# Índice General

# INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones integrales fueron estudiadas en el siglo XIX como herramienta para la investigación de los problemas de frontera asociados a la ecuación de Laplace, los cuales son de la forma:

$$\begin{cases} \Delta u(P), \quad P \in D \\ u(P) = g(P), \quad P \in \partial D \end{cases}$$

donde $D$ es una región acotada de $\mathbb{R}^3$ con interior no vacío, y $\partial D$ es la frontera de $D$. Asímismo, las ecuaciones integrales sirvieron para el análisis de otras ecuaciones elípticas en derivadas parciales. En los primeros años del siglo XX, Ivar Fredholm proporcionó condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución de una amplia variedad de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie. Posteriormente, con estos resultados, fue capaz de establecer teoremas de existencia mucho más generales para la solución de problemas de frontera tales como el anterior.

Actualmente, la teoría y aplicaciones de las ecuaciones integrales constituyen una materia importante en la rama de la Matemática Aplicada. Las ecuaciones integrales se usan como modelos matemáticos para una amplia variedad de situaciones físicas, y, además, aparecen como reformulaciones de otros problemas matemáticos.

Comencemos distiguiendo entre dos tipos principales de ecuaciones integrales: aquellas en las que el dominio de integración varía con la variable independiente de la ecuación, las cuales se conocen como *ecuaciones integrales de Volterra*; y aquellas en las cuales el dominio de integración es fijo, que se denominan *ecuaciones integrales de Fredholm*. En la presente memoria nos centraremos en una ecuación integral de Fredholm en particular, llamada *ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie*.

Los objetivos de esta memoria son, básicamente, dos, a saber: por un lado, estudiar los métodos clásicos de resolución de este tipo de ecuaciones integrales, lo cual se lleva a cabo en el Capítulo 2; por otro lado, proponer un nuevo método numérico para aproximar la solución de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie, estudio que se realizará en el Capítulo 4. Este nuevo método numérico está basado en el uso de bases de Schauder, en las que nos centraremos en el capítulo tercero. Pero pasemos a detallar explícitamente el contenido de esta memoria.

En el primer capítulo, presentamos la *ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie* y planteamos el problema de hallar su solución numérica. A continuación, introducimos el concepto de operador compacto y estudiamos ciertas propiedades de éstos. En la tercera sección de este capítulo transformamos la ecuación integral en una ecuación equivalente de punto fijo y analizamos la existencia y unicidad de solución de dicha ecuación mediante el uso del teorema del punto fijo de Banach. Además, bajo la hipótesis necesaria para que exista una única solución, obtendremos dicha solución como la suma infinita de potencias de un operador lineal. Finalmente, planteamos un caso concreto de ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie que puede resolverse aplicando un método directo.

En el Capítulo 2 se hace un estudio detallado de varios métodos clásicos que son fundamentales en la teoría de resolución de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie. Comenzamos viendo los métodos de proyección: el método de colocación y el método de Galerkin. Estudiamos el contenido teórico de cada uno de ellos y obtendremos, en cada caso, la solución exacta de la ecuación integral como límite de una sucesión de soluciones aproximantes. Posteriormente, analizamos el error numérico que conlleva aplicar los métodos anteriores, obteniendo una cota del mismo. Concluimos esta primera sección exponiendo varios ejemplos de los métodos desarrollados a lo largo de la misma. En la siguiente sección presentamos los *métodos de las proyecciones iteradas*, con los que se obtiene una sucesión de funciones que converge a la solución de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie más rapidamente de lo que lo hacía la sucesión resultante de los métodos de proyección. Para concluir este segundo capítulo, estudiamos el *método de Nyström*, que se basa en el uso de fórmulas de integración numérica para el cálculo aproximado de la integral que aparece en la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie y veremos la convergencia de este método, así como el error que se comete al hacer uso del mismo.

En el capítulo tercero, nos ocupamos del estudio de las *bases de Schauder*. Motivaremos la necesidad de tal concepto y, posteriormente, asociamos dos aplicaciones a una tal base de Schauder. En torno a estos tres conceptos girará todo este capítulo: veremos ejemplos y propiedades de cada uno de ellos y estudiaremos la continuidad de dichas aplicaciones. Los conceptos y propiedades estudiadas a lo largo de este capítulo constituirán una herramienta básica para el posterior desarrollo del último capítulo.

Para concluir esta memoria, en el Capítulo 4 presentamos un nuevo método numérico para obtener una aproximación de la solución de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie. Este método se basa en el uso del teorema del punto fijo de Banach, para obtener una sucesión de funciones que converja a la solución exacta de la ecuación integral. Pero entonces surge un problema de cálculo, ya que aparecen sucesivas integrales que no pueden calcularse numéricamente. Entonces, la idea clave del método consiste en tomar el integrando, obtener su desarrollo en serie en la base de Schauder del espacio de Banach correspondiente y truncar dicha serie utilizando para ello una de las aplicaciones asociadas a la base. El nuevo integrando así obtenido posee una primitiva inmediata y, por tanto, el método es fácilmente implementable. Concluiremos el capítulo exponiendo varios ejemplos numéricos que ponen de manifiesto la validez de este nuevo método.

Todos los resultados numéricos que aparecen en esta memoria los hemos obtenido mediante la implementación de los correspondientes métodos con el programa Mathematica.

No puedo pasar por alto el hecho de que este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de aquellos que han confiado en mí.
Agradecer a Ana Isabel Garralda Guillem y Manuel Ruiz Galán su paciencia, atención y dedicación hacia mi persona, ya que sin ellos este trabajo no habría salido adelante. Pero sobre todo, me siento agradecido por la amistad que me han brindado, la cual valoro profundamente.
No menos agradecido estoy a Domingo Gámez Domingo, por abrirme la primera puerta hacia mi formación posterior a la licenciatura.
Asimismo, quisiera expresar mi agradecimiento al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada, y en particular a D. Miguel Pasadas Fernández, por la posibilidad que me ha ofrecido de elaborar este trabajo.
Mi más sincero agradecimiento a mis padres y hermanos, por su apoyo y sacrificio a lo largo de tanto tiempo.
Finalmente, agradecer a Teresa todo su cariño, sin el cual, el esfuerzo diario carecería de sentido.

# Capítulo 1

# PRELIMINARES

## 1.1 Ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

La forma general de una tal ecuación integral es

$$\lambda u(x) - \int_D k(x,y)u(y)\ dy = f(x), \quad x \in D,\ \lambda \neq 0, \tag{1}$$

siendo $D$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, para algún $n \geq 1$. Fijamos en lo que sigue $n = 1$ y $D = [a,b]$, por lo que la ecuación integral queda como sigue:

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\ dy = f(x), \quad a \leq x \leq b,\ \lambda \neq 0. \tag{2}$$

Antes de continuar, mencionar que el estudio del caso general, en la mayoría de los casos, es análogo al que vamos a desarrollar en esta memoria.

La *función núcleo* $k(x, y)$ se considera absolutamente integrable, y se supone que verifica otras propiedades que serán suficientes para aplicar el teorema de la alternativa de Fredholm.

Para $f \neq 0$, tenemos $\lambda$ y $f$ dadas, y buscamos $u$; éste es el *problema no homogéneo*. Para $f = 0$, la ecuación se convierte en un *problema de autovalores*, y buscamos los autovalores $\lambda$ y las autofunciones $u$. En las siguientes secciones presentamos una teoría para el operador integral que aparece en la ecuación (2).

## 1.2 Operadores integrales compactos

La teoría que presentamos en este apartado puede parecer alejada de la búsqueda de la solución numérica de la ecuación integral (2). Sin embargo, los conceptos y las propiedades que se exponen serán necesarios para comprender el comportamiento de los métodos numéricos que se utilizarán en la resolución de la ecuación integral (2).

Es importante poner de manifiesto desde el principio que todos los espacios vectoriales que aparecen en esta memoria se consideran sobre el cuerpo de los números reales.

Cuando $X$ es un espacio vectorial finito-dimensional y $T : X \longrightarrow X$ es lineal, existe una teoría muy desarrollada sobre la resolución de la ecuación $Tx = y$. Para extender estos resultados a espacios infinito-dimensionales, introducimos el concepto de *operador compacto*.

**Definición 1.1.** Sean $X$ e $Y$ espacios normados, y sea $K : X \longrightarrow Y$ lineal. El operador $K$ se dice compacto si la clausura del conjunto

$$\{Kx : \|x\|_X \leq 1\}$$

es compacta en $Y$; esto es, $K(B_X)$ es relativamente compacto en $Y$.

Una condición equivalente es que la imagen de todo subconjunto acotado de $X$ sea relativamente compacto en $Y$.

### 1.2.1 Operadores integrales compactos en $C([a,b])$

De aquí en adelante nos ocupamos del operador

$$K : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

definido por

$$Ku(x) := \int_a^b k(x,y)u(y)\ dy, \quad (u \in C([a,b]),\ a \leq x \leq b)\,.$$

Considerando $C([a,b])$ con su norma $\|\cdot\|_\infty$, comprobemos que $K$ es un operador acotado y compacto. Supongamos que $k(x,y)$ es Riemann-integrable como función de $y$, para todo $x \in [a,b]$; además, supongamos lo siguiente:

i)

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0,$$

siendo

$$\omega(h) = \max_{a\leq x,z\leq b, |x-z|\leq h} \int_a^b |k(x,y) - k(z,y)|\ dy.$$

ii)

$$\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)| \, dy < \infty.$$

Utilizando la condición i), si $u(y)$ es acotada e integrable, entonces $Ku(x)$ es continua, con

$$|Ku(x) - Ku(z)| \leq \omega(|x-z|)\|u\|_\infty. \tag{3}$$

Usando la condición ii), tenemos acotada $K$, con

$$\|K\| = \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)| \, dy$$

Para estudiar la compacidad de $K$, comencemos identificando los conjuntos compactos de $C([a,b])$. Para ello, utilizamos el teorema de Arzela-Ascoli que afirma que un subconjunto $S \subset C([a,b])$ posee clausura compacta si y solo si:
1) $S$ es un conjunto de funciones uniformemente acotado y
2) $S$ es una familia equicontinua.
Ahora, consideremos el conjunto $A = \{Ku : u \in C([a,b]), \|u\|_\infty \leq 1\}$. Como, dado $Ku \in A$, se tiene que

$$\|Ku\|_\infty \leq \|K\| \; \|u\|_\infty \leq \|K\|,$$

entonces $A$ es uniformemente acotado. Además, a la vista de (3), $A$ es equicontinuo. Por tanto, $A$ tiene clausura compacta en $C([a,b])$, y, en consecuencia, $K$ es un operador compacto de $C([a,b])$ en $C([a,b])$.
Una cuestión que debemos plantearnos en estos momentos es: ¿qué funciones núcleo $k$ verifican las condiciones anteriores i) y ii)? Señalemos que, en particular, las funciones $k(x,y)$ que sean continuas para $x, y \in [a,b]$, verifican

esas dos propiedades. Terminemos este apartado viendo algunas propiedades de los operadores compactos.

Otra manera de obtener operadores compactos, además de la vista anteriormente, consiste en estudiar los límites de operadores más simples: los operadores finito-dimensionales sobre $L(X,Y)$, el espacio de Banach de los operadores lineales y continuos de $X$ en $Y$. Esto nos proporciona otra perspectiva sobre los operadores compactos: una visión que nos posibilita una mejor intuición, enfatizando la relación entre operadores compactos y operadores sobre espacios finito-dimensionales.

**Definición 1.2.** Sean $X$ e $Y$ espacios vectoriales. El operador lineal $K : X \longrightarrow Y$ se dice un operador de rango finito si el rango de $K$, $\mathcal{R}(K)$, es finito-dimensional.

Veamos a continuación un resultado que nos asegura la compacidad de un operador bajo ciertas hipótesis.

**Proposición 1.3.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y sea $K : X \longrightarrow Y$ un operador acotado y de rango finito. Entonces $K$ es un operador compacto.*

**Demostración.** $\mathcal{R}(K)$ es un espacio normado finito-dimensional, y, por tanto, es completo. Consideremos el conjunto

$$A = \{Ku : \|u\|_X \leq 1\}.$$

Claramente, el conjunto $A$ está acotado por $\|K\|$. Por tanto, $A$ es cerrado y acotado, y claramente $A \subseteq \mathcal{R}(K)$, luego $A$ es compacto. En consecuencia, $K$ es compacto. $\square$

**Ejemplo 1.4.** Sea $X = Y = C([a, b])$, con norma $\| \cdot \|_\infty$. Consideremos la función núcleo

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\gamma_i(y), \tag{4}$$

donde cada $\beta_i$ es continua sobre $[a, b]$ y cada $\gamma_i(y)$ es absolutamente integrable sobre $[a, b]$. Las funciones núcleo que se expresan de esta forma se llaman *degeneradas*. Entonces, el operador integral asociado $K$ es acotado y de rango finito de $C([a, b])$ en $C([a, b])$, luego $K$ es compacto. En efecto,

$$Ku(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) \int_a^b \gamma_i(y)u(y)\ dy, \quad (u \in C([a, b]), x \in [a, b]). \tag{5}$$

Entonces

$$\|K\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\beta_i\|_\infty \int_a^b |\gamma_i(y)|\ dy < \infty \tag{6}$$

De (5), como $Ku$ es combinación lineal de las funciones $\beta_i$, $Ku \in C([a, b])$ y además $\mathcal{R}(K) \subseteq < \beta_1, \ldots, \beta_n >$, luego $\mathcal{R}(K)$ es finito-dimensional. De (6) obtenemos que $K$ es acotado.

**Proposición 1.5.** *Sean $S \in L(X, Y)$ y $T \in L(Y, Z)$, y supongamos que $S$ o $T$ (o ambos) es compacto. Entonces la composición $TS$ es un operador compacto de $X$ en $Z$.*

**Demostración.** Supongamos, en primer lugar, que $S$ es compacto. En ese caso,

$$TS(B_X) = T(S(B_X)) \subseteq T(\overline{S(B_X)}).$$

Como $S$ es compacto, $\overline{S(B_X)}$ es compacto; y como $T$ es continuo, $T(\overline{S(B_X)})$ es compacto. Por tanto,

$$\overline{TS(B_X)} \subseteq T(\overline{S(B_X)}),$$

y como éste ultimo es compacto, entonces $\overline{TS(B_X)}$ es compacto. En consecuencia, $TS$ es un operador compacto.
Supongamos, finalmente, que $T$ es compacto. Así,

$$TS(B_X) = T(S(B_X)).$$

Como $T$ es acotado, $T(B_X)$ es un subconjunto acotado de $Y$; y por ser $T$ compacto, entonces $TS(B_X)$ es un subconjunto relativamente compacto de $Z$. Por tanto, $TS$ es compacto. □

El siguiente resultado nos proporciona una herramienta para utilizar los operadores de rango finito con el objetivo de obtener operadores compactos. Para la mayoría de los espacios de funciones $X$, los operadores compactos pueden ser caracterizados como límite de una sucesión de operadores acotados de rango finito. Esto justifica que enunciemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.6.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados, con $Y$ completo. Sea $K \in L(X,Y)$, sea $\{K_n\}$ una sucesión de operadores compactos en $L(X,Y)$ y supongamos que $K_n \to K$ en $L(X,Y)$. Entonces $K$ es compacto.*

Este es un resultado estándar, cuya demostración puede encontrarse en cualquier texto de análisis funcional. Consultar, por ejemplo, [1, p. 10] o bien [4, p. 174].

**Ejemplo 1.7.** Consideremos el intervalo $[a,b]$ y sea $k(x,y)$ una función continua para $x, y \in [a,b]$. Supongamos que podemos definir una sucesión de funciones núcleo degeneradas y continuas $k_n(x,y)$ para las cuales

$$\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y) - k_n(x,y)|\, dy \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad (7)$$

Entonces, para los operadores integrales asociados, se tiene que $\|K - K_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|K - K_n\| &= \max_{a\le x\le b} \int_a^b |(k-k_n)(x,y)|\, dy = \\ &= \max_{a\le x\le b} \int_a^b |k(x,y) - k_n(x,y)|\, dy \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.6., $K$ es compacto.

Este ejemplo muestra la estrecha relación entre los operadores compactos y los operadores finito-dimensionales.

### 1.2.2 Operadores integrales compactos en $L_2([a,b])$

Sea $X = Y = L_2([a,b])$ y sea $K$ el operador integral asociado a la función núcleo $k(x,y)$, esto es,

$$Ku(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)\, dy, \quad (u \in L_2([a,b]),\ a \le x \le b)\,.$$

Comencemos viendo que, bajo ciertas hipótesis sobre $k$, el operador $K$ es acotado y se aplica de $L_2([a,b])$ sobre $L_2([a,b])$. Sea

$$M := \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2\, dydx\right)^{1/2} \tag{8}$$

y supongamos que $M < \infty$, esto es, supongamos que $k \in L_2([a,b] \times [a,b])$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para $u \in L_2([a,b])$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Ku\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b k(x,y)u(y)\ dy \right|^2 dx \leq \\
&\leq \int_a^b \left( \int_a^b |k(x,y)|^2\ dy \right) \left( \int_a^b |u(y)|^2\ dy \right)\ dx = \\
&= M^2 \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $Ku \in L_2([a,b])$ y que

$$\|K\| \leq M. \tag{9}$$

Ahora bien, los operadores integrales $K$ con función núcleo degenerada, como en (4), son operadores acotados si para todo $i$, $\beta_i, \gamma_i \in L_2([a,b])$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|Ku\|_2^2 &\leq \left( \int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2\ dydx \right)\ \|u\|_2^2 = \\
&= \left( \int_a^b \int_a^b \left| \sum_{i=1}^n \beta_i(x)\gamma_i(y) \right|^2\ dydx \right)\ \|u\|_2^2 \leq \\
&\leq \left( \int_a^b \int_a^b \sum_{i=1}^n |\beta_i(x)\gamma_i(y)|^2\ dydx \right)\ \|u\|_2^2 =
\end{aligned}$$

$$= \left( \int_a^b \int_a^b \sum_{i=1}^{n} |\beta_i(x)|^2 \, |\gamma_i(y)|^2 \; dydx \right) \; \|u\|_2^2 =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \int_a^b |\beta_i(x)|^2 \, |\gamma_i(y)|^2 \; dydx \right) \; \|u\|_2^2 =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^{n} \int_a^b |\beta_i(x)|^2 \; dx \; \int_a^b |\gamma_i(y)|^2 \; dy \right) \; \|u\|_2^2$$

Por tanto

$$\|Ku\|_2^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \|\beta_i\|_2^2 \; \|\gamma_i\|_2^2 \right) \; \|u\|_2^2,$$

luego $K$ es acotado y

$$\|K\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\beta_i\|_2^2 \; \|\gamma_i\|_2^2.$$

Y, como ya vimos en el Ejemplo 1.4, $K$ es de rango finito. Entonces, por la Proposición 1.3., el operador integral $K$ es compacto.

Con el objetivo de estudiar la compacidad de $K$ para funciones núcleo más generales, supongamos que existe una sucesión $k_n(x, y)$ de funciones núcleo, para las cuales

i) $k_n : L_2(a, b) \longrightarrow L_2(a, b)$ es compacto, y

ii)

$$M_n := \left( \int_a^b \int_a^b |k(x, y) - k_n(x, y)|^2 \; dydx \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Por ejemplo, si $k$ es continuo, entonces esta condición se deduce de (7). El operador $K - K_n$ es un operador integral, y aplicando (8) y (9), obtenemos que

$$\|K - K_n\| \leq M_n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Por tanto, por la Proposición 1.6., $K$ es compacto.

## 1.3 Existencia y unicidad de solución

En esta última sección del primer capítulo, expondremos dos importantes resultados acerca de la existencia y unicidad de solución de ecuaciones integrales, como son el teorema de la alternativa de Fredholm y el teorema del punto fijo de Banach. Posteriormente, aplicaremos éste último resultado a la ecuación (2) y obtendremos una condición necesaria y suficiente para la unicidad de solución. Finalmente, estudiaremos la ecuación integral cuando ésta posee una función núcleo degenerada.

### 1.3.1 Teorema de la alternativa de Fredholm

A continuación estudiamos un importante resultado sobre existencia y unicidad de solución para ecuaciones con operadores, en el que se pone de manifiesto la importancia de los operadores compactos en este tipo de ecuaciones.

**Teorema 1.8.** *(alternativa de Fredholm) Sea $X$ un espacio de Banach y sea $K : X \longrightarrow X$ un operador compacto. Entonces la ecuación $(\lambda - K)u = f$, $\lambda \neq 0$, tiene una única solución $u \in X$ si, y sólo si, la ecuación homogénea $(\lambda - K)v = 0$ tiene sólo la solución trivial $v = 0$. En tal caso, el operador $\lambda - K : X \longrightarrow X$ es biyectivo y tiene inversa $(\lambda - K)^{-1}$ acotada.*

Omitimos la demostración de este importante resultado ya que ésta no constituye un objetivo de la presente memoria. Su comprobación puede consultarse en [1, p. 13].

### 1.3.2 Teorema del punto fijo de Banach

En esta sección nos ocupamos del estudio de ecuaciones con operadores y de su solución numérica. Para ello, sea $X$ un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|$, $A$ un subconjunto de $X$, y $T : A \longrightarrow X$ un operador. Comencemos considerando las ecuaciones de operadores que son de la forma siguiente:

$$u = T(u), \quad u \in A. \tag{10}$$

Como las soluciones de esta ecuación permanecen invariantes por $T$, se llaman *puntos fijos del operador $T$*. Una de las herramientas más importantes de que disponemos para asegurar la existencia de solución para tales ecuaciones, es el *teorema del punto fijo de Banach*. Presentaremos dicho resultado y, posteriormente, trataremos su aplicación en el estudio de algunos métodos iterativos en el análisis numérico.

Nuestro objetivo es el de estudiar la existencia de solución de la ecuación (10) y la posibilidad de aproximar dicha solución $u$ por el siguiente método iterativo. Tomemos una aproximación inicial $u_o \in A$, y definamos la sucesión $\{u_n\}$ mediante la fórmula de iteración

$$u_{n+1} = T(u_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Para que esta definición tenga sentido, analicemos el siguiente planteamiento: por un lado, $u_1 = T(u_0)$ con $u_0 \in A$; por otro, $u_2$ es la imagen por $T$ de $u_1$, luego debe ocurrir que $u_1 \in A$ para poder aplicarle $T$. En consecuencia la imagen de $T$ está contenida en $A$. Por tanto, le imponemos a $T$ la siguiente condición lógica:

$$T(v) \in A, \quad \forall\ v \in A. \tag{12}$$

Sea ahora un operador $S : A \subseteq X \longrightarrow X$. Veamos cómo resolver la ecuación

$$S(u) = 0 \tag{13}$$

mediante su reformulación en un problema equivalente de punto fijo de la forma (10). En efecto, si consideramos el operador $T(v) = v + S(v)$, el problema equivalente es obtener un punto fijo del operador $T$. Por tanto, cualquier resultado sobre el problema de punto fijo (10) puede ser trasladado a un resultado para la ecuación (13). De hecho, el método iterativo (11) nos proporciona un posible procedimiento de aproximación de la solución de (13).

Parece lógico, en principio, que para que el método iterativo anterior sea efectivo, debamos suponer alguna restricción sobre el operador $T$, además de la ya expuesta (12). Con este propósito, consideremos el siguiente ejemplo, el cual nos servirá de motivación.

**Ejemplo 1.9.** Tomemos $V = \mathbb{R}$, y $T$ el operador lineal

$$T(x) = ax + b. \quad x \in \mathbb{R},$$

siendo $a$ y $b$ constantes. Consideremos el método iterativo que induce el operador $T$, esto es: sea $x_0 \in \mathbb{R}$, y para $n = 0, 1, \ldots,$ definamos

$$x_{n+1} = ax_n + b.$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} x_n &= ax_{n-1} + b = a(ax_{n-2} + b) + b = a^2 x_{n-2} + ab + b = \\ &= a^2(ax_{n-3} + b) + ab + b = a^3 x_{n-3} + a^2 b + ab + b = \\ &= \ldots = a^n x_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \ldots + ab + b, \end{aligned}$$

es decir,

$$x_n = a^n x_0 + b \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} x_0 + nb & , \text{ si } a = 1 \\ a^n x_0 + b \, \dfrac{1 - a^n}{1 - a} & , \text{ si } a \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto, para el caso no trivial en que $a \neq 1$, el método iterativo es convergente si, y solo si, $|a| < 1$.

A la vista de la conclusión obtenida, consideramos el siguiente concepto.

**Definición 1.10.** Un operador $T : A \subseteq X \longrightarrow X$ decimos que es contractivo con constante de contractividad $\alpha \in [0, 1)$ si

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad \forall \; x, y \in A.$$

Observemos que si $T$ es un operador contractivo, entonces $T$ es uniformemente continuo (en particular, $T$ es continuo). En efecto, si $\alpha = 0$, entonces $T$ es constante, luego uniformemente continuo. Por tanto, supongamos que $\alpha \neq 0$; fijado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{\alpha}$ y comprobamos que, dados $x, y \in A$ con $\|x - y\| < \delta$, se verifica que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\| < \alpha \, \frac{\epsilon}{\alpha} = \epsilon,$$

con lo que $T$ es uniformemente continuo.

A continuación estudiamos el resultado más importante de esta sección, del cual obtendremos consecuencias interesantes en la siguiente.

**Teorema 1.11.** *(Teorema del punto fijo de Banach) Sean $X$ un espacio de Banach, $A$ un subconjunto cerrado y no vacío de $X$. Sea $T : A \longrightarrow A$*

*una aplicación contractiva con constante de contractividad $\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Entonces se verifican:*

*1. Existencia y unicidad: existe un único $u \in A$ tal que*

$$u = T(u).$$

*2. Convergencia y estimación del error de la iteración: Para cualquier $u_0 \in A$, la sucesión $\{u_n\} \subseteq A$ definida por $u_{n+1} = T(u_n), n = 0, 1, \ldots,$ converge a $u$:*

$$\|u_n - u\| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

*Para el error, las siguientes acotaciones son válidas:*

$$\|u_n - u\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \; \|u_0 - u_1\|, \tag{14}$$

$$\|u_n - u\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \; \|u_{n-1} - u_n\|, \tag{15}$$

$$\|u_n - u\| \leq \alpha \|u_{n-1} - u\|. \tag{16}$$

**Demostración.** La sucesión $\{u_n\}$ está bien definida ya que $T$ está definida de $A$ en $A$. Comencemos, pues, probando que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Gracias a la contractividad de la aplicación $T$, tenemos que

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\| \leq \ldots \leq \alpha^n \|u_1 - u_0\|.$$

Entonces, para cualquier $m \geq n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\|u_m - u_n\| &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \|u_{n+j+1} - u_{n+j}\| \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^{n+j} \|u_1 - u_0\| = \\
&= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} \|u_1 - u_0\| \leq \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|u_1 - u_0\|.
\end{aligned} \tag{17}$$

Como $\alpha \in [0,1)$, $\|u_m - u_n\| \to 0$ cuando $m, n \to \infty$. Por tanto, $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy; como además $A$ es un subconjunto cerrado del espacio de Banach $X$, $\{u_n\}$ posee límite $u \in A$. Tomando límite cuando $n \to \infty$ en $u_{n+1} = T(u_n)$, vemos que, por la continuidad de $T$, $u = T(u)$; es decir, $u$ es un punto fijo de $T$.

Respecto a la unicidad, supongamos que $u_1, u_2 \in A$ son puntos fijos de $T$, esto es, $u_1 = T(u_1)$ y $u_2 = T(u_2)$. Entonces

$$u_1 - u_2 = T(u_1) - T(u_2).$$

Por tanto,

$$\|u_1 - u_2\| = \|T(u_1) - T(u_2)\| \leq \alpha \|u_1 - u_2\|,$$

lo cual implica que $\|u_1 - u_2\| = 0$, ya que $\alpha \in [0,1)$. En conclusión, un punto fijo de la aplicación contractiva $T$ es único.

Pasemos a comprobar el error en la estimación. Haciendo $m \to \infty$ en (17), obtenemos la estimación (14). A partir de

$$\|u_n - u\| = \|T(u_{n-1}) - T(u)\| \leq \alpha \|u_{n-1} - u\|$$

obtenemos la estimación (16). Finalmente, con esta estimación, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\| &\leq \alpha\|u_{n-1} - u\| \leq \\
&\leq \alpha(\|u_{n-1} - u_n\| + \|u_n - u\|) = \\
&= \alpha\|u_{n-1} - u_n\| + \alpha\|u_n - u\|
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$(1-\alpha)\|u_n - u\| \leq \alpha\|u_{n-1} - u_n\|,$$

de donde se deduce fácilmente (15). □

### 1.3.3 Resultado de existencia y unicidad de solución

Consideremos la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\, dy = f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{18}$$

Supongamos que $k \in C([a,b] \times [a,b])$ y que $f \in C([a,b])$, aunque estas condiciones pueden ser debilitadas considerablemente. En el espacio $C([a,b])$ consideramos la norma del máximo, esto es, la norma $\|\cdot\|_\infty$. Trabajaremos con la ecuación (18) en la siguiente forma, utilizando operadores:

$$(\lambda - K)u = f, \tag{19}$$

donde

$$Ku(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)\, dy, \quad (u \in C([a,b]),\ a \leq x \leq b)\,.$$

Vamos a aplicar el teorema del punto fijo de Banach para estudiar la existencia de solución de esta ecuación. Es importante resaltar la relación entre dicho teorema y el teorema de la alternativa de Fredholm: cada resultado posee unas hipótesis diferentes de las del otro y, sin embargo, ambos nos proporcionan la misma tesis, que es la unicidad de solución de una ecuación de la forma (19). Resulta también interesante observar que en ambos teoremas no se enuncia ninguna hipótesis acerca de $f$, sino sólo de $K$ y $\lambda$. Así, sea cual sea la aplicación $f$ que aparezca en la ecuación integral, la unicidad de solución de la misma sólo dependerá de $K$ y de $\lambda$. Nosotros vamos a utilizar el teorema del punto fijo de Banach para asegurar unicidad de solución de la ecuación (19), pero podríamos utilizar igualmente el teorema de la alternativa de Fredholm.

La ecuación (19) la expresamos de manera equivalente en la forma:

$$(I - L)u = g$$

donde

$$L = \frac{K}{\lambda} \quad \text{y} \quad g = \frac{f}{\lambda}.$$

Equivalentemente,

$$u = L(u) + g.$$

Si consideramos la aplicación $T$ dada por $T(u) = L(u) + g$, ya tenemos expresada la ecuación (19) como una ecuación de punto fijo. Para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach, veamos cuándo se verifica la única hipótesis de éste. Veamos, pues, cuándo $T$ es contractiva: dadas $u, v \in C([a, b])$,

$$\|T(u) - T(v)\|_\infty = \|L(u) - L(v)\| \leq \|L\| \; \|u - v\|_\infty,$$

donde en la desigualdad hemos utilizado la linealidad y continuidad de $L$ ($T$ no tiene por qué ser lineal; pero $L$ sí) (para cada $g$, $T$ es distinta, pero en el cálculo de la constante de contractividad, $g$ no influye). Luego la constante de contractividad es

$$\alpha = \|L\| = \frac{1}{|\lambda|} \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x,y)| \, dy.$$

Por tanto, hay un único punto fijo si $\alpha = \|L\| < 1$, si y solo si,

$$\|K\| < |\lambda|,$$

esto es,

$$\max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x,y)| \, dy < |\lambda|.$$

Por ejemplo, esta condición se verifica si $\|k\|_\infty < \dfrac{|\lambda|}{b-a}$, ya que

$$\|K\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |k(x,y)| \, dy < \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b \frac{|\lambda|}{b-a} \, dy = \frac{|\lambda|}{b-a} \max_{a \leq x \leq b} (b-a) = |\lambda|.$$

En ese caso, la solución $u$ viene dada por el siguiente método iterativo: dada $u_0 \in C([a,b])$ arbitraria, tenemos:

$$\begin{aligned}
u_1 &= T(u_0) = g + L(u_0), \\
u_2 &= T(u_1) = g + L(g) + L^2(u_0), \\
&\vdots \\
u_n &= T(u_{n-1}) = g + L(g) + \ldots + L^{n-1}(g) + L^n(u_0).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$u = \lim_{n \geq 1} u_n.$$

Por tanto,

$$u = \lim_{n \geq 1} \left[ \left( \sum_{k=0}^{n-1} L^k(g) \right) + L^n(u_0) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} L^k(g)$$

ya que $L^n(u_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ porque, al tener $\|L\| < 1$, entonces

$$\|L^n(u_0)\|_\infty \leq \|L^n\| \; \|u_0\|_\infty \leq \|L\|^n \; \|u_0\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

### 1.3.4 Ecuaciones con núcleo degenarado

Para finalizar este primer capítulo, estudiemos un tipo particular de ecuación integral de Fredholm de segunda especie que se puede resolver, al menos de manera teórica, mediante la aplicación de un método directo. Éstas son las ecuaciones integrales que poseen un núcleo degenerado.

Ya introdujimos este tipo de funciones núcleo en el Ejemplo 1.4. de este mismo capítulo. Recordemos que se trata de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\; dy = f(x), \quad a \leq x \leq b, \; u \in C([a,b]),$$

donde

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\gamma_i(y),$$

siendo cada $\beta_i \in C([a,b]), \gamma_i \in L_1([a,b])$. Para resolver este tipo de integrales utilizaremos el *método del núcleo degenerado*, que es uno de los métodos numéricos más sencillos de definir y analizar.

Comencemos analizando aspectos generales acerca de este método. Para ello, consideremos la ecuación integral

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\; dy = f(x), \quad a \leq x \leq b \tag{20}$$

con $\lambda \neq 0$. Normalmente trabajaremos en el espacio $X = C([a,b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, y ocasionalmente en $X = L_2([a,b])$. El operador integral $K$ asociado a la ecuación (20) se supone que es un operador compacto de $X$ en $X$.

Aproximemos la función núcleo $k$ por una sucesión de funciones núcleo degeneradas,

$$k_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,n}(x)\beta_{i,n}(y), \quad n \geq 1 \tag{21}$$

de tal manera que los operadores integrales asociados $K_n$ verifiquen

$$\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = 0.$$

A medida que aumente la velocidad de convergencia a cero de este límite, aumentará la velocidad de convergencia de $u_n$ hacia $u$, donde $u_n$ es la solución de la ecuación aproximante

$$\lambda u_n(x) - \int_a^b k_n(x,y)u_n(y)\, dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{22}$$

Nuestro primer objetivo es el de conseguir $u_n$ a partir de la ecuación (22). Esto es, tratamos de obtener un método que nos proporcione la solución aproximante $u_n$.

Si utilizamos la fórmula (21) para la expresión de $k_n(x,y)$, la ecuación integral $(\lambda - K_n)u_n = f$ adopta la siguiente forma:

$$\lambda u_n(x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) \int_a^b \beta_j(y)u_n(y)\, dy = f(x), \quad a \leq x \leq b. \tag{23}$$

Entonces, la solución $u_n$ viene dada por

$$u_n(x) = \frac{1}{\lambda}\left(f(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(x)\right), \tag{24}$$

donde $c_j = \displaystyle\int_a^b \beta_j(y) u_n(y)\ dy$. Para determinar $\{c_j\}$, multiplicamos la ecuación (23) por $\beta_i(x)$ e integramos sobre $[a, b]$. Por tanto, tenemos

$$\lambda \int_a^b \beta_i(x) u_n(x)\ dx - \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b \beta_i(x)\alpha_j(x)\ dx = \int_a^b \beta_i(x) f(x)\ dx.$$

Si llamamos

$$< \alpha_j, \beta_i >= \int_a^b \beta_i(x)\alpha_j(x)\ dx,$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^{n} c_j < \alpha_j, \beta_i >=< f, \beta_i >, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Por tanto, resolvemos el sistema (25) y la solución aproximante $u_n$ se obtiene por la expresión (24).

Una vez que hemos conseguido un procedimiento para obtener la solución aproximante $u_n$, veamos un resultado con el que aseguramos la convergencia de $u_n$ hacia $u$, bajo ciertas hipótesis.

**Teorema 1.12.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $K$ un operador acotado. Supongamos que $\lambda - K : X \longrightarrow X$ es biyectivo. Además, supongamos que $\{K_n\}$ es una sucesión de operadores lineales continuos verificando*

$$\lim_{n\to\infty} \|K - K_n\| = 0. \tag{26}$$

*Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, el operador $\lambda - K_n : X \longrightarrow X$ es biyectivo y*

$$\|(\lambda - K_n)^{-1}\| \leq \frac{\|(\lambda - K)^{-1}\|}{1 - \|(\lambda - K)^{-1}\|\ \|K - K_n\|}\ , \quad n \geq N. \tag{27}$$

*Para las ecuaciones $(\lambda - K)u = f$ y $(\lambda - K_n)u_n = f$, $n \geq N$, tenemos que*

$$\|u - u_n\| \leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\|\ \|Ku - K_n u\|, \quad n \geq N. \tag{28}$$

**Demostración.** Como $\|K - K_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|K - K_n\| < \frac{1}{\|(\lambda - K)^{-1}\|}\ , \quad n \geq N. \tag{29}$$

Por el teorema de la serie geométrica (ver Teorema A.1 en [1, p. 515] o bien [5, p. 192]), el operador $I + (\lambda - K)^{-1}(K - K_n)$es biyectivo, tiene inversa acotada y

$$\|(I + (\lambda - K)^{-1}(K - K_n))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(\lambda - K)^{-1}\|\ \|K - K_n\|}\ .$$

Haciendo uso de la igualdad

$$\begin{aligned} \lambda - K_n &= \lambda - K + (K - K_n) = \\ \\ &= (\lambda - K)(I + (\lambda - K)^{-1}(K - K_n)), \end{aligned}$$

deducimos que el operador $\lambda - K_n$ es biyectivo, ya que los dos factores que lo definen en la igualdad anterior son biyectivos, y obtenemos la cota (26).
Para la cota de error (27), usamos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} u - u_n &= (\lambda - K)^{-1} f - (\lambda - K_n)^{-1} f = \\ \\ &= (\lambda - K_n)^{-1}(K - K_n)(\lambda - K)^{-1} f = \\ \\ &= (\lambda - K_n)^{-1}(Ku - K_n u) \end{aligned}$$

De donde la cota de error se obtiene de manera inmediata.
Una modificación de lo anterior nos proporciona

$$\|(\lambda - K)^{-1} - (\lambda - K_n)^{-1}\| \leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\|\ \|(\lambda - K)^{-1}\|\ \|K - K_n\|.$$

Como $\|K - K_n\| \to 0$, por la hipótesis (26), y $\|(\lambda - K)^{-1}\|$ y $\|(\lambda - K_n)^{-1}\|$ están acotados, por la hipótesis (27) y la relación (29), entonces

$$(\lambda - K_n)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} (\lambda - K)^{-1}$$

en $L(X,X)$. De hecho,

$$\|(\lambda - K_n)^{-1}\| \xrightarrow{n\to\infty} \|(\lambda - K)^{-1}\|,$$

con lo que concluimos la demostración. $\square$

Como consecuencia de este teorema de convergencia, observamos que la velocidad de convergencia de $u_n$ hacia $u$ es independiente de la diferenciabilidad de la solución $u$, ya que la desigualdad (28) implica que

$$\|u - u_n\| \leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \; \|K - K_n\| \; \|u\|.$$

Si $\|K - K_n\|$ converge a cero rápidamente, entonces lo mismo podemos decir de $\|u - u_n\|$, independientemente de la diferenciabilidad de $u$. Esto no será cierto para la mayoría de otros tipos de métodos numéricos para resolver la ecuación (20).

Si, por un lado, consideramos $X = C([a,b])$, elegimos el núcleo degenerado (21) de manera que las funciones $\alpha_i(x)$ sean todas continuas y las funciones $\beta_i(y)$ sean todas absolutamente integrables. Para aplicar el anterior teorema de convergencia, notemos que

$$\|K - K_n\| = \max_{a\leq x\leq b} \int_a^b |k(x,y) - k_n(x,y)| \; dy.$$

Si, por otro lado, consideramos $X = L_2([a,b])$, exigimos que en el núcleo degenerado (21) se verifique que $\alpha_i, \beta_i \in L_2([a,b])$, para todo $i = 1,\ldots,n$. Para aplicar el teorema de convergencia, podemos utilizar que

$$\|K - K_n\| \leq \left( \int_a^b \int_a^b |k(x,y) - k_n(x,y)|^2 \; dydx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si esto no fuese suficiente, entonces podemos elegir otras cotas que también se suelen utilizar. Los núcleos $k_n(x,y)$ se deben elegir de manera que $\|K - K_n\|$ converja a cero tan rápido como sea posible.

Existen muchas razones prácticas por las cuales es apropiado el uso del método que proporcionan las ecuaciones (24)-(25). De acuerdo con el Teorema 1.12., podemos suponer que $(\lambda - K_n)u_n = f$ posee una única solución para todo $y \in X$. Entonces queremos que el sistema lineal asociado (25) sea compatible determinado, esto es, que tenga una única solución. Además, en el momento de elegir las funciones $\alpha_j(x)$ y $\beta_i(y)$, hay que tener presente que el sistema requiere de la evaluación de las integrales $< \alpha_j, \beta_i >$ y $< f, \beta_i >$, y tomar tales funciones de manera que la evaluación numérica esas integrales sean relativamente sencillas.

El siguiente resultado se refiere a la compatibilidad del sistema (25), y nos proporciona condiciones bajo las cuales dicho sistema lineal es compatible determinado. Omitimos la demostración del mismo ya que no aporta nada relevante sobre el tema que estamos tratando. Para consulta, ver [1, p. 26].

**Teorema 1.13.** *Sea $X = C([a,b])$ o $L_2([a,b])$. Supongamos que $\lambda - K_n : X \longrightarrow X$ es un operador biyectivo, con $\lambda \neq 0$. Y supongamos que $K_n$ tiene el núcleo degenerado (21). Entonces el sistema lineal (25) es regular.*

Este teorema nos asegura que el sistema (25) es regular para los casos en que estamos interesados, que son aquellos en los que $\lambda - K_n$ es biyectivo.

Finalmente, para finalizar con esta sección, vamos a exponer un método con el que se construyen aproximaciones de núcleos degenerados. Para ello, recordemos la ecuación (20):

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\, dy = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Normalmente, $k$ se puede escribir como una serie de potencias en $y$,

$$k(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)(y-a)^i \tag{30}$$

o en la variable $x$,

$$k(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(y)(x-a)^i.$$

Denotemos por $k_n$ a la suma parcial de los $n$ primeros términos del segundo miembro de (30), esto es,

$$k_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x)(y-a)^i.$$

Haciendo uso de la notación utilizada en (21), $k_n$ es una función núcleo degenerada, con

$$\alpha_i(x) = g_{i-1}(x), \quad \beta_i(y) = (y-a)^{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Entonces, el sistema lineal (25) se expresa como sigue:

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b (y-a)^{i-1} g_{j-1}(y)\ dy = \int_a^b f(y)(y-a)^{i-1}\ dy, \quad i = 1, \ldots, n,$$

y la solución $u_n$ viene dada por

$$u_n(x) = \frac{1}{\lambda}\left( f(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} g_i(x) \right).$$

# Capítulo 2

# ALGUNOS MÉTODOS NUMÉRICOS CLÁSICOS

En el presente capítulo estudiaremos dos de los más importantes tipos de métodos de resolución numérica de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie: los métodos de proyección y el método de Nyström. En cada uno de ellos, analizaremos ejemplos numéricos que nos faciliten la comprensión del desarrollo teórico de los métodos.

## 2.1 Método de las proyecciones: colocación y Galerkin

### 2.1.1 Introducción

El objetivo que nos planteamos en esta sección es resolver numéricamente la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\ dy = f(x), \quad (x \in [a,b]). \tag{1}$$

Recordemos que esta ecuación puede escribirse en notación de operadores de la siguiente forma: si

$$Ku := \int_a^b k(\cdot,y)u(y)\ dy,$$

la ecuación (1) equivale a

$$(\lambda I - K)u = f,$$

o de forma algo más intuitiva

$$(\lambda - K)u = f. \tag{2}$$

En cualesquiera de los métodos de las proyecciones intervienen siempre los siguientes elementos: un espacio de Banach de funciones $V$ (normalmente $C([a,b])$ o $L_2([a,b])$), una sucesión de subespacios aproximantes finito-dimensionales $V_n \subseteq V,\ n \geq 1$, donde cada $V_n$ tiene dimensión $k_n$ y una base $\{\psi_1, \ldots, \psi_{k_n}\}$ de $V_n$, para cada $n \geq 1$. La idea fundamental de un método numérico de este tipo consiste en considerar una función $u_n \in V_n$ arbitraria, la cual puede ser expresada en términos de la base anterior como sigue:

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \psi_j(x), \quad (x \in [a,b]), \tag{3}$$

sustituir esta expresión de $u_n$ en la ecuación (1) y determinar los coeficientes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_n}\}$ exigiendo exactitud en algún sentido. La función $u_n$ así obtenida se considera una aproximación de la solución exacta $u$ de la ecuación (1).

Como posteriormente será utilizado, introducimos ahora el concepto de *residuo* en la aproximación de la ecuación cuando se considera la aproximación $u_n$ de la solución exacta $u$, que para cada $x \in [a,b]$, viene dado por

$$\begin{aligned} r_n(x) := \quad & \lambda u_n(x) - \int_a^b k(x,y) u_n(y)\, dy - f(x) = \\ & = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \left( \lambda \psi_j(x) - \int_a^b k(x,y) \psi_j(y)\, dy \right) - f(x), \end{aligned}$$

es decir, el residuo consiste en la ecuación aproximante despejada a cero. Tal como hemos hecho con la ecuación (1), el residuo puede escribirse en notación de operadores como sigue

$$r_n = (\lambda - K)u_n - f.$$

Con este concepto que acabamos de introducir, podemos reformular equivalentemente que el objetivo de los métodos de proyección es el de determinar los coeficientes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_n}\}$ forzando que $r_n(x)$ sea cero en algún sentido. De esta forma se obtiene una función $u_n(x)$, que, en principio, debe ser una buena aproximación de la verdadera solución $u(x)$. Pondremos de manifiesto que efectivamente ocurre así en dos métodos clásicos usados asiduamente: el de colocación y el de Galerkin.

### 2.1.2 Método de colocación

Consideremos unos puntos $x_1, \ldots, x_{k_n} \in [a, b]$ (que llamaremos nodos), e imponemos que

$$r_n(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, k_n.$$

Esto nos lleva a determinar los coeficientes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_n}\}$ como la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \left( \lambda \psi_j(x_i) - \int_a^b k(x_i, y) \psi_j(y)\ dy \right) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, k_n. \tag{4}$$

Una vez planteado el método, resulta natural plantearse si este sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado. Además, en caso afirmativo, cabe plantearnos si verdaderamente la sucesión de funciones $\{u_n\}_{n \geq 1}$ obtenida converge a la solución exacta $u$ de la ecuación (1). A lo largo de este capítulo iremos dando respuesta a estas cuestiones.

Otro punto que debe quedar claro es el espacio de funciones $V$ en el que trabajaremos en el método de colocación. Éste suele ser $C([a, b])$ ya que presenta la ventaja de permitir evaluar las funciones en los nodos. Así, no consideramos $L_2([a, b])$ ya que los elementos de este espacio constituyen clases de equivalencia, de manera que dos funciones están en la misma clase si son iguales salvo en un conjunto de medida nula, esto es, iguales casi por doquier. Por tanto, no influye para nada el valor de una función en un punto y, en consecuencia, no tiene sentido la aplicación evaluación en este espacio. Por esta razón es por la que consideramos el espacio de $C([a, b])$ en el método de colocación.

A continuación, nuestro propósito es el de escribir el sistema de ecuaciones (4) de una forma más abstracta. A este respecto, introducimos un operador lineal y continuo $P_n$, que además es una proyección de $C([a,b])$ sobre $V_n$. Esto es, $P_n$ se define de la siguiente forma: dada $u \in C([a,b])$, se define $P_n u$ como el elemento de $V_n$ que interpola a $u$ en los nodos $\{x_1, \ldots, x_{k_n}\}$. Más adelante probaremos que $P_n$ es una proyección lineal y continua. Como $P_n u$ es un elemento de $V_n$, se expresa en la forma

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \psi_j(x),$$

donde los coeficientes $\{\alpha_j\}$ están determinados resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \psi_j(x_i) = u(x_i), \quad i = 1, \ldots, k_n.$$

Es bien conocido que éste último sistema tiene solución única si, y solo si,

$$\det[\psi_j(x_i)] \neq 0. \tag{5}$$

Sin embargo, esto no supone dificultad alguna en el desarrollo teórico que pretendemos llevar a cabo, ya que supondremos que la condición (5) se verifica en cualquier método de colocación sobre el que trabajemos. De hecho, esta condición es equivalente a que las funciones $\{\psi_1, \ldots, \psi_{k_n}\}$ sean linealmente independientes como funciones definidas en $[a,b]$.

Ahora introducimos una nueva base en cada subespacio $V_n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k_n\}$, sea $l_i \in V_n$ el elemento que satisface las condiciones de interpolación

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \ldots, k_n.$$

Debido a, (5) sabemos que existe una única función $l_i$ que verifica dichas condiciones; además, el conjunto $\{l_1, \ldots, l_{k_n}\}$ constituye una base para $V_n$. Estas funciones $l_i$ se llaman funciones básicas de Lagrange o base de Lagrange. Con esta nueva base podemos ahora escribir

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j l_j(x), \quad (u \in V, x \in [a,b]).$$

Evaluando en un nodo $x_i$ y teniendo en cuenta que $P_n u$ interpola a $u$ en los nodos $\{x_1, \ldots, x_{k_n}\}$, tenemos que

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j l_j(x_i) = \alpha_i = u(x_i)$$

luego

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{k_n} u(x_j) l_j(x), \quad x \in [a,b]. \tag{6}$$

Gracias a esto, vemos que $P_n$ es lineal. Lógicamnete, es de rango finito, pues $P_n(V) \subseteq V_n$. Además, como operador de $C([a,b])$ comprobemos que $P_n$ es continua y que se verifica

$$\|P_n\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x)|.$$

Sean $x \in [a,b], u \in V$. Entonces

$$|P_n u(x)| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |u(x_j)||l_j(x)| \leq \|u\|_\infty \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x)| \leq \|u\|_\infty \max_{z \in [a,b]} \left( \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(z)| \right).$$

Por lo tanto,

$$\|P_n u\| = \max_{x \in [a,b]} |P_n u(x)| \leq \|u\|_\infty \max_{z \in [a,b]} \left( \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(z)| \right),$$

lo que garantiza que $P_n$ es continua y que, concretamente,

$$\|P_n\| \leq \max_{x \in [a,b]} \left( \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x)| \right).$$

Para comprobar que también se cumple la otra desigualdad, veamos que, de hecho, se alcanza la norma; esto es, vamos a probar que existe una función $u$ (con $\|u\|_\infty \leq 1$) que verifica

$$\|P_n u\| = \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{j=1}^{k_n} u(x_j) l_j(x) \right| = \max_{x\in[a,b]} \left( \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x)| \right).$$

Para ello, seguimos un razonamiento heurístico. Como $l_j$ es continua y el intervalo $[a,b]$ es compacto, el anterior máximo se alcanza en un punto $x_0$, es decir,

$$\max_{x\in[a,b]} \left( \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x)| \right) = \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x_0)|.$$

Si tuviésemos esa función $u$, entonces debería ocurrir que

$$\sum_{j=1}^{k_n} u(x_j) l_j(x_0) = \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x_0)|$$

y, en consecuencia, los sumandos de estas sumas deben coincidir término a término. Así pues, definimos $u$ de la siguiente forma:

$$u(x_j) = \begin{cases} 1 & ,\text{si} \quad l_j(x_0) \geq 0 \\ -1 & ,\text{si} \quad l_j(x_0) < 0 \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, k_n$$

y sobre los intervalos de la forma $]x_j, x_{j+1}[$, para $j = 1, 2, \ldots, k_n - 1$, $u$ es lineal. De esta forma, $u$ es una función poligonal a trozos con $\|u\|_\infty \leq 1$ y que verifica:

$$\|P_n u\| = \max_{x\in[a,b]} \left( \sum_{j=1}^{k_n} |l_j(x)| \right),$$

con lo que concluimos la comprobación.

Retomemos en este momento el motivo por el cual introdujimos la proyección $P_n$ y por el que hemos deducido la expresión (6). Gracias a ésta, dada una función $g \in C([a,b])$, notemos que

$$P_n g = 0 \text{ si, y solo si, para todo } i = 1, \ldots, k_n,\ g(x_i) = 0.$$

Por lo tanto, la condición (4) se puede escribir como

$$P_n r_n = 0$$

o lo que es lo mismo

$$P_n(\lambda - K)u_n = P_n f, \quad u_n \in V_n. \tag{7}$$

Por tanto, tenemos expresado en términos de operadores el sistema de ecuaciones que obtuvimos al plantear el método de colocación, y mediante el cual se obtienen los coeficientes de la función aproximante $u_n$ en la base $\{\psi_1, \ldots, \psi_{k_n}\}$.

### 2.1.3 Método de Galerkin

En esta sección, consideraremos como espacio de funciones $V$ el espacio de Hilbert $L_2([a,b])$. El método de Galerkin consiste en imponer que $r_n$ verifique que

$$\forall i = 1, \ldots, k_n,\ < r_n, \psi_i >= 0 \tag{8}$$

donde $< \cdot, \cdot >$ denota el producto escalar usual de $V$.

Vamos a analizar cuál es la filosofía del método de Galerkin, que no es más que imponer una condición de ortogonalidad. Para entenderlo mejor, fijemos $x \in V$. Es bien conocido que $x_0 \in V_1$ es la mejor aproximación de $x$ en $V_1$ si, y solo si, $x_0$ es la proyección ortogonal de $x$ sobre $V_1$. Por lo tanto,

$$x_0 = P_1(x) \Leftrightarrow x - x_0 \in V_1^{\perp} \Leftrightarrow \forall y \in V_1,\ < x - x_0, y >= 0.$$

Si consideramos una base de $V_1$, solo tenemos que imponer que el vector $x - x_0$ sea ortogonal a los elementos de dicha base para asegurar que es ortogonal a todo $V_1$. Luego ésa es la motivación del método de Galerkin, considerando $\{\psi_1, \ldots, \psi_{k_n}\}$ como base de $V_n$ e imponiendo que $\forall i = 1, \ldots, k_n$, $< r_n, \psi_i >= 0$, es decir, que los coeficientes de Fourier de $r_n$ asociados a la base $\{\psi_1, \ldots, \psi_{k_n}\}$ sean todos nulos.

Sea ahora una función $u_n \in V_n$ dada como en (3). Veamos cómo obtener los coeficientes $\alpha_j,\ j = 1, \ldots, k_n$ a partir de la condición (8). Como $r_n = (\lambda - K)u_n - f$, la relación (8) se traduce en

$$< (\lambda - K)u_n - f, \psi_i >= 0, \quad i = 1, \ldots, k_n,$$

esto es,

$$< (\lambda - K) \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \psi_j - f, \psi_i >= 0, \quad i = 1, \ldots, k_n.$$

Por lo tanto, los coeficientes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_n}\}$ constituyen la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \left(\lambda < \psi_j, \psi_i > - < K\psi_j, \psi_i >\right) =< f, \psi_i >, \quad i = 1, \ldots, k_n. \tag{9}$$

Éste es el método de Galerkin para obtener una solución aproximada de (1). De nuevo, nos surgen, de manera natural, las mismas cuestiones que en el método de colocación, acerca de la compatibilidad de este sistema de ecuaciones y de la convergencia del método de Galerkin; éstas se irán resolviendo a lo largo del capítulo.

A continuación, como ya hicimos en el método de colocación, escribamos (9) de una forma más abstracta. Consideremos el operador proyección ortogonal $P_n$ definido sobre $L_2([a,b])$ de la misma forma que en el método de colocación. De este modo, $P_n$ es lineal y continua, y, de hecho, $\|P_n\| = 1$ (ya que $P_n$ es una proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado). Notemos que

$$P_n g = 0 \text{ si, y solo si, } \forall i = 1, \ldots, k_n, \ < g, \psi_i >= 0.$$

Ahora, utlizando $P_n$, podemos escribir la condición (8) como:

$$P_n r_n = 0,$$

o equivalentemente,

$$P_n(\lambda - K)u_n = P_n f, \quad (u_n \in V_n). \tag{10}$$

Por tanto, de manera análoga a como razonamos en el método anterior, hemos obtenido una expresión para el sistema (9) en términos de operadores. Observemos que las fórmulas (7) y (10) son idénticas, y, por tanto, las trataremos como una sola. En la siguiente sección veremos la ventaja que supone hacer uso de esta relación en el estudio del error de los dos métodos que hemos planteado.

### 2.1.4 Análisis general

Abstrayendo el análisis realizado en 2.1.2 y 2.1.3, consideramos un espacio de Banach $V$ y una sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$ de subespacios finito-dimensionales de dimensión $k_n$, con $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$P_n : V \longrightarrow V$$

una proyección lineal y continua con rango $V_n$. Es decir,

$$P_n^2 = P_n$$

y

$$P_n(V) = V_n.$$

En particular, $\|P_n\| \geq 1$ y para todo $v \in V_n$,

$$P_n(v) = v.$$

Motivados por (7) y (10), aproximamos la ecuación (2) tratando de resolver el problema

$$P_n(\lambda - K)u_n = P_n f, \quad u_n \in V_n. \tag{11}$$

Notemos que esta es la forma en que el método es implementado, ya que nos conduce directamente a sistemas de ecuaciones lineales finitos equivalentes, tales como (4) y (9). Sin embargo, para el error, escribimos la ecuación (11) de una forma equivalente más conveniente para nuestros propósitos.

Si $u_n$ es una solución de (11), y teniendo en cuenta que $P_n u_n = u_n$, la ecuación puede escribirse en la forma:

$$(\lambda - P_n K)u_n = P_n f, \quad u_n \in V. \tag{12}$$

Comprobemos que las ecuaciones (11) y (12) son equivalentes. Es evidente que de (11) se deduce la ecuación (12). Recíprocamente, si $u_n \in V$ es una solución de (12), entonces

$$u_n = \frac{1}{\lambda}(P_n f + P_n K u_n) \in V_n.$$

Así que $P_n u_n = u_n$ y

$$(\lambda - P_n K)u_n = P_n(\lambda - K)u_n,$$

lo cual prueba que (11) se deduce de (12).

**Observación 2.1.** Notemos que en (11) y (12) el espacio es diferente: en la ecuación (11), $u_n \in V_n$, y como $V_n$ es finito-dimensional, esta ecuación será más fácil de tratar para los cálculos; sin embargo, la ecuación (12) es mejor para trabajar en el aspecto teórico ya que $u_n \in V$, que es el mismo espacio que la ecuación (2) y así es más sencillo compararlas.

Para el análisis del error, comparamos la ecuación original (2), $(\lambda - K)u = f$, con la ecuación (12), ya que ambas están definidas en el espacio $V$. El análisis teórico está basado en la aproximación de $\lambda - P_nK$ por $\lambda - K$:

$$\lambda - P_nK = (\lambda - K) + (K - P_nK) = (\lambda - K)(I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_nK)), \quad (13)$$

igualdad que usaremos en el siguiente teorema, en el cual estudiamos la convergencia de $u_n$ hacia $u$, de forma similar a como hicimos en el Teorema 1.12. Notemos que en ambos teoremas los operadores que aproximan son de rango finito.

**Teorema 2.2.** *Sea $V$ un espacio de Banach. Supongamos que $K : V \longrightarrow V$ es lineal y continuo y que $\lambda - K : V \longrightarrow V$ es biyectivo. Supongamos además que*

$$\lim_{n\to\infty} \|K - P_nK\| = 0. \quad (14)$$

*Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, el operador $\lambda - P_nK$ es biyectivo y $(\lambda - P_nK)^{-1}$ es un operador lineal y continuo de $V$ en $V$. Además, la sucesión $\{(\lambda - P_nK)^{-1}\}_{n\geq N} \subset L(V)$ está acotada. Para las soluciones $u_n$ (para $n$ suficientemente grande) y $u$ de (12) y (2), respectivamente, tenemos*

$$u - u_n = \lambda(\lambda - P_nK)^{-1}(u - P_nu) \quad (15)$$

*y la estimación del error*

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - P_nK\|}\|u - P_nu\| \leq \|u - u_n\| \leq |\lambda| \; \|(\lambda - P_nK)^{-1}\| \; \|u - P_nu\|. \quad (16)$$

*En consecuencia, $\|u-u_n\|$ converge a cero exactamente a la misma velocidad de lo que lo hace $\|u-P_nu\|$.*

**Observación 2.3.** 1) El hecho de que $\lambda - K$ sea biyectivo indica que existe $(\lambda-K)^{-1}$. Por tanto, el problema $(\lambda-K)u=f$ tiene solución, y viene dada por $u=(\lambda-K)^{-1}f$.

2) Veamos qué significa que $\|K-P_nK\|\to 0$ cuando $n\to\infty$. En primer lugar, como los subespacios finito-dimensionales $\{V_n : n\geq 1\}$ verifican que $\dim(V_n)\to\infty$ cuando $n\to\infty$, los subespacios $V_n$ van rellenando el espacio infinito-dimensional $V$. Supongamos que $V_1$ es un subespacio 1-dimensional de $V$ y que $V_2$ es un subespacio 2-dimensional de $V$. Tomemos $v\in V$ y consideremos $P_1(v)$ y $P_2(v)$. Es claro que $P_2(v)$ se parece a $v$ más de lo que $P_1(v)$ se parece a $v$. Es decir, $\|K-P_nK\|\to 0$ indica que con $P_nK$ nos aproximamos cada vez más a $K$, a medida que aumenta $n$.

3) En la tesis del teorema, afirmar que existe $(\lambda-P_nK)^{-1}$ significa que: $\lambda-P_nK$ es biyectivo y el problema $(\lambda-P_nK)u_n=P_nf$ tiene solución. Por tanto el teorema dice: si $(\lambda-K)u=f$ tiene solución y $\|K-P_nK\|\xrightarrow{n\to\infty}0$, entonces $(\lambda-P_nK)u_n=P_nf$ tiene solución, para $n$ suficientemente grande.

4) La desigualdad

$$\|u-u_n\|\leq|\lambda|\;\|(\lambda-P_nK)^{-1}\|\;\|u-P_nu\|$$

indica que si $P_nu\to u$, entonces $u_n\to u$. Por tanto, el teorema se puede releer como sigue: si $(\lambda-K)u=f$ tiene solución, $\|K-P_nK\|\xrightarrow{n\to\infty}0$ y $P_nu\to u$, entonces $(\lambda-P_nK)u_n=P_nf$ tiene solución $u_n$ y además $u_n\to u$.

Por tanto, de esta cuarta y última observación, podemos concluir que el teorema responde a las preguntas que nos hemos planteado sobre la existencia de solución de los sistemas (4) y (9), y sobre la convergencia de la solución aproximante $u_n$ hacia la solución exacta $u$.

**Demostración.** (a) Tomemos $N$ tal que

$$\varepsilon_N \equiv \sup_{n\geq N} \|K - P_nK\| < \frac{1}{\|(\lambda - K)^{-1}\|}. \tag{17}$$

Entonces, en virtud del teorema de la serie geométrica, el operador $I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_nK)$ es inversible y, además

$$\|(I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_nK))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_N\|(\lambda - K)^{-1}\|}.$$

Haciendo uso de (13), $(\lambda - P_nK)^{-1}$ existe (porque existe la inversa de ambos "factores") y además

$$(\lambda - P_nK)^{-1} = (I + (\lambda - K)^{-1}(K - P_nK))^{-1}(\lambda - K)^{-1},$$

$$\|(\lambda - P_nK)^{-1}\| \leq \frac{\|(\lambda - K)^{-1}\|}{1 - \varepsilon_N\|(\lambda - K)^{-1}\|} =: M. \tag{18}$$

Esto prueba que la sucesión $\{(\lambda - P_nK)^{-1}\}_{n\geq N}$ está acotada.
(b) Para la fórmula del error (15), consideramos la ecuación $(\lambda - K)u = f$ y le aplicamos $P_n$, obteniendo

$$P_n(\lambda - K)u = P_nf.$$

Pasando $\lambda P_nu$ al segundo miembro, y sumando $\lambda u$ en ambos miembros, tenemos que

$$\lambda u - P_nKu = P_nf + \lambda u - \lambda P_nu,$$

o equivalentemente,

$$(\lambda - P_n K)u = P_n f + \lambda(u - P_n u).$$

Restamos $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ para obtener

$$(\lambda - P_n K)(u - u_n) = \lambda(u - P_n u). \tag{19}$$

Entonces

$$u - u_n = \lambda(\lambda - P_n K)^{-1}(u - P_n u),$$

que es la igualdad (15). Si ahora tomamos normas y utilizamos la desigualdad (18), tenemos que

$$\|u - u_n\| \leq |\lambda| \; M \; \|u - P_n u\|. \tag{20}$$

Por tanto, si $P_n u \to u$, entonces $u_n \to u$ cuando $n \to \infty$.
(c) Teniendo en cuenta la igualdad (15), que ya hemos probado, obtenemos directamente la cota superior de (16). Por otro lado, si tomamos norma en (19), llegamos a que

$$|\lambda| \; \|u - P_n u\| \leq \|\lambda - P_n K\| \; \|u - u_n\|,$$

y de ahí deducimos la cota inferior de (16).
Para obtener una cota inferior que sea uniforme en $n$, notemos que para $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \|\lambda - P_n K\| &\leq \|\lambda - K\| + \|K - P_n K\| \leq \\ &\leq \|\lambda - K\| + \varepsilon_N. \end{aligned}$$

La cota inferior de (16) puede ser ahora reemplazada por

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - K\| + \varepsilon_N} \; \|u - P_n u\| \leq \|u - u_n\|.$$

Combinando esto y (20), tenemos que

$$\frac{|\lambda|}{\|\lambda - K\| + \varepsilon_N} \; \|u - P_n u\| \leq \|u - u_n\| \leq |\lambda| \; M \; \|u - P_n u\|.$$

Esto prueba que $u_n$ converge a $u$ si, y solo si, $P_n u$ converge a $u$. Es más, si hay convergencia, entonces $\|u - P_n u\|$ y $\|u - u_n\|$ convergen a cero exactamente con la misma velocidad. $\square$

Para que el teorema sea cierto tan sólo necesitamos que se verifique (17), y no es necesario que se cumpla (14), que es una condición más fuerte. Sin embargo, normalmente el teorema se aplica usando la condición (14). A continuación estudiaremos dos resultados técnicos, en el último de los cuales se ponen de manifiesto condiciones para asegurar que $\|K - P_n K\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

**Lema 2.4.** *Sean $V$ y $W$ espacios de Banach y sea $A_n : V \longrightarrow W$, $n \geq 1$, una sucesión de operadores lineales acotados. Supongamos que $\{A_n u\}$ converge para todo $u \in V$. Entonces la convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos de $V$.*

**Demostración.** Por el teorema de Banach-Steinhaus (que asegura que si tenemos una familia de operadores lineales y continuos entre espacios de Banach que es puntualmente acotada, entonces dicha familia es uniformemente acotada), los operadores $A_n$ están uniformemente acotados:

$$M \equiv \sup_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty.$$

Además las funciones $A_n$ son equicontinuas:

$$\|A_n u_1 - A_n u_2\| \leq M \|u_1 - u_2\|.$$

Sea $B$ un subconjunto compacto de $V$. Entonces $\{A_n\}_{n \geq 1}$ es una familia de operadores uniformemente acotada y equicontinua sobre el compacto $B$. Y por tanto, por el teorema de Ascoli para espacios de Banach, tenemos que $\{A_n u\}_{n \geq 1}$ es uniformemente convergente para $u \in B$. $\square$

**Lema 2.5.** *Sea $V$ un espacio de Banach y sea $\{P_n\}_{n\geq 1}$ una familia de operadores lineales y continuos sobre $V$ verificando que para todo $u \in V$,*

$$\lim_{n\to\infty} P_n u = u. \tag{21}$$

*Si $K : V \longrightarrow V$ es compacto, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|K - P_n K\| = 0.$$

**Demostración.** De la definición de la norma de un operador tenemos

$$\|K - P_n K\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Ku - P_n Ku\| = \sup_{z\in K(B_V)} \|z - P_n z\|,$$

donde $B_V = \{u \in V : \|u\| \leq 1\}$. Como $K$ es compacto, entonces $\overline{K(B_V)}$ es compacto. Por tanto, por el lema anterior y por la hipótesis (21),

$$\sup_{z\in \overline{K(B_V)}} \|z - P_n z\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

luego con mayor motivo

$$\sup_{z\in K(B_V)} \|z - P_n z\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

lo cual prueba el lema. □

Este último resultado incluye muchos casos de interés, pero no todos. A este respecto, existen situaciones en las que $P_n u \to u$ para casi todo $u \in V$, pero no para todo $u$. En tales casos, nos vemos obligados a probar directamente que $\|K - P_n K\|$ converge a cero, si es que fuera cierto. En tales casos, teniendo en cuenta la expresión (16), vemos que $u_n \to u$ si, y sólo si, $P_n u \to u$, y por tanto, el método no es convergente para algunas soluciones $u$. Esto ocurre, por ejemplo, considerando $V = C([a, b])$ y $V_n$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que $n$.

### 2.1.5 Ejemplos

En este apartado se desarrollan ejemplos que completan el desarrollo teórico que acabamos de exponer en las anteriores subsecciones.

La mayoría de los métodos de proyección están basados en la manera en que aproximamos funciones, distinguiéndose dos tipos principales de aproximaciones:

1.- Consiste en descomponer la región de aproximación $D$ en elementos $D_1, D_2, \ldots, D_m$; y después aproximar la función $u \in C(D)$ por un polinomio de grado bajo sobre cada elemento $D_i$. Estos métodos de proyección se suelen llamar *métodos polinómicos a trozos*.

2.- Se aproxima la función $u \in C(D)$ utilizando una familia de funciones que estén definidas globalmente sobre todo $D$, tales como polinomios o polinomios trigonométricos. Estos metodos de proyección se conocen como *métodos espectrales*, especialmente cuando se utilizan polinomios trigonométricos.

A continuación, vamos a estudiar cada uno de estos dos tipos de métodos sobre los métodos de proyección estudiados, esto es, sobre el método de colocación y el método de Galerkin.

### Colocación lineal a trozos

Nos disponemos a calcular la solución numérica de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\, dy = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

utilizando funciones aproximantes que sean lineales a trozos.

Sea $n \geq 1$, definamos $h = (b-a)/n$ y consideremos los nodos

$$x_j = a + (j-1)h, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1$$

El subespacio $V_n$ es el conjunto de las funciones continuas y lineales a trozos sobre el intervalo $[a,b]$, con nodos $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Notemos que la dimensión de $V_n$ es $n+1$.

Introduzcamos las funciones básicas de Lagrange para la interpolación lineal a trozos continua:

$$l_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x - x_i|}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{22}$$

con el ajuste adecuado para las funciones $l_1$ y $l_{n+1}$. El operador proyección para esta base se define como sigue:

$$P_n u(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u(x_i) l_i(x), \tag{23}$$

expresión que ya vimos en la fórmula (6) de este capítulo. Sobre la convergencia de $P_n u$ hacia $u$ podemos afirmar que (ver [2, p. 99])

$$\|u - P_n u\|_\infty \leq \begin{cases} \omega(u,h), & \text{si} \quad u \in C([a,b]) \\ \dfrac{h^2}{8}\|u''\|_\infty, & \text{si} \quad u \in C^2([a,b]) \end{cases} \tag{24}$$

donde

$$\omega(u,h) = \max_{|x-y|\le h,\ a\le x,y\le b} |u(x)-u(y)|.$$

Con esto vemos que $P_n u \to u$ para todo $u \in C([a,b])$, y para $u \in C^2([a,b])$, la convergencia es de orden 2.

Dado cualquier operador compacto $K : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$, el Lema 2.5. nos proporciona que

$$\lim_{n\to\infty} \|K - P_n K\| = 0.$$

Por lo tanto, podemos aplicar directamente el Teorema 2.2. y obtener resultados para la solución numérica de la ecuación integral $(\lambda - K)u = f$. De esta forma, para $n$ suficientemente grande, pongamos $n \ge N$, la ecuación $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$ tiene una única solución $u_n$ para cada $f \in C([a,b])$. Si suponemos que $u \in C^2([a,b])$, entonces la ecuación (16) implica que

$$\|u - u_n\|_\infty \le |\lambda|\ M\ \frac{h^2}{8}\ \|u''\|_\infty,$$

siendo $M$ una cota uniforme sobre $(\lambda - P_n K)^{-1}$ para $n \ge N$.

El sistema de ecuaciones lineales (4), considerando como base de $V_n$ las funciones básicas de Lagrange, adopta la siguiente forma

$$\sum_{j=1}^{n+1} u_n(x_j)\left(\lambda l_j(x_i) - \int_D k(x_i,y) l_j(y)\ dy\right) = f(x_i), \quad i = 1,\dots,n+1,$$

donde las incógnitas de este sistema son los $u_n(x_j),\ j = 1,\dots,n+1$. Como $u_n(x) = \sum_{j=1}^{n+1} u_n(x_j) l_j(x)$, entonces el sistema se simplifica y se escribe como sigue:

$$\lambda u_n(x_i) - \sum_{j=1}^{n+1} u_n(x_j) \int_a^b k(x_i,y) l_j(y)\ dy = f(x_i), \quad i = 1,\dots,n+1. \tag{25}$$

Las integrales que aparecen deben ser calculadas numéricamente. Por tanto, con el propósito de simplificarlas lo máximo posible, y teniendo en cuenta la expresión de las funciones básicas de Lagrange, escribimos, para $j = 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b k(x_i, y) l_j(y)\, dy &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} k(x_i, y) \left(1 - \frac{|y - x_j|}{h}\right)\, dy = \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_i, y) \left(1 + \frac{y - x_j}{h}\right) dy + \\
&+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x_i, y) \left(1 - \frac{y - x_j}{h}\right) dy = \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} k(x_i, y)\, dy + \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_i, y)(y - x_j)\, dy + \\
&+ \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} k(x_i, y)(x_j - y)\, dy.
\end{aligned}$$

Las integrales para $j = 1$ y $j = n + 1$ se modifican convenientemente.

**Ejemplo 2.6.** Consideremos la ecuación integral

$$5u(x) - \int_0^1 e^{xy} u(y)\, dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{26}$$

Veamos que esta ecuación integral posee una única solución, para cualquier $f \in C([0, 1])$. Para ello, de acuerdo con la sección 1.3.3 del Capítulo 1, comprobemos que $\|K\| < |\lambda| = 5$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|K\| &= \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 e^{xy}\, dy = \\ &= \max_{0\le x\le 1} \left[\frac{1}{x} e^{xy}\right]_0^1 = \\ &= \max_{0\le x\le 1} \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) = \\ &= \max_{0\le x\le 1} \frac{e^x - e^0}{x} = \\ &= e - 1, \end{aligned}$$

ya que $\dfrac{e^x - e^0}{x}$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva $y = e^x$, y ésta se hace máxima en el intervalo $[0, 1]$ en el punto de abcisa $x = 1$.

Consideremos ahora las funciones

$$u^{(1)}(x) = e^{-x}\cos x, \quad u^{(2)}(x) = \sqrt{x}, \quad (0 \le x \le 1)$$

como soluciones exactas de la ecuación integral (26) para definir $f(x)$ convenientemente en cada uno de los dos casos. Una vez fijado el correspondiente $f(x)$ en cada caso, el objetivo es calcular la sucesión de soluciones aproximantes $\{u_n^{(i)}\},\ i = 1, 2$, que converge a la correspondiente solución exacta $u^{(i)},\ i = 1, 2$. Por las nociones que ya tenemos, sabemos que

$$u_n^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} u_n^{(i)}(x_j) l_j(x),$$

por lo que para conocer $u_n^{(i)}$, nos basta conocer los coeficientes $\{u_n^{(i)}(x_j)\},\ j = 1, \ldots, n+1$. Éstos se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

(25). Por tanto, planteamos el sistema y lo resolvemos.
En la siguiente tabla la expresión de $E_n^{(i)}$ representa la máxima diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la solución exacta y la solución aproximada en los nodos del método de colocación, esto es,

$$E_n^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq n+1} \left| u^{(i)}(x_j) - u_n^{(i)}(x_j) \right| .$$

Los resultados que hemos obtenido mediante programación en el ordenador son los siguientes:

| $n$ | $E_n^{(1)}$ | $E_n^{(2)}$ |
|---|---|---|
| 4 | $1.31 \times 10^{-3}$ | $7.91 \times 10^{-3}$ |
| 8 | $3.27 \times 10^{-4}$ | $2.75 \times 10^{-3}$ |
| 16 | $8.18 \times 10^{-5}$ | $9.65 \times 10^{-4}$ |
| 32 | $2.04 \times 10^{-5}$ | $3.40 \times 10^{-4}$ |

**Colocación polinomial trigonométrica**

Resolvamos la ecuación integral

$$\lambda u(x) - \int_0^{2\pi} k(x,y)u(y)\, dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \tag{27}$$

donde suponemos que la función núcleo $k(x,y)$ es continua y $2\pi$-periódica en ambas variables $x$ e $y$, esto es,

$$k(x + 2\pi, y) = k(x, y + \pi) = k(x, y).$$

Por tanto, consideremos el espacio $V = C_p(2\pi)$ de las funciones continuas y $2\pi$-periódicas definidas sobre $\mathbb{R}$. En ese caso, fijamos $f \in C_p(2\pi)$ y, en consecuencia, la solución $u$ de (27) también está en el espacio $C_p(2\pi)$.

Como la solución exacta $u$ es $2\pi$-periódica, la aproximamos por *polinomios trigonométricos*; luego consideramos como subespacio $V_n$ el espacio de los polinomios trigonométricos de grado menor o igual que $n$, que tiene dimensión $2n+1$. Fijemos la siguiente base de $V_n$:

$$\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \dots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$$

que, para simplificar, nos referimos a ella como $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{2n}, \psi_{2n+1}\}$.

El operador proyección, $P_n$, de $C_p(2\pi)$ sobre $V_n$ se expresa como

$$P_n u(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} u(x_j) l_j(x),$$

donde $\{l_j : j = 1, \dots, 2n+1\}$ constituyen las funciones básicas de Lagrange para interpolación polinomial trigonométrica. En el libro de Rivlin [8, p. 13] se prueba que

$$\|P_n\| \le 1 + \frac{2}{\pi} \log n$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n\| = \infty,$$

de donde deducimos, por el teorema de Banach-Steinhaus, que existe una función $u \in C_p(2\pi)$ para la cual $P_n u$ no converge a $u$ en $C_p(2\pi)$.

Consideremos la anterior interpolación trigonométrica para resolver la ecuación (27) por el método de colocación. Con este propósito, planteamos el sistema de ecuaciones lineales (4), que ahora se escribe como sigue:

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \alpha_j \left( \lambda \psi_j(x_i) - \int_0^{2\pi} k(x_i, y) \psi_j(y)\, dy \right) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, 2n+1,$$

cuya solución viene dada por

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{2n+1} \alpha_j \psi_j(x).$$

En el sistema anterior, las integrales que aparecen deben ser evaluadas de forma numérica, para lo cual es recomendable utilizar la regla del trapecio, ya que los integrandos son periódicos y dicho método es efectivo para ese tipo de funciones, como se pone de manifiesto en la Proposición 6.5.6 de [2, p. 227].

A continuación nos disponemos a comprobar la convergencia de este método de colocación. Para ello vamos a utilizar el Teorema 2.2. Como no podemos aplicar el Lema 2.5., por lo dicho anteriormente sobre la no convergencia de $P_n u$ hacia $u$ para una determinada función $u$, analicemos directamente $\|K - P_n K\|$ y verifiquemos que converge a cero, cuando $n$ diverge.

El operador integral $P_n K$ se expresa como sigue:

$$P_n K u(x) = \int_0^{2\pi} P_n k(x, y) u(y) \, dy.$$

Por tanto, tendremos que comprobar que

$$\|K - P_n K\| = \max_{0 \le x \le 2\pi} \int_0^{2\pi} |k(x, y) - P_n k(x, y)| \, dy$$

converge a cero. Para ello, usaremos el siguiente resultado sobre la convergencia de la interpolación polinomial trigonométrica, que puede consultarse en [2, p. 128]: si $f \in C_p^{k,\alpha}(2\pi)$ para algún $k \ge 0$ y para $\alpha \in ]0, 1]$, entonces

$$\|f - P_n f\|_\infty \le \mathrm{c}_k \frac{\log n}{n^{k+\alpha}}, \quad \text{para } n \ge 2,$$

donde $c_k$ es una constante que depende de $f$. En consecuencia, en el ejemplo que nos ocupa, si suponemos que $k(x, y)$ verifica, para algún $\alpha > 0$,

$$|k(x,y) - k(\xi,y)| \leq c(k)|x - \xi|^{\alpha}, \tag{28}$$

para todo $x, \; y, \; \xi$, entonces tenemos que

$$\|K - P_n K\| \leq \frac{c \log n}{n^{\alpha}}.$$

Por tanto, aplicando el Teorema 2.2., obtenemos los siguientes resultados sobre el análisis del error del método de colocación para interpolación trigonométrica: si suponemos que la ecuación (27) tiene una única solución, entonces la ecuación de colocación

$$(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$$

tiene una única solución $u_n$ para $n$ suficientemente grande; además,

$$\|u - u_n\|_{\infty} \to 0 \Leftrightarrow \|u - P_n u\|_{\infty} \to 0.$$

Sin embargo, existen funciones núcleo $k(x, y)$ que no satisfacen la condición (28), pero para las cuales el método de colocación anterior sigue siendo válido. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se resuelven ecuaciones integrales que tienen funciones núcleo singulares. En estos casos, el análisis del error requiere un conocimiento más detallado de las propiedades de diferenciabilidad de $K$.

### Método de Galerkin lineal a trozos

Al igual que trabajamos en la sección 2.1.3, fijemos como espacio ambiente para el análisis del error del método de Galerkin el espacio de Hilbert $V =$

$L_2(a,b)$, con producto escalar $< \cdot,\cdot >$ y la norma $\|\cdot\|$. Consideremos la solución numérica de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

$$\lambda u(x) - \int_a^b k(x,y)u(y)\, dy = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Asímismo, consideremos $V_n$ el subespacio de las funciones continuas y lineales a trozos con nodos $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$, el cual tiene dimensión $n+1$. Fijemos como base de este subespacio las funciones básicas de Lagrange, dadas en (22). Ahora, $P_n$ denota la proyección ortogonal de $L_2(a,b)$ sobre $V_n$. Comencemos probando que $P_n u \to u$ para todo $u \in L_2(a,b)$.

Para ver esto, vamos a utilizar la densidad de $C([a,b])$ en $L_2(a,b)$. Por tanto, en primer lugar, comprobemos la afirmación para una función continua y después aplicaremos la densidad.

Sea, pues, $u \in C([a,b])$ y denotemos por $T_n u$ la función lineal a trozos de $V_n$ que interpola a $u$ en los nodos $x_1,\ldots,x_n$. De hecho, la expresión de $T_n u(x)$ viene dada por (23). Notemos que $P_n u$ minimiza $\|u-z\|$, donde $z \in V_n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|u - P_n u\| &\leq \|u - T_n u\| \leq \\ &\leq \sqrt{b-a}\|u - T_u\|_\infty \leq \\ &\leq \sqrt{b-a}\ \omega(u,h), \end{aligned} \tag{29}$$

donde se ha utilizado la cota (24). Claramente, si $u \in C([a,b])$ entonces $\omega(u,h) \to 0$, luego hemos comprobado que $P_n u \to u$ para toda $u \in C([a,b])$.

Consideremos ahora $u \in L_2(a,b)$. Por la densidad de $C([a,b])$ en $L_2(a,b)$, existe una sucesión de funciones continuas $\{u_m\}$ que converge a

$u$ en $L_2(a,b)$. Entonces, teniendo en cuenta que $\|P_n\| = 1$,

$$\begin{aligned} \|u - P_n u\| &\leq \|u - u_m\| + \|u_m - P_n u_m\| + \|P_n(u - u_m)\| \leq \\ &\leq \|u - u_m\| + \|u_m - P_n u_m\| + \|P_n\| \; \|u - u_m\| = \\ &= 2\|u - u_m\| + \|u_m - P_n u_m\|. \end{aligned}$$

Como la sucesión $\{u_m\}$ converge a $u$, dado $\varepsilon > 0$, existe un natural $m$ tal que $\|u - u_m\| < \varepsilon/4$; fijemos ese natural $m$. Entonces, para todo $n \geq m$, tenemos que

$$\|u - P_n u\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|u_m - P_n u_m\|.$$

Finalmente, como $u_m \in C([a,b])$, apliquemos la relación (29) tomando $\sqrt{b-a}$ $\omega(u_m, h) = \varepsilon/2$, y obtenemos que

$$\|u - P_u\| \leq \varepsilon$$

para valores de $n$ suficientemente grandes, esto es, para $n \geq m$. Como $\varepsilon$ era arbitrario, esto prueba que $P_n u \to u$ para $u \in L_(a,b)$.

En consecuencia, para la ecuación integral $(\lambda - K)u = f$, podemos aplicar el Lema 2.5. para asegurar que $\|K - P_n K\| \to 0$. Ahora, el Teorema 2.2. nos proporciona información acerca del análisis del error para la ecuación de Galerkin $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$; concretamente, que el orden de convergencia a cero de $\|u - u_n\|$ y $\|u - P_n u\|$ es exactamente el mismo.

Una vez que hemos estudiado el error del método de Galerkin lineal a trozos, nos disponemos detallar dicho método. Para ello, analicemos el sistema de ecuaciones lineales (9), en el que utilizaremos como base de $V_n$ las funciones básicas de Lagrange, dadas por (22). La solución $u_n$ de $(\lambda -$

$P_nK)u_n = P_nf$ se expresa como

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j l_j(x).$$

Como ya vimos en la sección 2.1.3, los coeficientes $\{\alpha_j : j = 1, \ldots, n+1\}$ se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \left( \lambda < l_i, l_j > - \int_a^b \int_a^b k(x,y) l_i(x) l_j(y)\ dydx \right) \ = \int_a^b f(x) l_i(x)\ dx, \quad i = 1, \ldots, n+1. \tag{30}$$

Para facilitar la expresión de este sistema, damos el valor del producto escalar de $l_i$ y $l_j$, que es:

$$< l_i, l_j >= \begin{cases} 0 & , \ |i-j| > 1 \\ \dfrac{2h}{3} & , \ 0 < i = j < n \\ \dfrac{h}{3} & , \ i = j = 0, n \\ \dfrac{h}{6} & , \ |i-j| = 1 \end{cases}$$

Además, es conveniente tener en cuenta que las integrales dobles que aparecen en el sistema (30) se reducen a subintervalos, ya que la expresión de cada función básica $l_i$ es nula sobre gran parte del intervalo $[a, b]$.

**Ejemplo 2.7.** Nos planteamos resolver la misma ecuación del Ejemplo 2.6.,

$$5u(x) - \int_0^1 e^{xy} u(y)\ dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

En este caso, la expresión de $E_n^{(i)}$ representa la máxima diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la solución exacta y la solución aproximada en los nodos del método de Galerkin, esto es,

$$E_n^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq n+1} \left| u^{(i)}(x_j) - u_n^{(i)}(x_j) \right|,$$

considerando

$$u^{(1)}(x) = e^{-x}\cos x, \quad u^{(2)}(x) = \sqrt{x}, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

como soluciones exactas de la ecuación. Los resultados que nos ha proporcionado la progamción del método anterior son los presentados en la siguiente tabla:

| $n$ | $E_n^{(1)}$ | $E_n^{(2)}$ |
|---|---|---|
| 4 | $3.34 \times 10^{-3}$ | $1.40 \times 10^{-1}$ |
| 8 | $8.40 \times 10^{-4}$ | $9.92 \times 10^{-2}$ |
| 16 | $2.10 \times 10^{-4}$ | $7.02 \times 10^{-2}$ |
| 32 | $5.25 \times 10^{-5}$ | $4.96 \times 10^{-2}$ |

**Método de Galerkin con polinomios trigonométricos**

En este apartado, nos planteamos resolver la ecuación integral

$$\lambda u(x) - \int_0^{2\pi} k(x,y)u(y)\ dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

siendo $k(x,y)$ y $f(x)$ funciones reales, continuas y $2\pi-$periódicas. Para ello utilizaremos polinomios trigonométricos, que nos proporcionarán aproximaciones de la solución de la ecuación integral.

Fijemos como espacio ambiente $V$ el espacio de las funciones complejo-valuadas definidas sobre $]0,2\pi[$ que son Lebesgue medibles y cuadrado integrables; esto es, $V = L_2(0,2\pi)$, con el producto escalar definido por

$$< u, v >= \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\ dx.$$

Fijemos también el subespacio aproximante $V_n$ como el espacio de los polinomios trigonométricos de grado menor o igual que $n$, el cual sabemos que tiene dimensión $2n + 1$. Además, consideremos las exponenciales complejas

$$\phi_j(x) = e^{ijx}, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$$

como base de $V_n$. Es bien conocido que si $u \in L_2(0, 2\pi)$, su desarrollo en serie de Fourier en la base

$$\{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx, \ldots\}$$

viene dado por:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} < u, \phi_j > \phi_j(x). \tag{31}$$

Además, la serie de Fourier converge en la norma de $L_2(0, 2\pi)$.
La proyección ortogonal de $L_2(0, 2\pi)$ sobre $V_n$ es la $n$-ésima suma parcial de esta serie, es decir,

$$P_n u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} < u, \phi_j > \phi_j(x).$$

De la convergencia de (31), se sigue que $P_n u \to u$ para todo $u \in L_2(0, 2\pi)$. Por tanto, utilizando el Lema 2.5., tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \|K - P_n K\| = 0.$$

En consecuencia, podemos aplicar el Teorema 2.2. para el análisis del error de la ecuación de aproximación $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$. Según este resultado, para $n$ suficientemente grande, pongamos $n \geq N$, las inversas $(\lambda - P_n K)^{-1}$ están uniformemente acotadas y $\|u - u_n\|$ puede ser acotado proporcionalmente a $\|u - P_n u\|$, y, por tanto, $u_n$ converge a $u$.

Con respecto a la base $\{e^{ijx}, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, el sistema de ecuaciones lineales (9) para $(\lambda - P_n)Ku_n = P_n f$ viene dado por

$$2\pi\lambda\alpha_k \quad - \sum_{j=-n}^{n} \alpha_j \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(jy-lx)} k(x,y)\ dydx =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-ilx} f(x) dx, \quad l = -n \ldots, n,$$

cuyas solución nos proporciona los coeficientes $\{\alpha_j : j = -n, \ldots, n\}$, los cuales nos determinan la solución aproximante dada por

$$u_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \alpha_j e^{ijx}.$$

## 2.2 Métodos de la proyecciones iteradas

Consideremos la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

$$(\lambda - K)u = f.$$

El objetivo de estos métodos es el de construir una sucesión de funciones que converja a la solución de dicha ecuación, de manera que la convergencia sea más rapida que aquella que obtuvimos con los métodos de colocación.

Veamos a continuación la motivación de estos métodos. Tal y como comentamos en el primer capítulo, la única solución $u \in C([a,b])$ de la ecuación viene dada, cuando $\|K\| < |\lambda|$, por el único punto fijo de un conveniente operador. Esto nos lleva a considerar la siguiente iteración de punto fijo

$$u^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda}(f + Ku^{(k)}), \quad k = 0, 1 \ldots.$$

Además,

$$\|u - u^{(k+1)}\| \leq \frac{\|K\|}{|\lambda|}\ \|u - u^{(k)}\|.$$

En [12], Sloan probó que tal iteración es una buena idea cuando el operador $K$ es compacto y la aproximación inicial es la solución $u_n$ obtenida por el método de Galerkin. Nosotros vamos a analizar esta idea y sus consecuencias para los métodos de proyección.

Sea $u_n$ la solución de la ecuación de proyección $(\lambda - P_n K)u_n = P_n f$. Definamos la *solución de proyección iterada* como

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{\lambda}(f + K u_n). \tag{32}$$

Normalmente, esta nueva aproximación $\tilde{u}_n$ representa una mejora respecto a $u_n$. Ahora aplicamos $P_n$ a ambos miembros de (32), y tenemos que

$$P_n \tilde{u}_n = \frac{1}{\lambda}(P_n f + P_n K u_n),$$

y teniendo en cuenta que $(P_n f + P_n K u_n) = \lambda u_n$, concluimos que

$$P_n \tilde{u}_n = u_n. \tag{33}$$

Por tanto, $u_n$ es la proyección de $\tilde{u}_n$ sobre $V_n$. Sustituyendo este valor de $u_n$ en (32) y reordenando los términos, tenemos que $\tilde{u}_n$ verifica la siguiente ecuación:

$$(\lambda - K P_n)\tilde{u}_n = f. \tag{34}$$

Frecuentemente se analiza esta ecuación y posteriormente, haciendo uso de (33), se obtiene información sobre $u_n$.

Por otro lado, para obtener una cota del error, tengamos en cuenta que se cumple:

$$\begin{aligned} u - \tilde{u}_n &= \frac{1}{\lambda}\ (f + Ku) - \frac{1}{\lambda}(f + Ku_n) = \\ &= \frac{1}{\lambda}\ K(u - u_n). \end{aligned}$$

de donde obtenemos la cota de error

$$\|u - \tilde{u}_n\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\ \|K\|\ \|u - u_n\|.$$

Esto prueba que la convergencia de $\tilde{u}_n$ a $u$ es, al menos, tan rápida como lo es la de $u_n$ a $u$. Además, de todo lo anterior podemos concluir que si existe solución de $(\lambda - P_nK)u_n = P_nf$ (esto es, si existe $(\lambda - P_nK)^{-1}$) y es $u_n$, entonces existe solución de $(\lambda - KP_n)\tilde{u}_n = f$ (es decir, existe $(\lambda - KP_n)^{-1}$) y es $\tilde{u}_n$. Por tanto, la existencia de $(\lambda - P_nK)^{-1}$ implica la de $(\lambda - KP_n)^{-1}$. Es más, si existe $(\lambda - P_nK)^{-1}$, de $(\lambda - P_nK)u_n = P_nf$ obtenemos que $u_n = (\lambda - P_nK)^{-1}P_nf$, y sustituyendo en (32), tenemos que

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{\lambda}\ (f + K(\lambda - P_nK)^{-1}P_nf)$$

y sustituyendo en (34) obtenemos

$$(\lambda - KP_n)\frac{1}{\lambda}(f + K(\lambda - P_nK)^{-1}P_nf) = f.$$

Por tanto,

$$(\lambda - KP_n)\frac{1}{\lambda}\ (I + K(\lambda - P_nK)^{-1}P_n)f = f,$$

luego concluimos que

$$(\lambda - KP_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\ (I + K(\lambda - P_nK)^{-1}P_n). \tag{35}$$

Para estudiar el recíproco de esta propiedad, necesitaremos el siguiente

**Lema 2.8.** *Sea $V$ un espacio de Banach, y sean $S$ y $T$ operadores lineales y continuos de $V$ en $V$. Supongamos que el operador $\lambda - ST$ es biyectivo de $V$ en $V$. Entonces el operador $\lambda - TS$ es biyectivo y*

$$(\lambda - TS)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\,(I + T(\lambda - ST)^{-1}S).$$

**Demostración.** Calculemos

$$\begin{aligned}
(\lambda - TS)\frac{1}{\lambda}\,(I + T(\lambda - ST)^{-1}S) \quad &= \frac{1}{\lambda}\{\lambda - TS + (\lambda - TS)T(\lambda - ST)^{-1}S\} = \\
&= \frac{1}{\lambda}\{\lambda - TS + T(\lambda - ST)(\lambda - ST)^{-1}S\} = \\
&= \frac{1}{\lambda}\{\lambda - TS + TS\} = \\
&= I.
\end{aligned}$$

De manera similar se prueba que

$$\frac{1}{\lambda}\,(I + T(\lambda - ST)^{-1}S)(\lambda - TS) = I.$$

□

Haciendo uso de este resultado, si el operador $\lambda - KP_n$ es biyectivo (es decir, existe $(\lambda - KP_n)^{-1}$), entonces el operador $\lambda - P_nK$ también es biyectivo (es decir, existe $(\lambda - P_nK)^{-1}$), y además

$$(\lambda - P_nK)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\,(I + P_n(\lambda - KP_n)^{-1}K). \tag{36}$$

Combinando (35) y (36), o retomando las definiciones de $u_n$ y $\tilde{u}_n$, tenemos que

$$(\lambda - P_nK)^{-1}P_n = P_n(\lambda - KP_n)^{-1}.$$

Por tanto, podemos elegir probar la existencia de $(\lambda - P_nK)^{-1}$ o de $(\lambda - KP_n)^{-1}$, según sea más conveniente en cada situación, y automáticamente tenemos asegurada la existencia de la otra inversa. Además, gracias a esta expresión, tenemos cotas de una de las inversas en función de la otra.

Para estudiar el error de $\tilde{u}_n$, reescribimos $(\lambda - K)u = f$ como $\lambda u = f + Ku$; y ahora restando $KP_nu$ en ambos miembros tenemos que

$$(\lambda - KP_n)u = f + Ku - KP_nu.$$

Restamos la expresión (34) y obtenemos

$$(\lambda - KP_n)(u - \tilde{u}_n) = K(I - P_n)u. \tag{37}$$

A continuación analizamos esta ecuación con más detalle.

### 2.2.1 Método de Galerkin iterado

Sea $V$ el espacio de Hilbert $L_2(D)$ y sea $u_n$ la solución de Galerkin de la ecuación $(\lambda - K)u = f$ sobre un subespacio finito-dimensional $V_n \subseteq V$. Entonces

$$\begin{aligned}(I - P_n)^2 &= I - P_n - P_n + P_n^2 = \\ &= I - P_n.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|K(I - P_n)u\| &= \|K(I - P_n)(I - P_n)u\| \leq \\ &\leq \|K(I - P_n)\| \, \|(I - P_n)u\|.\end{aligned} \tag{38}$$

Como estamos en un espacio de Hilbert y $P_n$ es una proyección autoadjunta, tenemos que

$$\begin{aligned} \|K(I-P_n)\| &= \|(K(I-P_n))^*\| = \\ &= \|(I-P_n)K^*\|. \end{aligned}$$

Con los métodos de Galerkin, cuando se considera $P_n$ como un operador sobre un espacio de Hilbert $V$, entonces $P_n v \xrightarrow{n\to\infty} v$, para todo $v \in V$. Comprobemos esta afirmación: esto ocurre si la sucesión de espacios $\{V_n : n \geq 1\}$ tiene la propiedad de aproximación sobre $V$: para cada $v \in V$, existe una sucesión $\{v_n\}_{n\geq 1}$ con $v_n \in V_n$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|v - v_n\| = 0.$$

Combinando esto con la propiedad de aproximación óptima (ver Proposición 3.5.9(c) de [2]), tenemos que $P_n v \xrightarrow{n\to\infty} v$, para todo $v \in V$.
Teniendo en cuenta que:

i) si $K$ es un operador compacto, entonces también lo es su adjunto $K^*$;

ii) la convergencia puntual de $P_n$ a $I$ sobre $V$;

iii) y el Lema 2.5.,

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|(I-P_n)K^*\| = 0. \tag{39}$$

Además podemos aplicar el Teorema 2.2. para obtener la existencia y acotación uniforme de $(\lambda - P_n K)^{-1}$ para $n$ suficientemente grande, pongamos $n \geq N$. Incluso, de (35), tenemos que $(\lambda - KP_n)^{-1}$ existe y es uniformemente acotada para $n \geq N$. Aplicamos esto y (38) a (37) para obtener

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_n\| &\leq \|(\lambda - KP_n)^{-1}\| \, \|K(I-P_n)u\| \leq \\ &\leq c\, \|(I-P_n)K^*\| \, \|(I-P_n)u\|. \end{aligned}$$

Combinando esto con (39), vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u - \tilde{u}_n\|}{\|u - P_n u\|} \leq c \lim_{n\to\infty} \|(I - P_n)K^*\| = 0,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u - \tilde{u}_n\|}{\|u - u_n\|} = 0.$$

Es decir, $\|u - \tilde{u}_n\|$ converge a cero más rápidamente de lo que lo hace $\|(I - P_n)u\|$, o equivalentemente, $\|u - u_n\|$.

La cantidad $\|(I - P_n)K^*\|$ puede ser estimada de la misma forma que $\|(I - P_n)K\|$. Así, en el caso particular de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie, si consideramos el operador integral $K$ sobre $L_2(D)$, el operador $K^*$ viene dado por la siguiente expresión:

$$K^*u(x) = \int_D k(y, x)u(y)\, dy, \quad u \in L_2(D).$$

### 2.2.2 La solución de colocación iterada

Con los métodos colocación, la solución iterada $\tilde{u}_n$ no siempre supone una mejora respecto a la solución original del método de colocación $u_n$. Sin embargo, el estudio de $\tilde{u}_n$ tiene, en muchos casos, interés en sí mismo. La teoría abstracta ya estudiada es aplicable y la ecuación del error (37) es aún el centro del análisis del error:

$$u - \tilde{u}_n = (\lambda - KP_n)^{-1}K(I - P_n)u.$$

Notemos que la proyección $P_n$ es ahora un operador interpolatorio, como en (6). En contraposición con el método de Galerkin iterado, en este caso no podemos asegurar que $\|K - KP_n\|$ converja a cero. De hecho,

$$\|K(I - P_n)\| \geq \|K\|.$$

Para probar la mayor velocidad de convergencia de $\tilde{u}_n$, debemos estudiar los métodos de colocación dependiendo de la base que se considere.

## 2.3 El método Nyström

El método de Nyström fue originalmente introducido para proporcionar aproximaciones basadas en la integración numérica del operador integral en la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

$$\lambda u(x) - \int_D k(x,y)u(y)\, dy = f(x), \quad x \in D. \tag{40}$$

La solución resultante se obtiene, en primer lugar, sobre los nodos de cuadratura, y posteriormente se extiende a todos los puntos de $D$ mediante una fórmula de interpolación.

### 2.3.1 El método Nyström para funciones núcleo continuas

El desarrollo que presentamos del método de Nyström es válido para funciones núcleo continuas. Consideremos la siguiente fórmula de integración numérica:

$$\int_D g(y)\, dy \approx \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_{n,j} g(x_{n,j}), \quad g \in C(D), \tag{41}$$

donde los valores de $n$ varían de manera creciente. Supongamos que para cada $g \in C(D)$, las integrales numéricas convergen a la verdadera integral, cuando $n \to \infty$. Esto implica, como aplicación del teorema de Banach-Steinhaus, que

$$c_I \equiv \sup_{n \geq 1} \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_{n,j}| < \infty. \tag{42}$$

Para simplificar la notación, omitiremos el subíndice $n$, así que $x_{n,j} \equiv x_j, \alpha_{n,j} \equiv \alpha_j$.

Sea $D$ un conjunto compacto de $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 1$. Sea $k(x, y)$ una función continua para todo $x, y \in D$. Utilizando la anterior fórmula de integración, aproximamos la integral que aparece en (40), oteniendo una nueva ecuación:

$$\lambda u_n(x) - \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) u_n(x_j) = f(x), \quad x \in D. \tag{43}$$

La escribimos como una ecuación exacta con una nueva función desconocida $u_n(x)$. Esta es la nueva ecuación que pretendemos resolver, de cuya solución obtendremos una aproximación. Para encontrar la solución en los nodos $\{x_j : 1 \leq j \leq q_n\}$, hacemos que $x$ varíe sobre eston nodos, lo cual nos proporciona

$$\lambda u_n(x_i) - \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x_i, x_j) u_n(x_j) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, q_n, \tag{44}$$

que es un sistema de ecuaciones lineales de orden $q_n$ (esto es, hemos impuesto exactitud en los nodos y hemos obtenido ese sistema lineal). Las incógnitas de (44) son los elementos $u_n(x_i), i = 1, \ldots, q_n$, es decir, un vector

$$\overline{u}_n \equiv (u_n(x_1), \ldots, u_n(x_{q_n}))^T.$$

Comprobemos que resolver (43) y (44) es equivalente, y la solución de una en función de la solución de la otra. Cada solución $u_n(x)$ de (43) nos proporciona una solución de (44), simplemente evaluando $u_n(x)$ en los nodos. El recíproco es también cierto. Para cada solución $\overline{z} \equiv (z_1, \ldots, z_{q_n})$ de (44), existe una única solución de (43) que coincide con $\overline{z}$ en los nodos. Dada una solución $\overline{z}$ de (44), definimos

$$z(x) := \frac{1}{\lambda} \left( f(x) + \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) z_j \right), \quad (x \in D). \tag{45}$$

Esta es una fórmula de intepolación. De hecho, teniendo en cuenta que $\overline{z}$ es solución (44), tenemos que

$$z(x_i) = \frac{1}{\lambda} \left( f(x_i) + \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x_i, x_j) z_j \right) = z_i,$$

para $i =, \ldots, q_n$. Usando este resultado de interpolación, tenemos que $z(x)$ es solución de (43). La unicidad de la relación entre $\overline{z}$ y $z(x)$ se deduce del hecho de que las soluciones $u_n(x)$ de (43) están completamente determinadas por sus valores en los nodos $\{x_i\}$. Comprobemos esta última afirmación. Supongamos que tenemos dos soluciones $u_n$ y $v_n$ de (43) tales que $u_n(x_j) = v_n(x_j), j = 1, \ldots, q_n$. Entonces, teniendo en cuenta que $u_n$ y $v_n$ verifican

$$\lambda u_n(x) - \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) u_n(x_j) = f(x)$$

$$\lambda v_n(x) - \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) v_n(x_j) = f(x),$$

resulta que $\lambda(u_n(x) - v_n(x)) = 0$. Como $\lambda \neq 0$, concluimos que $u_n = v_n$.

La fórmula (45) se llama la *fórmula de interpolación de Nyström*, que suele ser una fórmula de interpolación muy buena.

**Ejemplo 2.9.** Consideremos la ecuación integral del Ejemplo 2.6. de la sección 2.5.1:

$$5u(x) - \int_0^1 e^{xy} u(y)\, dy = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{46}$$

y las funciones

$$u^{(1)}(x) = e^{-x} \cos x, \quad u^{(2)}(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{47}$$

como soluciones exactas de la ecuación integral (46) para definir $f$ convenientemente en cada uno de los dos casos. Como ya vimos, $\|K\| = e - 1 < 5 = |\lambda|$, por lo que la ecuación tiene una única solución para cualquier $f \in C([0,1])$.

Consideremos, en primer lugar, la regla de Simpson en tres nodos para aproximar la integral que aparece en (46), con nodos $\{x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1\}$:

$$\int_0^1 g(x)\, dx \approx \frac{1}{6}\left(g(0) + 4g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1)\right).$$

Si llamamos $v^{(i)}$, $i = 1, 2$, a la solución aproximada que nos proporciona el método Nyström para cada uno de los dos casos que estamos considerando, entonces los errores en los nodos entre la solución exacta de (46) y la solución aproximada vienen dados por la expresión:

$$E_j^{(i)} = \left| u^{(i)}(x_j) - v^{(i)}(x_j) \right|, \quad i = 1, 2, \; j = 1, 2, 3.$$

Los errores son los siguientes:

| $i$ | $E_1^{(i)}$ | $E_2^{(i)}$ | $E_3^{(i)}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $1.64 \times 10^{-4}$ | $7.43 \times 10^{-5}$ | $4.23 \times 10^{-5}$ |
| 2 | $7.20 \times 10^{-3}$ | $7.42 \times 10^{-3}$ | $7.64 \times 10^{-3}$ |

Consideremos ahora la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre para tres nodos,

$$\int_0^1 g(x)\ dx \approx \frac{1}{18}\left(5g(x_1) + 8g(x_2) + 5g(x_3)\right),$$

donde

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{0.6}}{2}, \quad t_2 = 0.5, \quad t_3 = \frac{1+\sqrt{0.6}}{2}.$$

Si, de nuevo, llamamos $v^{(i)}, i = 1, 2$, a la solución aproximada de la ecuación (46) que nos proporciona el método de Nyström para esta fórmula de cuadratura y para las dos soluciones exactas de (47), entonces los errores en los nodos vienen dados por:

$$E_j^{(i)} = \left| u^{(i)}(t_j) - v^{(i)}(t_j) \right|, \quad i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3.$$

A continuación se detallan los errores cometidos:

| $i$ | $E_1^{(i)}$ | $E_2^{(i)}$ | $E_3^{(i)}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $3.42 \times 10^{-8}$ | $1.64 \times 10^{-7}$ | $1.94 \times 10^{-8}$ |
| 2 | $6.38 \times 10^{-4}$ | $6.57 \times 10^{-4}$ | $6.86 \times 10^{-4}$ |

Como se puede observar, los errores que se cometen al utilizar la regla de Gauss-Legendre son mucho menores que con la regla de Simpson. Además, el método de Nyström nos proporciona una mejor aproximación para la solución exacta $u^{(1)}(x) = e^{-x}\cos x$ que para $u^{(2)}(x) = \sqrt{x}$.

### 2.3.2 Propiedades, error y convergencia

El método de Nyström es implementado con el sistema de ecuaciones lineales finito (44), aunque para el análisis formal del error se utiliza la ecuación funcional (43).

Para el análisis inicial del error, trabajaremos en el espacio de Banach $V = C(D)$. Escribamos de forma abstracta la ecuación integral (40) como ya hicimos anteriormente, esto es

$$(\lambda - K)u = f,$$

y la ecuación integral numérica (43) como

$$(\lambda - K_n)u_n = f.$$

El operador integral numérico

$$K_n u(x) := \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) u(x_j), \quad (x \in D,\ u \in C(D)),$$

es un operador lineal de rango finito, acotado de $C(D)$ en $C(D)$. Veamos que

$$\|K_n\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(x, x_j)|. \tag{48}$$

En efecto,

$$\|K_n\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|K_n u\| = \sup_{\|u\| \leq 1} (\max_{x \in D} |K_n u(x)|).$$

Sea $x \in D$,

$$\begin{aligned} |K_n u(x)| &= \left| \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) u(x_j) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(x, x_j)| \; |u(x_j)| \leq \\ &\leq \|u\|_\infty \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(x, x_j)| \leq \\ &\leq \|u\|_\infty \max_{z \in D} \left( \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(z, x_j)| \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|K_n u\| = \max_{x \in D} |K_n u(x)| \leq \|u\|_\infty \max_{z \in D} \left( \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(z, x_j)| \right),$$

luego

$$\|K_n\| \leq \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(x, x_j)|.$$

Comprobemos que se da la igualdad demostrando que alcanza el máximo anterior. Probemos, pues, que existe una función $u \in C(D)$, con $\|u\|_\infty \leq 1$, que verifica

$$\|K_n u\| = \max_{x \in D} \left| \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) u(x_j) \right| = \max_{x \in D} \left( \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(x, x_j)| \right).$$

Como $k$ es continua, existe $\overline{x}_0 \in D$ tal que

$$\max_{x \in D} \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(x, x_j)| = \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j k(\overline{x}_0, x_j)|.$$

Consideremos $u \in B_{C(D)}$ que cumpla:

$$u(x_j) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \quad \alpha_j \ k(\overline{x}_0, x_j) \geq 0 \\ -1 & , \text{ si } \quad \alpha_j \ k(\overline{x}_0, x_j) < 0 \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, q_n,$$

y que en cada intervalo de la forma $]x_j, x_{j+1}[$, $j = 1, \ldots, q_n - 1$ $u$ sea lineal. Entonces $u$ es una función que está en $C(D)$, con $\|u\|_\infty \leq 1$ y que cumple

$$\|K_n u\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j \ k(x, x_j)|,$$

con lo que concluimos la comprobación.

En los análisis del error para los métodos de proyección, se probaba que $\|K - P_n K\|$ convergía a cero, cuando $n$ tendía a infinito; éste no es el camino a seguir para el método de Nyström, ya que, en este caso, se tiene que

$$\|K - P_n K\| \geq \|K\|.$$

Por tanto, comencemos estudiando qué cantidades convergen a cero cuando $n$ tiende a infinito.

**Lema 2.10.** *Sea $D$ un conjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ y sea $k(x, y)$ continua para $x, y \in D$. Supongamos que la fórmula de cuadratura (41) es convergente para cualquier función continua sobre $D$. Definamos*

$$e_n(x, y) = \int_D k(x, v) k(v, y) \ dv - \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) k(x_j, y), \qquad x, y \in D, n \geq 1,$$

*el error de integración numérica para el integrando $k(x, \cdot) k(\cdot, y)$. Entonces, para $z \in C(D)$,*

$$(K - K_n) K z(x) = \int_D e_n(x, y) z(y) \ dy, \tag{49}$$

$$(K - K_n)K_n z(x) = \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j \; e_n(x, x_j) z(x_j). \tag{50}$$

*Además*

$$\|(K - K_n)K\| = \max_{x \in D} \int_D |e_n(x, y)| \; dy, \tag{51}$$

$$\|(K - K_n)K_n\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j e_n(x, x_j)|. \tag{52}$$

*Finalmente, el error de integración numérica $e_n$ converge a cero uniformemente sobre $D$,*

$$c_E \equiv \lim_{n \to \infty} \max_{x, y \in D} |e_n(x, y)| = 0 \tag{53}$$

*y, por tanto,*

$$\|(K - K_n)K\|, \; \|(K - K_n)K_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{54}$$

**Demostración.** La comprobación de las fórmulas (49) y (50) es sencilla teniendo en cuenta lo siguiente:

$$Kz(x) = \int_D k(x, y) z(y) \; dy,$$

$$K_n z(x) = \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) z(x_j),$$

$$K(Kz)(x) = \int_D k(x, v) Kz(v) \; dv = \int_D \int_D k(x, v) k(v, y) z(y) \; dy dv,$$

$$K_n(Kz)(x) = \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) Kz(x_j) = \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) \int_D k(x_j, y) z(y) \; dy,$$

$$\begin{aligned} \int_D e_n(x, y) z(y) \; dy \;\; &= \int_D \int_D k(x, v) k(v, y) z(y) \; dv dy - \\ &- \int_D \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j) k(x_j, y) z(y) \; dy; \end{aligned}$$

$$K(K_n z)(X) = \int_D k(x,v) K_n z(v)\ dv = \int_D k(x,v) \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x,x_j) z(x_j)\ dv,$$

$$K_n(K_n z)(x) = \sum_{i=1}^{q_n} \alpha_i k(x,x_i) K_n z(x_i) = \sum_{i=1}^{q_n} \alpha_i k(x,x_i) \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x_i,x_j) z(x_j),$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j e_n(x,x_j) z(x_j) \quad &= \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j \left( \int_D k(x,v) k(v,x_j) z(x_j)\ dv - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^{q_n} \alpha_i k(x,x_i) k(x_i,x_j) z(x_j) \right). \end{aligned}$$

Por la fórmula, tenemos que $(K - K_n)K$ es un operador integral sobre $C(D)$ y, por tanto, tenemos (51) para su cota. La verificación de (52) es sencilla y la omitimos.

Comprobemos (53). Comencemos mostrando que $\{e_n(x,y) : n \geq 1\}$ es una familia equicontinua y uniformemente acotada que converge puntualmente a cero sobre $D$; por tanto, por el teorema de Ascoli, $e_n(x,y) \to 0$ uniformemente sobre $D$. Por la hipótesis de que la fórmula de integración (41) converge para cualquier función continua $g$ sobre $D$, tenemos que para cada $x, y \in D$, $e_n(x,y) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Comprobemos pues que dicha familia es equicontinua y uniformemente acotada.

Con respecto a la acotación,

$$|e_n(x,y)| \leq (c_D + c_I) c_K^2,$$

con

$$c_D = \int_D\ dy, \quad c_K = \max_{x,y\in D} |k(x,y)|, \quad c_I = \sup_{n\geq 1} \sum_{j=1}^{q_n} |\alpha_j|.$$

Para la equicontinuidad,

$$|e_n(x,y) - e_n(\zeta,\nu)| \leq |e_n(x,y) - e_n(\zeta,y)| + |e_n(\zeta,y) - e_n(\zeta,\nu)|,$$

$$|e_n(x,y)| - e_n(\zeta,y)| \leq c_K(c_D + c_I) \max_{y\in D} |k(x,y) - k(\zeta,y)|,$$
$$|e_n(\zeta,y) - e_n(\zeta,\nu)| \leq c_K(c_D + c_I) \max_{x\in D} |k(x,y) - k(x,\nu)|.$$

Esto prueba la equicontinuidad de $\{e_n(x,y)\}$, debido a la continuidad uniforme de $k(x,y)$ sobre el compacto $D$. De hecho, esto completa la demostración de (53).

Para (54), notemos que

$$\|(K - K_n)K\| \leq c_D \max_{x,y\in D} |e_n(x,y)|,$$

$$\|(K - K_n)K_n\| \leq c_I \max_{x,y\in D} |e_n(x,y)|.$$

Con esto concluimos la demostración. □

Veamos el siguiente teorema de perturbación, con el cual analizaremos el error en el método de Nyström (43)-(45). Este resultado nos proporciona una alternativa a los argumentos de perturbación que aparecen en el teorema de la serie geométrica.

**Teorema 2.11.** *Sea $V$ un espacio de Banach, sean $S, T$ operadores lineales y continuos de $V$ en $V$ y supongamos que $S$ es compacto. Dado $\lambda \neq 0$, supongamos $\lambda - T : V \longrightarrow V$ es biyectiva. Finalmente supongamos que*

$$\|(T - S)S\| < \frac{|\lambda|}{\|(\lambda - T)^{-1}\|}. \tag{55}$$

*Entonces existe $(\lambda - S)^{-1}$ y es un operador acotado de $V$ en $V$, con*

$$\|(\lambda - S)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(\lambda - T)^{-1}\| \; \|S\|}{|\lambda| - \|(\lambda - T)^{-1}\| \; \|(T - S)S\|}. \tag{56}$$

*Si $(\lambda - T)u = f$ y $(\lambda - S)z = f$, entonces*

$$\|u - z\| \leq \|(\lambda - S)^{-1}\| \; \|Tu - Su\|. \tag{57}$$

**Observación 2.12.** Suponer que el operador $\lambda - T$ es biyectivo, implica, por el teorema de los isomorfismos de Banach, que existe $(\lambda - T)^{-1}$ y es un operador acotado de $V$ en $V$.

**Demostración.** Supongamos que $(\lambda - S)^{-1}$ existe, en cuyo caso debería satisfacer

$$(\lambda - S)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I + (\lambda - S)^{-1}S).$$

(ya que al componer con $(\lambda - S)$ obtenemos la identidad).
Teniendo esto en cuenta, consideremos la aproximación

$$(\lambda - S)^{-1} \approx \frac{1}{\lambda}(I + (\lambda - T)^{-1}S).$$

Para comprobar esta aproximación, veamos que

$$\frac{1}{\lambda}(I + (\lambda - T)^{-1}S)(\lambda - S) = I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(T - S)S. \tag{58}$$

Comprobemos esta igualdad: (58) es cierta si, y solo si,

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda - S) + \frac{(\lambda - T)^{-1}S(\lambda - S)}{\lambda} = I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(T - S)S$$

equivalentemente

$$\frac{(\lambda - T)^{-1}S(\lambda - S) - S}{\lambda} = \frac{(\lambda - T)^{-1}(T - S)S}{\lambda}$$

cuando y sólo cuando

$$(\lambda - T)^{-1}S(\lambda - S) - (\lambda - T)^{-1}(\lambda - T)S = (\lambda - T)^{-1}(T - S)S$$

si, y solo si,

$$S(\lambda - S) - (\lambda - T)S = (T - S)S,$$

y esto es cierto.

Haciendo uso del teorema de la serie geométrica, el miembro de la derecha es invertible, ya que (55) implica

$$\frac{1}{|\lambda|}\ \|(\lambda - T)^{-1}\|\ \|(T-S)S\| < 1.$$

Además, por dicho teorema, tenemos que

$$\|(I + \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(T-S)S)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda - T)^{-1}(T-S)S \right\|}.$$

Multiplicando esta desigualdad por $\dfrac{1}{|\lambda|}$ y simplificando, obtenemos

$$\|(\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T-S)S)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|(\lambda - T)^{-1}\|\ \|(T-S)S\|}. \tag{59}$$

Como el segundo miembro de (58) es invertible, el primero también es invertible. Esto implica que $\lambda - S$ es inyectivo. Debido a la compacidad de $S$, el teorema de la alternativa de Fredholm nos dice que $(\lambda - S)^{-1}$ existe y es un operador acotado de $V$ en $V$ (ya que, si $(\lambda - S)v = 0$, como $\lambda - S$ es inyectivo, entonces $v = 0$; por tanto, podemos aplicar el mencionado resultado). En particular,

$$(\lambda - S)^{-1} = (\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T-S)S)^{-1}(I + (\lambda - T)^{-1}S). \tag{60}$$

La cota (56) se obtiene utilizando (59) y (60) como sigue:

$$\begin{aligned} \|(\lambda - S)^{-1}\| &\leq \|(\lambda + (\lambda - T)^{-1}(T-S)S)^{-1}\|\ \|I + (\lambda - T)^{-1}S\| \leq \\ &\leq \frac{1 + \|(\lambda - T)^{-1}\|\ \|S\|}{|\lambda| - \|(\lambda - T)^{-1}\|\ \|(T-S)S\|}. \end{aligned}$$

Para el error $u - z$ reescribamos $(\lambda - T)u = f$ como

$$(\lambda - S)u = f + (T - S)u.$$

Restamos $(\lambda - S)z = f$ para obtener

$$(\lambda - S)(u - z) = (T - S)u, \tag{61}$$

$$u - z = (\lambda - S)^{-1}(T - S)u,$$

$$\|u - z\| \leq \|(\lambda - S)^{-1}\| \; \|(T - S)u\|,$$

lo que prueba (57). □

A continuación damos un resultado que nos permite analizar la convergencia del método de Nyström (43)-(45).

**Teorema 2.13.** *Sea $D$ un conjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ y sea $k(x, y)$ continua para $x, y \in D$.Supongamos que la fórmula de cuadratura (41) es convergente para cualquier función continua sobre $D$. Además, supongamos que la ecuación integral (40) tiene una única solución para $f \in C(D)$ dada, con $\lambda \neq 0$. Entonces, para $n$ suficientemente grande, pongamos $n \geq N$, las inversas aproximadas $(\lambda - K_n)^{-1}$ existen y están uniformemente acotadas,*

$$\|(\lambda - K_n)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(\lambda - K)^{-1}\| \; \|K_n\|}{|\lambda| - \|(\lambda - K)^{-1}\| \; \|(K - K_n)K_n\|} \| \leq c, \quad n \geq N,$$

*para una constante apropiada $c < \infty$. Para las ecuaciones $(\lambda - K)u = f$ y $(\lambda - K_n)u_n = f$, tenemos*

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_\infty &\leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \; \|(K - K_n)u\|_\infty \leq \\ &\leq c\|(K - K_n)u\|_\infty, \quad n \geq N. \end{aligned} \tag{62}$$

**Demostración.** La comprobación es una aplicación directa del Teorema 2.10., con $S = K_n$ y $T = K$. Del Lema 2.9. tenemos que $\|(K - K_n)K_n\| \to 0$, y, por tanto, la condición (55) se satisface para todo $n$ suficientemente grande, pongamos $n \geq N$. De la acotación de $k(x, y)$ sobre $D$, de (48), y de (42),

$$\|K_n\| \leq c_I c_K, \quad n \geq 1.$$

En consecuencia,

$$c \equiv \sup_{n \geq N} \frac{1 + \|(\lambda - K)^{-1}\| \ |K_n\|}{|\lambda| - \|(\lambda - K)^{-1}\| \ \|(K - K_n)K_n\|} < \infty,$$

con lo que conluimos la demostración. □

Estudiemos, a continuación, la convergencia del método de Nyström haciendo uso del teorema que acabamos de probar. A la vista de (62), la velocidad con que $\|u - u_n\|_\infty$ converge a cero está acotada por el error de integración numérica

$$\|(K - K_n)u\|_\infty = \max_{x \in D} \left| \int_D k(x, y)u(y) \ dy - \sum_{j=1}^{q_n} \alpha_j k(x, x_j)u(x_j) \right|.$$

Además, de hecho, el error $\|u - u_n\|_\infty$ converge a cero exactamente con esta velocidad, es decir, con la misma velocidad con que $\|(K - K_n)u\|_\infty$ converge a cero. En efecto, si consideramos (61) para $S = K_n$ y $T = K$, tenemos

$$(\lambda - K_n)(u - u_n) = (K - K_n)u. \tag{63}$$

Acotando esto, obtenemos

$$\|(K - K_n)u\|_\infty \leq \|\lambda - K_n\| \ \|u - u_n\|_\infty.$$

Teniendo en cuenta esta desigualdad y la relación (62), probamos la afirmación de que $\|u - u_n\|_\infty$ y $\|(K - K_n)u\|_\infty$ convergen a cero con la misma velocidad.

Por tanto, la velocidad con que $\|u - u_n\|_\infty$ converge a cero puede ser determinada usando resultados sobre la velocidad de convergencia de la regla de integración (41) cuando se aplica a la integral

$$\int_D k(x,y)u(y)\,dy.$$

Llegados a este punto, nuestro siguiente objetivo es el de dar una *estimación asintótica del error* que cometemos al resolver la ecuación integral (40) utilizando el método de Nyström. Esto será posible en aquellos casos en los que la fórmula de cuadratura (41) posea una fórmula de error asintótico. Reconsiderando la relación (63), podemos escribir

$$u - u_n = (\lambda - K_n)^{-1}(K - K_n)u = \varepsilon_n + r_n,$$

con

$$\varepsilon_n = (\lambda - K)^{-1}(K - K_n)u$$

y

$$\begin{aligned} r_n &= ((\lambda - K_n)^{-1} - (\lambda - K)^{-1})(K - K_n)u = \\ &= (\lambda - K_n)^{-1}(K_n - K)(\lambda - K)^{-1}(K - K_n)u. \end{aligned}$$

El término $r_n$ suele converger a cero más rápidamente de lo que lo hace $\varepsilon_n$, aunque probar esta afirmación conlleva distinguir qué fórmula de cuadratura se considera en cada caso. Así,

$$u - u_n \approx \varepsilon_n,$$

con $\varepsilon_n$ satisfaciendo la ecuación integral original con miembro de la derecha el error de integración numérica $(K - K_n)u$, esto es, verificando

$$(\lambda - K)\varepsilon_n = (K - K_n)u.$$

Finalmente, para acabar esta sección, estudiemos el *condicionamiento del sistema lineal* que aparece en el método de Nyström. Sea $A_n$ la matriz de coeficientes del sistema lineal (44):

$$(A_n)_{i,j} = \lambda\delta_{i,j} - \alpha_j k(x_i, x_j).$$

Nuestro objetivo es calcular su condicionamiento, el cual se define como

$$\mathrm{cond}(A_n) = \|A_n\| \; \|A_n^{-1}\|,$$

y demostrar que dicha sucesión está acotada.
Veamos que

$$\|A_n\| \leq \|\lambda - K_n\|.$$

En efecto, como

$$\begin{aligned} \|A_n\| &= \max_{i=1,\dots,n} (|a_{i,1}^{(n)}|, \dots, |a_{i,n}^{n}|) = \\ &= \max_{i=1,\dots,n} (|\lambda\delta_{i,1} - \alpha_1 k(x_i, x_1)| + \ldots + |\lambda\delta_{i,n} - \alpha_n k(x_i, x_n)|), \end{aligned}$$

podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el máximo se alcanza para $i = 1$, esto es

$$\|A_n\| = |\lambda - \alpha_1 k(x_1, x_1)| + |\alpha_2 k(x_1, x_2)| + \ldots + |\alpha_n k(x_1, x_n)|.$$

Por otro lado,

$$\|\lambda - K_n\| = \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} \|\lambda u - K_n u\|.$$

Así pues, si encontramos $u \in B_{C(D)}$ tal que

$$\|\lambda u - K_n u\| \geq \|A_n\|,$$

hemos terminado (ya que tendremos que $\|A_n\| \leq \|\lambda u - K_n u\| \leq \|\lambda - K_n\|$). Como

$$\|\lambda u - K_n u\| = \sup_{x\in D}\left|\lambda u(x) - \sum_{j=1}^{q_n}\alpha_j k(x,x_j)u(x_j)\right|,$$

consideremos $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $\|u\|_\infty \leq 1$ y verificando:

$$u(x_1) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \lambda - \alpha_1 k(x_1,x_1) \geq 0 \\ -1 & , \text{ si } \lambda - \alpha_1 k(x_1,x_1) < 0 \end{cases}$$

y

$$u(x_j) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \alpha_j k(x_1,x_j) \geq 0 \\ -1 & , \text{ si } \alpha_j k(x_1,x_j) < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|\lambda - K_n\| &\geq \|\lambda u - K_n u\| \geq \\
&\geq |\lambda u(x_1) - K_n u(x_1)| = \\
&= |(\lambda - \alpha_1 k(x_1,x_1))u(x_1) - \alpha_2 k(x_1,x_2)u(x_2) - \ldots - \\
&-\alpha_n k(x_1,x_n)u(x_n)| = \\
&= |\lambda - K(x_1,x_1)| + |\alpha_2 k(x_1,x_2)| + \ldots + |\alpha_n k(x_1,x_n)| = \\
&\|A_n\|.
\end{aligned}$$

Para $A_n^{-1}$,

$$\|A_n^{-1}\| = \sup_{\beta\in\mathbb{R}^{q_n},\|\beta\|_\infty=1}\|A_n^{-1}\beta\|_\infty.$$

Para un tal $\beta$, sea $x = A_n^{-1}\beta$, o equivalentemente, $\beta = A_n x$. Tomemos $f \in C(D)$ con $\|f\|_\infty = \|\beta\|_\infty$, tal que

$$f(x_i) = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, q_n.$$

Sea ahora $u_n = (\lambda - K_n)^{-1} f$, o equivalentemente $(\lambda - K_n)u_n = f$. Entonces, por la anterior discusión del método de Nyström,

$$u_n(x_i) = z_i, \quad i = 1, \ldots, q_n.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1}\beta\|_\infty &= \|x\|_\infty \leq \\ &\leq \|u_n\|_\infty \leq \\ &\leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \; \|f\|_\infty = \\ &= \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \; \|\beta\|_\infty. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|A_n^{-1}\|_\infty \leq \|(\lambda - K_n)^{-1}\|.$$

Finalmente, combinando estos resultados, tenemos que

$$\operatorname{cond}(A_n) \leq \|\lambda - K_n\| \; \|(\lambda - K_n)^{-1}\| \equiv \operatorname{cond}(\lambda - K_n).$$

Por tanto, si la ecuación $(\lambda - K_n)u_n = f$ está bien condicionada, entonces también está bien concionado el sistema lineal asociado a ésta.

# Capítulo 3

# BASES DE SCHAUDER

En el capítulo que nos ocupa, vamos a introducir el concepto de **base de Schauder**. Asímismo, estudiaremos dos tipos de funciones asociadas a una tal base de Schauder: los funcionales biortogonales y las proyecciones naturales. Éstas tres nuevas nociones constituirán piezas fundamentales en el estudio de la resolución numérica de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie, que llevaremos a cabo en el Capítulo 4.

## 3.1 Del lema de Baire a las bases de Schauder

El objetivo de esta sección es poner de manifiesto la necesidad de un nuevo concepto de base: la base de Schauder. Para ello, planteemos la siguiente cuestión.

¿Qué espacios de Banach de dimensión infinita poseen una base numerable? Para responder a esto, haremos uso del lema de Baire, resultado topológico que para nuestros propósitos se enuncia como sigue:

**Lema 3.1.** *(de Baire) Sea $E$ un espacio de Banach. Supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $G_n$ es un abierto denso de $E$. Entonces $\bigcap_{n\geq 1} G_n$ es un abierto denso de $E$.*

Equivalentemente, supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n$ es un cerrado de $E$ con interior vacío. Entonces $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) = \emptyset$.

Ahora, en relación a la pregunta anterior, supongamos que existe un espacio de Banach $X$ que posee una base $B = \{x_n\}_{n\geq 1}$ infinita numerable. Dado $n \geq 1$, consideremos el cerrado $F_n$ de $X$ dado por

$$F_n = Lin(\{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Claramente $F_n \neq X$, y por tanto $F_n^0 = \emptyset$. En consecuencia, según el lema de Baire,

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) = \emptyset$$

lo cual es absurdo, ya que

$$int\left(\bigcup_{n\geq 1} F_n\right) = X.$$

Por tanto concluimos que no existen espacios de Banach de dimensión infinita que posean una base numerable.

Este es el motivo por el cual surge una nueva noción de base en un espacio de Banach, llamada base de Schauder.

## 3.2 Primeros ejemplos y propiedades elementales

Comenzamos esta sección presentando la noción de *base de Schauder*. Este concepto fue introducido por J. Schauder en el año 1926 [10] y será de enorme utilidad en el desarrollo de este capítulo del siguiente.

**Definición 3.2.** Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en un espacio de Banach $X$ es una base de Schauder para $X$ si para cada $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$x = \sum_{n\geq 1} a_n x_n.$$

**Observación 3.3.** De ahora en adelante, cuando hagamos referencia a una base para un espacio de Banach, nos referiremos a una base de Schauder. Para evitar confusiones, las bases para espacios vectoriales se suelen llamar bases de Hamel.

**Ejemplo 3.4.** 1. Consideremos el espacio de Banach $X = c_0$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Veamos que la sucesión $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es base de $X$, donde para cada $n \geq 1$,

$$e_n = (0, \ldots, 0, \overset{n)}{1}, 0, \ldots).$$

Para ello, consideremos un elemento arbitrario $x = (x(1), x(2), x(3), \ldots) \in c_0$. Comprobemos inicialmente que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} x(n) e_n \right\| = 0.$$

En efecto,

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{m}x(n)e_n\right\| = \sup_{j\geq 1}\left|x(j)-\left(\sum_{n=1}^{m}x(n)e_n\right)(j)\right| =$$

$$= \left(\sup_{j=1,\ldots,m}|x(j)-x(j)|\right)\vee\left(\sup_{j>m}|x(j)-0|\right) =$$

$$= \sup_{j>m}|x(j)| \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

luego

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)e_n.$$

Veamos finalmente la unicidad de la sucesión de escalares que aparece en la expresión anterior.

Sea $x\in c_0$. Supongamos que existe una sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)e_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n.$$

En ese caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-x(n))e_n=0,$$

de donde se deduce, por la expresión de los elementos $\{e_n : n\geq 1\}$, que

$$a_n=x(n), \quad \forall n\geq 1.$$

Por lo tanto, $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es base de $c_0$.

2. Sea $X=l_p$ $(1\leq p<\infty)$ y consideremos este espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_p$, donde para cada $x\in l_p$,

$$\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comprobemos que, al igual que en el ejemplo anterior, $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es base de $X$.
En efecto, dado $x \in l_p$,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} x(n)e_n \right\|_p = \|(0,\ldots,0,x(m+1),x(m+2),\ldots)\|_p =$$

$$= \left( \sum_{n>m} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

ya que $\sum_{n>m} |x(n)|^p$ es la cola de una serie convergente.
La unicidad de la sucesión de escalares se comprueba de manera análoga al ejemplo anterior.

Sin embargo, la sucesión $\{e_n\}_{n\geq 1}$ no es base para $l_\infty$ ya que, por ejemplo, no existe una sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que $(1,1,1,\ldots) = \sum_{n\geq 1} a_n e_n$.
Comprobemos esta afirmación. Llamemos $u = (1,1,\ldots)$. Veamos, en primer lugar, que si $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ entonces $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. En efecto, si para cada $i = 1,2,\ldots$ consideramos la aplicación $\Phi_i : l_\infty \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_i(x) := x(i), \quad (x \in l_\infty),$$

entonces aplicando $\Phi_i$ a nuestra hipótesis de que $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ y usando la linealidad y continuidad de $\Phi_i$, tenemos que

$$u(i) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n(i),$$

luego $a_i = 1$, para $i = 1,2,\ldots$. Por lo tanto, de este primer razonamiento concluimos que si

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

entonces

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} e_n. \tag{1}$$

Finalmente, veamos que no es posible que $u = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$, con lo que concluiremos lo anunciado. Si para cada $n = 1, 2, \ldots$, llamamos

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} e_j = (1, \overset{n)}{\ldots}, 1, 0, 0, \ldots),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - u\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|(0, \overset{n}{\ldots}, 0, -1, -1, \ldots)\|_\infty = \lim_{n\to\infty} 1 \neq 0.$$

lo que contradice la identidad (1).

3. Si $H$ es un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es una base ortonormal de $H$, entonces $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es base de Schauder de $H$. Además, en ese caso, para cada $x \in H$,

$$x = \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n.$$

En efecto, si $x = \sum_{n\geq 1} a_n e_n$, se tiene que, para cada $m \geq 1$,

$$< x, e_m >= \sum_{n\geq 1} a_n < e_n, e_m >= a_m.$$

Por tanto, $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es base de Schauder de $H$ y

$$x = \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n.$$

4. Consideremos $X = L_p[0,1]$, $(1 \leq p < \infty)$, con la norma $\|\cdot\|_p$, donde para cada $f \in L_p[0,1]$,

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Fijemos $p \in [1, \infty[$ y definamos una sucesion $\{f_n\}$ en $L_p[0,1]$ como sigue. Sea $f_1$ la función constantemente 1 sobre el intervalo $[0,1)$ y 0 en el punto de abcisa 1, es decir, $f_1 = 1$ c.p.d. Para $n \geq 2$ definamos $f_n$ considerando un entero positivo $m$ tal que $2^{m-1} < n \leq 2^m$, y entonces sea

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \\ -1 & \text{si } \dfrac{2n-1}{m} - 1 \leq t < \dfrac{2n}{2^m} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Comprobemos que $\{f_n\}$ es base de Schauder de $L_p[0,1]$. Sean $n_0$ y $m_0$ enteros positivos tales que $n_0 \geq 2$ y $2^{m_0 - 1} < n_0 \leq 2^{m_0}$, y sean $I_1$ e $I_2$ los intervalos

$$\left[ \frac{2n_0 - 2}{2^{m_0}} - 1, \frac{2n_0 - 1}{2^{m_0}} - 1 \right)$$

y

$$\left[ \frac{2n_0 - 1}{2^{m_0}} - 1, \frac{2n_0}{2^{m_0}} - 1 \right)$$

respectivamente y consideremos una sucesión de escalares $\{a_n\}$. Sea $a$ el valor constante $\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0 - 1} a_n f_n$ sobre $I_1 \cup I_2$. Para $r, s \geq 0$ se tiene que $r^p + s^p -$

$2((r+s)/2)^p \geq 0$, de lo cual deducimos que

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |\sum_{n=1}^{n_0} a_n f_n|^p - \int_{[0,1]} |\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n f_n|^p &= \int_{I_1} |a+a_{n_0}|^p + \int_{I_2} |a-a_{n_0}|^p - \\ &- \int_{I_1\cup I_2} |a|^p = \\ &= \frac{|a+a_{n_0}|^p + |a-a_{n_0}|^p - 2|a|^p}{2^{m_0}} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Por tanto $\|\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n f_n\|_p \leq \|\sum_{n=1}^{n_0} a_n f_n\|_p$, y en consecuencia $\|\sum_{n=1}^{m_1} a_n f_n\|_p \leq \|\sum_{n=1}^{m_2} a_n f_n\|_p$, para $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ y $m_1 \leq m_2$.

Por otro lado, tenemos que $L_p[0,1] = \mathrm{Lin}(\{f_n : n \in \mathbb{N}\})$, ya que $\langle\{f_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ contiene a la función indicadora de cualquier intervalo diádico $\left[\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right)$, donde $m$ es un entero no negativo y $n$ es un entero verificando que $1 \leq n \leq 2^m$.

Finalmente, como cada $f_n$ es una función no nula, aplicando el Teorema 4.1.24. de [7], concluimos que $\{f_n\}$ es una base para $L_p[0,1]$.

La sucesión $\{f_n\}$ se llama base de Haar para $L_p[0,1]$. El hecho de que fuera una base para este espacio fue demostrado por primera vez por Schauder en un artículo publicado en 1928 [9].

5. Sea el espacio de Banach $X = C([a,b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Una base de

Schauder para este espacio de Banach es una sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funciones de $C([a,b])$ definidas como siguen: consideremos $\{t_i : i \geq 1\}$ un subconjunto denso de $[a,b]$ de puntos distintos, con $t_1 = a$ y $t_2 = b$. Definamos la función $s_1$ como

$$s_1(t) = 1, \quad (t \in [a,b]).$$

Para $j = 2, 3, \ldots,$

$$s_j : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

es la función cuya gráfica es la poligonal pasando por los puntos $(t_1, 0), \ldots,$ $(t_{j-1}, 0), (t_j, 1)$. En particular, para $j = 2, 3, \ldots,$

$$s_j(t_i) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ si } i < j \end{cases}$$

Vamos a comprobar que $\{s_n\}_{n\geq 1}$ es base de $X$.

Para ello, sea $x \in C([a,b])$ y supongamos que existen $a_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n$. Entonces, por definición de la norma de $C([a,b])$, la serie converge uniformemente, luego también hay convergencia puntual. Es decir, $\forall t \in [a,b],\ x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n(t)$. Vamos a calcular los coeficientes $a_n, n = 1, 2, \ldots$.
Tomando $t = t_1$ obtenemos

$$x(t_1) = a_1 s_1(t_1) + a_2 s_2(t_1) + a_3 s_3(t_1) + \ldots = a_1 + 0 = a_1.$$

Por lo tanto $a_1 = x(t_1)$.
Para $t = t_2$ se tiene que

$$x(t_2) = a_1 s_1(t_2) + a_2 s_2(t_2) + a_3 s_3(t_2) + \ldots = a_1 + a_2$$

Por lo tanto $a_2 = x(t_2) - a_1$.
Ahora para $t = t_3$ resulta

$$x(t_3) = a_1 s_1(t_3) + a_2 s_2(t_3) + a_3 s_3(t_3) + \ldots = a_1 s_1(t_3) + a_2 s_2(t_3) + a_3$$

y por tanto $a_3 = x(t_3) - a_2 s_2(t_3) - a_1 s_1(t_3)$
Razonando de manera análoga para los sucesivos $t_i$, se obtienen finalmente las siguientes expresiones:

$$a_1 = x(t_1), \quad \text{para } n \geq 2,\ a_n = x(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i s_i(t_n)$$

Comprobemos, finalmente, que dada la sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por las relaciones anteriores, se verifica que

$$x = \sum_{n\geq 1} a_n s_n.$$

Para ello, veamos que dado $m \geq 1$ arbitrario, $\sum_{n=1}^{m} a_n s_n$ converge uniformemente a $x$ en $[a, b]$, es decir,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} a_n s_n \right\|_{\infty} = 0.$$

En primer lugar, notemos que, al ser $x$ continua en el intervalo $[a, b]$, $x$ es uniformemente continua en $[a, b]$, esto es,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \text{si } s, t \in [a, b],\ |s - t| < \delta,\ \text{entonces } |x(s) - x(t)| < \varepsilon.$$

Ahora, comencemos comprobando que $\sum_{n=1}^{m} a_n s_n$ coincide con $x$ en los nodos

$\{t_1, \ldots, t_m\}$. En efecto, para $j = 1, \ldots, m$, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} a_n s_n(t_j) &= a_1 s_1(t_j) + a_2 s_2(t_j) + \ldots + a_j s_j(t_j) = \\ &= a_1 s_1(t_j) + \ldots + a_{j-1} s_{j-1}(t_j) + \left( x(t_j) - \sum_{i=1}^{j-1} a_i s_i(t_j) \right) = \\ &= x(t_j).\end{aligned}$$

Además, $\sum_{n=1}^{m} a_n s_n$ es lineal en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m-1$, ya que para cada $n = 1, \ldots, m$, $s_n$ es lineal en $[t_i, t_{i+1}]$. Por tanto, teniendo en cuenta las dos afirmaciones que acabamos de detallar, $\sum_{n=1}^{m} a_n s_n$ es el interpolante lineal a trozos de $x$ en los nodos $\{t_1, \ldots, t_m\}$. Ahora bien, es relativamente sencillo comprobar que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} a_n s_n \right\|_\infty \leq \omega(x, \delta).$$

Luego, por la continuidad uniforme de $x$, se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} a_n s_n \right\|_\infty \leq \omega(x, \delta) < \varepsilon.$$

En consecuencia, $\{s_n\}_{n\geq 1}$ es base para $C([a, b])$, llamada *base de Schauder clásica para* $C([a, b])$

**Propiedades 3.5.** 1. Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es base de Schauder de $X$, entonces $X = \overline{\mathrm{Lin}(\{x_n :\ n \geq 1\})}$. En particular, $X$ es separable (un espacio $X$ se dice separable si contiene un subconjunto denso y numerable de elementos de $X$, equivalentemente, existe un subconjunto $A$ de $X$ tal que $X = \overline{\mathrm{Lin}(A)}$). A propósito de esta afirmación, surge, de manera natural, la cuestión de plantearnos si el recíproco de la misma es cierto; esto es, si todo espacio de Banach infinito-dimensional que sea separable posee una base de Schauder. Este problema se mantuvo abierto durante cuarenta años y se conoce con el nombre de *problema de la base* de Banach. Éste fue resuelto finalmente, de manera negativa, en un artículo publicado en 1973 por P. Enflo ([6]), que mostró un contraejemplo, en el que se exponía que cierto subespacio cerrado del espacio separable de sucesiones convergentes a cero, $c_0$, no tiene base de Schauder.

2. Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach y sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ base de $X$. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo, entonces $\{Tx_n\}_{n\geq 1}$ es base de $Y$.En efecto, sea $y \in Y$. Comprobemos que existe una sucesión de escalares $\{b_n\}_{n\geq 1}$ tal que $y = \sum_{n\geq 1} b_n T x_n$. Así es, como $T$ es un isomorfismo, existe un único $x \in X$ tal que $Tx = y$. Entonces existe una única sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tal que $x = \sum_{n\geq 1} a_n x_n$. Por lo tanto, haciendo uso de la linealidad de $T$, tenemos que

$$y = Tx = T\left(\sum_{n\geq 1} a_n x_n\right) = \sum_{n\geq 1} a_n T x_n$$

A continuación, veamos que dicha sucesión de escalares es única. Así, sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ sucesiones de escalares tales que

$$y = \sum_{n\geq 1} a_n T x_n = \sum_{n\geq 1} b_n T x_n.$$

Como T es un isomorfismo, existe un único $x \in X$ tal que $x = T^{-1}y$. Por tanto, aplicando $T^{-1}$ a la expresión de $y$, tenemos que

$$x = T^{-1}\left(\sum_{n\geq 1} a_n T x_n\right) = T^{-1}\left(\sum_{n\geq 1} b_n T x_n\right),$$

luego

$$x = \sum_{n\geq 1} a_n x_n = \sum_{n\geq 1} b_n x_n.$$

Como $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es base de Schauder de $X$, entonces

$$a_n = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con lo que concluimos la demostración.

Algunas de las propiedades que más adelante se mencionarán son válidas para cualquier base de Schauder en $C([a,b]\times[a,b])$. Sin embargo consideramos más apropiado restringirnos a la base de Schauder clásica.

Para nuestros propósitos, es conveniente introducir la siguiente notación: dado un número real $x$, denotemos por $[x]$ a la parte entera de $x$, esto es, al entero $max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ y llamamos $\tau = (\tau_1, \tau_2) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ la aplicación definida por:

$$\tau(n) := \begin{cases} (\sqrt{n}, \sqrt{n}), & \text{si} \quad [\sqrt{n}\,] = \sqrt{n} \\ (n - [\sqrt{n}\,]^2, [\sqrt{n}\,] + 1), & \text{si} \quad 0 < n - [\sqrt{n}\,]^2 \leq [\sqrt{n}\,]. \\ ([\sqrt{n}\,] + 1, n - [\sqrt{n}\,]^2 - [\sqrt{n}\,]), & \text{si} \quad [\sqrt{n}\,] < n - [\sqrt{n}\,]^2 \end{cases}$$

Es fácil observar que $\tau$ es una aplicación biyectiva, que además verifica:

$$n, m \in \mathbb{N},\ n < m \Rightarrow \tau_1(n) < \tau_1(m) \quad \text{ó} \quad \tau_2(n) < \tau_2(m).$$

De hecho, $\tau$ nos permite ordenar $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

En la siguiente propiedad veremos cómo obtener una base de $C([a,b]^2)$ a partir de dos bases en $C([a,b])$. La demostración este resultado puede consultarse en [3] y [11].

**Proposición 3.6.** *Sean* $\{s_i\}_{i\geq 1}$ *y* $\{\tilde{s}_j\}_{j\geq 1}$ *bases de Schauder en el espacio de Banach* $C([a,b])$ *y sea, para* $n \in \mathbb{N}$

$$\Psi(x,y) := s_i(x)\tilde{s}_j(y) \qquad (x, y \in [a,b]),$$

*donde* $\tau(n) = (i,j)$. *Entonces* $\{\Psi_n\}_{n\geq 1}$ *es una base de Schauder para* $C([a,b]^2)$.

Si $\{t_i\}_{i\geq 1}$ en un subconjunto denso en $[a,b]$ de puntos distintos, con $t_1 = a$, $t_2 = b$ y $\{s_i\}_{i\geq 1}$ es la base de Schauder asociada introducida anteriormente, entonces para cada $n \geq 1$, escribamos

$$x_n(s,t) = s_i(s)s_j(t) \quad (s, t \in [a,b]),$$

donde $\tau(n) = (i,j)$. De aquí en adelante se supondrá que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es esta base de $C([a,b]^2)$.

Haciendo uso del orden inducido por $\tau$, veamos el siguiente resultado técnico, cuya comprobación es relativamente sencilla si prestamos atención a la definición de la base de $C([a,b])$ y a la propiedad que hemos resaltado de la aplicación $\tau$. Notemos que el resultado nos proporciona una propiedad para la base 2-dimensional análoga a la ya vista para la base 1-dimensional: la función $n$-ésima de la base toma el valor 1 en el nodo correspondiente a $\tau(n)$ y vale 0 en los nodos anteriores a $\tau(n)$.

**Lema 3.7.** *La base* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *para* $C([a,b]^2)$ *satisface*

$$\text{para todo } s,t \in [a,b], \quad x_1(s,t) = 1$$

*y*

$$x_n(t_i,t_j) = \begin{cases} 1, & si \;\; \tau(n) = (i,j) \\ 0, & si \;\; \tau^{-1}(i,j) < n \end{cases}$$

**Demostración.** Como $\tau(1) = (1,1)$, entonces $x_1(s,t) = s_1(s)s_1(t) = 1, \forall s,t \in [a,b]$. Para comprobar la segunda expresión, pongamos

$$x_n(t_i,t_j) = s_{\tau_1(n)}(t_i)s_{\tau_2(n)}(t_j).$$

Ahora bien, por la definición de la base clásica de $C([a,b])$, sabemos que

$$s_{\tau_1(n)}(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \tau_1(n) \\ 0 & \text{si } i < \tau_1(n) \end{cases}$$

y

$$s_{\tau_2(n)}(t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \tau_2(n) \\ 0 & \text{si } j < \tau_2(n) \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que

$$s_{\tau_1(n)}(t_i)s_{\tau_2(n)}(t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = \tau(n) \\ 0 & \text{si } \begin{cases} i < \tau_1(n), j = \tau_2(n) \\ \text{o bien} \\ i = \tau_1(n), j < \tau_2(n) \\ \text{o bien} \\ i < \tau_1(n), j < \tau_2(n) \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, si $\tau^{-1}(i,j) < n$ entonces $i < \tau_1(n)$ o bien $j < \tau_2(n)$, y haciendo uso de la expresión de $s_{\tau_1(n)}(t_i)s_{\tau_2(n)}(t_j)$ que acabamos de obtener, concluimos la demostración. □

## 3.3 Continuidad de los funcionales biortogonales y las proyecciones

En esta sección, nuestro principal objetivo es el de probar la continuidad automática de dos tipos de aplicaciones lineales sobre espacios de Banach que tienen bases. A este respecto, comencemos definiendo las mencionadas aplicaciones.

**Definición 3.8.** Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una base para un espacio de Banach $X$. Para cada entero positivo $m$, el $m$-ésimo funcional coordenado $x_m^*$ para $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es la aplicación de $X$ en $\mathbb{R}$ dada por $\sum_{n\geq 1} a_n x_n \mapsto a_m$, y la $m$-ésima proyección natural $P_m$ para $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es la aplicación de $X$ en $X$ definida por $\sum_{n\geq 1} a_n x_n \mapsto \sum_{n=1}^{m} a_n x_n$.

Con las definiciones que acabamos de introducir, observemos lo siguiente:
si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, entonces $x_m^*(x) = a_m$, $\forall m \in \{1, 2, \ldots\}$ y, por tanto, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$. En consecuencia, $P_m(x) = \sum_{n=1}^{m} x_n^*(x) x_n$.

Abordemos ya la continuidad de las proyecciones naturales y de los funcionales biortogonales. Es claro que, con la notación introducida en la definición anterior,

$$(P_n - P_{n-1})(x) = x_n^*(x) x_n,$$

lo cual nos proporciona la equivalencia entre las continuidades de $P_n$ y $x_n^*$.

Pasamos a enunciar el resultado más relevante en lo que a bases de Schauder se refiere, el cual nos asegura, en un ambiente de complitud, la continuidad de las aplicaciones lineales anteriormente mencionadas. Necesitaremos del siguiente concepto: sea $A$ un subconjunto de un espacio normado y definimos una *serie convexa de elementos de $A$* como una serie de la forma

$\sum_{n\geq 1} \lambda_n a_n$, donde $a_n \in A$ y $\lambda_n \geq 0$ para cada $n$, y $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = 1$. A lo largo de la demostración de dicho resultado, haremos uso de la siguiente noción.

**Definición 3.9.** Un subconjunto $A$ de un espacio de Banach se dice CS-cerrado si contiene a la suma de toda serie convexa convergente de elementos de $A$.

**Ejemplo 3.10.** Todo subconjunto conexo y cerrado de un espacio de Banach es CS-cerrado.

Además, necesitaremos del siguiente resultado técnico.

**Lema 3.11.** *Si $A$ es un subconjunto CS-cerrado de un espacio vectorial normado, entonces $A$ y su clausura $\overline{A}$ poseen el mismo interior.*

**Demostración.** Como $\mathrm{int}(\overline{A})$ es abierto, es suficiente probar que está contenido en $A$. Con este propósito, sea $x \in \mathrm{int}(\overline{A})$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$x + u \in \overline{A} \quad \forall u, \; \|u\| \leq \delta.$$

Probemos que $x \in A$. Para ello, como $A$ es CS-cerrado, construyamos una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de $A$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n = x.$$

Si probamos esto, concluimos la demostración ya que la serie anterior es una serie convexa. Ahora bien, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x = x,$$

la relación que debe verificar la sucesión $\{a_n\}$ es equivalente a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(a_n - x) = 0.$$

Probaremos, de hecho, que cada $a_n$ puede ser elegido de manera que $\|s_n\| \leq 2^{-n-1}\delta$ para cada $n$, donde

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}(a_i - x).$$

Para comenzar la construcción de la sucesión, sólo necesitamos elegir un punto $a_1$ de $A$ verificando

$$\|a_1 - x\| \leq \delta/2.$$

Esto siempre es posible ya que $x \in \overline{A}$. Sigamos, a continuación, un razonamiento inductivo. Supongamos que $a_1, \ldots, a_{n-1}$ han sido definidos de manera que $\|s_r\| \leq 2^{-r-1}\delta$, para $1 \leq r \leq n-1$. Entonces, en particular, $\|2^n s_{n-1}\| \leq \delta$, por lo que $x - 2^n s_{n-1} \in \overline{A}$, y podemos, pues, elegir $a_n \in A$ verificando

$$\|a_n - x + 2^n s_{n-1}\| \leq \delta/2.$$

Como $s_n = s_{n-1} + 2^{-n}(a_n - x)$, esto prueba que $\|s_n\| \leq 2^{-n-1}\delta$, como se quería demostrar. □

**Teorema 3.12.** *Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una base de un espacio de Banach $X$. Entonces los funcionales biortogonales $x_n^*$ y las proyecciones naturales $P_n$ son continuos. De hecho, existe una constante $M$ tal que $\|P_n\| \leq M$, para todo $n \geq 1$.*

**Demostración.** Por lo expuesto antes del teorema, nos limitamos a comprobar la continuidad de los $P_n$.

Sea pues $n \in \mathbb{N}$, y consideremos el conjunto

$$A = \{x \in X : \|P_n(x)\| \leq 1\}.$$

Como $P_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} x$, si $x \in A$ entonces $\|x\| \leq 1$. Además, para cualquier $x \in X$, como $\{P_n(x)\}_{n\geq 1}$ es convergente, $\{P_n(x)\}_{n\geq 1}$ es acotada. Por lo tanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(nA) = X$$

(en efecto, si $x \in X$, nos preguntamos si $\exists n \geq 1$ tal que $x \in nA$. Equivalentemente, la cuestión es si $\exists n \geq 1$ tal que $\|P_n(x)\| \leq n$. Si $\nexists n \geq 1$ tal que $\|P_n(x)\| \leq n$, entonces $\forall n \geq 1, \|P_n(x)\| \geq n$, lo cual es absurdo ya que la sucesión $\{P_n(x)\}_{n\geq 1}$ es convergente).
Por el lema de Baire, $\overline{A}$ tiene puntos interiores (ya que, como quiera que $X$ es completo, entonces $X$ es de $2^a$ categoría en sí mismo. Por lo tanto, $\exists n \geq 1$ tal que $(n\overline{A})^0 \neq \emptyset$. En consecuencia $\overline{A}^0 \neq \emptyset$). Probemos que $A$ es CS-cerrado, de lo cual, en virtud del lema anterior, se deduce que $A$ tiene puntos interiores y, en particular, el cero es un punto interior de $A$ (por ser $A$ simétrico y convexo). Así $A$ contiene a $\delta U$ para algún $\delta > 0$ y por tanto $\|P_n\| \leq \dfrac{1}{\delta}$, para cada $n$.

Pasemos pues a comprobar que $A$ es CS-cerrado. Sea $\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p a_p$ una serie convexa de elementos de $A$ que converge a $a_0 \in X$. Veamos que $a_0 \in A$. Si ponemos $b_p = \alpha_p a_p$, entonces $\|P_n(b_p)\| \leq \alpha_p$, para todo $n$ y $p$ (ya que $a_p \in A$, para todo $p$). Por lo tanto, para cada $n$, la serie $\sum_{p=1}^{\infty} P_n(b_p)$ es convergente (por estar acotada por la serie convergente $\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p$), pongamos $c_n = \sum_{p=1}^{\infty} P_n(b_p)$ y $\|c_n\| \leq 1$. Ahora, $P_1(b_p) = x_1^*(b_p)x_1$ y $(P_n - P_{n-1})(b_p) = x_n^*(b_p)x_n$, para

$n > 1$, por lo que $\sum_{p=1}^{\infty} x_n^*(b_p)$ es convergente, pongamos $\lambda_n = \sum_{p=1}^{\infty} x_n^*(b_p)$, para cada $n$ y

$$c_n = \sum_{p=1}^{\infty} P_n(b_p) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i^*(b_p)x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{\infty} x_i^*(b_p)\right)x_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i.$$

Veamos que $c_n \longrightarrow a_0$, esto es, $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i = a_0$. En consecuencia,

$$P_n(a_0) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = c_n$$

y como $\|c_n\| \leq 1$, entonces $\|P_n(a_0)\| \leq 1$, para cada $n$, con lo que concluiríamos la demostración.

Comprobemos, por tanto, que $c_n \longrightarrow a_0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k \geq 1$ tal que $\sum_{p>k}\alpha_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Como $\|b_p\| \leq \alpha_p$ (ya que $\|a_p\| \leq 1$) para cada $p$, tenemos que $\|a_0 - (b_1 + \ldots + b_k)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Además, $\|c_n - P_n(b_1 + \ldots + b_k)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $n$. Como $P_n(x) \longrightarrow x$, para todo $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(b_1 + \ldots + b_k) - P_n(b_1 + \ldots b_k)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $n \geq n_0$. Por tanto, para ese $n$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|c_n - a_0\| &\leq \|c_n - P_n(b_1 + \ldots + b_k)\| + \\ &+\|P_n(b_1 + \ldots + b_k) - (b_1 + \ldots + b_k)\| + \|(b_1 + \ldots + b_k) - a_0\| \leq \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

□

La definición de base de Schauder es totalmente válida para espacios normados. Sin embargo, en el siguiente ejemplo se pone de manifiesto la necesidad de que el espacio ambiente sea completo para asegurar la veracidad del resultado anterior.

En $X = c_{00}$ ($c_{00}$ es el espacio de las sucesiones en el cuerpo que son casinulas, con la norma $\|\cdot\|_\infty$), consideremos

$$b_1 = e_1 \text{ y } \; b_n = e_n - e_1, \text{ para } n \geq 2.$$

Claramente $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es base de Hamel de $c_{00}$. Veamos que $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es base de Schauder de $c_{00}$.

Dado $x \in c_{00}$, nos preguntamos si existe una única sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{K}$ verificando

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n.$$

Supongamos que existe dicha sucesión de escalares. En ese caso,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n = \\ &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2(e_2 - e_1) + \alpha_3(e_3 - e_1) + \ldots + \alpha_n(e_n - e_1) + \ldots = \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \ldots - \alpha_n - \ldots)e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots . \end{aligned}$$

Como $x \in c_{00}$, entonces $x \in c_0$. Por tanto, teniendo en cuenta que $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es una base de $c_0$, existe una única sucesión de escalares $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots .$$

En consecuencia, tenemos que

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \ldots, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3, \ldots, \alpha_n = \beta_n, \ldots .$$

Por tanto, la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ existe, es única (por la unicidad de los escalares $\{\beta_n\}$ respecto de la base $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $c_0$) y además hemos obtenido una expresión de dichos escalares. Luego $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es base de Schauder de $c_{00}$.

Sea ahora $\{P_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de proyecciones naturales asociada a la base $\{b_n\}_{n\geq 1}$. Veamos que $P_1$ no es continuo. En efecto, el elemento $e_1 + \ldots + e_n$ en términos de la base $\{b_n\}$ se expresa como

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n &= e_1 + (e_2 - e_1) + e_1 + \\ &+ (e_3 - e_1) + e_1 + \ldots + (e_n - e_1) + e_1 = \\ &= ne_1 + (e_2 - e_1) + (e_3 - e_1) + \ldots + (e_n - e_1). \end{aligned}$$

Entonces

$$P_1(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) = P_1(ne_1 + (e_2 - e_1) + \ldots + (e_n - e_1)) = ne_1$$

Sabemos que $P_1$ es continua si, y solo si, $\exists k > 0$ tal que $\|P_1(x)\| \leq k\|x\|, \forall x \in c_{00}$. Ahora bien, considerando $x = e_1 + \ldots + e_n$, si $\exists k > 0$ tal que $\|P_1(x)\|_\infty \leq k\|x\|_\infty$, entonces $\exists k > 0$ tal que $n \leq k$ y, por tanto, acotaríamos superiormente los naturales, lo cual contradice la arquimedianidad de $\mathbb{N}$. En consecuencia, $P_1$ no es continuo.

**Ejemplo 3.13.** (de funcionales biortogonales)

1.- Consideremos el espacio de Banach $c_0$ de las sucesiones convergentes a cero. Sabemos que $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es base de Schauder de $c_0$ (ver el ejemplo 1 de la subección Ejemplo 3.4.). Estudiemos los funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_{n\geq 1}$. Consideremos, en primer lugar la siguiente aplicación $\phi : l_1 \longrightarrow c_0^*$ definida por

$$\begin{aligned} y \longmapsto \phi(y) : \quad & c_0 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \phi(y)(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \end{aligned}$$

Usaremos el hecho de que $\phi$ es un isomorfismo isométrico.
$\forall n \in \mathbb{N}, e_n^* \in c_0^* \overset{\phi}{\cong} l_1$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}, e_n^* = (e_n^*(1), e_n^*(2), e_n^*(3), \ldots) \in l_1$.

Veamos quiénes son los $e_n^*(m)$, para $m = 1, 2, \ldots$. Claramente, para $n \in \mathbb{N}$ fijo y para $m \geq 1$, se tiene que

$$e_n^*(e_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & , \; n = m \\ 0 & , \; n \neq m \end{cases}$$

Ahora bien, si comprobamos que $e_n^*(m) = e_n^*(e_m)$ para $m = 1, 2, \ldots$, hemos terminado pues, en ese caso, $e_n^*(m) = \delta_{nm}, \forall m \geq 1$ y por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$e_n^* = (0, \ldots, 0, \overset{n)}{1}, 0, \ldots).$$

De esta forma conocemos la sucesión de funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_{n\geq 1}$ en $c_0^*$, que no es más que la base de Schauder de $l_1$ (vía la identificación dada por $\phi$) estudiada en el ejemplo 2 de la subsección 3.4. Por tanto sólo nos falta verificar que $e_n^*(m) = e_n^*(e_m)$, para $m = 1, 2, \ldots$. En efecto, para nuestro propósito basta considerar $e_n^*$ como elemento de $c_0^*$ (como $\phi$ es un isomorfismo, existirá un único $y \in l_1$ tal que $\phi(y) = e_n^*$, pero ese elemento y no nos interesa, sino simplemente $e_n^*$ y su definición como aplicación de $c_0$ en $\mathbb{R}$). Ahora, atendiedo a la definición de $\phi$, para $m = 1, 2, \ldots$, tenemos que

$$e_n^*(e_m) = \sum_{k=1}^{\infty} e_n^*(k) e_m(k) = e_n^*(m),$$

con lo que concluimos el ejemplo.

2.- Si ahora consideramos el espacio $l_p$ $(1 \leq p < \infty)$, tenemos una situación análoga a la que hemos estudiado en el ejemplo primero. Más concretamente, sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base de Schauder de $l_p$ que ya vimos en el ejemplo 2 de la subsección 3.4. de este capítulo. Sea $q \in \mathbb{N}$ verificando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (con el convenio de que $q = \infty$ si $p = 1$). Es conocido que $l_p^*$ y $l_q$ son isométricamente isomorfos, vía un isomorfismo $\phi$ que actúa, en este caso, de la misma forma a como lo hacía en el ejemplo anterior. Si nos planteamos estudiar los funcionales biortogonales $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$, comprobamos que la situación es parecida a la ya vista, obteniendo las siguientes conclusiones: para cada $k \in \mathbb{N}$, $e_k^* \in l_q$ y además $e_k^* = (0,\ldots,0,\overset{k)}{1},0,\ldots)$, luego $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta ser la base de Schauder de $l_q$.

3.- Si en el espacio $C([a,b])$ consideramos la base de Schauder clásica, los funcionales biortogonales asociados a dicha base ya fueron calculados en el ejemplo 5 de la subsección 3.4. Esto es, si $\{s_n\}_{n\geq 1}$ es la base anteriormente mencionada, la expresión de los funcionales biortogonales es la siguiente: dada $x \in C([a,b])$, se tiene que

$$s_1^*(x) = x(t_1), \text{ para } n \geq 2,\ s_n^*(x) = x(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} s_i^*(x)s_i(t_n),$$

donde $\{t_i : i \geq 1\}$ es un subconjunto denso de $[a,b]$, con $t_1 = a$ y $t_2 = b$.

**Propiedades 3.14.** (de los funcionales biortogonales y de las proyecciones naturales)

1) Refiriéndonos al ejemplo concreto en que $X = C([a,b])$, dado $x \in C([a,b])$ y fijado $j \in \{1,2,\ldots\}$, tenemos que $P_j(x) = \sum_{i=1}^{j} s_i^*(x)s_i$. Entonces $P_j(x)$ es suma de funciones continuas y lineales a trozos con nodos $t_1, t_2, \ldots, t_j$, luego $P_j(x)$ tambiés es continua y lineal a trozos con esos mismos nodos. En otras palabras, $P_j(x)$ tiene por gráfica una poligonal con nodos $t_1, t_2, \ldots, t_j$. Además verifica:

$$P_j(x)(t_1) = a_1s_1(t_1) + a_2s_2(t_1) + \ldots + a_js_(t_1) = a_1 = x(t_1),$$

y para $i \leq j$ se tiene que

$$P_j(x)(t_i) = a_1s_1(t_i) + \ldots + a_js_j(t_i) = a_1s_1(t_i) + \ldots + a_{i-1}s_{i-1}(t_i) + a_i = x(t_i).$$

En consecuencia, $P_j(x)$ es una poligonal que coincide con $x$ en los nodos $t_1, t_2, \ldots, t_j$. Finalmente, como estamos trabajando en el intervalo $[a,b]$ que es compacto, la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n$ a $x$ en el $[a,b]$ nos asegura que

$$\|x - P_j(x)\|_\infty \xrightarrow{j\to+\infty} 0$$

y por tanto $P_j(x)$ interpola linealmente a $x$ en los nodos $t_1, t_2, \ldots, t_j$.

2) Sea $T : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo. Sean $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $\{T(x_n)\}_{n\geq 1}$ bases de $X$ e $Y$ respectivamente. Si $\{x_n^*\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociada a la base $\{x_n\}_{n\geq 1}$, entonces $\{(T^*)^{-1}(x_n^*)\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociada a la base $\{T(x_n)\}_{n\geq 1}$. En efecto, como $T$ es un isomorfismo, entonces $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ es un isomorfismo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Sea $y = \sum_{n\geq 1} b_n T(x_n)$. Veamos que $\left((T^*)^{-1}(x_m^*)\right)(y) = b_m$. Así es, para cada $m \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left((T^*)^{-1}(x_m^*)\right)\left(\sum_{n\geq 1} b_n T(x_n)\right) &= \left((T^{-1})^*(x_m^*)\right)\left(\sum_{n\geq 1} b_n T(x_n)\right) = \\
&= \left(x_m^* \cdot T^{-1}\right)\left(\sum_{n\geq 1} b_n T(x_n)\right) = \\
&= x_m^*\left(T^{-1}\left(\sum_{n\geq 1} b_n T(x_n)\right)\right) = \\
&= x_m^*\left(\sum_{n\geq 1} b_n x_n\right) = \\
&= b_m,
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos lo que habíamos anunciado.

De ahora en adelante, consideraremos que $\{x_n^*\}_{n\geq 1}$ y $\{P_n\}_{n\geq 1}$ son las sucesiones de funcionales biortogonales y proyecciones naturales, respectivamente, asociadas a la base de Schauder clásica $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de $C([a,b]^2)$. Como consecuencia del Lema 3.7., vamos a deducir, de forma recursiva, una expresión operativa para los funcionales biortogonales $x_n^*$ asociados a la base $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Notemos que ya tenemos una expresión de los funcionales biortogonales asociados a la base de $C([a,b])$ (ver el ejemplo 5 de la subsección Ejemplo 3.4. de este capítulo), y lo que nos disponemos a hacer, es similar a aquello, en cierto modo.

**Proposición 3.15.** *Si $\Phi \in C([a,b]^2)$, entonces*

$$x_1^*(\Phi) = \Phi(t_1, t_1)$$

*y para todo $n \geq 2$, si $\tau(n) = (i,j)$, tenemos*

$$x_n^*(\Phi) = \Phi(t_i, t_j) - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^*(\Phi) x_k(t_i, t_j)$$

**Demostración.** Como $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es base para el espacio de Banach $C([a,b]^2)$, entonces se verifica que

$$\text{para todo } s,t \in [a,b],\ \lim_{m\geq 1} \left( \sum_{n=1}^{m} x_n^*(\Phi) x_n(x,y) \right) = \Phi(s,t).$$

Para concluir la demostración, basta aplicar el Lema 3.7. □

A la vista de esta proposición, veamos una propiedad que involucra a las proyecciones naturales, y que es análogo al caso de $C([a,b])$

**Corolario 3.16.** *Sea* $\Phi \in C([a,b]^2)$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$P_n(\Phi)(t_i, t_j) = \Phi(t_i, t_j)$$

*para* $i, j \in \mathbb{N}$, *y* $\tau^{-1}(i,j) \leq n$.

**Demostración.** Ya que $\Phi \in C([a,b]^2)$, tenemos que

$$\Phi = \sum_{k \geq 1} x_k^*(\Phi) x_k.$$

Entonces $P_n(\Phi) = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(\Phi) x_k$.
Por lo tanto, y teniendo en cuenta el Lema 3.7. y la primera parte de la Proposición 3.15., tenemos que

$$P_n(\Phi)(t_1, t_1) = x_1^*(\Phi) x_1(t_1, t_1) = \Phi(t_1, t_1)$$

Y a la vista del Lema 3.7. y de la segunda parte de la Proposición 3.15. tenemos que

$$P_n(\Phi)(t_i, t_j) = \sum_{k=1}^{m} x_k^*(\Phi) x_k(t_i, t_j) = x_m^*(\Phi) + \sum_{k=1}^{m-1} x_k^*(\Phi) x_k(t_i, t_j) = \Phi(t_i, t_j)$$

□

De este resultado se deduce que, con la base de Schauder clásica para $C([a,b]^2)$, la proyección natural $n$-ésima interpola a la función en los nodos anteriores correspondientes a $\tau(n)$

El siguiente resultado, cuya aplicación se verá en el Capítulo 4 y que tiene un enunciado análogo en el espacio $C([a,b])$, nos proporciona una estimación explícita de la razón de convergencia, bajo una suposición adicional de regularidad. Con este fin, sea $\{t_i\}_{i\geq 1}$ un subconjunto denso de $[a,b]$ y sea $n \geq 2$ y escribamos $\Delta_n$ para el conjunto $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ ordenado de forma creciente.

**Corolario 3.17.** *Sea* $\Phi \in C^1([a,b]^2)$ *y*

$$M := max \left\{ \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right\|_\infty, \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|_\infty \right\}.$$

*Supongamos que* $M \neq 0$ *(en otro caso, el resultado es trivial). Dado* $\varepsilon > 0$*, para todo* $n \geq 2$ *con* $\Delta_n = \{t_1 = a < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$ *tal que*

$$\max_{i=2,\ldots,n} (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

*entonces se verifica*

$$\|\Phi - P_n(\Phi)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

**Demostración.** En primer lugar, consideremos $(u,v) \in [a,b]^2$ y fijemos un rectángulo $[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ determinado por $\Delta_n \times \Delta_n$, de manera que $(u,v) \in [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$. Notemos $P$ a la restricción de $P_n(\Phi)$ a $[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$. Como cada elemento $x_i$ de la base de $C([a,b]^2)$ es producto de dos elementos, $s_i$ y $s_j$, de la base de $C([a,b])$, y los $s_i$ en cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ son lineales o cero, el producto de dos $s_i$ es un polinomio cuadrático en dos variables en cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Entonces existen $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$P(s,t) = c_1 st + c_2 s + c_3 t + c_4, \qquad ((s,t) \in [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]).$$

Aplicando el Corolario 3.16. y la desigualdad triangular, obtenemos

$$|\Phi(u,v) - P(u,v)| \leq |\Phi(u,v) - \Phi(t_i, t_j)| + |P(u,v) - P(t_i, t_j)|. \tag{2}$$

Con el objetivo de completar la demostración, vamos a conseguir una cota superior para cada término de la parte derecha de la desigualdad (2). Para el primero, si llamamos $< \cdot >$ al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, entonces el teorema del valor medio asegura la existencia de $(\zeta_1, \zeta_2) \in [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ de manera que

$$\Phi(u,v) - \Phi(t_i, t_j) = \langle \nabla\Phi(\zeta_1, \zeta_2), (u - t_i, v - t_j) \rangle \, ,$$

y gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\Phi(u,v) - \Phi(t_i, t_j)| \leq \sqrt{2} M \frac{\varepsilon}{4M} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

De nuevo, el teorema del valor mefio nos proporciona una cota superior para el segundo sumando de (2). Por un lado, en virtud de dicho resultado, existe $t \in [t_j, t_{j+1}]$ con

$$\Phi(t_i, t_{j+1}) - \Phi(t_i, t_j) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_i, t)(t_{j+1} - t_j)$$

y por otro lado, como, por el Corolario 3.16., $\Phi(t_i, t_j) = P(t_i, t_j)$ y $\Phi(t_i, t_{j+1}) = P(t_i, t_{j+1})$, entonces

$$c_1(t_{j+1} - t_j)t_i + c_3(t_{j+1} - t_j) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_i, t)(t_{j+1} - t_j).$$

En consecuencia

$$c_1 t_i + c_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_i, t),$$

y por tanto

$$|c_1 t_i + c_3| \leq M.$$

Utilizamos exactamente este mismo argumento con los puntos $(t_{i+1}, t_j)$ y $t_{i+1}, t_{j+1})$, obteniendo

$$|c_1 t_{i+1} + c_3| \leq M,$$

que junto con la anterior desigualdad nos proporciona, por un sencillo argumento de convexidad,

$$|c_1 u + c_3| \leq M. \tag{4}$$

Argumentando de forma similar con los puntos $(t_i, t_j)$ y $(t_{i+1}, t_j)$, se deriva que

$$|c_1 t_j + c_2| \leq M. \tag{5}$$

En consecuencia, a la vista de (4) y (5), el segundo término de la parte derecha de (2) verifica

$$\begin{aligned} |P(u,v) - P(t_i,t_j)| &= |c_1 uv + c_2 u + c_3 v - c_1 t_i t_j - c_2 t_i - c_3 t_j| \\ &= |(c_1 u + c_3)(v - t_j) + (c_1 t_j + c_2)(u - t_i)| \\ &\leq 2\frac{\varepsilon M}{4M} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Finalmente, (2), (3) y (6) implican que

$$|\Phi(u,v) - P(u,v)| \leq \varepsilon,$$

y como esto se verifica para todo $(u,v) \in [a,b]^2$, entonces

$$\|\Phi - P\|_\infty \leq \varepsilon,$$

como se quería demostrar. □

Como se puede observar en el enunciado del corolario, podemos controlar la velocidad de convergencia sin más que tomar los nodos suficientemente próximos.

**Observación 3.18.** Si analizamos la demostración que acabamos de llevar a cabo, se observa que es suficiente que $\Phi$ sea una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ y de clase $C^1$ en $[a, b] \times [a, b]$ excepto quizás en las líneas

$$\{t_i\} \times [a, b], \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ó

$$[a, b] \times \{t_j\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Esto es debido a que sólo se usa que $\Phi \in C^1([a, b] \times [a, b])$ para aplicar el teorema del valor medio, pero los puntos $(\zeta_1, \zeta_2)$ que nos proporciona dicho teorema están en el intervalo abierto $]t_i, t_{i+1}[$. Por tanto, en las hipótesis del teorema podríamos debilitar la regularidad de $\Phi$.

# Capítulo 4

# APORTACIONES A LA ECUACIÓN DE FREDHOLM

En este capítulo estudiaremos un nuevo método numérico para resolver la ecuación integral de Fredholm de segunda especie $(\lambda - K)u = f$. Más concretamente, si
$k : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, entonces $T$ denota el operador

$$T : C([a, b]) \longrightarrow C([a, b])$$

definido por

$$(Tu)(x) = \frac{1}{\lambda}\left[f(x) + \int_a^b k(x, y)u(y)dy\right], \quad (u \in C([a, b]), x \in [a, b])$$

Por lo tanto, el objetivo es el de obtener un método numérico que permita hallar el único punto fijo del operador integral $T$.

El método se propone está basado en el uso de bases de Schauder y nos proporciona una sucesión de funciones continuas que converge de manera uniforme a la solución del problema y una estimación de la velocidad de convergenvia. Entre algunas de las principales ventajas que presenta respecto a otros métodos clásicos, tales como colocación o Galerkin, podemos señalar que las integrales que aparecen en este método son inmediatas por lo que no es necesario el uso de ningún metodo de cuadratura para calcularlas, además de no tener que resolver ningún sistema de ecuaciones lineales, como ocurría con los métodos de colocación o Galerkin, y que puede complicar en exceso el cálculo de una solución para nuestro problema.

## 4.1 Nuevo método para la resolución de la ecuación de Fredholm

Comencemos observando que podemos determinar, en términos de la base de Schauder $\{x_n\}_{n\geq 1}$, la imagen de una función continua vía el operador $T$ de manera sencilla: fijemos $u \in C([a,b])$ y sea $\Phi \in C([a,b]^2)$ la función definida por

$$\Phi(s,t) := k(s,t)u(t), \quad (s,t \in [a,b]).$$

Entonces se tiene que

$$\lim_{m\geq 1} \|\Phi - \sum_{n=1}^{m} x_n^*(\Phi)x_n\|_\infty = 0$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
(Tu)(s) &= \frac{1}{\lambda}\left(f(s) + \int_a^b \Phi(s,t)dt\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(f(s) + \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\Phi)x_n(s,t)\right) dt\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(f(s) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\Phi)\int_a^b x_n(s,t)dt\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(f(s) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(\Phi)s_{\tau_1(n)}(s)\int_a^b s_{\tau_2(n)}(t)dt\right).
\end{aligned}
$$

A continuación enunciaremos el principal resultado de este capítulo, el cual contiene las ideas clave del método numérico. Haciendo un uso reiterado del teorema del punto fijo de Banach, podemos obtener una sucesión de funciones que converge a la solución de la ecuación integral de Fredholm, pero el problema que presenta este procedimiento es que sólo se puede llevar a cabo explícitamente en algunos casos, por la dificultad que presentan las integrales que van apareciendo en el proceso. Así, aplicando inductivamente el teorema de Fubini, para $u \in C([a,b])$, obtenemos la expresión de $T^n u(t_1)$, que es

$$
\begin{aligned}
T^n u(t_1) &= \frac{1}{\lambda}f(t_1) + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^b K(t_1,t_2)f(t_2)\ dt_2 + \\
&+ \frac{1}{\lambda^3}\int_a^b\int_a^b K(t_1,t_2)K(t_2,t_3)f(t_3)\ dt_3 dt_2 + \ldots +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{\lambda^{n-1}}\int_a^b \overset{n-2)}{\cdots} \int_a^b K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-2},t_{n-1})f(t_{n-1})\ dt_{n-1}\cdots dt_2+$$

$$+\frac{1}{\lambda^{n}}\int_a^b \overset{n-1)}{\cdots} \int_a^b K(t_1,t_2)K(t_2,t_3)\cdots K(t_{n-1},t_n)f(t_n)\ dt_n\cdots dt_2+$$

$$+\frac{1}{\lambda^{n}}\int_a^b \overset{n)}{\cdots} \int_a^b K(t_1,t_2)K(t_2,t_3)\cdots K(t_n,t_{n+1})u(t_{n+1})\ dt_{n+1}\cdots dt_2,$$

y podemos observar que resultaría extremadamente difícil (o incluso imposible) calcular las integrales que ahí aparecen. Para resolver este problema que se nos plantea en la integración, haremos uso de las proyecciones naturales y, entonces, en vez de integrar una función, lo que haremos será integrar su desarrollo en serie en la base de Schauder truncado por una proyección natural y repetir sucesivamente el proceso.

La idea clave de utilizar el teorema del punto fijo de Banach truncando las funciones se describe en el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. Consideremos $k \in C([a,b]^2)$, $g_0, f \in C([a,b]), \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ y el correspondiente operador integral de Fredholm $T$. Dado $i = 1, \ldots, m$, definimos inductivamente las funciones*

$$\Phi_{i-1}(s,t) := k(s,t)g_{i-1}(t) \qquad (s,t \in [a,b]),$$

*y*

$$g_i(s) = \frac{1}{\lambda}\left[f(s) + \int_a^b P_{n_i}\Phi_{i-1}(s,t)dt\right] \qquad (s \in [a,b]).$$

*Si para todo $i = 1, \ldots, m, \varepsilon_i > 0$ se verifica que*

$$\|Tg_{i-1} - g_i\| < \varepsilon_i,$$

*entonces*

$$\|g - g_m\|_\infty \leq \sum_{i=m}^{\infty} \|g_0 - Tg_0\|_\infty + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha^{m-i},$$

*donde $g$ es la solución de la ecuación integral de Fredholm $Tu = u$ y $\alpha = \dfrac{\|K\|}{|\lambda|}$.*

**Demostración.** Dado que

$$\|g - g_m\|_\infty \leq \|g - T^m g_0\|_\infty + \|g_m - T^m g_0\|_\infty, \tag{1}$$

vamos a obtener por separado una cota superior para cada término de la parte derecha de (1).

Teniendo en cuenta la expresión de $T^n$ que hemos calculado anteriormente, para todo $g, h \in C([a,b])$ y para todo $i = 1, \ldots, m$, tenemos que

$$\left\|T^i g - T^i h\right\|_\infty \leq \left(\frac{\|K\|}{|\lambda|}\right)^i \|g - h\|_\infty. \tag{2}$$

Como nuestro problema tiene existencia y unicidad de solución, gracias a que $\alpha < 1$, entonces la serie $\sum_{i \geq 1} \left(\dfrac{\|K\|}{|\lambda|}\right)^i$ es una serie geométrica de razón menor que 1, luego convergente. Entonces, haciendo uso del teorema del punto fijo de Banach, obtenemos que

$$\|g - T^m g_0\|_\infty \leq \sum_{i=m}^{\infty} \alpha^i \|g_0 - Tg_0\|_\infty. \tag{3}$$

Por otro lado, para todo $g, h \in C([a,b])$, y tomando $i = 1$ en la expresión (2), tenemos que

$$\|Tg - Th\|_\infty \leq \alpha \|g - h\|_\infty,$$

entonces si $i = 1, \ldots, m$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|g_i - T^i g_0\|_\infty &\leq \|g_i - Tg_{i-1}\|_\infty + \|Tg_{i-1} - T^i g_0\|_\infty \\
&\leq \varepsilon_i + \|T(g_{i-1} - T^{i-1}g_0)\|_\infty \\
&\leq \varepsilon_i + \alpha\|g_{i-1} - T^{i-1}g_0\|_\infty,
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
\|g_m - T^m g_0\|_\infty &\leq \varepsilon_m + \alpha\|g_{m-1} - T^{m-1}g_0\|_\infty \leq \\
&\leq \varepsilon_m + \alpha\varepsilon_{m-1} + \alpha^2\|g_{m-2} - T^{m-2}g_0\|_\infty \leq \\
&\leq \varepsilon_m + \alpha\varepsilon_{m-1} + \alpha^2\varepsilon_{m-2} + \alpha^3\|g_{m-3} - T^{m-3}g_0\|_\infty \leq \ldots \leq \\
&\leq \varepsilon_m + \alpha\varepsilon_{m-1} + \alpha^2\varepsilon_{m-2} + \ldots + \\
&+\alpha^{m-2}\varepsilon_2 + \alpha^{m-1}\|g_1 - Tg_0\|_\infty \leq \\
&\leq \varepsilon_m + \alpha\varepsilon_{m-1} + \alpha^2\varepsilon_{m-2} + \ldots + \\
&+\alpha^{m-2}\varepsilon_2 + \alpha^{m-1}(\varepsilon_1 + \alpha\|g_0 - g_0\|_\infty) = \\
&= \varepsilon_m + \alpha\varepsilon_{m-1} + \alpha^2\varepsilon_{m-2} + \ldots + \alpha^{m-2}\varepsilon_2 + \alpha^{m-1}\varepsilon_1 = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \alpha^{m-i}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Por tanto, lo que se pretende demostrar se sigue claramente de (1), (3) y (4).
□

Con la siguiente proposición, lo que se pretende es completar, en cierto modo, el teorema anterior, de manera que si suponemos ciertas restricciones adicionales, podemos determinar qué números naturales $n_1, \ldots, n_m$ deben tomarse en el teorema anterior.

**Proposición 4.2.** *Con la notación del Teorema 4.1., supongamos que* $k \in C^1([a,b]^2)$*,* $g_0, f \in C^1([a,b])$*,* $\lambda \neq 0$*, y para* $p \in \mathbb{N}$*,* $M_p \neq 0$*, donde*

$$M_p := \max\left\{ \left\| \frac{\partial k}{\partial s} \right\|_\infty \|g_{p-1}\|_\infty, \left\| \frac{\partial k}{\partial t} \right\|_\infty \|g_{p-1}\|_\infty + \|k\|_\infty \|g'_{p-1}\|_\infty \right\}.$$

*Dado* $\varepsilon_p > 0$*, fijemos* $n_p \geq 2$ *y supongamos que* $\Delta_{n_p} := \{t_1 = a < t_2 < \ldots < t_{n_p - 1} < t_{n_p} = b\}$ *satisface*

$$\max_{i=2,\ldots,n_p} (t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon_p |\lambda|}{4 M_p (b-a)}.$$

*Entonces*

$$\|T g_{p-1} - g_p\|_\infty \leq \varepsilon_p.$$

**Demostración.** En efecto, como $\Phi_{p-1}(s,t) = k(s,t) g_{p-1}(t)$ entonces

$$\frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial k}{\partial s}(s,t) g_{p-1}(t), \frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial k}{\partial t}(s,t) g_{p-1}(t) + k(s,t) g'_{p-1}(t).$$

Luego

$$\max\left\{ \|\frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial s}\|_\infty, \|\frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial t}\|_\infty \right\} =$$

$$= \max\left\{ \|\frac{\partial k}{\partial s} g_{p-1}\|_\infty, \|\frac{\partial k}{\partial t} g_{p-1} + k g'_{p-1}\|_\infty \right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{ \|\frac{\partial k}{\partial s}\|_\infty \|g_{p-1}\|_\infty, \|\frac{\partial k}{\partial t}\|_\infty \|g_{p-1}\|_\infty + \|k\|_\infty \|g'_{p-1}\|_\infty \right\} =$$

$$= M_p.$$

Por lo tanto

$$M_p \geq \max\left\{\|\frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial s}\|_\infty, \|\frac{\partial \Phi_{p-1}}{\partial t}\|_\infty\right\}.$$

Ahora, aplicando el Corolario 3.17. (ver Observación 3.18.), puntualmente para $s \in [a,b]$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
|Tg_{p-1}(s) - g_p(s)| \quad &= \left|\frac{1}{\lambda}\left(f(s) + \int_a^b \Phi_{p-1}(s,t)\ dt\right) - \right. \\
&\left. -\frac{1}{\lambda}\left(f(s) + \int_a^b P_{n_p}\Phi_{p-1}(s,t)\ dt\right)\right| = \\
&= \left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b \left(\Phi_{p-1}(s,t) - P_{n_p}\Phi_{p-1}(s,t)\right)\ dt\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\|\Phi_{p-1} - P_{n_p}\Phi_{p-1}\|_\infty \int_a^b 1\ dt = \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\|\Phi_{p-1} - P_{n_p}\Phi_{p-1}\|_\infty (b-a) \leq \\
&\leq \frac{b-a}{|\lambda|}\ \varepsilon_p\ \frac{|\lambda|}{b-a} = \\
&= \varepsilon_p.
\end{aligned}$$

En consecuencia, variando $s$ en $[a,b]$, concluimos que

$$\|Tg_{p-1} - Tg_p\|_\infty \leq \varepsilon_p$$

como se quería demostrar. $\square$

## 4.2 Ejemplos numéricos

Para concluir este último capítulo, presentamos un ejemplo numérico en el que se pretende aproximar la solución de la siguiente ecuación:

$$5u(x) - \int_0^1 e^{xy} u(y)\, dy = f(x), \quad (0 \leq x \leq 1). \tag{5}$$

En este ejemplo vamos a comparar los resultados obtenidos por el método clásico de colocación, en su versión de colocación lineal a trozos vista en la sección 2.1.5, y por el método que hemos planteado en la sección anterior.

Consideramos las funciones

$$u^{(1)}(x) = e^{-x}\cos x, \quad u^{(2)}(x) = \sqrt{x}, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

como soluciones exactas de la ecuación (5) para definir $f(x)$ convenientemente en cada caso.

Para $i = 1, 2$, $E_n^{(i)}$ representa lo mismo que ya vimos en aquel ejemplo de la sección 2.1.5, esto es, representa la máxima diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la solución exacta y la solución aproximada en los nodos del método de colocación, es decir,

$$E_n^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq n+1} \left| u^{(i)}(x_j) - u_n^{(i)}(x_j) \right|,$$

siendo $u^{(i)}(x)$ la solución exacta, para $i = 1, 2$, y $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$ los nodos del método de colocación, esto es, $x_j = (j-1)h$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, siendo $h = \dfrac{1}{n}$.

Para comparar estos resultados con los obtenidos por nuestro método, hemos procedido de la siguiente forma:

En la definición de la base de Schauder de $C([0,1])$ hemos considerado el conjunto denso

$$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}, \ldots\}.$$

Fijado $k$, el conjunto

$$\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \ldots, \frac{2^k-1}{2^k}\}.$$

coincide con los nodos del método de colocación para $n = 2^k$, y el cardinal de dicho conjunto es $n+1$. De esta forma, al aplicar nuestro método, consideraremos los valores $n_1, \ldots, n_m$ indicados en el Teorema 4.1. como $n_1 = \ldots = n_m = n+1$. Asímismo, notamos por $g_{n,p}^{(i)}(x)$ la aproximación de la solución exacta $u^{(i)}(x)$ obtenida por nuestro método numérico, considerando como aproximación inicial $g_0(x) = \dfrac{f(x)}{\lambda}$ en ambos casos. El número $p \in \mathbb{N}$ especifica el número de iteraciones realizadas para cada $n$ fijo. Para cada iteración, notamos $F_{n,p}^{(i)}$ la máxima diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la solución exacta $u^{(i)}(x)$ y la solución aproximada $g_{n,p}^{(i)}(x)$ en los nodos especificados anteriormente, esto es,

$$F_{n,p}^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq n+1} \left| u^{(i)}(x_j) - g_{n,p}^{(i)}(x_j) \right|.$$

Para determinar el número natural $p$, hemos establecido, en la ejecución del método, el siguiente criterio de parada: elegimos $p$ tal que

$$\frac{F_{n,p}}{F_{n,p+1}} < 1 + 10^{-2}.$$

Los resultados que hemos obtenido al programar ambos métodos con Mathematica son los siguientes:

| $n$ | $p$ | $E_n^{(1)}$ | $F_{n,p}^{(1)}$ |
|---|---|---|---|
| $n = 8$ | $p = 9$ | $3.27 \times 10^{-4}$ | $2.55 \times 10^{-4}$ |
| $n = 16$ | $p = 10$ | $8.18 \times 10^{-5}$ | $6.36 \times 10^{-5}$ |
| $n = 32$ | $p = 11$ | $2.04 \times 10^{-5}$ | $1.58 \times 10^{-5}$ |

| $n$ | $p$ | $E_n^{(2)}$ | $F_{n,p}^{(2)}$ |
|---|---|---|---|
| $n = 8$ | $p = 7$ | $2.75 \times 10^{-3}$ | $2.09 \times 10^{-3}$ |
| $n = 16$ | $p = 8$ | $9.65 \times 10^{-4}$ | $7.62 \times 10^{-4}$ |
| $n = 32$ | $p = 9$ | $3.40 \times 10^{-4}$ | $2.76 \times 10^{-4}$ |

Como podemos observar, los errores que se cometen al aplicar el nuevo método numérico son del mismo orden que los del método de colocación. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estos resultados se han obtenido utilizando la base clásica de Schauder para $C([0,1])$ y éstos mejoran cuando se considera una base más compleja en dicho espacio. A pesar de conseguir peores resultados, hemos preferido hacer uso de la base clásica para favorecer la simplicidad de los enunciados que se han presentado en esta memoria. El uso de otras bases en el espacio $C([a,b])$ será objeto de próximos trabajos.

# BIBLIOGRAFÍA

[1] Atkinson,K., The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, Cambridge University Press, (1997), Cambridge.

[2] Atkinson, K., W. Han, Theoretical Numerical Analysis, Springer-Verlag, (2001), New York.

[3] Brunner, H., P.J. van der Houwen, The Numerical Solution of Volterra Equations, North-Holland, (1986), Amsterdam.

[4] Conway, J., A Course in Functional Analysis, 2nd ed., Springer-Verlag, (1990), New York.

[5] Costabel, M., Principles of boundary element methods, Comp. Physics Rep. **6**, (1987), 243-274.

[6] Enflo, P., A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math. **130**, (1973), 309-317.

[7] Megginson, R.E., An Introduction to Banach Space Theory, Springer-Verlag, (1998), New York.

[8] Rivlin, T:, Chebyshev Polynomials, 2nd ed., John wiley, (1990), New York.

[9] Schauder, J., Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems, Math. Z. **28**, (1928), 317-320.

[10] Schauder, J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Z. **26** (1927), 47-65.

[11] Semadini, Z., Product Schauder bases and approximation with nodes in spaces of continuous functions, Bull. Acad. Polon. Sci. **11**, (1963), 387-391.

[12] Sloan, I., Improvement by iteration for compact operator equations, Math. Comp. **30**, (1976), 758-764.