

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Ciencias de la Computación e
Inteligencia Artificial



Programa Oficial de Doctorado en
Tecnologías de la Información y la Comunicación

Tesis Doctoral

Modelos de Decisión Multi-Criterio en Entornos con Incertidumbre: Estudio Comparativo y Aplicación

Realizada por:
Blanca Alejandra Ceballos Martín

Dirigida por:
María Teresa Lamata Jiménez
David Alejandro Pelta Mochcovsky

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autora: Blanca Alejandra Ceballos Martín
ISBN: 978-84-9163-094-4
URI: <http://hdl.handle.net/10481/44846>

La doctoranda Dña. Blanca Alejandra Ceballos Martín y los directores Dña. María Teresa Lamata Jiménez y D. David Alejandro Pelta Mochcovsky, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores al ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, Diciembre de 2016

Blanca Alejandra Ceballos Martín

María Teresa Lamata Jiménez

David Alejandro Pelta Mochcovsky

-Gracias a la vida, que me ha dado tanto-

Agradecimientos

Quiero agradecer esta tesis a mi familia, o lo que es para mi la familia. Según la Real Academia de la Lengua Española, el significado de la familia es un *Conjunto de ascendientes, descendientes, colaterales y afines de un linaje*, pero en mi opinión, según vamos creciendo y madurando a lo largo de nuestra vida, esta palabra va cambiando de significado.

Por ejemplo, cuando somos pequeños, la familia se cierra a nuestra madre, Chelo, nuestro padre, Chemi, y hermanos, en mi caso, a mi hermana, Chelito (y ahora JR también). Me refiero a la infancia, la cual, gracias a ellos, recuerdo con mucho cariño.

Hay detalles de esa infancia que me marcaron para toda la vida. Uno de ellos es “El cuarto del ordenador”, que entre otras cosas de las que albergaba, había un Pentium 8086 con aquellos disquetes grandes y monitor de tubo rayos catódicos. Mi padre me enseñó a usarlo, y ponía juegos que no tienen nada que envidiarle a los de hoy en día, como el de los “marcianitos”.

Conforme avanza la infancia, también aumentan los miembros que componen la familia, como la abuela, los titos, primos, Lola, Coqui, José, Bernar, Isa, Agu, con los que he compartido muchas navidades y veranos.

Llegando a la adolescencia, este concepto se amplía a los amigos, como los del instituto o los de la carrera, Mariceli, Desi, Cristi, Ines y Ely. Con ellas he vivido momentos inolvidables.

Según pasamos a la madurez, la familia se puede ampliar con descendientes, como con los sobrinos, Alvarito y José Ramón, que por supuesto, te cambian la vida. Para ellos no tengo palabras, sólo decirles que tienen a su *tita* con plena disposición.

Otra forma de ampliar la familia es lateralmente, en la que encontramos a esa persona que nos acompaña en este viaje de la vida, nos apoya en los momentos difíciles, nos ayuda a mejorar, y sobre todo, nos quiere con nuestras virtudes y defectos. Jorge, gracias por estar a mi lado.

Por estas razones, según mi experiencia puedo definir el concepto familia como *un buen ambiente en el que te hacen estar a gusto y sentirte querido*. A toda mi familia, gracias por haber estado apoyándome durante todo este proceso.

Un contexto en el que es difícil tener una familia es en el laboral, dada la competencia que puede haber por mantener un puesto de trabajo o lograr

un ascenso. Por esta complejidad es muy importante tener una familia en este terreno, y yo tengo la suerte de poder decir que lo he conseguido.

Ejemplo de ello es la familia MODO, la cual voy a conservar con mucho cariño. A ella tengo mucho que agradecerle. Lo primero, gracias por depositar su confianza en mí y darme la oportunidad de poder formar parte de vuestro equipo. Segundo, su paciencia, en especial a mis tutores, Maite y David, que no tengo duda alguna de que sin ellos, esta tesis no habría sido posible. Y por supuesto, gracias al resto de miembros que siempre me han ofrecido su ayuda incondicional, Curro, Virgilio, Carlos, Marina, Marcelino, Antonio, Pablo, Jenny, Yamilis, Elio, Isis.

No sólo me han enseñado a mejorar mis destrezas laborales, sino que me han enseñado cosas más complejas que no vienen en los libros, como el compañerismo, que en este ámbito es tan difícil de encontrar. De esta familia me llevo mucho, pero sobre todo me llevo gratos momentos, tanto dentro de la Universidad, como fuera de ella. Creedme, os llevaré siempre conmigo.

Esta tesis ha sido financiada por el Junta de Andalucía con el proyecto P11-TIC-8001, por el Ministerio Español de Ciencia e Innovación a través del proyecto TIN2014-55024-P, ambos fondos FEDER de la Unión Europea, y por la beca FPI BES-2012-059316, asociado al proyecto TIN2011-27696-C02-01 de esta última institución.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Contexto de la investigación	1
1.2. Objetivo de la tesis	3
1.3. Estructura de la tesis	4
2. Preliminares y conceptos básicos	7
2.1. Preliminares y conceptos básicos	7
2.1.1. Toma de decisión multi-criterio	7
2.1.2. Métodos de Decisión Multi-Criterio	12
2.2. Problemáticas de los Métodos de Decisión Multi-Criterio . . .	19
2.2.1. Paradoja de los Métodos de Decisión Multi-Criterio .	20
2.2.2. Fenómeno del Orden Inverso en los Métodos de Decisión Multi-Criterio	22
2.3. Herramientas empleadas en la tesis	23
2.3.1. Soft Computing	24
2.3.2. Métodos de Decisión Multi-Criterio abordados en la tesis	28
3. Estudio comparativo de los Métodos de Decisión Multi-Criterio	43
3.1. Introducción	43
3.2. Estudio comparativo en escenarios sin imprecisión/vaguedad .	45
3.2.1. Descripción de los resultados	47
3.3. Estudio comparativo en escenarios con imprecisión/vaguedad	55
3.3.1. Descripción de los resultados	57
3.4. Similitudes y diferencias de los escenarios con y sin imprecisión/vaguedad	64
4. Análisis del Orden Inverso en los Métodos de Decisión Multi-Criterio	67
4.1. Introducción	67
4.2. Análisis empírico del Orden Inverso en escenarios sin imprecisión/vaguedad	69

4.2.1. Descripción de los resultados	71
4.3. Análisis empírico del Orden Inverso en escenarios con imprecisión/vaguedad	83
4.3.1. Descripción de los resultados	84
4.4. Similitudes y diferencias de los escenarios sin y con imprecisión/vaguedad	91
5. Análisis del Orden Inverso en VIKOR	97
5.1. Introducción	97
5.2. Análisis del Orden Inverso en VIKOR	98
5.2.1. Problemas no resueltos	100
5.2.2. Casos inestables	100
5.3. Causas del Orden Inverso en VIKOR	103
5.4. Evitando el Orden Inverso para VIKOR	106
5.4.1. Ejemplo ilustrativo	111
6. Paquete MCDM, FuzzyMCDM en R y aplicaciones prácticas	117
6.1. Introducción	117
6.2. Paquete MCDM	118
6.2.1. Funciones de MCDM	118
6.3. Paquete FuzzyMCDM	125
6.3.1. Funciones de FuzzyMCDM	125
6.4. Ejemplos de aplicación	131
6.4.1. Entornos sin imprecisión/vaguedad	131
6.4.2. Entornos con imprecisión/vaguedad	137
7. Conclusiones y Trabajo Futuro	147
7.1. Conclusiones	147
7.2. Publicaciones derivadas de la tesis	150
7.3. Trabajos Futuros	151
A. Métodos de Decisión Multi-Criterio Difusos	153
B. Estudio Comparativo	161
C. Orden Inverso	171
Bibliografía	191

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo describiremos el contexto en el que se realiza esta tesis, los objetivos que se han planteado y la estructura de la misma. En la contextualización se define el ámbito en el que se hace necesario el trabajo aquí realizado, justificando su relevancia y pertinencia. Para poder alcanzar el objetivo principal que nos hemos propuesto, tendremos en cuenta cinco sub-objetivos que nos llevarán a alcanzar nuestra meta. Por último, damos una perspectiva global de la estructura de esta tesis con el fin de facilitar su lectura y comprensión.

1.1. Contexto de la investigación

Diariamente se plantean situaciones en las que las directivas de organizaciones o proyectos tienen que tomar decisiones. Las personas responsables de afrontar el proceso de tomar decisiones, están sometidas a grandes tensiones, tanto profesionales como emocionales. Estas decisiones se caracterizan por observar intereses contrapuestos, tener elementos de vaguedad o imprecisión, involucrar distintas personas en la decisión o bien poseer elementos difícilmente valorables. Para Dieter [37], en la mayoría de los casos, tomar una decisión puede generar a los profesionales que asumen esta responsabilidad, tensión emocional, o incluso tensión psicológica, ya que se pueden generar tanto pérdidas materiales como pérdida de su prestigio y/o autoestima.

Además de estos motivos, también hay que considerar la dificultad que conlleva el proceso de toma de decisión, que puede deberse a diferentes causas. Por ejemplo, una podría ser que la cantidad de datos a evaluar sea demasiado elevada, pudiendo llegar a ser miles de datos. Otras causas podrían ser que la comparación entre las alternativas sea compleja, que la diferencia entre las alternativas apenas sea notable, que se considere más de un criterio para su evaluación, etc. Por ello, en estas situaciones se hace imprescindible el uso de los Métodos de Decisión Multi-Criterio (MDMC) [53, 132].

Un individuo o colectivo se encuentra ante un problema de decisión multicriterio cuando necesita seleccionar una alternativa de entre un conjunto bien definido de ellas. Para poder hacer esta elección, las alternativas se evalúan conforme a unos determinados atributos o criterios que pueden estar en conflicto; además un criterio puede ser más relevante que otro, y por ello, se les asocia un peso o nivel de importancia para poder hacer esta distinción. En estas situaciones en las que no es trivial determinar la mejor alternativa, los MDMC ayudan a solventar el problema de forma sistemática y ordenada, facilitan la búsqueda del consenso y ayudan a racionalizar el problema.

Los MDMC parten de un conjunto de alternativas, las cuales se evalúan según los criterios establecidos, y devuelven como resultado un orden o ranking de ellas. Con este ranking es posible determinar las alternativas más prometedoras para resolver el problema en cuestión. Como ejemplos de métodos relevantes podemos mencionar el modelo jerárquico AHP [97], métodos basados en las distancias a las soluciones ideales, como TOPSIS [53] y VIKOR [80] o aquellos que tienen en cuenta preferencias, como ELECTRE [17] o PROMETHEE [20], etc.

Estos métodos han sido materia de investigación desde los años 40 [67, 116]; durante la década de los 90, en especial a finales de la misma, los métodos comenzaron a extenderse no sólo en el ámbito académico, sino también en el ámbito público y empresarial, y en los últimos años han tenido un importante desarrollo [113, 129].

En la actualidad, estas técnicas se emplean en multitud de escenarios: evaluación de calidad [63], en el área de las energías renovables [100], medicina [133] o ingeniería [52], en la localización de empresas [87], predicciones financieras [62], etc.

En este contexto podemos identificar dos situaciones o problemáticas de interés. En primer lugar, dado un problema de decisión, no es trivial seleccionar a priori el método más apropiado para resolverlo. Además, cada método podría generar un ranking diferente para un mismo problema. Por tanto, parece razonable aplicar diferentes métodos, obtener los rankings y analizar los resultados obtenidos para estudiar las similitudes o discrepancias que pueda haber entre ellos, llegando así a una situación que permita la elección de la mejor alternativa [29, 108, 128], es decir, si una alternativa aparece en el primer lugar en la mayoría de los rankings, quedaría claro que la alternativa pertenecerá al conjunto de las mejores.

En segundo lugar, existe un fenómeno que puede surgir en estos métodos, conocido como el Orden Inverso [16, 40, 98]. Este fenómeno consiste en la alteración del ranking original cuando se ha realizado alguna modificación en el conjunto de alternativas, por ejemplo, considerar una nueva o eliminar una que deje de ser factible. Este fenómeno es consecuencia de los cálculos que realizan los métodos y/o la poca distinción que haya entre las alternativas. En ocasiones este fenómeno es inevitable, pero puede ser una situación no deseada porque restaría fiabilidad al resultado [96]. Por ello, se hace necesario

realizar un análisis de este fenómeno que determine su comportamiento, sabiendo así cómo actuar ante él.

Otro aspecto relevante a considerar es la naturaleza de la información disponible de las alternativas. Aunque existen problemas de decisión donde los datos suelen estar definidos de forma precisa, se puede dar el caso de que esto no suceda. Es decir, que se trabaje en escenarios donde los datos sean imprecisos, vagos o se identifiquen con términos lingüísticos. Por ejemplo, cuando se consideran cuestiones como la demanda a futuro, el potencial de venta, o valoraciones subjetivas respecto a alguna cualidad de la alternativa. Para modelar esta situación, se pueden utilizar técnicas de Soft Computing [126], o más concretamente, como menciona Verdegay en [114], “una forma de abordar este tipo de situaciones es teniendo en mente los Conjuntos Difusos” [54, 59, 71, 125].

La toma de decisiones, los MDMC y la construcción de rankings son temas pertinentes y actuales, cuyo estudio es claramente necesario.

Por ejemplo, la toma de decisiones y los MDMC están recogidos en distintos proyectos de la Unión Europea, como en el proyecto FP7-MEDIATION (Seventh Framework Program – Methodology for Effective Decision-making on Impacts and AdaptATION), que hace una revisión detallada de los MDMC y los analiza en diferentes casos de estudio relativos al cambio climático [4], o en el contexto del Programa Horizonte 2020 [5]: en el ámbito de la Energía Segura, Limpia y Eficiente, se encuentra la línea de actuación *Solidez en la Toma de Decisiones y Compromiso Público*; o en el ámbito de la Salud, Cambio Demográfico y Bienestar, dentro del área de Prestaciones de Atención Sanitaria y Asistencia Integrada, donde se encuentra *la optimización de la eficiencia y la eficacia de la prestación de asistencia sanitaria y reducción de las desigualdades a través de la toma de decisiones basada en los datos y la divulgación de las mejores prácticas, de tecnologías y planteamientos innovadores*.

Por otro lado, y sin considerar el uso que se haga de ellos, es fácil observar que los “rankings” abundan en el contexto socio-tecnológico actual. Como ejemplo, podemos citar el “Ranking de Shangai”, que es mundialmente conocido por establecer el ranking para las Universidades de todo el mundo con respecto a la producción y productividad científica [88]; o los rankings de publicaciones (como el JCR de Thompson), etc.

1.2. Objetivo de la tesis

Teniendo en cuenta la relevancia de los problemas de decisión multicriterio, las problemáticas asociadas a los métodos MDMC, y la necesidad de considerar la naturaleza de la información disponible para la toma de decisiones, se plantea como objetivo de esta tesis:

Analizar y comparar un conjunto de MDMC, con énfasis en la compa-

ración de los rankings generados y en el análisis del fenómeno del Orden Inverso. Ambos aspectos se estudiarán considerando tanto entornos bien definidos, así como entornos que presenten vaguedad o imprecisión.

Para poder lograr este objetivo general, hemos planteado los siguientes objetivos específicos:

1. Recopilar y analizar la información disponible sobre los MDMC, tanto en entornos bien definidos como en otros con imprecisión.
2. Analizar las similitudes y las diferencias que pueda haber entre los rankings generados por los diferentes métodos.
3. Analizar la ocurrencia del Orden Inverso en los métodos estudiados y estudiar posibles vías de solución.
4. Publicar los métodos desarrollados como software libre en forma de paquetes de R, para su uso por la comunidad.
5. Mostrar ejemplos de aplicación del software desarrollado.

1.3. Estructura de la tesis

La estructura de la tesis se muestra en la Figura 1.1.

Además del capítulo actual donde se ha descrito el contexto y objetivos, la tesis consta de otros seis capítulos.

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos que son necesarios para abordar esta tesis. Primero describimos todo lo relativo a la toma de decisión multi-criterio, en la que los MDMC se hacen muy útiles, haciendo este proceso más sencillo, rápido y objetivo. De esta forma, se hace una descripción de los precedentes en estos métodos, además de una descripción general. A pesar de sus numerosas ventajas, describiremos las dos problemáticas en las que nos vamos a centrar: 1) saber qué método es el más adecuado para un problema en particular, y 2) estudiar el fenómeno del Orden Inverso y ver si es factible evitarlo. Ambas se definen, explicando sus causas y cómo se están tratando de abordar. Por último, se describen los MDMC que hemos seleccionado para realizar este estudio, y las técnicas de Conjuntos Difusos que aplicamos, con las que se modelan los escenarios con imprecisión.

Partiendo de esta base teórica, en el Capítulo 3 se hace un estudio comparativo de los MDMC seleccionados con el fin de abordar la cuestión de qué método es más apropiado para ser aplicado en un determinado problema a resolver. Con esta comparativa pretendemos avanzar en esta línea de investigación. Para ello analizamos las similitudes y diferencias entre ellos, observando si el número de alternativas, si el número de criterios o si el que haya o no imprecisión en los datos influye en los resultados finales. De esta

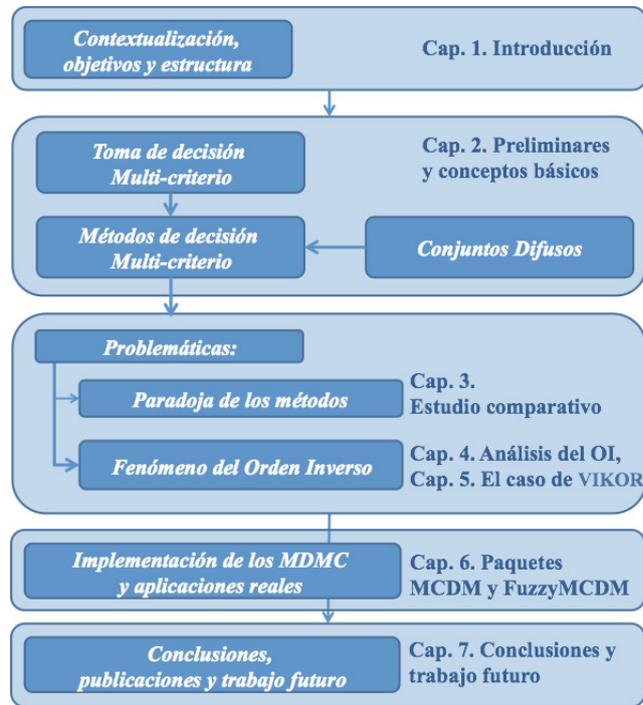


Figura 1.1: Esquema del desarrollo de la presente tesis.

forma, adelantamos información al decisor sobre el comportamiento de estos métodos, para que pueda afrontar el problema de decisión de un modo más eficiente.

Además del estudio comparativo, en el Capítulo 4 se realiza un análisis empírico del Orden Inverso en los métodos seleccionados para estudiar la otra problemática que se había planteado. Para analizar si los métodos sufren o no este fenómeno se realiza un estudio empírico en el que partiendo de una matriz, ésta se modifica añadiendo alternativas a la matriz original. Al analizar los resultados de una y otra matriz puede suceder que los ranking de las alternativas coincidentes en las dos matrices varíe o no. En caso afirmativo, se contabiliza el número de casos en los que sucede y, de estos casos, las veces que ha cambiado la primera posición, dada su relevancia en el ámbito en el que nos movemos. También se estudia si el Orden Inverso depende del número de alternativas y de criterios. Este análisis lo realizamos en entornos bien definidos así como en los que haya imprecisión.

En el Capítulo 5 se realiza un estudio en profundidad del Orden Inverso en el método VIKOR. A pesar de su relevancia en la literatura, hasta donde nosotros conocemos este estudio no se ha realizado. Además del estudio, se propone una solución para superar esta problemática, tomando como referencia la propuesta realizada para el método TOPSIS [47].

La implementación de los MDMC estudiados se presenta en el Capítu-

lo 6, donde se describe la composición de los paquetes MCDM y FuzzyMCDM desarrollados en el entorno de trabajo R. Para ambos paquetes, se muestran las funciones que los componen y su uso mediante ejemplos sencillos. Por último, se aplican a ejemplos reales tanto en entornos bien definidos como con imprecisión, con los que se contrastan los resultados obtenidos con los resultados de los experimentos realizados en los capítulos anteriores.

Finalmente en el Capítulo 7 se encuentran las conclusiones que se han derivado de este trabajo, resumiendo de forma global todos los resultados relevantes que hemos obtenido. También se incluyen las publicaciones que se han generado durante el desarrollo del trabajo de investigación. A continuación se exponen líneas de trabajo potenciales que se podrían desarrollar para dar continuidad a lo ya realizado.

La tesis concluye con tres apéndices que completan las aportaciones realizadas y un listado de la bibliografía utilizada. En el primer apéndice se describen los algoritmos de los métodos seleccionados en su variante para entornos con imprecisión. En los dos últimos se encuentran las tablas detalladas con los resultados obtenidos para las problemáticas planteadas.

Capítulo 2

Preliminares y conceptos básicos

En este Capítulo se expone el marco teórico en el que se ha desarrollado esta tesis. Comenzaremos contextualizando la toma de decisión, ámbito en el que se hacen necesarios los Métodos de Decisión Multi-Criterio (MDMC) en los cuales nos centramos nosotros.

Una vez que se hayan establecido los preliminares y los conceptos básicos, se describirán las problemáticas que presentan los distintos MDMC y que se han analizarán en esta tesis. Por un lado la paradoja de qué método es el más apropiado a la hora de solventar un problema de decisión, y por el otro, el análisis del fenómeno del Orden Inverso, común en este tipo de métodos. Ya que ambos puntos se han estudiado tanto en entornos bien definidos como en aquellos que presentan vaguedad o imprecisión, ha sido necesario emplear técnicas de Soft Computing, en concreto, los Conjuntos Difusos para el caso en el que aparezca imprecisión en los datos.

2.1. Preliminares y conceptos básicos

A la hora de abordar un problema de decisión, el decisor, ya sea una persona o un colectivo, se puede encontrar con diversos obstáculos que compliquen esta tarea, como por ejemplo el volumen de datos a tratar o que haya intereses contrapuestos. Los MDMC son modelos matemáticos que se hacen muy útiles durante el proceso de la toma de decisión, ya que hacen este proceso más fácil, rápido y dan objetividad al resultado.

2.1.1. Toma de decisión multi-criterio

En nuestra vida cotidiana nos enfrentamos constantemente a situaciones en las que debemos tomar una decisión. Esto sucede en distintos aspectos de

nuestra vida, como en el personal, el sentimental, el familiar, etc. A veces, este proceso de decisión se hace de forma inconsciente e instintiva.

A nivel personal, la toma de decisión se presenta cuando una persona emplea su razonamiento y pensamiento para seleccionar aquella alternativa que dé solución a un problema en cuestión de su vida cotidiana. Si nos trasladamos al mundo laboral, León [64] expone que la toma de decisión se caracteriza por tener intereses contrapuestos, elementos imprecisos o vagos, involucrar a distintas personas en la decisión y por poseer elementos que sean difícilmente valorables. En este escenario, a la dificultad de la toma de decisión se le añaden las consecuencias laborables, como pueda ser pérdidas económicas, temporales o causar impacto medioambiental. Dieter [37] va más allá y afirma que tomar una decisión genera tensión psicológica a las personas que afrontan esta tarea. Esta tensión surge por dos motivos principales: 1) la preocupación del decisor por las consecuencias materiales y sociales que se deriven de la alternativa que haya elegido, y 2) por el riesgo que se corre de perder prestigio y autoestima.

Entenderemos que se ha tomado la decisión correcta si, en el proceso por el cual se toma la decisión, se hizo con toda la información y recursos disponibles en ese momento. Según León [64], una buena decisión es aquella en la que se ha trazado el objetivo que se quiere conseguir, se ha reunido toda la información relevante y se han tenido en cuenta las preferencias del decisor.

En este contexto, los MDMC se presentan como una valiosa herramienta de apoyo para el decisor durante este complejo proceso. Estos métodos se basan en modelos matemáticos para poder abordar un problema de decisión de forma racional, simple, sistemática, ordenada y objetiva.

Elementos fundamentales

En este apartado se definen los elementos fundamentales que se ven envueltos en el proceso de la toma de decisión multi-criterio [107].

- **Decisor:** individuo o conjunto de individuos que tienen la responsabilidad de tomar la decisión.
- **Analista:** figura que modela la situación concreta y que eventualmente, hace las recomendaciones sobre la elección final. No expresa opiniones personales, se limita a tratar las del decisor de la forma más objetiva posible. Normalmente, la figura del analista se ve representada por un programa de ordenador. Sin embargo, la máquina no puede ofrecer más que un modelo predefinido, el ordenador es sólo una herramienta para la formalización, la memorización y la reflexión.

	w_1	w_2	...	w_n
	C_1	C_2	...	C_n
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	x_{ij}	...
A_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

Tabla 2.1: Matriz de decisión de un problema de decisión multi-criterio.

- **Ambiente:** contexto en el que transcurre el proceso de decisión. El conjunto de características que definen la situación de decisión respecto al entorno.
- **Alternativas:** es un conjunto finito compuesto por las soluciones, estrategias, acciones, etc., que se van a analizar en el proceso de resolución del problema de decisión. Este conjunto se designa como $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, donde m es el número de alternativas.
- **Criterios:** los criterios de decisión $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, donde n es el número de criterios, constituyen los elementos de referencia a través de los cuales se evalúan las alternativas. A pesar de la dificultad de establecer estos criterios, es un paso esencial en este proceso.
- **Importancia de los criterios:** describe la relevancia que tiene un criterio sobre otro para el decisor. En la mayoría de los problemas, se asocian a ponderaciones o pesos, representados como un vector $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, donde n es el número de criterios.
- **Matriz de valoración:** una vez establecidos los criterios y sus pesos correspondientes, se supone que el decisor ya está en posición de dar, para cada uno de los criterios y para cada alternativa del conjunto considerado, una valor numérico o simbólico, x_{ij} , que indica la evaluación o juicio de la alternativa A_i bajo el criterio C_j . De este modo se compone la matriz de valoración, o también conocida como matriz de decisión (Tabla 2.1). Como se puede observar en dicha tabla, cada i -ésima fila de la matriz corresponde a los valores de la alternativa A_i sobre los n criterios. Cada j -ésima columna recoge las evaluaciones del decisor de todas las alternativas para el criterio C_j .
- **Solución eficiente:** una solución o conjunto de soluciones es eficiente cuando está formado por soluciones factibles y no hay ninguna otra solución factible que la mejore. A esta solución se le denomina solución Pareto eficiente en honor al economista italiano Pareto [90].

Clasificación de los problemas de decisión

Según consideremos algunos de los conceptos definidos anteriormente, podemos establecer diferentes clasificaciones de los problemas de decisión:

- Según la situación de la decisión:
 - **Programables:** son problemas de decisión que están bien definidos, son rutinarios, tienen la información adecuada y existen diversas reglas para seleccionar las alternativas. Las decisiones se pueden tomar a través de una tabla de decisión.
 - **No programables:** son problemas que no están bien definidos, no son rutinarios, no se dispone de la información adecuada, no tienen tantas reglas para seleccionar las alternativas, el criterio de selección es de tipo personal, tiene una extensa base de datos que hace tedioso el procesamiento de la información, y conlleva altos costes.
- Según el decisor:
 - **Uni-personal:** en el proceso sólo interviene un decisor, ya sea como una entidad física o jurídica.
 - **N-personal:** en el proceso interviene más de un decisor. En este caso, aunque sea un grupo, igualmente se debe obtener una solución única que refleje globalmente los intereses del grupo. Esto es muy común en el mundo empresarial, en el que hay grupos de trabajo multidisciplinares, es decir, formados por personas de diferentes áreas de trabajo.
- Según el ambiente:
 - **Certidumbre:** también llamados determinísticos, son los ambientes en los que los individuos conocen con exactitud toda la información relativa al problema, las soluciones alternativas son obvias y los posibles resultados de cada decisión también son claros.
 - **Riesgo:** existe un factor probabilístico de ocurrencia ligado a los criterios. Las probabilidades se pueden calcular por medio de modelos matemáticos, o por probabilidades objetivas o subjetivas. La probabilidad objetiva se basa en hechos concretos, como datos de años anteriores o estudios realizados para este fin. Y en la probabilidad subjetiva se determina el resultado basándose en opiniones y juicios personales e individuales.
 - **Incertidumbre:** el decisor no conoce la información relativa al problema con certeza, es decir, se encuentra en situaciones que nunca han ocurrido y que tal vez no vuelvan a repetirse

en el futuro de esa misma forma. Tampoco se conocen las probabilidades de ocurrencia de los criterios. Al mismo tiempo, esta situación puede ser total o parcial.

- Según la naturaleza de las alternativas:
 - **Continuo:** cuando el conjunto de las alternativas es infinito no numerable. El valor que representa a la alternativa pertenece a la recta real. Este tipo de decisiones es muy común en el mundo de la ciencia y la técnica, en el que se trata de optimizar el valor de un parámetro técnico. A este tipo de problemas se les conoce como problemas de decisión multi-objetivo, en los que se busca una solución Pareto.
 - **Discreto:** el conjunto de alternativas es finito y bien definido. A este tipo de problemas se les conoce como evaluación multi-criterio. En esta tesis, nos centraremos en este tipo de problemas.

Fases de la toma de decisión multi-criterio

En la Figura 2.1, se ilustra el proceso de toma de decisión multi-criterio. Se compone de cuatro fases principales: 1) Estructuración del problema de decisión, 2) Análisis del problema de decisión, 3) Implementación de la decisión y 4) Evaluación de los resultados. Estas fases se describen a continuación.

1. **Estructuración del problema de decisión:** esta fase del proceso se compone de los siguientes pasos:
 - *Definición del problema:* paso inicial en el que se define el problema que se va a resolver.
 - *Determinación de los criterios:* se determinan las características que los decisores consideran más relevantes a través de las cuales se van a evaluar las alternativas. Pueden ser cuantitativas o cualitativas.
 - *Identificación de las alternativas:* se identifican las alternativas que el decisor dispone para resolver tal problema, de las cuales, debe elegir la más apropiada.
2. **Análisis del problema de decisión:** esta fase es en la que se centra esta tesis doctoral. En esta fase del proceso se realiza:
 - *Evaluación de las alternativas:* esta evaluación depende del método de evaluación que se aplique para ello.

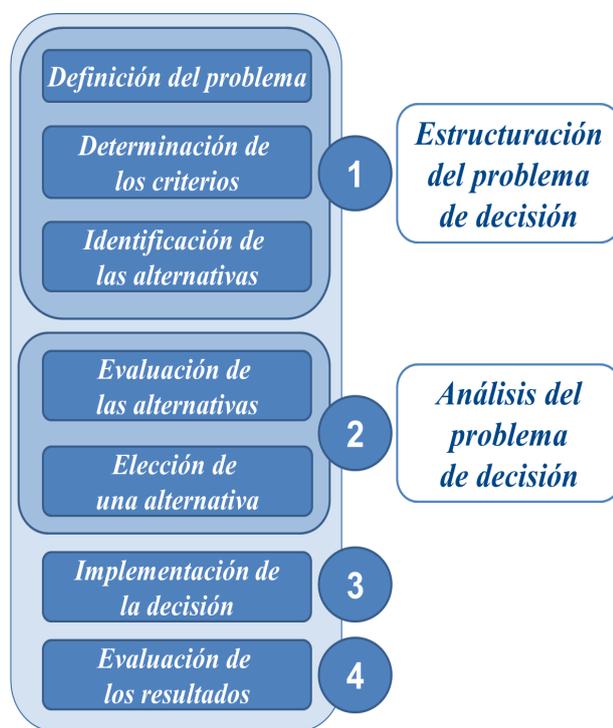


Figura 2.1: Representación de las fases de un proceso de toma de decisión multi-criterio.

- *Elección de una alternativa:* según la evaluación que se ha obtenido de las alternativas en el paso anterior, se puede establecer un orden o ranking. Según éste, se deriva la alternativa que más satisface las necesidades del problema, es decir, la que ocupa el primer lugar de dicho ranking.
3. **Implementación de la decisión:** una vez seleccionada la alternativa más favorable para nuestro problema, se puede proceder a la fase de su ejecución, en la cual se pone en práctica dicha alternativa.
 4. **Evaluación de los resultados:** una vez que se ha puesto en práctica la alternativa seleccionada, los resultados que se generan pasan a ser evaluados.

2.1.2. Métodos de Decisión Multi-Criterio

Desde el punto de vista científico, la toma de decisión multi-criterio tiene sus inicios en el campo de la economía a finales del siglo XIX y principios del XX, sobre el estudio del comportamiento de los consumidores a la hora de adquirir un producto. Los agentes económicos buscan maximizar sus

funciones de utilidad, las cuales expresan la elección del consumidor o del productor.

En el 1896, Pareto [82] mostró situaciones en las que varios agentes económicos realizaban elecciones diferentes y en conflicto, sin que se pudiera obtener una solución que cumpliera todas las funciones de utilidad y que satisficiera a todos los agentes al mismo tiempo. Esta situación se denomina *óptimos de Pareto*, y con ella surgen las primeras técnicas de decisión multicriterio, en las que se busca satisfacer, en la medida de lo posible, al mayor número de agentes económicos buscando un equilibrio entre los intereses contrapuestos.

En 1944, John von Neumann, junto con Morgenstern, publican la primera obra sobre la teoría de juegos desde el punto de vista económico, cuyo título es “Theory of games and economic behaviour” [116]. En ella plantean un modelo matemático de cooperación y conflicto entre la inteligencia racional de los decisores, el cual, todavía está vigente en la actualidad. En esencia, lo que los autores exponen es una aproximación metodológica que lleve a plantear la racionalidad del individuo, para resolver el problema de decisión en régimen de conflicto, conflicto entre los intereses personales con los de otros agentes, quienes también buscan alcanzar sus propios intereses. Posteriormente, Luce y Raiffa asientan dicho paradigma en su trabajo [67].

En 1968, Bernard Roy [93] plantea un nuevo enfoque que pretende construir una nueva ciencia que ayude al decisor a encontrar soluciones satisfactorias a su problema. Sus métodos se basan en comparar las alternativas según cada criterio para ir estableciendo la prioridad de una alternativa sobre otra. A esta metodología se le conoce como “outranking”, y los métodos más conocidos son la familia de ELECTRE y de PROMETHEE.

En los años 70, en Estados Unidos, se centran en la agregación de las preferencias del decisor para cada criterio como una solución para la toma de decisión. Esta función de utilidad se toma como punto de partida para la programación matemática multiobjetivo. Este modelo se fundamenta en la denominada Teoría de la Utilidad Multiatributo (MAUT), como Keeney y Raiffa muestran en su trabajo “Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs” [56].

En la década de los 80, la disciplina de la toma de decisión multicriterio va tomando cuerpo. Se plantean nuevos métodos, como el AHP propuesto por Saaty [97]. Este método se diferencia de MAUT en la forma de obtener los juicios del decisor y en la forma de establecer las preferencias [94]. Actualmente, este método se sigue empleando para resolver problemas reales, como en [38], donde se propone AHP como método para buscar el consenso entre los decisores, o más recientemente, como en [104], donde aplican AHP para el análisis de rehabilitación en humanos, entre otros muchos. Por ejemplo, en [112] se realiza una revisión bibliográfica de las distintas aplicaciones de este método.

Durante la década de los 90, los MDMC comienzan a tomar relevancia en el ámbito académico, y se empiezan a extender en el ámbito empresarial, tanto en el público como en el privado. En la Figura 2.2, tomada del trabajo [66], se muestra un mapa cronológico de la evolución de la toma de decisión multi-criterio.

Desde entonces, este campo de la investigación operativa no ha parado de crecer, especialmente en la última década, ampliando el campo de aplicación. Prueba de ello son los resultados que se obtienen si realizamos la búsqueda bibliográfica con las palabras clave (TITLE-ABS-KEY (“multi attribute decision making” OR “multi criteria decision making”)) en la base de datos SCOPUS [7]: 7073 items, es decir, 7073 trabajos relativos a este tema. Si ahora nos centramos en el periodo que va desde el año 2005 al 2015, el resultado es de 6052 items. De este resultado, en la Figura 2.3.a se puede apreciar un incremento notable de trabajos realizados en la última década y como la tendencia en la actualidad es creciente. Si clasificamos estos resultados por áreas de aplicación, vemos que la mayoría son ciencias de la computación e ingeniería, como se puede ver en la Figura 2.3.b, pero también se aprecia la variedad, ya que se aplica en diversas áreas, como medicina, etc. Si además filtramos esta búsqueda por la palabra “fuzzy”, obtenemos que 3996 trabajos tratan con imprecisión, es decir, un 66 % del total (Figura 2.3.c).

La tendencia actual de los MDMC se podría dividir en tres ramas. La primera es la relativa al desarrollo de los métodos, ya sea, analizando existentes y proponiendo mejoras [11, 57], desarrollando nuevos métodos [28], o creando híbridos que combinen distintos métodos [26, 42, 76, 111, 122]. El segundo punto a destacar sería la aplicación de los métodos, ya que como hemos visto, cada vez son más las áreas en las que se aplican estos métodos [70, 71], como selección de proveedores [30, 123], sistemas de transportes [73], energías renovables [9, 105], medicina [23], o evaluación de la calidad de los servicios [72], entre otros. Por último, podemos decir que en la actualidad está cambiando la finalidad de los métodos. Ya no sólo se busca obtener una mejor alternativa, sino que también se trata de proporcionar estrategias de mejora analizando el “espacio” que hay entre el resultado actual y lo que se pretende alcanzar [27, 35, 65, 66, 120].

Principales Métodos de Decisión Multi-Criterio

Como se ha visto en los apartados anteriores, un problema de decisión multi-criterio esta compuesto por un conjunto de alternativas finito, representado por $A = \{A_i | i = 1, 2, \dots, m\}$, siendo m el número de alternativas. Estas alternativas se evalúan conforme a unos criterios establecidos, representados por $C = \{C_j | j = 1, 2, \dots, n\}$, donde n es el número de criterios. Los criterios podrán tener diferentes dominios, estar en conflicto según representen coste (el cual es preferible minimizar) o beneficio (el cual es preferible

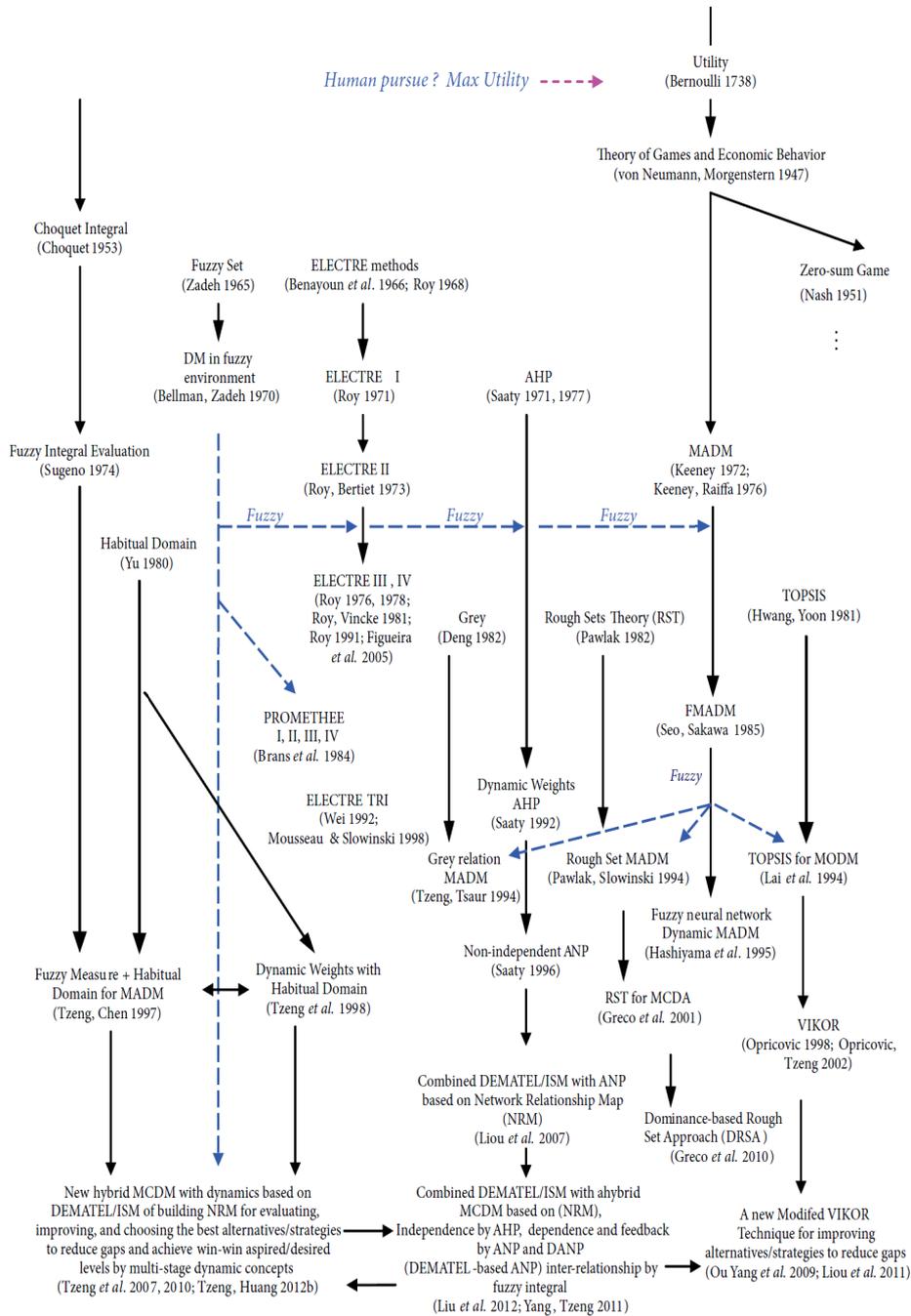
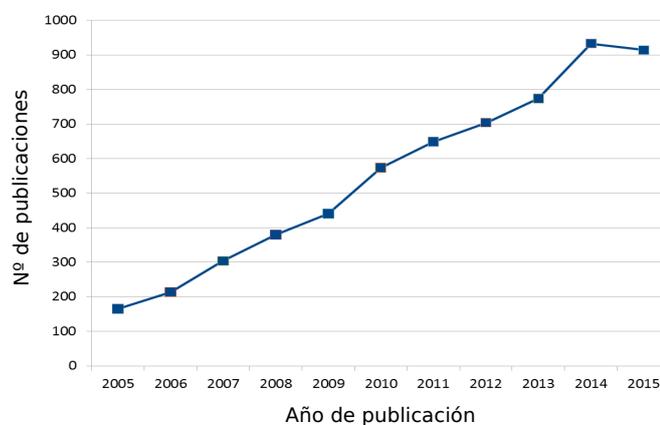
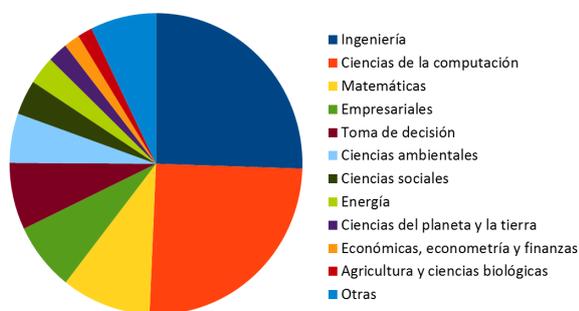


Figura 2.2: Evolución de los métodos de decisión multi-criterio [66].

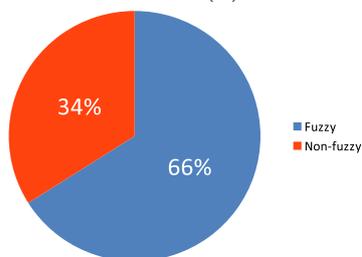
maximizar), y ser unos más relevantes que otros, asignándole a cada uno un valor o peso para hacer esta distinción, $W = \{w_j | j = 1, 2, \dots, n\}$. Los



(a)



(b)



(c)

Figura 2.3: Resultados de la búsqueda bibliográfica realizada en SCOPUS.

pesos deben de estar normalizados de tal forma que sumen uno, es decir, $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ [107]. Con toda esta información se compone la matriz de decisión ($M^{m \times n}$) como se puede ver en la Figura 2.4.

El procedimiento básico de un MDMC es tomar la matriz de decisión y el vector de pesos como entrada. Con estos datos, el método procede a la evaluación de las alternativas. Según la evaluación del método en concreto, a cada alternativa se le asigna un valor o rating, a través del cual se deriva el

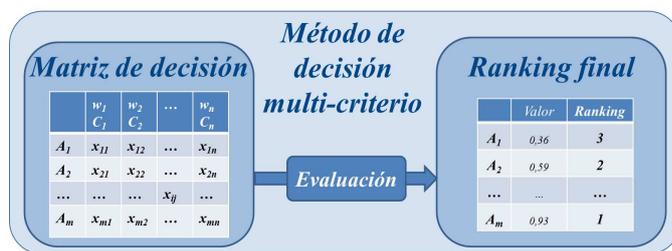


Figura 2.4: Proceso de un método de decisión multi-criterio.

orden o ranking de las alternativas, que el método devuelve como resultado final. Este proceso se describe gráficamente en la Figura 2.4.

Como principales MDMC podemos mencionar los siguientes:

1. Basados en la comparación de pares:

1.1 Modelo jerárquico:

- **AHP**: fue desarrollado por Saaty en el 1980 [97]. En AHP (“Analytic Hierarchy Process”), el problema se desarrolla a través de una estructura jerárquica. El objetivo a conseguir se encuentra en el nivel superior, los criterios y sub-criterios en los niveles intermedios, y en el último nivel de la jerarquía se encuentran las alternativas a evaluar. Los expertos y decisores dan la información que se va requiriendo durante la comparación por pares para derivar los pesos de los criterios en el nivel intermedio, y las valoraciones de las alternativas en el último nivel. La mejor alternativa será aquella que obtenga la mayor puntuación en la evaluación.

1.2 Basados en preferencias:

- **ELECTRE**: este método pertenece a la familia de métodos “*outranking*”, es decir, métodos que establecen prioridades entre las alternativas, según preferencias, para obtener su ranking. Para ello, se crean relaciones de dominancia entre las alternativas comparándolas por pares [17]. Según estas relaciones de dominancia, se calculan los índices de concordancia y discordancia. La mejor alternativa será aquella que supere los umbrales establecidos de concordancia y discordancia. La familia de ELECTRE (“ELimination Et Choix Traduisant la REalité”) incluye ELECTRE I, II, III, IV, Tri y IS [43].
- **PROMETHEE**: este método también se incluye en los métodos de “*outranking*”: establecen relaciones de dominancia entre las alternativas, según preferencias, comparándolas por pares.

En este método, las relaciones de dominancia vienen definidas por funciones de valor. Existen seis funciones diferentes, y según el tipo de criterio se le asigna la más adecuada. La mejor alternativa será aquella que tenga el mayor valor del índice de preferencia, obtenido según la función valor correspondiente [20]. Hasta el momento, en la familia de PROMETHEE (“Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations”) podemos incluir PROMETHEE I, II, III, IV y V [19].

2. Basados en dimensiones:

- **TOPSIS:** el concepto básico de TOPSIS (“Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution”) es medir distancias desde las alternativas a soluciones ideales. Para ello, se calcula la Solución Ideal Positiva (“Positive Ideal Solution”, PIS), que corresponde a la mejor solución posible que se puede obtener, y la Solución Ideal Negativa (“Negative Ideal Solution”, NIS), que es lo peor que se podría obtener. Seguidamente, se calculan las distancias de las alternativas a estas soluciones ideales, y la mejor alternativa será la que esté más cerca de la PIS y más alejada de la NIS, indicado por el Coeficiente de Cercanía (CC) [53].
- **VIKOR:** este método también basa su ranking en distancias. VIKOR (“VIseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje”) calcula soluciones ideales (los mejores valores posibles y los peores posibles), para calcular dos índices: S y R . S es la agregación de los valores de las alternativas según la *métrica- L_p* [124, 132]. Y R busca la máxima distancia que hay de la alternativa a la solución ideal, es decir, busca el peor caso posible. El ranking final se obtiene por medio del parámetro, $v \in [0, 1]$ que balancea ambos índices [80]. Además, VIKOR devuelve una “Solución de Compromiso”, que es un ranking de compromiso compuesto por una alternativa o un grupo de ellas, dependiendo de si satisfacen las condiciones de “tasa de ventaja”.
- **RIM:** (“Reference Ideal Method”) se basa en medidas a un punto ideal, como TOPSIS o VIKOR, pero con la diferencia de que el punto ideal no tiene por qué corresponder a un valor extremo (máximo o mínimo), sino que se puede definir como un intervalo dentro del rango del criterio. La mejor alternativa será aquella que tenga la menor distancia al punto ideal, es decir, la alternativa que esté más próxima al intervalo ideal definido [28].

3. Basados en fronteras Pareto:

- **DEA:** “Data Envelopment Analysis” fue propuesto por Charnes, Cooper y Rhodes en el año 1978, [32]. DEA es un método de programación lineal que toma múltiples entradas y devuelve múltiples salidas para determinar la eficiencia de las unidades de decisión (“Decision Making Units”, DMU) en distintos contextos. DEA calcula una frontera Pareto y se basa en el concepto de Pareto óptimo. Los DMUs que estén en este Pareto óptimo son los que obtienen mejor ranking [31].

4. Métodos basados en operadores de agregación:

- **MULTIMOORA:** este método basa su ranking en tres índices: el “Ratio System”, el “Reference Point” y el “Full Multiplicative Form” [14]. “Ratio System” agrega los valores de las alternativas para obtener su ranking. “Reference Point” calcula un punto de referencia, que corresponde con la solución ideal positiva, y mide la distancia de las alternativas a este punto, después aplica la métrica del Min-Max de Tchebycheff para ordenar las alternativas. El “Full Multiplicative Form” aplica la función producto para calcular el ranking. Finalmente, para obtener el ranking final de MULTIMOORA (“Multi-Objective Optimization by Ratio Analysis”), los tres rankings calculados se unen mediante la Teoría de Dominancia [22].
- **WASPAS:** (“Weighted Aggregated Sum Product ASsessment”) se compone por el “Weighted Sum Model” (WSM) y el “Weighted Product Model” (WPM), balanceados por un parámetro $\lambda \in [0, 1]$ [131]. Si $\lambda = 1$, entonces el ranking se calcula en base al WSM. Si $\lambda = 0$, entonces el ranking se calcula por el WPM. Valores intermedios de λ balancean ambos métodos.

Además de estos métodos mencionados, existen otros, como DEMATEL [122], COPRAS [134], ORESTE [83], REMBRANDT [102], etc.

2.2. Problemáticas de los Métodos de Decisión Multi-Criterio

A pesar de las ventajas que presentan los MDMC, se han apreciado dos problemáticas asociadas a ellos. La primera surge cuando el decisor debe seleccionar el método más adecuado para el problema que va a resolver, con la paradoja de que se crea en si mismo un propio problema de decisión. Y la segunda es el fenómeno conocido como el Orden Inverso, común en este tipo

de métodos. Ambos puntos se describen a continuación, y son analizados con profundidad en esta tesis.

2.2.1. Paradoja de los Métodos de Decisión Multi-Criterio

Como ya se ha descrito, actualmente los MDMC están en pleno auge. Prueba de ello es la variedad de métodos entre los que elegir, la actividad académica que existe en torno a ellos y las numerosas aplicaciones que tienen en el mundo real.

A pesar de todos los beneficios que los métodos proporcionan, nos podríamos plantear la siguiente pregunta: ¿cuál es el método más apropiado para un determinado problema?

Desde nuestro conocimiento, nos atrevemos a decir que todavía no se ha podido dar una respuesta. Los motivos por lo que esto no ha sido posible son, primero la cantidad de métodos que existen en la literatura, además, distintos métodos pueden dar distintos resultados para un mismo problema, y, desde nuestro conocimiento, no existe un procedimiento con el que se pueda cotejar los resultados.

La causa por la que distintos métodos no obtienen el mismo resultado para un problema es que, en ocasiones, las alternativas son muy similares y están próximas entre sí. Por ello, cada método puede asignar un rating distinto para una misma alternativa, dependiendo de las funciones que realice, y como consecuencia, variando su orden en el ranking final de un método a otro [42]. Al no tener conocimiento de un ranking correcto con el que poder comparar los resultados, no se puede concluir qué método elegir [44].

Como hemos dicho, cuando un decisor tiene que afrontar un problema de decisión, es normal que le surja la duda de qué método aplicar, con la paradoja de que esta elección se convierte en un propio problema de decisión [107].

En este sentido, los autores comienzan a aplicar varios métodos a un mismo problema; de esta forma, si todos los métodos coinciden en que una determinada alternativa ocupa siempre la primera posición, o al menos en la mayoría, estaría claro que esta alternativa es buena. Por ejemplo, en [68] se emplean seis métodos y todos coinciden en la mejor alternativa para el problema de localización para la reforestación en la región del río Tabacay en Ecuador. Existen numerosos trabajos de este tipo, en los que la mayoría de los métodos aplicados coinciden en la primera posición del ranking para un determinado problema, [12, 48, 75, 84], pero esto no lleva a conclusiones sobre el comportamiento de los métodos que sean generalizables.

Por otro lado, también se han realizado trabajos en los que se analizan las similitudes y diferencias de varios métodos con un conjunto de datos más amplio. Por ejemplo, en Zanakis et al. [128] realizan un estudio de los métodos SAW (Simple Additive Weighting), MEW (Multiplicative Exponent Weighting), ELECTRE, TOPSIS y cuatro variantes de AHP, sobre un

conjunto de datos generado aleatoriamente, con un total de 4800 problemas y 38400 soluciones obtenidas. De estas soluciones analizan la similitud de los rankings mediante el coeficiente de correlación de Spearman y las veces que coinciden en la alternativa que ocupa la primera posición, entre otras medidas. Un trabajo similar se realiza para datos difusos en [108] para los métodos WSM (Weighted Sum Model), WPM (Weighted Product Model), dos variantes de AHP y TOPSIS.

A pesar de los esfuerzos realizados por varios autores, creemos que todavía estamos en la misma situación que en el punto de partida.

Con el fin de poner un poco de orden, se han realizado trabajos que tratan de recopilar información sobre los métodos y su desarrollo [54, 113]. Por ejemplo, en [70] se revisan 393 artículos publicados desde el año 2000 al año 2014, tratando de dar respuesta a cuestiones como qué métodos se han empleado, qué tipo de estudio ha sido dirigido, qué área (de entre 15) es aplicada con más frecuencia para cada método y cuál es el nivel de uso. Según este trabajo, el método más empleado es AHP, seguido de hibridaciones de métodos. La mayoría de los artículos tratan sobre ejemplos de aplicación específicos y sobre el 40% de las publicaciones pertenecen a las áreas de energías renovables, de investigación operativa y soft computing.

En [129] van un paso más allá y realizan un estado del arte de revisiones bibliográficas en el campo de los MDMC, en los que se expone los métodos desarrollados, clasificándolos según metodología, tipo de datos empleados, aplicaciones reales, revistas de publicación, etc., pero no se concluye nada relativo al tópico del método más apropiado.

Recientemente, Saaty y Ergun han realizado el trabajo titulado “When is a decision making method trustworthy?” [95], que trata en profundidad esta polémica y hace notar la necesidad de dar un apoyo o “guía” al decisor con las siguientes cuestiones:

“¿Cómo de bueno es un método de decisión multi-criterio y cómo se valida su ranking? ¿Cómo aportan los individuos sus opiniones y cómo se combinan las opiniones de los miembros de un grupo? Diferentes métodos deberían ser evaluados y comparados bajo un conjunto de criterios ya que, los criterios son reglas, medidas y estándares que guían en la toma de decisión”.

Los autores proponen 16 criterios para evaluar y comparar los MDMC. De esta forma, el decisor tendría un punto de partida para afrontar esta polémica, a pesar de la dificultad que podría presentar la valoración de los métodos en esta evaluación.

Como el lector puede apreciar, esta línea de investigación sigue completamente abierta y creemos que todavía queda mucho trabajo por realizar, ya que aún no se ha logrado concluir cómo abordar la decisión de qué método escoger frente a un determinado problema de decisión, y ésta, no es una tarea sencilla.



Figura 2.5: Fenómeno del Orden Inverso.

2.2.2. Fenómeno del Orden Inverso en los Métodos de Decisión Multi-Criterio

A pesar de todas las ventajas que ofrecen los MDMC en el proceso de la toma de decisión, presentan un inconveniente, y es que, en ocasiones, estos métodos pueden sufrir el fenómeno conocido como Orden Inverso, o en inglés, “Rank Reversal” [16, 40, 98].

Este fenómeno consiste en la alteración del ranking original cuando se modifica el conjunto de alternativas, como pueda ser añadir una nueva alternativa o eliminar una existente. En el peor de los casos, se podría dar un Orden Inverso total, en el que el orden de las alternativas es invertido totalmente, es decir, la que era la mejor alternativa pasa a ser la peor, y viceversa.

Para aclarar este concepto, a continuación lo explicamos por medio de un ejemplo. Consideremos el problema de selección de candidatos que la Figura 2.5 representa, el cual consta de tres candidatos, A , B y C , y tras aplicar un determinado método se ha obtenido que $A > B > C$, donde “ $>$ ” significa mejor que. Por cualquier causa, es necesario considerar un nuevo candidato D , que es mejor que C pero peor que B . Se vuelve a aplicar el método a los cuatro candidatos en las mismas circunstancias que antes, pero el nuevo ranking obtenido ha cambiado, pasando a ser B el mejor candidato.

Como es de esperar, este fenómeno no es aceptable en la toma de decisión, ya que haría que el decisor no pudiera confiar en la solución que le proporciona el método.

En [67] se establecen axiomas para la preservación del ranking, que idealmente los métodos deben verificar. Algunos de estos axiomas son:

Axioma 7: “Si una alternativa es no-óptima para el problema de decisión, ésta no se puede hacer óptima añadiendo nuevas alternativas al problema”.

Axioma 7': “Añadir nuevas alternativas no transforma a antiguas alternativas no-óptimas en óptimas, y se puede cambiar una antigua, originalmente óptima en no-óptima, si y solamente si la nueva alternativa es óptima”.

Este fenómeno se detectó por primera vez en el contexto de AHP [16], cuando los autores observaron cambios en el ranking al añadir copias o alternativas con valoraciones muy similares. En [40] también se presenta un ejemplo del Orden Inverso al añadir una nueva, y en [110] al eliminar una alternativa del conjunto inicial.

Para evitar este fenómeno en AHP, Belton y Gear propusieron la normalización de los valores de las alternativas entre el valor máximo de cada criterio en vez de la suma [16]. Más tarde, en [98] los autores muestran con un ejemplo que tomando esta variación se sigue dando el Orden Inverso.

Desde entonces, muchos autores han trabajado en este tema creando una gran controversia. Principalmente en AHP [15, 39, 40, 51, 69, 106], y más tarde también en otros métodos, como DEA [103], PROMETHEE [58, 89, 115], ELECTRE [118, 128] o TOPSIS [47, 119], entre otros. Incluso, en [36] se analiza la probabilidad de que se dé el Orden Inverso en los métodos basados en comparación por pares.

Los mayoría de los autores consultados coinciden en que la causa de este fenómeno subyace en el proceso de normalización [78, 91], el cual se aplica en la mayoría de los métodos, para unificar los distintos dominios de los criterios. Incluso, en algunos trabajos se ha demostrado que eliminando este proceso se evita el Orden Inverso [15], pero esto no es factible en la realidad, debido a que en la mayoría de los problemas de decisión, los criterios realmente tienen diferentes dominios y es necesario unificarlos para su evaluación.

Una solución propuesta para evitar este fenómeno se hizo para TOPSIS [47], la cual consiste en cambiar la normalización vectorial por la transformación lineal del máximo y añadir dos alternativas ideales que contengan los mejores y peores valores posibles. Con esta modificación, queda demostrado que aunque se modifique el espacio de soluciones, ya no surgiría el fenómeno del Orden Inverso.

En la actualidad, el Orden Inverso se ha convertido en un criterio para testear si un método es robusto o no [95, 118]. En nuevos métodos desarrollados se prueba que no sufre el Orden Inverso para demostrar su robustez, como en COMET [85, 99], RIM [28], o híbridos de SAW y TOPSIS [76] o de TOPSIS difuso y ELECTRE difuso [42].

2.3. Herramientas empleadas en la tesis

Como hemos comentado, para abordar el trabajo que planteamos en esta tesis, necesitamos ciertas herramientas. Por ejemplo, con la Soft Computing, o más concretamente los Conjuntos Difusos, podemos trabajar en entornos con imprecisión o vaguedad. Otra herramienta son los MDMC que hemos seleccionado para analizar en esta tesis, en concreto TOPSIS, VIKOR, RIM, MULTIMOORA y WASPAS, los cuales se describen a continuación.

2.3.1. Soft Computing

En general, cuando hablamos de imprecisión o vaguedad nos referimos a la presencia de duda o al conocimiento incompleto que se tiene acerca de un problema en particular, es decir, se tienen dificultades para poder distinguir o para poder definir fronteras exactas [60].

Un entorno con imprecisión, vago o difuso se hace presente cuando los valores no se pueden definir con exactitud, ya sea tanto en los pesos como en los valores de las alternativas que forman el problema de decisión. Esta dificultad podría deberse por tratar con datos imprecisos, vagos, o incluso, porque se trabajara con información lingüística, ya sea porque no es posible dar una valoración numérica, o simplemente porque es más cómodo para el decisor trabajar en estos términos.

En el planteamiento del problema, esta imprecisión puede surgir de forma natural dada la propia naturaleza del problema o la subjetividad del decisor. En la mayoría de las situaciones, poder modelar esta falta de certeza, facilita la descripción del problema, ya que da flexibilidad para tratar problemas complejos en aplicaciones del mundo real.

De esta forma, nace la necesidad de poder modelar esta imprecisión para ser capaces de dar solución al problema, independientemente del área al que pertenezca. En este contexto, se hace presente la Soft Computing, que engloba diversas técnicas orientadas a modelar y solucionar problemas con información imprecisa, vaga o con datos lingüísticos. Se debe tener claro que esta imprecisión no es producto de la ignorancia o desconocimiento que se tiene del problema, sino de la naturaleza intrínseca e imprecisa de su definición. En este sentido, debemos entender por imprecisión, aquella vaguedad lingüística que tiene sentido y es perfectamente comprensible para los seres humanos, a pesar de la falta de información exacta.

Zadeh [126] define la Soft Computing como:

“Básicamente, Soft Computing no es un cuerpo homogéneo de conceptos y técnicas, más bien es una mezcla de distintos métodos que de una forma u otra cooperan desde sus fundamentos. En este sentido, el principal objetivo de la Soft Computing es aprovechar la tolerancia que conllevan la imprecisión y la imprecisión, para conseguir manejabilidad, robustez y soluciones de bajo costo. Los principales ingredientes de la Soft computing son la Lógica Difusa, la Neurocomputación y el Razonamiento Probabilístico, incluyendo este último a los Algoritmos Genéticos, las Redes de Creencia, los Sistemas Caóticos y algunas partes de la Teoría del Aprendizaje. En esa asociación de Lógica Difusa, Neurocomputación y Razonamiento Probabilístico, la Lógica Difusa se ocupa principalmente de la imprecisión y el Razonamiento Aproximado; la Neurocomputación del aprendizaje y el

Razonamiento Probabilístico de la imprecisión y la propagación de las creencias”.

En términos generales, Zadeh define la Soft Computing como un conjunto de diferentes conceptos y técnicas implementadas, que afrontan los problemas que se presentan en el mundo real, que por su propia naturaleza son imprecisos, con vaguedad y difíciles de categorizar.

Así, entre los componentes principales que componen la Soft Computing se encuentran: los modelos probabilísticos, lógica y conjuntos difusos, redes neuronales y las metaheurísticas. Todos estos elementos no se deben considerar por separado, sino como un conjunto que coopera, se asocia y se complementa para poder resolver problemas complejos. En [114] se explica con mayor detalle cada uno de estos componentes. Además, sus autores han presentado una definición más reciente de Soft Computing:

*“El punto de vista que aquí consideramos es otra forma de definir la Soft Computing, por medio de la cual se la considera como la antítesis de lo que podríamos llamar **Hard Computing**. Este punto es consistente con el presentado en [126, 127]. La Soft Computing puede, por tanto, verse como una serie de técnicas y métodos con los que manejar las situaciones prácticas reales en la misma manera que los humanos tratan con ellas, es decir, en base a la inteligencia, sentido común, consideración de analogías, aproximaciones, etc. En este sentido, la Soft Computing es una familia de métodos de resolución de problemas encabezados por el Razonamiento Aproximado y los Métodos de Aproximación Funcional y de Optimización, incluyendo los de búsqueda. Soft Computing está, por tanto, en la base teórica del área de los Sistemas Inteligentes”.*

En el contexto de esta tesis, la Soft Computing es ideal para resolver la imprecisión presente en la descripción de los problemas en el campo de la toma de decisión, más concretamente, los conjuntos difusos, los cuales se describen a continuación.

Conjuntos difusos

La lógica difusa es una propuesta que permite formalizar el razonamiento aproximado, el cual intenta manejar el conocimiento del sentido común. Es una generalización de la lógica booleana (lógica clásica, de verdadero o falso), en la que se adapta la pertenencia booleana a una pertenencia gradual de un elemento en un conjunto. Esta teoría fue propuesta por Zadeh en el año 1965 [125].

Formalmente, un conjunto difuso \tilde{A} [59], se puede definir como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 (exclusión total) y 1

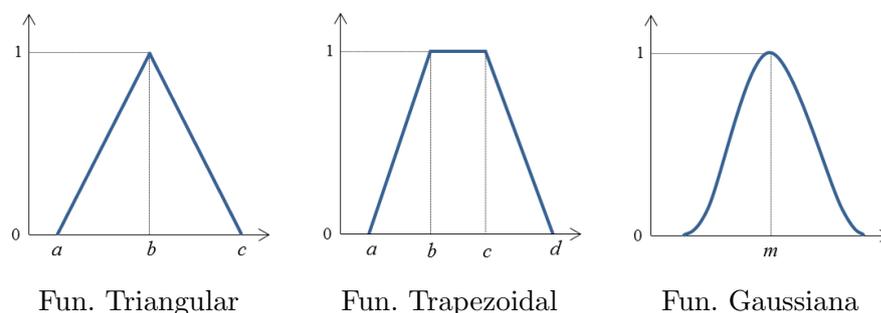


Figura 2.6: Representación gráfica de funciones de pertenencia.

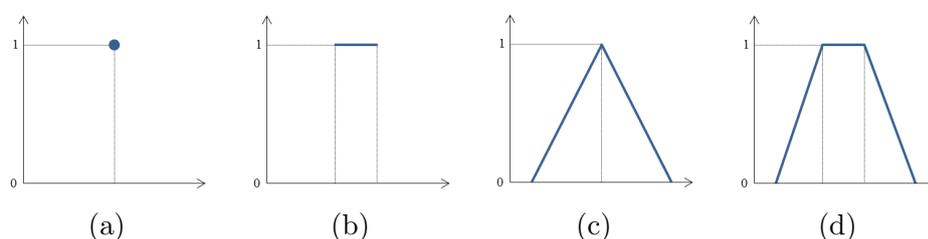


Figura 2.7: Ejemplo de números difusos.

(pertenencia total). Los valores de pertenencia expresan los grados con los que cada objeto es compatible con las características o propiedades distintivas de la colección, que vienen dados por la denominada *función de pertenencia*. Con esta relajación en la pertenencia al conjunto, se puede trabajar con términos como “aproximadamente 20”, “muy alto”, “mucho calor”, etc. Éstos son ampliamente aplicados en la literatura en el campo de la toma de decisión multi-criterio [23, 25, 54, 71, 105, 108].

Formalmente, una función de pertenencia del conjunto \tilde{A} se define como $\mu_{\tilde{A}} : U \rightarrow [0, 1]$, la cual asocia un valor de pertenencia entre 0 y 1 a los elementos del conjunto \tilde{A} . Las funciones de pertenencia más comunes son la triangular, trapezoidal y la gaussiana, cuya representación gráfica se encuentra en la Figura 2.6.

Bajo ciertas condiciones, estos conjuntos difusos pueden ser vistos como *números difusos* o *intervalos difusos*. Podemos encontrar distintos casos de números difusos, como los números reales (Figura 2.7.a), intervalos de números reales (Figura 2.7.b), valores aproximados (Figura 2.7.c) o intervalos aproximados o difusos (Figura 2.7.d) [59].

En esta tesis, nos hemos centrado en el concepto de número triangular difuso [49], ya que es ampliamente aplicado en la literatura en el campo de la toma de decisión multi-criterio [23, 25, 54, 71, 105, 108]. Un número triangular difuso se puede definir como una tripleta $\tilde{A} = (a, b, c)$, cuya función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$ está descrita por la Expr. 2.1 y su representación gráfica se encuentra en la Figura 2.8.

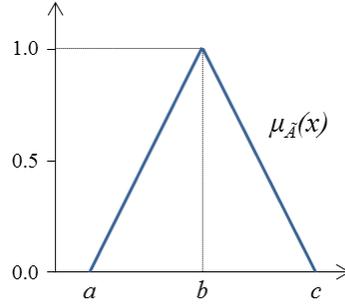


Figura 2.8: Función de pertenencia de un número triangular difuso.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b \\ (c-x)/(c-b) & \text{si } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{si } x \notin [a, c] \end{cases} \quad (2.1)$$

Si ahora consideramos dos números triangulares difusos y positivos, $\tilde{A} = (a, b, c)$ y $\tilde{B} = (d, e, f)$, sus operaciones aritméticas básicas se definen como [108]:

$$\text{Suma : } \tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + d, b + e, c + f) \quad (2.2)$$

$$\text{Resta : } \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a - f, b - e, c - d) \quad (2.3)$$

$$\text{Multiplicación : } \tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a * d, b * e, c * f) \quad (2.4)$$

$$\text{Multiplicación escalar : } \tilde{A} * k = (a * k, b * k, c * k) \quad (2.5)$$

$$\text{División : } \tilde{A} \oslash \tilde{B} = (a/f, b/e, c/d) \quad (2.6)$$

$$\text{Raíz : } \tilde{A}_i^{1/2} = (a^{1/2}, b^{1/2}, c^{1/2}) \quad (2.7)$$

$$\text{Potencia : } \tilde{A}^{\tilde{B}} = (a^f, b^e, c^d) \quad (2.8)$$

$$\text{Máximo : } MAX(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\max(a, d), \max(b, e), \max(c, f)) \quad (2.9)$$

$$\text{Mínimo : } MIN(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\min(a, d), \min(b, e), \min(c, f)) \quad (2.10)$$

$$\text{Distancia : } d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{1/3[(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2]} \quad (2.11)$$

Estas operaciones se pueden emplear para adaptar los MDMC clásicos a entornos con imprecisión, como se detalla más adelante.

2.3.2. Métodos de Decisión Multi-Criterio abordados en la tesis

De entre el catálogo de MDMC que existen en la literatura, en este trabajo nos vamos a centrar en cinco de ellos: TOPSIS [34], VIKOR [80], RIM [28], MULTIMOORA [14] y WASPAS [131]. La principal razón por lo que se han seleccionado estos métodos es porque todos ellos comparten el procedimiento de evaluación, que se detalla a continuación. Además, todos toman la misma información de entrada y no necesitan información extra por parte del decisor, a parte de la matriz de decisión y el vector de pesos.

El procedimiento de evaluación que comparten estos métodos se puede dividir en tres pasos principales: 1) normalización y ponderación, 2) cálculo de los índices y 3) construcción del ranking. Primero, todos los métodos aplican la normalización de la matriz de entrada para unificar los dominios de los criterios, ya que cada criterio puede tener uno distinto, y ponderan según el vector de pesos. Seguidamente, evalúan las alternativas calculando una serie de índices, con los que finalmente construyen el ranking. En la Figura 2.9 se muestra este proceso común para cada método, donde se puede distinguir los pasos en común y los índices que calcula cada método para construir el ranking final.

A continuación se describen los algoritmos que siguen los cinco métodos que se van a analizar en esta tesis.

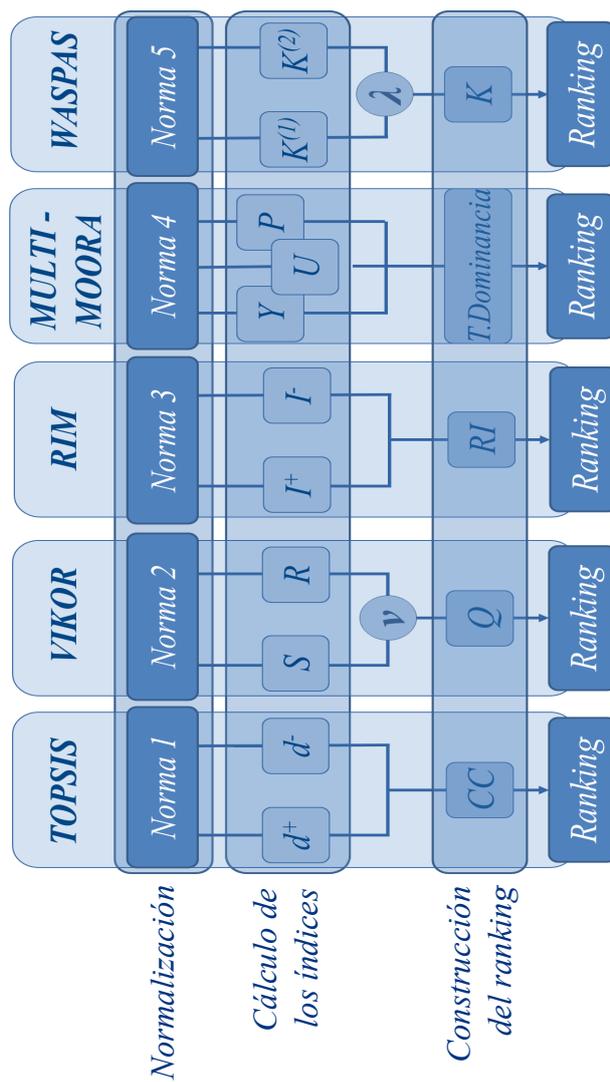


Figura 2.9: Procedimiento de los métodos seleccionados.

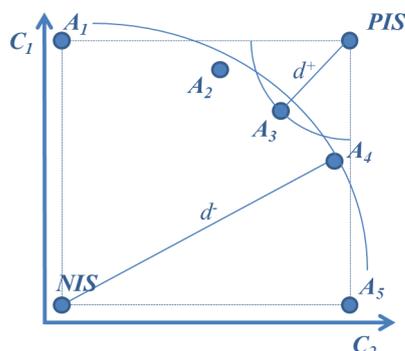


Figura 2.10: Ilustración del método TOPSIS.

	w_1	w_2	...	w_n
	C_1	C_2	...	C_n
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
...	x_{ij}	...
A_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

Tabla 2.2: Matriz de decisión.

Método TOPSIS

El método TOPSIS [34] basa su ranking en medir la distancia de las alternativas a soluciones ideales. Para ello, primero se definen estas soluciones ideales, una es la Alternativa Ideal Positiva (“Positive Ideal Solution”, PIS) y otra es la Alternativa Ideal Negativa (“Negative Ideal Solution”, NIS). La PIS corresponde a lo mejor posible que se podría alcanzar, y la NIS es lo peor que podría suceder. La mejor alternativa en el ranking será aquella que tenga la menor distancia a la PIS y mayor distancia a la NIS, como se ilustra en la Figura 2.10.

En esta tesis se han considerado dos métodos de normalización que se aplican en la literatura. Una es la normalización Vectorial [34], y la otra es la normalización de la Transformación Lineal del Máximo [47]. A pesar de aplicar dos normalizaciones distintas, el algoritmo para los dos casos es el mismo, como se describe a continuación.

1. Obtención de la matriz de decisión: componer la matriz de decisión como en la Tabla 2.2, donde los x_{ij} corresponden a la valoración de la alternativa A_i bajo el criterio C_j , y los w_j corresponde al peso del criterio C_j , $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Normalización: una vez formada la matriz de decisión, el siguiente paso es normalizar sus valores. Como hemos comentado, en nuestro caso consideramos dos tipos de normalizaciones:

- Normalización Vectorial:

$$n_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{ij})^2} \quad (2.12)$$

- Normalización de la Transformación Lineal del Máximo:

$$n_{ij} = \left(\frac{x_{ij}}{\max_i(x_{ij})} \right) \quad (2.13)$$

si el j -ésimo criterio es beneficio, y

$$n_{ij} = \left(\frac{\min_i(x_{ij})}{x_{ij}} \right) \quad (2.14)$$

si el j -ésimo criterio es costo, $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,n$.

3. Ponderación: el siguiente paso es ponderar los valores normalizados como $v_{ij} = n_{ij} * w_j$, donde w_j es el j -ésimo criterio, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.
4. Cálculo de PIS y NIS: una vez tenemos los valores de la matriz de decisión normalizados y ponderados, podemos pasar a calcular las soluciones ideales PIS y NIS. Como hemos dicho, estas soluciones son lo mejor que se puede obtener, y lo peor que puede suceder, respectivamente. Según la normalización que hayamos aplicado, estos valores se calcularán del siguiente modo:

- Si se ha aplicado la normalización vectorial:

$$\begin{aligned} PIS &= A^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_j^+, \dots, v_n^+\} \\ NIS &= A^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_j^-, \dots, v_n^-\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde $v_j^+ = \max_i(v_{ij})$ y $v_j^- = \min_i(v_{ij})$ si el j -ésimo criterio es beneficio, y $v_j^+ = \min_i(v_{ij})$ and $v_j^- = \max_i(v_{ij})$ si el j -ésimo criterio es coste, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

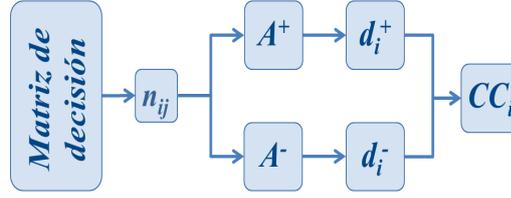


Figura 2.11: Procedimiento del método TOPSIS.

- Si se ha aplicado la normalización de la Transformación Lineal del Máximo:

$$\begin{aligned} PIS &= A^+ = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_j^+, \dots, v_n^+\} \\ NIS &= A^- = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_j^-, \dots, v_n^-\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $v_j^+ = \max_i(v_{ij})$ y $v_j^- = \min_i(v_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$, ya que al aplicar esta normalización, los valores de PIS pasan a ser todos de beneficio, y los de la NIS, de costo.

5. Distancias a las soluciones ideales: una vez calculadas la PIS y la NIS, se pasa a calcular la distancia de las alternativas a éstas como

$$\begin{aligned} d_i^+ &= \left\{ \sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2 \right\}^{1/2}, \\ d_i^- &= \left\{ \sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde la d_i^+ es la distancia ideal positiva, ya que es la distancia a la A^+ , y la d_i^- es la distancia ideal negativa, la cual calcula la distancia a la A^- .

6. Coeficiente de cercanía: con las distancias calculadas, ya se puede calcular el Coeficiente de Cercanía ("Closeness Coefficient", CC):

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.18)$$

7. Cálculo del ranking: como el índice CC_i está comprendido entre 0 y 1, si $CC_i = 1$, entonces $A_i = A^+$. Por el contrario, si $CC_i = 0$, entonces $A_i = A^-$. Consecuentemente, CC_i se ordena en orden descendente, por lo que valores altos de CC_i implican mejor ranking.

El procedimiento de TOPSIS se puede ver representado gráficamente en la Figura 2.11.

Método VIKOR

El método VIKOR [80] también basa su ranking en distancias, pero con la diferencia de que este método calcula dos índices, S y R , que se balancean por medio del parámetro v para calcular el ranking final. Además del ranking final, VIKOR proporciona una solución de compromiso que cumple una serie de condiciones. Los pasos que sigue se exponen a continuación.

1. Obtención de la matriz de decisión: al igual que para TOPSIS, el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. Normalización: los valores normalizados n_{ij} se calculan como:

$$n_{ij} = \frac{f_j^+ - x_{ij}}{f_j^+ - f_j^-} \quad (2.19)$$

donde $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Los f_j^+ se corresponden a los mejores valores que los criterios podrían tomar, y los f_j^- a los peores valores. Se calculan como $f_j^+ = \max_i(x_{ij})$ y $f_j^- = \min_i(x_{ij})$, si el j -ésimo criterio es beneficio, y como $f_j^+ = \min_i(x_{ij})$ y $f_j^- = \max_i(x_{ij})$ si el j -ésimo criterio es coste, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

3. Cálculo de los S_i y de los R_i : estos índices se calculan por las siguientes relaciones:

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j * n_{ij}, \quad (2.20)$$

$$R_i = \max_j [w_j * n_{ij}] \quad (2.21)$$

donde w_j es el peso asociado al j -ésimo criterio, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

4. Cálculo de los Q_i : éste es el índice a través del cual se calcula el ranking de VIKOR. Para ello, se aplica la siguiente fórmula:

$$Q_i = v \frac{(S_i - S^+)}{(S^- - S^+)} + (1 - v) \frac{(R_i - R^+)}{(R^- - R^+)} \quad (2.22)$$

donde $S^+ = \min_i(S_i)$, $S^- = \max_i(S_i)$, $R^+ = \min_i(R_i)$, $R^- = \max_i(R_i)$, y $v \in [0,1]$. El parámetro v balancea la intervención de los índices S y R , tal que si $v = 0$, entonces $Q = R$, y si $v = 1$, entonces $Q = S$.

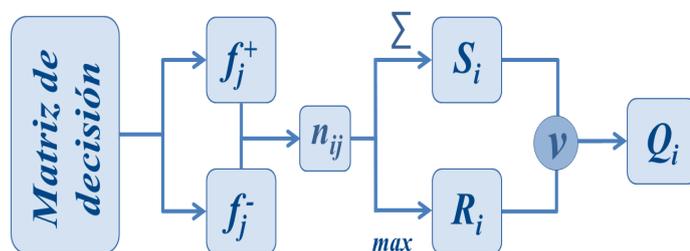


Figura 2.12: Procedimiento del método VIKOR.

5. **Cálculo del ranking:** finalmente, los valores de Q se ordenan en orden creciente, donde las mejores alternativas corresponden a los valores más bajos de Q .
6. **Solución de compromiso:** como hemos dicho anteriormente, VIKOR no sólo da un ranking, si no que también devuelve una *solución de compromiso*, la cual es una alternativa a' que es la que mejor ha valorado el índice Q (mínimo) si las dos condiciones siguientes se cumplen:

- **Condición 1: Ventaja aceptable.**

$Q(a'') - Q(a') \geq DQ$ donde a'' es la segunda mejor alternativa según Q y $DQ = 1/(m-1)$ (siendo m el número de alternativas).

- **Condición 2: Estabilidad aceptable en la toma de decisiones.** La alternativa a' debe ser también la mejor alternativa para el índice S y/o R (la alternativa con el valor más bajo).

Si estas dos condiciones no se satisfacen, entonces se devuelve un *conjunto* de alternativas como solución, de la siguiente forma:

- Las alternativas a' y a'' si la condición 1 se cumple y la condición 2 no se cumple, o
- Las alternativas $a', a'', \dots, a^{(p)}$ si la condición 1 se no cumple; siendo p la posición del ranking de la alternativa $a^{(p)}$ que verifica $Q(a^{(p)}) - Q(a') < DQ$.

El procedimiento de VIKOR, se puede ver gráficamente como se ilustra en la Figura 2.12

Método RIM

RIM es un método que ha sido desarrollado recientemente [28]. Su ranking se basa en distancias a soluciones ideales, pero con la diferencia de que en este caso, los valores ideales pueden ser intervalos definidos dentro

del dominio de los criterios. Para ello, se define el intervalo $[A, B]$ como el dominio de los criterios, y el intervalo $[C, D]$ como el ideal de referencia, de tal forma que $[C, D] \subset [A, B]$. De esta forma, los pasos de RIM son:

1. **Obtención de la matriz de decisión:** al igual que en los métodos anteriores, el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. **Normalización:** para la normalización primero se define la distancia al ideal de referencia como:

$$d_{min}(x, [C, D]) = \min(|x - C|, |x - D|) \quad (2.23)$$

donde x es la valoración de la alternativa. Ahora, para proceder a la normalización $n_{ij} = f(x_{ij}, [A_j, B_j], [C_j, D_j])$, se sigue la función definida como:

$$f(x_{ij}, [A_j, B_j], [C_j, D_j]) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{ij} \in [C_j, D_j] \\ 1 - \frac{d_{min}(x_{ij}, [C_j, D_j])}{|A_j - C_j|} & \text{si } x_{ij} \in [A_j, C_j] \wedge A_j \neq C_j \\ 1 - \frac{d_{min}(x_{ij}, [C_j, D_j])}{|D_j - B_j|} & \text{si } x_{ij} \in [D_j, B_j] \wedge D_j \neq B_j \end{cases} \quad (2.24)$$

donde $[A_j, B_j]$ es el rango del j -ésimo criterio, $[C_j, D_j]$ es su ideal de referencia, $x_{ij} \in [A_j, B_j]$ y $[C_j, D_j] \subset [A_j, B_j]$. De esta forma, si $n_{ij} = 1$ significa que x_{ij} está contenido en el ideal de referencia.

3. **Ponderación:** el siguiente paso es ponderar los valores normalizados como $v_{ij} = n_{ij} * w_j$, donde w_j es el j -ésimo criterio, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.
4. **Cálculo de los I_i^+ y los I_i^- :** seguidamente se calcula la distancia al ideal de referencia normalizado para cada alternativa como:

$$I_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - w_j)^2}, \quad (2.25)$$

$$I_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij})^2}, \quad (2.26)$$

con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

De este modo, el vector que representa el ideal de referencia será $(1, 1, \dots, 1)$, por lo que, cuando se pondere, tomará los valores de los w_j .

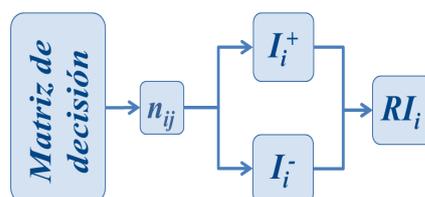


Figura 2.13: Procedimiento del método RIM.

5. Cálculo del RI_i : para construir el ranking se calcula el RI_i , mediante la siguiente expresión:

$$RI_i = \frac{I_i^-}{I_i^+ + I_i^-} \quad (2.27)$$

donde $0 < RI_i < 1$ e $i = 1, 2, \dots, m$.

6. Cálculo del ranking: el RI_i se ordena en orden descendente, por lo que valores altos de RI_i implican mejor ranking.

La descripción gráfica de este método, se encuentra en la Figura 2.13.

Método MULTIMOORA

MULTIMOORA surge como la fusión del método MOORA [21], que se compone de los índices “Ratio system” y “Reference point”, con el índice “Full multiplicative form”, como se puede ver en la Figura 2.14. El “Ratio system” aplica la sumatoria como operador de agregación con los datos normalizados, y el “Reference point” calcula un punto ideal de referencia y mide las distancias de las alternativas a este punto ideal. El índice “Full multiplicative form” también aplica operadores de agregación, pero en este caso es la multiplicación. De cada índice se calcula un ranking, para finalmente calcular el ranking de MULTIMOORA mediante la Teoría de Dominancia [22]. Los pasos de MUTLIMOORA son los expuestos a continuación.

1. Obtención de la matriz de decisión: como en métodos anteriores, el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. Normalización: se calculan los valores normalizados n_{ij} como la normalización vectorial de TOPSIS (Expr. 2.12).
3. Cálculo del “Ratio system” (Y_i): los valores normalizados se ponderan como $v_{ij} = n_{ij} * w_j$, donde w_j es el j -ésimo criterio, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Luego, se calcula el índice Y_i como:

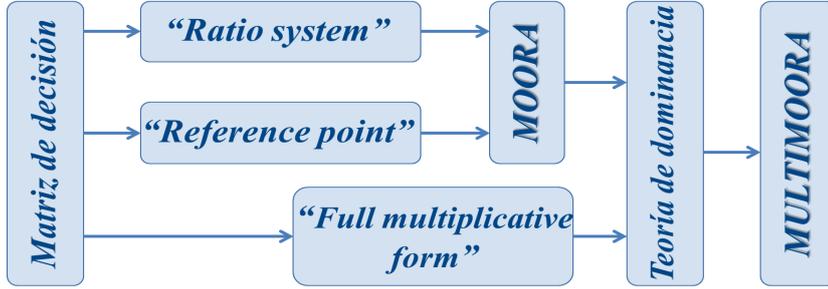


Figura 2.14: Procedimiento del método MULTIMOORA.

$$Y_i = \sum_{j=1}^g v_{ij} - \sum_{j=g+1}^n v_{ij} \quad (2.28)$$

donde $\sum_{j=1}^g v_{ij}$ son los criterios que representan beneficio, y $\sum_{j=g+1}^n v_{ij}$ son los criterios que representan coste, $g=1,2,\dots,n$.

Los Y_i se ordenan de forma decreciente, siendo las mejores alternativas aquellas que tengan mayor valor del índice.

4. Cálculo del "Reference point" (P_i): se calcula el punto de referencia como $RF = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\}$, donde $v_j^+ = \max_i(v_{ij})$ si el j -ésimo criterio es beneficio, y $v_j^+ = \min_i(v_{ij})$ si el j -ésimo criterio es coste. Una vez ha sido calculado, se aplica la métrica Min-Max de Tchebycheff:

$$P_i = \min_i (\max_j |v_j^+ - v_{ij}|) \quad (2.29)$$

En este caso, las alternativas se ordenan según P_i en orden creciente, donde las mejores alternativas corresponden a los menores valores del índice.

5. Cálculo del "Full Multiplicative form" (U_i): el índice U se calcula por:

$$U_i = \frac{\prod_{j=1}^g n_{ij}^{w_j}}{\prod_{j=g+1}^n n_{ij}^{w_j}} \quad (2.30)$$

donde $\prod_{j=1}^g n_{ij}^{w_j}$ son los criterios que presentan beneficio, y $\prod_{j=g+1}^n n_{ij}^{w_j}$ son los criterios que presentan coste. Después, las alternativas se ordenan en orden decreciente, siendo las mejores alternativas aquellas que tienen valores mayores del índice.

6. Teoría de Dominancia: para calcular el ranking final, se unen los rankings del "Ratio System", el "Reference Point" y el "Full Multiplicative Form" por medio de la Teoría de Dominancia [22]. Partimos de la base

de que estos tres índices son igual de importantes, esta teoría se aplica de la siguiente forma:

- Dominancia:
 - Dominancia absoluta: cuando una alternativa está en la primera posición en los tres rankings de MULTIMOORA, (1-1-1).
 - Dominancia general en dos de los tres índices: cuando en al menos dos de los tres índices, una alternativa supera a otra. Por ejemplo, (4-1-1) domina a (3-2-2).
 - Transitividad: si a domina a b , y b domina a c , entonces a también domina a c .
 - Dominancia total de una alternativa sobre otra: en este caso una alternativa domina a otra en los tres índices. Por ejemplo, (8-8-8) domina a (10-10-10).
- Igualdad:
 - Absolutamente iguales: dos alternativas son exactamente igual si las dos tienen los mismos rankings en los tres índices, (x-x-x).
 - Parcialmente iguales: cuando dos alternativas, por ejemplo A y B , tienen el mismo ranking en un índice, en otro ranking A domina a B , y para el tercer ranking pasa a la inversa, es decir, B domina a A . Por ejemplo, sería el caso si A es (5-x-7) y B es (6-x-3).
 - Razonamiento circular: a pesar de todas las distinciones hechas queda el caso del razonamiento circular; cuando no se cumple la transitividad. Por ejemplo, A es (11-20-14), que domina a B (14-16-15). B domina a C (15-19-12), y al mismo tiempo C domina a A . En este caso, las tres toman el mismo ranking.

Método WASPAS

El método WASPAS [131] forma su ranking en base a dos métodos, el “Weighted Sum Model” (WSM) y el “Weighted Product Model” (WPM). Esta idea evoluciona de la unión de estos dos métodos, como se hizo en [101]. La idea de WASPAS es la misma pero combinándolos mediante un parámetro que balancea ambos. Los pasos que sigue este método se describen a continuación.

1. Obtención de la matriz de decisión: como los métodos anteriores, el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.

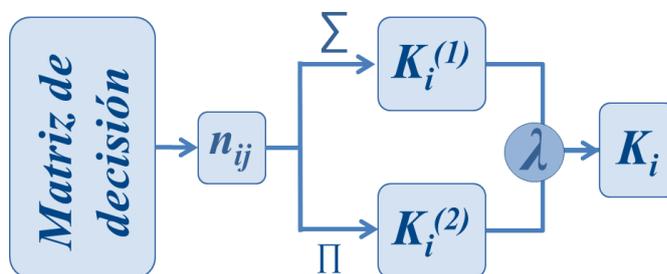


Figura 2.15: Procedimiento del método WASPAS.

2. Normalización: los valores normalizados se denotan como n_{ij} , y se calculan como la transformación lineal del máximo que aplica TOPSIS, Expr. 2.13 para criterios de beneficio y Expr. 2.14 para criterios de costo.
3. Cálculo de $K_i^{(1)}$: este índice corresponde al WSM, y se calcula como:

$$K_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n n_{ij} * w_j \quad (2.31)$$

donde w_j es el peso del j -ésimo criterio, $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,n$.

4. Cálculo de $K_i^{(2)}$: este índice corresponde al WPM, y se calcula de la siguiente forma:

$$K_i^{(2)} = \prod_{j=1}^n (n_{ij})^{w_j} \quad (2.32)$$

donde w_j es el peso del j -ésimo criterio, $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,n$.

5. Cálculo de K_i : el siguiente paso es combinar ambos métodos, para ello se aplica la siguiente expresión:

$$K_i = \lambda * K_i^{(1)} + (1 - \lambda) * K_i^{(2)} \quad (2.33)$$

donde $\lambda \in [0, 1]$. Si $\lambda = 1$, entonces WASPAS se convierte en el WSM, y si $\lambda = 0$ entonces WASPAS se convierte en el WPM.

6. Cálculo del ranking: el ranking final se construye ordenando K_i en orden descendente, siendo la mejor alternativa aquella que tenga el valor más alto de K_i .

El procedimiento de WASPAS se puede ver representado gráficamente en la Figura 2.15.

Normalización	TOPSIS	VIKOR	RIM	MULTIMOORA	WASPAS
TL (Max)					
TL (Max-Min)					
Nor. Vectorial					
$f(x, [A, B], [C, D])$					

Tabla 2.3: Procedimiento de normalización de cada método (TL = Transformación Lineal).

La versión difusa de estos métodos siguen el mismo algoritmo, la variación que hay es la adaptación de la aritmética de números reales a la aritmética de números difusos. La descripción de los métodos difusos se encuentra detallada en el Apéndice A.

Diferencias entre los métodos abordados

En este apartado se analizarán las diferencias que existen entre los métodos descritos anteriormente, ya que, a pesar de las similitudes que se han visto que comparten, cada método es particular y tiene su propio proceso.

Se pueden mencionar dos puntos principales que diferencian a estos métodos: 1) el procedimiento de normalización que aplica cada uno, y 2) si basan su ranking en distancias a soluciones ideales o no.

La primera distinción es el procedimiento de normalización que aplica cada método. Como se puede ver en la Tabla 2.3, todos los métodos aplican un procedimiento diferente, menos TOPSIS, que coincide con MULTIMOORA en la normalización vectorial y con WASPAS en la transformación lineal del máximo.

La siguiente distinción es si los métodos calculan sus rankings en base a la distancia de las alternativas a soluciones ideales, o simplemente agregan valores. “Reference point” de MULTIMOORA, RIM, TOPSIS y VIKOR miden esta distancia, y los índices “Ratio system” y “Full multiplicative form” de MULTIMOORA, y WASPAS aplican operadores de agregación sobre los valores normalizados.

Dentro de los métodos que basan su ranking en distancias, podemos mencionar algunas diferencias. Por ejemplo, VIKOR hace distinción entre las distancias positivas y negativas para el cálculo del ranking mediante el parámetro v y proporciona una solución de compromiso, mientras que TOPSIS toma estas dos distancias por igual, [81]. El índice “Reference Point” sólo calcula un único punto de referencia, que se correspondería con la solución ideal positiva de TOPSIS o VIKOR, además aplica la métrica Min-Max de Tchebycheff, mientras que TOPSIS toma la distancia Euclídea [21]. La distinción notable de RIM es que no presenta el fenómeno del Orden Inverso [28], como sí sucede con TOPSIS [47], por ejemplo. Esto es debido a la normalización que aplica y la definición implícita del referente ideal que emplea RIM.

Los índices “Ratio system” y “Full multiplicative form” de MULTIMOORA y WASPAS no toman distancias a soluciones ideales. De estos métodos podemos mencionar que aplican operadores de agregación para calcular el ranking final, pero con la distinción de que, el “Ratio system” sólo aplica la sumatoria, el “Full multiplicative form” sólo el producto, y WASPAS combina la sumatoria y el producto por medio de un parámetro λ que balancea ambos operadores.

Capítulo 3

Estudio comparativo de los Métodos de Decisión Multi-Criterio

En este capítulo se realiza el estudio comparativo de los Métodos de Decisión Multi-Criterio (MDMC) seleccionados en esta tesis, analizando las similitudes y diferencias que hay entre ellos, con el fin de abordar la primera problemática que se planteó en el capítulo anterior.

Este estudio se realiza sobre un conjunto de datos formado por problemas de decisión con distintas dimensiones. Además, consideramos tanto entornos bien definidos, como entornos con imprecisión/vaguedad. De esta forma, se analiza qué parámetros influyen en los resultados obtenidos y si hay variaciones de entornos precisos a entornos imprecisos.

3.1. Introducción

Dada la actividad que hay relativa a los MDMC, reflejada en las numerosas publicaciones [54, 70], se han desarrollado numerosos métodos: versiones de los clásicos, por ejemplo ELECTRE I, II, . . . , TRI [43], desarrollo de nuevos, como RIM [28], o incluso híbridos de métodos, como un híbrido entre DEMATEL, ANP y TOPSIS [26], teniendo así más de un centenar entre los que elegir.

De esta forma, surge la primera problemática que ya planteamos. Cuando se afronta un problema de decisión, una pregunta obvia que se puede hacer el decisor es: ¿qué MDMC debería emplear para resolver el problema? A pesar de los esfuerzos para crear una guía que ayude al decisor a resolver esta cuestión, todavía no se ha logrado completar, como ya se ha comentado con anterioridad.

Es necesario recalcar que, la complejidad de la elección de un método yace en dos factores principales: a) dado un problema específico, la aplica-

ción de cada método podría dar una solución diferente; b) desde nuestro conocimiento, no existe nada semejante a un ranking “correcto” con el que se puedan comparar los resultados de los métodos.

Algunos autores se han centrado en la comparación de los resultados provistos por diferentes MDMC, que esencialmente es un problema de comparativa de rankings. Un trabajo relacionado con esta temática podría ser [55], donde se comparan los rankings de WLAM, AHP, SAW y ELECTRE sobre tres problemas. Sus conclusiones son que AHP, SAW y ELECTRE no difieren tanto, mientras que WLAM tiene más diferencias con el resto. Los autores advierten de su baja generalidad debido a la naturaleza del estudio.

Existen diversas comparativas, en las que los autores comparan varios MDMC sobre un problema en concreto. Esta comparación se suele hacer con alguna métrica como la del índice de correlación de Spearman [29, 108, 128], o con algún análisis puramente descriptivo de los resultados [12, 48, 75].

Recientemente se han publicado distintas revisiones bibliográficas tratando de poner un poco de orden en esta cuestión. Por ejemplo, en [113] examinan 11 MDMC, recogiendo sus ventajas, desventajas y los campos de aplicación de cada MDMC. Algunas de las descripciones son un poco genéricas, como *fácil de usar* o *difícil de implementar*, dificultando la valoración de los MDMC. Por ejemplo, la idea de *fácil de usar* no está asociada a ninguna herramienta software desarrollada.

En la referencia [18], tomada de [50], uno puede leer:

“Aunque la gran diversidad de métodos podría verse como un punto fuerte, también se puede ver como un punto débil. Hasta ahora no ha habido posibilidad de decidir qué método tiene más sentido que otro en la situación de un problema específico”.

Saaty y Ergun, en su reciente trabajo [95], tratan profundamente este argumento, corroborándolo con la siguiente afirmación:

“La existencia de todos estos métodos se convierte en un propio problema de decisión en sí mismo, y los decisores podrían estar indecisos con cual usar. Por consiguiente, el análisis comparativo y la evaluación de varios métodos está bajo escrutinio tanto por los investigadores y los profesionales para descubrir si hay razones lógicas, matemáticas, sociales o prácticas para que un método sea mejor que otro”.

En este trabajo, [95], se proponen 16 criterios para evaluar a los MDMC, que van desde “Simplicidad de ejecución”, “Procedimiento lógico, matemático”, “Clasificación de elementos tangibles”, “Preservación del ranking y Orden Inverso”, “Fiabilidad y validez de un método”, etc. Para cada criterio, los métodos se valoran como *bajo*, *medio*, o *alto*. El problema es que esta valoración no es trivial. Por ejemplo, en el criterio “Análisis sensitivo”, los

MDMC	Abreviación
MULTIMOORA	MM
RIM	RIM
TOPSIS (Vectorial)	TOP ^{Vec}
TOPSIS (Lineal-Max)	TOP ^{Max}
VIKOR($v = 0$)	VIK ⁰
VIKOR($v = 0.5$)	VIK ^{0.5}
VIKOR($v = 1$)	VIK ¹
WASPAS($\lambda = 0$)	WAS ⁰
WASPAS($\lambda = 0.5$)	WAS ^{0.5}
WASPAS($\lambda = 1$)	WAS ¹

Tabla 3.1: Abreviación asignada a cada MDMC.

autores mencionan que “un método se valora como bajo si concierne a un sólo parámetro, medio si trabajo con dos o tres parámetros, y alto si es capaz de trabajar con más de tres parámetros.”

En este contexto, creemos que es necesario realizar un estudio más extenso que nos permita derivar conclusiones más generales. Por ello, el objetivo de este capítulo es realizar una comparativa de los MDMC mencionados con una cantidad de datos suficiente, tanto en entornos bien definidos como en otros con imprecisión/vaguedad. De esta forma, podremos entender mejor sus similitudes y diferencias según los resultados proporcionados, y podremos dar unas pautas de su comportamiento, adelantando conocimiento al decisor para resolver de forma más eficiente el problema en cuestión.

3.2. Estudio comparativo en escenarios sin imprecisión/vaguedad

En este apartado se va a realizar el estudio comparativo de los MDMC seleccionados con entornos bien definidos (Sección 2.3.2). Tomaremos como base los trabajos [29, 108, 128], en los que se usan diferentes parámetros para el análisis, como el número de alternativas o el número de criterios. Este análisis se hace sobre un conjunto de problemas de decisión generados aleatoriamente.

Se han considerado cinco métodos, y algunas variantes de ellos. Por ejemplo, para TOPSIS hemos considerado dos normalizaciones, la Vectorial y la Transformación Lineal del Máximo; para VIKOR, hemos considerado tres valores de v , $v = \{0, 0.5, 1\}$, que corresponden a los extremos y al punto medio; y lo mismo para WASPAS, del que hemos considerado $\lambda = \{0, 0.5, 1\}$. Para referirnos a cada método y sus variantes, lo haremos con las abreviaciones indicadas en la Tabla 3.1.

Estos métodos se han aplicado a un conjunto de problemas de decisión (matrices de decisión), generados de forma aleatoria, con las siguientes ca-

racterísticas:

- Número de alternativas: $m \in \{3, 5, 10, 15, 20, 50, 100\}$.
- Número de criterios: $n \in \{5, 10, 15, 20\}$.
- Pesos de los criterios: sin pérdida de generalidad, todos se han considerado con el mismo peso, $w_i = 1/n$.
- Valores de las alternativas: los x_{ij} , valor del j -ésimo criterio para la i -ésima alternativa, se han generado aleatoriamente bajo una distribución uniforme comprendida entre $[1, 100]$.
- Número de réplicas: se han generado 100 réplicas para cada combinación posible de m y n , teniendo un total de $7 \times 4 \times 100 = 2800$ problemas, a resolver por cada uno de los MDMC.

El procedimiento del experimento se compone por los siguientes pasos:

1. Generar los problemas de decisión (matrices de decisión).
2. Aplicar los MDMC (Tabla 3.1) a los problemas generados en el Paso 1, obteniendo los rankings correspondientes.
3. Comparar los rankings de los distintos MDMC dos a dos mediante, el coeficiente de correlación de Spearman (ρ) [74]:

$$\rho = 1 - \frac{6 * \sum D^2}{N(N^2 - 1)} \quad (3.1)$$

donde $D = r_x - r_y$, la diferencia de las posiciones o rangos de X e Y , y N es el número de pares $X - Y$.

Si este coeficiente vale 1, quiere decir que los rankings obtenidos han sido idénticos, si el coeficiente vale 0, implica que los rankings son distintos, y, si el coeficiente toma el valor -1, indica que los rankings comparados están invertidos.

4. Analizar las similitudes y diferencias entre los métodos según el valor de correlación obtenido en el Paso 3.

Tanto la implementación de los métodos, como la generación de los datos se ha desarrollado en el entorno de trabajo R-Project [8]. La descripción de la implementación de los métodos y ejemplos prácticos, se puede encontrar detallada más adelante, en el Capítulo 6.

3.2.1. Descripción de los resultados

Para cada par de métodos, se considera la media y la desviación típica de ρ de las 100 matrices generadas para cada combinación, a los cuales denotaremos como $\bar{\rho}$ y σ , respectivamente.

De los resultados obtenidos para todos los problemas generados, hemos realizado las siguientes tareas:

1. Los analizamos desde un punto de vista global, considerando todas las combinaciones del número de criterios y del número de alternativas al mismo tiempo.
2. Luego los analizamos de una forma más concreta, centrándonos en la influencia del número de alternativas, m , y del número de criterios, n . De esta forma veremos si tanto m como n influyen o no en el resultado final.
3. Finalmente, agrupamos los métodos por similitud, por medio de un algoritmo de clustering.

A continuación, se describe el análisis de los resultados obtenidos.

El caso de VIKOR

Antes de analizar los resultados, nos vamos a centrar en VIKOR. Ello se debe a que hemos observado un comportamiento diferente al resto de métodos.

Concretamente, se ha visto que en ocasiones no ha podido dar solución al problema. Ello depende de que analicemos VIK^0 , $\text{VIK}^{0.5}$ o VIK^1 . Así, al considerar el parámetro $v = 0$ y $v = 0.5$, nos encontramos que 636 problemas no obtienen solución para cada valor de v .

La razón por la que hay casos en los que esto sucede, se debe a que las alternativas toman el mismo valor para R_j ; entonces, al calcular $R^+ = \min_j\{R_j\}$ y $R^- = \max_j\{R_j\}$ para la Expr. 2.22, $R^- = R^+$, por lo que se anula el denominador y $Q_j = \infty$. Por este motivo, aunque nosotros sólo hemos considerado $v = 0$ y $v = 0.5$, esto sucede para $\forall v \in [0, 1)$.

En la Figura 3.1 se muestra la cantidad de problemas no resueltos por VIKOR con los valores del parámetro $v = 0$ y $v = 0.5$ (que han sido los mismos) según el número de alternativas, m , y el número de criterios, n . En ella se aprecia que conforme aumenta m , disminuyen los problemas no resueltos. Por otro lado, si n aumenta, también lo hacen los problemas no resueltos, no habiendo ningún problema resuelto para la combinación $n = 20$ y $m = 3$. Cuando $m \geq 15$ ya se resuelven todos los problemas, independientemente del número de criterios.

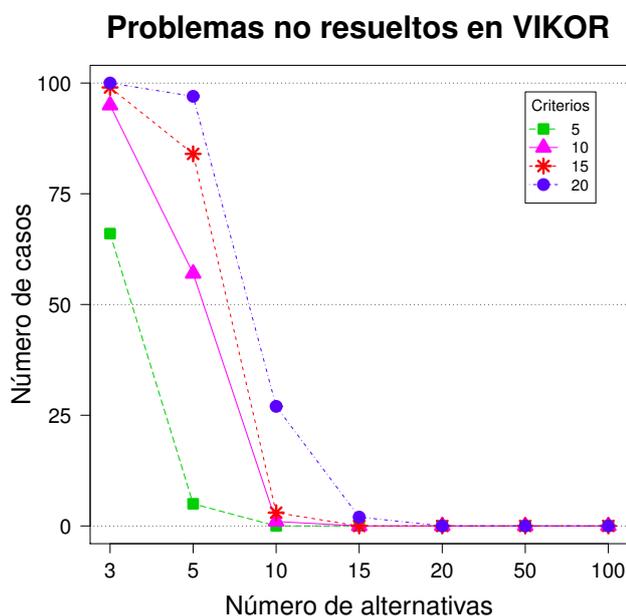


Figura 3.1: Problemas no resueltos por VIKOR considerando $v = 0$ y $v = 0.5$.

Resultados globales de la comparación

En este apartado nos vamos a centrar en el primer punto del estudio, analizándose los resultados obtenidos de forma global, considerando los resultados de todas las combinaciones del número de alternativas y de criterios.

Teniendo en cuenta la peculiaridad de VIKOR, hemos tenido que descartar los problemas en los que no se ha obtenido solución, es decir, 1272 casos del total. De esta forma, trabajamos sobre 26728 casos en los que los MDMC han resuelto el problema.

En la Tabla 3.2 se muestran los resultados en términos de $\bar{\rho}$ (matriz triangular superior) y de σ (matriz triangular inferior) para los casos resueltos.

Si nos centramos en los valores medios, podemos observar que hay cuatro pares de métodos que tienen un valor de $\bar{\rho}$ muy alto: WAS^1-VIK^1 , WAS^1-RIM , $WAS^{0.5}-WAS^0$ y $TOP^{Max}-RIM$ (texto en negrita en la matriz triangular superior de la Tabla 3.2), con un valor de $\bar{\rho} \geq 0.96$. Ello indica que los métodos son muy similares, como ya hemos dicho.

Además, los valores de σ para estos pares de métodos son prácticamente nulos: $\sigma \leq 0.067$ (texto en negrita en la matriz triangular inferior de la misma Tabla), indicando que apenas hay dispersión en sus resultados. Por lo que, cuando se consideran los problemas de forma general, los rankings provistos por estos pares de métodos, se pueden considerar idénticos.

Si ahora pasamos a analizar aquellos pares que han obtenido los valores más bajos de $\bar{\rho}$ ($\bar{\rho} \approx 0.4$, texto subrayado en la matriz triangular superior de la Tabla 3.2), se puede observar que tales valores siempre coinciden en la comparación de VIK^0 con el resto de métodos, concretamente con TOP^{Max} , VIK^1 , WAS^1 y RIM . Además, si se observan sus valores correspondientes de la desviación típica (texto subrayado en la matriz triangular inferior de la misma tabla), son los más altos, con $\sigma \approx 0.23$. Es decir, los rankings proporcionados por VIK^0 (VIKOR con $v = 0$), tienen muy poca semejanza con el resto de métodos.

En la Figura 3.2 se muestra un diagrama de cajas correspondiente a los resultados obtenidos. El eje Y representa el valor de ρ , y en el eje X el par de métodos ordenados por el valor $\bar{\rho}$ de mayor a menor.

Como se puede apreciar, en la Figura 3.2.a hay cuatro pares de métodos que tienen muy poca dispersión en los datos, éstos corresponden con las medias más altas: $\text{WAS}^1\text{-VIK}^1$, $\text{WAS}^1\text{-RIM}$, $\text{WAS}^{0.5}\text{-WAS}^0$ y $\text{TOP}^{Max}\text{-RIM}$. Por el contrario, las comparaciones con VIK^0 ocupan las últimas posiciones en esta gráfica, Figura 3.2.c, en las que hay mucha dispersión en los datos. Ésto hace que σ sea alto y a la vez que los valores de $\bar{\rho}$ sean los más bajos. Ésto se hace más evidente en los últimos cuatro pares, que son las comparativas de VIK^0 con TOP^{Max} , VIK^1 , WAS^1 y RIM . Para el resto de pares, Figura 3.2.b, vemos que sus valores medios $\bar{\rho} \geq 0.8252$.

Otro punto a considerar es que ha habido casos en los que se han obtenido valores negativos de ρ , implicando que los rankings se han invertido, llegando incluso a inversiones totales ($\rho = -1$). Aunque ha habido casos en la mayoría de los métodos, en las comparativas con VIK^0 ha sido más notable, especialmente cuando se consideran pocas alternativas.

	RIM	MM	TOP ^{Vec}	TOP ^{Max}	VIK ⁰	VIK ^{0.5}	VIK ¹	WAS ⁰	WAS ^{0.5}	WAS ¹
RIM	-	0.8663	0.9253	0.9617	0.4944	0.8585	0.9467	0.8535	0.9281	0.9708
MM	0.1295	-	0.9076	0.8964	0.6263	0.8821	0.8601	0.9450	0.9018	0.8914
TOP ^{Vec}	0.0996	0.0930	-	0.9116	0.5030	0.8252	0.9090	0.8627	0.9317	0.9515
TOP ^{Max}	0.0670	0.1045	0.1153	-	0.4038	0.8378	0.9482	0.8377	0.9432	0.9412
VIK ⁰	0.2337	0.2069	0.2276	0.2223	-	0.6713	0.4267	0.5628	0.5006	0.4264
VIK ^{0.5}	0.1345	0.1177	0.1548	0.1159	0.1664	-	0.8876	0.8668	0.8764	0.8695
VIK ¹	0.0797	0.1320	0.1120	0.0803	0.2315	0.0921	-	0.8433	0.9115	0.9772
WAS ⁰	0.1300	0.0919	0.1256	0.1494	0.1905	0.0970	0.1121	-	0.9659	0.8656
WAS ^{0.5}	0.0866	0.1243	0.0803	0.0699	0.2055	0.0976	0.0737	0.0368	-	0.9322
WAS ¹	0.0545	0.1000	0.0677	0.0904	0.2239	0.1016	0.0339	0.0898	0.0514	-

Tabla 3.2: Comparación por pares de métodos sobre los 26728 problemas. En la matriz triangular superior se muestra la media de ρ y en la matriz triangular inferior la desviación típica.

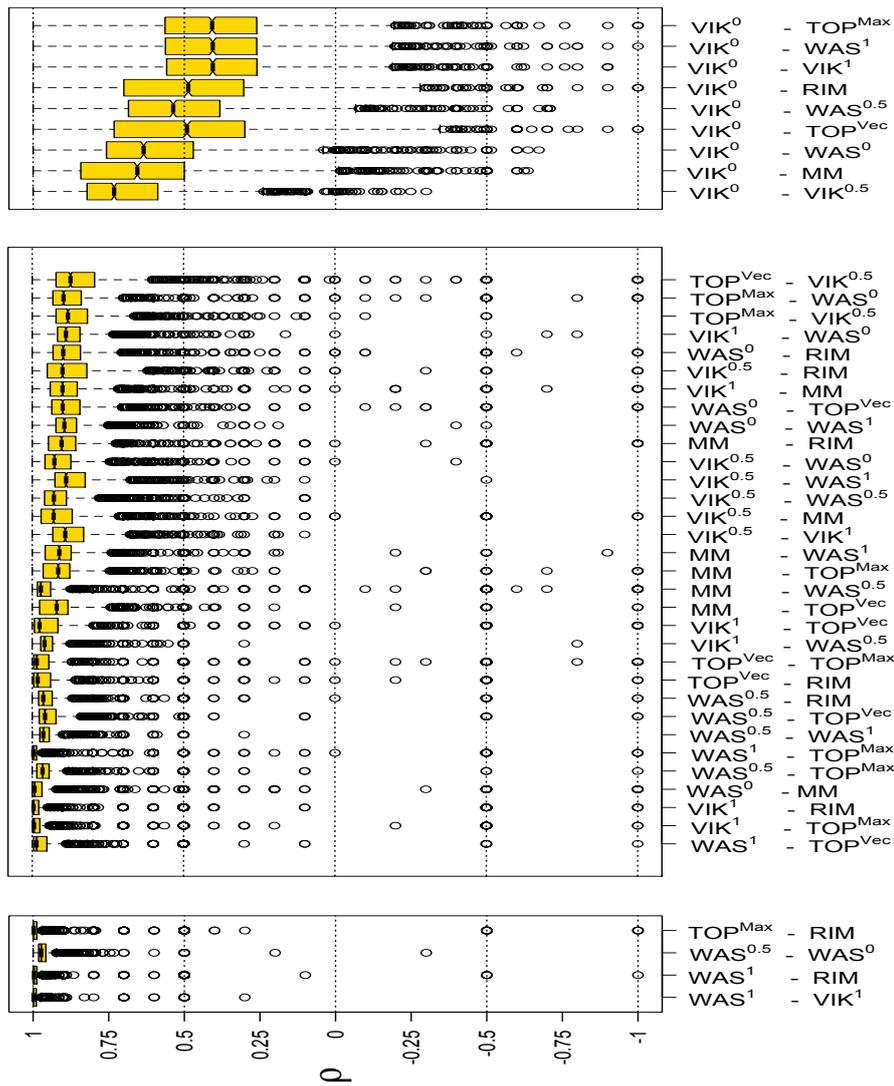


Figura 3.2: Datos globales por método.

Influencia del número de alternativas y del número de criterios

En este apartado se analizan los valores medios del coeficiente de Spearman, $\bar{\rho}$, considerando tanto el número de alternativas como el número de criterios. De esta forma, podremos analizar la influencia de estos dos parámetros $\{m\}$ y $\{n\}$ en los resultados obtenidos.

En la Figura 3.3 se muestra el valor medio del coeficiente de correlación para cada par de métodos, según el número de alternativas, ordenados de mayor a menor según el valor de $\bar{\rho}$ y tomando como referencia $m = 100$.

Como se puede ver en dicha figura, se observa que la serie para $m = 100$ tiene los valores medios más altos, y que la serie $m = 3$ tiene los más bajos. Por ello, deducimos que conforme aumenta el número de alternativas, también lo hace el valor medio de ρ , es decir, aumenta la similitud entre los rankings. Hay que comentar que VIK⁰ es el método que tiene menos similitud con respecto a los otros. Además, si sólo contamos con 3 alternativas para este método, hay mucha irregularidad en los resultados, haciéndose más estable conforme van aumentando el número de alternativas.

En la Figura 3.4 se muestran los valores medios del coeficiente de correlación según el número de criterios, también ordenados de mayor a menor y tomando como referencia $n = 5$. En esta figura, se puede apreciar que no hay cambios relevantes según varía este parámetro, excepto cuando se hacen las comparativas con VIK⁰, en las que sí se aprecia que según aumenta el número de criterios disminuye el valor de $\bar{\rho}$.

Análisis de clustering

Con el fin de afianzar nuestros resultados, aplicamos un algoritmo de clustering jerárquico para dar una visión más clara de sus similitudes y diferencias. Para ello, cada MDMC se considera como “objeto” y tomamos la matriz de la media del índice de correlación como medida de similitud.

Este algoritmo, realiza el clustering aplicando el método de las *K-medias*, que agrupa los objetos en los grupos de tal forma que se minimice la suma de los cuadrados dentro de cada grupo.

El resultado del clustering se muestra en la Figura 3.5, donde se pueden apreciar tres grupos principales. Uno formado sólo por VIK⁰ y muy alejado del resto, siendo este método el que tiene los valores medios de correlación más bajos.

Los otros grupos están más próximos entre ellos. Uno lo forman MM, WAS⁰ y, relativamente cercano, VIK0.5, y el otro WAS^{0.5}, TOP^{Vec}, TOP^{Max}, RIM, VIK¹ y WAS¹. Al mismo tiempo, este último grupo se podría dividir en dos subgrupos, uno formado por WAS^{0.5} y TOP^{Vec}, y el otro grupo formado por TOP^{Max}, RIM, VIK¹ y WAS¹. Además, este último subgrupo coinciden con los pares de MDMC que tienen los valores medios de correlación más altos.

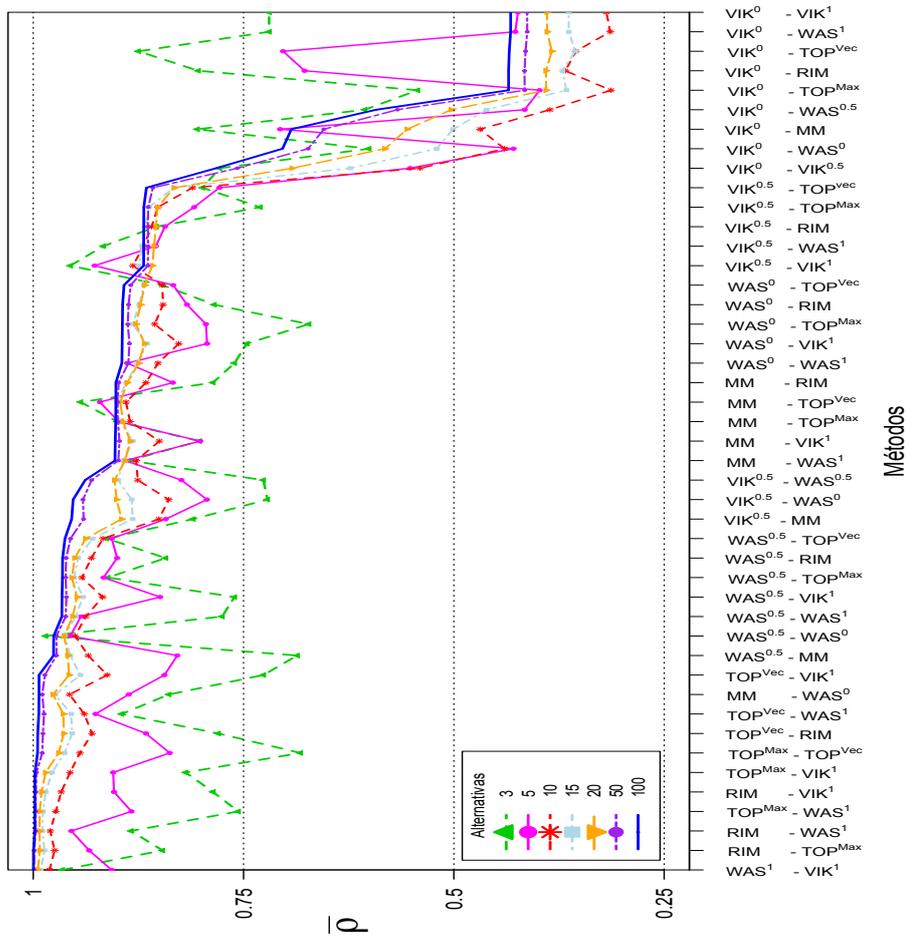


Figura 3-3: Datos globales para cada valor del número de alternativas (ordenados por $m = 100$).

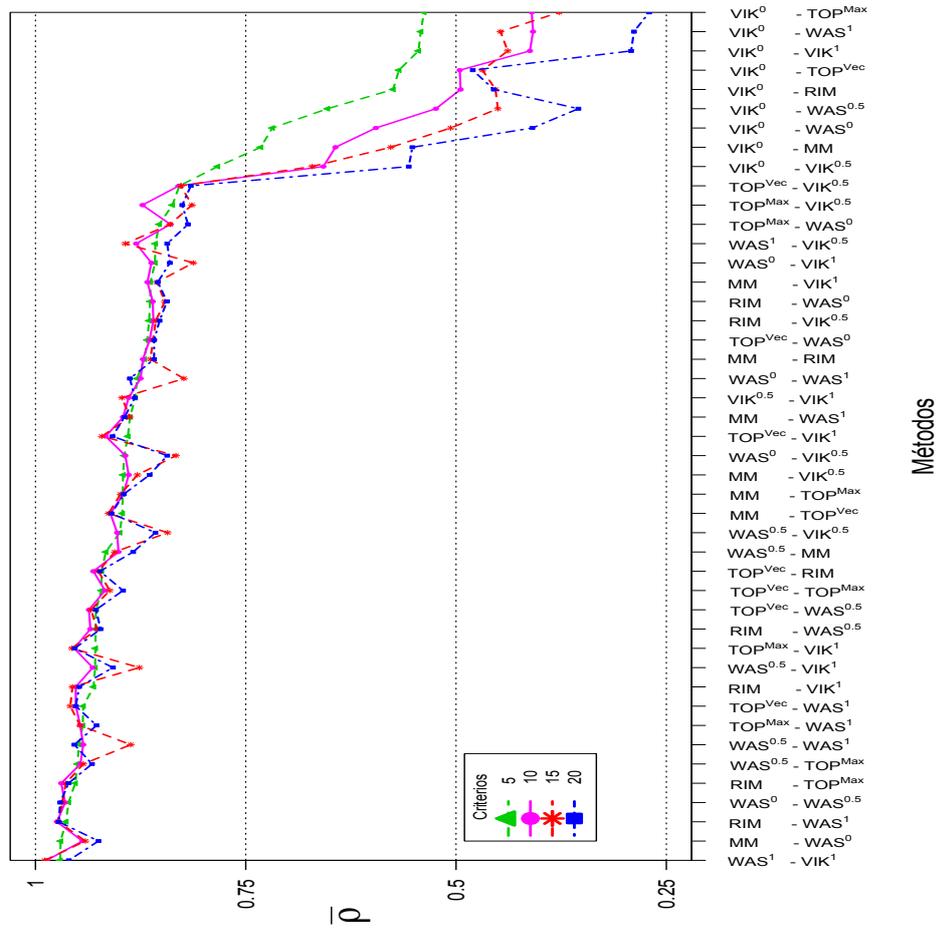


Figura 3.4: Datos globales para cada valor del número de criterios (ordenados por $n = 5$).

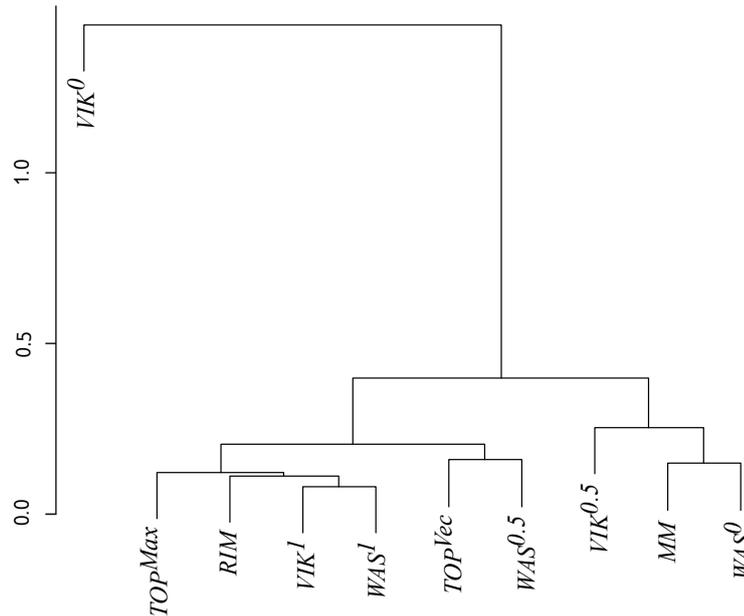


Figura 3.5: Clustering jerárquico de los MDMC según el valor medio de ρ .

3.3. Estudio comparativo en escenarios con imprecisión/vaguedad

Del mismo modo que hemos hecho el estudio comparativo de los MDMC para escenarios bien definidos, lo haremos para escenarios con imprecisión/vaguedad. Los métodos serán los mismos que en el apartado anterior, pero en su versión difusa, cuya descripción se encuentra en el Apéndice A. En este caso, hemos tenido que descartar RIM, ya que en el momento de la redacción de esta tesis, su versión difusa no se encontraba publicada. Para el resto de métodos se han tomado las mismas configuraciones que las descritas anteriormente. Para referirnos a cada uno, lo haremos con las abreviaciones indicadas en la Tabla 3.1.

En este caso, hemos considerado imprecisión/vaguedad tanto en los pesos como en las valoraciones de las alternativas para cada criterio. Como ya se comentó, esta imprecisión/vaguedad se representa por medio de números triangulares difusos, y denotaremos \tilde{w}_j para los pesos y \tilde{x}_{ij} para las valoraciones de las alternativas, siendo $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,n$.

Estos métodos se han aplicado a un conjunto de problemas de decisión (matrices de decisión), generados aleatoriamente, con las siguientes características:

- Número de alternativas: $m \in \{3, 5, 10, 15, 20, 50, 100\}$.
- Número de criterios: $n \in \{5, 10, 15, 20\}$.

- Pesos de los criterios: sin pérdida de generalidad, todos se han considerado con el mismo peso y se han generado de la siguiente forma:

$$\tilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}) = \begin{cases} w_{j1} = 1/n - (0.1 * 1/n) \\ w_{j2} = 1/n \\ w_{j3} = 1/n + (0.1 * 1/n) \end{cases}$$

donde $j=1,2,\dots,n$.

- Valores de las alternativas: los \tilde{x}_{ij} , valor del j -ésimo criterio para la i -ésima alternativa, generados aleatoriamente bajo una distribución uniforme comprendida entre $[1, 100]$ ($\cup(1, 100)$), de la siguiente forma:

$$\tilde{x}_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3}) = \begin{cases} x_{ij1} \in x_{ij2} - \cup(1, 10) * x_{ij2}/100 \\ x_{ij2} \in \cup(1, 100) \\ x_{ij3} \in x_{ij2} + \cup(1, 10) * x_{ij2}/100 \end{cases}$$

donde $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ y para más generalidad no tienen por qué ser simétricos.

- Número de réplicas: se han generado 100 problemas de decisión para cada combinación posible de m y n , teniendo un total de $7 \times 4 \times 100 = 2800$ problemas a resolver por cada MDMC.

El procedimiento del experimento ha sido el mismo que en el caso anterior:

1. Generar los problemas de decisión (matrices de decisión).
2. Aplicar los MDMC (Tabla 3.1) a los problemas generados en el Paso 1, obteniendo los rankings correspondientes.
3. Comparar los rankings por pares de métodos con el coeficiente de correlación de Spearman (ρ) [74]:

$$\rho = 1 - \frac{6 * \sum D^2}{N(N^2 - 1)} \quad (3.2)$$

donde $D = r_x - r_y$, la diferencia de los rangos de X e Y , y N es el número de pares $X - Y$.

Si este coeficiente vale 1, quiere decir que los rankings obtenidos han sido idénticos, si el coeficiente vale 0, implica que los rankings son distintos, y, si el coeficiente toma el valor -1, indica que los rankings comparados están invertidos.

4. Analizar las similitudes y diferencias entre los métodos según el valor de correlación obtenido en el Paso 3.

3.3.1. Descripción de los resultados

Para cada par de métodos, al igual que para entornos precisos, se considera la media y la desviación típica de ρ , a los cuales también denotaremos como $\bar{\rho}$ y σ , respectivamente. Destacar que, en este tipo de escenarios, tenemos la primera diferencia con el caso de datos precisos, y es que VIKOR ha resuelto todos los problemas.

De los resultados obtenidos para todos los problemas generados, hemos realizado las mismas tareas que para datos precisos:

1. Los analizamos desde un punto de vista global, considerando todas las combinaciones de número de criterios y del número de alternativas al mismo tiempo.
2. Luego, nos centraremos en la influencia del número de alternativas y del número de criterios en los resultados.
3. Finalmente, agrupamos los métodos por similitudes, por medio de un algoritmo de clustering.

A continuación, describimos el análisis de los resultados obtenidos.

Resultados globales de la comparación

En este apartado vamos a analizar los resultados obtenidos de forma global, considerando los resultados de todas las combinaciones del número de alternativas y de criterios de manera conjunta.

En la Tabla 3.3 se muestran los resultados en términos de $\bar{\rho}$ (matriz triangular superior) y de σ (matriz triangular inferior).

Si primero nos centramos en los valores medios (matriz triangular superior de la Tabla 3.3), podemos observar que hay tres pares de métodos que tienen un valor de $\bar{\rho}$ muy cercano a 1: WAS^1-TOP^{Max} , WAS^1-VIK^1 y $TOP^{Max}-VIK^1$ (texto en negrita), con un valor de $\bar{\rho} \geq 0.97$. Como dijimos, eso significa que los resultados que aportan estos tres métodos son prácticamente los mismos.

Además, los valores de σ para estos pares de métodos son prácticamente nulos: $\sigma \leq 0.0554$ (texto en negrita en la matriz triangular inferior de la misma tabla), es decir, apenas hay dispersión en los resultados. Por ello, cuando se consideran los 2800 problemas, los rankings provistos por TOP^{Max} (TOPSIS con la normalización lineal del máximo), WAS^1 (WASPAS con $\lambda = 1$) y VIK^1 (VIKOR con $v = 1$), son prácticamente idénticos.

Si ahora pasamos a analizar aquellos pares que han obtenido los valores más bajos de $\bar{\rho}$ ($\bar{\rho} \approx 0.4$, texto subrayado en la matriz triangular superior de la Tabla 3.3), se puede observar que esos valores siempre coinciden en la comparación de VIK^0 , especialmente cuando se compara con TOP^{Vec} , TOP^{Max} , VIK^1 y WAS^1 . Además, si se observan sus valores correspondientes

de la desviación típica (texto subrayado en la matriz triangular inferior de la misma tabla), son los más altos, con $\sigma \approx 0.28$, es decir, hay bastante dispersión en los resultados.

De esta forma, podemos afirmar que los rankings proporcionados por VIK^0 (VIKOR con $v = 0$), tienen muy poca similitud con el resto de métodos, ya que, tienen los valores más bajos de correlación, y también son muy dispersos.

La Figura 3.6 muestra un diagrama de cajas correspondiente a los datos obtenidos. El eje Y representa el valor de ρ , y en el eje X los pares de métodos ordenados de mayor a menor valor de $\bar{\rho}$.

Como se puede apreciar, en la Figura 3.6.a hay tres pares de métodos que tienen valores medios muy altos, y además, muy poca dispersión en los datos. Éstos pares corresponden a los métodos: TOP^{Max} , WAS^1 y VIK^1 . Ello implica que aplicar uno u otro es indiferente.

Por el contrario, las comparaciones con VIK^0 ocupan las últimas posiciones en esta gráfica, Figura 3.6.c, es decir, los valores medios son los más bajos; además se aprecia mucha dispersión en los datos. Esto es especialmente notable en los últimos cuatro pares, que son las comparativas de VIK^0 con TOP^{Vec} , TOP^{Max} , VIK^1 y WAS^1 . Para el resto de pares de métodos, Figura 3.6.b, vemos que los valores medios parten de $\bar{\rho} \geq 0.8311$.

Otro punto a considerar es que ha habido casos en los que se han obtenido valores negativos de ρ , implicando que ha habido casos en los que los rankings se han invertido, llegando incluso a inversiones totales ($\rho = -1$). Aunque ha habido casos en la mayoría de los métodos, en las comparativas con VIK^0 ha sido más notable, especialmente cuando se consideran pocas alternativas.

	MM	TOP ^{Vec}	TOP ^{Max}	VIK ⁰	VIK ^{0.5}	VIK ¹	WAS ⁰	WAS ^{0.5}	WAS ¹
MM	-	0.8798	0.8739	0.5715	0.8825	0.8493	0.9694	0.9458	0.8744
TOP ^{Vec}	0.1226	-	0.9321	0.4082	0.8334	0.9033	0.8506	0.9158	0.9327
TOP ^{Max}	0.1206	0.0989	-	0.4102	0.8822	0.9719	0.8551	0.9379	0.9991
VIK ⁰	0.2464	0.2837	0.2814	-	0.6632	0.3991	0.5955	0.5228	0.4101
VIK ^{0.5}	0.1202	0.1509	0.1031	0.2222	-	0.8867	0.8798	0.9084	0.8818
VIK ¹	0.1416	0.1252	0.0554	0.2857	0.0971	-	0.8311	0.9152	0.9715
WAS ⁰	0.0589	0.1358	0.1280	0.2396	0.1212	0.1500	-	0.9510	0.8557
WAS ^{0.5}	0.0703	0.1013	0.0795	0.2551	0.0958	0.1036	0.0666	-	0.9384
WAS ¹	0.1204	0.0987	0.0069	0.2813	0.1032	0.0552	0.1280	0.0794	-

Tabla 3.3: Comparación por pares de métodos sobre los 25200 problemas. En la matriz triangular superior se muestra la media de ρ y en la matriz triangular inferior la desviación típica.

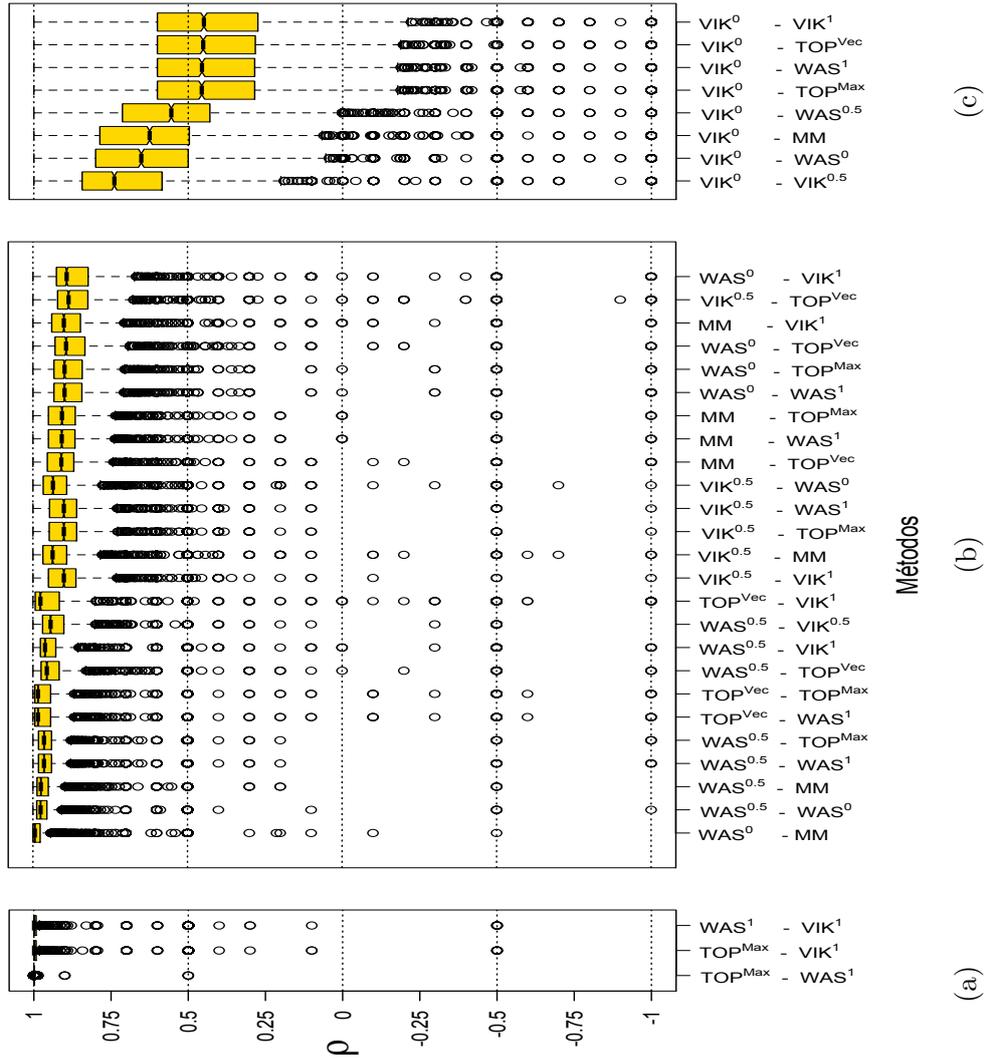


Figura 3.6: Datos globales por método.

Influencia del número de alternativas y del número de criterios

En este apartado se analizan los valores medios del coeficiente de Spearman, $\bar{\rho}$, considerando tanto el número de alternativas, m , como el número de criterios, n . De esta forma, podremos analizar la influencia de estos dos parámetros en los resultados obtenidos.

En la Figura 3.7 se muestra el valor medio del coeficiente de correlación para cada par de métodos, según el número de alternativas, ordenados de mayor a menor, tomando como referencia $m = 100$.

Como se puede ver en dicha figura, observamos que la serie para $m = 100$ tiene los valores medios más altos, y que la serie $m = 3$ los más bajos. Por ello, deducimos que conforme aumenta el número de alternativas, también lo hace el valor medio de ρ , es decir, aumenta la similitud entre los rankings.

En la Figura 3.8 se muestran los valores medios del coeficiente de correlación de acuerdo al número de criterios, también ordenados de mayor a menor tomando como referencia $n = 5$. En esta figura, se puede apreciar que no hay cambios relevantes, a excepción de las comparativas con VIK^0 , donde se aprecia que según aumenta el número de criterios disminuye el valor de ρ .

Análisis de clustering

Al igual que en los resultados para escenarios precisos, aplicaremos un algoritmo de clustering jerárquico para agrupar los métodos y obtener una visión más clara de sus similitudes y diferencias entre ellos. Para ésto, cada MDMC se considera como “objeto” y la tabla de la media del índice de correlación la tomamos como medida de similitud.

Este algoritmo, realiza el clustering aplicando el método de las *K-medias*, que agrupa los objetos en los grupos de tal forma que se minimice la suma de los cuadrados dentro de cada grupo.

El resultado se puede ver en la Figura 3.9, donde se aprecian tres principales grupos, al igual que en el caso con datos precisos. Uno formado sólo por VIK^0 y que es el que está más alejado del resto de métodos. Además, VIK^0 es el grupo que tiene los valores de correlación más bajos.

Los otros dos grupos están más próximos entre sí, uno formado por MM, WAS^0 , $WAS^{0.5}$ y $VIK^{0.5}$, y el otro formado por TOP^{Vec} , TOP^{Max} , VIK^1 y WAS^1 . Como se puede comprobar, los métodos que tienen los mayores valores de correlación, que son TOP^{Max} , VIK^1 y WAS^1 , están agrupados juntos, al igual que sucedía en el caso de escenarios con datos bien definidos.

Las tablas detalladas con los resultados de la comparativa se pueden encontrar en el Apéndice B.

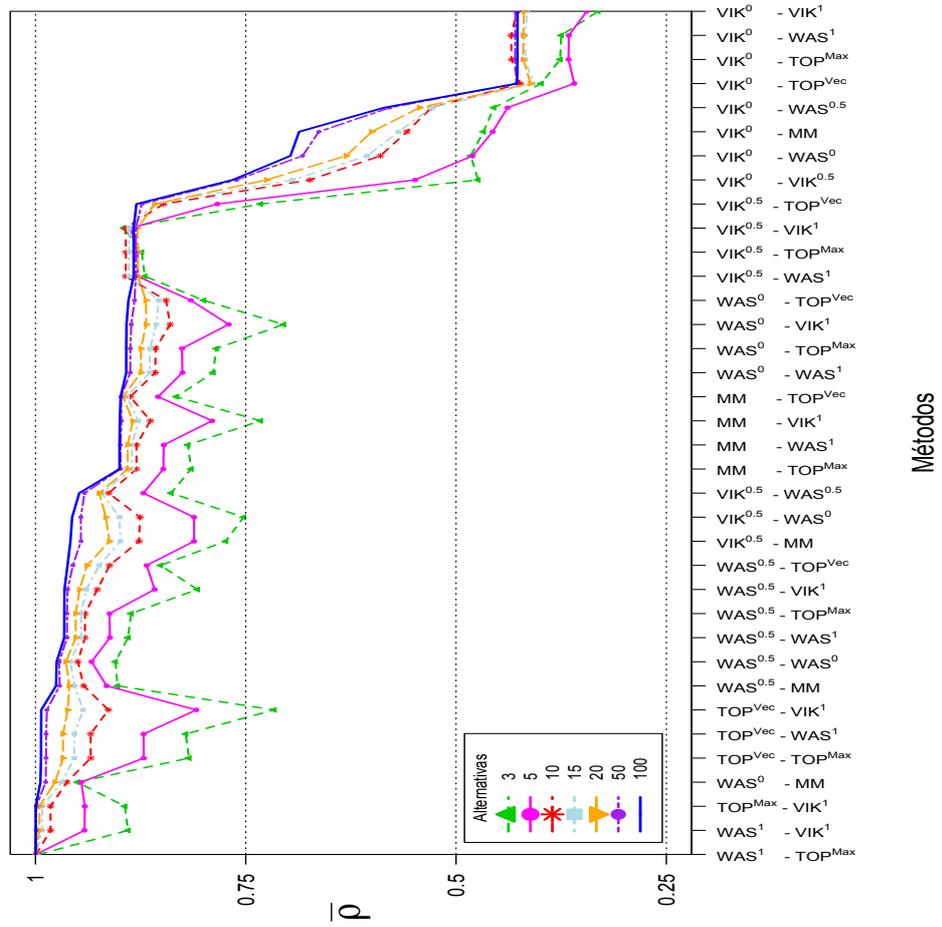
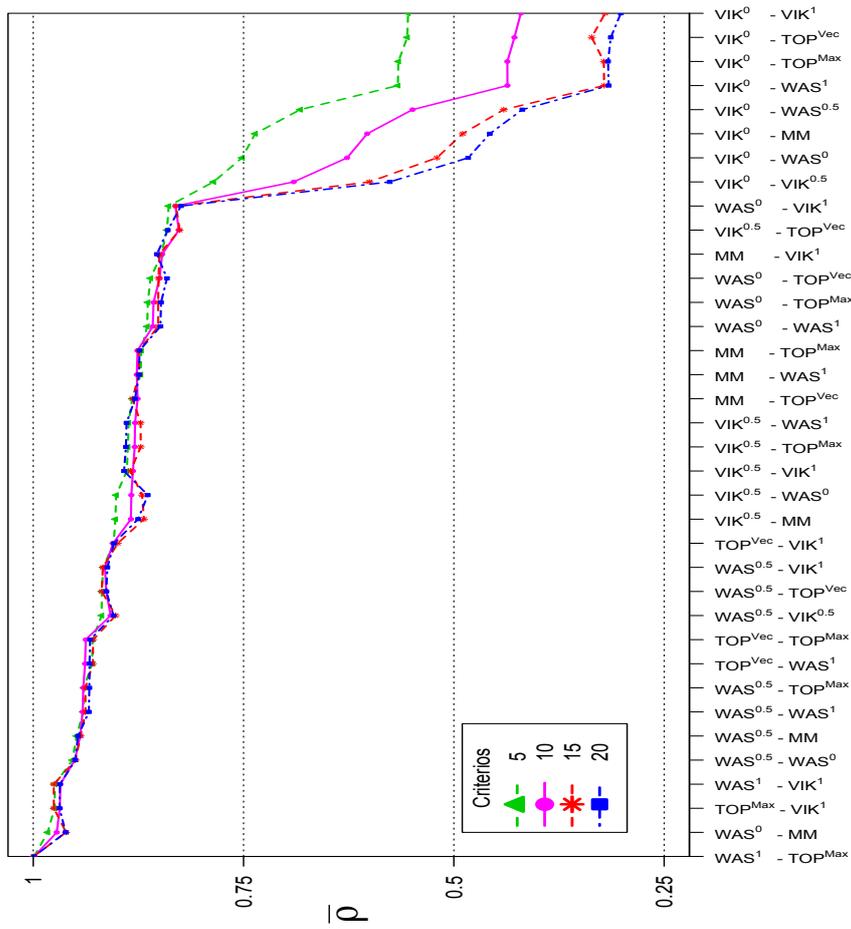


Figura 3.7: Datos globales para cada valor del número de alternativas (ordenados por $m = 100$).



Métodos

Figura 3.8: Datos globales para cada valor del número de criterios (ordenados por $n = 5$).

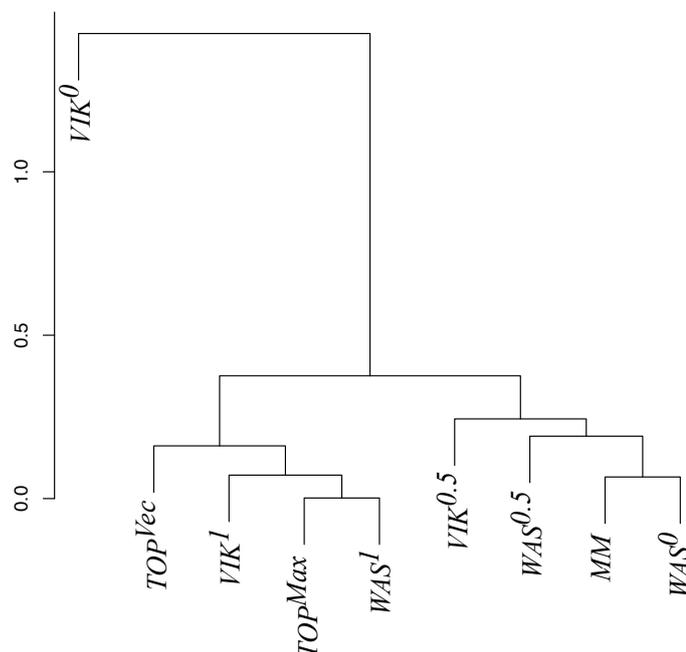


Figura 3.9: Clustering jerárquico de los métodos según el valor medio de ρ .

3.4. Similitudes y diferencias de los escenarios con y sin imprecisión/vaguedad

En este apartado se pretende contrastar los resultados obtenidos en los dos experimentos realizados sobre la comparativa de métodos: uno en un escenario bien definido y otro en un escenario en el que la imprecisión o vaguedad se haga presente. Para ello, analizaremos las similitudes y las diferencias que ha habido de uno a otro.

Para escenarios precisos hemos visto que hay cuatro pares de métodos que han obtenido un valor muy alto de $\bar{\rho}$: WAS^1 - VIK^1 , WAS^1 -RIM, $WAS^{0.5}$ - WAS^0 y TOP^{Max} -RIM, con $\bar{\rho} \geq 0.9617$ y $\sigma \leq 0.0670$. Por el contrario, en las comparativas de VIK^0 se ha visto que son los valores más bajos, con $\bar{\rho} \leq 0.6713$ y con los mayores valores de σ .

Para escenarios con imprecisión/vaguedad podemos decir que hay tres métodos que obtienen resultados muy semejantes, que son TOP^{Max} , WAS^1 y VIK^1 con un valor de $\bar{\rho} \geq 0.9715$ y $\sigma \leq 0.0554$. Vemos que son los mismos métodos que para datos precisos, salvo que no aparece RIM, ya que este método no se ha tenido en cuenta para datos difusos. De nuevo, las comparativas de VIK^0 con el resto de métodos, se ha visto que son los valores más bajos, con $\bar{\rho} \leq 0.6632$ y con los mayores valores de σ .

De esta forma, podemos decir que una similitud entre ambos escenarios es que los métodos TOP^{Max} , WAS^1 y VIK^1 han obtenido resultados prácticamente iguales, y que VIK^0 es el método que más discrepancias ha obtenido con el resto de métodos.

Con respecto a la influencia del número de alternativas y del número de criterios, también se puede destacar otra similitud de ambos escenarios, y es que se ha observado que según aumenta el número de alternativas también lo hace el valor de $\bar{\rho}$, es decir, más similares son los resultados entre los métodos. En cambio, para el número de criterios se ha visto que no hay relación con los resultados, excepto para VIK^0 , en el que conforme aumenta el número de criterios, disminuye la similitud de los resultados.

Otra similitud es con respecto al impacto de los parámetros v y λ en VIKOR y WASPAS, respectivamente. Este hecho se hace claro en el análisis de clustering (Figura 3.10). Por ejemplo, para los tres valores que hemos considerado de v se aprecia que en ambos escenarios, éstos están repartidos en distintos grupos. Algo similar ocurre con λ para WASPAS, pero de forma más suave: WAS^1 está claramente en otro grupo de WAS^0 , pero $WAS^{0.5}$ mantiene similitud con ambos. Para las dos versiones de TOPSIS, en ambos escenarios se puede ver que se agrupan juntos, pudiendo deducir que la normalización en este método tiene poca influencia en los resultados.

Una diferencia que hemos notado, ha sido para el método VIKOR. En escenarios precisos, para VIK^0 y $VIK^{0.5}$ ha habido ocasiones en las que no ha sido posible devolver una solución, debido a que se han obtenido indeterminaciones en los cálculos, especialmente cuando hay muchos criterios y pocas alternativas. En escenarios con imprecisión/vaguedad, siempre ha sido posible obtener una solución, ya que no se han obtenido indeterminaciones.

Para concluir, si comparamos los resultados de clustering en ambos escenarios, en la Figura 3.10, se puede apreciar que los resultados no son tan distintos: ambos coinciden en que el método VIK^0 es el que más discrepa del resto de MDMC y con gran diferencia, y para el resto de MDMC, se guardan las similitudes entre las agrupaciones de los métodos, como por ejemplo, para $VIK^{0.5}$, MM y WAS^0 se mantienen en el mismo grupo para los dos tipos de escenarios. Lo mismo sucede para VIK^1 , TOP^{Vec} y WAS^1 . La diferencia más notable que ha habido de un escenario al otro, ha sido en los métodos TOP^{Max} y $WAS^{0.5}$, que en escenarios con incertidumbre, han sido clasificados en distinto grupo.

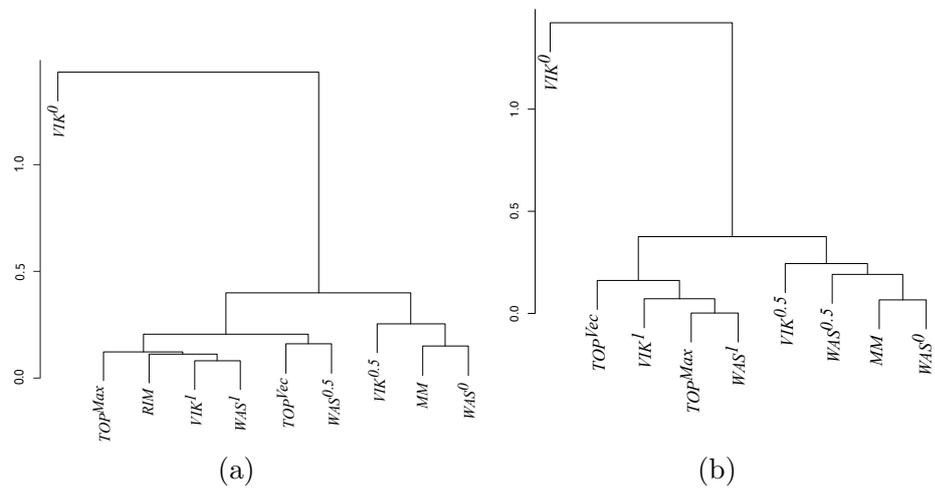


Figura 3.10: Clustering jerárquico de los métodos según su valor medio de ρ para (a) escenarios sin imprecisión/vaguedad y para (b) escenarios con imprecisión/vaguedad.

Capítulo 4

Análisis del Orden Inverso en los Métodos de Decisión Multi-Criterio

Con el fin de abordar la segunda problemática que se planteó en el Capítulo 2, en este capítulo nos vamos a centrar en realizar un análisis empírico del Orden Inverso (OI) para los Métodos de Decisión Multi-Criterio (MDMC) seleccionados en esta tesis.

Este estudio se realiza sobre un conjunto de datos formado por problemas de decisión con distintas dimensiones, generado aleatoriamente. Con ello, será posible analizar qué parámetros influyen en este fenómeno. Además, consideramos tanto entornos bien definidos, como entornos con imprecisión/vaguedad. De esta forma, continuamos en el mismo contexto que venimos haciendo hasta ahora.

4.1. Introducción

La segunda problemática que planteamos en esta tesis trata sobre el fenómeno del OI (o en inglés “Rank Reversal”) en los MDMC [16, 40, 98]. Tal fenómeno consiste en la alteración del ranking cuando se hacen modificaciones en el conjunto de alternativas. Explicado de otra forma, el OI se da cuando se tiene un problema de decisión al que se le aplica un método y se obtiene un ranking determinado. Por cualquier motivo a posteriori, se hace necesario modificar el problema añadiendo una nueva alternativa o eliminando una que ya no es factible, se vuelve a aplicar el mismo método en las mismas condiciones, y el nuevo ranking que se obtiene es diferente al que se obtuvo inicialmente. En el peor de los casos, se podría dar un OI total, en el que el orden de las alternativas es invertido totalmente, es decir, la que era la mejor alternativa pasa a ser la peor, y viceversa.

Cabe decir que si hay variación en los criterios o en los pesos de éstos, no

se considera OI, ya que este tipo de cambios crearía un problema de decisión nuevo [96].

En el capítulo de preliminares, se comentan los axiomas para la preservación del ranking que se establecen en [67] y que idealmente los métodos deben verificar. La preservación del ranking es una cuestión clave en estos métodos. Como se afirma en [96]:

“hay preservación del ranking si el orden previamente establecido del antiguo conjunto de alternativas se mantiene cuando se añaden (o se eliminan) nuevas alternativas, en otro caso, se da el Orden Inverso”.

Este fenómeno se detectó por primera vez en el contexto de AHP [16], cuando los autores observaron cambios en el ranking al añadir copias o alternativas con valoraciones muy similares. En [40] se presenta un ejemplo de OI al añadir una nueva alternativa, y en [110] al eliminar una alternativa del conjunto inicial.

Desde entonces, muchos autores han trabajado sobre este tema, creando una gran controversia. Aunque principalmente este fenómeno se ha estudiado en AHP [15, 16, 39, 40, 51, 69, 106, 110], posteriormente se vió en otros métodos, como DEA [103], PROMETHEE [58, 89, 115], ELECTRE [109, 118, 128] o TOPSIS [47, 119], entre otros.

Algunos autores afirman que la causa de este fenómeno es el proceso de normalización [78, 91]. Incluso, en algunos trabajos se ha demostrado que eliminando el proceso de normalización se evita el OI [15], pero esto no es factible en la realidad, debido a que en la mayoría de los problemas de decisión, los criterios tienen diferentes dominios y se hace necesario normalizarlos para su evaluación.

Por otro lado, lo ideal sería que la evaluación se hiciera de forma independiente para cada alternativa, pero en la realidad esto no sucede, ya que, de algún modo se hacen comparaciones para poder evaluarlas. Por ejemplo, en AHP se hacen comparaciones por pares de alternativas, en TOPSIS y VIKOR se hacen comparaciones a soluciones ideales midiendo las distancias a éstas, o en ELECTRE y PROMETHEE se indican preferencias de una alternativa sobre otra. Incluso, estas comparaciones se puede llegar a hacer de forma inconsciente, ya que cuando se identifica una alternativa, la mente la categoriza y la recuerda, por lo que, nunca se olvida y siempre se hacen comparaciones con ella. En este sentido, es bien sabido que la evaluación de las alternativas no se hace de forma independiente [96]. Así, Saaty y Sagir [96] afirman que:

“la causa del Orden Inverso subyace en dos factores principales que influyen en el ranking de las alternativas: uno es el método de medida y otro es asumir independencia. alternativas entonces es bien sabido que cualquier cosa puede suceder en el ranking”.

MDMC	Abreviación
MULTIMOORA	MM
RIM	RIM
TOPSIS (Vectorial)	TOP ^{Vec}
TOPSIS (Lineal-Max)	TOP ^{Max}
VIKOR($v = 0$)	VIK ⁰
VIKOR($v = 0.5$)	VIK ^{0.5}
VIKOR($v = 1$)	VIK ¹
WASPAS($\lambda = 0$)	WAS ⁰
WASPAS($\lambda = 0.5$)	WAS ^{0.5}
WASPAS($\lambda = 1$)	WAS ¹

Tabla 4.1: Abreviación asignada a cada MDMC.

Saaty y Sagir concluyen que el OI es un tema serio y que surge de forma natural, aunque a veces sea un hecho no deseado en la toma de decisión. Además, sugieren que la mejor forma de preservar el orden es aplicar un procedimiento en el que se cree un valor ideal para cada criterio, y que las alternativas se comparen contra él en la evaluación.

El objetivo de este capítulo es analizar si los métodos seleccionados en esta tesis sufren este fenómeno. Para ello, los aplicaremos al mismo conjunto de datos con los que venimos trabajando, y posteriormente, modificaremos este conjunto y volveremos a aplicar los métodos en las mismas condiciones. Finalmente cotejaremos los rankings obtenidos, y si hay variaciones de uno a otro, podremos deducir que se ha dado el OI. Consideraremos tanto entornos bien definidos, como entornos con imprecisión.

4.2. Análisis empírico del Orden Inverso en escenarios sin imprecisión/vaguedad

En este apartado, se describe el análisis empírico que se han llevado a cabo para poder analizar el OI en los MDMC que se estudian en esta tesis. Para ello, hemos tomado como base los trabajos [42, 118, 128], en los que se tienen en cuenta diferentes parámetros para su análisis, como el número de alternativas, el número de criterios o el MDMC que se aplique. Así se puede estudiar si diferentes factores pueden influir en la aparición de este fenómeno.

Los MDMC que nosotros aplicamos en nuestro experimento son los mismos que hemos descrito en el capítulo anterior: MULTIMOORA, RIM, TOPSIS con dos variantes (la normalización vectorial y la transformación lineal del máximo), VIKOR con tres variantes, $v = \{0, 0.5, 1\}$, y por último, WASPAS con tres variantes también, $\lambda = \{0, 0.5, 1\}$. Para referirnos a cada MDMC y sus variantes, lo haremos con las abreviaciones indicadas en la Tabla 4.1.

En nuestro caso, vamos a generar un conjunto de problemas de decisión, a los que aplicaremos los MDMC mencionados, y obtendremos un ranking. Estos mismos problemas los modificaremos añadiendo dos alternativas al problema. Una alternativa es la A^+ , que representa lo mejor que se puede alcanzar, y la otra es la A^- , que corresponde con lo peor que se puede obtener. Una vez tenemos el problema modificado, volvemos a aplicar los MDMC, y obtenemos un nuevo ranking. Para calcular este último, se desprecian las posiciones de las dos nuevas alternativas, ya que sabemos que ocuparán la primera y la última posición del ranking. Por último, cotejaremos el ranking de los problemas originales, y el de los problemas modificados con las dos alternativas nuevas. De este cotejo, podremos deducir si el OI se ha hecho presente o no.

El conjunto de problemas de decisión (matrices de decisión) que hemos generado de forma aleatoria, tiene las mismas características que el del capítulo anterior, teniendo un total de 2800 problemas a resolver por cada método.

El procedimiento del experimento se compone de los siguientes pasos:

1. Generar los problemas de decisión, a los que denotaremos como $F \in \mathcal{F}$.
2. Aplicar los métodos mencionados (Tabla 4.1) a los problemas generados en el Paso 1, obteniendo los rankings correspondientes.
3. Modificar los problemas generados en el Paso 1 añadiendo dos alternativas, las cuales corresponden a lo mejor que puede suceder, A^+ , y a lo peor que podemos alcanzar en nuestro problema, A^- . A estas matrices modificadas las denotaremos como $F' = F \cup \{A^+, A^-\}$, donde $A^+ = \{100, 100, \dots, 100\}$ y $A^- = \{1, 1, \dots, 1\}$, formando el conjunto \mathcal{F}' .
4. Aplicar de nuevo los métodos (Tabla 4.1) a los problemas generados en el Paso 3, obteniendo los rankings correspondientes.
5. Comparar los rankings obtenidos en el Paso 2, a los que denotaremos como R_F , con los obtenidos en el Paso 4, $R_{F'}$, pero en este caso se descartan A^+ y A^- para el cálculo del ranking, ya que A^+ ocupará la primera posición en todos los rankings y A^- la última.

Al hacer estas comparaciones se nos pueden presentar las siguientes posibilidades:

- **Problemas no resueltos:** son los problemas en los que el método no ha devuelto una solución para las $F \in \mathcal{F}$.
- **Problemas resueltos:** problemas en los que el método ha devuelto un resultado. De estos problemas, consideraremos los siguientes subcasos:

- **Casos estables:** decimos que un caso es estable si los dos rankings obtenidos son iguales, es decir, si $R_F = R_{F'}$.
- **Casos inestables:** si por el contrario, los rankings han variado, $R_F \neq R_{F'}$, significará que se ha dado el OI.
 - **Inversión en la primera posición:** dentro de los casos inestables, comprobaremos si ha habido inversión en la primera posición, ya que en la toma de decisiones esta posición es relevante.

Al igual que en el caso de la comparativa, todo este proceso se ha realizado en el entorno de trabajo R-Project [8], con los MDMC que se han implementado para desarrollar este trabajo, como se describe en el Capítulo 6.

4.2.1. Descripción de los resultados

En este apartado se analizan los resultados obtenidos de las comparativas realizadas apoyándonos en la herramienta SPSS [2]. Primero, estos resultados se muestran considerando el conjunto de problemas, y seguidamente nos centraremos en la influencia del número de alternativas, m , y de criterios, n , en cada método.

Pero antes de esta descripción, nos vamos a centrar en VIKOR. Ello se debe a que hemos observado un comportamiento diferente al resto de métodos, al igual que sucedió con la comparativa de los MDMC, y será preciso tenerlo en cuenta para poder seguir con el análisis que vamos a realizar.

El caso de VIKOR

Partimos de que VIKOR no ha podido dar solución al problema en determinadas ocasiones. Esto ha sucedido en 636 problemas para $v = 0$ y en la misma cantidad para $v = 0.5$, en total, VIKOR no ha podido resolver 1272 problemas de decisión y por ello, hemos tenido que descartarlos en el análisis de los resultados, tal y como ya comentamos en el capítulo anterior.

La razón por la que hay casos en los que VIKOR no puede dar solución se debe a que las alternativas toman el mismo valor para R_j ; entonces, al calcular $R^+ = \min_j\{R_j\}$ y $R^- = \max_j\{R_j\}$ para $Q_i = v \frac{(S_i - S^+)}{(S^- - S^+)} + (1 - v) \frac{(R_i - R^+)}{(R^- - R^+)}$ (Expr. 2.22), $R^- = R^+$, por lo que se anula el denominador y $Q_j = \infty$. Por este motivo, aunque nosotros sólo hemos considerado $v = 0$ y $v = 0.5$, esto sucede para $\forall v \in [0, 1)$.

En la Figura 4.1 se muestra la cantidad de problemas no resueltos por VIKOR con los valores $v = 0$ y $v = 0.5$ (que han sido los mismos) según el número de alternativas, m , y el número de criterios, n . En ella se aprecia

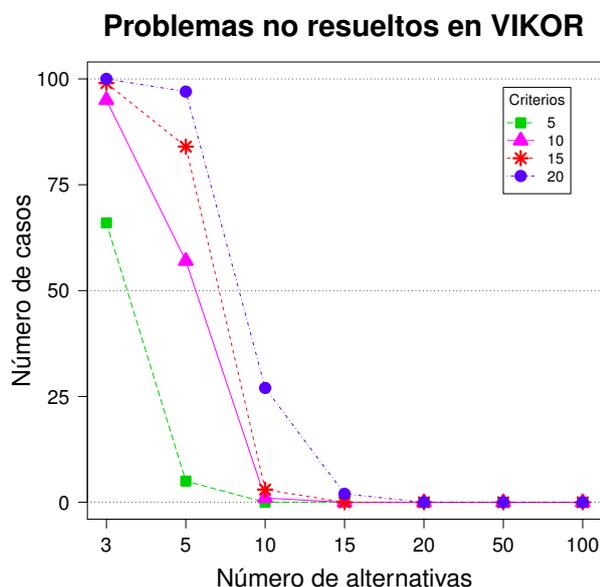


Figura 4.1: Problemas no resueltos por VIKOR con $v = 0$ y $v = 0.5$.

que conforme aumenta m , disminuyen los problemas no resueltos. Por otro lado, si n aumenta, también lo hacen los problemas no resueltos, no habiendo ningún problema resuelto para la combinación $n = 20$ y $m = 3$. Sin embargo, cuando $m \geq 15$ se puede ver que se resuelven todos los problemas.

Destacar que, cuando se ha aplicado VIKOR a los problemas de decisión modificados (F'), siempre se ha obtenido una solución, mientras que para los problemas originales (F) nos hemos encontrado con este inconveniente.

Análisis de los casos estables

En este apartado se van a analizar los casos estables, es decir, aquellos en los que los dos rankings calculados son iguales, $R_F = R_{F'}$. Estos casos, se corresponden con los que no se ha dado OI, ya que después de la modificación de la matriz de decisión, no ha habido cambio en el ranking.

De los problemas que han sido resueltos, 26728 en total, se han contabilizado los casos estables para todas las combinaciones consideradas para cada método, y el resultado se muestra en la Tabla 4.2. Del total de casos resueltos, se puede observar que sólo 10778 han sido estables, aproximadamente un 40%. Es decir, en 15950 casos por lo menos ha habido un cambio entre los rankings, por tanto, aproximadamente un 60% presenta el OI.

En esta misma tabla, se puede observar que los métodos RIM y WAS⁰ son los más estables, ya que RIM presenta el 100% y WAS⁰ el 99.89% de casos estables (sólo presenta tres casos con OI en la combinación de $m = 100$

MDMC	Casos estables
RIM	2800 (100 %)
WAS ⁰	2797 (99.7 %)
WAS ^{0.5}	1279 (45.7 %)
MM	1041 (37.2 %)
WAS ¹	850 (30.3 %)
TOP ^{Max}	683 (24.4 %)
TOP ^{Vec}	648 (23.1 %)
VIK ¹	578 (20.6 %)
VIK ^{0.5}	74 (3.4 %)
VIK ⁰	28 (1.3 %)
Total	10778

Tabla 4.2: Casos estables por MDMC para todos los problemas.

y $n = 5$). Por otra parte, VIKOR ha sido el método que menos casos estables ha obtenido, especialmente cuando $v \neq 1$, que son los casos en los que no se han podido resolver todos los problemas.

Seguidamente pasamos a analizar la influencia del número de alternativas/criterios para cada MDMC que hemos considerado. Para RIM y WAS⁰ no se ha realizado, ya que han obtenido prácticamente el 100 % de casos estables y no hay influencia de estos parámetros.

En las Figuras 4.2 y 4.3 se aprecia para todos los métodos que conforme aumenta el número de alternativas, el número de casos estables disminuye, siendo prácticamente nulo cuando $m \geq 50$. Según este experimento se puede concluir que cuando consideramos más de 50 alternativas, lo normal será que el ranking no se mantenga si hacemos alguna modificación en la matriz de decisión. Para el número de criterios no se aprecia que haya influencia para los casos estables.

Para WAS^{0.5} (Figura 4.2.a) y MM (Figura 4.2.b), se aprecia que ambos métodos son los que más casos estables han tenido, después de RIM y WAS⁰. Para MM también podemos decir que cuando $n = 5$ se han obtenido más casos estables que para el resto de valores de n .

Seguidamente, WAS¹ (Figura 4.2.c), TOP^{Max} (Figura 4.2.d), TOP^{Vec} (Figura 4.3.a) y VIK¹ (Figura 4.3.b) han obtenido resultados similares. Para TOPSIS, prácticamente las dos normalizaciones han obtenido la misma cantidad de casos estables, aunque TOP^{Max} supera a TOP^{Vec}.

Por último, encontramos a VIK^{0.5} (Figura 4.3.c) y VIK⁰ (Figura 4.3.d), que han sido los métodos que peores resultados han obtenido a diferencia del resto, ya que a partir de $m > 10$ no tienen casos estables.

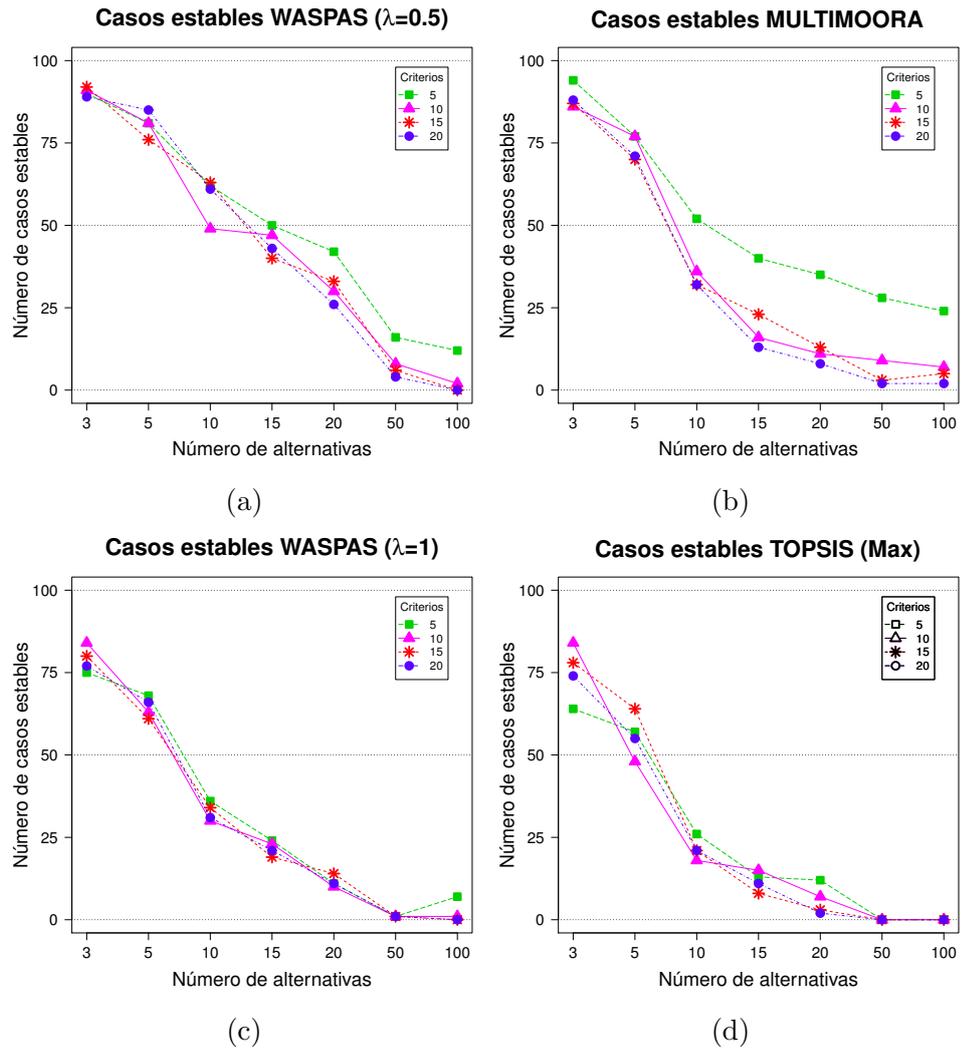


Figura 4.2: Casos estables.

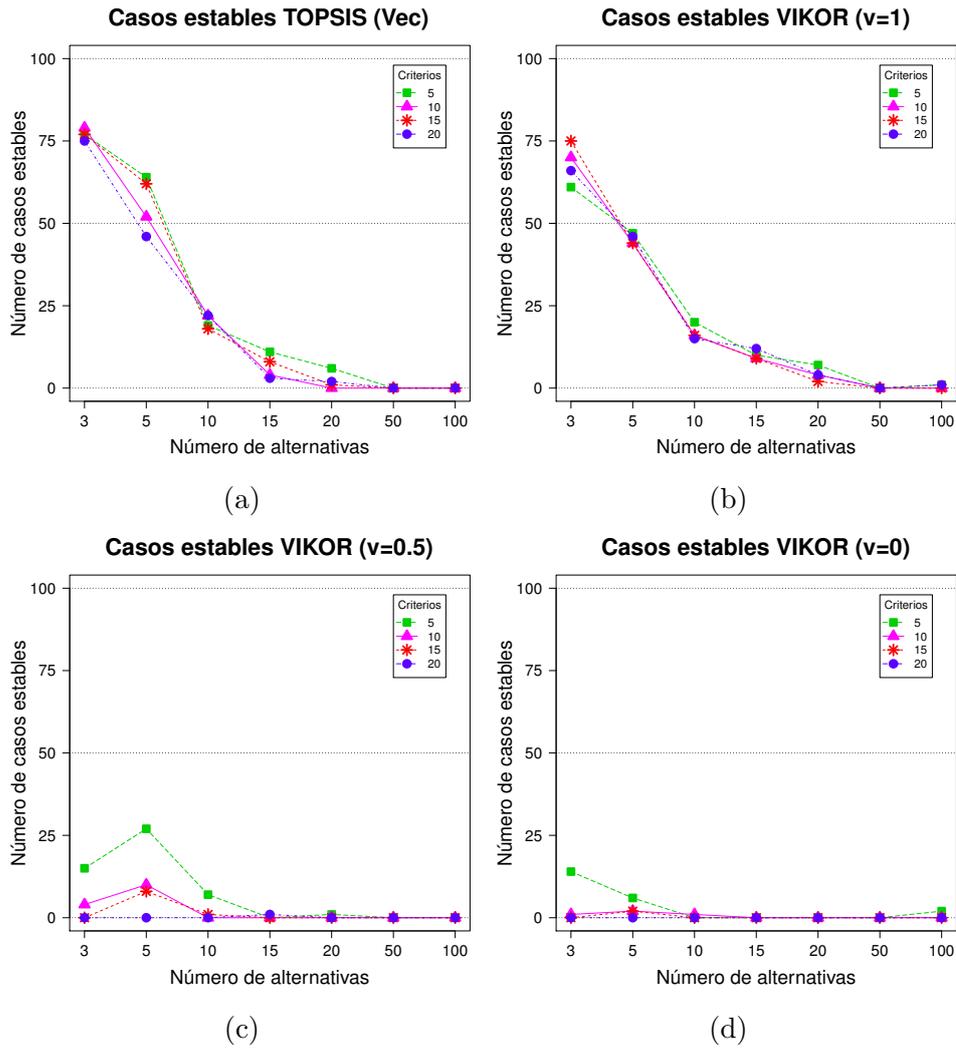


Figura 4.3: Casos estables.

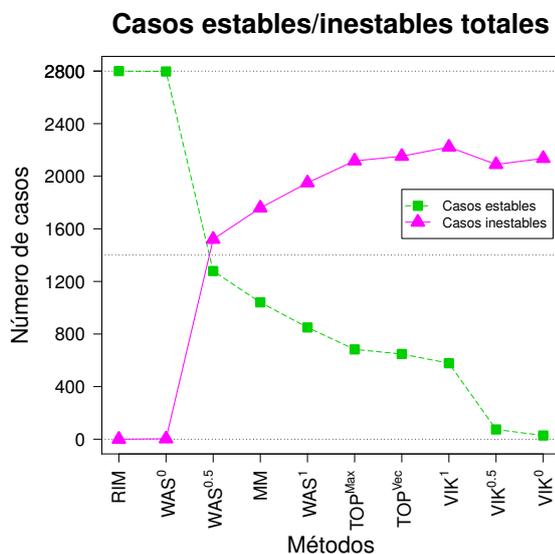


Figura 4.4: Casos estables y casos inestables por método para todos los problemas.

Análisis del Orden Inverso

Como hemos dicho, partimos de los problemas resueltos, y el *Caso inestable* será aquel en el que $R_F \neq R_{F'}$, de tal forma que con que haya un sólo cambio, ya se considera *Caso inestable*, es decir, se ha dado el OI. También hay que tener en cuenta que los casos estables e inestables se complementan: $Problemas\ resueltos = Casos\ estables + Casos\ inestables$, como se puede ver en la Figura 4.4, en la que se muestra los casos estables e inestables para cada método. En dicha figura se aprecia la simetría de la representación de los casos estables e inestables para todos los MDMC, excepto para VIK^{0.5} y VIK⁰, que son los que no han resuelto todos los problemas.

Al número de casos en los que la inversión se ha producido en la primera posición se le dará especial importancia, ya que en la toma de decisión, no es igual de relevante que se produzca un cambio en las primeras posiciones que en las últimas.

La cantidad de casos inestables y el número de inversiones en la primera posición para cada método se encuentra en la Tabla 4.3. Como se aprecia, dentro de los 15950 casos inestables, en 1889 veces se ha producido un cambio en la primera posición, es decir, un 12% de estos casos. De nuevo, el método RIM no presenta inversiones y WAS⁰ en ninguno de sus tres casos presenta inversión.

En la Figura 4.5 se representan los casos inestables y los casos con inversión en la primera posición considerando el conjunto de problemas para cada MDMC, ordenados de menos casos inestables a mas casos inestables,

MDMC	Casos inestables	Casos de inversión en la primera posición
RIM	0	0 (0%)
WAS ⁰	3	0 (0%)
WAS ^{0.5}	1521	70 (4.6%)
MM	1759	107 (6%)
WAS ¹	1950	141 (7.2%)
TOP ^{Max}	2117	171 (8%)
TOP ^{Vec}	2152	209 (9.7%)
VIK ¹	2222	249 (11.2%)
VIK ^{0.5}	2090	468 (22.4%)
VIK ⁰	2136	474 (22.2%)
Total	15950	1889 (12%)

Tabla 4.3: Casos inestables y casos de inversión en la primera posición por MDMC para todos los problemas.

donde la línea poligonal representa el número total de casos inestables, la barra derecha son los casos con inversión en la primera posición y la barra izquierda casos sin inversión en la primera posición.

Después de RIM y WAS⁰, WAS^{0.5} y MM son los métodos que menos casos inestables presentan y con el menor número de inversiones en la primera posición. VIKOR ha sido el método que mayor número de casos inestables e inversiones en la primera posición presenta. Recordar, que para el caso de VIK^{0.5} y VIK⁰ se consideran 2164 problemas para cada uno, dado que no pudo dar una solución para el resto de problemas, de ahí el pequeño descenso de la línea poligonal que se aprecia en los casos inestables de la Figura 4.5. Sin embargo, en la Tabla 4.3 observamos que es el método que mayor porcentaje de inversiones tiene.

A continuación, se presentan las gráficas para cada método, teniendo en cuenta tanto el número de criterios, como el número de alternativas para ver la influencia en el OI. Al igual que para el caso general, cada gráfica representa el número de casos inestables con la línea poligonal, el número de casos sin inversión en la primera posición con la barra izquierda, y el número de casos con inversión en la primera posición con la barra derecha.

En general, para todos los MDMC la tendencia es la misma: cuando el número de alternativas aumenta también lo hacen los casos inestables (línea poligonal), sin embargo disminuyen los casos con inversión en la primera posición (barra derecha). Por ende, los casos sin inversión en la primera posición aumentan (barra izquierda). Es lógico pensar que conforme aumente el número de alternativas, también lo haga la probabilidad de darse el OI; esto se confirma con a experiencia que hemos desarrollado y se puede ver en las Figuras 4.6,...,4.10. Para el número de criterios, nuevamente no se ha encontrado correlación con los resultados.

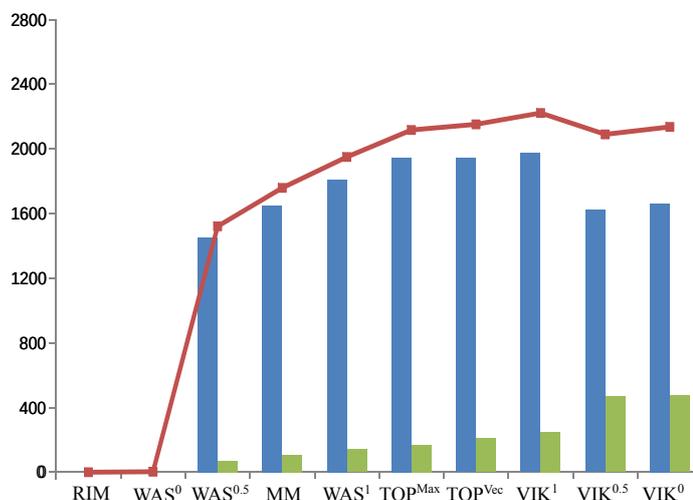


Figura 4.5: Casos inestables (línea poligonal), los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda), por método para todos los problemas.

Para MULTIMOORA, (Figura 4.6) se puede observar que cuando $n = 5$ se presentan menos casos inestables y apenas casos con inversión en la primera posición. Para el resto de los valores de los criterios, vemos que los casos inestables aumentan conforme aumenta m , y para inversiones en la primera posición sucede al contrario, disminuyen conforme aumenta m .

Las dos variantes de TOPSIS han obtenido resultados similares, como se puede apreciar en la Figura 4.7 para TOP^{Max} y en la Figura 4.8 para TOP^{Vec} . En ambas gráficas, se aprecia que han sufrido más casos con inversión en la primera posición en los problemas con pocas alternativas, como representa la altura de la barra derecha, y ésta disminuye conforme aumenta el número de alternativas.

Para VIKOR, como se aprecia en la Figura 4.9, los resultados se ven afectados por el parámetro v . Los comportamientos de $v = 0$ y $v = 0.5$ son muy similares, que corresponden a las dos primeras columnas de dicha gráfica. Si el número de alternativas es pequeño, el número de casos inestables es menor, y va aumentando según lo hace este parámetro. A partir de $m = 10$, todos los problemas han sufrido el OI. Por el contrario, los casos con inversión en la primera posición son mayores cuando hay menos alternativas, y disminuye según aumenta este parámetro, como muestra la altura de la barra derecha. Para $v = 1$, que ocupa la última columna de la figura, se aprecia que ha habido menos casos inestables y menos casos con inversión en la primera posición que para los otros valores de v . Recordar que, para $v = 0$ y $v = 0.5$ no se han resuelto todos los casos.

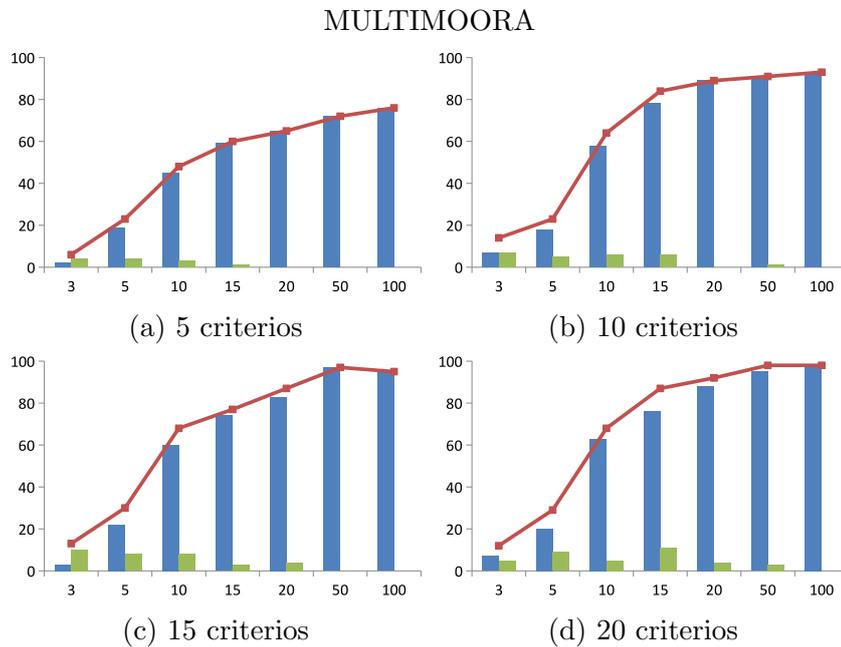


Figura 4.6: Casos inestables (línea poligonal) para MULTIMOORA, los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

Por último, los resultados para el método WASPAS también se ven afectados por el parámetro λ , como se aprecia en la Figura 4.10. Cuando $\lambda = 0$, situado en la primera columna de la figura, sólo ha presentado 3 casos inestables, y de ellos, ninguno con inversión en la primera posición. Para $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$, los resultados son muy similares. En ambos casos, cuando hay pocas alternativas apenas hay casos inestables, y aumentan conforme aumenta m , pero los casos con inversión en la primera posición disminuyen, siendo nulos para $\lambda = 0.5$ y $m = 100$.

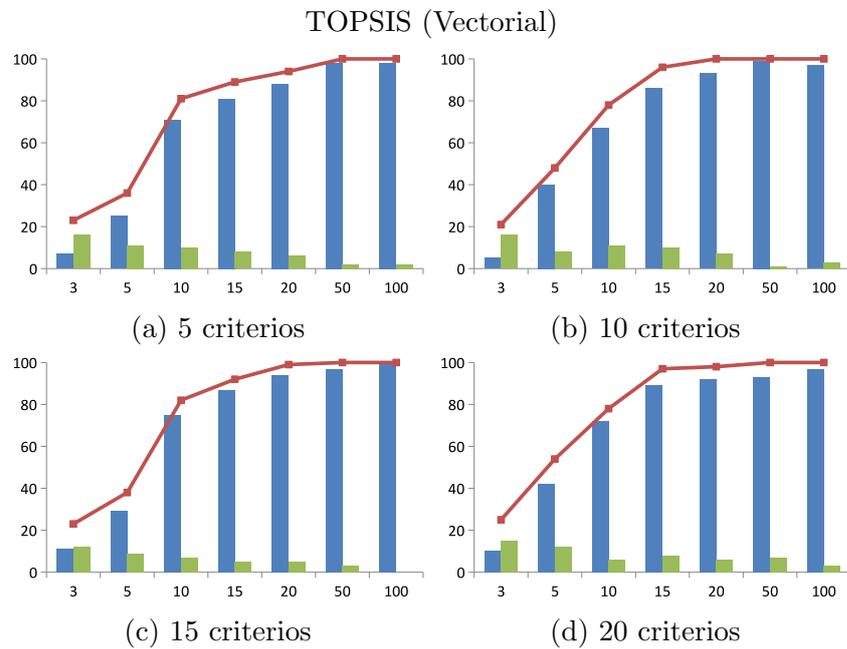


Figura 4.7: Casos inestables (línea poligonal) para TOPSIS (Vectorial), los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

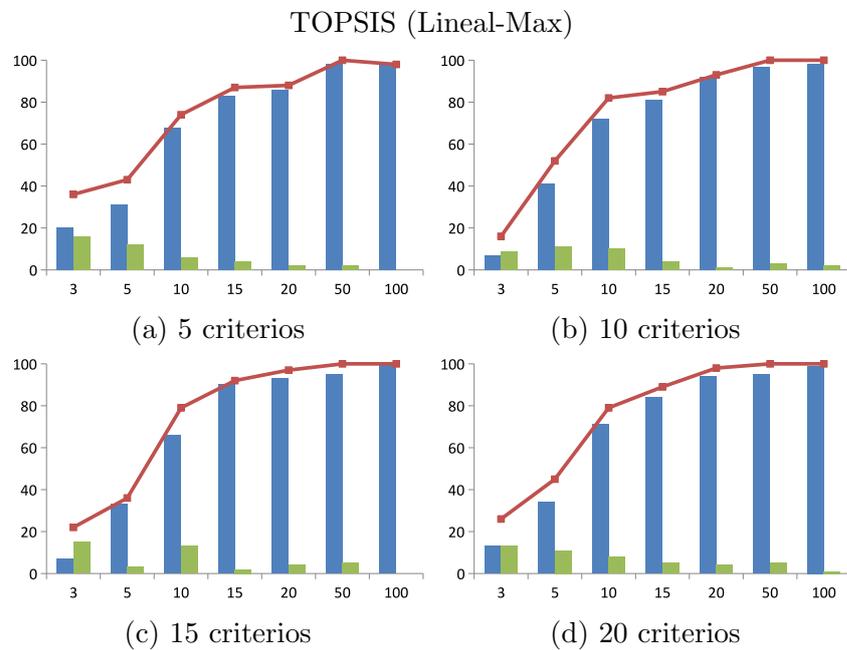


Figura 4.8: Casos inestables (línea poligonal) para TOPSIS (Lineal-Max), los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

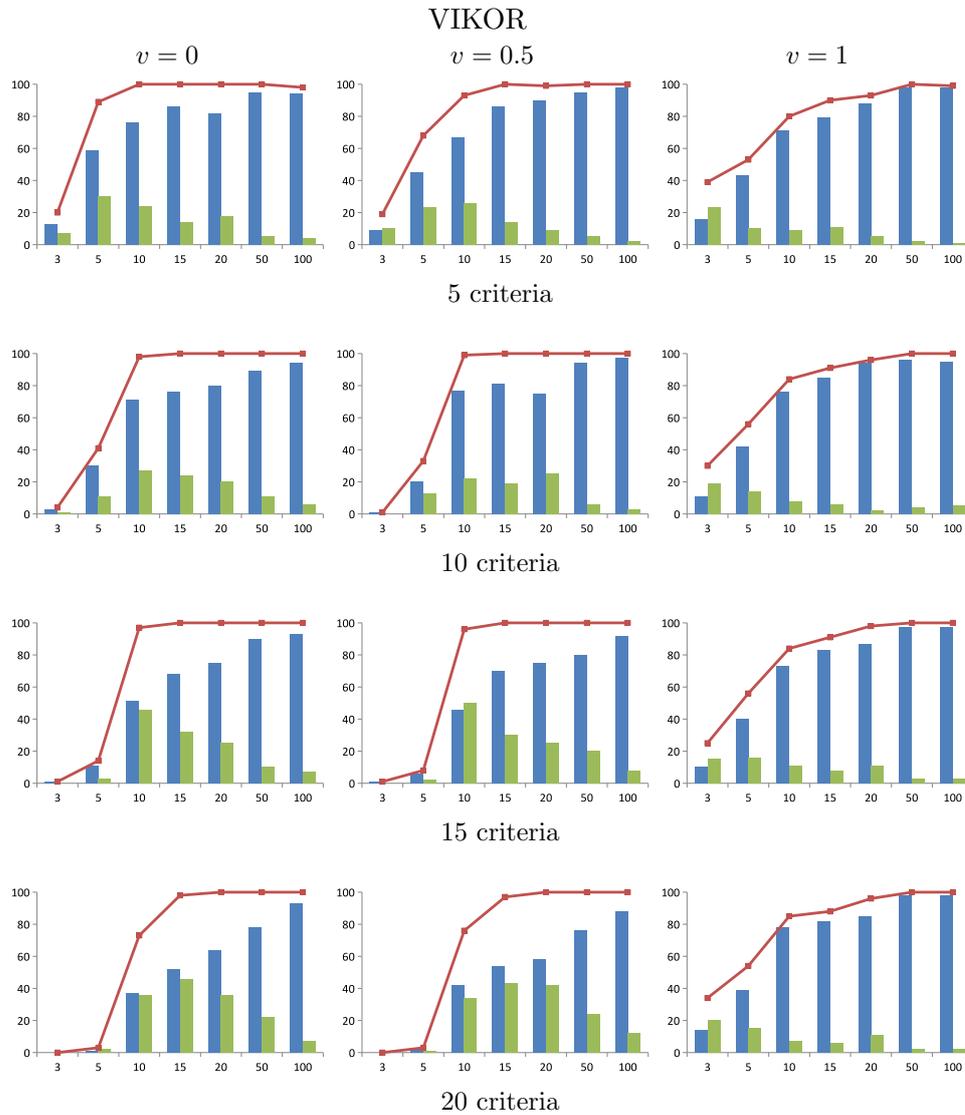


Figura 4.9: Casos inestables (línea poligonal) para VIKOR con $v = 0$, $v = 0.5$ y $v = 1$, los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

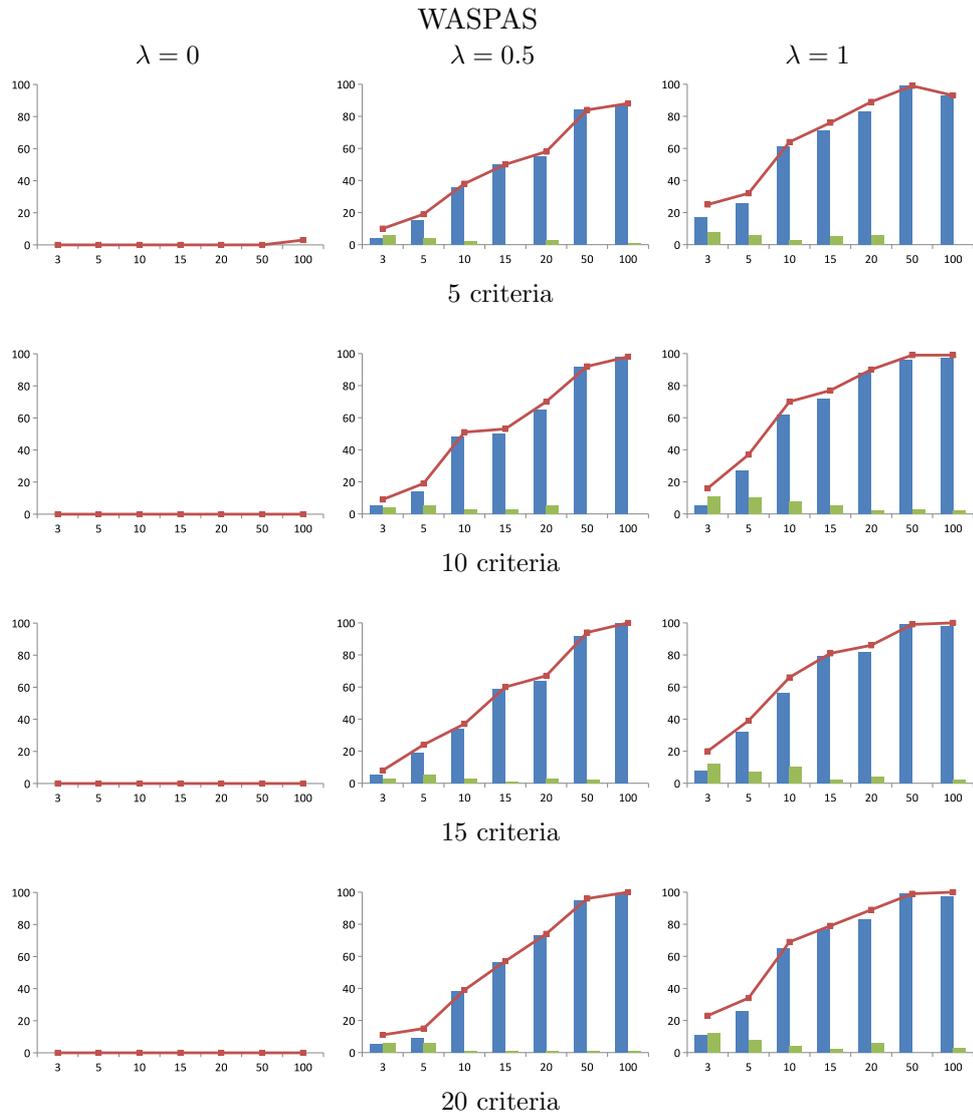


Figura 4.10: Casos inestables (línea poligonal) para WASPAS con $\lambda = 0$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$, los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

4.3. Análisis empírico del Orden Inverso en escenarios con imprecisión/vaguedad

Del mismo modo que hemos hecho el análisis empírico del OI en escenarios precisos, haremos el estudio para los escenarios con imprecisión/vaguedad. En este caso, consideraremos imprecisión/vaguedad en los pesos y en las valoraciones de las alternativas, tomando los números triangulares difusos para su representación.

Los métodos serán los mismos que antes, pero en su versión difusa, y su descripción se encuentra en el Apéndice A. En este caso, hemos tenido que descartar RIM, ya que en el momento de la redacción de esta tesis, su versión difusa no estaba publicada. Para el resto de métodos se han tomado las mismas configuraciones que en el apartado anterior. De igual modo, para referirnos a cada uno, lo haremos con las abreviaciones indicadas en la Tabla 4.1.

Cabe destacar que, en las búsquedas que hemos realizado en la base de datos SCOPUS [7], sólo hemos encontrado unos pocos trabajos del OI en métodos difusos, como AHP [25, 61, 121], TOPSIS [92] y ELECTRE [42].

El conjunto de problemas de decisión (matrices de decisión) que hemos empleamos para este análisis son los mismos que el del capítulo anterior, manteniendo las mismas características, con un total de 25200 problemas a resolver por cada método.

El procedimiento del experimento se compone por los siguientes pasos:

1. Generar los problemas de decisión, a los que denotaremos $F \in \mathcal{F}$.
2. Aplicar los métodos (Tabla 4.1) a los problemas generados en el Paso 1, obteniendo los rankings correspondientes.
3. Modificar los problemas generados en el Paso 1 añadiendo dos alternativas, las cuales corresponden a lo mejor que puede suceder, A^+ , y a lo peor que podemos alcanzar en nuestro problema, A^- . A estas matrices modificadas las denotaremos como $F' = F \cup \{A^+, A^-\}$, donde $A^+ = \{\tilde{a}^+, \tilde{a}^+, \dots, \tilde{a}^+\}$ y $A^- = \{\tilde{a}^-, \tilde{a}^-, \dots, \tilde{a}^-\}$. Dada nuestra descripción del problema, $\tilde{a}^+ = (\max_j x_{ij1}, \max_j x_{ij2}, \max_j x_{ij3})$ y $\tilde{a}^- = (\min_j x_{ij1}, \min_j x_{ij2}, \min_j x_{ij3})$ que se pudiese generar, por lo que $\tilde{a}^+ = (99, 100, 110)$ y $\tilde{a}^- = (0.90, 1, 1.01)$, tal y como explicamos en el Capítulo 3.3. De esta forma se crea el conjunto \mathcal{F}' .
4. Aplicar de nuevo los métodos (Tabla 4.1) a los problemas generados en el Paso 3, obteniendo los rankings correspondientes.
5. Comparar los rankings obtenidos en el Paso 2, a los que denotaremos como R_F , con los obtenidos en el Paso 4, $R_{F'}$, pero en este caso se descartan las posiciones de las alternativas A^+ y A^- , ya que A^+ ocupará la primera posición en todos los rankings y A^- la última.

Al igual que en caso sin imprecisión/vaguedad, de estas comparaciones hemos analizado los siguientes aspectos:

- **Casos estables:** decimos que un caso es estable si los rankings son iguales, es decir, si $R_F = R_{F'}$.
- **Casos inestables:** si por el contrario, los rankings han variado, $R_F \neq R_{F'}$, significará que se ha dado el OI.
 - **Inversión en la primera posición:** dentro de los casos inestables, comprobaremos si ha habido inversión en la primera posición, ya que como dijimos, en la toma de decisiones esta posición es relevante.

Destacar que en este tipo de escenarios, no nos hemos encontrado la problemática de que VIKOR no haya sido capaz de resolver algunos problemas, por lo que se han podido considerar todos los resultados obtenidos para su correspondiente análisis.

4.3.1. Descripción de los resultados

El análisis es análogo al caso con datos precisos, por tanto, en este apartado se analizan los resultados obtenidos de las comparativas realizadas. Estos resultados se muestran de forma general por método, considerando todos los problemas, y seguidamente nos centraremos en la influencia del número de alternativas, m , y de criterios, n , en cada método.

Análisis de los casos estables

En este apartado nos vamos a centrar en los casos estables, es decir, aquellos en el que los dos rankings calculados son iguales, $R_F = R_{F'}$. Estos casos se corresponden con aquellos que no presentan OI, ya que después de la modificación de la matriz de decisión, no ha habido cambio en el ranking.

Primero, se han analizado los casos estables para todos los métodos considerando todos los problemas, y después, se analizan los resultados por método, centrándonos en el número de alternativas, m , y en el número de criterios, n .

El resultado de la contabilización de los casos estables para cada método se muestra en la Tabla 4.4. En ella, se puede observar que de los 25200 problemas, sólo 8311 han sido estables, lo que representa aproximadamente un tercio de la población. Es decir, en 16889 casos ha habido un cambio entre los rankings, un 67% presenta el OI.

Observando los resultados, vemos que WAS⁰ es el más estable, ya que tiene el 98.4% de casos estables (sólo presenta 45 casos con OI). Por otra

MDMC	Casos estables
WAS ⁰	2755 (98.4 %)
WAS ^{0.5}	1185 (42.3 %)
MM	992 (35.4 %)
WAS ¹	791 (28.2 %)
TOP ^{Max}	775 (27.7 %)
TOP ^{Vec}	657 (23.5 %)
VIK ¹	619 (22.1 %)
VIK ^{0.5}	352 (12.6 %)
VIK ⁰	185 (6.6 %)
Total	8311

Tabla 4.4: Casos estables por MDMC para todos los problemas.

parte, VIKOR ha sido el método que menos casos estables ha obtenido, especialmente cuando $v \neq 1$.

En las Figuras 4.11 y 4.12 se muestran gráficamente el número de casos estables para cada método. En estas gráficas, se aprecia que conforme aumenta el número de alternativas, el número de casos estables disminuye, siendo prácticamente nulo cuando $m \geq 50$ (excepto WAS⁰, que como se puede ver en la Figura 4.11.a, prácticamente permanece constante). Con respecto al número de criterios no se aprecia que haya una correlación notable con los resultados obtenidos.

Después de WAS⁰, observamos que WAS^{0.5} (Figura 4.11.b) y MM (Figura 4.11.c) han sido los métodos con más casos estables. Para MM también podemos decir que cuando $n = 5$ se han obtenido más casos estables que para el resto de valores de n .

Seguidamente, WAS¹ (Figura 4.11.d), TOP^{Max} (Figura 4.11.e), TOP^{Vec} (Figura 4.12.a) y VIK¹ (Figura 4.12.b) han obtenido resultados similares. Para TOPSIS, prácticamente las dos normalizaciones han obtenido la misma cantidad de casos estables, aunque TOP^{Max} supera a TOP^{Vec}.

Por último nos encontramos VIK^{0.5} (Figura 4.12.c) y VIK⁰ (Figura 4.12.d), que han sido los métodos que peores resultados han obtenido con gran diferencia del resto, ya que a partir de $m \geq 10$ prácticamente no tienen casos estables.

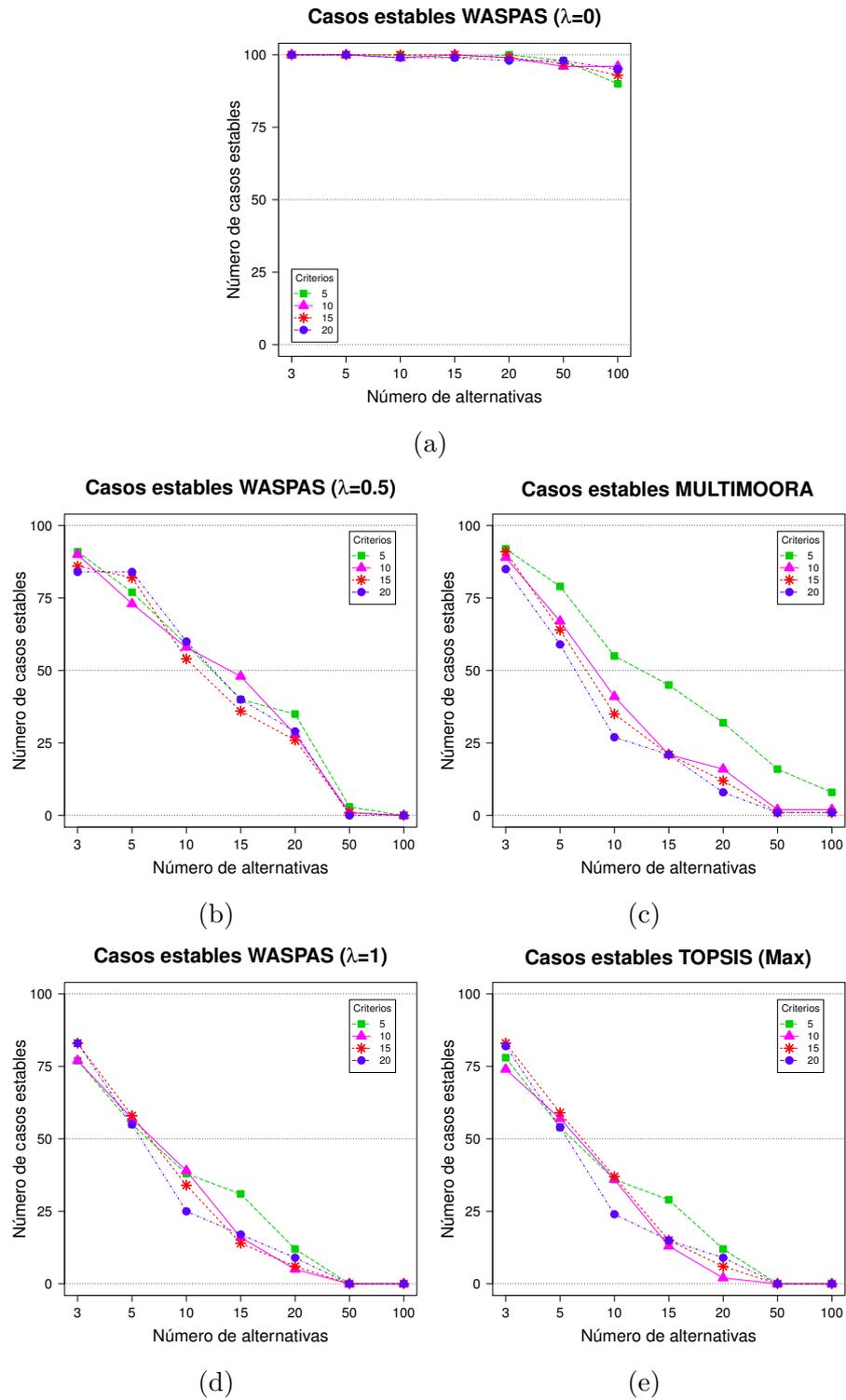


Figura 4.11: Casos estables.

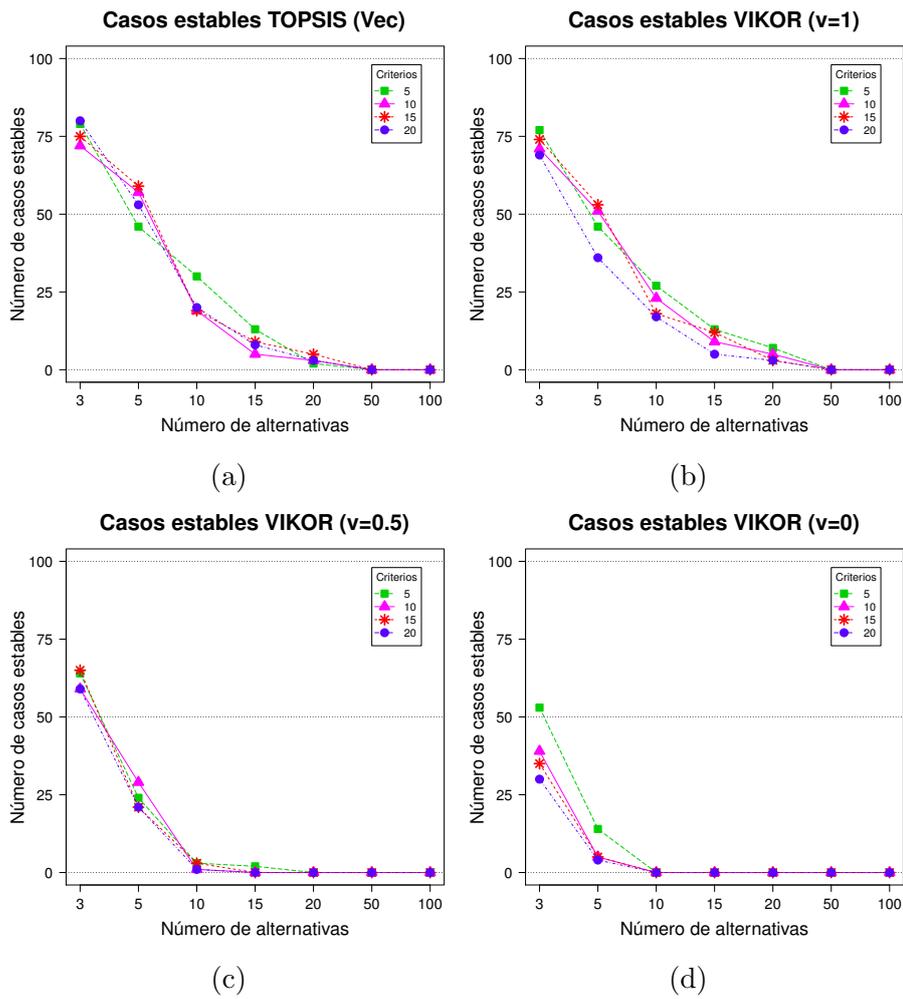


Figura 4.12: Casos estables.

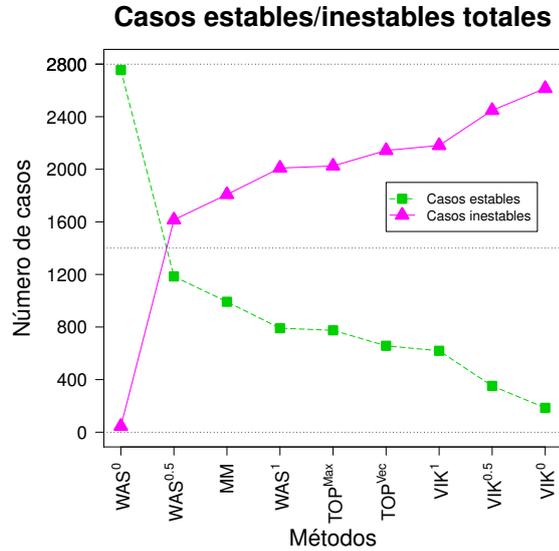


Figura 4.13: Casos estables y casos inestables por MDMC para todos los problemas.

Análisis del Orden Inverso

En este apartado nos centraremos en el análisis de los *Casos inestables*, que recordamos que son aquellos en los que $R_F \neq R_{F'}$, de tal forma que con que haya un sólo cambio, ya se considera *Caso inestable*, es decir, se ha dado el OI. También hay que tener en cuenta que los casos estables e inestables se complementan: $Problemas\ resueltos = Casos\ estables + Casos\ inestables$, como se puede ver en la Figura 4.13, en la que se representa el número de casos estables y casos inestables por método. Ahora en la figura sí se aprecia la simetría de los casos estables e inestables, pues como vimos VIKOR no resolvió todos los problemas cuando $v = \{0.5, 1\}$ en escenarios precisos.

Dentro de los casos inestables, también se analiza el número de casos en los que la inversión se ha producido en la primera posición, ya que es una posición relevante en la toma de decisión, como comentamos anteriormente.

La cantidad de casos inestables y el número de inversiones en la primera posición para cada método se encuentra en la Tabla 4.5. Como se aprecia, dentro de los 16889 casos inestables, 2320 veces se ha producido un cambio en la primera posición, es decir, un 14% de estos casos. Con respecto al total de los 25200 problemas generados, es menos de un 10%. En esta tabla se puede observar que WAS⁰ sólo ha tenido 45 casos inestables, siendo el método que menos casos de OI representa. Por el contrario, VIKOR es el que más casos inestables ha tenido, especialmente VIK⁰.

En la Figura 4.14 se muestran los casos inestables y con inversiones en la primera posición considerando todos los problemas de decisión para cada

MDMC	Casos inestables	Casos de inversión en la primera posición
WAS ⁰	45	0 (0%)
WAS ^{0.5}	1615	80 (4.9%)
MM	1808	129 (7.1%)
WAS ¹	2009	175 (8.7%)
TOP ^{Max}	2025	176 (8.7%)
TOP ^{Vec}	2143	212 (9.9%)
VIK ¹	2181	231 (10.6%)
VIK ^{0.5}	2448	546 (22.3%)
VIK ⁰	2615	771 (29.5%)
Total	16889	2320 (14%)

Tabla 4.5: Casos inestables y casos de inversión en la primera posición por MDMC para todos los problemas.

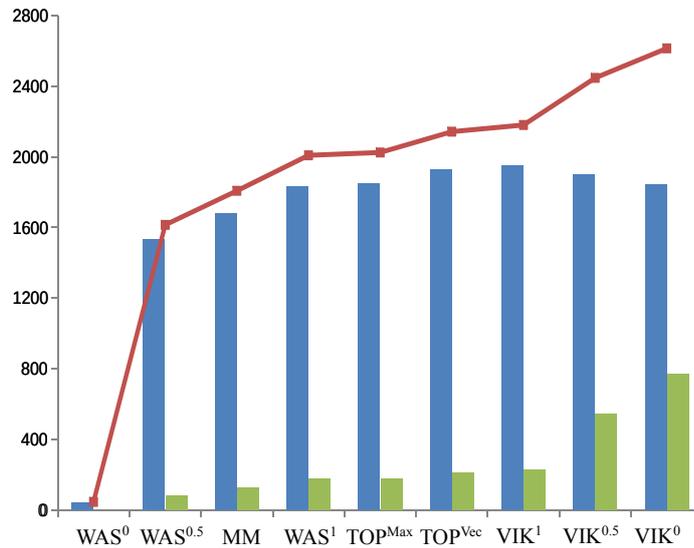


Figura 4.14: Casos inestables (línea poligonal), los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda), por método para todos los problemas.

MDMC, ordenados de menos casos inestables a mas casos inestables, donde la línea poligonal representa el número de casos inestables, la barra derecha casos con inversión en la primera posición y la barra izquierda casos sin inversión en la primera posición.

En dicha figura se puede apreciar que WAS⁰ no tiene inversiones en la primera posición en sus 45 casos con inversión. Le sigue WAS^{0.5}, con el menor número de inversiones en la primera posición, sólo el 4.9%. VIKOR, además de ser el método que mayor número de casos inestables ha tenido,

2615 de los 2800 generados, también es el que más inversiones en la primera posición ha presentado, 771 casos con inversión, un 29.5 %.

A continuación, se presentan las figuras para cada MDMC, considerando tanto el número de alternativas, como el número de criterios. La estructura de cada gráfica sigue el mismo tratamiento que la Figura 4.14.

En general, para todos los MDMC la tendencia es la misma: cuando el número de alternativas aumenta también lo hacen los casos inestables (línea poligonal), sin embargo disminuyen los casos con inversión en la primera posición (barra derecha). Por ende, los casos sin inversión en la primera posición aumentan (barra izquierda). Es lógico que conforme aumente el número de alternativas, también lo haga la probabilidad de darse el OI. Con respecto al número de criterios, nuevamente no se ha encontrado correlación con los resultados, como sucedía con datos precisos.

En el caso de MULTIMOORA, en la Figura 4.15 se puede observar que con 5 criterios tiene menos casos inestables y apenas casos con inversión en la primera posición. Para el resto de valores de criterios, vemos que los casos inestables y casos con inversión en la primera posición aumentan con respecto al resto de valores de $n = 5$.

Las dos variantes de TOPSIS han obtenido resultados similares, como se puede apreciar en la Figura 4.16 para TOP^{Max} y en la Figura 4.17 para TOP^{Vec} . En ambas, se aprecia que han sufrido más casos con inversión en la primera posición en los problemas con pocas alternativas que los métodos anteriores, como representa la altura de la barra derecha. Y ésta disminuye conforme aumenta el número de alternativas.

Para VIKOR, como se aprecia en la Figura 4.18, los resultados se ven afectados por el parámetro v . Los comportamientos de $v = 0$ y $v = 0.5$ son muy similares: si el número de alternativas es pequeño, el número de casos inestables es menor, y va aumentando según lo hace este parámetro. A partir de $m = 10$, todos los problemas han sufrido el OI. Por el contrario, los casos con inversión en la primera posición son mayores cuando hay menos alternativas, y disminuye según aumenta este parámetro, como muestra la altura de la barra derecha. Para $v = 1$, se aprecia que ha habido menos casos inestables y menos casos con inversión en la primera posición que para los otros valores de v .

Por último, los resultados para el método WASPAS también se ven afectados por el parámetro λ , como se aprecia en la Figura 4.19. Cuando $\lambda = 0$ sólo ha presentado 45 casos inestables, y de ellos, ninguno con inversión en la primera posición. Para $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$, los resultados son muy similares. En ambos casos, cuando hay pocas alternativas apenas hay casos inestables, y aumentan conforme aumenta m , pero los casos con inversión en la primera posición disminuyen, siendo nulos para $\lambda = 0.5$ y $m = 100$.

Las tablas detalladas de los experimentos de este capítulo se encuentran en el Apéndice C.

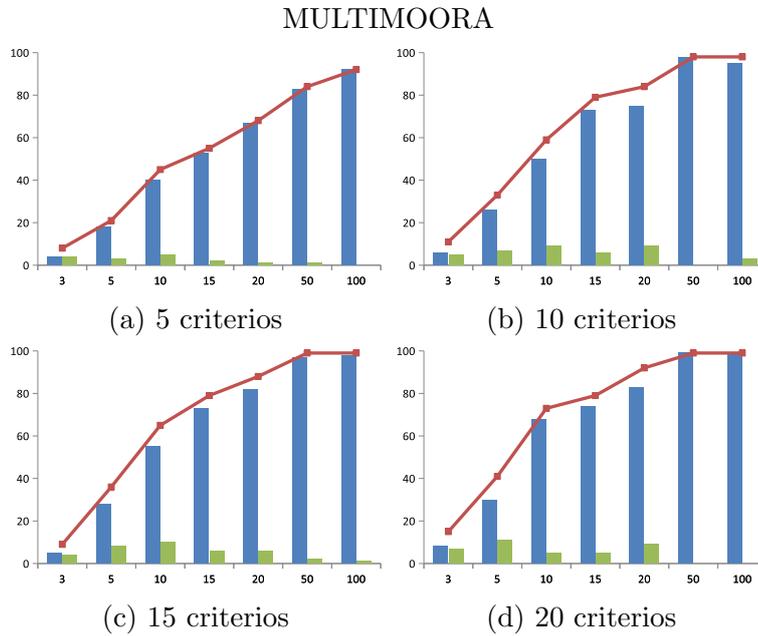


Figura 4.15: Casos inestables (línea poligonal) para MULTIMOORA, los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

4.4. Similitudes y diferencias de los escenarios sin y con imprecisión/vaguedad

En este apartado se pretende contrastar los resultados obtenidos del análisis empírico del OI tanto en entornos precisos como aquellos con imprecisión/vaguedad. Para ello, analizaremos las similitudes y diferencias que ha habido de un entorno al otro.

Para comenzar, hemos apreciado que el 60% de las soluciones en escenarios sin imprecisión/vaguedad y el 67% en escenarios con imprecisión/vaguedad han sufrido el OI. Es decir, en ambos escenarios se ha obtenido una cantidad de casos con OI muy similar.

En escenarios con datos precisos, hemos visto que RIM y WAS⁰ han obtenido el 100% de casos estables, salvo los tres casos inestables de WAS⁰, mientras que VIKOR con $v = 0$ y $v = 0.5$ han sido los más inestables. En escenarios con imprecisión/vaguedad, el método con más casos estables ha sido también WAS⁰. RIM no ha sido posible analizarlo en este ámbito, dado que en la redacción de esta tesis, todavía no estaba publicada su versión difusa.

Por el contrario, en ambos escenarios VIKOR ha sido el método que más casos inestables ha presentado, y también, el que más inversiones ha tenido en la primera posición, especialmente cuando $v = 0$ y $v = 0.5$. Cuando m

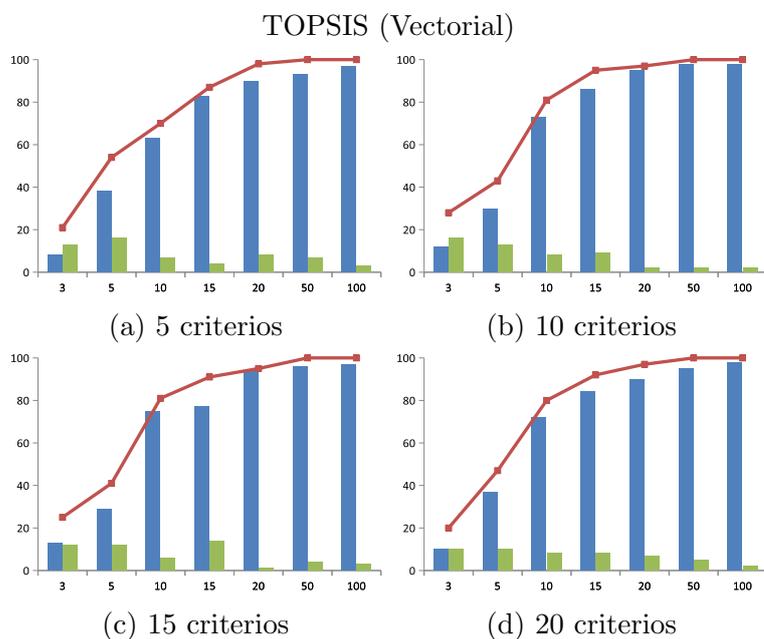


Figura 4.16: Casos inestables (línea poligonal) para TOPSIS (Vectorial), los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

se incrementa, las inversiones en la primera posición disminuyen, llegando incluso a ser prácticamente nulas cuando $m = 100$.

Otra similitud de los dos escenarios, es que de forma general para todos los MCMD, se ha observado que conforme aumenta el número de alternativas, m , disminuye la cantidad de casos estables, llegando incluso a ser nulo cuando $m \geq 50$. Para los casos con inversión en la primera posición se ha observado que hay más cuando el número de alternativas es menor, y que disminuyen según aumenta m . Para el número de criterios, n no se ha apreciado ninguna correlación con los resultados obtenidos en este análisis.

La diferencia notable que hemos encontrado de un escenario a otro ha sido al estudiar el método VIKOR. En escenarios bien definidos, hemos visto que no ha podido dar solución a determinados problemas cuando $v \neq 1$. Ésto ha sucedido especialmente en los problemas con muchos criterios y pocas alternativas. Por el contrario, para escenarios con imprecisión/vaguedad, siempre se ha devuelto una solución.

En general, los resultados obtenidos de un escenario a otro han sido muy similares para el análisis del OI, tal y como se aprecia en la Figura 4.20. En dicha figura se muestran los casos inestables para cada método, ordenados de menos a mas, considerando todos los problemas. En ambas gráficas de la figura, se aprecia que el orden de los métodos con respecto al OI es el mismo.

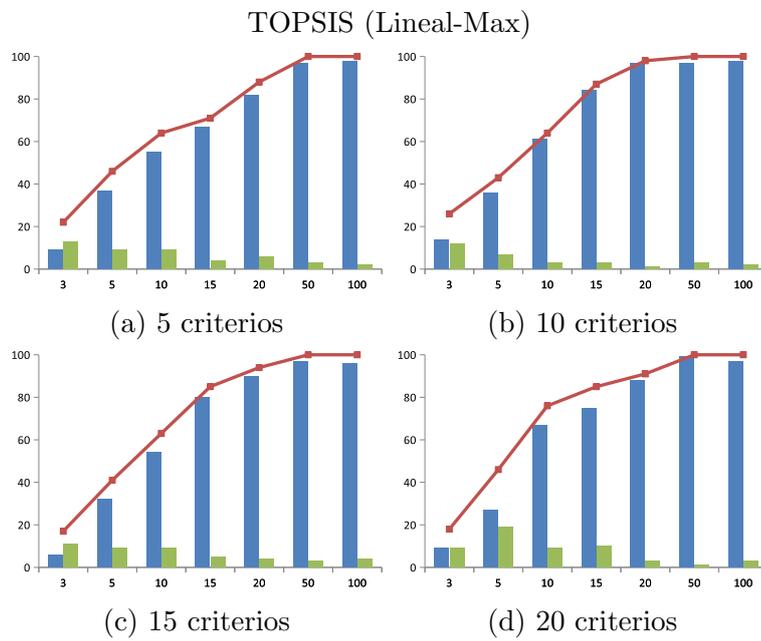


Figura 4.17: Casos inestables (línea poligonal) para TOPSIS (Lineal-Max), los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

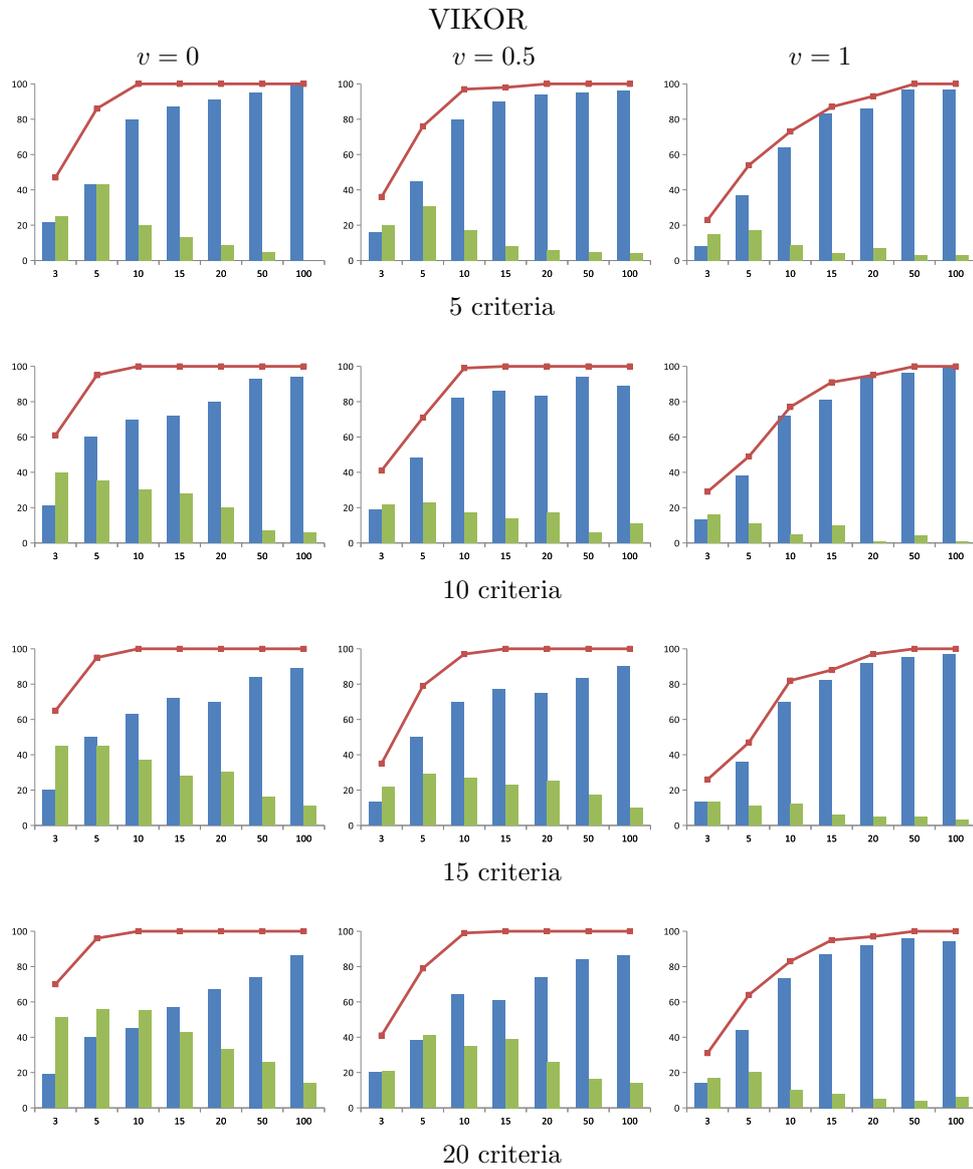


Figura 4.18: Casos inestables (línea poligonal) para VIKOR con $v = 0$, $v = 0.5$ y $v = 1$, los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

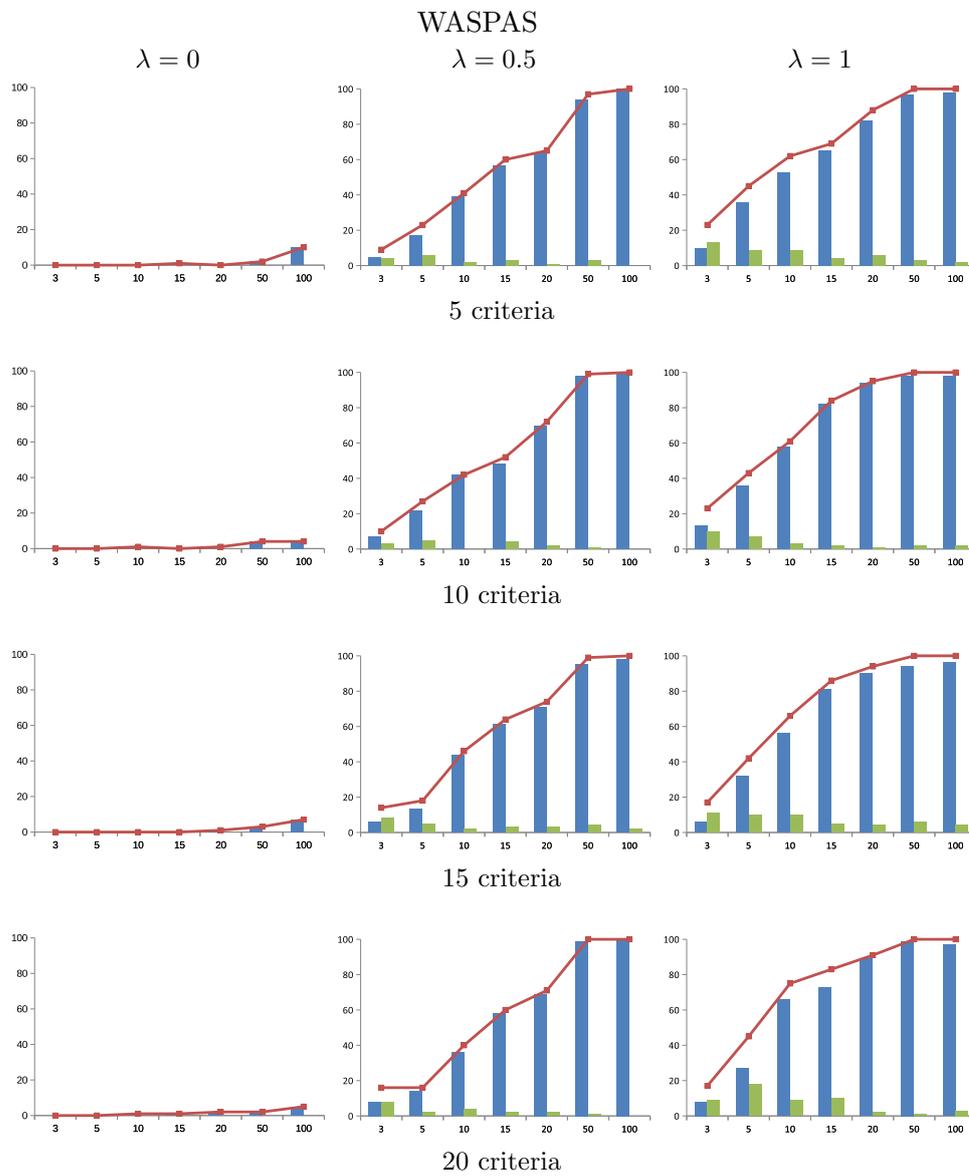


Figura 4.19: Casos inestables (línea poligonal) para WASPAS con $\lambda = 0$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$, los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda).

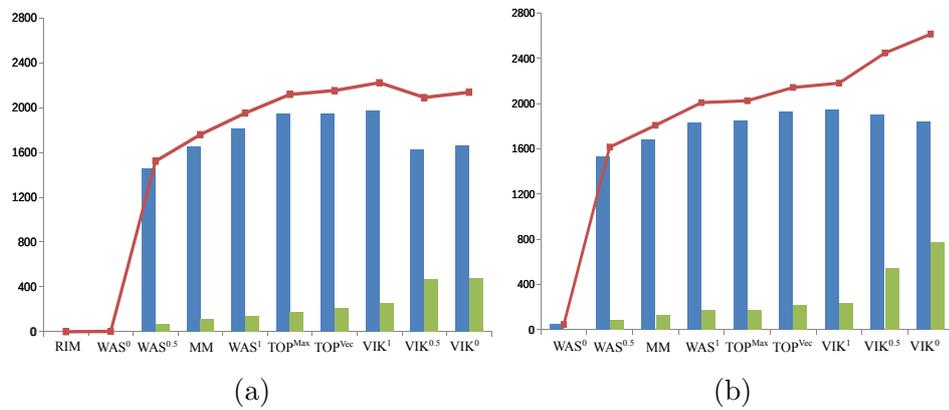


Figura 4.20: Casos inestables (línea poligonal), los que presentan inversiones en la primera posición (barra derecha), y los que no (barra izquierda), por método para todos los problemas considerando (a) escenarios sin imprecisión/vaguedad y (b) escenarios con imprecisión/vaguedad.

Capítulo 5

Análisis del Orden Inverso en VIKOR

En este capítulo se va a realizar un análisis del Orden Inverso (OI) más exhaustivo para el método VIKOR, ya que, a pesar de la relevancia que toma en la literatura, hasta donde nosotros sabemos, no se ha realizado un estudio similar.

En este análisis, nos centramos en la influencia del número de alternativas, del número de criterios y consideraremos el parámetro v con más detalle. Por último, propondremos una solución para evitarlo, tomando como base la propuesta para TOPSIS [47], la cual consiste en agregar dos alternativas ideales a la matriz de decisión.

5.1. Introducción

Como se ha visto en el capítulo anterior, VIKOR sufre el fenómeno del OI. Partiendo de esta base, vamos a realizar un análisis más exhaustivo de este fenómeno, centrándonos tanto en la influencia del número de alternativas como del número de criterios, pero especialmente en su parámetro v .

Para poder realizar este análisis, seguiremos trabajando en el contexto que venimos haciendo hasta ahora, es decir, un conjunto de problemas de decisión generados aleatoriamente y variando los tamaños según el número de alternativas y de criterios. En este caso, sólo vamos a considerar entornos precisos.

En este caso, la modificación que realizaremos en la matriz de decisión original para analizar el OI será de la siguiente forma:

1. Añadiendo sólo la alternativa ideal positiva, $A^+ = \{100, 100, \dots, 100\}$, aplicaremos VIKOR sobre esta matriz, y comprobaremos si han variado los rankings con respecto a la matriz original.

2. Añadiendo sólo la alternativa ideal negativa, $A^- = \{1, 1, \dots, 1\}$, aplicaremos VIKOR sobre esta matriz, y de nuevo comprobaremos si han variado los rankings con respecto a la matriz original.
3. La otra opción sería añadir A^+ y A^- al mismo tiempo, pero esto ya está recogido en el Capítulo 4.2.

De esta forma, podemos comprobar qué sucede si se varía sólo el referente ideal positivo o el referente ideal negativo. Además, para este estudio consideraremos valores intermedios de v para así tener más información, $v = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

Además de realizar este análisis, propondremos una solución para evitarlo similar a la que se ha aplicado en TOPSIS. Esta solución consiste en fijar los puntos ideales, para que así, aunque se modifique la matriz de decisión, estos puntos no varíen, y con ello las distancias a la PIS y NIS no varíen y el ranking de las alternativas permanezca constante. Para ello, sólo hay que añadir dos alternativas ideales a la matriz de decisión, una con lo mejor que se pueda obtener, y otra con los peores valores posibles.

El motivo por el que nos centramos en VIKOR, se debe a su amplia aplicación en la literatura en diversas áreas. Por ejemplo, vemos que se usa en el campo de las energías renovables [100], en el análisis de la satisfacción de los consumidores en e-store personalizado [35], en problemas de localización para pozos de excavación como vertedero municipal de residuos húmedos [77] o en la evaluación y selección de proveedores [10], entre otros. Además, la aplicación de VIKOR y otros métodos en el campo de la economía se analiza en [130].

A pesar de la investigación relativa a VIKOR y de que es ampliamente aplicado en la literatura, hasta donde nosotros conocemos, no hay ningún estudio sobre el OI en este método, de ahí la pertinencia de centrarnos en VIKOR.

5.2. Análisis del Orden Inverso en VIKOR

En este apartado vamos a realizar el análisis exhaustivo del OI en VIKOR. Partimos de la base de que ya sabemos que este método es sensible a dicho fenómeno, como hemos visto en el capítulo anterior. Pero dada la relevancia que toma en la literatura, trabajaremos con más profundidad en él.

Como hemos dicho, seguiremos trabajando en el mismo contexto que en los capítulos anteriores, es decir, con el conjunto de datos generado aleatoriamente, formado por problemas de decisión con distintos tamaños, teniendo un total de 2800 problemas a resolver por VIKOR, como el de los capítulos anteriores. En este caso, sólo vamos a considerar entornos precisos.

El procedimiento del experimento se compone por los siguientes pasos:

1. Generar los problemas de decisión, a los que denotaremos como $F \in \mathcal{F}$.
2. Aplicar VIKOR con $v = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ a los problemas generados en el Paso 1 ($F \in \mathcal{F}$).
3. Modificar los problemas generados en el Paso 1:
 - 3.1. añadiendo la alternativa ideal positiva, $A^+ = \{100, 100, \dots, 100\}$, a los que denotaremos como $F^+ = F \cup \{A^+\}$.
 - 3.2. añadiendo la alternativa ideal negativa, $A^- = \{1, 1, \dots, 1\}$, a los que denotaremos como $F^- = F \cup \{A^-\}$.
4. Aplicar de nuevo VIKOR con $v = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ a los problemas generados en el Paso 3, F^+ y F^- .
5. Comparar los rankings obtenidos en el Paso 2, a los que denotaremos como $Rank(F)$, con los obtenidos en el Paso 4, $Rank(F^+)$ para las F^+ y $Rank(F^-)$ para las F^- . En estos casos se descartan A^+ y A^- para el cálculo del ranking, ya que A^+ ocupará la primera posición en todos los rankings y A^- la última.

Igual que para los experimentos anteriores, al hacer estas comparaciones se nos pueden presentar las siguientes características:

- **Problemas no resueltos:** son los problemas en los que el método no ha devuelto una solución.
- **Problemas resueltos:** problemas en los que el método ha devuelto un resultado. De estos problemas, consideraremos los siguientes casos:
 - **Casos estables:** decimos que un caso es estable si los dos rankings obtenidos son iguales, es decir, si $Rank(F) = Rank(F^+)$ para el caso de la adición de la A^+ , y $Rank(F) = Rank(F^-)$ para el caso de la adición de la A^- .
 - **Casos inestables:** si por el contrario, los rankings han variado, $Rank(F) \neq Rank(F^+)$ para el caso de la adición de la A^+ , y $Rank(F) \neq Rank(F^-)$ para el caso de la adición de la A^- , significará que se ha dado el OI.
 - **Inversión en la primera posición:** dentro de los casos inestables, comprobaremos si ha habido inversión en la primera posición, ya que en la toma de decisiones esta posición es relevante.

Al igual que en los experimentos anteriores, todo este proceso se ha realizado en el entorno de trabajo R-Project [8].

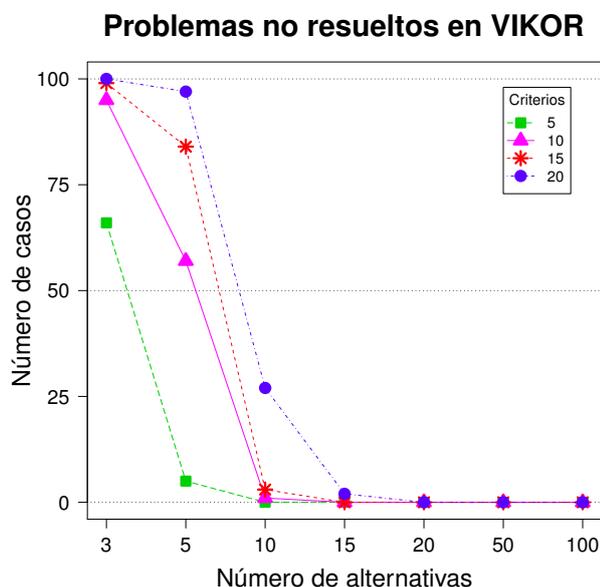


Figura 5.1: Problemas no resueltos por VIKOR con $v = \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$.

5.2.1. Problemas no resueltos

Como se ha visto ya con anterioridad, VIKOR en ocasiones no ha podido dar solución al problema. Esto ha sucedido en 636 problemas para cada $v \neq 1$ que hemos considerado.

La razón por la que hay casos en los que VIKOR no puede dar solución se debe a que las alternativas toman el mismo valor para R_j ; entonces, al calcular $R^+ = \min_j \{R_j\}$ y $R^- = \max_j \{R_j\}$ para $Q_i = v \frac{(S_i - S^+)}{(S^- - S^+)} + (1 - v) \frac{(R_i - R^+)}{(R^- - R^+)}$ (Expr. 2.22), $R^- = R^+$, por lo que se anula el denominador y $Q_j = \infty$. Por este motivo esto sucede para $\forall v \in [0, 1)$.

En la Figura 5.1 se muestra la cantidad de problemas no resueltos por VIKOR con los valores $v = \{0, 0.25, 0.5, 0.75\}$ (que han sido los mismos) según el número de alternativas, m , y el número de criterios, n . En ella se aprecia que conforme aumenta m , disminuyen los problemas no resueltos. Por otro lado, si n aumenta, también lo hacen los problemas no resueltos, no habiendo ningún problema resuelto para la combinación $n = 20$ y $m = 3$. Cuando $m \geq 15$ se puede ver que se resuelven todos los problemas.

5.2.2. Casos inestables

En esta sección nos vamos a centrar en los casos en los que se ha dado el OI, es decir, aquellos en los que $Rank(F) \neq Rank(F^+)$ para el caso de la adición de la A^+ , y $Rank(F) \neq Rank(F^-)$ para el caso de la adición

de la A^- . Para ello, partimos de los problemas resueltos. Además, para los casos inestables, también nos centraremos en los casos con inversión en la primera posición, ya que esta posición tiene especial relevancia en la toma de decisión, como ya hemos visto.

En la Figura 5.2 se muestran los casos inestables considerando tanto el número de alternativas como el número de criterios cuando se agrega A^+ , donde la línea poligonal superior corresponde a los casos inestables, la línea intermedia a los casos sin cambio en la primera posición, y la línea inferior, a los casos con inversión en la primera posición. De la misma forma, en la Figura 5.3 se muestran los casos inestables y casos con inversión en la primera posición para cuando A^- . Observamos que las gráficas son parecidas, pero no iguales.

Para ambas figuras, de forma general podemos decir que los valores de $v < 1$ los resultados son similares con respecto a los de $v = 1$. Cuando $v < 1$, conforme aumenta m , aumentan los casos inestables, habiendo un 100% de casos inestables a partir de $m \geq 10$. En cambio, cuando $v = 1$, el 100% de casos inestables se alcanza cuando $m \geq 50$.

Para los casos con inversión en la primera posición, en ambas figuras se aprecia que disminuyen conforme aumenta m . Pero si consideramos $v \neq 1$, vemos que conforme aumenta n , también lo hacen estos casos. Para $v = 1$, vemos que permanece constante con respecto a n , tal y como sucedía con el estudio del capítulo anterior.

Análisis de la influencia del parámetro v

En este apartado nos centraremos en la influencia que tiene el parámetro v sobre los resultados. Para ello, partimos de los problemas resueltos y en los casos inestables, es decir, aquellos en los que se ha dado el OI.

Estos resultados se muestran en la Figura 5.4 donde se recogen los casos inestables (línea poligonal superior), casos con inversión en la primera posición (línea poligonal inferior) y casos sin inversión en la primera posición (línea poligonal intermedia) para cuando se agrega A^+ (figura de la izquierda) y para cuando se agrega A^- (figura de la derecha), considerando todos los problemas generados.

En primer lugar, se puede apreciar que hay una clara influencia del parámetro v en los resultados. Además, esta influencia difiere si se agrega A^+ o A^- . De forma general, según aumenta el valor de v , el número de casos inestables y los casos sin inversión en la primera posición disminuyen. Los casos con inversión en la primera posición no se ven afectados para $v < 1$, y disminuye cuando $v = 1$. Algo similar sucede con los casos inestables, y es que para $0.25 \leq v \leq 0.75$ apenas varía. Para los casos con/sin inversión en la primera posición, se puede observar que hay un ascenso/descenso hasta $v = 0.5$, y a partir de este valor la tendencia cambia.

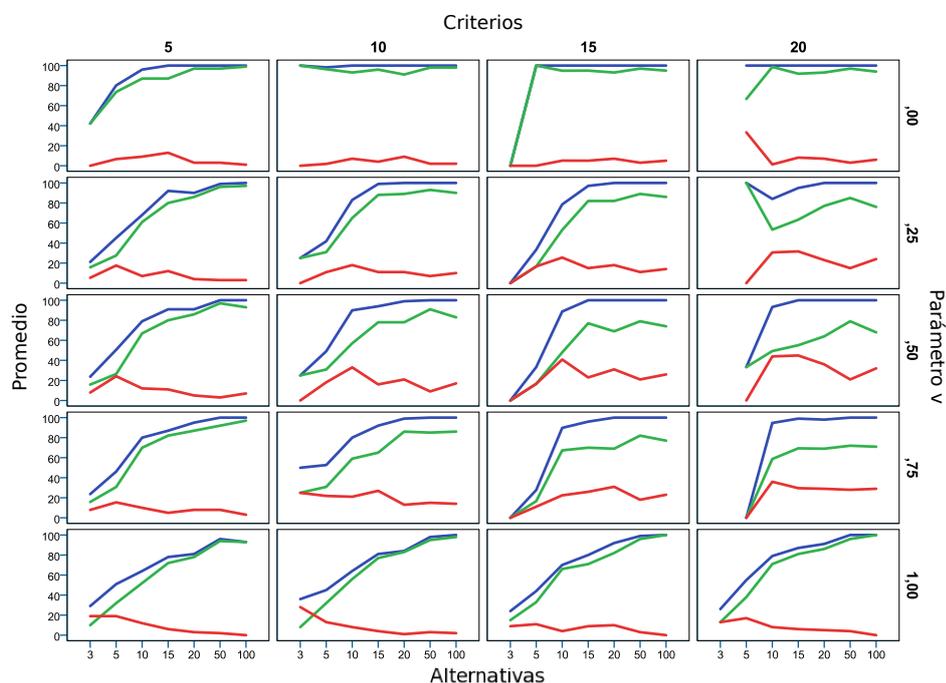


Figura 5.2: Casos inestables para cuando se agrega A^+ . La línea poligonal superior corresponde a los casos inestables, la línea intermedia a los casos sin cambio en la primera posición, y la línea inferior, a los casos con inversión en la primera posición.

En segundo lugar, en la escala del eje Y, se indica que alrededor del 80 % de los casos han presentado OI. Y de estos casos, aproximadamente un 20 % ha sufrido cambios en la primera posición.

Análisis de la influencia del tamaño del problema

En esta sección nos vamos a centrar en la influencia en los resultados del número de alternativas, m , y del número de criterios, n , para los casos inestables.

En la Figura 5.5 se sigue el esquema que en la Figura 5.4. La Figura 5.5.a muestra los resultados según el número de criterios, tanto para la adición de A^+ y como de A^- . En ella se puede apreciar que apenas hay influencia en los resultados, es decir, las representaciones gráficas son muy similares. En cambio, el número de alternativas sí que influye en el resultado, como se muestra en la Figura 5.5.b, donde se aprecia que conforme aumenta m , aumentan los casos inestables. Este incremento también es mayor conforme disminuyen los valores de v , teniendo el 100 % de casos inestables para $m \geq 5$ y $v = 0$, tanto para A^+ y A^- .

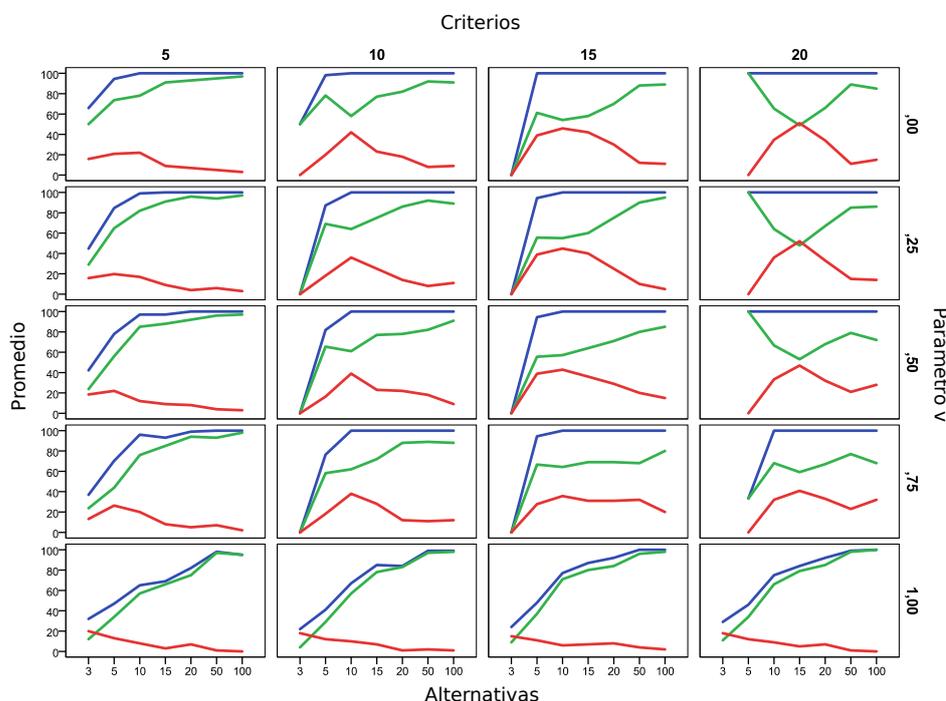


Figura 5.3: Casos inestables para cuando se agrega A^- . La línea poligonal superior corresponde a los casos inestables, la línea intermedia a los casos sin cambio en la primera posición, y la línea inferior, a los casos con inversión en la primera posición.

5.3. Causas del Orden Inverso en VIKOR

En este apartado vamos a tratar de analizar las causas del OI en VIKOR. Para ello, vamos a considerar dos ejemplos cuando este fenómeno se hace presente, uno para la adición de A^+ y otro para la adición de A^- .

Primero, vamos a mostrar un ejemplo en el que se aplica VIKOR y el resultado que se obtiene (Tabla 5.1). A este le problema le vamos a agregar A^+ , le volveremos a aplicar VIKOR, y obtendremos un resultado (Tabla 5.2). Y lo mismo haremos para A^- (Tabla 5.3).

Como vemos en estas tablas, cuando agregamos una alternativa que modifica los valores máximos o mínimos de la matriz de decisión, observamos que ello repercute en los valores de S_i y R_i , y por lo tanto, también se modifican los Q_i y el ranking final, dando lugar al OI.

Por tanto, si tratamos de fijar estos valores, aunque haya modificaciones en la matriz de decisión, los valores máximos y mínimos permanecerían constantes, y con ellos las evaluaciones de las alternativas, evitando así la aparición del OI.

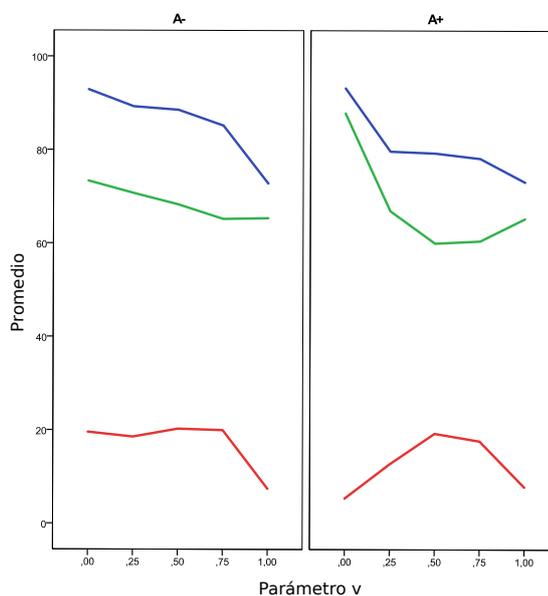


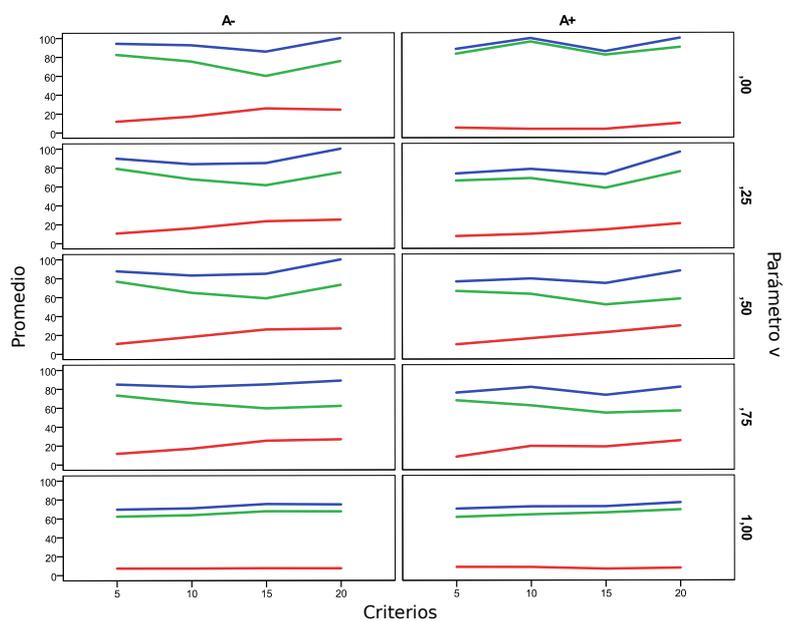
Figura 5.4: Influencia del parámetro v . La línea poligonal superior corresponde a los casos inestables, la línea intermedia a los casos sin cambio en la primera posición, y la línea inferior, a los casos con inversión en la primera posición.

Alt.	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i	R_i	Q_i	Rank
A_1	86	80	50	31	88	0.43	0.20	0.75	2
A_2	34	9	96	100	16	0.60	0.20	0.90	3
A_3	49	94	56	34	19	0.69	0.19	0.25	1
f^+	86	94	96	100	88	$S^+ = 0.43$ $R^+ = 0.19$			
f^-	34	9	50	31	16	$S^- = 0.69$ $R^- = 0.20$			

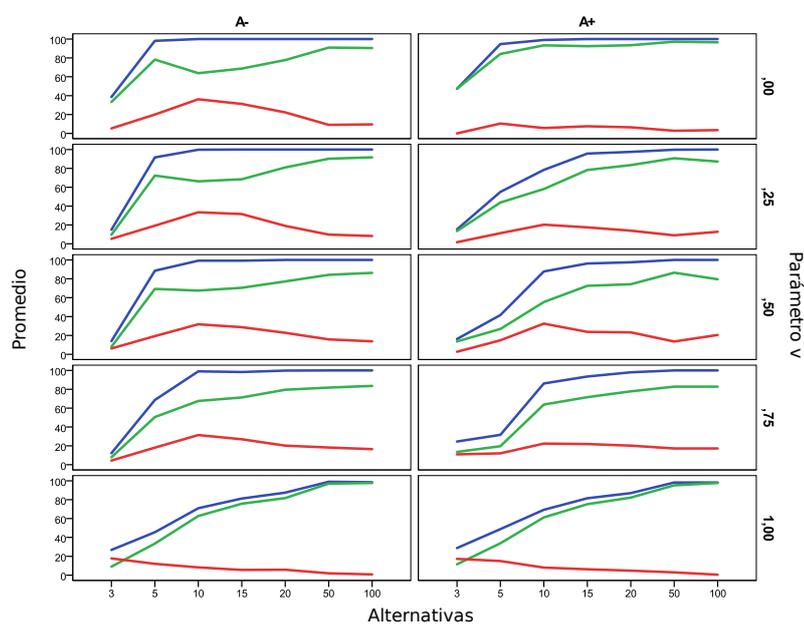
Tabla 5.1: Matriz de decisión y resultado de aplicar VIKOR.

Alt.	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i	R_i	Q_i	Rank
A_1	86	80	50	31	88	0.51	0.20	0.92	1
A_2	34	9	96	100	16	0.61	0.20	0.96	2
A_3	49	94	56	34	19	0.72	0.19	0.97	3
A^+	100	100	100	100	100	0.00	0.00		
f^+	100	100	100	100	100	$S^+ = 0.00$ $R^+ = 0.00$			
f^-	34	9	50	31	16	$S^- = 0.72$ $R^- = 0.20$			

Tabla 5.2: Matriz de decisión con A^+ y resultado de aplicar VIKOR.



(a)



(b)

Figura 5.5: Influencia del (a) número de criterios y del (b) número de alternativas para los casos inestables.

5.4. Evitando el Orden Inverso para VIKOR

Una solución aplicada para evitar el OI se propone para TOPSIS en [47], donde normalizan con la transformación lineal del máximo y añaden dos alternativas al problema de decisión. Una alternativa es A^+ , con lo mejor que se podría alcanzar, y la otra es A^- , con lo peor se que podría obtener, por lo que ambas pueden ser ficticias y no corresponder con la realidad.

Con ello, los valores ideales están contenidos en A^+ y A^- , y la evaluación permanecería invariable frente a cualquier cambio en el conjunto de alternativas. Esto es debido a que no se podría dar ninguna variación en los valores ideales aunque se modifique el espacio de soluciones, ya que aunque varíe el valor en alguna alternativa, las alternativas A^+ y A^- permanecen constantes. Al hacer invariables estos valores, las evaluaciones de las alternativas no cambiarían, por lo que el OI nunca sería posible que apareciera.

Para evitar el OI en VIKOR, vamos a considerar cada C_j en un rango de valores $C_j \in [L_{C_j}, U_{C_j}]$, y se propone considerar los puntos de referencia f_j^+, f_j^- como $A_j^+ = U_{C_j}, A_j^- = L_{C_j}$, respectivamente, del mismo modo que se hizo para TOPSIS.

A continuación, se demuestra que con estas modificaciones, se evita el OI en VIKOR:

Definición 1.

Dados los criterios $C_j, j = 1, 2, \dots, n$ con los valores $C_j \in [L_{C_j}, U_{C_j}]$ consideramos:

$$\begin{aligned} \text{Si } C_j \text{ es un criterio de beneficio} & \begin{cases} A_j^+ = U_{C_j} \\ A_j^- = L_{C_j} \end{cases} \\ \text{Si } C_j \text{ si es un criterio de costo} & \begin{cases} A_j^+ = L_{C_j} \\ A_j^- = U_{C_j} \end{cases} \end{aligned}$$

VIKOR tomará $f_j^+ = A_j^+$ y $f_j^- = A_j^-$. Esto claramente hará que A_j^+, A_j^- nunca cambien, ya que están asociadas al rango de los criterios y éstos no se modifican.

Ahora, reformularemos los índices S_i y R_i (Expr. 2.20 y 2.21, respectivamente) en términos de A_i^+ y A_i^- (el cálculo de Q_i no cambia) como sigue:

Alt.	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_i	R_i	Q_i	Rank
A_1	86	80	50	31	88	0.26	0.13	0.00	1
A_2	34	9	96	100	16	0.47	0.18	0.60	3
A_3	49	94	56	34	19	0.46	0.15	0.30	2
A^-	1	1	1	1	1	1.00	0.20		
f^+	86	94	96	100	88	$S^+ = 0.26$	$R^+ = 0.13$		
f^-	1	1	1	1	1	$S^- = 1.00$	$R^- = 0.20$		

Tabla 5.3: Matriz de decisión con A^- y resultado de aplicar VIKOR.

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \frac{(A_j^+ - x_{ij})}{(A_j^+ - A_j^-)} \quad (5.1)$$

$$R_i = \max_j \left[w_j \frac{(A_j^+ - x_{ij})}{(A_j^+ - A_j^-)} \right], \quad (5.2)$$

Primero, para demostrar que este cambio evita el OI en VIKOR, comprobamos las propiedades de la norma n_{ij} , que se aplica. Seguidamente, comprobamos que la adición de A^+ y A^- hace que los valores S, R y Q no varíen ante modificaciones en el problema de decisión. Para ello, sin pérdida de generalidad, supondremos que los criterios son de beneficio.

Proposición 1. *Dada la norma $n_{ij} = (A_j^+ - x_{ij})/(A_j^+ - A_j^-)$ (como en la Definición 1), $\forall j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$ y x_{ij} el valor de la i -ésima alternativa para el j -ésimo criterio, para \bar{A}^+ y \bar{A}^- se verifica que (siendo \bar{A}^+ y \bar{A}^- los valores de estas alternativas normalizados):*

1. $\bar{A}^+ = \{0, 0, \dots, 0\}$.
2. $\bar{A}^- = \{1, 1, \dots, 1\}$.
3. $1 \geq n_{ij} \geq 0$.

Demostración.

1. Considerando que $A^+ = \{A_1^+, A_2^+, \dots, A_n^+\}$, los correspondientes valores normalizados \bar{A}^+ son

$$\bar{A}^+ = \left\{ \frac{A_1^+ - A_1^+}{A_1^+ - A_1^-}, \frac{A_2^+ - A_2^+}{A_2^+ - A_2^-}, \dots, \frac{A_n^+ - A_n^+}{A_n^+ - A_n^-} \right\} = \{0, 0, \dots, 0\}$$

2. Considerando que $A^- = \{A_1^-, A_2^-, \dots, A_n^-\}$, los correspondientes valores normalizados \bar{A}^- son:

$$\bar{A}^- = \left\{ \frac{A_1^+ - A_1^-}{A_1^+ - A_1^-}, \frac{A_2^+ - A_2^-}{A_2^+ - A_2^-}, \dots, \frac{A_n^+ - A_n^-}{A_n^+ - A_n^-} \right\} = \{1, 1, \dots, 1\}$$

3. Dados $A_j^- \leq x_{ij} \leq A_j^+$, hacemos $A_j^+ - A_j^- \geq A_j^+ - x_{ij} \geq A_j^+ - A_j^-$. Entonces al dividir por $(A_j^+ - A_j^-)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{A_j^+ - A_j^-}{(A_j^+ - A_j^-)} &\geq \frac{A_j^+ - x_{ij}}{(A_j^+ - A_j^-)} \geq \frac{A_j^+ - A_j^+}{(A_j^+ - A_j^-)} \\ 1 &\geq \frac{A_j^+ - x_{ij}}{(A_j^+ - A_j^-)} \geq 0 \\ 1 &\geq n_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Corolario 1. Si $n_{ij} = 0$, entonces $x_{ij} = U_{C_j} \forall j$. Por el contrario, si $n_{ij} = 1$, entonces $x_{ij} = L_{C_j} \forall j$.

Proposición 2. Cuando los valores normalizados son ponderados como $w_j * n_{ij} \forall j$, donde w_j son los pesos asociados a cada criterio, se verifica que:

1. $w_j * \bar{A}^+ = 0, \forall j$.
2. $w_j * \bar{A}^- = w_j, \forall j$.
3. $w_j \geq w_j * n_{ij} \geq 0$.

Demostración.

1. Si $\bar{A}^+ = \{0, 0, \dots, 0\}$, entonces $w_j * A^+ = w_j * 0 = 0, \forall j$.
2. Si $\bar{A}^- = \{1, 1, \dots, 1\}$, entonces $w_j * A^- = w_j * 1 = w_j, \forall j$.
3. Como se demostró anteriormente $1 \geq n_{ij} \geq 0$. Entonces $w_j * 1 \geq w_j * n_{ij} \geq w_j * 0$, y finalmente, tenemos $w_j \geq w_j * n_{ij} \geq 0$.

Corolario 2. Si $w_j * n_{ij} = 0$ entonces $x_{ij} = U_{C_j}, \forall j$. Por el contrario, si $w_j * n_{ij} = w_j$, entonces $x_{ij} = L_{C_j}, \forall j$.

Por consiguiente, dada la norma n_{ij} , se ha demostrado en las Proposiciones 1 y 2 que los valores normalizados y ponderados de A^+ y A^- son 0 y $w_j, j = \{1, 2, \dots, n\}$ respectivamente.

Estos valores, n_{ij} y $w_j * n_{ij}$ no variarían porque A^+ y A^- no dependen de los valores de las alternativas.

Como consecuencia, los valores S, R y Q no variarían tampoco.

Proposición 3. Dada la Expr. 5.1, y las Proposiciones anteriores, se verifica que:

1. $S_{A^+} = 0$.
2. $S_{A^-} = 1$.
3. $1 \geq S_i \geq 0$.

Demostración.

$$1. S_{A^+} = \sum_{j=1}^n w_j \frac{(A_j^+ - A_j^+)}{(A_j^+ - A_j^-)} = \sum_{j=1}^n w_j * 0 = 0$$

$$2. S_{A^-} = \sum_{j=1}^n w_j \frac{(A_j^+ - A_j^-)}{(A_j^+ - A_j^-)} = \sum_{j=1}^n w_j * 1 = 1 \text{ (parámetros de entrada del método VIKOR)}$$

3. De la Proposición 2:

$$w_j \geq w_j \frac{(A_j^+ - x_{ij})}{(A_j^+ - A_j^-)} \geq 0$$

Aplicando la sumatoria sobre j

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n w_j &\geq \sum_{j=i}^n w_j \frac{(A_j^+ - x_{ij})}{(A_j^+ - A_j^-)} \geq \sum_{j=1}^n 0 \\ 1 &\geq \sum_{j=1}^n w_j \frac{(A_j^+ - x_{ij})}{(A_j^+ - A_j^-)} \geq 0 \end{aligned}$$

lo cual equivale a $1 \geq S_i \geq 0$.

Corolario 3.

Si $S_i = 0$ entonces $x_{ij} = U_{C_j}, \forall j$. Por el contrario, si $S_i = 1$ entonces $x_{ij} = L_{C_j}, \forall j$.

Proposición 4. Dada la Expr. 5.2, y las Proposiciones 1 y 2, se verifica que:

1. $R_{A^+} = 0$.
2. $R_{A^-} = \max_j [w_j]$.
3. $\max_j [w_j] \geq R_j \geq 0$.

Demostración.

$$1. R_{A^+} = \max_j \left[w_j \frac{A_j^+ - A_j^+}{A_j^+ - A_j^-} \right] = \max_j [w_j * 0] = 0$$

$$2. R_{A^-} = \max_j \left[w_j \frac{A_j^+ - A_j^-}{A_j^+ - A_j^-} \right] = \max_j [w_j * 1] = \max_j [w_j]$$

3. Partiendo de

$$w_j \geq w_j \frac{(A_j^+ - x_{ij})}{(A_j^+ - A_j^-)} \geq 0$$

y aplicando la función del máximo

$$\max_j [w_j] \geq \max_j \left[w_j \frac{(A_j^+ - x_{ij})}{(A_j^+ - A_j^-)} \right] \geq \max_j 0$$

se obtiene

$$\max_j [w_j] \geq R_i \geq 0.$$

Corolario 4.

Si $R_i = 0$, entonces $x_{ij} = U_{C_j}$, $\forall j$. Por el contrario, si $R_i = \max_j [w_j]$, entonces $x_{ij} = L_{C_j}$, $\forall j$.

Proposición 5. Dada la Expr. 2.22 y las Proposiciones anteriores que demuestran que $S^+ = 0$, $S^- = 1$, $R^+ = 0$, $R^- = \max_j [w_j]$ y $v \in [0, 1]$; se verifica que $0 \leq Q_i \leq 1$.

Demostración. Dada la Expr. 2.22 y las anteriores suposiciones, se obtiene que

$$\begin{aligned} Q_i &= v \left(\frac{S_i - 0}{1 - 0} \right) + (1 - v) \left(\frac{R_i - 0}{\max_j [w_j] - 0} \right) \\ &= v * S_i + (1 - v) \left(\frac{R_i}{\max_j [w_j]} \right). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $S_i = R_i = 0$ (es decir, tienen los valores más bajos posibles), entonces

$$Q_i = v * 0 + (1 - v) \left(\frac{0}{\max_j [w_j]} \right) = 0$$

Cuando $S_i = 1$, $R_i = \max_j [w_j]$ (es decir, tienen los valores más altos posibles), entonces

$$Q_i = v * 1 + (1 - v) \left(\frac{\max_j [w_j]}{\max_j [w_j]} \right) = 1$$

Finalmente, teniendo en cuenta las Proposiciones 3, 4 y 5, podemos concluir que cuando hacemos $f_j^+ = A^+$ y $f_j^- = A^-$, estos valores se usan para calcular S, R y Q . Como A^+ y A^- son fijos, la evaluación de cualquier alternativa (en términos de S, R, Q) no cambian si hay modificaciones en el conjunto de alternativas del problema. Con ello, queda demostrado que el OI se evita en VIKOR con esta solución.

5.4.1. Ejemplo ilustrativo

A continuación, pasemos a comprobar que esta solución funciona. Para ello, vamos a considerar un ejemplo con 11 alternativas, A_1, A_2, \dots, A_{11} , y dos criterios, C_1, C_2 . Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, ambos criterios son de beneficio e igual de importantes, $w_1 = w_2 = 0.5$. Supongamos que el dominio de los criterios es $C_j = [1, 6]$. La matriz de decisión de este ejemplo se muestra en la Tabla 5.4. Se le aplica VIKOR tomando $v = 0.5$ y se obtienen los valores de S , R y Q , mostrados en la misma tabla.

Como se puede observar, la mejor alternativa es $a' = A_8$ con un valor $Q = 0.125$.

Ahora, considerando las condiciones para que A_8 sea la solución de compromiso de VIKOR, comprobamos el Caso 1:

- *Condición 1:* $Q(a'') - Q(a') \geq DQ$. Se tiene que $a' = A_8, a'' = A_1$ o $A_2, DQ = 1/(11 - 1) = 0.1$. Por lo que se cumple: $0.25 - 0.125 = 0.125 \geq 0.1$.
- *Condición 2:* $a' = A_8$ debe ser la mejor alternativa para S y/o R . En este caso, A_8 es la mejor alternativa según R , por lo que esta condición también se cumple.

Como se cumplen ambas condiciones, A_8 se puede considerar también como la solución de compromiso.

El siguiente paso es eliminar la alternativa $A_6 = (6,1)$, y comprobar qué sucede con respecto al ranking inicial. Ahora, el problema se compone de 10 alternativas, al que se le aplica VIKOR en las mismas condiciones, y los resultados que se obtienen se muestran en la Tabla 5.5.

Como se puede ver, ahora la mejor alternativa pasa a ser A_2 , con $Q(A_2) = 0$. De nuevo comprobamos si es solución de compromiso:

- *Condición 1:* $Q(a'' = A_8) - Q(a' = A_2) = 0.125 - 0 \geq DQ = 0.111$.
- *Condición 2:* A_2 es la mejor alternativa según S y R .

Ahora A_2 es propuesta como la mejor alternativa y no A_8 , como se esperaba.

Con este ejemplo se muestra que al eliminar una alternativa se produce un cambio en el ranking, mostrando que VIKOR también es sensible al Orden Inverso, como ya se mencionó.

Nota: si el lector observa el ejemplo anterior, $n_{ij} = \frac{6-x_{ij}}{6-1}, j = 1, 2$. Cuando la alternativa A_6 es eliminada, el valor de $f_{C_1}^+ = 6$ cambia por $f_{C_1}^+ = 5$ y $f_{C_2}^- = 1$ por $f_{C_2}^- = 2$. Como consecuencia, $n_{i1} = \frac{5-x_{i1}}{5-1}$ y $n_{i2} = \frac{6-x_{i2}}{6-2}$. Estas variaciones se puede observar gráficamente en la Figura 5.6, donde el eje X representa el valor de S_i y el eje Y representa el valor de R_i . En dicha figura, se puede apreciar como se modifican los referentes ideales al variar los valores de la f^+ y la f^- cuando se elimina una alternativa, variando así los valores de los índices para las alternativas.

VIKOR	C_1	C_2	S	R	Q	Ranking
A_1	5	2	0.5	0.4	0.25	2
A_2	2	5	0.5	0.4	0.25	2
A_3	4	2	0.6	0.4	0.375	3
A_4	1	4	0.7	0.5	0.75	6
A_5	1	6	0.5	0.5	0.5	4
A_6	6	1	0.5	0.5	0.5	4
A_7	2	2	0.8	0.4	0.626	5
A_8	3	3	0.6	0.3	0.125	1
A_9	1	2	0.9	0.5	1	7
A_{10}	3	2	0.7	0.4	0.5	4
A_{11}	2	3	0.7	0.4	0.5	4
f^+	6	6	$S^+ = 0.5$	$R^+ = 0.3$		
f^-	1	1	$S^- = 0.9$	$R^- = 0.5$		

Tabla 5.4: Matriz de decisión del ejemplo y resultado de aplicar VIKOR.

VIKOR	C_1	C_2	S	R	Q	Ranking
A_1	5	2	0.5	0.5	0.5	4
A_2	2	5	0.5	0.375	0	1
A_3	4	2	0.625	0.5	0.625	5
A_4	1	4	0.75	0.5	0.75	6
A_5	1	6	0.5	0.5	0.5	4
A_6	-	-	-	-	-	-
A_7	2	2	0.875	0.5	0.875	7
A_8	3	3	0.625	0.375	0.125	2
A_9	1	2	1	0.5	1	8
A_{10}	3	2	0.75	0.5	0.75	6
A_{11}	2	3	0.75	0.375	0.25	3
f^+	5	6	$S^+ = 0.5$	$R^+ = 0.375$		
f^-	1	2	$S^- = 1$	$R^- = 0.5$		

Tabla 5.5: Matriz de decisión del ejemplo eliminando A_6 , y resultado de aplicar VIKOR.

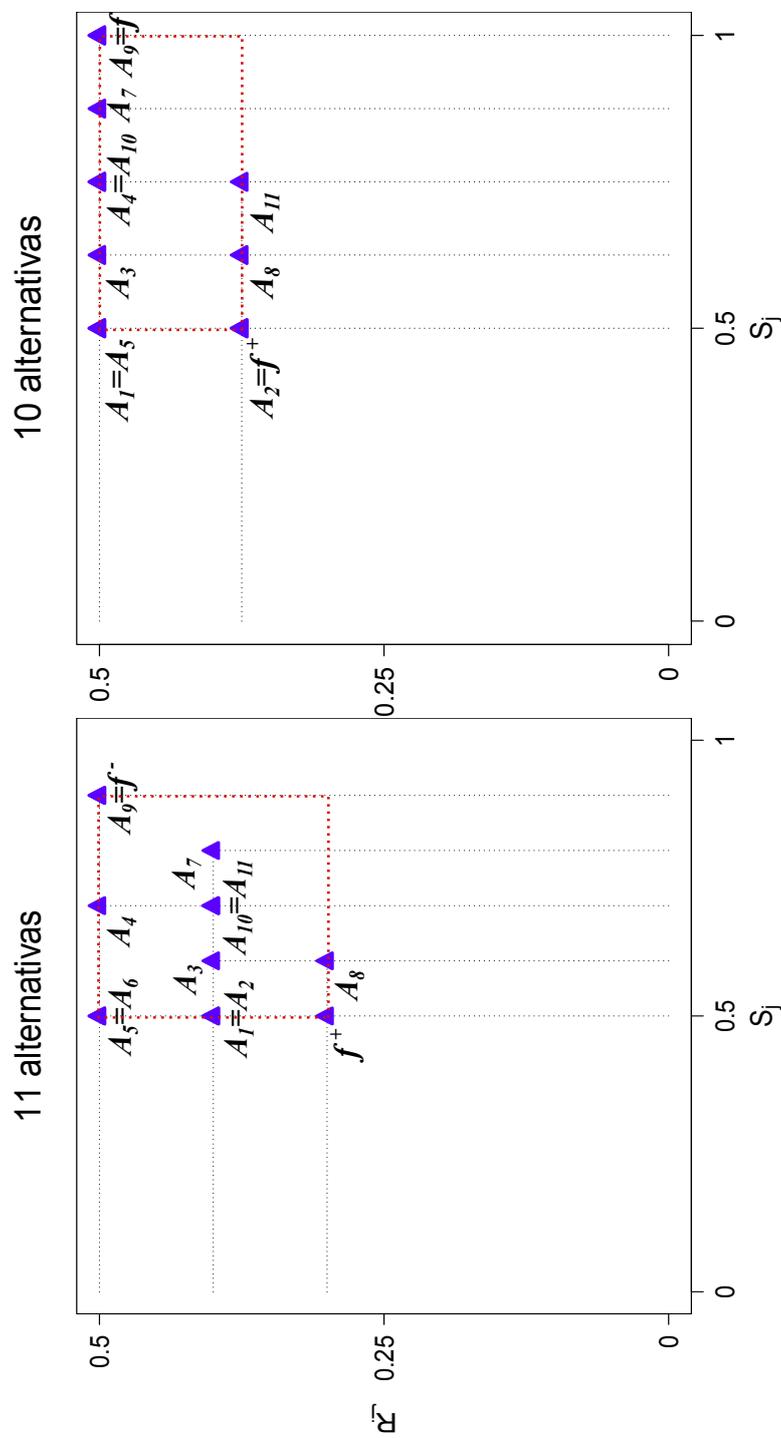


Figura 5.6: Ejemplo del Orden Inverso en VIKOR.

VIKOR	C_1	C_2	S	R	Q	Ranking
A_1	5	2	0.5	0.4	0.65	2
A_2	2	5	0.5	0.4	0.65	2
A_3	4	2	0.6	0.4	0.7	3
A_4	1	4	0.7	0.5	0.85	6
A_5	1	6	0.5	0.5	0.75	4
A_6	6	1	0.5	0.5	0.75	4
A_7	2	2	0.8	0.4	0.8	5
A_8	3	3	0.6	0.3	0.6	1
A_9	1	2	0.9	0.5	0.95	7
A_{10}	3	2	0.7	0.4	0.75	4
A_{11}	2	3	0.7	0.4	0.75	4
A^+	6	6	$S^+ = 0$	$R^+ = 0$		
A^-	1	1	$S^- = 1$	$R^- = 0.5$		

Tabla 5.6: Matriz de decisión del ejemplo y resultado de aplicar VIKOR con A^+ y A^- .

VIKOR	C_1	C_2	S	R	Q	Ranking
A_1	5	2	0.5	0.4	0.65	2
A_2	2	5	0.5	0.4	0.65	2
A_3	4	2	0.6	0.4	0.7	3
A_4	1	4	0.7	0.5	0.85	6
A_5	1	6	0.5	0.5	0.75	4
A_6	-	-	-	-	-	-
A_7	2	2	0.8	0.4	0.8	5
A_8	3	3	0.6	0.3	0.6	1
A_9	1	2	0.9	0.5	0.95	7
A_{10}	3	2	0.7	0.4	0.75	4
A_{11}	2	3	0.7	0.4	0.75	4
A^+	6	6	$S^+ = 0$	$R^+ = 0$		
A^-	1	1	$S^- = 1$	$R^- = 0.5$		

Tabla 5.7: Matriz de decisión del ejemplo eliminando A_6 , y resultado de aplicar VIKOR con A^+ y A^- .

Ahora, pasamos a aplicar este mismo ejemplo pero con la solución propuesta. Los resultados de aplicar a la matriz de decisión original se encuentran en la Tabla 5.6. En ella se puede ver que la mejor alternativa es la A_8 . Seguidamente, pasamos a eliminar la alternativa A_6 , y volvemos a aplicar VIKOR en las mismas condiciones. El resultado se encuentra en la Tabla 5.7, donde además de ver que no varía el ranking, tampoco lo hacen los valores de S , R y Q , probando así que con la solución que proponemos se evita el OI en VIKOR.

Gráficamente, podemos ver que en la Figura 5.7, al añadir A^+ y A^- , los puntos ideales permanecen constantes al modificar la matriz de decisión, de este modo, los resultados permanecen invariables frente a cualquier variación en la matriz de decisión.

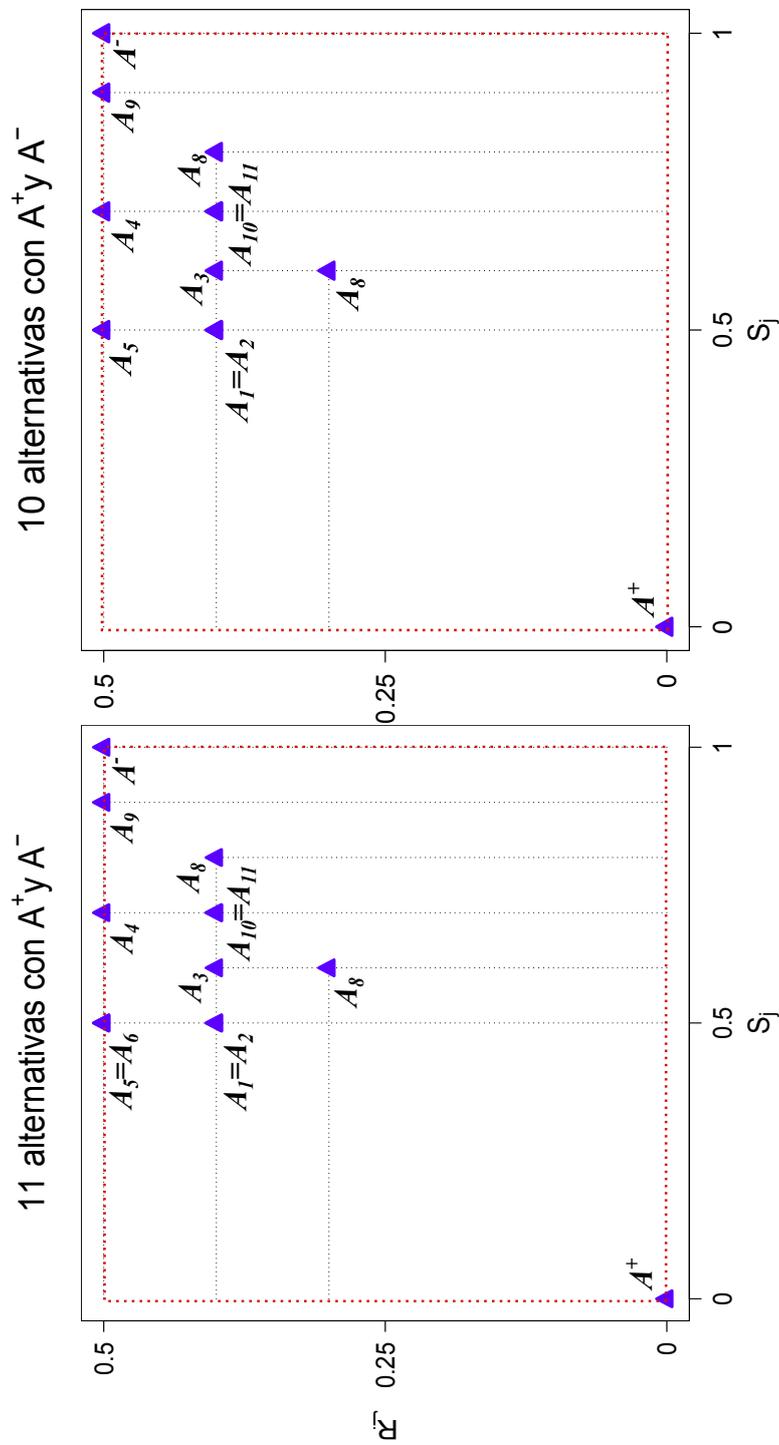


Figura 5.7: Ejemplo de preservación del ranking en VIKOR.

VIKOR	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S	R	Q	Ranking
A_1	50	77	11	81	11	0.6	0.2	-	-
A_2	86	30	57	75	64	0.46	0.2	-	-
A_3	63	28	35	79	92	0.49	0.2	-	-

Tabla 5.8: Ejemplo cuando VIKOR no resuelve el problema.

VIKOR	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S	R	Q	Ranking
A_1	50	77	11	81	11	0.54	0.179	0.72	3
A_2	86	30	57	75	64	0.37	0.141	0.54	1
A_3	63	28	35	79	92	0.41	0.145	0.56	2
A^+	100	100	100	100	100	0	0		
A^-	1	1	1	1	1	1	0.2		

Tabla 5.9: Solución para cuando VIKOR no resuelve el problema.

Además, esta propuesta soluciona el caso en el que VIKOR no es capaz de dar una solución, ya que los valores de R nunca podrían ser iguales cuando se consideran A^+ y A^- , y con ello, nunca se obtiene una indeterminación. Para ilustrarlo, vamos a considerar un ejemplo del análisis anterior en los que no obtuvo solución con tres alternativas y cinco criterios, Tabla 5.8.

En este ejemplo, se puede observar que las tres alternativas toman el mismo valor de R_i , causando una indeterminación en Q_i . Si ahora aplicamos nuestra propuesta, en este caso VIKOR puede dar una solución, ya que como se ven en la Tabla 5.9, el valor de R_i ya no es el mismo para todas las alternativas. De este modo, nuestra propuesta soluciona tanto el OI como el caso en el que VIKOR no devuelve solución.

Capítulo 6

Paquete MCDM, FuzzyMCDM en R y aplicaciones prácticas

En este capítulo se describen los paquetes MCDM y FuzzyMCDM desarrollados en la plataforma de software libre R como motor para el desarrollo de un sistema de ayuda a la decisión.

El paquete MCDM contiene los métodos descritos en esta tesis para trabajar en entornos bien conocidos, y para aquellos en los que la vaguedad esté presente, se ha desarrollado el paquete FuzzyMCDM que contiene la versión difusa de los métodos estudiados.

6.1. Introducción

R [8] es un entorno de trabajo enfocado a la computación estadística y gráfica. Está fundado como software libre bajo la licencia “Free Software Foundation’s GNU General Public License”, y se encuentra disponible para las plataformas UNIX, Windows y MacOS.

El entorno de trabajo R se define como una integración software para la manipulación de datos, cálculos y generación de gráficas. Dispone de un soporte muy efectivo para el tratamiento de datos y su almacenamiento. También incluye operadores para cálculos con arrays, en particular, con matrices, y una colección integrada de herramientas intermedias para el análisis de datos y, visualización gráfica. Además, dispone de un simple, pero efectivo lenguaje de programación que incluye condicionales, bucles, funciones recursivas y facilidades para el flujo de entrada y salida de datos.

Con el término “entorno” en R, se pretende caracterizar un sistema bien estructurado y coherente, más que la acumulación de herramientas muy específicas y poco flexibles, como suele suceder con otros software de análisis de datos.

Una de las características principales de este entorno de trabajo es la facilidad con la que se pueden producir gráficos de gran calidad, incluyendo

símbolos y fórmulas matemáticas en el lugar que sea necesario. Las asignaciones por defecto están definidas cuidadosamente para reducir al máximo las elecciones en el diseño del gráfico por parte del usuario, pero son totalmente variables sin que el usuario pierda el control.

Otra característica que distingue a **R**, es que está diseñado como un entorno de lenguaje de programación, el cual permite a los usuarios añadir funcionalidades adicionales según sus necesidades. Para las tareas computacionales más complejas, también se permite la llamada a código en **C**, **C++** o **Fortran**. Así, por ejemplo, un usuario avanzado podría escribir código en **C** para manipular objetos de **R** directamente. Al mismo tiempo, **R** dispone de su propia documentación en formato **LaTeX**, la cual se usa para aportar documentación que sea fácil de comprender.

La mayoría de usuarios piensan que **R** es un sistema sólo estadístico, pero realmente no es sólo eso, ya que permite muchas más funcionalidades. Ésto es gracias a que se pueden desarrollar paquetes fácilmente y ponerlos a libre disposición de todos los usuarios en el repositorio **CRAN**, en el cual, a fecha de esta tesis, existen 9522 paquetes para su descarga, enfocados a diversos campos. Aplicaciones de estos paquetes se pueden encontrar en la revista “The R journal”, como en [24], donde se enfocan en visualización geográfica o en [41] que trabajan con análisis de textos.

Por todas estas ventajas que ofrece, hemos seleccionado este entorno de trabajo para el desarrollo de los métodos como paquetes integrados. De esta forma, son accesibles a cualquier usuario sin coste alguno y adaptables a sus necesidades. Además, es una plataforma fácil e intuitiva, y sobre todo, de gran alcance.

6.2. Paquete MCDM

El paquete **MCDM** [3] está disponible en **CRAN** para su descarga.

Este paquete incluye una función para cada uno de los métodos que contiene, los cuales son **MULTIMOORA**, **RIM**, **TOPSIS** con dos normalizaciones, **VIKOR** y **WASPAS**. Además, incluye la función **MetaRanking()**, que calcula dos rankings a partir de los rankings obtenidos por los métodos mencionados anteriormente. Uno de los ranking se calcula a partir de la suma de los rankings, y de ese valor se deriva el nuevo ranking [33], y el otro ranking se calcula por medio de la agregación de rankings [86], que se detalla más adelante.

6.2.1. Funciones de MCDM

A continuación se describen las funciones correspondientes a cada método con sus parámetros de entrada y la información que devuelven.

Todas las funciones tienen en común los siguientes parámetros de entrada:

- **decision:** es una matriz de dimensión $(m \times n)$ que corresponde con la matriz de decisión del problema, siendo m el número de alternativas y n el número de criterios.
- **weights:** es un vector numérico de dimensión n que contiene los pesos de los criterios, donde cada posición i del vector corresponde al peso del criterio C_i .
- **cb:** es un vector de caracteres que indica si los criterios son de beneficio o de costo. Si son de beneficio se indica con 'max', y si es de costo se indica con 'min'. Igual que los pesos, cada posición i del vector corresponde a la información del criterio C_i .

A parte, según el método hay parámetros de entrada específicos, que explicaremos detalladamente en cada función.

Función MMORA(decision, weights, cb)

Esta función corresponde al método MULTIMOORA. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados anteriormente: **decision**, **weights**, **cb**. Un ejemplo de aplicación podría ser un problema compuesto por siete alternativas y cinco criterios, de los cuales cuatro son de beneficio y uno de coste, como se define a continuación:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(60,6.35,6.8,10,2.5,4.5,3,0.4,0.15,0.1,0.2,0.1,
0.08,0.1,2540,1016,1727.2,1000,560,1016,1778,500,3000,1500,
2000,500,350,1000,990,1041,1676,965,915,508,920),nrow=7,ncol=5)

#Pesos
w <- c(0.036,0.192,0.326,0.326,0.12)

#Coste - Beneficio
cb <- c('max','min','max','max','max')

#Llamada a la función
MMOORA(d,w,cb)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores de los índices del *Ratio System*, *Reference point* y del *Full Multiplicative Form*, con sus respectivos rankings, y por último, el ranking de Multi-MOORA.

Alt.	RatioSystem	Rank	Ref.Point	Rank	Multi.Form	Rank	MMooraRank
1	0.1735	5	0.1984	5	8.12e-05	2	5
2	0.3129	1	0.1243	2	5.78e-05	3	2
3	0.2984	2	0.1190	1	1.27e-04	1	1

4	0.2122	4	0.1256	3	4.15e-05	4	3
5	0.0885	7	0.1984	6	2.75e-06	7	7
6	0.1049	6	0.2103	7	4.37e-06	6	6
7	0.2280	3	0.1587	4	2.11e-05	5	4

Función RIM(decision, weights, AB, CD)

Esta función corresponde al método RIM. Sus parámetros de entrada, son cuatro: `decision`, `weights`, `AB`, `CD`. `decision` y `weights` son los comunes descritos con anterioridad, pero `AB` y `CD` son específicos del método:

- `AB`: es una matriz de dimensión $(2 \times n)$ que define el rango del dominio de los n criterios. `AB[1,i]` corresponde al extremo A del intervalo del criterio C_i , y `AB[2,i]` corresponde al extremo B del intervalo del criterio C_i .
- `CD`: es una matriz de dimensión $(2 \times n)$ que define el rango del referente ideal para los n criterios. `CD[1,i]` corresponde al extremo C del intervalo del criterio C_i , y `CD[2,i]` corresponde al extremo D del intervalo del criterio C_i .

El ejemplo de aplicación para esta función consta de un problema de cinco alternativas y seis criterios, tal y como se define a continuación:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(30,40,25,27,45,0,9,0,0,15,2,1,3,5,2,3,3,1,3,
2,3,2,3,3,3,2,2,2,1,4),nrow = 5, ncol = 6)

#Pesos
w <- c(0.2262,0.2143,0.1786,0.1429,0.119,0.119)

#Parámetros específicos
AB = matrix(c(23,60,0,15,0,10,1,3,1,3,1,5),nrow = 2,ncol = 6)
CD = matrix(c(30,35,10,15,0,0,3,3,3,3,4,5),nrow = 2,ncol = 6)

#Llamada a la función
RIM(d,w,AB,CD)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores del índice R y el ranking calculado.

Alt.	R	Ranking
1	0.5866	3
2	0.7558	1

3	0.3716	5
4	0.4665	4
5	0.7401	2

Función TOPSISLineal(decision, weights, cb)

Esta función corresponde al método TOPSIS con la transformación lineal del máximo como normalización. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados al comienzo de la sección: `decision`, `weights`, `cb`. Como ejemplo de aplicación, hemos escogido un problema con tres alternativas y dos criterios, ambos de beneficio, como se define a continuación:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(1,4,3,5,2,3),nrow = 3,ncol = 2)

#Pesos
w <- c(0.5,0.5)

#Coste - Beneficio
cb <- c('max','max')

#Llamada a la función
TOPSISLineal(d,w,cb)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores del coeficiente de cercanía y el ranking calculado.

Alt.	CC	Ranking
1	0.4444	3
2	0.5555	1
3	0.5330	2

Función TOPSISVector(decision, weights, cb)

Esta función corresponde al método TOPSIS con la normalización vectorial. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados al comienzo de la sección. El ejemplo de aplicación seleccionado también tiene tres alternativas y dos criterios, ambos de beneficio, como se expone a continuación:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(6,7,10,2,2.75,3.5),nrow = 3,ncol = 2)

#Pesos
w <- c(0.5,0.5)
```

```
#Coste - Beneficio
cb <- c('min','max')
```

```
#Llamada a la función
TOPSISVector(d,w,cb)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz con los valores del índice CC y el ranking obtenido.

Alt.	CC	Ranking
1	0.4889	3
2	0.6120	1
3	0.5110	2

Función VIKOR(decision, weights, cb, v)

Esta función corresponde al método VIKOR. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados anteriormente más uno específico, v . El parámetro $v \in [0, 1]$, corresponde al parámetro que balancea S_i y R_i en el cálculo del índice Q_i . Un ejemplo de aplicación podría ser el que se define a continuación, compuesto por tres alternativas y dos criterios, uno de coste y otro de beneficio, con $v = 0.5$:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(6,2,1,100,3750,5500),nrow = 3,ncol = 2)
```

```
#Pesos
w <- c(0.5,0.5)
```

```
#Coste - Beneficio
cb <- c('min','max')
```

```
#Parámetros específicos
v <- 0.5
```

```
#Llamada a la función
VIKOR(d,w,cb,v)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores de los índices S , R , Q y el ranking según Q .

Alt.	S	R	Q	Ranking
1	1.000	0.500	1.000	3
2	0.262	0.162	0.293	2
3	0.000	0.000	0.000	1

Función WASPAS(decision, weights, cb, lambda)

Esta función corresponde al método WASPAS. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados anteriormente más uno específico, *lambda*. El parámetro *lambda* $\in [0, 1]$, corresponde al parámetro necesario para combinar el *WSM* y el *WPM*. Su ejemplo de aplicación se compone de cuatro alternativas, doce criterios, cuatro de costo y ocho de beneficio, y $\lambda = 0.5$:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(370,314,480,850,11,7,10,16,2.69,2.37,3.09,
3.17,2.75,3.27,3.67,4.10,5,35,30,50,1.63,1.72,1.87,1.91,
1.47,2.07,1.38,2.22,7.11,5.60,7.82,8.25,88,12.60,94,23,
410,100,410,65,2.93,2.13,2.87,1.10,1.98,3.21,2.94,4.37),
nrow = 4,ncol = 12)

#Pesos
w <- c(0.0626,0.0508,0.1114,0.0874,0.0625,0.1183,0.0784,
0.0984,0.053,0.1417,0.0798,0.0557)

#Coste - Beneficio
cb <- c('min','min','max','max','max','max','max','max',
'min','min','max','max')

#Parametros específicos
lambda <- 0.5

#Llamada a la función
WASPAS(d,w,cb,lambda)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores del *WSM*, *WPM*, el índice *K* y el ranking generado.

Alt.	WSM	WPM	K	Ranking
1	0.6176	0.4945	0.5560	4
2	0.8006	0.7912	0.7959	2
3	0.7038	0.5913	0.6475	3
4	0.8581	0.8070	0.8325	1

Función MetaRanking(decision, weights, cb, lambda, v, AB, CD)

Esta función calcula dos meta-ranking a partir de los rankings generados por todos los métodos. El primero lo genera como la suma de los rankings [33], y el otro lo calcula como un ranking agregado [86].

La suma de los rankings consiste en sumar los rankings de cada alternativa, y con este nuevo valor, derivar un nuevo ranking final ordenando las

alternativas de forma ascendente según la sumatoria. Si por ejemplo, se tienen tres métodos con los que se calculan tres rankings, y una determinada alternativa ha obtenido la primera posición en los tres rankings, su valor de la suma sería 3 ($1 + 1 + 1$), y ocuparía la primera posición en el nuevo ranking que se obtiene, ya que sería la que menor valor ha obtenido en la sumatoria.

El ranking agregado se calcula con una heurística que toma los rankings como puntos en el plano, y calcula un punto adicional que esté lo más cercano posible a todos los puntos. Ésto lo realiza mediante dos procedimientos según el número de alternativas del que esté compuesto el problema. Si tiene diez o menos alternativas, entonces se emplea la fuerza bruta, probando todas las combinaciones posibles y escogiendo aquella solución que esté más cercana a todos los puntos. Si hay más de diez alternativas, entonces se emplea un algoritmo genético. En ambos casos, la distancia se “mide” como la similitud que hay entre los puntos, por medio del coeficiente de correlación de Spearman.

Si el lector lo desea, puede encontrar más información en la documentación del paquete que hemos seleccionado para este cálculo del ranking agregado, `RankAggreg` [6].

Los parámetros de entrada de esta función son los necesarios para cada función, es decir, `decision`, `weights`, `cb`, `lambda`, `v`, `AB`, `CD`. Un ejemplo de aplicación podría ser el siguiente, compuesto por tres alternativas y dos criterios, uno de costo y el otro de beneficio:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(1,2,5,3000,3750,4500),nrow = 3,ncol = 2)

#Pesos
w <- c(0.5,0.5)

#Coste - Beneficio
cb <- c('min','max')

#Parámetros específicos
lambda <- 0.5
v <- 0.5
AB <- matrix(c(1,5,3000,4500),nrow = 2,ncol=2)
CD <- matrix(c(1,1,4500,4500),nrow = 2,ncol=2)

#Llamada a la función
MetaRanking(d,w,cb,lambda,v,AB,CD)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los rankings de todos los métodos y los dos meta-ranking calculados: el de la suma (`MRank_Sum`), y el agregado (`MRank_Agg`).

Alt.	MMOORA	RIM	TOP-Vec	TOP-Li	VIKOR	WASPAS	MRank_Sum	MRank_Agg
1	1	2	1	1	2	1	1	1
2	2	1	2	2	1	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3

6.3. Paquete FuzzyMCDM

El paquete `FuzzyMCDM` [1] está disponible en CRAN para su descarga.

Este paquete incluye los métodos fuzzy MULTIMOORA, fuzzy TOPSIS con dos normalizaciones, fuzzy VIKOR y fuzzy WASPAS. Además de estos métodos, incluye también una función `MetaRanking()`, que calcula dos meta-rankings a partir de los rankings obtenidos por los métodos. Funciona del mismo modo que se hace en el paquete MCDM.

6.3.1. Funciones de FuzzyMCDM

Como hemos comentado, este paquete incluye funciones que aplican los métodos estudiados en esta tesis, pero en su versión difusa. Igual que en el paquete MCDM, hay parámetros que comparten las funciones, los cuales describimos a continuación:

- **decision:** es una matriz de dimensión $(m \times (n*3))$ que corresponde a la matriz de decisión del problema, siendo m el número de alternativas, $(n*3)$ los valores de las alternativas para cada criterio, ya que se toman como tripletas que representan números triangulares difusos, y n el número de criterios.
- **weights:** es un vector numérico de dimensión $(n * 3)$ que contiene los pesos de los criterios, dado que también se consideran números triangulares difusos.
- **cb:** es un vector de caracteres de tamaño n , que indica si los criterios son de beneficio o de costo. Si son de beneficio se indica con ‘max’, y si es de costo se indica con ‘min’.

A parte, hay parámetros de entrada específicos según el método, que explicaremos en cada función.

Función `FuzzyMMORA(decision, weights, cb)`

Esta función corresponde al método MULTIMOORA difuso. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados anteriormente. Como ejemplo de aplicación hemos seleccionado un problema compuesto por cuatro alternativas y ocho criterios, todos de beneficio, como se define a continuación:

```

#Matriz de decisión
d <- matrix(c(0.63,0.42,0.63,0.67,0.8,0.59,0.8,0.84,0.92,
0.75,0.92,0.92,0.29,0.71,0.75,0.42,0.46,0.88,0.92,0.59,0.63,
1,1,0.71,0.75,0.59,0.42,0.42,0.92,0.75,0.58,0.59,1,0.88,0.76,
0.75,0.59,0.71,0.42,0.33,0.75,0.88,0.58,0.51,0.88,0.96,0.71,
0.67,0.5,0.67,0.67,0.67,0.67,0.84,0.84,0.84,0.84,0.92,0.96,
0.96,0.67,0.54,0.54,0.25,0.84,0.71,0.71,0.42,0.96,0.88,0.88,
0.59,0.67,0.71,0.42,0.25,0.84,0.88,0.59,0.42,0.96,0.96,0.75,
0.58,0.54,0.625,0.625,0.295,0.705,0.79,0.795,0.46,0.88,0.92,
0.875,0.62),nrow=4,ncol=24)

#Pesos
w <- c(1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,
1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,1/24,
1/24,1/24)

#Coste - Beneficio
cb <- c('max','max','max','max','max','max','max','max')

#Llamada a la función
FuzzyMMOORA(d,w,cb)

```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores de los índices del *Ratio System*, *Reference point* y del *Full Multiplicative Form*, sus respectivos rankings, y por último, el ranking de Multi-MOORA.

Alt.	RatioSystem	Rank	Ref.Point	Rank	Multi.Form	Rank	MMooraRank
1	0.0983	2	0.0123	3	0.1472	2	2
2	0.1031	1	0.0062	1	0.2050	1	1
3	0.0947	3	0.0088	2	0.1174	3	3
4	0.0755	4	0.0128	4	0.0258	4	4

Función FuzzyTOPSISLineal(decision, weights, cb)

Esta función corresponde al método TOPSIS difuso con la transformación lineal del máximo como normalización. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados al comienzo de la sección: `decision`, `weights`, `cb`. El ejemplo de aplicación consta de tres alternativas y cinco criterios de beneficio, como se muestra a continuación:

```

#Matriz de decisión
d <- matrix(c(5.7,6.3,6.3,7.7,8.3,8,9.3,9.7,9,5,9,7,7,10,9,9,
10,10,5.7,8.3,7,7.7,9.7,9,9,10,10,8.33,9,7,9.67,10,9,10,10,10,
3,7,6.3,5,9,8.3,7,10,9.7),nrow=3,ncol=15)

```

```
#Pesos
w <- c(0.7,0.9,1,0.9,1,1,0.77,0.93,1,0.9,1,1,0.43,0.63,0.83)

#Coste - Beneficio
cb <- c('max','max','max','max','max')

#Llamada a la función
FuzzyTOPSISLinear(d,w,cb)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores del coeficiente de cercanía y el ranking calculado.

Alt.	CC	Ranking
1	0.6397	3
2	0.7656	1
3	0.7070	2

Función FuzzyTOPSISVector(decision, weights, cb)

Esta función corresponde al método TOPSIS difuso con la normalización vectorial. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados al comienzo de la sección. El ejemplo de aplicación se compone de cinco alternativas y cinco criterios, de los cuales dos son de beneficio y tres de costo:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(0.68,0.4,0.6,0.2,0.4,1.44,0.67,0.9,0.45,0.6,2.2,
0.95,1.2,0.7,0.8,18,8,8,25,6,21,11.5,11.5,32.5,9,24,15,15,40,
12,9,0.66,0.66,0,0,10,2.33,2.33,0.66,0.33,10,4.33,4.33,2.33,
1.66,5,1.33,1.33,5.66,1,7,3,3,7.66,2,8.66,5,5,9.33,3.66,2.33,
0.66,0.33,1.33,1.66,4.33,2,1.33,3,2.66,6.33,3.66,3,5,4.33),
nrow=5,ncol=15)

#Pesos
w <- c(0.189,0.214,0.243,0.397,0.432,0.462,0.065,0.078,0.096,
0.068,0.084,0.106,0.174,0.190,0.207)

#Coste - Beneficio
cb <- c('min','max','max','min','min')

#Llamada a la función
FuzzyTOPSISVector(d,w,cb)
```

El resultado de esta ejecución es el valor difuso del coeficiente de cercanía y su valor defusificado, además del ranking.

Alt.	CC.1	CC.2	CC.3	Def_CC	Ranking
1	0.1584	0.4312	1.0761	0.4932	5
2	0.0603	0.3472	1.8834	0.5554	2
3	0.0616	0.3409	1.7598	0.5308	3
4	0.2142	0.7348	2.5571	0.9518	1
5	0.0400	0.3085	1.8865	0.5267	4

Función FuzzyVIKOR(decision, weights, cb, v)

Esta función corresponde al método fuzzy VIKOR. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados anteriormente más uno específico, v . El parámetro $v \in [0, 1]$, corresponde al parámetro necesario para calcular el índice Q_i . El ejemplo de aplicación está compuesto por seis alternativas y cuatro criterios, siendo uno de beneficio y tres de costo:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(38,20,24.58,44.54,33.33,33.86,40.01,21.06,25.87,
46.89,33.33,33.86,48,24,29.75,56.27,43.33,42.32,3.26,2.57,
2.82,2.46,2.25,2.47,4.08,2.87,2.97,2.73,2.5,2.74,4.08,2.87,
2.97,2.73,2.62,2.85,43,6,38,60,6,6,47,6,42,62,6,6,48,6,50,68,
6,6,10,10,1,0,2,3,10,10,1,0,2,3,10,10,1,0,2,3),nrow=6,ncol=12)

#Pesos
w <- c(1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,1/12,
1/12,1/12)

#Coste - Beneficio
cb <- c('min','max','min','min')

#Parámetros específicos
v <- 0.625

#Llamada a la función
FuzzyVIKOR(d,w,cb,v)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores difusos y los defusificados de los índices S , R , Q y el ranking según Q . Por cuestiones de formato, aquí sólo se muestran los valores defusificados de S , R , Q y el ranking.

Alt.	Def_S	Def_R	Def_Q	Ranking
1	0.1833	0.0833	0.4954	6
2	0.1325	0.0833	0.3146	4
3	0.1124	0.0508	0.0340	1
4	0.1941	0.0766	0.4907	5

5	0.1136	0.0640	0.1236	3
6	0.1116	0.0550	0.0589	2

Función FuzzyWASPAS(decision, weights, cb, lambda)

Esta función corresponde al método fuzzy WASPAS. Sus parámetros de entrada, son los comunes explicados anteriormente más uno específico, `lambda`. El parámetro `lambda` $\in [0, 1]$, corresponde al parámetro necesario para combinar el fuzzy *WSM* y el fuzzy *WPM*. Como ejemplo de aplicación tomamos un problema compuesto por cuatro alternativas y ocho criterios de beneficio, en este caso, `lambda=0.49`:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(0.5,0.6,0.6,0.6,0.6,0.7,0.7,0.7,0.7,0.8,0.8,0.8,
0.6,0.6,0.8,0.5,0.7,0.7,0.9,0.6,0.8,0.8,1,0.7,0.8,0.5,0.6,0.6,
0.9,0.6,0.7,0.7,1,0.7,0.8,0.8,0.5,0.6,0.5,0.4,0.6,0.7,0.6,0.5,
0.7,0.8,0.7,0.6,0.8,0.7,0.6,0.5,0.9,0.8,0.7,0.6,1,0.9,0.8,0.7,
0.5,0.8,0.6,0.8,0.6,0.9,0.7,0.9,0.7,1,0.8,1,0.4,0.5,0.8,0.7,0.5,
0.6,0.9,0.8,0.6,0.7,1,0.9,0.5,0.4,0.4,0.5,0.6,0.5,0.5,0.6,0.7,
0.6,0.6,0.7),nrow=4,ncol=24)

#Pesos
w <- c(0.21,0.28,0.35,0.16,0.20,0.23,0.14,0.16,0.17,0.09,0.12,
0.17,0.07,0.08,0.12,0.05,0.06,0.09,0.03,0.05,0.07,0.01,0.03,
0.06)

#Coste - Beneficio
cb <- c('max','max','max','max','max','max','max','max')

#Parámetros específicos
lambda <- 0.49

#Llamada a la función
FuzzyWASPAS(d,w,cb,lambda)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los valores del *WSM*, *WPM*, el índice *K* y el ranking generado.

Alt.	WSM	WPM	K	Ranking
1	0.7774	0.7383	0.7575	3
2	0.7925	0.7516	0.7716	2
3	0.8243	0.7863	0.8049	1
4	0.7536	0.7126	0.7327	4

Función MetaRanking(decision, weights, cb, v)

Esta función trabaja exactamente igual que la del paquete MCDM, Sección 6.2.1: calcula dos meta-rankings a partir de los generados por los métodos que contiene el paquete. Un meta-ranking lo calcula como la suma de los rankings, y el otro como un ranking agregado.

De este modo, toma los parámetros de entrada necesarios por los métodos, y devuelve los rankings de todos los métodos más los dos meta-rankings. Como ejemplo de aplicación, vamos a tomar un problema compuesto por cinco alternativas y cinco criterios, tanto de beneficio como de costo, y vamos a tomar $v = \lambda = 0.5$:

```
#Matriz de decisión
d <- matrix(c(0.68,0.4,0.6,0.2,0.4,1.44,0.67,0.9,0.45,0.6,2.2,
0.95,1.2,0.7,0.8,18,8,8,25,6,21,11.5,11.5,32.5,9,24,15,15,40,
12,9,0.66,0.66,0,0,10,2.33,2.33,0.66,0.33,10,4.33,4.33,2.33,
1.66,5,1.33,1.33,5.66,1,7,3,3,7.66,2,8.66,5,5,9.33,3.66,2.33,
0.66,0.33,1.33,1.66,4.33,2,1.33,3,2.66,6.33,3.66,3,5,4.33),
nrow=5,ncol=15)

#Pesos
w <- c(0.189,0.214,0.243,0.397,0.432,0.462,0.065,0.078,0.096,
0.068,0.084,0.106,0.174,0.190,0.207)

#Coste - Beneficio
cb <- c('min','max','max','min','min')

#Parámetros específicos
lambda <- 0.5
v <- 0.5

#Llamada a la función
MetaRanking(d,w,cb,lambda,v)
```

El resultado de esta ejecución es una matriz que contiene los rankings de todos los métodos y los meta-rankings calculados: el de la suma (MRank_Sum), y el agregado (MRank_Agg).

Alt.	MMOORA	TOP-Vec	TOP-Li	VIKOR	WASPAS	MRank_Sum	MRank_Agg
1	4	5	2	2	2	2	2
2	2	2	4	3	4	4	4
3	3	3	3	4	3	3	3
4	1	1	1	1	1	1	1
5	5	4	5	5	5	5	5

6.4. Ejemplos de aplicación

Una vez que se ha explicado el contenido y funcionamiento de los paquetes MCDM y FuzzyMCDM, pasamos a aplicarlos con ejemplos prácticos. Lo haremos tanto en entornos en el que los datos son precisos, como en entornos en los que la imprecisión/vaguedad esté presente.

6.4.1. Entornos sin imprecisión/vaguedad

En este apartado vamos a presentar dos ejemplos para poner en práctica el paquete MCDM. El primero relativo a la clasificación de aplicaciones para dispositivos móviles, en el que nos vamos a encontrar con la problemática de cuando VIKOR no puede devolver una solución. El segundo ejemplo consiste en evaluar una serie de móviles para su compra, en el que veremos como distintos métodos dan distintos resultados para un mismo problema. En ambos casos, los datos son bien conocidos.

Clasificación de aplicaciones para dispositivos móviles

Este ejemplo surge en un trabajo de fin de grado realizado por D. Fernando Llodra Belda y dirigido por Dr. Carlos Cruz Corona, en el que se ha implementado una aplicación para dispositivos móviles, que según ciertos criterios, clasifica una serie de aplicaciones móviles que previamente ha seleccionado el usuario. En la aplicación desarrollada, esta clasificación se hace por el método TOPSIS, pero se pretende ampliarla a otros métodos y poder hacer una comparación más exhaustiva.

Los criterios que se han considerado para hacer la clasificación son seis:

- C_1 : Consumo de CPU, en porcentaje de uso y de costo.
- C_2 : Consumo de RAM, en MB y de costo.
- C_3 : Datos recibidos, en MB y de costo.
- C_4 : Datos enviados, en MB y de costo.
- C_5 : Puntuación en el “market place”, que va de 1 (lo peor) a 5 (lo mejor) y de beneficio.
- C_6 : Número de descargas, de beneficio.

En este caso, los pesos se han considerado iguales para todos los criterios, es decir, $w_i = 1/6$, con $i = 1 \dots 6$. En la Tabla 6.1 se muestra la matriz de decisión de este problema cuando se consideran tres aplicaciones diferentes.

A estos datos se les ha aplicado la función `MetaRanking()` del paquete MCDM con $v = 0.5$ y $\lambda = 0.5$. El resultado que se ha obtenido se muestra en la Tabla 6.2.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	125	5	10	3.9	500000
A_2	0.5	12	12	100	4.1	320000
A_3	0.3	200	3	23	4	125000

Tabla 6.1: Matriz de decisión para la clasificación de aplicaciones para dispositivos móviles.

	MM	RIM	TOP^{Vec}	TOP^{Max}	$VIK^{0.5}$	$WAS^{0.5}$	MR-Sum	MR-Agre
A_1	1	1	1	1	-	1	1	1
A_2	3	3	3	2	-	2	3	3
A_3	2	2	2	3	-	3	2	2

Tabla 6.2: Resultado de la clasificación de aplicaciones para dispositivos móviles. “MR-Sum” es el meta-ranking de la sumatoria, y “MR-Agre” es el meta-ranking calculado como ranking agregado

Lo primero que hemos apreciado en los resultados, es que VIKOR no ha podido devolver una solución cuando $v = 0.5$ de la misma forma que sucedía en nuestros experimentos. Ésto es debido a que cuando se calcula el índice R , todas las alternativas obtienen el mismo valor, entonces, los valores máximos y mínimos de R coinciden al calcular el índice Q , como se muestra en la Tabla 6.3, dando como resultado una indeterminación.

Además, hemos realizado un estudio de similaridad de rankings por medio del coeficiente de correlación de Spearman, de igual modo que lo hicimos en el Capítulo 2. Para ello, hemos considerado $v = 1$ y $\lambda = \{0, 0.5, 1\}$, dado que VIKOR con $v \neq 1$ no se obtiene solución. Los resultados se encuentran en la Tabla 6.4, donde se puede apreciar que los resultados generales se mantienen con los resultados de nuestro experimento, como por ejemplo sucede con los pares RIM-WAS¹ o WAS⁰-WAS^{0.5}, que mantienen su similaridad. Recordar al lector que, cuando había pocas alternativas, como es este caso, había más irregularidades en la similaridad de los rankings, como por ejemplo ocurre en los pares VIK¹-WAS⁰ y VIK¹-WAS^{0.5}, que tienen discrepancias en sus resultados.

Evaluación de teléfonos móviles para su compra

En este caso, el problema consiste en seleccionar un teléfono móvil para su compra de entre un conjunto de dieciséis modelos distintos. Para realizar esta evaluación, se consideran siete criterios:

	S	R	Q
A_1	0.4705	0.1667	-
A_2	0.4966	0.1667	-
A_3	0.4407	0.1667	-

Tabla 6.3: Resultado de VIKOR ($v = 0.5$) en la clasificación de aplicaciones para dispositivos móviles.

	RIM	MM	TOP ^{Vec}	TOP ^{Max}	VIK ¹	WAS ⁰	WAS ^{0.5}	WAS ¹
RIM	-	1	1	0.5	0.5	0.5	0.5	1
MM		-	1	0.5	0.5	0.5	0.5	1
TOP ^{Vec}			-	0.5	0.5	0.5	0.5	1
TOP ^{Max}				-	-0.5	1	1	0.5
VIK ¹					-	-0.5	-0.5	0.5
WAS ⁰						-	1	0.5
WAS ^{0.5}							-	0.5
WAS ¹								-

Tabla 6.4: Comparación por pares de los métodos para la clasificación de aplicaciones para dispositivos móviles.

- C_1 : Tamaño de la pantalla, en pulgadas y de beneficio.
- C_2 : Duración de la batería, en mAmp y de beneficio.
- C_3 : Capacidad de memoria interna, en GB y de beneficio.
- C_4 : Peso, en gr. y de costo.
- C_5 : Resolución de la cámara trasera, en Mpx. y de beneficio.
- C_6 : Resolución de la cámara frontal, en Mpx. y de beneficio.
- C_7 : Precio, en Euros y de costo.

En este problema, los pesos de los criterios son $w_1 = 0.1, w_2 = 0.15, w_3 = 0.1, w_4 = 0.15, w_5 = 0.05, w_6 = 0.05, w_7 = 0.4$. Los modelos que se van a evaluar son Iphone 6s plus y Iphone 6s de Apple, Galaxy S6 Edge plus, Galaxy S6 Edge y Galaxy S4 de Samsung, Nexus 6P y Nexus 5X de LG/Huawei, Aquaris A4.5, Aquaris M5.5 y Aquaris M5 de bq, Xperia Z5 y Xperia C5 Ultra Dual de Sony, P8 Plata y P8 Lite Blanco de Huawei, y Lumia 950 Dual SIM y Lumia 640 LTE de Nokia. De esta forma, la matriz de decisión correspondiente a este problema se muestra en la Tabla 6.5, en la que se pueden observar las valoraciones de cada móvil para cada criterio.

Móvil	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
Iphone 6s plus	5.5	2915	16	192	12	5	859
Iphone 6s	4.7	1810	16	143	12	5	749
Galaxy S6 Edge plus	5.7	3000	32	153	16	5	799
Galaxy S6 Edge	5.1	2600	32	132	16	5	699
Galaxy S4	5	2600	16	130	13	2	289
Nexus 6P	5.7	3450	64	178	12.3	8	449
Nexus 5X	5.2	2700	32	136	12.3	5	341
Aquaris A4.5	4.5	2470	16	115	8	5	169.9
Aquaris M5.5	5.5	3620	16	162	13	5	299.9
Aquaris M5	5	3120	16	144	13	5	259.9
Xperia Z5	5.2	2900	32	156.5	23	5	699
Xperia C5	6	2930	16	187	13	13	399
P8 Plata	5.2	2680	16	144	13	8	499
P8 Lite Blanco	5	2200	16	131	13	5	249.01
Lumia 950 Dual SIM	5.2	3000	32	150	20	5	659
Lumia 640 LTE	5	2500	8	145	8	0.9	140

Tabla 6.5: Matriz de decisión para la evaluación de teléfonos móviles para su compra.

El resultado que se ha obtenido tras ejecutar la función `MetaRanking()` del paquete `MCDM` con $v = 0.5$ y $\lambda = 0.5$ se muestra en la Tabla 6.6. En este resultado, se aprecia que hay más discrepancia entre los métodos. Este es un claro ejemplo de la paradoja que existe entorno a los MDMC, en el que distintos métodos dan distintos resultados para un mismo problema, como se ha comentado anteriormente.

Para este ejemplo, también hemos realizado un estudio de similitud de ranking por medio del coeficiente de correlación de Spearman, como lo hicimos en el Capítulo 2, considerando v y λ como $\{0, 0.5, 1\}$. Los resultados se encuentran en la Tabla 6.7, donde se aprecia que guardan semejanzas con los resultados generales de nuestro experimento. Por ejemplo, vemos que RIM con TOP^{Max} y con WAS^1 tienen una similitud de $\rho \geq 0.8$, y los pares VIK^1 - WAS^1 y WAS^0 - $WAS^{0.5}$ siguen manteniendo una alta similitud ($\rho \geq 0.9$). En este caso, vemos que el par MM - TOP^{Max} es el que mayor discrepancia tiene, con $\rho = 0.76$.

	MM	RIM	TOP ^V	TOP ^M	VIK ^{0.5}	WAS ^{0.5}	MR-S	MR-A
Iphone 6s p.	16	16	16	15	16	15	16	16
Iphone 6s	15	15	15	16	15	16	15	15
Galaxy S6 Edge p.	14	14	14	13	14	14	14	14
Galaxy S6 Edge	13	13	13	14	13	13	13	13
Galaxy S4	6	4	7	6	4	8	7	8
Nexus 6P	1	8	8	8	8	6	8	6
Nexus 5X	2	1	5	7	6	7	5	1
Aquaris A4.5	3	5	1	2	3	1	1	3
Aquaris M5.5	5	3	6	5	1	5	3	5
Aquaris M5	4	2	3	4	2	3	2	4
Xperia Z5	12	12	12	12	12	12	12	12
Xperia C5	8	9	9	9	9	9	9	9
P8 Plata	10	10	10	10	10	10	10	10
P8 Lite Blanco	7	6	4	3	7	4	6	7
Lumia 950 D. S.	11	11	11	11	11	11	11	11
Lumia 640 LTE	9	7	2	1	5	2	4	2

Tabla 6.6: Resultado de la clasificación de teléfonos móviles para su compra. “MR-S” es el meta-ranking de la sumatoria, y “MR-A” es el meta-ranking calculado como ranking agregado

	RIM	MM	TOP ^{Vec}	TOP ^{Max}	VIK ⁰	VIK ^{0.5}	VIK ¹	WAS ⁰	WAS ^{0.5}	WAS ¹
RIM	-	0.8941	0.8824	0.8441	0.9324	0.9441	0.9118	0.8647	0.8412	0.8147
MM		-	0.8176	0.7647	0.8029	0.8441	0.9294	0.8235	0.8235	0.8324
TOP ^{Vec}			-	0.9794	0.8824	0.9147	0.8912	0.9941	0.9824	0.9471
TOP ^{Max}				-	0.8735	0.9088	0.8647	0.9794	0.9794	0.9441
VIK ⁰					-	0.9706	0.8853	0.8676	0.8529	0.8265
VIK ^{0.5}						-	0.9559	0.9176	0.9088	0.8882
VIK ¹							-	0.9118	0.9118	0.9147
WAS ⁰								-	0.9941	0.9647
WAS ^{0.5}									-	0.9765
WAS ¹										-

Tabla 6.7: Comparación por pares de los métodos para la clasificación de teléfonos móviles para su compra.

6.4.2. Entornos con imprecisión/vaguedad

En este apartado vamos a presentar dos ejemplos prácticos en los que los datos presentan imprecisión/vaguedad. De esta forma, pondremos en práctica el uso del paquete `FuzzyMCDM`.

El primer ejemplo es el mismo de la evaluación de teléfonos móviles para su compra, anteriormente descrito para entornos bien conocidos, pero con datos difusos. En este caso mostraremos la problemática de obtener distintos rankings para un mismo problema en este tipo de entornos. El segundo, es la selección de parcelas para realizar instalaciones de granjas fotovoltaicas en la región de Murcia, en el que mostraremos otra problemática que nos hemos encontrado relativa al tipo de normalización aplicada.

Evaluación de teléfonos móviles para su compra con datos difusos

En este caso, hemos tomado el ejemplo de la evaluación de teléfonos móviles para su compra del apartado anterior, y hemos pasado los datos a números triangulares difusos de la siguiente forma:

$$\tilde{x}_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3}) = \begin{cases} x_{ij1} \in x_{ij2} - \cup(1, 10) * x_{ij2}/100 \\ x_{ij2} = x_{ij} \\ x_{ij3} \in x_{ij2} + \cup(1, 10) * x_{ij2}/100 \end{cases}$$

donde x_{ij} es valoración de la alternativa i -ésima sobre el criterio j -ésimo de la Tabla 6.5. Para los pesos, hemos obtenido los valores numéricos difusos de la siguiente forma:

$$\tilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}) = \begin{cases} w_{j1} = w_j - (0.01 * 1/n) \\ w_{j2} = w_j \\ w_{j3} = w_j + (0.01 * 1/n) \end{cases}$$

donde w_j es el valor del j -ésimo criterio en la descripción anterior.

De esta forma, podemos componer la matriz de decisión relativa a este problema, tal y como se refleja en las Tablas 6.8 y 6.9, y los valores de los pesos se encuentra en la Tabla 6.10.

Con toda esta información se ha aplicado la función `MetaRanking()` descrita anteriormente con $v = 0.5$ y $\lambda = 0.5$. El resultado que se ha obtenido se encuentra en la Tabla 6.11. En ella se aprecia la discrepancia que también aparecía cuando los datos son bien conocidos, como en el ejemplo anterior, aunque en este caso los meta-rankings calculados si toman la misma alternativa para la primera posición.

En este problema también hemos realizado un análisis de semejanzas entre los rankings obtenidos por los métodos. Para ello, hemos procedido igual que en los casos anteriores: hemos aplicado los métodos con sus diferentes versiones, y los resultados los hemos comparado por pares mediante el coeficiente de correlación de Spearman. Los resultados se encuentran en la Tabla 6.12. En dicha tabla se puede apreciar que los valores de similaridad son altos, especialmente para el par TOP^{Max} -WAS¹, que han obtenido el

mismo resultado, $\rho = 1$. El método que tiene más discrepancias es MULTI-MOORA, teniendo el menor valor de similaridad con VIK^0 , $\rho = 0.79$. De esta forma, se corroboran los resultados que se han obtenido en nuestros experimentos realizados.

Móvil	C_1	C_2	C_3	C_4
Iphone 6s plus	5.06	2856.7	15.2	178.56
Iphone 6s	4.23	1647.1	14.4	138.71
Galaxy S6 Edge plus	5.13	2790	31.04	151.47
Galaxy S6 Edge	4.59	2548	29.12	128.04
Galaxy S4	4.85	2496	15.36	117
Nexus 6P	5.415	3415.5	59.52	163.76
Nexus 5X	5.148	2457	31.36	127.84
Aquaris A4.5	4.185	2420.6	15.84	104.65
Aquaris M5.5	5.445	3439	15.84	158.76
Aquaris M5	4.85	2808	15.36	139.68
Xperia Z5	4.992	2842	31.04	150.24
Xperia C5 Ultra Dual	5.52	2666.3	14.72	168.3
P8 Plata	5.148	2626.4	15.04	138.24
P8 Lite Blanco	4.9	2178	15.2	119.21
Lumia 950 Dual SIM	4.836	2700	29.44	135
Lumia 640 LTE	4.95	2350	7.36	131.95
		3060.75	8	145
		2915	16	192
		1810	16	143
		3000	32	153
		2600	32	132
		2730	16	130
		3588	64	178
		2970	32	136
		2544.1	16	115
		3692.4	16	162
		3120	16	144
		3276	16	144
		3103	32	156.5
		3223	16	187
		2867.6	16	144
		2420	16	144.1
		3000	32	150
		2575	8	145

Tabla 6.8: Matriz de decisión para la evaluación de teléfonos móviles para su compra con datos difusos, para los criterios C_1, C_2, C_3 y C_4 .

Móvil	C_5	C_6	C_7
Iphone 6s plus	10.92	12	12.96
Iphone 6s	11.52	12	13.08
Galaxy S6 Edge plus	15.84	16	17.44
Galaxy S6 Edge	15.2	16	16.16
Galaxy S4	12.35	13	13.91
Nexus 6P	11.685	12.3	13.284
Nexus 5X	11.685	12.3	13.407
Aquaris A4.5	7.92	8	8.24
Aquaris M5.5	12.48	13	13.13
Aquaris M5	11.83	13	13.39
Xperia Z5	21.62	23	25.07
Xperia C5 Ultra Dual	11.83	13	13.13
P8 Plata	11.7	13	13.91
P8 Lite Blanco	11.83	13	13.65
Lumia 950 Dual SIM	19.4	20	21.2
Lumia 640 LTE	7.28	8	8.64
		4.5	5.35
		4.95	5.4
		4.85	5.45
		4.65	5.2
		1.84	2.08
		7.68	8.16
		4.7	5.25
		4.9	5.2
		4.6	5.4
		4.6	5.1
		4.6	5.15
		12.48	13
		7.52	8
		4.55	5
		4.75	5
		0.873	0.9
		0.972	0.972
		824.64	859
		726.53	749
		735.08	799
		671.04	699
		260.1	289
		417.57	449
		310.31	341
		159.706	169.9
		281.906	299.9
		239.108	259.9
		629.1	699
		367.08	399
		449.1	499
		246.5199	249.01
		639.23	659
		131.6	140
			867.59
			808.92
			846.94
			761.91
			300.56
			493.9
			351.23
			181.793
			302.899
			265.098
			733.95
			414.96
			533.93
			261.4605
			665.59
			148.4

Tabla 6.9: Matriz de decisión para la evaluación de teléfonos móviles para su compra con datos difusos, para los criterios C_5 , C_6 y C_7 .

Criterios	w_{j1}	w_{j2}	w_{j3}
C_1	(0.0990,	0.1000,	0.1010)
C_2	(0.1485,	0.1500,	0.1515)
C_3	(0.0990,	0.1000,	0.1010)
C_4	(0.1485,	0.1500,	0.1515)
C_5	(0.0495,	0.0500,	0.0505)
C_6	(0.0495,	0.0500,	0.0505)
C_7	(0.3960,	0.4000,	0.4040)

Tabla 6.10: Pesos de los criterios para la evaluación de teléfonos móviles para su compra con datos difusos.

	MM	TOP ^V	TOP ^M	VIK ^{0.5}	WAS ^{0.5}	MR-Sum	MR-Agre
Iphone 6s p.	16	16	15	16	15	16	16
Iphone 6s	15	15	16	15	16	15	15
Galaxy S6 Edge p.	14	14	13	14	14	14	14
Galaxy S6 Edge	13	13	14	13	13	13	13
Galaxy S4	6	7	8	4	8	8	6
Nexus 6P	1	8	3	8	6	5	8
Nexus 5X	2	5	7	6	7	6	7
Aquaris A4.5	4	1	2	2	1	1	1
Aquaris M5.5	3	6	5	1	4	3	4
Aquaris M5	5	3	4	3	3	2	3
Xperia Z5	12	12	11	12	12	12	12
Xperia C5	8	9	9	9	9	9	9
P8 Plata	10	10	12	10	10	10	10
P8 Lite Blanco	7	4	6	7	5	7	5
Lumia 950 D. S.	11	11	10	11	11	11	11
Lumia 640 LTE	9	2	1	5	2	4	2

Tabla 6.11: Resultado de la clasificación de teléfonos móviles para su compra con datos difusos. “MR-Sum” es el meta-ranking de la sumatoria, y “MR-Agre” es el meta-ranking calculado como ranking agregado

	MM	TOP ^{Vec}	TOP ^{Max}	VIK ⁰	VIK ^{0.5}	VIK ¹	WAS ⁰	WAS ^{0.5}	WAS ¹
MM	-	0.7941	0.8265	0.7912	0.8559	0.9471	0.8029	0.8176	0.8265
TOP ^{Vec}		-	0.9294	0.9147	0.9206	0.8735	0.9912	0.9765	0.9294
TOP ^{Max}			-	0.8294	0.8735	0.9147	0.9529	0.9676	1,0000
VIK ⁰				-	0.9647	0.8588	0.8971	0.8971	0.8294
VIK ^{0.5}					-	0.9412	0.9206	0.9324	0.8735
VIK ¹						-	0.9000	0.9265	0.9147
WAS ⁰							-	0.9941	0.9529
WAS ^{0.5}								-	0.9676
WAS ¹									-

Tabla 6.12: Comparación por pares de los métodos para la clasificación de teléfonos móviles para su compra con datos difusos.

Selección de parcelas para la instalación de granjas fotovoltaicas en la región de Murcia

Este ejemplo consiste en seleccionar la mejor parcela para realizar instalaciones de granjas fotovoltaicas de entre un conjunto de 66845 alternativas posibles. Los datos, han sido tomados de la tesis “Búsqueda y evaluación de emplazamientos óptimos para albergar instalaciones de energías renovables en la costa de la Región de Murcia: combinación de Sistemas de Información Geográfica (SIG) y Soft Computing”, realizada por el Dr. Juan Miguel Sánchez Lozano, en la Universidad Politécnica de Cartagena.

Para realizar la evaluación de las parcelas, se consideran diez criterios:

- C_1 : Área, en Km^2 y de beneficio.
- C_2 : Capacidad agrícola, se representa por clases en una escala de I a VIII, de forma que la clase I es aquella que presenta mayor capacidad para cultivos agrícolas y la VIII presenta la peor capacidad agrológica, por lo que se toma de beneficio.
- C_3 : Distancia a principales carreteras, en Km y de costo.
- C_4 : Distancia a a redes eléctricas, en Km y de costo.
- C_5 : Distancia a subestaciones transformadoras, en Km y de costo.
- C_6 : Distancia a núcleos de población, en Km y de beneficio.
- C_7 : Potencial de radiación solar, en kJ y de beneficio.
- C_8 : Pendiente del terreno, en porcentaje de la pendiente de inclinación y de costo.
- C_9 : Orientación, en grados decimales y de beneficio.
- C_{10} : Temperatura media, en grados centígrados y de beneficio.

De esta forma, la dimensión de la matriz de decisión es $(66845 \times (10 \times 3))$ Los pesos de cada criterio se encuentran en la Tabla 6.13.

Una vez, hemos aplicado los métodos como en los otros ejemplos, nos hemos encontrado que los métodos que aplican la transformación lienal del máximo como normalización, no han podido devolver una solución, es decir, TOPSIS con estas normalización y WASPAS. La razón por la que ha sucedido esto es que, algunas valoraciones tienen el valor 0, entonces, para los criterios de costo, el valor mínimo es 0, y al proceder a normalizar como

$$\tilde{n}_{ij} = \left(\frac{\min_i(x_{ij1})}{x_{ij3}}, \frac{\min_i(x_{ij1})}{x_{ij2}}, \frac{\min_i(x_{ij1})}{x_{ij1}} \right) \quad (6.1)$$

Criterios	w_{j1}	w_{j2}	w_{j3}
C_1	(0.0384,	0.0419,	0.0464)
C_2	(0.0586,	0.0421,	0.0513)
C_3	(0.1145,	0.1271,	0.0427)
C_4	(0.0493,	0.1242,	0.1449)
C_5	(0.1725,	0.1855,	0.1458)
C_6	(0.1680,	0.1097,	0.1195)
C_7	(0.0493,	0.0728,	0.0622)
C_8	(0.1414,	0.0599,	0.1778)
C_9	(0.1931,	0.1871,	0.1293)
C_{10}	(0.0448,	0.0538,	0.0675)

Tabla 6.13: Pesos de los criterios para la selección de parcelas para la instalación de granjas fotovoltaicas.

si el j -ésimo criterio es coste, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$, se ha dado la indeterminación $0/0$. En el caso de MULTIMOORA, lo que ha sucedido es que al aplicar el “Full Multiplicative Form”, se han obtenido valores nulos al multiplicar por 0. TOPSIS con la normalización vectorial y VIKOR han procedido de forma habitual.

Una vez que se han obtenido los resultados de TOP^{Vec} y VIKOR con los tres valores de v que hemos considerado, $\{0, 0.5, 1\}$, nos hemos centrado en las 10 mejores alternativas de cada ranking, y éstos los hemos comparado con el resultado que se obtuvo en la tesis de la que proceden los datos. Los resultados se muestran en la Tabla 6.14, donde se observa que el número de las alternativas que han ocupado las 10 primeras posiciones del ranking de cada método. Como se puede apreciar, para el resultado de la tesis, TOP^{Tesis} , y nuestro resultado coinciden en las primeras cuatro posiciones. En cambio, este resultado con respecto a VIKOR ha discrepado.

Además, se ha realizado un análisis comparativo con los cuatro rankings obtenidos, como se puede ver en la Tabla 6.15. En ella se aprecia que VIK^0 es el que más discrepancias tiene con el resto de configuraciones, llegando a tomar valor negativo al compararlo con TOP^{Vec} , $\rho = -0.26$. Por otro lado, $VIK^{0.5}$ - VIK^1 es el par que mayor similitud ha obtenido, $\rho = 0.91$.

En este ejemplo, dado el volumen de datos a analizar, también hemos contabilizado el tiempo que se ha tardado en aplicar los métodos con nuestro paquete de R. Los resultados se encuentran en la Tabla 6.16, donde se puede apreciar que apenas se han alcanzado los 2 segundos para cada ejecución, mostrando la eficiencia del paquete en este entorno de trabajo con tal volumen de datos.

Ranking	TOP ^{Tesis}	TOP ^{Vec}	VIK ⁰	VIK ^{0.5}	VIK ¹
1	Alt-32907	Alt-32907	Alt-53020	Alt-53317	Alt-53317
2	Alt-21788	Alt-21788	Alt-50007	Alt-53020	Alt-51966
3	Alt-65725	Alt-65725	Alt-49990	Alt-49868	Alt-49868
4	Alt-45228	Alt-45228	Alt-53317	Alt-49990	Alt-53020
5	Alt-35146	Alt-64976	Alt-49868	Alt-50007	Alt-49990
6	Alt-22123	Alt-22123	Alt-50903	Alt-51932	Alt-50007
7	Alt-64976	Alt-35146	Alt-51932	Alt-53421	Alt-51932
8	Alt-16273	Alt-29410	Alt-53421	Alt-50903	Alt-49208
9	Alt-29410	Alt-36969	Alt-50062	Alt-51966	Alt-13349
10	Alt-24804	Alt-25881	Alt-53052	Alt-49208	Alt-49867

Tabla 6.14: Resultados de las 10 primeras posiciones del ranking para cada método, donde TOP^{Tesis} se refiere al resultado obtenido en la tesis de la que proceden los datos.

	TOP ^{Vec}	VIK ⁰	VIK ^{0.5}	VIK ¹
TOP ^{Vec}	-	-0.2613	0.1723	0.0933
VIK ⁰		-	0.0668	0.3142
VIK ^{0.5}			-	0.9115
VIK ¹				-

Tabla 6.15: Comparación por pares de los métodos para la selección de parcelas para la instalación de granjas fotovoltaicas.

	TOP ^{Vec}	VIK ⁰	VIK ^{0.5}	VIK ¹
Tiempo (seg.)	1.90	1.80	1.96	1.86

Tabla 6.16: Tiempo de ejecución de los métodos para la selección de parcelas para la instalación de granjas fotovoltaicas.

Capítulo 7

Conclusiones y Trabajo Futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones del trabajo realizado, así como las publicaciones derivadas del mismo. Por último, se proponen una serie de líneas y trabajos futuros que surgen como consecuencia natural de las investigaciones presentadas en la tesis.

7.1. Conclusiones

Teniendo en cuenta la relevancia de los problemas de decisión multicriterio, las problemáticas asociadas a los métodos MDMC, y la necesidad de considerar la naturaleza de la información disponible para la toma de decisiones, se planteó como objetivo de esta tesis analizar y comparar un conjunto de métodos de decisión multicriterio (MCDM), con énfasis en la comparación de los rankings generados y en el análisis del fenómeno del Orden Inverso (OI). Ambos aspectos se estudiaron considerando tanto entornos bien definidos como entornos que presenten vaguedad o imprecisión.

Este objetivo general se subdividió en los siguientes objetivos específicos:

1. Recopilar y analizar la información disponible sobre los MDMC, tanto en entornos bien definidos como en otros con imprecisión.
2. Analizar las semejanzas y las discrepancias que hubiera entre los rankings generados por los diferentes métodos.
3. Analizar la ocurrencia del OI en los métodos estudiados y estudiar posibles vías de solución.
4. Publicar los métodos desarrollados como software libre en forma de paquetes de R, para su uso por la comunidad.
5. Mostrar ejemplos de aplicación del software desarrollado.

Como consecuencia de las tareas realizadas para alcanzar estos objetivos específicos, se han obtenido las siguientes conclusiones.

Respecto al objetivo 1, la revisión bibliográfica permitió observar y analizar el amplio catálogo de métodos disponibles. En general, se pudo constatar que gran parte de los métodos presentaban adaptaciones de mayor o menor entidad que permitían su utilización tanto en entornos bien definidos, como en entornos con imprecisión. La revisión realizada permitió seleccionar un subconjunto de métodos que compartían una serie de pasos algorítmicos, y por tanto, se utilizaron posteriormente a lo largo de toda la investigación. Estos métodos fueron VIKOR, TOPSIS, WASPAS, MultiMOORA y RIM.

Respecto al segundo objetivo, se realizó una experimentación a gran escala considerando 2800 problemas de decisión (generados aleatoriamente) y 10 variantes de los métodos seleccionados. Para comparar los 28000 rankings generados, se utilizó el coeficiente de correlación de Spearman. Estos experimentos dieron lugar a las siguientes conclusiones:

- El método VIKOR no siempre devuelve un ranking cuando todos los datos del problema se conocen con precisión. Este fallo es debido a una potencial división por cero en uno de los pasos del algoritmo, la cual produce una indeterminación. Sin embargo, cuando se trata con datos imprecisos, VIKOR siempre devuelve un ranking.
- Las similitudes y diferencias entre los métodos dependen de los parámetros seleccionados. De hecho, si consideramos el mismo método con valores distintos para los parámetros, se obtienen resultados con una semejanza baja o prácticamente nula. El ejemplo más claro es el de VIKOR. Cada variante considerada ($v = \{0.0, 0.5, 1.0\}$) aparece en un cluster diferente, tanto en entornos precisos como imprecisos. Para WASPAS sucede algo similar (en función del parámetro λ) en entornos precisos. Sin embargo en entornos con imprecisión, WASPAS con $\lambda = 0.0$ y 0.5 aparecen en el mismo cluster.
- El número de criterios no tiene influencia relevante en los valores de similitud. Por otro lado, se observó que un aumento de las alternativas, produce un aumento de la similitud entre los pares de métodos considerados.
- Los métodos WASPAS (con $\lambda = 0.0$) y MultiMOORA siempre aparecen en el mismo cluster.
- Respecto a la semejanza de los rankings generados, el impacto de la normalización utilizada para TOPSIS es mayor en entornos precisos que imprecisos. En este último caso, ambas variantes aparecen en el mismo cluster, mientras que en el primero aparecen en clusters diferentes.

- Dado que los dendrogramas obtenidos son diferentes para el caso de datos precisos y para datos imprecisos, podemos concluir que la naturaleza de los datos afecta a las semejanzas y diferencias observadas entre los métodos.

El tercer objetivo estuvo centrado en el estudio del fenómeno del OI. Como para el caso anterior, se realizó un estudio a gran escala sobre los mismos problemas y variantes de los métodos mencionados anteriormente. Se consideró también la naturaleza de los datos de entrada. Para cada problema de decisión de prueba se generó un problema modificado, donde se incorporaron dos nuevas alternativas que se correspondían con la mejor y la peor alternativas posibles y se compararon los rankings que se obtenían en ambos problemas.

El análisis de resultados nos permitió comprobar que:

- El método RIM no presentan OI, lo cual era esperable puesto que el método está diseñado para evitarlo.
- WASPAS con $\lambda = 0$ ha dado OI solamente en tres de 2800 casos. WASPAS con $\lambda = 1$ y MULTIMOORA, han sido los siguientes métodos con menos casos de OI. Más aún, son los métodos donde las inversiones en la primera posición han sido menores.
- VIKOR ha sido el método más afectado por el OI, incluso es el que ha tenido el mayor número de inversiones en la primera posición, llegando a tener inversiones completas del ranking cuando se han considerado pocas alternativas.
- Para todos los métodos, tanto en entornos precisos como imprecisos, se ha observado que el número de casos con OI aumenta conforme lo hace el número de alternativas. Sin embargo, disminuye el número de inversiones en la primera posición. No se ha observado que el número de criterios tenga influencia en la aparición del OI.

Como consecuencia de las dos investigaciones anteriores, se propuso hacer un análisis en profundidad del fenómeno de Orden Inverso en VIKOR y estudiar posibles vías de solución. Respecto a esto, se diseñó una nueva experimentación a gran escala, considerando dos modificaciones al problema de decisión original: por un lado, se agregó la mejor alternativa posible y por otro, la peor posible (ambas en términos de los valores extremos de los dominios de los criterios). De esta forma, se pretendía observar si añadir sólo una alternativa ideal afecta al resultado.

Se observó que los casos inestables (aquellos con OI) varían según se considere $v \neq 1$ o $v = 1$, ya que para $v = 1$ hay menos casos inestables que para $v \neq 1$. En ambos casos la tendencia es la misma: conforme aumenta el

número de alternativas, también lo hacen los casos con inversión, pero por el contrario los casos con inversión en la primera posición disminuyen.

Nuevamente, se observó una fuerte dependencia de los resultados con respecto al parámetro v . Si consideramos tres bloques para v , siendo estos $v = 0$, $0.25 \leq v \leq 0.75$ y $v = 1$, se puede concluir que según aumenta el valor de v , también lo hacen los casos estables y los casos con inversión en la primera posición.

Con respecto al número de criterios, no se ha visto que haya influencia en los resultados.

Por último, se propuso una modificación de VIKOR que consiste en añadir las dos alternativas ideales al problema de decisión. Hemos demostrado que esta modificación solventa los dos problemas identificados: el OI y la posible aparición de indeterminaciones en sus cálculos.

Finalmente, respecto a los objetivos 4 y 5, en esta tesis se han desarrollado dos paquetes del entorno de trabajo R que se han puesto a disposición de la comunidad en el repositorio CRAN.

Cada paquete incorpora una función para cada método que hemos analizado, además de la función `MetaRanking()`, que calcula dos rankings agregados a partir de los rankings generados por todos los métodos.

Los problemas de ejemplo resaltaron un inconveniente que surge cuando la matriz de decisión contiene el valor 0 y se utilizan los métodos MULTIMOORA, TOPSIS con la transformación lineal del máximo y WASPAS. En MULTIMOORA, el cálculo del índice del “Full multiplicative form” realiza una multiplicación por 0, anulando el denominador y obteniendo indeterminaciones. En TOPSIS (con la transformación lineal del máximo) y WASPAS, ocurre que al haber criterios a minimizar con valores 0, la aplicación de la normalización produce una división por cero y, por tanto, no pueden devolver una solución al problema.

7.2. Publicaciones derivadas de la tesis

La investigación realizada en esta tesis se ha plasmado en las siguientes publicaciones:

- Publicaciones en revistas:
 1. B. Ceballos, M. T. Lamata, D. A. Pelta, J.M. Sánchez. *El método TOPSIS relativo vs. absoluto*, Rect@: Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, (14), 181-192, 2013.
 2. B. Ceballos, M. T. Lamata, D. A. Pelta, *A Comparative Analysis of Multi-criteria Decision-making Methods*, Progress in Artificial Intelligence, 5(4), 315-322, 2016.

3. B. Ceballos, M. T. Lamata, D. A. Pelta, *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Analysis*, International Journal of Intelligent System, *Article en prensa*, 2016.
4. B. Ceballos, M. T. Lamata, D. A. Pelta, *Rank Reversal and the VIKOR Method: An Empirical Evaluation*, International Journal of Information Technology & Decision Making, En segunda ronda de revisión, 2016.

■ Publicaciones en congresos:

1. B. Ceballos, M. T. Lamata, D. A. Pelta. *Una Comparativa de Modelos de Decisión Multi-Criterio Difusos*, XVI Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial, ISBN: 978-84-608-4099-2, Albacete, España, 9-12 de noviembre, 2015.

■ Otras publicaciones y participaciones:

1. B. Ceballos, M. T. Lamata, D. A. Pelta. *Modelos de Decisión Multi-Criterio en entornos con incertidumbre: estudio comparativo y aplicación*, Seminario Doctoral de las Jornadas SEMATICA 2014, Barcelona, España, 20-21 de noviembre, 2014.
2. B. Ceballos, M. T. Lamata, D. A. Pelta. *Análisis Comparativo de Métodos de Decisión Multi-Criterio*, I Jornadas de Investigadores en Formación: Fomentando la Interdisciplinariedad, ISBN: 978-84-16478-94-1, Granada, España, 18-20 de mayo, 2016.

7.3. Trabajos Futuros

Las tareas realizadas permiten plantear una serie de líneas de investigación que se detallan a continuación.

1. Comparativa de los métodos:

- Ampliar el estudio comparativo a otros métodos, como ELECTRE, PROMETHEE, AHP, COPRAS, ZAPROS, etc. De esta forma, se avanzaría en el camino de lograr una guía que apoye al decisor en el momento de seleccionar el método más adecuado para resolver su problema.
- En los experimentos realizados, quedan por explorar otros factores para analizar su impacto en los valores de similitud, aparición del orden inverso, etc. Más específicamente, se sugiere considerar diferentes esquemas de importancia para los criterios (en nuestros experimentos, todos tenían la misma importancia) y estudiar otras formas de generación de los datos (aleatoria, uniforme en nuestros experimentos).

- La respuesta a la pregunta sobre qué método elegir para resolver un problema multicriterio sigue sin respuesta clara. Aunque hemos dado pistas sobre la similitud de los resultados generados por distintos métodos, creemos que el camino a seguir pasa por resolver el problema con varios métodos y luego trabajar en la agregación de los rankings obtenidos. Los primeros pasos, a partir de la utilización de "meta-rankings" se han mostrado en el capítulo 6, pero se requiere un estudio con mayor profundidad.
- En los métodos se debe estudiar también la comprobación del principio de dominancia. En términos muy simples, establece que si una alternativa A_1 es mejor que otra A_2 en todos los criterios, entonces el ranking de A_1 tiene que ser mejor que el de A_2 . Aunque así enunciado parece una cuestión obvia, en experimentos preliminares no mostrados en la tesis se detectó que el método VIKOR no lo cumple.

2. Análisis del orden inverso:

- Es necesario comprobar si este fenómeno surge en otros métodos de los mencionados en la literatura, como en COPRAS, ZAPROS, etc. En caso afirmativo, y de cara a explorar posibles vías de solución, se puede comprobar si la solución propuesta aquí para VIKOR, es factible también en estos métodos.
- Realizar el análisis empírico para otros métodos. De esta forma, el decisor podrá conocer qué método es más sensible al fenómeno del OI, y tenerlo en cuenta a la hora de analizar los resultados, especialmente, en los casos en los que haya variaciones en las alternativas.
- Se podría estudiar la modificación de los métodos para reducir lo máximo posible la aparición de este problema, como por ejemplo considerar otras normas, o establecer la inclusión de valores ideales de forma implícita en el procedimiento del método.

3. Extender el paquete MCDM en R:

- La flexibilidad, potencia y disponibilidad de herramientas asociadas al entorno de trabajo R, permitirán extender las funcionalidades de los paquetes desarrollados con un nivel de esfuerzo razonable. Esta extensión se puede priorizar en dos líneas: por un lado, la incorporación de nuevos métodos; y por otro, la incorporación de técnicas de comparativa de rankings.

Apéndice A

Métodos de Decisión Multi-Criterio Difusos

En este Apéndice se desarrollan los algoritmos de los métodos difusos estudiados y aplicados en esta tesis.

Método MULTIMOORA Difuso

El método MULTIMOORA Difuso, calcula su ranking en base a tres índices: “Ration system”, “Reference point” y “Full multiplicative form” [14, 13]. Este método se compone de los siguientes pasos.

1. Obtención de la matriz de decisión: el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. Normalización: los valores normalizados \tilde{n}_{ij} se calculan como:

$$\tilde{n}_{ij} = \tilde{x}_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^m [(x_{ij1})^2 + (x_{ij2})^2 + (x_{ij3})^2]} \quad (\text{A.1})$$

3. Cálculo del “Ratio system” (Y_i): los valores normalizados se ponderan como $\tilde{v}_{ij} = \tilde{w}_j \otimes \tilde{n}_{ij}$, donde \tilde{w}_j es el j -ésimo criterio, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$. Luego, se pasa a calcular el $\tilde{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, Y_{i3})$ como:

$$\tilde{Y}_i = \sum_{j=1}^g \tilde{v}_{ij} \ominus \sum_{j=g+1}^n \tilde{v}_{ij} \quad (\text{A.2})$$

donde $\sum_{j=1}^g \tilde{v}_{ij}$ corresponde a los criterios que representan beneficio, y $\sum_{j=g+1}^n \tilde{v}_{ij}$ corresponde a los criterios que representan coste, $g=1, 2, \dots, n$.

Para obtener el ranking, se pasa a defusifica los valores de este índice como \tilde{Y}_i por medio de la técnica “Best Nonfuzzy Performance” (BNP):

$$Y_i = \frac{(Y_{i3} - Y_{i1}) + (Y_{i2} - Y_{i1})}{3} + Y_{i1} \quad (\text{A.3})$$

Así, el índice Y_i se ordena en orden descendente, donde la mejor alternativa corresponde a los valores más altos del índice.

4. Cálculo del “Reference point” (P_i): el punto de referencia se calcula como $RF = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_2^+, \dots, \tilde{v}_n^+\}$, donde $\tilde{v}_j^+ = MAX_i(\tilde{v}_{ij})$ si el j -ésimo criterio es beneficio, y $\tilde{v}_j^+ = MIN_i(\tilde{v}_{ij})$ si el j -ésimo criterio es coste. Una vez se ha calculado, se aplica la Métrica del Min-Max de Tchebycheff:

$$P_i = \min_i(\max_j d(\tilde{v}_j^+, \tilde{v}_{ij})) \quad (\text{A.4})$$

donde d es la distancia de dos números difusos, calculada según la Expr. (2.11). En este caso, las alternativas se ordenan en orden ascendente de P_i , donde las mejores alternativas corresponden a los valores más bajos del índice.

5. Cálculo “Full multiplicative form” (U_i): el índice \tilde{U} se calcula como:

$$\tilde{U}_i = (U_{i1}, U_{i2}, U_{i3}) = \prod_{j=1}^g \tilde{x}_{ij} \odot \prod_{j=g+1}^n \tilde{x}_{ij} \quad (\text{A.5})$$

donde $\prod_{j=1}^g \tilde{x}_{ij}$ son los criterios que representan beneficio, y $\prod_{j=g+1}^n \tilde{x}_{ij}$ son los criterios que representan coste. Al igual que antes, se defusifica este valor por la técnica BNP, Expr. (A.3), para poder ordenar este valor en orden descendente para poder calcular el ranking, donde las mejores alternativas son aquellas que tienen los valores más altos.

6. Teoría de Dominancia: al igual que su versión clásica, MULTIMOORA calcula el índice final uniendo los rankings del “Ration system”, del “Reference point” y del “Full multiplicative form” por medio de la Teoría de Dominancia [22], tal y como se ha descrito en la Sección 2.3.2.

Método TOPSIS Difuso

Para el método TOPSIS Difuso, hemos considerado dos métodos de normalización que hemos encontrado en la literatura. Uno ha sido el acorde

a [46], donde aplican la normalización vectorial, y el otro según [117], donde aplican la normalización de la Transformación Lineal del Máximo. Ambos procedimientos se describen a continuación como los métodos anteriores.

Normalización vectorial

1. Obtención de la matriz de decisión: el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. Normalización: una vez formada la matriz de decisión, el siguiente paso es normalizar sus valores \tilde{n}_{ij} como:

$$\tilde{n}_{ij} = \tilde{x}_{ij} \odot \sqrt{\sum_{i=1}^m \tilde{x}_{ij}^2} \quad (\text{A.6})$$

con $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

3. Ponderación: se ponderan los valores normalizados como $\tilde{v}_{ij} = \tilde{w}_j \otimes \tilde{n}_{ij}$, donde \tilde{w}_j es el j -ésimo criterio, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.
4. Cálculo de PIS y NIS: seguidamente se pasa a calcular la PIS, \tilde{A}^+ y la NIS, \tilde{A}^- , como:

$$\begin{aligned} PIS &= \tilde{A}^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_2^+, \dots, \tilde{v}_j^+\} \\ NIS &= \tilde{A}^- = \{\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_j^-\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

where $\tilde{v}_j^+ = MAX_i(\tilde{v}_{ij})$ y $\tilde{v}_j^- = MIN_i(\tilde{v}_{ij})$ si el j -ésimo criterio es beneficio, y $\tilde{v}_j^+ = MIN_i(\tilde{v}_{ij})$ y $\tilde{v}_j^- = MAX_i(\tilde{v}_{ij})$ si el j -ésimo criterio es coste, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

5. Distancias a las soluciones ideales: las distancias se calculan como:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i^+ &= \left\{ \sum_{j=1}^n (\tilde{v}_{ij} - \tilde{v}_j^+)^2 \right\}^{1/2}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \\ \tilde{d}_i^- &= \left\{ \sum_{j=1}^n (\tilde{v}_{ij} - \tilde{v}_j^-)^2 \right\}^{1/2}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

6. Coeficiente de cercanía: para construir el ranking final, se cacula el Coeficiente de Cercanía (“Closeness Coefficient”, CC), \tilde{CC} , como en la Expr. A.9. Una vez calculado, se pasa a defusificar el \tilde{CC} por la Expr. (A.10), según el índice de García-Cascales y Lamata [45].

$$\tilde{CC}_i = (CC_{i1}, CC_{i2}, CC_{i3}) = \tilde{d}_i^- \odot (\tilde{d}_i^+ \oplus \tilde{d}_i^-), i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.9})$$

$$CC_i = I_{1/3,1/2} = \frac{1}{3} \left(\frac{CC_{i1} + 4 * CC_{i2} + CC_{i3}}{2} \right), i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.10})$$

7. Cálculo del ranking: el índice CC_i se ordena en orden descendente para obtener el ranking final, en el que las mejores alternativas serán aquellas que tenga mayor valor del índice.

Normalización de la Transformación Lineal del Máximo

1. Obtención de la matriz de decisión: el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. Normalización: una vez formada la matriz de decisión, el siguiente paso es normalizar sus valores como \tilde{n}_{ij} :

$$\tilde{n}_{ij} = \left(\frac{x_{ij1}}{\max_i(x_{ij3})}, \frac{x_{ij2}}{\max_i(x_{ij3})}, \frac{x_{ij3}}{\max_i(x_{ij3})} \right) \quad (\text{A.11})$$

si el j -ésimo criterio es beneficio, y

$$\tilde{n}_{ij} = \left(\frac{\min_i(x_{ij1})}{x_{ij3}}, \frac{\min_i(x_{ij1})}{x_{ij2}}, \frac{\min_i(x_{ij1})}{x_{ij1}} \right) \quad (\text{A.12})$$

si el j -ésimo criterio es coste, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.

3. Ponderación: se ponderan los valores normalizados como $\tilde{v}_{ij} = \tilde{w}_j \otimes \tilde{n}_{ij}$, donde \tilde{w}_j es el j -ésimo criterio, $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$.
4. Cálculo de PIS y NIS: otra diferencia de este procedimiento con el anterior, a parte de la normalización, es el cálculo de la \tilde{A}^+ y \tilde{A}^- : ya que los valores normalizados están comprendidos en el intervalo $[0,1]$, los valores de la $\tilde{A}^+ = \{\tilde{v}_1^+, \tilde{v}_2^+, \dots, \tilde{v}_n^+\}$ y la $\tilde{A}^- = \{\tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_n^-\}$, son definidos como $\tilde{v}_j^+ = (1, 1, 1)$ y $\tilde{v}_j^- = (0, 0, 0)$, respectivamente, $j = 1, 2, \dots, n$.

5. Distancias a las soluciones ideales: las distancias d_i^+ y d_i^- se calculan como:

$$\begin{aligned} d_i^+ &= \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+), i = 1, 2, \dots, m; \\ d_i^- &= \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-), i = 1, 2, \dots, m; \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde la distancia d se calcula como en la Expr. (2.11).

6. Coeficiente de cercanía: finalmente, el CC se calcula como:

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{A.14})$$

7. Cálculo del ranking: al igual que en el procedimiento anterior, el índice CC_i se ordena en orden descendente para obtener el ranking final.

Método VIKOR Difuso

El método VIKOR Difuso [79] se compone de los siguientes pasos:

1. Obtención de la matriz de decisión: el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. Normalización: una vez formada la matriz de decisión, el siguiente paso es normalizar sus valores a \tilde{n}_{ij} como:

$$\tilde{n}_{ij} = (\tilde{f}_j^+ \ominus \tilde{x}_{ij}) / (f_{j3}^+ - f_{j1}^-) \quad (\text{A.15})$$

si el j -ésimo criterio es beneficio, y con

$$\tilde{n}_{ij} = (\tilde{x}_{ij} \ominus \tilde{f}_j^+) / (f_{j3}^- - f_{j1}^+) \quad (\text{A.16})$$

si el j -ésimo criterio es coste, donde $\tilde{f}_j^+ = (f_{j1}^+, f_{j2}^+, f_{j3}^+)$ y $\tilde{f}_j^- = (f_{j1}^-, f_{j2}^-, f_{j3}^-)$ son determinados para cada criterio como $\tilde{f}_j^+ = \text{MAX}_i(\tilde{x}_{ij})$ y $\tilde{f}_j^- = \text{MIN}_i(\tilde{x}_{ij})$ si el j -ésimo criterio es beneficio, y como $\tilde{f}_j^+ = \text{MIN}_i(\tilde{x}_{ij})$ y $\tilde{f}_j^- = \text{MAX}_i(\tilde{x}_{ij})$ si el j -ésimo criterio es coste, $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,n$.

3. Cálculo de los S_i y de los R_i : : el índice $\tilde{S}_i = (S_{i1}, S_{i2}, S_{i3})$ y el índice $\tilde{R}_i = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3})$ son calculados por las relaciones:

$$\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^n (\tilde{w}_j \otimes \tilde{n}_{ij}) \quad (\text{A.17})$$

$$\tilde{R}_i = \text{MAX}_j(\tilde{w}_j \otimes \tilde{n}_{ij}) \quad (\text{A.18})$$

donde \tilde{w}_j es el peso asociado al j -ésimo criterio.

4. Cálculo de los Q_i : el índice $\tilde{Q}_i = (Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3})$ se calcula como:

$$\tilde{Q}_i = v(\tilde{S}_i \ominus \tilde{S}^+) / (S_3^- - S_1^+) \oplus (1 - v)(\tilde{R}_i \ominus \tilde{R}^+) / (R_3^- - R_1^+) \quad (\text{A.19})$$

donde $\tilde{S}^+ = \text{MIN}_i(\tilde{S}_i)$, $S_3^- = \max_i\{S_{i3}\}$, $\tilde{R}^+ = \text{MIN}_i(\tilde{R}_i)$, $R_3^- = \max_i\{R_{i3}\}$ y $v \in [0, 1]$.

Como en el método clásico de VIKOR, el parámetro v balancea los índices \tilde{S}_i y \tilde{R}_i .

5. Cálculo del ranking: para calcular el ranking, las alternativas se ordenan en orden ascendente por el valor defusificado de \tilde{Q}_i , $i=1,2,\dots,m$, como:

$$Q_i = \frac{Q_{i1} + 2Q_{i2} + Q_{i3}}{4} \quad (\text{A.20})$$

donde la mejor alternativa es aquella que tenga los valores más bajos de Q_i .

6. Solución de compromiso: se puede obtener el Ranking de Compromiso, tal y como se ha descrito en la Sección 2.3.2.

Método WASPAS Difuso

El método WASPAS Difuso [111] calcula su ranking en base al “Weighted Sum Model” (WSM) y al “Weighted Product Model” (WPM). Sus pasos son los siguientes:

1. Obtención de la matriz de decisión: el primer paso es componer la matriz de decisión que forma el problema.
2. Procedimiento de normalización: la normalización que emplea es la *Transformación Lineal del Máximo*, como unas de las variantes del TOPSIS, Expr. (A.11) y (A.12). Los valores normalizados se denotan como \tilde{n}_{ij} , $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,n$.
3. Cálculo de $K_i^{(1)}$: la parte del WSM se calcula como:

$$\tilde{K}_i^{(1)} = (K_{i1}^{(1)}, K_{i2}^{(1)}, K_{i3}^{(1)}) = \sum_{j=1}^n \tilde{n}_{ij} \otimes \tilde{w}_j \quad (\text{A.21})$$

4. Cálculo de $K_i^{(2)}$: este índice se calcula de la siguiente forma:

$$\tilde{K}_i^{(2)} = (K_{i1}^{(2)}, K_{i2}^{(2)}, K_{i3}^{(2)}) = \prod_{j=1}^n (\tilde{n}_{ij})^{\tilde{w}_j} \quad (\text{A.22})$$

donde \tilde{w}_j es el peso del j -ésimo criterio, $i=1,2,\dots,m$ y $j=1,2,\dots,n$.

5. Cálculo de K_i : finalmente K_i se calcula como los valores “dedifusificar/defuzzy” $\tilde{K}_i^{(1)}$ y $\tilde{K}_i^{(2)}$ como:

$$K_i = \lambda * K_i^{(1)} + (1 - \lambda) * K_i^{(2)} \quad (\text{A.23})$$

donde,

$$K_i^{(1)} = (1/3) * (K_{i1}^{(1)} + K_{i2}^{(1)} + K_{i3}^{(1)}) \quad (\text{A.24})$$

$$K_i^{(2)} = (1/3) * (K_{i1}^{(2)} + K_{i2}^{(2)} + K_{i3}^{(2)}) \quad (\text{A.25})$$

y $\lambda \in [0, 1]$, igual que en su versión clásica, balancea ambos métodos.

6. Cálculo del ranking: el ranking se establece ordenando K_i en orden descendente, siendo la mejor alternativa aquella que tenga los valores más altos del índice.

Apéndice B

Estudio Comparativo

Resultados del estudio comparativo de los métodos de decisión multi-criterio

En este Apéndice se presentan las Tablas que contienen los resultados del estudio comparativo de los métodos de decisión multi-criterio seleccionados en esta tesis, tanto para datos reales como para datos difusos. Tanto para datos reales, como para datos difusos, se muestran los valores medios de ρ de forma global y para cada combinación según el número de alternativas y de criterios. Además, para datos reales, se muestra el número de problemas no resueltos en VIKOR con $v = 0$ y $v = 0.5$.

Nº of criterios (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	66	5	0	0	0	0	0
10	95	57	1	0	0	0	0
15	99	84	3	0	0	0	0
20	100	97	27	2	0	0	0

Tabla B.1: Problemas no resueltos por VIKOR con $v = 0$ y $v = 0.5$.

Métodos	Valor medio de ρ	Desviación típica
WAS ¹ - VIK ¹	0,9772	0,0339
WAS ¹ - RIM	0,9708	0,0545
WAS ^{0.5} - WAS ⁰	0,9659	0,0368
TOP ^{Max} - RIM	0,9617	0,0670
WAS ¹ - TOP ^{Vec}	0,9515	0,0677
VIK ¹ - TOP ^{Max}	0,9482	0,0803
VIK ¹ - RIM	0,9467	0,0797
WAS ⁰ - MM	0,9450	0,0919
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,9432	0,0699
WAS ¹ - TOP ^{Max}	0,9412	0,0904
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,9322	0,0514
WAS ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,9317	0,0803
WAS ^{0.5} - RIM	0,9281	0,0866
TOP ^{Vec} - RIM	0,9253	0,0996
TOP ^{Vec} - TOP ^{Max}	0,9116	0,1153
VIK ¹ - WAS ^{0.5}	0,9115	0,0737
VIK ¹ - TOP ^{Vec}	0,9090	0,1120
MM - TOP ^{Vec}	0,9076	0,0930
MM - WAS ^{0.5}	0,9018	0,1243
MM - TOP ^{Max}	0,8964	0,1045
MM - WAS ¹	0,8914	0,1000
VIK ^{0.5} - VIK ¹	0,8876	0,0921
VIK ^{0.5} - MM	0,8821	0,1177
VIK ^{0.5} - WAS ^{0.5}	0,8764	0,0976
VIK ^{0.5} - WAS ¹	0,8695	0,1016
VIK ^{0.5} - WAS ⁰	0,8668	0,0970
MM - RIM	0,8663	0,1295
WAS ⁰ - WAS ¹	0,8656	0,0898
WAS ⁰ - TOP ^{Vec}	0,8627	0,1256
VIK ¹ - MM	0,8601	0,1320
VIK ^{0.5} - RIM	0,8585	0,1345
WAS ⁰ - RIM	0,8535	0,1300
VIK ¹ - WAS ⁰	0,8433	0,1121
TOP ^{Max} - VIK ^{0.5}	0,8378	0,1159
TOP ^{Max} - WAS ⁰	0,8377	0,1494
TOP ^{Vec} - VIK ^{0.5}	0,8252	0,1548
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,6713	0,1664
VIK ⁰ - MM	0,6263	0,2069
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,5628	0,1905
VIK ⁰ - TOP ^{Vec}	0,5030	0,2276
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,5006	0,2055
VIK ⁰ - RIM	0,4944	0,2337
VIK ⁰ - VIK ¹	0,4267	0,2315
VIK ⁰ - WAS ¹	0,4264	0,2239
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,4038	0,2223

Tabla B.2: Valores medios de ρ ($\bar{\rho}$) y desviación típica (σ) para cada par de métodos para todos los problemas generados (ordenados según $\bar{\rho}$).

Métodos	Alternativas						
	3	5	10	15	20	50	100
WAS ⁰ - WAS ^{0.5}	0,9853	0,9560	0,9503	0,9629	0,9634	0,9725	0,9757
VIK ¹ - WAS ¹	0,9657	0,9068	0,9806	0,9913	0,9944	0,9992	0,9998
VIK ¹ - VIK ^{0.5}	0,9559	0,9271	0,8816	0,8748	0,8585	0,8638	0,8688
MM - TOP ^{Vec}	0,9438	0,9208	0,8898	0,9004	0,8965	0,8999	0,9018
WAS ¹ - VIK ^{0.5}	0,9167	0,8542	0,8689	0,8703	0,8563	0,8634	0,8687
WAS ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,9125	0,9068	0,9171	0,9296	0,9377	0,9557	0,9623
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,9113	0,9165	0,9421	0,9514	0,9541	0,9614	0,9653
MM - TOP ^{Max}	0,9000	0,8985	0,8849	0,8969	0,8932	0,8994	0,9020
WAS ¹ - TOP ^{Vec}	0,8950	0,9260	0,9394	0,9550	0,9643	0,9872	0,9934
WAS ¹ - MM	0,8863	0,8908	0,8776	0,8928	0,8908	0,8988	0,9028
WAS ¹ - RIM	0,8838	0,9548	0,9798	0,9892	0,9925	0,9972	0,9982
TOP ^{Vec} - VIK ⁰	0,8750	0,7030	0,3550	0,3557	0,3835	0,4148	0,4341
RIM - VIK ^{0.5}	0,8538	0,8435	0,8592	0,8666	0,8543	0,8638	0,8686
RIM - TOP ^{Max}	0,8463	0,9335	0,9747	0,9867	0,9921	0,9987	0,9997
TOP ^{Vec} - WAS ⁰	0,8463	0,8335	0,8466	0,8684	0,8676	0,8841	0,8921
RIM - WAS ^{0.5}	0,8425	0,9003	0,9309	0,9466	0,9506	0,9609	0,9651
MM - WAS ⁰	0,8388	0,8865	0,9569	0,9739	0,9765	0,9893	0,9932
TOP ^{Max} - VIK ¹	0,8188	0,9050	0,9562	0,9778	0,9853	0,9962	0,9979
MM - VIK ^{0.5}	0,8100	0,8425	0,8505	0,8819	0,8949	0,9401	0,9544
MM - VIK ⁰	0,8050	0,7065	0,4689	0,5007	0,5555	0,6545	0,6932
RIM - VIK ⁰	0,8038	0,6775	0,3674	0,3709	0,3905	0,4160	0,4349
MM - VIK ¹	0,8025	0,8015	0,8501	0,8816	0,8848	0,8975	0,9025
TOP ^{Vec} - VIK ^{0.5}	0,7988	0,7788	0,8106	0,8329	0,8324	0,8578	0,8655
RIM - MM	0,7863	0,8340	0,8660	0,8893	0,8882	0,8985	0,9018
RIM - VIK ¹	0,7863	0,9040	0,9668	0,9850	0,9901	0,9969	0,9981
RIM - WAS ⁰	0,7850	0,8173	0,8457	0,8739	0,8724	0,8867	0,8938
RIM - TOP ^{Vec}	0,7800	0,8660	0,9302	0,9538	0,9638	0,9885	0,9947
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,7784	0,5520	0,5401	0,6231	0,6922	0,7574	0,7825
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,7755	0,9433	0,9376	0,9495	0,9531	0,9614	0,9660
WAS ⁰ - WAS ¹	0,7608	0,8883	0,8516	0,8763	0,8746	0,8869	0,8946
WAS ^{0.5} - VIK ¹	0,7608	0,8492	0,9176	0,9409	0,9479	0,9606	0,9658
WAS ¹ - TOP ^{Max}	0,7563	0,8833	0,9732	0,9884	0,9923	0,9971	0,9981
VIK ¹ - WAS ⁰	0,7461	0,7933	0,8269	0,8648	0,8678	0,8856	0,8943
VIK ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,7304	0,8087	0,8518	0,8627	0,8523	0,8633	0,8685
VIK ^{0.5} - WAS ^{0.5}	0,7265	0,8238	0,8757	0,8993	0,9033	0,9307	0,9383
VIK ¹ - TOP ^{Vec}	0,7263	0,8440	0,9121	0,9440	0,9575	0,9862	0,9931
VIK ^{0.5} - WAS ⁰	0,7216	0,7936	0,8390	0,8829	0,9010	0,9409	0,9526
VIK ⁰ - WAS ¹	0,7196	0,4269	0,3141	0,3633	0,3891	0,4128	0,4325
VIK ⁰ - VIK ¹	0,7196	0,4239	0,3186	0,3635	0,3891	0,4129	0,4324
MM - WAS ^{0.5}	0,6863	0,8288	0,9347	0,9560	0,9590	0,9724	0,9759
TOP ^{Max} - TOP ^{Vec}	0,6825	0,8378	0,9445	0,9628	0,9697	0,9893	0,9949
TOP ^{Max} - WAS ⁰	0,6725	0,7948	0,8556	0,8818	0,8779	0,8876	0,8940
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,6059	0,4158	0,3856	0,4610	0,5031	0,5672	0,5923
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,6010	0,4291	0,4397	0,5206	0,5820	0,6733	0,7037
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,5431	0,3980	0,3132	0,3661	0,3903	0,4158	0,4350

Tabla B.3: Valores medios de ρ por pares de métodos según las alternativas (m), para todos los problemas resueltos (ordenas según $m = 3$)

Métodos	Alternativas						
	3	5	10	15	20	50	100
WAS ¹ - VIK ¹	0,9657	0,9068	0,9806	0,9913	0,9944	0,9992	0,9998
RIM - TOP ^{Max}	0,8463	0,9335	0,9747	0,9867	0,9921	0,9987	0,9997
RIM - WAS ¹	0,8838	0,9548	0,9798	0,9892	0,9925	0,9972	0,9982
TOP ^{Max} - WAS ¹	0,7563	0,8833	0,9732	0,9884	0,9923	0,9971	0,9981
RIM - VIK ¹	0,7863	0,9040	0,9668	0,9850	0,9901	0,9969	0,9981
TOP ^{Max} - VIK ¹	0,8188	0,9050	0,9562	0,9778	0,9853	0,9962	0,9979
TOP ^{Max} - TOP ^{Vec}	0,6825	0,8378	0,9445	0,9628	0,9697	0,9893	0,9949
TOP ^{Vec} - RIM	0,7800	0,8660	0,9302	0,9538	0,9638	0,9885	0,9947
TOP ^{Vec} - WAS ¹	0,8950	0,9260	0,9394	0,9550	0,9643	0,9872	0,9934
MM - WAS ⁰	0,8388	0,8865	0,9569	0,9739	0,9765	0,9893	0,9932
TOP ^{Vec} - VIK ¹	0,7263	0,8440	0,9121	0,9440	0,9575	0,9862	0,9931
WAS ^{0.5} - MM	0,6863	0,8288	0,9347	0,9560	0,9590	0,9724	0,9759
WAS ^{0.5} - WAS ⁰	0,9853	0,9560	0,9503	0,9629	0,9634	0,9725	0,9757
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,7755	0,9433	0,9376	0,9495	0,9531	0,9614	0,9660
WAS ^{0.5} - VIK ¹	0,7608	0,8492	0,9176	0,9409	0,9479	0,9606	0,9658
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,9113	0,9165	0,9421	0,9514	0,9541	0,9614	0,9653
WAS ^{0.5} - RIM	0,8425	0,9003	0,9309	0,9466	0,9506	0,9609	0,9651
WAS ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,9125	0,9068	0,9171	0,9296	0,9377	0,9557	0,9623
VIK ^{0.5} - MM	0,8100	0,8425	0,8505	0,8819	0,8949	0,9401	0,9544
VIK ^{0.5} - WAS ⁰	0,7216	0,7936	0,8390	0,8829	0,9010	0,9409	0,9526
VIK ^{0.5} - WAS ^{0.5}	0,7265	0,8238	0,8757	0,8993	0,9033	0,9307	0,9383
MM - WAS ¹	0,8863	0,8908	0,8776	0,8928	0,8908	0,8988	0,9028
MM - VIK ¹	0,8025	0,8015	0,8501	0,8816	0,8848	0,8975	0,9025
MM - TOP ^{Max}	0,9000	0,8985	0,8849	0,8969	0,8932	0,8994	0,9020
MM - TOP ^{Vec}	0,9438	0,9208	0,8898	0,9004	0,8965	0,8999	0,9018
MM - RIM	0,7863	0,8340	0,8660	0,8893	0,8882	0,8985	0,9018
WAS ⁰ - WAS ¹	0,7608	0,8883	0,8516	0,8763	0,8746	0,8869	0,8946
WAS ⁰ - VIK ¹	0,7461	0,7933	0,8269	0,8648	0,8678	0,8856	0,8943
WAS ⁰ - TOP ^{Max}	0,6725	0,7948	0,8556	0,8818	0,8779	0,8876	0,8940
WAS ⁰ - RIM	0,7850	0,8173	0,8457	0,8739	0,8724	0,8867	0,8938
WAS ⁰ - TOP ^{Vec}	0,8463	0,8335	0,8466	0,8684	0,8676	0,8841	0,8921
VIK ^{0.5} - VIK ¹	0,9559	0,9271	0,8816	0,8748	0,8585	0,8638	0,8688
VIK ^{0.5} - WAS ¹	0,9167	0,8542	0,8689	0,8703	0,8563	0,8634	0,8687
VIK ^{0.5} - RIM	0,8538	0,8435	0,8592	0,8666	0,8543	0,8638	0,8686
VIK ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,7304	0,8087	0,8518	0,8627	0,8523	0,8633	0,8685
VIK ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,7988	0,7788	0,8106	0,8329	0,8324	0,8578	0,8655
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,7784	0,5520	0,5401	0,6231	0,6922	0,7574	0,7825
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,6010	0,4291	0,4397	0,5206	0,5820	0,6733	0,7037
VIK ⁰ - MM	0,8050	0,7065	0,4689	0,5007	0,5555	0,6545	0,6932
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,6059	0,4158	0,3856	0,4610	0,5031	0,5672	0,5923
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,5431	0,3980	0,3132	0,3661	0,3903	0,4158	0,4350
VIK ⁰ - RIM	0,8038	0,6775	0,3674	0,3709	0,3905	0,4160	0,4349
VIK ⁰ - TOP ^{Vec}	0,8750	0,7030	0,3550	0,3557	0,3835	0,4148	0,4341
VIK ⁰ - WAS ¹	0,7196	0,4269	0,3141	0,3633	0,3891	0,4128	0,4325
VIK ⁰ - VIK ¹	0,7196	0,4239	0,3186	0,3635	0,3891	0,4129	0,4324

Tabla B.4: Valores medios de ρ por pares de métodos según las alternativas (m), para todos los problemas resueltos (ordenas según $m = 100$)

Métodos	Criterios			
	5	10	15	20
WAS ¹ - VIK ¹	0,9706	0,9867	0,9889	0,9603
MM - WAS ⁰	0,9701	0,9442	0,9407	0,9251
RIM - WAS ¹	0,9637	0,9744	0,9727	0,9723
WAS ⁰ - WAS ^{0.5}	0,9607	0,9648	0,9682	0,9706
RIM - TOP ^{Max}	0,9527	0,9694	0,9639	0,9607
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,9501	0,9466	0,9431	0,9328
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,9483	0,9432	0,8868	0,9537
TOP ^{Max} - WAS ¹	0,9438	0,9468	0,9469	0,9274
TOP ^{Vec} - WAS ¹	0,9432	0,9520	0,9586	0,9521
RIM - VIK ¹	0,9310	0,9521	0,9560	0,9480
WAS ^{0.5} - VIK ¹	0,9291	0,9319	0,8765	0,9079
TOP ^{Max} - VIK ¹	0,9287	0,9540	0,9567	0,9533
RIM - WAS ^{0.5}	0,9285	0,9347	0,9268	0,9226
TOP ^{Vec} - WAS ^{0.5}	0,9281	0,9364	0,9339	0,9281
TOP ^{Vec} - TOP ^{Max}	0,9217	0,9173	0,9117	0,8959
TOP ^{Vec} - RIM	0,9214	0,9312	0,9252	0,9233
WAS ^{0.5} - MM	0,9164	0,9013	0,9058	0,8839
WAS ^{0.5} - VIK ^{0.5}	0,8998	0,9029	0,8429	0,8574
MM - TOP ^{Vec}	0,8967	0,9109	0,9131	0,9096
MM - TOP ^{Max}	0,8963	0,8955	0,8988	0,8951
MM - VIK ^{0.5}	0,8958	0,8892	0,8788	0,8643
WAS ⁰ - VIK ^{0.5}	0,8945	0,8932	0,8330	0,8434
TOP ^{Vec} - VIK ¹	0,8901	0,9165	0,9211	0,9084
MM - WAS ¹	0,8877	0,8959	0,8878	0,8942
VIK ¹ - VIK ^{0.5}	0,8813	0,8893	0,8972	0,8818
WAS ⁰ - WAS ¹	0,8792	0,8751	0,8236	0,8878
RIM - MM	0,8706	0,8722	0,8633	0,8590
TOP ^{Vec} - WAS ⁰	0,8671	0,8644	0,8603	0,8589
RIM - VIK ^{0.5}	0,8649	0,8598	0,8569	0,8525
RIM - WAS ⁰	0,8636	0,8606	0,8462	0,8437
MM - VIK ¹	0,8633	0,8669	0,8556	0,8546
WAS ⁰ - VIK ¹	0,8579	0,8622	0,8124	0,8402
WAS ¹ - VIK ^{0.5}	0,8575	0,8803	0,8933	0,8434
TOP ^{Max} - WAS ⁰	0,8528	0,8396	0,8399	0,8187
TOP ^{Max} - VIK ^{0.5}	0,8372	0,8728	0,8140	0,8255
TOP ^{Vec} - VIK ^{0.5}	0,8289	0,8295	0,8272	0,8153
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,7835	0,6578	0,6712	0,5562
VIK ⁰ - MM	0,7322	0,6434	0,5777	0,5519
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,7184	0,5954	0,5064	0,4093
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,6528	0,5240	0,4503	0,3546
VIK ⁰ - RIM	0,5749	0,4946	0,4531	0,4552
VIK ⁰ - TOP ^{Vec}	0,5679	0,4956	0,4685	0,4801
VIK ⁰ - VIK ¹	0,5447	0,4122	0,4386	0,2919
VIK ⁰ - WAS ¹	0,5419	0,4085	0,4472	0,2885
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,5382	0,4101	0,3775	0,2704

Tabla B.5: Valores medios de ρ por pares de métodos según los criterios (n), para todos los problemas resueltos (ordenas según $n = 5$).

Métodos difusos	Valor medio de ρ	Desviación típica
TOP ^{Max} - WAS ¹	0,9991	0,0069
TOP ^{Max} - VIK ¹	0,9719	0,0554
WAS ¹ - VIK ¹	0,9715	0,0552
WAS ⁰ - MM	0,9694	0,0589
WAS ⁰ - WAS ^{0.5}	0,9510	0,0666
WAS ^{0.5} - MM	0,9458	0,0703
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,9384	0,0794
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,9379	0,0795
TOP ^{Vec} - WAS ¹	0,9327	0,0987
TOP ^{Vec} - TOP ^{Max}	0,9321	0,0989
TOP ^{Vec} - WAS ^{0.5}	0,9158	0,1013
VIK ¹ - WAS ^{0.5}	0,9152	0,1036
VIK ^{0.5} - WAS ^{0.5}	0,9084	0,0958
VIK ¹ - TOP ^{Vec}	0,9033	0,1252
VIK ¹ - VIK ^{0.5}	0,8867	0,0971
VIK ^{0.5} - MM	0,8825	0,1202
VIK ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,8822	0,1031
VIK ^{0.5} - WAS ¹	0,8818	0,1032
VIK ^{0.5} - WAS ⁰	0,8798	0,1212
MM - TOP ^{Vec}	0,8798	0,1226
MM - WAS ¹	0,8744	0,1204
MM - TOP ^{Max}	0,8739	0,1206
WAS ⁰ - WAS ¹	0,8557	0,1280
WAS ⁰ - TOP ^{Max}	0,8551	0,1280
WAS ⁰ - TOP ^{Vec}	0,8506	0,1358
VIK ¹ - MM	0,8493	0,1416
VIK ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,8334	0,1509
VIK ¹ - WAS ⁰	0,8311	0,1500
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,6632	0,2222
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,5955	0,2396
VIK ⁰ - MM	0,5715	0,2464
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,5228	0,2551
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,4102	0,2814
VIK ⁰ - WAS ¹	0,4101	0,2813
VIK ⁰ - TOP ^{Vec}	0,4082	0,2837
VIK ⁰ - VIK ¹	0,3991	0,2857

Tabla B.6: Valores medios de ρ ($\bar{\rho}$) y desviación típica (σ) para cada par de métodos difusos para todos los problemas generados (ordenados según $\bar{\rho}$).

Métodos difusos	Alternativas						
	3	5	10	15	20	50	100
TOP ^{Max} - WAS ¹	0,9963	0,9993	0,9994	0,9995	0,9996	0,9999	0,9999
WAS ⁰ - MM	0,9500	0,9455	0,9627	0,9687	0,9767	0,9878	0,9941
WAS ⁰ - WAS ^{0.5}	0,9050	0,9333	0,9496	0,9586	0,9638	0,9717	0,9748
MM - WAS ^{0.5}	0,9025	0,9155	0,9426	0,9536	0,9598	0,9713	0,9755
VIK ¹ - VIK ^{0.5}	0,8950	0,8870	0,8932	0,8887	0,8787	0,8809	0,8833
VIK ¹ - TOP ^{Max}	0,8938	0,9413	0,9821	0,9920	0,9952	0,9991	0,9997
VIK ¹ - WAS ¹	0,8900	0,9418	0,9820	0,9922	0,9954	0,9992	0,9997
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,8900	0,9115	0,9412	0,9458	0,9521	0,9625	0,9658
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,8863	0,9120	0,9411	0,9457	0,9522	0,9625	0,9657
VIK ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,8738	0,8785	0,8924	0,8884	0,8783	0,8808	0,8833
VIK ^{0.5} - WAS ¹	0,8700	0,8785	0,8929	0,8888	0,8784	0,8808	0,8833
WAS ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,8513	0,8678	0,9119	0,9241	0,9385	0,9555	0,9619
WAS ^{0.5} - VIK ^{0.5}	0,8388	0,8718	0,9129	0,9214	0,9241	0,9417	0,9479
TOP ^{Vec} - MM	0,8325	0,8543	0,8873	0,8914	0,8958	0,8983	0,8988
TOP ^{Vec} - WAS ¹	0,8213	0,8715	0,9344	0,9538	0,9672	0,9873	0,9933
MM - WAS ¹	0,8188	0,8475	0,8800	0,8854	0,8903	0,8990	0,9001
TOP ^{Max} - TOP ^{Vec}	0,8175	0,8713	0,9343	0,9538	0,9672	0,9874	0,9934
TOP ^{Max} - MM	0,8150	0,8480	0,8799	0,8851	0,8904	0,8990	0,9001
WAS ^{0.5} - VIK ¹	0,8075	0,8583	0,9264	0,9396	0,9475	0,9618	0,9655
WAS ⁰ - TOP ^{Vec}	0,8000	0,8153	0,8448	0,8535	0,8687	0,8822	0,8895
WAS ⁰ - WAS ¹	0,7888	0,8253	0,8575	0,8641	0,8746	0,8873	0,8921
WAS ⁰ - TOP ^{Max}	0,7850	0,8258	0,8572	0,8638	0,8746	0,8872	0,8921
VIK ^{0.5} - MM	0,7738	0,8115	0,8769	0,8990	0,9121	0,9459	0,9584
VIK ^{0.5} - WAS ⁰	0,7525	0,8115	0,8757	0,9001	0,9163	0,9461	0,9564
VIK ¹ - MM	0,7325	0,7900	0,8634	0,8776	0,8843	0,8979	0,8997
VIK ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,7325	0,7838	0,8477	0,8586	0,8580	0,8736	0,8800
VIK ¹ - TOP ^{Vec}	0,7163	0,8088	0,9134	0,9433	0,9617	0,9864	0,9931
VIK ¹ - WAS ⁰	0,7050	0,7703	0,8399	0,8563	0,8684	0,8861	0,8918
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,4825	0,4803	0,5901	0,6055	0,6306	0,6825	0,6969
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,4738	0,5488	0,6738	0,6942	0,7252	0,7611	0,7656
VIK ⁰ - MM	0,4675	0,4565	0,5584	0,5685	0,6002	0,6631	0,6866
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,4550	0,4388	0,5292	0,5290	0,5432	0,5788	0,5855
VIK ⁰ - TOP ^{Vec}	0,3988	0,3595	0,4237	0,4085	0,4115	0,4282	0,4274
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,3763	0,3663	0,4339	0,4177	0,4202	0,4298	0,4270
VIK ⁰ - WAS ¹	0,3750	0,3660	0,4345	0,4181	0,4201	0,4297	0,4270
VIK ⁰ - VIK ¹	0,3313	0,3445	0,4275	0,4152	0,4191	0,4296	0,4269

Tabla B.7: Valores medios de ρ por pares de métodos difusos según las alternativas (m), para todos los problemas resueltos (ordenas según $m = 3$)

Métodos difusos	Alternativas						
	3	5	10	15	20	50	100
WAS ¹ - TOP ^{Max}	0,9963	0,9993	0,9994	0,9995	0,9996	0,9999	0,9999
WAS ¹ - VIK ¹	0,8900	0,9418	0,9820	0,9922	0,9954	0,9992	0,9997
TOP ^{Max} - VIK ¹	0,8938	0,9413	0,9821	0,9920	0,9952	0,9991	0,9997
MM - WAS ⁰	0,9500	0,9455	0,9627	0,9687	0,9767	0,9878	0,9941
TOP ^{Vec} - TOP ^{Max}	0,8175	0,8713	0,9343	0,9538	0,9672	0,9874	0,9934
TOP ^{Vec} - WAS ¹	0,8213	0,8715	0,9344	0,9538	0,9672	0,9873	0,9933
TOP ^{Vec} - VIK ¹	0,7163	0,8088	0,9134	0,9433	0,9617	0,9864	0,9931
WAS ^{0.5} - MM	0,9025	0,9155	0,9426	0,9536	0,9598	0,9713	0,9755
WAS ^{0.5} - WAS ⁰	0,9050	0,9333	0,9496	0,9586	0,9638	0,9717	0,9748
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,8900	0,9115	0,9412	0,9458	0,9521	0,9625	0,9658
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,8863	0,9120	0,9411	0,9457	0,9522	0,9625	0,9657
WAS ^{0.5} - VIK ¹	0,8075	0,8583	0,9264	0,9396	0,9475	0,9618	0,9655
WAS ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,8513	0,8678	0,9119	0,9241	0,9385	0,9555	0,9619
VIK ^{0.5} - MM	0,7738	0,8115	0,8769	0,8990	0,9121	0,9459	0,9584
VIK ^{0.5} - WAS ⁰	0,7525	0,8115	0,8757	0,9001	0,9163	0,9461	0,9564
VIK ^{0.5} - WAS ^{0.5}	0,8388	0,8718	0,9129	0,9214	0,9241	0,9417	0,9479
MM - TOP ^{Max}	0,8150	0,8480	0,8799	0,8851	0,8904	0,8990	0,9001
MM - WAS ¹	0,8188	0,8475	0,8800	0,8854	0,8903	0,8990	0,9001
MM - VIK ¹	0,7325	0,7900	0,8634	0,8776	0,8843	0,8979	0,8997
MM - TOP ^{Vec}	0,8325	0,8543	0,8873	0,8914	0,8958	0,8983	0,8988
WAS ⁰ - WAS ¹	0,7888	0,8253	0,8575	0,8641	0,8746	0,8873	0,8921
WAS ⁰ - TOP ^{Max}	0,7850	0,8258	0,8572	0,8638	0,8746	0,8872	0,8921
WAS ⁰ - VIK ¹	0,7050	0,7703	0,8399	0,8563	0,8684	0,8861	0,8918
WAS ⁰ - TOP ^{Vec}	0,8000	0,8153	0,8448	0,8535	0,8687	0,8822	0,8895
VIK ^{0.5} - WAS ¹	0,8700	0,8785	0,8929	0,8888	0,8784	0,8808	0,8833
VIK ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,8738	0,8785	0,8924	0,8884	0,8783	0,8808	0,8833
VIK ^{0.5} - VIK ¹	0,8950	0,8870	0,8932	0,8887	0,8787	0,8809	0,8833
VIK ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,7325	0,7838	0,8477	0,8586	0,8580	0,8736	0,8800
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,4738	0,5488	0,6738	0,6942	0,7252	0,7611	0,7656
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,4825	0,4803	0,5901	0,6055	0,6306	0,6825	0,6969
VIK ⁰ - MM	0,4675	0,4565	0,5584	0,5685	0,6002	0,6631	0,6866
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,4550	0,4388	0,5292	0,5290	0,5432	0,5788	0,5855
VIK ⁰ - TOP ^{Vec}	0,3988	0,3595	0,4237	0,4085	0,4115	0,4282	0,4274
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,3763	0,3663	0,4339	0,4177	0,4202	0,4298	0,4270
VIK ⁰ - WAS ¹	0,3750	0,3660	0,4345	0,4181	0,4201	0,4297	0,4270
VIK ⁰ - VIK ¹	0,3313	0,3445	0,4275	0,4152	0,4191	0,4296	0,4269

Tabla B.8: Valores medios de ρ por pares de métodos difusos según las alternativas (m), para todos los problemas resueltos (ordenados según $m = 100$)

Métodos difusos	Criterios			
	5	10	15	20
TOP ^{Max} - WAS ¹	0,9989	0,9990	0,9995	0,9991
MM - WAS ⁰	0,9829	0,9721	0,9610	0,9615
TOP ^{Max} - VIK ¹	0,9747	0,9684	0,9755	0,9688
VIK ¹ - WAS ¹	0,9742	0,9678	0,9756	0,9683
WAS ^{0.5} - WAS ⁰	0,9534	0,9506	0,9498	0,9501
WAS ^{0.5} - MM	0,9485	0,9442	0,9438	0,9468
WAS ^{0.5} - WAS ¹	0,9405	0,9413	0,9379	0,9339
WAS ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,9398	0,9405	0,9381	0,9333
TOP ^{Vec} - WAS ¹	0,9300	0,9384	0,9292	0,9331
TOP ^{Vec} - TOP ^{Max}	0,9295	0,9376	0,9288	0,9324
WAS ^{0.5} - VIK ^{0.5}	0,9187	0,9080	0,9021	0,9046
WAS ^{0.5} - TOP ^{Vec}	0,9185	0,9132	0,9185	0,9132
WAS ^{0.5} - VIK ¹	0,9169	0,9148	0,9173	0,9119
TOP ^{Vec} - VIK ¹	0,9044	0,9051	0,8995	0,9040
VIK ^{0.5} - MM	0,9024	0,8839	0,8684	0,8754
VIK ^{0.5} - WAS ⁰	0,9014	0,8834	0,8706	0,8638
VIK ^{0.5} - VIK ¹	0,8888	0,8815	0,8844	0,8921
VIK ^{0.5} - TOP ^{Max}	0,8875	0,8794	0,8722	0,8898
VIK ^{0.5} - WAS ¹	0,8867	0,8790	0,8724	0,8891
MM - TOP ^{Vec}	0,8823	0,8759	0,8820	0,8789
MM - WAS ¹	0,8723	0,8769	0,8743	0,8743
MM - TOP ^{Max}	0,8716	0,8760	0,8745	0,8737
WAS ⁰ - WAS ¹	0,8646	0,8579	0,8514	0,8488
WAS ⁰ - TOP ^{Max}	0,8638	0,8570	0,8515	0,8481
WAS ⁰ - TOP ^{vec}	0,8605	0,8498	0,8510	0,8410
MM - VIK ¹	0,8477	0,8467	0,8500	0,8530
TOP ^{Vec} - VIK ^{0.5}	0,8410	0,8268	0,8260	0,8400
VIK ¹ - WAS ⁰	0,8390	0,8310	0,8302	0,8243
VIK ⁰ - VIK ^{0.5}	0,7857	0,6905	0,6004	0,5762
VIK ⁰ - WAS ⁰	0,7518	0,6269	0,5202	0,4830
VIK ⁰ - MM	0,7362	0,6030	0,4896	0,4573
VIK ⁰ - WAS ^{0.5}	0,6827	0,5491	0,4407	0,4186
VIK ⁰ - WAS ¹	0,5666	0,4363	0,3214	0,3159
VIK ⁰ - TOP ^{Max}	0,5659	0,4364	0,3217	0,3167
VIK ⁰ - TOP ^{Vec}	0,5554	0,4280	0,3361	0,3134
VIK ⁰ - VIK ¹	0,5544	0,4204	0,3202	0,3015

Tabla B.9: Valores medios de ρ por pares de métodos difusos según los criterios (n), para todos los problemas resueltos (ordenas según $n = 5$).

Apéndice C

Orden Inverso

Resultados análisis empírico del Orden Inverso

En este Apéndice se presentan las Tablas que contienen los resultados del análisis empírico sobre el Orden Inverso, tanto para datos reales como para datos fuzzy. Para cada método se presenta el número de casos estables, de casos inestables y del número de inversiones en la primera posición, todo ello para cada combinación del número de alternativas, m , y del número de criterios n . Además, para datos reales, se muestra el número de problemas no resueltos en VIKOR con $v = 0$ y $v = 0.5$.

Nº of criterios (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	66	5	0	0	0	0	0
10	95	57	1	0	0	0	0
15	99	84	3	0	0	0	0
20	100	97	27	2	0	0	0

Tabla C.1: Problemas no resueltos por VIKOR con $v = 0$ y $v = 0.5$.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	94	77	52	40	35	28	24
10	86	77	36	16	11	9	7
15	87	70	32	23	13	3	5
20	88	71	32	13	8	2	2

(a) Casos estables para MM.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	6	23	48	60	65	72	76
10	14	23	64	84	89	91	93
15	13	30	68	77	87	97	95
20	12	29	68	87	92	98	98

(b) Casos inestables para MM.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	4	4	3	1	0	0	0
10	7	5	6	6	0	1	0
15	10	8	8	3	4	0	0
20	5	9	5	11	4	3	0

(c) Casos con inversión en la primera posición para MM.

Tabla C.2: Resultados para MULTIMOORA (MM).

Nº of criteria (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	64	57	26	13	12	0	2
10	84	48	18	15	7	0	0
15	78	64	21	8	3	0	0
20	74	55	21	11	2	0	0

(a) Casos estables para TOP^{Max} .

Nº of criteria (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	36	43	74	87	88	100	98
10	16	52	82	85	93	100	100
15	22	36	79	92	97	100	100
20	26	45	79	89	98	100	100

(b) Casos inestables para TOP^{Max} .

Nº of criteria (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	16	12	6	4	2	2	0
10	9	11	10	4	1	3	2
15	15	3	13	2	4	5	0
20	13	11	8	5	4	5	1

(c) Casos con inversión en la primera posición para TOP^{Max} .

Tabla C.3: Resultados para TOPSIS con la transformación lienal del máximo (TOP^{Max}).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	77	64	19	11	6	0	0
10	79	52	22	4	0	0	0
15	77	62	18	8	1	0	0
20	75	46	22	3	2	0	0

(a) Casos estables para TOP^{Vec} .

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	23	36	81	89	94	100	100
10	21	48	78	96	100	100	100
15	23	38	82	92	99	100	100
20	25	54	78	97	98	100	100

(b) Casos inestables para TOP^{Vec} .

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	16	11	10	8	6	2	2
10	16	8	11	10	7	1	3
15	12	9	7	5	5	3	0
20	15	12	6	8	6	7	3

(c) Casos con inversión en la primera posición para TOP^{Vec} .Tabla C.4: Resultados para TOPSIS con la normalización vectorial (TOP^{Vec}).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	14	6	0	0	0	0	2
10	1	2	1	0	0	0	0
15	0	2	0	0	0	0	0
20	-	0	0	0	0	0	0

(a) Casos estables para VIK^0 .

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	20	89	100	100	100	100	98
10	4	41	98	100	100	100	100
15	1	14	97	100	100	100	100
20	-	3	73	98	100	100	100

(b) Casos inestables para VIK^0 .

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	7	30	24	14	18	5	4
10	1	11	27	24	20	11	6
15	0	3	46	32	25	10	7
20	-	2	36	46	36	22	7

(c) Casos con inversión en la primera posición para VIK^0 .

Tabla C.5: Resultados para VIKOR con $v = 0$ (VIK^0).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	15	27	7	0	1	0	0
10	4	10	0	0	0	0	0
15	0	8	1	0	0	0	0
20	-	0	0	1	0	0	0

(a) Casos estables para $VIK^{0.5}$.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	19	68	93	100	99	100	100
10	1	33	99	100	100	100	100
15	1	8	96	100	100	100	100
20	-	3	73	97	100	100	100

(b) Casos inestables para $VIK^{0.5}$.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	10	23	26	14	9	5	2
10	0	13	22	19	25	6	3
15	0	2	50	30	25	20	8
20	-	1	34	43	42	24	12

(c) Casos con inversión en la primera posición para $VIK^{0.5}$.

Tabla C.6: Resultados para VIKOR con $v = 0.5$ ($VIK^{0.5}$).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	61	47	20	10	7	0	1
10	70	44	16	9	4	0	0
15	75	44	16	9	2	0	0
20	66	46	15	12	4	0	0

(a) Casos estables para VIK¹.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	39	53	80	90	93	100	99
10	30	56	84	91	96	100	100
15	25	56	84	91	98	100	100
20	34	54	85	88	96	100	100

(b) Casos inestables para VIK¹.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	23	10	9	11	5	2	1
10	19	14	8	6	2	4	5
15	15	16	11	8	11	3	3
20	20	15	7	6	11	2	2

(c) Casos con inversión en la primera posición para VIK¹.

Tabla C.7: Resultados para VIKOR con $v = 1$ (VIK¹).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	100	100	100	100	100	100	100
10	100	100	100	100	100	100	100
15	100	100	100	100	100	100	100
20	100	100	100	100	100	100	97

(a) Casos estables para WAS⁰.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	3

(b) Casos inestables para WAS⁰.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0

(c) Casos con inversión en la primera posición para WAS⁰.

Tabla C.8: Resultados para WASPAS con $\lambda = 0$ (WAS⁰).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	90	81	62	50	42	16	12
10	91	81	49	47	30	8	2
15	92	76	63	40	33	6	0
20	89	85	61	43	26	4	0

(a) Casos estables para WAS^{0.5}.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	10	19	38	50	58	84	88
10	9	19	51	53	70	92	98
15	8	24	37	60	67	94	100
20	11	15	39	57	74	96	100

(b) Casos inestables para WAS^{0.5}.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	6	4	2	0	3	0	1
10	4	5	3	3	5	0	0
15	3	5	3	1	3	2	0
20	6	6	1	1	1	1	1

(c) Casos con inversión en la primera posición para WAS^{0.5}.

Tabla C.9: Resultados para WASPAS con $\lambda = 0.5$ (WAS^{0.5}).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	75	68	36	24	11	1	7
10	84	63	30	23	10	1	1
15	80	61	34	19	14	1	0
20	77	66	31	21	11	1	0

(a) Casos estables para WAS¹.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	25	32	64	76	89	99	93
10	16	37	70	77	90	99	99
15	20	39	66	81	86	99	100
20	23	34	69	79	89	99	100

(b) Casos inestables para WAS¹.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	8	6	3	5	6	0	0
10	11	10	8	5	2	3	2
15	12	7	10	2	4	0	2
20	12	8	4	2	6	0	3

(c) Casos con inversión en la primera posición para WAS¹.

Tabla C.10: Resultados para WASPAS con $\lambda = 1$ (WAS¹).

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	92	79	55	45	32	16	8
10	89	67	41	21	16	2	2
15	91	64	35	21	12	1	1
20	85	59	27	21	8	1	1

(a) Casos estables para MM difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	8	21	45	55	68	84	92
10	11	33	59	79	84	98	98
15	9	36	65	79	88	99	99
20	15	41	73	79	92	99	99

(b) Casos inestables para MM difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	4	3	5	2	1	1	0
10	5	7	9	6	9	0	3
15	4	8	10	6	6	2	1
20	7	11	5	5	9	0	0

(c) Casos con inversión en la primera posición para MM difuso.

Tabla C.11: Resultados para MULTIMOORA (MM) difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	78	54	36	29	12	0	0
10	74	57	36	13	2	0	0
15	83	59	37	15	6	0	0
20	82	54	24	15	9	0	0

(a) Casos estables para TOP^{Max} difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	22	46	64	71	88	100	100
10	26	43	64	87	98	100	100
15	17	41	63	85	94	100	100
20	18	46	76	85	91	100	100

(b) Casos inestables para TOP^{Max} difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	13	9	9	4	6	3	2
10	12	7	3	3	1	3	2
15	11	9	9	5	4	3	4
20	9	19	9	10	3	1	3

(c) Casos con inversión en la primera posición para TOP^{Max} difuso.

Tabla C.12: Resultados para TOPSIS con la transformación lineal del máximo (TOP^{Max}) difuso.

Nº of criteria (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	79	46	30	13	2	0	0
10	72	57	19	5	3	0	0
15	75	59	19	9	5	0	0
20	80	53	20	8	3	0	0

(a) Casos estables para TOP^{Vec} difuso.

Nº of criteria (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	21	54	70	87	98	100	100
10	28	43	81	95	97	100	100
15	25	41	81	91	95	100	100
20	20	47	80	92	97	100	100

(b) Casos inestables para TOP^{Vec} difuso.

Nº of criteria (n)	Nº of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	13	16	7	4	8	7	3
10	16	13	8	9	2	2	2
15	12	12	6	14	1	4	3
20	10	10	8	8	7	5	2

(c) Casos con inversión en la primera posición para TOP^{Vec} difuso.

Tabla C.13: Resultados para TOPSIS con la normalización vectorial (TOP^{Vec}) difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	53	14	0	0	0	0	0
10	39	5	0	0	0	0	0
15	35	5	0	0	0	0	0
20	30	4	0	0	0	0	0

(a) Casos estables para VIK^0 difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	47	86	100	100	100	100	100
10	61	95	100	100	100	100	100
15	65	95	100	100	100	100	100
20	70	96	100	100	100	100	100

(b) Casos inestables para VIK^0 difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	25	43	20	13	9	5	0
10	40	35	30	28	20	7	6
15	45	45	37	28	30	16	11
20	51	56	55	43	33	26	14

(c) Casos con inversión en la primera posición para VIK^0 difuso.

Tabla C.14: Resultados para VIKOR con $v = 0$ (VIK^0) difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	64	24	3	2	0	0	0
10	59	29	1	0	0	0	0
15	65	21	3	0	0	0	0
20	59	21	1	0	0	0	0

(a) Casos estables para $VIK^{0.5}$ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	36	76	97	98	100	100	100
10	41	71	99	100	100	100	100
15	35	79	97	100	100	100	100
20	41	79	99	100	100	100	100

(b) Casos inestables para $VIK^{0.5}$ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	20	31	17	8	6	5	4
10	22	23	17	14	17	6	11
15	22	29	27	23	25	17	10
20	21	41	35	39	26	16	14

(c) Casos con inversión en la primera posición para $VIK^{0.5}$ difuso.

Tabla C.15: Resultados para VIKOR con $v = 0.5$ ($VIK^{0.5}$) difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	77	46	27	13	7	0	0
10	71	51	23	9	5	0	0
15	74	53	18	12	3	0	0
20	69	36	17	5	3	0	0

(a) Casos estables para VIK¹ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	23	54	73	87	93	100	100
10	29	49	77	91	95	100	100
15	26	47	82	88	97	100	100
20	31	64	83	95	97	100	100

(b) Casos inestables para VIK¹ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	15	17	9	4	7	3	3
10	16	11	5	10	1	4	1
15	13	11	12	6	5	5	3
20	17	20	10	8	5	4	6

(c) Casos con inversión en la primera posición para VIK¹ difuso.

Tabla C.16: Resultados para VIKOR con $v = 1$ (VIK¹) difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	100	100	100	99	100	98	90
10	100	100	99	100	99	96	96
15	100	100	100	100	99	97	93
20	100	100	99	99	98	98	95

(a) Casos estables para WAS⁰ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	0	0	0	1	0	2	10
10	0	0	1	0	1	4	4
15	0	0	0	0	1	3	7
20	0	0	1	1	2	2	5

(b) Casos inestables para WAS⁰ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0

(c) Casos con inversión en la primera posición para WAS⁰ difuso.

Tabla C.17: Resultados para WASPAS con $\lambda = 0$ (WAS⁰) difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	91	77	59	40	35	3	0
10	90	73	58	48	28	1	0
15	86	82	54	36	26	1	0
20	84	84	60	40	29	0	0

(a) Casos estables para WAS^{0.5} difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	9	23	41	60	65	97	100
10	10	27	42	52	72	99	100
15	14	18	46	64	74	99	100
20	16	16	40	60	71	100	100

(b) Casos inestables para WAS^{0.5} difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	4	6	2	3	1	3	0
10	3	5	0	4	2	1	0
15	8	5	2	3	3	4	2
20	8	2	4	2	2	1	0

(c) Casos con inversión en la primera posición para WAS^{0.5} difuso.

Tabla C.18: Resultados para WASPAS con $\lambda = 0.5$ (WAS^{0.5}) difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	77	55	38	31	12	0	0
10	77	57	39	16	5	0	0
15	83	58	34	14	6	0	0
20	83	55	25	17	9	0	0

(a) Casos estables para WAS¹ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	23	45	62	69	88	100	100
10	23	43	61	84	95	100	100
15	17	42	66	86	94	100	100
20	17	45	75	83	91	100	100

(b) Casos inestables para WAS¹ difuso.

N° of criteria (n)	N° of alternatives (m)						
	3	5	10	15	20	50	100
5	13	9	9	4	6	3	2
10	10	7	3	2	1	2	2
15	11	10	10	5	4	6	4
20	9	18	9	10	2	1	3

(c) Casos con inversión en la primera posición para WAS¹ difuso.

Tabla C.19: Resultados para WASPAS con $\lambda = 1$ (WAS¹) difuso.

Bibliografía

- [1] Fuzzy mcdm package, cran.r-project.org/web/packages/fuzzymcdm/.
- [2] Ibm spss software, www.ibm.com/analytics/us/en/technology/spss.
- [3] Mcdm package, cran.r-project.org/web/packages/mcdm/.
- [4] Methodology for effective decision-making on impacts and adaptation (mediation), www.mediation-project.eu/.
- [5] Programa horizonte 2020, www.eshorizonte2020.es.
- [6] Rankaggreg package, cran.r-project.org/web/packages/rankaggreg/index.html.
- [7] Scopus data base, www.scopus.com.
- [8] The R project for statistical computing, www.r-project.org.
- [9] R. Abu-Taha. Multi-criteria applications in renewable energy analysis: A literature review. 2011.
- [10] G. Akman. Evaluating suppliers to include green supplier development programs via fuzzy c-means and vikor methods. *Computers & Industrial Engineering*, 86:69 – 82, 2015. Applications of Computational Intelligence and Fuzzy Logic to Manufacturing and Service Systems.
- [11] J. A. Alonso and M. T. Lamata. Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(04):445–459, 2006.
- [12] L. Anojkumar, M. Ilangkumaran, and V. Sasirekha. Comparative analysis of mcdm methods for pipe material selection in sugar industry. *Expert Systems with Applications*, 41(6):2964–2980, 2014.
- [13] A. Baležentis, T. Baležentis, and W.K.M. Brauers. MULTIMOORA-FG: a multi-objective decision making method for linguistic reasoning with an application to personnel selection. *Informatika*, 23(2):173–190, 2012.

-
- [14] T. Baležentis and A. Baležentis. A survey on development and applications of the multi-criteria decision making method multimoora. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 21(3-4):209–222, 2014.
- [15] J. Barzilai and B. Golany. Ahp rank reversal, normalization and aggregation rules. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 32(2):57, 1994.
- [16] V. Belton and T. Gear. On a short-coming of saaty’s method of analytic hierarchies. *Omega*, 11(3):228–230, 1983.
- [17] R. Benayoun, B. Roy, and B. Sussman. ELECTRE: Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples. *Note de travail*, 1966.
- [18] D. Bouyssou, M. Perny, A. Pirlot, and Ph. Vincke. A manifesto for the new mcda era. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 2(3):125–127, 1993.
- [19] J.P. Brans and B. Mareschal. Promethee methods. In *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, pages 163–186. Springer, 2005.
- [20] J.P. Brans, B. Mareschal, and Ph. Vincke. Promethee: A new family of outranking methods in multicriteria analysis. In *Operational Research '84, Proceedings of the Tenth International Conference.; Washington, DC, USA*, pages 477 – 490, 1984.
- [21] W. K. M. Brauers and E. K. Zavadskas. The moora method and its application to privatization in a transition economy. *Control and Cybernetics*, 35(2):445, 2006.
- [22] W. K. M. Brauers and E. K. Zavadskas. Robustness of multimoora: a method for multi-objective optimization. *Informatika*, 23(1):1–25, 2012.
- [23] H. Broekhuizen, C. G.M. Groothuis-Oudshoorn, J. A. van Til, J. M. Hummel, and M. J. IJzerman. A review and classification of approaches for dealing with uncertainty in multi-criteria decision analysis for healthcare decisions. *Pharmacoeconomics*, 33(5):445–455, 2015.
- [24] P. Brown. Maps, coordinate reference systems and visualising geographic data with mapmisc. *The R Journal*, 8(1):64–91, August 2016.
- [25] E. Bulut, O. Duru, and G. Koçak. Rotational priority investigation in fuzzy analytic hierarchy process design: An empirical study on the marine engine selection problem. *Applied Mathematical Modelling*, 39(2):913–923, 2015.

-
- [26] G. Büyüközkan and G. Çifçi. A novel hybrid mcdm approach based on fuzzy dematel, fuzzy anp and fuzzy topsis to evaluate green suppliers. *Expert Systems with Applications*, 39(3):3000–3011, 2012.
- [27] R. Caballero, T. Galache, T. Gómez, J. Molina, and A. Torrico. Budgetary allocations and efficiency in the human resources policy of a university following multiple criteria. *Economics of Education Review*, 23(1):67–74, 2004.
- [28] E. Cables, M.T. Lamata, and J.L. Verdegay. Rim-reference ideal method in multicriteria decision making. *Information Sciences*, 337:1–10, 2016.
- [29] B. Ceballos, M. T. Lamata, and D. Pelta. A comparative analysis of multi-criteria decision-making methods. *Progress in Artificial Intelligence*, 5(4):315–322, 2016.
- [30] J. Chai, J. N.K. Liu, and E.W.T. Ngai. Application of decision-making techniques in supplier selection: A systematic review of literature. *Expert Systems with Applications*, 40(10):3872–3885, 2013.
- [31] A. Charnes. Data envelopment analysis theory, methodology and applications. *Journal of the Operational Research Society*, 48(3):332–333, 1997.
- [32] A. Charnes, W. Cooper, and E. Rhodes. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6):429–444, 1978.
- [33] C.-T. Chen, P.-F. Pai, and W.-Z. Hung. Handling fuzzy decision making problem based on linguistic information and intersection concept. In *Fuzzy Systems (FUZZ), 2011 IEEE International Conference on*, pages 1504–1509. IEEE, 2011.
- [34] S.-J. Chen and C.-L. Hwang. *Fuzzy multiple attribute decision making methods*. Springer, 1992.
- [35] W.-Y. Chiu, G.-H. Tzeng, and H.-L. Li. A new hybrid mcdm model combining danp with vikor to improve e-store business. *Knowledge-Based Systems*, 37:48–61, 2013.
- [36] G. Dede, T. Kamalakis, and T. Spicopoulos. Convergence properties and practical estimation of the probability of rank reversal in pairwise comparisons for multi-criteria decision making problems. *European Journal of Operational Research*, 241(2):458 – 468, 2015.
- [37] G. Dieter. *Engineering design. A materials and processing approach*, Tokio: McGraw-Hill, 1983.

-
- [38] Y. Dong, G. Zhang, W.-C. Hong, and Y. Xu. Consensus models for ahp group decision making under row geometric mean prioritization method. *Decision Support Systems*, 49(3):281–289, 2010.
- [39] J.S. Dyer. Remarks on the analytic hierarchy process. *Management Science*, pages 249–258, march 1990.
- [40] J.S. Dyer and H.V. Ravinder. Irrelevant alternatives and the analytic hierarchy process. Technical report, Department of Management, The University of Texas at Austin, 1983.
- [41] M. Eder, J. Rybicki, and M. Kestemont. Stylometry with R: A package for computational text analysis. *The R Journal*, 8(1):107–121, August 2016.
- [42] L. Ferreira, D. Borenstein, and E. Santi. Hybrid fuzzy madm ranking procedure for better alternative discrimination. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 50:71–82, 2016.
- [43] J. Figueira, V. Mousseau, and B. Roy. Electre methods. In *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*, pages 133–153. Springer, 2005.
- [44] J. R. Figueira and B. Roy. A note on the paper, “ranking irregularities when evaluating alternatives by using some electre methods”, by wang and triantaphyllou, omega (2008). *Omega*, 37(3):731–733, 2009.
- [45] M. S. García-Cascales and M. T. Lamata. A modification of the index of liou and wang for ranking fuzzy number. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 15(4):411–424, 2007.
- [46] M. S. García-Cascales, M. T. Lamata, and J. M. Sánchez-Lozano. Evaluation of photovoltaic cells in a multi-criteria decision making process. *Annals of Operations Research*, 199(1):373–391, 2012.
- [47] M. Socorro García-Cascales and M. T. Lamata. On rank reversal and TOPSIS method. *Mathematical and Computer Modelling*, 56(5-6):123–132, 2012.
- [48] J. Geldermann and A. Schöbel. On the similarities of some multi-criteria decision analysis methods. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 18(3-4):219–230, 2011.
- [49] R. E. Giachetti and R. E. Young. A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 91(2):185–202, 1997.

-
- [50] A. Guitouni and J.-M. Martel. Tentative guidelines to help choosing an appropriate mcda method. *European Journal of Operational Research*, 109(2):501–521, 1998.
- [51] F. Hou. Rank Preserved Aggregation Rules and Application to Reliability Allocation. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 41(21):3831–3845, 2012.
- [52] S.-K. Hu, M.-T. Lu, and G.-H. Tzeng. Exploring smart phone improvements based on a hybrid mcdm model. *Expert Systems with Applications*, 41(9):4401–4413, 2014.
- [53] Hwang, C.L. and Yoon, K. *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction*. SAGE Publications, California, 1995.
- [54] C. Kahraman, S. C. Onar, and B. Oztaysi. Fuzzy multicriteria decision-making: a literature review. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 8(4):637–666, 2015.
- [55] R. Karni, P. Sanchez, and V.M. R. Tummala. A comparative study of multiattribute decision making methodologies. *Theory and Decision*, 29(3):203–222, 1990.
- [56] Keeney and H. Raiffa. *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*. New York: John Wiley and Sons, 1976.
- [57] A. Kelemenis and D. Askounis. A new topsis-based multi-criteria approach to personnel selection. *Expert Systems with Applications*, 37(7):4999–5008, 2010.
- [58] W. De Keyser and P. Peeters. A note on the use of PROMETHEE multicriteria methods. *European Journal of Operational Research*, 89(3):457–461, 1996.
- [59] G. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic*, volume 4. Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [60] G. J. Klir and T. A. Folger. *Fuzzy sets, uncertainty, and information*. Prentice Hall, 1988.
- [61] F. Kong and F. Jiang. An Improvement on Rank Reversal in FAHP. *Information Technology Journal*, 12(23):7656–7660, 2013.
- [62] G. Kou, Y. Peng, and G. Wang. Evaluation of clustering algorithms for financial risk analysis using mcdm methods. *Information Sciences*, 275:1–12, 2014.

- [63] H. Lee and C. Kim. Benchmarking of service quality with data envelopment analysis. *Expert Systems with Applications*, 41(8):3761–3768, 2014.
- [64] O. G. León. *Tomar decisiones difíciles*. Universidad Autónoma de Madrid, segunda edición edition, 2000.
- [65] J. J.H. Liou, C.-Y. Tsai, R.-H. Lin, and G.-H. Tzeng. A modified vikor multiple-criteria decision method for improving domestic airlines service quality. *Journal of Air Transport Management*, 17(2):57–61, 2011.
- [66] J. J.H. Liou, G.-H. Tzeng, et al. Comments on “multiple criteria decision making (mcdm) methods in economics: an overview”. *Technological and Economic Development of Economy*, 18(4):672–695, 2012.
- [67] R.D. Luce and H. Raiffa. *Games and decisions: Introduction and critical survey*. Courier Dover Publications, New York, 1957.
- [68] R. E. Maldonado, W. Delabastita, A. Wijffels, and J. Van Orshoven. Comparison of discrete multi-criteria decision making methods for selection of afforestation sites. In *Actes de la Conférence internationale de Géomatique et Analyse Spatiale 2012*, page 182, 2012.
- [69] H. Maleki and S. Zahir. A Comprehensive Literature Review of the Rank Reversal Phenomenon in the Analytic Hierarchy Process. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 20(3-4):141–155, 2013.
- [70] A. Mardani, A. Jusoh, M.D.K. Nor, Z. Khalifah, N. Zakwan, and A. Valipour. Multiple criteria decision-making techniques and their applications—a review of the literature from 2000 to 2014. *Economic Research-Ekonomska Istraživanja*, 28(1):516–571, 2015.
- [71] A. Mardani, A. Jusoh, and E. K. Zavadskas. Fuzzy multiple criteria decision-making techniques and applications—two decades review from 1994 to 2014. *Expert Systems with Applications*, 42(8):4126–4148, 2015.
- [72] A. Mardani, A. Jusoh, E.K. Zavadskas, Z. Khalifah, and K.M.D. Nor. Application of multiple-criteria decision-making techniques and approaches to evaluating of service quality: a systematic review of the literature. *Journal of Business Economics and Management*, 16(5):1034–1068, 2015.
- [73] A. Mardani, E. K. Zavadskas, Z. Khalifah, A. Jusoh, and K.M.D. Nor. Multiple criteria decision-making techniques in transportation systems: A systematic review of the state of the art literature. *Transport*, pages 1–27, 2015.

- [74] R. M. Martínez Ortega, L. C. Tuya Pendás, M. Martínez Ortega, A. Pérez Abreu, and A. M. Cánovas. El coeficiente de correlación de los rangos de spearman, caracterización. *Revista Habanera de Ciencias Médicas*, 8(2):0–0, 2009.
- [75] K. Mela, T. Tiainen, and M. Heinisuo. Comparative study of multiple criteria decision making methods for building design. *Advanced Engineering Informatics*, 26(4):716–726, 2012.
- [76] T. Miranda Lakshmi, V. Prasanna Venkatesan, and A. Martin. A hybrid model of topsis with saw to identify a better college for students. *International Journal of Applied Engineering Research*, 10(20):19250–19255, 2015.
- [77] M.N. Mokhtarian, S. Sadi-nezhad, and A. Makui. A new flexible and reliable interval valued fuzzy {VIKOR} method based on uncertainty risk reduction in decision making process: An application for determining a suitable location for digging some pits for municipal wet waste landfill. *Computers & Industrial Engineering*, 78:213 – 233, 2014.
- [78] K. Nishizawa. Normalization method based on dummy alternative with perfect evaluation score in ahp and anp. In *Intelligent Decision Technologies*, pages 253–262. Springer, 2012.
- [79] S. Opricovic. Fuzzy vikor with an application to water resources planning. *Expert Systems with Applications*, 38(10):12983–12990, 2011.
- [80] S. Opricovic and G.-H. Tzeng. Multicriteria planning of post-earthquake sustainable reconstruction. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 17(3):211–220, 2002.
- [81] S. Opricovic and G.H. Tzeng. Compromise solution by mcdm methods: A comparative analysis of vikor and topsis. *European Journal of Operational Research*, 156(2):445–455, 2004.
- [82] V. Pareto. Course of political economy, 1896.
- [83] H. Pastijn and J. Leysen. Constructing an outranking relation with oreste. *Mathematical and Computer Modelling*, 12(10-11):1255–1268, 1989.
- [84] Y. Peng. Regional earthquake vulnerability assessment using a combination of mcdm methods. *Annals of Operations Research*, 234(1):95–110, 2015.
- [85] A. Piegat and W. Sałabun. Comparative analysis of mcdm methods for assessing the severity of chronic liver disease. In *Artificial Intelligence and Soft Computing*, pages 228–238. Springer, 2015.

-
- [86] V. Pihur, S. Datta, and S. Datta. Weighted rank aggregation of cluster validation measures: a monte carlo cross-entropy approach. *Bioinformatics*, 23(13):1607–1615, 2007.
- [87] A. Rikalovic, I. Cosic, and D. Lazarevic. Gis based multi-criteria analysis for industrial site selection. *Procedia Engineering*, 69:1054–1063, 2014.
- [88] N. Robinson-García, E. Jiménez-Contreras, and E. Delgado López-Cózar. Las universidades españolas en los principales rankings de universidades: 2013. 2013.
- [89] J. Roland, Y. De Smet, and C. Verly. Rank reversal as a source of uncertainty and manipulation in the promethee ii ranking: A first investigation. In *Advances in Computational Intelligence*, pages 338–346. Springer, 2012.
- [90] C. Romero. *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial S.A., 1993.
- [91] E. Roszkowska and T. Wachowicz. Application of fuzzy topsis to scoring the negotiation offers in ill-structured negotiation problems. *European Journal of Operational Research*, 242(3):920–932, 2015.
- [92] E. Roszkowska and T. Wachowicz. Application of fuzzy TOPSIS to scoring the negotiation offers in ill-structured negotiation problems. *European Journal of Operational Research*, 242(3):920–932, 2015.
- [93] B. Roy. Classement et choix en présence de points de vue multiples. *Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, 2(1):57–75, 1968.
- [94] T. L. Saaty. *Fundamentals of decision making and priority theory with the AHP*. RWS Publications, Pittsburgh, 1994.
- [95] T. L. Saaty and D. Ergu. When is a decision-making method trustworthy? criteria for evaluating multi-criteria decision-making methods. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, pages 1–17, 2015.
- [96] T. L. Saaty and M. Sagir. An essay on rank preservation and reversal. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(5-6):1230–1243, 2009.
- [97] T.L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [98] T.L. Saaty and L.G. Vargas. The legitimacy of rank reversal. *Omega*, 12(5):513–516, 1984.

-
- [99] W. Sałabun. The characteristic objects method: A new distance-based approach to multicriteria decision-making problems. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 22(1-2):37–50, 2015.
- [100] J.R. San Cristóbal. Multi-criteria decision-making in the selection of a renewable energy project in Spain: the VIKOR method. *Renewable Energy*, 36(2):498–502, 2011.
- [101] J. Šaparauskas, E. K. Zavadskas, and Z. Turskis. Selection of facade's alternatives of commercial and public buildings based on multiple criteria. *International Journal of Strategic Property Management*, 15(2):189–203, 2011.
- [102] J. Shetty and D. A. D'Mello. Quality of service driven cloud service ranking and selection algorithm using Rembrandt approach. In *Smart Technologies and Management for Computing, Communication, Controls, Energy and Materials (ICSTM), 2015 International Conference on*, pages 126–132. IEEE, 2015.
- [103] M. Soltanifar and S. Shahghobadi. Survey on rank preservation and rank reversal in data envelopment analysis. *Knowledge-Based Systems*, 60:10–19, 2014.
- [104] X. Su, S. Mahadevan, P. Xu, and Y. Deng. Dependence assessment in human reliability analysis using evidence theory and AHP. *Risk Analysis*, 35(7):1296–1316, 2015.
- [105] S. Suganthi, L. Iniyar, and A.A. Samuel. Applications of fuzzy logic in renewable energy systems—a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 48:585–607, 2015.
- [106] I.L. Tomashevskii. Eigenvector ranking method as a measuring tool: Formulas for errors. *European Journal of Operational Research*, 240(3):774–780, 2015.
- [107] E. Triantaphyllou. Multi-criteria decision making methods. In *Multi-criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*. Springer, 2000.
- [108] E. Triantaphyllou and C.-T. Lin. Development and evaluation of five fuzzy multiattribute decision-making methods. *International Journal of Approximate Reasoning*, 14(4):281–310, 1996.
- [109] E. Triantaphyllou and S.H. Mann. An examination of the effectiveness of multi-dimensional decision-making methods: a decision-making paradox. *Decision Support Systems*, 5(3):303–312, 1989.

-
- [110] M. D. Troutt. Rank reversal and the dependence of priorities on the underlying MAV function. *Omega*, 16(4):365–367, 1988.
- [111] Z. Turskis, E. K. Zavadskas, J. Antucheviciene, and N. Kosareva. A hybrid model based on fuzzy ahp and fuzzy waspas for construction site selection. *International Journal of Computers Communications & Control*, 10(6):113–128, 2015.
- [112] O. S. Vaidya and S. Kumar. Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*, 169(1):1–29, 2006.
- [113] M. Velasquez and P. T. Hester. An analysis of multi-criteria decision making methods. *International Journal of Operations Research*, 10(2):56–66, 2013.
- [114] J. L. Verdegay, R. R. Yager, and P. P. Bonissone. On heuristics as a fundamental constituent of soft computing. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(7):846–855, 2008.
- [115] C. Verly and Y. Smet. Some results about rank reversal instances in the PROMETHEE methods. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, 3(4):325–345, 2013.
- [116] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1947.
- [117] T.C. Wang and T.H. Chang. Application of topsis in evaluating initial training aircraft under a fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*, 33(4):870–880, 2007.
- [118] X. Wang and E. Triantaphyllou. Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods. *Omega*, 36(1):45–63, 2008.
- [119] Y. Wang and Y. Luo. On rank reversal in decision analysis. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(5-6):1221–1229, 2009.
- [120] Y.-L. Wang and G.-H. Tzeng. Brand marketing for creating brand value based on a mcdm model combining dematel with anp and vikor methods. *Expert Systems with Applications*, 39(5):5600–5615, 2012.
- [121] L.J. Yan, Z.B. Li, W.K. Xi, and X.Y. Yuan. Group-based product scheme-screening decision method based on fuzzy ahp and evidential reasoning theory. *International Journal of Production Research*, 50(1):133–159, 2012.

- [122] Y.-P. O. Yang, H.-M. Shieh, J.-D. Leu, and G.-H. Tzeng. A novel hybrid mcdm model combined with dematel and anp with applications. *International Journal of Operations Research*, 5(3):160–168, 2008.
- [123] A. Yildiz and A.Y. Yayla. Multi-criteria decision-making methods for supplier selection: A literature review. *South African Journal of Industrial Engineering*, 26(2):158–177, 2015.
- [124] P.-L. Yu. A class of solutions for group decision problems. *Management Science*, 19(8):936–946, 1973.
- [125] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.
- [126] L. A. Zadeh. Soft computing and fuzzy logic. *IEEE software*, 11(6):48, 1994.
- [127] L. A. Zadeh. Applied soft computing; foreword. *Applied Soft Computing*, 1(1):1–2, 2001.
- [128] S. H. Zanakis, A. Solomon, N. Wishart, and S. Dublish. Multi-attribute decision making: A simulation comparison of select methods. *European Journal of Operational Research*, 107(3):507–529, 1998.
- [129] E. K. Zavadskas, Z. Turskis, and S. Kildienė. State of art surveys of overviews on mcdm/madm methods. *Technological and Economic Development of Economy*, 20(1):165–179, 2014.
- [130] E.K. Zavadskas and Z. Turskis. Multiple criteria decision making (mcdm) methods in economics: An overview. *Technological and Economic Development of Economy*, 17(2):397–427, 2011.
- [131] E.K. Zavadskas, Z. Turskis, J. Antucheviciene, and A. Zakarevicius. Optimization of weighted aggregated sum product assessment. *Elektronika ir elektrotechnika*, 122(6):3–6, 2012.
- [132] M. Zeleny. *Multiple criteria decision making*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [133] Q.-L. Zeng, D.-D. Li, and Y.-B. Yang. Vikor method with enhanced accuracy for multiple criteria decision making in healthcare management. *Journal of Medical Systems*, 37(2):1–9, 2013.
- [134] S. H. Zolfani, I-S. Chen, N. Rezaeiniya, J. Tamošaitienė, et al. A hybrid mcdm model encompassing ahp and copras-g methods for selecting company supplier in iran. *Technological and Economic Development of Economy*, 18(3):529–543, 2012.