Análisis y reflexión sobre la complejidad ontosemiótica de dos sistemas de prácticas planificados en el contexto de la práctica final del profesorado

Analysing and reflecting on two systems planned practices onto-semiotic complexity in the context of teachers training final practice

Silvia Etchegaray, Flavia Buffarini, Martina Olivares y Marianela Sosa

Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) - Argentina

Resumen

En este trabajo aplicamos algunas herramientas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticos al análisis de dos problemas docentes surgidos a estudiantes del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) en su último año de estudio en el marco de la Práctica Docente. El propósito de este trabajo es compartir -en tanto docentes e investigadores pertenecientes a una institución formadora de profesores- cómo algunas nociones y diferentes niveles de análisis didáctico ayudan a reflexionar sobre la propia práctica docente, permitiendo describir y explicar problemas ligados a la enseñanza y al aprendizaje que surgen en el ámbito de una clase de matemática.

Palabras clave: Configuraciones epistémicas, procesos, conflictos semióticos, formación de profesores

Abstract

In this article, some tools from the onto-semiotic approach to research in mathematical cognition and instruction are applied to analyse two teaching conflicts that some students from the Mathematics Teaching Training Course at the Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) faced along their last year of study in their Practicum context. Since this project was conducted by teachers and researchers from a teaching training centre, its aim is informing how some concepts and different levels of didactical analysis help teachers reflect on their own teaching practice, thus making it possible to describe and explain some teaching and learning conflicts in the Mathematics classroom.

Key words: Epistemic configuration, processes, semiotic conflicts, teacher training.

1. Introducción

En este artículo expondremos dos tipos de análisis que forman parte de sendos trabajos finales de la asignatura: Práctica Docente que se cursa durante el último año de la carrera del profesorado en Matemática en la Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina. En tales trabajos tratamos de aplicar herramientas metodológicas de la Didáctica de la Matemática, especialmente planteadas por el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). El ciclo formativo de nuestro profesorado culmina con la realización de un trabajo de reflexión sobre las propias prácticas de los futuros profesores, que les permita describir y explicar con fundamento didáctico-matemático problemas ligados a la enseñanza y al aprendizaje que les hayan surgido en el ámbito de alguna de sus clases de Matemática. En el apartado 2, se contextualizan las prácticas docentes que aquí se analizarán, para luego desplegar en el apartado 3, en forma consecutiva (3.1 y 3.2) los dos análisis realizados, con sus respectivas reflexiones, que intentan plantear la importancia de someter a un estudio que desvele la complejidad ontosemiótica de la planificación de una clase, a partir de la aplicación de los dos primeros niveles de análisis didáctico que

Etchegaray, S., Buffarini, F., Olivares, M. y Sosa, M. (2017). Análisis y reflexión sobre la complejidad ontosemiótica de dos sistemas de prácticas planificados en el contexto de la práctica final del profesorado. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

nos proporciona el EOS. Terminamos este trabajo con reflexiones finales realizadas por las docentes responsables de la asignatura sobre la importancia de este tipo de estudio por parte de los estudiantes sobre su propia experiencia docente en la formación inicial, apoyados en el uso de adecuadas herramientas conceptuales didáctico-matemáticas.

2. Descripción del contexto de reflexión

En el marco de la asignatura Práctica Docente, se llevaron a cabo 12 clases en un 2° año del nivel secundario, de la ciudad de Río Cuarto, Córdoba, Argentina, planificadas y gestionadas por una *pareja pedagógica* conformada por Martina Olivares y Marianela Sosa, junto al aporte y continua revisión / evaluación de las profesoras de dicho espacio curricular. A partir de diversos problemas docentes que surgieron en dichas clases, hemos escogido estudiar, analizar y reflexionar sobre dos de ellos. Uno que tuvo lugar en la primera clase de dicha práctica docente y otro ocurrido en un momento de la clase nº 5. El área en que se trabajó fue Geometría, específicamente se había solicitado la construcción de los criterios de congruencia de triángulos, por lo que en estas primeras clases se desarrolló el contenido: triángulos y sus diferentes construcciones -posibles o no de realizar con regla y compás, dados como datos las medidas de lados y/o ángulos- ; y construcción de la clasificación de los triángulos teniendo en cuenta lados, ángulos y lados - ángulos junto con la construcción de sus elementos notables, en particular la mediatriz de un segmento.

A continuación compartimos ambos análisis relatados por sendas practicantes.

3. Desarrollo de los dos análisis didácticos-matemáticos

3.1. Reflexión sobre la construcción de conjeturas

En primer lugar se construyó con los estudiantes un significado pragmático de circunferencia y triángulo, por ejemplo, la circunferencia entendida como una herramienta para construir y medir sin utilizar la regla como instrumento de medición. Consideramos menester aclarar este punto porque este significado pretendido e implementado se convertirá, luego de estudiar y analizar estas prácticas, en fuente de potenciales conflictos. En la segunda parte de la misma clase, se comenzó a estudiar, a través de la siguiente situación, las condiciones necesarias y suficientes para construir un triángulo a partir de la medida de sus lados, es decir se preguntaba: *dados los lados ¿siempre puedo construir un triángulo?, ¿qué condición se debe cumplir para que sea posible la construcción de un triángulo?*:

Problema 3: Dados los segmentos A y B: A ________________ B ______________________ Construir, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a A y otro lado igual a B. ¿Se pueden construir dos distintos? (Olivares y Sosa, 2012)
Problema 4 (se solicita de manera oral) ¿Qué sucede si se cambian las longitudes de los segmentos?

Si bien el objetivo principal de esta clase era comenzar a estudiar y analizar sobre qué condición se debe cumplir para que sea posible la construcción de un triángulo dados sus lados; nuestra intencionalidad docente estaba centrada en que los estudiantes *conjeturen* potenciales relaciones generales a partir de estos casos particulares que debieran cumplir las medidas de los lados dados como datos, hasta obtener la clásica propiedad: *Dados tres lados tal que la suma de las longitudes de dos de ellos sea mayor al tercer lado, se puede construir un solo triángulo***.** Esta intencionalidad docente no logró concretarse a través de la producción independiente de los estudiantes.

En este sentido, el propósito de este análisis particular, es desvelar qué fue lo que impidió a los estudiantes la elaboración de una conjetura y dejar al descubierto que aquello que se pedía, exigía un trabajo matemático mucho más profundo y complejo de lo que efectivamente se realizó, tanto en lo que se refiere al tipo de tareas dadas como al tipo de devoluciones realizadas. Los primeros interrogantes que nos planteamos fueron:

- *¿Qué contenidos matemáticos usaron los alumnos para resolver la situación en cuestión? ¿Y cuáles aprendieron a partir del trabajo con el mismo? ¿Qué contenidos/cuestiones no se tuvieron en cuenta en la planificación y, por ende, en la clase?*

- *¿Qué procesos son necesarios transitar para llegar a la elaboración de una conjetura por parte de los alumnos en esta temática particular? ¿En la planificación se tuvieron en cuenta o se naturalizaron alguno de estos procesos?*

La metodología empleada para realizar este estudio de reflexión sobre la práctica, tal como se señala en la introducción, corresponde al marco teórico y metodológico del EOS, a partir del cual fue posible reformular estos primeros interrogantes de la siguiente manera, constituyéndose esta acción en mi primer *gran avance conceptual*.

- *¿Qué problemas y prácticas se contemplan/realizan en torno a las situaciones problemáticas escogidas? ¿Cómo se secuencian?*
- *¿Qué objetos (lenguajes, problemas, propiedades, conceptos, procedimientos y argumentos) intervienen en estas prácticas? ¿Cuáles intervienen y cuáles emergen?*
- *¿Qué procesos matemáticos son activados en las prácticas matemáticas realizadas?*
- *¿Qué potenciales conflictos pueden ocurrir durante la realización de las prácticas matemáticas asociadas a las situaciones problemáticas en cuestión?*

- *¿Cuáles de estos existieron en la clase y no se lograron desentramar? ¿Por qué?*

Para tratar estos interrogantes, decidí realizar un análisis profundo/exhaustivo con herramientas didácticas específicas del EOS que me permitan poner al descubierto la complejidad epistémica de un modo/forma/tipo de trabajo matemático: *la construcción de una conjetura*. Ésta es esencialmente la producción que compartiré en este trabajo. De este modo, el objetivo de dicho análisis es ayudar a desnaturalizar, en un ámbito específico de la matemática, la Geometría, los objetos y procesos que están a la base de la construcción de una conjetura, en este caso en el ámbito de la Geometría. Para ello desarrollo, dos niveles de análisis didáctico – matemático, reconocidos por el EOS y aplicados a las potenciales prácticas resolventes de las situaciones planteadas, tanto en las realizadas al momento de planificar, y por ende convertirme en el experto que resuelve y define *significados pretendidos*, como en las efectuadas en un segundo momento al registro obtenido de la gestión de la clase. Estos últimos no se incluirán en este trabajo dado que su propósito se centra en compartir los análisis "*a priori*".

En un primer nivel de análisis se analiza la matemática en uso, puesta en juego en la resolución del problema, esto es, los objetos matemáticos que se necesitan poner a funcionar para dar solución al problema (objetos intervinientes), y los nuevos objetos y significados emergentes (objetos emergentes). Este momento se caracteriza por describir/mostrar un modo de -"*hacer*"- y de -"*decir*"- que permitan explicitar lo implícito (principalmente las relaciones entre objetos primarios) de las prácticas matemáticas que resuelven las situaciones problemáticas. Para ello se utilizó como herramienta metodológica que proporciona el EOS la: *configuración epistémica* (Font y Godino, 2006), que permite poner al descubierto la -"*red de relaciones*"- entre estos objetos primarios, producidos por la resolución de estas situaciones.

El objetivo de este primer análisis didáctico-matemático es mostrar la fortaleza metodológica del *segundo nivel de análisis* propuesto por el EOS y la forma en que aquí se llevó a cabo. Dado que el mismo se efectúa sobre el primer nivel de análisis realizado, se adjunta en el anexo I un modelo de las dos configuraciones epistémicas realizadas que corresponde al problema 3, en tanto significado pretendido. Además, para una mejor lectura y comprensión y habiendo tomado como modelo producciones como las que se propone por ejemplo en Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras (2016) se utiliza una tabla de doble entrada para resaltar las relaciones sinérgicas entre los objetos ostensivos y no ostensivos en las prácticas matemáticas. En estos cuadros de doble entrada, aparecen los objetos intervinientes y emergentes con su respectivo significado (en este contexto de uso donde se ponen a funcionar cada uno de estos objetos). Y en lo que respecta a los procedimientos y argumentos, como en la configuración epistémica se trata de atrapar las relaciones entre los diferentes elementos de significado, se decidió para su directa visualización describir en un mismo cuadro cada tipo de acciones con sus respectivos argumentos.

Ya situados en el segundo nivel de análisis del EOS, se identificaron procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, y también en los que emergen de ellas. Los procesos que voy a describir y analizar están sostenidos por cinco dualidades (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). En otras palabras, en el Anexo I se ponen en evidencia los objetos primarios y las relaciones entre ellos, y en el cuerpo del trabajo se describirá el funcionamiento de estos objetos desde 5 facetas duales (siempre aparecen juntas pero atrapan polos opuestos).

Se despliegan a continuación los procesos identificados indicando la dualidad que sostiene a cada uno de ellos, destacando ciertas palabras en cursiva, justamente aquellas que permiten detectar y explicitar potenciales conflictos semióticos.

Procesos de descomposición – reificación (dualidad sistémico – unitario):

El *objeto triángulo* es una *entidad unitaria*, es decir, los estudiantes pueden identificarlo y reconocerlo como una figura geométrica, mientras que para realizar su construcción geométrica solicitada para este problema, este objeto *interviene como un sistema* que se debe *descomponer* para su estudio. En dicho sistema se ponen en juego las nociones de punto, vértice, lado, longitud; además de las siguientes propiedades:

- No es posible construir un triángulo si los tres vértices están alineados.
- Un triángulo con las mismas medidas de sus ángulos y lados, rotado o reflejado sobre un eje es la misma figura geométrica porque conserva sus medidas y propiedades, es decir, son triángulos congruentes.

Procesos de representación – significación (dualidad expresión – contenido):

La circunferencia que se representa, para la resolución de este problema, con centro en un extremo del segmento A, que lo llamamos o, y con radio la medida del lado B,

$C(o;B)$, significa trasladar *la medida del segmento B* poniendo el acento en la fortaleza de esta representación del objeto circunferencia: no sólo hay un punto en el cual su distancia a *o* es *B*, sino que todos los puntos de la circunferencia distan *B* del centro *o*. La atribución de significado a esta expresión (circunferencia) requiere familiaridad con el uso del compás como herramienta para medir.

Procesos de materialización – idealización (dualidad ostensivo – no ostensivo):

Los *dos puntos diferentes* de la circunferencia que se deben elegir para resolver el problema es un ostensivo que evoca a los objetos no ostensivos: *dos triángulos distintos.*

La circunferencia se debe construir en alguno de los extremos de la base del triángulo para trasladar la medida del segundo lado. Esta disposición material (ostensiva) es la que evoca la idea de que *el ángulo* entre dos segmentos dados es una variable del problema (que varía entre 0º y 180º sin tocar los extremos), y por lo tanto puede ser elegida arbitrariamente para construir los dos triángulos diferentes, siempre y cuando no estén sobre la semirrecta o la semirrecta opuesta.

Procesos de particularización – generalización (dualidad ejemplar – tipo):

La *enunciación de la propiedad pretendida* exige también transitar un proceso especial de generalización; al actuar en forma dual el ejemplo como un particular y a su vez, como un *ejemplo tipo* cuando se debe dejar de pensar sobre los segmentos dados y pensar sobre *cualquier otra longitud* de los segmentos.

A su vez, el problema 4 requiere además de una *doble generalización*: por un lado, el objeto interviniente en las prácticas es la medida arbitraria (cualesquiera) de los segmentos A y B (esto ya exige una primera generalización); y por otro, el objeto emergente que se enuncia en la propiedad (la cantidad infinita de triángulos que se pueden construir con dichas medidas) vuelve a exigir una nueva generalización. En otras palabras, el proceso de generalización se aplica en esta tarea *tanto en los objetos intervinientes como en la construcción del objeto emergente.*

Como dijimos anteriormente, este nuevo nivel de análisis aporta información sobre la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática desplegada, y por lo tanto, permite posibles explicaciones sobre los conflictos semióticos que se pueden producir en el desarrollo de la misma. Así es que logramos detectar los siguientes potenciales conflictos:

- Dificultad para significar *el triángulo* como un sistema, es decir perder de vista las propiedades de reflexión y rotación del triángulo respecto de la semirrecta, y por ende *no identificar* los triángulos congruentes.
- Dificultad en reconocer al objeto *circunferencia* como una herramienta para la construcción de un nuevo objeto (su significado contextual es netamente pragmático, ligado a su uso, tal como se anticipara en este análisis).
- Dificultad al tener que asociar *un punto cualquiera de la circunferencia al vértice de un triángulo*, y a su vez como el elemento que determina el *ángulo* entre sus dos lados de dicho triángulo.
- Dificultad para generalizar el *objeto interviniente*, en otras palabras, utilizar los segmentos dados en el problema 3 siempre *como un ejemplo particular*.

- Dificultad para generalizar el *objeto emergente*, en otras palabras, el trabajo sobre dos medidas cualesquiera no implica comprender que cada par de segmentos que se elijan resultan ser un nuevo ejemplo para generar dos triángulos.

Primeras síntesis correspondientes a Martina

Esta producción me permite afirmar que la construcción de una conjetura, siempre asociada a la complejidad de una temática particular (en este caso la Geometría), exige, no sólo llevar adelante un simple proceso de particularización – generalización como nosotras habíamos planificado, sino poner a funcionar variados procesos elementales. En síntesis, lo que pone al descubierto este trabajo, a través de desvelar la complejidad ontosemiótica de un determinado proceso de estudio, es que la elaboración de conjeturas es un **mega–proceso,** denominado así por nosotras ya que resultó un emergente de otros varios procesos.

3.2 Reflexión sobre una clase para enseñar la mediatriz

Se "cerró" el trabajo anterior con la clasificación de triángulos, avanzando en la 5ª clase en la clasificación que caracteriza a *todos* los triángulos existentes – entendiéndolos como *todos los posibles de construir*. Luego se conformaron los grupos para comenzar un trabajo compartido que tenía como objetivo significar y trabajar algunas propiedades del *circuncentro,* punto que resulta de la intersección de las mediatrices correspondientes a cada uno de los lados de un triángulo, para lo que era necesario hacer emerger como nuevo conocimiento, en esta clase, al objeto geométrico *mediatriz***.**

Este objeto se comenzó a trabajar en el segundo momento de la clase, con el objetivo de *Construir la definición del elemento notable de los triángulos: mediatriz, a partir de una situación problemática.* (Olivares y Sosa, 2012)

La situación problemática seleccionada fue:

Problema 9

El verano pasado, tres primos enterraron una caja con tesoros personales y fotos a igual distancia de cada uno de los dos ombúes de la quinta del abuelo. Hoy quieren hallar la caja. ¿Son capaces de descubrir el lugar donde fue enterrada con este plano de la quinta? ¿Cuál es dicho lugar?

El objetivo del problema 9 era el de propiciar un trabajo autónomo que permitiera a los alumnos construir la definición de mediatriz de un segmento.. Dicho objetivo no se logra en el transcurso de la clase y soy yo, en tanto practicante docente- la que termina enunciando tal definición a partir de mis propias relaciones. Este hecho nos generó – junto a mi pareja pedagógica- los siguientes interrogantes:

> ¿Por qué no funcionó lo que habíamos planificado? ¿Por qué los estudiantes no pudieron construir el enunciado pretendido? ¿Por qué no pudieron identificar y comunicar *todos* los lugares posibles de encontrar el tesoro? ¿Por qué los estudiantes no pudieron dar como solución al problema el modelo matemático: *mediatriz*? ¿En qué la gestión de la clase no propició u obstaculizó su construcción?

Estos primeros cuestionamientos se centran sólo en la producción del alumno y la gestión del docente. En un principio delimitan un fenómeno pedagógico-cognitivo y lingüístico, que no problematiza las relaciones inherentes al saber involucrado que regulaba la producción matemática pretendida.

Es mi propósito en el trabajo final de la práctica, intentar que "*este hecho*" que reconozco como mi problema docente se logre explicar cómo un *fenómeno didáctico-matemático.* Para lograrlo, recurrí a la lectura de diversos textos que me permitieron adentrar a lo que significan los problemas didácticos, tales como Farras, Bosch y Gascón (2013); Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, O (2011), y reconocer así la importancia de su relatividad institucional, contextual y personal.

Las lecturas realizadas y, en particular esta posición respecto al saber dieron luz a mi proceso de reflexión pues, en un primer momento, me permitieron cuestionar el conocimiento matemático que entra en juego en el aula -en particular la mediatriz de un segmento- desde las diversas instituciones que participan e inciden en el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que me convocó a transformar las preguntas iniciales en los siguientes términos.

> *¿Cómo se caracteriza la mediatriz de un segmento en las diferentes instituciones productoras del saber matemático o de difusión de este conocimiento?*
>
> *¿Cuál es su modo de relacionarse con las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica? ¿Hay una única definición de mediatriz?*
>
> *¿Qué objetos (lenguajes, problemas, propiedades, conceptos, procedimientos y argumentos) intervienen en las prácticas que genera el problema seleccionado? ¿Cuáles intervienen y cuáles emergen?*
>
> *¿Qué relaciones se dan entre ellos? ¿Cómo se sintetizan esas relaciones?*

Éste fue un momento relevante de análisis didáctico con nuevas preguntas que ampliaron la visión reduccionista planteada en los inicios, transformándose en el gran impulso para llevar adelante el estudio reflexivo sobre mi práctica. Dado que el objetivo en este trabajo es mostrar cómo se generan explicaciones muy útiles para la formación de un futuro profesor en Matemática -en el marco de una visión epistemológica de la didáctica, me centraré en la producción realizada sobre los últimos cuatro interrogantes. En este sentido específicamente desplegaré el *análisis epistémico realizado al Problema 9.*

En primera instancia, y en mi carácter de profesora responsable del episodio a indagar, realicé una posible solución experta del Problema 9[1], la que se convierte en insumo para la construcción de la primera herramienta de análisis del E.O.S, la *configuración epistémica* (Font y Godino, 2006), cuyo funcionamiento y uso lo describiré a continuación. He aquí la primera fortaleza de esta actividad de investigación, pues es a través de esta práctica de investigación donde me surge la necesidad "matemática" de efectuar una *nueva* resolución experta que explicite las relaciones necesarias para que emerja el objeto mediatriz con el *significado pretendido*, como solución al problema.

Se adjunta en el Anexo II los elementos que conforman la configuración epistémica construida, mostrando en el cuerpo de este artículo el análisis realizado y su utilidad para mi problema docente, señalando con cursiva las relaciones que habían sido naturalizadas, tanto en la planificación en tanto "*significado pretendido*", como en el momento efectivo de la clase, en tanto "*significado implementado*".

---

[1] Era la solución pensada, por las dos practicantes, como óptima en el momento de realizar la planificación.

El funcionamiento de esta herramienta es lo que me permitió, por un lado:

Observar el funcionamiento de un *"círculo vicioso"* de relaciones entre el conocimiento necesario para resolver el problema con lo que se esperaba que emergiera como conocimiento nuevo. En efecto, al resolver el problema por medio del trazado de la mediatriz (procedimiento opción I y II), se necesita tener disponible la propiedad de que todos sus puntos son equidistantes de los extremos del segmento, lo cual se argumenta ya sea con la demostración deductiva de su teorema respectivo, o bien con algún trabajo en que se ponga de manifiesto que cada punto de la mediatriz responde a un radio diferente del trazado de las $C(A,r)$ y $C(B,r)$. Esto es lo que me permite hablar de un "círculo vicioso" pues la argumentación necesaria para validar este procedimiento es lo que queríamos que emergiera de la situación problema 9 y como se observa, quien lo resolviera, tenía que tenerlo disponible y hacerlo funcionar.

Y por otro lado, generar una *nueva* resolución, producto del proceso de construcción de la configuración epistémica, ya que al analizar la resoluciones por nosotras pensadas del trazado de la mediatriz (procedimiento I y II), donde se hacen visibles las propiedades y argumentos - disponibles y emergentes- que sostienen tales procedimientos, me surge el procedimiento III. Esta opción es la que hace emerger la propiedad de los puntos, que allí llamo C y D, equidistantes de los extremos del segmento *para todo* radio que tomemos, siempre que se planteen/discutan/expliciten sus argumentos.

La visibilización de esta *red de relaciones* (que explicita la configuración) me permite decir que es posible un trabajo matemático con esta actividad en un segundo año de la escuela media siempre que se ponga en discusión la argumentación y *el trabajo con varios r, para que podamos aproximarnos al "conflictivo" $\forall r$*, lo que permitiría hacer emerger en esta situación que tenemos tantos lugares posibles de encontrar el tesoro como r decidamos tomar. Ante esto, observo que si bien no hay duda del $\forall r : r \succ d(A,B)/2$, lo que implicaría infinitos lugares posibles de encontrar el tesoro, en *el contexto del problema tenemos un límite para recorrer el r (r tendrá máximo dado por la intersección de los puntos C y D con la "línea" que determina el terreno).* Esto no implica que deje de haber infinitos puntos en "esa porción de recta", lo que implica muchos lugares donde el tesoro se pueda encontrar, pero significa entender al infinito de una manera diferente al infinito potencial[2], pues es el *r* –que puede tomar infinitos valores- el que está determinando esa infinitud de lugares posibles de encontrar el tesoro. Sin embargo, me parece necesario mencionar que si pensamos en el espacio físico real donde la situación 9 se contextualiza, la *idea del infinito matemático hacia adentro* que se necesita es imposible de capturar, lo que refuerza el conflicto que se produce en el necesario proceso de descontextualización y re contextualización que exige este tipo de prácticas.

También la configuración visibiliza la diferencia del lenguaje que se utiliza en el contexto del problema respecto al lenguaje geométrico, lo que refuerza la conflictiva *relación epistémica entre el problema y los objetos geométricos a* enseñar.

Ante esto me pregunto, ¿Qué se tuvo en cuenta de toda esta complejidad ontosemiótica y cuán lejos se encuentran *estas relaciones* que exige la situación problemática con lo que se pensó en la planificación y lo que sucedió en la clase? Este es el nuevo interrogante alrededor del cual giró la producción final del trabajo de mi práctica.

[2] Infinito potencial asociado al significado que dado uno siempre existe otro más grande.

Primeras reflexiones de Marianela

El estudio realizado nos coloca, en primera instancia, ante la necesidad de desnaturalizar la relación y el pasaje de una definición a otra de la Mediatriz de un segmento. Pero específicamente con este trabajo se pone de manifiesto la importancia de realizar un análisis a priori del significado pretendido que deje al descubierto las relaciones que son necesarias y que emergen a partir de la situación problema seleccionada para trabajar en la clase, analizando no sólo variedad de procedimientos que era en donde habíamos centrado nuestra planificación- sino contemplando una ontología más amplia formada además por el lenguaje, la situación problema, los conceptos, las técnicas, las propiedades y sus argumentos. Y es en el marco de esa *red de relaciones* construida por todos estos elementos donde valdría ponernos a pensar sobre el proceso de *descontextualización* y *re contextualización* que es necesario llevar a cabo en la clase.

4. Reflexiones finales

La fortaleza que tiene un trabajo de este tipo, a realizar en el final de la carrera, está ligada a valorar la potencialidad de las herramientas didácticas para planificar la clase, llevarla a cabo y analizar su idoneidad, ayudando a describir y explicar problemas docentes mediante argumentos científicos ligados a la complejidad de los saberes en cuestión y a su manera de gestionarlos en clase. Al decir de Godino y Batanero (2009) *que los profesores* (en este caso futuros profesores) *aprendan a aprender de su propia experiencia.*

Referencias

Farras, B. B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educaçao Matematica Pesquisa,15* (1), 1-28.

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matematica Pesquisa, 8*, 67-97.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135

Godino y Batanero (2009) Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile). Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/eos/fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf

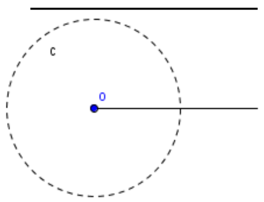
Godino, J. D., Font, V, Wilhelmi, M. R y Lurduy, O (2011) Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Godino, J. D., Giacomone, B., Blanco, T. F., Wilhelmi, M. R. y Contreras, A. (2016). Onto-semiotic configurations underlying diagramatic reasoning. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2. (pp. 291-298). Szegel, Hungary: PME

Olivares, M. y Sosa M. (2012). *Planificación de congruencia de triángulos. Práctica docente y curriculum.* Colegio La Merced, Río Cuarto. Argentina.

Anexo I Configuración epistémica del problema 3

Elementos Lingüísticos

Objeto	Significado
Verbales	
Construir	Construcción geométrica con regla y compás
Triángulo	Figura geométrica con tres segmentos unidos, y tres ángulos (significado que se construyó con los estudiantes en la actividad anterior)
Lado igual a A	Un lado del triángulo con la misma medida que el segmento A
Dos distintos	Dos triángulos que tengan diferentes medidas de sus lados - y por lo tanto ángulos - ya que la posición en la hoja no es una propiedad de la figura
Gráficos	
A	Segmento de longitud A
	Posibles vértices de los triángulos diferentes
Simbólicos	
A y B	Dos segmentos
$\overrightarrow{oc}$	Semirrecta
$C(o; A)$	Circunferencia con centro en o y radio A

Conceptos – Definiciones

Objeto	Significado
Intervinientes	
Segmento	Medida de un lado del triángulo
Semirrecta	Interviene como herramienta para la construcción geométrica
Triángulo	Figura geométrica con tres segmentos unidos, y tres ángulos (significado que se construyó con los estudiantes en la actividad anterior)
Lados de un triángulo	Segmentos que "cierran" la figura
Base de un triángulo	Lado en el que se "apoya" el triángulo (interviene implícitamente)
Circunferencia	Interviene como herramienta para la construcción geométrica
Procedimientos	*Argumentos*
Intervinientes	
Proponer uno de los dos segmentos como base del triángulo, supongamos B.	Es indistinto cuál de las dos medidas elegir como base, ya que rotando el triángulo se puede observar que la base es la otra medida que no se eligió en un principio.
Trazar una semirrecta $\overrightarrow{oc}$ donde vivirá la base del triángulo.	Se traza una semirrecta $\overrightarrow{oc}$ para poder construir el lado del triángulo con compás debido a su precisión y exactitud, en éste

	problema se convierte en una herramienta superadora para “medir” en comparación con la regla.
Trasladar la medida de B para comenzar a construir el triángulo: con el compas se mide B y se traslada dicha medida a la semirrecta, realizando la circunferencia con centro en o (inicio de la semirrecta) y radio B: $C(o;B)$. Llámese b al punto de intersección entre $\overrightarrow{oc}$ y $C(o;B)$.	Ambos extremos del segmento serán los vértices del triángulo, por lo tanto se puede trazar el lado A en cualquiera de los dos extremos.
Trasladar la medida de A hacia alguno de los extremos de B, supongamos o: trazar la circunferencia completa con centro en o y radio A: $C(o;A)$.	
Elegir un punto de $C(o;A)$ – excepto el punto de intersección entre $\overrightarrow{oc}$ y $C(o;A)$ – sea p, y trazar desde allí hasta b el segmento que será el tercer lado del triángulo Δobp .	En la circunferencia existen infinitos puntos que cumplen con la propiedad: $Sea\ p \in C(o;A) \rightarrow d(p;o) = A$ Todos los puntos de la circunferencia $C(o;A)$ son posibles vértices del triángulo, salvo el punto de intersección entre $\overrightarrow{oc}$ y $C(o;A)$, pues no es posible construir un triangulo si los tres vértices están alineados. Entones, existen infinitos puntos para elegir dónde se hallará el tercer vértice. Luego, escogiendo dos puntos diferentes entre sí y que no sean la intersección entre $\overrightarrow{oc}$ y $C(o;A)$, se podrán construir triángulos diferentes. Para visualizar con mayor claridad los triángulos diferentes construidos se pueden elegir puntos p y q tal que el ángulo $< bop$ sea obtuso y $< boq$ agudo, o viceversa. De este modo, es posible advertir que el ángulo entre dos segmentos dados es una variable del problema y puede ser elegida arbitrariamente.
Elegir otro punto de $C(o;A)$, sea q, y trazar desde allí hasta b el segmento que será el tercer lado del triángulo Δobq .	
Emergente	
Construir con compás dos triángulos distintos con las medidas A y B para sus lados.	Un triángulo con las mismas medidas de sus ángulos y lados, rotado o reflejado sobre un eje es la misma figura geométrica porque conserva sus medidas y propiedades, es decir, son triángulos congruentes.

Propiedades – Proposiciones

Objeto	**Significado**
Puesta a funcionar: a posición del triángulo en la hoja no es una propiedad de la figura.	Hace referencia a todos los triángulos que se encuentran debajo de la semirrecta $\overrightarrow{oc}$, ya que son congruentes a los de arriba.
Emergente: Sí es posible construir dos triángulos diferentes con los lados A y B.	Una vez hallada la técnica, se puede afirmar este enunciado que es la respuesta al problema.

Anexo II. Configuración epistémica del problema 9

Elementos Lingüísticos

Objeto	Significado
Coloquial	
Trazar la circunferencia…el segmento…la recta…	Construcción geométrica con regla y compás
Muchos, varios, puntos, ombúes, tesoros, lugares….	Identificación de los objetos “reales” con representaciones geométricas
Simbólicos	
C (A; r)	Circunferencia con centro en A y radio r
r> d(A,B)/2	El radio mayor que la mitad de la dist. de A a B
AB	Segmento AB

Procedimientos	*Propiedades/proposiciones/Teorema*	*Argumentos*
Pensar a cada árbol como punto y denotarlos A y B. I (Primera opción posible) Trazar la mediatriz del segmento AB por medio de: *Trazar y para algún r *Sea C y D los puntos de intersección de las y. *Trazar la recta que pasa por los puntos C y D. Dicha recta determina los posibles lugares en el que se puede encontrar el tesoro.	*Disponibles:* Los puntos pertenecientes a las circunferencias conservan distancia al centro de dicha circunferencia. La mediatriz de un segmento es el conjunto de los puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento, es decir, los puntos de la recta CD equidistan de A y B. *Emergentes:* C y D equidistan de A y B.	 Por definición de circunferencia. Demostración deductiva del teorema o algún tipo de trabajo en el que ya se le ha otorgado esa propiedad a los puntos pertenecientes de la mediatriz. (C equidista de A y B). Ídem para D.
II (Segunda opción posible) Trazar la mediatriz del segmento AB por medio de: *Trazar el punto medio del AB (m) y trazar la recta perpendicular al AB que pase por m, con regla y escuadra.- *Dicha recta determina los posibles lugares en el que se puede encontrar el tesoro.	*Disponibles:* La mediatriz de un segmento es el conjunto de los puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento, es decir los puntos de la recta equidistan de A y B. *Emergentes:* m equidista de A y B.	Demostración deductiva del teorema o algún tipo de trabajo en el que ya se le ha otorgado esa propiedad a los puntos pertenecientes de la mediatriz. Por definición de punto medio; m es punto medio del segmento AB, por lo que la distancia de m a A es la misma que la distancia de m a B.
III (Tercera opción posible) *Trazar y para varios para que podamos aproximarnos al r, y donde tendrá máximo dado por la intersección de los puntos C y D con la línea que determina el terreno. *Sea C y D los puntos de intersección de las y. Los distintos C y D determinarán los posibles lugares en el que se puede encontrar el tesoro.	*Disponibles:* _Los puntos de las circunferencias conservan distancia al centro. La distancia que conservan los puntos de la circunferencia al centro dependen del r. El plano del terreno me delimita un lugar geométrico. *Emergentes:* C y D equidistan de A y B, Considerar tantos como quiera, ya que tendrá máximo Existen tantos puntos equidistantes de A y B, en el terreno, como pueda considerar. Por lo que hay infinitos puntos que “se observan” que están alineados.	Por definición de circunferencia. Por definición de circunferencia y teniendo en cuenta que puedo variar el r, lo que implica una nueva circunferencia. C equidista de A y B). Ídem para D. Se hace presente el plano de la quinta que delimita el plano geométrico. Densidad de los números reales. Argumentación empírica.