S_n \Phi T_1 \cdots T_N) = \{0\}$. Así

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(S_n \Phi T_1 \cdots T_N) = \overline{S_n(\mathfrak{S}(\Phi T_1 \cdots T_N))} \supset S_n \overline{(\mathfrak{S}(\Phi T_1 \cdots T_N))} \\ = S_n \overline{(\mathfrak{S}(R_1 \cdots R_N \Phi))} = S_n \overline{(R_1 \cdots R_N \mathfrak{S}(\Phi))}. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que

$$\overline{R_1 \cdots R_N(\mathfrak{S}(\Phi))} \subset \mathfrak{S}(R_1 \cdots R_n \Phi) = \overline{R_1 \cdots R_n(\mathfrak{S}(\Phi))}$$

para todo $n \geq N$, es decir, la inclusión

$$\overline{R_1 \cdots R_N(\mathfrak{S}(\Phi))} \subset \overline{R_1 \cdots R_n(\mathfrak{S}(\Phi))}.$$

La inclusión contraria viene dada por el último apartado del Lema A.1.2.

Apéndice B

Grupos localmente compactos

Es este apéndice vamos a codificar resultados referentes a grupos topológicos localmente compactos y abelianos. Nuestra exposición no es exhaustiva ni lo pretende, solamente recogeremos los resultados que resultan imprescindibles para nuestro estudio con la intención de que esta memoria pueda ser leída de una forma autónoma. Si bien en la mayoría de los textos más actuales el enfoque que se da al estudio de la teoría de grupos topológicos localmente compactos unifica el caso abeliano y no abeliano, también es cierto que históricamente se trabajó primero en grupos abelianos y la teoría de grupos no abelianos ha surgido como una generalización posterior. Además los resultados que presentamos en esta memoria tienen también esa secuencia; en un primer lugar los resultados referentes a grupos abelianos y posteriormente los resultados referentes a grupos no abelianos. La Este apéndice se dividirá en tres partes, la primera acerca de generalidades de grupos localmente compactos, la segunda dedicada a los resultados y estructuras en el caso en que el grupo sea abeliano, y en la tercera sección estudiamos los correspondientes para grupos no abelianos. Las propiedades que se presentarán son clásicas y pueden ser consultadas (principalmente sus demostraciones, de las que hemos prescindido) en multitud de textos sobre grupos topológicos y análisis de Fourier en grupos topológicos. Básicamente para confeccionar esta sección hemos recurrido al excelente texto de Folland ([11]) así como a los más clásicos [13] y [29].

No debemos olvidar que el análisis de Fourier para grupos topológicos localmente compactos y abelianos surge como una generalización para este tipo de grupos de la transformada de Fourier clásica. Un primer problema de notación al que nos enfrentamos es decidir si nos inclinamos por una notación multiplicativa para los grupos o una notación aditiva. Usualmente cuando el grupo es abeliano se suele utilizar la notación aditiva, sin que eso sea óbice para que existan grupos abelianos en los que la operación es un producto. También usualmente para grupos no abelianos el consenso es utilizar notación multiplicativa. Cuando estamos hablando en general hay que decidirse y parece lógico decidirse por la notación multiplicativa aunque el lector debe entender que todos los resultados que estamos dando con notación multiplicativa tienen un análogo en notación aditiva que, muchas veces, es el adecuado.

B.1. Preliminares

Vamos a comenzar con la definición de grupo topológico. Respecto a la definición de topología en un conjunto no es el asunto primordial de esta memoria y suponemos que el lector está familiarizado con el concepto. Sí es de nuestra incumbencia el concepto de grupo topológico por cuanto que es la base de todo el desarrollo del Análisis Armónico.

B.1.1 Definición. Un grupo G dotado de una topología se dirá un grupo topológico si las operaciones $(s,t) \mapsto st$ de $G \times G$ en G y la inversión $s \mapsto s^{-1}$ de G en G son ambas continuas.

Obsérvese que la condición de la continuidad de las dos operaciones anteriores se puede sustituir por la continuidad de la función

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (s,t) & \mapsto & st^{-1}. \end{array}$$

La definición de grupo topológico no hace más que exigir que la topología en G esté bien avenida con las operaciones del grupo. Es claro que, en este caso, las consecuencias son inmediatas. Por ejemplo el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata.

B.1.2 Proposición. *Sea G un grupo topológico y sea $a \in G$. Las aplicaciones r_a y $l_a : G \longrightarrow G$ definidas por $r_a(t) = ta$ y $l_a(t) = at$ para cualquier $t \in G$ son homeomorfismos de G sobre G. r_a y l_a son llamadas, respectivamente, la traslación derecha e izquierda por a.*

Si A es un conjunto de elementos de G y $b \in G$ notaremos por $Ab = \{ab : \ a \in A\}$ y si A y B son dos conjuntos de G entonces entenderemos $AB = \{ab : \ a \in A, \ b \in B\}$. Finalmente notaremos como $A^{-1} = \{a^{-1} : \ a \in A\}$. También es inmediata la demostración del siguiente resultado.

B.1.3 Corolario. *Sea G un grupo topológico y sean F un cerrado de G, P un abierto de G, A un subconjunto cualquiera de G y $a \in G$. Entonces se verifican las afirmaciones siguientes.*

1. *Los conjuntos Fa, aF y F^{-1} son cerrados.*

2. *Los conjuntos Pa, aP, PA, AP y P^{-1} son abiertos.*

Tampoco entraña dificultad la siguiente propiedad de los grupos topológicos.

B.1.4 Corolario. *Sea G un grupo topológico y sean s y t dos elementos de G. Entonces existe un homeomorfismo $f : G \longrightarrow G$ verificando que $f(s) = t$.*

Esta última propiedad de los grupos topológicos se conoce como homogeneidad del grupo.

Los tres resultados anteriores nos indican que para conocer la topología de un grupo topológico basta y sobra un conocimiento local de dicha topología. Realmente la topología de un grupo queda completamente determinada por una base de entornos del elemento neutro del grupo, al que notaremos por 1. Más concretamente tenemos el siguiente resultado.

B.1.5 Proposición. *Sea $\mathcal{U}$ una base de entornos abiertos de 1 en un grupo topológico G. Entonces las familias $\{tU : \ U \in \mathcal{U}\}_{t\in G}$ y $\{Ut : \ U \in \mathcal{U}\}_{t\in G}$ son bases para la topología de G.*

Realmente todo nuestro trabajo se desarrolla en un ámbito más restringido que el de los grupos topológicos en general. Necesitamos exclusivamente grupos localmente compactos.

B.1.6 Definición. Un grupo G es localmente compacto si es un grupo topológico cuyo espacio topológico subyacente es localmente compacto. A la vista de las propiedades anteriores esto es equivalente a la existencia de un entorno compacto del elemento neutro.

La homogeneidad nos permite no tener que exigir la existencia de entornos compactos en todos los elementos del grupo sino únicamente en el neutro.

Una clase importante de subconjuntos de un grupo topológico G son los conjuntos simétricos; un conjunto U de un grupo topológico G se dice simétrico si se verifica que $U^{-1} = U$.

B.1.7 Proposición. *En todo grupo topológico existe una base de entornos de* 1 *formada por conjuntos simétricos.*

Aún se puede obtener una base con características más especiales.

B.1.8 Teorema. *Sea G un grupo topológico. Entonces existe una base $\mathfrak{U}$ de entornos cerrados de* 1 *verificando las siguientes afirmaciones.*

1. *Cada elemento de $\mathfrak{U}$ es simétrico.*
2. *Dado $U \in \mathfrak{U}$ existe $V \in \mathfrak{U}$ verificando que $VV \subset U$.*
3. *Dados $U \in \mathfrak{U}$ y $a \in G$ existe $V \in \mathfrak{U}$ verificando que $V \subset a^{-1}Ua$.*

Evidentemente si el grupo es abeliano la última afirmación no aporta ninguna información.

Con respecto a la separación, la homogeneidad de los grupos topológicos hace que el panorama sea menos amplio que en espacios topológicos en general. Aunque en algunos textos los grupos topológicos se consideran automáticamente T_0, también es cierto que esta situación no se da automáticamente, el mismo $\mathbb{R}$ con la topología discreta, no es T_0. Se tiene en general el siguiente resultado.

B.1.9 Teorema. *Sea G un grupo topológico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *G es T_0.*
2. *G es T_1.*

3. *G es T_2.*

4. $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{1\}$, *donde $\mathcal{U}$ es una base de entornos de* 1.

Además se tiene que todo grupo topológico Hausdorff es completamente regular y por tanto también regular.

Comentemos ahora algunos resultados relacionados con los subgrupos de un grupo topológico. La definición de subgrupo topológico de un grupo topológico es sencillamente un subgrupo del grupo con la topología inducida. Cuando nos refiramos a un subgrupo topológico evitaremos la palabra topológico para hacer menos pesada la exposición; al fin y al cabo un subgrupo topológico de un grupo topológico no es más que un subgrupo suyo.

B.1.10 Proposición. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo suyo. Entonces $\overline{H}$ es también un subgrupo de G. En particular $\overline{\{1\}}$ es un subgrupo de G. Se tiene además que G es T_0 si, y sólo si, $\overline{\{1\}} = \{1\}$.*

La siguiente propiedad, que nos resultará de mucha utilidad, es, en cierto modo, sorprendente.

B.1.11 Proposición. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo abierto de G. Entonces H es también un subgrupo cerrado de G.*

En relación con lo anterior la existencia de dichos subgrupos abiertos de G no es difícil de conseguir. Nos basta un entorno simétrico de 1 para construirlos.

B.1.12 Proposición. *Sea U un entorno simétrico de* 1 *en un grupo topológico G.*

Entonces $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \overset{n}{\cdots} U)$ *es un subgrupo abierto (y por tanto cerrado) de* G.

Si el grupo es conexo entonces tenemos el siguiente corolario.

B.1.13 Corolario. *Sea* G *un grupo topológico conexo y* U *un entorno simétrico de* 1. *Entonces* $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \overset{n}{\cdots} U)$.

Supongamos que H es un subgrupo del grupo topológico G. Si llamamos G/H al conjunto de las clases de equivalencia (por la izquierda) módulo H y definimos $q : G \longrightarrow G/H$ la proyección canónica, tenemos la topología cociente en G/H que se define de la siguiente forma: un conjunto $U \subset G/H$ es abierto si, y sólo si, $q^{-1}(U)$ es abierto en G. La proyección q lleva conjuntos abiertos de G en abiertos de G/H, ya que si V es un abierto de G entonces $q^{-1}(q(V)) = VH$ que es un abierto según hemos visto en el Corolario B.1.3 y, por tanto, $q(V)$ es abierto en G/H.

Obsérvese que hemos definido el espacio cociente solamente por la izquierda. También podríamos hacerlo por la derecha pero sólo necesitaremos esta definición unilateral. Suponemos que el lector está familiarizado con la topología cociente de un espacio topológico. Sólo puntualizaremos algunos resultados por la utilidad que encontraremos en ellos y que son consecuencia de la estructura de grupo de G. La estructura de grupo de G induce una estructura de grupo en G/H de forma natural. Para evitar tener que dar las versiones izquierda y derecha daremos únicamente la versión izquierda pero el lector debe tener en cuenta que hay un resultado análogo para cocientes por la derecha.

B.1.14 Teorema. *Sea* G *un grupo topológico,* H *un subgrupo de* G *y* q *la proyección canónica de* G *en* G/H.

1. *Si H es cerrado, entonces G/H es Hausdorff.*

2. *Si G es localmente compacto, también lo es G/H.*

3. *Si H es normal, G/H es un grupo topológico.*

Quizá sea el momento de dar algunos ejemplos clásicos de grupos topológicos localmente compactos.

- Dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ con la operación suma y la topología usual de $\mathbb{R}^n$, es un grupo topológico localmente compacto. Es, claramente, abeliano. Igual ocurre con $\mathbb{C}^n$.

- El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, es también un grupo topológico localmente compacto y abeliano cuando consideramos la suma como operación de grupo y la topología inducida por $\mathbb{R}$. Obsérvese que en este caso la topología es la discreta.

- El grupo cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es también un grupo localmente compacto y abeliano. Realmente en este caso es compacto. Obsérvese que existe un isomorfismo de grupos topológicos $\phi : (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, +) \longrightarrow (\mathbb{T}^n, \cdot)$ donde $\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ dado por $\phi(x_1, \ldots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n})$ para $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. El grupo multiplicativo $(\mathbb{T}^n, \cdot)$ se denomina comúnmente el toro de dimensión n. Importancia especial tiene en nuestro estudio el toro de dimensión 1, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Se puede trabajar indistintamente en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o en $\mathbb{T}$ (también en dimensiones superiores a 1) pero usualmente se hace en el toro con la operación producto.

- Si $n \in \mathbb{N}$ el grupo $n\mathbb{Z}$ no tiene mucho interés por ser isomorfo como grupo topológico a $\mathbb{Z}$ pero el cociente de ambos $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nos da el grupo finito de n elementos.

- Grupos abelianos que tengan notación multiplicativa, además de el toro de dimensión n antes comentado, están también los más básicos como $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^+$ o $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

- Dentro de los grupos no abelianos los más importantes son los grupos de matrices regulares de orden n con coeficientes reales o complejos. $GL_n(\mathbb{R})$ y $GL_n(\mathbb{C})$ denotan los grupos de matrices reales o complejas con determinante distinto de 0, cuando consideramos como operación de grupo el producto de matrices. Estos grupos tienen unos subgrupos especialmente importantes que vamos a describir a continuación. Con este fin presentamos la siguiente notación. Si $A=(a_{i,j})\in GL_n(\mathbb{C})$, definimos su traspuesta $A^t=(a_{j,i})$ y su conjugada $\overline{A}=(\overline{a_{i,j}})$.

- $O(n)=\{A\in GL_n(\mathbb{R}):\ A=A^{t^{-1}}\}$, el grupo de las matrices ortogonales es un subgrupo del grupo $GL_n(\mathbb{R})$. Es compacto. También es importante el subgrupo $SO(n)$ de aquellas matrices de $O(n)$ cuyo determinante vale 1.

- Otro subgrupo destacado de $GL_n(\mathbb{C})$ es el de las matrices unitarias $U(n)=\{A\in GL_n(\mathbb{C}):\ \overline{A}=A^{t^{-1}}\}$. Es también compacto. De forma análoga se define $SU(n)$ como las matrices de $U(n)$ cuyo determinante vale 1.

- Dentro de otro orden de ideas el grupo libre $\mathbb{F}_n$ generado por n elementos es también un grupo topológico localmente compacto cuando consideramos en él la topología discreta. De hecho cualquier grupo se convierte en grupo topológico localmente compacto considerando la topología discreta.

- Por último, si tenemos un conjunto finito de grupos localmente compactos $G_1,\dots,G_n$ su producto $G\times\cdots\times G_n$ con la topología producto es también un grupo localmente compacto.

Posiblemente la importancia de los grupos localmente compactos reside en la existencia de una medida con propiedades muy especiales. Esta es la medida de

Haar. La construcción de la medida de Haar es laboriosa pero está recogida casi en todos los manuales sobre Análisis Armónico; por ejemplo la construcción puede ser consultada en [11]. La existencia de la medida de Haar viene dada por el siguiente resultado.

B.1.15 Teorema. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una medida positiva λ definida sobre la σ-álgebra de Borel de G que satisface las siguientes afirmaciones.*

1. $\lambda(U) > 0$ *para cualquier abierto no vacío U de G.*
2. $\lambda(K) < \infty$ *para cualquier compacto K de G.*
3. $\lambda(tA) = \lambda(A)$ *para cualquier conjunto boreliano $A \subset G$ y cualquier $t \in G$.*
4. $\lambda(U) = \sup\{\lambda(K) : K \subseteq U \text{ y } K \text{ compacto }\}$, *para cualquier abierto U de G.*
5. $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ abierto }\}$ *para cualquier conjunto boreliano $A \subset G$.*
6. *Si λ' es otra medida verificando las condiciones anteriores se tiene que existe una constante positiva c de forma que*
$$\lambda'(A) = c\lambda(A)$$
para cualquier conjunto boreliano $A \subset G$.

A la medida cuya existencia garantiza el teorema anterior (y que, obviamente, puede ser considerada en la completación de la σ-álgebra de Borel) se le llama medida de Haar sobre G. Realmente la medida de Haar no es única sino que, como afirma el resultado anterior, cualesquiera dos medidas de Haar difieren en una constante. Nosotros fijaremos una medida de Haar λ y todo el trabajo lo haremos con respecto a esa medida.

Hablando con propiedad, el teorema anterior lo que nos proporciona es una medida de Haar *izquierda* sobre G. La cuarta afirmación que debe cumplir la medida de Haar significa que es invariante por traslaciones izquierda en el grupo. Análogo al teorema anterior hay otro afirmando la existencia y unicidad (salvo constantes positivas, por supuesto) de una medida sobre G verificando las mismas propiedades anteriores pero cambiando la cuarta por la invarianza de la medida por traslaciones derecha. Pero observemos que si λ es nuestra medida de Haar fijada sobre G y definimos $\widetilde{\lambda}$ sobre los elementos de B_λ como $\widetilde{\lambda}(A) = \lambda(A^{-1})$ para $A \in B_\lambda$ se tiene que $\widetilde{\lambda}$ es una medida *derecha* sobre G. Además toda medida *derecha* se obtiene de esta forma. Existe, pues, una simetría total entre medidas de Haar *izquierda* sobre un grupo G y medidas de Haar *derecha* sobre el mismo grupo. Lo habitual es trabajar con la medida de Haar *izquierda* y nosotros hemos decidido mantener esta convención. Es decir, λ verifica las afirmaciones del teorema anterior, pero se puede hacer una teoría análoga con una medida de Haar *derecha*.

La existencia de la medida de Haar, afirmada en el teorema anterior, es conocida explícitamente en una amplia cantidad de grupos. Mencionaremos algunos de los más usuales.

- En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, la medida de Haar es la medida de Lebesgue.
- En el grupo multiplicativo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la medida de Haar es la medida cuya integral asociada viene dada por

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} f(x)d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{f(x)}{|x|}dx$$

  para $f \in C_{00}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donde la integral del segundo miembro de la igualdad se entiende respecto a la medida de Lebesgue.
- En el grupo multiplicativo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la medida de Haar es la medida cuya inte-

gral asociada viene dada por

$$\int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} f(x+iy)d\lambda(x+iy) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy)dxdy/(x^2+y^2)$$

para $f \in C_{00}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, donde la integral del segundo miembro de la igualdad se entiende respecto a la medida de Lebesgue.

- En $\mathbb{Z}$, así como en todos los grupos discretos, la medida de Haar es la medida contadora.

- En $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la medida es la medida de Lebesgue. Si vemos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como el toro $\mathbb{T}$ entonces la medida de Haar es la medida de Lebesgue dividida por 2π.

- En $GL_n(\mathbb{R})$ la medida de Haar es la medida cuya integral asociada es la dada por
$$\int_{GL_n(\mathbb{R})} f(T)d\lambda(T) = \int_{GL_n(\mathbb{R})} f(T)dT/|\det T|^n,$$
para $f \in C_{00}(GL_n(\mathbb{R}))$, donde dT es la medida de Lebesgue en el espacio de las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{R}$. En este caso, aunque el grupo es no abeliano, la medida de Haar es tanto una medida *izquierda* como *derecha*.

Si el lector quiere completar el conocimiento de las medidas de Haar sobre grupos concretos puede consultar [11] o [13], donde se dan explícitamente las medidas de Haar en otros grupos concretos.

Obsérvese que si tenemos λ la medida de Haar *izquierda* en un grupo topológico localmente compacto G y nos tomamos $x \in G$ podemos definir otra medida de Haar *izquierda* en G, λ_x mediante la expresión $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$ para $E \in B_\lambda$. La unicidad de la medida de Haar *izquierda* sobre G nos proporciona un número positivo $\Delta(x)$ que verifica que $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. A la correspondiente función que se obtiene $\Delta : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ se le llama función modular de G, y es un homomorfismo de G en $(\mathbb{R}^+,\cdot)$. La función modular mide, en cierta manera, lo que le falta a una medida *izquierda* para ser una medida *derecha*. Evidentemente, si el grupo es abeliano, la función modular vale constantemente el valor 1 pero, además, por ser un homomorfismo de G en $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, si el grupo es compacto la función modular también vale constantemente 1 y, por tanto, toda medida *izquierda* es también una medida *derecha* cuando el grupo topológico es compacto. Los grupos en los que $\Delta \equiv 1$ se llaman grupos unimodulares.

Como hemos afirmado anteriormente consideraremos fijada una medida de Haar *izquierda* λ y no se hará mención expresa a dicha medida. Así, por ejemplo, si $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función integrable respecto a dicha medida notaremos simplemente $\int_G f(t)dt$ para referirnos a $\int_G f(t)d\lambda(t)$.

El espacio vectorial $\mathbb{C}^G = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}\}$ de las funciones con dominio en G con valores complejos tiene varios subespacios vectoriales destacados con los que trabajamos frecuentemente a lo largo de toda la memoria. Por ejemplo, notaremos por $C(G)$ y $C_0(G)$ los espacios de las funciones continuas y continuas que se anulan en ∞ sobre G respectivamente. Ambos subespacios, con la norma $\|f\|_\infty = \{\sup |f(t)| : \quad t \in G\}$ son espacios de Banach. Otros espacios de Banach destacados son los espacios

$$L^p(G) = \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \text{ es medible y } \left[\int_G |f(t)|^p dt \right]^{1/p} < \infty \right\}$$

donde $1 \leq p < \infty$ con la correspondiente $\| \ \|_p$. Como es usual, estamos identificando funciones que difieren en un conjunto de medida nula. Obsérvese que la definición de los anteriores espacios no cambia si elegimos como prefijada una medida de Haar distinta. Lo que sí cambia es la norma, que queda multiplicada por la correspondiente constante.

La definición de $L^\infty(G)$ es más delicada. Si la medida λ es σ-finita, lo cual ocurre si, y sólo si, G es σ-compacto (que son los casos más importantes para nosotros), entonces la definición de $L^\infty(G)$ es la habitual.

$$L^\infty(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} : \text{ existe } M > 0 : \lambda(\{t \in G : |f(t)| > M\}) = 0\}$$

definiéndose $\|f\|_\infty$ como el ínfimo de las constantes M que verifican la anterior condición.

En el caso de que la medida λ no sea σ-finita, entonces se debe involucrar el concepto de medida local nula. En este caso $f \in L^\infty(G)$ si existe $M > 0$ verificando que para cualquier $\Delta \subset G$ con $\lambda(\Delta) < \infty$ se tiene que $\lambda(\{t \in \Delta : |f(t)| > M\}) = 0$. La norma $\|f\|_\infty$ vuelve a ser el ínfimo de los M que verifican la condición anterior.

En el espacio vectorial $\mathbb{C}^G$ tenemos dos tipos de aplicaciones destacadas: Las traslaciones izquierda y derecha.

B.1.16 Definición. Sea G un grupo topológico localmente compacto y sea $t \in G$. Definimos las traslaciones izquierda y derecha por t, $L_t, R_t : \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}^G$ como

$$L_t(f)(s) = f(t^{-1}s)$$

$$R_t(f)(s) = f(st)$$

para cualesquiera $f \in \mathbb{C}^G$ y $s \in G$.

En un principio puede parecer extraña la definición de L_t. La razón es bien sencilla si se quiere que las aplicaciones $t \mapsto L_t$ y $t \mapsto R_t$ sean homomorfismos de grupo, ya que con las anteriores definiciones se tiene que

$$L_{ts} = L_t L_s \quad \text{y} \quad R_{ts} = R_t R_s$$

para s y t en G.

Obsérvese que en el caso abeliano ambas traslaciones izquierda y derecha por $t \in G$ son, básicamente, la misma; realmente en dicho caso se tiene que $R_t = L_{t^{-1}}$. En este caso, cuando G es abeliano, no haremos distinción entre traslaciones izquierda y derecha y consideraremos $T_t = R_t$ para $t \in G$.

B.1.17 Definición. Sea G un grupo topológico localmente compacto y sean f y g funciones de $L^1(G)$. Se define la convolución de f y g, como la función $f * g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(f*g)(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)dt.$$

La integral que define la convolución de f y g existe para casi todo $s \in G$ y se verifica que

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

como consecuencia de la invarianza por traslaciones de la medida de Haar y el Teorema de Fubini. También es fácil demostrar que la convolución es asociativa. Además es conmutativa si, y sólo si, el grupo G es abeliano. Así $L^1(G)$ está dotado, con la convolución como producto, de estructura de álgebra de Banach, que además es conmutativa si el grupo es abeliano.

Utilizando la equivalencia entre la medida de Haar *izquierda* y *derecha* y la invarianza de dichas medidas por traslaciones izquierda y derecha respectivamente se obtienen distintas expresiones de la convolución. Para f y g en $L^1(G)$ se tiene que

$$(f*g)(s) = \int_G f(st)g(t^{-1})dt = \int_G f(t^{-1})g(ts)\Delta(t^{-1})dt = \int_G f(st^{-1})g(t)\Delta(t^{-1})dt.$$

La convolución puede ser definida en un ambiente más amplio que para funciones de $L^1(G)$. Si consideramos $M(G)$ el conjunto de las medidas de Radon de G con valores complejos y acotadas y tenemos μ y ν dos medidas en $M(G)$, denotaremos por $\mu \times \nu$ la medida producto en $G \times G$. Para un conjunto de Borel B de G el conjunto $E_B = \{(s,t) \in G \times G : \quad st \in B\}$ es un conjunto de Borel en $G \times G$. Si definimos

$$(\mu * \nu)(B) = (\mu \times \nu)(E_B)$$

tenemos que $\mu * \nu \in M(G)$.

La convolución de medidas sigue siendo asociativa, y es conmutativa si, y sólo si, el grupo G es abeliano. Además, para $\mu, \nu \in M(G)$, se tiene que $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$, donde $\|\mu\|$ es la variación total de μ. Pero si consideramos δ_s la medida concentrada en un elemento $s \in G$, es decir $\delta_s(E) = 0$ si $s \notin E$ y $\delta_s(e) = 1$ si $s \in E$, se tiene que que $\mu * \delta_1 = \delta_1 * \mu = \mu$ para cualquier $\mu \in M(G)$, y $M(G)$ es un álgebra de Banach con unidad δ_1. Además se tiene que si $s, t \in G$ entonces $\delta_{st} = \delta_s * \delta_t$.

Que δ_1 pertenezca a $L^1(G)$ depende de que la topología de G sea la discreta. Esto nos motiva el siguiente resultado.

B.1.18 Proposición. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. El álgebra $L^1(G)$ tiene unidad si, y sólo si, G tiene la topología discreta. En particular, si G es compacto entonces $L^1(G)$ tiene unidad si, y sólo si, G es finito.*

En cualquier caso G tiene unidades aproximadas izquierda y derecha, es decir existe una red (f_α), con $\alpha \in \Lambda$, de funciones de $L^1(G)$ verificando que para cualquier $f \in L^1(G)$, las redes $(f * f_\alpha)$ y $(f_\alpha * f)$ convergen en media a f.

No olvidemos que $L^1(G)$ puede ser interpretado como el subconjunto de $M(G)$ consistente en las medidas que son absolutamente continuas con respecto a la medida de Haar y, en este sentido, la convolución definida para medidas no es más que una extensión de la definición de convolución para funciones de $L^1(G)$. Obsérvese que, con la convolución como producto, $L^1(G)$ es un ideal bilátero de $M(G)$ y, si $\mu \in M(G)$ y $f \in L^1(G)$, la convolución se comporta de la siguiente forma.

$$(\mu * f)(s) = \int_G f(t^{-1}s)d\mu(t) \ \text{ y } \ (f * \mu)(s) = \int_G f(st^{-1})\Delta(t^{-1})d\mu(t)$$

para cualquier $s \in G$. En particular, para medidas concentradas en un punto $x \in G$

se tiene que

$$\delta_x * f = L_x(f) \ \text{ y } \ f * \delta_x = R_{x^{-1}}(f)\Delta(x^{-1})$$

para cualquier $f \in L^1(G)$.

B.2. Grupos abelianos

En esta sección daremos algunos resultados que son exclusivos de grupos topológicos localmente compactos y abelianos. En el caso en que el grupo sea abeliano la notación usual suele ser la aditiva. Así el neutro lo denotaremos 0 y el inverso de un elemento t se denotará $-t$. De todas formas no hay que olvidar que también hay grupos abelianos que tienen como operación el producto. Baste pensar en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ o en $\mathbb{T}$. Este último grupo, el toro de dimensión 1, cumple una labor decisiva en lo que sigue. En el caso en que el grupo topológico localmente compacto sea abeliano tenemos un concepto adicional en la estructura de grupo como es la dualidad.

B.2.1 Definición. Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Un carácter de G es un homomorfismo continuo γ de G en $\mathbb{T}$. El conjunto de todos los caracteres de G, con el producto definido puntualmente, es un grupo abeliano que se denomina el grupo dual de G y se nota $\widehat{G}$. El neutro de $\widehat{G}$ es el carácter que toma constantemente el valor 1. Resumiendo, las propiedades que cumple el grupo dual $\widehat{G}$ son las siguientes.

1. $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$ para cualesquiera $s,t \in G$ y $\gamma \in \widehat{G}$ y, en consecuencia, $\gamma(0) = 1$ para todo $\gamma \in \widehat{G}$.
2. $(\gamma\eta)(s) = \gamma(s)\eta(s)$ para cualesquiera $\gamma, \mu \in \widehat{G}$ y $s \in G$.
3. $\gamma(-s) = \gamma(s)^{-1} = \overline{\gamma(s)}$ para $s \in G$ y $\gamma \in \widehat{G}$.

En $\widehat{G}$ se pueden considerar varias topologías interesantes. Una de ellas es la topología de la convergencia puntual pero la que da unas propiedades más interesantes es la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Si tenemos $\gamma \in \widehat{G}$, una base de entornos de γ en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos estaría formada por conjuntos de la forma

$$V_{\varepsilon,K} = \{\eta \in \widehat{G} : \; |\gamma(x) - \eta(x)| < \varepsilon, \;\; \text{para todo} \;\; x \in K\}$$

donde ε varía en los positivos y $K \subset G$ varía entre los compactos de G.

B.2.2 Teorema. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Entonces $\widehat{G}$ con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es también un grupo topológico localmente compacto y abeliano.*

En todo nuestro trabajo cuando hablamos del grupo dual $\widehat{G}$ de un grupo localmente compacto y abeliano estamos considerando a $\widehat{G}$ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, sin necesidad de hacer mención especial a este hecho. Cuando G es discreto o compacto se puede obtener una información más amplia sobre el grupo dual. Si G es compacto se tiene que $\widehat{G} \subset L^\infty(G) \subset L^p(G)$ para $p \geq 1$ y de ello se obtienen interesantes propiedades. Recordemos que cuando G es compacto la medida de Haar la consideramos normalizada de forma que la medida de G sea 1.

B.2.3 Proposición. *Sea G un grupo topológico compacto y abeliano. Entonces $\widehat{G}$ es un conjunto ortonormal de $L^2(G)$.*

B.2.4 Proposición. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Si G es compacto entonces $\widehat{G}$ es discreto y si G es discreto, entonces $\widehat{G}$ es compacto.*

En algunos de los grupos clásicos el espacio dual es conocido.

B.2.5 Proposición. *Si $y \in \mathbb{R}$ entonces el operador $\gamma_y(x) = e^{2\pi iyx}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{T}$ define un carácter en $\mathbb{R}$ y además todo carácter en $\mathbb{R}$ tiene esta forma. La aplicación $y \mapsto \gamma_y$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\widehat{\mathbb{R}}$. De forma análoga el dual de $\mathbb{R}^n$ puede identificarse con $\mathbb{R}^n$ para cualquier natural n.*

B.2.6 Proposición. *Sea $n \in \mathbb{Z}$ y definamos el operador $\gamma_n : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ como $\gamma_n(z) = z^n$. Entonces $\gamma_n \in \widehat{\mathbb{T}}$ y la aplicación $n \mapsto \gamma_n$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de $\mathbb{Z}$ sobre $\widehat{\mathbb{T}}$.*

B.2.7 Proposición. *Sea $a \in \mathbb{T}$ y definamos $\gamma_a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{T}$ como $\gamma_a(n) = a^n$. Entonces $\gamma_a \in \widehat{\mathbb{Z}}$ y la aplicación $a \mapsto \gamma_a$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de $\mathbb{T}$ sobre $\widehat{\mathbb{Z}}$.*

B.2.8 Proposición. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el grupo finito de n elementos $\mathbb{Z}_n$. Dado $p \in \mathbb{Z}_n$ se define la aplicación $\gamma_p : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{T}$ como $\gamma_p(q) = e^{2\pi ipq/n}$. Entonces $\gamma_p \in \widehat{\mathbb{Z}_n}$ y la aplicación $p \mapsto \gamma_p$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\widehat{\mathbb{Z}_n}$.*

La dualidad también tiene un comportamiento esperable con el producto de grupos.

B.2.9 Proposición. *Sean $G_1, \ldots, G_n$ un conjunto finito de grupos topológicos localmente compactos y abelianos. Entonces*

$$(G_1 \times \cdots \times G_n)\widehat{\ } \cong \widehat{G}_1 \times \cdots \times \widehat{G}_n.$$

Siguiendo en el ambiente de grupos abelianos tenemos otro concepto de vital importancia en el desarrollo del análisis armónico como es la transformada de Fourier. Recordemos su definición.

B.2.10 Definición. Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Se denomina transformada de Fourier al homomorfismo contractivo $\widehat{\ }$ definido en $L^1(G)$ con valores en $C_0(\widehat{G})$ como

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(t)\overline{\gamma(t)}dt.$$

A la imagen de una función $f \in L^1(G)$ por la transformada de Fourier se le llama transformada de Fourier de f y la imagen de la transformada de Fourier se denota $A(\widehat{G})$, el álgebra de Fourier de G, que es un subespacio denso de $C_0(G)$.

La transformada de Fourier aquí presentada es una generalización de los conceptos clásicos de (coeficientes de) series de Fourier en el caso de que $G = \mathbb{T}$ y también de la transformada de Fourier clásica de funciones de $L^1(\mathbb{R})$.

Al afirmar en la definición anterior que la transformada de Fourier es un homomorfismo de $L^1(G)$ en $C_0(\widehat{G})$ estamos afirmando que la transformada de Fourier está bien avenida con la convolución. Este hecho es trascendental para nosotros. En el resultado siguiente se recoge esta propiedad así como la relación de la transformada de Fourier con las traslaciones, que también es de vital importancia en el desarrollo de todo nuestro trabajo.

B.2.11 Teorema. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Si $f, g \in L^1(G)$, $\gamma \in \widehat{G}$ y $t \in G$ se tiene que*

1. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.
2. $\widehat{T_t(f)}(\gamma) = \gamma(t)\widehat{f}(\gamma)$.

B.2.12 Notas.

- Dado $\gamma \in \widehat{G}$, la aplicación $\varphi_\gamma : L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi_\gamma(f) = \widehat{f}(\gamma)$ para $f \in L^1(G)$ es claramente lineal. Este hecho junto con la primera afirmación del teorema anterior nos da que dicha aplicación es un homomorfismo (no trivial) de $L^1(G)$ en $\mathbb{C}$. Pero es más, cualquier homomorfismo de $L^1(G)$ en $\mathbb{C}$ se obtiene mediante el procedimiento anterior para conveniente $\gamma \in \widehat{G}$. Además, si $\gamma \neq \mu$ se tiene que $\varphi_\gamma \neq \varphi_\mu$.
- Si $\gamma, \mu \in \widehat{G}$ y $f \in L^1(G)$ se verifica que
$$\widehat{\mu f}(\gamma) = T_{\mu^{-1}} \widehat{f}(\gamma).$$

Si interpretamos $L^1(G)$ como el subespacio $M_a(G)$ de $M(G)$, ya anteriormente comentado, de las medidas de $M(G)$ que son absolutamente continuas con respecto a la medida de Haar, la definición de transformada de Fourier de funciones de $L^1(G)$ puede ser extendida a medidas de $M(G)$.

B.2.13 Definición. Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Se define la transformada de Fourier como la aplicación $\widehat{\ }: M(G) \longrightarrow C(\widehat{G})$ definida por
$$\widehat{\mu}(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(t)} d\mu(t)$$
para $\mu \in M(G)$ y $\gamma \in \widehat{G}$.

La transformada de Fourier, cuando se considera en el ambiente de medidas recibe, en la mayoría de los textos, el nombre de transformada de Fourier-Stieltjes. La transformada de Fourier-Stieltjes comparte muchas propiedades con la transformada de Fourier.

B.2.14 Teorema. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *Si $\mu \in M(G)$, entonces $\widehat{\mu} : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ es uniformemente continua y acotada.*

2. *Si $\mu, \eta \in M(G)$ entonces $\widehat{\mu * \eta} = \widehat{\mu}\,\widehat{\eta}$.*

3. *Dada $\gamma \in \widehat{G}$, la aplicación $\varphi_\gamma : M(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\varphi_\gamma(\mu) = \widehat{\mu}(\gamma)$ es un homomorfismo de álgebras.*

4. *Si $f \in L^1(G)$ y μ_f es la medida con función de densidad f, entonces $\widehat{\mu_f} = \widehat{f}$.*

Finalmente vamos a hacer algunos comentarios acerca del Teorema de Pontrjagin sobre dualidad. Obsérvese que, para un grupo topológico G localmente compacto y abeliano, con grupo dual $\widehat{G}$, los elementos de G pueden interpretarse como caracteres de $\widehat{G}$. Es decir, para cada $t \in G$ tenemos un carácter $\phi(t)$ en $\widehat{G}$ definido por $\phi(t)(\gamma) = \gamma(t)$ para $\gamma \in \widehat{G}$. ϕ es claramente un homomorfismo de grupos de G en $\widehat{\widehat{G}}$.

B.2.15 Teorema (Pontrjagin). *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. La aplicación $\phi : G \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}$ definida por $\phi(t)(\gamma) = \gamma(t)$ para $t \in G$ y $\gamma \in \widehat{G}$ es un isomorfismo de grupos topológicos.*

El Teorema de Pontrjagin tiene consecuencias importantes para el desarrollo de nuestro trabajo. Los siguientes resultados son ejemplos de ello. En primer lugar enunciaremos el Teorema de unicidad de Fourier.

B.2.16 Teorema. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano y sean $\mu, \eta \in M(G)$, con $\widehat{\mu} = \widehat{\eta}$. Entonces $\mu = \eta$. En particular, si $f, g \in L^1(G)$ con $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces $f = g$.*

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado.

B.2.17 Corolario. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Entonces $M(G)$ y $L^1(G)$ son álgebras semisimples.*

Además la dualidad entre grupos compactos y discretos es totalmente simétrica.

B.2.18 Corolario. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano. Si $\widehat{G}$ es compacto entonces G es discreto y si $\widehat{G}$ es discreto entonces G es compacto.*

El Teorema de Pontrjagin nos proporciona también una pulcra dualidad entre subgrupos y cocientes de grupos topológicos localmente compactos y abelianos. Si H es un subgrupo cerrado de un tal grupo G se define

$$H^{\perp} = \{\gamma \in \widehat{G} : \ \gamma(t) = 1, \ \forall t \in H\}.$$

$H^{\perp}$ es claramente un subgrupo cerrado de $\widehat{G}$.

B.2.19 Proposición. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano y H un subgrupo cerrado de G. Entonces $H^{\perp\perp} = H$.*

B.2.20 Teorema. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano y H un subgrupo cerrado de G. Sea $q : G \longrightarrow G/H$ la aplicación cociente y consideremos las aplicaciones $\Phi : (G/H)\widehat{\ } \longrightarrow H^{\perp}$ y $\Psi : \widehat{G}/H^{\perp} \longrightarrow \widehat{H}$ definidas como $\Phi(\gamma) = \gamma \circ q$ para $\gamma \in (G/H)\widehat{\ }$ y $\Psi(\gamma H^{\perp}) = \gamma_{|H}$ para $\gamma \in \widehat{G}$. Entonces Φ y Ψ son isomorfismos de grupos topológicos.*

La sobreyectividad de la aplicación Ψ del teorema anterior nos proporciona un teorema del tipo Hahn-Banach para grupos topológicos.

B.2.21 Teorema. *Sea G un grupo topológico localmente compacto y abeliano y H un subgrupo cerrado de G. Entonces todo carácter de H se puede extender a un carácter de todo el grupo G.*

B.3. Grupos no abelianos

En esta sección vamos a presentar algunos conceptos relacionados con grupos localmente compactos no abelianos. El principal concepto es el de representación unitaria de un grupo G localmente compacto. Una definición que, cuando el grupo es abeliano, ya es conocida aunque no la hayamos definido con ese nombre. A partir del concepto de representación unitaria obtendremos resultados interesantes para nuestro estudio como el Lema de Schur o el Teorema de Gelfand-Raikov. Como ya hemos comentado anteriormente, por costumbre se utiliza la notación multiplicativa en la operación de grupo cuando este es no abeliano, frente a la notación aditiva utilizada usualmente en el caso de grupos abelianos.

B.3.1 Definición. Sea G un grupo localmente compacto. Una representación unitaria de G es un homomorfismo π de G en el grupo $U(H_\pi)$ de operadores unitarios sobre algún espacio de Hilbert H_π, que es continua con respecto a la topología fuerte de operadores.

Dicho de otra forma, una representación unitaria de G es una aplicación $\pi : G \longrightarrow U(H_\pi)$ verificando las siguientes propiedades.

1. $\pi(st) = \pi(s)\pi(t)$ para cualesquiera $s,t \in G$.
2. $\pi(s^{-1}) = \pi(s)^{-1} = \pi(s)^*$ para $s \in G$.
3. La aplicación $t \mapsto \pi(t)x$ de G en H_π es continua para cualquier $x \in H_\pi$.

Realmente la segunda propiedad es consecuencia de la primera y de que la imagen de π esté dentro de los operadores unitarios en H_π. Al espacio de Hilbert H_π se le llama el espacio de representación de π y su dimensión es lo que se llama la dimensión de la representación unitaria π.

Podrían definirse otro tipo de representaciones de un grupo G en algún grupo de operadores lineales continuos e invertibles en algún espacio vectorial topológico, pero nosotros solamente trabajaremos con representaciones unitarias. Así, si alguna vez falta la palabra unitaria acompañando a la representación o bien es por error o bien para no hacer demasiado reiterativa la exposición pero en cualquier caso debe entenderse que cualquier representación es unitaria.

El ejemplo más inmediato de representación unitaria de un grupo G es la representación trivial que lleva a cualquier elemento del grupo en la aplicación identidad en un espacio de Hilbert. Evidentemente esta representación no da mucha información sobre la estructura de grupo. Aparte de la representación trivial también es estándar la representación regular izquierda asociada a la traslación izquierda por elementos del grupo. Si G es un grupo localmente, la representación regular izquierda de G, $\pi_L : G \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$ está definida como

$$\pi_L(t)f(s) = L_t f(s) = f(t^{-1}s)$$

para $s,t \in G$ y $f \in L^2(G)$. Los operadores de traslación derecha R_t , $t \in G$, también inducen una representación regular derecha. Si en $L^2(G)$ consideramos fijada una medida de Haar derecha la representación $\pi_R : G \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$ definida como $\pi_R(t)f(s) = R_t f(s) = f(st)$ para $s,t \in G$ y $f \in L^2(G)$ es una representación unitaria de G. Pero si en $L^2(G)$ consideramos nuestra medida de Haar izquierda la representación $\widetilde{\pi}_R : G \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$ definida como $\widetilde{\pi}_R(t)f(s) = \Delta(t)^{1/2}R_t f(s) = \Delta(t)^{1/2}f(st)$ para $s,t \in G$ y $f \in L^2(G)$ es también una representación unitaria de G en $L^2(G)$, donde Δ es la función modular de G.

Asociado al concepto de representación unitaria tenemos relacionados otros conceptos.

B.3.2 Definición. Sea G un grupo localmente compacto y sean π_1 y π_2 dos representaciones unitarias de G. Un operador de intercambio entre π_1 y π_2 es una aplicación lineal y continua $T : H_{\pi_1} \longrightarrow H_{\pi_2}$ verificando que $T\pi_1(t) = \pi_2(t)T$ para todo $t \in G$. Cuando dicho operador exista se dirá que las representaciones π_1 y π_2 son equivalentes.

Como ejemplo más inmediato de representaciones equivalentes tenemos las dos representaciones regulares derecha π_R y $\widetilde{\pi}_R$. El operador $T : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ definido por $T(f) = \Delta^{1/2} f$ es el operador de intercambio (obsérvese que en el dominio de T estamos considerando la medida de Haar derecha y en el codominio la medida de Haar izquierda). También se tiene que π_R es equivalente a la representación regular izquierda π_L mediante el operador de intercambio $T(f)(s) = f(s^{-1})$ para $f \in L^2(G)$ y $s \in G$.

B.3.3 Definición. Sea π una representación unitaria de un grupo localmente compacto G y $M \subset H_\pi$ un subespacio cerrado de H_π. M se dice que es invariante por π si $\pi(t)M \subset M$ para todo $t \in G$.

Si π admite un subespacio M invariante y no trivial ($M \neq \{0\}$ y $M \neq H_\pi$), entonces se dice que π es reducible. En caso contrario se dirá que la representación es irreducible.

Ya tenemos definidos los elementos básicos del análisis armónico sobre grupos localmente compactos: las representaciones unitarias e irreducibles de dichos grupos. Más concretamente, las clases de equivalencia de dichas representaciones con respecto a la relación de equivalencia de ser equivalentes. Hay una relación entre la irreductibilidad de una representación unitaria y los operadores de intercambio. Es el siguiente resultado.

B.3.4 Lema (de Schur). *Sea G un grupo localmente compacto. Una representación unitaria π de G es irreducible si, y sólo si, el conjunto de operadores de intercambio entre π y sí misma se reduce a la identidad. Si π_1 y π_2 son dos representaciones irreducibles de G equivalentes entonces el conjunto de los operadores de intercambio entre π_1 y π_2 tiene dimensión* 1.

Como consecuencia del Lema de Schur tenemos el siguiente resultado que describe las representaciones cuando el grupo es abeliano.

B.3.5 Corolario. *Sea G un grupo localmente compacto y abeliano. Entonces todas sus representaciones unitarias e irreducibles tienen dimensión* 1.

En el caso de que el grupo sea abeliano las representaciones unitarias e irreducibles del grupo no son más que los caracteres del grupo.

Realmente, las representaciones unitarias e irreducibles de un grupo localmente compacto son la base del Análisis Armónico, aunque por el momento no hemos visto que exista tal cantidad de representaciones de ese tipo como para determinar la estructura del grupo. Sin embargo, sí que hay bastantes, como prueba el siguiente resultado.

B.3.6 Teorema (de Gelfand-Raikov). *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces el conjunto de las representaciones unitarias e irreducibles de G separan los puntos de G. Es decir, si $s,t \in G$ con $s \neq t$, entonces existe una representación unitaria e irreducible π de G verificando que $\pi(s) \neq \pi(t)$.*

Cada representación unitaria π de un grupo localmente compacto G determina una representación de $L^1(G)$, a la que seguiremos llamando π, de la siguiente forma. Si $f \in L^1(G)$, definimos el operador acotado $\pi(f) : H_\pi \longrightarrow H_\pi$ como

$$\pi(f) = \int_G f(t)\pi(t)dt,$$

entendiendo este operador definido en su forma débil, es decir, para cada $u \in H_\pi$ se define $\pi(f)u$ por su acción sobre cada $v \in H_\pi$ que es

$$\langle \pi(f)u, v\rangle = \int_G f(t)\langle \pi(t)u, v\rangle dt. \tag{B.1}$$

Obsérvese que para cada $u, v \in H_\pi$ el operador $t \mapsto \langle \pi(t)u, v\rangle$ está acotado por lo que la integral en la derecha de la expresión B.1 tiene sentido. Además $|\langle \pi(f)u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|\|f\|_1$, y $\pi(f)$ es un operador lineal en H_π con $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$.

Por ejemplo, si consideramos π_L la representación regular izquierda del grupo G en $L^2(G)$ entonces $\pi_L(f)g = f * g$ para $f \in L^1(G)$ y $g \in L^2(G)$.

Las principales propiedades generales de la representación de $L^1(G)$ quedan recogidas en el siguiente resultado.

B.3.7 Teorema. *Sea π una representación unitaria de un grupo localmente compacto G. Entonces se verifican las siguientes propiedades.*

1. $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$, *para* $f, g \in L^1(G)$.
2. $\pi(f^*) = \pi(f)^*$, *para todo* $f \in L^1(G)$.
3. $\pi(t)\pi(f) = \pi(L_t f)$, *para* $t \in G$ *y* $f \in L^1(G)$.
4. $\pi(f)\pi(t) = \Delta(t^{-1})\pi(R_{t^{-1}} f)$, *para* $t \in G$ *y* $f \in L^1(G)$.
5. *El operador* $\pi : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{L}(H_\pi)$ *no es idénticamente nulo.*

Volviendo a las propiedades de las representaciones, cuando están definidas en el grupo, se tiene el siguiente resultado en grupos compactos.

B.3.8 Teorema. *Sea G un grupo compacto. Entonces cualquier representación unitaria e irreducible de G es de dimensión finita.*

El teorema de Gelfand-Raikov garantiza que las representaciones unitarias e irreducibles de un grupo separan los elementos del grupo. Si el grupo es compacto (o abeliano) el teorema anterior garantiza que las representaciones unitarias, irreducibles y de dimensión finita separan los puntos del grupo, pero en general las representaciones de dimensión finita no tienen por qué separar los puntos del grupo.

B.3.9 Definición. Sea G un grupo localmente compacto. Notaremos $\widehat{G}$ al conjunto de las clases de equivalencia de las representaciones unitarias e irreducibles de G. A la clase de equivalencia de una tal representación π la denotaremos como $[\pi]$. Así la expresión "$[\pi] \in \widehat{G}$" hay que entenderla como que π es una representación unitaria e irreducible de G.

En $\widehat{G}$ se suele considerar una topología estándar, que pasamos a discutir.

Sea G un grupo localmente compacto. Si $f \in L^1(G)$, podemos definir

$$\|f\|_* = \sup\{\|\pi(f)\| : [\pi] \in \widehat{G}\}.$$

Claramente $\|\cdot\|_*$ es una seminorma en $L^1(G)$ verificando que $\|f\|_* \leq \|f\|_1$ para cualquier $f \in L^1(G)$. Las principales propiedades de $\|\cdot\|$ quedan recogidas en el siguiente resultado.

B.3.10 Teorema. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. $\|\cdot\|_*$ *es una norma en* $L^1(G)$.

2. $\|f * g\|_* \leq \|f\|_* \|g\|_*$ *para* f *y* g *en* $L^1(G)$.

3. $\|f^*\|_* = \|f\|_*$ *para* $f \in L^1(G)$.

4. $\|f^* * f\|_* = \|f\|_*^2$ *para* f *en* $L^1(G)$.

Así, las operaciones de álgebra y la involución de $L^1(G)$ están bien avenidas con la norma $\|\cdot\|_*$. A la completación de $L^1(G)$ con la norma $\|\cdot\|_*$ se le llama la *C^*-álgebra de grupo de G* , $C^*(G)$. A los elementos de $C^*(G)$ los seguiremos notando como a los elementos de $L^1(G)$ aunque propiamente no tienen por qué pertenecer a $L^1(G)$. Como ejemplo, en el caso abeliano, para $f \in L^1(G)$, es $\|f\|_* = \|\widehat{f}\|_\infty$ y $C^*(G)$ es isométricamente $*$-isomorfo a $C_0(\widehat{G})$.

Toda $*$-representación de $L^1(G)$ se extiende de forma única a una $*$-representación de $C^*(G)$ y, además, (véase el capítulo 12 de [25]) toda $*$-representación esencial de $C^*(G)$ induce una representación unitaria de G. Hay, por tanto, una correspondendencia biunívoca entre representaciones unitarias de G y $*$-representaciones esenciales de $C^*(G)$. Si π es una representación unitaria de G, su núcleo

$$\ker(\pi) = \{f \in C^*(G) : \ \pi(f) = 0\}$$

es un ideal bilátero y cerrado de $C^*(G)$. Este tipo de ideales, los ideales de la forma $\ker(\pi)$ con π una representación unitaria e irreducible de G, se llaman ideales primitivos de $C^*(G)$.

$$\mathrm{Prim}(G) = \{\ker(\pi) : \ [\pi] \in \widehat{G}\}.$$

Obsérvese que no dependen del representante elegido dentro de la clase de equivalencia $[\pi]$.

Si U es un subconjunto no vacío de $\mathrm{Prim}(G)$, se define $\overline{U} \subset \mathrm{Prim}(G)$ como

$$\overline{U} = \{I \in \mathrm{Prim}(G) : \ I \supset \bigcap_{J \in U} J\}.$$

También definimos $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

B.3.11 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto y sean $U, V \subset \mathrm{Prim}(G)$. Entonces se tiene que $U \subset \overline{U}$, $\overline{\overline{U}} = \overline{U}$ y $\overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V}$, y existe una única topología en $\mathrm{Prim}(G)$ con respecto a la cual $\overline{U}$ es la clausura de U.*

Esta topología recibe el nombre de topología *Hull-kernel* en $\mathrm{Prim}(G)$ y es siempre T_0.

Si G es un grupo localmente compacto y $[\pi] \in \widehat{G}$ su núcleo $\ker(\pi) \in \mathrm{Prim}(G)$ y la aplicación $[\pi] \mapsto \ker(\pi)$ de $\widehat{G} \longrightarrow \mathrm{Prim}(G)$ es sobreyectiva. Es posible definir entonces una topología en $\widehat{G}$ de la siguiente forma. Un subconjunto de $\widehat{G}$ es abierto si es de la forma $\{[\pi] \in \widehat{G} : \ \ker(\pi) \in U\}$ para un abierto U en la topología Hull-kernel de $\mathrm{Prim}(G)$. La topología así definida en $\widehat{G}$ se llama topología de Fell de $\widehat{G}$.

B.3.12 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto. Si G es abeliano entonces la topología de Fell de $\widehat{G}$ coincide con la topología usual de convergencia uniforme sobre compactos. Si G es compacto, entonces la topología de Fell de $\widehat{G}$ es la topología discreta.*

Cuando G no es abeliano ni compacto la topología de Fell de $\widehat{G}$ no tiene por qué ser Hausdorff.

Para terminar este apéndice vamos a definir la versión para grupos de los llamados *polinomios trigonométricos* clásicos de la transformada de Fourier. Cuando G es un grupo abeliano $\widehat{G}$ es un conjunto de funciones continuas sobre G. En el caso no abeliano el correspondiente conjunto de funciones continuas sobre G son los *elementos matriciales* de las representaciones unitarias e irreducibles de G.

Si π es una representación unitaria e irreducible de G, dado $u, v \in H_\pi$ un elemento matricial de π es la función $\phi_{u,v} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $\phi_{u,v}(t) = \langle \pi(t)u, v \rangle$ para $t \in G$. Si $t \in G$ y u, v son elementos de una base ortonormal de H_π entonces $\phi_{u,v}(t)$ es una de las entradas de la matriz que representa a $\pi(t)$ en dicha base. En el caso en que la representación sea de dimensión finita, entonces, fijada una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en H_π, llamaremos $\pi_\mathcal{M}$ a la matriz que representa a π en $\{e_1, \ldots, e_n\}$, es decir $\pi_\mathcal{M}(t)$ es la matriz unitaria que representa a $\pi(t)$ en dicha base. Obsérvese que la función $t \mapsto \pi_\mathcal{M}(t)$ de G en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una función continua. Representado matricialmente $\pi_\mathcal{M}(t) = (\pi_{i,j}(t))$ donde $\pi_{i,j}(t) = \langle \pi(t)e_j, e_i \rangle$, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Llamaremos polinomios trigonométricos a las funciones continuas $\pi_{i,j}$ definidas en G con valores en $\mathbb{C}$, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. El conjunto de todos los polinomios trigonométricos se obtiene cuando movemos $[\pi] \in \widehat{G}$. Para $[\pi] \in \widehat{G}$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal en H_π, los polinomios trigonométricos $\pi_{i,j}$, para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, además de ser elementos de $C(G)$, son funciones acotadas, por ser $\pi_\mathcal{M}$ una matriz unitaria.

Bibliografía

[1] E. ALBRECHT AND M. M. NEUMANN, *Automatische stetigkeitseigenshaften einiger klassen linearer operatoren,* Math. Ann. **240**, (1979), 251–280.

[2] C. APARICIO AND A. R. VILLENA, *Continuity of operators intertwining with convolution operators,* J. Funct. Anal. (to appear).

[3] L. BAGGETT, *Uniqueness of translation invariant norms,* J. Funct. Anal., **10** (1972), 131–148.

[4] J. BOURGAIN, *Translation invariant forms on $L^p(G)(1 < p < \infty)$,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **240** (1986), 97–104.

[5] C. CHOU, LAU, A. T. M., AND J. ROSENBLATT *Approximation of compact operators by sums of translations,* Illinois J. Math, **29** (1985), no. 2, 340–350.

[6] H. G. DALES, *Banach algebras and automatic continuity,* London Math. Soc. Monographs. New Series, 24. Oxford University Press, New York, 2000.

[7] V. G. DRINFELD, *Finitely-additive measures on S^2 and S^3, invariant with respect to rotations, (Russian)* Funktsional. Anal. i Prilozhen **18**, (1984), no. 3, 77.

[8] J. EXTREMERA, J. F. MENA AND A. R. VILLENA, *Uniqueness of the topology on $L^1(G)$,* Studia Math. **150** (2002), 163–173.

[9] J. EXTREMERA, J. F. MENA AND A. R. VILLENA, *Uniqueness of norm on $L^p(G)$ and $C(G)$ when G is a compact group,* aceptado para publicación en J. Funct. Anal.

[10] J. EXTREMERA AND A. R. VILLENA, *Uniqueness of the norm on $L^1(G)$ when $G \in [MAP]$,* sometido para publicación.

[11] G. B. FOLLAND, *A course in abstract harmonic analysis,* CRC Press, 1995.

[12] W. HEBISCH AND J. KRAWCZYK, *A remark on discontinuous translation invariant functionals on $L^p(G)$ for certain compact groups G,* Mh. Math. **114**, (1992), 111–114.

[13] T. HUSAIN, *Introduction to topological groups,* Robert E. Krieger publishing company, inc. 1966.

[14] K. JAROSZ, *Uniqueness of translation invariant norms,* J. Funct. Anal. **174** (2000), 417–429.

[15] B. E. JOHNSON, *The uniqueness of the (complete) norm topology,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 537–539.

[16] B. E. JOHNSON, *Continuity of linear operators commuting with continuous linear operators,* Trans. Amer. Math. Soc. **128** (1967), 88–102.

[17] B. E. JOHNSON, *Continuity of homomorphisms of Banach modules,* Pacific J. Math. Soc. **120** (1985), 111–121.

[18] B. E. JOHNSON AND A. M. SINCLAIR, *Continuity of derivations and a problem of Kaplansky,* Amer. J. Math. **90** (1968), 1067–1073.

[19] B. E. JOHNSON AND A. M. SINCLAIR, *Continuity of linear operators conmuting with continuous linear operators II,* Trans. Amer. Math. Soc. **146** (1969), 533–540.

[20] C. J. LESTER, *Continuity of operators on $L_2(G)$ and $L_1(G)$ conmuting with translations,* J. London Math. Soc. (2), **11** (1975), 144–146.

[21] G. A. MARGULIS, *Some remarks on invariant means,* Monasth Math. **90** (1980), 233–235.

[22] G. H. MEISTERS, *Some problems and results on translation-invariant linear forms,* Radical Banach algebras and automatic continuity, (Long Beach, Calif., 1981) ,423–444, Lectures Notes in Math., **975**, Springer, Berlin, 1983.

[23] G. H. MEISTERS AND W. M. SCHMIDT, *Translation-invariant linear forms on $L^2(G)$ for compact abelian groups,* J. Funct. Anal. **11** (1972), 407–424.

[24] T. W. PALMER, *Banach algebras and the general theory of $*$-algebras, Volume I: Algebras and Banach algebras,* Cambridge University Press, 1994.

[25] T. W. PALMER, *Banach algebras and the general theory of $*$-algebras, Volume II:$*$-algebras,* Cambridge University Press, 2001.

[26] C. E. RICKART, *The uniqueness of norm problem in Banach algebras,* Ann. of Math. (2) **51** (1950), 615–628.

[27] H. RINDLER, *Unitary representations and compact groups,* Arch. Math. **58** (1992), 492–499.

[28] H. RINDLER, *On weak containment properties,* Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 561–563.

[29] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups,* Interscience Publishers, 1967.

[30] S. SAEKI, *Discontinuous translation invariant functionals,* Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 403–414.

[31] J. M. ROSENBLATT, *Translation invariant linear forms on $L_p(G)$* Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 226–228.

[32] A. M. SINCLAIR, *Automatic continuity of linear operators,* Cambridge University Press, 1976.

[33] Y. TAKAHASHI, *Functions with a unique mean value ans amenability,* Proc. Amer. Math. Soc. (3) **121** (1994), 775–777.

[34] A. R. VILLENA, *Uniqueness of the topology on spaces of vector-valued functions,* J. London Math Soc. (2) **64** (2001), 445–456.

[35] G. A. WILLIS, *Continuity of translation invariant linear functionals on $C_0(G)$ for certain locally compact groups G,* Mh. Math. **105** (1988), 161–164.

[36] G. S. WOODWARD, *Translation-invariant linear forms on $C_0(G)$, $C(G)$, $L^p(G)$ for noncompact groups,* J. Funct. Anal. **16** (1974), 205–220.

Glosario