Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Estabilidad de soluciones de ecuaciones elípticas semilineales

Miguel Angel Navarro Burgos

Director:

Salvador Villegas Barranco

26 de Abril de 2016

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Miguel Ángel Navarro Burgos
ISBN: 978-84-9125-960-2
URI: http://hdl.handle.net/10481/43938

El doctorando Miguel Angel Navarro Burgos y el director de la tesis Salvador Villegas Barranco garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección del director de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 26 de Abril de 2016.

Director de la Tesis
Fdo: Salvador Villegas Barranco

Doctorando
Fdo: Miguel Angel Navarro Burgos

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera expresar mi gratitud a Juan Guillermo Córdoba Correa, por su amistad y apoyo en todo momento.

A Alejandro Omón Arancibia por darme el impulso y apoyo para venir a Granada, quien además de ser profesor durante mi formación como Ingeniero Matemático, se convirtió en mi amigo.

A mis padres, hermanos, a mis antiguas y nuevas amistades, y en particular a mi compañera Regina por su apoyo y paciencia en estos últimos años.

A Salvador Villegas Barranco por su disposición y orientación en todo momento durante la elaboración de esta tesis, sin cuya dirección no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

A David Arcoya Álvarez, por su amabilidad, apoyo y disposición en todo momento.

A todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático y en particular al grupo de Investigación: Análisis No Lineal y Ecuaciones Diferenciales, por facilitar la labor y por generar una atmósfera de trabajo agradable y sana.

A Manuel Del Pino y Juan Diego Dávila por su dedicación, disposición y voluntad al recibirme durante mi estancia en Chile 2014.

À Louis Dupaigne et Alberto Farina pour leur amabilité, leur dévotion, leur temps et leurs idées. Merci aussi pour leur humour, car tout cela a permis que mon séjour à Lyon soit une expérience très gratifiante.

Finalmente al programa Formación de Personal Investigador del Ministerio de Ciencia e Innovación (FPI-MICINN), proyecto MTM2009-10878 que me financió por medio de una beca FPI.

A mi familia,

a mi abuelo Artemio,

a mi amigo Jerman Eduardo Sanzana Bartsch

por su honesta e incondicional amistad.

“Prefiero caminar con una duda que con un mal axioma”.

Javier Krahe

Índice general

Notaciones

Notaciones generales

Dado $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$.

$B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio (abierto y conexo).

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$, gradiente de $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$, laplaciano de $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$\mathrm{div}(\xi) = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \xi_N}{\partial x_N}$, divergencia de $\xi : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, p-laplaciano de $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, bilaplaciano de $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

$L^p(\Omega) = \{u \text{ medible en } \Omega \text{ y } \int_\Omega |u|^p < \infty\}$, con $1 \leq p < \infty$.

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u \text{ es medible y } \exists C \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$.

$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u\chi_K \in L^p(\Omega)\, \forall \text{ compacto } K \subset \Omega\}$, con $1 \leq p \leq \infty$.

$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : u(x) = 0\, \forall x \in \Omega \setminus K \text{ donde } K \subset \Omega \text{ es un compacto}\}$.

$C^k(\Omega)$ son las funciones k veces continuamente diferenciales en Ω ($k \geq 0$).

$C^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k \geq 0} C^k(\Omega)$.

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$, $k \geq 0$.

$C^{0,\beta}(\Omega) = \left\{ u \in C^0(\Omega) : \sup\limits_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty \right\}$.

$C^{1,\beta}(\Omega) = \left\{ u \in C^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{0,\beta}(\Omega),\ \forall i = 1, 2, \ldots, N \right\}.$

$W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ espacios de Sobolev.

$H^3_{0,rad}(B_R) = \{u : B_R \to \mathbb{R}$ radial tal que $u \in H_0^3(B_R)\}$.

Capítulo 1

Introducción y resumen de resultados

En muchas disciplinas que abarcan el conocimiento humano encontramos numerosas circunstancias que pueden modelarse por ecuaciones diferenciales. La magnitud de problemas posibles que podemos plantear es tan amplia que es inabarcable analizar cualquier ecuación de una manera genérica.

En esta tesis estudiamos propiedades de soluciones estables de ecuaciones elípticas semilineales con no linealidades generales. Esta clase de soluciones incluye minimizadores locales del funcional de energía asociado, soluciones mínimas, soluciones extremales, y también algunas soluciones que se encuentran entre una sub y súper solución. Particularmente trabajamos cuatro problemas: dos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$ y dos en la bola unitaria donde obtenemos resultados relevantes para la solución extremal.

Nuestra motivación para trabajar este tipo de soluciones se debe, en primer lugar al estudio de resultados obtenidos por Cabré, Capella, Dupaigne, Farina, Sanchón, Villegas y Warnault, entre otros, sobre la existencia, monotonía, estimaciones de derivadas radiales y regularidad de una solución estable. Además utilizamos ideas de los autores para completar parte de los trabajos, obtener nuevos resultados y responder a preguntas abiertas propuestas por los mismos. Otra motivación del presente trabajo es dar respuesta a diferentes cuestiones planteadas en el proyecto de investigación MTM2009-10878.

Estamos particularmente interesados en las relaciones entre su estabilidad, simetría y regularidad. Por resultados obtenidos por Warnault en [36], Cabré, Capella y Sanchón en [6] respecto de la simetría radial en el caso de la bola unitaria, consideramos para nuestro trabajo mayoritariamente soluciones radialmente simétricas. Sin embargo, en el segundo capítulo obtenemos un resultado para una solución no necesariamente radial.

A continuación describimos brevemente los resultados principales obtenidos en cada capítulo de esta Tesis.

El segundo capítulo de la tesis está dedicada al problema $-\Delta u = f(u)$ en $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$, $f \geq 0$, $f \in C^2$, $f \not\equiv 0$. Damos respuesta a la pregunta de si son o no necesarias las condiciones $(9)-(10)$ del Teorema 1.1 de [13]. Para ello demostramos que toda solución estable (no necesariamente radial) es constante para $N = 1, 2$ si f se anula en algún punto de un intervalo $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $f' \geq 0$, y para $3 \leq N \leq 9$ construimos un ejemplo para mostrar que las condiciones impuestas en [13] son necesarias.

El tercer capítulo está dedicada al problema $-\Delta_p u = f(u)$ en $\mathbb{R}^N$, donde $N \geq 2$, $p > 1$, y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Extendemos algunos de los resultados obtenidos por Villegas en [33], adaptándolos a nuestro problema. Obtenemos estimaciones puntuales óptimas para una solución semi-estable radial para $p \geq 2$ ó $2 > p > 1$ y $\frac{2p(\sqrt{2-p}+1)}{(p-1)(2-p)} \geq N$, donde el valor mínimo de $\frac{2p(\sqrt{2-p}+1)}{(p-1)(2-p)}$ es $10 + 6\sqrt{3} \approx 20.39$ y se alcanza cuando $p = 2\sqrt{3} - 2 \approx 1.46$. Por ello, en términos generales, podemos observar que si $N \leq 20$ ó $p \geq 2$ el resultado principal es óptimo.

El cuarto capítulo está dedicada a establecer estimaciones para soluciones semi-estables del problema $-\Delta_p u = g(u)$ en $B_1 \setminus \{0\}$, donde $p > 1$, B_1 es la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz. Logramos mejorar los resultados obtenidos por Cabré, Capella y Sanchón en [6], y responder afirmativamente a la pregunta sobre la posibilidad de eliminar el factor logarítmico $|\log r|^{\frac{1}{p}}$ en la estimación del ítem $c)$ y $d3)$ del Teorema 1.2, además de obtener estimaciones puntuales para las derivadas radiales hasta orden 3 para $N \geq p + 4p/(p-1)$ cuando $g \geq 0$, $g \geq 0$ y es no decreciente, y $g \geq 0$, es no decreciente y convexa, respectivamente. Finalmente como aplicación de los resultados principales, obtenemos estimaciones óptimas para la solución extremal.

El último capítulo está dedicado al problema $\Delta^2 u = \lambda f(u)$ en B_1, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en ∂B_1, donde n es el vector unitario normal exterior, $\lambda \geq 0$ es un parámetro, y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Warnault en [36] demostró que la solución extremal u^* está acotada para dimensiones $N \leq 9$. Por otro lado, en un trabajo anterior Dávila, Dupaigne, Guerra y Montenegro en [11] demuestran que para $f(u) = e^u$ la solución extremal u^* está acotada para dimensiones $N \leq 12$ y es singular para $N \geq 13$, lo que deja abierto si la solución extremal u^* está acotada para dimensiones $10 \leq N \leq 12$ y para una no linealidad general. Nosotros logramos demostrar que la solución extremal u^* está acotada para la dimensión $N = 10$. Además obtenemos estimaciones cerca del origen para $N \geq 11$.

En el resto de este capítulo se presentan las definiciones y los resultados preliminares que se utilizarán a lo largo de la tesis, y describimos nuestros principales resultados.

1.1. Teoremas de Liouville para soluciones estables de ecuaciones elípticas semilineales

En este apartado estudiamos el siguiente problema

$$-\Delta u = f(u) \text{ en } \mathbb{R}^N, \tag{1.1.1}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$. Consideramos soluciones clásicas $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ no necesariamente radiales.

Una solución u de (1.1.1) se dice estable si

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 - f'(u)\xi^2 \geq 0,$$

para todo $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Dupaigne y Farina establecen condiciones para que una solución estable de (1.1.1) sea constante, obteniendo el siguiente teorema

Teorema 1.1.1 (Dupaigne y Farina [13]). *Sea $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto maximal, posiblemente no acotado, tal que $0 \not\equiv f \in C^2(I;\mathbb{R}) \cap C^0(\overline{I};\overline{\mathbb{R}})$ es no negativa, no decreciente, convexa en I y se anula en algún punto de $\overline{I}$. Se define*

$$q(u) := \frac{f'^2}{ff''}(u); \quad \overline{q_0} = \limsup_{u\to z^+} q(u); \quad \underline{q_0} = \liminf_{u\to z^+} q(u); \quad \overline{q_\infty} = \limsup_{u\to b^-} q(u),$$

donde $z = \sup\left\{u \in \overline{I} = [a,b] \subset \overline{\mathbb{R}} : f(u) = 0\right\}$ y $b = \sup I$. Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ es una solución estable de (1.1.1). *Entonces, u es constante si $N \leq 2$ y*

$$0 < \underline{q_0} \leq \overline{q_0} < +\infty \quad y \quad 0 < \overline{q_\infty} < +\infty \tag{1.1.2}$$

o si $N \geq 3$ y se cumplen las siguientes condiciones

$$\overline{q_0} < +\infty \quad y \quad \frac{4}{N-2}\left(1 + 1/\sqrt{\overline{q_0}}\right) > 1/\underline{q_0}. \tag{1.1.3}$$

$$\overline{q_\infty} < +\infty \quad y \quad \frac{4}{N-2}\left(1 + 1/\sqrt{\overline{q_\infty}}\right) > 1/\overline{q_\infty}. \tag{1.1.4}$$

Los autores plantean si las condiciones (1.1.2)-(1.1.4) son necesarias para el teorema anterior. Damos respuesta a dicha pregunta a través de los casos: primero para dimensiones $N = 1, 2$ obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.2 (Navarro y Villegas [27]). *Sea $N \leq 2$, y $0 \not\equiv f \in C^1(\mathbb{R})$ una función no decreciente que se anula en algún punto de $\overline{I}$. Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ es una solución estable de* (1.1.1). *Entonces u es constante.*

Por otra parte para las dimensiones $3 \leq N \leq 9$, obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.1.3 (Navarro y Villegas [27]). *Sea $3 \leq N \leq 9$ y $q > 0$ satisfaciendo*

$$\frac{4}{N-2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) \leq \frac{1}{q}.$$

Entonces existe $u_q \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $u_q(\mathbb{R}^N) = (-\infty, -1]$ y $f_q \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que u_q es una solución estable de (1.1.1) *con $f = f_q$, y f_q satisfaciendo $f_q, f_q', f_q'' > 0$ en $\mathbb{R}$,* $\lim_{u\to-\infty} f_q(u) = 0$ *y* $\overline{q_0} = \underline{q_0} = \lim_{u\to-\infty} \frac{f_q'^2}{f_q f_q''}(u) = q$.

En resumen, podemos afirmar que la condición (1.1.2) no es necesaria si $N \leq 2$, y que las condiciones (1.1.3) y (1.1.4) resultan ineludibles.

1.2. Estabilidad en el caso del p-laplaciano en $\mathbb{R}^N$

En la siguiente unidad estudiamos el problema

$$-\Delta_p u = f(u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \tag{1.2.1}$$

donde $N \geq 2$, $p > 1$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el p-laplaciano de u, y $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Diremos que una solución u de (1.2.1) es semi-estable si

$$\mathcal{Q}_u(\xi) := \int_{\{\nabla u \neq 0\}} |\nabla u|^{p-2} \left\{ (p-2) \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \xi \right)^2 + |\nabla \xi|^2 \right\} - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u)\xi^2 \geq 0,$$

para toda $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Para este problema no encontramos resultados conocidos en la literatura. Nosotros logramos extender los resultados de Villegas en [33], y obtenemos los siguientes teoremas:

Teorema 1.2.1 (Navarro y Villegas [30])**.** *Sea $N \geq 2$ y u una solución radial semi-estable verificando $u_r(r) \neq 0$ para todo $r > 0$ (no necesariamente acotada) de* (1.2.1)*. Entonces existen $M, r_0 > 0$ tal que para todo $r \geq r_0$,*

$$|u(r)| \geq M \begin{cases} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} & \text{si } N \neq p + 4p/(p-1), \\ \log(r) & \text{si } N = p + 4p/(p-1). \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Teorema 1.2.2 (Navarro y Villegas [30])**.** *Sea $N \geq 2$ y u una solución radial semi-estable verificando $u_r(r) \neq 0$ para todo $r > 0$, acotada de* (1.2.1)*. Entonces,*

i) $N > p + 4p/(p-1)$.

ii) Existe $M > 0$ tal que para todo $r \geq 1$, se tiene

$$|u(r) - u_\infty| \geq M r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)},$$

donde $u_\infty = \lim_{r\to\infty} u(r)$.

Finalmente mostramos que el Teorema 1.2.1 es óptimo para $p \geq 2$ ó $2 > p > 1$ y $\frac{2p(\sqrt{2-p}+1)}{(p-1)(2-p)} \geq N \geq 2$.

1.3. Soluciones extremales

1.3.1. Soluciones extremales: Caso p-laplaciano

En esta sección trabajamos sobre el problema

$$-\Delta_p u = g(u) \text{ en } B_1 \setminus \{0\}, \tag{1.3.1}$$

donde $p > 1$, B_1 es la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz.

Por abuso de notación, escribimos $u(r)$ en lugar de $u(x)$, donde $r = |x|$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Se denota por u_r la derivada radial de u.

Una solución radial $u \in W^{1,p}(B_1)$ de (1.3.1) tal que $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$ se dice semi-estable si

$$\int_{B_1} (p-1)\,|u_r|^{p-2}\,|\xi_r|^2 - g'(u)\xi^2 \geq 0,$$

para toda función radial $\xi \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$. En este caso ampliamos el principal resultado obtenido por Cabré, Capella y Sanchón en [6].

Teorema 1.3.1 (Cabré, Capella y Sanchón [6])**.** *Sea g una función localmente Lipschitz y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable en $B_1 \setminus \{0\}$ de (1.3.1) satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$. Entonces:*

a) Si $N < p + 4p/(p-1)$ entonces $u \in L^\infty(B_1)$. Además,

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_{N,p}\,\|u\|_{W^{1,p}(B_1)},$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

b) Si $N = p + 4p/(p-1)$ entonces $u \in L^q(B_1)$ para todo $q < +\infty$. Además,

$$|u(r)| \leq C_p\,\|u\|_{W^{1,p}(B_1)}\,(|\log r| + 1) \text{ en } B_1,$$

donde C_p es una constante que depende solo de p.

c) Si $N > p + 4p/(p-1)$ y $q < q_0$, entonces $u \in L^q(B_1)$ y

$$\|u\|_{L^q(B_1)} \leq C_{N,p,q} \|u\|_{W^{1,p}(B_1)},$$

donde $C_{N,p,q}$ es una constante que depende de N, p, y q. Además,

$$|u(r)| \leq C_{N,p} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} \left(|\log r|^{\frac{1}{p}} + 1\right) \text{ en } B_1,$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

d) Asumiendo que g es no negativa. Entonces:

d1) Se tiene

$$\|\nabla u\|_{L^p(B_1)} \leq C_{N,p} \left\{ \left\|(u-u(1))^{p-1}\right\|_{L^1(B_1)}^{\frac{1}{p-1}} + \|g(u)\|_{L^1(B_1)}^{\frac{1}{p-1}} \right\},$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

d2) $u \in W^{1,q}(B_1)$ para todo $q < q_1$, y

$$\|u\|_{W^{1,q}(B_1)} \leq C \text{ si } q < q_1,$$

donde C es una constante que depende de N, p, q, y cotas superiores de $\|u\|_{L^1(B_1)}$ y g.

d3) Si $N \geq p + 4p/(p-1)$ entonces

$$|u_r(r)| \leq C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}(B_1)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)} |\log r|^{\frac{1}{p}} \text{ en } B_{1/4},$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

La definición de q_k para $k = 0, 1$, esta dada por

$$\begin{cases} \frac{1}{q_k} := \frac{1}{p} - \frac{2}{Np}\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} + \frac{k-1}{N} - \frac{2}{Np} & si\ N \geq p + 4p/(p-1), \\ q_k := +\infty & si\ N < p + 4p/(p-1). \end{cases}$$

Hemos respondido afirmativamente a la posibilidad de eliminar el factor logarítmico del teorema anterior en el ítem $c)$ y $d3)$, obteniendo además estimaciones puntuales óptimas de la derivada radial de u hasta orden 3, mostradas en los siguientes teoremas:

Teorema 1.3.2 (Navarro y Villegas [28]). *Sea $p > 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz, y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable de* (1.3.1) *satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0, 1)$. Entonces existe una constante $C_{N,p}$ dependiendo solo de N y p tal que:*

i) Si $N < p + 4p/(p-1)$, entonces

$$|u(r)| \leq C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)}, \ \forall r \in (0, 1].$$

ii) Si $N = p + 4p/(p-1)$, entonces

$$|u(r)| \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)} (|\log r| + 1), \ \forall r \in (0, 1].$$

iii) Si $N > p + 4p/(p-1)$, entonces

$$|u(r)| \leq C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)}, \ \forall r \in (0, 1].$$

Teorema 1.3.3 (Navarro y Villegas [28]). *Sea $N \geq p + 4p/(p-1)$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz, y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable de* (1.3.1) *satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0, 1)$. Entonces existe una constante $C'_{N,p}$ dependiendo solo de N y p tal que:*

i) Si $g \geq 0$, entonces

$$|u_r(r)| \leq C'_{N,p} \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1 \setminus B_{1/2}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)}, \ \forall r \in (0,1/2].$$

ii) Si $g \geq 0$ es no decreciente, entonces

$$|u_{rr}(r)| \leq C'_{N,p} \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1 \setminus B_{1/2}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1/2].$$

iii) Si $g \geq 0$ es no decreciente y convexa, entonces

$$|u_{rrr}(r)| \leq C'_{N,p} \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1 \setminus B_{1/2}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1/2].$$

Como aplicación de los teoremas anteriores, estudiamos la regularidad y estimaciones para soluciones del siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } B_1, \\ u &> 0 & \text{en } B_1, \\ u &= 0 & \text{en } \partial B_1, \end{cases} \tag{1.3.2$_{\lambda,p}$}$$

donde $\lambda \geq 0$ es un parámetro y f es una función C^1 creciente con $f(0) > 0$ y

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = +\infty. \tag{1.3.3}$$

Para este problema Cabré y Sanchón en [7] demuestran que existe un parámetro positivo λ^* tal que si $\lambda \in (0, \lambda^*)$, la ecuación ($1.3.2_{\lambda,p}$) admite una solución regular minimal (la más pequeña) decreciente en r $u_\lambda \in C^1(\overline{B_1})$ y si $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ entonces ($1.3.2_{\lambda,p}$) no admite solución regular. Además, para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ la solución minimal u_λ es semi-estable. Por otro lado, podemos considerar el límite creciente $u^* := \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_\lambda$ que se llama solución extremal de ($1.3.2_{\lambda,p}$), y es una solución débil de ($1.3.2_{\lambda,p}$) para $\lambda = \lambda^*$.

Finalmente obtenemos para la solución extremal el siguiente teorema que amplia los resultados obtenidos por Cabré et al. en [6].

Teorema 1.3.4 ([28])**.** *Sea $p > 1$. Supongamos que f satisface* (1.3.3)*. Sea u^* la solución extremal de* $(1.3.2_{\lambda,p})$*. Se tiene que*

i) Si $N < p + 4p/(p-1)$, entonces $u^*(r) \leq C(1-r)$, $\forall r \in (0,1]$.

ii) Si $N = p + 4p/(p-1)$, entonces $u^*(r) \leq C\left|\log r\right|$, $\forall r \in (0,1]$.

iii) Si $N > p + 4p/(p-1)$, entonces

$$u^*(r) \leq C\left(r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} - 1\right), \ \forall r \in (0,1].$$

iv) Si $N \geq p + 4p/(p-1)$, entonces

$$\left|\partial_r^{(k)} u^*(r)\right| \leq Cr^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+(k-1)p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1], \ \forall k \in \{1,2\}.$$

v) Si $N \geq p + 4p/(p-1)$, y f es convexa, entonces

$$|u^*_{rrr}(r)| \leq Cr^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1].$$

Donde $C = C_{N,p} \min_{t\in[1/2,1]} |u_r^*(t)|$, y $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p .

Del teorema anterior, por resultados de García-Azorero, Peral y Puel en [23], y Cabré, Capella y Sanchón en [6] se tiene que los ítems $ii) - v)$ son estimaciones óptimas.

1.3.2. Soluciones extremales: Caso Bilaplaciano

En este apartado estudiamos el problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda f(u) & \text{en } B_1, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial B_1, \end{cases} \tag{$1.3.4_\lambda$}$$

donde n es el vector unitario normal exterior, $\lambda \geq 0$ es un parámetro , $f \in C^1(\mathbb{R})$ y satisface lo siguiente:

$$f \text{ es no decreciente, } f(0) > 0 \text{ y } \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty. \tag{1.3.5}$$

Trabajamos en base a los siguientes resultados obtenidos por Warnault en [36].

Teorema 1.3.5 (Warnault [36]). *Existe $\lambda^* < \infty$ tal que:*

i) Si $\lambda \in [0, \lambda^*)$, $(5.1.1_\lambda)$ admite una solución mínima clásica u_λ .

ii) Si $\lambda > \lambda^*$, no existe una solución clásica.

iii) Si $\lambda = \lambda^*$, existe una solución débil $\lim\limits_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_\lambda = u^* \in L^1(B_1)$ de (1.1_{λ^*}), llamada solución extremal.

Respecto de la regularidad de la solución extremal Warnault obtiene que u^* está acotada para dimensiones $N \leq 9$, lo que se describe en el siguiente teorema:

Teorema 1.3.6 (Warnault [36]). *Supongamos que f satisface* (1.3.5). *Sea u^* la solución extremal de* $(1.3.4_\lambda)$. *Si $N \leq 9$, entonces u^* está acotada.*

Anteriormente Dávila et al. en [11] demuestran que para $f(u) = e^u$ la solución extremal u^* está acotada para $N \leq 12$ y es singular para $N \geq 13$.

Moradifam [26] estudia el comportamiento asintótico de la singularidad de la solución extremal para $N \geq 13$.

Nosotros logramos avanzar hasta $N = 10$ respecto de la regularidad de la solución extremal (básicamente logramos una demostración sencilla para dimensiones $5 \leq N \leq 10$), y dar una estimación cerca del origen para $N \geq 11$, lo cual se concluye en el siguiente teorema:

Teorema 1.3.7 (Navarro y Villegas [29]). *Supongamos que f satisface* (1.3.5). *Sea u^* la solución extremal de* $(1.3.4_\lambda)$. *Se tiene que* *i) Si* $N = 10$*, entonces* u^* *está acotada.*

ii) Si $11 \leq N \leq 19$*, entonces*

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{N-8}{2}} u_r^*(r) = \lim_{r\to 0} r^{\frac{N-10}{2}} u^*(r) = 0.$$

iii) Si $N \geq 20$*, entonces*

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{N-9}{2}} u_r^*(r) = \lim_{r\to 0} r^{\frac{N-11}{2}} u^*(r) = 0.$$

Con este resultado, sigue abierta la pregunta respecto de la regularidad de la solución extremal u^* para f satisfaciendo 1.3.5 para dimensiones $N = 11, 12$.

Para finalizar, incluimos un apartado de conclusiones, preguntas abiertas y futuras lineas de investigación, donde mostramos ciertos problemas directamente relacionados con los que desarrollamos en esta tesis, susceptibles de ser estudiados con más profundidad.

Cabe destacar que algunos de los resultados de esta tesis han sido aceptados para publicación en diferentes revistas, y otros se encuentran en la actualidad en proceso de referee. (véase [27, 28, 29, 30]).

Capítulo 2

Optimalidad de algunos resultados de soluciones estables de $-\Delta u = f(u)$ en $\mathbb{R}^N$

En este capítulo cuyos resultados pueden verse en [27], estudiamos soluciones estables del siguiente problema:

$$-\Delta u = f(u) \text{ en } \mathbb{R}^N, \tag{2.0.1}$$

donde $f \in C^1(\mathbb{R})$. Consideramos soluciones clásicas $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Una solución u de (2.0.1) se dice estable si

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \xi|^2 - f'(u)\xi^2 \geq 0, \, \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Nótese que la expresión anterior es la segunda variación del funcional de energía asociado a (2.0.1) en un dominio acotado Ω: $E_\Omega(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 /2 - F(u) \right) dx$, donde $F' = f$. Así, si $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ es un minimizante local de E_Ω para todo dominio suave acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (es decir, un minimizante bajo pequeñas perturbaciones

$C^1(\Omega)$ que se anulen en $\partial\Omega$), entonces u es una solución estable de (2.0.1). Las soluciones estables de (2.0.1) están bien estudiadas: por Cabré y Capella [4] y Villegas [33], toda solución radial acotada de (2.0.1) es constante si $N \leq 10$. Además en este último trabajo se encuentra el crecimiento óptimo de tales soluciones, tanto en el caso acotado como en el caso general. En dimensiones $N \leq 4$, Dupaigne y Farina [14] obtuvieron que cada solución estable acotada de (2.0.1) es constante, si $f \geq 0$. En el caso $N = 2$, Farina, Sciunzi y Valdinoci [20] demostraron que toda solución estable de (2.0.1) con gradiente acotado es unidimensional (es decir al hacer una rotación del espacio, u depende solo de una variable). Para cada dimensión N del espacio, en el caso de las no linealidades $f(u) = |u|^{p-1} u$, $p > 1$ y $f(u) = e^u$, resultados de clasificación son obtenidos por Farina [17, 18, 19]. Por otro lado Dupaigne y Farina [13] consideran en cualquier dimensión $N \geq 1$, una no linealidad general, no negativa, no decreciente y convexa. En la siguiente sección mostramos con más detalle estos resultados.

2.1. Resultados previos

Teorema 2.1.1 (Dupaigne y Farina [13]). *Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto maximal, posiblemente no acotado, tal que $0 \not\equiv f \in C^2(I; \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{I}; \overline{\mathbb{R}})$ es no negativa, no decreciente, convexa en I y se anula en algún punto de $\overline{I}$. Se define*

$$q(u) := \frac{f'^2}{ff''}(u); \quad \overline{q_0} = \limsup_{u \to z^+} q(u); \quad \underline{q_0} = \liminf_{u \to z^+} q(u); \quad \overline{q_\infty} = \limsup_{u \to b^-} q(u),$$

donde $z = \sup\left\{u \in \overline{I} = [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}} : f(u) = 0\right\}$ y $b = \sup I$. Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ es una solución estable de (2.0.1). Entonces, u es constante si $N \leq 2$ y

$$0 < \underline{q_0} \leq \overline{q_0} < +\infty \quad y \quad 0 < \overline{q_\infty} < +\infty \tag{2.1.1}$$

o si $N \geq 3$ y se cumplen las siguientes condiciones

$$\overline{q_0} < +\infty \quad y \quad \frac{4}{N-2}\left(1 + 1/\sqrt{\overline{q_0}}\right) > 1/\underline{q_0}. \tag{2.1.2}$$

$$\overline{q_\infty} < +\infty \quad y \quad \frac{4}{N-2}\left(1 + 1/\sqrt{\overline{q_\infty}}\right) > 1/\overline{q_\infty}. \tag{2.1.3}$$

En [13, Rem. 1.3] se muestra que las condiciones (2.1.2) y (2.1.3) son necesarias si $N \geq 10$: un contraejemplo esta dado por $f(u) = e^u$ si $N = 10$ y por $f(u) = |u|^{p-1} u$ (para $p > 1$) si $N \geq 11$. También se plantea si las condiciones (2.1.1), (2.1.2) y (2.1.3) son necesarias en dimensiones $1 \leq N \leq 9$.

En este capítulo respondemos a dicha pregunta. Mostramos que, en el Teorema 2.1.1, la condición (2.1.1) no es necesaria si $N = 1, 2$, mientras que las condiciones (2.1.2) y (2.1.3) son óptimas si $3 \leq N \leq 9$. Más precisamente se obtienen los siguientes resultados:

2.2. Caso $N = 1, 2$

Teorema 2.2.1 (Navarro y Villegas [27]). *Sea $N \leq 2$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ una función no decreciente y u una solución estable de* (2.0.1). *Entonces f es constante en el intervalo $J := u(\mathbb{R}^N)$.*

Como corolario de este teorema obtenemos el siguiente resultado, que demuestra que la condición (2.1.1) del Teorema 2.1.1 no es necesaria para dimensiones $N = 1, 2$.

Corolario 2.2.2 (Navarro y Villegas [27]). *Sea $N \leq 2$, y $0 \not\equiv f \in C^1(\mathbb{R})$ una función no decreciente que se anula en algún punto de $\overline{I}$. Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ es una solución estable de* (2.0.1). *Entonces u es constante.*

Para demostrar el Teorema 2.2.1 necesitamos del lema que sigue. Un resultado similar, utilizando las mismas ideas de este lema (una función de prueba de capacidad) se ha escrito en el caso del operador biarmónico o bilaplaciano (ver [37, Teorema 6].

Lema 2.2.3. *Sea $N \leq 2$ y $h \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ con $h \geq 0$. Si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} h\, w^2 \, dx, \; \forall w \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right), \tag{2.2.1}$$

entonces $h \equiv 0$.

Nota 1. El Lema 2.2.3 no es cierto en dimensiones $N \geq 3$ debido a la desigualdad de Hardy:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \, dx \geq \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^2}{|x|^2} \, dx, \; \forall w \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Demostración del Lema 2.2.3. Primero notamos que (2.2.1) sigue siendo verdadera si consideramos funciones $w \in W_0^{1,p}(B_R)$ donde $2 < p < \infty$, y $R > 0$.

Efectivamente, si $p > 2$, entonces $p > N$ y tenemos que $W_0^{1,p}(B_R) \subset \left(W_0^{1,2} \cap L^{\infty}\right)(B_R)$. Por lo tanto el funcional $w \mapsto \displaystyle\int_{B_R} \left(|\nabla w|^2 - hw^2\right)$ es continuo en $W_0^{1,p}(B_R)$. La densidad de $C_c^{\infty}(B_R)$ en $W_0^{1,p}(B_R)$, asegura que (2.2.1) se cumple para cualquier $w \in W_0^{1,p}(B_R)$.

Consideramos la siguiente secuencia de funciones

$$w_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq n, \\ 2 - \dfrac{\ln|x|}{\ln n} & \text{si } n < |x| < n^2, \\ 0 & \text{si } |x| \geq n^2, \end{cases}$$

que gráficamente son representadas por:

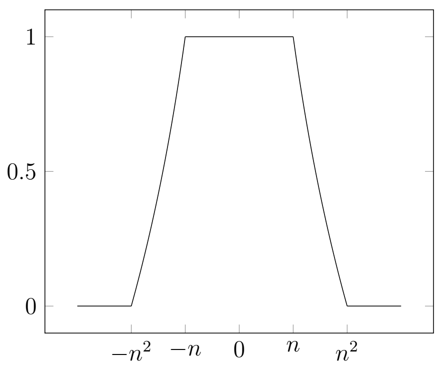

Figura 2.1: $w_n(x)$ para $N = 1$.

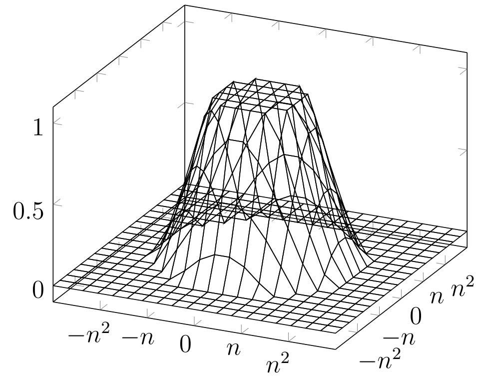

Figura 2.2: $w_n(x)$ para $N = 2$.

Se sigue fácilmente que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 \, dx \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto, por (2.2.3), se deduce que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h w_n^2 \, dx \longrightarrow 0.$$

Finalmente, dado que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h w_n^2 \geq \int_{B_n} h$ y $h \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$, se concluye que $h \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N$. □

Demostración del Teorema 2.2.1. Aplicando el lemma anterior con $h(x) = f'(u(x))$ se deduce que $f'(u(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De donde $f'(s) = 0$ para todo $s \in J$, con lo cual se concluye la demostración. □

Demostración del Corolario 2.2.2. Aplicando el Teorema 2.2.1 se tiene que $-\Delta u = C$ en $\mathbb{R}^N$ para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Considerando la siguiente función

$$w(x) = u(x) + \frac{C}{2} x_1^2,$$

se obtiene que w es armónica.

La demostración se sigue en tres casos

- Caso $C > 0$,

  - Si w no es constante, entonces $w \geq u$, por tanto u no está acotada inferiormente.
  - Si w es constante, entonces u no está acotada inferiormente.

  de donde se tiene que el intervalo $J \subset I$ no está acotado inferiormente y $f(s) > 0$ en J, esto contradice las hipótesis sobre f.

- Caso $C < 0$. Al igual que en el caso anterior se deduce que u no está acotada superiormente. Por lo tanto el intervalo de $J \subset I$ no está acotado superiormente y $f(s) < 0$ en J, esto contradice nuevamente las hipótesis sobre f.

- Caso $C = 0$. En este caso u es una función armónica en $\mathbb{R}^N$. Si u no es constante entonces u no está acotada. De donde $J = \mathbb{R}$ y $f \equiv 0$, lo que es una contradicción.

De todo lo anterior, podemos concluir que u es constante, lo que demuestra el corolario. □

2.3. Caso $3 \leq N \leq 9$

En dimensiones $3 \leq N \leq 9$, el siguiente resultado muestra que las condiciones (2.1.2) y (2.1.3) del Teorema 2.1.1 son óptimas, al menos para el caso $z = -\infty$. Sería interesante encontrar contraejemplos para el caso $z \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.3.1 (Navarro y Villegas [27]). *Sea $3 \leq N \leq 9$ y $q > 0$ satisfaciendo*

$$\frac{4}{N-2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) \leq \frac{1}{q}. \tag{2.3.1}$$

Entonces existe $u_q \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *con* $u_q(\mathbb{R}^N) = (-\infty, -1]$ *y* $f_q \in C^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* u_q *es una solución estable de* (2.0.1) *con* $f = f_q$*, y* f_q *satisfaciendo* $f_q, f_q', f_q'' > 0$ *en* $\mathbb{R}$*,* $\lim_{u\to-\infty} f_q(u) = 0$ *y* $\overline{q_0} = \underline{q_0} = \lim_{u\to-\infty} \frac{f_q'^2}{f_q f_q''}(u) = q$*.*

Nota 2. Podemos observar que $q_\infty = \lim_{u\to+\infty} q(u)$ no es relevante, ya que $u_q(\mathbb{R}^N) = (-\infty, -1]$. De hecho, es fácil obtener cualquier valor de $q_\infty \in [1, +\infty]$ modificando adecuadamente la función f_q en $(1, +\infty)$.

Demostración de la Proposición 2.3.1. En primer lugar, se verifica fácilmente que para $3 \leq N \leq 9$, $q > 0$ y (2.3.1), se tiene que

$$0 < q \leq \frac{N}{4} - \frac{\sqrt{N-1}}{2} < 1. \tag{2.3.2}$$

Definimos la función radial

$$u_q(x) = -\left(1 + |x|^2\right)^{1-q},$$

y

$$f_q(s) = \begin{cases} 4q(1-q)(-s)^{\frac{q+1}{q-1}} + 2(1-q)(N-2q)(-s)^{\frac{q}{q-1}} & \text{si } s \leq -1, \\ C^\infty - \text{ extensión} & \text{si } s > -1, \end{cases}$$

tal que $f_q \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f_q, f_q', f_q'' > 0$ en $\mathbb{R}$.

Dado que $q \in (0,1)$, es fácil comprobar que

$$\lim_{u\to-\infty} f_q(u) = 0 \text{ y } \overline{q_0} = \underline{q_0} = \lim_{u\to-\infty} \frac{f_q'^2}{f_q f_q''}(u) = q.$$

Queda por demostrar que u_q es estable. Luego por (2.3.2), tenemos que

$$f_q'\left(u_q(x)\right) = \frac{2q\left((N-2q)|x|^2 + (N+2)\right)}{\left(1+|x|^2\right)^2} < \frac{2q(N-2q)}{|x|^2} \leq \frac{(N-2)^2}{4|x|^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por la desigualdad de Hardy se concluye que u_q es estable. $\square$

Capítulo 3

Soluciones radiales semi-estables de ecuaciones del p-laplaciano en $\mathbb{R}^N$

En este capítulo estudiamos soluciones semi-estables del siguiente problema:

$$-\Delta_p u = f(u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \tag{3.0.1}$$

donde $N \geq 2$, $p > 1$, $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el p-laplaciano de u y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Consideraremos soluciones $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

Diremos que una solución u de (3.0.1) es semi-estable si

$$\mathcal{Q}_u(\xi) := \int_{\{\nabla u \neq 0\}} |\nabla u|^{p-2} \left\{ (p-2) \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla \xi \right)^2 + |\nabla \xi|^2 \right\} - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u)\xi^2 \geq 0,$$

para toda $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nótese que en el caso $p \geq 2$ obtenemos que la función $|\nabla u|^{p-2}$ es localmente acotada y por tanto tiene perfecto sentido la definición de $\mathcal{Q}_u$. En el caso $1 < p < 2$ se tiene fácilmente que, en la primera integral de $\mathcal{Q}_u$, el integrando está acotado inferiormente por $(p-1)\,|\nabla u|^{p-2}\,|\nabla \xi|^2$ y superiormente por $|\nabla u|^{p-2}\,|\nabla \xi|^2$. Por tanto, en este caso, también tiene sentido la definición de estabilidad, entendiendo que $\mathcal{Q}_u(\xi) = +\infty$ si $|\nabla u|^{p-2} |\nabla \xi|^2$ no fuera integrable.

Por otra parte podemos observar que la expresión por la que definimos $\mathcal{Q}_u$ es formalmente la segunda variación del funcional de energía asociado a (3.0.1) en un dominio acotado Ω: $E_\Omega(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^p /p - F(u)\right) dx$, donde $F' = f$. Por tanto, si $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ es un minimizante local de E_Ω en cualquier dominio acotado suficientemente regular $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (i.e., un mínimo bajo pequeñas perturbaciones $C^1(\Omega)$ que se anulen en $\partial\Omega$), entonces u es una solución semi-estable de (3.0.1).

Hasta nuestro conocimiento, no existen hasta la fecha trabajos del operador p-laplaciano en todo el espacio $\mathbb{R}^N$ que traten sobre soluciones semi-estables. Sí que existen diferentes artículos sobre este tipo de cuestiones en la bola unidad (véase [6] y [28]). También existen numerosos trabajos en la literatura reciente en el caso $p = 2$ en todo el espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$. (Véase [4], [17], [19] y [33]).

Estaremos especialmente interesados en soluciones radiales u de (3.0.1) tales que $u_r \neq 0$ para todo $r > 0$. Abusando de la notación, escribiremos $u(r)$ en vez de $u(x)$, donde $r = |x|$ y $u_r(r)$ para la derivada radial de u.

3.1. Estimaciones sobre crecimiento asintótico de una solución semi-estable

En esta sección obtendremos diferentes cotas sobre el crecimiento asintótico de este tipo de soluciones. Nuestros principales resultados son los siguientes:

Teorema 3.1.1 (Navarro y Villegas [30]). *Sea $N \geq 2$ y u una solución radial semi-estable verificando $u_r(r) \neq 0$ para todo $r > 0$ (no necesariamente acotada) de* (3.0.1).

Entonces existen $M, r_0 > 0$ *tal que para todo* $r \geq r_0$,

$$|u(r)| \geq M \begin{cases} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} & \textit{si } N \neq p + 4p/(p-1), \\ \log(r) & \textit{si } N = p + 4p/(p-1). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Teorema 3.1.2 (Navarro y Villegas [30]). *Sea* $N \geq 2$ *y* u *una solución radial semi-estable verificando* $u_r(r) \neq 0$ *para todo* $r > 0$, *acotada de* (3.0.1). *Entonces,*

i) $N > p + 4p/(p-1)$.

ii) Existe $M > 0$ *tal que para todo* $r \geq 1$, *se tiene*

$$|u(r) - u_\infty| \geq M r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)}, \tag{3.1.2}$$

donde $u_\infty = \lim_{r\to\infty} u(r)$.

Lema 3.1.3. *Sea* $N \geq 2$ *y* u *una solución radial semi-estable verificando* $u_r(r) \neq 0$ *para todo* $r > 0$ *de* (3.0.1). *Entonces, existe* $K > 0$ *tal que*

$$\int_r^\infty \frac{ds}{s^{N-1}\,|u_r(s)|^p} \leq K r^{-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}} \quad \forall r \geq 1. \tag{3.1.3}$$

Demostración. Usamos [6, Lem. 2.2] (ver también la demostración de [6, Lem. 2.3]) para obtener que

$$\mathcal{Q}_u(u_r\eta) = \int_{\mathbb{R}^N} |u_r(|x|)|^p \left((p-1)\,|\nabla\eta(x)|^2 - (N-1)\frac{\eta(x)^2}{|x|^2}\right) dx \geq 0, \tag{3.1.4}$$

para todo $\eta \in (H^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^N)$ con soporte compacto en $\mathbb{R}^N$. Aplicando esta desigualdad a una función radial $\eta(|x|)$ se tiene

$$\left(\frac{N-1}{p-1}\right)\int_0^\infty |u_r(t)|^p\,\eta(t)^2 t^{N-3}\,dt \leq \int_0^\infty |u_r(t)|^p\,\eta'(t)^2 t^{N-1}\,dt. \tag{3.1.5}$$

Fijamos $R > r \geq 1$ y consideramos la siguiente función:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ t^{-\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}} & \text{si } 1 < t \le r, \\ \dfrac{r^{-\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}}}{\int_r^R \frac{ds}{s^{N-1}|u_r(s)|^p}} \displaystyle\int_t^R \frac{ds}{s^{N-1}\,|u_r(s)|^p} & \text{si } r < t \le R, \\ 0 & \text{si } R < t < \infty. \end{cases}$$

Por (3.1.5), se sigue que

$$\begin{aligned} &\left(\frac{N-1}{p-1}\right)\left(\int_0^1 |u_r(t)|^p\, t^{N-3}\, dt + \int_1^r |u_r(t)|^p\, t^{N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-3}\, dt\right) \\ &\quad \le \left(\frac{N-1}{p-1}\right)\int_1^r |u_r(t)|^p\, t^{N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-3}\, dt + \frac{r^{-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}}}{\int_r^R \frac{ds}{s^{N-1}|u_r(s)|^p}}, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_r^R \frac{ds}{s^{N-1}\,|u_r(s)|^p} \le \frac{r^{-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}}}{\left(\frac{N-1}{p-1}\right)\int_0^1 |u_r(t)|^p\, t^{N-3}\, dt}.$$

Finalmente tendiendo $R \to +\infty$, se tiene (3.1.3) con

$$K = \left[\left(\frac{N-1}{p-1}\right)\int_0^1 |u_r(t)|^p\, t^{N-3}\, dt\right]^{-1},$$

de donde se concluye la demostración. □

Proposición 3.1.4. *Sea $N \ge 2$, y u una solución radial semi-estable verificando $u_r(r) \neq 0$ para todo $r > 0$ de* (3.0.1). *Entonces, existe $M' > 0$ tal que*

$$|u(2r) - u(r)| \ge M' r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)}, \forall r \ge 1. \tag{3.1.6}$$

Demostración. Fijamos $r \ge 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\int_1^2 t^{-\frac{N-1}{p+1}}\,dt\right) r^{-\frac{N-p-2}{p+1}} &= \int_r^{2r} t^{-\frac{N-1}{p+1}}\,dt = \int_r^{2r} \frac{|u_r(t)|^{\frac{p}{p+1}}}{\left(t^{N-1}\,|u_r(t)|^p\right)^{\frac{1}{p+1}}}\,dt \\ &\leq \left(\int_r^{2r} \frac{dt}{t^{N-1}\,|u_r(t)|^p}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_r^{2r} |u_r(t)|\,dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\leq K^{\frac{1}{p+1}}\, r^{-\frac{2}{p+1}\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}}\, |u(2r)-u(r)|^{\frac{p}{p+1}},\end{aligned}$$

de donde se tiene (3.1.6). □

Demostración del Teorema 3.1.1. Sea $\delta_{N,p} = -\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2\right)$. La demostración se realiza en dos casos:

- Caso $N > p + 4p/(p-1)$, entonces $\delta_{N,p} < 0$, y
  - Si $\lim_{r\to\infty} |u(r)| > 0$, entonces $\lim_{r\to\infty} r^{\delta_{N,p}} = 0$, y (3.1.1) se sigue inmediatamente.
  - Si $\lim_{r\to\infty} |u(r)| = 0$ de donde por la monotonía de u y la Proposición 3.1.4, existe $M' > 0$ tal que para todo $r \geq 1$:

    $$\begin{aligned}|u(r)| &= \sum_{k=0}^{\infty} \left|u(2^{k+1}r) - u(2^k r)\right| \\ &\geq M' \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^{\delta_{N,p}} = \left(M' \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\delta_{N,p}}\right)^k\right) r^{\delta_{N,p}},\end{aligned}$$

    la serie anterior es convergente y (3.1.1) es demostrado con $r_0 = 1$.

- Caso $N \leq p + 4p/(p-1)$, entonces $\delta_{N,p} \geq 0$. Sea $r \geq 1$, existen $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq r_1 < 2$ tal que $r = 2^{m-1} r_1$. Por la monotonía de u y la Proposición 3.1.4, se sigue que

$$\begin{aligned} |u(r)| + |u(r_1)| &\geq |u(r) - u(r_1)| \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left| u(2^k r_1) - u(2^{k-1} r_1) \right| \geq M' \sum_{k=1}^{m-1} (2^{k-1} r_1)^{\delta_{N,p}} \\ &= M' \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \left(2^{-\delta_{N,p}}\right)^k \right) r^{\delta_{N,p}} & \text{si } \delta_{N,p} > 0, \\ \frac{\log r - \log r_1}{\log 2} & \text{si } \delta_{N,p} = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Por (3.1.7), se tiene

$$|u(r)| \geq \begin{cases} M_1 r^{\delta_{N,p}} - M_2 & \text{si } \delta_{N,p} > 0, \\ M_3 \log r - M_4 & \text{si } \delta_{N,p} = 0, \end{cases}$$

para ciertas constantes $M_j > 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Luego se sigue fácilmente (3.1.1). □

Demostración del Teorema 3.1.2. Fijamos $R/2 > r \geq 1$. Se tiene

$$|u(R) - u(r)| = \int_r^R |u_r(t)|\, dt \geq \int_r^{2r} |u_r(t)|\, dt = |u(2r) - u(r)|,$$

haciendo $R \to \infty$ y por el Lema 3.1.3, obtenemos $ii)$. Finalmente por la desigualdad (3.1.2), podemos concluir que el exponente $-\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2\right)$ debe ser negativo, que es equivalente con $N > p + 4p/(p-1)$, desde donde se sigue $i)$. □

3.2. Optimalidad de las estimaciones sobre crecimiento asintótico

Lema 3.2.1. *Sea $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ una función no negativa y $\lambda \leq N - 2$, tal que*

$$x \cdot \nabla V(x) + \lambda V(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2.1}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |\nabla \eta|^2 \, dx \geq \left(\frac{N - \lambda - 2}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)\eta^2}{|x|^2} dx, \ \forall \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}). \quad (3.2.2)$$

Demostración. Sea $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left(\frac{x\eta}{|x|^2} - t\nabla \eta \right)^2 dx \geq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Desarrollando la expresión anterior, tenemos la siguiente desigualdad cuadrática para t:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)\eta^2}{|x|^2} dx - t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)\,(x \cdot \nabla \eta^2)}{|x|^2} dx + t^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |\nabla \eta|^2 \, dx \geq 0$$

Por el Teorema de la divergencia, integrando el segundo termino, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)\eta^2}{|x|^2} dx + t \int_{\mathbb{R}^N} (x \cdot \nabla V(x) + (N-2)V(x)) \frac{\eta^2}{|x|^2} dx + t^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |\nabla \eta|^2 \, dx \geq 0,$$

Por lo tanto, la desigualdad cuadrática anterior es equivalente a

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N} (x \cdot \nabla V(x) + (N-2)V(x)) \frac{\eta^2}{|x|^2} dx \right]^2 \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)\eta^2}{|x|^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |\nabla \eta|^2 \, dx \right),$$

por (3.2.1), se sigue que

$$(N - \lambda - 2)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)\eta^2}{|x|^2} dx \right)^2 \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)\eta^2}{|x|^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |\nabla \eta|^2 \, dx \right),$$

de donde se sigue (3.2.2). □

Ejemplo 3.2.2. *Sea $N \geq 2$ y $u_{\alpha,p}$ una función radial definida por*

$$u_{\alpha,p}(r) := \begin{cases} \left(1 + r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)\alpha}{p}} & \text{si } \alpha \neq 0, \forall r \geq 0. \\ \left(\frac{p-1}{p}\right) \log\left(1 + r^{\frac{p}{p-1}}\right) & \text{si } \alpha = 0, \forall r \geq 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $u_{\alpha,p}$ es una solución de (3.0.1) *con $f_{\alpha,p} \in C^1(\mathbb{R})$ definida por:*

- *Si* $\alpha > 0$

$$f_{\alpha,p}(s) := \begin{cases} -\alpha^{p-1} s^{p-1-\frac{p}{\alpha}} \left[(p-(p-1)\alpha) \left(s^{-\frac{p}{(p-1)\alpha}} - 1 \right) + N \right] & \textit{si } s > 1, \\ C^1 - \textit{extensión} & \textit{si } s \leq 1, \end{cases}$$

- *Si* $\alpha < 0$ *y* $(2-p)\alpha + p \geq 0$

$$f_{\alpha,p}(s) := \begin{cases} |-\alpha|^{p-1} s^{p-1-\frac{p}{\alpha}} \left[(p-(p-1)\alpha) \left(s^{-\frac{p}{(p-1)\alpha}} - 1 \right) + N \right] & \textit{si } s > 0, \\ C^1 - \textit{extensión} & \textit{si } s \leq 0, \end{cases}$$

- *Si* $\alpha = 0$

$$f_{0,p}(s) := -pe^{-\frac{p^2 s}{p-1}} - (N-p)e^{-ps},\ s \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

Si $p \geq 2$ *ó* $2 > p > 1$ *y* $\frac{2p(\sqrt{2-p}+1)}{(p-1)(2-p)} \geq N$

$$u_{\alpha,p} \textit{ es semi-estable } \iff \alpha \geq -\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2 \right).$$

Nota 3. El valor mínimo de $\frac{2p(\sqrt{2-p}+1)}{(p-1)(2-p)}$ es $10 + 6\sqrt{3} \approx 20.39$ y se alcanza cuando $p = 2\sqrt{3} - 2 \approx 1.46$. Luego si $N \leq 20$ ó $p \geq 2$ el Teorema 3.1.1 y 3.1.2 son óptimos.

Demostración. En primer lugar planteamos que la condición necesaria de valores de α para soluciones semi-estables, es una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.1. Luego procedemos a demostrar la condición suficiente.

$$(u_{\alpha,p})_r(r) = \lambda_\alpha r^{\frac{1}{p-1}} \left(1 + r^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{(p-1)\alpha}{p} - 1}, \text{ donde } \lambda_\alpha = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \neq 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Consideramos el potencial radial $V(x) = V(r) = |(u_{\alpha,p})_r(r)|^p$, para $r > 0$ se tiene

$$x \cdot \nabla V(x) = rV_r(r) = \left[\frac{p}{p-1} + p\left(\alpha - \frac{p}{p-1} \right) \left(\frac{r^{\frac{p}{p-1}}}{1 + r^{\frac{p}{p-1}}} \right) \right] V(r). \tag{3.2.3}$$

Para $\alpha \geq -\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2\right)$, se sigue que

$$p\left(\alpha - \frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{r^{\frac{p}{p-1}}}{1 + r^{\frac{p}{p-1}}}\right) \geq -\left(\sqrt{N-1} - \sqrt{\frac{1}{p-1}}\right)^2 \left(\frac{r^{\frac{p}{p-1}}}{1 + r^{\frac{p}{p-1}}}\right),$$

usando (3.2.3), se tiene

$$rV_r(r) + \left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - 2\right)V(r) \geq \left(\sqrt{N-1} - \sqrt{\frac{1}{p-1}}\right)^2 \left(\frac{V(r)}{1 + r^{\frac{p}{p-1}}}\right).$$

Finalmente, por el Lema 3.2.1 con $\lambda = N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - 2$, se tiene (3.1.4), que es equivalente a la semi-estabilidad de u. □

Capítulo 4

Estimaciones optimas de minimizadores radiales de ecuaciones del p-laplaciano

4.1. Introducción y resultados previos

En este capítulo estudiamos soluciones radiales semi-estables decrecientes $u \in W^{1,p}(B_1)$ del siguiente problema:

$$-\Delta_p u = g(u) \text{ en } B_1 \setminus \{0\}, \tag{4.1.1}$$

donde $p > 1$, $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el p-laplaciano de u, B_1 es la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$, y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz.

Se dice que $u \in W^{1,p}(B_1)$ es una solución débil de (4.1.1), si u es una función tal que $g(u) \in L^1(B_1, \delta(x)^2)$ y

$$\int_{B_1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi = \int_{B_1} g(u)\varphi, \, \forall \varphi \in C_c^\infty(B_1), \tag{4.1.2}$$

donde $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial B_1)$ denota la distancia hasta la frontera de B_1. Por otro lado, se dice que una función no negativa $u \in W^{1,p}(B_1)$ es una solución regular de (4.1.1) si $u \in L^\infty(B_1)$ y satisface (4.1.2).

Como $u \in W^{1,p}(B_1)$ es radial, por la inclusión del espacio de Sobolev en una dimensión, se obtiene $u \in L^\infty_{\text{loc}}\left(\overline{B_1} \setminus \{0\}\right)$. Por lo tanto, por los resultados estándar de regularidad, se deduce que $u \in C^{1,\beta}_{\text{loc}}\left(\overline{B_1} \setminus \{0\}\right)$ para algún $\beta \in (0,1)$.

Por abuso de notación, escribimos $u(r)$ en lugar de $u(x)$, donde $r = |x|$ y $x \in \mathbb{R}^N$. Se denota por u_r la derivada radial de u.

Una solución radial $u \in W^{1,p}(B_1)$ de (4.1.1) tal que $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$ se dice semi-estable si

$$\int_{B_1} (p-1)\,|u_r|^{p-2}\,|\xi_r|^2 - g'(u)\xi^2 \geq 0,$$

para toda función radial $\xi \in C^1_c\left(B_1 \setminus \{0\}\right)$.

Nótese que la expresión anterior es la segunda variación del funcional de energía asociado a (4.1.1):

$$E_\Omega(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\;dx - \int_\Omega G(u)\,dx, \tag{4.1.3}$$

donde $G' = g$ y $\Omega \subset B_1$. Así, si u es un minimizante local radial de (4.1.3) con $\Omega = B_1$ (es decir, para cada $\delta \in (0,1)$ existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que $E_{B_1 \setminus \overline{B_\delta}}(u) \leq E_{B_1 \setminus \overline{B_\delta}}(u+\xi)$, para toda función radial $\xi \in C^1_c\left(B_1 \setminus \overline{B_\delta}\right)$ satisfaciendo $\|\xi\|_{C^1} \leq \varepsilon_\delta$), entonces u es una solución semi-estable de (4.1.1).

Otras situaciones generales incluyen soluciones semi-estables: por ejemplo, soluciones minimales, soluciones extremales, y también algunas soluciones entre una sub y súper solución (Ver [6, Nota 1.7] para más detalles).

Todos los resultados obtenidos en esta sección fueron obtenidos por Villegas en [34] para el operador Laplaciano ($p = 2$).

Teorema 4.1.1 (Cabré, Capella y Sanchón [6]). *Sea g una función localmente Lipschitz y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable en $B_1 \setminus \{0\}$ de (4.1.1) satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$. Entonces:*

a) Si $N < p + 4p/(p-1)$ entonces $u \in L^\infty(B_1)$. Además,

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \le C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}(B_1)},$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

b) Si $N = p + 4p/(p-1)$ entonces $u \in L^q(B_1)$ para todo $q < +\infty$. Además,

$$|u(r)| \le C_p \|u\|_{W^{1,p}(B_1)} (|\log r| + 1) \ \text{en } B_1,$$

donde C_p es una constante que depende solo de p.

c) Si $N > p + 4p/(p-1)$ y $q < q_0$, entonces $u \in L^q(B_1)$ y

$$\|u\|_{L^q(B_1)} \le C_{N,p,q} \|u\|_{W^{1,p}(B_1)},$$

donde $C_{N,p,q}$ es una constante que depende de N, p, y q. Además,

$$|u(r)| \le C_{N,p} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} \left(|\log r|^{\frac{1}{p}} + 1\right) \ \text{en } B_1,$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

d) Asumiendo que g es no negativa. Entonces:

d1) Se tiene

$$\|\nabla u\|_{L^p(B_1)} \le C_{N,p} \left\{ \left\|(u-u(1))^{p-1}\right\|_{L^1(B_1)}^{\frac{1}{p-1}} + \|g(u)\|_{L^1(B_1)}^{\frac{1}{p-1}} \right\},$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

d2) $u \in W^{1,q}(B_1)$ *para todo* $q < q_1$, *y*

$$\|u\|_{W^{1,q}(B_1)} \leq C \quad si\ q < q_1,$$

donde C *es una constante que depende de* N, p, q, *y cotas superiores de* $\|u\|_{L^1(B_1)}$ *y* g.

d3) *Si* $N \geq p + 4p/(p-1)$ *entonces*

$$|u_r(r)| \leq C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}(B_1)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)} |\log r|^{\frac{1}{p}} \quad en\ B_{1/4},$$

donde $C_{N,p}$ *es una constante que depende de* N *y* p.

La definición de q_k *para* $k = 0, 1$, *esta dada por*

$$\begin{cases} \frac{1}{q_k} := \frac{1}{p} - \frac{2}{Np}\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} + \frac{k-1}{N} - \frac{2}{Np} & si\ N \geq p + 4p/(p-1), \\ q_k := +\infty & si\ N < p + 4p/(p-1). \end{cases}$$

4.2. Lema para una solución radial semi-estable

El siguiente lema es el punto de partida de las demostraciones de nuestros resultados.

Lema 4.2.1. *Sea* $N \geq p > 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz, y* $u \in W^{1,p}(B_1)$ *una solución radial semi-estable de* (4.1.1) *satisfaciendo* $u_r(r) < 0$ *para todo* $r \in (0,1)$. *Entonces existe una constante* $K_{N,p}$ *dependiendo de* N *y* p *tal que:*

$$\int_0^r |u_r(t)|^p t^{N-1}\, dt \leq K_{N,p} \|\nabla u\|^p_{L^p\left(B_1 \setminus B_{1/2}\right)} r^{2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2}, \ \forall r \in [0,1].$$

Demostración. Usamos [6, Lem. 2.2] (ver también la demostración de [6, Lem. 2.3]) para obtener que

$$(N-1)\int_{B_1} |u_r|^p \, \eta^2 \, dx \leq (p-1)\int_{B_1} |u_r|^p \, |\nabla(|x|\,\eta)|^2 \, dx, \tag{4.2.1}$$

para toda función Lipschitz radial η que se anule en ∂B_1.

Fijamos $r \in (0, 1/2)$ y consideramos la función test

$$\eta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{r^{-\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}}}{\epsilon} & \text{si } 0 \leq t \leq \epsilon, \\ \frac{r^{-\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}}}{t} & \text{si } \epsilon < t \leq r, \\ t^{-\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-1} & \text{si } r < t \leq 1/2, \\ 2^{\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2}(1-t) & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Por la desigualdad (4.2.1), se sigue que

$$\begin{gathered} (N-p)\left(\frac{r^{-\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}}}{\epsilon}\right)^2 \int_0^\epsilon |u_r(t)|^p \, t^{N-1} \, dt + \\ +(N-1) r^{-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2} \int_\epsilon^r (r/t)^2 \, |u_r(t)|^p \, t^{N-1} \, dt + \\ +2^{2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+4} \int_{1/2}^1 \left((N-1)(1-t)^2 - (p-1)(1-2t)^2\right) |u_r(t)|^p \, t^{N-1} \, dt \leq 0. \end{gathered}$$

Como $N \geq p$, y $r/t \geq 1$ para $0 < t \leq r$, tendiendo $\epsilon \to 0$, obtenemos que

$$\int_0^r |u_r(t)|^p \, t^{N-1} \, dt \leq \left(\frac{(p-1)2^{2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+4}}{N-1}\right) r^{2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2} \int_{1/2}^1 |u_r(t)|^p \, t^{N-1} \, dt,$$

de donde el lema es demostrado para $0 < r \leq 1/2$.

Luego si $r \in (1/2, 1]$ entonces, aplicando la desigualdad anterior para $r = 1/2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^r |u_r(t)|^p\, t^{N-1}\, dt &\leq \int_0^{1/2} |u_r(t)|^p\, t^{N-1}\, dt + \int_{1/2}^1 |u_r(t)|^p\, t^{N-1}\, dt\\ &\leq \left[\left(\frac{(p-1)2^{2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+4}}{N-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2} + 1\right]\int_{1/2}^1 |u_r(t)|^p\, t^{N-1}\, dt\\ &\leq (2r)^{2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2}\left(\frac{4(p-1)}{N-1}+1\right)\int_{1/2}^1 |u_r(t)|^p\, t^{N-1}\, dt,\end{aligned}$$

lo que completa la demostración para $1/2 < r \leq 1$. □

Para finalizar la presente sección, presentamos la siguiente proposición que nos permite estimar la diferencia puntual $\left|u(r) - u\left(\frac{r}{2}\right)\right|$ para todo $r \in (0,1]$ de una solución radial semi-estable.

Proposición 4.2.2. *Sea $N \geq p > 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz, y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable de* (4.1.1) *satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$. Entonces existe una constante $K'_{N,p}$ dependiendo de N y p tal que:*

$$\left|u(r) - u\left(\frac{r}{2}\right)\right| \leq K'_{N,p}\, \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1\setminus B_{1/2}\right)}\, r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)},\ \forall r \in (0,1]. \qquad (4.2.2)$$

Demostración. Fijamos $r \in (0,1]$. Aplicando la desigualdad de Hölder y el Lema 4.2.1, se deduce que

$$\begin{aligned}\left|u(r) - u\left(\frac{r}{2}\right)\right| &= \int_{r/2}^r |u_r(t)|\, t^{\frac{N-1}{p}}\, t^{\frac{-(N-1)}{p}}\, dt\\ &\leq \left(\int_{r/2}^r |u_r(t)|^p\, t^{N-1}\, dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{r/2}^r t^{-\frac{(N-1)}{p-1}}\, dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\leq K_{N,p}^{\frac{1}{p}}\, \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1\setminus B_{1/2}\right)}\, r^{\frac{2}{p}\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+\frac{2}{p}}\left(r^{-\frac{(N-1)}{p-1}+1}\int_{1/2}^1 t^{-\frac{(N-1)}{p-1}}\, dt\right)^{\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

de donde (4.2.2) es demostrada con $K'_{N,p} = K_{N,p}^{\frac{1}{p}}\left(\int_{1/2}^1 t^{-\frac{(N-1)}{p-1}}\, dt\right)^{\frac{p-1}{p}}$. □

4.3. Estimaciones puntuales para g y g'

En el presente lema mostramos estimaciones puntuales para g y g', esto nos permite obtener estimaciones para u_{rr} y u_{rrr}.

Lema 4.3.1. *Sea $p > 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz, y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable de* (4.1.1) *satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$. Entonces*

$$g(u(r)) \leq N\frac{|u_r(r)|^{p-1}}{r}, \quad \forall r \in (0,1]. \tag{4.3.1}$$

Además, si g es convexa, entonces

$$g'(u(r)) \leq M_{N,p}\frac{|u_r(r)|^{p-2}}{r^2}, \quad \forall r \in (0,1], \tag{4.3.2}$$

donde $M_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

Demostración. Consideramos la función

$$\Psi(r) := Nr^{1-1/N}\left|u_r\left(r^{1/N}\right)\right|^{p-1}, \; r \in (0,1].$$

Es fácil comprobar que $\Psi'(r) = g\left(u\left(r^{1/N}\right)\right)$, $r \in (0,1]$. Como g es no negativa y no decreciente, se tiene que Ψ es una función no negativa, no decreciente y cóncava. De donde se sigue fácilmente que

$$0 \leq \Psi'(r) \leq \Psi(r)/r, \; r \in (0,1],$$

y se obtiene (4.3.1).

Para obtener (4.3.2), primero observamos que por (4.1.1) se sigue que

$$u_{rr} = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{g(u)}{|u_r|^{p-2}} + \frac{N-1}{r}u_r\right), \quad \forall r \in (0,1].$$

Por lo tanto, usando la no negatividad de g y la desigualdad (4.3.1) se deduce que

$$|u_{rr}| \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{g(u)}{|u_r|^{p-2}} + \frac{N-1}{r}|u_r|\right) \leq \left(\frac{2N-1}{p-1}\right)\frac{|u_r|}{r}, \quad \forall r \in (0,1]. \tag{4.3.3}$$

Luego para $\alpha \in \mathbb{R}$ un cálculo fácil muestra que

$$\begin{aligned}
\partial_r\left(r^\alpha |u_r|^{p-2}\right) &= \alpha r^{\alpha-1}|u_r|^{p-2} - (p-2)r^\alpha u_{rr}|u_r|^{p-3} \\
&\geq r^{\alpha-1}|u_r|^{p-2}\left(\alpha - \frac{|p-2|(2N-1)}{p-1}\right), \quad \forall r \in (0,1].
\end{aligned}$$

Así $r^\alpha |u_r|^{p-2}$ es no decreciente para $\alpha = \frac{|p-2|(2N-1)}{p-1}$. Usando esto, la monotonía de $g'(u(r))$ y la semi-estabilidad de u, se deduce que

$$\begin{aligned}
g'(u(r))\int_0^r s^{N-1}\xi(s)^2 ds &\leq \int_0^r s^{N-1}g'(u(s))\xi(s)^2 ds \\
&\leq (p-1)\int_0^r |u_r(s)|^{p-2} s^\alpha s^{N-1-\alpha}\xi'(s)^2 ds \\
&\leq (p-1)|u_r(r)|^{p-2} r^\alpha \int_0^r s^{N-1-\alpha}\xi'(s)^2 ds,
\end{aligned}$$

para todo $r \in (0,1)$ y todo $\xi \in C_c^1(0,r)$.

Tomando $\xi(s) = \zeta(\frac{s}{r})$ para $s \in [0,r]$, donde $\zeta \in C_c^1(0,1)$, se obtiene la desigualdad (4.3.2). □

4.4. Regularidad y estimaciones para una solución semi-estable

En esta sección establecemos estimaciones puntuales para soluciones radiales semi-estable y decrecientes $u \in W^{1,p}(B_1)$ de (4.1.1) y sus derivadas hasta el orden de tres. Mejoramos el Teorema 4.1.1, y respondimos afirmativamente a la pregunta planteada en [6], acerca de la eliminación del factor logarítmico $|\log r|^{\frac{1}{p}}$ de los ítems c) y $d3$).

En los siguientes teoremas obtenemos una estimación puntual para una solución radial semi-estable de (4.1.1), y para sus derivadas radiales hasta orden 3.

Teorema 4.4.1 (Navarro y Villegas [28]). *Sea $p > 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz, y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable de* (4.1.1) *satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$. Entonces existe una constante $C_{N,p}$ dependiendo solo de N y p tal que:*

i) Si $N < p + 4p/(p-1)$, entonces

$$|u(r)| \leq C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)}, \ \forall r \in (0,1].$$

ii) Si $N = p + 4p/(p-1)$, entonces

$$|u(r)| \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)} (|\log r| + 1), \ \forall r \in (0,1].$$

iii) Si $N > p + 4p/(p-1)$, entonces

$$|u(r)| \leq C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1].$$

Teorema 4.4.2 (Navarro y Villegas [28]). *Sea $N \geq p + 4p/(p-1)$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz, y $u \in W^{1,p}(B_1)$ una solución radial semi-estable de* (4.1.1) *satisfaciendo $u_r(r) < 0$ para todo $r \in (0,1)$. Entonces existe una constante $C'_{N,p}$ dependiendo solo de N y p tal que:*

i) Si $g \geq 0$, entonces

$$|u_r(r)| \leq C'_{N,p} \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1 \setminus B_{1/2}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)}, \ \forall r \in (0,1/2].$$

ii) Si $g \geq 0$ es no decreciente, entonces

$$|u_{rr}(r)| \leq C'_{N,p} \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1 \setminus B_{1/2}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1/2].$$

iii) Si $g \geq 0$ es no decreciente y convexa, entonces

$$|u_{rrr}(r)| \leq C'_{N,p} \|\nabla u\|_{L^p\left(B_1 \setminus B_{1/2}\right)} r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2p-2\right)}, \ \forall r \in (0, 1/2].$$

Nota 4. Observe que las estimaciones obtenidas en los teoremas 4.4.1 y 4.4.2 están expresados en términos de la norma $W^{1,p}$ en el anillo $B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}$, mientras que u debe pertenecer a $W^{1,p}(B_1)$. Este requisito es esencial para obtener los resultados, ya que podemos encontrar fácilmente soluciones radiales semi-estables decrecientes de (4.1.1) (por ejemplo $u(r) = r^s$, con $s << 0$), que no pertenezcan a $W^{1,p}(B_1)$, y para las cuales los ítems de los teoremas 4.4.1 y 4.4.2 no se satisfacen.

Nota 5. Según nuestros conocimientos no existen estimaciones de $|u_{rr}|$ o $|u_{rrr}|$ en la literatura para este tipo de soluciones.

A continuación veremos las demostraciones de los teoremas anteriores.

Demostración del Teorema 4.4.1. Analizamos en primer lugar el caso $N < p$. De (4.1.1) se deduce $\partial_r \left(r^{N-1} |u_r|^{p-1}\right) = r^{N-1} g(u)$. Por lo tanto $r^{N-1} |u_r|^{p-1}$ es una función positiva no decreciente y también lo es $\left(r^{N-1} |u_r|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}$, de donde

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} t^{N-1} |u_r(t)|^p \, dt &= \int_{1/2}^{1} \left(t^{N-1} |u_r|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} t^{-\frac{N-1}{p-1}} \, dt \\ &\geq (1/2)^{\frac{p(N-1)}{p-1}} \int_{1/2}^{1} t^{-\frac{N-1}{p-1}} \, dt \, |u_r(1/2)|^p ,\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Como $u \in W^{1,p}\left(B_{1/2}\right)$, la inclusión de Sobolev conduce a $u \in L^\infty\left(B_{1/2}\right)$ y por tanto deducimos que existe una constante C que solo depende de N y p tal que

$$\begin{aligned}u(0) \leq C \left(\int_0^{1/2} t^{N-1} |u_r|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= C \left(\int_0^{1/2} \left(t^{N-1} |u_r|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} t^{-\frac{N-1}{p-1}} \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^{1/2} t^{-\frac{N-1}{p-1}} \, dt\right)^{\frac{1}{p}} (1/2)^{\frac{N-1}{p-1}} |u_r(1/2)| .\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Puesto que $N < p$, la integral $\int_0^{1/2} t^{-\frac{N-1}{p-1}}\, dt$ existe, y por tanto de (4.4.1) y (4.4.2) deducimos

$$u(0) \leq C_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)},$$

donde $C_{N,p}$ es una constante que solo depende de N y p. Finalmente puesto que u es decreciente, se sigue $i)$ para $N < p$. Nótese que en este caso $N < p$ no hemos utilizado la estabilidad de u

Por lo tanto en lo que sigue supondremos $N \geq p$.

Sea $0 < r \leq 1$. Entonces, existen $m \in \mathbb{N}$ y $1/2 < r_1 \leq 1$ tal que $r = r_1/2^{m-1}$. Como u es radial tenemos $|u(r_1)| \leq \|u\|_{L^\infty\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)} \leq \gamma_{N,p} \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)}$, donde $\gamma_{N,p}$ depende de N y p. Entonces por la Proposición 4.2.2, se sigue que

$$\begin{aligned} |u(r)| &\leq |u(r) - u(r_1)| + |u(r_1)| = \sum_{i=1}^{m-1} \left| u\left(\frac{r_1}{2^{i-1}}\right) - u\left(\frac{r_1}{2^i}\right) \right| + |u(r_1)| \\ &\leq \left(K'_{N,p} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{r_1}{2^{i-1}}\right)^{-\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2\right)} + \gamma_{N,p} \right) \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)}. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

Luego definimos $\delta_{N,p} := -\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2\right)$, de donde la sumatoria de la desigualdad anterior puede estimarse como

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{r_1}{2^{i-1}}\right)^{\delta_{N,p}} \leq \alpha_{N,p} \begin{cases} r^{\delta_{N,p}} & \text{si } \delta_{N,p} < 0, \\ 1 & \text{si } \delta_{N,p} > 0, \\ |\log r| & \text{si } \delta_{N,p} = 0, \end{cases} \tag{4.4.4}$$

donde $\alpha_{N,p}$ es una constante que depende de N y p.

Finalmente la demostración se siguen en tres casos según el signo de $\delta_{N,p}$.

- Si $p \leq N < p + 4p/(p-1)$, entonces $\delta_{N,p} > 0$. Por (4.4.3) y (4.4.4) tenemos

$$|u(r)| \leq \left(K'_{N,p}\alpha_{N,p} + \gamma_{N,p}\right) \|u\|_{W^{1,p}\left(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}\right)}.$$

- Si $N = p + 4p/(p-1)$, entonces $\delta_{N,p} = 0$. Por (4.4.3) y (4.4.4) tenemos

$$\begin{aligned}|u(r)| &\leq \left(K'_{N,p}\alpha_{N,p}\,|\log r| + \gamma_{N,p}\right)\|u\|_{W^{1,p}\left(B_1\setminus\overline{B_{1/2}}\right)}\\ &\leq \left(K'_{N,p}\alpha_{N,p} + \gamma_{N,p}\right)\|u\|_{W^{1,p}\left(B_1\setminus\overline{B_{1/2}}\right)}(|\log r| + 1).\end{aligned}$$

- Si $N > p + 4p/(p-1)$, entonces $\delta_{N,p} < 0$ y $r^{\delta_{N,p}} \geq 1$. Por (4.4.3) y (4.4.4) tenemos

$$|u(r)| \leq \left(K'_{N,p}\alpha_{N,p} + \gamma_{N,p}\right) r^{\delta_{N,p}}\,\|u\|_{W^{1,p}\left(B_1\setminus\overline{B_{1/2}}\right)},$$

de donde se completa la demostración. $\square$

Demostración del Teorema 4.4.2.

i) Primero observamos que $\partial_r\left(r^{N-1}|u_r|^{p-1}\right) = r^{N-1}g(u)$. Por lo tanto $r^{N-1}|u_r|^{p-1}$ es una función positiva no decreciente y también lo es $\left(r^{N-1}|u_r|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}$. Luego, para $0 < r \leq 1/2$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2r}|u_r(t)|^p\,t^{N-1}\,dt &\geq \int_r^{2r}|u_r(t)|^p\,t^{N-1}\,dt\\ &= \int_r^{2r}\left(t^{N-1}|u_r|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}t^{-\frac{N-1}{p-1}}\,dt\\ &\geq r^{\frac{p(N-1)}{p-1}}|u_r(r)|^p\int_r^{2r}t^{-\frac{N-1}{p-1}}\,dt\\ &= r^N|u_r(r)|^p\int_1^2 t^{-\frac{N-1}{p-1}}\,dt,\end{aligned}$$

por esto y el Lema 4.2.1 obtenemos i).

ii) Por (4.3.3) y i) se sigue ii).

iii) Por (4.1.1) tenemos

$$u_{rrr} = -\frac{1}{p-1}\left(\frac{g'(u)u_r}{|u_r|^{p-2}} - (p-2)\frac{u_r u_{rr} g(u)}{|u_r|^p} - \frac{N-1}{r^2}u_r + \frac{N-1}{r}u_{rr}\right),$$

para todo $r \in (0,1]$. Por lo tanto por (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3), se tiene

$$\begin{aligned}
|u_{rrr}| &\leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{g'(u)\,|u_r|}{|u_r|^{p-2}} + |p-2|\,\frac{|u_r|\,|u_{rr}|\,g(u)}{|u_r|^p} + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{N-1}{r^2}\,|u_r| + \frac{N-1}{r}\,|u_{rr}|\right)\\
&\leq \frac{1}{p-1}\left(M_{N,p} + \frac{|p-2|\,N(2N-1)}{p-1} + \right.\\
&\qquad \left. +(N-1) + \frac{(N-1)(2N-1)}{p-1}\right)\frac{|u_r|}{r^2},\ \forall r \in (0,1].
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

entonces *iii*) se sigue por *i*).

Lo que concluye la demostración del teorema. □

4.5. Regularidad y estimaciones para la solución extremal

Como parte final del capítulo, aplicamos los resultados anteriores, al siguiente problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_p u &=& \lambda f(u) & \text{en } B_1,\\ u &>& 0 & \text{en } B_1,\\ u &=& 0 & \text{en } \partial B_1, \end{array}\right. \tag{$4.5.1_{\lambda,p}$}$$

donde $\lambda > 0$ y f es una función C^1 creciente con $f(0) > 0$ y

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = +\infty. \tag{4.5.2}$$

Este problema es estudiado por Cabré y Sanchón en [7] para dominios generales suaves y acotados Ω de $\mathbb{R}^N$. Se demuestra que existe un parámetro positivo λ^* tal que si $\lambda \in (0, \lambda^*)$ entonces ($4.5.1_{\lambda,p}$) admite una solución minimal (la más pequeña) $u_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$, y si $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ entonces ($4.5.1_{\lambda,p}$) no admite solución regular.

Además, para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ la solución minimal u_λ es semi-estable. Por otro lado, podemos considerar el límite creciente

$$u^* := \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_\lambda.$$

En el caso $p = 2$ es bien sabido que u^* es una solución débil de $(4.5.1_{\lambda,p})$, para $\lambda = \lambda^*$. Es llamada solución extremal. Para generales p, Ω y f, no se sabe si u^* es una solución débil de $(4.5.1_{\lambda,p})$, para $\lambda = \lambda^*$. En el caso $\Omega = B_1$, Cabré, Capella y Sanchón en [6] demuestran que u^* es una solución radial semi-estable decreciente (es decir $u^* \in W_0^{1,p}$) de $(4.5.1_{\lambda,p})$. Por lo tanto podemos aplicar a la solución extremal los resultados obtenidos en esta sección para este tipo de soluciones.

Hacemos referencias a [3, 9] para estudios sobre soluciones mínimas y extremales y a [2, 10, 11, 12, 15, 16, 24, 25, 31, 32, 35] para otros resultados interesantes en el tema de las soluciones extremales.

Teorema 4.5.1 (Navarro y Villegas [28]). *Sea $p > 1$. Supongamos que f satisface (4.5.2). Sea u^* la solución extremal de $(4.5.1_{\lambda,p})$. Se tiene que*

i) Si $N < p + 4p/(p-1)$, entonces $u^*(r) \leq C(1-r)$, $\forall r \in (0,1]$.

ii) Si $N = p + 4p/(p-1)$, entonces $u^*(r) \leq C\,|\log r|$, $\forall r \in (0,1]$.

iii) Si $N > p + 4p/(p-1)$, entonces

$$u^*(r) \leq C\left(r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} - 1\right), \ \forall r \in (0,1].$$

iv) Si $N \geq p + 4p/(p-1)$, entonces

$$\left|\partial_r^{(k)} u^*(r)\right| \leq C r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+(k-1)p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1], \ \forall k \in \{1,2\}.$$

v) Si $N \geq p + 4p/(p-1)$, y f es convexa, entonces

$$|u^*_{rrr}(r)| \leq C r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}+2p-2\right)}, \ \forall r \in (0,1].$$

Donde $C = C_{N,p} \min_{t\in[1/2,1]} |u_r^*(t)|$, *y* $C_{N,p}$ *es una constante que depende de* N *y* p *.*

Nota 6. En [23] García-Azorero, Peral y Puel demuestran que si $f(u) = e^u$ y $N = p + 4p/(p-1)$ entonces

$$u^*(r) = -p \log r \text{ y } \lambda^* = 4p^p/(p-1).$$

Esto demuestra que las estimaciones puntuales de Teorema 4.5.1 son óptimas para $N = p + 4p/(p-1)$.

Por otro lado, en [6] Cabré y Sanchón demuestran que si $N > p + 4p/(p-1)$ y $f(u) = (1+u)^m$, donde

$$m := \frac{(p-1)N - 2\sqrt{(p-1)(N-1)} - p + 2}{N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2},$$

entonces

$$u^*(r) = r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} - 1,$$

y

$$\lambda^* = \left(\frac{p}{m-(p-1)}\right)^{p-1}\left(N - \frac{mp}{m-(p-1)}\right).$$

Esto demuestra que las estimaciones puntuales de Teorema 4.5.1 son óptimas para el caso $N \geq p + 4p/(p-1)$.

Luego para demostrar el Teorema 4.5.1, necesitamos del siguiente lema

Lema 4.5.2. *Sea* $p > 1$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz, y* $u \in W^{1,p}(B_1)$ *una solución radial semi-estable de* (4.1.1) *satisfaciendo* $u_r(r) < 0$ *para todo* $r \in (0,1)$*. Entonces*

i) $r^{N-1}|u_r|^{p-1}$ *es no decreciente para* $r \in (0,1]$.

ii) $r^{-1}|u_r|^{p-1}$ *es no creciente para* $r \in (0,1]$.

iii) $\max_{t\in[1/2,1]} |u_r(t)| \leq 2^{\frac{N}{p-1}} \min_{t\in[1/2,1]} |u_r(t)|$.

iv) $\|\nabla u\|_{L^p\left(B_1\setminus B_{1/2}\right)} \leq q_{N,p} \min_{t\in[1/2,1]} |u_r(t)|$ *para una constante* $q_{N,p}$ *que depende de* N *y* p.

Demostración.

i) Como $u_r < 0$ se tiene que $\partial_r\left(r^{N-1}|u_r|^{p-1}\right) = r^{N-1}g(u) \geq 0$.

ii) Por (4.3.1) del Lema 4.3.1, tenemos que

$$Nr^{N-2}|u_r|^{p-1} \geq \partial_r\left(r^{N-1}|u_r|^{p-1}\right) = Nr^{N-2}|u_r|^{p-1} + r^N\partial_r\left(r^{-1}|u_r|^{p-1}\right),$$

y *ii*) se sigue inmediatamente.

iii) Tomando $r_1, r_2 \in [1/2,1]$ tal que

$$|u_r(r_1)| = \min_{t\in[1/2,1]} |u_r(t)| \text{ y } |u_r(r_2)| = \max_{t\in[1/2,1]} |u_r(t)|.$$

- Si $r_2 \leq r_1$, se deduce por *i*) que

$$|u_r(r_2)|^{p-1} \leq (r_1/r_2)^{N-1}|u_r(r_1)|^{p-1} \leq 2^N|u_r(r_1)|^{p-1}.$$

- Si $r_2 > r_1$, se deduce por *ii*) que

$$|u_r(r_2)|^{p-1} \leq (r_2/r_1)|u_r(r_1)|^{p-1} \leq 2|u_r(r_1)|^{p-1} \leq 2^N|u_r(r_1)|^{p-1}.$$

iv) Podemos ver fácilmente que

$$\|\nabla u\|_{L^p\left(B_1\setminus B_{1/2}\right)} \leq \left|B_1 \setminus B_{1/2}\right|^{1/p} \max_{t\in[1/2,1]} |u_r(t)|,$$

y *iv*) se sigue por *iii*).

Lo que concluye la demostración del lema. □

Demostración del Teorema 4.5.1. Como ya hemos mencionado, sabemos que u^* es una solución radial semi-estable y decreciente $W^{1,p}(B_1)$ de (4.1.1) para $g(s) = \lambda^* f(s)$. Por tanto podemos aplicar a u^* los resultados obtenidos en Lema 4.2.1 y Lema 4.5.2.

Primero observamos que en el caso $N < p$ podemos proceder de forma similar a la demostración del Teorema 4.4.1. Por lo tanto en lo que sigue supondremos $N \geq p$.

Sea $0 < s \leq 1$. Por el ítem *ii*) del Lema 4.5.2 y aplicando la desigualdad de Hölder, se deduce que

$$\begin{aligned} |u_r^*(s)|^{p-1} &\leq 2\int_{s/2}^{s} t^{-1}\,|u_r^*(t)|^{p-1}\,dt = 2\int_{s/2}^{s} t^{\frac{(p-1)(N-1)}{p}}\,|u_r^*(t)|^{p-1}\,t^{\frac{N-pN-1}{p}}\,dt \\ &\leq 2\left(\int_{s/2}^{s} t^{N-1}\,|u_r^*(t)|^{p}\,dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{s/2}^{s} t^{N-pN-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por esto, el Lema 4.2.1 y ítem *iv*) del Lema 4.5.2, se tiene

$$|u_r^*(s)| \leq C_{N,p}\min_{t\in[1/2,1]}|u_r^*(t)|\,s^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)},\ \forall s\in(0,1], \tag{4.5.3}$$

donde $C_{N,p}$ depende de N y p.

Entonces como $u^*(1)=0$, usando (4.5.3) se obtiene que

$$|u^*(r)| = \int_r^1 |u_r^*(s)|\,ds \leq C_{N,p}\min_{t\in[1/2,1]}|u_r^*(t)|\int_r^1 s^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)}\,ds, \tag{4.5.4}$$

para todo $0 < r \leq 1$. Ahora calculamos la integral $\int_r^1 s^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)}\,ds$, que se separa en los siguientes tres casos.

- Si $N < p + 4p/(p-1)$, se tiene que $-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right) > -1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_r^1 s^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)}\,ds &= \frac{1-r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)}}{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} \\ &\leq \left(1+\frac{1}{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)}\right)(1-r). \end{aligned}$$

- Si $N = p + 4p/(p-1)$, se tiene que $-\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - 2\right) = -1$, entonces

$$\int_r^1 s^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)}\,ds = -\log r.$$

- Si $N > p + 4p/(p-1)$, se tiene que $-\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - 2\right) < -1$, entonces

$$\int_r^1 s^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-2\right)}\,ds = \frac{r^{-\frac{1}{p}\left(N-2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}}-p-2\right)} - 1}{\frac{1}{p}\left(N - 2\sqrt{\frac{N-1}{p-1}} - p - 2\right)}.$$

Por lo anterior y (4.5.4), concluimos $i)$, $ii)$, y $iii)$.

Finalmente, la demostración de $iv)$ y $v)$ se sigue por (4.3.3), (4.4.5) y (4.5.3). Lo que concluye la demostración del teorema. $\square$

Capítulo 5

Propiedades de la solución extremal para ecuaciones del bilaplaciano

5.1. Introducción y resultados previos

En este capítulo estudiamos del siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda f(u) & \text{en } B_1, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial B_1, \end{cases} \tag{5.1.1$_\lambda$}$$

donde B_1 es la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$, n es el vector unitario normal exterior, $\lambda \geq 0$ es un parámetro , y $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface

$$f \text{ es no decreciente, } f(0) > 0 \text{ y } \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty. \tag{5.1.2}$$

Definición 5.1.1. Decimos que $u \in L^1(B_1)$ es una solución débil de (5.1.1$_\lambda$) si $f(u) \in L^1(B_1, \delta(x)^2)$ y

$$\int_{B_1} u\Delta^2\varphi = \lambda \int_{B_1} f(u)\varphi,\ \forall \varphi \in C^4(\overline{B_1}),\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial B_1, \tag{5.1.3}$$

donde $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial B_1)$ denota la distancia hasta la frontera de B_1.

Nota 7. Resulta obvio que toda solución clásica de $(5.1.1_\lambda)$ es una solución débil.

Definición 5.1.2. Sea u una solución de $(5.1.1_\lambda)$, se dice que u es estable si

$$Q_u(\xi) := \int_{B_1} \left\{ |\Delta\xi|^2 - \lambda f'(u)\xi^2 \right\} \geq 0, \, \forall \xi \in C_c^\infty (B_1) . \tag{5.1.4}$$

Teorema 5.1.3 (Warnault [36])**.** *Existe $\lambda^* < \infty$ tal que:*

i) Si $\lambda \in [0, \lambda^*)$, $(5.1.1_\lambda)$ admite una solución mínimal clásica u_λ .

ii) Si $\lambda > \lambda^*$, no existe una solución clásica.

iii) Si $\lambda = \lambda^*$, existe una solución débil $\lim\limits_{\lambda \nearrow \lambda^*} u_\lambda = u^* \in L^1(B_1)$ de (1.1_{λ^*}), llamada solución extremal.

Otro resultado que nos permite trabajar con soluciones radiales de $(5.1.1_\lambda)$ corresponde a:

Proposición 5.1.4 (Warnault [36])**.** *Puesto que la solución u_λ dada en el Teorema 5.1.3 es minimal, es automáticamente radial y estable.*

Deducimos fácilmente que u^* es también radial y estable. Dada la simetría radial escribiremos $u(r)$ en lugar de $u(x)$, donde $r = |x|$ y $x \in \mathbb{R}^N$.

En este capítulo estudiaremos la regularidad de la solución extremal u^*. Como punto de partida tenemos el resultado de Dávila et al. [11] para $f(u) = e^u$. En este trabajo se demuestra que u^* esta acotada para dimensiones $N \leq 12$, y no acotada para $N \geq 13$.

Esto nos permite plantearnos la pregunta de si u^* está acotada para dimensiones $N \leq 12$ y para una no linealidad general f que satisface (5.1.2). En esta dirección Warnault obtiene el siguiente teorema:

Teorema 5.1.5 (Warnault [36])**.** *Supongamos que f satisface* (5.1.2)*. Sea u^* la solución extremal de* $(5.1.1_\lambda)$*. Si $N \leq 9$, entonces u^* está acotada.*

Este tipo de operadores de cuarto orden es de interés para muchos investigadores, especialmente cuando f es una exponencial o una no linealidad del tipo $(1+u)^p$ con $p > 1$.

Para $f(u) = e^u$ Dávila et al. [11] y Moradifam [26] prueban la singularidad de la solución extremal para dimensiones $N \geq 13$. Para $f(u) = (1+u)^p$ Ferrero et al. [22] prueban para $N \geq 5$ y $p > (N+4)/(N-4)$ que u^* está acotada si $N \leq 12$.

Para dominios generales con condiciones de frontera $u = \Delta u = 0$ en $\partial\Omega$, Cowan y Ghoussoub [8] demuestran que u^* está acotada para

$$N < 2 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 10.718,$$

con $f(u) = e^u$ y

$$N < \frac{4p}{p-1} + \frac{4(p+1)}{p-1}\left(\sqrt{\frac{2p}{p+1}} + \sqrt{\frac{2p}{p+1} - \sqrt{\frac{2p}{p+1}}} - \frac{1}{2}\right),$$

con $f(u) = (1+u)^p$ y $p > 1$.

En lo que sigue, suponemos $N \geq 5$ y $\lambda \in (0, \lambda^*)$, de modo que $u = u_\lambda$ es una solución clásica de $(5.1.1_\lambda)$. Como hemos mencionado antes, se sabe que u^* está acotada para dimensiones $N \leq 9$. No obstante, nosotros proporcionamos una prueba sencilla para dimensiones $5 \leq N \leq 9$.

5.2. Lema en la segunda variación de la energía para soluciones estables radiales

El siguiente lema es una de las principales herramientas que vamos a utilizar en el presente capítulo. Nos permite eliminar el término de reacción semilineal $f'(u)$ de la segunda variación de energía (5.1.4), obteniendo así una expresión en términos de

u y derivadas radiales hasta orden 3. Este resultado está inspirado por [36, Lema 5] y [5, Lema 2.1].

Lema 5.2.1. *Sea u una solución radial de* (5.1.1$_\lambda$). *Entonces*

$$\mathcal{Q}_u(u_r\eta) = J_u(\eta) + 2\int_{B_1}\left[\left(\frac{N-1}{r^2}\eta^2 - |\nabla\eta|^2\right)(\Delta u)_r u_r\right], \tag{5.2.1}$$

para todo $\eta \in C_c^\infty(B_1\setminus\{0\})$, *donde* $\mathcal{Q}_u$ *es definido por* (5.1.4) *y*

$$J_u(\eta) := \int_{B_1}\left[2\nabla\eta\nabla u_r + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta\right)u_r\right]^2.$$

Demostración. Sea $v = \Delta u$, y $\eta \in C_c^\infty(B_1\setminus\{0\})$. Como u es una solución radial de (5.1.1$_\lambda$), entonces

$$\Delta u_r = \frac{N-1}{r^2}u_r + v_r. \tag{5.2.2}$$

Usando (5.2.2) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{B_1}|\Delta(u_r\eta)|^2 &= \int_{B_1}(2\nabla\eta\nabla u_r + u_r\Delta\eta + \eta\Delta u_r)^2\\ &= \int_{B_1}\left[2\nabla\eta\nabla u_r + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta\right)u_r + v_r\eta\right]^2\\ &= J_u(\eta) + 2\int_{B_1}\left[2\nabla\eta\nabla u_r + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta+\Delta\eta\right)u_r\right]v_r\eta +\\ &+ \int_{B_1}(v_r\eta)^2.\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Entonces como $\Delta v = \lambda f(u)$, derivando respecto de r, tenemos

$$\Delta v_r - \frac{N-1}{r^2}v_r = \lambda f'(u)u_r.$$

Multiplicando por $u_r\eta^2$ e integrando por partes, se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda\int_{B_1}f'(u)(u_r\eta)^2 &= \int_{B_1}(u_r\eta^2)\Delta v_r - \int_{B_1}\frac{N-1}{r^2}v_r u_r\eta^2\\ &= \int_{B_1}v_r\Delta(u_r\eta^2) - \int_{B_1}\frac{N-1}{r^2}v_r u_r\eta^2.\end{aligned}$$

Ahora usando (5.2.2), calculamos la integral $\int v_r\Delta(u_r\eta^2)$:

$$\begin{aligned}\int_{B_1} v_r\Delta(u_r\eta^2) &= \int_{B_1} v_r(\eta^2\Delta u_r + 4\eta\nabla u_r\nabla\eta + 2u_r\eta\Delta\eta + 2u_r\left|\nabla\eta\right|^2)\\ &= \int_{B_1} v_r\left(\eta^2 v_r + \frac{N-1}{r^2}\eta^2 u_r + 4\eta\nabla u_r\nabla\eta + 2u_r\eta\Delta\eta + 2u_r\left|\nabla\eta\right|^2\right)\\ &= 2\int_{B_1}\left[2\nabla\eta\nabla u_r + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta\right)u_r\right]v_r\eta +\\ &+ \int_{B_1}(v_r\eta)^2 - \int_{B_1}\left[\left(\frac{N-1}{r^2}\eta^2 - 2\left|\nabla\eta\right|^2\right)v_r u_r\right],\end{aligned}$$

de donde se tiene

$$\begin{aligned}\lambda\int_{B_1} f'(u)(u_r\eta)^2 = 2\int_{B_1}&\left[2\nabla\eta\nabla u_r + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta\right)u_r\right]v_r\eta +\\ &+ \int_{B_1}(v_r\eta)^2 - 2\int_{B_1}\left[\left(\frac{N-1}{r^2}\eta^2 - \left|\nabla\eta\right|^2\right)v_r u_r\right].\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Finalmente, restando (5.2.3) y (5.2.4), se completa la demostración del lema. □

5.3. Estimación para una no linealidad general

En esta sección del capítulo, obtenemos una cota superior en términos de $(\Delta u)_r$ para la no linealidad g, la cual nos permite junto al Lema 5.2.1 concluir nuestro resultado principal. Esta desigualdad está inspirada por el ítem *ii*) del Teorema 1.7 de [34].

Lema 5.3.1. *Sea $g \in C^1(\mathbb{R})$ una función no negativa y no decreciente, y $u \in C^4(\overline{B_1})$ una clásica solución radial de $\{\Delta^2 u = g(u)$ en B_1, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial B_1\}$. Entonces*

$$g(u(r)) \leq N\frac{(\Delta u)_r(r)}{r}, \quad \forall r \in (0,1]. \tag{5.3.1}$$

Nota 8. Sea $u(r) = (1-r^2)^2$, entonces u es una solución de $\{\Delta^2 u = g(u)$ en B_1, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial B_1\}$ con $g(u) = 8N(N+2)$, y $u_r = -4r(1-r^2) \leq 0$ en $[0,1]$. Luego $\Delta u = 4(N+2)r^2 - 4N$ y $g(u) = N\frac{(\Delta u)_r}{r}$. Por tanto podemos observar que N es una constante óptima para el lema anterior.

Demostración. Esta demostración sigue la misma idea de [34, Teo.1.7 ii)]. Consideremos la función

$$\Psi(r) := Nr^{1-1/N}(\Delta u)_r \left(r^{1/N}\right), \; r \in (0,1].$$

Es fácil comprobar que $\Psi(0) = 0$ y $\Psi'(r) = g\left(u\left(r^{1/N}\right)\right)$, $r \in (0,1]$. Como g es no negativa y no decreciente tenemos que Ψ es una función no negativa, no decreciente, y cóncava. Se sigue fácilmente que

$$0 \leq \Psi'(r) \leq \frac{\Psi(r)}{r}, \; r \in (0,1],$$

de donde se deduce (5.3.1) y se concluye la demostración del lema. □

5.4. Nueva estimación para una solución radial estable

El siguiente lema es el resultado que nos permite demostrar la regularidad de la solución extremal hasta dimensión $N = 10$, consiste en relacionar los Lemas 5.2.1 y 5.4.1 para conseguir una desigualdad no negativa en términos de u_r y u_{rr}.

Lema 5.4.1. *Sea u una solución radial estable de* $(5.1.1_\lambda)$. *Entonces*

$$\int_{B_1} \mathcal{I}(\eta, r)u_r^2 - 2\int_{B_1} \mathcal{K}(\eta, r)u_{rr}^2 \geq 0, \forall \eta \in C_c^\infty\left(B_1 \setminus \{0\}\right), \tag{5.4.1}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\eta, r) = \frac{2(N^2+2)\left|\nabla\eta\right|^2 + 2(N+2)(x\nabla\left|\nabla\eta\right|^2)}{r^2} + \\ +\Delta\mathcal{K}(\eta, r) - \frac{2(N-1)\mathcal{K}(\eta, r)}{r^2} + 2\Delta\left|\nabla\eta\right|^2 + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta\right)^2 + \\ -2\left(\nabla\left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta\right)\nabla\eta + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta\right)\Delta\eta\right),\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{K}(\eta, r) = \frac{N-1}{r^2}\eta^2 - \left|\nabla\eta\right|^2.$$

Demostración. Sea $v = \Delta u$, por (5.2.2) y $\Delta u_r^2 = 2u_r \Delta u_r + 2u_{rr}^2$, tenemos

$$2u_r v_r = \Delta u_r^2 - 2u_{rr}^2 - \frac{2(N-1)}{r^2} u_r^2.$$

Integrando por partes el segundo término de (5.2.1), se tiene

$$\begin{aligned} 2\int_{B_1} \mathcal{K}(\eta,r) u_r v_r &= \int_{B_1} \mathcal{K}(\eta,r) \left(\Delta u_r^2 - 2u_{rr}^2 - \frac{2(N-1)}{r^2} u_r^2 \right) \\ &= \int_{B_1} \left(\Delta \mathcal{K}(\eta,r) - \frac{2(N-1)\mathcal{K}(\eta,r)}{r^2} \right) u_r^2 - 2\int_{B_1} \mathcal{K}(\eta,r) u_{rr}^2. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Extendiendo e integrando por partes $J_u(\eta)$, deducimos

$$\begin{aligned} J_u(\eta) &= \int_{B_1} \left[2\nabla\eta\nabla u_r + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta \right) u_r \right]^2 \\ &= 4\int_{B_1} |\nabla\eta|^2 u_{rr}^2 + \int_{B_1} \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta \right)^2 u_r^2 + \\ &- 2\int_{B_1} \left(\nabla \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta \right) \nabla\eta + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta \right) \Delta\eta \right) u_r^2. \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Como $u_{rr}^2 = \Delta u_r^2/2 - u_r \Delta u_r$, integrando por partes a $\int_{B_1} |\nabla\eta|^2 u_{rr}^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |\nabla\eta|^2 u_{rr}^2 &= \int_{B_1} |\nabla\eta|^2 \left(\frac{\Delta u_r^2}{2} - u_r \Delta u_r \right) \\ &= \int_{B_1} \left(\frac{\Delta |\nabla\eta|^2 u_r^2}{2} - |\nabla\eta|^2 u_r \Delta u_r \right). \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Luego, por (5.2.1), (5.4.2), (5.4.3) y (5.4.4), se deduce

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \left(\Delta\mathcal{K}(\eta,r) - \frac{2(N-1)\mathcal{K}(\eta,r)}{r^2} + 2\Delta |\nabla\eta|^2 + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta \right)^2 \right) u_r^2 + \\ -2\int_{B_1} \left(\nabla \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta \right) \nabla\eta + \left(\frac{N-1}{r^2}\eta + \Delta\eta \right) \Delta\eta \right) u_r^2 + \\ -4\int_{B_1} |\nabla\eta|^2 u_r \Delta u_r - 2\int_{B_1} \mathcal{K}(\eta,r) u_{rr}^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Por el Lema 5.3.1 obtenemos

$$0 \leq s^2 (s^{N-1} v_s)_s \leq N s^N v_s, \ \forall s \in (0,1],$$

Integrando desde 0 a r, se tiene

$$\int_0^r s^2(s^{N-1}v_s)_s\,ds = r^{N+1}v_r - 2\int_0^r s^N v_s\,ds,$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^r s^N v_s\,ds &= r^N v - N\int_0^r s^{N-1}v\,ds\\ &= r^N v - Nr^{N-1}u_r\\ &= r^N u_{rr} - r^{N-1}u_r\\ &= r^{N+1}\left(\frac{u_{rr}}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right),\end{aligned}$$

de donde se sigue

$$2\left(\frac{u_{rr}}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right) \le v_r \le (N+2)\left(\frac{u_{rr}}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right). \tag{5.4.6}$$

Por (5.2.2) y (5.4.6), se obtiene

$$-u_r\Delta u_r \le \frac{-(N+2)u_r u_{rr}}{r} + \frac{3u_r^2}{r^2},$$

de lo cual se deduce

$$\int_{B_1}\left(-|\nabla\eta|^2 u_r\Delta u_r\right) \le \int_{B_1}\left(\frac{-(N+2)|\nabla\eta|^2 u_r u_{rr}}{r} + \frac{3|\nabla\eta|^2 u_r^2}{r^2}\right).$$

Así, integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{B_1}\left(-|\nabla\eta|^2 u_r\Delta u_r\right) &\le \int_{B_1}\left(\frac{N+2}{2}\left(\frac{(N-2)|\nabla\eta|^2 + x\nabla|\nabla\eta|^2}{r^2}\right) + \frac{3|\nabla\eta|^2}{r^2}\right)u_r^2\\ &= \int_{B_1}\left(\frac{(N^2+2)|\nabla\eta|^2 + (N+2)(x\nabla|\nabla\eta|^2)}{2r^2}\right)u_r^2.\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Finalmente, por (5.4.5) y (5.4.7) se sigue (5.4.1). $\square$

5.5. Regularidad y estimaciones para la solución extremal

En este capítulo demostramos la regularidad de la solución extremal u^* para dimensión $N = 10$, aumentando así el rango de dimensiones establecidas en el Teorema 5.1.5 hasta $N = 10$. Además conseguimos estimaciones cercanas del origen para $N \geq 11$. Por otro lado se sigue manteniendo el problema abierto si la solución extremal está acotada para $N = 11, 12$ para una no linealidad general f que satisface (5.1.2).

Teorema 5.5.1 (Navarro y Villegas [29])**.** *Supongamos que f satisface* (5.1.2)*. Sea u^* la solución extremal de* $(5.1.1_\lambda)$*. Se tiene que*

i) Si $N = 10$, entonces u^* está acotada.

ii) Si $11 \leq N \leq 19$, entonces

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{N-8}{2}} u_r^*(r) = \lim_{r\to 0} r^{\frac{N-10}{2}} u^*(r) = 0.$$

iii) Si $N \geq 20$, entonces

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{N-9}{2}} u_r^*(r) = \lim_{r\to 0} r^{\frac{N-11}{2}} u^*(r) = 0.$$

Los ítems *i*) y *ii*) del Teorema anterior son motivados por los siguientes resultados:

En [11] los autores dicen que una solución débil radial u de $(5.1.1_\lambda)$ con $f(u) = e^u$ es débilmente singular si

$$\lim_{r\to 0} r u_r(r) \text{ existe,}$$

y demuestran que la solución extremal u^* de $(5.1.1_\lambda)$ con condición de frontera $\frac{\partial u^*}{\partial n} \geq -4$ en ∂B_1 es siempre débilmente singular.

En [21] los autores dicen que una solución débil radial u de $(5.1.1_\lambda)$ con $f(u) = (1+u)^p$ para $p > (N+4)/(N-4)$ es débilmente singular si

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{4}{p-1}} u(r) \text{ existe,}$$

y demuestran que la solución radial singular de $(5.1.1_\lambda)$ es débilmente singular, por el Teorema 5.5.1, deducimos que

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{4}{p-1}} u^*(r) = 0,$$

para $p \leq (N-2)/(N-10)$ en el caso $11 \leq N \leq 19$ y $p \leq (N-3)/(N-11)$ en el caso $N \geq 20$.

Demostración del Teorema 5.5.1. La desigualdad (5.4.1) puede extenderse al espacio $H_0^3(B_1)$ por densidad y por consiguiente a $H_{0,rad}^3(B_1)$, por lo tanto para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\epsilon \in (0, 1/2)$, consideramos la siguiente función test

$$\eta_{\alpha,\epsilon}(t) = \begin{cases} \epsilon^{-\alpha}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{2} \alpha_n \, (t/\epsilon)^n\right) & \text{si } t \in [0, \epsilon], \\ t^{-\alpha} & \text{si } t \in (\epsilon, 1/2], \\ C^3 - \text{extensión} & \text{si } t \in (1/2, 1], \end{cases}$$

donde $\eta_{\alpha,\epsilon}(1) = \eta'_{\alpha,\epsilon}(1) = \eta''_{\alpha,\epsilon}(1) = \eta'''_{\alpha,\epsilon}(1) = 0$, y

$$\alpha_0 = \frac{(\alpha+1)\,(\alpha+2)}{2},\ \alpha_1 = -\alpha\,(\alpha+2)\,,\ \alpha_2 = \frac{\alpha\,(\alpha+1)}{2}.$$

Luego con un simple calculo tenemos

$$\mathcal{K}(\eta_{\alpha,\epsilon}, t) = \begin{cases} (\epsilon^{-2\alpha}/4)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{4} \beta_n \, (t/\epsilon)^n\right) t^{-2} & \text{si } t \in (0, \epsilon], \\ (N-1-\alpha^2)t^{-2\alpha-2} & \text{si } t \in (\epsilon, 1/2], \\ \text{función acotada (que no depende de } \epsilon) & \text{si } t \in (1/2, 1], \end{cases}$$

donde

$$\beta_0 = (\alpha+1)^2(\alpha+2)^2(N-1),\ \beta_1 = -4\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)^2(N-1),$$
$$\beta_2 = 2\alpha(\alpha+2)((3N-5)\alpha^2 + (6N-10)\alpha + N-1),$$
$$\beta_3 = -4\alpha^2(\alpha+1)(\alpha+2)(N-3),\ \beta_4 = (N-5)\alpha^2(\alpha+1)^2,$$

y

$$\mathcal{I}(\eta_{\alpha,\epsilon}, t) = \begin{cases} (\epsilon^{-2\alpha}/4)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{4} \lambda_n \,(t/\epsilon)^n\right) t^{-4} & \text{si } t \in (0,\epsilon], \\ P_N(\alpha) t^{-2\alpha-4} & \text{si } t \in (\epsilon, 1/2], \\ \text{función acotada (que no depende de } \epsilon) & \text{si } t \in (1/2, 1], \end{cases}$$

donde

$$\lambda_0 = -3(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2(N-3)(N-1),\ \lambda_1 = 8\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)^2(N-3)(N-1),$$
$$\lambda_2 = -2\alpha(\alpha+2)((N^2-26N+13)\alpha^2 + 2(N^2-26N+13)\alpha + N^2-6N+5),$$
$$\lambda_3 = -8\alpha^2(\alpha+1)(\alpha+2)(N^2+8N+3),\ \lambda_4 = \alpha^2(\alpha+1)^2(5N^2+32N+39),$$

y

$$P_N(\alpha) = \alpha^4 - 2(N+4)\alpha^3 + (N^2+6N-12)\alpha^2 - 2(N-1)(N-4)\alpha - 3(N-1)(N-3).$$

Por tanto,

$$\left|\int_{B_\epsilon} \mathcal{I}(\eta_{\alpha,\epsilon}, r) u_r^2\right| \le \omega_N \left(\sum_{n=0}^{4} (|\lambda_n|/4)\right) \epsilon^{-2\alpha-4} \int_0^\epsilon t^{N-1} u_r^2,$$

donde ω_N es la medida del área de la esfera unitaria $N-1$ dimensional.

Así, para $\alpha \le N/2 - 2$, tenemos que $\int_{B_\epsilon} \mathcal{I}(\eta_{\alpha,\epsilon}, r) u_r^2$ converge 0 cuando $\epsilon \to 0$.

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{B_{1/2}} \mathcal{I}(\eta_{\alpha,\epsilon}, r) u_r^2 &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{B_\epsilon} \mathcal{I}(\eta_{\alpha,\epsilon}, r) u_r^2 + P_N(\alpha) \lim_{\epsilon\to 0} \int_{B_{1/2}\setminus B_\epsilon} t^{-2\alpha-4} u_r^2 \\ &= \omega_N P_N(\alpha) \int_0^{1/2} t^{N-2\alpha-5} u_r^2 \, dt. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Sea

$$\alpha_N = \begin{cases} \frac{N-5.9}{2} & \text{si } 5 \leq N \leq 10, \\ 2.1 & \text{si } 11 \leq N \leq 19, \\ 2.51 & \text{si } N \geq 20. \end{cases} \tag{5.5.2}$$

Comprobemos que $P_N(\alpha_N) < 0$, y $\mathcal{K}(\eta_{\alpha_N,\epsilon}, t) \geq 0$ para $N \geq 5$, $t \in (0, 1/2]$, y $\epsilon \in (0, 1/2)$. Primero analizamos $P_N(\alpha_N)$ y luego $\mathcal{K}(\eta_{\alpha_N,\epsilon}, t)$.

Si $N \geq 11$, se tiene que α_N es constante y que $P_N(\alpha_N)$ es decreciente en N, de donde se sigue que $P_N(\alpha_N) \leq P_{11}(2.1) < -20.63$ para $11 \leq N \leq 19$, y $P_N(\alpha_N) \leq P_{20}(2.51) < -13.97$ para $N \geq 20$. Luego, si $5 \leq N \leq 10$ podemos verificar (ver Figura 5.1) que $P_N(\alpha_N) < -10$.

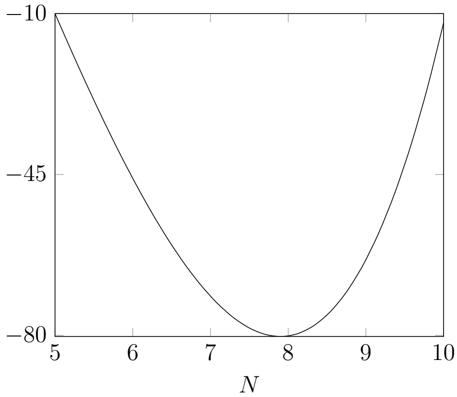

Figura 5.1: $P_N(\frac{N-5.9}{2}, N)$ para $5 \leq N \leq 10$.

Por otra parte, si $t \in (\epsilon, 1/2]$, entonces se sigue fácilmente que $\mathcal{K}(\eta_{\alpha_N,\epsilon}, t) = (N - 1 - \alpha_N^2) \geq 0$.

Luego, si $t \in (0, \epsilon]$, para comprobar la no negatividad de $\mathcal{K}(\eta_{\alpha_N,\epsilon}, t)$, analizamos el polinomio $\sum_{n=0}^{4} \beta_n \, (t/\epsilon)^n$ debido a que tienen el mismo signo.

Por la definición de α_N podemos diferenciar dos casos:

- Si $5 \leq N \leq 10$, se tiene que α_N es variable en N. Entonces podemos verificar (ver Figura 5.2) que $\mathcal{K}(\eta_{\alpha_N,\epsilon}, t) \geq 0$.

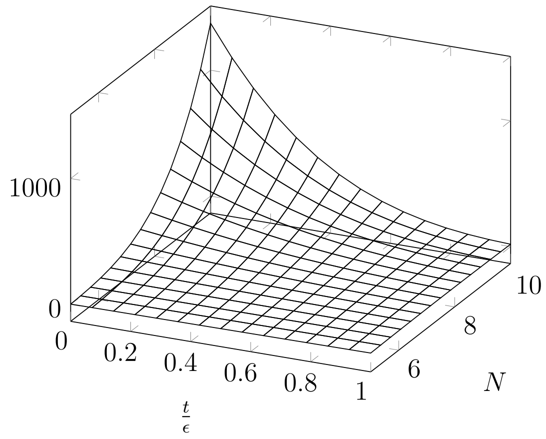

Figura 5.2: $\sum_{n=0}^{4} \beta_n \left(\frac{t}{\epsilon}\right)^n$ con $\alpha_N = \frac{N-5.9}{2}$ y $5 \leq N \leq 10$.

- Si $N \geq 11$, para estas dimensiones se tiene que α_N es constante y por ende $\mathcal{K}(\eta_{\alpha_N,\epsilon}, t)$ es creciente en N, de donde se deduce que $\sum_{n=0}^{4} \beta_n (t/\epsilon)^n$ es creciente en N. Entonces podemos verificar (ver figuras 5.3 y 5.4) que $\mathcal{K}(\eta_{\alpha_N,\epsilon}, t) \geq 0$.

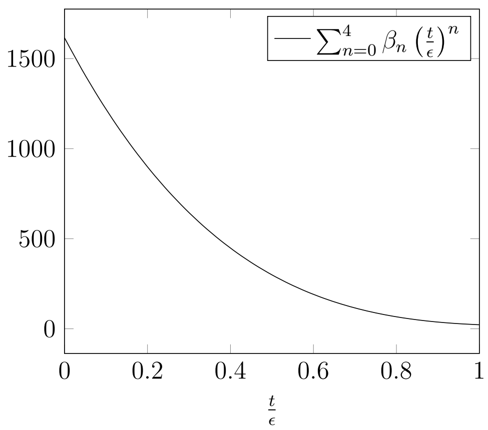

Figura 5.3: $\alpha_N = 2.1$ y $N = 11$.

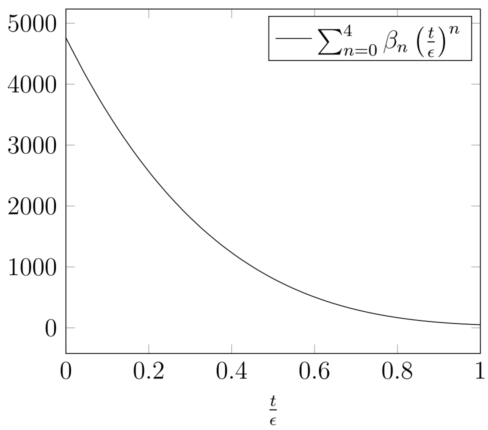

Figura 5.4: $\alpha_N = 2.51$ y $N = 20$.

Luego, aplicando el Lema 5.4.1, (5.5.1), y teniendo en cuenta que $u = u_\lambda \to u^*$ en $H^2(B_1)$ cuando $\lambda \to \lambda^*$ (ver [1]), se tiene

$$K + P_N(\alpha_N) \int_0^{1/2} t^{N-2\alpha_N-5} u_r^2 \, dt \geq 0, \tag{5.5.3}$$

donde la constante $K \geq 0$ no depende de λ.

Fijamos $r \leq 1/2$, por (5.4.6) podemos deducir que $(u_r/t)^2$ es no creciente. Entonces, por (5.5.3) se sigue la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} r^{N-2\alpha_N-4} u_r(r)^2 \int_{1/2}^{1} t^{N-2\alpha_N-3} \, dt &= \left(\frac{u_r(r)}{r}\right)^2 \int_{r/2}^{r} t^{N-2\alpha_N-3} \, dt \\ &\leq \int_{r/2}^{r} t^{N-2\alpha_N-5} u_r^2 \, dt \leq \frac{-K}{P_N(\alpha_N)}. \end{aligned}$$

Esto, junto con (5.5.2), permite obtener la siguiente estimación

$$-u_r(r) \leq K' \begin{cases} r^{-0.95} & \text{si } 5 \leq N \leq 10, \\ r^{\frac{-N+8.2}{2}} & \text{si } 11 \leq N \leq 19, \\ r^{\frac{-N+9.02}{2}} & \text{si } N \geq 20, \end{cases}$$

para todo $r \in (0, 1/2]$, donde $K' = K^{1/2} \left(-P_N(\alpha_N) \int_{1/2}^{1} t^{N-2\alpha_N-3} \, dt \right)^{-1/2}$.

Finalmente tendiendo $\lambda \to \lambda^*$, se tiene

$$-u_r^*(r) \leq K' \begin{cases} r^{-0.95} & \text{si } 5 \leq N \leq 10, \\ r^{\frac{-N+8.2}{2}} & \text{si } 11 \leq N \leq 19, \\ r^{\frac{-N+9.02}{2}} & \text{si } N \geq 20, \end{cases}$$

para todo $r \in (0, 1/2]$, desde donde se sigue la demostración del teorema. □

Conclusiones

En esta última sección exponemos algunas cuestiones que surgen de manera natural al hacer un análisis de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. Algunos de nuestros resultados completan los trabajos de otros autores, y en otros casos tenemos estimaciones puntuales óptimas, por ello las posibles lineas futuras de investigación o preguntas abiertas corresponden a:

- Profundizar en la optimalidad del Teorema 3.1.1 para $1 < p < 2$ y $N > \frac{2p(\sqrt{2-p}+1)}{(p-1)(2-p)}$.
- Seguir avanzando en la regularidad de la solución extremal del problema del bilaplaciano para dimensiones $N = 11, 12$.
- Estudiar a detalle la Proposición 1.8 de [11] y el Teorema 3 de [21] respecto de si la solución extremal es siempre débil singular para una no linealidad general.
- Buscar estimaciones puntuales para una solución estable y sus derivadas radiales para el problema del bilaplaciano.

Bibliografía

[1] Gianni Arioli, Filippo Gazzola, Hans-Christoph Grunau, and Enzo Mitidieri. A semilinear fourth order elliptic problem with exponential nonlinearity. *SIAM J. Math. Anal.*, 36(4):1226–1258 (electronic), 2005.

[2] Haim Brezis and Juan Luis Vázquez. Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 10(2):443–469, 1997.

[3] Xavier Cabré. Extremal solutions and instantaneous complete blow-up for elliptic and parabolic problems. In *Perspectives in nonlinear partial differential equations*, volume 446 of *Contemp. Math.*, pages 159–174. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[4] Xavier Cabré and Antonio Capella. On the stability of radial solutions of semilinear elliptic equations in all of $\mathbb{R}^n$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(10):769–774, 2004.

[5] Xavier Cabré and Antonio Capella. Regularity of radial minimizers and extremal solutions of semilinear elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 238(2):709–733, 2006.

[6] Xavier Cabré, Antonio Capella, and Manel Sanchón. Regularity of radial minimizers of reaction equations involving the p-Laplacian. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 34(4):475–494, 2009.

[7] Xavier Cabré and Manel Sanchón. Semi-stable and extremal solutions of reaction equations involving the p-Laplacian. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 6(1):43–67, 2007.

[8] Craig Cowan and Nassif Ghoussoub. Regularity of semi-stable solutions to fourth order nonlinear eigenvalue problems on general domains. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49(1-2):291–305, 2014.

[9] J. Dávila. Singular solutions of semi-linear elliptic problems. In *Handbook of differential equations: stationary partial differential equations. Vol. VI*, Handb. Differ. Equ., pages 83–176. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[10] J. Dávila and L. Dupaigne. Perturbing singular solutions of the Gelfand problem. *Commun. Contemp. Math.*, 9(5):639–680, 2007.

[11] Juan Dávila, Louis Dupaigne, Ignacio Guerra, and Marcelo Montenegro. Stable solutions for the bilaplacian with exponential nonlinearity. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(2):565–592, 2007.

[12] Juan Dávila, Louis Dupaigne, and Marcelo Montenegro. The extremal solution of a boundary reaction problem. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 7(4):795–817, 2008.

[13] L. Dupaigne and A. Farina. Liouville theorems for stable solutions of semilinear elliptic equations with convex nonlinearities. *Nonlinear Anal.*, 70(8):2882–2888, 2009.

[14] L. Dupaigne and A. Farina. Stable solutions of $-\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^N$. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 12(4):855–882, 2010.

[15] S. Eidelman and Y. Eidelman. On regularity of the extremal solution of the Dirichlet problem for some semilinear elliptic equations of the second order. *Houston J. Math.*, 31(3):957–960, 2005.

[16] Pierpaolo Esposito. Compactness of a nonlinear eigenvalue problem with a singular nonlinearity. *Commun. Contemp. Math.*, 10(1):17–45, 2008.

[17] Alberto Farina. Liouville-type results for solutions of $-\Delta u = |u|^{p-1}u$ on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(7):415–418, 2005.

[18] Alberto Farina. On the classification of solutions of the Lane-Emden equation on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(5):537–561, 2007.

[19] Alberto Farina. Stable solutions of $-\Delta u = e^u$ on $\mathbb{R}^N$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(2):63–66, 2007.

[20] Alberto Farina, Berardino Sciunzi, and Enrico Valdinoci. Bernstein and De Giorgi type problems: new results via a geometric approach. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 7(4):741–791, 2008.

[21] Alberto Ferrero and Hans-Christoph Grunau. The Dirichlet problem for supercritical biharmonic equations with power-type nonlinearity. *J. Differential Equations*, 234(2):582–606, 2007.

[22] Alberto Ferrero, Hans-Christoph Grunau, and Paschalis Karageorgis. Supercritical biharmonic equations with power-type nonlinearity. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 188(1):171–185, 2009.

[23] J. García Azorero, I. Peral Alonso, and J.-P. Puel. Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term. *Nonlinear Anal.*, 22(4):481–498, 1994.

[24] Nassif Ghoussoub and Yujin Guo. On the partial differential equations of electrostatic MEMS devices: stationary case. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(5):1423–1449 (electronic), 2006/07.

[25] D. D. Joseph and T. S. Lundgren. Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 49:241–269, 1972/73.

[26] Amir Moradifam. The singular extremal solutions of the bi-Laplacian with exponential nonlinearity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(4):1287–1293, 2010.

[27] Miguel Angel Navarro and Salvador Villegas. The sharpness of some results on stable solutions of $-\Delta u = f(u)$ in $\mathbb{R}^N$. *J. Math. Anal. Appl.*, 397(2):693–696, 2013.

[28] Miguel Angel Navarro and Salvador Villegas. Sharp estimates of radial minimizers of p-laplace equations. *Preprint*, 2015.

[29] Miguel Angel Navarro and Salvador Villegas. Estimates of the extremal solution for the bilaplacian with general nonlinearity. *Preprint*, 2016.

[30] Miguel Angel Navarro and Salvador Villegas. Semi-stable radial solutions of p-laplace equations in $\mathbb{R}^n$. *Preprint*, 2016.

[31] Gueorgui Nedev. Regularity of the extremal solution of semilinear elliptic equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(11):997–1002, 2000.

[32] Manel Sanchón. Boundedness of the extremal solution of some p-Laplacian problems. *Nonlinear Anal.*, 67(1):281–294, 2007.

[33] Salvador Villegas. Asymptotic behavior of stable radial solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 88(3):241–250, 2007.

[34] Salvador Villegas. Sharp estimates for semi-stable radial solutions of semilinear elliptic equations. *J. Funct. Anal.*, 262(7):3394–3408, 2012.

[35] Salvador Villegas. Boundedness of extremal solutions in dimension 4. *Adv. Math.*, 235:126–133, 2013.

[36] Guillaume Warnault. Regularity of the extremal solution for a biharmonic problem with general nonlinearity. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 8(5):1709–1723, 2009.

[37] Guillaume Warnault. Liouville theorems for stable radial solutions for the biharmonic operator. *Asymptot. Anal.*, 69(1-2):87–98, 2010.