

UNA ESTRATEGIA DE ACELERACIÓN BASADA EN SUBMUESTREO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE PUENTES DE FERROCARRIL DE ALTA VELOCIDAD.

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Por
Omar Mohamed Mohamed
Ingeniero Civil

Director
Alejandro E. Martínez Castro

Departamento de Mecánica de Estructuras ,
Universidad de Granada
Edificio Politécnico Fuentenueva, C/ Severo Ochoa s/n, CP 18002
Granada (España)

Octubre de 2016

© Copyright 2016
por
Omar Mohamed Mohamed

Resumen

La finalidad de este proyecto es introducir una estrategia de aceleración en el cálculo dinámico de puentes de ferrocarril de alta velocidad. La estrategia de aceleración propuesta consiste en el submuestreo de la línea de carga, combinado con una solución semianalítica al problema de paso de cargas móviles sobre un puente.

Para plantear un caso de estudio realista, se ha seleccionado un puente recto de sección cajón, preparado para doble vía. El viaducto se denomina "Viaducto del Rodenilloz" y se ubica en la línea de alta velocidad Madrid-Levante.

La modelización ha sido llevada a cabo mediante el programa SAP2000, y el uso de un software independiente de análisis dinámico mediante solución semianalítica en el tiempo al problema de paso de cargas móviles.

Los resultados obtenidos demuestran que la reducción de tiempos es considerable, con un alto grado de fiabilidad. A partir de los mismos se verifica la estrategia propuesta.

Abstract

The purpose of this project is to introduce a strategy of acceleration in the dynamic calculation bridges of high speed railways. The strategy of acceleration proposal consists in the subsampling of the load line, combined with a semi-analitic solution to the problem of step of the moving loads on a bridge.

For raise a realistic case study, has selected a straight bridge of box section, prepared for double track. The viaduct is called "Viaduct of Rodenillo is located in the high-speed line Madrid-Levante.

The modelling has been carried out using the program SAP2000, and the use of a separate software of dynamic analysis with semi-analitic solution in time to the problem of step of moving loads.

The results obtained show that the reduction of times is considerable, with a high degree of reliability. As of the same it verified the proposed strategy.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a mis padres, Abdelkrin y Erhimo, por el apoyo incondicional que me muestran cada día, por saber animarme en los peores momentos y depositar la confianza y el cariño adquirido durante todos estos años.

Por otro lado, querría mostrar mi especial agradecimiento al profesor y tutor Alejandro Martínez Castro, por su paciencia y compromiso tanto profesional como personal. A pesar de los inconvenientes surgidos durante la realización del trabajo fin de máster, supimos valorar la situación y terminarlo. Me gustaría destacar los conocimientos obtenidos durante la realización del mismo, teniendo cada día mas claro que es el ámbito en el que me gustaría ejercer mi carrera profesional.

Finalmente, tampoco podría olvidar el apoyo de mi hermana y el de mis amigos, en especial a mi amigo y compañero Esteban, por hacerme ver el lado positivo de las cosas y el apoyo recibido durante la realización de este proyecto.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Agradecimientos	VII
Capítulo 1. Introducción, objetivos y metodología.	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Motivación y problemática existente.	1
1.2. Objetivos.	4
1.3. Metodología.	4
Capítulo 2. El Método Semianalítico en dinámica.	7
2.1. Introducción.	7
2.2. Ecuación de gobierno.	8
2.3. Discretización espacial para un elemento barra.	10
2.4. Resolución.	15
2.5. Generalización del método.	18
2.6. Ventajas del método semianalítico.	19
2.7. Test de validación.	21
2.7.1. Planteamiento.	21
2.7.2. Viga de tres vanos.	21
Capítulo 3. Análisis Dinámico.	27
3.1. Descripción de la estructura.	27
3.2. Método de Cálculo.	27
3.3. Modelización de la estructura.	28
3.3.1. Propiedades de los materiales y descripción de cargas.	29
3.4. Acciones.	34
3.5. Puntos para cálculo de resultados.	34
Capítulo 4. Resultados.	37
4.1. Resultados a obtener y comprobaciones a realizar.	37
4.2. Resultados.	37
4.2.1. Frecuencias propias y modos de vibración.	37
4.2.2. Valores máximos y valores límite.	45
4.2.3. Curvas envolventes de aceleraciones máximas.	47
4.2.4. Curvas envolventes de desplazamientos máximos.	48

Capítulo 5. Comparativa y conclusiones.	49
5.1. Comparativa de resultados.	49
5.2. Conclusiones.	51
Bibliografía	52

Índice de cuadros

2.1. Frecuencias propias de la viga de estudio.	22
3.1. Propiedades de los materiales	29
4.1. Frecuencias propias.	38
5.1. Comparativa de aceleraciones para cada tipo de discretización.	49
5.2. Comparativa de desplazamientos para cada tipo de discretización.	49

Índice de figuras

1.1. Líneas de alta velocidad en Europa (<i>Diciembre 2014</i>).	2
1.2. Descripción de modo de vibración de un elemento.	3
2.1. Esquema de carga móvil sobre viga de sección variable.	8
2.2. Criterio de signos.	8
2.3. Equilibrio de fuerzas.	9
2.4. Equilibrio de momentos.	9
2.5. Elemento aislado.	10
2.6. Esquema de línea de carga y puntos de postproceso en estructura.	19
2.7. Geometría de la viga.	21
2.8. Ejemplo de modo de vibración 11.	22
2.9. Paso de cargas mediante el Método de Newmark.	23
2.10. Paso de cargas mediante el Método Semianalítico.	24
2.11. Comparación entre los distintos métodos de paso de cargas.	25
3.1. Sección recta del modelo y línea media de la sección.	27
3.2. Malla de elementos finitos en la zona del estribo inicial.	28
3.3. Franjas longitudinales de elementos en los que se reparten las cargas permanentes.	30
3.4. Primer vano del Viaducto del Rodenillo modelizado.	30
3.5. Sup35ext con un espesor de 35 cm.	30
3.6. Sup35int con un espesor de 35 cm.	30
3.7. Losa sinbal con un espesor de 50 cm.	31
3.8. Losa regruese con un espesor de 80 cm.	31
3.9. Sup35ba con un espesor de 35 cm.	31
3.10. Almas con un espesor de 50 cm.	31
3.11. Tabinfe con un espesor de 30 cm.	31
3.12. Mamparos o riostras con espesor de 50 cm.	32
3.13. Vista en planta de losa superior e inferior: situación y dirección de los apoyos.	33
3.14. Puntos para cálculo de resultados.	35
4.1. Primer modo de vibración (2.4753 Hz).	39
4.2. Segundo modo de vibración (2.8504 Hz).	40
4.3. Tercer modo de vibración (3.2638 Hz).	41
4.4. Séptimo modo de vibración (5.8397 Hz).	42
4.5. Modo de vibración nº18 (9.5795 Hz).	43
4.6. Modo de vibración nº111 (27.1665 Hz).	44
4.7. Máxima aceleración en el punto 33.	47
4.8. Máxima aceleración en el punto 33.	47
4.9. Máximo desplazamiento en el punto 58.	48
4.10. Máximo desplazamiento en el punto 58.	48
5.1. Comparativa de las aceleraciones para cada submuestreo.	50

5.2. Comparativa de los desplazamientos para cada submuestreo. 50

CAPÍTULO 1

Introducción, objetivos y metodología.

1.1. Introducción

1.1.1. *Motivación y problemática existente.*

El contexto socio-cultural y político-económico juega un papel fundamental en los inicios de la alta velocidad ferroviaria, determinando su forma e impacto sobre el espacio. Por tanto, a medida que estos se han ido desarrollando, la alta velocidad se ha revelado para el transporte de viajeros como una alternativa al avión y al transporte por carretera, descongestionando de esta manera el tráfico aéreo y por carretera. A su vez, se reducen los costes de explotación y contaminación.

La velocidad que alcanzan estos nuevos trenes varía dependiendo de si las líneas son de nueva construcción con velocidades superiores a 250 km/h, o en líneas convencionales actualizadas con velocidades de 200 km/h. El aumento de la velocidad y la contingencia de proporcionar comodidades a las distintas ciudades han permitido una mejora de la calidad del servicio, que se deja sentir en la reducción del tiempo de viaje, el confort, la seguridad y el acceso a diversos servicios. Sin embargo, esta mejora no siempre se experimenta ya que concierne a las frecuencias.

Los primeros trenes de alta velocidad entraron en servicio en Japón en Abril de 1964, con la construcción de la primera línea de alta velocidad, Tokaido Shinkansen, una línea que conectaba la capital del país con la ciudad de Osaka, la cual fue un éxito inmediato. También cabe destacar China, con aproximadamente 7000 km construidos de red de alta velocidad.

En Europa, Italia inauguró su primera línea Roma-Florenia en Febrero de 1977, pero solo estaba construida media línea, la cual fue terminada en Mayo de 1992. Francia desempeña un papel fundamental en el sector de la alta velocidad europea, en Septiembre de 1981 el TGV empezó a funcionar en la línea entre París y Lyon. El TGV alcanza los 320 km/h en ciertos tramos.

En 1992, la alta velocidad ferroviaria se hace eco en España. En Abril de ese mismo año se ponen en marcha los 471 km de la línea de Madrid-Sevilla y la marca AVE (Alta Velocidad Española). Actualmente, España cuenta con más de 3100 km en servicio, la experiencia obtenida durante todos estos años ha permitido desarrollar uno de los ferrocarriles de alta velocidad más modernos y avanzados del mundo. Los últimos planes de infraestructuras y el Plan Estratégico de Infraestructuras del sector transporte han apostado por mayores inversiones sobre el ferrocarril frente a la carretera con la ejecución de las obras de las distintas líneas construidas.

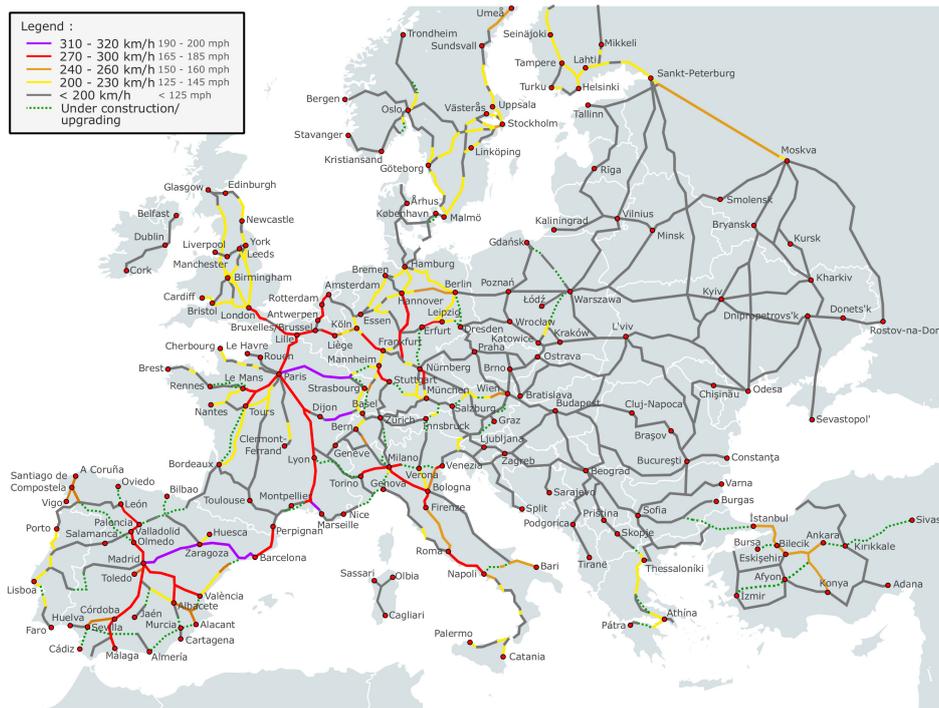


Figura 1.1: Líneas de alta velocidad en Europa (Diciembre 2014).

En el plano tecnológico, España es precursora en el sector I+D+i ferroviario, mediante la innovación en infraestructura, señalización, electrificación y material rodante.

A finales de de 2007 se abrió el tráfico ferroviario el viaducto de Arroyo de las Piedras, primer viaducto mixto en las líneas de alta velocidad españolas. Actualmente, aunque las soluciones de hormigón siguen siendo claramente predominantes e nuestro país, se están proyectando y construyendo varios viaductos mixtos que permiten resolver, técnica y económicamente, condiciones ciertamente singulares para los que las alternativas de hormigón resultan inadecuadas. En Francia, las líneas de TGV Est, que une París con Estrasburgo, se ha optado por soluciones mixtas en el 100 % de los viaductos de luces medias y altas.

Con respecto a la problemática existente, nos centraremos en la resonancia, objeto de estudio fundamental en la ingeniería de puentes, y la degradación de la capa de balasto por el paso de cargas móviles, material que juega un importante papel en las vías de tren, de ahí a su exhausto mantenimiento de la calidad de la vía sobre el balasto.

Resonancia en puentes de ferrocarril

Los fenómenos de resonancia se producen cuando la frecuencia de excitación dinámica debida a las cargas o algún múltiplo de ella coincide con alguna frecuencia propia de la estructura. Los puentes de ferrocarril se han ido dimensionado sin considerar la posibilidad de aparición de dichos efectos, empleando desde hace décadas métodos estáticos basados en el denominado coeficiente de impacto.

La resonancia en un puente puede generar esfuerzos superiores a los admisibles de proyecto y alterar las condiciones de circulación del tráfico. Estos efectos han obligado a las administraciones a limitar los valores de las aceleraciones o prescribir la obligatoriedad de realizar cálculos en el proyecto de puentes que se encuentren en líneas con velocidades superiores a 200 km/h.

Un efecto muy nocivo que puede introducir resonancia en los puentes de ferrocarril de alta velocidad son problemas de desconsolidación de balasto. Por ello, es importante como reacciona la estructura ante el paso de las cargas móviles, y en que características de la estructura hay que trabajar para modificar su comportamiento, con el fin de evitar la degradación de las características de las vías y los posibles riesgos para los pasajeros.

Degradación de la capa de balasto por el paso de cargas móviles.

En puentes de ferrocarril de alta velocidad, las vibraciones cíclicas en torno a 30 Hz provocan problemas de desconsolidación de balasto. La aparición de irregularidades en la geometría de la vía puede llegar a descarrilar el propio tren, pudiendo perder la garantía del buen funcionamiento del servicio ferroviario. El balasto amortigua y absorbe los esfuerzos, sufriendo vibraciones que pueden llegar a licuefactarlo, descompactando los granos y disminuyendo su capacidad portante.

Otro problema derivado es el efecto del shatterflug o "vuelo de balasto". Cuando las velocidades son superiores a 300 km/h se crean en la zona de los bogies y bajos del tren, flujos de aire turbulentos tales que puedan llegar a levantar partículas superficiales de la capa de balasto, impactando estos en las ruedas y bajos, dañando tanto la vía como el vehículo.

Para llevar a cabo este cálculo dinámico necesitamos conocer la solución semianalítica. Este método fue desarrollado por Alejandro Martínez, Pedro Museros y Alejandro Castillo, en el departamento de Mecánica de Estructuras de la Universidad de Granada [5].

El método semianalítico necesita de una serie de datos para poder llevar a cabo el cálculo dinámico de puentes. Uno de los parámetros que necesitamos conocer es la discretización de la línea de carga, a partir de la misma se van describiendo los modos de vibración. Desde el punto de vista computacional, cuando mayor sea el número de datos a almacenar, mayor será la precisión de los resultados. En este caso, se pretende submuestrear la línea de carga cada seis metros, cuando este método está planteado para usar la misma resolución que la empleada para el correspondiente análisis modal. El objetivo de este estudio será analizar los resultados y compararlos, observando las diferencias existentes en sendos submuestreos.

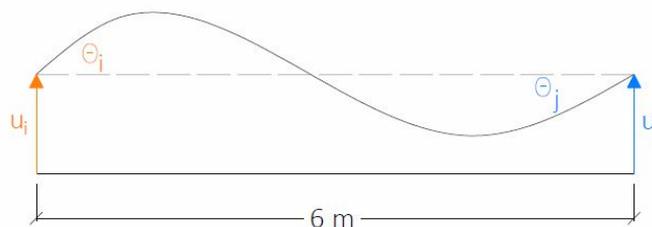


Figura 1.2: Descripción de modo de vibración de un elemento.

1.2. Objetivos.

Los objetivos del presente proyecto se resumen en los siguientes puntos:

1. Estudio de los resultados obtenidos submuestreando con una línea de carga cada seis metros.
2. Discusión y comparativa de resultados obtenidos con el submuestreo cada 3 metros, demostrando la validez que conlleva el estudio realizado. El submuestreo a tres metros se ha seleccionado porque es el que se requiere para comprobar alabeos.

1.3. Metodología.

La metodología a seguir será la siguiente:

1. Modelización y análisis modal de la estructura a estudiar mediante el software SAP2000, análisis que servirá de base espacial para la posterior solución semianalítica.
2. Aplicación de un entorno de cálculo intensivo, para el análisis dinámico mediante el método semianalítico. Se calibrará dicha metodología con los métodos clásicos paso a paso mediante el software SAP2000.
3. Comparación y verificación de los resultados.

CAPÍTULO 2

El Método Semianalítico en dinámica.

2.1. Introducción.

En la ingeniería de puentes de ferrocarril es de altísimo interés el estudio del paso de cargas móviles en vigas. Los primeros análisis se realizaron sobre vigas isostáticas simplemente apoyadas apareciendo soluciones analíticas como las desarrolladas en los trabajos de Kryloff [3] y Bleich [2]. Estos tipos de soluciones se basan en métodos de separación de variables, de modo que la solución en desplazamientos queda definida sobre una suma finita de productos entre funciones espaciales y temporales. En el caso de vigas continuas el número de trabajos es muy inferior y están basados en la asunción de vigas de canto constante a tramos, métodos de la rigidez dinámica [4] o para casos particulares de carga, que en cualquier caso, adolecen de no tener aplicación en estructuras reales, mucho más complejas, bien por venir dadas en forma de series infinitas, bien por no considerar cantos variables o bien por integrar de forma aproximada la serie temporal. Resultando, en general, ineficaces soluciones para vigas en casos genéricos donde se ha de considerar el efecto de la deformación por cortante y arrastre por cortante, torsión combinada con flexión, efectos locales de flexión con secciones cajón o artesa, ortotropías...etc.

En las oficinas de proyectos, de forma generalizada y contemplada por la Instrucción de Acciones en Puentes de Ferrocarril (IAPF-2010) [1], la resolución práctica de este tipo de problemas se ha llevado a cabo de forma clásica mediante modelos de cargas puntuales sin interacción vehículo-estructura. Dichas cargas se modelizan mediante un conjunto de fuerzas constantes viajando a la velocidad del tren. El problema planteado es lineal por lo que el método de superposición modal permite trabajar sobre las ecuaciones modales desacopladas, para posteriormente plantear la solución separando las variables espaciales y temporales. Por una parte, las formas modales y frecuencias naturales de vibración se hallan resolviendo el problema de autovalores de una configuración espacial aproximada mediante elementos finitos, y por otra, la parte espacial se integra mediante métodos paso a paso. Es, en esta segunda parte del problema, donde, como ya se comentó en el capítulo anterior, se adolece de una mayor falta de precisión, siendo el método Semianalítico la mejora definitiva al eliminar por completo el tratamiento numérico aproximado de la dimensión temporal.

El método Semianalítico, desarrollado por *A.Martínez-Castro, P.Museros y A.Castillo- Linares*, (Universidad de Granada) y publicado en la revista *Journal of Sound and Vibration* [5], basándose en el modelo de viga Euler-Bernoulli propone una solución al problema de paso de cargas móviles sobre vigas [6] basándose en la misma superposición modal y discretización de la parte espacial, mediante elementos finitos, aunque esta metodología trabaja con soluciones analíticas exactas en la parte temporal. Este método sigue teniendo una aproximación numérica, procedente de la discretización espacial mediante el modelo de Elementos Finitos, no obstante, se eliminan importantes fuentes de error asociadas al paso de tiempo usado en los métodos de integración directa clásicos. Los autores

también han presentado en congreso nuevos elementos para el cálculo de placas rectas y esviadas [7].

En lo que sigue, se desarrollará la formulación del método así como su aplicación a casos prácticos que, junto con un análisis de los métodos de aproximación paso a paso, nos permitirán comparar ambos métodos en aproximación y tiempo de cálculo. Como quedará patente, esta metodología aventaja en mucho a los métodos tradicionales de integración paso a paso, salvando los problemas de imprecisión y lentitud en el cálculo de estos últimos. En la actualidad, los métodos de integración paso a paso se emplean ampliamente en proyectos de puentes, no obstante, ante la complejidad de cálculo numérico que supone su aplicación a las exigencias y bajas tasas de amortiguamiento impuestos por la normativa IAPF-10 [1], deberán ser sustituidos irremediamente en un futuro próximo.

2.2. Ecuación de gobierno.

Se considera una viga de sección variable, sometida a una carga p_0 que se desplaza por el eje longitudinal de la viga, x , a velocidad constante v :

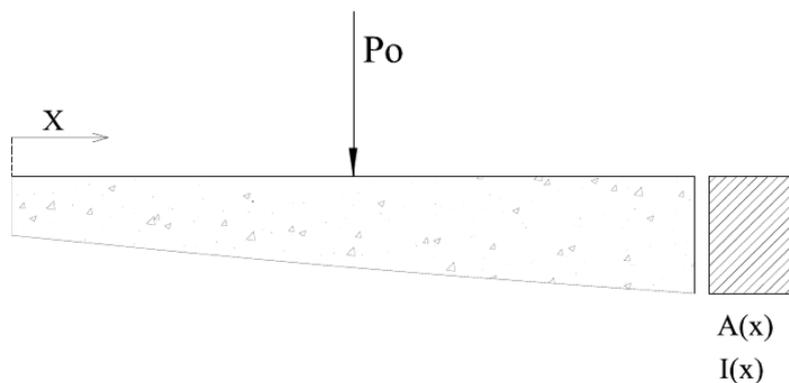


Figura 2.1: Esquema de carga móvil sobre viga de sección variable.

Planteando el equilibrio en la rebanada mediante el principio de D'Alembert, despreciando en principio, la contribución del amortiguamiento:

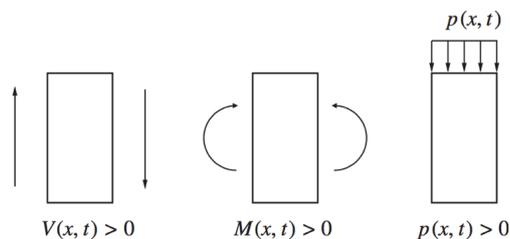


Figura 2.2: Criterio de signos.

■ Equilibrio de fuerzas:

$$-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Siendo δ la función Delta de Dirac, para imponer la distribución puntual de la carga aplicada con velocidad v , x la coordenada curvilínea de la línea de carga ($x \ni [0,L]$) y $\rho(x)$ la densidad lineal [$\frac{M}{L}$].

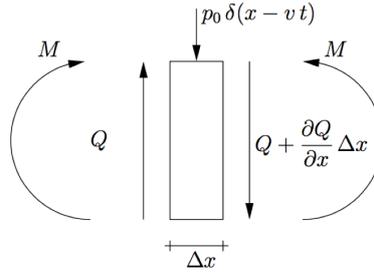


Figura 2.3: Equilibrio de fuerzas.

■ Equilibrio de momentos:

$$\partial M(x,t) = Q(x,t) \partial x \Rightarrow \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = Q(x,t) \quad (2.2)$$

Si sustituimos 3.2 en 3.1:

$$-\frac{\partial(\frac{\partial M(x,t)}{\partial x})}{\partial x} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

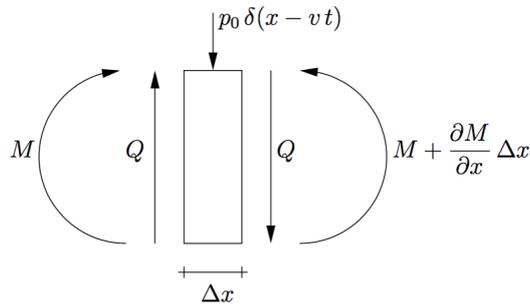


Figura 2.4: Equilibrio de momentos.

Como ecuación constitutiva nos apoyamos en la ecuación de Euler-Bernouilli en la que se adopta la relación lineal momento-curvatura:

$$\frac{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{M(x,t)}{EI(x)} \quad (2.5)$$

$$M(x,t) = EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Ecuación que una vez sustituida en 3.4, podremos obtener la ecuación de gobierno del problema:

$$\frac{\partial^2 EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}{\partial x^2} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} EI(x) \right]'' + p_0 \cdot \delta(x - vt) = 0 \quad (2.8)$$

Ecuación diferencial que deberemos resolver supuestas condiciones iniciales de reposo:

$$u(s,0) = 0 \quad \forall x \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall x \quad (2.10)$$

2.3. Discretización espacial para un elemento barra.

Considérese la figura 3.2, en la cual se representa un elemento viga de longitud L sometido a fuerzas y momentos de tres tipos:

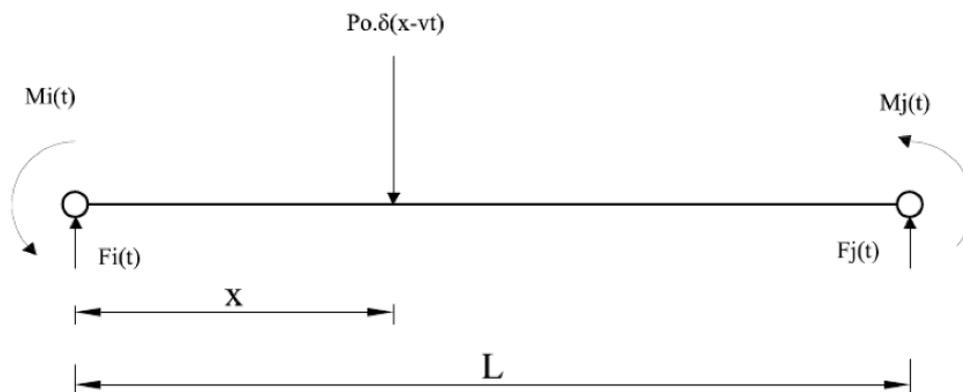


Figura 2.5: Elemento aislado.

■ **Fuerzas externas:**

1. Fuerzas y momentos nodales:

Teniendo en cuenta el criterio de signos de la figura:

$$F_i^b = Q(0, t) \quad (2.11)$$

$$F_j^b = -Q(L, t) \quad (2.12)$$

$$M_i^b = -M(0, t) \quad (2.13)$$

$$M_j^b = M(L, t) \quad (2.14)$$

2. Fuerza puntual:

$$p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (2.15)$$

3. Fuerza de inercia:

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

■ **Esfuerzos.**

1. Cortantes:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = -p_0 \cdot \delta(x - vt) - \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Que integrándola entre 0 y $x \in [0, L]$:

$$Q(x, t) = Q(0, t) - \int_0^x p_0 \cdot \delta(\xi - vt) d\xi - \int_0^x \rho(\xi) \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \quad (2.18)$$

2. Flectores:

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = Q(x, t) \cdot dx \quad (2.19)$$

$$M(x, t) = M(0, t) + \int_0^x Q(\xi, t) d\xi \quad (2.20)$$

En este punto, aplicando los conceptos de elementos finitos, pasamos a la formulación débil de la ecuación de Euler-Bernouilli de la viga multiplicando por una función de ponderación espacial, $u^*(x)$, y aplicando integración por partes:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u'(x, t) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \dot{u}(x, t) \quad (2.22)$$

Si multiplicamos 3.8 por $u^*(x)$:

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) + (u''(x, t) \cdot EI(x))'' = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (2.23)$$

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) + (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) \quad (2.24)$$

Integrando en el dominio:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx &= \\ = - \int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) dx & \end{aligned} \quad (2.25)$$

Podremos aplicar doble integración por partes en el segundo sumando del primer término:

$$\begin{aligned} & \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx = \\ = u^*(x) \cdot (u''(x, t) \cdot EI(x))' \Big|_0^L - \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))' \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} dx &= \\ = u^*(x) \cdot (u''(x, t) \cdot EI(x))' \Big|_0^L - (u''(x, t) \cdot EI(x)) \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \Big|_0^L + & \\ + \int_0^L u''(x, t) \cdot EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} dx & \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si nos fijamos en algunos de los sumandos de la expresión anterior podremos identificar fácilmente (por la relación Movimiento-Curvatura de Euler-Bernouilli):

$$Q(x, t) = (u'' \cdot EI(x))' \quad (2.27)$$

$$M(x, t) = u'' \cdot EI(x) \quad (2.28)$$

Con lo cual, y teniendo en cuenta las relaciones anteriores, 3.27 y 3.28:

$$\begin{aligned} (u'' \cdot EI(x))' \cdot u^*(x) \Big|_0^L &= Q(L, t) \cdot u^*(x) \Big|_0^L = \\ = Q(L, t) \cdot u^*(L) - Q(0, t) \cdot u^*(0) &= -F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} u'' \cdot EI(x) \cdot \frac{\partial u^*(s)}{\partial x} \Big|_0^L &= \\ = -M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_L - M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0 & \end{aligned} \quad (2.30)$$

Con lo que la ecuación 3.26 resultaría:

$$\int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx = \int_0^L u''(x, t) \cdot EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) - M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0 \quad (2.31)$$

En cuanto al segundo miembro de la ecuación 3.25:

$$\int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) dx = p_0 \cdot u^*(vt) \quad (2.32)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función Delta de Dirac. Por lo tanto, si sustituimos las ecuaciones 3.31 y 3.32 en la ecuación 3.25 obtendremos:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx = \\ & = F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0 - p_0 \cdot u^*(vt) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Expresión de la que no se ha impuesto condición alguna sobre $u^*(x)$ más que continuidad y derivabilidad. Por ello, y continuando con los conceptos básicos de elementos finitos, consideraremos una base de los polinimos de grado menos o igual a 3 de Hermite, pues discretizaremos los elementos barra por dos nodos extremos con 4 grados de libertad, dos de desplazamientos y otros dos de giro. Supondremos que $u(x, t)$, del elemento, puede representarse de forma exacta como una combinación lineal de la base de los polinomos anteriormente indicada. Por ello:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^4 y_n(t) \cdot h_n(x) \quad (2.34)$$

Siendo las expresiones de los polinomos de Hermite:

$$[U_i] \rightarrow h_1(x) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (2.35)$$

$$[\theta_i] \rightarrow h_2(x) = L \cdot \left[\frac{x}{L} - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \quad (2.36)$$

$$[U_j] \rightarrow h_3(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (2.37)$$

$$[\theta_j] \rightarrow h_4(x) = L \cdot \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \quad (2.38)$$

Si desarrollamos la ecuación 3.34 usando las relaciones anteriores:

$$u(x, t) = y_i \cdot h_1 + \theta_i \cdot h_2(x) + y_j \cdot h_3 + \theta_j \cdot h_4(x) \quad (2.39)$$

De modo que podremos obtener la velocidad y la aceleración:

$$u(\dot{x}, t) = \dot{y}_i \cdot h_1 + \dot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \dot{y}_j \cdot h_3 + \dot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (2.40)$$

$$u(\dot{x}, t) = \sum_{n=1}^4 \dot{y}_n \cdot h_n(x) \quad (2.41)$$

$$u(\ddot{x}, t) = \ddot{y}_i \cdot h_1 + \ddot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \ddot{y}_j \cdot h_3 + \ddot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (2.42)$$

$$u(\ddot{x}, t) = \sum_{n=1}^4 \ddot{y}_n \cdot h_n(x) \quad (2.43)$$

Si además tomamos como funciones de ponderación $u^*(x)$ las propias funciones de Hermite:

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho(x) \cdot \sum_{n=1}^4 [\dot{y}_n(t) \cdot h_n(x)] \cdot h_m(x) dx + \int_0^L \sum_{n=1}^4 [\ddot{y}_n(t) \cdot \frac{\partial^2 h_n(x)}{\partial x^2}] \cdot EI(x) h_m(x) dx = \\ = F_j^b \cdot h_m(L) + F_i^b \cdot h_m(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_0 - p_0 \cdot h_m(vt) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Con lo cual podremos escribir matricialmente:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_i(vt) \\ \dot{\theta}_i(vt) \\ \dot{y}_j(vt) \\ \dot{\theta}_j(vt) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_i(vt) \\ \dot{\theta}_i(vt) \\ \dot{y}_j(vt) \\ \dot{\theta}_j(vt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^b(vt) \\ M_i^b(vt) \\ F_j^b(vt) \\ M_j^b(vt) \end{bmatrix} - p_0 \begin{bmatrix} h_1(vt) \\ h_2(vt) \\ h_3(vt) \\ h_4(vt) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Siendo:

$$M_{ij} = \int_0^L \rho(x) \cdot h_i(x) \cdot h_j(x) dx \quad (2.46)$$

$$K_{ij} = \int_0^L h_i''(x) \cdot EI(x) \cdot h_j''(x) dx \quad (2.47)$$

Matrices que si observamos los subíndices, son matrices simétricas. Si acoplamos estas matrices elementales es posible obtener una formulación global, para la estructura completa:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -p_0\mathbf{h}(vt) \quad (2.48)$$

2.4. Resolución.

Tratamos con matrices simétricas por lo que la forma más sencilla de resolución es intentando desacoplar el sistema, para ello realizaremos un cambio de base, mediante la matriz C , matriz de cambio de base (obtenida del problema de autovalores), del sistema B (que coincidirá con la base de vectores propios) a la base canónica E :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{y}(t) = 0 \Rightarrow |\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (2.49)$$

Problema de autovalores que nos proporcionará los vectores propios, o modos de vibración, que compondrán por columnas la matriz C . De este modo, a través de dicha matriz C , relacionaremos las nuevas coordenadas del vector y mediante las relaciones siguientes:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} \quad (2.51)$$

De modo que si realizamos dicho cambio de base y premultiplicamos por la transpuesta de C , obtendremos matrices diagonales para M y K , desacoplando el sistema:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{q} = -p_0 \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (2.52)$$

De modo que las matrices de masa y rigidez resultan diagonales:

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{K}_D = \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \quad (2.54)$$

De modo que si premultiplicamos por \mathbf{M}_D^{-1} podemos reescribir:

$$\mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{M}_D \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{q} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (2.55)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}(vt) \quad (2.56)$$

Siendo \mathbf{D} una matriz diagonal tal que $D_{ii} = \omega_i^2$, y la matriz \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \quad (2.57)$$

De este modo hemos conseguido desacoplar el sistema, siendo resoluble para cada función $q_i(t)$ independientemente, de modo que podremos expresar:

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (2.58)$$

En este punto podremos incluir los efectos del amortiguamiento:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta\omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (2.59)$$

En la que ζ representa el factor de amortiguamiento, en el que podremos introducir un valor distinto para cada modo (más ajustado a la realidad pues es evidente pensar que se amortiguarán mejor los modos altos a los bajos), aunque en la práctica se suele optar con un amortiguamiento constante para cada modo por lo que en el presente documento se procederá de igual manera.

Por lo tanto, el problema a resolver viene dado por:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta w_n \dot{q}_n(t) + w_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (2.60)$$

$$q_i(t)|_{t=0} = q_i(0) \quad (2.61)$$

$$\dot{q}_i(t)|_{t=0} = \dot{q}_i(0) \quad (2.62)$$

Se considera una escala de referencia local para cada elemento, en el que el instante $t=0$ coincide con el instante en que la carga entra en el elemento, coincidente con el punto de abscisa 0. De este modo se evitan exponenciales con términos fuera de rango (se puede entender fácilmente si visualizamos la ecuación de simple de un sistema de un grado de libertad amortiguado, en el que disponemos de una exponencial decreciente con el tiempo).

Si observamos la ecuación 3.60, vemos que se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea por lo que descompondremos la solución en la suma de una solución particular más la solución homogénea:

$$q(t) = q_H(t) + q_p(t) \quad (2.63)$$

■ Solución homogénea:

$$q_H(t) = e^{-\zeta w_i t} (C_1 \cos(w_{iD} t) + C_2 \sin(w_{iD} t)) \quad (2.64)$$

$$w_{iD} = w_i \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.65)$$

■ Solución particular:

Si descomponemos el término no homogéneo:

$$p_0(G_1 h_1(vt) + G_2 h_2(vt) + G_3 h_3(vt) + G_4 h_4(vt)) \quad (2.66)$$

Que no es más que un polinomio de tercer grado por lo que la ecuación particular sera de la forma:

$$q_p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 vt + \alpha_2 (vt)^2 + \alpha_3 (vt)^3 \quad (2.67)$$

Sustituyendo la expresión de las funciones $q_p(t)$, $\dot{q}_p(t)$, $\ddot{q}_p(t)$, y teniendo en cuenta las expresiones de las funciones de Hermite, es posible resolver los coeficientes α_0 , α_1 , α_2 y α_3 . La obtención de estos coeficientes se reduce al cálculo de 10 coeficientes no dependientes de la velocidad de paso de la carga, solo dependientes de la frecuencia, para cada elemento:

$$\alpha_0 = v^3\alpha_{01} + v^2\alpha_{02} + v\alpha_{03} + v\alpha_{04} \quad (2.68)$$

$$\alpha_1 = v^2\alpha_{11} + v\alpha_{12} + \alpha_{13} \quad (2.69)$$

$$\alpha_2 = v\alpha_{21} + \alpha_{22} \quad (2.70)$$

$$\alpha_3 = \alpha_{31} \quad (2.71)$$

Las expresiones de estos diez coeficientes son las siguientes:

$$\alpha_{01} = -\frac{24\zeta(2\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3w_i^5} \quad (2.72)$$

$$\alpha_{02} = -\frac{2(4\zeta^2 - 1)(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2w_i^4} \quad (2.73)$$

$$\alpha_{03} = -\frac{2G_2\zeta}{w_i^3} \quad (2.74)$$

$$\alpha_{04} = \frac{G_1}{w_i^2} \quad (2.75)$$

$$\alpha_{11} = \frac{6(4\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3w_i^4} \quad (2.76)$$

$$\alpha_{12} = \frac{4\zeta(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2w_i^3} \quad (2.77)$$

$$\alpha_{13} = \frac{G_2}{w_i^2} \quad (2.78)$$

$$\alpha_{21} = -\frac{6\zeta(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3w_i^3} \quad (2.79)$$

$$\alpha_{22} = -\frac{3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L}{L^2w_i^2} \quad (2.80)$$

$$\alpha_{31} = \frac{2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L}{L^3w_i^2} \quad (2.81)$$

Vemos que estos diez elementos dependen del amortiguamiento, de la longitud del elemento, de las frecuencias naturales y de los coeficientes G_i que a su vez depende de los modos de vibración, sin depender en ningún momento de la velocidad de paso de la carga por o que se podrían determinar en un principio estos diez parámetros para la malla completa.

En último lugar nos restaría determinar los parámetros C_1 y C_2 de la solución homogénea a partir de la imposición de las condiciones iniciales:

$$q(0) = \alpha_0 + C_1 \quad (2.82)$$

$$C_1 = q(0) - \alpha_0 \quad (2.83)$$

$$\dot{q}(0) = -\zeta w_i C_1 + w_{iD} C_2 + \alpha_1 v \quad (2.84)$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}(0) + \zeta w_i C_1 - \alpha_1 v}{w_{iD}} \quad (2.85)$$

2.5. Generalización del método.

Se observa en la solución obtenida, 3.67 y 3.64, que todos los parámetros de los que depende, C_i, w_i, G_i , se obtienen del análisis modal, estando la parte temporal definida de forma analítica. En ningún momento aparecen imposiciones de geometría, sección o inercia, estando contenida toda esta información geométrica en forma de masa e inercia a través del análisis modal. Podemos interpretar la ecuación matricial 3.45, mediante un operador diferencial L:

$$\mathcal{L}\{u(\bar{x}, t), v(\bar{x}, t), w(\bar{x}, t)\} = p_0 \cdot \delta(s - vt) \quad (2.86)$$

Con s coordenada curvilínea de una línea de carga C^1 . Resolvemos mediante separación de variables, espacial y temporal, a través del análisis modal que, gracias a la diganalización de las matrices de rigidez y masa, desacopla todo el sistema.

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{q} = -p_0 \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{h}(vt) \quad (2.87)$$

Por lo tanto, el método semianalítico se encarga de realizar la integración temporal de la información modal, la cual es proporcionada externamente, como en los casos que se analizan en este documento, mediante el software SAP2000 [?], o cualquier otro software de análisis modal al uso. Por ello, parece razonable pensar que esta metodología para vi-gas es generalizable a líneas de carga genéricas, con la única imposición de derivabilidad, C^1 , de la línea de carga, de modo que la discretización espacial mediante los polinomios de Hermite permita una transición suave en su definición evitando la existencia de discontinuidades que introduzcan picos de aceleración ficticios. En la publicación [7], en la que los autores desarrollan la aplicación del método a placas de Kirchhoff esviadas, se observa de nuevo la generalidad del método en cuanto no se exige más que la derivabilidad de la línea de carga, tratando el dominio espacial mediante análisis modal de forma independiente.

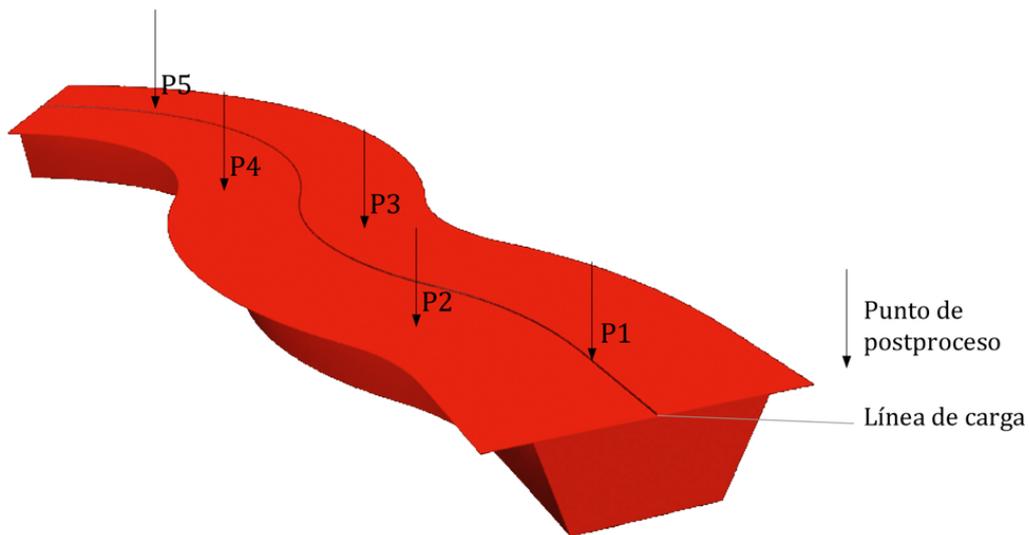


Figura 2.6: Esquema de línea de carga y puntos de postproceso en estructura.

Por lo tanto, el esquema de cálculo consiste, en primer lugar, en la determinación de los diez parámetros α_n , así como las matrices C Y G mediante cualquier software de elementos finitos y análisis modal, información que recibe el algoritmo semianalítico para, posteriormente, realizar la integración temporal de la solución, quedando así determinada por completo la misma en términos de desplazamientos y giros (*solución analítica, no aproximada*) de los puntos de postproceso (puntos donde estudiamos aceleraciones y desplazamientos, figura 3.4) que previamente introduzcamos, de una manera sencilla gracias a la diagonalización de las matrices de masa y rigidez con el consecuente desacoplamiento del sistema.

2.6. Ventajas del método semianalítico.

Las ventajas de este método se desligan principalmente de la naturaleza analítica de la solución, la cual siempre será mejor que cualquier aproximación. De modo que podremos enumerar:

1. El método proporciona resultados precisos pues las ecuaciones temporales se resuelven de forma analítica, por lo que evitaremos los errores clásicos en el dominio del tiempo por la discretización del mismo por parte de los métodos de integración paso a paso. La solución se obtiene a partir de 10 coeficientes por elemento y modo que no dependen de la velocidad, lo cual facilita enormemente la aplicación de la actual norma IAPF [1] que impone la obtención de resultados para un amplio rango de velocidades.
2. A bajas velocidades se converge a la solución estática, evitando el fenómeno de Gibbs típicamente asociado a las soluciones analíticas basadas en series armónicas.
3. Gracias a la normalización temporal evitamos problemas de exponenciales con argumentos elevados con los errores de sesgo que estos conllevan.

4. Se requiere de un paso de tiempo de evaluación, frente a un paso de tiempo de integración asociado a métodos paso a paso, en general mucho menos que el requerido para el muestreo analítico de la solución. Por ello, se gana en velocidad de cálculo, ya que para tener una precisión similar al método semianalítico, los métodos paso a paso requieren más operaciones de punto flotante globales (debido a que el paso de tiempo es menor). La respuesta proporcionada en un tiempo dado por la solución semianalítica no depende del paso del tiempo; en métodos aproximados paso a paso sí depende.
5. Esta ventaja en ahorro de tiempo de cálculo convierte al método semianalítico en una herramienta práctica y realista de aplicación de las exigencias de la norma IAPF-2010 [1], en el que para un análisis ordinario, exige las siguientes valoraciones:
 - a) Análisis para más de 10 trenes en general.
 - b) Barridos de velocidad entre 20 km/h y 400 km/h aproximadamente, con incrementos de velocidad de 1 km/h, (con el fin de analizar el rango completo de aceleraciones), por lo que se realizan en torno a 380 velocidades de paso.

Por lo tanto, en general, el número de cálculos diferentes a realizar estará en torno a 11400 cálculos (10x380x3), de ahí que esta ventaja en tiempos de cálculo resulte muy valiosa así como unas mínimas necesidades de almacenamiento de la información.

2.7. Test de validación.

2.7.1. Planteamiento.

En este apartado se pretende contrastar numéricamente, los resultados arrojados mediante el método Semianalítico frente a los métodos clásicos de integración Paso a Paso, más concretamente, el método de Newmark-Beta. Para ello se han desarrollado sendos tests de validación, un modelo bidimensional de vigas y un modelo tridimensional de placas.

2.7.2. Viga de tres vanos.

Geometría.

Este primer test consistirá en el estudio de la viga de geometría representada en la figura 3.6, caso analizado en publicaciones externas por Hayashikawa y Watanabe [4], Henchi et al. [8] y Zheng et al. [?]:

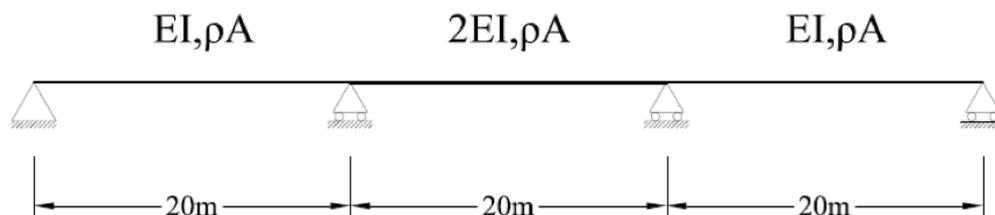


Figura 2.7: Geometría de la viga.

Como se observa en ésta, se opta por la discretización en 10 elementos por barra con un total de 31 nodos (es importante tener en consideración este dato pues el software SAP2000, con el que se trabajará, establece su cálculo en base a la definición de un modelo de masas concentradas).

Las propiedades mecánicas de las barras se caracterizan por una inercia y área $EI, \rho A$ en las vigas 1 y 3 mientras que el vano central será una barra de propiedades $2EI, \rho A$.

- $\rho A = 1000 \text{ kg/m}$
- $EI = 1,96 \text{ GNm}^2$
- $\xi = 2\%$ (*amortiguamiento modal*)

La carga móvil a considerar es una carga de 9.8 kN desplazándose a una velocidad constante de 35.57 m/s.

Se desprecia el área a cortante para considerar un modelo de viga tipo Euler-Bernoulli.

Cálculo modal.

Se necesitará, en primer lugar, la obtención de los resultados procedentes del cálculo modal, que en el presente documento se ha llevado a cabo mediante el software SAP2000 [10]. Para ello se consideran dos grados de libertad por nodo (desplazamiento y giro) y se trabaja con 12 modos de vibración:

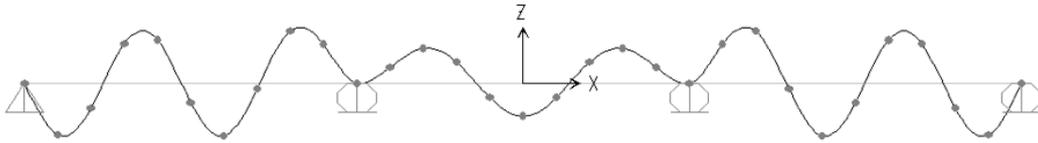


Figura 2.8: Ejemplo de modo de vibración 11.

Modo de vibración	Frecuencia (Hz)
1	6.2041
2	7.581
3	11.974
4	24.203
5	26.434
6	37.28
7	53.528
8	56.583
9	76.907
10	93.841
11	98229
12	129.97

Cuadro 2.1: Frecuencias propias de la viga de estudio.

Cálculo mediante el Método de Newmark.

Una vez introducida la geometría del modelo se procede inicialmente a un cálculo de la respuesta dinámica de la estructura, principalmente en términos de aceleraciones, mediante el método de integración paso a paso de Newmark. Para ello, se dará uso de nuevo del software SAP2000 que implementa el método de Newmark de variación lineal tras un desacople modal del problema dinámico. (Metodología testada en la referencia [10]).

Como cualquier otro método de tipo incremental en el tiempo, deberemos actuar sobre dos parámetros importantes del cálculo:

1. Tiempo de discretización de la carga.
2. Tiempo de discretización del tiempo "step", que hemos hecho coincidir con el anterior.

En esta caso corremos el cálculo para dos pasos de tiempo de $\frac{T_{12}}{25}$ y $\frac{T_{12}}{150}$, siendo T_{12} el período del modo 12 (para un adecuado muestreo de la señal):

$$\frac{T_{12}}{25} \cong 3E - 04s \quad (2.88)$$

$$\frac{T_{12}}{150} \cong 5E - 05s \quad (2.89)$$

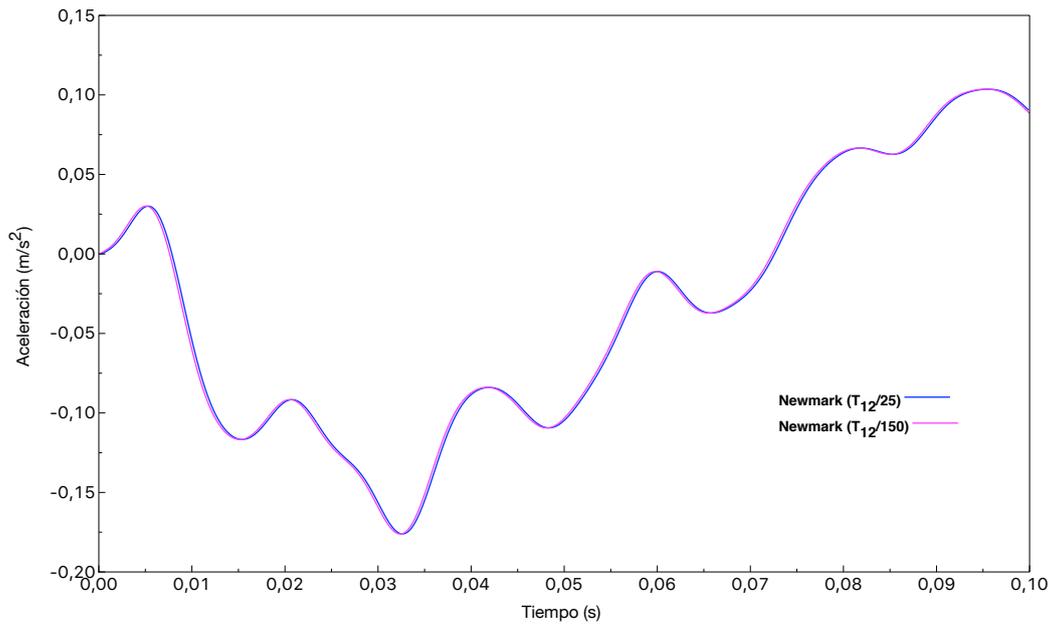


Figura 2.9: Paso de cargas mediante el Método de Newmark.

Cálculo mediante el Método de Newmark.

Se lleva a cabo ahora el paso de cargas sobre la misma estructura con paso de tiempo $\frac{T_{12}}{10}$, y resultados expuestos en la figura 3.9..

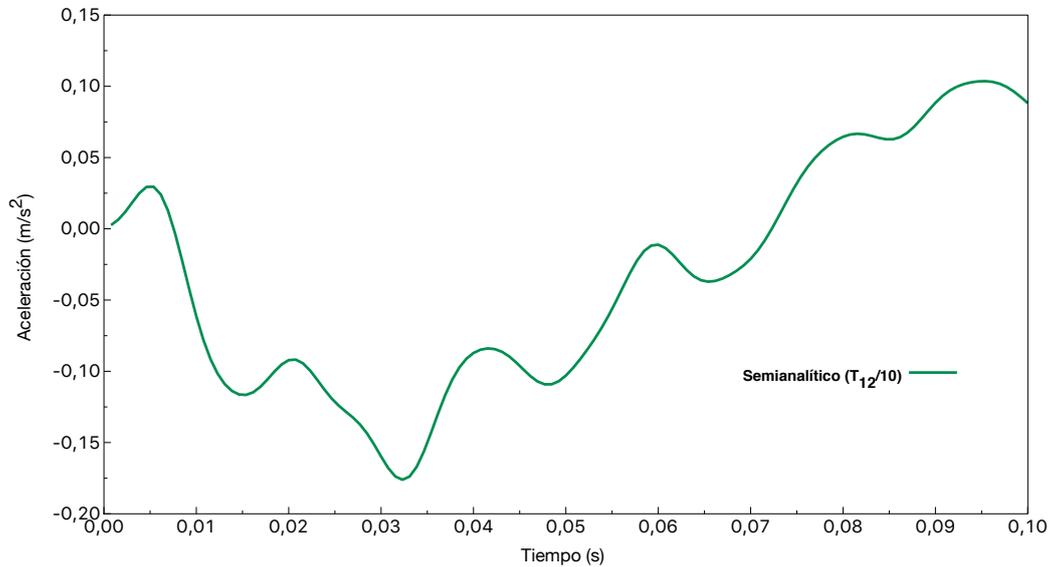


Figura 2.10: Paso de cargas mediante el Método Semianalítico.

Comparativa.

Comparemos cuatro series temporales:

- Método de Newmark de paso $\frac{T_{12}}{10}$.
- Método de Newmark de paso $\frac{T_{12}}{25}$.
- Método de Newmark de paso $\frac{T_{12}}{150}$.
- Método Semianalítico de paso $\frac{T_{12}}{10}$.

Comparación ilustrada en la siguiente gráfica 3.10:

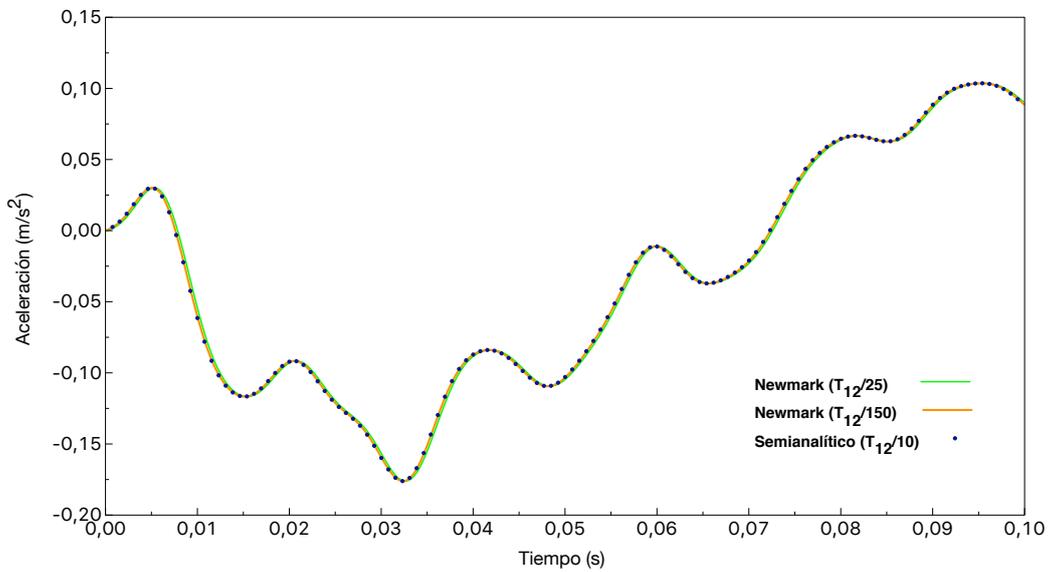


Figura 2.11: Comparación entre los distintos métodos de paso de cargas.

En las gráficas presentadas se observa, en primer lugar, que el método semianalítico obtiene valores suficientemente aproximados a los métodos paso a paso en las fases iniciales de la serie, en este caso, los primeros 0.1s. Estos datos coinciden con los publicados en las referencias [4], [8] y [9], por lo que los resultados se dan por buenos. En la referencia [5], se pueden consultar la Figura 5, en donde se analiza la respuesta en fases posteriores, más concretamente, entre 3.05 y 3.15s. El objetivo de esta figura es doble: En primer lugar, se ejemplifica la respuesta independiente al tiempo de muestreo por parte del método semianalítico, el cual es únicamente usado para evaluar la respuesta y en nada interviene en las ecuaciones del movimiento. En segundo lugar, se observa que el método de Newmark se aproxima más al Semianalítico conforme se refina el paso temporal de integración, y además, conforme el período de evaluación es mayor, los datos se van alejando cada vez más de la solución exacta puesto que, al ser una metodología de tipo incremental, los errores se van acumulando conforme aumenta el número de pasos de cálculo.

CAPÍTULO 3

Análisis Dinámico.

3.1. Descripción de la estructura.

El Viaducto del Rodenillo es un puente continuo de vía doble, resuelto mediante una sección cajón unicelular, de 5 vanos con luces 36-45-45-45-36 m y un canto de 2,5 m. En una estructura de este tipo el paso de cargas móviles excéntricas produce deformaciones simultáneas de flexión y torsión. Como es sabido, en determinados modos de vibración se producirá además un acoplamiento entre torsión y flexión lateral. Por estos motivos, el Cálculo Dinámico del Viaducto de Rodenillo se realiza mediante un método semianalítico que realiza la integración analítica (exacta) de las ecuaciones modales de movimiento de todos los modos cuya contribución a la respuesta sea necesario tener en cuenta. Los modos de vibración se obtienen mediante la técnica de los Elementos Finitos.

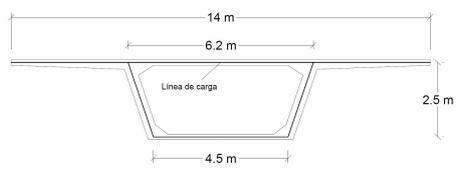


Figura 3.1: Sección recta del modelo y línea media de la sección.

A continuación se describen el método de cálculo, el modelo numérico utilizado, las acciones dinámicas consideradas y los resultados obtenidos.

3.2. Método de Cálculo.

Para llevar a cabo el cálculo por superposición modal se tienen en cuenta las contribuciones de los modos de frecuencia menor o igual a 30 Hz, que para el valor nominal del balasto son 126. Este elevado número se debe en gran parte a modos asociados a flexiones que afectan fundamentalmente a los voladizos del tablero.

El paso de tiempo elegido para evaluar de la historia temporal de la vibración del puente, ante la circulación de cada tren y a cada velocidad de paso, es la décima parte del menor periodo de vibración. La frecuencia máxima considerada es de 29.3405 Hz, como se indica en el apartado 3.1, por lo que el paso de tiempo para evaluación es de 0.003408 s en el caso en que se emplea el valor nominal de balasto.

Las vibraciones libres que tienen lugar tras el paso del tren sobre la estructura se calculan durante un tiempo total igual a 10 periodos de vibración completos del modo fundamental, lo cual se considera suficiente para que se hayan reducido los niveles máximos de oscilación.

La tasa de amortiguamiento empleada para todos los modos es del 2%, de acuerdo con la instrucción (IAPF-10).

El cálculo dinámico se realizará con la línea de carga submuestreada cada 3 y cada 6 metros, ya que el objetivo del presente proyecto, es demostrar que con un submuestreo cada 6 metros, se obtienen resultados semejantes, consiguiendo de esta manera resolver el problema con una cantidad de elementos considerablemente inferior con respecto a la que utilizamos normalmente.

3.3. Modelización de la estructura.

El modelo empleado es del tipo lámina plegada, resuelto de manera aproximada mediante el método de los Elementos Finitos. Se considera la sección cajón del viaducto como un perfil cerrado formado por cuatro tipos de láminas: los voladizos, las losas superior e inferior y las almas. Dichas láminas se discretizan mediante elementos finitos planos de cuatro nudos y seis grados de libertad por nudo. El tablero superior se ha modelizado teniendo en cuenta las superficies de balasto, utilizando para esto modificadores, tanto de masa, peso y flexión, consiguiendo de esta forma asemejarnos a la realidad. No se tiene en cuenta la deformación debida a las tensiones tangenciales en sentido perpendicular al plano medio de las láminas. Las riostras existentes en las zonas de apoyo en pilas y estribos se modelizan adecuando los espesores de las láminas de manera que se reproduce la masa total de las riostras, y añadiendo además restricciones cinemáticas en ciertas secciones que eliminan el alabeo y la distorsión. La rigidez de la zona resulta de ese modo comparativamente muy superior a la de la sección cajón.

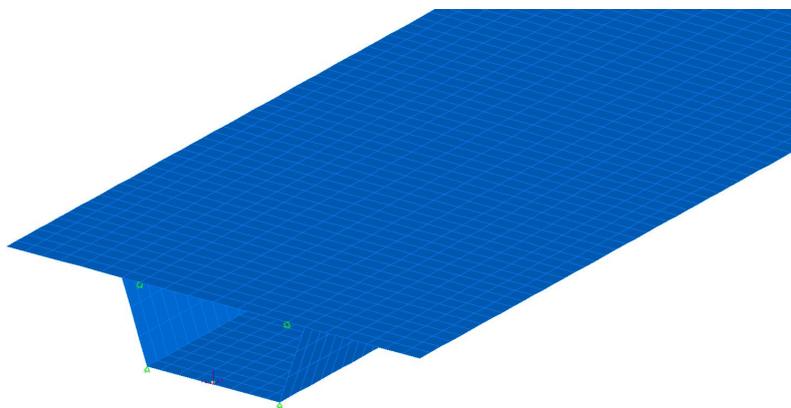


Figura 3.2: Malla de elementos finitos en la zona del estribo inicial.

El software SAP2000, con el cual se ha llevado el cálculo modal, trabaja con matrices diagonales y no con matrices consistentes, lo que conlleva un modelo de malla muy exhaustivo figura 3.2.

No se han tenido en cuenta la presencia de las entregas de un metro de longitud en los estribos, por lo que las secciones inicial y final del tablero corresponden a las situadas sobre los aparatos de apoyo.

3.3.1. *Propiedades de los materiales y descripción de cargas.*

Los materiales utilizados para modelizar el modelo de estudio son los siguientes:

Propiedades	Hormigón	Acero	ud.
Módulo de elasticidad	35	200	Gpa
Coefficiente de Poisson	0.2	0.3	
Densidad	2500	7850	kg/m ³

Cuadro 3.1: Propiedades de los materiales

Cabe destacar, que se han modelizado las barreras con el fin de evitar rizos en las alas durante el calculo del análisis modal.

Para el cálculo modal de la estructura trabajamos únicamente con las cargas permanentes, que en este caso son las masas que descansan sobre la losa superior y voladizos, definidas a continuación:

- Balasto: 10336 kg/m (valor nominal)
- Vías y traviesas: 1280 kg/m (comprende las dos vías)
- Muretes guardabalasto: 500 kg/m (comprende los dos lados)
- Aceras y canalizaciones: 2450 kg/m (comprende los dos lados)
- Barandilla e imposta: 900 kg/m (comprende los dos lados)

La carga de balasto solo será utilizada con su valor nominal, es decir, que el valor inferior y superior se desprecia, debido a que la finalidad del presente trabajo no es un documento técnico sobre el calculo dinámico del mismo.

Las masas definidas anteriormente se han repartido uniformemente en los elementos de la malla que forman la losa superior y los voladizos.

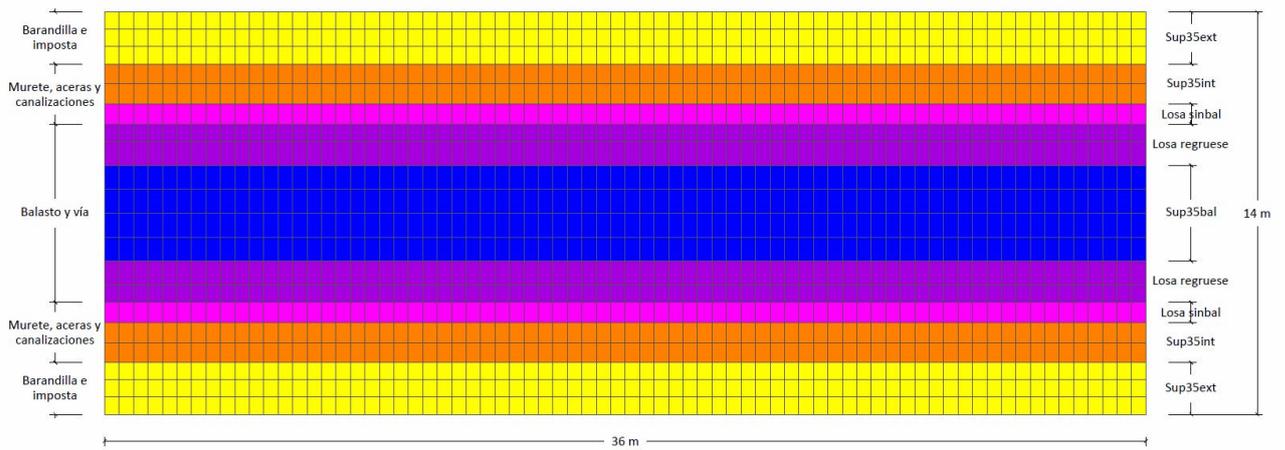


Figura 3.3: Franjas longitudinales de elementos en los que se reparten las cargas permanentes.

Las partes definidas a la derecha de la figura 4.3, son las mismas que las definidas anteriormente, pero con distinta nomenclatura. Cada una de las distintas partes de la sección general, están modelizadas al detalle, con el fin de aproximarnos detalladamente a la realidad, para ello también hemos definido modificadores para cada una de las distintas partes. A continuación, se muestra cada una de estas superficies, así como el primer vano de nuestro modelo:

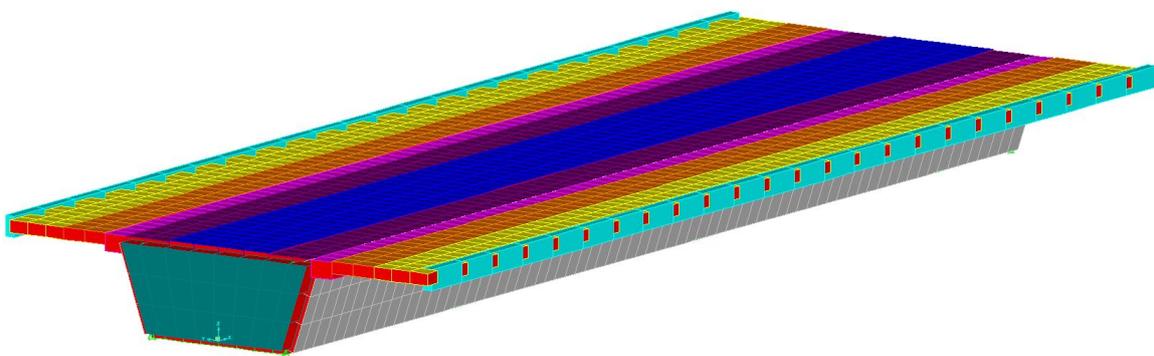


Figura 3.4: Primer vano del Viaducto del Rodenillo modelizado.

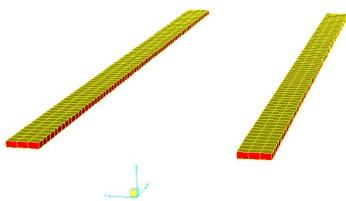


Figura 3.5: Sup35ext con un espesor de 35 cm.

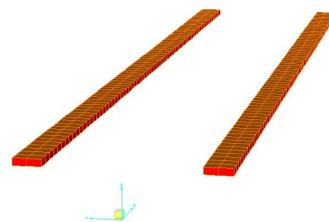


Figura 3.6: Sup35int con un espesor de 35 cm.

Los espesores empleados se deducen a partir de los planos de proyecto.

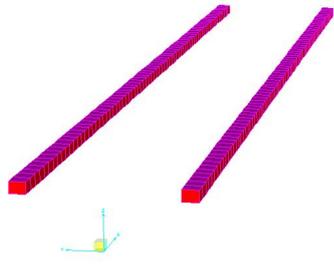


Figura 3.7: Losa sinbal con un espesor de 50 cm.

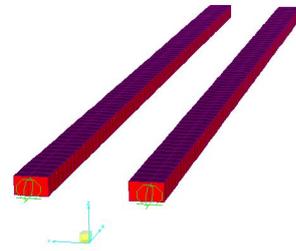


Figura 3.8: Losa regrese con un espesor de 80 cm.

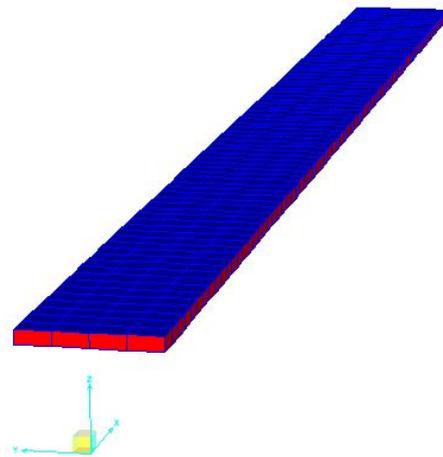


Figura 3.9: Sup35ba con un espesor de 35 cm.

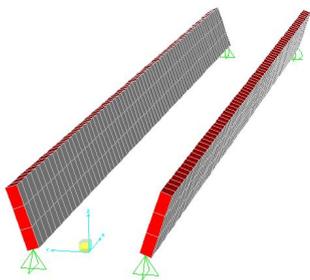


Figura 3.10: Almas con un espesor de 50 cm.

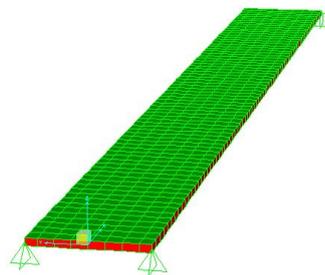


Figura 3.11: Tabinfe con un espesor de 30 cm.

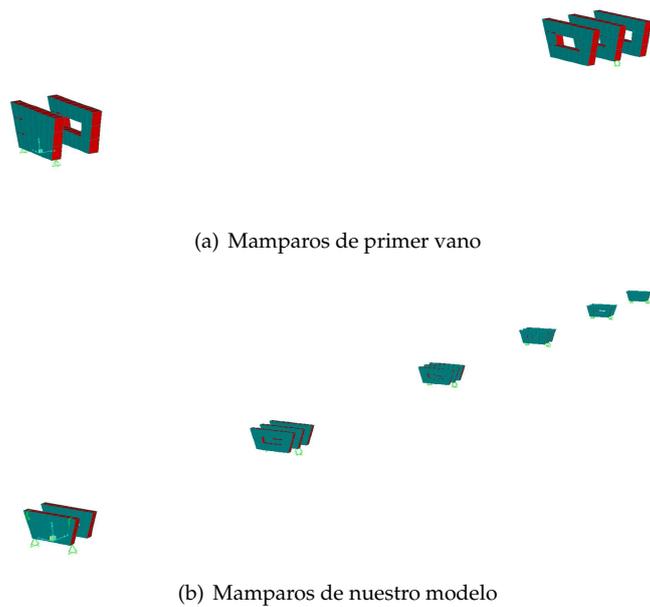


Figura 3.12: Mamparos o riostras con espesor de 50 cm.

Las riostras o mamparos, confieren a la zona una rigidez superior, lo cual se completa impidiendo el alabeo y la distorsión, mediante restricciones cinemáticas. En los apoyos en pila, dichas restricciones se aplican a la sección sobre apoyo, a la sección en la termina el macizado, y a una sección intermedia entre ellas.

Los apoyos de la estructura sobre estribos y pilas se modelizan mediante apoyos simples verticales dispuestos en las secciones correspondientes. En cada una de las seis secciones, los apoyos verticales se sitúan en los puntos de unión entre almas y losa inferior, teniendo de esta forma un total de doce apoyos verticales. Los movimientos de dichos puntos se han restringido también en dirección transversal (Y). Además, se impide el movimiento en dirección longitudinal (X) de los dos apoyos situados en el primer y último estribo del puente. La figura 3.12. muestra los puntos vinculados y las direcciones de dichos vínculos.

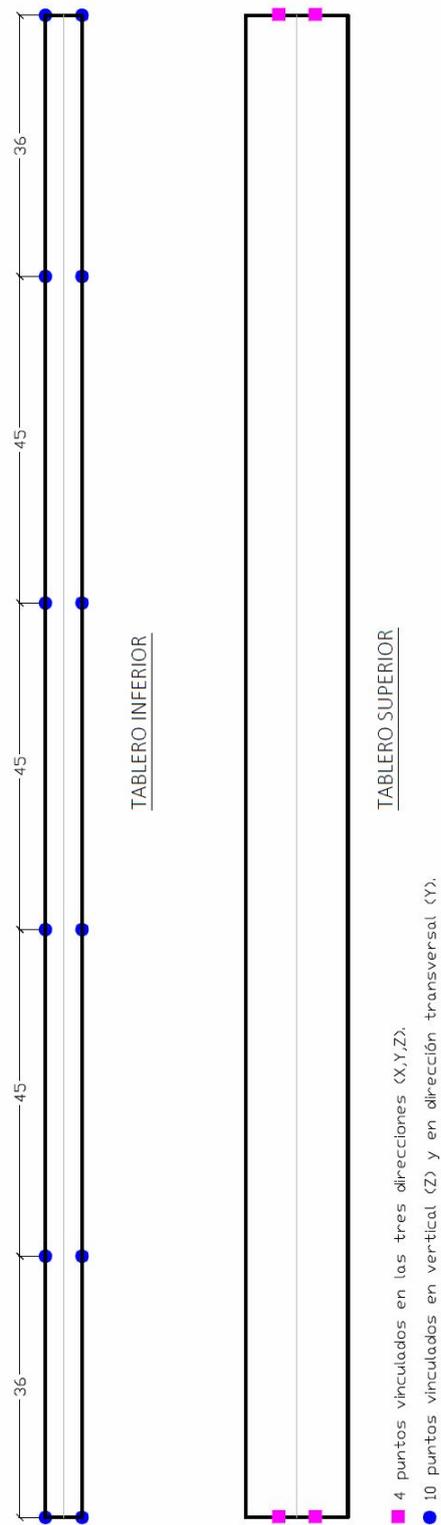


Figura 3.13: Vista en planta de losa superior e inferior: situación y dirección de los apoyos.

3.4. Acciones.

El cálculo dinámico se realiza según se indica en el Apéndice B de la IAPF-10, considerándose los diez trenes definidos en el apéndice C.1 de dicha instrucción, los cuales reciben la denominación conjunta de Tren Dinámico Universal-A.

Siendo la velocidad de proyecto de la línea de 350 km/h, se han considerado velocidades de paso para dichos trenes desde 20 km/h hasta $1.2 \times 350 = 420$ km/h en incrementos de 1 km/h.

El cálculo por superposición modal se realiza haciendo transitar las cargas a lo largo de una única línea de nudos situada en el eje de la vía, tal y como se muestra en la figura 3.1.

3.5. Puntos para cálculo de resultados.

Las aceleraciones verticales se calculan en las secciones de centro y cuartos de vano, y para cada sección en tres puntos: eje longitudinal del tablero y bordes de la banqueta de balasto (muretes). Se tienen por tanto 45 puntos de postproceso para aceleraciones, denominados P1 a P45.

Las flechas se calculan en el eje de la vía, en las secciones de centro y cuartos de cada vano. Ello da un total de 15 puntos denominados P46 a P60.

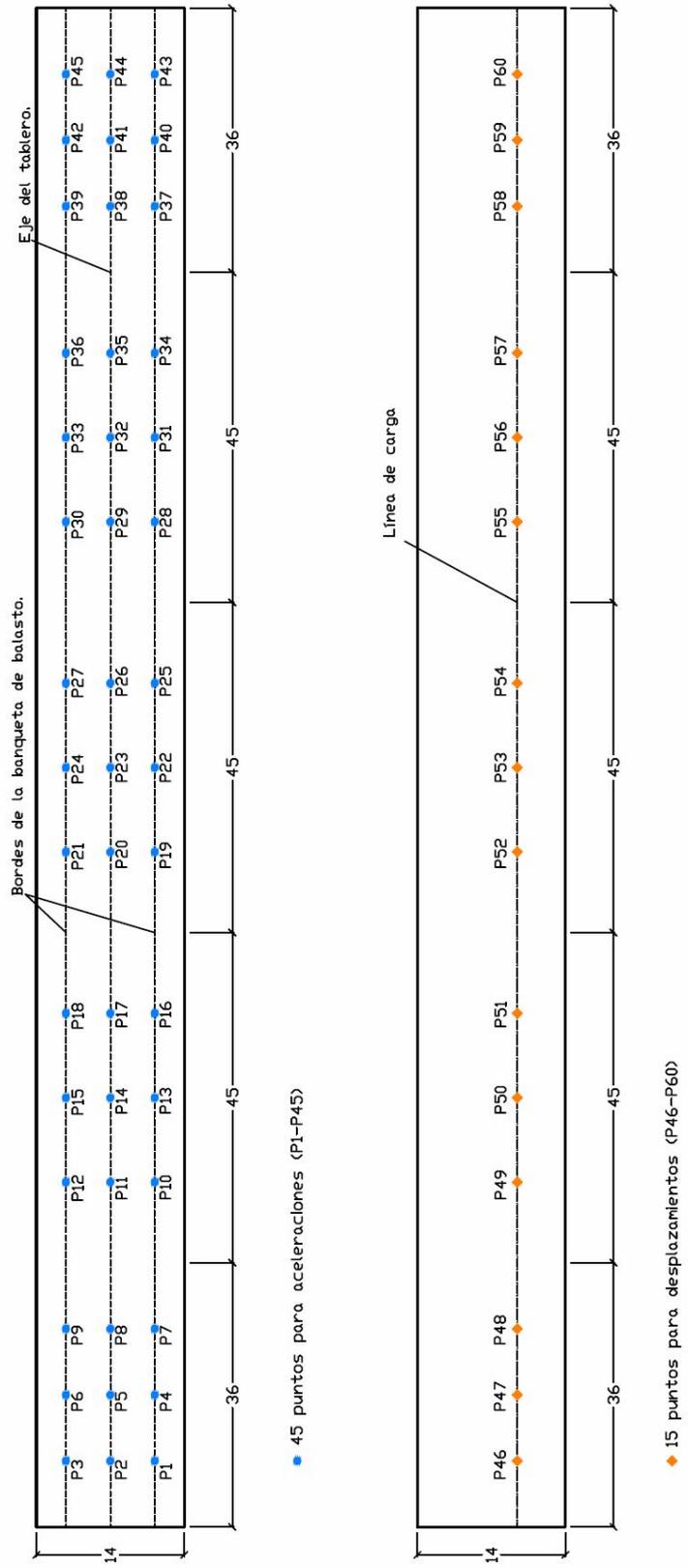


Figura 3.14: Puntos para cálculo de resultados.

CAPÍTULO 4

Resultados.

4.1. Resultados a obtener y comprobaciones a realizar.

De acuerdo con la IAPF-10 , del calculo dinámico deben obtenerse los resultados necesarios para realizar las comprobaciones siguientes:

- Flecha dinámica máxima sobre vía sin irregularidades, con objeto de determinar el coeficiente de impacto ϕ .
- Flecha dinámica máxima a efectos de comprobación de E.L.S.
- Aceleración vertical máxima (E.L.S.).

Los limites de cada tipo de respuesta asociados a los E.L.S. son los siguientes:

- Flecha dinámica máxima: 6 cm en los vanos de 36 m.
(Apartado 4.2.1.1.3.) 7.5 cm en los vanos de 45 m.
- Aceleración vertical máxima: 3.5 m/s^2 .
(Apartado 4.2.1.1.1.)

4.2. Resultados.

4.2.1. Frecuencias propias y modos de vibración.

El cálculo modal por elementos finitos del modelo descrito en el capítulo anterior produce como resultado, para el valor nominal del balasto, 123 modos con frecuencias de vibración inferiores a 30 Hz. Las frecuencias de dichos modos se recogen en la tabla 5.1.

Los seis primeros, de frecuencias 2.4753 Hz hasta 4.9988 Hz, corresponden a modos de flexión longitudinal del tablero. A partir de dicho valor se alternan modos de torsión y flexión lateral acopladas en mayor o menor medida, otros modos de flexión longitudinal, y una gran cantidad de modos en los que predomina la flexión de los voladizos con diferente número de ondas. Las figuras 4.1 a 4.5 muestran los tres primeros modos y algunos otros que resultan representativos.

Modo	Frecuencia (Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)
1	2.4753	42	12.7416	83	19.8175
2	2.8504	43	12.8909	84	20.2093
3	3.2638	44	13.1494	85	20.3163
4	3.9365	45	13.2814	86	20.4587
5	4.7526	46	13.3172	87	20.5144
6	4.9989	47	13.5780	88	21.1268
7	5.8397	48	13.6989	89	21.2202
8	6.1577	49	13.7683	90	21.9075
9	6.6077	50	14.0171	91	22.0023
10	7.6612	51	14.1032	92	22.3593
11	7.7442	52	14.2949	93	22.7236
12	8.1420	53	14.5059	94	22.8103
13	8.3036	54	14.6970	95	23.0232
14	8.6997	55	14.9194	96	23.4543
15	8.7707	56	15.2429	97	23.5667
16	9.1710	57	15.4326	98	23.6604
17	9.3014	58	15.7699	99	23.8631
18	9.5795	59	15.9059	100	24.378
19	9.8973	60	15.9600	101	24.5198
20	9.9115	61	16.0513	102	24.5614
21	10.2087	62	16.2565	103	25.1965
22	10.5298	63	16.3991	104	25.3257
23	10.6784	64	16.5299	105	25.4259
24	10.7453	65	17.0156	106	25.6468
25	10.9018	66	17.1343	107	26.2636
26	11.1066	67	17.5989	108	26.3208
27	11.2535	68	17.7225	109	26.3463
28	11.3121	69	17.9738	110	26.3990
29	11.3848	70	18.1070	111	27.1665
30	11.5472	71	18.2551	112	27.2361
31	11.6100	72	18.3619	113	27.3042
32	11.6228	73	18.6628	114	27.5033
33	11.6641	74	18.6846	115	27.6203
34	11.8296	75	18.7084	116	27.9195
35	11.8542	76	18.9102	117	28.1509
36	11.8734	77	19.0360	118	28.2395
37	11.9652	78	19.1445	119	28.2935
38	12.1488	79	19.5845	120	28.3320
39	12.4240	80	19.5978	121	29.1703
40	12.5124	81	19.6351	122	29.2405
41	12.5802	82	19.7498	123	29.3405

Cuadro 4.1: Frecuencias propias.

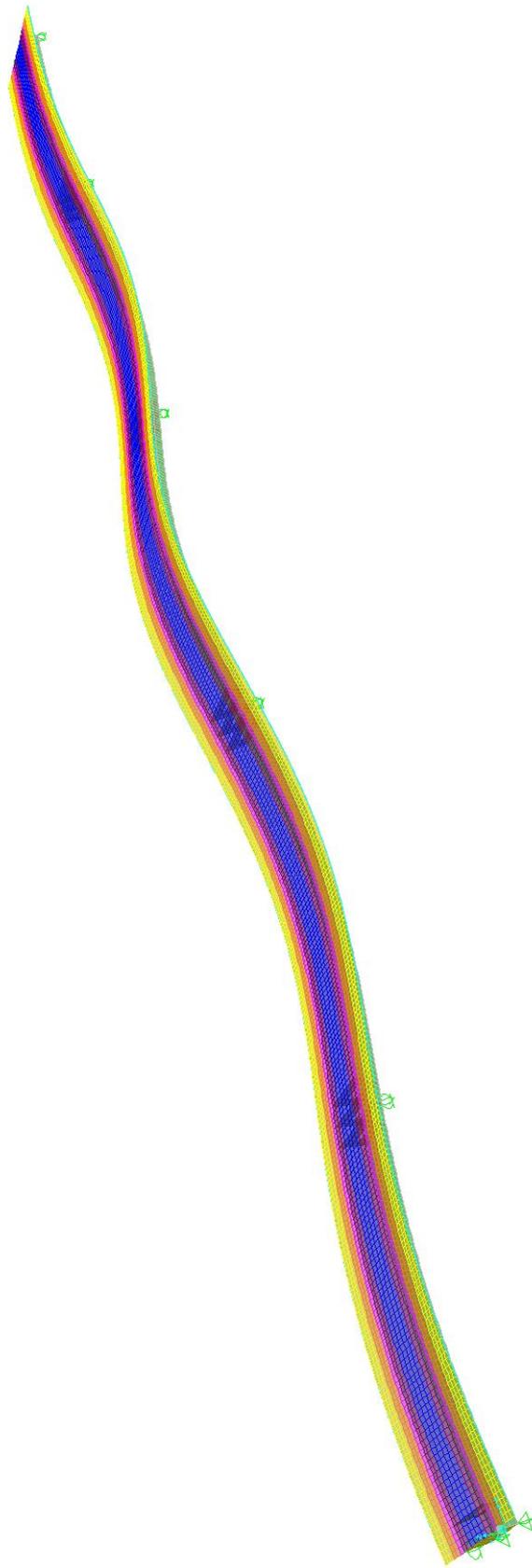


Figura 4.1: Primer modo de vibración (2.4753 Hz).

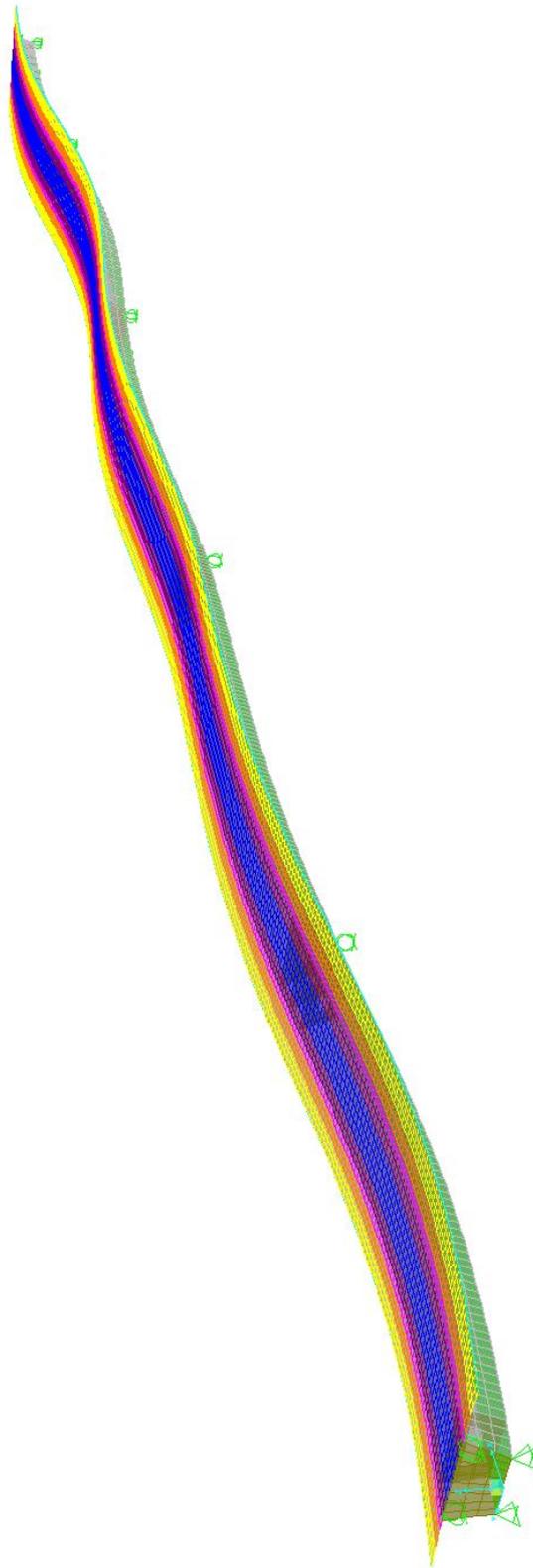


Figura 4.2: Segundo modo de vibración (2.8504 Hz).



Figura 4.3: Tercer modo de vibración (3.2638 Hz).

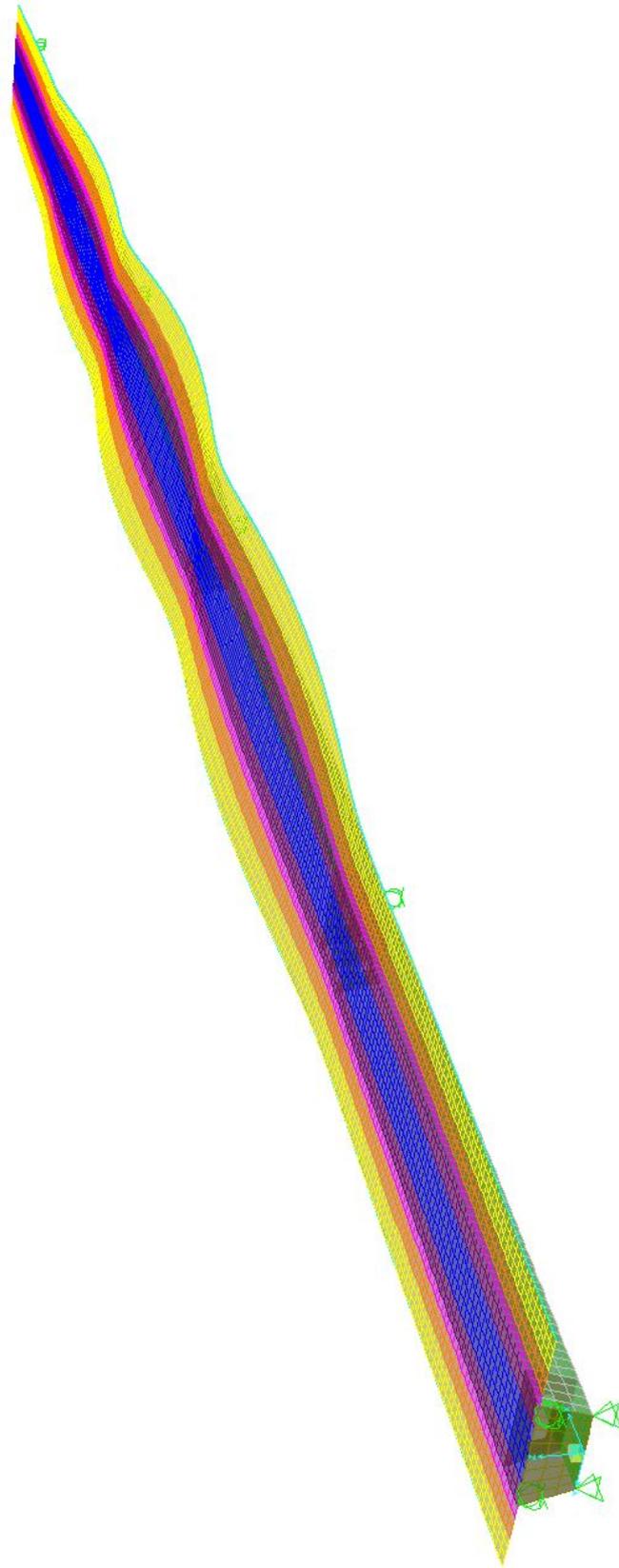


Figura 4.4: Séptimo modo de vibración (5.8397 Hz).

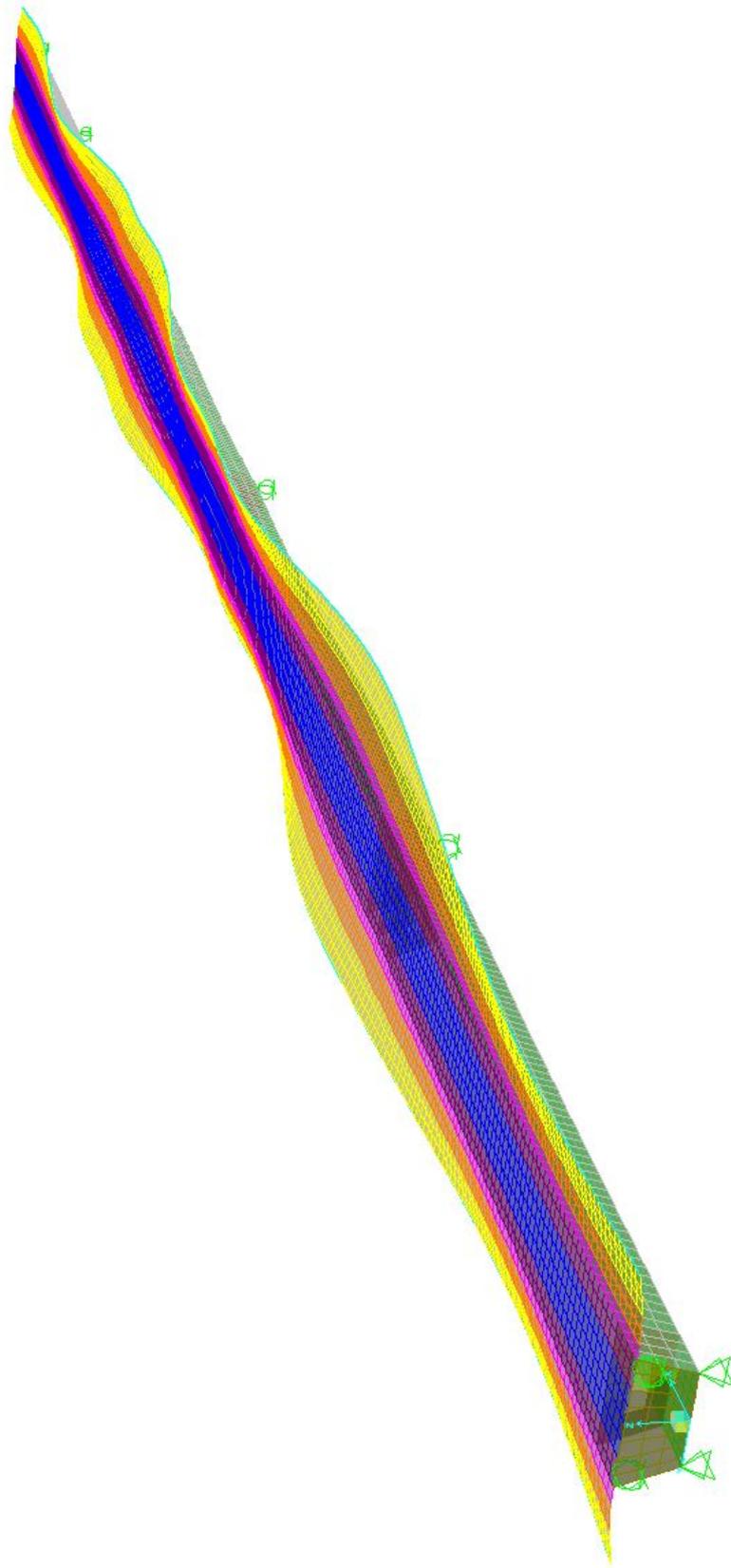


Figura 4.5: Modo de vibración nº18 (9.5795 Hz).

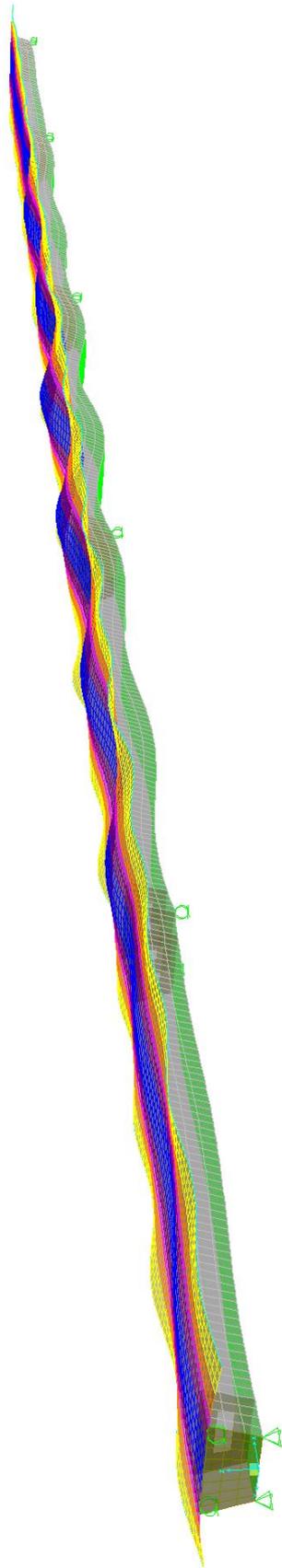


Figura 4.6: Modo de vibración nº111 (27.1665 Hz).

4.2.2. Valores máximos y valores límite.

Para tener en cuenta los efectos de las irregularidades de la vía, la IAPF-10 establece, para la tipología y velocidad de proyecto del viaducto tratado, el cálculo del coeficiente φ'' para amplificar los resultados calculados. Para el viaducto del Rodenillo, este coeficiente se ha evaluado, y toma el valor $\varphi'' = 3.27e-5$. Se ha considerado la expresión (B.12) de la IAPF-2010, con $L_\varphi = 62.1$ m; $f_0 = 2.58$ Hz.

Tal y como explicamos en el capítulo anterior, se ha realizado un submuestreo de la línea de carga cada 3 y 6 metros respectivamente. A continuación se mostrarán los resultados máximos:

Submuestreo de la línea de carga cada 3 metros.

Aceleración

- Máximo valor: $A_v^{ideal} = 1,2896m/s^2$
- Punto: 33 (centro de vano 4)
- Tren: A3
- Velocidad: 341 km/h
- Valor límite: $0.35g = 3.5 m/s^2$

Conclusión: No se supera el límite de aceleración máxima permitida por la IAPF-10.

Desplazamiento

- Máximo valor: $\delta_{din,real}^{ideal} = 4,6218e - 3m$
- Punto: 58 (1/4 de vano 5)
- Tren: A9
- Velocidad: 235 km/h
- Valor límite: 7.5 cm en este caso al ser un vano de 45 m

Conclusión: No se supera el límite de desplazamiento máximo permitido por la IAPF-10.

Submuestreo de la línea de carga cada 6 metros.

Aceleración

- Máximo valor: $A_v^{ideal} = 1,3164m/s^2$
- Punto: 33 (centro de vano 4)
- Tren: A3
- Velocidad: 341 km/h
- Valor límite: $0.35g = 3.5 m/s^2$

Conclusión: No se supera el límite de aceleración máxima permitida por la IAPF-10.

Desplazamiento

- Máximo valor: $\delta_{din,real}^{ideal} = 4,6238e - 3m$
- Punto: 58 (1/4 de vano 5)
- Tren: A9
- Velocidad: 235 km/h
- Valor límite: 7.5 cm en este caso al ser un vano de 45 m

Conclusión: No se supera el límite de desplazamiento máximo permitido por la IAPF-10.

4.2.3. Curvas envolventes de aceleraciones máximas.

Submuestreo de la línea de carga cada 3 metros.

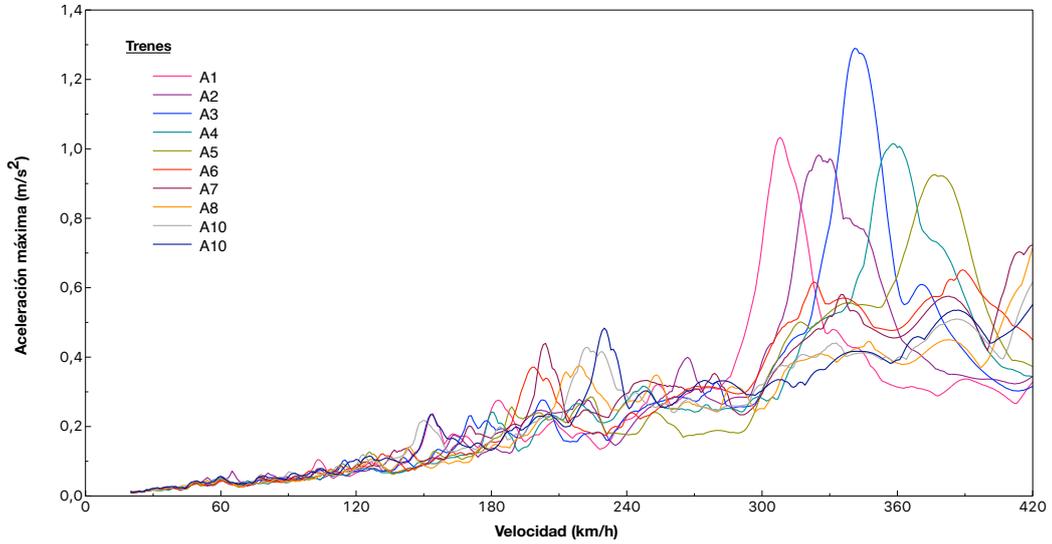


Figura 4.7: Máxima aceleración en el punto 33.

Submuestreo de la línea de carga cada 6 metros.

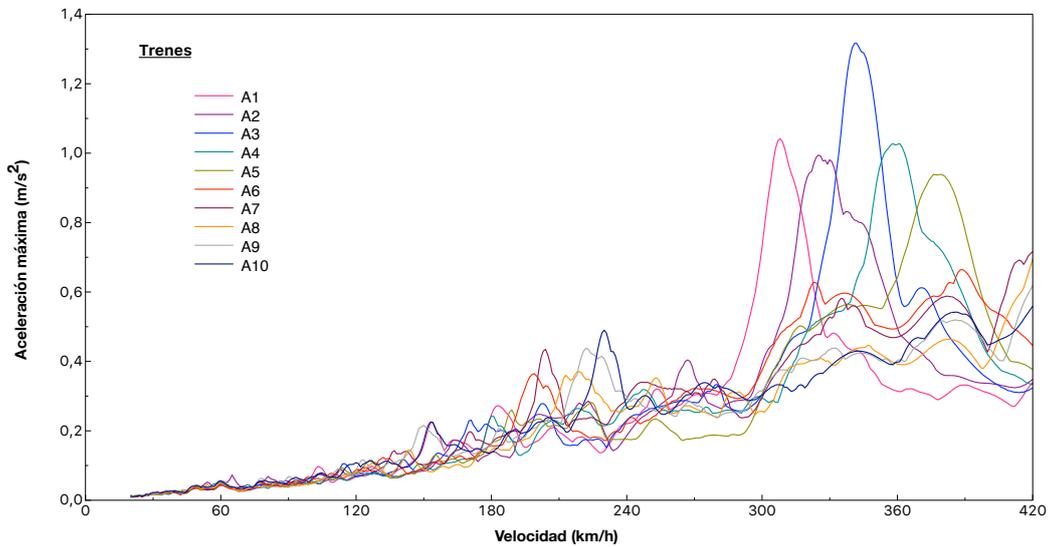


Figura 4.8: Máxima aceleración en el punto 33.

4.2.4. Curvas envolventes de desplazamientos máximos.

Submuestreo de la línea de carga cada 3 metros.

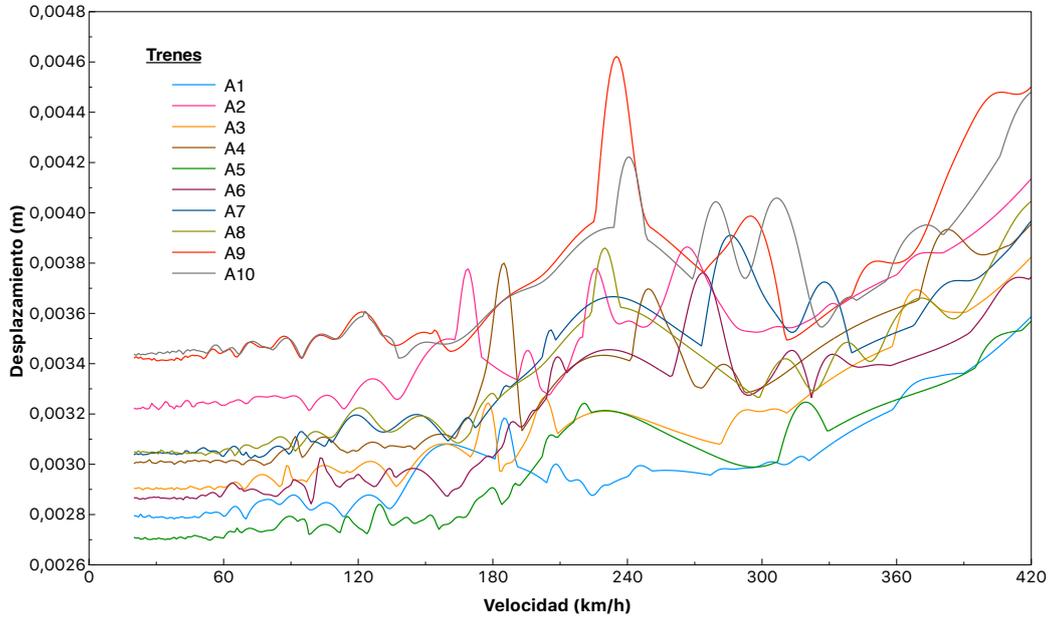


Figura 4.9: Máximo desplazamiento en el punto 58.

Submuestreo de la línea de carga cada 6 metros.

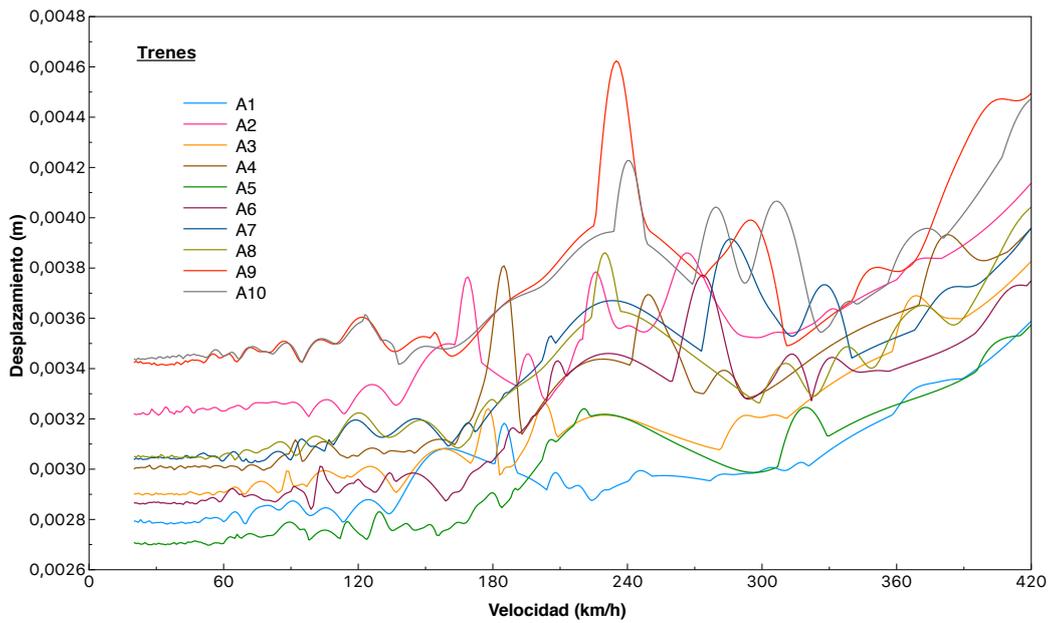


Figura 4.10: Máximo desplazamiento en el punto 58.

CAPÍTULO 5

Comparativa y conclusiones.

5.1. Comparativa de resultados.

Una vez analizado el modelo propuesto al paso dinámico de cargas, procedemos a analizar de una manera objetiva, si los resultados obtenidos submuestreando la línea de carga cada 6 metros son semejantes a los obtenidos con un submuestreo cada 3 metros.

A continuación, se mostrará los cuadros 5.1 y 5.2, comparando los resultados obtenidos para cada uno de los casos anteriores:

Aceleración	Submuestreo cada 3 metros	Submuestreo cada 6 metros
Máximo valor A_v^{ideal}	1.2896 m/s^2	1.3164 m/s^2
Punto	33 (centro de vano 4)	33 (centro de vano 4)
Tren	A3	A3
Velocidad	341 km/h	341 km/h
Valor límite	0.35g = 3.5 m/s^2	0.35g = 3.5 m/s^2
Conclusion	<i>No se supera el límite de aceleración máxima permitida por la IAPF-10.</i>	

Cuadro 5.1: Comparativa de aceleraciones para cada tipo de discretización.

Desplazamiento	Submuestreo cada 3 metros	Submuestreo cada 6 metros
Máximo valor δ_v^{ideal}	4.2618e-3	4.6238e-3
Punto	58 (1/4 de vano 4)	58 (1/4 de vano 4)
Tren	A9	A9
Velocidad	235 km/h	235 km/h
Valor límite	7.5 cm	7.5 cm
Conclusion	<i>No se supera el límite de desplazamiento máximo permitido por la IAPF-10.</i>	

Cuadro 5.2: Comparativa de desplazamientos para cada tipo de discretización.

Para poder entender estos resultados, realizaremos una comparativa gráfica tanto para aceleración como para desplazamiento.

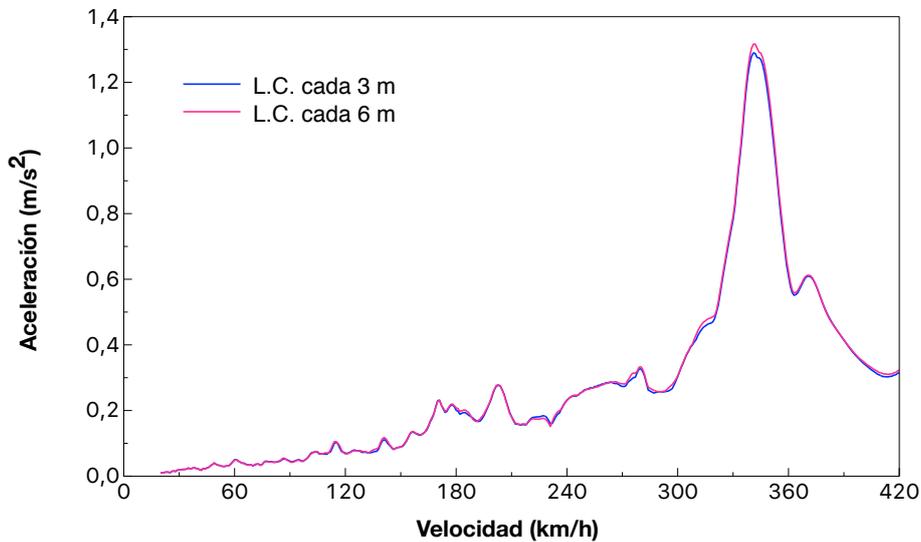


Figura 5.1: Comparativa de las aceleraciones para cada submuestreo.

En la figura 5.1 se puede observar que las gráficas se superponen, lo cual se traduce como válido para la discretización de la línea de carga cada 6 metros.

La resonancia se produce con el tren 3, del apéndice C.1 de la IAPF-10, en el mismo punto del vano 4 y a la misma velocidad para ambos submuestreos, en los resultados expuestos en el cuadro 5.1 se puede apreciar una mínima variación de la aceleración vertical máxima.

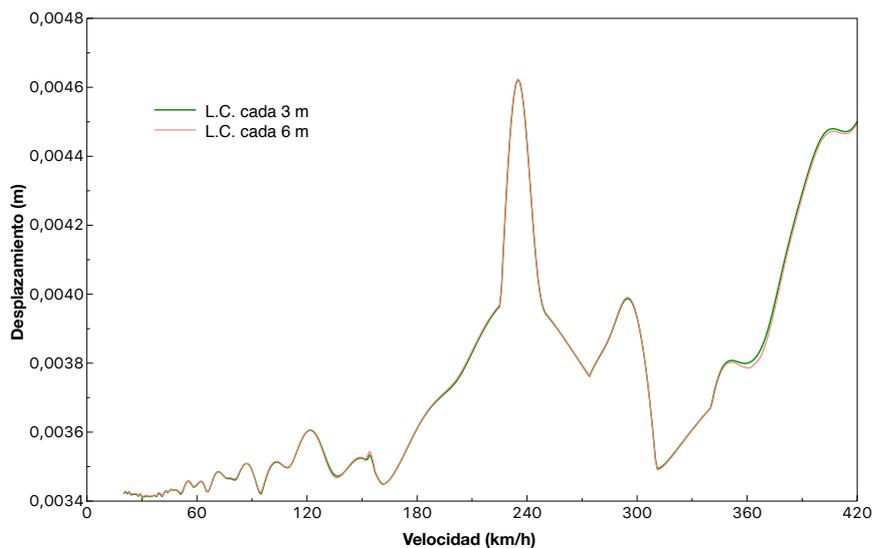


Figura 5.2: Comparativa de los desplazamientos para cada submuestreo.

Se puede observar como en la figura 5.2 sucede prácticamente lo mismo, pero en este caso, se trata del desplazamiento producido por dichos trenes. La flecha máxima producida presenta una alteración centesimal con respecto a las dos líneas de cargas, coincidiendo de igual forma en el punto, velocidad y tren.

Una de las aportaciones de esta estrategia es la reducción de los tiempos de cálculo.

- Para una línea de carga cada tres metros, tarda 6811.03 segundos (1.89h aproximadamente).
- Para una línea de carga cada seis metros, tarda 4721.31 segundos (1.31 h aprox.).

Para llevar a cabo este tipo de cálculos se necesita un servidor remoto, computadora que posea mayores características que un equipo normal. Otra de las ventajas que nos ofrece esta estrategia es la reducción de recursos de memoria y memoria RAM. Los requisitos de memoria RAM son de 10 coeficientes para cada elemento y modo de vibración.

Por otro lado, los requisitos de memoria de disco son claros. En el fichero de intercambio, si la línea de carga tiene menos elementos, el fichero es menor.

Si la malla para la línea de carga es menor (en un factor de la "mitad") eso redundará directamente en la "mitad de memoria".

Esto es posible hacerlo porque la línea de carga es una curva suave, de clase 1 (funciones cúbicas).

5.2. Conclusiones.

El submuestreo de la línea de carga generalizada cada seis metros, presenta unos resultados muy fiables, consiguiendo de esta forma reducir a la mitad el número de puntos a analizar. Por tanto, el tiempo de resolución se reduce favorablemente, ya que el número de cálculos a realizar será inferior.

Bibliografía

- [1] Instrucción de Acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril (IAPF-2010).
- [2] F. Bleich. *Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken*. Universidad de Michigan, 1924.
- [3] A. Kryloff. *Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben* (On the forced oscillations of uniform elastic rods). *Mathematische Annalen*, 1905.
- [4] Hayashikawa, Toshiro and Watanabe, Noboru. *Dynamic behavior of continuous beams with moving loads*. "Journal of the Engineering Mechanics Division" 107, 1, 229-246, 1946. ASCE.
- [5] Martínez-Castro, AE and Museros, P and Castillo-Linares, A. *Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli-Euler beams traversed by moving loads*. "Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli-Euler beams traversed by moving loads" 294, 1, 278-297, 2006, Elsevier.
- [6] Museros, P and Martínez-Castro, A and Castillo-Linares, A. *Design goes up a gear*. "Bridge. Design & Engineering" 33, 42-43.
- [7] Museros, P and Martínez-Castro, AE and Castillo-Linares, A and Schueller, GI. *Semi-Analytic Solution for Kirchhoff plates traversed by moving loads*. "Proc., 6th European Conf. on Structural Dynamics". 1619-1624, 2005, Millpress, Rotterdam, Netherlands.
- [8] Henchi, K and Fafard, M and Dhatt, G and Talbot, M. *Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads*. "Journal of sound and vibration" 199, 1, 33-50, 1997, Elsevier.
- [9] Zheng, DY and Cheung, YK and Au, FTK and Cheng, YS. *Vibration of multi-span non-uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions*. "Journal of Sound and Vibration". 212, 3, 455-467, 1998, Elsevier.
- [10] *Software Verification*. PROGRAM NAME: SAP2000 Computer & Structures. COMPUTER FILE: Example 1-022. FRAME TWO-DIMENSIONAL MOMENT FRAME WITH STATIC AND DYNAMIC LOADS.