La dualidad particular-general en el estudio de la propiedad conmutativa en ingeniería informática

The particular – general duality studying the commutative property in computer engineering

Carmen Ordóñez, Lourdes Ordóñez, Ángel Contreras y Juan Francisco Ruiz

Universidad de Jaén

Resumen

En esta investigación se analiza la influencia de un software científico como Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la propiedad conmutativa, cuando ésta se trabaja en teoría de grupos, apoyada por el uso de los recursos informáticos. Para ello se ha realizado una exploración con estudiantes del Grado de Ingeniería Informática de la Universidad de Jaén, que consta de dos pruebas: una escrita y otra con ordenador (con 61 y 144 estudiantes presentados, respectivamente). Mostramos la forma en que han abordado la resolución de las mismas extrayendo dificultades y errores y, detectando una inclinación en los métodos de trabajo elegidos, desde lo general a lo particular en la actividad matemática realizada por los estudiantes, debido a la influencia del entorno computacional.

Palabras clave: Conmutativa, Mathematica, particular, general, idoneidad didáctica.

Abstract

In this paper, we analyse the influence of the scientific software Mathematica in the teaching and learning of the commutative property, when it is developed in group theory, supported by computer resources. We have performed a research with students of Computer Engineering Degree in the University of Jaen. Two exercises have been analysed: one in theory class and the other, in practice class (61 and 144 students, respectively). We show the way they solve the tasks as well as their difficulties and mistakes. We detect tendencies in their working methods, from the general to the particular duality of mathematical activity, due to computer environment.

Keywords: Commutative, Mathematica, particular, general, didactical suitability.

1. Introducción

La propiedad conmutativa es un resultado conocido y utilizado desde las primeras etapas educativas en las que el niño se inicia en el aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, su estudio en los distintos niveles educativos está dotado de características didácticas diferentes, señaladas por los niveles de algebrización, que han sido abordados desde numerosos marcos teóricos. Concretamente, desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimientos y la instrucción matemáticos (EOS), Godino et al (2015) establecen seis niveles hasta la secundaria y señalan que, es en el último nivel de esta etapa, en el que se realiza la “introducción” de algunas estructuras algebraicas, como la de grupo o espacio vectorial. Parece obvio que, cuando la propiedad conmutativa se enmarca en el estudio profundo de una estructura de grupo, el nivel de abstracción aumenta y por tanto hay una mayor complejidad ontosemiótica. A pesar de que, como hemos visto, hay estudios para establecer los niveles de algebrización hasta la secundaria, no se han categorizado aún a nivel universitario. Esta comunicación profundiza en este sentido.

Ordóñez, C., Ordóñez, L., Contreras, A. y Ruiz, J. F. (2017). La dualidad particular-general en el estudio de la propiedad conmutativa en ingeniería informática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Por otro lado, el conocimiento de la estructura de grupo es obligatorio para un informático por sus sustanciales aplicaciones. En particular, el conjunto de las clases de restos módulo *n*, Z_n, que es un grupo finito conmutativo, tiene un papel esencial en la Teoría de Códigos, y su aritmética, aparece explícitamente en programas para codificar. Todo esto hace imprescindible que el estudio de esta estructura en el aula de teoría venga apoyado en el trabajo con ordenador.

En esta comunicación, a partir de unos breves antecedentes expondremos el problema de investigación, señalando las preguntas de investigación y el objetivo de la misma. Dentro del segundo apartado, tratamos, en primer lugar, los aspectos más relevantes para esta comunicación del marco teórico y la metodología, realizaremos el análisis didáctico a través de las entidades primarias y extraeremos los resultados. En el tercer apartado exponemos las conclusiones según las facetas cognitiva, mediacional y ecológica de la idoneidad didáctica (Godino, 2013).

2. Problema de investigación y antecedentes

Esta investigación forma parte de un trabajo avanzado de tesis doctoral cuyo objetivo general es describir y analizar la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Teoría de Números para los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS). Los trabajos de Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2013 y 2014), muestran algunos resultados de dicho proyecto respecto de los significados personales de estos estudiantes en el estudio de demostraciones que forman parte de la Aritmética modular, utilizando el programa Mathematica. En ellos se obtiene que este alumnado tiene dificultades en la comprensión del esquema de demostración analizado y que el uso de un software científico no está exento de conflictos.

Respecto de la relación entre los esquemas de demostración del Álgebra abstracta y las nuevas tecnologías, Harel y Sowder (2007), se preguntan "¿Podrían estas herramientas privar a los alumnos de la oportunidad de desarrollar las habilidades de manipulación algebraica necesarias para el desarrollo de una noción avanzada de la demostración, o, por el contrario, proporcionarles las mismas?" (p. 818).

La investigación de Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2015) muestra, a través de un estudio de manuales universitarios en el tema de divisibilidad, que se está produciendo una variación desde un lenguaje más formal hacia lo particular-concreto en los manuales estudiados. Font y Contreras (2008) afirman que "la investigación en Didáctica de la Matemática ha mostrado la importancia de lo particular y su relación con lo general en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, así como la complejidad de los factores asociados en ellos" (p. 1).

Distintos investigadores han constatado las dificultades de los estudiantes con el lenguaje simbólico. Harel y Sowder (2007) afirman que, incluso alumnos avanzados, tienen dificultades con los cuantificadores. Lacués (2011) estudia estas dificultades en una experiencia de enseñanza de sistemas matemáticos de símbolos en alumnos que ingresan en carreras de Ingeniería. Distéfano et al (2015) analizan algunos símbolos matemáticos (entre ellos $\forall$ o $\exists$) en alumnos que entran en carreras universitarias y cursan Matemáticas en su plan de estudios. También explican "Estos símbolos no son de uso frecuente en la escuela media pero son indispensables en el desarrollo de asignaturas de Matemática impartidas a nivel universitario” (p. 203).

Todo lo expuesto anteriormente, nos lleva a plantear las siguientes preguntas de investigación para este trabajo:

- ¿Qué fenómenos surgen en el aprendizaje de la conmutatividad cuando se trabaja con Mathematica?
- ¿De qué forma abordan los estudiantes de primer curso de Ingeniería el estudio de la propiedad conmutativa, en teoría de grupos, sin la posibilidad de utilizar recursos informáticos y habiendo estado la instrucción mediada por el ordenador? ¿qué dificultades han encontrado?
- ¿Qué impacto tiene la realización de prácticas de ordenador en la enseñanza y aprendizaje de la propiedad conmutativa? y ¿se pueden identificar tendencias en las realizaciones de los alumnos debido al trabajo con ordenador?

El objetivo general del trabajo es describir y analizar la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la propiedad conmutativa, en el contexto de teoría de grupos, para los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática, identificando las distintas formas de abordar el estudio de esta propiedad, bien sea desde un trabajo con lo particular (apoyado por el uso de los recursos informáticos) o bien desde lo general (basado en el desarrollo de demostraciones abstractas, propias de la Matemática Superior), detectando posibles variaciones y/o tendencias derivadas de esta instrucción en un entorno computacional y utilizando las herramientas que propone el EOS.

3. Elementos del marco teórico y aspectos metodológicos

Como ya hemos expuesto, esta investigación tiene como marco teórico de referencia el EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), el cual desarrolla herramientas para un estudio unificado de los fenómenos y procesos que acontecen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este marco teórico se propone distinguir seis tipos de objetos primarios para analizar la actividad matemática a: situaciones - problemas, lenguajes, conceptos, propiedades o proposiciones, procedimientos y argumentos, los cuales nos han permitido realizar un análisis didáctico de la situación propuesta. Por otra parte, los objetos matemáticos se pueden considerar desde diferentes facetas duales dependiendo del juego de lenguaje en el que participen. En este trabajo ha sido de especial relevancia la faceta intensivo-extensivo o general-particular, equivalente a la distinción entre ejemplar y tipo, presente en los procesos de ejemplificar o generalizar propios de la Matemática.

Por último, la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013), entendida como criterio sistémico de pertinencia de un proceso de instrucción, nos permitirá valorar el test de evaluación y extraer conclusiones, con objeto de analizar el aprendizaje de los estudiantes de la propiedad conmutativa.

Para alcanzar el objetivo marcado en esta investigación y debido a que la enseñanza ha tenido dos partes diferenciadas: una en el aula de teoría (donde se introdujeron los distintos axiomas que componen la estructura de grupo abeliano) y otra en el laboratorio de prácticas, donde se presentan programas con Mathematica para cada una de estas propiedades, en particular, la conmutativa, (Ruiz, 2008, p. 44). *La prueba escrita* se realizó en la hora de clase de teoría del grupo B, para lo que los estudiantes deben inscribirse on-line en un listado. Se apuntaron un total de 93 alumnos y se realizaron cuatro modelos de examen con las mismas características didácticas, que simbolizamos desde T1 a T4 (tabla 2). Al día siguiente, en el laboratorio, se realizó *la prueba con ordenador*. En este caso, para la muestra, se eligieron cuatro grupos de prácticas de los seis que componen la asignatura, pues son los que tienen su docencia en el mismo día de la semana. Cada grupo consta de 40 alumnos; la muestra se tomó de todos los que asistieron a clase y se realizaron dos opciones por grupo que notamos desde P1 a P8 (tabla 2). Exponemos los datos relativos a la muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1. Muestra

Alumnos	Prueba escrita (Aula teoría)	Prueba con ordenador (Laboratorio)			
	Grupo B	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Matriculados	126	40	40	40	40
Registrados on-line	93	-	-	-	-
Presentados	61	36	40	35	33
Total muestra	61	144			

Observamos que se analizaron un total de 205 pruebas correspondientes a 61 estudiantes que se presentaron a la parte escrita en el aula de teoría y 144 alumnos en el laboratorio.

4. Análisis a priori de las tareas

En este trabajo se realiza una investigación siguiendo la línea de Ordóñez (2011) y utilizando las entidades primarias, propias del marco teórico.

Situación-problema

Para el estudio de la propiedad conmutativa se propone realizar el mismo ejercicio en el aula de teoría y en el de prácticas. Se trata de probar si se verifica la propiedad conmutativa en los conjuntos Z_p con operación $x*y = kxy$, donde k es primo relativo con p (primo que varía también según los distintos modelos) y $2\leq k \leq 5$. Lo especificamos en la tabla 2:

Tabla 2. Opciones del problema según los grupos

Pruebas	Teoría				Prácticas							
Modelos	T1	T2	T3	T4	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Conjunto	Z_7	Z_7	Z_7	Z_7	Z_{89}	Z_{103}	Z_{101}	Z_{89}	Z_{101}	Z_{97}	Z_{101}	Z_{97}
$x*y =$	2xy	3xy	4xy	5xy	2xy	3xy	5xy	4xy	2xy	3xy	4xy	2xy

Para *la prueba de prácticas*, se tomaron p, primos altos (p=89, 97, 101 o 103) para obligar a introducir la operación interna de forma analítica. Así se hacía obligado pasar el programa adecuado. El alumno debía introducir, con Mathematica, órdenes para calcular Z_p y su tabla de operaciones, de la forma:

```
n=89;
G=Table[i,{i,0,n-1}]
operacion=Table[Mod[2x*y,n],{x,0,n-1},{y,0,n-1}]
```

y aplicar el programa CONMUTATIVA [G, operación] para demostrarla; esto es, $a*b = b*a$ para todo $a,b\in G$. Es importante conocer que dicho programa consiste en hacer dos bucles anidados que recorren todos los elementos de G, (variables a, b) comprobando, para cada iteración, que los dos elementos a∗b y b∗a son iguales.

En esta prueba de prácticas, se consideró si el alumno dejaba en blanco el ejercicio, lo hacía bien o lo hacía mal debido a errores que cometía al introducir los datos. En esta versión del problema con ordenador, era necesario implementar la operación interna, lo que supone entender y dominar el lenguaje de programación de Mathematica para conseguir una buena ejecución. Sin embargo, *en la prueba escrita* tomamos un primo p=7, pequeño pero en el que tuviera que hacer operaciones y las tablas no fueran tan sencillas como para p=3 o 5. En la figura 1 mostramos dos de los tres tipos de resolución que hemos encontrado:

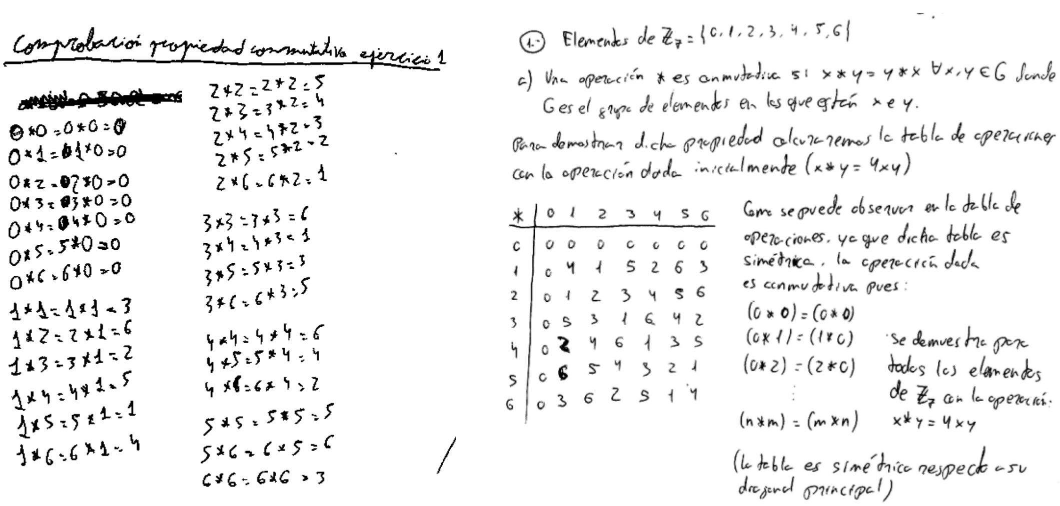

Figura 1. Tipos de resolución numérica (alumno 22) y tabular (alumno 19)

En la resolución de tipo numérico (alumno 22) se realizan dos bucles anidados, como el ordenador. En la tabular (alumno 19), se construye la tabla de operaciones y deduce la conmutativa de la simetría de la misma. Por último, en la de tipo abstracto se realiza una demostración deductiva basándose en que el producto en Z o Z_7 es conmutativo. En este caso se codificó: si el alumno dejaba en blanco el ejercicio, lo hacía bien o lo hacía mal por un error al introducir los datos del conjunto o la operación.

Lenguaje

En el caso de la *prueba escrita* se estudió qué tipo de lenguaje aparecía en el ejercicio realizado por el estudiante y se clasificó como numérico, tabular y vernáculo-algebraico o formal.

En el caso de la *prueba de prácticas*, el lenguaje utilizado es el de programación de Mathematica. Dicho lenguaje es riguroso para la sintaxis, de forma que distingue espacios, mayúsculas de minúsculas, y llaves, corchetes o paréntesis. Aquí se presentaron distintos conflictos semióticos (Godino, Batanero y Font, 2007). Por ejemplo, la operación 2xy tiene que introducirse como “2x∗y” o guardando el espacio “2x y” pues es la forma de utilizar el producto con Mathematica. También se presentaron errores en la forma de nombrar las variables. Todo esto está recogido en el gráfico 1 que se presenta más adelante.

Conceptos

Definición 1. $Z_p = \{\bar{a}: a \in Z\} = \{\ \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\ \}$ es el conjunto de las clases de restos módulo p. La clase de *a*, $\bar{a}$, se calcula a través del resto de dividir *a* entre el número primo positivo p.

Asociado a este concepto hemos detectado, en *las dos pruebas*, distintos conflictos semióticos que corresponden a la comprensión de las clases de restos (como decir que $\bar{9} \notin Z_p$), o del conjunto cociente Z_p (por ejemplo, no incluir la clase del 0). En el caso de la *prueba con ordenador*, hemos codificado: bien, mal o si no introduce el código para este conjunto (ver gráfico 1).

Definición 2. Un grupo se dice abeliano sii verifica la propiedad conmutativa.

Algunos estudiantes manifiestan la necesidad de definir o demostrar previamente todos los axiomas de grupo para poder trabajar la conmutativa. En Mathematica se ha implementado una orden denominada GRUPOABELIANO con la conjunción de todos los axiomas. Si se ejecuta y el programa devuelve *True,* es porque los verifica todos; sin embargo, si devuelve *False,* es porque no verifica alguno (en nuestro caso la propiedad del elemento simétrico). Al ocurrir esto el estudiante interpreta que esta propiedad no se verifica pues la consideran ligada a la estructura de grupo.

El concepto de operación interna requiere un cierto grado de abstracción para su utilización. Así vemos estudiantes que, ante el intensivo, describen $x*y=3xy$ pero $y*x=y3x$, o bien confunden la operación $*$ con el producto.

Proposiciones

En ocasiones hemos encontrado que se confunde la propiedad conmutativa con otras (como asociativa u operación interna). Bajo el epígrafe incoherencias, hemos agrupado otros errores, con menos presencia, y alguna proposición falsa encontrada *en ambas pruebas*, como que si se verifica la propiedad conmutativa entonces es un "grupo" conmutativo (sin demostrar el resto de axiomas). El uso de cuantificadores universal o existencial ($\forall$ o $\exists$) no está exento de dificultades. Así, en *la prueba escrita*, en clase de teoría, han aparecido enunciados de conmutativa, que se exponen en la tabla 3, donde se enuncia "$a*b = b*a$" (omitiendo que esto se verifica para cada a,b) u otros donde se cambian los símbolos $\forall$ y $\exists$.

Procedimientos

Los procedimientos empleados en la resolución de *la prueba escrita* han sido: numérico, tabular y abstracto. Los dos primeros (figura 1) vienen influenciados por el trabajo de la estructura en el ordenador mientras que el abstracto proviene de la utilización de propiedades algebraicas generales, lo que es un intensivo.

En *la prueba de prácticas*, distinguimos en esta entidad, entre los estudiantes que realizaban bien el ejercicio, con un buen procedimiento y los que no lo realizaban correctamente. Hay que aclarar que el código del programa asigna *True*, por defecto, de forma que, si hay un error en introducir los datos, aparece *True* como salida aunque el procedimiento no está bien. En este caso, los estudiantes no se han cuestionado la bondad del procedimiento dando toda la autoridad al ordenador.

Argumentos

En *la prueba escrita* encontramos argumentos que concluyen que la operación es o no conmutativa. En el caso afirmativo, no todas las argumentaciones son correctas. En la

Tabla 3 de resultados especificamos todos los casos. Algunos estudiantes argumentan, a partir de un ejemplo, que la propiedad se verifica para todos los elementos del conjunto, lo que señala la confusión entre cuantificadores universales y existenciales. Estos utilizan el extensivo (el ejemplo) como un intensivo (la demostración general). Medimos, también, aquellos estudiantes que, utilizando cualquier procedimiento, no argumentan y se limitan a decir "se observa que es conmutativa"

En *la prueba con ordenador,* constatamos aquellos alumnos que argumentan que es "grupo abeliano", pues verifica la conmutativa (sin estudiar el resto de axiomas).

5. Resultados

Analizando la muestra, sólo realizaron la prueba escrita, 61 estudiantes de 126 que forman el grupo B, un 48,4%. En el registro on-line desistió realizar el ejercicio algo más de un 26%. Este porcentaje tan bajo para la muestra, nos habla de la dificultad del tema de grupos para el alumnado.

Tabla 3. Resultados de la prueba escrita

Entidades		Frecuencia (Porcentaje)	Entidades		Frecuencia (Porcentaje)
Situación-problema	Blanco	3 (4,9)	Lenguaje	Numérico	3 (5,2)
	Bien introducida	54 (88,5)		Tabular	30 (51,7)
	Mal introducida	4 (6,6)		Formal	31 (53,4)
Conceptos	Bien	36 (62,1)	Procedimientos	Numérico	7 (12,1)
	Clase restos	6 (10,3)		Tabular	25 (43,1)
	Z_p	5 (8,6)		Abstracto	30 (51,7)
	Grupo abeliano	8 (13,8)		En blanco	0 (0)
Proposiciones	Operación interna	8 (13,8)	Argumentaciones	No argumenta	8 (13,8)
	Todo bien	41 (70,7)	Tabla	No conmutativa	2 (3,4)
	Falta $\forall$	8 (13,8)		Bien conmutativa	14 (24,1)
	Confunde $\forall$ y $\exists$	3 (5,2)		Mal conmutativa	1 (1,7)
	Con asociativa	1 (1,7)	Numérico	Bien	2 (3,4)
	Con op. interna	1 (1,7)		Un ejemplo	7 (12,1)
	Incoherencias	4 (6,9)	Deductivo	No conmutativo	3 (5,2)
				Sí, producto	24 (41,4)
				Sí, mal argumento	1 (1,7)

Observando la Tabla 3 de resultados (los porcentajes aparecen entre paréntesis y se obtienen sin contar los que lo han dejado en blanco), obtenemos que la entidad *situación-problema* nos ha permitido ver que el ejercicio ha resultado muy accesible para los estudiantes ya que sólo el 4,9% lo dejaron en blanco y el 88,5% introdujo bien los datos. Respecto a la entidad *conceptos*, se obtuvo que lo hicieron bien el 62,1%. Se presentaron conflictos semióticos en las clases de restos y $Z_{7,}$ que fueron estudiados en el primer cuatrimestre, y aún presentan dificultad para algunos alumnos.

De los datos que aparecen en las entidades: *lenguaje*, *procedimientos* y *argumentaciones* podemos extraer la forma en que los alumnos han trabajado la propiedad conmutativa. Los datos del *lenguaje* tabular, nos informan que el 51,7% de los estudiantes construyen la tabla de operaciones para Z_7, a pesar de que tenía que realizar bastantes cálculos. Es claro que utilizar un lenguaje vernáculo-algebraico para razonar que verifica la propiedad, es bastante más eficiente en este caso. La suma de los *procedimientos* numérico y tabular, que nos proporciona un método de trabajo de tipo particular-concreto, derivado del uso de recursos informáticos, arroja un 55,2% frente a un 53,4% que opta por lo abstracto-general. Respecto de las *argumentaciones*: los que razonaron bien a partir de la tabla fueron un 24,1%, y, por otro lado, los argumentos deductivos correctos fueron un 41,4%. Un 13,8% no argumentó, se limita a decir “se observa”, lo que nos indica la dificultad en este nivel para deducir de forma clara.

En la entidad *propiedades*, el 13,8% olvida el cuantificador universal en la definición, un 5,2% que confunde ∀ y ∃, y un porcentaje bajo confunde la conmutativa con otras propiedades. Casi el 71% no presenta dificultades o errores asociados a esta entidad.

En la *prueba de prácticas*, hemos analizado la ejecución del ejercicio con ordenador y resumimos los resultados en el diagrama de barras de la Figura 1.

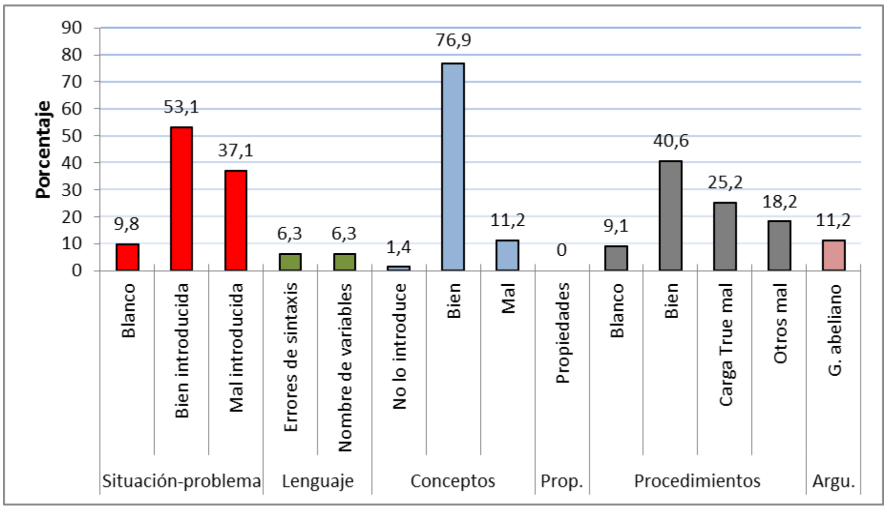

Figura 1. Resultados de la prueba escrita

Observando la entidad *procedimientos*, obtenemos que realizaron el ejercicio bien un 40,6% de los estudiantes. Teniendo en cuenta que un 9,8% lo dejaron en blanco (*situación-problema*) y un 9,1% no iniciaron los procedimientos (*procedimientos*), resulta que un 40,5% de los estudiantes mostraron errores. Lo distintos casos los hemos agrupado en dos categorías:

1. Dificultades relativas al entorno computacional
2. Dificultades relativas al contenido matemático

Es lógico que las categorías anteriores no sean disjuntas pues hay alumnos que presentan conflictos en ambas. En el primer bloque, deducimos de la entidad *situación-problema* que un 37,1% de estudiantes presenta bastantes dificultades con la introducción de los datos, en particular de la operación interna, debido a que debían comprender el lenguaje de programación de Mathematica para poder realizarlo con éxito. De la entidad lenguaje, un 6,3% tuvo errores de sintaxis y otro 6,3% tiene errores al nombrar las variables. También hay un 18,2% (*procedimientos*) que ejecuta mal el programa. Todos los estudiantes que se sitúan en este bloque muestran que el uso de un programa científico, a nivel universitario, no está exento de dificultades. No existe ningún software científico que no presente problemas y todos tienen determinadas exigencias o debilidades. En el caso de Mathematica, el programa tiene un lenguaje de programación muy asequible, pero es muy riguroso respecto de la sintaxis.

En el segundo bloque subrayamos aquellos estudiantes que consideran que la propiedad conmutativa está ligada a la estructura de grupo (*argumentaciones*), y argumentan mal a través de la función “GRUPO ABELIANO” (el 11,2%). También un 11,2% (*conceptos*) presentó conflictos relativos al conjunto de las clases de restos. Destacamos el alumnado que descarga toda la responsabilidad en el ordenador, y si le devuelve *True*, deduce que es conmutativa, aunque esté realizando mal ejercicio. Constituyen un 25,2% del total (*procedimientos*).

6. Conclusiones

De los resultados obtenidos en esta investigación, y teniendo en cuenta la noción de idoneidad didáctica (en sus facetas cognitiva, mediacional y ecológica) que propone el EOS, podemos valorar la enseñanza y aprendizaje sobre la propiedad conmutativa analizada en este test de evaluación, objetivo de este trabajo. Así, hemos observado que un tanto por ciento reducido de alumnos se registraron para hacer la prueba escrita y lo atribuimos a la dificultad del tema de grupos y al nivel de abstracción. Esto nos lleva a considerar un indicador de baja idoneidad cognitiva en lo que se refiere a conocimientos previos.

No podemos ignorar el hecho de que la muestra corresponde a estudiantes de Ingeniería Informática, por lo que el uso del ordenador es propio de su proyecto educativo y contribuye a su formación socio-profesional, lo que nos muestra una alta idoneidad ecológica en el tipo de enseñanza que reciben y de la que deriva la forma de abordar la resolución de esta situación.

En el análisis de esta prueba de evaluación hemos obtenido que si bien el estudio de la conmutatividad, en el aula de prácticas no está exento de dificultades, aporta una mayor riqueza a la hora de seleccionar el método de desarrollo desde lo particular-concreto, en la prueba escrita. También facilita el uso y comprensión de los cuantificadores al potenciar la faceta extensiva frente a la intensiva. Todo esto nos lleva a considerar que la idoneidad mediacional es media-alta.

Por último, en lo que respecta al aprendizaje, hay un tanto por ciento elevado de estudiantes que realizan correctamente la cuestión. Además, a través de los procedimientos (apoyado por los resultados del lenguaje y las argumentaciones), se ha podido observar que más de la mitad de los estudiantes (el 55,2 %) eligen un desarrollo tabular y/o numérico (influenciado por el uso de los recursos informáticos), lo que les permite abordar la resolución desde lo particular, mientras que el 53% aborda la resolución desde lo general. Estimamos que esto es debido al impacto del entorno computacional en el que se ha desarrollado la instrucción. El hecho de que la presencia de conflictos semióticos (como el uso de cuantificadores, clases de restos, etc.) tenga una baja incidencia, nos lleva a considerar que la idoneidad cognitiva es media.

Todo lo anterior nos permite detectar una inclinación hacia lo particular-concreto. Esto nos induce a pensar que, en el caso de la propiedad conmutativa, en un entorno de grupos, puede estar produciéndose un giro desde lo intensivo, propio de la Matemática Superior, hacia lo extensivo, que ahora posibilita el ordenador. La investigación realizada por Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2014), respecto del análisis de manuales en temas de divisibilidad para informáticos, apunta también en esta dirección.

Reconocimientos: Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación I+D+i EDU2012-32644.

Referencias

Distéfano, M. L., Pochulu, M. D. y Font, V. (2015). Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. *Journal of Research in Mathematics Education, 4*(3), 202-233.

Font, V. y Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69(1)*, 33-52.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Lacués, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac, 55-56*, 29-35

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en teoría de números con Mathematica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2014). Las hipótesis en álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno con Mathematica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*. (pp. 493-502). Salamanca: SEIEM.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes en Ingeniería Informática. En C. Fernández, M. Molina y N Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 431-440). Alicante: SEIEM.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

Ruiz, J. F. (2008). *Métodos computacionales en álgebra, matemática discreta: grupos y grafos*. (2ª ed.) Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.