Análisis de objetos, procesos y conflictos semióticos en prácticas algebraicas de primer año de la universidad

Analysing objects, processes and semiotic conflicts in algebraic practices at first year of university

María Elena Markiewicz y Silvia C. Etchegaray

Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar un análisis didáctico realizado a una tarea y a un fragmento de clase correspondientes a la asignatura Introducción al Algebra de primer año de la universidad. Dicho análisis fue realizado utilizando herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), en particular, efectuamos el análisis en términos de "objetos y procesos" intervinientes en la actividad matemática involucrada en la tarea planteada y en el fragmento de clase registrado. En el marco del EOS este tipo de análisis permite poner en evidencia la complejidad ontosemiótica de las prácticas que se ponen en funcionamiento y los posibles "conflictos semióticos" que pueden surgir, los cuales, al ser previstos, permiten tomar decisiones respecto de lo que, como docentes, podemos hacer a fines de mejorar el diseño y la implementación de procesos de estudio matemáticos.

Palabras clave: análisis didáctico, objetos, procesos, conflictos semióticos, álgebra

Abstract

The aim of this paper is presenting a didactical analysis carried out for a task and a classroom episode corresponding to the Introduction to Algebra course at the first year of university. This analysis was performed using some tools proposed by the Onto-semiotic Approach to research in mathematics education (EOS). In particular, we performed the analysis in terms of "objects and processes" involved in the mathematical activity related to the task and the classroom episode registered. In the context of EOS, this type of analysis allows to highlight the onto- semiotic complexity of the practices that are developed and the possible "semiotic conflicts" that may arise. These aspects are important to take decisions to improve the design and implementation of mathematical study processes.

Keywords: didactic analysis, processes, objects, semiotic conflicts, algebra

1. Introducción

Este trabajo fue realizado en el marco de un proyecto de investigación que se desarrolla en el ámbito de una universidad argentina. Dado que uno de los objetivos centrales de dicho proyecto es el análisis de nuestras propias prácticas docentes, hemos adoptado el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS), desarrollado por Godino (2002) como marco teórico didáctico que "trata de aportar herramientas teóricas para analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le acompañan, las situaciones y los factores que condicionan su desarrollo" (Godino, 2002, p.5).

En este trabajo queremos situar nuestro ámbito de estudio y reflexión en contenidos que se desarrollan en Algebra en el primer año en una universidad argentina (18-19 años).

Markiewicz, M. E. y Etchegaray, S. C. (2017). Análisis de objetos, procesos y conflictos semióticos en prácticas algebraicas de primer año de la universidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

La intención es mostrar, por una parte, un análisis "a priori" de una tarea asociada a la demostración de una propiedad algebraica que habitualmente presentamos a nuestros alumnos y, por otra parte, el análisis efectuado a un fragmento de una clase que aborda la formalización, en el contexto algebraico, del máximo común divisor. Estos análisis ponen a funcionar herramientas teóricas propuestas por el EOS, en particular, aquellas que tienen que ver con las "configuraciones de objetos y procesos matemáticos intervinientes en un proceso de estudio matemático" (Godino, Batanero y Font, 2009). Con este tipo de análisis pretendemos poner en evidencia la complejidad ontosemiótica de ciertos tipos de prácticas que se desarrollan en clases ordinarias así como conflictos semióticos potenciales (Godino, 2002) que se podrían estar presentando.

En el apartado 2 explicitaremos las herramientas teóricas provistas por el EOS que utilizamos en el análisis realizado, en el apartado 3 desarrollaremos el análisis de la tarea propuesta y del fragmento de clase y, finalmente, en el apartado 4 esbozaremos algunas conclusiones de este análisis.

2. Marco teórico

Como es sabido, el EOS estudia los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque unificado del conocimiento matemático, abarcando diferentes dimensiones: epistémica, cognitiva, instruccional y sistémico-ecológica y adoptando las nociones de "sistemas de prácticas", "objeto" y "significado" (personal e institucional) como un emergente de los sistemas de prácticas. En diversos trabajos (Godino, Font y Wilhelmi, 2008; Godino, Batanero y Font, 2009) se han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático (ya planificado o bien ya implementado), los cuales constituyen una ampliación progresiva de la capacidad de análisis del mismo. Los análisis que mostraremos en este trabajo están situados en los dos primeros niveles, referidos a los "objetos y procesos" intervinientes en un proceso de estudio matemático:

1. El primer nivel describe los sistemas de prácticas matemáticas y objetos matemáticos (previos y emergentes) que intervienen o pueden resultar de la realización de dichas prácticas: tareas, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentaciones, lenguaje.
2. El segundo nivel de análisis se centra fundamentalmente en los procesos que intervienen (o emergen) en la realización de las prácticas y en los conflictos semióticos que se pueden producir en la misma.

Entre los procesos a los que hace referencia el EOS podemos mencionar:

- *Proceso de materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo- no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo ideal.
- *Proceso de particularización-generalización* (dualidad ejemplar-tipo): un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular y como una clase más general. Este proceso tiene relación con la dialéctica entre lo particular y lo general.
- *Proceso de descomposición-reificación* (dualidad sistémico-unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, donde los objetos intervinientes (unitarios) deben ser tratados como sistémicos. Pero, tras el proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos

problemas.

- *Proceso de representación-significación* (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir significado a una expresión, como resultado del establecimiento de funciones semióticas. Estos procesos son densos en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la actividad matemática.
- *Proceso de personalización-institucionalización (dualidad personal-institucional):* en una primera fase de estudio es necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en su resolución (personalización). Luego, mediante una adecuada gestión docente, se promoverá la institucionalización de los mismos.

Como ya hemos mencionado, estos procesos pueden ser fuente de conflictos semióticos potenciales, es decir, de disparidades o desajustes entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas. (Godino, 2002).

3. Análisis de la tarea y del fragmento de clase

Tal como lo mencionamos en la introducción, realizaremos el análisis ontosemiótico de una tarea y de un episodio de clase que corresponden a temas claves de la introducción al Álgebra, como lo son el estudio de los números naturales y, en particular, propiedades que se demuestran utilizando el Principio de Inducción Matemática, y la teoría de la divisibilidad, en particular, definición y propiedades del máximo común divisor. Tanto la tarea planteada como el fragmento de clase al que hacemos referencia abordan cuestiones que son fundamentales para comprender estos temas y que, en general, conllevan muchas dificultades para los alumnos en este nivel inicial de enseñanza universitaria. Esta es nuestra principal razón práctica que fundamenta la elección de estos “ejemplos de análisis” propuestos.

3.1 Primer ejemplo: Análisis “a priori” de la tarea

A continuación presentaremos una formulación “habitual” de la tarea seleccionada, tal como se propone en las asignaturas iniciales de Álgebra y como también se suelen presentar en libros de texto, acompañada del análisis de dicha tarea en términos de “objetos” y “procesos” que se ponen en juego en posibles resoluciones de las mismas, teniendo en cuenta el contexto de enseñanza en el que es planteada.

Tarea: Demuestre, utilizando el Principio de Inducción Matemática que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Esta tarea fue elegida para su análisis debido a las dificultades que sostenidamente se observan en la práctica docente cotidiana, no sólo asociadas con la demostración en sí, sino también, y fundamentalmente, con la interpretación o el significado personal otorgado a la propiedad que los alumnos tienen que demostrar. Estas dificultades quedan plasmadas, por ejemplo, cuando se cuestiona a los estudiantes acerca de lo que “dice” la propiedad y no lo pueden expresar coloquialmente o cuando la tienen que aplicar para un “*n*” particular.

Primer nivel de análisis: objetos intervinientes

Tarea: Demostración de una propiedad utilizando el Principio de inducción matemática.

Procedimientos: Los procedimientos o acciones que el alumno deberá realizar para resolver esta tarea están ligados a la sucesión de pasos necesarios para realizar la demostración utilizando el Principio de Inducción, a saber:

- Identificación de la propiedad P que hay que demostrar, lo cual puede incluir la interpretación $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ como la suma extendida: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}$
- Planteo del caso base P(1): $\frac{1}{1.(1+1)}=\frac{1}{1+1}$ y prueba del mismo.
- Planteo y prueba de la etapa inductiva, lo cual incluye: a) Considerar un "n" particular arbitrario; b) Suponer que la propiedad se cumple para dicho n:

$$P(n)\text{: } \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{n+1} \text{ (hipótesis de inducción)}$$

c) Y probar que entonces la propiedad se cumple también el natural siguiente n+1:

$$P(n+1)\text{: } \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$$

En la demostración de P(n+1), se procede:

- Partir de: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$
- Identificar y explicitar el término anterior al último término de la suma, esto es: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$
- Asociar los primeros n términos de la suma: $(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)})+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$
- Reemplazar la expresión $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}$ por $\frac{n}{n+1}$ usando la hipótesis de inducción, con lo cual se obtiene: $\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1).(n+2))}$
- Realizar la suma de fracciones, obteniendo: $\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$
- Aplicar propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el numerador, con lo cual se llega a: $\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$
- Transformar el trinomio cuadrado perfecto en el numerador: $\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$
- Realizar el cociente, para obtener la expresión deseada: $\frac{n+1}{n+2}$

Aunque esta sería la resolución más esperada, otra alternativa es que se trabaje directamente con la sumatoria: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ sin expresarla como suma extendida[1]

Propiedades: Entre las propiedades que se ponen en juego en esta resolución podemos

[1]En este caso los objetos que se ponen a funcionar son un tanto diferentes y es necesario revisar el nuevo sistema de prácticas que se genera, cuestión que no expondremos aquí dada la extensión de este trabajo.

mencionar:

- La propiedad dada: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ (previa)
- Propiedades asociativa de la suma, distributiva del producto respecto de la suma, propiedad del trinomio cuadrado perfecto.

Definiciones: Suma, producto, cociente y potencia de números naturales; -Suma de fracciones; Definición de sumatoria (como suma extendida)

Argumentaciones:

- Demostración deductiva (emergente) utilizando el Principio de Inducción Matemática, según el cual si se prueba el caso base (P(1)) y la etapa inductiva ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$) entonces se puede concluir que $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$.
- Reglas de inferencia de la lógica deductiva, como el Teorema de la Deducción según el cual para demostrar una implicación basta suponer el antecedente y deducir el consecuente y la Introducción del generalizador, que asegura que si una propiedad se cumple para un individuo "n" particular arbitrario de un conjunto, entonces la propiedad se cumple para todos los individuos de dicho conjunto.

Lenguaje: algebraico, que se ve reflejado por ejemplo, en expresiones como:

$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$, sobre el cual se puede pensar y transformar.

Segundo nivel de análisis: procesos puestos en juego y conflictos semióticos:

En la resolución de esta tarea están involucrados los siguientes procesos:

- *Materialización-idealización*:
  - La expresión $\frac{1}{i(i+1)}$ representa un número racional cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es el producto de un natural por su consecutivo.
  - El ostensivo $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ se utiliza para representar la suma de todos los números racionales de la forma $\frac{1}{i(i+1)}$ con i variando desde 1 hasta n.
- *Particularización-generalización*:

  - El planteo del caso base P(1) requiere que el alumno considere un caso particular de la fórmula general, lo cual implica comprender que, en dicho caso, la sumatoria se reduce a un único término.

  - Para probar la etapa inductiva: ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$) el alumno tiene que realizar un proceso de particularización pero de otra naturaleza, ya que para probar esta generalización debe considerar un "n" particular pero a su vez arbitrario. Una vez probada la implicación para tal "n", debe realizar una generalización para afirmar que la misma vale para un "n" cualquiera.

  - A partir de la prueba del caso base y de la etapa inductiva (que involucra una generalización) se debe realizar una nueva generalización para concluir que la propiedad vale para todos los números naturales.
- *Descomposición-reificación*: Si bien la resolución de la tarea (la demostración en este caso) se debe descomponer en problemas más elementales, como el planteo y la

demostración del caso base y de la etapa inductiva y que, para ello, los objetos unitarios intervinientes deben ser tratados en el sistema deductivo, al finalizar la resolución de la tarea se pretendería que la propiedad demostrada y la demostración emergente se vean como un objeto unitario.

- *Representación-significación*: Para poder llevar a cabo la demostración de la propiedad es necesario atribuir significado a la representación $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ y a la igualdad $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, en el sentido de que la suma de los primeros n términos de la forma $\frac{1}{i(i+1)}$ se puede calcular mediante la expresión $\frac{n}{n+1}$, que guarda relación con el "n" (es decir, con el número de términos que estamos sumando).

Estos procesos, como ya hemos mencionado, pueden ser origen de *conflictos semióticos*, como por ejemplo:

- No reconocer que la expresión $\frac{1}{i(i+1)}$ está representando a un número racional de determinada forma (que varía) ni que la expresión $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ está materializando la suma de los primeros n números que tienen esa forma, sobre todo si no se ha trabajado previamente dando contenido y sentido al símbolo de sumatoria como suma de n términos de una forma dada (que cumplen una propiedad).
- La falta de atribución de significado a la igualdad $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ y, en particular a la representación $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ puede impedir el planteo correcto tanto del caso base, como de la etapa inductiva, en particular de la hipótesis inductiva que, de hecho, muchas veces los alumnos suelen plantear como $\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, en otras palabras identifican la suma total (en tanto objeto unitario) con el último término de la sumatoria.
- Dificultades para otorgar significado a la expresión $\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}: \mathrm{P(n)} \Rightarrow \mathrm{P(n+1)}$, que implica no reconocer que, el carácter general de la afirmación, exige considerar un n particular arbitrario y demostrar que para el mismo vale la implicación.
- Dificultad en otorgar significado al tipo de argumentación deductiva que propone el Principio de Inducción matemática, en el sentido de que si se muestra que se cumplen las dos hipótesis del mismo (caso base y etapa inductiva) es suficiente para demostrar que vale la conclusión ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$) y, por tanto la propiedad propuesta.

Si bien los conflictos mencionados tienen relación con los diferentes procesos que hemos descripto, todos están atravesados en mayor o menor medida por el problema fundamental de otorgar significado a las expresiones que se utilizan.

Con el fin de promover que el alumno otorgue significado a la propiedad y a los términos que en ella intervienen y se involucre en la situación (proceso de personalización-institucionalización) consideramos que es necesario problematizar como objeto de enseñanza al símbolo de sumatoria y optar por reformulaciones de la tarea donde el alumno pase a ser, como diría Brousseau (2007), un "proponente" de las afirmaciones que se pretenden luego demostrar. El planteo de tareas donde el alumno tenga la necesidad de hallar la relación entre la sumatoria y su "resultado", eligiendo él mismo casos particulares (ejemplos tipos) y buscando regularidades, contribuiría a que el estudiante pueda controlar sus procedimientos y enfrentar así, desde otro lugar, los conflictos ligados a la interpretación de la propiedad.

Como se pone de manifiesto, el análisis realizado nos permite ser conscientes de los procedimientos, definiciones y propiedades que el alumno debe tener disponibles para poder realizar la tarea y de la necesidad de re pensar prácticas matemáticas que permitan desanudar aquellos conflictos semióticos, no sólo referidos a la interpretación de la propiedad, sino también aquellos ligados específicamente al uso pertinente del método de inducción matemática, en tanto método deductivo.

3.2 Segundo ejemplo: el análisis del episodio de clase

A continuación vamos a relatar sucintamente el episodio de clase que queremos analizar en este trabajo. Cabe destacar, que más allá de algunas pocas diferencias discursivas, es un episodio que se ha repetido año tras año al presentar este tema. Se trata de un momento de la clase donde el docente se propone introducir la definición de máximo común divisor entre dos números enteros al desarrollar la Teoría de la divisibilidad.

El profesor comienza preguntando qué es el máximo común divisor o (aclara) divisor común mayor para ellos, en un intento de retomar lo que los estudiantes tienen disponible del secundario.

P: *Ustedes ya han visto en el secundario lo qué es el máximo común divisor…*

(Silencio… Murmullos…)

P: *quizás lo recuerden como el divisor común mayor…?*

Muchos alumnos: *Ah, si si …*

P: *Bueno…¿qué es el divisor común mayor entre dos números enteros a y b?*

A_1: *Era el más grande de los divisores que los dos números tienen en común*

P: *Bien!. Se acuerdan de eso? Es el mayor de los divisores comunes…¿Y cómo harían para determinar el divisor común mayor entre dos números, por ejemplo entre 48 y 36?"*

A_2: *Agarramos los dos números, los factorizamos y nos quedamos con el producto de los factores comunes creo... o todos? No me acuerdo si con el menor exponente o con el mayor...*

A_3: *Los factores comunes con el menor exponente!*

P: *Muy bien, bueno…* (y dirigiéndose el A_3): *¿querés pasar a mostrarnos como calculás el divisor común mayor entre 48 y 36?*

El alumno A_3 pasa al pizarrón y escribe:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$2^2 \times 3 = 12$$

P: *Muy bien. O sea que el divisor común mayores 12. Lo que veremos a continuación es que el divisor común mayor o máximo común divisor se puede definir en términos de la relación de divisibilidad, relación que estamos desarrollando en esta unidad temática.*

El profesor escribe en el pizarrón y dice:

"El máximo común divisor entre dos enteros a y b no simultáneamente nulos, denotado

mcd(a,b) es el natural "d" que cumple:

1) d|a $\wedge$ *d|b y 2)*$\forall d' \in IN: d'|a \wedge d'|b \rightarrow d'|\, d$

La primera condición pide que d sea divisor común de ambos números y la condición 2) exige que cualquier otro divisor común a ambos números debe ser también divisor de d.

Ahora vamos a ver una propiedad que va a dar origen a un algoritmo que nos permitirá calcular el máximo común divisor entre dos números de manera bastante eficiente…"

Y el profesor escribe:

"Si a y b son dos números enteros (b≠0) y q y r son respectivamente el cociente y el resto de la división entera entre a y b, entonces mcd (a,b) = mcd (b,r)"

A continuación explica la demostración deductiva de esta propiedad.

Un primer nivel de análisis considerando los *objetos* puestos a funcionar muestra que, en este episodio de clase, se ha desplegado un juego de lenguaje con el cual se han representado tres *definiciones* de máximo común divisor, a saber:

Def 1: el divisor común mayor es el más grande de los divisores comunes entre a y b.

Def 2: el divisor común mayor es el producto de los divisores primos comunes de a y b con su menor exponente.

Def. 3: el mcd(a,b) es el último elemento del conjunto de los divisores comunes en términos de la relación de divisibilidad. O sea: el natural d que verifica

1) d|a $\wedge$ d|b y 2) $\forall d' \in IN: d'|a \wedge d'|b \rightarrow d'|\, d$

También se ponen en juego las definiciones de factor, número primo, divisibilidad y cociente y resto de la división entera

Entre los *procedimientos* que se ponen en funcionamiento podemos mencionar:

- El procedimiento que los alumnos proponen para calcular el mcd(48,36) (factorizar ambos números y considerar el producto de los divisores primos comunes con el menor exponente)
- Los procedimientos relacionados a la demostración deductiva de la propiedad enunciada por el profesor:

  -Suponer que mcd(a,b) = d con lo cual se cumple que
  1) d | a $\wedge$ d | b y 2) $\forall d' \in IN: d'|a \wedge d'|b \rightarrow d'|\, d$.

  -Plantear lo que habría que demostrar, o sea que mcd (b,r) = d, es decir que se cumple 1´) d | b $\wedge$ d | r y 2´) $\forall d' \in IN: d'|b \wedge d'|r \rightarrow d'|\, d$

  -Que d | b es cierto por 1). Por otro lado como por 1) sabemos que d | a $\wedge$ d | b entonces d | a.1 – b.q (por propiedad de divisibilidad), con lo cual d | r (por ser a=b.q+ry por lo tanto r = a - b.q)

  - Para probar 2´) suponer que tenemos un d´ particular arbitrario tal que d´| b $\wedge$ d´| r. Entonces d´| b.q+r (por propiedad de divisibilidad) con lo cual d´| a. Así, como d´|a $\wedge$ d´| b entonces d´| d por 2).

En este episodio de clase aparecen varias *propiedades* entre las que podemos destacar:

- La propiedad enunciada por el profesor: "Si a y b son dos números enteros (b≠0) y q y r son respectivamente el cociente y el resto de la división entera entre a y b, entonces mcd(a,b) = mcd(b,r)".

- Y otras propiedades que deberían estar disponibles y que se utilizan en la demostración misma de la anterior como por ejemplo:

$$\forall a,b,c \in Z: \text{si } a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid b.x + c.y \ \forall x, y \in Z.$$

Claramente el tipo de *argumentación* utilizada es deductiva y el *lenguaje* utilizado por los alumnos para definir el divisor común mayor es coloquial, para calcular el mcd entre 48 y 36 es aritmético mientras que el lenguaje utilizado por el profesor tanto en la definición del mcd como en la expresión y la demostración de la propiedad es algebraico.

En un segundo nivel de análisis y enfocando la mirada en los *procesos,* detectamos:

- *Materialización-idealización*: El ostensivo mcd(*a,b*) se utiliza para representar tanto al único número natural que es el mayor de los divisores comunes entre "*a*" y "*b*" como al máximo del conjunto de todos los divisores comunes en términos de la relación de divisibilidad. El ostensivo *a*|*b* se utiliza para representar la relación de divisibilidad entre *a* y *b* (en el sentido de que $\exists k \in Z: b = a.k$)
- *Particularización-generalización*: Para probar que la propiedad dada vale para un *a* y *b* naturales cualesquiera se debe particularizar considerando un *a* y *b* arbitrarios pero fijos, y luego generalizar. Lo mismo ocurre cuando se debe probar que: $\forall d´ \in IN: d´ \mid b \wedge d´ \mid r \rightarrow d´ \mid d$, donde, para probar la generalización, se tiene que considerar un *d´* particular arbitrario.
- *Descomposición-reificación*: si bien se ponen en juego aquí tres definiciones de mcd, sería deseable que el alumno pueda "reificar" las mismas, viendo al mcd como un único objeto que satisface las condiciones de las tres definiciones. Asimismo, si bien la demostración de la propiedad enunciada por el profesor exige ir demostrando "por partes" diferentes afirmaciones, se pretendería que, al finalizar la demostración, la propiedad se vea como un objeto unitario.
- *Representación-significación*: para poder llevar a cabo la demostración de la propiedad, es necesario atribuir significado a la expresión: *a*|*b* y mcd(*a,b*), y en particular, a la expresión: $\forall d´ \in IN: d´ \mid a \wedge d´ \mid b \rightarrow d´ \mid d$

Los procesos antes mencionados son fuente de *conflictos* semióticos, entre los que podemos mencionar:

- Disparidades en la atribución de significado a la expresión mcd(*a,b*) y, en particular, en la relación (o falta de relación) entre las distintas definiciones de divisor común mayor y de máximo común divisor, en términos de sus diferencias y de la equivalencia lógica entre las mismas.
- Desajustes en la atribución de significado a la expresión algebraica:

$\forall d´ \in IN: d´ \mid a \wedge d´ \mid b \rightarrow d´ \mid d$, en el sentido de que "todos los divisores comunes a "*a*" y a "*b*" deben ser divisores del que proponemos como mcd (*a,b*)". Esto tiene mucho que ver con la complejidad lógica de la expresión.

- Dificultades al momento de poner a funcionar la "nueva" definición algebraica de mcd en la demostración de la propiedad, más específicamente para demostrar que un determinado "*d*" es el mcd(*a,b*). En instancias de evaluación esta dificultad se pone de manifiesto en el hecho de que muchos alumnos consideran suficiente probar que "*d*" es un divisor común a ambos pero no plantean (o en algunos casos plantean de forma incorrecta) o no pueden demostrar la segunda condición: esto es, que cualquier otro divisor común a ambos, debe dividir al máximo, propiedad ésta que sitúa a este objeto en un nivel de algebrización superior al de divisor, o múltiplo (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015).

- Dificultad al tener que demostrar que: $\forall d' \in IN: d' | b \wedge d' | r \rightarrow d' | d$ en este sentido: al tomar un *d* ´arbitrario que verifique $d' | b \wedge d' | r$ y ver la necesidad de probar que este d´ verifica las hipótesis de la condición 2) ($\forall d' \in IN: d' | a \wedge d' | b \rightarrow d' | d$), es decir, que es un *d´* que divide tanto a "*a*" como a "*b*" y que, dado que "todos" los *d´* que cumplen esa hipótesis deben dividir a *d*, "nuestro" *d´* también debe hacerlo.

Observemos que, en este caso, además de hacer referencia a conflictos de tipo representacional y argumentativos, estamos poniendo en evidencia conflictos de tipo conceptual (disparidad y falta de relación en el significado atribuido a un mismo concepto, el máximo común divisor).El análisis realizado nos alerta de la existencia de diversos tipos de conflictos semióticos que precisarán la generación de sistemas de prácticas en donde se problematice la relación cognitiva y semiótica entre las diferentes definiciones de mcd. Sistemas de prácticas donde la propiedad no sea necesariamente enunciada por el profesor sino que emerja como producción propia del alumno ante situaciones que le obliguen a establecer nuevas relaciones.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos querido poner de manifiesto la utilidad de realizar este tipo de análisis de las tareas que habitualmente planteamos a nuestros alumnos o de las clases mismas, a fin de tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática y de los conflictos semióticos potenciales que pueden surgir, algunos de ellos asociados a las "buenas intenciones" de recuperación de posibles conocimientos disponibles. Como docentes muchas veces no somos conscientes de dicha complejidad y de dichos conflictos, reduciendo nuestras explicaciones de las dificultades a la falta de conocimiento o de estudio por parte de nuestros estudiantes. Creemos que es necesario, como parte de nuestra tarea docente, "ocuparse" de estos conflictos y promover acciones tendientes a ayudar a superar los mismos, construyendo otras vías y condiciones de acceso al conocimiento a fin de generar procesos de estudio de mayor idoneidad epistémica y cognitiva. Consideramos, asimismo, que este análisis aporta a nuestro marco referencial de significados pretendidos, esencialmente enriqueciendo las dimensiones epistémica y cognitiva de nuestros clásicos procesos de estudios de Álgebra para primer año de la Universidad.

Por último, dado el papel central que en el EOS sostiene la herramienta conceptual y metodológica: práctica matemática (en su versión institucional, esto es, relativa a juegos de lenguaje y formas de vida) y las características que se le atribuye a dicha noción (acción compartida, situada, intencional, mediada por recursos lingüísticos y materiales) consideramos que este tipo de análisis en sus dos primeros niveles visibilizan la potencialidad de estas herramientas ontosemióticas para generar nuevas explicaciones a la importante pregunta didáctico-matemática: ¿cuál o cómo se caracteriza el "costo cognitivo" para la aprehensión de un determinado "objeto"?

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del Proyecto: *El análisis de prácticas, objetos y procesos como condicionantes de diferentes estudios didáctico-matemáticos en la educación superior, inicial y continua*, de la Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.

Referencias

Brousseau, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas.* Buenos Aires: Zorzal

Godino, J.D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 237-284. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/configuraciones.html

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/trabajossintesis.html

Godino, J. D., Font ,V. y Wihelmi, M.R. (2008) Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Versión revisada de la *Conferencia invitada en el IV Congresso Internacional de Ensino da Matematica*. ULBRA, Brasil, 25-27 Octubre 2007. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015) Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.