UNIVERSIDAD DE GRANADA FACULTAD DE CIENCIAS

CARACTERIZACION DE MEDIDAS Y VALORACIONES DIFUSAS A PARTIR DE MEDIDAS ORDINARIAS

TESIS DOCTORAL

Manuel Jorge Bolaños Carmona

La presente Memoria corresponde a la presentada para la obtención del Grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas) por D. Manuel Jorge Bolaños Carmona, dirigida por D. Miguel Delgado Calvo-Flores (Dpto. de Estadística e I.O.) y calificada con Sobresaliente "cum laude" el día 6 de Octubre de 1984 por el siguiente Tribunal:

Presidente: D. Enrique Trillas Ruiz, Catedrático de la E.T.S. de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Barcelona y Presidente del C.S.I.C..

Vocales: D. Pedro Gil Alvarez, Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Oviedo.

D. Antonio Martín Andrés, Catedrático de la Facultad de Medicina de la Universidad de Granada.

D. Miguel Delgado Calvo-Flores, Profesor Titular de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Secretario: Dª. Amparo Vila Miranda, Profesora Titular de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Granada, Octubre de 1984.

CARACTERIZACION DE MEDIDAS Y VALORACIONES DIFUSAS A PARTIR DE MEDIDAS ORDINARIAS

A mi madre

Quiero expresar mi agradecimiento:

Al Prof. Delgado Calvo-Flores, por su constante apoyo y excelente dirección, decisivos para la elaboración del presente trabajo.

A los profesores Vila, Verdegay y Clares, del Grupo de investigación en Subconjuntos Difusos de nuestra Universidad, y de forma especial al Prof. del Moral, a quien se debe uno de los contraejemplos, por su inestimable colaboración.

Al Prof. Gutierrez Jaimez y a todos los miembros del Departamento de Estadistica e I.O. por su amable acogida.

Al Prof. Martin Andrés y amis compañeros, profesores Luna y Sanchez-Cantalejo, por su estímulo y paciencia.

Al Prof. Megias por su colaboración en el diseño gráfico, y a mi hermana M^{a} Victoria, que mecanografió el borrador.

SUMARIO

INTRODUCCION GENERAL

De hecho, el único campo del conocimiento humano en el que los conceptos no difusos juegan el papel dominante es el de la Matemática clásica.

L. A. Zadeh

En muy diversas situaciones de la vida real y de las aplicaciones científicas y técnicas, las definiciones y clasificaciones excluyentes no ofrecen una modelización adecuada de los fenómenos en estudio. Si a la pregunta "¿pertenece un elemento x a un conjunto A?" no existe claramente una respuesta afirmativa o negativa, es posible matizar ésta atendiendo a los elementos de un cierto retículo completo; surge así el concepto de subconjunto difuso.

La definición original (Zadeh, 1965) considera al retículo totalmente ordenado $[0,1]$ como imagen de la "función de pertenencia" de un subconjunto difuso, que asigna a cada elemento su "grado de pertenencia" y resulta así una generalización de la función característica de los subconjuntos de un referencial.

En estos casi veinte años transcurridos, la Teoría de los Subconjuntos Difusos se ha venido desarrollando ampliamente en sus aspectos teóricos y de aplicación.

Desde un punto de vista teórico, el interés de esta teoría reside en que permite y exige la generalización de una gran parte de las ramas de la Matemática clásica. La óptica conjuntista original provocó un rápido desarrollo de los aspectos algebraicos (ver Kaufmann (1982): 1ª edición en 1973). Junto a ellos, cabe destacar la trascendencia de la Lógica Difusa, ya que a los subconjuntos difusos se asocia inevitablemente una lógica poli o multivaluada. Por el contrario, se han realizado desiguales progresos en los campos analíticos y topológicos, actualmente en fase de expansión.

En cuanto se refiere a las aplicaciones, la utilización de conceptos difusos facilita la modelización de la vaguedad y la subjetividad; ello trae como consecuencia un vasto campo de aplicación en diversas cuestiones relacionadas con la Semántica, la Sociología, la Psicología, la Investigación Operativa, la Economía y las Ciencias Biológicas y Médicas. Por ejemplo, comienzan a ser abundantes las aplicaciones de la Teoría de Subconjuntos Difusos en la construcción de modelos de diagnóstico médico (ver Sánchez (1979), Smets (1981) y Vila y Delgado (1983), entre otros).

Otro grupo de aplicaciones destacable es el relacionado con las Ciencias de la Computación, en particular con la definición y construcción de "sistemas expertos", relacionadas con aspectos lógicos, algebraicos y de medida (como, por ejemplo, la utilización de diversos conectivos para el tratamiento de los predicados vagos).

La Teoría de la Medida se encuentra relacionada con gran parte de los avances teóricos y de aplicación de la Teoría de los Subconjuntos Difusos. Si todo resultado numérico es, en un sentido muy amplio, una "medida", también desde un prisma teórico subyacen en la Teoría de la Medida Difusa numerosas cuestiones del Algebra, Topología y Análisis.

Como ocurre en la teoría clásica, el desarrollo de la Medida Difusa requiere una infraestructura previa y, por ello, se ve influído por los avances de las distintas ramas de la Matemática Difusa; a su vez, éstos se estimulan conceptualmente por aquél.

La presente memoria puede servir como ejemplo de la trascendencia de ciertos resultados algebraicos y consideraciones topológicas en Teoría de la Medida Difusa. A la inversa, cabe mencionar los conceptos de "energía" y "entropía" difusas como cuestiones básicas a las que dicha teoría realiza importantes aportaciones; la energía de un subconjunto difuso está estrechamente relacionada con su medida, respondiendo ambas nociones a la idea de "tamaño" ó "intensidad", mientras la entropía mide hasta qué punto se ha perdido la dicotomía pertenencia-no pertenencia de los conjuntos ordinarios y resulta por ello una medida indirecta de los subconjuntos difusos (ver, por ejemplo, Knopfmacher (1975), Trillas y Riera (1978), De Luca y Termini (1979) y Czogala, Gottwald y Pedrycz (1982)).

La metodología general a emplear en la Teoría de los Subconjuntos Difusos está basada en los dos principios siguientes:

1) El Principio de Extensión, que exige la conservación de las propiedades de los conjuntos ordinarios en la definición de conceptos difusos, teniendo en cuenta que los subconjuntos ordinarios son un caso particular de subconjuntos difusos.

2) El Principio de Goguen (1967), que concibe a los subconjuntos difusos, no ya como una extensión de los ordinarios, sino como definidos sobre clases de conjuntos ordinarios tomadas como referencial.

La coexistencia de los dos principios es sólo posible en ocasiones, ya que la definición de conceptos difusos por difusificación según el Principio de Goguen no siempre conserva las propiedades de los conjuntos ordinarios. De este modo, existe una dialéctica latente entre las ideas que se obtienen en el contexto difuso a partir de las correspondientes ordinarias y la conveniencia de planteamientos conceptualmente distintos a los -

clásicos para la construcción de nociones difusas; ello colabora a la gran riqueza de enfoques teóricos de que puede ser objeto el campo difuso, la cual se pone de manifiesto de forma evidente en la Teoría de la Medida Difusa.

Basicamente, la definición de medidas sobre estructuras difusas puede entenderse desde dos perspectivas:

a) De forma directa, esencialmente independiente de las medidas sobre estructuras ordinarias, si bien conservando en lo posible el Principio de Extensión.

b) Indirectamente, por asignación a los subconjuntos difusos de medidas definidas sobre estructuras ordinarias.

Desde la primera de estas ópticas se han definido la mayor parte de los tipos de medida difusa que registra la literatura especializada, entre los que destacan:

- La medida de "sucesos difusos" (Zadeh, 1968), obtenida a través de la integración ordinaria de las funciones de pertenencia con respecto a una medida de probabilidad dada sobre el referencial.

- La "probabilidad funcional" (Borghi, 1972), que es -

una definición axiomática de las medidas es tablecida en base a las propiedades de las medidas ordinarias.

- La "medida por integración difusa" (Sugeno, 1974), definida a partir de la integración difusa (dada por este mismo autor) de las funciones de pertenencia - con respecto a una medida monótona dada sobre el re ferencial.

- La "medida de posibilidad" (Zadeh, 1978), para la que las funciones de pertenencia se consideran di- rectamente como "densidades de posibilidad"; tiene como propiedad más importante la F-aditividad y re sulta especialmente fértil desde un punto de vista conceptual, ya que replantea el significado mismo de la noción de subconjunto difuso y la relación - entre posibilidad y probabilidad.

Mencionaremos, asimismo, los trabajos de Nahmias (1978), Khalili (1979), Kruse (1982), Ralescu (1982), Smets (1982), Butnariu (1983) y Hohle (1983), en los que se definen diferentes tipos de medidas difusas - (aditivas en la mayor parte de los casos); algunas de ellas pueden ser incluídas entre las anteriormente ci tadas y otras quedan fuera del contexto de nuestro tra bajo debido a su punto de partida excesivamente particular o sofisticado.

La presente memoria es ejemplo de la vía de asignación indirecta de medidas difusas, siguiendo la línea de trabajos anteriores (Delgado y Bolaños (1977) y Bolaños (1977)). Desde esta perspectiva hay que resaltar las aportaciones de Klement (1980a) (1980b), Klement, Schwyhla y Lowen (1981) y Klement y Schwyhla (1982) en relación con las denominadas "probabilidades difusas"; en estos artículos, los autores mencionados demuestran la identidad esencial entre un amplio grupo de medidas aditivas sobre estructuras difusas y las medidas de probabilidad ordinarias sobre clases de subconjuntos del producto cartesiano entre el referencial y el intervalo unidad. Tales resultados son estudiados y generalizados en el Capítulo 2 del presente trabajo.

En este punto, conviene señalar que la Teoría de la Medida Difusa carece, hasta el momento, de una sistematización que haga honor a tal denominación. Dado que las distintas definiciones han sido establecidas de forma independiente por los diferentes autores, y que no hay coincidencia ni siquiera sobre propiedades tan importantes como la aditividad, no existe un cuer po de doctrina común ni ha sido fijado lo que se entiende por "medida difusa"; baste decir que a menudo se utiliza este término al designar valoraciones definidas únicamente sobre estructuras ordinarias, para indicar que poseen propiedades más o menos relacionadas con conceptos difusos (como, por ejemplo, la monotonía), lo que resulta muy discutible aún cuando tales valoraciones puedan extenderse "a posteriori" a subconjuntos difusos.

Por nuestra parte consideramos como "medidas difusas" únicamente a las definidas sobre estructuras - difusas de un referencial arbitrario (estructuras que, naturalmente, incluyen como elementos particulares a algunos conjuntos ordinarios).

Por lo que se refiere a las propiedades mínimas exigidas para las medidas difusas, adoptamos como tales la acotación, monotonía y continuidad para el límite de sucesiones monótonas; se incluyen de esta manera la mayor parte de las medidas ya definidas, tanto aditivas como no aditivas, y se respetan las características fundamentales del retículo $[0,1]$ sobre el que consideramos definidos los subconjuntos difusos. Tal elección se discute más extensamente a lo largo del Capítulo 1. Finalmente, cabe añadir que se reser va el término "valoración" para las asignaciones numéricas que no verifican tales requisitos mínimos y aparecen de forma natural a lo largo del trabajo.

La metodología utilizada parte de una concepción "conjuntista" de los subconjuntos difusos como partes del referencial y de una visión "energética" de la medida, que ha de reflejar qué parte del referencial abarca cada subconjunto difuso.

Es coherente con esta filosofía "representar" un subconjunto difuso por un subconjunto ordinario del producto cartesiano del referencial X y el intervalo unidad I. Corresponde entonces al referencial X el propio $X \times I$, a cada subconjunto ordinario $A \subset X$ el rectángulo $A \times I$ y, coherentemente con ello, se asocia a cada subconjunto difuso aquella parte del producto cartesiano delimitada superiormente por su función de pertenencia y "conectada" así con el eje $X \times \{0\}$. Para resaltar esta última característica y distinguirlos suficientemente, denominamos "partes ancladas" a los subconjuntos de $X \times I$ asociables a los subconjuntos difusos de X. Estas "partes ancladas" actúan como vehículo de asignación de medidas a los subconjuntos difusos a partir de medidas ordinarias sobre X, I ó $X \times I$.

A grandes rasgos, los objetivos generales que nos planteamos en la presente memoria pueden resumirse en:

- Sistematizar el conjunto de las medidas difusas de acuerdo con sus propiedades más importantes.

- Obtener definiciones indirectas de los tipos más importantes de medida difusa obtenidos directamente en la literatura especializada.

- Caracterizar en términos de medidas ordinarias el más amplio grupo posible de medidas difusas, contribuyendo así a la comprensión de su significado y propiedades.

- Ampliar el arsenal de medidas y valoraciones difusas disponible.

Para cubrir estos objetivos a partir de la metodología antes expuesta, la memoria se ha estructurado como sigue:

En el Capítulo 1 se realiza un análisis de las propiedades algebraicas que tienen influencia en la definición de medidas y valoraciones difusas y se ponen las bases de las relaciones entre conjuntos ordinarios, funciones y subconjuntos difusos que serán de utilidad en capítulos posteriores; finalmente, se definen las estructuras y tipos de medidas ordinarias y difusas que se contemplan en el conjunto del trabajo.

Cabe resaltar que las propias definiciones de medida difusa, medida difusa aditiva y medida difusa de probabilidad constituyen la base de la estructuración de los tipos de medida analizados en capítulos - posteriores. Otros resultados destacables se refieren a la imposibilidad de definir una complementación difusa y a la representación de medidas monótonas por - medidas de probabilidad sobre el intervalo unidad.

El Capítulo 2 está dedicado a las medidas difusas aditivas, que se caracterizan por integración ordinaria a partir de medidas de probabilidad sobre el referencial; pueden distinguirse tres casos:

a) Considerando la medida de Lebesgue sobre el intervalo unidad, se obtienen las medidas de "sucesos difusos" de Zadeh.

b) Dada una medida monótona sobre una cierta estructura de partes ancladas de [0,1], se caracterizan - ciertas medidas difusas de probabilidad y medidas difusas aditivas.

c) Consideradas medidas monótonas sobre I para cada elemento del referencial, y expresadas éstas a través de un núcleo de Markov, se caracteriza en términos de medidas ordinarias a la totalidad de las medidas difusas aditivas. Entre ellas se incluyen las "probabilidades funcionales" de Borghi y las medidas definidas por Smets.

En los dos últimos casos se obtiene una generalización de los resultados de Klement y Schwyhla, previa adaptación a nuestro contexto de sus definiciones. Las medidas difusas aditivas (y, en particular, las de probabilidad) quedan así expresadas en términos de probabilidades ordinarias sobre el referencial y medidas monótonas sobre el intervalo unidad.

Los problemas de medibilidad son de importancia para las medidas difusas aditivas y su caracterización. A ellos se refiere el último apartado de este segundo capítulo.

En el capítulo 3 se encuentran los resultados más importantes del presente trabajo.

A partir de la consideración de una medida monótona cualquiera sobre el referencial y la medida de Lebesgue en el intervalo unidad se define una medida rectangular que sirve como base para la caracterización buscada; a partir de ella, se definen las valoraciones interna y externa sobre partes del producto cartesiano. La restricción de tales valoraciones a las partes ancladas permite definir una medida y una familia de valoraciones con las que se logra:

a) Caracterizar las "medidas difusas por integración difusa" y las medidas de posibilidad en términos, únicamente, de la medida rectangular inicial.

b) Establecer una serie de valoraciones que complementan a la "medida interna" (o medida basada en la integral difusa) y a la medida de posibilidad para subconjuntos difusos. De entre esas valoraciones de definición original destaca la valoración externa ϕ-dependiente o "tamaño exterior", la cual permite el establecimiento de ciertos "índices de forma" de los subconjuntos difusos.

Otras cuestiones de interés desarrolladas en el tercer capítulo se refieren al estudio de la información que sobre la función de pertenencia de un subconjunto difuso ofrecen las medidas y valoraciones estudiadas, y la generalización de todos los resultados anteriores para el caso en que la medida de Lebesgue se sustituye por una medida monótona cualquiera sobre la estructura dada por las partes ancladas de [0,1]. Asimismo se estudian las cuestiones derivadas de la medibilidad, relativa a diferentes estructuras, de medidas y valoraciones consideradas.

Queda, pues, definido el campo de las medidas difusas no aditivas que pueden obtenerse a partir de medidas monótonas sobre el referencial y sobre el intervalo unidad, y se incluyen en él, como era nuestro propósito, las medidas mas trascendentes de entre las conocidas hasta el momento.

Dado que la totalidad de la clase de las medidas difusas no aditivas no puede, como sí ocurre para las aditivas, ponerse en correspondencia con las medidas ordinarias, queda abierta una extensa línea de trabajo que esperamos desarrollar en el futuro.

CAPITULO 1

1.1. INTRODUCCION

En este capítulo se establece el marco conceptual de la presente memoria, tanto en lo que se refiere a la definición general de los conjuntos, clases, estructuras y medidas que serán de utilidad en su desarrollo como en lo que concierne a las relaciones básicas entre las distintas nociones ordinarias y las derivadas de la Teoría de los Subconjuntos Difusos.

Asimismo, se sientan las bases para la expresión y justificación de la metodología empleadas en el conjunto del trabajo, a partir de nuestro enfoque de la medida difusa a través de la medida de ciertas estructuras ordinarias, especialmente las constituídas por partes del producto cartesiano del referencial y el retículo de definición.

No se trata, en todo caso, de realizar un análisis exhaustivo de los aspectos algebraicos de la Teoría de los Subconjuntos Difusos, sino de destacar las cuestiones de especial trascendencia desde el punto de vista de la medida.

En el apartado 1.2. que sigue se introducen las bien conocidas nociones básicas de dicha teoría que nos son imprescindibles junto a la definición original de -

ciertas clases de conjuntos ordinarios (en particular las "partes ancladas" del intervalo unidad y del producto cartesiano) de interés para nuestros fines.

Se aborda en el apartado 1.3. el estudio de las propiedades algebraicas de todos los conjuntos y clases definidas y de las afinidades sobre las estructuras resultantes. Se pone especial acento en la génesis de las características algebraicas de la clase de los subconjuntos difusos de un referencial por su importancia en las relaciones entre la medida ordinaria y difusa; en efecto, sus propiedades provienen (por extensión o restricción) de las que se encuentran en ciertas estructuras conjuntistas clásicas, lo que condiciona esas relaciones.

Finalmente, en el apartado 1.4 se fijan las estructuras y tipos de medida que se consideran en capítulos posteriores y se justifica su definición.

Especialmente interesante resulta la distinción entre las medidas difusas aditivas y de probabilidad, que no tiene correlato en las medidas clásicas y que es fruto de la pérdida de la propiedad de complementación del Algebra Difusa. Otro aspecto a destacar es la diversidad de criterios existentes en la literatura especializada respecto al concepto general de medida difusa, como ocurre en algunas otras importantes nociones de la Teoría de Subconjuntos Difusos (topología difusa, función difusa, etc.) debido a la juventud de esta teoría; ello nos obliga a explicar nuestra propia posición en el tema y a recoger algunas definiciones de otros autores.

1.2. DEFINICIONES

Como es bien sabido, el concepto de subconjunto difuso (s.d.) tiene su origen en la generalización de la noción de pertenencia.

Definición 1.1. (Zadeh, 1965).- Sea X un referencial arbitrario. Se denomina s.d. de X a cualquier conjunto de la forma:

$$\underset{\sim}{A} = \{(x, r_x) \;/\; x \in X,\; r_x \in [0,1]\}$$

donde r_x se interpreta como el grado de pertenencia de x a $\underset{\sim}{A}$.

Un s.d. viene caracterizado unívocamente por la denominada función de pertenencia (f. de p.): $\mu_{\underset{\sim}{A}}: X \longrightarrow [0,1]$ dada por:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = r_x \qquad \forall\, x \in X$$

Notaremos $\underset{\sim}{P}(X)$ a la clase de todos los subconjuntos difusos de X.

Es obvio que cualquier $A \in P(X)$ (partes ordinarias de X) es un s.d. de X con f.p.:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

de modo que $P(X) \subset \underset{\sim}{P}(X)$.

Por este motivo denominaremos <u>subconjunto difuso propio</u> (s.d.p.) a todo elemento de $\underset{\sim}{P}(X) - P(X)$.

Hay que destacar que el referencial X es siempre un conjunto ordinario, tanto para la definición de s.d. dada con anterioridad como para aquellas que pueden encontrarse en la literatura especializada, como son la de "flou set" (Gentilhomme, 1968), (Negoita y Ralescu, 1975), la de "fuzzy set de tipo m" (Zadeh, 1971a) y la de "probabilistic set" (Hirota, 1981), entre otras.

Por otra parte, indicaremos que, aunque en algunos casos se habla de "conjunto difuso", la idea básica subyacente en la definición 1.1. es la de subconjunto, ya que siempre hay que tener presente el referencial de base X. (Ver Kaufmann (1982) para el análisis de esta idea y de algunas de las definiciones básicas que siguen).

<u>Definición 1.2.</u>- Dado un s.d. $\underset{\sim}{A}$ de X, el <u>soporte de $\underset{\sim}{A}$</u> es el conjunto Sop $(\underset{\sim}{A}) = \{x/x \varepsilon X, \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \quad \varepsilon (0,1]\}$

El soporte de un s.d. es entonces su referencial mínimo, y será de gran importancia en la definición de medidas difusas (en cierta forma, el soporte de un s.d. es el más pequeño conjunto ordinario al que está "condicionado", en el que está "incluído" o sobre el que -

"puede definirse" el s.d.).

<u>Definición 1.3</u>.- La <u>altura</u> de un s.d. $\underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ es el valor: $\mathrm{hgt}(A) = \sup\limits_{x \varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$

Se dice que un s.d. es <u>normal</u> o <u>está normalizado</u> si su altura es la unidad.

<u>Definición 1.4</u>.- Sean $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$. Diremos que $\underset{\sim}{A}$ está <u>incluído</u> en $\underset{\sim}{B}$ $(\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B})$, si y solo si:

$$\forall x \varepsilon X, \qquad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) < \mu_{\underset{\sim}{B}}(x).$$

<u>Definición 1.5</u>.- Sean $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$. Se dice que $\underset{\sim}{A}$ es <u>igual</u> a $\underset{\sim}{B}$ si y solo si:

$$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B} \ \text{ y } \ \underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{A} \qquad (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \quad \forall x \varepsilon X)$$

<u>Definición 1.6</u>.- Sea $\underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$. Para cada $\alpha \varepsilon [0,1]$, el conjunto $A_\alpha = \{x / x \varepsilon X, \ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant \alpha\}$ es el <u>α-corte de $\underset{\sim}{A}$</u>.

Todo s.d. se caracteriza (Teorema de Representación) mediante la familia de sus α-cortes. Es obvio que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}$.

<u>Definición 1.7</u>.- Sea $\underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$. Para cada $\alpha \varepsilon [0,1]$,

el conjunto $A_{\alpha}^{+} = \{x/x\varepsilon X,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > \alpha\}$ se denomina

<u>α-corte débil de $\underset{\sim}{A}$.</u>

Obviamente, $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Longrightarrow A_{\alpha_2}^{+} \subset A_{\alpha_1}^{+}$. Por otra parte,

$A_{o}^{+} = Sop(\underset{\sim}{A})$ y $A_{1}^{+} = \phi$.

Entre los dos conceptos anteriores se verifica la relación:

$$\forall \alpha \varepsilon [0,1), \quad \forall \alpha_0 \varepsilon (\alpha,1], \quad A_{\alpha_0} \subset A_{\alpha}^{+} \subset A_{\alpha}.$$

<u>Definición 1.8</u>.- Se denomina "<u>singleton</u>" a todo s.d. cuyo referencial consta de un solo elemento $(X = \{x\})$. En otro sentido, tambien se denomina "singleton" a aquel s.d. cuyo soporte es un solo elemento, independiente de cuál seal el referencial. En esta última acepción, todo s.d. es unión de "singletons", como todo subconjunto ordinario es unión de elementos, y en ambas se incluye al vacío difuso entre los singletons.

Por nuestra parte, se utilizará una u otra opción, especificando en caso necesario el referencial de que se trate.

<u>Definición 1.9</u>.- Sea $\underset{\sim}{R} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$. Diremos que $\underset{\sim}{R}$ es un s.d. rectangular si y sólo si $\underset{\sim}{R} = \phi$ ó $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = cte.$

$\forall x \varepsilon\ Sop(\underset{\sim}{R})$.

Todo $\underset{\sim}{A}\varepsilon\underset{\sim}{P}(X)$ genera una familia $\{\underset{\sim}{R}_\alpha(\underset{\sim}{A})\}_{\alpha\varepsilon[0,1]}$ de s.d. rectangulares, dados por:

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_\alpha(\underset{\sim}{A})}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x\varepsilon A_\alpha \\ 0 & \text{si } x\not\varepsilon A_\alpha \end{cases}$$

Notaremos $\underset{\sim}{R}(X)$ la clase de s.d. rectangulares de X.

Obviamente, $P(X) \subset \underset{\sim}{R}(X) \subset \underset{\sim}{P}(X)$.

La definición 1.1. puede ampliarse considerando que los grados de pertenencia se evalúan en cualquier conjunto (no necesariamente en $I = [0,1]$). Se llega así al concepto de L-s.d.

<u>Definición 1.10</u>.- (Goguen, 1967). Sea X un referencial arbitrario y L un conjunto cualquiera. Se denomina L-s.d. de X a cualquier conjunto de la forma:

$$\underset{\sim}{A}_L = \{(x,r_x)/x\varepsilon X,\ r_x\varepsilon L\}.$$

Es fácil comprobar que la estructura algebraica de L es "heredada" por $\underset{\sim}{P}_L(X)$ (clase de los L-s.d. de X), definiendo de modo natural las operaciones entre L-s.d. a partir de las existentes en L. Así, si L es un retículo, álgebra de Boole, etc., también lo será $\underset{\sim}{P}_L(X)$. Por ejemplo, las "cantidades multivaluadas" (Grattan-Guiness, 1975), en las que $L=P([0,1])$, conservan la estructura de álgebra de Boole. Por este motivo, aunque en la definición anterior no se exige estructura alguna en L, resulta interesante que se trate al menos de un retículo para garantizar dicha estructura mínima en $\tilde{P}_L(X)$.

De acuerdo con la definición 1.1., es inmediato que un s.d. admite una triple interpretación:

a) Un s.d. es una parte del referencial, en un sentido análogo, pero más general, que el de subconjunto ordinario.

b) Un s.d. es una función del referencial en $[0,1]$.

c) Un s.d. es un subconjunto ordinario del producto cartesiano $X \times [0,1]$.

De este modo, al plantearnos el problema de "medir" un s.d., podemos pensar que la medida represente:

a) Qué "parte" del referencial supone el s.d. (asignando medida unidad al propio referencial).

b) Cuál es el "área" delimitada superiormente por la función de pertenencia.

c) Qué porción del producto cartesiano $X \times [0,1]$ viene dada por el subconjunto ordinario correspondiente al s.d. (asignando medida unidad al

$X \times [0,1]$).

Desde este último punto de vista, no parece lo más adecuado medir $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X)$ mediante el conjunto $\{(x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)),\ x \in X\} \in P(X \times I)$, ya que éste tiene medida nula para cualquier medida clásica continua sobre $X \times [0,1]$.

Por tanto, parece más correcto emplear el conjunto $\{(x,a)/x \in X,\ a \leq \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\}$, que responde mejor a la idea de porción, parte ó área.

Este enfoque ha sido empleado por Delgado y Bolaños (1977), Ralescu y Adams (1980) y Klement y Schwyhla (1982), en líneas de trabajo a las que se harán inevitables referencias.

En este sentido, y para el estudio de las medidas que realizamos en la presente memoria, introducimos las clases de conjuntos que se definen a continuación.

Definición 1.11.- Denominamos parte anclada cerrada de I a todo intervalo de la forma $[0,b]$, con $b \in I$.

Notaremos $C_a(I)$ la clase de las partes ancladas cerradas de I.

Definición 1.12.- Denominaremos parte anclada abierta de I a todo intervalo de la forma $[0,b)$, con $b\varepsilon I$.

Será $O_a(I)$ la clase de las partes ancladas abiertas de I.

En general, llamaremos parte anclada de I a cualquier elemento de $P_a(I) = C_a(I) \cup O_a(I)$. Es interesante destacar que $\phi \varepsilon O_a(I)$ $(b=0)$ e $I \varepsilon C_a(I)$ $(b=1)$.

Definición 1.13.- Dado un referencial arbitrario X, denominaremos parte anclada cerrada (de XxI) a todo conjunto de la forma:

$B = \{(x,r)/x\varepsilon X;\ r \leqslant b(x);\ r\varepsilon I\}$ y notaremos $C_a(XxI)$ a la clase de estos subconjuntos.

Definición 1.14.- Dado un referencial arbitrario X, denominaremos partes ancladas abiertas (de XxI) a los conjuntos de la forma:

$B = \{(x,r)/x\varepsilon X;\ r<b(x);\quad r\varepsilon I,\quad b\varepsilon I\}$
notando $O_a(XxI)$ a la clase de las partes ancladas abiertas.

Puede comprobarse fácilmente que $C_a(XxI) \cup O_a(XxI)$ no es una clase cerrada para la unión ni la intersección; por este motivo introducimos la clase:

$$P_a(XxI) = \{B_A^b \varepsilon P(XxI)/B_A^b = \{(x,r)/r \leqslant b(x) \text{ si } x\varepsilon A;$$

$$r<b(x) \text{ si } x\varepsilon\overline{A};\ A\varepsilon P(X),\ r\varepsilon I,\ b\varepsilon I^X\}\}$$

Denominaremos partes ancladas de XxI a los elementos de $P_a(XxI)$.

Es inmediato que $O_a(XxI) \subset P_a(XxI)$ (para $A=\phi$) y que $C_a(XxI) \subset P_a(XxI)$ (para $A=X$).

En apartados posteriores estudiaremos en profundidad las propiedades y necesidad de considerar esta clase.

Los conceptos de "parte anclada cerrada" y "parte anclada abierta" son adaptaciones de los conceptos de "conjunto ordenada superior" (upper ordenate set) y de "conjunto ordenada inferior" (lower ordenate set) (Halmos, 1974).

Otros conceptos de interés para la presente memoria son los de sección y proyección (horizontales y verticales) de un subconjunto de un producto cartesiano, así como el de rectángulo, bien conocidos en Teoría clásica de la Medida (ver (Taylor, 1966)).

Es inmediato que:

1) Las secciones horizontales de la parte anclada cerrada (resp. abierta) de XxI asociada a una

cierta $b \in I^X$ coinciden con los α-cortes (resp. débiles) del s.d. cuya f.p. es $b(x)$.

b) Las secciones y proyección verticales de una parte anclada de XxI son partes ancladas de I.

c) La proyección horizontal (en X) de una parte anclada de B_A^b de XxI asociada a $A \in X$ y $b \in I^X$ coincide con su sección horizontal para $\alpha=0$ y es exactamente $Sop(\underset{\sim}{B}) \cup A$, donde $\underset{\sim}{B}$ es el s.d. con f. de p. $b(x)$.

<u>Definición 1.15</u>.- Dado un referencial arbitrario denominaremos <u>rectángulo anclado de XxI</u> a cualquier rectángulo que sea parte anclada.

Notaremos $R_a(XxI)$ a la clase de los rectángulos anclados. Entonces $R_a(XxI) = P_a(XxI) \cap R(XxI)$, donde $R(XxI)$ representa la clase de los rectángulos de XxI.

Cualquier rectángulo anclado es el producto cartesiano de un elemento de $P(X)$ y un elemento de $P_a(I)$.

En lo que sigue, supondremos que X es un referencial arbitrario pero fijo, por lo que, y al objeto de simplificar la notación, las clases de partes de XxI que se han definido serán notadas simplemente O_a, C_a, P_a, R y R_a.

1.3. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Es razonable pensar que las propiedades de las medidas que se puedan definir sobre conjuntos difusos dependen estrechamente de la estructura algebraica de $\underset{\sim}{P}(X)$. En este apartado se analiza la estructura de las distintas clases que hemos introducido en el anterior, lo que nos conducirá a un mejor conocimiento del marco algebraico para la definición de las medidas difusas.

Es bien conocido que $P(X)$, $P(I)$ y $P(X \times I)$ son álgebras de Boole con las operaciones clásicas de unión, intersección y complementación conjuntistas.

La clase R es cerrada para la intersección numerable pero no para la unión, siquiera finita, por lo que no posee estructura reticular, si bien, como se verá, es clase monótona.

Como se ha establecido anteriormente, la estructura de $\underset{\sim}{P}(X)$ viene directamente condicionada por la del conjunto donde se evalúan los grados de pertenencia, en nuestro caso $I = [0,1]$; por este motivo comenzaremos con el estudio de las propiedades algebraicas de este conjunto.

1.3.1.- Estructura de $I = [0,1]$

El orden total de los números reales está asociado de forma natural con las leyes de composición interna dadas por el máximo y el mínimo de una pareja de números reales. Estas operaciones dotan a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ de estructura de retículo distributivo (Dubreil y Dubreil-Jacotin, 1965).

En estas condiciones, será deseable una definición de complementario en I que, con las operaciones binarias max y min, dotase a dicho retículo de estructura de álgebra de Boole; la imposibilidad de tal definición se comprueba mediante el siguiente enunciado.

<u>Proposición 1.1</u>.- "En un conjunto totalmente ordenado no trivial dotado con las operaciones binarias derivadas del orden, no es posible definir una complementación que le dote de estructura de álgebra de Boole".

Demostración: Sea L un retículo totalmente ordenado con elementos supremo (1) e ínfimo (0) y al menos otro elemento a. Sea < el orden de L; entonces se verifica $0<a<1$. En L se tienen definidas de modo natural las operaciones:

$$\forall d,\ b \in L,\ d \wedge b = \text{mín}(d,b) = \begin{cases} d & \text{si } d<b \text{ ó } d=b \\ b & \text{si } b<d \end{cases}$$

$$d \vee b = \text{máx}(d,b) = \begin{cases} b & \text{si } d<b \text{ ó } d=b \\ d & \text{si } b<d \end{cases}$$

y se verifica entonces:

$$\begin{cases} d \wedge 1 = d \\ d \vee 1 = 1 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} d \wedge 0 = 0 \\ d \vee 0 = d \end{cases} \qquad \forall d \in L$$

Es posible designar a 1 y 0 como mutuamente complementarios, verificando $\bar{1}=0$, $\bar{0}=1$ y $\{1 \wedge 0=0;\ 1 \vee 0=1\}$; sin embargo, para a no es posible encontrar un complementario $\bar{a} \in L$ tal que $\{a \wedge \bar{a}=0;\ a \vee \bar{a}=1\}$.

En efecto, por las propiedades de L pueden distinguirse tres casos:

I) $\bar{a}=1$. Entonces $a \wedge \bar{a} = a \wedge 1 = a \neq 0$.

II) $\bar{a}=0$. Sería $a \vee \bar{a} = a \vee 0 = a \neq 1$.

III) $0 \neq \bar{a} \neq 1$. En este caso podemos distinguir las situaciones:

- $a < \bar{a}$ ó $a=\bar{a}$. Se tiene $a \wedge \bar{a} = a \neq 0$, $a \vee \bar{a} = \bar{a} \neq 1$.
- $\bar{a} < a$. Entonces $a \wedge \bar{a} = \bar{a} \neq 0$, $a \vee \bar{a} = a \neq 1$.

Así pues, no puede encontrarse un a que verifique la propiedad de complementación, lo que nos dice que no existe ninguna forma de definir el complementario que dote a L de estructura de álgebra de Boole (con las operaciones derivadas del orden).

La diferencia fundamental entre I y P(I), en cuanto a la estructura algebraica se refiere, es que éste último es un conjunto parcialmente ordenado mediante la relación de orden inducida por la inclusión.

Como concecuencia de la proposición anterior, sólo podemos pretender la definición de un "pseudocomplementario" que, como operación unaria, verifique las propiedades de involución y leyes de De Morgan.

Sea f: $[0,1] \to [0,1]$ una función que asigne a cada valor su pseudocomplementario; veamos qué forma ha de tener f para que se verifiquen las dos propiedades:

1) La involución exige que $f(f(a))=a$, $\forall a \in [0,1]$, y esto significa que el grafo de f ha de ser simétrico con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

2) El cumplimiento de las leyes de Morgan exige que f sea monótona decreciente, ya que ha de cumplirse $f(a \wedge b)=f(a) \vee f(b)$; por tanto, si $a< b$ se tiene:

$$f(a)=f(a \wedge b)=f(a) \vee f(b) \Rightarrow f(b) < f(a)$$

Así pues, tal como ha sido analizado por Trillas (1979) y Alsina, Trillas y Valverde (1983), para la definición del pseudocomplementario es necesario emplear las funciones denominadas negaciones fuertes. Si se asume la continuidad, se obtiene la clase:

$N([0,1]) = \{ f: [0,1] \to [0,1]$ /f es continua y estric-

tamente decreciente, $f(0)=1$, $f(1)=0$ y $f \circ f$=identidad}
considerada por los citados autores.

Función destacada de este conjunto es $N(x)=1 - x$, el único elemento de $N([0,1])$ que verifica la desigualdad de Lipschitz.

Por otra parte, en (Trillas, 1979) se demuestra que "las funciones de negación fuerte en $[0,1]$ constituyen la clase de conjugación de la función N, por lo que no parece existir ningún motivo interno para preferir cualquier otra negación fuerte a la 1-x".

Así pues, adoptaremos la pseudocomplementación dada por N(x), sin prejuicio de que la mayor parte de los resultados que se obtienen con ellan puedan extenderse a otras negaciones, como se discutirá mas adelante.

Las operaciones max, mín y N dotan a I de una estructura de retículo vectorial (distributivo y pseudocomplementado) ó algebra de De Morgan.

Puede emplearse cualquier t-conorma distinta de max ó cualquier t-norma distinta de mín como operaciones binarias para dotar de estructura a I. Ahora bien, como prueban Alsina, Trillas y Valverde (1983), si no se emplean max y min, se pierde la estructura de retículo para I, ó lo que es lo mismo, la de álgebra de De Morgan considerada una negación fuerte.

Puesto que para la construcción de medidas difusas es deseable que P(I) tenga estructura de álgebra de De Morgan, en la presente memoria supondremos que las operaciones definidas en I son max, min y N.

Será objeto de posteriores trabajos el estudio de las medidas de s.d. bajo hipótesis diferentes.

1.3.2. Estructura de las clases de partes ancladas de I.

En $P_a(I)$ introducimos como operaciones binarias la unión e intersección conjuntista clásica.

$C_a(I)$ es cerrado para la unión finita y la intersección numerable y $O_a(I)$ lo es para la intersección finita y la unión numerable, mientras que $P_a(I)$ contiene a la unión e intersección numerables de partes ancladas. Las tres clases adquieren estructura de retículo distributivo.

La inclusión establece en $P_a(I)$ un orden total, de manera que no es posible definir un complemento, tal como se ha probado en la proposición 1.1.; debemos limitarnos, pues, a considerar una pseudocomplementación.

En $P_a(I)$ la introducimos del siguiente modo:

$[0\overset{\vee}{,}b] = [0,1-b)$; $[0\overset{\vee}{,}b) = [0,1-b]$; con lo cual esta clase adquiere estructura de álgebra de De Morgan.

Ahora bien, $C_a(I)$ y $O_a(I)$ como subclases de $P_a(I)$, resultan no ser cerradas para esta pseudocomplementación. Por este motivo, puesto que será de utilidad manejar los retículos $C_a(I)$ y $O_a(I)$ aisladamente, conviene dotarlos de estructura de álgebra de De Morgan definiendo en ellos los siguientes pseudocomplementos:

$$\forall [0,b] \in C_a(I), \qquad [0\overset{\wedge}{,}b] = [0,1-b] \in C_a(I)$$

$$\forall [0,b) \in O_a(I), \qquad [0\overset{\wedge}{,}b) = [0,1-b) \in O_a(I)$$

Nota 1.- El orden total que introduce la inclusión conjuntista en la clase de partes ancladas es una adaptación directa del orden total de los números reales; coherentemente, las pseudocomplementaciones que hemos introducido son extensión natural de la negación fuerte N.

Nota 2.- No puede obtenerse una pseudocomplementación para $P_a(I)$ a través de los pseudocomplementos que hemos definido como propios de $C_a(I)$ y $O_a(I)$, ya que no se respetaría el orden en $P_a(I)$.

1.3.3. Estructura de las clases de las partes ancladas de XxI.

Es fácil comprobar que tanto C_a como O_a son cerradas respecto a la unión e intersección conjustistas finitas, pero no así para la complementación clásica, ya que el complementario en XxI de una parte anclada no es en general una parte anclada. Por este motivo definimos las siguiente pseudomplementaciones:

- $\forall B_X^b \in C_a$ asociada a $b \in I^X$, su pseudocomplemento es la parte anclada cerrada asociada a $(1-b) \in I^X$, es decir:

$$B_X^{1-b} = \{(x,r)/x \in X,\ r \leq 1-b(x),\ r \in I\} = \hat{B}_X^b \in C_a$$

-$\forall B_\emptyset^b \in O_a$ asociada a $b \in I^X$, su pseudocomplemento es la parte anclada abierta asociada a $(1-b) \in I^X$, esto es:

$$B_\emptyset^{1-b} = \{(x,r)/x \in X,\ r < 1-b(x),\ r \in I\} = \hat{B}_\emptyset^b \in O_a$$

Con ellas, C_a y O_a adquieren estructura de álgebra de De Morgan.

Nota 3.- $Xx\{0\}$ y $Xx\ [0,1]$ son los elementos extremos de C_a, y $\emptyset$ y $Xx\ [0,1)$ los de O_a.

Análogas consideraciones pueden realizarse para P_a, en donde definimos la siguiente pseudocomplementación:

$-\forall B_A^b \in P_a$ asociada a $b \in I^X$ y $A \in P(X)$, su pseudocomplemento es la parte anclada asociada a $(1-b) \in I^X$ y $\bar{A} \in P(X)$, esto es:

$$B_A^{1-b} = \{(x,r)/r < 1-b(x) \quad \text{si } x \in A; \quad r \leqslant 1-b(x) \quad \text{si } x \in \bar{A};\ r \in I\} = \check{B}_A^b$$

con lo que, nuevamente, se obtiene una estructura de álgebra de De Morgan.

<u>Nota 4</u>.- Los elementos extremos de este álgebra P_a son $\emptyset$ y $X \times I$. Además, éstos son los dos únicos elementos que tienen su complementario clásico dentro de P_a.

<u>Nota 5</u>.- Respecto a la compatibilidad de la definición del pseudocomplementario P_a con la de los establecidos en C_a y O_a, como clases consideradas independientemente, encontramos una situación análoga a la que existe en las partes ancladas de I.

1.3.4. <u>Estructura de $\underset{\sim}{P}(X)$</u>

Las operaciones en $\underset{\sim}{P}(X)$ se establecen de manera natural a partir de las que se definen en $[0,1]^X$ al considerar las f. de p. como representaciones biunívocas de los s.d.. A su vez, estas últimas se obtienen por extensión punto a punto de las correspondientes de $[0,1]$, motivo por el cual, y como ya hemos comentado, $\underset{\sim}{P}(X)$ hereda la estructura algebraica de $[0,1]$.

Las operaciones binarias quedan así definidas como:

- Intersección difusa:

$\forall \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \underset{\sim}{P}(X)$, $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ viene dado por la f. de p.

$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x), \forall x \in X.$

- Unión difusa:

$\forall \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \underset{\sim}{P}(X)$, $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$ tiene como f. de p. a

$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$, $\forall x \in X$, dotando a $\underset{\sim}{P}(X)$ de estructura de retículo distributivo, del que $P(X)$ es un subretículo.

Análogamente, la definición de la pseudocomplementación se realiza de modo que se conserve el Principio de Extensión (Zadeh, 1975), esto es, el que $P(X)$ constituye un álgebra de Boole en el seno de $\underset{\sim}{P}(X)$. Establecemos, pues:

- Pseudocomplementación difusa:

$\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X)$, su pseudocomplementario $\overline{\underset{\sim}{A}}$ tiene como f. de p. a $\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \quad \forall x \in X$, que coincide en $P(X)$ con la complementación clásica. Está definición fué la originalmente dada por Zadeh (1965) y verifica las condiciones de las negaciones involutivas definidas punto a punto (Ovchinnkov, 1980).

De esta última definición se deduce asimismo que la estructura final de $\underset{\sim}{P}(X)$ es de álgebra de De Morgan, manteniéndose en $\underset{\sim}{P}(X)$ la imposibilidad de definir una complementación que nos dé estructura de álgebra de Boole, imposibilidad que ha sido probada para I en la proposición 1.1.. Puesto que Ovchinnikov (1983) demuestra que una negación satisface como máximo tres de las propiedades $\{A \cup \overline{A} = X;\ A \cap \overline{A} = \emptyset;\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\ \overline{\overline{A}} = A\}$, dicha proposición nos garantiza que, exigida la involución, han de ser exactamente las tres últimas las verificadas en $\underset{\sim}{P}(X)$.

En particular, la estructura de álgebra de De Morgan se encuentra en la clase de los singletons de un x, $\underset{\sim}{S}(x)$, entendida en los dos sentidos de la definición 1.8.

Desde el punto de vista de la Teoría de la Medida, la pérdida de la propiedad de complementación será relevante en la ampliación del campo de las medidas adecuadas a estructuras difusas. Como pone de manifiesto Trillas (1979), mientras la utilización de las negaciones fuertes parece conducir a evaluaciones aditivas, es contradictorio que, para $N \in N([0,1])$, resulte $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1$ ($\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X)$ y $\forall x \in X$), mientras que para todos los s. d. p. es $\underset{\sim}{A} \cup \overline{\underset{\sim}{A}} \neq X$.

Finalmente, cabe señalar que en la presente memoria planteamos una doble óptica acerca de la pérdida de la estructura booleana: mientras los trabajos ya clásicos en Teoría de los Subconjuntos Difusos hacen hincapié en la generalización de $P(X)$ a $\underset{\sim}{P}(X)$ (p.e. (Kaufmann, 1982), (Dubois y Prade, 1980)), puede tambien entenderse tal pérdida como originada por una cierta "restricción" de la clase $P(X\times I)$ a $\underset{\sim}{P}(X)$ a través de la conservación, únicamente, de los subconjuntos "anclados" del producto cartesiano.

1.3.5. Relación entre las distintas estructuras.

Proposición 1.2. Las aplicaciones biunívocas:

$$
\begin{aligned}
\forall b\in I;\quad & i: I \longrightarrow \underset{\sim}{S}(x)/i(b) = (x,b) \\
& k: I \longrightarrow O_a(I)/k(b) = [0,b) \\
& m: I \longrightarrow C_a(I)/m(b) = [0,b] \\
& n: O_a(I) \longrightarrow \underset{\sim}{S}(x)/n([0,b)) = (x,b) \\
& l: O_a(I) \longrightarrow C_a(I)/l([0,b)) = [0,b] \\
& j: C_a(I) \longrightarrow \underset{\sim}{S}(x)/j([0,b]) = (x,b).
\end{aligned}
$$

establecen un diagrama conmutativo de isomorfismos entre álgebras de De Morgan:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "m"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "i"] & C_a(I) \arrow[d, "j"] \\
O_a(I) \arrow[r, "n"'] \arrow[ur, "l"] & \underset{\sim}{S}(x)
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Es inmediata a partir de la definición de estas aplicaciones y de las propiedades estudiadas en el apartado anterior.

<u>Proposición 1.3</u>.- Las aplicaciones bionívocas:

$\forall b \varepsilon I^X$; $i': I^X \longrightarrow \underset{\sim}{P}(X) / i'(b) = \{(x,\ b(x)),\ \ x \varepsilon X\}$

$k': I^X \longrightarrow O_a / k'(b) = \{(x,r)/x \varepsilon X,\ 0 \leqslant r < b(x)\}$

$m': I^X \longrightarrow C_a / m'(b) = \{(x,r)/x \varepsilon X,\ 0 \leqslant r \leqslant b(x)\}$

$n': O_a \longrightarrow \underset{\sim}{P}(X) / n' \{(x,r)/x \varepsilon X,\ 0 \leqslant r < b(x)\} =$
$\{(x, b(x)),\ x \varepsilon X\}$

$l': O_a \longrightarrow C_a / l' \{(x,r)/x \varepsilon X,\ 0 \leqslant r < b(x)\} =$
$(x,r)/x \varepsilon X,\ 0 \leqslant r \leqslant b(x)\}$

$j': C_a \longrightarrow \underset{\sim}{P}(X) / j'\{(x,r)/x \varepsilon X,\ 0 \leqslant r \leqslant b(x)\} =$
$\{(x, b(x),\ x \varepsilon X\}$

establecen un diagrama conmutativo de isomorfismos entre álgebras de De Morgan:

$$\begin{tikzcd}
I^X \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, "i'" near end] & C_a \arrow[d, "j'"] \\
O_a \arrow[r, "n'"'] \arrow[ur, "l'" near end] & \underset{\sim}{P}(X)
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Es inmediata, de nuevo, a partir de las aplicaciones definidas y las propiedades algebraicas ya estudiadas.

Hemos destacado estas relaciones por los siguientes motivos:

1) Es importante poner de manifiesto la conservación de las operaciones binarias y la pseudocomplementación, así como la asociación entre los elementos ínfimos y supremos de los conjuntos implicados.

2) Mediante la proposición 1.3. se asocian funciones, s.d. y ciertos subconjuntos ordinarios del producto XxI. Tal asociación será empleada para la definición de medidas de s.d. a partir de medidas de partes ancladas.

3) La comparación de los dos diagramas pone de manifiesto que la estructura de I se transmite a $\underset{\sim}{P}(X)$, como se ha indicado reiteradamente. Lo mismo puede decirse en re-

lación con $C_a(I)$ y $O_a(I)$ y C_a y O_a, respectivamente.

4) En ambos diagramas se asocian retículos cuyas operaciones binarias son la unión e intersección conjuntistas clásicas con retículos en los que dichas operaciones binarias son las deducidas del orden de los números reales. Esto parece indicar que tales operaciones son "naturales" en el contexto difuso.

1.4. ESTRUCTURAS DE MEDIDA. MEDIDAS ORDINARIAS Y DIFUSAS.

El objetivo fundamental de la presente memoria es relacionar las medidas que pueden definirse sobre estructuras difusas con las medidas clásicas que pueden establecerse sobre el referencial X, sobre I y sobre XxI. Por ello se dedica este apartado al análisis de los tipos generales más relevantes de medidas tanto ordinarias como difusas y de las estructuras donde pueden asentarse.

1.4.1. Medidas ordinarias

Uno de los tipos más generales de medida que han sido propuestas hasta el momento sobre conjuntos ordinarios son las medidas monótonas, introducidas por Sugeno (1974), que engloban como caso particular a las medidas aditivas objeto de la Teoría Clásica de la Medida.

Paralelamente al papel que juega la σ-algebra como estructura básica para el asiento de una medida aditiva, la clase monótona será el marco de definición de las medidas monótonas.

Definición 1.16.- "Sea E un conjunto arbitrario y $M \subset P(E)$. Se dice que M es una clase monótona si:

I) $E \in M; \emptyset \in M$,

II) M es cerrada para el límite de sucesiones monótonas

El par (E,M) suele denominarse espacio monótonamente medible.

La clase monótona más amplia es P(E). Cualquier σ-algebra $B \subset P(E)$ es una clase monótona.

Son clases monótonas de interés para nuestros estudios:

- P(X), P(I), B(I), P(XxI) y P(X)xB(I), siendo X el referencial arbitrario, pero fijo, que venimos considerando y B(I) el σ-álgebra de Borel de I.

- $P_a(I)$, P_a y R, que se utilizan en capítulos posteriores para establecer relaciones entre medidas ordinarias y difusas.

Definición 1.17.- Sea (E,M) un espacio monótonamente medible.

Se denomina medida monótona a toda aplicación $m:M \rightarrow [0,1]$ que verifique:

a) $M(E) = 1$; $m(\phi) = 0$

b) Si $A, B \in M$, $A \subset B$, entonces $m(A) \leq m(B)$.

c) Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ es una sucesión monótona, entonces

$\lim m(A_n) = m(\lim A_n)$.

Estas tres condiciones reflejan, respectivamente, la acotación superior e inferior de la medida, la monotonía y la continuidad. Esta última, como la propia definición de clase monótona, resulta trivial en el caso de que E sea finito.

Muchos son los tipos de medidas monótonas que pueden encontrarse en la literatura (ver Banon (1981) y Dubois y Prade (1980) para un estudio detallado de las mismas). Destacan entre ellas las medidas de Dirac, las de creencia, las de plausibilidad (para referencial finito) y las λ-medidas de Sugeno; caso particular de estas últimas son las medidas σ-aditivas acotadas clásicas (definidas sobre σ-algebras) y más concretamente las medidas de probabilidad.

Es destacable que la complementación no juega papel alguno en relación con las clases y medidas monótonas, por lo que éstas parecen adecuarse a la medida de estructuras algebraicas no complementadas (pseudocomplementadas) como las que han sido expuestas más arriba, así como las medidas de probabilidad son propias de la estructura de álgebra de Boole, en que la complementación juega un papel determinante.

La dificultad de manejo de las clases monótonas y la costumbre de utilizar como estructura básica de medida la σ-algebra han hecho que muchos autores empleen este último tipo de estructura en desarrollo teóricos y aplicaciones prácticas de las medidas monótonas (ver, por ejemplo, (Sugeno, 1974)).

Los dos enunciados siguientes establecen una interesante relación entre las medidas de probabilidad definidas sobre I y el conjunto de las medidas monótonas que pueden construirse sobre $P_a(I)$, relación que será de utilidad en capítulos posteriores.

<u>Lema 1.1</u>.- "Toda medida monótona definida en el espacio $(I, P_a(I))$ engendra una medida de probabilidad única en el espacio $(I, B(I))$".

Demostración: Sea m una medida monótona en $(I, P_a(I))$ y definamos la función $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ de acuerdo con:

$\forall b \in (-\infty, 0)$, $F(b) = 0$

$\forall b \in [0,1]$, $F(b) = m([0,b))$

$\forall b \in (1, \infty)$, $F(b) = 1$

Por las propiedades de m es obvio que F es una función de distribución de probabilidad en $\mathbb{R}$ que engendra una única medida de probabilidad p tal que:

$p(I) = F(1^+) - F(0^-) = 1$

Por tanto, p es una medida de probabilidad sobre $(I,B(I))$.

Proposición 1.4.- "Para toda medida monótona m definida sobre B(I), existe una única medida de probabilidad p sobre B(I) tal que sus restricciones a $P_a(I)$ coinciden".

En efecto, sea $m: B(I) \rightarrow [0,1]$ una medida monótona, y definamos $P(A) = m(A)$, $\forall A \varepsilon P_a(I)$; el lema anterior nos asegura que existe una única medida de probabilidad $p: B(I) \rightarrow [0,1]$ que evidentemente coincide con m sobre $P_a(I)$.

Puede establecerse asi una relación de equivalencia en el conjunto de las medidas monótonas definibles en $[0,1]$ haciendo equivaler aquellas que coincidan sobre $P_a(I)$; las medidas de probabilidad son, entonces, los representantes canónicos de las clases de equivalencia resultantes.

Desde el punto de vista del presente trabajo, la proposición 1.4 nos permite considerar medidas monótonas ó medidas de probabilidad siempre que se trabaje exclusivamente con partes ancladas del intervalo unidad, lo que resulta util habida cuenta de la identificación estructural entre difusos y partes ancladas. De esta forma, mientras que será necesario distinguir las medidas de probabilidad y el resto de las medidas monótonas sobre estructuras del referencial X, tal distinción será innecesaria -- sobre estructuras de partes de I.

Tambien hay que destacar, como consecuencia de esta proposición, que una función de distribución F representa a la clase de equivalencia de las medidas monótonas que coinciden con una probabilidad dada.

Aunque los resultados anteriores no son, en general, extensibles a cualquier σ-álgebra de partes de I (porque no todos sus elementos serán expresables en función de - las partes ancladas del σ-álgebra), ello no tendrá trascendencia para nuestros fines porque, como es usual, consideraremos el campo de Borel como estructura de medida básica en el intervalo unidad.

1.4.2. Medidas sobre conjuntos difusos.

Dos son las estructuras básicas a considerar: la clase monótona y la σ-álgebra difusas, asociadas respectivamente a las medidas difusas en general y a las medidas aditivas en particular.

Definición 1.18- Diremos que $\underset{\sim}{M} \subset \underset{\sim}{P}(X)$ es una clase monótona difusa si y solo si:

a) $\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{\emptyset} \in \underset{\sim}{M}$

b) $\underset{\sim}{M}$ es cerrada para el límite de sucesiones monótonas.

Nota 6.- Las sucesiones monótonas de conjuntos difusos se definen en términos de inclusión difusa y su límite se obtiene de forma análoga al de una sucesión monótona clásica, pero empleando la unión e intersección difusas.

Clases monótonas difusas de interés para esta memoria son $\underset{\sim}{P}(X)$ y $\underset{\sim}{R}(X)$. Obsérvese que esta última no es cerrada ni para la unión ni para la pseudocomplementación.

Definición 1.19.- Medida difusa.-

Dada una clase monótona $\underset{\sim}{M}$, una medida difusa es una aplicación m: $\underset{\sim}{M} \rightarrow I$ que verifica:

1) $m(\underset{\sim}{X}) = 1$; $m(\underset{\sim}{\emptyset}) = 0$

2) Si $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, con $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in \underset{\sim}{M}$, entonces $m(\underset{\sim}{A}) \leq m(\underset{\sim}{B})$.

3) Si $\{\underset{\sim}{A}_n\} \subset \underset{\sim}{M}$ es una sucesión monótona, $\lim m(\underset{\sim}{A}_n) = m(\lim \underset{\sim}{A}_n)$.

Esta definición es una extensión natural de la medida monótona dada con anterioridad. Las medidas difusas constituyen el marco general de trabajo de capítulos posteriores, por lo que las condiciones 1,2 y 3 anteriores son las mínimas exigidas a las medidas que consideraremos.

Queremos destacar que con respecto a la denominación de "medida difusa" no hay un acuerdo entre los diferentes autores que se han ocupado del tema. Así, mientras para Sugeno una medida difusa (fuzzy measure) es una medida ordinaria de las que hemos denominado monótonas, para otros autores una medida difusa es un cierto tipo de medida aditiva (Klement, 1980 a). Zadeh da este nombre a las medidas procedentes de la integración ordinaria (Zadeh, 1968), y otros autores abordan el problema desde diferentes puntos de vista (Batle y Trillas, 1979), (Butnariu, 1983), (Ralescu, 1982).

Por nuestra parte consideramos que la definición anterior abarca el conjunto de las medidas sobre estructuras difusas que, siendo de interés práctico, se adecuan de forma óptima a la estructura algebraica usual de las partes difusas, donde la complementación y la aditividad no son condiciones naturales.

Por el contrario, las condiciones 1,2 y 3 de nuestra definición deben considerarse como imprescindibles en base a que:

1) La acotación es coherente con la elección de [0,1] como retículo para la definición de las funciones de pertenencia y por otra parte referir la medida de cada parte difusa a la medida del referencial (tomada como unidad) es consecuencia del propio concepto de subconjunto.

2) La monotonia está de acuerdo con el orden establecido por la relación de inclusión y parece una condición mínima de la subjetividad humana.

3) La continuidad es condición imprescindible si se piensa que el retículo [0,1] es contínuo y que ello trae como consecuencia que la lógica difusa sea infinitovalorada y contínua; es necesario dar una valoración contínua de la contínua variabilidad de las funciones de pertenencia.

Queremos destacar que algunos autores sólo imponen a las medidas difusas al ser continuas con respecto a las sucesiones monótonas crecientes, dejando la continuidad con respecto a las decrecientes como propiedad adicional. Aunque este tema se analizará con detalle en capítulos posteriores, puede afirmarse que tal requerimiento (aunque elimina algunas precisiones adicionales en la definición de las medidas ordinarias asociadas a las medidas difusas), no tiene una base algebraica ni topológica en el campo difuso, ya que:

I) Desde un punto de vista algebraico, la unión y la intersección juegan un papel equivalente y complementario en las estructuras difusas, y

II) Topologicamente hablando, los s.d. no son "per se" abiertos ni cerrados, sino que tal cualidad vendria dada, en todo caso, por la de los subconjuntos ordinarios que se les asocien; así, puede optarse metodologicamente por asignar partes abiertas ó cerradas a los s.d., lo que da lugar a problemas de medibilidad, respectivamente, con respecto a la intersección ó a la unión de sucesiones monótonas de s.d., por lo que tan válido sería exigir la continuidad hacia abajo como la continuidad hacia arriba a las medidas difusas; en último extremo, el grafo ordinario de un s.d. es un conjunto cerrado en la topología natural de XxI, lo que, en todo caso, abundaría en la exigencia de continuidad para sucesiones monótonas decrecientes.

De entre las medidas difusas, las medidas de probabilidad juegan un papel central; las definiciones que siguen se refieren a ellas.

<u>Definición 1.20</u>.- Una clase $\underset{\sim}{\Sigma}$ de s.d. de un referencial X es una σ-<u>álgebra difusa</u> si y sólo si:

1) $\emptyset \in \underset{\sim}{\Sigma}$

2) $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\Sigma} \Longrightarrow \overline{\underset{\sim}{A}} \in \underset{\sim}{\Sigma}$

3) $\{\underset{\sim}{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \underset{\sim}{\Sigma} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{A}_n \in \underset{\sim}{\Sigma}$

Esta definición reproduce para el campo difuso la noción de σ-álgebra ordinaria. Fué dada por Borghi (1972), e incluye a las estructuras de s.d. medibles de Zadeh (1968). Klement (1980b) y Klement y Schwyhla (1982) añaden la condición de que toda σ-álgebra difusa debe contener a los s.d. con f. de p. constante; esta condición resulta, a nuestro criterio, artificial, ya que responde a problemas de medibilidad y no a cuestiones inherentes a las medidas que tienen asiento en esta estructura. Por esto adoptaremos la definición tradicional. No obstante, al final de este apartado se recogerán explícitamente las definiciones por estos autores.

<u>Definición 1.21</u>.- Sea $\underset{\sim}{\Sigma}$ una σ-álgebra difusa. Una aplicación m: $\underset{\sim}{\Sigma} \longrightarrow [0,1]$ se denomina <u>medida difusa aditiva</u> si y sólo si es una media difusa y

4) $\forall \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \underset{\sim}{\Sigma} \quad m(\underset{\sim}{A}) + m(\underset{\sim}{B}) = m(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + m(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})$

Puede probarse que las condiciones 3) (de la definición 1.19) y 4) (de la definición 1.21) implican la σ-aditividad, lo que inspira el nombre de medida difusa aditiva. Sin embargo, de las cuatro condiciones de su definición no puede deducirse que la suma de las medidas de un s.d. y su pseudocomplementario sea la unidad, por lo que tiene sentido dar la:

<u>Definición 1.22</u>.- Una medida difusa aditiva definida sobre una σ-álgebra difusa $\underset{\sim}{\Sigma} \subset \underset{\sim}{P}(X)$ es una <u>medida difusa de probabilidad</u> si y sólo si cumple:

5) $\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\Sigma}, \qquad m(\underset{\sim}{A}) + m(\underset{\sim}{\bar{A}}) = 1$

Este tipo de medidas fueron introducidas explícitamente por Borghi (1972) bajo el nombre de "probabilidades funcionales", si bien Zadeh las había empleado con anterioridad, construyéndolas mediante integración ordinaria de s.d. medibles (Zadeh, 1968).

La distinción entre medidas aditivas y medidas de probabilidad (aditivas y complementadas) no tiene sentido en el campo ordinario, pero es imprescindible entre medidas difusas como consecuencia de la estructura de $\underset{\sim}{P}(X)$; así, las medidas difusas de probabilidad son una subclase propia de las medidas difusas aditivas, lo que constituye una de las más importantes diferencias entre la Teoría de la Medida difusa y la ordinaria. (Bolaños, 1977).

Puesto que la mayor parte del capítulo 2 está dedicada a generalizar los resultados de Klement (1980a) y Klement y

Schwyla (1982), creemos de interés recoger aquí las definiciones de σ-álgebra y medida difusa dadas por estos autores.

Definición 1.23.- (Klement, 1980a).

Una σ-álgebra difusa es una clase $\underset{\sim}{\Delta} \subset \underset{\sim}{P}(X)$ tal que:

a) $\underset{\sim}{\Delta}$ contiene a todo s.d. de f. de p. constante.

b) $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\Delta} \Longrightarrow \overline{\underset{\sim}{A}} \in \underset{\sim}{\Delta}$

c) Si $\{\underset{\sim}{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \underset{\sim}{\Delta}$ entonces $\bigcup_n \underset{\sim}{A}_n \in \underset{\sim}{\Delta}$

Definición 1.24.-(Klement, 1980a).

Sea $\underset{\sim}{\Delta}$ una σ-álgebra difusa en el sentido de la definición anterior. Una medida difusa de probabilidad es una aplicación m: $\underset{\sim}{\Delta} \longrightarrow I$ tal que:

I) $m(\emptyset) = 0$; $m(\underset{\sim}{X}) = 1$

II) $\forall \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \underset{\sim}{\Delta}$, $m(\underset{\sim}{A}) + m(\underset{\sim}{B}) = m(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) + m(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})$

III) $\forall \{\underset{\sim}{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \underset{\sim}{\Delta}$ monótona creciente, $m(\bigcup_n \underset{\sim}{A}_n) = \sup_n m(\underset{\sim}{A}_n)$

Obsérvese que no se exige la continuidad en sucesiones monótonas decrecientes, lo que por nuestra parte es condición para toda medida difusa.

Finalmente recogemos algunas definiciones y resultados relativos al concepto de núcleo de Markov (Markoff-kernel), que serán de interés en desarrollos posteriores.

Definición 1.25.- (Bauer, 1972)

Dado un espacio medible ordinario (X,σ), un núcleo de Markov es una aplicación $K: XxB(I) \to [0,1]$ tal que:

1) $\forall x \varepsilon X$, $K(x,.)$: $B(I) \longrightarrow [0,1]$ es una medida de probabilidad.
2) $\forall B \varepsilon B(I)$, $K(.,B)$: $x \to [0,1]$ es σ-medible (considerando en el espacio imagen la estructura de espacio medible dada por $B(I)$).

Definición 1.26.- Sea un núcleo de Markov K relativo a (x,σ). Diremos que es continuo si $K(x,.)$ es una medida de probabilidad continua cualquiera que sea $x \varepsilon X$.

Supongamos que en (X,σ) hay establecida una medida de probabilidad P. Diremos que K es P-casi continuo si $K(x,.)$ es continua para todo $x \varepsilon X$, salvo quizás en un conjunto de probabilidad cero.

Proposición 1.5.- (Bauer, 1972).

"Sea K un núcleo de Markov relativo a (X,σ) y P una medida de probabilidad definida en (X,σ). Considerando el espacio medible producto $(XxI, \sigma xB(I))$, la aplicación Q: $\sigma xB(I) \longrightarrow [0,1]$ dada por:

$$\forall A \varepsilon \sigma xB(I), \qquad Q(A) = \int_X K(x, A_x)\, dP$$

es una medida (ordinaria) de probabilidad".

CAPITULO 2

CARACTERIZACION DE MEDIDAS DIFUSAS ADITIVAS

2.1. INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo es analizar la caracterización de las medidas difusas aditivas que pueden definirse sobre $(X, \underset{\sim}{\Sigma})$ (siendo $\underset{\sim}{\Sigma}$ una σ-álgebra difusa de $\underset{\sim}{P}(X)$) por medio de medidas ordinarias construidas sobre $(X \times I, \sigma)$ (siendo σ una σ-álgebra ordinaria de $P(X \times I)$).

Más concretamente, tratamos de poner de manifiesto qué tipo de medida difusa procede de cada tipo de medida ordinaria.

Para obviar problemas relativos a medibilidad, consideramos en la mayor parte de los casos $\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{P}(X)$, si bien todos los resultados son fácilmente extensibles a σ-álgebras $\underset{\sim}{\Sigma}_{\gamma}$ generadas por una σ-álgebra γ ordinaria sobre X, es decir, las constituidas por los subconjuntos difusos γ-medibles.

En el apartado 2.2. se analiza el tipo de medida que se genera cuando se dota a XxI de estructura de espacio de medida producto a partir de $(X, P(X), p)$ e $(I, B(I), l)$, donde p es una medida de probabilidad y l la medida de Lebesgue.

Se comprueba que en estas condiciones se obtiene la medida difusa de probabilidad propuesta por Zadeh (1968), es decir:

$$\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X),\ P(\underset{\sim}{A}) = \int_X \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\,.\,dp$$

En el apartado 2.3. se estudia el caso en que $(I,B(I),l)$ se generaliza a $(I,B(I),q)$, siendo q una medida monótona. Bajo estas hipótesis se comprueba que pueden obtenerse medidas difusas aditivas en $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ y se caracterizan las condiciones bajo las que se generan medidas difusas de probabilidad.

Se aborda directamente el problema en el apartado 2.4. suponiendo que en $(X\times I, \sigma(P(X)\times B(I)))$ hay establecida una medida de probabilidad donde $\sigma(P(X)\times B(I))$ nota el σ-álgebra engendrada por la clase $P(X)\times B(I) = \{ A\times B, A\subset X, B\in B(I)\}$

En estas condiciones se demuestra que nuevamente se genera en $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ una medida difusa aditiva. Se comprueba asimismo que la clase de las medidas que pueden obtenerse por los procedimientos analizados en los apartados 2.2 y 2.3 quedan englobadas entre las que se obtienen por este método.

El capítulo termina con el apartado 2.5., en donde se analiza el problema para una σ-álgebra engendrada por una σ-álgebra ordinaria, discutiéndose los casos correspondientes a los espacios I,X y XxI.

2.2. MEDIDAS DIFUSAS DE PROBABILIDAD GENERADAS A PARTIR DE LA MEDIDA DE LEBESGUE EN EL INTERVALO UNIDAD.

Sean $(X,P(X), p)$ e $(I,B(I),l)$ dos espacios de medida ordinarios, con X arbitrario no vacío, p una medida de probabilidad y l la medida de Lebesgue.

Al considerar la σ-álgebra $P(X)$, todas las funciones de X en I son trivialmente medibles e integrables y puede definirse la aplicación $m_\theta : I^X \longrightarrow I$ de forma:

$$\forall f \in I^X,\ m_\theta\ (f) = \int_X f(x) .\ dp$$

Sea $(X\mathrm{x}I, \sigma(P(X)\mathrm{x}B(I)), m_\psi)$ el espacio de medida producto, donde $\sigma(P(X)\mathrm{x}B(I))$ representa el σ-álgebra producto y m_ψ es la medida producto de p y l.

Es bien conocido (ver (Taylor, 1966)) que m_ψ se caracteriza de acuerdo con: $\forall A \in \sigma\ (P(X)\mathrm{x}B(I)),\ m_\psi\ (A) = \int_X l(A_x)\ dp,$ (1)
donde A_x nota la x-sección vertical de A.

Puesto que todas las funciones de I^X son acotadas y medibles, puede asegurarse que:

1) $O_a \subset \sigma(P(X)\mathrm{x}B(I))$; $C_a \subset \sigma(P(X)\mathrm{x}B(I))$.
2) $\forall f \in I^X$, $Gr(f) = \{(x,y)/x \in X,\ y = f(x) \in I\} \in \sigma(P(X)\mathrm{x}B(I))$, (ver Halmos (1974)).

Así pues, puede afirmarse que $P_a \subset \sigma(P(X)\mathrm{x}B(I))$.

Sea $f \varepsilon I^X$ y $k'(f)$ la parte anclada abierta asociada a ella (proporción 1.3.). De acuerdo con (1), se obtiene:

$$m_\Psi \left[k'(f)\right] = \int_X l\left[(k'(f))_x\right] dp = \int_X l([0, f(x))) dp = \int_X f(x) dp,$$

y por tanto:

$$\forall f \varepsilon I^X, \quad m_\theta(f) = m_\Psi\left[k'(f)\right] \tag{2}$$

Tal resultado es una conocida definición alternativa de la medida producto (Taylor, 1966).

Por la continuidad de l, $m_\Psi(Gr(f)) = 0 \ \forall f \varepsilon I^X$, por lo que también se tiene:

$$\text{I)} \ \forall f \varepsilon I^X, \quad m_\theta(f) = m_\Psi\left[m'(f)\right] \tag{3}$$
$$\text{II)} \ \forall f \varepsilon I^X, \quad m_\theta(f) = m_\Psi(B_A^f),$$

siendo $m'(f)$ la parte anclada cerrada asociada a f y B_A^f la parte anclada asociada a f y a $A \subset X$.

Estamos, pues, en condiciones de definir una valoración m de s.d. de la forma:

$$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \quad m(\underset{\sim}{A}) = m_\Psi\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})\right] = m_\Psi\left[m'(\mu_{\underset{\sim}{A}})\right] = \int_X \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dp. \tag{4}$$

Es fácil comprobar que m es una medida difusa de probabilidad (definición 1.22) sobre $(X, \underset{\sim}{P}(X))$. Las propiedades de m se heredan directamente de las que posee m_Ψ como medida ordinaria de probabilidad ó, si se prefiere, de las propiedades de la integral de Lebesgue.

De la expresión (4) cabe deducir, pues, una perfecta correspondencia entre las medidas definibles en las cuatro clases del diagrama de la proposición 1.3.: medida integral para I^X, medida producto para O_a y C_a y medida difusa de probabilidad para $\underset{\sim}{P}(X)$.

Puesto que m y p coinciden sobre P(X), la primera es una verdadera extensión de la segunda.

Queda probado el siguiente:

<u>Teorema 2.1</u>.- "Considerada la medida de Lebesgue en (I, B(I)), toda medida de probabilidad sobre (X, P(X)) se extiende de forma única a una medida difusa de probabilidad definida en (X, $\underset{\sim}{P}(X)$) a través de la medida producto en XxI".

Hemos obtenido de esta forma una caracterización ordinaria sobre XxI de la primera definición de medida de probabilidad de un s.d. dada por Zadeh (1968). Tales medidas quedan incluidas en las que nosotros denominamos medidas difusas de probabilidad.

En particular, si X es finito de cardinal N y la probabilidad p es la uniforme ($p(x_i) = \frac{1}{N}$, $x_i \in X$), la medida m asocia a cada s.d. su cardinal relativo a X, de modo que puede caracterizarse la extensión al campo difuso del concepto de cardinal de un subconjunto, dada por: $\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X)$, $\text{Card.}(\underset{\sim}{A}) = \sum_i \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$ a través de la medida difusa m:

$$\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X), \qquad m(\underset{\sim}{A}) = \mathrm{Card}_X(\underset{\sim}{A}) = \frac{\sum_i \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}{N}$$

cerradas se tiene:

$$\forall f \varepsilon I^X, \quad m_\lambda[k'(f)] = \int_X \lambda[k'(f)_x] \, dp = \int_X \lambda([0,f(x))) \, dp \tag{6}$$

$$m_\lambda[m'(f)] = \int_X \lambda[m'(f)_x] \, dp = \int_X \lambda([0,f(x)]) \, dp \tag{7}$$

En general, no tiene por que cumplirse que $\forall f \varepsilon I^X$, $m_\lambda[k'(f)] = m_\lambda[m'(f)]$, por lo que pueden considerarse dos valoraciones v_λ y w_λ de I^X en $[0,1]$, definidas por:

$$\forall f \varepsilon I^X, \quad v_\lambda(f) = m_\lambda[k'(f)] \text{ y } w_\lambda(f) = m_\lambda[m'(f)] \tag{8}$$

Se presentan así dos alternativas para asignar una valoración a los s.d. por medio de m_λ, pero ninguna de ellas conduce, en general, a una medida difusa, pues:

A) $X \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ está asociada a $f_1 \varepsilon I^X (f_1(x)=1 \; \forall x \varepsilon X)$ y por tanto $v_\lambda(f_1) = \lambda([0,1)) \leqslant 1$,

B) $\emptyset \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ está asociada a $f_\circ \varepsilon I^X (f_\circ(x)= 0 \; \forall x \varepsilon X)$ y entonces $w_\lambda(f_\circ)=\lambda([0,0]) \geqslant 0$,

de modo que, utilizando v_λ ó w_λ se obtiene, respectivamente, una valoración que no asigna valor 1 a $X \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ ó valor 0 a $\emptyset \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ para cualquier λ que se considere.

La proposición siguiente nos muestra bajo qué condiciones se obtiene una medida difusa a partir de m_λ

Recordemos que una medida de probabilidad en $(\mathbb{R},B)$ se dice contínua si y sólo si su función de distribución asociada es contínua en el sentido topológico habitual.

Proposición 2.1.- "Sea m^{λ}: $\underset{\sim}{P}(X) \rightarrow [0,1]$ definida de acuerdo con:

$$\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X),\ m^{\lambda}(\underset{\sim}{A}) = w_{\lambda}(\mu_{\underset{\sim}{A}}) = m_{\lambda}\left[m'(\mu_{\underset{\sim}{A}})\right]$$

Las tres afirmaciones que siguen son equivalentes:

(a) $(X,\underset{\sim}{P}(X),m^{\lambda})$ es un espacio de medida difusa

(b) $\forall f \in I^{X}$, $v_{\lambda}(f) = w_{\lambda}(f)$

(c) λ es continua".

Demostración:

(c) $\Longrightarrow$ (b): Es inmediata

(b) $\Longrightarrow$ (a): Si se cumple la igualdad de v^{λ} y w^{λ} se tiene:

1) $m^{\lambda}(\phi) = w_{\lambda}(f_{\circ}) = v_{\lambda}(f_{\circ}) = 0$; $m^{\lambda}(X) = w_{\lambda}(f_{1}) = 1$

2) m^{λ} es monótona por ser el resultado de una integración

3) m^{λ} es contínua para el límite de sucesiones monótonas, ya que v_{λ} lo es para las sucesiones monótonas crecientes ($O_{a}(I)$ es cerrada respecto a la unión) y w_{λ} lo es para las decrecientes ($C_{a}(I)$ es cerrada para la intersección).

(a) $\Longrightarrow$ (c): Lo demostraremos mediante el contrarrecíproco, es decir, (no c) $\Longrightarrow$ (no a).

Si λ no es continua, es bien conocido de la teoría clásica que tiene que existir $c_o \varepsilon [0,1]$ tal que $\lambda(\{c_o\}) > 0$, pudiendo distinguirse dos casos:

I) $c_o = 0$. Se tendría entonces:

$$m^\lambda(\phi) = w_\lambda(f_o) = \lambda([0,0]) > 0$$

II) $c_o \varepsilon (0,1]$. Consideremos la sucesión monótona creciente de s.d. con f. de p. $\mu_{\underset{\sim}{A}_n}(x) = c_o - \frac{c_o}{n}$, $\forall x \varepsilon X$,

cuyo límite es obviamente el s.d. de f. de p. $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = c_o$, $\forall x \varepsilon X$. Se tiene entonces $m^\lambda(\underset{\sim}{A}) > \lim m^\lambda(\underset{\sim}{A}_n)$.

Así pues, en ninguno de los casos m^λ es una medida difusa.

Nota 1: Esta proposición resulta aún más fuerte, ya que es fácil comprobar, a partir de su definición, que m^λ verifica la condición de actividad fuerte cualquiera que sea λ ; así pues, toda medida difusa obtenida a partir de una probabilidad continua sobre I por el procedimiento anteriormente expuesto resulta ser una medida difusa aditiva.

Nota 2: Es necesario señalar que la continuidad monótona de q_λ (ó de cualquier otra q definida sobre B(I) que le sea equivalente en $P_a(I)$) no implica que λ sea una probabilidad contínua. Para probar esta aseveración, basta considerar el espacio de medida $(I,B(I),\delta_r)$, donde δ_r es la medida de Dirac asociada a $r\varepsilon[0,1)$:

$$\forall A\varepsilon B(I),\quad \delta_r(A) = \begin{cases} 0 & r\not\varepsilon A \\ 1 & r\varepsilon A \end{cases}$$

δ_r es una medida monótona, y, sin embargo, la probabilidad generada por ella no es continua, ya que tiene como función de distribución:

$$F_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant r \\ 1 & \text{si } t > r \end{cases}$$

A continuación vamos a dar dos caracterizaciones de m^λ que serán de interés.

1) Sea λ continua y F su función de distribución asociada. Es inmediato que:

$$\forall \underset{\sim}{A}\varepsilon \underset{\sim}{P}(X),\quad m^\lambda(\underset{\sim}{A}) = w_\lambda(\mu_{\underset{\sim}{A}}) = v_\lambda(\mu_{\underset{\sim}{A}}) = \int_X \lambda([0,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)))\,dp =$$

$$\int_X F(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))\,dp = \int_X l([0,F(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))))\,dp, \qquad (9)$$

lo que expresa m^λ en términos de p y l.

2) Consideremos la aplicación θ^λ: $\underset{\sim}{P}(X) \to \underset{\sim}{P}(X)$ dada por:

$$\forall \underset{\sim}{A}\varepsilon \underset{\sim}{P}(X),\quad \theta^\lambda(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{B} / \ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = F(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \quad \forall x\varepsilon X \qquad (10)$$

Es inmediato que θ^λ es un endomorfismo entre retículos (para las operaciones de unión e intersección difusa).

De acuerdo con (9) y (10), se tiene:

$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, $\quad m^{\lambda}(\underset{\sim}{A}) = \int_X 1([0,F(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)))) \, dp = m(\theta^{\lambda}(\underset{\sim}{A}))$ siendo m la medida difusa construida en el apartado anterior.

Observamos que $\theta^{\lambda}(\underset{\sim}{A})$ es un s.d. cuya f. de p. es la "deformación" de $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ mediante F, punto a punto. Así pues, podemos decir que m^{λ} es el resultado de combinar m con una deformación del intervalo unidad idéntica para cada elemento $x \varepsilon X$.

La proposición siguiente establece las condiciones bajo las cuales m^{λ} es una medida difusa de probabilidad. Este problema ha sido estudiado bajo perspectivas diferentes por Delgado y Bolaños (1977) y Klement y Schwyhla (1982).

<u>Proposición 2.2</u>.- "Sea m^{λ} la medida definida con anterioridad y supongamos que λ es continua con distribución F. Entonces m^{λ} es una medida difusa de probabilidad si y sólo si F es simétrica con respecto a 1/2, es decir, $\forall a \varepsilon [0,1]$, $F(a) = 1-F(1-a)$".

Demostración:

Suficiencia: Puesto que F es continua, m es una medida difusa aditiva. Por otra parte,

$$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \quad m^{\lambda}(\underset{\sim}{A}) + m^{\lambda}(\overline{\underset{\sim}{A}}) = m(\theta^{\lambda}(\underset{\sim}{A})) + m(\theta^{\lambda}(\overline{\underset{\sim}{A}})) =$$
$$= \int_X F(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \, dp + \int_X F(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \, dp = 1 \tag{11}$$

Puesto que F es simétrica con respecto a 1/2; así pues, m^{λ} verifica la propiedad de complementariedad y queda probado que es una medida difusa de probabilidad.

Necesidad: si m^λ es una medida difusa de probabilidad, se cumple (11) ($\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$), lo que equivale a afirmar que:

$\forall f \varepsilon I^X$, $F(f(x))+F(1-f(x))=1$ $\forall x \varepsilon X$, ó,

lo que es lo mismo, $\forall a \varepsilon [0,1]$, $F(a)+F(1-a)=1$

con lo que queda probada la simetría de F con respecto a 1/2.

#

Para distinguir las medidas monótonas sobre (I,B(I)) (ó solo sobre $(I,P_a(I))$) que dan lugar a medidas difusas aditivas en $(X, \underset{\sim}{P}(X))$, introducimos:

Definición 2.1.- "Una medida monótona sobre (I,B(I)) se denomina funcionalmente continua si y sólo si su medida de probabilidad generada sobre (I,B(I)) a través de $P_a(I)$ es contínua".

El siguiente teorema resume los resultados anteriormente obtenidos.

Teorema 2.2.- "Sea q una medida monótona sobre (I,B(I)) (ó sobre $(I,P_a(I))$) y (X,P(X),p) un espacio de probabilidad.

I) Si q es funcionalmente continua, entonces p se extiende de manera única a una medida difusa aditiva m^λ en $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ por medio de la medida producto construida en $(X \times I, \sigma(P(X) \times B(I)))$ a partir de p y la probabilidad λ asociada a q.

II) Si y sólo si la distribución F asociada a λ es simétrica con respecto a 1/2, entonces m^λ es una medida difusa de probabilidad".

Nota 3: La medida m^λ coincide con p sobre los subconjuntos ordinarios del referencial, por lo que se trata de una verdadera extensión.

Nota 4: En el proceso seguido para definir m^λ ha quedado de manifiesto que depende únicamente de λ, una vez fijada p; por tanto, dos medidas monótonas y funcionalmente continuas que coincidan sobre $P_a(I)$ dan lugar a la misma λ y, en consecuencia, a la misma extensión difusa de p.

El teorema 2.2. generaliza el teorema 2.1. puesto que la medida de Lebesgue es una medida monótona (en particular, sobre $[0,1]$, una probabilidad) funcionalmente continua y simétrica. Se pone además de manifiesto que la distinción entre las medidas difusas de probabilidad (complementadas) y las simplemente aditivas tiene su correlato en el campo ordinario en la distinción entre medidas simétricas y no simétricas sobre el intervalo unidad.

Nótese que la forma particular que pueda adoptar la probabilidad p, definida en las partes de referencial, no influye en absoluto en nuestros resultados. Puesto que m^λ

puede obtenerse combinando la medida de Lebesgue con la "deformación" introducida por la distribución de λ, ó, lo que es lo mismo, mediante m y el endomorfismo θ^{λ}, queda claro que es la medida del retículo y no la del referencial la que caracteriza el tipo de medida difusa resultante.

Asimismo, se evidencia nuevamente la estrecha relación que existe entre las propiedades que se supongan en I y las que posee, como consecuencia, $\tilde{P}(X)$, no sólo desde el punto de vista algebraico (como analizamos en el capítulo anterior) sino tambien por lo que se refiere a las estructuras y tipos de medidas.

Hasta aquí hemos analizado las medidas difusas que pueden construirse en $(X,\tilde{P}(X))$ a partir de una medida de probabilidad en $(X,P(X))$ y una medida ordinaria en $(I,B(I))$. Como se ha comentado con anterioridad, dichas medidas pueden suponerse generadas a partir de que p por medio de una "deformación" de los valores del intervalo unidad, idéntica para cada $x\varepsilon X$. Un nuevo y más amplio grupo de medidas difusas aditivas se obtiene al considerar distintas "deformaciones" del $[0,1]$ para los distintos elementos del referencial.

En la sección siguiente se analiza cómo esta ampliación del campo de las medidas difusas coincide con la que proviene de considerar medidas ordinarias directamente sobre --- $X\times[0,1]$ en lugar de medidas producto generadas por las definidas sobre X y sobre $[0,1]$.

2.4. MEDIDAS DIFUSAS ADITIVAS GENERADAS A PARTIR DE UNA MEDIDA EN EL PRODUCTO CARTESIANO

En este apartado se desarrolla la relación entre las medidas difusas aditivas y una cierta clase de medidas ordinarias sobre el producto cartesiano XxI.

Generalizamos para medidas monótonas el siguiente resultado obtenido recientemente por Klement y Schwyhla (1982) en un marco conceptual ligeramente distinto al que aquí se considera.

Teorema 2.3. (Klement y Schwyhla, 1982)

"Sea $\underset{\sim}{\Delta}$ la σ-álgebra difusa generada en X por una σ-algebra ordinaria δ, y $m: \underset{\sim}{\Delta} \to \mathbb{R}^+$ un funcional. Entonces las -- tres aseveraciones siguientes son equivalentes:

I) m es una medida difusa finita sobre $(X, \underset{\sim}{\Delta})$.

II) existe una única medida finita p sobre (X, δ) y un núcleo de Markov K p-casi únicamente determinado y tal que para todo $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\Delta}$

$$m(\underset{\sim}{A}) = \int K(x, [0, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x))) \, dp(x)$$

III) existe una única medida finita Q en $(X\times[0,1), \sigma(\delta \times B))$ tal que para todo $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{\Delta}$, $m(\underset{\sim}{A}) = Q[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})]$ ".

Este teorema es, lógicamente, válido para las definiciones de Klement (1980a) de σ-álgebra y medidas difusas (ver definiciones 1.23 y 1.24) y se ha expresado adaptando ligeramente la notación original a la nuestra.

Por otra parte, para poder garantizar la continuidad en sucesiones monótonas decrecientes, éstos autores imponen condiciones adicionales obteniendo la:

<u>Proposición 2.3</u>. (Klement y Schwyhla, 1982)

"En las condiciones del teorema anterior, la medida difusa m será continua para sucesiones monótonas decrecientes si y sólo si:

$$\forall f \in I^X, \quad Q(Gr(f)) = 0".$$

Nuestro objetivo es la obtención de un teorema similar al 2.3., válido para las definiciones de σ-álgebra y medida difusas que hemos adoptado. En este sentido, la definición que sigue nos será de utilidad.

<u>Definición 2.2</u>.- Diremos que una <u>medida</u> ordinaria definida sobre $(X\text{x}I, \sigma)$, donde σ es cualquier σ-álgebra de partes de XxI, es <u>verticalmente contínua</u> si y sólo si asigna medida nula a todo elemento de σ que sea el grafo de una función X en I.

Consideremos un espacio de probabilidad $(X,P(X),p)$ y un núcleo de Markov K: $X\text{x}B(I) \longrightarrow [0,1]$ relativo a $(X,P(X))$.

Si, como antes, notamos $\sigma(P(X)xB(I))$ el σ-álgebra producto, podemos definir una aplicación v_K: $\sigma(P(X)xB(I)) \rightarrow [0,1]$ de la forma:

$$\forall A \varepsilon \sigma(P(X)xB(I)), \qquad v_K(A) = \int_X K(x,A_x)\, dp,$$

que en virtud de la proposición 1.5. es una medida de probabilidad sobre $(XxI, \sigma(P(X)xB(I)))$.

Es claro que $P_a \subset \sigma(P(X)xB(I))$, por lo que v_K está definida sobre todas las partes ancladas abiertas. Podemos, pues, establecer la valoración m_K: $\underset{\sim}{P}(K) \longrightarrow [0,1]$ como:

$\forall \underset{\sim}{A} \, \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, $m_K(\underset{\sim}{A}) = v_K[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})] = \int K(x,[0,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)))dp$, que está definida unívocamente.

Se verifican las propiedades:

A) $m_K(\phi) = 0$, pues $[0,\mu_\phi(x)) = \phi \; \forall x \varepsilon X$.

B) m_K es monótona, ya que si $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, ha de ser $K(x,[0,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x))) < K(x,[0,\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)))$, $\forall x \varepsilon X$,

puesto que $K(x,.)$ es una probabilidad sobre $(I,B(I))$.

C) m_K es continua para sucesiones monótonas crecientes, por ser $K(x,.)$ una medida de probabilidad $\forall x \varepsilon X$, por la continuidad hacia arriba de la integral y por el hecho de que se haya definido m_K a través de las partes ancladas abiertas, cuyas sucesiones monótonas crecientes convergen a partes ancladas abiertas.

D) m_K es aditiva, esto es, $\forall \underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ se cumple:

$$m_K(\underset{\sim}{A}) + m_K(\underset{\sim}{B}) = m_K(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}) + m_K(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}).$$

En efecto, dado que k'es un isomorfismo, tenemos

$$\forall \mu_{\underset{\sim}{A}}, \mu_{\underset{\sim}{B}} \in I^X, \quad (k'(\mu_{\underset{\sim}{A}}))\cup(k'(\mu_{\underset{\sim}{B}})) = k'(\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}})$$

$$(k'(\mu_{\underset{\sim}{A}}))\cap(k'(\mu_{\underset{\sim}{B}})) = k'(\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}})$$

y en consecuencia, puesto que v_K es una medida ordinaria de probabilidad, se verifica:

$$\forall \underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\underset{\sim}{P}(X), \quad m_K(\underset{\sim}{A}) + m_K(\underset{\sim}{B}) = v_K\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})\right] + v_K\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{B}})\right] =$$

$$= v_K\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}})\right] + v_K\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}})\right] = m_K(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}) + m_K(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})$$

La valoración m_K no es, en general, una medida difusa, pues no puede garantizarse que cumpla $m_K(X) = 1$ ni que sea continua para sucesiones monótonas decrecientes si K es un núcleo de Markov cualquiera.

El teorema siguiente caracteriza el conjunto de núcleos que dan lugar a medidas difusas aditivas.

<u>Teorema 2.4</u>.- "Dadas las definiciones y el proceso constructivo anterior, se verifica la equivalencia de las afirmaciones siguientes:

(I) m_K es una <u>medida difusa aditiva</u>

(II) v_K es una medida de probabilidad <u>verticalmente continua</u>.

(III) K es un núcleo de Markov <u>p-casicontínuo</u>".

Demostración:

(I)$\Longrightarrow$(III): Veremos que (no (III))$\Longrightarrow$(no (I)).

Si K no es p-casi contínuo, ha de existir un $D\varepsilon P(X)$ tal que $p(D) \neq 0$ y $\forall x\varepsilon D$, $K(x,.)$ es discontínua en $H_x \subset [0,1]$; podemos distinguir dos casos:

1) $H_x = \{1\}$, $\forall x\varepsilon D' \subset D$, con $p(D') \neq 0$

Entonces es evidente que $m_K(X) \neq 1$ y por tanto m_K no es medida difusa

2) $H_x = \{1\}$, $\forall x\varepsilon D' \subset D$, con $p(D') = 0$.

Sea entonces el s.d. $\underset{\sim}{A}$ de f. de p.:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin D \\ r_x & \text{si } x \,\varepsilon\, D-D' \text{ con } r_x \varepsilon H_x,\ r_x \neq 1. \\ 1 & \text{si } x\varepsilon D' \end{cases}$$

y la sucesión monótona decreciente $\{\underset{\sim}{A}_n\}_{n\varepsilon\mathbb{N}} \subseteq \underset{\sim}{P}(X)$ caracterizada por:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin D \\ r_x + \dfrac{1-r_x}{n} & \text{si } x\varepsilon D-D', \text{ con } r_x \varepsilon H_x,\ r_x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x\varepsilon D' \end{cases}$$

Es inmediato que $\lim \underset{\sim}{A}_n = \underset{\sim}{A}$. Sin embargo, $\lim m_K(\underset{\sim}{A}_n) \neq m_K(\underset{\sim}{A})$ como puede fácilmente comprobarse. Así pues, tampoco en este caso es m_K una medida difusa.

(III)$\Longrightarrow$(II):

Es inmediato ya que si K es p-casi continuo,

$\forall f \in I^X$, $v_K[k'(f)] = \int_X K([0,f(x)))dp = \int_X K([0,f(x)]\ )\ dp =$

$= v_K[m'(f)]$; pero $Gr(f) = [m'(f)] - [k'(f)]$, de donde

$v_K(Gr(f)) = 0, \forall f \in I^X$.

(II)$\Longrightarrow$(I): Si v_K es verticalmente continua, entonces:

$\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X)$, $v_K[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})] = v_K[m'(\mu_{\underset{\sim}{A}})]$

y se verifica:

a) $m_K(X) = 1$, ya que $v_K[m'(f_1)] = 1$

b) m_K es continua para sucesiones monótonas decrecientes, ya que v_K lo es para sucesiones monótonas de partes ancladas.

Así pues, m_K es una medida difusa.

De acuerdo con el proceso demostrativo de este teorema, podemos obtener inmediatamente:

<u>Corolario 1</u>: Dados K y p, siendo K un núcleo de Markov p-casi continuo, la medida m_K es única. Si K y K' son dos núcleos de Markov p-casi continuos y tales que $K(x,.) \equiv K'(x,.)$ para todo $x \in X$, salvo quizás en un conjunto de medida nula (respecto de p), entonces $m_K \equiv m_{K'}$.

Corolario 2: Sean $\underset{\sim}{F} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ con f. de p. $f \varepsilon I^X$ y $A \subset X$ cualesquiera. Entonces $v_K(B_A^f) = m_K(\underset{\sim}{F})$ si y sólo si m_K es una medida difusa (aditiva).

Como consecuencia de todos los resultados anteriores podemos obtener la siguiente caracterización de las medidas difusas (aditivas).

Teorema 2.5.- "Para cualquier valoración m: $\underset{\sim}{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

I) m es una medida difusa aditiva sobre $(X,\underset{\sim}{P}(X))$

II) Existe una única medida de probabilidad p sobre $(X,P(X))$ y un único núcleo de Markov K p-casi continuo tal que:

$$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \quad m(\underset{\sim}{A}) = \int_X K(x,[0,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)))dp.$$

III) Existe una única medida ordinaria v en $(XxI,P(X)xB(I))$, verticalmente continua, tal que:

$$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \quad m(\underset{\sim}{A}) = v[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})]$$

Demostración:

(II) $\Longrightarrow$(III)$\Longrightarrow$(I) a consecuencia del teorema 2.4.

(I) $\Longrightarrow$(II) se sigue directamente del teorema 2.3. sin más que tener en cuenta las características de las medidas y σ-álgebras (difusas y ordinarias) que estamos empleando.

Concretando un poco más el campo de trabajo, en lo que sigue analizamos la forma de generar medidas difusas de probabilidad. Como paso previo introducimos algunas definiciones que serán necesarias.

Definición 2.3.- Sea $A \varepsilon P(XxI)$. Denominaremos conjunto simétrico de A, a aquel $S_A \varepsilon P(XxI)$ tal que $(x,r) \varepsilon A$ si y sólo si $(x,1-r) \varepsilon S_A$.

Definición 2.4.- Sea v una medida ordinaria sobre $(XxI, \sigma(P(X)xB(I)))$. Diremos que v es simétrica si y sólo si:

$$v(A) = v(S_A) \qquad \forall A \varepsilon \sigma(P(X)xB(I)).$$

Definición 2.5.- Sea K un núcleo de Markov relativo a $(X,P(X))$. Diremos que K es simétrico si y sólo si $K(x,.)$ es una medida de probabilidad simétrica $\forall x \varepsilon X$ (es decir, con función de distribución simétrica respecto a 1/2). Si p es una medida de probabilidad sobre $(X,P(X))$, y $K(x,.)$ es simétrica para todo x, excepto quizá en un conjunto de medida nula, entonces diremos que K es p-casi simétrico.

En estas condiciones, conservando la notación del teorema 2.5., podemos enunciar:

Teorema 2.6.- "Para cualquier valoración m: $\underset{\sim}{P}(X) \rightarrow [0,1]$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) m es una medida difusa de probabilidad

b) v es simétrica y verticalmente contínua".

Demostración:

(b) $\Longrightarrow$ (a): Si v es verticalmente continua, entonces m es una medida difusa aditiva (teorema 2.5.)

Puesto que $K'(\mu_{\underset{\sim}{A}})$ es el conjunto simétrico de $(X x I) - [m'(\mu_{\underset{\sim}{\bar{A}}})]$, $\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, y v es simétrica y verticalmente continua, tenemos:

$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, $m(\underset{\sim}{A}) = v[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})] = v(XxI) - v[m'(\mu_{\underset{\sim}{\bar{A}}})] =$

$= 1 - v[k'(\mu_{\underset{\sim}{\bar{A}}})] = 1 - m(\underset{\sim}{\bar{A}})$,

lo que prueba que m es una medida difusa de probabilidad.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Realizaremos esta demostración en varias etapas:

- Si m es una medida difusa (aditiva), entonces v es verticalmente continua, de acuerdo con el teorema 2.5.
- Si m es una medida difusa de probabilidad, entonces v es simétrica para todas las partes ancladas, es decir, $\forall A \varepsilon P_a$, $v(A) = v(S_A)$. En efecto, si m es una medida difusa de probabilidad,

  $\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, $m(\underset{\sim}{A}) + m(\underset{\sim}{\bar{A}}) = 1$

  y por ser verticalmente continua, podemos deducir que:

$$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \quad m(\underset{\sim}{A}) + m(\overline{\underset{\sim}{A}}) = v\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})\right] + v\left[m'(\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}})\right] = 1$$

Por otra parte,

$$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \quad v\left[m'(\mu_{\underset{\sim}{A}})\right] = v(XxI) - v(S) = 1 - v(S)$$

donde S es el conjunto simétrico de $k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})$; resulta entonces inmediatamente que $\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, $v\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{A}})\right] = v(S)$, lo que se extiende sin dificultad a todas las partes ancladas por la continuidad de v.

- Si v es simétrica para todas las partes ancladas, lo es para todos los miembros de $\sigma(P(X)xB(I))$ que son verticalmente conexos (esto es, cuyas secciones verticales son intervalos de I).

  Para probarlo basta considerar que el conjunto simétrico de todo conjunto verticalmente conexo también es verticalmente conexo y que, dado $C \varepsilon \sigma(P(X)xB(I))$, pueden definirse los s.d. $\underset{\sim}{C}^{+}$, $\underset{\sim}{C}^{-}$, $\underset{\sim}{S}_C^{+}$ y $\underset{\sim}{S}_C^{-}$, dados por:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}^{+}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{r/(x,r) \varepsilon C\} = \emptyset \\ \sup\{r/(x,r) \varepsilon C\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{C}^{-}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{r/(x,r) \varepsilon C\} = \emptyset \\ \inf\{r/(x,r) \varepsilon C\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{S}_C^{+}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{r/(x,r) \varepsilon S_C\} = \emptyset \\ \sup\{r/(x,r) \varepsilon S_C\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{S}_C^-}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{r/(x,r)\in S_C\} = \emptyset \\ \inf\{r/(x,r)\in S_C\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, por la forma de éstos s.d. y la simetría de C y S_C, se verifica:

$$v\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{C}+})\right] = 1-v\left[m'(\mu_{\underset{\sim}{S}_C-})\right]$$

$$v\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{C}}-)\right] = 1-v\left[m'(\mu_{\underset{\sim}{S}_C+})\right]$$

de donde:

$$v(C) = v\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{C}+})\right] - v\left[k'(\mu_{\underset{\sim}{C}}-)\right] = v\left[m'(\mu_{\underset{\sim}{S}_C+})\right] - v\left[m'(\mu_{\underset{\sim}{S}_C-})\right] =$$

$$= v(S_C)$$

- Si v es simétrica para todos los miembros de $\sigma(P(X)xB(I))$ verticalmente conexos lo es sobre toda $\sigma(P(X)xB(I))$.

Hay que tener en cuenta que los rectangulos de P(X)xB(I) son todos ellos unión disjunta de rectángulos verticalmente conexos, lo que garantiza que su medida coincide con la de sus simetricos. A su vez, los elementos de $\sigma(P(X)xB(I))$ son expresables a través de la unión, la intersección y la complementación de rectángulos y es fácil ver que las tres operaciones conservan la simetría y la equivalencia de la medida de simétricos.
Con ello concluye la demostración.

Por otra parte, también puede enunciarse:

<u>Teorema 2.7.</u>-"Cualquier valoración m: $\underset{\sim}{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ es una medida difusa de probabilidad si el núcleo K asociado es p-casi continuo y p-casi simétrico".

Demostración:

De acuerdo con el teorema 2.6., m es una medida difusa aditiva si y sólo si K es p-casi continuo.

Si suponemos ahora que K es p-casi simétrico, entonces:

$$\forall \underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X), \quad m(\underset{\sim}{A}) = \int_X K(x,[0,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)))dp = \int_X K(x,(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),1])\,dp =$$
$$= 1-\int_X K(x,[0,1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)])dp = 1-\int_X K(x,[0,\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x)))\,dp = 1-m(\bar{\underset{\sim}{A}})$$

lo que prueba que m es una medida difusa de probabilidad.

Hay que destacar que si m es una medida difusa de probabilidad, no puede probarse, en general, que K sea p-casi simétrico; el problema surge porque, salvo en el caso finito, no puede asegurarse $p(\{x\}) \neq 0 \quad \forall x \in X$.

De todos estos resultados, se deduce que existe una relación biunívoca entre las medidas difusas (aditivas) sobre $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ y las medidas de probabilidad verticalmente continuas sobre $(X\times I, \sigma(P(X)\times B(I)))$. En particular, están relacionadas entre sí las medidas difusas de probabilidad y las medidas verticalmente simétricas.

Puesto que cada núcleo de Markov establece una medida de probabilidad en (I,B(I)) para cada xεX, medida de probabilidad que, a través de su distribución, equivale a una "deformación" del intervalo unidad, podemos decir que cualquier medida difusa aditiva sobre $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ se genera a partir de una probabilidad en (X,P(X)) a través de una familia de "deformaciones" del intervalo unidad cuyos miembros están asociados a los puntos del referencial.

Obviamente, los resultados de apartados anteriores son casos particulares de éste, correspondientes a núcleos de Markov K tales que K(x,.) es idéntica para todo xεX.

Hay que destacar que hemos obtenido una caracterización mediante medidas ordinarias de las "probabilidades funcionales" de Borghi (1972) y de las medidas difusas de Smets (1982). Las primeras se corresponden con las que aquí hemos denominado difusas de probabilidad, mientras que las segundas lo hacen con las medidas difusas aditivas.

2.5. OTRAS ESTRUCTURAS DE MEDIDA

La correspondencia entre medidas ordinarias y difusas puesta de manifiesto en las secciones anteriores, ha sido obtenida para los espacios $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ y $(X\times I,\sigma(P(X)\times B(I)))$, obviando los problemas que puedan presentarse al considerar estructuras de medida distintas de $(X,P(X))$ y/ó $(I,B(I))$. La razón para elegir estas estructuras "extremas", postponiendo hasta esta sección el análisis de cuestiones relacionadas con la medibilidad, es la conveniencia de separar conceptualmente la "medibilidad" y la "medida" en un trabajo, tal como el presente, orientado al estudio de las propiedades y construcción de medidas difusas.

Citando el clásico texto de Halmos (1974):

"Es importante hacer énfasis en que el concepto de medibilidad para funciones, como el de medibilidad para conjuntos, no dependen de los valores númericos de una determinada medida, sino únicamente de las estructuras que se consideran. Un conjunto o una función es, desde este punto de vista, declarado medible "de fiat"; este concepto es puramente de teoría conjuntista y es completamente independiente de la Teoría de la Medida".

No obstante, desde nuestro punto de vista resulta de interés analizar la influencia que tiene en la generación de medidas difusas el considerar estructuras distintas de (X,P(X)) e (I,B(I)).

2.5.1. Estructuras de medida en el intervalo unidad

La mayoría de los autores consideran siempre el espacio medible (I,B(I)). El hecho de que el campo de Borel sea la estructura natural de medida en espacios reales, la necesidad de usar frecuentemente la integración para definir medidas y la conveniencia de respetar la continuidad del intervalo unidad dada por la propia definición de subconjunto difuso parecen razones de peso en esta elección.

Trabajar con estructuras menos finas que B(I) provoca dos tipos de dificultades:

1) Supuesta establecida una σ-álgebra en el referencial X, se aumenta el número de funciones de I^X, y por tanto de s.d., que son declaradas medibles.

2) Se pierde la posibilidad de "heredar" la continuidad del $[0,1]$ a través de las medidas.

Así pues, sustituir B(I) por una estructura menos fina provocaría un "aumento del trabajo" y una "disminución en las herramientas" con pérdida de la importante propiedad de la continuidad. Desde los objetivos del presente trabajo, gran parte de los resultados no tendrían sentido ó interés para otras estructuras.

En sentido contrario, podría pensarse en sustituir B(I) por una estructura más fina, tal como P(I). Esto plantearía la necesidad de trabajar con subconjuntos del intervalo I no Lebesgue-medibles, que carecen de interés para la medida por su especial estructura (de hecho serían conjuntos infinitos de puntos aislados, con un marcado carácter "patológico").

2.5.2. Estructuras de medida sobre el referencial X

Por lo que se refiere a X, sí es conveniente considerar otras σ-álgebras distintas de P(X), que, por otro lado, pueden venir generadas por determinadas clases de subconjuntos del referencial, de interés práctico ó teórico.

En particular, si X es un espacio real, será coherente con las razones apuntadas para el intervalo unidad el considerar como estructura el campo de Borel B(X) restringido a X. La pérdida de medibilidad para s.d. que conlleva este cambio de P(X) por B(X) afecta sólo a s.d. irrelevantes desde el punto de vista de la medida, cuyos α-cortes son conjuntos extravagantes como los arriba mencionados. Una ventaja adicional es que el σ-álgebra producto generada en XxI es también la restricción del campo de Borel correspondiente, considerando siempre $(I,B(I))$.

En general, si en lugar de $P(X)$ se tiene una σ-álgebra γ cualquiera sobre X, sabemos (Zadeh, 1968) que la clase de los difusos γ-$B(I)$-medibles es una σ-álgebra difusa, denominada σ-álgebra generada.

Todos los resultados de este capítulo son fácilmente extensibles a $(X,\underset{\sim}{\Sigma}_{\gamma})$ a través de $(X\times I,\sigma(\gamma \times B(I)))$.

La consideración de una σ-álgebra cualquiera sobre X provoca el establecimiento de una relación de equivalencia entre las medidas definibles a partir de $P(X)$ (que agruparía en cada clase a aquellas que coinciden sobre la nueva estructura), pero tal relación de equivalencia se establece paralelamente entre las medidas difusas y las medidas ordinarias del producto cartesiano; así, la identificación entre las medidas se conserva cualquiera que sea la estructura inicialmente definida en X.

Desde este punto de vista, hay que destacar que la unicidad de la medida ordinaria correspondiente a una determinada medida difusa proviene de que el valor de ésta sobre un s.d. es idéntico al de la primera sobre las partes ancladas asociadas a la f. de p. del mismo.

2.5.3. Estructuras de medida sobre XxI

Tal como ya se ha analizado, si en XxI se considera el σ-álgebra producto $\sigma(\gamma \times B(I))$, toda medida difusa tiene su correlato en una medida ordinaria.

Si la estructura dada sobre XxI es un σ-álgebra que no pueda obtenerse como producto, nada puede decirse sobre la relación existente entre medidas difusas y ordinarias. De hecho, Klement y Schwyhla (1982) proponen un contraejemplo en el que una medida difusa no es expresable a partir de una medida ordinaria definida en $(X \times I, \sigma)$, siendo σ una σ-álgebra particular que construyen directamente sobre el producto cartesiano.

Para comprender este hecho, basta observar que los axiomas que definen una medida difusa aditiva realmente relacionan la estructura de medida difusa con una estructura de medida ordinaria sobre el referencial a través de B(I); de este modo, no cabe, en general, la posibilidad de establecer dicha relación con σ-álgebras de XxI que no sean expresables como producto.

CAPITULO 3

CARACTERIZACION DE MEDIDAS DIFUSAS NO ADITIVAS

3.1. INTRODUCCION

La aditividad es una propiedad de las medidas ordinarias que se transmite a las medidas para subconjuntos difusos que son extensión de aquellas, como se ha analizado en el capítulo anterior. Pero, además de consideraciones prácticas encaminadas a la modelización de las valoraciones subjetivas, es la propia estructura algebraica peculiar de las clases de s.d. la que impide considerar la aditividad como una propiedad esencial de sus medidas y obliga a ampliar el campo de éstas al conjunto de las valoraciones acotadas, monótonas y continuas que se denominan en este trabajo medidas difusas.

Es el objetivo de este capítulo el análisis de las relaciones existentes entre medidas monótonas ordinarias sobre el referencial (que llamamos, simplemente, medidas monótonas) y las medidas que pueden ser definidas en estructuras difusas, así como las propiedades que se deducen de estas relaciones.

En el apartado 2.3. se estudian las medidas y valoraciones que pueden construirse en $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ a partir de una medida monótona en $(X,P(X))$ y de $(I,B(I),l)$, donde l representa la medida de Lebesgue.

Se comienza generando una medida monótona sobre $(X\times I, P(X)\times B(I))$, (donde $P(X)\times B(I)$ representa la clase monótona de los rectángulos de la forma $A\times B$, $A\in P(X)$, $B\in B(I)$) y analizando las propiedades de tal medida.

En la sección 3.2.2. construímos, a partir de la medida anterior, dos valoraciones (que denominamos interna y externa) sobre $P(X\times I)$. En 3.2.3. se estudian sus restricciones a la clase P_a de las partes ancladas de $X\times I$.

Con base a estos resultados, en la sección 3.2.4. analizamos las distintas valoraciones y medidas difusas que pueden establecerse sobre $(\mathbf{X}, \tilde{P}(X))$.

Se comprueba que la valoración interna produce una medida difusa, mientras que a partir de la externa se obtiene toda una familia de valoraciones para s.d.

En el apartado 3.3. se discute la relación existente entre las valoraciones y medidas construídas en apartados anteriores y las que pueden encontrarse en la literatura especializada así como algunas cuestiones de innegable interés. Concretamente, en la sección 3.3.1. se identifica la medida difusa interna con la integral de Sugeno, interpretando algunas propiedades de ésta a la luz de aquella.

Una cuestión de gran interés es la relativa a la caracterización de un s.d. mediante su medida difusa interna, problema en cierto sentido paralelo al que se plantea en Estadística clásica al intentar caracterizar una distribución mediante valores paramétricos. En el apartado 3.3.2. se analiza este tema, presentando en él dos métodos que permiten aproximar la f. de p. de un s.d. a partir de la información proporcionada por diversos valores de medida interna; el primero de ellos es el bien conocido enfoque diferencial de Sugeno, mientras que el segundo es original y está inspirado en la teoría de los momentos.

En el apartado 3.3.3. se estudia la valoración externa dada en función de las partes ancladas carradas y se establecen las estrechas relaciones que posee con la medida de posibilidad de Zadeh.

Otra valoración externa (que corresponde a las partes ancladas abiertas en su definición) es el objeto del apartado 3.3.4; esta valoración aparece como "dual" de la medida interna y no había sido definida con anterioridad. Asimismo, en ese apartado se discuten algunas importantes relaciones entre los valores de las medidas y valoraciones que se consideran y la "forma" de los s.d.

Todas las medidas y valoraciones a las que hemos aludido en esta introducción se generan a partir de $\mathbf{g}$ por medio de la medida de Lebesgue en el intervalo unidad; una generalización natural se obtiene considerando "deformaciones" de los valores de dicho intervalo idénticas para cada elemento del referencial. La sección 3.4. está dedicada al análisis de estas generalizaciones.

3.2. MEDIDAS DIFUSAS EN $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ GENERADAS A PARTIR DE UNA MEDIDA MONOTONA EN $(X,P(X))$.

3.2.1. Generación de una medida monótona para una clase de rectángulos.

Comenzaremos este apartado recogiendo algunas propiedades generales de los conjuntos regulares de productos cartesianos que serán de interés posteriormente.

Proposición 3.1. (ver Halmos (1974)). Sean U y V dos espacios arbitrarios y consideremos $P(U)xP(V) = \{AxB/A\subset U, B\subset V\}$

Para cualesquiera rectángulos $R, R'\in P(U)xP(V)$, con $R = R_U x R_V$, $R' = R'_U x R'_V$ se verifica:

1) Cualquier sección vertical de R es igual a su proyección vertical, que coincide con R_V.

2) Cualquier sección horizontal de R es igual a su proyección horizontal, que coincide con R_U.

3) $R = \emptyset$ si y sólo si $R_U = \emptyset$ ó $R_V = \emptyset$

4) $R\subset R'$ si y sólo si $R_U\subset R'_U$ y $R_V\subset R'_V$. Como consecuencia, $R = R'$ si y sólo si $R_U = R'_U$ y $R_V = R'_V$.

5) $R\cup R'\in P(U)xP(V)$ si y sólo si $R_U = R'_U = (R\cup R')_U$ y $(R\cup R')_V = R_V\cup R'_V$, ó bien $(R\cup R')_U = R_U\cup R'_U$ y $R_V = R'_V = (R\cup R')_V$

Proposición 3.2. "Sean U y V dos espacios arbitrarios y M(U) M(V) sendas clases monótonas. Entonces $M(U)xM(V) = \{AxB/A\in M(U),\ B\in M(V)\}$ es una clase monótona en UxV".

Demostración: Puesto que U, $\emptyset\in M(U)$ y V, $\emptyset\in M(V)$, concluímos que UxV, $\emptyset\in M(U)xM(V)$.

Sea ahora $\{R_n\}_{n\in N}$ una sucesión monótona creciente en M(U)xM(V).

De acuerdo con el apartado 4 de la proposición anterior, $\{(R_n)_U\}_{n\in N}$ y $\{(R_n)_V\}_{n\in N}$ son sucesiones monótonas crecientes en M(U) y M(V) respectivamente y por tanto poseen límites respectivos $R_U\in M(U), R_V\in M(V)$.

- Sea $(x,y)\in \bigcup_n R_n = \lim_n R_n$. Existe $n_0/(x,y)\in R_{n_0}$, y en consecuencia $x\in (R_{n_0})_U$ e $y\in (R_{n_0})_V$, de donde $x\in R_U$ e $y\in R_V$.

Así pues, $\lim_n R_n \subset R_U x R_V$.

- Si $(x,y)\in R_U x R_V$, entonces $x\in R_U$ e $y\in R_V$, lo que equivale a decir que $\exists n_0, n_1/x\in (R_{n_0})_U$ e $y\in (R_{n_1})_V$; tomando $n_2 = \max(n_0,n_1)$, y puesto que las sucesiones son monótonas crecientes,

$(x,y)\in (R_{n_2})_U x (R_{n_2})_V \subset \bigcup_n [(R_n)_U x (R_n)_V] = \lim_n R_n$. Por tanto, $R_U x R_V \subset \lim_n R_n$

De acuerdo con estas inclusiones, resulta:

$\lim_n R_n = R_U x R_V \varepsilon M(U) x M(V)$

Una demostración análoga puede realizarse para las sucesiones monótonas decrecientes, con lo que queda probado que M(U)xM(V) es una clase monótona.

Como P(X) y B(I) son clases monótonas, esta proposición nos garantiza que P(X)xB(I) es una clase monótona, y así (XxI,P(X)xB(I)) es un espacio monótonamente medible.

Consideremos ahora el espacio de medida monótona (X,P(X),g) y sea l la medida de Lebesgue sobre (I,B(I)). Podemos definir entonces la valoración:

$$m_g : P(X)xB(I) \longrightarrow [0,1]$$

de la forma:

$\forall R = R_X x R_I \varepsilon P(X) x B(I)$, $m_g(R) = g(R_X) \wedge l(R_I)$

que asigna a cada rectángulo la menor de las medidas de sus "lados" y está unívocamente definida.

Se verifican las propiedades siguientes:

(P.1.) $m_g(XxI) = 1$ por ser $g(X) = 1$ y $l(I) = 1$

(P.2.) $m_g(\emptyset) = 0$ como consecuencia del apartado 3 de la proposición 3.1. y de que $g(\emptyset) = 0 = l(\emptyset)$.

(P.3) m_g es monótona como consecuencia del apartado 4 de la proposición 3.1 y de la monotonía de g y l.

(P.4) m_g es continua para el límite de sucesiones monótonas.

En efecto, sea $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P(X)xB(I)$ una sucesión monótona. De acuerdo con la proposición 3.2., $\lim_n R_n \in P(X)xB(I)$ y $\lim_n R_n =$

$= (\lim_n (R_n)_X) x (\lim_n (R_n)_I)$; por tanto $m_g(\lim_n R_n) =$

$\left[g(\lim_n (R_n)_X)\right] \wedge \left[l(\lim_n (R_n)_I)\right]$.

Por la continuidad para sucesiones monótonas de g y l:

$m_g(\lim_n R_n) = \left[\lim_n (g(R_n)_X)\right] \wedge \left[\lim_n (l(R_n)_I)\right] =$

$= \lim_n \left[(g(R_n)_X) \wedge (l(R_n)_I)\right] = \lim_n m_g(R_n)$.

Así pues, mg es una medida monótona sobre (XxI,P(X)xB(I)), con lo que queda demostrado el:

<u>Teorema 3.1.</u>- "Toda medida monótona g sobre (X,P(X)) genera una única medida monótona a través de la medida de Lebesgue en (I,B(I)) y el operador inf.".

Denominaremos a m_g medida rectangular asociada a (ó generada por) g.

A continuación analizaremos cómo puede extenderse m_g (en consecuencia, g) a una clase más amplia que P(X)xB(I) que contenga a P_a.

3.2.2. Valoraciones interna y externa de un subconjunto de XxI.

Definición 3.1.- Denominaremos valoración interna (sobre P(XxI)) generada por g a $\underline{m}_g$: P(XxI) $\longrightarrow [0,1]$ dada por:

$\forall A\varepsilon P(XxI)\quad \underline{m}_g = \sup\{m_g(R):\ R\varepsilon P(X)xB(I),\ R\subset A\}$

Denominaremos valoración externa (sobre P(XxI)) generada por g a $\overline{m}_g$: P(XxI) $\longrightarrow [0,1]$ dada por:

$\forall A\varepsilon P(XxI),\ \overline{m}_g(A) = \inf\{m_g(R):\ R\varepsilon P(X)xB(I),\ A\subset R\}$

Obsérvese que ambas valoraciones están bien definidas, puesto que m_g está acotada y $\forall A\varepsilon P(XxI), \emptyset\subset A\subset XxI$; $\emptyset, XxI\varepsilon P(X)xB(I)$.

Proposición 3.3. "Para todo $R\varepsilon P(X)xB(I)$, se cumple: $m_g(R) = \underline{m}_g(R) = \overline{m}_g(R)$".

Demostración: El resultado se sigue de modo inmediato del hecho de que R es, simultáneamente, el mayor elemento de P(X)xB(I) que está contenido en R y el menor que lo contiene.

La afirmación recíproca no es cierta, como se discute más adelante.

Teorema 3.2.- "Para cualquier g, se verifica que:

(I) $\underline{m}_g(\emptyset) = 0$, $\underline{m}_g(XxI) = 1$

(II) $\underline{m}_g$ es monótona

(III) Si X es finito, $\underline{m}_g$ es contínua para el límite de sucesiones monótonas.

Demostración:

(I) Es inmediata como consecuencia de la proposición 3.3. y las propiedades de m_g.

(II) Es inmediata, ya que cualesquiera que sean $A,B \varepsilon P(XxI)$ tales que $A \subset B$, se cumple $\{ R \varepsilon P(X)xB(I)/R \subset A\} \subset \{R \varepsilon P(X)xB(I)/R \subset B\}$

(III) Sea $X\{ x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ y notemos $J = \{ 1,2,3,\ldots,N \}$

Consideremos en primer lugar una sucesión $\{ A_n \}_{n \varepsilon N}$ monótona creciente, con $A = \lim_n A_n = \bigcup_n A_n$

Por definición:

$\underline{m}_g(A_n) = \sup\{m_g(R): R \varepsilon P(X)xB(I),\ R \subset A_n\}$

$\underline{m}_g(A) = \sup\{m_g(R): R \varepsilon P(X)xB(I),\ R \subset A\}$

Puesto que $A_n \subset A$, $\forall n \varepsilon N$, por la monotonía de m_g:

$\underline{m}_g(A_n) \leqslant \underline{m}_g(A) \Longrightarrow \lim_n \underline{m}_g(A_n) \leqslant \underline{m}_g(A)$

Sea ahora $R = R_X x R_I \subset A$, y construyamos la sucesión:

$\forall n\in\mathbb{N}$, $R_n = R_X x (R_n)_I$, con $(R_n)_I = R_I - (\bigcup_{x_K \in R_X} \left[A_{x_K} - (A_n)_{x_K} \right])$.

Se verifica $R_n \subset A$ $\forall n$ como facilmente puede comprobarse.

Por otra parte, $\forall K\varepsilon J$, la sucesión de las secciones

$\{(A_n)_{x_K}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $A_{x_K} = \bigcup_n (A_n)_{x_K}$, de donde:

$\forall K\varepsilon J$, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_K(\varepsilon) / \forall n \geq n_K(\varepsilon)$, $l\left[A_{x_K} - (A_n)_{x_K}\right] < \frac{\varepsilon}{N}$, y tomando

$n_0 = \max_K n_K(\varepsilon)$,

puede afirmarse que:

$$\forall n \geq n_0,\ l\left(\bigcup_{K=1}^{N} \left[A_{x_K} - (A_n)_{x_K}\right] \right) \leq \sum_{K=1}^{N} l\left[A_{x_K} - (A_n)_{x_K}\right] < \varepsilon$$

Por las propiedades de la medida de Lebesgue y la definición de $(R_n)_I$ se obtiene:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 / \forall n \geq n_0,\ l\left[(R_n)_I\right] \geq l(R_I) - l\left(\bigcup_{x_K \varepsilon R_X} \left[A_{x_K} - (A_n)_{x_K}\right] \right) >$$

$$> l(R_I) - \varepsilon$$

Queda probado que, $\forall R\subset A, \exists \{R_n\}_{n\varepsilon\mathbb{N}} / R_n \subset A_n \forall n$ y

$\lim_n m_g(R_n) = m_g(R)$,

(al ser iguales los lados horizontales de todos los R_n y de R, ser $(R_n)_I \subset R_I$ y haberse demostrado que $\lim_n l\left[(R_n)_I\right] = l(R_I)$).

Puesto que $\forall R\subset A$ se puede construir una tal sucesión $\{R_n\}$, es claro que:

$$\underline{m}_g(A) \leq \lim_n \underline{m}_g(A_n)$$

De esta desigualdad y su inversa anterior se concluye la continuidad buscada.

Para el caso de sucesiones monótonas decrecientes, puede hacerse una demostración paralela, sin más que tener en cuenta que, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, entonces $A=\bigcap_n A_n$ y, por tanto:

1) $A\subset A_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Cualquiera que sea R contenido en A, existe una sucesión decreciente de rectángulos de igual base y de lado vertical:

$$(R_n)_I=R_I\cup\left(\bigcup_{x_K\in R_X}\left[(A_n)_{x_K}-A_{x_K}\right]\right).$$

Teorema 3.3.- Para cualquier g, se verifica que:

(1) $\overline{m}_g(\emptyset)=0;\ \overline{m}_g(X\times I)=1$

(2) $\overline{m}_g$ es monótona

(3) $\overline{m}_g$ es continua para el límite de sucesiones monótonas crecientes.

Demostración:

(1) Es inmediata puesto que $\emptyset\subset R\ \forall R\in P(X)\times B(I)$ y $X\times I$ sólo está contenido en $X\times I$.

(2) Es inmediata, ya que cualesquiera que sean $A,B\in P(X\times I)$, tales que $A\subset B$, se verifica $\{R\in P(X)\times B(I)/B\subset R\}\subset\{R\in P(X)\times B(I)/A\subset R\}$

(3) Cualquiera que sea $A \varepsilon P(XxI)$, el menor rectángulo que lo contiene es $A_X x A_I$, siendo A_X la proyección de A sobre X, y A_I el menor boreliano que contiene a la proyección de A sobre I. Así pues:

$$\overline{m}_g(A) = m_g(A_X x A_I) = g(A_X) \wedge l(A_I).$$

Por la continuidad de g y l para sucesiones monótonas crecientes, la continuidad del operador y el hecho de que $A \subset B \Rightarrow A_X \subset B_X$ y $A_I \subset B_I$, resulta de manera inmediata que para toda sucesión creciente

$\{A_n\} \subset P(XxI)$, tal que $\lim A_n = A$, se cumple $\lim \overline{m}_g(A_n) = \overline{m}_g(A)$.

A continuación se ofrecen tres contraejemplos que muestran la imposibilidad de afirmar, con carácter general sobre P(XxI), la continuidad para sucesiones monótonas crecientes de $\underline{m}_g$ (con X infinito) y la continuidad para sucesiones monótonas decrecientes de $\overline{m}_g$ (tanto para X infinito como finito).

<u>Contraejemplo 3.1</u>.- Sea $X = [0,1]$ y g la extensión de la medida de Lebesgue a P(X). Consideremos la sucesión:

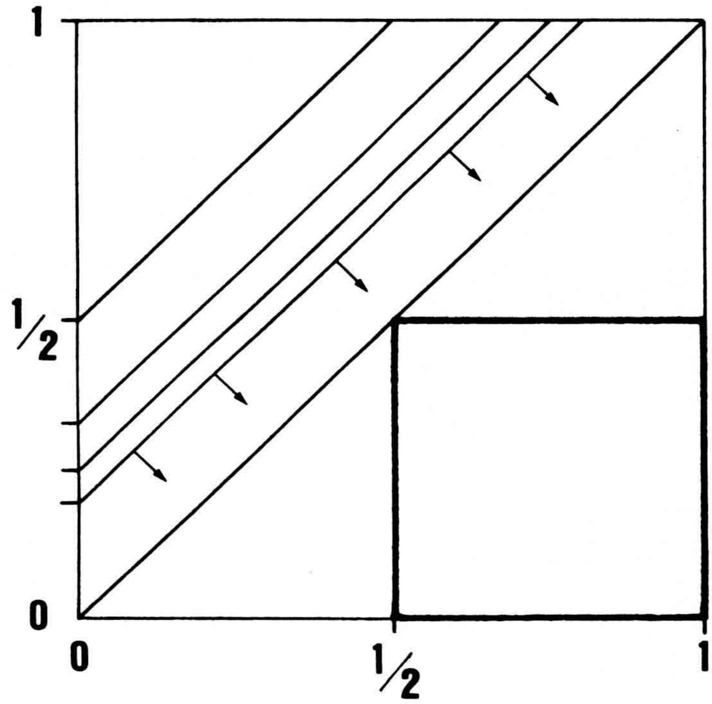
$$A_n = \{(x,r)/x \varepsilon X, \quad r \varepsilon \left[0,x\right] \cup \left[(x + \frac{1}{n+1}) \wedge 1, 1\right] \}, \ n=1,2,...$$

Claramente:

a) $A_n \uparrow A = Xx\ [0,1]$; $\underline{m}_g(A) = 1$

b) $\underline{m}_g(A_n) = m_g([1/2,1] \times [0,1/2]) = \frac{1}{2}$. $\forall n \varepsilon \mathbb{N}$.

Así pues, $\lim_n \underline{m}_g(A_n) \neq \underline{m}_g(A)$.



Contraejemplo 3.2.- Sean X, g, y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en el anterior y $B_n = \overline{A}_n \; \forall n \in N$.

Claramente:

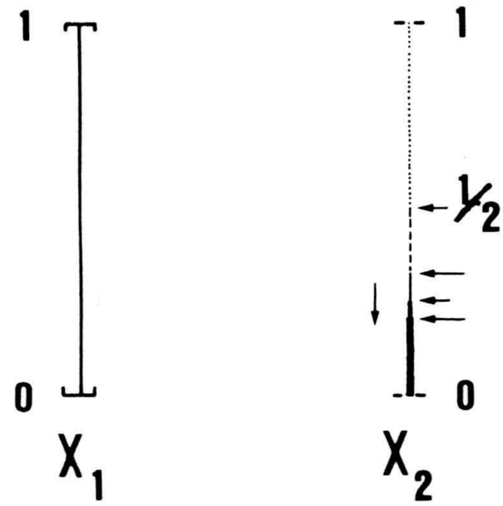
a) $B_n \downarrow B = \emptyset$; $\overline{m}_g(B) = 0$

b) $\overline{m}_g(B_n) = m_g([0,1)\times(0,1]) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de modo que

$\lim_n \overline{m}_g(B_n) \neq \overline{m}_g(B)$

<u>Contraejemplo 3.3</u>.- Sea $X = \{x_1, x_2\}$, con $g(x_1) = g(x_2) = \frac{1}{2}$.

Sea $A_n = (\{x_1\} x [0,1]) \cup (\{x_2\} x (0, \frac{1}{n}))$.



Entonces, $\{A_n\}$ es monótona decreciente

y $A = \lim A_n = \bigcap_n A_n = \{x_1\} x [0,1]$

En este caso es $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{m}_g(A_n) = m_g(X x [0,1]) = 1$

pero $m_g(A) = m_g(\{x_1\} x [0,1]) = (\frac{1}{2} \wedge 1) = \frac{1}{2}$.

3.2.3. <u>Valoraciones sobre la clase de partes ancladas de $X x [0,1]$</u>.

Una vez conocidas las propiedades de las valoraciones interna y externa sobre las partes del producto cartesiano, resulta de interés analizar las restricciones de ambas valoraciones a la clase de las partes ancladas, puesto que la definición de valoraciones y medidas sobre estructuras difusas se realizará a través de ellas.

Si el apartado anterior ha puesto ya de manifiesto una cierta asimetría entre las propiedades de ambas valoraciones (al menos en lo que se refiere a referenciales finitos) frente a la simetría de sus definiciones, en el presente apartado tal asimetría se reafirma, ya que probamos que todas las partes ancladas correspondientes a una misma $f \in I^X$ tienen idéntica valoración interna (cualquiera que sea g), propiedad que se pierde para la valoración externa.

<u>Proposición 3.4.</u>- "Para todo rectángulo $R \in P(X) x B(I)$, contenido en una parte anclada $B_A^f \in P_a$, existe un rectángulo anclado $R' \in R_a$ tal que $R \subset R' \subset B_A^f$".

Demostración:

Sea $R = R_X x R_I$; el rectángulo anclado $R' = R_X x R'_I$, con:

$$R'_I = \begin{cases} [0, \ \sup R_I) & \text{si } (\sup R_I) \notin R_I \\ [0, \ \sup R_I] & \text{si } (\sup R_I) \in R_I \end{cases}$$

verifica la condición propuesta.

#

Esta proposición permite asegurar:

$\forall f \in I^X$, $\forall A \subset X$, $\underline{m}_g(B_A^f) = \sup\{m_g(R), R \in R_a, R \subset B_A^f\}$

Por otra parte, es inmediato que para todo $R \in R_a$,

$$R \subset B_A^f \Longrightarrow R = R_X x R_I, \quad R_X \subset X, \ \sup R_I \leqslant \inf_{x \in R_X} f(x) \tag{12}$$

Sea $B_A^f \varepsilon P_a$ y definamos la clase de rectángulos anclados:

$$R^f = \{R \varepsilon R_a / R = R_X x \ [0, \inf_{x \varepsilon R_X} f(x))\}$$

Obviamente, $\forall R \varepsilon R^f$, se tiene $R \subset B_A^f$ #

Proposición 3.5.- "Cualesquiera que sean g, $f \varepsilon I^X$ y $A \subset X$, se cumple:

$$\underline{m}_g(B_A^f) = \sup\{m_g(R) : R \varepsilon R^f\}"$$

Demostración;

Puesto que R^f es una subclase de la clase de rectángulos anclados contenidos en B_A^f, es obvio que:

$\underline{m}_g(B_A^f) \geqslant \sup \{m_g(R) : R \varepsilon R^f\}$, y, por (12), $m_g(R) \leqslant$

$\leqslant g(R_X) \wedge l([0, \inf_{x \varepsilon R_X} f(x)))$,

de donde se sigue:

$$\underline{m}_g(B_A^f) \leqslant \sup\{m_g(R) : R \varepsilon R^f\}$$

lo que prueba la proposición. #

<u>Corolario 1</u>.- "Cualesquiera que sean g, $f \in I^X$, $A \subset X$, se cumple:

$$\underline{m}_g(B_A^f) = \sup\{(g(C) \wedge 1[0, \inf_C f(x))): C \in P(X)\} =$$
$$= \sup\{g(C) \wedge (\inf_C f(x)): C \in P(X)\}". \tag{13}$$

La importancia de este corolario radica en que permite expresar la valoración interna de una parte anclada en términos, únicamente, de la medida g y de la función de I^X asociada a ella.

<u>Corolario 2.</u>- "Cualesquiera que sean g, $f \in I^X$, $\forall A \subset X$, $\underline{m}_g(B_A^f) = \underline{m}_g(B_X^f)$".

Es consecuencia inmediata de la fórmula (13).

La importancia de este corolario estriba en que nos asegura la unicidad de la medida sobre s.d. que se obtendrá a partir de la valoración interna de las partes ancladas, ó, lo que es lo mismo, que la asignación de medidas a los s.d. puede hacerse indistintamente a través de las partes ancladas abiertas o cerradas.

<u>Teorema 3.4</u>.- "La restricción de $\underline{m}_g$ a P_a es una medida monótona sobre (XxI, P_a)".

Demostración:

Por las propiedades generales de $\underline{m}_g$, es inmediato que sólo hay que probar su continuidad sobre sucesiones monótonas.

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente en P_a y $B = \lim_n B_n = \bigcup_n B_n \varepsilon P_a$.

Si $f_n \varepsilon I^X$ es la función asociada a B_n, $n = 1,2...$, es inmediato que $\forall x \varepsilon X$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, y por tanto $f(x) = \lim_n f_n(x) = \sup_n f_n(x)$ está definida y es la función asociada a B.

A partir de este resultado y del corolario 1 anterior queda probado:

$\lim \underline{m}_g(B_n) = \underline{m}_g(B)$.

Mediante una demostración análoga se prueba la continuidad para el caso de sucesiones monótonas decrecientes.

#

Como consecuencia de este teorema, denominaremos <u>medida interna</u> sobre $(X\times I, P_a)$ a la restricción de $\underline{m}_g$.

Los resultados que siguen se refieren a la restricción de la valoración exterior a las partes ancladas.

En primer lugar observemos que cualquier rectángulo que contenga a una parte anclada ha de ser necesariamente un rectángulo anclado.

Proposición 3.6.- "Cualesquiera que sean g, $A\subset X$ y $f\in I^X$ se tiene:

$$\overline{m}_g(R) = m_g\left[(B_A^f)_X \times \left[0, \sup_{x\in X} f(x)\right]\right] \text{ ".}$$

Desmotración: Es inmediata sin más que tener en cuenta que:

a) $B_A^f \subset R \in R_a \Longrightarrow (B_A^f)_X \times \left[0, \sup_{x\in X} f(x)\right) \subset R,$

b) $B_A^f \subset (B_A^f)_X \times \left[0, \sup_{x\in X} f(x)\right]$

c) $m_g\left[(B_A^f)_X \times \left[0, \sup_{x\in X} f(x)\right]\right] = m_g\left[(B_A^f)_X \times \left[0, \sup_{x\in X} f(x)\right)\right],$

por la continuidad de l y del operador inf.

Corolario 1.- "Cualquiera que sean g, $f\in I^X$, $A\subset X$, se cumple:

$$\overline{m}_g(B_A^f) = g\left[(B_A^f)_X\right] \wedge \left[\sup_{x\in X} f(x)\right] \text{ ".}$$

Es consecuencia inmediata de las propiedades de la medida de Lebesgue.

Así pues, la valoración externa de una parte anclada coincide con la medida de un particular rectángulo anclado (el producto cartesiano de sus proyecciones), y por tanto sólo depende de la medida (según g) de su proyección horizontal y del superior de la función que define la parte anclada. Puesto que dicha proyección horizontal puede variar según el conjunto A que se considere, no puede obtenerse un resultado similar al corolario 2 de la proposición 3.5. Por esta razón, la valoración externa dará lugar a diferentes valoraciones sobre s.d. según sean las partes ancladas que se consideren en la asignación, como se estudia más adelante.

También es consecuencia de este hecho el que el teorema que sigue no sea similar al 3.4. anterior, sino que tengamos que restringirnos a los referenciales finitos para obtener medidas monótonas externas sobre partes ancladas.

Teorema 3.5.- "Si X es finito, la restricción de $\overline{m}_g$ a P_a es una medida monótona sobre $(X\times I,\ P_a)$".

Demostración:

Por las propiedades generales de $\overline{m}_g$ (teorema 3.3.), solo es necesario probar que $\overline{m}_g$ es continua para sucesiones monótonas decrecientes.

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona decreciente. Por ser P_a clase monótona, $\lim_n B_n = \mathbf{B} \in P_a$.

Si se tiene $B_n = B_{A_n}^{f_n}$ y $\mathbf{B} = B_A^f$, de acuerdo con el corolario 1 anterior:

$$\overline{m}_g(\mathbf{B}) = g(B_X) \wedge \sup_{x\in X} f(X)$$

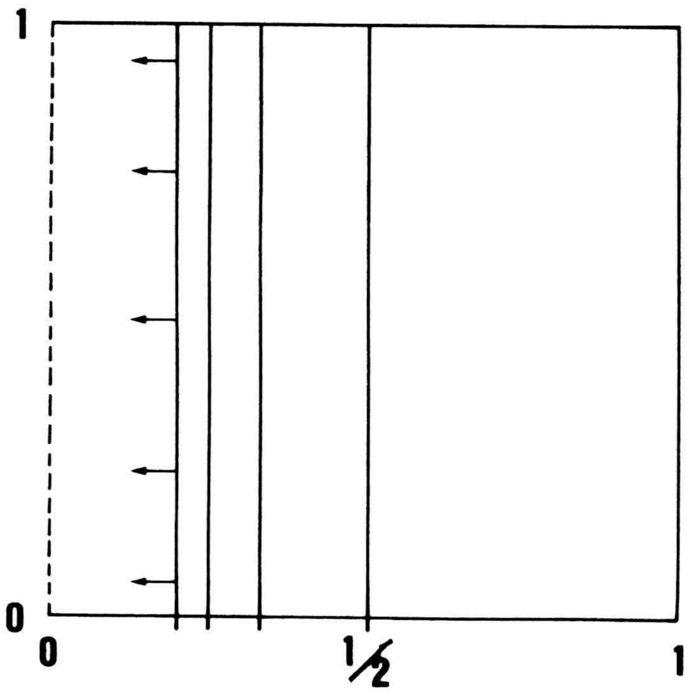
$$\overline{m}_g(B_n) = g\left[(B_n)_X\right] \wedge \left[\sup_{x\in X} f_n(x)\right]$$

extensión de la medida de Lebesgue a $P(X)$. Consideremos la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de partes ancladas caracterizadas por:

$A_n = X, \forall n\in N$, y

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x\in (0,\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x\in (\frac{1}{n},1] \end{cases}$$

Obviamente, $B = \lim_n B_n = X\times\{0\}$



Por otra parte, $\overline{m}_g(B_n) = 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$, mientras que $\overline{m}_g(B) = 0$

Ahora bien, si consideramos la sucesión $\{B'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A'_n = (0, \frac{1}{n}]$, $f'_n = f_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces $B' = \lim_n B'_n = \emptyset$, y, por tanto, nuevamente, $\overline{m}_g(B') = 0$.

Sin embargo, puesto que $\overline{m}_g(B'_n) = \frac{1}{n}$, se cumple

$\lim_n \overline{m}_g(B'_n) = \overline{m}_g(B')$.

Este último caso ilustra la trascendencia que tiene la proyección horizontal de las partes ancladas en la verificación o no de la continuidad para sucesiones monótonas.

Como resumen de las propiedades fundamentales de las valoraciones interna y externa definidas sobre estructuras ordinarias del producto cartesiano cabe decir:

I.- Si X es finito, la medida interna es una medida monótona sobre P(XxI), y ambas lo son sobre P_a.

II.- En el caso general, la medida interna es una medida monótona sobre P_a.

III.- La medida interna sobre P_a depende de g y de la función frontera superior de cada parte y coincide sobre todas las partes ancladas de igual frontera.

IV.- La valoración externa sobre P_a depende únicamente de la medida g de la proyección sobre X y del superior de la función frontera superior. No tiene que coincidir sobre las partes ancladas de igual frontera.

3.2.4. Valoraciones y medidas sobre $\tilde{P}(X)$

Por la correspondencia biunívoca existente entre $\tilde{P}(X)$ y O_a ó entre $\tilde{P}(X)$ y C_a, podemos definir diversas valoraciones sobre s.d. a partir de las valoraciones interna y externa de las partes ancladas.

Consideremos el espacio de medida monótona $(X\times I, P_a, \underline{m}_g)$ y definimos $m: \tilde{P}(X) \longrightarrow [0,1]$ mediante:

$$\forall \tilde{C} \in \tilde{P}(X),\ m(\tilde{C}) = \underline{m}_g(B_{\emptyset}^{\mu_{\tilde{C}}}).$$

donde $\mu_{\tilde{C}}$ es la f. de p. de $\tilde{C}$ y $B^{\mu_{\tilde{C}}}$ la parte anclada abierta asociada a $\tilde{C}$. Por las propiedades de $\underline{m}_g$, para esta definición puede emplearse cualquier parte anclada asociada a $\tilde{C}$ (corolario 2 de la proposición 3.5.).

<u>Teorema 3.6</u>.- "m es una medida difusa en $(X,\tilde{P}(X))$".

Demostración:

Basta tener en cuenta que:

(I) La parte anclada abierta correspondiente a $X \in \tilde{P}(X)$ es $X\times[0,1)$.

(II) La parte anclada abierta correspondiente a $\emptyset \in \tilde{P}(X)$ puede escribirse como $X\times[0,0) = \emptyset$.

(III) La relación de inclusión entre s.d. se conserva entre sus partes ancladas abiertas asociadas.

(IV) Si$\{\underset{\sim}{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona en $\underset{\sim}{P}(X)$ cuyo límite es $\underset{\sim}{C}$, entonces $\{B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{C}_n}}\}_{n\in N}$ es una sucesión monótona en P_a cuyo límite es $B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}$, ACX. En consecuencia:

$$\lim_n m\,(\underset{\sim}{C}_n) = \lim \underline{m}_g\,(B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{C}_n}}) = \underline{m}_g(B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}) = \underline{m}_g(B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}) = m(\underset{\sim}{C})$$

#

Como resultado este teorema, denominaremos a m <u>medida difusa interna</u>.

Al contrario de lo que ocurre para la medida interna, el hecho de que la valoración externa no coincida sobre las partes ancladas correspondientes a una misma función, permite definir diversas valoraciones sobre $\underset{\sim}{P}(X)$, dependientes de un cierto subconjunto ACX.

Consideremos la valoración $\overline{m}_g$ sobre (XxI,P_a). Para cada $A\varepsilon P(X)$, podemos definir una valoración t_A: $\underset{\sim}{P}(X)\longrightarrow[0,1]$ de la siguiente forma:

$$\forall \underset{\sim}{C}\varepsilon \underset{\sim}{P}(X),,\ t_A(\underset{\sim}{C}) = \overline{m}_g(B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}),$$

donde $\mu_{\underset{\sim}{C}}$ es la f. de p. de $\underset{\sim}{C}$ y $B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}$ la parte anclada asociada a $\mu_{\underset{\sim}{C}}\varepsilon I^X$ y al ACX.

La dependencia de t_A con respecto a A se pone de manifiesto en la siguiente proposición.

<u>Proposición 3.7.</u>- "Para cualquier medida monótona y cualquier AcX, se cumple:

$\forall \underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, $t_A(\underset{\sim}{C}) = g\left[A \cup Sop(\underset{\sim}{C})\right] \wedge (\sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x))$"

Demostración:

De acuerdo con las definiciones de t_A y $\overline{m}_g$ se tiene:

$$\forall \underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X),\ t_A(\underset{\sim}{C}) = \overline{m}_g(B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}) = g\left[(B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}})_X\right] \ (\sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)).$$

Recordemos que:

$$B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}} = \{(x,r)\varepsilon X x I / x\varepsilon A \ \text{ y } \ r \leqslant \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) \ \text{ ó } \ x\varepsilon \bar{A} \ \text{ y } \ r < \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\},$$

$$(B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}})_X = \{x\varepsilon X / \exists r \ \varepsilon [0,1] \ : \ (x,r)\varepsilon B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}\}$$

Así pues, si $x\varepsilon A$ es $(x,0)\varepsilon B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}$, aun cuando $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = 0$. Por el contrario, si $x\varepsilon A$ y $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = 0$, no existe ningún r tal que $(x,r)\varepsilon B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}$. Tenemos pues $(B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}})_X = A \cup Sop(\underset{\sim}{C})$, lo que prueba la proposición.

#

Propiedades destacables de las valoraciones t_A son las siguientes:

(1) $\forall A \varepsilon P(X)$, $t_A(X) = 1$

En efecto, $t_A(X) = g(A \cup Sop(X)) \wedge \sup_{x\varepsilon X} \mu_X(x) = 1 \wedge 1$, al ser $Sop(X) = X$

(2) $\forall A \varepsilon P(X)$, $t_A(\emptyset) = 0$, puesto que $\sup_{x\varepsilon X} \mu_{\emptyset}(x) = 0$

(3) t_A es monótona $\forall A \varepsilon P(X)$, puesto que de $\underset{\sim}{B} \subset \underset{\sim}{C}$ se deduce que $Sop(\underset{\sim}{B}) \subset Sop(\underset{\sim}{C})$ y que $\sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \leqslant \sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$

(4) $\forall A \varepsilon P(X)$, t_A es contínua para sucesiones monótonas crecientes.

En efecto, sea $\{\underset{\sim}{C}_n\}_{n\varepsilon\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente de s.d., con límite $\underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$. Se verifica entonces:

(4.a.) $\{Sop(\underset{\sim}{C}_n)\}_{n\varepsilon\mathbb{N}}$ constituye una sucesión monótona creciente en X. Como $\lim_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n} = \mu_{\underset{\sim}{C}}$, si $x \varepsilon Sop(\underset{\sim}{C})$ se cumple $0 < \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \lim_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)$, de modo que ha de existir n_0 tal que $\forall n > n_0$, $\mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x) > 0$, esto es, $x \varepsilon Sop\{\underset{\sim}{C}_n\} \forall n > n_0$.

Así pues, $Sop(\underset{\sim}{C}) = \lim_n (Sop(\underset{\sim}{C}_n))$, y, por tanto:

$$g\left[A \cup Sop(\underset{\sim}{C})\right] = \lim_n \left(g\left[A \cup Sop(\underset{\sim}{C}_n)\right]\right).$$

(4.b,) La sucesión $\{\sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)\}$ es creciente en $[0,1]$, y por tanto:

$$\lim_n (\sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)) = \sup_n (\sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)) =$$

$$= \sup_{x\varepsilon X} (\sup_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)) = \sup_{x\varepsilon X} (\lim_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)) = \sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$$

Combinando 4.a.) y 4.b.) queda probada la propiedad de acuerdo con la proposición 3.7.

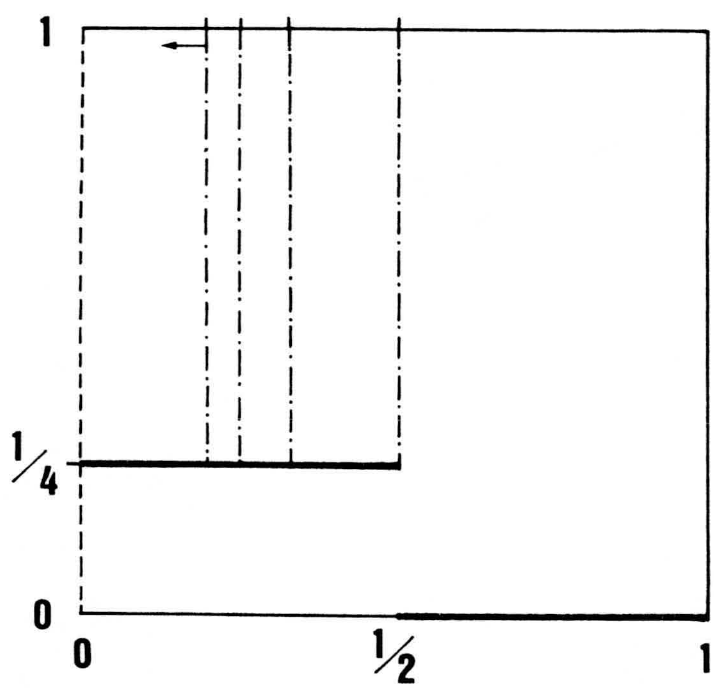
En general, no puede probarse la continuidad de t_A para sucesiones monótonas decrecientes, como ilustra el contraejemplo que recogemos a continuación. Por tanto, no puede asegurarse que t_A sea una medida difusa $\forall A \subset X$. Por este motivo, denominaremos a t_A valoración externa relativa a A.

Contraejemplo 3.5.- Sea $X = [0,1]$ y g la extensión de la medida de Lebesgue a P(X). Consideremos la sucesión monótona decreciente de s.d. definida por:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ 1 & \text{para } x \in (0, \frac{1}{n+1}) \\ 1/4 & \text{para } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \text{para } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

cuyo límite el el s.d. $\underset{\sim}{C}$ de f. de p.:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ 1/4 & \text{para } x \in (0, 1/2) \\ 0 & \text{para } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$



$\forall A \subset [0,1]$ se tiene:

$t_A(\underset{\sim}{C}) = g\left[A \cup (0,1/2)\right] \wedge (1/4) = 1/4.$

$t_A(\underset{\sim}{C}_n) = g\left[A \cup (0,1/2)\right] \wedge 1 = g\left[A \cup (0,1/2)\right] \geq 1/2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Queremos destacar que la pérdida de la continuidad para sucesiones monótonas decrecientes es consecuencia de la imposibilidad de intercambiar los operadores inf. y sup., dado lo cual, y a diferencia de lo que ocurre en 4.b.), no puede asegurarse $\inf_n(\sup_{x \in X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)) = \sup_{x \in X}(\inf_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x))$ $(\inf_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x) = \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) \forall x \in X)$.

Sólo para el caso particular de referenciales finitos y A = X, puede probarse que se obtiene una medida difusa.

<u>Proposición 3.8.</u>- "Si X es finito la valoración difusa externa t_X es una medida difusa sobre $(X, \underset{\sim}{P}(X))$".

Demostración:

De acuerdo con las propiedades anteriores, sólo hay que probar que t_X es continua para sucesiones monótonas decrecientes.

Sea $\{\underset{\sim}{C}_n\}_{n \in N}$ monótona decreciente de s.d., con límite $\underset{\sim}{C}$. Es inmediato que $\forall x \in X, \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \inf_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)$

Por la proposición 3.7. se tiene:

$$t_X(\underset{\sim}{C}) = g[X\cup Sop(\underset{\sim}{C})] \wedge (\sup_{x\in X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) = \sup_{x\in X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$$

$$t_X(\underset{\sim}{C}_n) = g[X\cup Sop(\underset{\sim}{C}_n)] \wedge (\sup_{x\in X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)) = \sup_{x\in X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x),$$ y por

tanto $t_X(\underset{\sim}{C}) = \sup_{x\in X}(\inf_n \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(X))$. Obviamente

$t_X(\underset{\sim}{C}) \leqslant t_X(\underset{\sim}{C}_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y por tanto $t_X(\underset{\sim}{C}) \leqslant \lim_n t_X(\underset{\sim}{C}_n)$

Ahora bien, puesto que X es finito, $\sup_{x\in X}$ es siempre accesible y, puesto que la sucesión es decreciente, ha de existir al menos un $x_0 \in X$ tal que

$\sup_{x\in X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x) = \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x_0)$, $\forall n\geqslant N\in\mathbb{N}$. Por tanto,

$\lim(\sup_{x\in X} \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x)) = \inf \mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x_0) = \mu_{\underset{\sim}{C}}(x_0) < \sup_{x\in X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x_0)$,

es lo mismo, $t_X(\underset{\sim}{C}) \geqslant \lim t_X(\underset{\sim}{C}_n)$.

En conclusión $t_X(\underset{\sim}{C}) = \lim_n t_X(\underset{\sim}{C}_n)$ y la proposición está probada. #

Hay que destacar que t_X es independiente de g, cualquiera que sea el cardinal de X.

El siguiente contraejemplo prueba que, aún en el caso de X finito, el resultado de esta proposición no es extensible para $A \neq X$.

<u>Contraejemplo 3.6.</u>- Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y g dada por $g(B) = \frac{\text{Card}\ (B)}{n}$ $\forall B \varepsilon P(X)$

Consideremos $\emptyset \neq A \neq X$ y la sucesión de s.d. caracterizada por:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \varepsilon A \\ 1/n & \text{si } x_i \notin A \end{cases}$$

y por tanto $\text{Sop}(\underset{\sim}{C}_n) = X$ $\forall n \varepsilon N$,

La sucesión $\{\underset{\sim}{C}_n\}_{n \varepsilon \mathbb{N}}$ es decreciente con límite $\underset{\sim}{C}$ dado por:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \varepsilon A \\ 0 & \text{si } x_i \notin A \end{cases}$$

y es claro que $\text{Sop}\ (\underset{\sim}{C}) = A \neq X$.

Entonces, $t_A(\underset{\sim}{C}_n) = g(X) \wedge 1 = 1$, $\forall n \varepsilon \mathbb{N}$, mientras que $t_A(\underset{\sim}{C}) = g(A) \wedge 1 = g(A) < 1$ (puesto que $A \neq X$).

Para el caso particular $A = \emptyset$, puede definirse:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}_n}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 1/n & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

con:

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1, \end{cases}$$

y entonces $t_{\emptyset}(\underset{\sim}{C}_n) = g(X) \wedge 1 = 1 \neq t_{\emptyset}(\underset{\sim}{C}) = g(x_1) \wedge 1 =$
$= 1/n$

Todos los resultados de esta sección pueden resumirse en el siguiente:

Teorema 3.7.- "Dado un espacio de medida monótona $(X,P(X),g)$ y considerado el espacio de medida $(I,B(I),l)$, existe una única medida difusa m sobre $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ dependiente de g, que denominamos medida difusa interna, y una única familia $\{t_A\}_{A\in P(X)}$ de valoraciones acotadas, monótonas y monótonamente continuas para sucesiones crecientes, definidas sobre $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ y que llamamos valoraciones difusas externas A-dependientes. Si X es finito, la valoración t_X es una medida difusa, independiente de g, que nombramos medida difusa externa".

En la sección siguiente se estudian algunas de las propiedades y resultados más interesantes de todas estas medidas y valoraciones difusas, así como los problemas de medibilidad asociados a la consideración de estructuras de medida menos finas que P(X) para la definición de g.

3.3. PROPIEDADES DE LAS MEDIDAS Y VALORACIONES DIFUSAS GENERADAS A PARTIR DE UNA MEDIDA MONOTONA.

Esta sección está dedicada a analizar las propiedades más relevantes de las medidas y valoraciones difusas construídas en secciones anteriores, así como su relación con las medidas que han sido introducidas directamente sobre $(X,\tilde{P}(X))$ por diferentes autores.

En primer lugar se establece una caracterización de la medida difusa interna que permite identificarla con la integral de Sugeno con respecto a una medida monótona. A partir de ella se estudian algunas de sus propiedades, así como cuestiones relacionadas con la medibilidad.

A continuación, se analizan las dos valoraciones externas más interesantes (la asociada a X y la asociada a $\emptyset$), su relación con la medida de posibilidad de Zadeh y con la medida difusa interna.

3.3.1.- Medida difusa interna. Relación con la integral de Sugeno.

En la sección anterior hemos visto que a partir de $(X,P(X),g)$ e $(I,B(I),l)$ se puede definir una medida difusa m sobre $(X,\tilde{P}(X))$ que depende de g. La proposición siguiente da una caracterización de esta medida de enorme interés para nuestros propósitos.

Proposición 3.9.- "Para cualquier medida monótona g y cualquier $\underset{\sim}{C} \in \underset{\sim}{P}(X)$ se cumple:

$$m(\underset{\sim}{C}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[g(C_\alpha) \wedge \alpha \right] ,$$

siendo $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la familia de los α-cortes de $\underset{\sim}{C}$".

Demostración:

Por la definición de α-cortes, es obvio que

$$\forall \alpha \in [0,1], \qquad \alpha \leqslant \inf_{x \in C_\alpha} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x),$$

y por tanto,

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \left[g(C_\alpha) \wedge \alpha \right] \leqslant \sup_{\alpha \in [0,1]} \left[g(C_\alpha) \wedge (\inf_{x \in C_\alpha} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) \right] \leqslant$$

$$\sup_{A \in P(X)} \left[g(A) \wedge (\inf_{x \in A} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) \right] = m(\underset{\sim}{C})$$

Sea ahora $A \in P(X)$ y definamos $\alpha_A = \inf_{x \in A} \mu_{\underset{\sim}{C}}(X)$. Es obvio que $A \subset C_{\alpha_A}$ $\forall A \in P(X)$. Se tiene entonces por la monotonía de g:

$$g(A) \wedge (\inf_{x \in A} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) \leqslant g(C_{\alpha_A}) \wedge \alpha_A \qquad \forall A \in P(X)$$

Finalmente,

$$m(\underset{\sim}{C}) = \sup_{A \in P(X)} \left[g(A) \wedge (\inf_{X \in A} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) \right] \leqslant \sup_{A \in P(X)} \left[g(C_{\alpha_A}) \wedge \alpha_A \right] \leqslant$$

$$\leq \sup_{\alpha \varepsilon [0,1]} \left[g(C_\alpha) \wedge \alpha \right].$$

De las dos desigualdades se sigue la igualdad que postula la proposición.

#

Corolario.- "Para cualquier medida monótona g sobre (X,P(X)) se tiene:

$$\forall \underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \qquad m(\underset{\sim}{C}) = \int_X \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) \circ g(.),$$

donde $\int$ nota la integral difusa de Sugeno".

Este resultado y el proceso constructivo de la sección anterior demuestran que, paralelamente a lo que ocurre para las medidas aditivas (Capítulo 2), las medidas difusas que proceden de la integración difusa pueden expresarse a través de medidas o valoraciones ordinarias del producto cartesiano XxI, y más concretamente, de las partes ancladas de este producto, y que la integral difusa presupone en su definición que se está considerando la medida de Lebesgue sobre el intervalo unidad. Este último hecho nos permitirá obtener una generalización de las medidas difusas sin más que considerar medidas distintas de 1 en (I,B(I)).

Por otra parte queda tambien comprobado que el papel que juega la integración difusa en la extensión de medidas monótonas sobre (X,P(X)) a $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ es similar al que juega la integración ordinaria para la extensión de medidas aditivas.

En la literatura pueden encontrarse diversas interpretaciones del significado de la integral de Sugeno. Así, por ejemplo, Batle y Trillas (1979) consideran que es una "solución de compromiso" ó un "punto fijo", mientras que Kandel (1979) la presenta como una "mediana ponderada" ó "esperanza difusa (FEV)". Los resultados anteriores indican, a nuestro juicio, que la integral difusa es también una medida del "tamaño" de los s.d., esto es, un área ó superficie ponderada.

Se tiene así una doble interpretación de la integral difusa: de un lado, como valor intermedio o medida de posición, y, por otro, como medida de magnitud. De esta forma se explica el hecho de que dicha integral sea utilizable tanto para la construcción de medidas de entropía como de energía. Hay que señalar que esta doble interpretación existe también para las medidas obtenidas por integración ordinaria.

Más adelante analizaremos con detalle la forma en que la medida interna refleja el "tamaño" de un s.d. y su relación con una cierta valoración externa que parece responder a este mismo concepto.

Hasta el momento hemos supuesto que g está definida sobre la clase monótona P(X), con respecto a la cual todos los s.d. son medibles, lo que nos ha permitido la extensión de g a una medida difusa sobre $(X,\underset{\sim}{P}(X))$.

Si consideramos un espacio de medida monótona (X,M,g) cualquiera, la clase $\underset{\sim}{M}^*$ de los s.d. M-medibles no es, en general, una clase monótona difusa, por lo cual m, que puede construirse por un procedimiento análogo al anterior (para cada s.d. de $\underset{\sim}{M}^*$), no sería una medida difusa. No obstante, tal problema no se presenta ni cuando M es una σ-álgebra, ya que entonces M* es una σ-álgebra difusa, ni cuando el referencial X es finito.

Como es natural, esta misma situación aparece también al estudiar la medibilidad e integrabilidad con respecto a la integral de Sugeno y es por ello por lo que este autor se restringe a medidas monótonas sobre referenciales finitos o sobre σ-álgebras ordinarias, postura que también adoptaremos nosotros. Sin embargo, en algunos casos prácticos puede ser de interés la consideración de una clase monótona cualquiera M, aún sabiendo que m no es una medida difusa.

La identificación de m con la integral de Sugeno permite asegurar para la primera todas las propiedades de la segunda, que han sido extensamente estudiadas en la literatura. Inversamente, una serie de éstas resultan más comprensibles ó más facilmente demostrables a través de m. Por ejemplo, para toda g:

I) $\forall a \in [0,1]$, $\quad \int_X a \circ g(.) = a$

Si consideramos $\underset{\sim}{A} \in \underset{\sim}{P}(X)$ con f. de p. $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = a$ $x \in X$, entonces: $m(\underset{\sim}{A}) = \sup\{ m_g(R): \; R \subset B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{A}}}\} =$

$= m_g(X x [0,a)) = g(X) \wedge l([0,a)) = 1 \wedge a = a$

II) Si $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son medibles y $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, entonces:

$$\int \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \circ g(.) \leqslant \int \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \circ g(.)$$

Esta propiedad se deduce inmediatamente de la monotonía de m.

Del mismo modo, de la continuidad de m se obtendría inmediatamente la continuidad de la integral para convergencia monótona.

III) Si $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son medibles, se verifica

$$\int (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) \circ g(.) \geqslant \int \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \circ g(.) \vee \int \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \circ g(.).$$

$m(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \geqslant m(\underset{\sim}{A}) \vee m(\underset{\sim}{B})$ se deduce directa e intuitivamente de que todo rectángulo contenido en una parte anclada correspondiente a $\underset{\sim}{A}$ ó a $\underset{\sim}{B}$ también lo está en la parte anclada que corresponde a $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$.

Por razones similares, resulta más intuitiva para la medida interna que para la integración difusa la propiedad dual:

III´) Si A y B son medibles, se verifica:

$$\int(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) \circ g(.) \leq \int\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \circ g(.)\wedge\int\mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \circ g(.)$$

IV) $\forall\, C\varepsilon M$ se cumple:

$g(C) = \int\chi_C(x) \circ g(.)$, donde χ_C es la función característica del subconjunto ordinario C. En este caso, puesto que C considerado como s.d. es un difuso rectangular, es inmediato que:

$$m(C) = m_g(Cx[0,1]) = g(C) \wedge 1 = g(C)$$

V) $\forall\, b\varepsilon[0,1]$ y $\forall A$ medible, se verifica que:

$$\int(b\vee\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \circ g(.) = b\vee\int\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \circ g(.)$$

En efecto, si es $\underset{\sim}{B}$ tal que $\mu_{\underset{\sim}{B}} = b\ \forall x\varepsilon X$, entonces $m(\underset{\sim}{B}) = b$ y será:

$$m(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}) = \begin{cases} b & \text{si } m(\underset{\sim}{A})\leq b \\ m(\underset{\sim}{A}) & \text{si } m(\underset{\sim}{A})>b \end{cases}$$

En el primer caso, $m_g(R)\leq b, \forall R\subset B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{A}}}$ y el superior se alcanza en $Xx[0,b]$, y en el segundo, $\exists R\subset B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{A}}}/m_g(R)>b$ y el superior para la unión coincide con el superior de m_g de los rectángulos contenidos en $B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{A}}}$.

En este punto nos planteamos cuál es la información que sobre un s.d. nos proporciona el conocimiento de su medida interna. Para responder a esta cuestión conviene caracterizar las clases de s.d. con igual medida, dentro de las cuales puede, a su vez, establecerse una clasificación que depende de los rectángulos para los que se alcanza el superior de m_g. Con ello se trata de aportar nueva luz en la comprensión del significado conceptual y de la utilidad de la medida interna o integral difusa. Dedicamos a este análisis el apartado siguiente.

3.3.2. Caracterización de las clases de equivalencia establecidas por la medida interna.

Sea (X,M,g) un espacio de medida monótona con M σ-álgebra, y $(X,\underset{\sim}{M},m)$ el espacio de medida difusa donde m es la medida interna generada por g y $\underset{\sim}{M}$ la σ-álgebra de s.d. M-medibles.

Para detallar el significado de m y la información que suministra sobre un s.d., analizaremos las clases que establece la igualdad en medida.

Es obvio que:

$\underset{\sim}{A} \underset{m}{=} \underset{\sim}{B}$ si y sólo si: $m(\underset{\sim}{A}) = m(\underset{\sim}{B})$

es una relación de equivalencia sobre $\underset{\sim}{M}$. Notemos D_α la clase de los s.d. de $\underset{\sim}{M}$ que tienen medida α.

<u>Proposición 3.10</u>.- "Sea $\underset{\sim}{A}\varepsilon \underset{\sim}{M}$. Entonces, $\underset{\sim}{A}\varepsilon D_\beta$ si y sólo si $g(A_\beta)\geqslant\beta$ y $g(A_\beta^+)\leqslant\beta$".

Demostración:

La condición suficiente es inmediata a partir de la propia definición de m.

La necesidad la probaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que $m(\underset{\sim}{A}) = \beta$

a) Si $g(A_\beta)<\beta$, entonces $\beta\wedge g(A_\beta)<\beta$

Por la monotonia de g, $g(A_\alpha)\leqslant g(A_\beta)<\beta, \forall\alpha>\beta$, y será $\alpha\wedge g(A\ )<\beta$.

Así pues, para que se cumpla:

$$\beta = m(\underset{\sim}{A}) = \sup_{\alpha\varepsilon[0,1]}\left[g(A_\alpha)\wedge\alpha\right]$$

tiene que ser $g(A_\alpha)\geqslant\beta \quad \forall\alpha<\beta$, ó, lo que es lo mismo, $g(A_\alpha^+)\geqslant\beta \quad \forall\alpha<\beta$. Puesto que $A_\beta=\bigcap_{\alpha<\beta}A_\alpha^+$, por la continuidad de g se tiene $g(A_\beta)\geqslant\beta$, contra la hipótesis.

b) Si fuese $g(A_\beta^+)>\beta$, entonces existe un $\varepsilon>0$ tal que $g(A_{\beta+\varepsilon})\geqslant\beta+\varepsilon$ por la continuidad de g y el hecho de que $\lim_{\varepsilon\to 0}(A_{\beta+\varepsilon}) = A_\beta^+$.

Pero entonces $m(\underset{\sim}{A})\geqslant\left[(\beta+\varepsilon)\wedge g(A_{\beta+\varepsilon})\right] = \beta+\varepsilon>\beta$, lo que contradice la hipótesis. #

Puesto que lo anterior es todo lo que puede deducirse de $\beta = m(\underset{\sim}{A})$, la clase D_β resulta, en principio, muy extensa. Para restringir el campo de los s.d. indistinguibles, es, pues, necesario añadir nueva información. A la vista de la proposición anterior, parece lógico establecer una clasificación dentro de D_β de acuerdo con A_β.

Es obvio que:

$\underset{\sim}{A} \underset{\beta}{=} \underset{\sim}{B}$ sí y sólo si $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in D_\beta$ y $A_\beta = B_\beta$, es una relación de equivalencia sobre D_β, válida $\forall \beta \in [0,1]$.

Consideremos $\underset{\sim}{A} \in D_\beta$; el s.d. rectangular de f. de p.:

$$\mu(x) = \begin{cases} \beta & \text{si } x \in A_\beta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

asociado al rectángulo anclado $A_\beta \times [0,\beta]$, puede considerarse como el representante canónico de la clase (según $\underset{\beta}{=}$) donde esté contenida $\underset{\sim}{A}$. Además, se cumple:

<u>Proposición 3.11</u>.- "Cualquiera que sea $\underset{\sim}{A} \in D_\beta$ se tiene:

$\beta = m(\underset{\sim}{A}) = m_g(A_\beta \times [0,\beta])$".

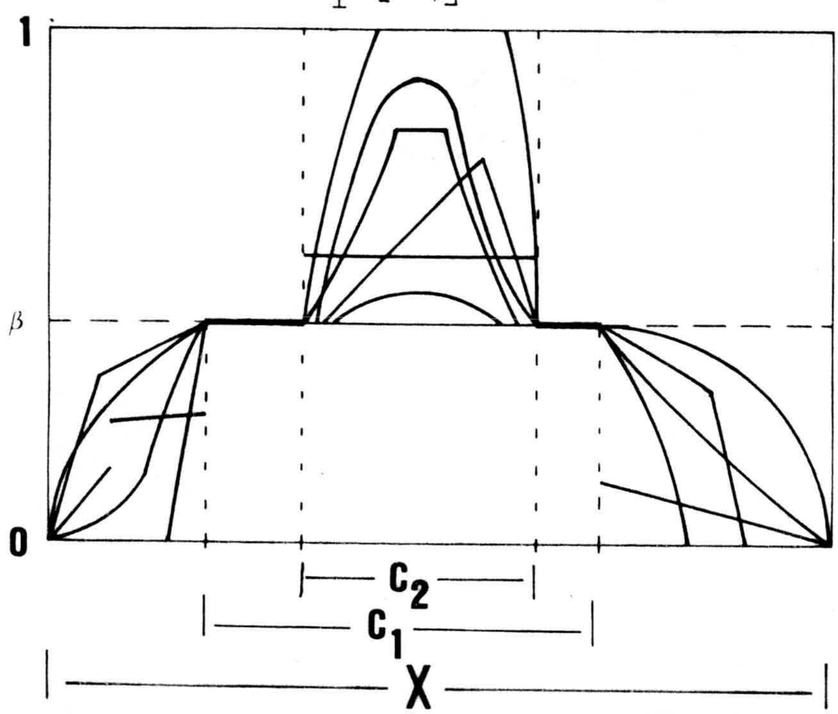
Demostración

$m_g(A_\beta \times [0,\beta]) = g(A_\beta) \wedge \beta = \beta$, puesto que la proposición anterior garantiza que $g(A_\beta) \geq \beta$, supuesto $\underset{\sim}{A} \in D_\beta$. #

De estos resultados se obtienen dos importantes consecuencias:

1) La medida interna de un s.d. $\underset{\sim}{A}$ se obtiene siempre como la medida rectangular m_g de un cierto rectángulo anclado. El conocimiento de $m(\underset{\sim}{A}) = \beta$ no permite identificar ni siquiera dicho rectángulo, ya que con esa sóla información no puede fijarse A_β.

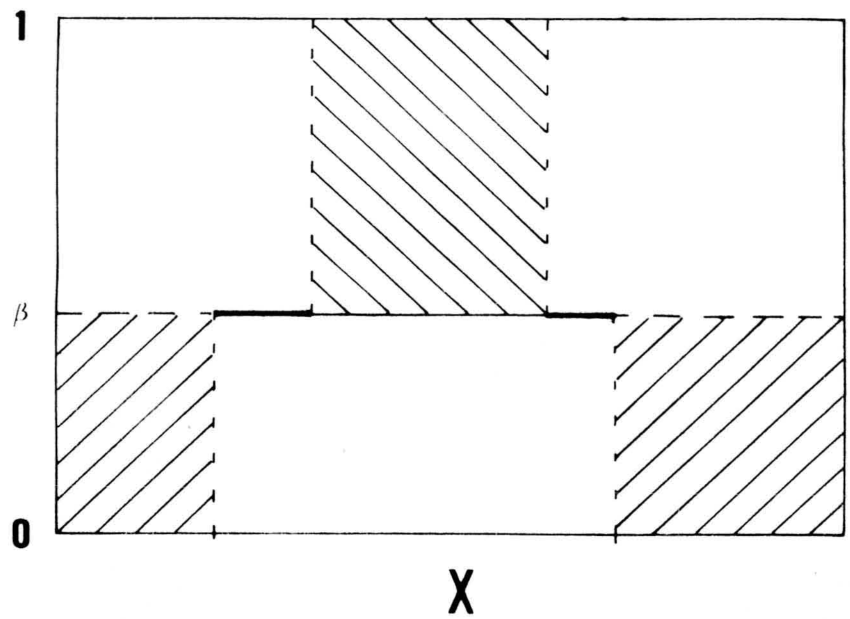
2) Sea $\beta \in [0,1]$ y $C_1, C_2 \in M$ tales que $C_2 \subset C_1$, $g(C_1) \geq \beta$ y $g(C_2) \leq \beta$. Todos los s.d. $\underset{\sim}{A}$ tales que $A_\beta = C_1$ y $A^+_\beta = C_2$ pertenecen a D_β y son equivalentes según $\underset{\beta}{=}$. Obviamente, fijados C_1 y C_2, existe una infinidad de s.d. que verifican las condiciones anteriores; todos ellos tienen como representante canónico el rectángulo $C_1 \times [0,\beta]$. (Ver figura)



Así pues, para comenzar la identificación de un s.d. de medida β, es necesario fijar al menos C_1 y C_2, en las condiciones anteriores; aún así sólo tenemos identificada la subclase dada por C_2 de la relación $\underset{\beta}{=}$.

Hay que hacer notar que la igualdad en α-cortes débiles engendra una nueva relación de equivalencia en cada una de las clases de la relación $\underset{\beta}{=}$.

Dados β, C_1 y C_2, quedan dos zonas de indeterminación en la f. de p. de un s.d. de medida β, que denominaremos zona superior e inferior. La aparición de dichas zonas resulta clara como consecuencia del proceso constructivo de m.



De acuerdo con lo que precede, para concretar más la caracterización de un s.d. es necesario añadir nueva información. Para ello, y desde un punto de vista analítico (como integral difusa) de la medida interna, puede emplearse el método propuesto por Sugeno en base al concepto de diferenciación como operación inversa de la integración. Nosotros proponemos un método alternativo inspirado en un enfoque "estadístico" de la cuestión, a través de la definición de sucesivos "momentos difusos" obtenidos por aplicación reiterada de la integración difusa. En lo que sigue se exponen ambas alternativas.

Para definir la función diferencial en la integración difusa (Sugeno, 1974) es necesario definir la integral difusa de un s.d. sobre un subconjunto $E \varepsilon M$ del referencial X, de la forma siguiente:

<u>Definición 3.9</u>.- "Dado (X,M,g) se define la <u>integral difusa de un s.d.</u> $\underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{M}$ <u>sobre un</u> $E \varepsilon M$ como el valor $m_E(\underset{\sim}{A}) = \oint_E \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \circ g(.) = \oint_X [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \chi_E(x)] \circ g(.) = m(\underset{\sim}{A} \cap E)$ siendo χ_E la función característica de E como subconjunto de X".

A partir de esta definición, se establece la valoración $\phi: M \rightarrow [0,1]$ de la forma:

$\forall E \varepsilon M, \quad \phi(E) = m_E(\underset{\sim}{A})$

que es una valoración monótona de M que evidentemente depende del $\underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{M}$ considerado (no es una medida monótona porque en general $\phi(X) = m(\underset{\sim}{A}) < 1$ y tampoco está garantizada la continuidad monótona).

La diferenciación difusa se plantea entonces como la búsqueda de una función h: $X \longrightarrow [0,1]$ conocidas g(.) y $\phi(.)$ (y, naturalmente, fijado $\underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{M}$, de quien depende $\phi(.)$), de modo que se verifique:

$$\forall E \varepsilon M, \quad \phi(E) = \int_E h(x) \circ g(.) .$$

Sugeno (1974) demuestra que una solución para h viene dada por la función diferencial $D_g\phi$: $X \longrightarrow [0,1]$, definida g-casi para todo por:

$$D_g\phi(x) = \begin{cases} \beta & \forall x \varepsilon A_\beta, \text{ siendo } \quad m(\underset{\sim}{A}) = \beta \\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) & \forall x \not\varepsilon A_\beta, \end{cases}$$

bajo ciertas condiciones estructurales, topológicas y analíticas que son verificadas por $X \subset \mathbb{R}$, M = B(X) y g una medida de Sugeno (λ -medida).

El procedimiento seguido por este autor para la obtención de $D_g\phi$ es constructivo y no hace referencia al resto de las posibles soluciones. No obstante, puede probarse - que también es válida cualquier función de la forma:

$$h(x)\begin{cases} > \beta & \forall x \in C_2 \in M / g(C_2) \leq \beta\ ,\ C_2 \subset A_\beta . \\ = \beta & \forall x \in A_\beta - C_2 \\ = \mu_A(x) & \forall x \in \overline{A}_\beta . \end{cases}$$

De este modo, una solución de un problema de diferenciación difusa puede tomar cualquier valor en $(\beta,1]$ sobre A^+_β, dado que $\phi(.)$ coincide necesariamente con $g(.)$ sobre cualquier elemento de M contenido en A^+_β.

Así pues, dados β, C_1 y C_2, con el significado ya conocido, cualquier solución del problema de diferenciación (con $A_\beta = C_1$) resuelve la indeterminación en la zona inferior, si bien se mantiene ésta en la zona superior.

Este método requiere:

A) El cumplimiento de condiciones bastante restrictivas, entre las que destacan el que M sea un σ-álgebra, que X sea un espacio de Hausdorff cumpliendo el segundo axioma de separabilidad, la existencia de entornos abiertos de los conjuntos de M y ciertas propiedades de los conjuntos g-nulos.

B) El conocimiento de $m_E(\underset{\sim}{A})$ para todo $E \in M$ tal que $E \not\subset A_\beta$.

El enfoque "estadístico" que proponemos para resolver el problema de la indeterminación se materializa en un proceso iterativo para aproximar la f. de p. del s.d. desconocido mediante funciones escalonadas, obtenidas a partir de la unión de s.d. rectangulares.

La idea que subyace en este enfoque es la siguiente:

Fijado (X,M,g) (y por tanto $(X,\underset{\sim}{M},m)$), dentro de cada clase de equivalencia D_β se establece una neuva relación $\underset{\beta}{=}$ a partir del β-corte de los s.d. de D_β; los s.d. de cada clase de $\underset{\beta}{=}$ son todos aquellos cuya f. de p. toma valores en $[0,\beta)$ sobre $\overline{A}_\beta$ y en $[\beta,1]$ sobre A_β.

Se trata de definir una nueva partición de cada una de esas clases a través de las medidas sobre subconjuntos del referencial que corresponden a las zonas de indeterminación:

a) Para la zona de indeterminación inferior, se considera la medida $m_{\overline{A}_\beta}$ y se establece la relación:

   $\underset{\sim}{A} \underset{m_{\overline{A}_\beta}}{=} \underset{\sim}{B}$ sí y sólo si $\underset{\sim}{A} \underset{\beta}{=} \underset{\sim}{B}$ y $m_{\overline{A}_\beta}(\underset{\sim}{A}) = m_{\overline{A}_\beta}(\underset{\sim}{B})$.

   A su vez, cada una de las clases de $\underset{m_{\overline{A}_\beta}}{=}$ puede ser descompuesta mediante la relación $\underset{\sim}{A} \overset{\Delta}{\underset{\beta_1}{=}} \underset{\sim}{B}$ si y sólo si $\underset{\sim}{A} \underset{m_{A_\beta}}{=} \underset{\sim}{B}$ y $A_{\beta_1} = B_{\beta_1}$, donsiderando los β_1-cortes, con $\beta_1 = m_{\overline{A}_\beta}(\underset{\sim}{A})$.

b) Para la zona de indeterminación superior, es necesario considerar la medida m_{A_β} (que equivale a $m_{A_\beta}^+$ para los elementos de D_β y la función diferencia que vamos a considerar); dado que $m_{A_\beta}(\underset{\sim}{A}) = \beta, \forall \underset{\sim}{A} \varepsilon D_\beta$, habremos de adoptar la integración de la función diferencia $(\mu_{\underset{\sim}{A}} - \beta)(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \beta$, $\forall x \varepsilon A_\beta$ sobre el conjunto A_β para establecer nuevas particiones de las clases de $\underset{\beta}{=}$. Estas nuevas relaciones de equivalencia se definen sucesivamente, como en el caso anterior, por la igualdad en medida y la igualdad en el α-corte correspondiente.

De este modo, el conocimiento de estas nuevas medidas y α-cortes permite manejar clses de equivalencia (y, paralelamente, zonas de indeterminación) más reducidas. La continuación indefinida de este proceso nos permite obtener una sucesión creciente de funciones escalonadas que bajo ciertas condiciones, converge a la f. de p. del s.d. buscado.

A continuación detallamos tal proceso:

1.- Como se indicó anteriormente, conocidos β y A_β, sólo se puede realizar una aproximación rectangular $\underset{\sim}{A}_1$ de f. de p.:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x) = \begin{cases} \beta & \text{si } x \varepsilon A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

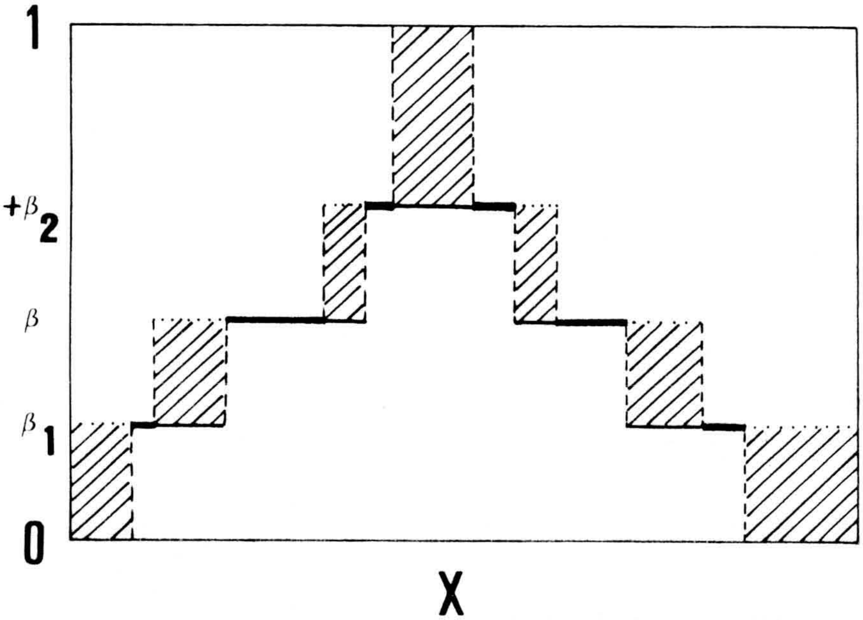
2.- Si se conocen además los siguientes valores:

$$\beta_1 = \int_{\bar{A}_\beta} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \circ g(.); \quad \beta_2 = \int_{A_\beta} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \beta) \circ g(.),$$

que podemos denominar "momentos de 2° orden" (por contener la información sobre las dos zonas de indeterminación), y los conjuntos: A_{β_1} y $A_{(\beta + \beta_2)}$, se puede realizar una aproximación "de 2° orden" para $\underset{\sim}{A}$ definida por:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x) = \begin{cases} \beta + \beta_2 & \text{si } x \varepsilon A_{(\beta+\beta_2)} \\ \beta & \text{si } x \varepsilon A_\beta - A_{(\beta+\beta_2)} \\ \beta_1 & \text{si } x \varepsilon A_{\beta_1} - A_\beta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que de este modo las zonas de indeterminación superior e inferior primitivas quedan descompuestas en dos zonas cada una de ellas y la indeterminación global tras esta segunda aproximación es menor que la original.



3.- Supongamos que a la información anterior se añaden los valores:

$$\beta_{11} = \int_{\bar{A}_{\beta_1}} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \circ g(.); \quad \beta_{12} = \int_{A_{\beta_1} - A_{\beta}} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \beta_1) \circ g(.)$$

$$\beta_{21} = \int_{A - A_{(\beta + \beta_2)}} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \beta) \circ g(.);$$

$$\beta_{22} = \int_{A(\beta + \beta_2)} \left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - (\beta + \beta_2)\right] \circ g(.)$$

que podemos denominar "momentos de 3° orden", y los conjuntos $A_{\beta_{11}}$, $A_{\beta_1 + \beta_{12}}$, $A_{\beta + \beta_{21}}$ y $A_{\beta + \beta_2 + \beta_{22}}$; la aproximación de tercer orden viene dada por:

$$\begin{cases} \beta + \beta_2 + \beta_{22} & \text{si } x \varepsilon A_{(\beta + \beta_2 + \beta_{22})} \\ \beta + \beta_2 & \text{si } x \varepsilon A_{(\beta + \beta_2)} - A_{(\beta + \beta_2 + \beta_{22})} \\ \beta + \beta_{21} & \text{si } x \varepsilon A_{(\beta + \beta_{21})} - A_{(\beta + \beta_2)} \\ \beta & \text{si } x \varepsilon A_{\beta} - A_{(\beta + \beta_{21})} \\ \beta_1 + \beta_{12} & \text{si } x \varepsilon A_{(\beta_1 + \beta_{12})} - A_{\beta} \\ \beta_1 & \text{si } x \varepsilon A_{\beta_1} - A_{(\beta_1 + \beta_{12})} \\ \beta_{11} & \text{si } x \varepsilon A_{\beta_{11}} - A_{\beta_1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Repitiendo este proceso tantas veces como la información disponible lo permita, pueden generarse sucesivas aproximaciones para cada una de las cuales la zona de indeterminación global es menor que la correspondiente a la anterior.

Dado que M es una σ-álgebra (lo que permite definir todas las integrales necesarias), la convergencia del proceso está asegurada salvo sobre las imágenes inversas por $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ de intervalos no puntuales de I que sean g-nulas ó las imágenes inversas g-nulas de puntos aislados de $Im(\mu_{\underset{\sim}{A}})$. Téngase en cuenta que el proceso no se detiene, en teoria, hasta que una de las integrales es nula, puesto que la integral de una función estrictamente acotada es también estrictamente acotada por el mismo valor.

Entre las posibilidades que se abren con este enfoque destaca la definición de familias de s.d. parametrizadas (paralelamente a las distribuciones de probabilidad usuales), el establecimiento de medidas de semejanza o desemejanza en función de los sucesivos "momentos" ó, desde el punto de vista práctico, la posibilidad de obtener aproximaciones tan finas como se desee que se relacionen con la medida g de partida y no sólo con cortaduras arbitrarias de I.

3.3.3. Valoración difusa externa X-dependiente.

Como ya ha sido analizado en la sección 3.2., la característica más relevante de t_X es su independencia de la medida monótona g que se considere sobre el referencial. Puesto que:

$$\forall \underset{\sim}{C} \in \underset{\sim}{P}(X), \quad t_X(\underset{\sim}{C}) = \sup_{x \in X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x),$$

para esta valoración no hemos de cuestionarnos problemas de medibilidad.

Si en las secciones precedentes se ha puesto de manifiesto la identificación entre la medida interna y la integral difusa, también la valoración difusa t_X guarda interesantes relaciones con la medida de posibilidad. Recordemos la definición de ésta.

<u>Definición 3.10</u> (Zadeh, 1978). "Dado $\underset{\sim}{C} \in \underset{\sim}{P}(X)$, la valoración $\pi_{\underset{\sim}{C}}: P(X) \longrightarrow [0,1]$ definida por: $\forall E \in P(X)$, $\pi_{\underset{\sim}{C}}(E) = \sup_{x \in E} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$, se denomina <u>medida de posibilidad</u> inducida por $\mu_{\underset{\sim}{C}}$".

Hay que hacer notar que el término "medida" no debe interpretarse en el sentido de que la posibilidad sea una medida monótona, lo que ocurre sólo en el caso de que X sea finito como ha sido puesto de manifiesto por Puri y Ralescu (1982). Mas propiamente, en el caso general habría que denominarla "valoración de posibilidad"; sin embargo, conservaremos en lo que sigue la expresión original "medida de posibilidad" habitual en la literatura especializada.

De la propia caracterización de t_X anteriormente expuesta se deduce la:

<u>Proposición 3.12</u>.- "Para cualquier $\underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ se verifica: $\pi_{\underset{\sim}{C}}(X) = t_X(\underset{\sim}{C})$".

Nuestra valoración externa X-dependiente coincide, -- pues, con la posibilidad del referencial, en cada caso.

Esta equivalencia puede generalizarse a cualquier subconjunto del referencial a través de la:

<u>Proposición 3.13</u>.- "Dado $\underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, se verifica: $\forall E \varepsilon P(X),\ \pi_{\underset{\sim}{C}}(E) = t_X(\underset{\sim}{C} \cap E)$".

La demostración es inmediata a partir de la definición 3.10.

Queda así caracterizada la medida de posibilidad por la valoración externa t_X. Nótese que, a diferencia de lo que ocurre para la medida interna y la integral, no puede hablarse en este caso de identificación ya que la posibilidad está definida para subconjuntos ordinarios del referencial mientras que la valoración externa se define para las partes difusas.

Sólo entendiendo la posibilidad como una valoración de s.d. puede llegarse a tal identificación. Recordemos, en este sentido, que dada una "distribución de posibilidad" a través de $\mu_{\underset{\sim}{A}}$, con $\underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, Zadeh define la medida de posibilidad de un s.d. $\underset{\sim}{C}$ de la forma:

$$\pi_{\underset{\sim}{A}}(\underset{\sim}{C}) = \sup_{x \varepsilon X} \left[\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\right]$$

Si $\underset{\sim}{A}$ coincide con X se obtiene:

<u>Proposición 3.14</u>.- "$\forall \underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$, $\pi_X(\underset{\sim}{C}) = t_X(\underset{\sim}{C})$".

Así pues, la medida de posibilidad, entendida como valoración difusa asociada a X, se identifica con la valoración externa X-dependiente. Esta igualdad no se produce, en general, para las valoraciones difusas A-dependientes, si A $\neq$ X, que no son expresables como medidas de posibilidad, incluyendo a éstas como un caso muy particular. La proposición 3.13. muestra que la identificación numérica para t_X incluye a todas las medidas de posibilidad sobre subconjuntos ordinarios del referencial.

Si bien el concepto de posibilidad es, en sí mismo, especialmente fecundo desde el punto de vista conceptual, su caracterización por t_X colabora, a nuestro juicio, a la comprensión de algunas de sus propiedades mas importantes.

En primer lugar, permite concebir la medida de posibilidad como la medida de aquellos rectángulos anclados en XxI cuya base sea el propio referencial ó, lo que es equivalente, como la medida de Lebesgue de partes ancladas de I. A partir de esta interpretación, es inmediato obtener los siguientes resultados para la medida de posibilidad.

<u>Proposición 3.15</u>.- "$\forall \underset{\sim}{C} \in \underset{\sim}{P}(X), \pi_{\underset{\sim}{C}}(.)$ es F-aditiva".

Demostración:

Sean E, $F \in P(X)$. Se verifica:

$\pi_{\underset{\sim}{C}}(E \cup F) = t_X\left[\underset{\sim}{C} \cap (E \cup F)\right] = t_X\left[(\underset{\sim}{C} \cap E) \cup (\underset{\sim}{C} \cap F)\right] = t_X(\underset{\sim}{C} \cap E) \vee t_X(\underset{\sim}{C} \cap F) =$

$= \pi_{\underset{\sim}{C}}(E) \vee \pi_{\underset{\sim}{C}}(F)$

#

Intuitivamente, este resultado equivale a decir que el rectángulo anclado mínimo que contiene a la unión de las partes ancladas de $(\underset{\sim}{C}\cap E)$ y $(\underset{\sim}{C}\cap F)$ es el mayor de los correspondientes a cada uno de estos dos s.d.

En cuanto a la información que la valoración proporciona sobre un determinado s.d., cabe decir que es escasa y no permite, como ocurría para la medida interna, obtener aproximación alguna de su f. de p. Podemos definir la relación de equivalencia:

$$\underset{\sim}{A} \underset{t_X}{=} \underset{\sim}{B} \text{ sí y solo si } t_X(\underset{\sim}{A}) = t_X(\underset{\sim}{B})$$

y, en todo caso, la subclasificación (dentro de cada una de las clases T_γ ($\gamma \varepsilon$ $[0,1]$) de esta relación) dada por:

$$\underset{\sim}{A} =_\gamma \underset{\sim}{B} \text{ si y sólo } \underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B} \varepsilon T_\gamma \text{ y } A_\gamma = B_\gamma$$

Conocida $\gamma = t_X(\underset{\sim}{A})$ y A_γ, la zona de indefinición es todo el conjunto $\overline{A}_\gamma$, donde μ_A puede tomar cualquier valor en $[0,\gamma)$.

Con respecto a la medida interna, la única relación que puede siempre establecerse es la desigualdad:

$$\forall \underset{\sim}{A} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X),\ \beta = m(\underset{\sim}{A}) \leq t_X(\underset{\sim}{A}) = \gamma$$

Conocidos β, A_β y A_β^+, el valor γ limita superiormente la zona de indeterminación superior, dado lo cual no puede diseñarse un proceso recurrente de aproximación a la

f. de p. a partir de la información proporcionada por t_X.

Ahora bien, el conocimiento de la medida de posibilidad para todo $E \varepsilon P(X)$ permite la reconstrucción de la f. de p. de un s.d.. Así, mientras $t_X(\underset{\sim}{A})$ aporta sólo una información muy parcial (la cota mínima superior de $\mu_{\underset{\sim}{A}}$), si se dispone del valor de $\pi_{\underset{\sim}{A}}(E), \forall E \varepsilon P(X)$, puede obtenerse en cualquier caso $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ de la forma:

$$\forall x \varepsilon X, \quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \inf_{x \varepsilon E} \pi_{\underset{\sim}{A}}(E)$$

como es sabido, procedimiento en cierto modo paralelo al método diferencial de Sugeno.

3.3.4. Valoración difusa externa $\emptyset$-dependiente.

De los resultados de la sección 3.2.4. conocemos que, dado un espacio de medida monótona $(X,P(X),g)$ la valoración $t_\emptyset$ definida sobre $(X,\underset{\sim}{P}(X))$ puede caracterizarse como:

$$\forall \underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X), \quad t_\emptyset(\underset{\sim}{C}) = g(Sop(\underset{\sim}{C})) \wedge (\sup_{x \varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x))$$

y verifica las propiedades de una medida difusa a excepción de la continuidad para sucesiones monótonas decrecientes.

Si, en lugar de $P(X)$, se considera una clase monótona cualquiera $M \subset P(X)$ como estructura para la definición de g, la valoración $t_\emptyset$ está definida sobre aquellos s.d. cuyo soporte pertenezca a M, a los que llamaremos s.d. de soporte medible. La clase $\underset{\sim}{M}_0$ de estos s.d. es cerrada para el límite de sucesiones monótonas crecientes, como puede comprobarse fácilmente, pero no ocurre lo mismo, en general, para sucesiones monótonas decrecientes. En consecuencia, no puede afirmarse que $\underset{\sim}{M}_0$ sea clase monótona difusa.

Dado (X,M,g), $\forall \underset{\sim}{C}\varepsilon \underset{\sim}{M}_0$, $t_\emptyset(\underset{\sim}{C})$ puede expresarse directamente por medio de la medida de un cierto rectángulo (al igual que ocurre con la medida interna y la valoración t_X). Es inmediato comprobar que:

$t_\emptyset(\underset{\sim}{C}) = m_g\left[\mathrm{Sop}(\underset{\sim}{C}) x \left[0, \sup_{x\varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\right)\right]$, ó lo que es lo mismo:

$t_\emptyset(\underset{\sim}{C}) = g(\mathrm{Sop}(\underset{\sim}{C})) \wedge \pi_X(\underset{\sim}{C}) = m_g\left[C_0^+ x [0,\gamma]\right]$, donde $\gamma = t_X(\underset{\sim}{C})$.

Por lo que se refiere a la información de la valoración $t_\emptyset$ proporciona sobre un cierto s.d. sólo puede afirmarse que, si es $\underset{\sim}{C}\varepsilon\underset{\sim}{M}_0$ y tenemos $t_\emptyset(\underset{\sim}{C}) = \tau$, se verifica:

a) $g(C_0^+) \geqslant \tau$

b) $\gamma \geqslant \tau$

c) $g(C_0^+) = \tau$ ó $\gamma = \tau$

Si se establece la relación de equivalencia en $\underset{\sim}{M}_0$ dada por: $\underset{\sim}{A} \underset{t_\emptyset}{=} \underset{\sim}{B}$ si y sólo si $t_\emptyset(\underset{\sim}{A}) = t_\emptyset(\underset{\sim}{B})$, cada una de las clases engendradas por ella está formada por s.d. que verifican las condiciones a), b) y c).

En la clase correspondiente a cada $\tau \in [0,1]$ según $\overline{\overline{t_\emptyset}}$ puede definirse una nueva relación dada por:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\tau}{=} \underset{\sim}{B} \text{ si y sólo si } A_0^+ = B_0^+ \text{ y } \underset{\sim}{A} \underset{t_\emptyset}{=} \underset{\sim}{B},$$

que clasifica los conjuntos de $\underset{\sim}{M}_0$ con igual valoración atendiendo a su soporte.

Así pues, con el solo conocimiento de $\tau = t_\emptyset(\underset{\sim}{C})$, únicamente puede afirmarse que $\mu_{\underset{\sim}{C}}$ verifica las condiciones a), b) y c).

Si se añade el conocimiento de $C_0^+ = \text{Sop}(\underset{\sim}{C})$ (es decir, si sabemos a qué clase de $\underset{\tau}{=}$ pertenece $\underset{\sim}{C}$), se plantean dos situaciones alternativas dadas por la relación entre $g(C_0^+)$ y τ:

1) Si $g(C_0^+) = \tau$, sólo puede afirmarse que $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = 0 \, \forall x \in \overline{C_0^+}$ y que $\sup_{x \in C_0^+} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) \geq \tau$; con ello la zona de indeterminación es todo C_0^+, donde la f. de p. puede, en principio, tomar valores en $(0,1]$ con la condición b) anterior.

2) Si $g(C_0^+) > \tau$, entonces $\tau = \gamma$, lo que significa que la zona de indeterminación de $\mu_{\underset{\sim}{C}}$ corresponde ahora al rectángu-

lo $C_0^+ \times [0,\tau]$, esto es, tiene la misma base que en el caso anterior pero su altura está limitada por τ .

De cualquier modo, la información asociada a la valoración $t_\emptyset$ no nos permite aproximar un s.d.

El mayor interés de $t_\emptyset$ radica en que $t_\emptyset(\underset{\sim}{C})$ es, $\forall \underset{\sim}{C} \in \underset{\sim}{M}_0$, la medida del "menor" rectángulo que "cubre" a $\underset{\sim}{C}$ (en el sentido de que contiene a la parte anclada abierta asociada a $\mu_{\underset{\sim}{C}}$). De esta forma, $t_\emptyset$ puede considerarse como "dual" de la medida interna. Recordemos que $m(\underset{\sim}{C})$ es la medida del "mayor" rectángulo "cubierto" por $\underset{\sim}{C}$ (en el sentido de que está contenido en la parte anclada cerrada asociada a $\mu_{\underset{\sim}{C}}$). De este modo, puede entenderse que $t_\emptyset(.)$ nos da una valoración del "tamaño exterior" de un s.d. mientras que $m(.)$ proporciona una medida de su "tamaño interior".

A continuación analizamos algunas relaciones entre $t_\emptyset$, t_X y m.

<u>Proposición 3.16</u>.- "Sea (X,M,g) un espacio de medida monótona, y sea $\underset{\sim}{M}$ la clase de los s.d. M-medibles. Se verifica:

$$\forall \underset{\sim}{C} \in \underset{\sim}{M}, \quad m(\underset{\sim}{C}) \leq t_\emptyset(\underset{\sim}{C}) \leq t_X(\underset{\sim}{C})".$$

Demostración:

Nótese que, si $\underset{\sim}{C}\varepsilon\underset{\sim}{M}$, entonces $\underset{\sim}{C}\varepsilon\underset{\sim}{M}_0$. La verificación de la proposición se deduce de la caracterización de las tres valoraciones m, $t_\emptyset$ y t_X a través de la medida rectangular, pues se tiene:

(I) $m(\underset{\sim}{C}) = \beta = m_g(C_\beta x [0, \beta])$

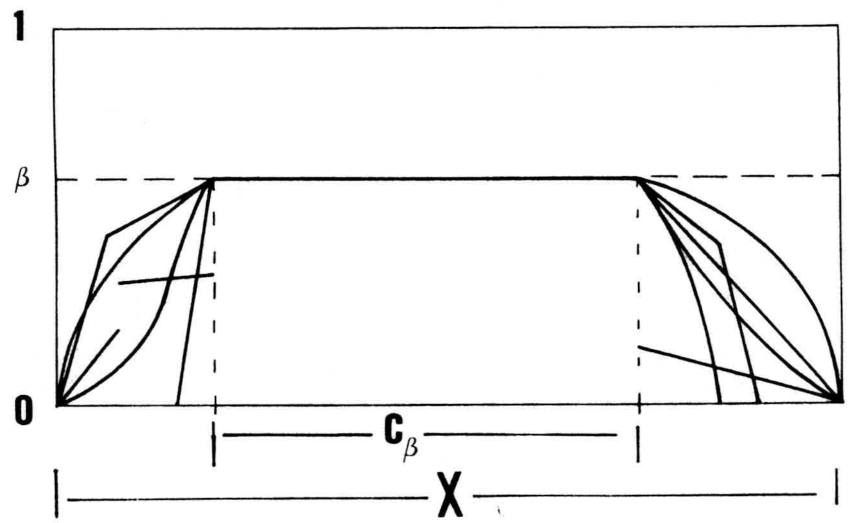
(II) $t_\emptyset(C) = \tau = m_g(C_0^+ x [0, \gamma])$

(III) $t_X(C) = \gamma = m_g(Xx\ [0,\gamma])$

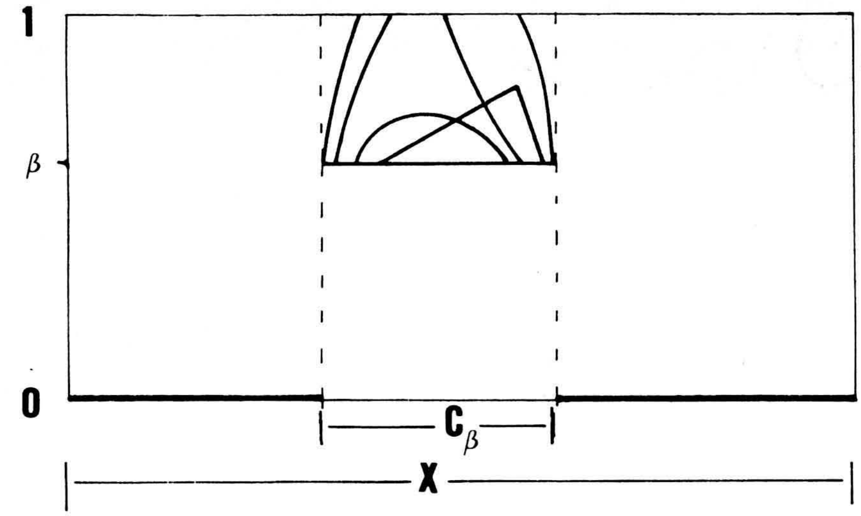
teniendo en cuenta que, si fuese $\beta > \gamma$, $C_\beta = \emptyset$ y que, evidentemente, $C_\beta \subset C_0^+ \subset X$ si $\beta \neq 0$.

Por otra parte, y dependiendo de cómo sean las desigualdades anteriores, podemos distinguir varios casos:

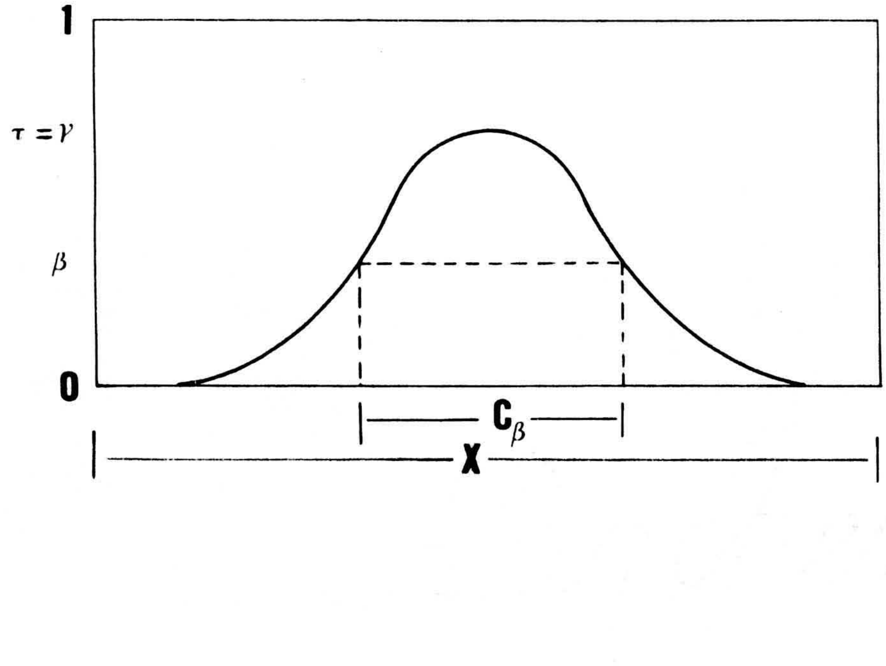
1) $\beta = \tau = \gamma$. En estas condiciones, $\underset{\sim}{C}$ es un s.d. tal que su f. de p. alcanza su superior$_\gamma$ sobre un conjunto de medida igual o superior a γ. Entre tales s.d. se incluyen X, $\emptyset$ y a aquellos s.d. propios cuyo soporte mide (según g) al menos su altura y ésta se alcanza para puntos de X que constituyen un conjunto de medida (según g) al menos igual a β. Si $\underset{\sim}{C}$ pertenece a esta categoria, también pertenecen a ella los s.d. con la -- misma zona de indeterminación inferior y valor cons-- tante β sobre C_β



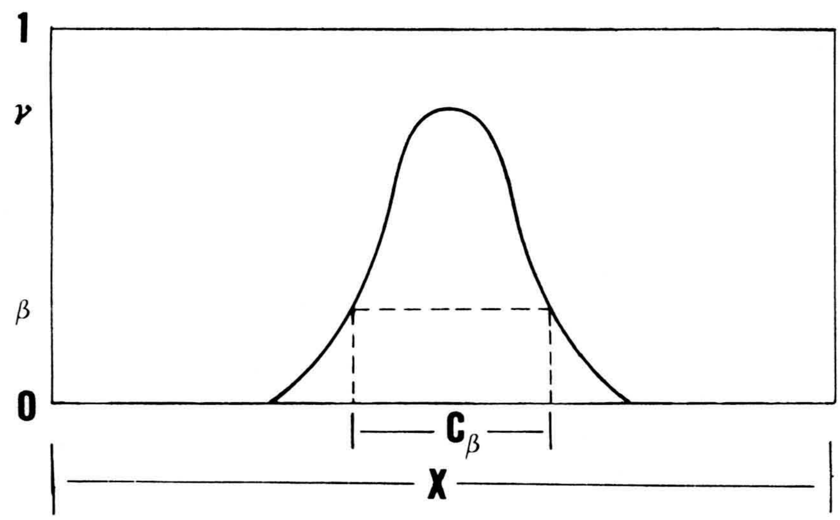
2) $\beta = \tau < \gamma$. En este caso, $\underset{\sim}{C}$ es un s.d. tal que su medida interna coincide con la medida (según g) de su soporte, que a su vez es estrictamente menor a su altura. Se incluyen dentro de esta categoría todos los subconjuntos ordinarios no vacíos de medida inferior a la unidad. Si $\underset{\sim}{C}$ pertenece a esta categoría, tambien pertenecen a ella aquellos s.d. que tienen la misma zona de indeterminación superior y f. de p. nula fuera de C_β.



3) $\beta<\tau = \gamma$. En este caso, el s.d. $\tilde{C}$ tiene una medida del soporte no inferior a su altura y una medida interna estrictamente inferior a ambas. Se trata siempre de s.d. propios.

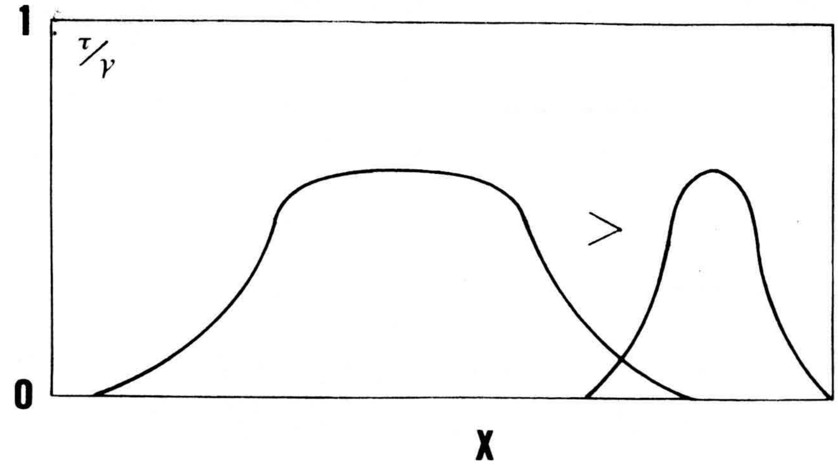


4) $\beta<\tau<\gamma$. Son s.d. con medida del soporte estrictamente menor a su altura y con medida interna estrictamente menor que ambas. Se trata de nuevo de s.d. propios, si bien se diferencian de los de la categoría anterior por tener f. de p. mas "apuntada".

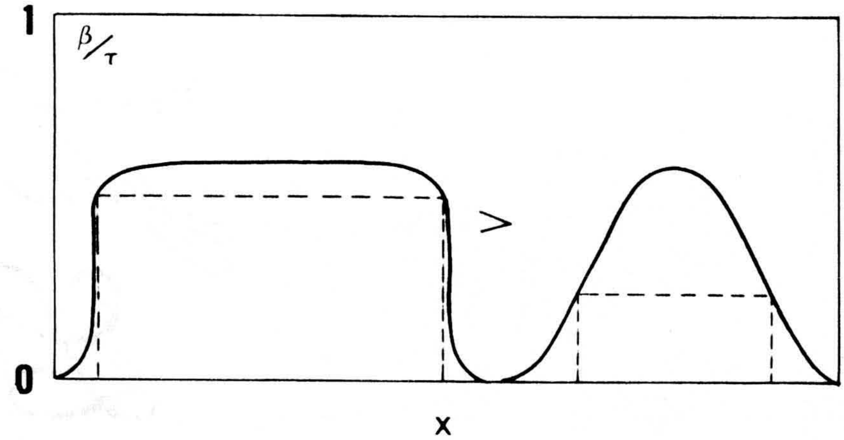


De acuerdo con estas consideraciones, conclúimos que:

(I) $\dfrac{t_{\emptyset}(.)}{t_X(.)}$ es un índice que informa sobre la relación base-altura (en términos de medida) de un s.d.. Cuanto mayor sea este cociente, menos "apuntado" será el s.d.



(II) $\frac{m(.)}{t_{\emptyset}(.)}$ es un índice que informa sobre la posibilidad de aproximar dicho s.d. mediante un s.d. rectangular. Cuanto mayor es este índice, más se parecen el "tamaño" interior y exterior y por tanto su función de pertenencia es aproximable por una f. de p. rectangular.



3.4. MEDIDAS Y VALORACIONES DIFUSAS GENERADAS A PARTIR DE UNA MEDIDA MONOTONA EN EL INTERVALO UNIDAD.

De forma paralela a la generalización que se realizó en la sección 3.2. para medidas difusas aditivas al considerar un espacio de medida monótona $(I,P_a(I),q_\lambda)$ en lugar de $(I,B(I),l)$, se estudia en esta sección la influencia de tal modificación en las medidas y valoraciones difusas no aditivas definidas en el presente capítulo.

Consideremos, pues, el espacio $(X,P(X),g)$ y un espacio de medida monótona $(I,P_a(I),q_\lambda)$. Como ya se probó en capítulos anteriores, q_λ engendra una única medida de probabilidad λ sobre $(I,B(I))$.

En estas condiciones, la generalización de la medida rectangular m_g^λ viene dada por la valoración m_g definida sobre $(XxI, P(X)xB(I))$ de la forma:

$$\forall R = R_X x R_I \varepsilon P(X)xB(I),\ m_g^\lambda(R) = g(R_X)\wedge\lambda(R_I).$$

Puede probarse que m_g^λ es una medida monótona a partir de la demostración del teorema 3.1., ya que únicamente se utilizó entonces la monotonía de l y su continuidad para sucesiones monótonas, requisitos que verifica cualquier λ.

Las valoraciones interna y externa generalizadas $\underline{m}_g^\lambda$ y $\overline{m}_g^\lambda$ pueden definirse entonces a partir de m_g^λ:

$$\forall A \varepsilon P(X x I), \quad \underline{m}_g^\lambda(A) = \sup\{m_g^\lambda(R): R \varepsilon P(X) x B(I),\ R \subset A\}$$

$$\overline{m}_g^\lambda(A) = \inf\{m_g^\lambda(R): R \varepsilon P(X) x B(I),\ A \subset R\}$$

La proposición que sigue caracteriza las restricciones de $\underline{m}_g^\lambda$ y $\overline{m}_g^\lambda$ a P_a. Se supone que λ es contínua por motivos de sistematización, ya que en caso contrario las partes ancladas asociadas a un mismo s.d. tendrían distinta valoración interna dependiendo del conjunto ordinario A que las caracteriza.

Proposición 3.17.- "Dados $(X,P(X),g)$ e $(I,B(I),\lambda)$, con λ contínua, se verifica:

$$\forall B_A^f \varepsilon P_a, \quad \underline{m}_g^\lambda(B_A^f) = \sup\{g(E) \wedge \lambda[0, \inf_{x \varepsilon E} f(x)) : E \varepsilon P(X)\}$$

$$\overline{m}_g^\lambda(B_A^f) = g\left[(B_A^f)_X\right] \wedge \lambda[0, \sup_{x \varepsilon X} f(x))".$$

Demostración:

Se sigue de modo inmediato de las proposiciones 3.5. (corolario 1) y 3.6.

En el apartado 3.2.4. se definieron las medidas y valoraciones m, $t_\emptyset$ y t_X a partir de $\underline{m}_g$ y $\overline{m}_g$; las generalizaciones respectivas m^λ, $t^\lambda_\emptyset$ y t^λ_X se obtienen paralelamente a través de $\underline{m}^\lambda_g$ y $\overline{m}^\lambda_g$. Su caracterización y propiedades básicas se desarrollan a continuación.

3.4.1. Medida interna generalizada.

Sea $(X,P(X),g)$ un espacio de medida monótona y consideremos $(I,B(I),\lambda)$ con λ una medida de probabilidad continua. Sea F la restricción a $[0,1]$ de la función de distribución de λ y θ^λ: $\underset{\sim}{P}(X)\longrightarrow\underset{\sim}{P}(X)$ el endomorfismo (definido en el capítulo 2):

$$\forall \underset{\sim}{C}\in\underset{\sim}{P}(X),\quad \theta^\lambda(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{C}' \text{ si y sólo si } \mu_{\underset{\sim}{C}'}(x) = F(\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)), \forall x\in X.$$

Es inmediato que:

(I) $C_\alpha = C'_{F(\alpha)} \quad \forall\alpha\in[0,1]$

(II) Sea $M\subset P(X)$ una clase monótona. Si $\underset{\sim}{C}$ es M-medible, entonces $\theta^\lambda(\underset{\sim}{C})$ tambien es M-medible.

(III) $\{C_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]} = \{C'_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ si bien no tiene por qué darse la igualdad para cada $\alpha\in[0,1]$.

<u>Definición 3.11</u>.- Sean $(X,P(X),g)$ e $(I,B(I),\lambda)$, con λ continua de probabilidad. La valoración m^λ : $\underset{\sim}{P}(X)\longrightarrow[0,1]$ dada por:

$$\forall \underset{\sim}{C}\in\underset{\sim}{P}(X),\quad m^\lambda(\underset{\sim}{C}) = \underline{m}^\lambda_g(B^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}_\emptyset),$$

será denominada <u>medida difusa interna generalizada</u> (asociada a λ).

Proposición 3.18. "Para todo s.d. $\underset{\sim}{C}$ se verifica $m^{\lambda}(\underset{\sim}{C}) = m(\theta^{\lambda}(\underset{\sim}{C}))$".

Demostración:

Sea $\underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ y $\underset{\sim}{C}' = \theta^{\lambda}(\underset{\sim}{C})$. Por definición $m^{\lambda}(\underset{\sim}{C}) =$

$$= \underline{m}_g^{\lambda}(B_{\emptyset}^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}) = \sup\{g(E) \wedge \lambda[0, \inf_{x \varepsilon E} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) : E \varepsilon P(X)\} =$$

$$= \sup\{g(E) \wedge F(\inf_{x \varepsilon E} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) : E \varepsilon P(X)\} =$$

$$= \sup_{\alpha \varepsilon [0,1]} \left[g(C_{\alpha}) \wedge F(\alpha) \right],$$ de acuerdo con la proposición 3.9.

Ahora bien, por I), tenemos:

$$\sup_{\alpha \varepsilon [0,1]} \left[g(C_{\alpha}) \wedge F(\alpha) \right] = \sup_{\alpha \varepsilon [0,1]} \left[g(C'_{F(\alpha)}) \wedge F(\alpha) \right] =$$

$$= \sup_{F(\alpha) \varepsilon [0,1]} \left[g(C'_{F(\alpha)}) \wedge F(\alpha) \right] = \sup_{\alpha \varepsilon [0,1]} \left[g(C'_{\alpha}) \wedge \alpha \right] = m(\underset{\sim}{C}')$$

en virtud de II).
Así pues, $m^{\lambda}(\underset{\sim}{C}) = m(\underset{\sim}{C}')$.

Por tanto, la medida m^{λ} de un s.d. equivale a la medida interna m de su "transformado" o "deformado" mediante θ^{λ}.

Corolario.- "Si λ es una medida de probabilidad continua, entonces m^{λ} es una medida difusa"

Demostración:

Si es λ continua, F es continua y estrictamente creciente (en consecuencia biyectiva) con $F(0)=0$ y $F(1)=1$.

En estas condiciones:

a) $m^{\lambda}(X) = m(\theta(X)) = m(X) = 1$ por ser $F(1) = 1$

b) $m^{\lambda}(\emptyset) = m(\theta(\emptyset)) = m(\emptyset) = 0$ por ser $F(0) = 0$

c) Si $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, entonces $\theta(\underset{\sim}{A}) \subset \theta(\underset{\sim}{B})$ y $m^{\lambda}(\underset{\sim}{A}) = m(\theta(\underset{\sim}{A})) \leq m(\theta(\underset{\sim}{B})) =$ $= m^{\lambda}(\underset{\sim}{B})$.

d) Si es $\{\underset{\sim}{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de s.d., entonces $\{\theta(\underset{\sim}{C}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también monótona, y la continuidad de F nos asegura que $\lim_n \theta(\underset{\sim}{C}_n) = \theta(\lim_n \underset{\sim}{C}_n)$; en consecuencia, de la continuidad de m para el límite de sucesiones monótonas se deduce idéntica propiedad para m^{λ}.

Nótese que, en general, no se cumple $m^{\lambda}(\underset{\sim}{C})=F(\beta)$ si $m(\underset{\sim}{C})= \beta$, dado que la deformación de la f. de p. introducida por F puede provocar que los rectángulos maximales (en medida) correspondientes a $\underset{\sim}{C}$ y $\theta(\underset{\sim}{C})$ no sean homólogos.

Por otra parte, si se considera un espacio de medida monótona (X,M,g) con $M \neq \mathcal{P}(X)$, estos resultados siguen siendo válidos, si bien m^{λ} ha de estar definida sobre una clase monótona de s.d. M-medibles.

Los resultados de este apartado dan lugar al siguiente teorema, paralelo al teorema 2.2. del capítulo anterior.

<u>Teorema 3.8</u>.- "Sea q una medida monótona sobre $(I,B(I))$ (ó sobre $(I,P_a(I))$), y (X,M,g) un espacio de medida monótona. Si q es funcionalmente contínua, entonces g se extiende de manera única a una medida difusa m^λ sobre $(X,\underset{\sim}{M})$, (donde $\underset{\sim}{M}$ es una cualquiera clase monótona de s.d. M-medibles), a partir de la probabilidad λ asociada a q. Las m^λ incluyen como caso particular a la medida interna m (para $q=1$)".

3.4.2. <u>Valoraciones externas generalizadas</u>

Sea g una medida monótona sobre $(X, P(X))$ y q una medida monótona funcionalmente continua sobre $(I,B(I))$ (ó sobre $(I, \mathbb{P}_a(I))$), con F estrictamente creciente.

Para cada $A\in P(X)$, se puede definir una valoración t_A^λ de $\underset{\sim}{P}(X)$ en $[0,1]$ de la forma: $\forall \underset{\sim}{C}\in \underset{\sim}{P}(X)$, $t_A^\lambda(\underset{\sim}{C}) = \bar{m}_g^\lambda\,(B_A^\mu \underset{\sim}{C})$, siendo λ la probabilidad asociada a q.

<u>Proposición 3.19</u>.- "Para todo s.d. $\underset{\sim}{C}$ y todo $A \varepsilon P(X)$, se cumple:

$$t_A^{\lambda}(\underset{\sim}{C}) = t_A(\theta^{\lambda}(\underset{\sim}{C}))".$$

Demostración:

Sea $\underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{P}(X)$ y $\underset{\sim}{C}' = \theta^{\lambda}(\underset{\sim}{C})$. Por la proposición 3.17.:

$$t_A^{\lambda}(\underset{\sim}{C}) = \overline{m}_g^{\lambda}(B_A^{\mu_{\underset{\sim}{C}}}) = g\left[(B_A^{\mu}\underset{\sim}{C})_X\right] \wedge \lambda\left[0, \sup_{x \varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)\right) =$$

$$= g(A \cup \mathrm{Sop}(\underset{\sim}{C})) \wedge F(\sup_{x \varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)).$$

Dado que:

a) $\mathrm{Sop}(\underset{\sim}{C}) = \mathrm{Sop}(\underset{\sim}{C}')$ por ser $F(a)=0$ si y sólo si $a=0$.

b) $F(\sup_{x \varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) = \sup_{x \varepsilon X} F(\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)) = \sup_{x \varepsilon X} \mu_{\underset{\sim}{C}'}(x)$ por la continuidad y monotonía de F, se verifica:

$$t_A^{\lambda}(\underset{\sim}{C}) = g(A \cup \mathrm{Sop}(\underset{\sim}{C}') \wedge (\sup_{x \varepsilon X} \mu_{C'}(x)) = t_A^{\lambda}(C'),$$

con lo que la proposición queda probada.

#

Como ocurre para la medida interna, esta proposición garantiza que t_A^{λ} tiene las mismas propiedades que t_A $(\forall A \subset X)$. Así, t_A^{λ} es acotada, monótona y continua para sucesiones monótonas crecientes. Cuando X es finito, t_X^{λ} también es continua para sucesiones monótonas decrecientes, de modo que es una medida difusa.

La igualdad $Sop(\underset{\sim}{C}) = Sop(\theta^{\lambda}(\underset{\sim}{C}))$ garantiza que, considerada una clase monótona cualquiera M en lugar de P(X), la medibilidad para t_A implica la medibilidad para t_A^{λ} de cualquier s.d., ya que, si $\underset{\sim}{C} \varepsilon \underset{\sim}{M}_0$, será $\underset{\sim}{C}' \varepsilon \underset{\sim}{M}_0$.

3.4.3. Comentarios finales.

A la vista de los resultados del capítulo 2, cabe pensar en la posibilidad de generalizar aún más los conceptos de medida interna y valoraciones externas considerando distintas deformaciones del intervalo unidad para cada elemento del referencial.

Sin embargo, este camino no parece ser tan fructífero como en el caso de las medidas aditivas por dos razones fundamentales:

1) La introducción de medidas monótonas diferentes para cada x da lugar a valoraciones que no pueden caracterizarse a partir de las ya estudiadas, puesto que se modifica de forma diferente la familia de los α-cortes de cada s.d.. Asimismo se cambia de modo distinto el conjunto o sucesión de conjuntos para los que se obtiene el superior de la función de pertenencia.

2) La consideración de tales familias x-dependientes de me-

didas monótonas no cubre, en cualquier caso, el amplio campo de las medidas difusas definibles directamente a partir de medidas monótonas sobre estructuras del producto cartesiano.

No obstante, estos temas serán objeto de investigaciones posteriores.

BIBLIOGRAFIA

1. ALSINA, C.; TRILLAS, E. y VALVERDE, L. (1983)
On Some Logical Connectives for Fuzzy Sets Theory.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 93, pp. 15-26.

2. BANON, G. (1981)
Distinction between Several Subsets of Fuzzy Measures.
Fuzzy Sets and Systems, 5, pp. 291-305.

3. BATLE, N, y TRILLAS, E. (1979)
Entropy and Fuzzy Integral.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 69 pp. 469-474.

4. BAUER, H. (1972)
Probability Theory and Elements of Measure Theory. New York. Holt, Rinehart & Winston.

5. BOLAÑOS, M.J. (1977)
Consideraciones sobre las medidas de subconjuntos difusos. Memoria de Licenciatura. Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.

6. BORGHI, O. (1972)
Sobre una teoría de probabilidad funcional.
Revista de la Unión Matemática Argentina, 26

7. BUTNARIU, D. (1983)
Additive Fuzzy Measures and Integrals. I.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 93 pp. 436-452.

8. CZOGALA, E.; GOTTWALD, S. y PEDRYCZ, W. (1982)
Contribution to Application of Energy Measure of Fuzzy Sets.
Fuzzy Sets and Systems, 8, pp. 205-214.

9. DELGADO, M. y BOLAÑOS, M.J. (1977)
Algunas propiedades de la probabilidad funcional. Actas de las IV Jornadas Luso-Española de Matemáticas. Jaca.

10. DE LUCA, A. y TERMINI, S. (1979)
Entropy and Energy Measures of a Fuzzy Set.
En: Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Eds. M.M. Gupta, R.K. Ragade y R.R. Yager. North-Holland P.C.

11. DUBOIS, D. y PRADE, H. (1979)
Outline of Fuzzy Set Theory: An Introduction.
En: Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Eds. M.M. Gupta, R.K. Ragade y R.R. Yager. North-Holland P.C.

12. DUBOIS, D. y PRADE, H. (1980)
Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press. New York.

13. DUBREIL, P. y DUBREIL-JACOTIN, M.L. (1965)
Lecciones de álgebra moderna. 1ª edición española. Reverté. Barcelona.

14. EMTUZ, H. (1981)
Nonprababilistic Entropies and Indetermination Measures in the Setting of Fuzzy Sets Theory.
Fuzzy Sets and System, 5, pp, 307-317.

15. GENTILHOMME, Y. (1968)
Les ensembles flous en linguistique.
Cahiers de Linguistique Théorique et Appliqués, 5,
pp. 47-63.

16. GOGUEN, J. (1967)
L-Fuzzy Sets.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18,
pp. 145-174.

17. GRATTAN-GUINESS, I. (1975)
Fuzzy Membership Mepped onto Interval and Many-valued Quantities.
Z. Math. Logik Grundlag. Math., 22, pp. 149-160.

18. HALMOS, P.R. (1974)
Measure Theory. Graduate Texts in Mayhematics, n° 18,
2ª edición. Springer-Verlag. New-York.

19. HIROTA, K. (1981)
Concepts of Probabilistic Sets.
Fuzzy Sets and Systems, 5, pp. 31-46.

20. HOHLE, U. (1983)
Fuzzy Measures as Extensions of Stochastic Measures.
Journal of Mathematical Analysis and Application, 92,
pp. 372-380.

21. KANDEL, A. (1979)
On Fuzzy Statistics.
En: Advances in Fuzzy Theory and Applications. Eds. M.M.
Gupta, R.K. Ragade y R.R. Yager. North-Holland P.C.

22. KAUFMANN, A. (1982)

Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos: Elementos teóricos de base. 1ª edición española de la francesa de 1977 (1ª edición en 1973). C.E.C.S.A. México.

23. KHALILI, S. (1979)

Fuzzy Measures and Mappings.

Journal of Mathematical Analysis and Applications, 68, pp. 92-99.

24. KLEMENT, E.P. (1980a)

Characterization of Finite Fuzzy Measures Using Markoff--kernels.

Journal of Mathematical Analysis and Applications, 75, pp. 330-339.

25. KLEMENT, E.P. (1980b)

Fuzzy σ-álgebras and Fuzzy Measurable Functions.

Fuzzy Sets and Systems, 4, pp. 83-93.

26. KLEMENT, E.P.; SHCYHLA, W. y LOWEN, R. (1981)

Fuzzy Probability Measures.

Fuzzy Sets and Systems, 5, pp. 21-30.

27. KLEMENT, E.P. (1982)

A Theory of Fuzzy Measures: A Survey.

En: Fuzzy Information and Decision Processes. Eds. M.M. Gupta y E. Sánchez. North-Holland P.C.

28. KLEMENT, E.P. y SCHWYHLA, W. (1982)

Correspondence between Fuzzy Measures and Classical Measures.

Fuzzy Sets and Systems, 7, pp. 57-70.

29. KNOPFMACHER, J. (1975)
On Measures of Fuzzynes.
Journal of Mathematical Analysis and Applications; 49, pp. 529-534.

30. KRUSE, R. (1982)
A Note on λ-additive Fuzzy Measures (short communication).
Fuzzy Sets and Systems, 8, pp. 219-222.

31. NAHMIAS, S. (1978)
Fuzzy Variables.
Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 97-110

32. NEGOITA, C.V. y RALESCU, D.A. (1975)
Application of Fuzzy Sets to System Analysis. Birkaeuser. Basel.

33. OVCHINNIKOV, S.V. (1980)
Involutions in Fuzzy Sets Theory
Stochastica, IV, pp. 227-231.

34. OVCHINNIKOV, S.V. (1983)
General negations in Fuzzy Set Theory.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 92, pp. 234-239.

35. PURI, M.L. y RALESCU, D. (1982)
A Possibility Measure is not a Fuzzy Measure. (short communication).
Fuzzy Sets and Systems,7, pp. 311-313.

36. RALESCU, D. y ADAMS, G. (1980)
The Fuzzy Integral
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 75, pp. 562-570.

37. RALESCU, D. (1982)
Toward a General Theory of Fuzzy Variablles.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 86, pp. 176-193.

38. SANCHEZ, E. (1979)
Medical Diagnosis and Composite Fuzzy Relations
En: Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Eds. M.M. Gupta, R.K. Ragade y R.R. Yager. North-Holland P.C.

39. SEIF, A. y AGUILAR-MARTIN, J. (1980)
Multi-group Classification Using Fuzzy Correlation
Fuzzy Sets and Systems, 3, pp. 109-122.

40. SMETS, Ph (1981)
Medical Diagnosis: Fuzzy Sets and Degrees of Belief.
Fuzzy Sets and Systems, 5, pp. 259-266.

41. SMETS, Ph. (1982)
Probability of a Fuzzy Event: An Axiomatic Approach.
Fuzzy Sets and Systems, 7, 153-164

42. SUAREZ, F. (1983)
Familias de integrales difusas y medidas de entropía relacionadas.
Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo.

43. SUGENO, M. (1974)

<u>Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications</u>. Tesis Doctoral.

Tokyo Institute of Technology.

44. TAYLOR, S.J. (1966)

<u>Introduction to Measure and Integration</u>. Cambridge University Press.

45. TRILLAS, E. y RIERA, T. (1978)

Entropies in Finite Fuzzy Sets

<u>Information Sciences</u>, <u>15</u>, pp. 159-168.

46. TRILLAS, E. (1979)

Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos.

<u>Stochastica</u>, <u>III</u>, pp. 47-60.

47. TRILLAS, E. (1980)

<u>Conjuntos borrosos</u>. Vicens-Vives. Barcelona

48. TRILLAS, E.; ALSINA, C. y VALVERDE, L. (1982)

Do We Need Max, Min and 1-j in Fuzzy Set Theory?.

En: <u>Fuzzy Set and Possibility Theory</u>. Ed. R.R. Yager. Pergamon.

49. VILA, M.A. y DELGADO, M. (1983)

On Medical Diagnosis Using Possibility Measures.

<u>Fuzzy Sets and Systems</u>, <u>10</u>, pp. 211-222.

50. WANG, P.Z. (1982)

Fuzzy Contactability an Fuzzy Variables

<u>Fuzzy Sets and Systems</u>, <u>8</u>, pp. 81-92

51. WANG, Z.X. (1982)
The Structure of Fuzzy Lebesgue Measure
En: Fuzzy Information and Decision Processes. Eds. M.M. Gupta y E. Sánchez. North-Holland, P.C.

52. ZADEH, L.A. (1965)
Fuzzy Sets.
Information and Control, 8, pp. 338-353.

53. ZADEH, L.A. (1968)
Probability Measures of Fuzzy Events.
Journal of Mathematical Analysis and Applications, 23, pp. 421-427.

54. ZADEH, L.A. (1971a)
Quantitative Fuzzy Semantics.
Information Sciences, 3, pp. 159-176.

55. ZADEH, L.A. (1971b)
Similarity Relations and Fuzzy Orderings.
Information Sciences, 3, pp 177-200

56. ZADEH, L.A. (1975)
The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning.
Information Sciences; parte 1: 8, pp. 199-243; parte 2: 8, pp. 301-357; parte 3: 9, pp 43-80.

57. ZADEH, L.A. (1978)
Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility.
Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 3-28.