

ANÁLISIS DINÁMICO DE PUENTES ARCO DE HORMIGÓN PARA EL FERROCARRIL DE ALTA VELOCIDAD. CASO VIADUCTO SOBRE EL RÍO TAJO EN EL EMBALSE DE ALCÁNTARA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Por

María Elena Rodríguez Mesa
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Director

Alejandro E. Martínez Castro

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica ,
Universidad de Granada
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, C/ Severo Ochoa s/n, CP 18002
Granada (España)

Septiembre de 2016

© Copyright 2016
por
María Elena Rodríguez Mesa

Resumen

En la ingeniería de puentes de ferrocarril de alta velocidad, la tipología estructural de puentes arco de hormigón supone una elección idónea para el caso de luces medias o altas. No obstante, la ejecución de puentes bajo esta tipología es aún reducida a nivel nacional, así como el número de publicaciones respecto a la respuesta dinámica ante el paso de cargas móviles en este tipo de estructuras.

La finalidad de este proyecto es analizar el Viaducto sobre el río Tajo en el embalse de Alcántara perteneciente a la línea de Alta Velocidad Madrid-Extremadura bajo el paso de cargas móviles y analizar su respuesta dinámica. Tras ello, realizar un informe técnico detectando los posibles efectos resonantes que puedan darse.

La solución al problema teórico de paso de cargas móviles se ha resuelto mediante una solución semianalítica. La parte espacial (modos y frecuencias) se resuelve mediante SAP 2000; la parte temporal se integra de forma exacta, evitando así los errores asociados a los métodos paso a paso. Los resultados obtenidos muestran los problemas dinámicos específicos de la tipología de puentes arco de hormigón para su uso en el ferrocarril de alta velocidad.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis padres, Ángel y María Ángeles, la oportunidad que me han brindado al poder estudiar esta carrera y posteriormente este Máster, no sólo por su ayuda económica, sino por el constante apoyo incondicional que he recibido por su parte. Mis padres que no tuvieron la oportunidad de estudiar, siempre me han apoyado en todas las decisiones de mi vida poniendo todo lo que estuviera a su alcance para ayudarme y darme lo mejor, cosa que no podré jamás agradecerles. Ellos me han enseñado a seguir luchando y a no rendirme y a que todo, si uno se lo propone se puede conseguir.

Por otro lado quisiera expresar mi agradecimiento al tutor de este trabajo, Alejandro Martínez Castro, por su dedicación, su compromiso y su disponibilidad en todo momento que le he necesitado. Sin sus numerosas lecciones sobre el tema y sin la plataforma para el cálculo semianalítico facilitada por él, este texto no podría haber sido posible.

Para finalizar, quiero recordar y agradecer a mis hermanos, amigos de Quéntar, compañeros de la carrera y del máster y a mi pareja, que han contribuído de manera especial al desarrollo de este documento y de mi vida universitaria y post-universitaria.

Comienzo una nueva etapa con mucha ilusión dejando atrás momentos negativos y positivos, los primeros me han hecho más fuerte y los segundos estarán siempre en mi corazón.

Dedicado a mis padres, Ángel y María Ángeles y a Carlos, Luis y Juan Manuel.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
Capítulo 1. Introducción, objetivos y metodología	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Motivación y problemática existente	1
1.1.2. Particularidades de la tipología de puentes arco.	2
1.2. Objetivos.	3
1.3. Metodología.	3
Capítulo 2. Revisión del estado de arte	5
2.1. Tratamiento normativo del problema dinámico	5
2.1.1. Introducción	5
2.1.2. Método disponibles para el cálculo dinámico y ámbito de aplicación	5
2.1.3. <i>Método recomendado por la IAPF-2007 para el caso práctico. Limitaciones de la instrucción.</i>	9
2.2. Solución al problema de cargas móviles	10
2.2.1. <i>Trabajos y publicaciones sobre soluciones al problema de cargas móviles en puentes.</i>	10
2.2.2. <i>Métodos de integración en el dominio del tiempo. Planteamiento teórico.</i>	11
2.2.3. <i>Limitaciones de los métodos paso a paso.</i>	13
2.3. Puentes Arco para el Ferrocarril de Alta Velocidad. Caso del Viaducto sobre el Tajo.	13
Capítulo 3. Solución Semianalítica para el paso de carga móvil sobre la estructura	17
3.1. Introducción	17
3.2. Formulación del método	17
3.3. Generalización y ejecución del método	26
3.4. Test de validación	27
3.4.1. <i>Planteamiento</i>	27
3.4.2. <i>Test de validación 1: Viga de tres vanos</i>	28
3.5. Conclusión. Ventajas del método semianalítico	34
Capítulo 4. Análisis dinámico del Viaducto sobre el Tajo	35
4.1. Introducción	35
4.2. Método de Cálculo	35
4.3. Modelo numérico de la estructura	36
4.4. Acciones.	49
4.5. Resultados a obtener y comprobaciones a relaizar.	49
4.6. Resultados.	51

4.6.1. Frecuencias propias y modos de vibración	51
4.6.2. Valores máximos y valores límite	65
4.6.3. Valores máximos. Tramo de arco.	65
4.6.4. Valores máximos. Resto de estructura.	66
4.6.5. Curvas envolventes de aceleraciones máximas	67
4.6.6. Curvas envolventes de desplazamientos máximos	72
Capítulo 5. Conclusiones	77
Bibliografía	78

Índice de cuadros

2.1. Métodos de cálculo dinámico publicados en la instrucción IAPF-2007.	8
2.2. Valores de amortiguamiento ζ [%] para diversas tipologías de puentes en función de la luz L(m). Instrucción IAPF-2007	9
3.1. Frecuencias de modos vibración, Test1.	29
4.1. Frecuencias propias	51
4.2. Frecuencias propias (continuación)	52
4.3. Frecuencias propias (continuación)	53
4.4. Frecuencias propias (continuación)	54
4.5. Frecuencias propias (continuación)	55
4.6. Frecuencias propias (continuación)	56

Índice de figuras

2.1. Alzado General.	14
2.2. Sección transversal del tablero	15
2.3. Alzado del arco	15
2.4. Planta del arco	15
3.1. Carga móvil sobre viga de sección variable. equilibrio de la rebanada	18
3.2. Discretización para un elemento barra y criterio de signos.	19
3.3. Esquema de línea de carga y puntos de postproceso en estructura.	27
3.4. Geometría de la viga, Test1.	28
3.5. Ejemplo de modo e vibración 11, Test1.	29
3.6. Aceleraciones en el punto central del primer vano por el método de Newmark. Test1.	30
3.7. Puntos de postproceso de la estructura para el método semianalítico y modo de vibración 7. Test1.	31
3.8. Aceleraciones en el punto central del primer vano por el método semianalítico. Test1.	32
3.9. Comparación entre distintas metodologías de paso de cargas. Test1.	33
4.1. Detalle de la malla empleada. Sección del estribo inicial	36
4.2. Detalle del modelo de las riostras.	37
4.3. Sección recta del modelo	37
4.4. Modelo completo de la estructura	38
4.5. Modelo tipo viga del Arco	38
4.6. Alzado lateral con los distintos tipos de sección. Vanos 1-9 y 20-26	41
4.7. Alzado lateral con los distintos tipos de sección. Vanos 10 y 19	42
4.8. Alzado lateral con los distintos tipos de sección. Vanos 11-13 y 16-18	43
4.9. Alzado lateral con los distintos tipos de sección. Vanos 14 y 15	44
4.10. Vista en planta de la losa inferior. Situación y dirección de los apoyos de los primeros 11 vanos.	46
4.11. Vista en planta de la losa inferior. Situación y dirección de los apoyos de los vanos 12-17 sobre el arco.	47
4.12. Vista en planta de la losa inferior. Situación y dirección de los apoyos de los vanos 18-26.	48
4.13. Puntos para cálculo de resultados. Vanos sobre el arco.	50
4.14. Primer modo de vibración, de flexión acoplada de arco (0.5638 Hz).	57
4.15. Segundo modo de vibración, de flexión acoplada de arco (0.68771 Hz).	58
4.16. Tercer modo de vibración, de flexión acoplada de arco (1.1718 Hz).	59
4.17. Modo de vibración nº 7 (2.0154 Hz).	60
4.18. Modo de vibración nº 46 (6.1468 Hz).	61
4.19. Modo de vibración nº 72, torsión en vanos sobre el arco (6.4461 Hz).	62
4.20. Modo de vibración nº 75, torsión en vanos sobre el arco (6.4547 Hz).	63
4.21. Modo de vibración nº 208 (8.2072 Hz).	64

4.22. Envoltentes de aceleración en puntos del vano 12 (sobre el arco).	67
4.23. Envoltentes de aceleración en puntos del vano 13 (sobre el arco).	67
4.24. Envoltentes de aceleración en puntos del vano 14 (sobre el arco).	68
4.25. Envoltentes de aceleración en puntos del vano 15 (sobre el arco).	68
4.26. Envoltentes de aceleración en puntos del vano 16 (sobre el arco).	69
4.27. Envoltentes de aceleración en puntos del vano 17 (sobre el arco).	69
4.28. Envoltentes de aceleración en puntos exteriores al arco (vanos 1-10).	70
4.29. Envoltentes de aceleración en puntos exteriores al arco (vanos 11,18-26).	70
4.30. Envoltentes de aceleración en el punto 33 (vano 15)	71
4.31. Envoltentes de aceleración en el punto 91 (centro del vano 25)	71
4.32. Envoltentes de desplazamiento en puntos del vano 12 (sobre el arco).	72
4.33. Envoltentes de desplazamiento en puntos del vano 13 (sobre el arco).	72
4.34. Envoltentes de desplazamiento en puntos del vano 14 (sobre el arco).	73
4.35. Envoltentes de desplazamiento en puntos del vano 15 (sobre el arco).	73
4.36. Envoltentes de desplazamiento en puntos del vano 16 (sobre el arco).	74
4.37. Envoltentes de desplazamiento en puntos del vano 17 (sobre el arco).	74
4.38. Envoltentes de desplazamiento en el punto 64 (primer cuarto del vano 15, sobre el arco)	75

CAPÍTULO 1

Introducción, objetivos y metodología

1.1. Introducción

1.1.1. Motivación y problemática existente

La alta velocidad es uno de los campos de la ingeniería de mayor interés en Europa. Su entrada se produjo en el año 1981 con la primera línea de TGV francés, aunque en España se produjo años después, el 21 de abril de 1992, con la salida del primer AVE desde la estación de Atocha de Madrid a Sevilla. España cuenta actualmente con más de 2600 Km de líneas de alta velocidad en servicio, siendo la primera de Europa y segunda del mundo en número de kilómetros con altas prestaciones

Gracias a la alta velocidad, el tren vuelve a ser protagonista del transporte, ofreciendo un nivel de confort superior incluso a los del avión. Además, ha cambiado el concepto de largo recorrido ya que se reduce significativamente el tiempo de transporte para viajeros y mercancías.

Esta apuesta por el ferrocarril ha quedado patente en los últimos planes de infraestructuras entre los que destacan.

- Plan de infraestructuras 2000-2007: es el primer plan que apuesta por una mayor inversión en ferrocarril, como transporte de futuro, frente a la carretera con la ejecución de importantes obras como los 560 Km hasta Lérida, de la línea Madrid-Barcelona-frontera francesa y otras obras importantes como las líneas Córdoba-Málaga o Madrid-Valladolid.
- El Plan Estratégico de Infraestructuras del sector del Transporte 2005-2010: aunque sustituye al PIT 2000-2007 impulsado por el gobierno anterior, sigue apostando por la alta velocidad, destinando un 42,82 % de su inversión global (241.392 millones) a actuaciones en ferrocarril.
- Plan de Infraestructuras, Transporte y Vivienda 2012-2024: sigue otorgando prioridad al modo ferroviario, al fomento del transporte ferroviario de mercancías y a la culminación de los grandes ejes ferroviarios de alta velocidad. El transporte ferroviario acumula el 44 % (61.302 millones) de los recursos inversores del horizonte temporal del PITVI siguiendo la tendencia de los últimos años.

Entre otras variables importantes para el diseño de un puente de ferrocarril destacan los efectos dinámicos, derivados de la alta velocidad. Estos efectos dinámicos producen un incremento, respecto a la respuesta estática, de las deformaciones y esfuerzos soportados por la estructura, pudiendo generar desplazamientos o aceleraciones nocivas para la estructura o comprometiendo la seguridad de circulación o el confort del viajero. Esto ocasiona que el análisis dinámico sea un gran condicionante del diseño en puentes de ferrocarril y que sea necesario un análisis dinámico exhaustivo, de ahí la motivación de este documento.

Con la aprobación de la Instrucción española de acciones a considerar en puentes de ferrocarril IAPF-07 [1], se establecen limitaciones dinámicas muy fuertes a cumplir en aceleraciones verticales, alabeos, flechas y giros máximos en el tablero de puentes de vía con balasto.

Además de unas cada vez mayores exigencias para este tipo de estructuras, se suma como dificultad que los métodos clásicos de resolución del problema de cargas móviles en el cálculo dinámico empiezan a estar obsoletos. Los métodos paso a paso han sido los más utilizados hasta el día de hoy, entre los que podemos destacar el método de Newmark-Beta.

Los problemas presentados por esta metodología se resumen en que los resultados obtenidos son aproximaciones en el dominio del tiempo, con lo cual aparecen errores inherentes a tal formulación. Por lo tanto, para obtener soluciones suficientemente aproximadas se necesitan pasos de tiempo muy pequeños, ocasionando a su vez un gasto numérico inconcebible o simplificaciones que restan realidad a los resultados.

El método de cálculo semianalítico [2], autoría del director de éste Trabajo Final de Máster y ya empleado en informes de estructuras reales, no emplea una aproximación dominio temporal, lo que le permite realizar los barridos de trenes impuestos por la Instrucción de una manera precisa, además de disminuir abismalmente los tiempos de cálculo respecto a los métodos antecesores. El método semianalítico se convierte pues en un procedimiento ideal para el propósito de este proyecto, dar un enfoque práctico al cálculo dinámico de esta tipología concreta de puentes arco, de especial interés en este campo, desde un punto de vista ingenieril, puesto que permite la reducción del canto del tablero y puesto que, dada su gran esbeltez y bajo amortiguamiento, el problema dinámico será especialmente limitante en su diseño. Por otro lado, el estudio desarrollado pretende completar así el conocimiento respecto a esta tipología de puentes puesto que no existen demasiados estudios en profundidad al respecto en términos de respuesta dinámica al paso de las cargas impuestas por la Instrucción.

1.1.2. Particularidades de la tipología de puentes arco.

Comportamiento estructural y realizaciones existentes

La sección tipo cajón resulta óptima para hacer frente a los esfuerzos de flexión y torsión que solicitan a los tableros del puente, permitiendo la presencia de cargas excéntricas y con ello, de doble vía.

En cuanto al arco, es una estructura que resiste gracias a la forma que tiene. La geometría determina que los esfuerzos que lo solicitan sean casi exclusivamente de compresión, con la introducción de una componente inclinada en el terreno, por lo que son indicadas para cimentaciones resistentes. Sin embargo, bajo la sobrecarga de utilización, se producen tanto compresiones como flexiones.

En las estructuras conjuntas arco-tablero se dota al tablero de una rigidez suficiente para controlar las flexiones que producirán en el arco por la acción de la sobrecarga. El Viaducto sobre el Tajo en el embalse de Alcántara es un ejemplo de puente tipo Maillart en el que se disminuye la rigidez del arco aumentando la del tablero. Dicho de otro modo, el arco delgado es el antifunicular de la carga uniforme y es el tablero el encargado de resistir las flexiones que produce la sobrecarga.

En cuanto a las realizaciones llevadas a cabo según esta tipología estructural en el campo de la alta velocidad, a nivel nacional, son aún escasas. No obstante, entre ellas podemos destacar el Viaducto de Contreras, que salva el embalse del mismo nombre, constituye uno de los elementos más emblemáticos de las obras de construcción de la línea de alta velocidad Madrid-Valencia.

1.2. Objetivos.

Los objetivos del presente proyecto se resumen en los siguientes puntos:

1. Desarrollo de una metodología que permita el análisis dinámico de puentes arco para el paso del ferrocarril de alta velocidad. Para ello, se utilizará el método semianalítico [2], autoría del director de este Trabajo Fin de Máster, tras verificar las ventajas de éste frente a los métodos tradicionales.
2. Conocimiento del tratamiento establecido por la normativa vigente (IAPF-2007 [1]) para el cálculo dinámico de estructuras de este tipo, estableciendo las variables necesarias para el análisis.
3. Cuantificación, con estas variables, de los problemas específicos de esta tipología en modelos 2D y 3D creados a este fin, destacando como inconvenientes:
 - a) La necesidad de una esbeltez estética para la estructura, que propicia modos acoplados de arco-tablero de baja frecuencia.
 - b) La aparición de modos de torsión acoplados a los efectos de flexión cuando un solo tren cruce la estructura, observables sólo en un modelo tridimensional.
4. Validación de una estructura existente a partir de un análisis dinámico completo, analizando qué variantes a introducir en el diseño o no influyendo sobre él, permiten una mayor aminoración de los efectos resonantes.

1.3. Metodología.

La metodología a seguir será la siguiente:

1. Revisión del estado del arte en lo relativo a soluciones para el paso de carga móvil en puentes arco de esta tipología.
2. Desarrollo del modelo de viga de Henchi en 2D con el objetivo de calibrar y demostrar las ventajas del método semianalítico frente a los métodos tradicionales.
3. Creación y validación del modelo tridimensional de la estructura mediante el software SAP2000, en el cual, se realiza el análisis modal.
4. Análisis dinámico exhaustivo de la estructura mediante el método semianalítico, estableciendo todas las variables que influyen o no sobre el diseño, permiten un mejor comportamiento dinámico.

CAPÍTULO 2

Revisión del estado de arte

2.1. Tratamiento normativo del problema dinámico

2.1.1. Introducción

El presente apartado se centra en la definición de los métodos actuales con los que se aborda el problema dinámico en base a la normativa actual española de acciones a considerar en puentes de ferrocarril, IAPF-2007 [1] :

Cualquiera que sea el método de evaluación de los efectos dinámicos, la envolvente de las solicitaciones dinámicas máximas obtenidas se caracterizarán mediante el coeficiente de impacto Φ , encargado de mayorar las solicitaciones correspondientes al cálculo estático.

$$\Phi = \frac{\max S_{din,real}}{S_{est,tipo}} \quad (2.1)$$

Donde:

- $\max S_{din,real}$: Solicitación dinámica máxima debida a todos los posibles trenes reales y velocidades de circulación.
- $S_{est,tipo}$: Solicitación estática debida al tren UIC71, definido en el apartado 2.3.1.1 de [1], situado en la posición más desfavorable.

2.1.2. Método disponibles para el cálculo dinámico y ámbito de aplicación

Método 1. Cálculo estático y coeficiente de impacto envolvente:

Por este método, los esfuerzos dinámicos máximos producidos por los trenes reales, se obtendrán multiplicando los esfuerzos estáticos correspondientes al tren UIC71 (sistema del eurocódigo [3]), por un coeficiente de impacto envolvente (definido por las expresiones B.5 y B.6 de la instrucción [1], basada en los trenes de [4]).

El coeficiente de impacto Φ calculado por este método simplificado representa una envolvente de solicitaciones obtenida en un conjunto amplio de puentes y elementos estructurales reales, lo que limita su aplicación al ámbito que ha servido de base para su elaboración. En consecuencia, sólo será aplicable si cumplen todas las condiciones siguientes:

- Velocidades de circulación $v \leq 220$ Km/h.
- Estructuras de tipología convencional definidas en los cuadros B.2 hasta B.5 de [1].
- Frecuencia propia de flexión del puente f_0 dentro de los límites de la figura B.1 de [1]

En este ámbito de aplicación se admite que no se producen fenómenos resonantes y que las aceleraciones no superan los límites admisibles.

Método 2. Coeficiente de impacto para trenes reales:

Mientras que el método anterior proporcionaba un único coeficiente de impacto envolvente para todos los trenes y velocidades de circulación, por este método se obtienen los coeficientes de impacto de los trenes reales que sirvieron de base para calcular dicha envolvente, proporcionando así un mejor ajuste de la realidad.

Aplicable también para velocidades de circulación $v \leq 220$ Km/h y no siendo necesario que se cumplan los límites de frecuencias exigidos en el método anterior, podemos optar por el uso de una de estas dos opciones:

- Expresiones analíticas definidas en B.2 a B.5 de la Instrucción [1], sólo aplicable a las tipologías convencionales recogidas en los cuadros B.2 a B.5 de la misma. Se admite en este ámbito que no se producen fenómenos resonantes y que las aceleraciones no superan los límites admisibles.
- Obtención de los coeficientes de impacto mediante cálculo dinámico con trenes reales definidos en el apéndice C.3 [1], pudiéndose emplear para el cálculo alguno de los métodos que se describirán a continuación:
 1. Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles.
 2. Cálculo dinámico simplificado mediante impronta dinámica del tren.
 3. Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con interacción vehículo-estructura.

Método 3. Cálculo estático con coef. de impacto envolvente extendido a otras estructuras no resonantes:

Este método proporciona una envolvente de los trenes reales definidos en el apartado C.2 de la instrucción [1]. Es válido para cualquier rango de velocidades pero posee grandes restricciones en cuanto a masas, cocientes de velocidad y frecuencias y longitudes de vano por lo que será aplicable en pocos casos.

Si la estructura satisface los límites dados en el cuadro B.6 de tal instrucción, se podrá obviar el cálculo dinámico por un cálculo estático con el tren UIC71 afectado por su correspondiente coeficiente de impacto envolvente (primer método de aplicación). Esto incluirá los fenómenos resonantes normales que puedan afectar a este tipo de estructuras.

Método 4. Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles:

Este método se basa en la caracterización de los trenes como cargas móviles y la resolución en el tiempo del problema dinámico de la estructura, bajo dichas cargas. Es válido para cualquier rango de velocidades, no posee limitaciones de frecuencias ni de masas mínimas y puede aplicarse tanto a puentes isostáticos e hiperestáticos.

El proceso se basa en determinar las situaciones de carga más desfavorables (envolventes), simulando el paso de los trenes a las distintas velocidades de paso previsibles, desde la mínima de

20 Km/h, hasta $1.2 \cdot V$, siendo V la velocidad de proyecto de la vía. El incremento de velocidades entre cada paso será de un máximo de 10 Km/h. Para dicho cálculo se utilizará el modelo HSLM (High Speed Load Model) definido en el Eurocódigo [3] y en el apéndice C.1 de la instrucción [3], para líneas interoperables. Finalmente, el coeficiente de impacto se determinará mediante la siguiente expresión:

$$\Phi = \frac{\delta_{din,real}^{ideal}}{S_{est,tipo}} \cdot (1 + r\varphi'') \quad (2.2)$$

Siendo:

- φ'' , coeficiente que tiene en cuenta el efecto de las irregularidades de la vía, definido por la expresión B.12 de la Instrucción, [1].
- r , coeficiente definido por la expresión B.12 de la Instrucción,[1].

Método 5. Cálculo dinámico simplificado mediante la impronta dinámica del tren:

Permite evaluar los efectos dinámicos sin realizar un cálculo dinámico con integración en el tiempo, resultando considerablemente más sencillo que la realización de un cálculo dinámico directo. La respuesta dinámica máxima se obtiene como producto de dos funciones que tienen expresión analítica, la impronta específica de cada tren y la línea de influencia dinámica del puente. Para ello existen dos métodos de cálculo, DER y LIR. Una documentación más detallada de éstos se pueden encontrar en los documentos del ERRI (Instituto Europeo de Investigación Ferroviaria) [5], o de forma más práctica en la referencia [6]. Aunque válido para cualquier rango de velocidad y sin limitaciones de frecuencias ni masas mínimas, este proceso tiene el inconveniente de que solo es aplicable a puentes isostáticos salvo casos especiales.

Método 6. Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con interacción vehículo estructura:

Los modelos de cargas móviles consideran que las cargas que transmiten las ruedas a los carriles son constantes en el tiempo y de valor igual a la carga nominal. En la realidad esta acción es variable debido, entre otros factores, a la suspensión de los vehículos. La consideración de los mecanismos de suspensión y la inercia de las masas suspendidas y no suspendidas conducen a los modelos con interacción entre vehículos y estructura. La utilización de éste método puede ser de utilidad para afinar el cálculo en alguna situación especial de proyecto, o bien como parte de un trabajo de investigación. Salvo casos excepcionales, estos modelos resultan de una complejidad excesiva para cálculos ordinarios de proyecto. Las solicitaciones obtenidas por este método suelen ser inferiores debido a que parte de la energía permanece en los propios vehículos, siendo la diferencia más acusada en puentes isostáticos de luces cortas, con reducciones de más de un 30% de los efectos dinámicos máximos. En puentes hiperestáticos o situaciones no resonantes, sin embargo, los efectos de interacción, no suelen ser determinantes, por lo que puede prescindirse de estos.

Analizadas las características principales de cada método, se presenta el siguiente cuadro a modo de resumen:

Método	Velocidad	¿Cálculo dinámico? ¿Efectos resonantes?	Otras Limitaciones
1. Coeficiente de impacto envolvente	$v \leq 220$ Km/h	No hay necesidad de análisis dinámico. Un coeficiente de impacto. No se producen fenómenos resonantes ni es necesaria la comprobación de aceleraciones	Puentes isostáticos limitados a tipologías convencionales recogidas en la instrucción [1]. Limitada la primera frecuencia propia de flexión f_0
2. Coeficiente de impacto para los trenes reales: 2.1. Mediante expresiones analíticas. 2.2. Mediante cálculo dinámico con trenes reales	$v \leq 220$ Km/h	No hay necesidad de análisis dinámico. Varios coeficientes de impacto. No se producen fenómenos resonantes ni es necesaria la comprobación de aceleraciones. 2.2. Análisis dinámico con trenes del apéndice C.3 de la instrucción [1]	2.1. Puentes isostáticos limitados a tipologías convencionales recogidas en la instrucción [1]. 2.2. Puentes isostáticos sin limitación. Empleo de los métodos 4, 5 o 6 para el cálculo dinámico
3. Cálculo estático con coeficiente de impacto envolvente extendido a otras estructuras no resonantes	Cualquier rango de velocidades	Análisis dinámico con trenes del apéndice C.2 de la instrucción [1]. Puede obviarse el cálculo dinámico y aplicar el método 1 si se satisfacen condiciones. Tiene en cuenta fenómenos resonantes	Aplicable en ciertas estructuras con unos rangos de masas, cocientes de velocidades y longitudes de vano del puente determinados
4. Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles	Cualquier rango de velocidades	Análisis dinámico con trenes del apéndice C.1 de la instrucción [1]. Objetivo de interoperabilidad. Tiene en cuenta fenómenos resonantes	No hay limitaciones de frecuencias mínimas. No hay limitación respecto a tipologías (válido para puentes isostáticos e hiperestáticos).
5. Cálculo dinámico simplificado mediante la impronta dinámica del tren	Cualquier rango de velocidades	El cálculo dinámico se simplifica y no exige la resolución en el tiempo, utiliza fórmulas analíticas. Tiene en cuenta fenómenos resonantes	No hay limitaciones de frecuencias ni masas mínimas. Aplicable sólo para puentes isostáticos.
6. Cálculo dinámico simplificado mediante integración directa en el tiempo con interacción vehículo-estructura	Cualquier rango de velocidades	Análisis dinámico con trenes del apéndice C.1 de la instrucción [1]. Las cargas por eje de los vehículos son también variables. Tiene en cuenta fenómenos resonantes	No hay limitaciones de frecuencias ni masas mínimas. No hay limitación respecto a tipologías (válido para puentes isostáticos e hiperestáticos). Cálculos más complejos y a veces innecesarios.

Cuadro 2.1: Métodos de cálculo dinámico publicados en la instrucción IAPF-2007.

2.1.3. Método recomendado por la IAPF-2007 para el caso práctico. Limitaciones de la instrucción.

Como se verá más adelante, el caso práctico consta de una estructura hiperestática de 26 vanos con 2 vanos de 45 m, 2 vanos de 57 m, 6 vanos de 54 m y 16 vanos de 60 m.

Partiendo de la base de que la tipología de estudio no se encuentra recogida en las tablas B.2 a B.5 de la Instrucción [1] como tipología convencional así como el hecho de que la estructura del caso práctico es hiperestática, dan lugar a una reducción considerable del número de métodos que pueden utilizarse, quedando a disposición únicamente:

- Método 4: Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles.
- Método 6: Cálculo dinámico simplificado mediante integración directa en el tiempo con interacción vehículo-estructura.

Debido al grado de complejidad que los modelos de interacción vehículo-estructura introducen y al hecho de que en puentes hiperestáticos los efectos de interacción no sean determinantes en el cálculo, se descarta la utilización de este método aunque el ajuste de la respuesta sea ligeramente más afinado. Se opta, pues, por la utilización del método 4: *Cálculo dinámico mediante integración directa en el tiempo con cargas móviles.*

El caso de puentes de dos o más vías queda contemplado también en la instrucción [1], indicando que a partir de $v \geq 220 \text{ Km/h}$ bastará considerar en el cálculo el paso de un tren por una única vía, que será la que resulte más desfavorable. esto permitirá en el caso práctico, la excitación de modos torsionales, motivación de este estudio.

Este documento pretende revelar elementos de la actual instrucción [1] que limitan los análisis dinámicos y que deben revisarse, evitando la validación dinámica de estructuras que en realidad no cumplen los límites. La instrucción exige en el cálculo dinámico un incremento de velocidades entre cada paso de un máximo de 10Km/h, valor obsoleto, debido principalmente al avance en precisión y tiempos de cálculo de las nuevas metodologías, como es el caso del método semianalítico [2]. El caso práctico del presente documento aplicará un incremento de velocidades entre cada paso de 1 Km/m utilizando éste método, manifestando el hecho de que una diferencia de 10 Km/h puede obviar resultados importantes así como velocidades en las que puedan darse resonancias o máximos en aceleraciones, decantando la balanza de forma equivocada hacia un resultado favorable.

Otro tema a valorar, es el amortiguamiento tan bajo impuesto por la instrucción [1], debido a la falta de base de datos respecto a los puenets construidos en esta tipología. Así se pueden ver en la siguiente tabla:

Tipo de puente	Luz L(m)	Limite inferior de amortiguamiento ζ [%]
Puentes de acero y mixtos	$L < 20$	$0,5 + 0,125(20 - L)$
	$L \geq 20$	0,5
Puentes de hormigón estructural	$L < 20$	$2,0 + 0,1(20 - L)$
	$L \geq 20$	2,0

Cuadro 2.2: Valores de amortiguamiento ζ [%] para diversas tipologías de puentes en función de la luz L(m). Instrucción IAPF-2007

2.2. Solución al problema de cargas móviles

2.2.1. Trabajos y publicaciones sobre soluciones al problema de cargas móviles en puentes.

El problema dinámico del paso de cargas móviles es de gran interés en el campo del diseño de puentes de ferrocarril y puentes carreteros. Dicho problema, consiste en la idealización del vehículo como un conjunto de cargas concentradas constantes que se desplazan sobre una línea de carga con velocidad constante. Este análisis se puso de manifiesto tras los primeros problemas de desestabilización de balasto ocurridos en algunas líneas europeas, que fueron estudiadas por Frýba[9] y Mancel [10], los cuales declararon la existencia del posible problema con las resonancias.

Con el tiempo, se ha tratado el problema dinámico a través de soluciones aproximadas pudiéndose obtener únicamente soluciones exactas para algunos casos concretos, como en los trabajos de Bleich[11] y Kryloff [12] para estructuras isostáticas (véanse también los trabajos mostrados en los libros de Frýba [3], Li y su [14] o Yang et al [15]). En el caso de estructuras hiperestáticas, el número de trabajos es inferior, pudiéndose destacar entre ellos los trabajos de Chen y Li [16] para cargas exponenciales muy concretas, el trabajo de Hayashikawa y Watanabe [17] que idealizan vigas de canto variable mediante vigas de canto constante a tramos o la aportación de Henchi et al [18] que obtiene la solución en el dominio de la frecuencia.

Para una carga general sobre una estructura genérica, la técnica acude al método de integración paso a paso, "Step-by-Step", (véanse en el libro de Clogh y Penzien [19]), y en particular, como método más difundido, el método de integración Newmark-Beta [20].

De entre los numerosos estudios dinámicos, el artículo sobre el viaducto de Sesia de K.Liu et al.[8] merece mencionarse pues presenta un estudio en el que se aborda la interacción vehículo-estructura sobre puentes de alta velocidad mediante integración directa Newmark-Beta. Además, el artículo incluye mediciones in situ tras la construcción del viaducto y ha obtenido conclusiones interesantes respecto al amortiguamiento de este tipo de estructuras.

El problema de la metodología de integración directa es que al fin y al cabo, se trata de una aproximación en el dominio del tiempo mediante el parámetro del paso temporal, de modo que para obtener soluciones suficientemente aproximadas dada la baja tasa de amortiguamiento impuesta por la instrucción [1], se necesita de pasos de tiempo muy pequeños con el gasto numérico que eso conlleva.

Como solución a este problema aparecen diversas referencias como el artículo de Dugush y Eisenberg [27] en el que se propone una descripción de los modos de vibración mediante series polinómicas infinitas. De este modo, la parte espacial se resuelve de forma exacta mediante el método de la rigidez dinámica y la solución temporal es analítica correspondiendo así a una serie infinita.

Otro método es el denominado semianalítico y propuesto por Castro et al. [28],[2],[29] y [30], en la Universidad de Granada. Esta metodología se basa en la resolución espacial mediante discretización por elementos finitos y una resolución analítica en el dominio del tiempo, por lo cual desaparecen todos los errores inherentes a la aproximación en el tiempo de los métodos paso a paso. Este método semianalítico, ha sido reconocido por la comunidad científica y aplicado con gran éxito en el diseño

del puente de Santa Ana, puente arco de de la línea de Córdoba-Málaga [31].

2.2.2. *Métodos de integración en el dominio del tiempo. Planteamiento teórico.*

La solución al problema dinámico que se plantea en el problema de paso de cargas móviles se resuelve de forma numérica mediante dos metodologías:

- *Métodos indirectos:* Son los métodos que aplican el principio de superposición y por lo tanto sólo son aplicables para comportamiento lineal de la estructura. el más conocido es el método de superposición modal, el cual resuelve el problema mediante integración temporal de las ecuaciones modales, separando variable espacial y temporal. Requiere de métodos paso a paso (directos) para la resolución numérica de la integral temporal, de ahí que se utilicen directamente estos últimos por su mayor versatilidad.
- *Métodos directos:* Son los métodos más generales, pues permiten no linealidades en la estructura. Consisten en la integración directa de las ecuaciones de equilibrio para todos los grados de libertad de la estructura en cada instante. Entre los más ampliamente usados se encuentran los métodos paso a paso de Newmark-Beta, Hughes, el método de Wilson y otros mucho más que se han ido añadiendo a la bibliografía (los principales métodos numéricos se encuentran más ampliamente desarrollados en las referencias [20],[32],[33] y [34]). Aunque requieren de un mayor esfuerzo de cálculo son más utilizados que los anteriores.

Los métodos paso a paso

Los métodos paso a paso tienen numerosas variantes, pero todos ellos se basan en definitiva en dividir la carga dinámica y la respuesta del sistema en una serie de "pasos" calcular la respuesta en cada "paso" a partir de las condiciones iniciales al principio del mismo. La respuesta en cada "paso" se obtiene con un análisis independiente del resto de casos, asumiendo como aproximación que en ese "paso" el sistema se mantiene lineal aunque las propiedades en el conjunto del sistema van variando.

La ecuación de partida para un algoritmo de integración temporal de primer orden, o problema de Cauchy, viene dada por:

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), y(y_0) = y_0; t \in [t_0, t_f] \quad (2.3)$$

No obstante, para aproximar la dinámica de una estructura general se deberá acudir a algoritmos de integración temporal de segundo orden que se pueden expresar en forma compacta de la siguiente forma:

$$M \cdot \ddot{w} = F(w, \dot{w}, t) \quad (2.4)$$

Donde el vector F y la matriz M son, en general, funciones no lineales de (w, \dot{w}, t) . Para poder trabajar métodos de primer orden, se puede reconvertir el sistema anterior a través del siguiente cambio:

$$y = \frac{w}{\dot{w}} \rightarrow \dot{y} = \frac{\dot{w}}{M^{-1} \cdot F(w, \dot{w}, t)} = F(t, y(t)) \quad (2.5)$$

Un método numérico de integración temporal determina la solución al problema dinámico en un instante dado a partir de la información obtenida en una serie de instantes previos. De este modo, para cada instante t_n obtenemos un valor de y_n ($n=0,1,\dots,N$) a partir del conocimiento del valor de la misma en los k instantes anteriores:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \cdot \Phi(y_{n+k}, y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, \dots, y_n, t_{n+k}; h_{n+k}) \quad (2.6)$$

En la ecuación 2.6 se recogen todos los métodos de integración posibles. Aunque se establecen numerosas variantes en función de los parámetros utilizados, como por ejemplo: "*métodos de un paso y multipaso*" si se obtiene la respuesta a partir de la información de un paso o de varios pasos anteriores o "*métodos de paso fijo y de paso variable*" si se utiliza un único o varios valores de paso de integración a lo largo de todo el proceso, los métodos paso a paso suelen clasificarse en dos grupos principales:

- *Métodos explícitos:*

Los métodos explícitos usan la ecuación diferencial en un tiempo t_{n+1} para predecir una solución en $t_n + \Delta t_n$. La particularidad de este esquema es que la expresión 2.6 permite despejar y_{n+k} conocidos los valores anteriores, y_{n+j} , $j = 0, 1, \dots, k - 1$.

Se conoce que todos los métodos explícitos son condicionalmente estables con respecto al tamaño del incremento de tiempo, de modo que para el cálculo de una estructura real, se requiere de muy pequeños incrementos de tiempo para obtener una solución estable.

Como ejemplos de un esquema de integración explícito, se pueden citar los métodos de Runge-Kutta explícitos cuya formulación es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi_n(y_n, h_n); n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.7)$$

- *Métodos implícitos*

Los métodos implícitos satisfacen la ecuación diferencial en un tiempo t_n después de que la solución en $t_n - \Delta t_n$ haya sido encontrada. A diferencia de los esquemas explícitos, ahora no es posible despejar y_{n+k} de la ecuación 2.6 una vez que conocemos y_{n+j} , $j = 0, 1, \dots, k - 1$, de modo que se deberá resolver un sistema de ecuaciones lineales en cada paso. Sin embargo, en estos algoritmos es posible usar incrementos de integración mayores al anterior, pudiendo ser condicional o incondicionalmente estables. Para los métodos que son incondicionalmente estables la única limitación para el tamaño del incremento del tiempo es la precisión de la solución.

Como ejemplo, citar el método de Adams implícito de un paso conocido como la regla de los trapecios y es de la forma:

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\Delta t_n}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})) \quad (2.8)$$

También se introduce en esta categoría el método más utilizado actualmente, el método de Newmark-Beta, desarrollado más extensamente en el apéndice A.

2.2.3. *Limitaciones de los métodos paso a paso.*

La metodología paso a paso se basa en una integración numérica de tipo incremental en el dominio del tiempo, condición que no es sino una aproximación de dicho dominio a través del parámetro de paso de tiempo. En estructuras reales, estos métodos se alejan de ser aplicables desde un punto de vista práctico pues para que la respuesta sea realista, se requiere de pasos de tiempo muy pequeños lo que conduce a costes numéricos desproporcionados o excesivas simplificaciones que restan validez a los modelos. La baja tasa de amortiguación impuesta por la instrucción [1] para las estructuras mixtas se suma como problema pues la solución requiere de pasos de tiempo más pequeños todavía en comparación con otras estructuras existentes.

Estos problemas no se dan con el método semianalítico pues elimina la aproximación en el dominio temporal y no da resultados en forma de series infinitas. Aunque sigue existiendo una aproximación numérica derivada del modelo espacial mediante elementos finitos, los resultados son los más fiables y rápidos de entre los métodos actuales posibles. Por ello en el presente documento, se ha optado por el empleo de esta metodología semianalítica en todos los cálculos llevados a cabo tras contrastar ésta con las metodologías clásicas de integración directa en dos ensayos numéricos presentados en el siguiente capítulo.

2.3. **Puentes Arco para el Ferrocarril de Alta Velocidad. Caso del Viaducto sobre el Tajo.**

La Línea de Alta Velocidad Madrid-Extremadura tiene una longitud total de 450 Km, con una inversión prevista de 2713 millones de euros para los tramos encomendados a Adif. El trazado se ha diseñado como doble vía electrificada en alta velocidad en ancho internacional (UIC) para velocidades máximas de 350 Km/h para tráfico mixto de trenes de viajeros y mercancías en todo el recorrido.

El tramo Talayuela-Cáceres tiene una longitud de 127.5 Km y discurre íntegramente por la provincia de Cáceres.

Sin lugar a dudas, en este tramo destaca la construcción del viaducto para salvar el río Tajo, en una zona donde dicho río, debido a la influencia del embalse de Alcántara, presenta un ensanchamiento del cauce.

Para salvarlo, sin pilas intermedias sobre el río, atendiendo a los condicionantes expresados en la correspondiente Declaración de Impacto Ambiental, se ha resuelto mediante un gran arco de hormigón de 324 m de luz entre los apoyos situados fuera del embalse.

El viaducto tiene una longitud total de 1488 m. La distribución de luces del viaducto viene influenciada por el salto del Río Tajo, fragmentándose el tablero sobre el arco en seis vanos de 54 m. Lo

vanos de acceso se plantean de 60 m, intercalándose entre ellos dos vanos de transición, uno a cada lado del arranque del arco, de 57 m. Esto da lugar a una distribución de luces armoniosa y adecuada de los 26 vanos, que es la siguiente: 45 m + 9x60 m + 57 m + 6x54 + 57 m + 7x60 m + 45 m.

El trazado del viaducto presenta una primera parte sobre una curva de gran amplitud y el resto del puente queda inscrito en una recta.

El elemento más emblemático de este viaducto es el arco de 324 m de luz entre apoyos, elevándose sobre sus cimentaciones una altura de 70 m (flecha del arco) y sobre el nivel máximo de embalse una altura superior a los 80 m.

El arco está formado por una sección rectangular achaflanada hueca, tipo cajón de canto variable. El arranque del arco tiene un canto de 4 m y una anchura de 12 m. En la clave, punto más alto del arco, la sección se reduce hasta un canto de 3,5 m y 6 m de ancho.

El tablero presenta sección cajón de hormigón pretensado con canto constante de 3.6 m y anchura de 14 m, permitiendo alojar la plataforma de vía doble de 10.10 m de ancho y dos paseos de 1,75 m a cada lado más otros elementos para el buen funcionamiento de la línea del ferrocarril.

El ancho inferior del cajón es de 5 m mientras que la parte superior presenta una anchura de 6.5 m, y se dota de voladizos laterales que completan la anchura total de la sección hasta los 14 m.

Las pilas tienen una altura variable para adaptarse al perfil del trazado, alcanzándose alturas superiores a los 70 m en la zona más cercana al cruce del río. Todas las pilas constan de un único fuste de sección cajón hueca excepto en su cabecero, donde la sección se maciza para recibir las cargas recibidas por el tablero.

Un aspecto a destacar para la construcción de este viaducto es la necesidad de empleo de hormigones de alta resistencia. Tanto para la ejecución del arco como para la parte del tablero situada sobre el mismo se ha previsto la utilización de un hormigón de 700 kg/cm^2 de resistencia característica.

En cuanto a las cimentaciones de arco, pilas de vanos de acceso y estribos, todas ellas se resuelven mediante grandes zapatas sobre el sustrato rocoso para repartir las considerables cargas que han de soportar.

En las figuras 2.1 y 2.2 se presentan el alzado general del viaducto y la sección transversal del tablero.

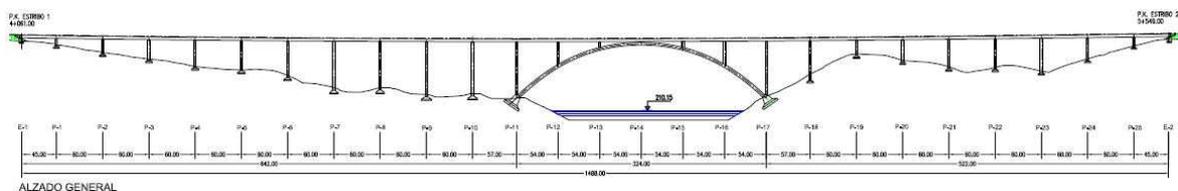


Figura 2.1: Alzado General.

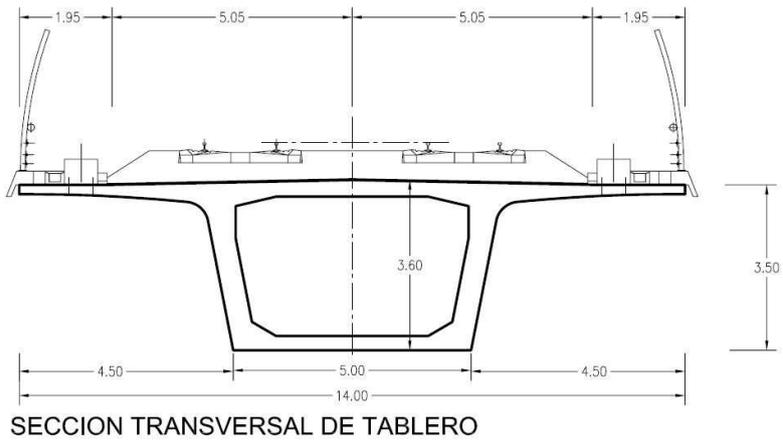


Figura 2.2: Sección transversal del tablero

Las figuras 2.3 y 2.4 muestran el alzado y la planta longitudinal del arco respectivamente.

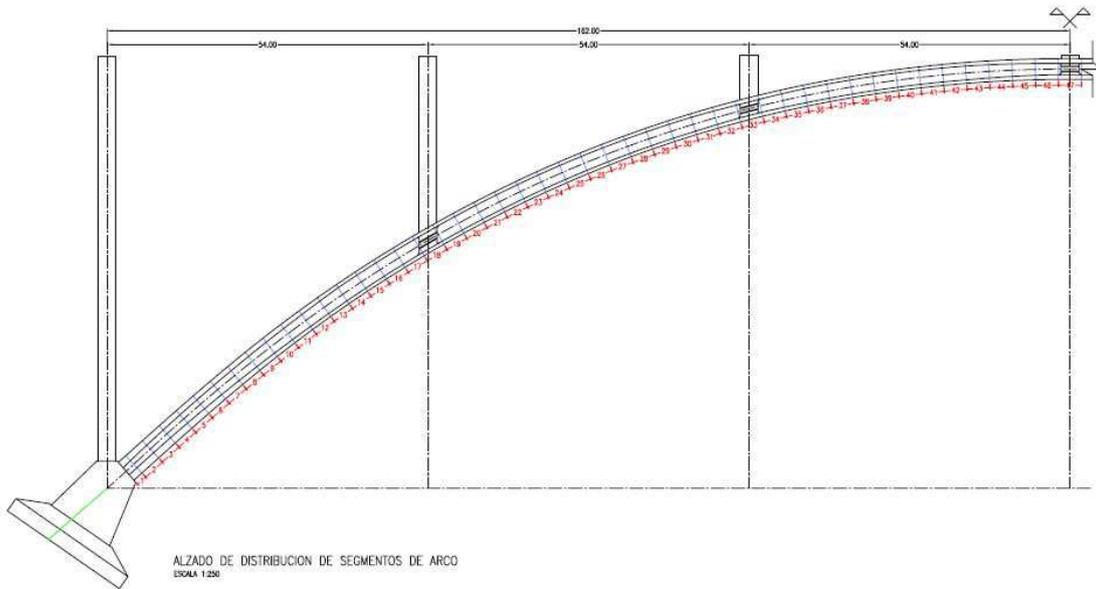


Figura 2.3: Alzado del arco

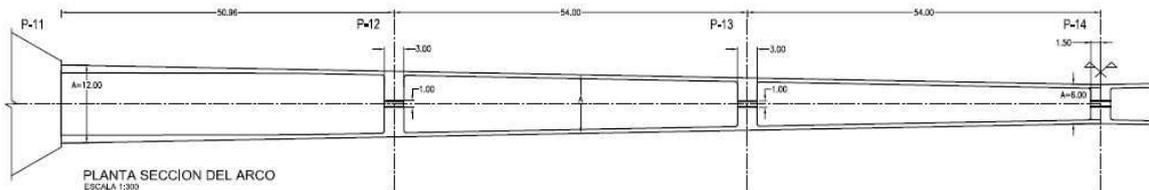


Figura 2.4: Planta del arco

CAPÍTULO 3

Solución Semianalítica para el paso de carga móvil sobre la estructura

3.1. Introducción

El método semianalítico, desarrollado por *A.Martínez-Castro, P.Museros y A.Castillo-Linares*, (*Universidad de Granada*) y publicado en la revista *Journal of Sound and Vibration*[2], basándose en el modelo de viga de Euler-Bernouilli propone una solución al problema de paso de cargas móviles sobre vigas [28] basándose en la superposición modal con discretización de la parte espacial mediante elementos finitos y con soluciones analíticas exactas en la parte temporal. Este método posee una aproximación numérica, procedente de la discretización espacial mediante el modelo de Elementos finitos, no obstante, se eliminan importantes fuentes de error asociadas al paso de tiempo usado en los métodos de integración directa clásicos.

En lo que sigue, se desarrollará la formulación del método así como su aplicación a casos prácticos que, junto con un análisis de los métodos de aproximación paso a paso, nos permitirá comparar ambos métodos en aproximación y tiempo de cálculo. Como quedará patente, esta metodología aventaja en mucho a los métodos tradicionales de integración paso a paso, salvando los problemas de imprecisión y lentitud en el cálculo de estos últimos. En la actualidad, los métodos de integración paso a paso se emplean ampliamente en los proyectos de puentes. No obstante, ante la complejidad de cálculo numérico se supone su aplicación a las exigencias y bajas tasas de amortiguamiento impuestos por la norma IAPF, deberán ser sustituidos irremediamente por en un futuro próximo.

3.2. Formulación del método

Para la formulación del método nos vamos a basar en los siguientes pasos:

1. Obtención de la ecuación de gobierno de una viga de canto variable.
2. Obtención de la formulación matricial de un elemento barra y generalización a toda la estructura.
3. Resolución del sistema.
4. Solución para cada modo de vibración, pues se ha desacoplado el sistema. Introducción de amortiguamiento en el problema.

Paso 1. Ecuación de Gobierno de una viga de sección variable en dinámica.

Se considera una viga de sección variable, sometida a una carga $q(x, t)$ representativa de una fuerza puntual p_0 que se desliza por el eje x de la viga a una velocidad constante v . La función q se puede definir mediante una delta de Dirac según la ecuación 3.1:

$$q(x, t) = p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (3.1)$$

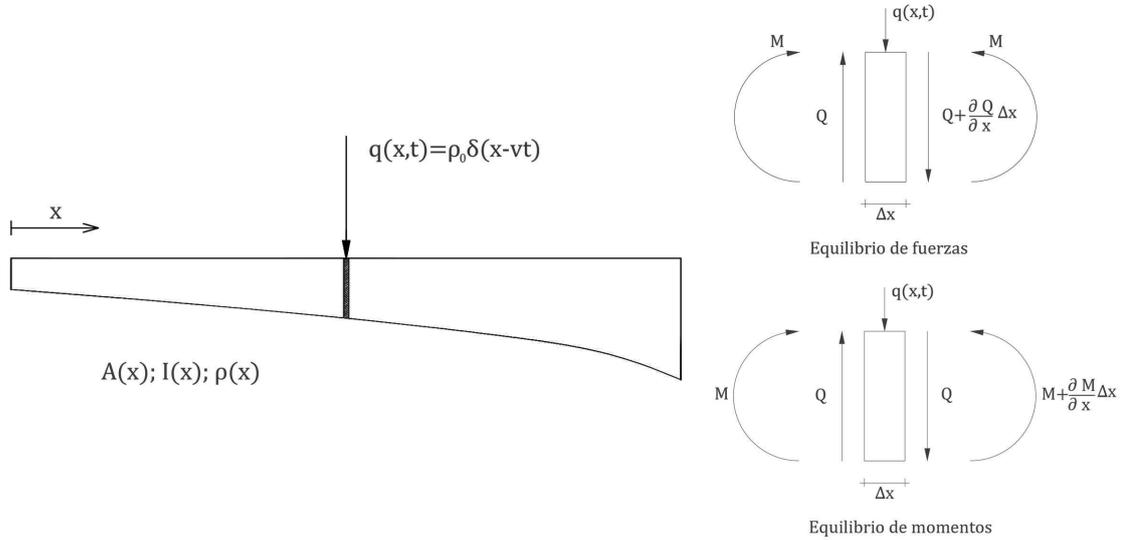


Figura 3.1: Carga móvil sobre viga de sección variable. equilibrio de la rebanada

Planteando el equilibrio en la rebanada mediante el principio de D'Alembert, despreciando, en principio la contribución del amortiguamiento:

- equilibrio de fuerzas:

$$-\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

Donde el término de la derecha de la igualdad de la ecuación es la fuerza de inercia (eliminada en estática) y $\rho(x)$ la densidad lineal de la estructura.

- Equilibrio de momentos:

$$\partial M(x, t) = Q(x, t) \partial x \Rightarrow \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = Q(x, t) \quad (3.3)$$

Si sustituimos 3.3 en 3.2:

$$-\frac{\partial \left(\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \right)}{\partial x} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Como ecuación constitutiva, se adopta la relación lineal momento-curvatura del modelo de viga de Euler-Bernouilli:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{M(x, t)}{EI(x)} \quad (3.6)$$

$$M;0(x, t) = EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

Ecuación que una vez sustituida en 3.5, permite la obtención de la ecuación de gobierno del problema:

$$\frac{\partial EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}{\partial x^2} - p_0 \cdot \delta(x - vt) = \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}] + p_0 \cdot \delta(x - vt) = 0 \quad (3.9)$$

Ecuación diferencial que debemos resolver supuestas condiciones iniciales de reposo:

$$u(s, 0) = 0, \forall x \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \forall x \quad (3.11)$$

Paso 2. Discretización espacial para un elemento barra. Formulación matricial para toda la estructura

Esta subsección va obtener la formulación matricial que rige el comportamiento dinámico de un elemento, formulación necesaria para obtener la formulación matricial acoplada para toda la estructura. Dada una viga de longitud L, según la figura 3.2 sometida a:

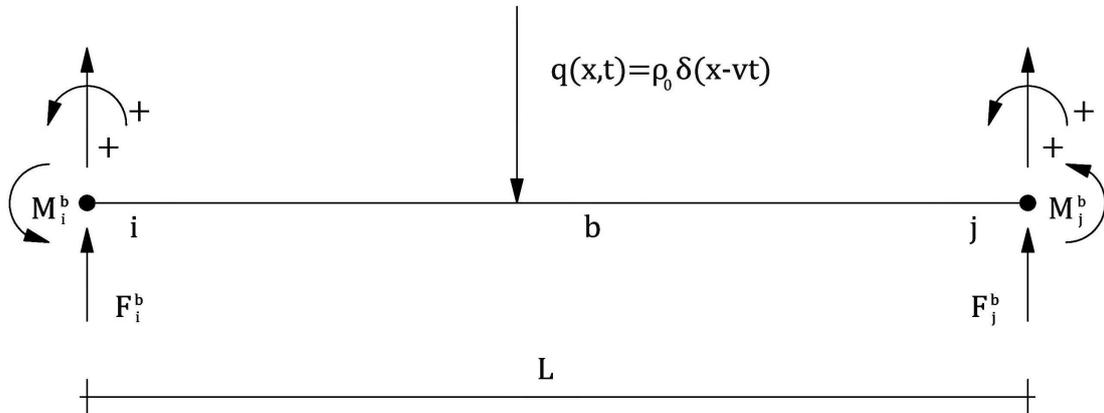


Figura 3.2: Discretización para un elemento barra y criterio de signos.

■ Fuerzas externas:

1. Fuerzas y momentos nodales: Teniendo en cuenta el criterio de signos de la figura 3.2:

$$F_i^b = Q(0, t) \quad (3.12)$$

$$F_j^b = -Q(L, t) \quad (3.13)$$

$$M_i^b = -M(0, t) \quad (3.14)$$

$$M_j^b = M(L, t) \quad (3.15)$$

2. Fuerza puntual:

$$p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (3.16)$$

3. Fuerzas de inercia:

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.17)$$

■ Esfuerzos:

1. Cortantes:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = -p_0 \cdot \delta(x - vt) - \rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.18)$$

Que integrándola ente 0 y $x \in [0, L]$:

$$Q(x, t) = Q(0, t) - \int_0^x p_0 \cdot \delta(\xi - vt) d\xi - \int_0^x \rho(\xi) \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi \quad (3.19)$$

2. Flectores:

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = Q(x, t) \cdot dx \quad (3.20)$$

$$M(x, t) = M(0, t) + \int_0^x Q(\xi, t) d\xi \quad (3.21)$$

A continuación, se pasa a la formulación débil de la ecuación de Euler-Bernouilli de la viga multiplicando la ecuación de gobierno general 3.9 por una función de ponderación espacial, $u^*(x)$ y aplicando integración por partes. En lo que sigue se simplifica la notación para las derivadas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \dot{u}(x, t) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \dot{\dot{u}}(x, t) \quad (3.23)$$

Se multiplica pues, 3.9 por $u^*(x)$:

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) + (u''(x, t) \cdot EI(x))'' = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \quad (3.24)$$

$$\rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) + (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) = -p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) \quad (3.25)$$

Integrando ene l dominio:

$$\int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx =$$

$$= -\int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) dx \quad (3.26)$$

Aplicando doble integración por partes en el segundo sumando del primer término:

$$\int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(x) dx =$$

$$= u^*(x) \cdot (u''(x, t) \cdot EI(x))' \Big|_0^L - \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))' \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} dx =$$

$$= u^*(x) \cdot (u''(x, t) \cdot EI(x))' \Big|_0^L - (u''(x, t) \cdot EI(x)) \cdot \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} \Big|_0^L +$$

$$+ \int_0^L u''(x, t) \cdot EI(x) \cdot \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} dx \quad (3.27)$$

Observando algunos de los sumandos de la expresión anterior se puede identificar fácilmente las expresiones de esfuerzos cortantes y momentos flectores:

$$Q(x, t) = (u'' \cdot EI(x))' \quad (3.28)$$

$$M(x, t) = u'' \cdot EI(x) \quad (3.29)$$

Con lo cual, y teniendo en cuenta las relaciones anteriores, 3.28 y 3.29:

$$(u'' \cdot EI(x))' \cdot u^*(x) \Big|_0^L = Q(L, t) \cdot u^*(x) \Big|_0^L =$$

$$= Q(L, t) \cdot u^*(L) - Q(0, t) \cdot u^*(0) = F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) \quad (3.30)$$

$$u'' \cdot EI(s) \cdot \frac{\partial u^*(s)}{\partial s} \Big|_0^L = M(s) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0^L =$$

$$= -M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_L - M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0 \quad (3.31)$$

Con lo que la ecuación 3.27 resultaría:

$$\int_0^L (u''(s, t) \cdot EI(s))'' \cdot u^*(s) dx =$$

$$\int_0^L u''(s, t) \cdot EI(s) \cdot \frac{\partial^2 u^*(s)}{\partial s^2} - F_j^b \cdot u^*(L) - F_i^b \cdot u^*(0) - M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_L$$

$$+ M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial s} \Big|_0 \quad (3.32)$$

En cuanto al segundo miembro de la ecuación 3.26, teniendo en cuenta las propiedades de la función Delta de Dirac:

$$\int_0^L p_0 \cdot \delta(x - vt) \cdot u^*(x) \cdot dx = p_0 \cdot u^*(vt) \quad (3.33)$$

De esta forma, sustituyendo las ecuaciones 3.32 y 3.33 en la ecuación 3.26 se obtiene:

$$\int_0^L \rho(x) \cdot \ddot{u}(x, t) \cdot u^*(x) dx + \int_0^L (u''(x, t) \cdot EI(x))'' \cdot u^*(s) dx =$$

$$= +F_j^b \cdot u^*(L) + F_i^b \cdot u^*(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_0 - p_0 \cdot u^*(vt) \quad (3.34)$$

Expresión en la que no se ha impuesto condición alguna sobre $u^*(x)$ más que su continuidad y derivabilidad. Continuando con los conceptos básicos de elementos finitos, se considera una base de polinomios de grado menor o igual a 3 de Hermite, pues se han discretizado los elementos barra por dos nodos extremos con 4 grados de libertad, dos de desplazamientos y otros dos de giro. Se supone que $u(x, t)$ puede representarse de forma exacta como una combinación lineal de la base de los polinomios anteriormente indicada:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^4 y_n(t) \cdot h_n(x) \quad (3.35)$$

Siendo las expresiones de los polinomios de Hermite:

$$[U_i] \longrightarrow h_1(x) = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.36)$$

$$[\theta_i] \longrightarrow h_2(x) = L \cdot \left[\frac{x}{L} - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (3.37)$$

$$[U_j] \longrightarrow h_3(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.38)$$

$$[\theta_j] \longrightarrow h_4(x) = L \cdot \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \quad (3.39)$$

Desarrollando la ecuación 3.35 usando las relaciones anteriores:

$$u(x, t) = y_i \cdot h_1(x) + \theta_i \cdot h_2(x) + y_j \cdot h_3(x) + \theta_j \cdot h_4(x) \quad (3.40)$$

Si se deriva se puede obtener la velocidad y aceleración:

$$u(\dot{x}, t) = \dot{y}_i \cdot h_1(x) + \dot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \dot{y}_j \cdot h_3(x) + \dot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (3.41)$$

$$u(\dot{x}, t) = \sum_{n=1}^4 \dot{y}_n(t) \cdot h_n(x) \quad (3.42)$$

$$u(\ddot{x}, t) = \ddot{y}_i \cdot h_1(x) + \ddot{\theta}_i \cdot h_2(x) + \ddot{y}_j \cdot h_3(x) + \ddot{\theta}_j \cdot h_4(x) \quad (3.43)$$

$$u(\ddot{x}, t) = \sum_{n=1}^4 \ddot{y}_n(t) \cdot h_n(x) \quad (3.44)$$

Si se toman como funciones de ponderación $u^*(x)$ las propias funciones de Hermite:

$$\int_0^L \rho(x) \cdot \sum_{n=1}^4 \left[y_n(t) \cdot h_n(x) \right] \cdot h_m(x) dx + \int_{n=1}^4 \sum_{n=1}^4 \left[y_n(t) \cdot \frac{\partial^2 h_n(x)}{\partial x^2} \right] \cdot EI(x) h_m(x) dx^2 =$$

$$= +F_j^b \cdot h_m(L) + F_i^b \cdot h_m(0) + M_j^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_L + M_i^b \cdot \frac{\partial h_m(x)}{\partial x} \Big|_0 - p_0 \cdot h_m(vt) \quad (3.45)$$

Se obtiene la formulación matricial:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_i(vt) \\ \ddot{\theta}_i(vt) \\ \ddot{y}_j(vt) \\ \ddot{\theta}_j(vt) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i(vt) \\ \theta_i(vt) \\ y_j(vt) \\ \theta_j(vt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^b(vt) \\ M_i^b(vt) \\ F_j^b(vt) \\ F_j^b(vt) \end{bmatrix} - p_0 \begin{bmatrix} h_1(vt) \\ h_2(vt) \\ h_3(vt) \\ h_4(vt) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Donde:

$$M_{ij} = \int_0^L \rho(x) \cdot h_i(x) \cdot h_j(x) dx \quad (3.47)$$

$$K_{ij} = \int_0^L h_i''(x) \cdot EI(x) \cdot h_j''(x) dx \quad (3.48)$$

Se trata de matrices en las que si se observan los subíndices, son simétricas. Si se acoplan estas matrices elementales es posible obtener una formulación global, par ala estructura completa:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -p_0\mathbf{h}(vt) \quad (3.49)$$

Paso 3.Resolución del sistema.

Puesto que se trata de matrices simétricas, la forma más sencilla de resolución es intentar desacoplar el sistema. Para ello se realiza un cambio de base, mediante la matriz c de cambio de base (obtenida del problema de autovalores), del sistema B (que coincidirá con la base de vectores proipios) a la base canónica E:

$$(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{y}(t) = 0 \Rightarrow |\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \quad (3.50)$$

Problema de autovalores que proporcionará los vectores propios o modos de vibración que componen la matriz C. Las coordenadas del vector y se relacionan con las coordenadas del mismo en la base B, mediante la matriz C de la siguiente forma:

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{q} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{q}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} \quad (3.52)$$

Realizando dicho cambio de base en 3.49 y premultiplicando por la traspuesta de C se desacopla el sistema y se obtiene:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{q} = -p_0 \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (3.53)$$

De modo que las matrices de masa y rigidez, \mathbf{M} y \mathbf{K} , resultan diagonalizadas:

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{K}_D = \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \quad (3.55)$$

De modo que si premultiplicamos por \mathbf{M}_D^{-1} podemos escribir:

$$\mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{K}_D \cdot \mathbf{q} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (3.56)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{h}(vt) \quad (3.57)$$

Siendo \mathbf{D} una matriz diagonal tal que $D_{ii} = w_i^2$, y la matriz \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = -p_0 \cdot \mathbf{M}_D^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \quad (3.58)$$

De este modo hemos conseguido desacoplar el sistema, siendo resoluble para cada función $q_i(t)$ de forma independiente. Los valores propios de esta matriz w_i^2 permiten obtener las frecuencias naturales.

Paso 4. Solución para cada modo.

Analizando el término de carga:

- Para todo instante de tiempo, la carga puntual se encuentra sobre algún elemento o fuera del intervalo $[0, L]$.
- En cada instante de tiempo, y para cada modo, intervienen cuatro coeficientes procedentes de la matriz \mathbf{G} para definir la función de carga. Como funciones temporales, sólo 4 de ellas pueden combinarse en un punto inferior a un intervalo de la forma $[0, L]$.

Si ahora se enriquece la ecuación modal con un término de amortiguamiento, el problema planteado a resolver vienen dado por:

$$\ddot{q}_n(t) + 2\zeta w_n \dot{q}_n(t) + w_n^2 \cdot q_n(t) = \sum_{m=1}^4 G_{nm} h_m(vt) \quad (3.59)$$

$$q_i(t)|_{t=0} = q_i(0) \quad (3.60)$$

$$\dot{q}_i(t)|_{t=0} = \dot{q}_i(0) \quad (3.61)$$

En la que ζ representa el factor de amortiguamiento, en el que se puede introducir un valor distinto para cada modo (más ajustado a la realidad pues es evidente pensar que se amortiguarán mejor los modos altos a los bajos), aunque en la práctica se suele optar por un amortiguamiento constante para cada modo por lo que en el presente documento se procederá de igual manera.

Se considera una escala de referencia local para cada elemento, en el que el instante $t=0$ coincide con el instante en el que la carga entra en el elemento, coincidente con el punto de abscisa 0. De este modo se evitan exponenciales con términos fuera de rango.

Si observamos la ecuación 3.59, vemos que se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea por lo que la descompondremos en la suma de una solución particular más la solución homogénea:

$$q(t) = q_H(t) + q_p(t) \quad (3.62)$$

- Solución homogénea:

$$q_H(t) = e^{-\zeta w_i t} (C_1 \cos(w_{iD} t) + C_2 \sin(w_{iD} t)) \quad (3.63)$$

$$w_{iD} = w_i \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.64)$$

- Solución particular:

Si se descompone el término no homogéneo en 3.59:

$$p_0 (G_1 h_1(vt) + G_2 h_2(vt) + G_3 h_3(vt) + G_4 h_4(vt)) \quad (3.65)$$

Se observa que se trata de un polinomio de tercer grado por lo que la ecuación particular será de la forma:

$$q_p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 vt + \alpha_2 (vt)^2 + \alpha_3 (vt)^3 \quad (3.66)$$

Cuyos coeficientes se obtienen sustituyendo la ecuación 3.59 y resolviendo el sistema:

$$\alpha_0 = v^3 \alpha_{01} + v^2 \alpha_{02} + v \alpha_{03} + \alpha_{04} \quad (3.67)$$

$$\alpha_1 = v^2 \alpha_{11} + v \alpha_{12} + \alpha_{13} \quad (3.68)$$

$$\alpha_2 = v \alpha_{21} + \alpha_{22} \quad (3.69)$$

$$\alpha_3 = \alpha_{31} \quad (3.70)$$

$$[1] \mapsto \alpha_{01} = -\frac{24\zeta(2\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^5} \quad (3.71)$$

$$[2] \mapsto \alpha_{02} = -\frac{2(4\zeta^2 - 1)(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^4} \quad (3.72)$$

$$[3] \mapsto \alpha_{03} = -\frac{2G_2 \zeta}{w_i^3} \quad (3.73)$$

$$[4] \mapsto \alpha_{04} = -\frac{G_1}{w_i^2} \quad (3.74)$$

$$[5] \mapsto \alpha_{11} = \frac{6(4\zeta^2 - 1)(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^4} \quad (3.75)$$

$$[6] \mapsto \alpha_{12} = \frac{4\zeta(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^3} \quad (3.76)$$

$$[7] \mapsto \alpha_{13} = \frac{G_2}{w_i^2} \quad (3.77)$$

$$[8] \mapsto \alpha_{21} = -\frac{6\zeta(2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L)}{L^3 w_i^3} \quad (3.78)$$

$$[9] \mapsto \alpha_{22} = -\frac{4\zeta(3G_1 - 3G_3 + (2G_2 + G_4)L)}{L^2 w_i^2} \quad (3.79)$$

$$[10] \mapsto \alpha_{31} = \frac{2G_1 - 2G_3 + (G_2 + G_4)L}{L^3 w_i^2} \quad (3.80)$$

Estos diez elementos dependen de amortiguamiento, longitud del elemento, frecuencias naturales y los coeficientes G_i que a su vez dependen de los modos de vibración, sin depender en ningún momento de la velocidad de paso de la carga por lo que se podrían determinar en un principio estos diez parámetros para cualquier malla completamente.

En último lugar nos restaría determinar los parámetros C_1 y C_2 de la solución homogénea a partir de la imposición de las condiciones iniciales:

$$q(0) = \alpha_0 + C_1 \quad (3.81)$$

$$C_1 = q(0) - \alpha_0 \quad (3.82)$$

$$\dot{q}(0) = -\zeta w_i C_1 + w_{iD} C_2 + \alpha_1 v \quad (3.83)$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}(0) + \zeta w_i C_1 - \alpha_1 v}{w_{iD}} \quad (3.84)$$

Por último, destacar que esta metodología para vigas es generalizable para otros casos genéricos, con la única imposición de derivabilidad de la línea de carga, como se puede ver en la publicación [35] en la que los autores aplican el método para el caso de cargas de Kirchhoff esviadas.

3.3. Generalización y ejecución del método

Como se ha observado en 3.63 y 3.66, los parámetros necesarios para la solución del sistema, C_i , w_i , G_i , pueden obtenerse mediante análisis modal. Para ello, se ha utilizado el *software* SAP2000, pudiéndose haber calculado mediante cualquier otro software de elementos finitos. Se puede interpretar la ecuación matricial 3.46, mediante un operador diferencial L:

$$\mathcal{L}\{u(\bar{x}, t), v(\bar{x}, t), w(\bar{x}, t)\} = -p_0 \cdot \delta(s - vt) \quad (3.85)$$

Siendo s , la coordenada curvilínea de la línea de carga C^1 , se resuelve el sistema mediante separación de variables, espacial y temporal, a través de análisis modal que, gracias a la diagonalización de las matrices de rigidez y masa, desacopla todo el sistema:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{q} = -p_0 \mathbf{C}^T \mathbf{h}(vt) \quad (3.86)$$

La única posición impuesta por la formulación semianalítica ha sido la derivabilidad de la línea de carga introducida. Mediante el *software* SAP2000 se han seleccionado en cada modelo de elementos finitos, tanto la línea de carga como los puntos de postproceso de la estructura, que no son más que los puntos en los que se desea la información a posteriori.

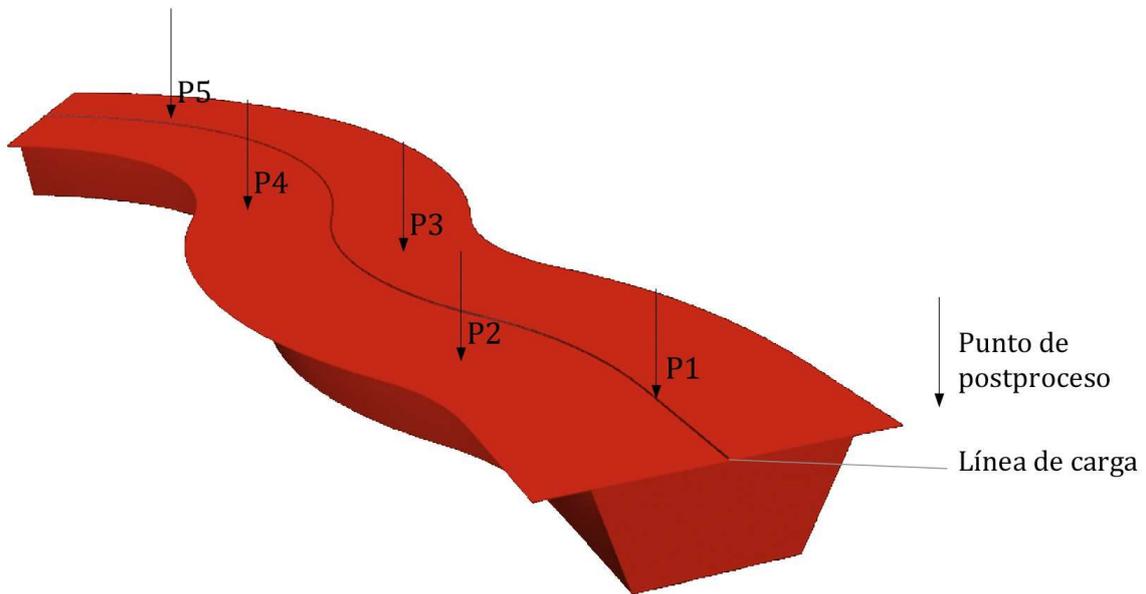


Figura 3.3: Esquema de línea de carga y puntos de postproceso en estructura.

La información espacial obtenida con el *software* SAP200 (los diez parámetros α_n , así como las matrices C y G) se proporcionan externamente al algoritmo semianalítico. Este algoritmo ha sido implementado por el director de este proyecto en un entorno de cálculo intensivo basado en Linux y es donde se realiza la integración temporal del problema obteniendo la solución analítica (no aproximada en el tiempo) gracias al posible desacople del sistema, que es lo que ha permitido el tratamiento por separado de variable espacial y temporal.

3.4. Test de validación

3.4.1. Planteamiento

En este apartado se pretende contrastar numéricamente, los resultados arrojados mediante el método semianalítico frente a los métodos clásicos de integración paso a paso, más concretamente, el método de Newmark-Beta. Para ello se ha desarrollado un test de validación de un modelo bidimensional de vigas.

3.4.2. Test de validación 1: Viga de tres vanos

Este primer test consiste en el contraste de resultados de ambos métodos sobre un modelo bidimensional de la estructura de tres vanos representada en la figura 3.4, caso analizado en publicaciones externas por Hayashikawa y Watanabe [17], Henchi *et al.* [18], Zheng *et al.* [36] y el director de este proyecto [2]:

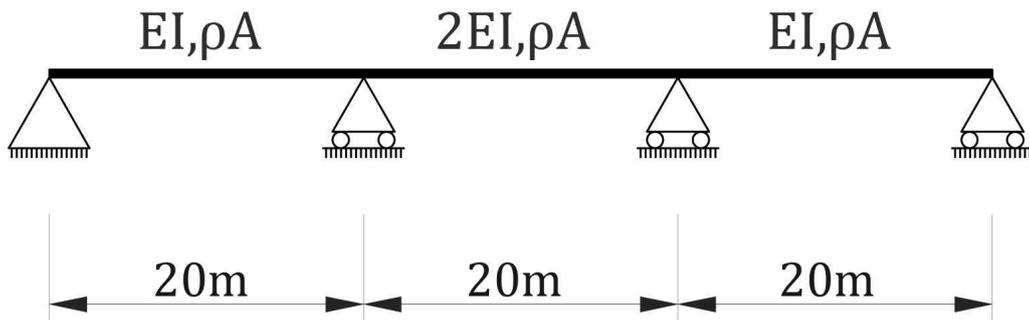


Figura 3.4: Geometría de la viga, Test1.

Las propiedades mecánicas de la estructura son:

- $L = 20$ m en todos los vanos.
- Rigidez a flexión $EI = 1,96 \text{GNm}^2$ en los vanos laterales y $2EI$ para el vano central.
- Masa por unidad de longitud $\rho \cdot A = 1000 \text{Kg/m}$ constante para todos los vanos.
- $\xi = 2\%$ (amortiguamiento modal).
- Área a cortante nula para considerar un modelo de viga tipo Euler-Bernouilli.

Se considera una carga móvil aislada de valor 9.8 kN desplazándose a una velocidad constante de 35.57 m/s.

Se realiza el cálculo modal de la estructura mediante el *software* SAP2000 para lo que se necesitará discretizar la estructura en 10 elementos por vano ya que el *software* SAP2000 establece su cálculo en base a la definición de un modelo de masas concentradas. Se consideran dos grados de libertad por nodo (desplazamiento y giro) y se trabaja con 12 modos de vibración. De esta forma se obtienen los siguientes cálculos:

Modo de vibración	Frecuencia
1	6,2044
2	7,5812
3	11,974
4	24,204
5	26,434
6	37,281
7	53,53
8	56,585
9	76,909
10	93,844
11	98,232
12	129,98

Cuadro 3.1: Frecuencias de modos vibración, Test1.

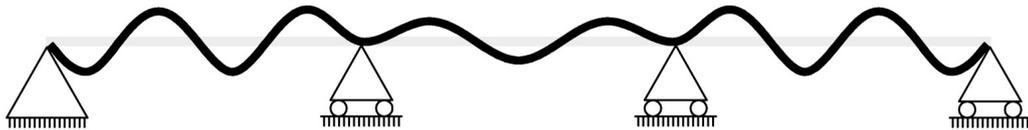


Figura 3.5: Ejemplo de modo e vibración 11, Test1.

Conocidas las frecuencias de vibración y las formas modales de la estructura se recurre al cálculo de la respuesta dinámica de la estructura al paso de la carga aislada. Para el cálculo mediante el método de Newmark (véase el apéndice A) se recurre de nuevo al *software* SAP2000 que implementa el método de Newmark tras un desacople modal del problema dinámico (metodología testada en la referencia [37]). Para el cálculo mediante el método semianalítico se recurre, sin embargo, al entorno de cálculo intensivo basado en Linux, preparado por el director de este proyecto.

Cálculo mediante el método de Newmark:

Como cualquier método de tipo incremental en el tiempo, se debe actuar sobre dos parámetros importantes del cálculo:

1. Tiempo de discretización de la carga.
2. Tiempo de discretización del paso o "step", que se hace coincidir con el anterior.

Se corre el cálculo con dos pasos de tiempo de $T_{12}/25$ y $T_{12}/150$ dónde T_{12} es el período del modo 12:

$$\frac{T_{12}}{25} \cong 3E - 04s \quad (3.87)$$

$$\frac{T_{12}}{150} \cong 5E - 05s \quad (3.88)$$

El objetivo es conseguir un paso lo suficientemente pequeño para ver si el método de Newmark es capaz de proporcionar un resultado parecido al semianalítico. Se obtiene de esta forma, los siguientes resultados para los primeros 0,1 s:

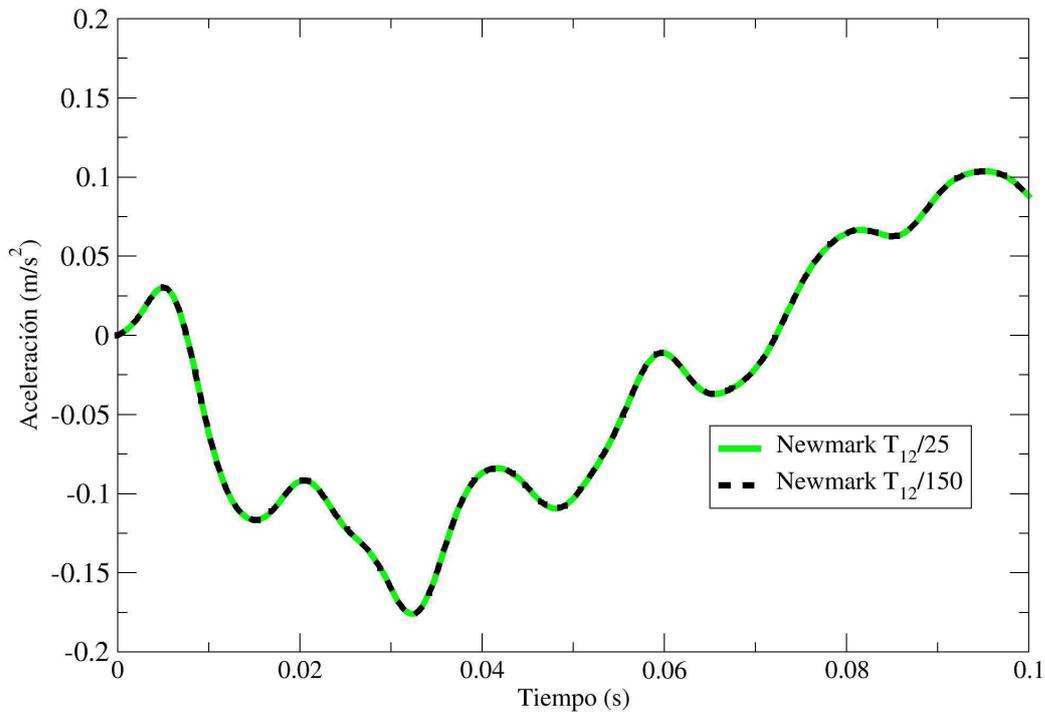


Figura 3.6: Aceleraciones en el punto central del primer vano por el método de Newmark. Test1.

Se ha presentado un problema destacable del *software SAP2000 v14* que puede pasar desapercibido pero es de fácil reparación. Cada vez que éste software calcula una serie temporal, el resultado que otorga al inicio y final del primer paso de cálculo es nulo. Tras esto, la serie se calcula perfectamente pero retardada un paso de integración, con lo cual bastaría con hacer corresponder cada resultado con su valor de paso de tiempo debido un paso atrás.

Cálculo mediante el Método semianalítico:

Otra ventaja disponible con el método semianalítico es que conociendo las formas modales, pueden escogerse como puntos de postproceso para el análisis los que a priori pueden parecer más relevantes para el cálculo, mientras que el cálculo de Newmark mediante el *software SAP2000* se realizará para los 31 nodos en los que se ha discretizado la estructura. Esto puede significar una reducción muy importante en los tiempos de cálculo para cualquier análisis de una estructura real de mayor complejidad, pues no tendrá 31 nodos, sino muchos más. Se escogen, por tanto:

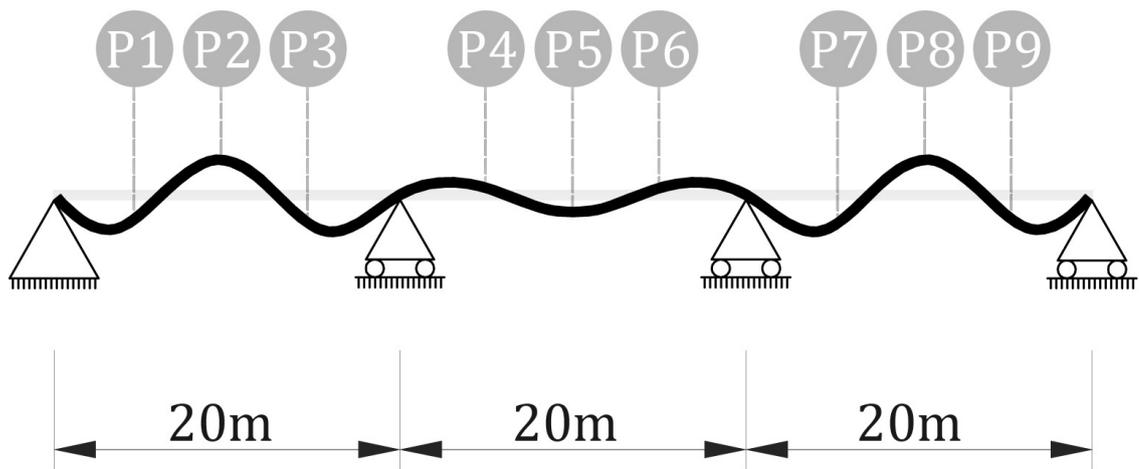


Figura 3.7: Puntos de postproceso de la estructura para el método semianalítico y modo de vibración 7.Test1.

En este caso, se lleva ahora el paso de cargas sobre la misma estructura con un paso de tiempo $\frac{T_{12}}{10}$ y se obtiene:

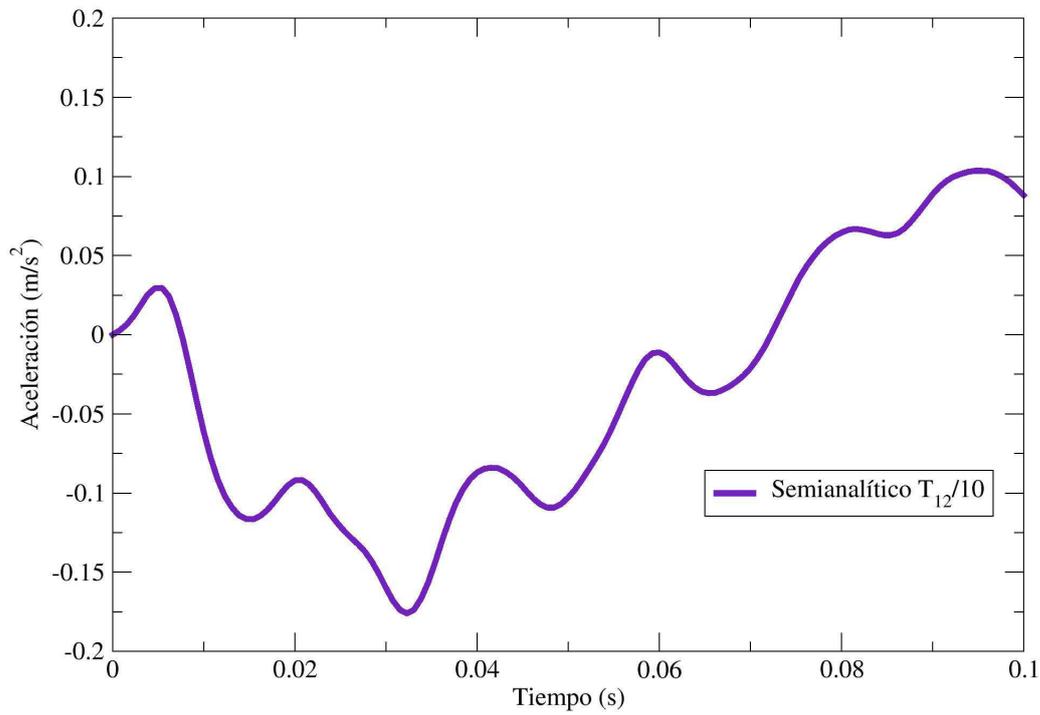


Figura 3.8: Aceleraciones en el punto central del primer vano por el método semianalítico.Test1.

Comparativa:

Se comparan las tres series temporales calculadas anteriormente tras reparar el contratiempo ocasionado por el *software* SAP2000 en el cálculo de la serie temporal por Newmark:

- Método Semianalítico de paso $\frac{T_{12}}{10}$.
- Método Newmark de paso $\frac{T_{12}}{25}$.
- Método Newmark de paso $\frac{T_{12}}{150}$.

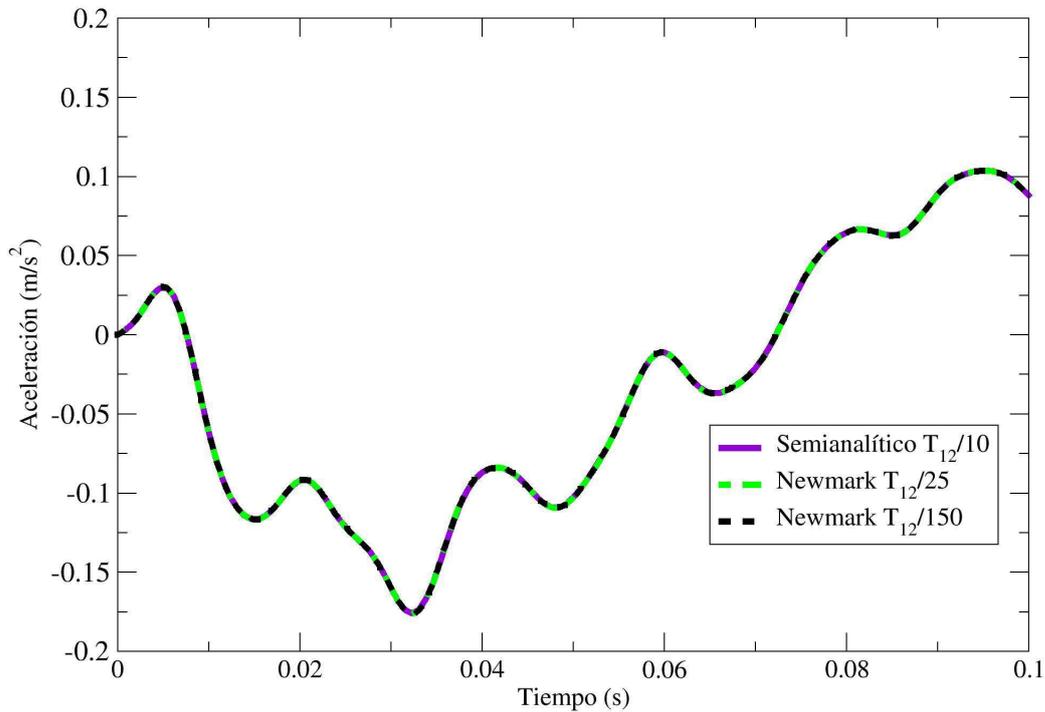


Figura 3.9: Comparación entre distintas metodologías de paso de cargas.Test1.

Se observa, pues, que el método semianalítico obtiene valores suficientemente aproximados a los métodos paso a paso en las fases iniciales de la serie, los primeros 0,1s. Estos datos coinciden con los publicados en las referencias [17], [18] y [36] y [2], por lo que se dan por buenos.

En la referencia [2], se puede consultar la Figura 5, donde se analiza la respuesta en fases posteriores, más concretamente entre 3,05 y 3,15 s. El objetivo de este cálculo es demostrar con resultados que la metodología de Newmark es de tipo incremental y que los errores se van acumulando conforme aumenta el número de pasos de cálculo (para conseguir información desde 0 hasta sólo 3,15 s se han necesitado hasta 61627 pasos de cálculo con un duración por paso de $T_{12}/150$). Como era de esperar, el método de Newmark se aproxima más a la solución exacta conforme más se refina el paso temporal de integración mientras que el método semianalítico sólo utiliza el muestreo de $t_{12}/10$ para evaluar la respuesta cada cierto tiempo, no siendo la exactitud de los resultados dependiente de esta decisión.

3.5. Conclusión. Ventajas del método semianalítico

Las ventajas de este método se desligan principalmente de la naturaleza analítica de la solución la cual siempre será mejor que cualquier aproximación. De modo que podremos enumerar:

1. El método proporciona resultados precisos pues las ecuaciones temporales se resuelven de forma analítica, por lo que se evitan los errores clásicos en el dominio del tiempo por la discretización del mismo por parte de los métodos de integración *paso a paso*. La solución se obtiene a partir de 10 coeficientes por elemento y modo que no dependen de la velocidad, lo cual facilita enormemente la aplicación de la actual norma IAPF que impone la obtención de resultados para un amplio rango de velocidades.
2. A bajas velocidades se converge a la solución estática, evitando el fenómeno de Gibbs típicamente asociado a las soluciones analíticas basadas en series armónicas.
3. Gracias a la normalización temporal se evitan problemas de exponenciales con argumentos elevados con los errores de sesgo que estos conllevan.
4. Se requiere de un paso de tiempo de evaluación, frente a un paso de tiempo de integración asociado a métodos paso a paso, en general mucho menor que el requerido para el muestreo analítico de la solución. Por ello, se gana velocidad de cálculo, ya que para tener una precisión similar al método semianalítico, los métodos paso a paso requieren más operaciones de punto flotante globales (debido a que el paso de tiempo es menor). La respuesta proporcionada en un tiempo dado por la solución semianalítica no depende del paso del tiempo; en métodos aproximados paso a paso sí depende.
5. Esta ventaja en ahorro de tiempo de cálculo convierte al método semianalítico en una herramienta práctica y realista de aplicación de las exigencias de la norma IAPF-2007.

CAPÍTULO 4

Análisis dinámico del Viaducto sobre el Tajo

4.1. Introducción

El Viaducto sobre el río Tajo en el embalse de Alcántara es un puente arco continuo de vía doble, resuelto mediante una sección de cajón unicelular. La distribución de vanos se ve influenciada por el cruce del río Tajo, que se lleva a cabo mediante un arco de 324 m de longitud, dividiendo el tablero sobre el arco en seis vanos de 54 m cada uno. Los vanos de aproximación son de 60 m, insertándose dos vanos de transición de 57 m.

El puente tiene una longitud total de 1488 m con una distribución de luces 45-9x60-57-324-57-7x60-45 m. La estructura es continua, existiendo un único punto fijo, en el centro del arco”.

En una estructura de este tipo el paso de cargas móviles excéntricas produce deformaciones simultáneas de flexión y torsión. Como es sabido, en determinados modos de vibración se producirá además un acoplamiento entre torsión y flexión lateral. Por estos motivos, el Cálculo Dinámico del Viaducto sobre el río Tajo se realiza mediante un método *semianalítico* que realiza la integración analítica (exacta) de las ecuaciones modales de movimiento de todos los modos cuya contribución a la respuesta sea necesario tener en cuenta. Los modos de vibración se obtienen mediante la técnica de los Elementos Finitos.

4.2. Método de Cálculo

Los fundamentos teóricos del método se publicaron en 2006 en la revista *Journal of Sounds and vibration* y que han sido desarrollados en el capítulo anterior.

Como se indicaba anteriormente, los modos de vibración se obtienen de un modelo de elementos finitos que se describirá en el apartado siguiente.

Para llevar a cabo el cálculo por superposición modal se tienen en cuenta las contribuciones de los modos de frecuencia menor o igual a 30 Hz, que para el valor de balasto incrementado un 30 % son 688. Este elevado número se debe en gran parte a modos asociados a flexiones que afectan fundamentalmente a los voladizos del tablero.

El paso de tiempo elegido para evaluar la historia temporal de la vibración del puente, ante la circulación de cada tren y a cada velocidad de paso, es la décima parte del menor período de vibración. La frecuencia máxima considerada es de 29.979 Hz, como se indica en el apartado 4.6.1, por lo que el paso de tiempo para evaluación es de 0.003335 s.

Las vibraciones libres que tienen lugar tras el paso del tren sobre la estructura se calculan durante un tiempo total igual a 6 períodos de vibración completos del modo fundamental, lo cual se considera suficiente para que se hayan reducido los niveles máximos de oscilación.

La tasa de amortiguamiento empleada para todos los modos es del 2 %, de acuerdo con la IAPF-07.

4.3. Modelo numérico de la estructura

El modelo empleado es del tipo *lámina plegada*, resuelto de manera aproximada mediante el método de los elementos finitos. Se considera la sección cajón del viaducto como un perfil cerrado formado por cuatro tipos de láminas. Los voladizos, las losas superior e inferior y las almas. Dichas láminas se discretizan mediante elementos finitos planos de cuatro nudos y seis grados de libertad por nudo. No se tiene en cuenta la deformación debida a las tensiones tangenciales en sentido perpendicular al plano medio de las láminas. Las riostras existentes en las zonas de apoyo en pilas y estribos se modelizan adecuando los espesores de las láminas de manera que se reproduce la masa total de las riostras, y añadiendo además restricciones cinemáticas en ciertas secciones que eliminan el alabeo y la distorsión. La rigidez de la zona resulta de ese modo comparativamente muy superior a la de la sección cajón.

El arco está constituido por un modelo de viga dividido en tres tramos con sección variable.

La figura 4.1 muestra un detalle de la malla de elementos finitos en la zona del estribo inicial, mientras que en la figura 4.2 se muestra el modelo de un grupo de riostras. En la figura 4.3 se observa la sección recta del modelo y en las figuras 4.4 y 4.5 el modelo de la estructura completa y un detalle del modelo del arco.

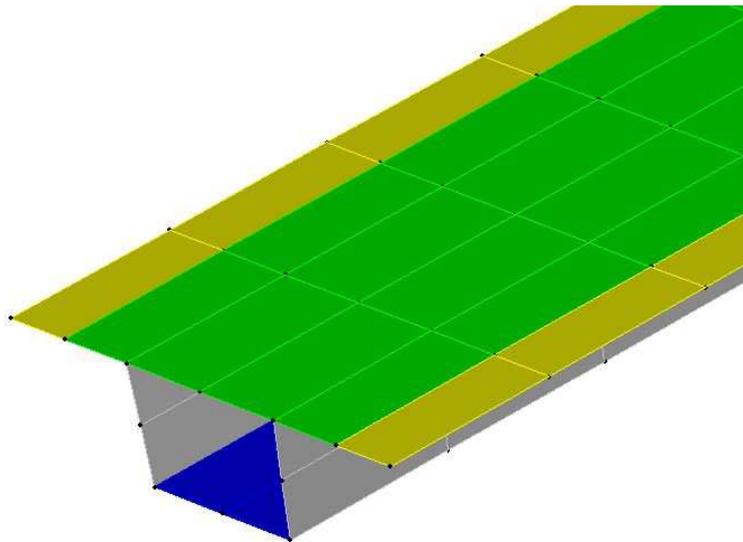


Figura 4.1: Detalle de la malla empleada. Sección del estribo inicial



Figura 4.2: Detalle del modelo de las riostras.

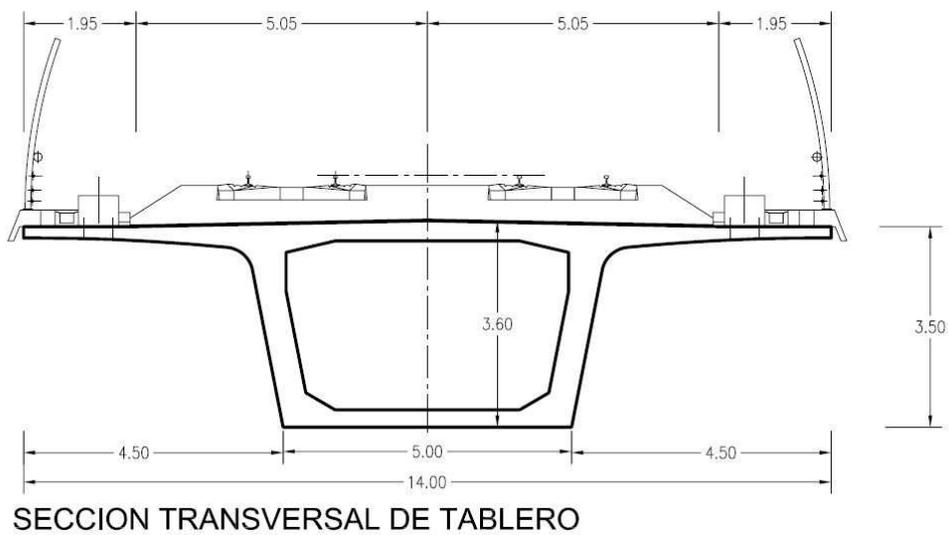


Figura 4.3: Sección recta del modelo

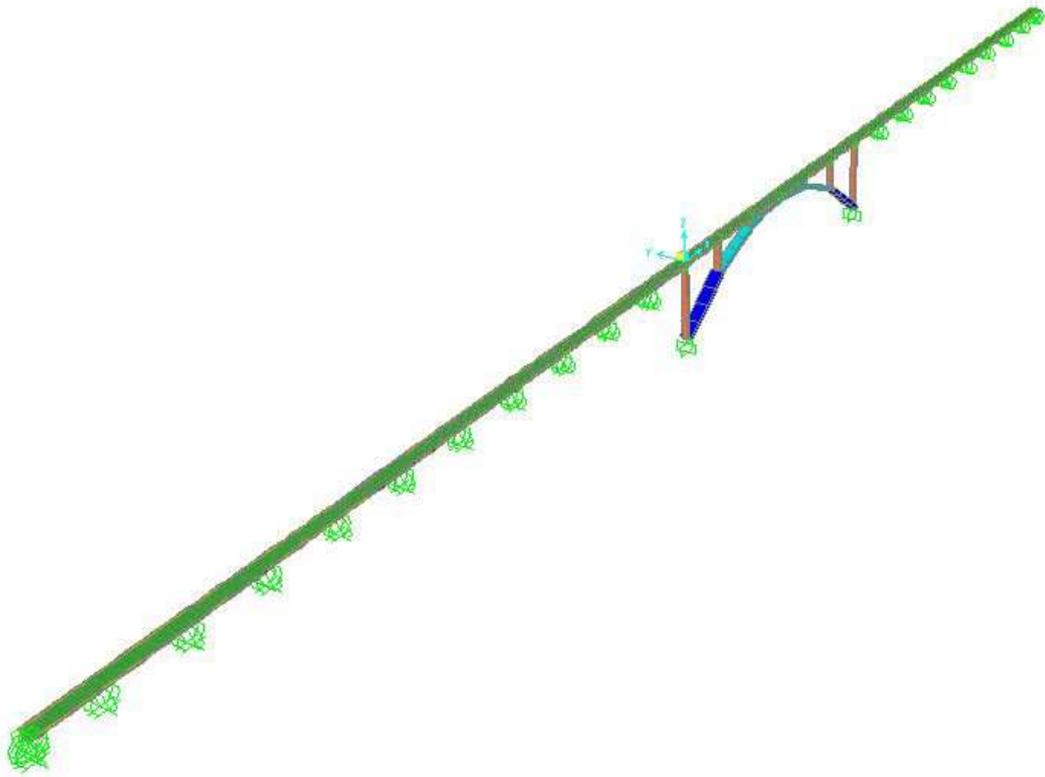


Figura 4.4: Modelo completo de la estructura

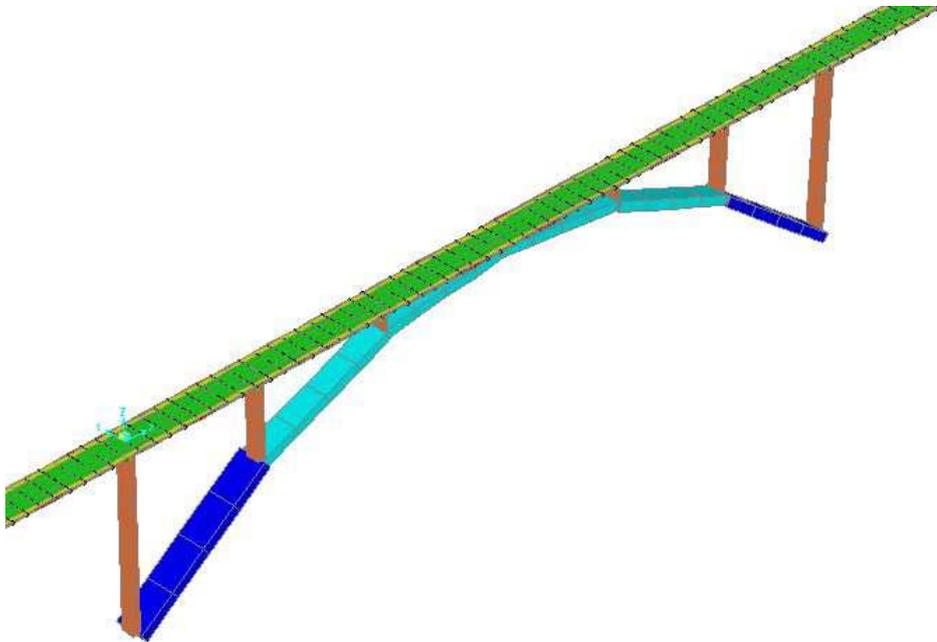


Figura 4.5: Modelo tipo viga del Arco

Los espesores empleados para las distintas partes de la *sección general*, entendiendo por tal la que representan los 26 vanos en la mayor parte de su longitud, se deducen a partir de los planos de proyecto y son los siguientes:

Voladizos : variable entre 0.2 y 0.36 m.

Losa Superior: 0.35 m.

Losa Inferior: 0.3 m.

Almas: 0.5 m.

En todos los vanos existen, en los apoyos en pila y en la cercanía de estos, unas zonas de mayor espesor en las almas. En las figuras 4.6 a 4.9 se muestra la ubicación de las zonas en las existen espesores distintos a los de la sección general.

Las uniones entre almas y losas, de espesor variable, presentan dificultades para su modelización mediante elementos lámina. Por ese motivo se ha preferido mantener constante el espesor de las almas y losas del modelo, verificando posteriormente que la inercia de la sección y la masa lineal se reproducen con buena aproximación.

A partir de los planos de proyecto se determina que el área de la sección transversal es de 9.31 m^2 y la inercia con respecto del eje principal horizontal es de 64.27 m^4 . Con la sección que se muestra en la figura 4.3 y los espesores indicados anteriormente, el cálculo como perfil de pared delgada produce un área de 9.17 m^2 y una inercia de 64.49 m^4 , teniéndose por tanto una buena aproximación del área y de la rigidez a flexión de la sección.

Propiedades de los materiales:

Módulo de elasticidad: 38 GPa.

Coefficiente de Poisson: 0.3

Densidad: 2500 Kg/m^3 .

Cargas permanentes:

Sobre la losa superior y los voladizos descansa la masa correspondiente a los siguientes elementos:

Balasto: 13437 Kg/m (valor superior).

Vías y traviesas: 1280 Kg/m (comprende las dos vías).

Muretes guardabalasto: 500 kg/m (comprende los dos lados).

Aceras y canalizaciones: 2450 kg/m (comprende los dos lados).

Barandilla e imposta: 900 Kg/m (comprende los dos lados).

Esquema vanos 10 y 19

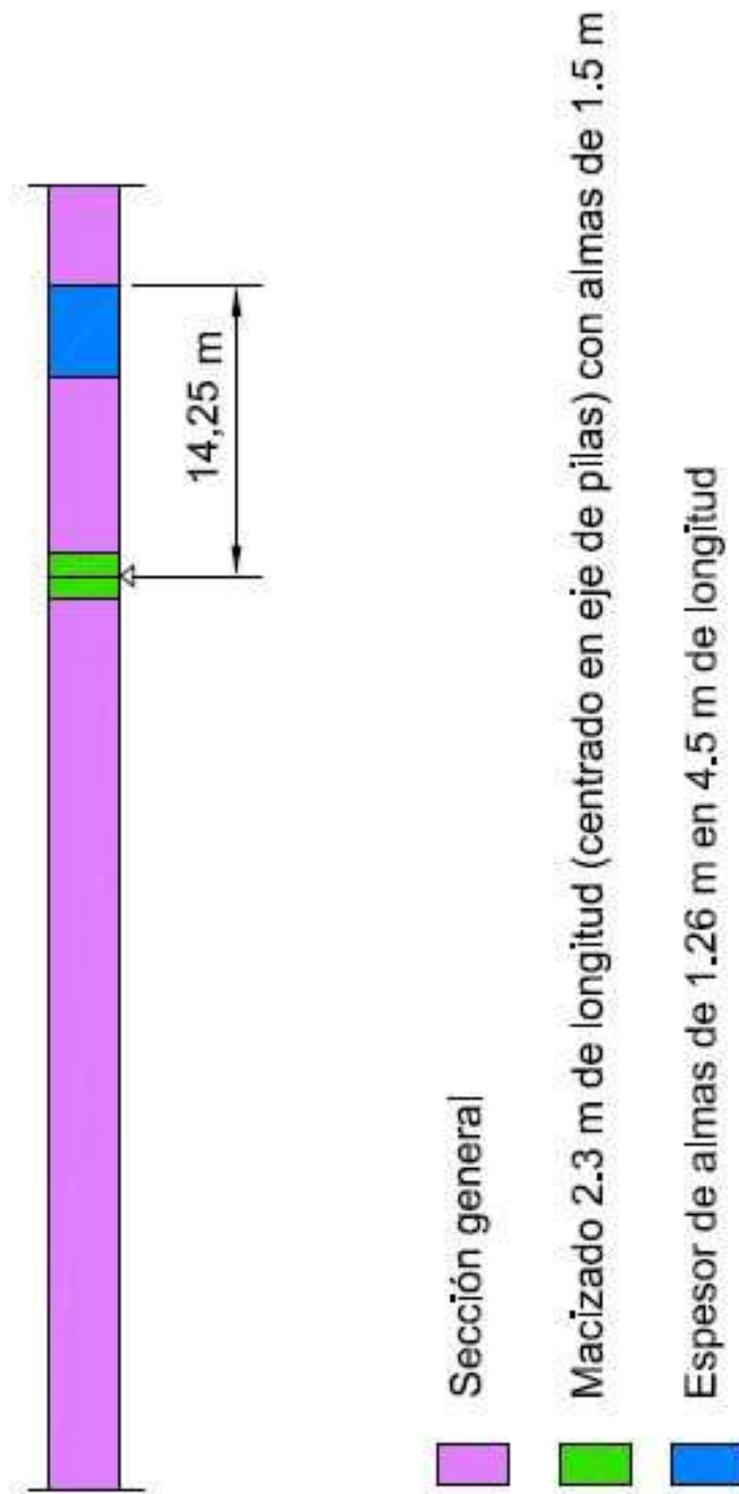


Figura 4.7: Alzado lateral con los distintos tipos de sección. Vanos 10 y 19

Esquema vanos 11-13 y 16-18

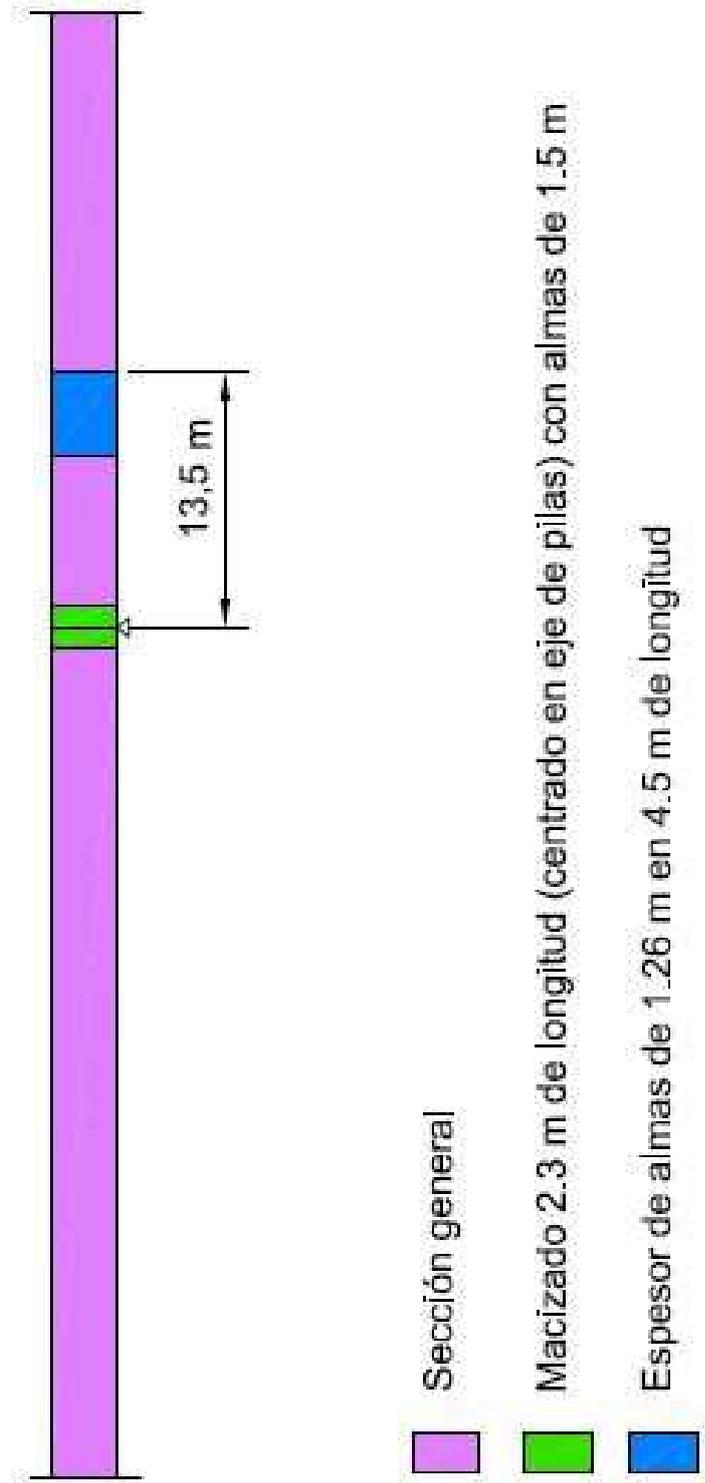


Figura 4.8: Alzado lateral con los distintos tipos de sección. Vanos 11-13 y 16-18

Esquema vanos 14 y 15

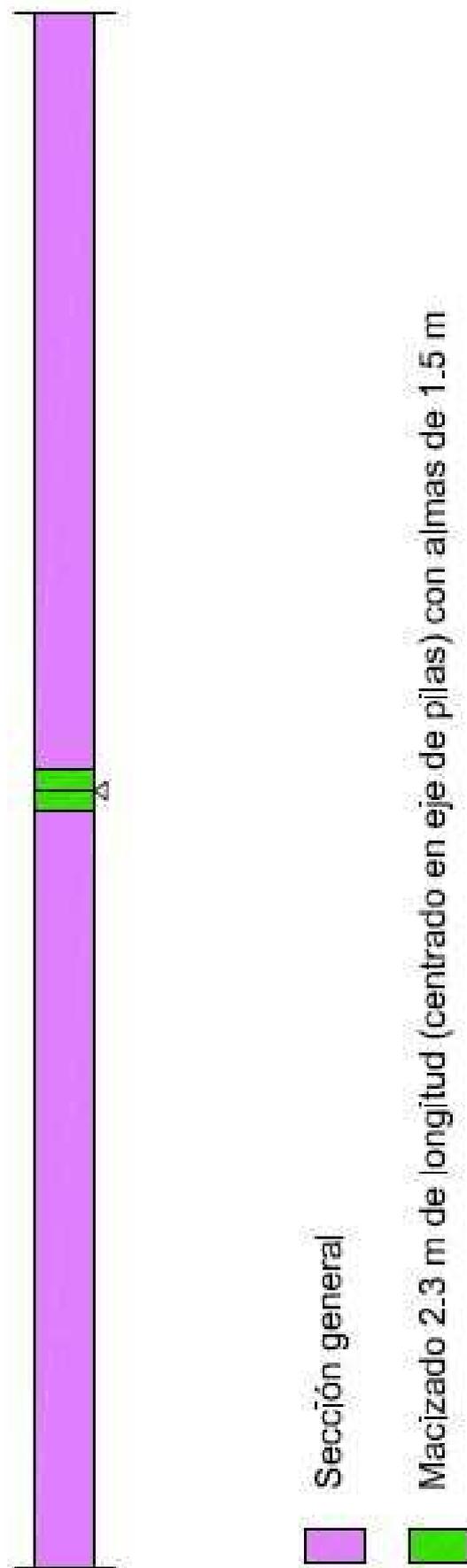


Figura 4.9: Alzado lateral con los distintos tipos de sección. Vanos 14 y 15

Apoyos:

Para generar el modelo de elementos finitos se emplea el sistema de coordenadas en el que el eje X es el longitudinal, el Y el transversal horizontal y el eje Z el vertical. El origen se encuentra en el punto medio de la losa superior correspondiente a la sección del vano 12 donde comienza el arco.

Los apoyos de la estructura sobre estribos y pilas se modelizan mediante apoyos simples verticales dispuestos en las secciones correspondientes. La distancia entre ellos es por tanto igual a la longitud de los vanos. En cada una de las secciones, los apoyos verticales se sitúan en los puntos de unión entre almas y losa inferior, habiendo por tanto en total 54 apoyos verticales. Los movimientos de los puntos situados en el margen izquierdo se han restringido también en la dirección transversal Y. Además, se impide el movimiento en la dirección longitudinal X del punto central de la riostra situada en el primer estribo del puente.

En cuanto a los apoyos situados en los vanos sobre el arco, éstos se modelizan mediante links que simulan los apoyos esféricos sobre las pilas del arco. Las figuras 4.10, 4.11 y 4.12 muestran los puntos vinculados y las direcciones de dichos vínculos.

Riostras:

En los apoyos en pilas y estribos existen zonas macizadas de 5 m de longitud y 1 m de espesor, que confieren una rigidez muy superior lo cual impide el alabeo y la distorsión de la zona macizada.

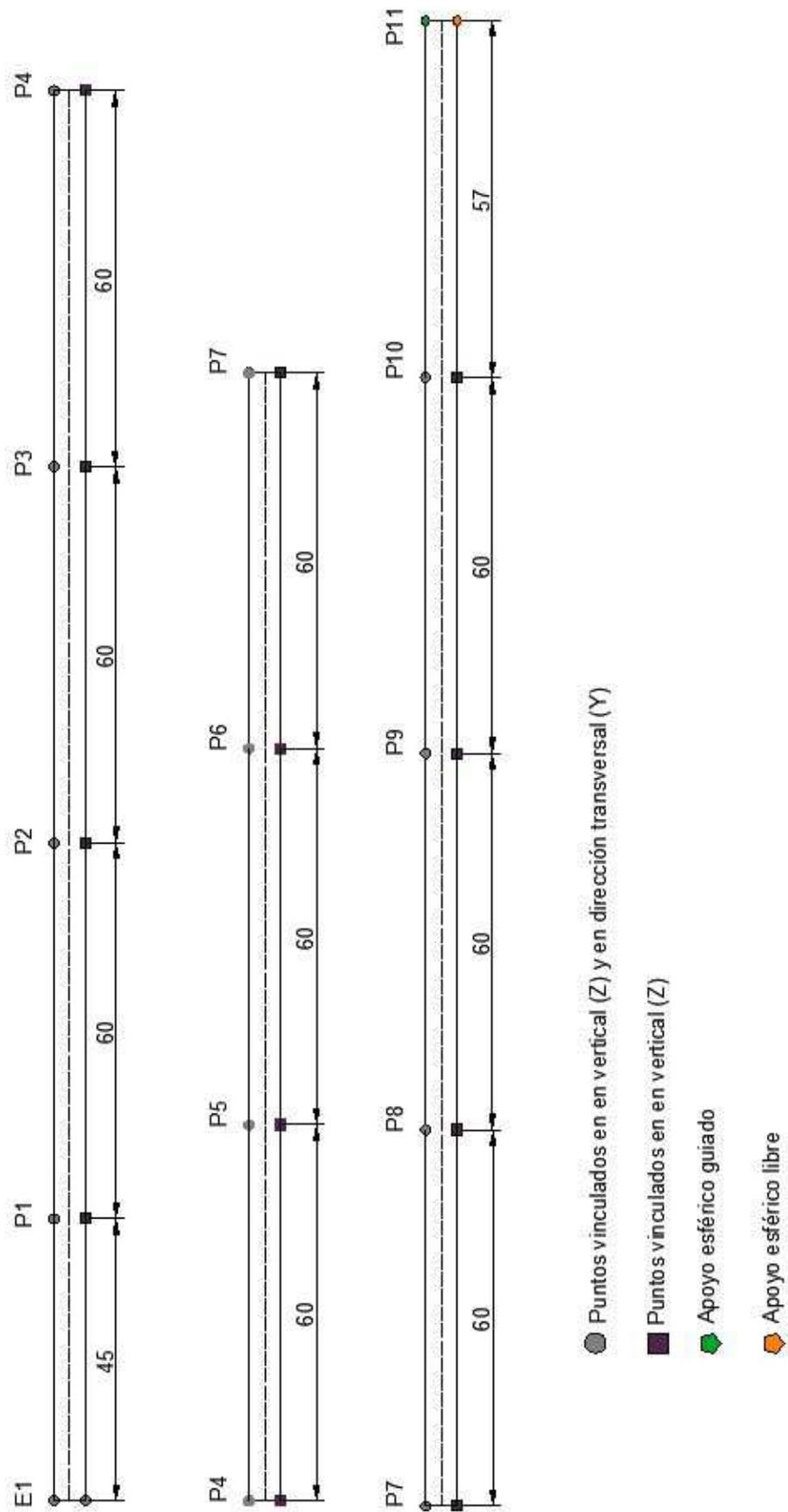


Figura 4.10: Vista en planta de la losa inferior. Situación y dirección de los apoyos de los primeros 11 vanos.

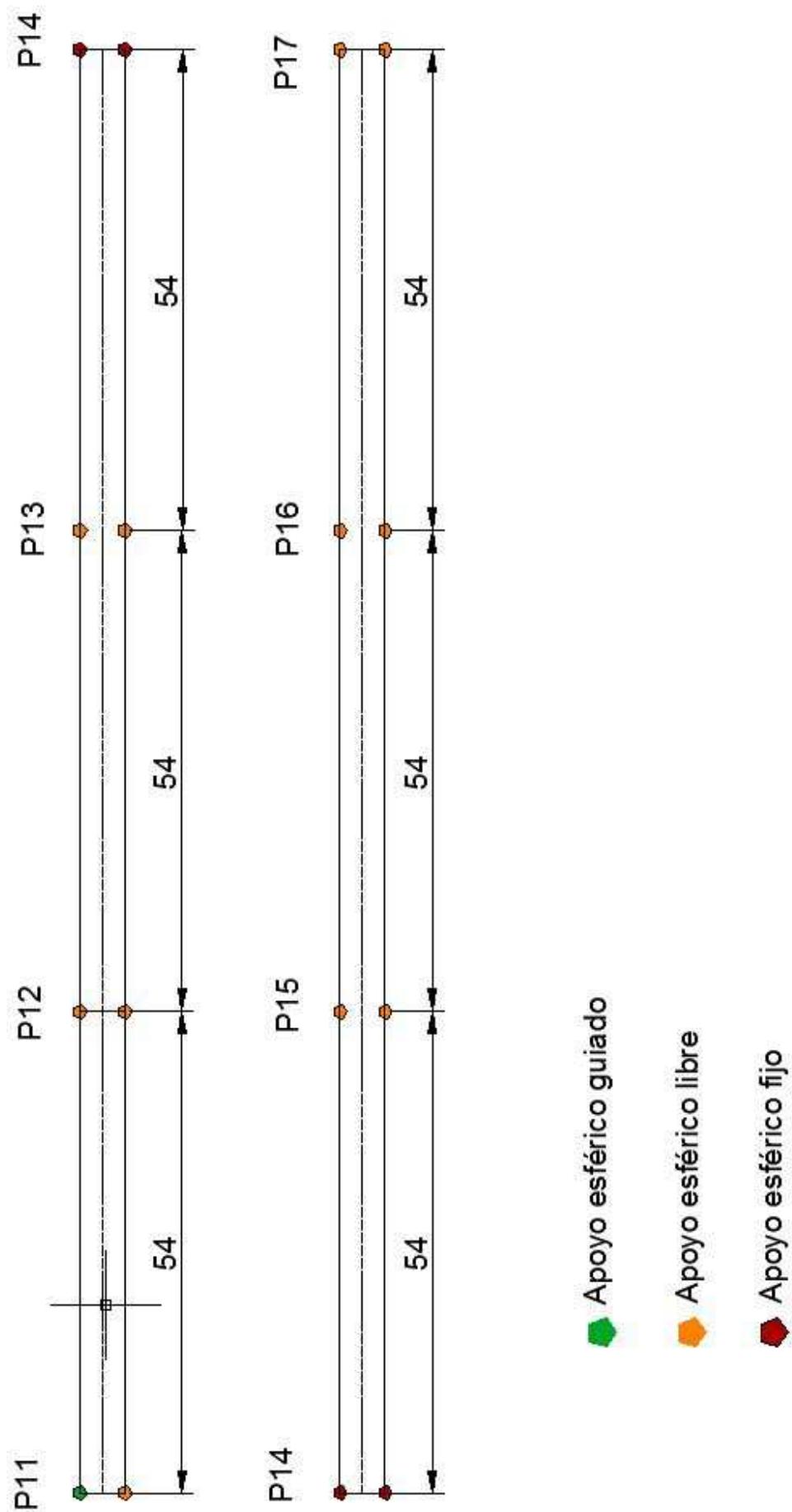


Figura 4.11: Vista en planta de la losa inferior. Situación y dirección de los apoyos de los vanos 12-17 sobre el arco.

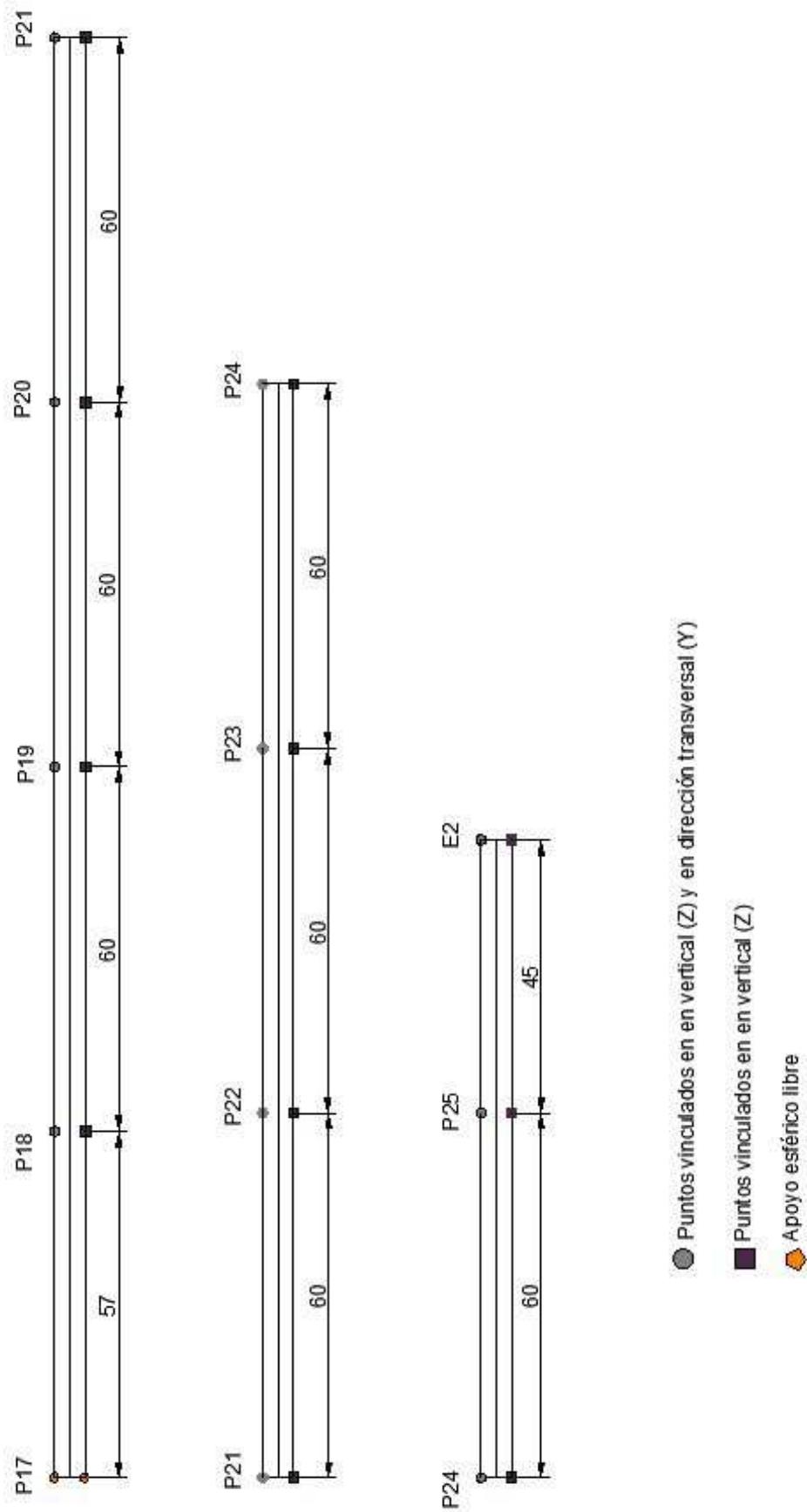


Figura 4.12: Vista en planta de la losa inferior. Situación y dirección de los apoyos de los vanos 18-26.

4.4. Acciones.

El cálculo dinámico se realiza según se indica en el Apéndice B de la IAPF-07, considerándose los diez trenes definidos en el apéndice C.1 de dicha instrucción, los cuales reciben la denominación conjunta de *Tren Dinámico Universal-A*.

Siendo la velocidad de proyecto de la línea de 350 Km/h, se han considerado velocidades de paso para dichos trenes desde 20 Km/h hasta $1.2 \times 350 = 420$ km/h, en incrementos de 1 Km/h.

El cálculo por superposición modal se realiza haciendo transitar las cargas a lo largo de una única línea de nudos situada en el eje de la vía. La posición de dicha línea sobre la losa superior se encuentra en la intersección del plano medio de la losa y el plano de simetría de las traviesas.

4.5. Resultados a obtener y comprobaciones a relaizar.

De acuerdo con la IAPF-07, del cálculo dinámico deben obtenerse los resultados necesarios para realizar las comprobaciones siguientes:

- Flecha dinámica máxima sobre vía sin irregularidades, con objeto de determinar el coeficiente de impacto.
- Flecha dinámica máxima a efectos de comprobación de ELS.
- Aceleración vertical máxima (ELS).
- Desplazamientos angulares máximos en los apoyos (ELS).

Los límites de cada tipo de respuesta asociados a los ELS son los siguientes:

- Flecha dinámica máxima : 7.5 cm para vanos de 45 m, 10 cm para vanos de 60 m, 9.5 cm para vanos de 57 m y 9 cm para vanos de 54 m.
- Aceleración vertical máxima: 3.5 m/s^2
- Desplazamientos angulares máximos en los apoyos (ELS): $3.5 \cdot 10^{-3}$ rad (en estribos).

Puntos para cálculo de resultados

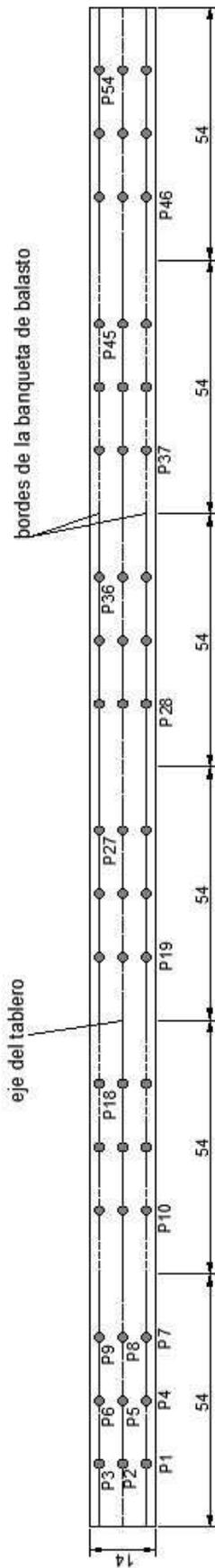
Los puntos en los que se calculan las magnitudes descritas se muestra en la figura 4.13

Las aceleraciones verticales se calculan, para los seis vanos situados sobre el arco, en las secciones de centro y cuartos de vano y para cada sección en tres puntos: eje longitudinal del tablero y bordes de la banqueta de balasto (muretes). Por lo tanto obtenemos 54 puntos de postproceso para aceleraciones, denominados P1 a P54.

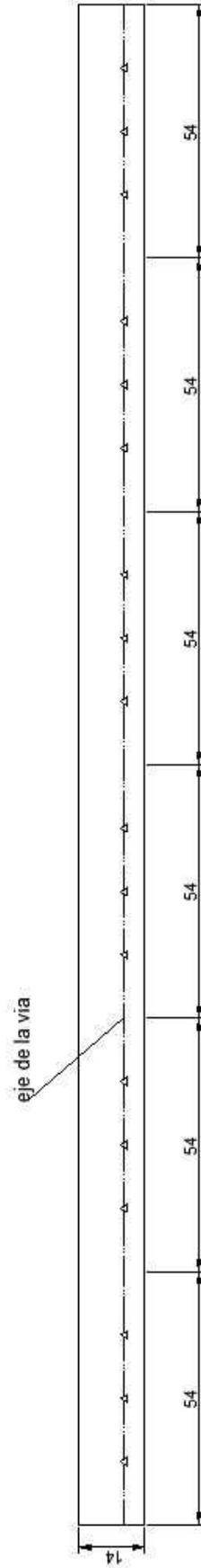
Para los vanos fuera del arco, se han tomado puntos de postproceso en el borde derecho de la banqueta de balasto para las secciones de centro de vano, obteniéndose 20 puntos de postproceso denominados P73 a P92.

Las flechas se calculan en los vanos sobre el arco en el eje de la vía, en las secciones de centro y cuartos de vano. Ello da un total de 18 puntos denominados P55 a P72.

En la figura 4.13 se define la posición de los puntos de postproceso para los vanos sobre el arco.



● 54 puntos para aceleraciones: 1/4, 1/2, 1/4 vano; eje del tablero y bordes de banqueta de balasto (P1 - P54)



▲ 18 puntos para flechas: 1/4, 1/2, 1/4 vano en el eje de la vía (P55 - P72)

Figura 4.13: Puntos para cálculo de resultados. Vanos sobre el arco.

4.6. Resultados.

4.6.1. Frecuencias propias y modos de vibración

El cálculo modal por elementos finitos del modelo descrito en el apartado 4.3 produce como resultado, para el valor superior de balasto, 688 modos con frecuencias de vibración inferiores a 30 Hz. Las frecuencias de dichos modos se recogen en la tabla 4.1-4.6.

Los seis primeros, de frecuencias de 0.5635 a 1.816 Hz corresponden a modos de flexión longitudinal del arco. A partir de dicho valor aparecen modos de flexión longitudinal del tablero, así como modos de torsión y flexión lateral acopladas en mayor o menor medida, y una gran cantidad de modos en los que predominan la flexión de los voladizos con diferente número de ondas. Las figuras 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 y 4.21 muestran los modos que resultan representativos.

Modo	Frecuencia(Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)
1	0.56358	33	3.7634	65	6.3589
2	0.68771	34	3.8397	66	6.3608
3	1.1718	35	3.9103	67	6.3612
4	1.6731	36	3.9461	68	6.375
5	1.7731	37	4.1824	69	6.398
6	1.8161	38	4.2806	70	6.4023
7	2.0154	39	4.2873	71	6.4107
8	2.0332	40	4.315	72	6.4461
9	2.0515	41	4.4213	73	6.4478
10	2.1029	42	4.8248	74	6.4505
11	2.1217	43	5.0662	75	6.4547
12	2.1217	44	5.3499	76	6.4559
13	2.125	45	6.0736	77	6.462
14	2.1605	46	6.1468	78	6.4789
15	2.193	47	6.159	79	6.5038
16	2.2951	48	6.2174	80	6.51
18	2.4891	50	6.3076	82	6.5421
19	2.5921	51	6.3299	83	6.5886
20	2.7094	52	6.3304	84	6.6148
21	2.7839	53	6.3323	85	6.6352
22	2.9149	54	6.3339	86	6.6352
23	2.9827	55	6.3359	87	6.6455
24	3.0397	56	6.3384	88	6.6793
25	3.112	57	6.3392	89	6.6968
26	3.2621	58	6.3405	90	6.7277
27	3.3501	59	6.3454	91	6.7486
28	3.4467	60	6.3455	92	6.7636
29	3.4838	61	6.3506	93	6.7813
30	3.5297	62	6.3517	94	6.7849
31	3.5956	63	6.3552	95	6.9513
32	3.678	64	6.3571	96	7.0115

Cuadro 4.1: Frecuencias propias

Modo	Frecuencia(Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)
97	7.0124	141	7.3925	185	7.9218
99	7.0165	143	7.406	187	7.9511
100	7.02	144	7.4271	188	7.9815
101	7.0247	145	7.433	189	7.9822
102	7.0322	146	7.4383	190	8.0027
103	7.0359	147	7.449	191	8.0086
104	7.0483	148	7.4558	192	8.01
105	7.0496	149	7.468	193	8.0445
106	7.0651	150	7.4733	194	8.0501
107	7.066	151	7.4893	195	8.0726
108	7.0767	152	7.4896	196	8.0811
109	7.0805	153	7.51	197	8.1006
110	7.0859	154	7.5144	198	8.1074
111	7.0932	155	7.5297	199	8.1184
112	7.0999	156	7.5376	200	8.1387
113	7.106	157	7.5499	201	8.1558
114	7.1135	158	7.5714	202	8.1727
115	7.1168	159	7.5766	203	8.1854
116	7.1229	160	7.5906	204	8.1873
117	7.1232	161	7.5928	205	8.1888
118	7.1452	162	7.6152	206	8.1976
119	7.1472	163	7.6369	207	8.2055
120	7.1473	164	7.6377	208	8.2072
121	7.1798	165	7.654	209	8.2168
122	7.2168	166	7.6605	210	8.2247
123	7.2518	167	7.6846	211	8.2339
124	7.2631	168	7.7081	212	8.241
125	7.2744	169	7.7161	213	8.2445
126	7.2744	170	7.7197	214	8.2609
127	7.2872	171	7.7297	215	8.2623
128	7.2889	172	7.7516	216	8.2746
129	7.2954	173	7.7652	217	8.2776
130	7.2986	174	7.7691	218	8.2876
131	7.3092	175	7.7924	219	8.2974
132	7.3132	176	7.8009	220	8.3027
133	7.3286	177	7.8126	221	8.313
134	7.3355	178	7.8139	222	8.3232
135	7.3539	179	7.8353	223	8.333
136	7.3563	180	7.8419	224	8.3394
137	7.3583	181	7.8687	225	8.3499
138	7.3659	182	7.8751	226	8.3662
139	7.376	183	7.8932	227	8.3739
140	7.3896	184	7.9097	228	8.3873

Cuadro 4.2: Frecuencias propias (continuación)

Modo	Frecuencia(Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)
229	8.388	273	9.1255	316	10.251
230	8.397	274	9.1403	317	10.266
231	8.4152	275	9.183	318	10.322
232	8.4256	276	9.193	319	10.339
233	8.4266	277	9.2283	320	10.349
234	8.4421	278	9.2401	321	10.397
235	8.4473	279	9.2468	322	10.414
236	8.4638	280	9.2925	323	10.443
237	8.4648	281	9.3039	324	10.455
238	8.4731	282	9.3478	325	10.473
239	8.4864	283	9.3586	326	10.491
240	8.5027	284	9.4057	327	10.549
241	8.5032	285	9.4174	328	10.561
242	8.5255	286	9.4653	329	10.57
243	8.5434	287	9.4764	330	10.63
244	8.5661	288	9.5242	331	10.65
245	8.5832	289	9.5357	332	10.672
246	8.5842	290	9.5855	333	10.711
247	8.6276	291	9.5971	334	10.732
248	8.6283	292	9.6475	335	10.789
249	8.6602	293	9.6593	336	10.804
250	8.6696	294	9.7105	337	10.817
251	8.6784	295	9.7228	338	10.849
252	8.6932	296	9.75	339	10.886
253	8.7052	297	9.775	340	10.903
254	8.7102	298	9.7856	341	10.97
255	8.7129	299	9.7994	342	10.976
256	8.7475	300	9.8399	343	10.989
257	8.7549	301	9.8528	344	11.049
258	8.7872	302	9.9031	345	11.082
259	8.7992	303	9.9178	346	11.127
260	8.8314	304	9.9728	347	11.137
261	8.8446	305	9.9847	348	11.163
262	8.8773	306	10.045	349	11.172
263	8.8912	307	10.055	350	11.236
264	8.9239	308	10.09	351	11.246
265	8.9387	309	10.109	352	11.265
266	8.9732	310	10.122	353	11.333
267	8.9874	311	10.126	354	11.363
268	8.9936	312	10.18	355	11.385
269	9.0249	313	10.188	356	11.425
270	9.0371	314	10.194	357	11.458
271	9.0774	315	10.241	358	11.464
272	9.0877	316	10.251	359	11.523

Cuadro 4.3: Frecuencias propias (continuación)

Modo	Frecuencia(Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)
360	11.557	404	13.249	448	14.3
361	11.567	405	13.253	449	14.367
362	11.567	406	13.308	450	14.415
363	11.62	407	13.335	451	14.449
364	11.633	408	13.35	452	14.57
365	11.657	409	13.353	453	14.6
366	11.678	410	13.365	454	14.629
367	11.722	411	13.373	455	14.726
368	11.752	412	13.379	456	14.759
369	11.76	413	13.39	457	14.887
370	11.821	414	13.409	458	14.918
371	11.861	415	13.411	459	15.027
372	11.915	416	13.42	460	15.051
373	11.924	417	13.44	461	15.076
374	11.967	418	13.45	462	15.162
375	12.029	419	13.457	463	15.209
376	12.049	420	13.485	464	15.227
377	12.075	421	13.493	465	15.236
378	12.104	422	13.522	466	15.256
379	12.142	423	13.548	467	15.264
380	12.163	424	13.559	468	15.276
381	12.178	425	13.564	469	15.383
382	12.248	426	13.578	470	15.407
383	12.291	427	13.579	471	15.558
384	12.304	428	13.582	472	15.565
385	12.348	429	13.675	473	15.66
386	12.352	430	13.713	474	15.723
387	12.4	431	13.714	475	15.734
388	12.42	432	13.727	476	15.903
389	12.46	433	13.796	477	15.911
390	12.514	434	13.811	478	15.961
391	12.576	435	13.857	479	16.086
392	12.589	436	13.893	480	16.089
393	12.631	437	13.919	481	16.269
394	12.689	438	13.942	482	16.273
395	12.748	439	13.954	483	16.458
396	12.759	440	14	484	16.464
397	12.808	441	14.004	485	16.65
398	12.869	442	14.047	486	16.659
399	12.928	443	14.076	487	16.846
400	12.993	444	14.115	488	16.85
401	13.052	445	14.129	489	16.861
402	13.12	446	14.144	490	17.048
403	13.179	447	14.263	491	17.068

Cuadro 4.4: Frecuencias propias (continuación)

Modo	Frecuencia(Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)
492	17.208	535	19.425	578	21.375
493	17.252	536	19.478	579	21.39
494	17.264	537	19.495	580	21.52
495	17.281	538	19.518	581	21.567
496	17.312	539	19.568	582	21.686
497	17.455	540	19.594	583	21.731
498	17.465	541	19.595	584	21.753
499	17.498	542	19.658	585	21.855
500	17.506	543	19.667	586	22.031
501	17.634	544	19.681	587	22.171
502	17.686	545	19.698	588	22.281
503	17.699	546	19.724	589	22.312
504	17.721	547	19.759	590	22.331
505	17.815	548	19.791	591	22.484
506	17.917	549	19.797	592	22.621
507	17.944	550	19.823	593	22.674
508	17.997	551	19.848	594	22.813
509	18.082	552	19.856	595	22.894
510	18.131	553	19.865	596	22.947
511	18.183	554	19.873	597	23.142
512	18.203	555	19.903	598	23.268
513	18.362	556	20.001	599	23.36
514	18.413	557	20.062	600	23.484
515	18.502	558	20.08	601	23.587
516	18.578	559	20.167	602	23.608
517	18.591	560	20.308	603	23.832
518	18.621	561	20.328	604	23.945
519	18.649	562	20.367	605	24.187
520	18.824	563	20.409	606	24.295
521	18.903	564	20.441	607	24.547
522	19	565	20.58	608	24.637
523	19.062	566	20.605	609	24.717
524	19.09	567	20.691	610	24.906
525	19.132	568	20.695	611	24.918
526	19.168	569	20.843	612	24.928
527	19.292	570	20.967	613	24.998
528	19.333	571	21.117	614	25.207
529	19.34	572	21.123	615	25.279
530	19.369	573	21.158	616	25.36
531	19.374	574	21.208	617	25.575
532	19.375	575	21.232	618	25.658
533	19.391	576	21.28	619	25.682
534	19.396	577	21.349	620	25.727

Cuadro 4.5: Frecuencias propias (continuación)

Modo	Frecuencia(Hz)	Modo	Frecuencia (Hz)
621	25.737	655	27.601
622	25.934	656	27.645
623	25.98	657	27.669
624	26.036	658	27.684
625	26.08	659	27.716
626	26.134	660	27.736
627	26.265	661	27.777
628	26.384	662	27.798
629	26.393	663	27.815
630	26.406	664	27.821
631	26.626	665	27.856
632	26.671	666	27.866
633	26.696	667	27.875
634	26.737	668	27.997
635	26.8	669	27.998
636	26.997	670	28.078
637	27.07	671	28.37
638	27.113	672	28.394
639	27.151	673	28.43
640	27.193	674	28.493
641	27.202	675	28.626
642	27.211	676	28.653
643	27.242	677	28.769
644	27.275	678	28.828
645	27.315	679	28.889
646	27.371	680	28.909
647	27.406	681	29.17
648	27.408	682	29.243
649	27.45	683	29.302
650	27.499	684	29.68
651	27.53	685	29.776
652	27.533	686	29.814
653	27.536	687	29.953
654	27.581	688	29.979

Cuadro 4.6: Frecuencias propias (continuación)

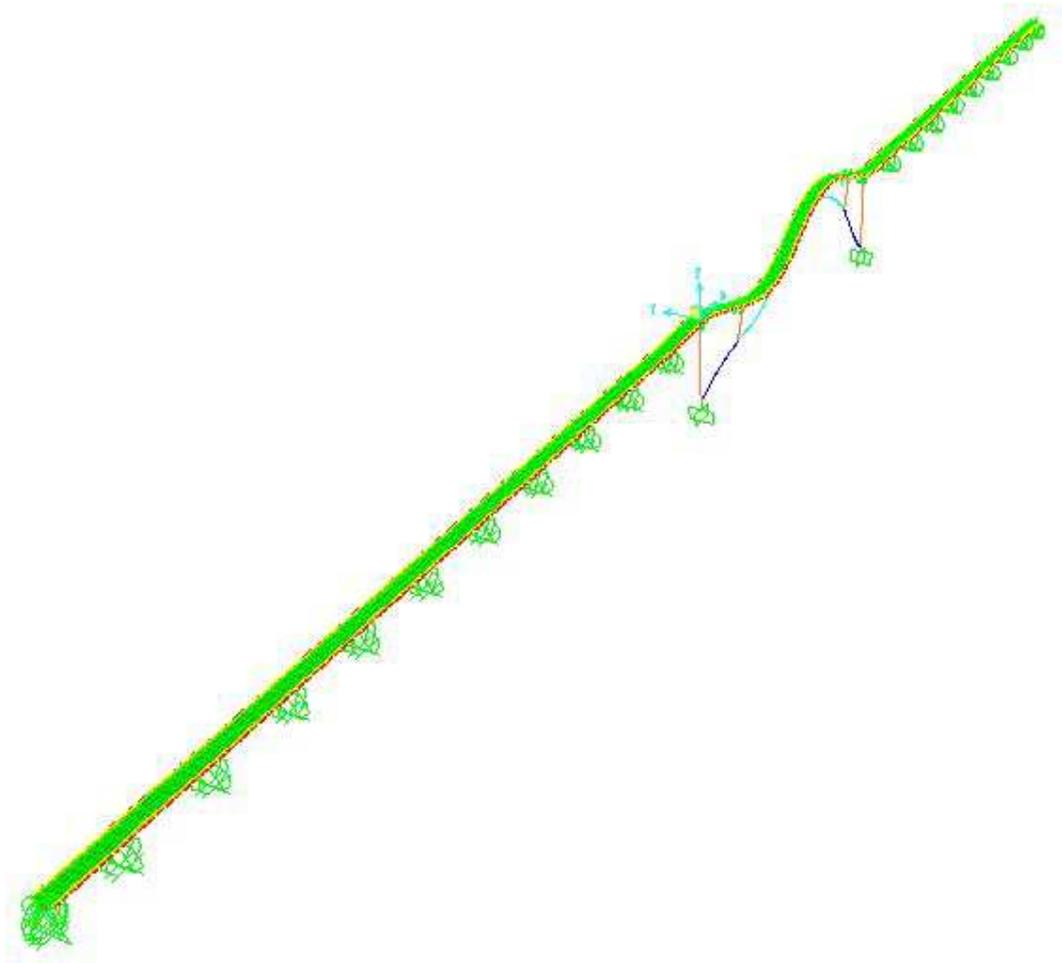


Figura 4.14: Primer modo de vibración, de flexión acoplada de arco (0.5638 Hz).

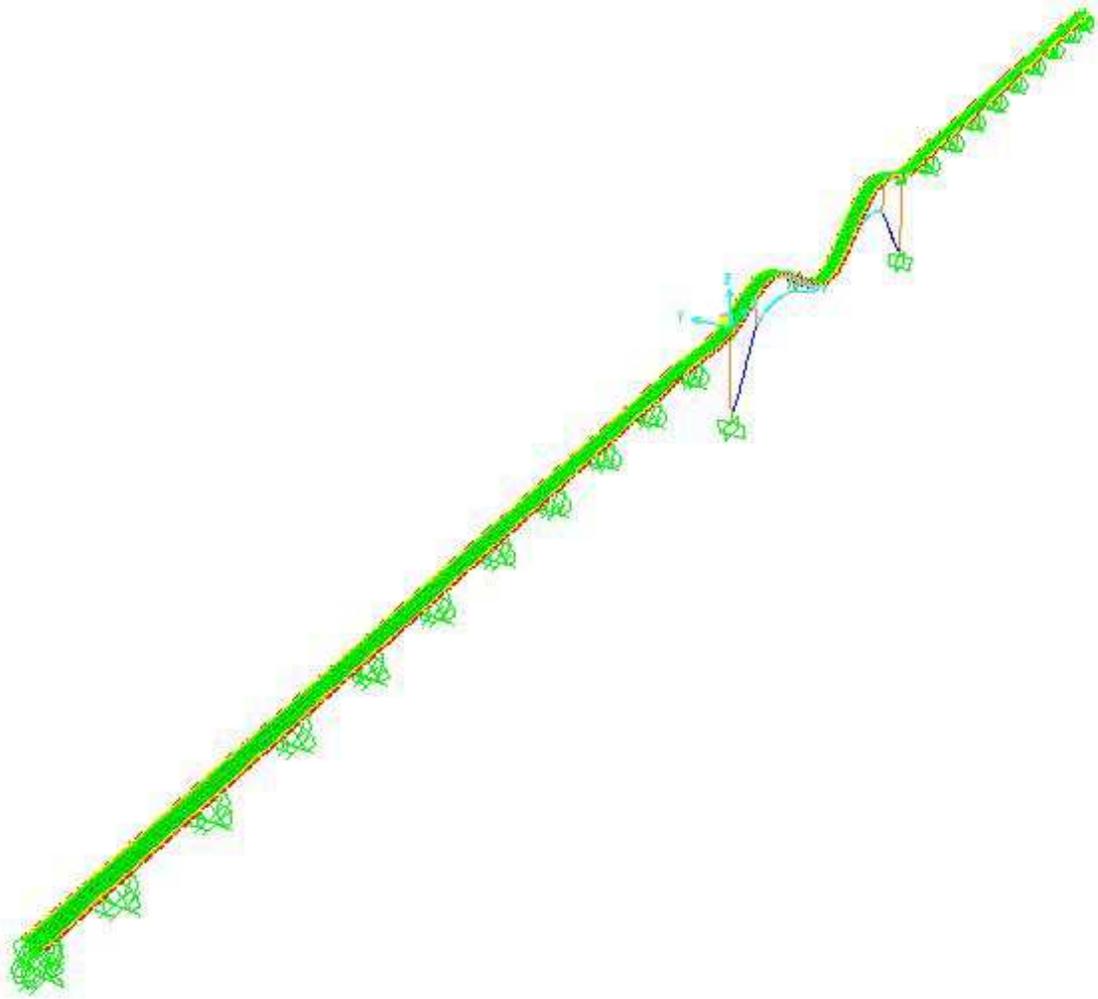


Figura 4.15: Segundo modo de vibración, de flexión acoplada de arco (0.68771 Hz).

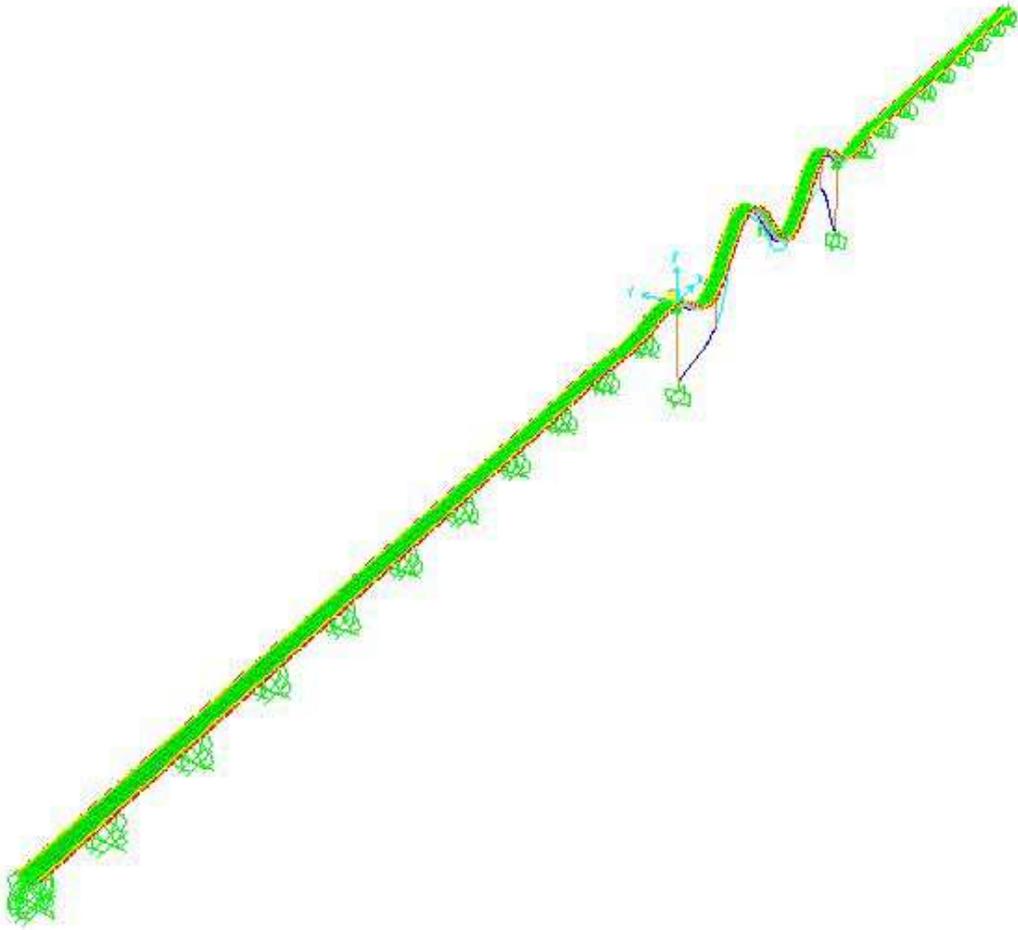


Figura 4.16: Tercer modo de vibración, de flexión acoplada de arco (1.1718 Hz).

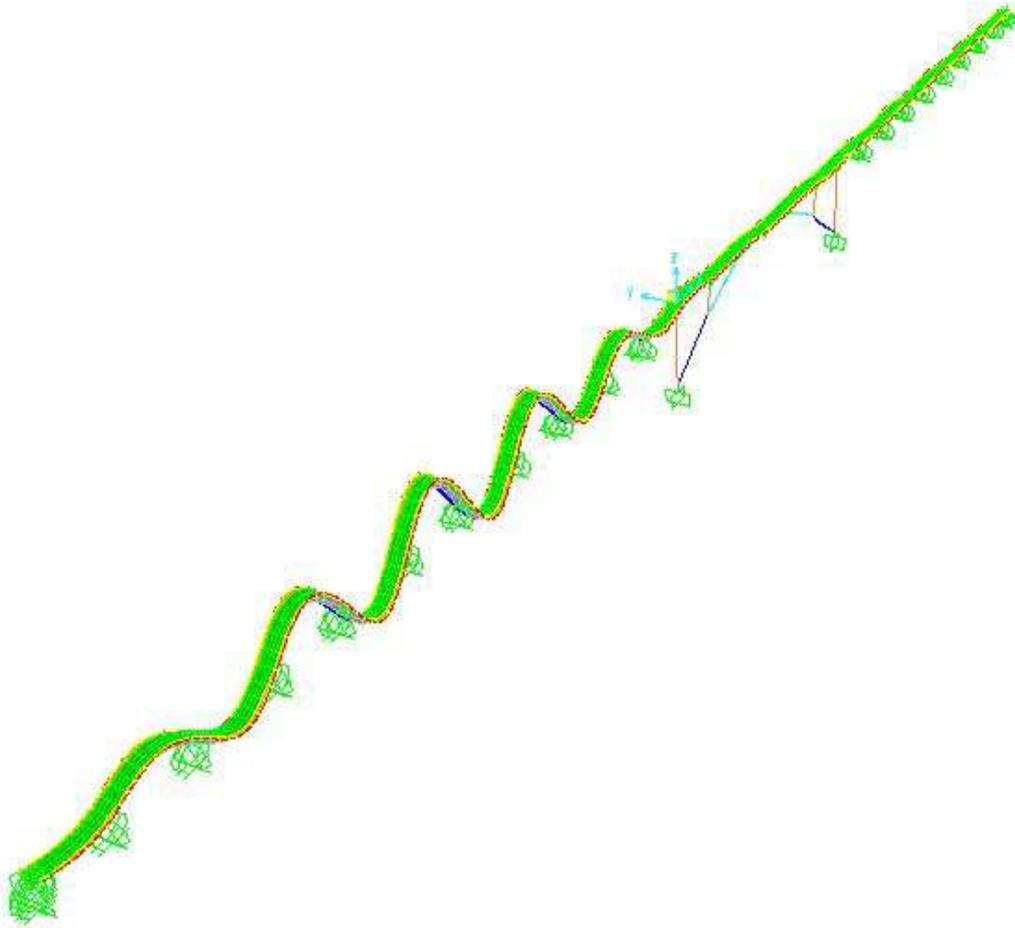


Figura 4.17: Modo de vibración nº 7 (2.0154 Hz).

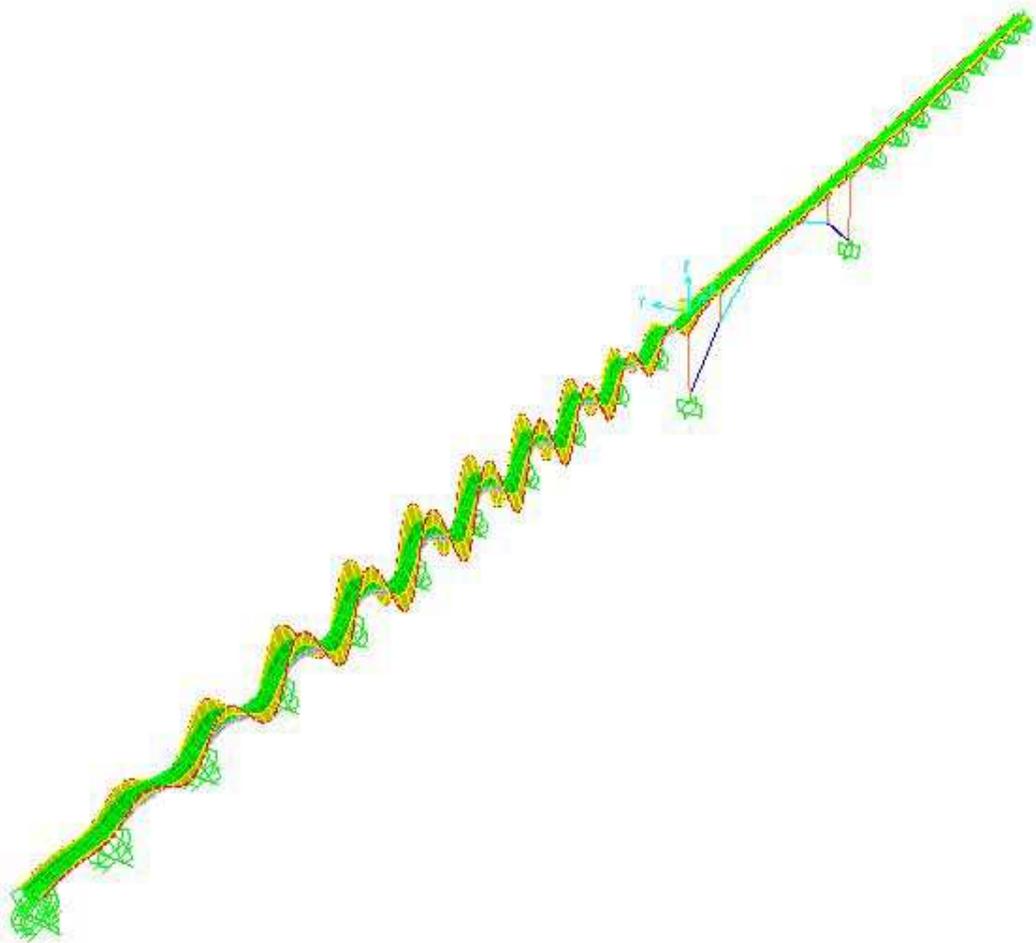


Figura 4.18: Modo de vibración nº 46 (6.1468 Hz).

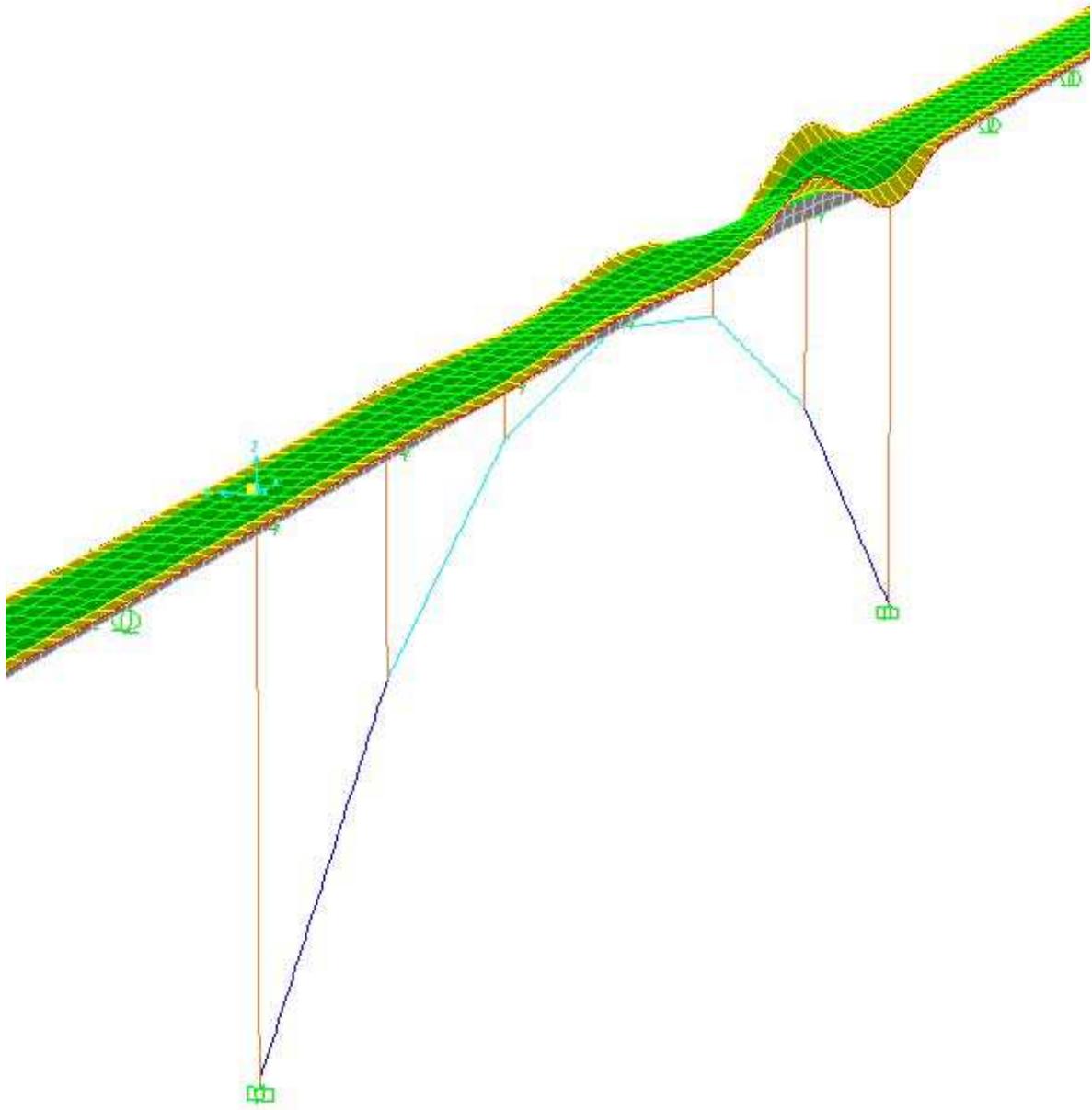


Figura 4.19: Modo de vibración nº 72, torsión en vanos sobre el arco (6.4461 Hz).

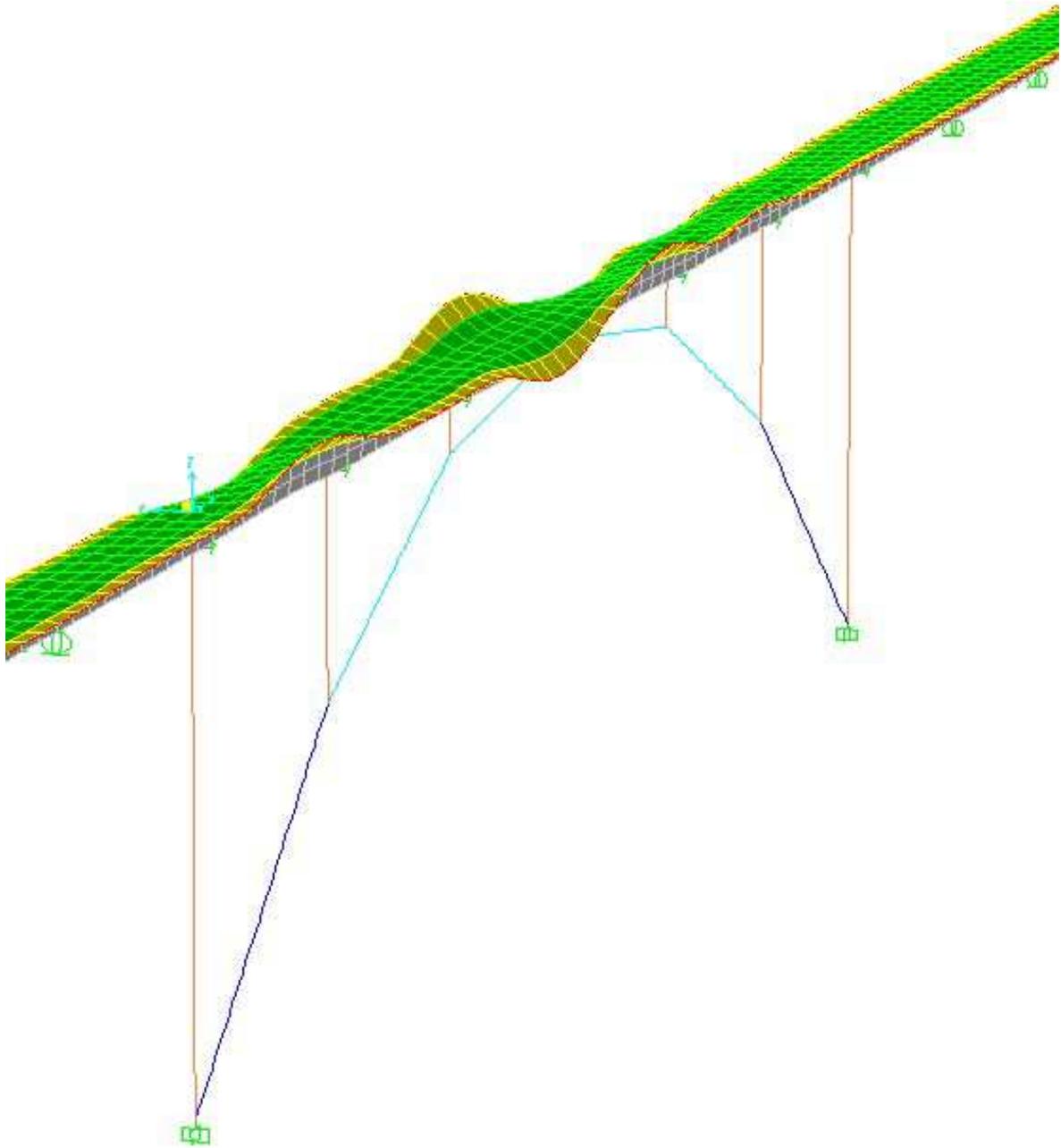


Figura 4.20: Modo de vibración nº 75, torsión en vanos sobre el arco (6.4547 Hz).

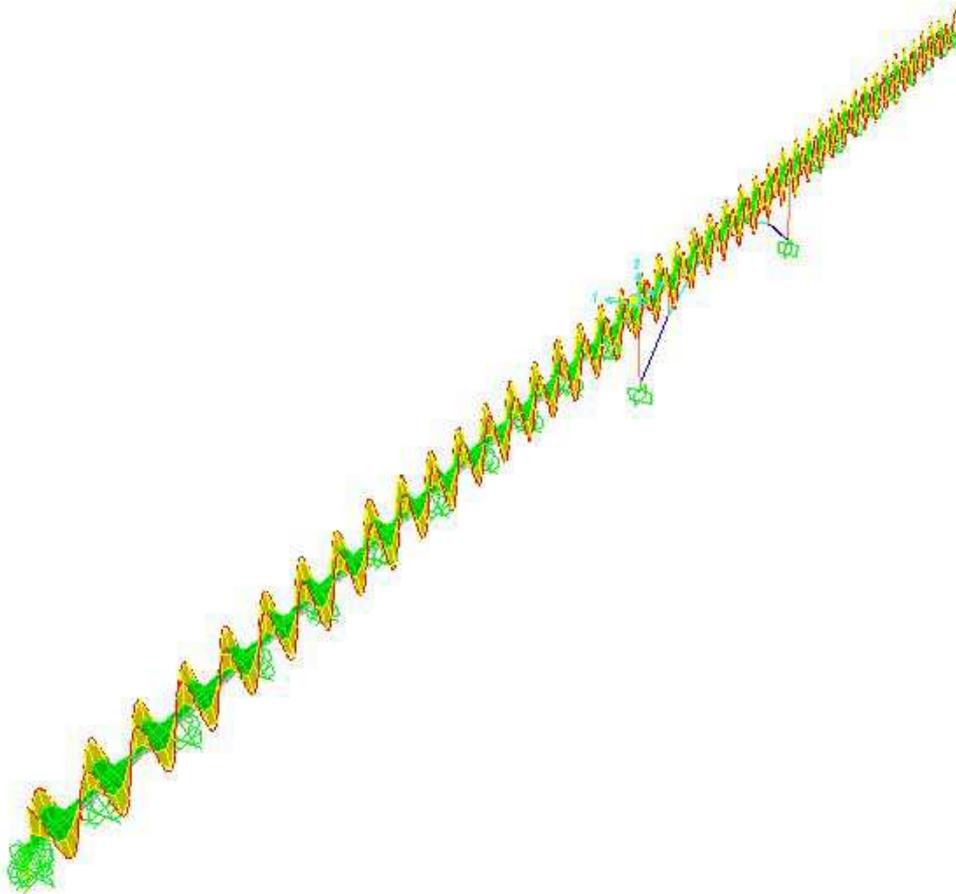


Figura 4.21: Modo de vibración nº 208 (8.2072 Hz).

4.6.2. Valores máximos y valores límite

Para tener en cuenta los efectos de las irregularidades de la vía, la IAPF-07 establece, para la tipología y velocidad de proyecto del viaducto tratado, el cálculo del coeficiente φ'' para amplificar los resultados calculados. Para el viaducto sobre el río Tajo en el embalse de Alcántara, este coeficiente se ha evaluado y obtenemos un valor negativo por lo que tomamos $\varphi'' = 0$. Se ha considerado la expresión (B12) de la IAPF-07, con $L_{\Phi} = 85,846 \text{ m}$; $f_0 = 0,5 \text{ Hz}$.

4.6.3. Valores máximos. Tramo de arco.

Aceleración

Máximo valor. $A_v^{ideal} = 1,066 \text{ m/s}^2$

Punto: 33 (Situado en el vano 15).

Tren: A1.

Velocidad: 420 Km/h.

$$A_v = A_v \cdot (1 + 0,5\varphi'') = 1,066 \text{ m/s}^2$$

Valor límite: $0.35g = 3.5 \text{ m/s}^2$.

Conclusión: No se supera el límite de aceleración máxima permitido por la IAPF-07.

Desplazamiento

Máximo valor: $\delta_{din,real}^{ideal} = 3,564E^{-2} \text{ m}$

Punto: 64 (primer cuarto de vano, vano 15, sobre el arco).

Tren: A2.

Velocidad: 420 Km/h.

$$\delta_v = \delta_{din,real} \cdot (1 + 0,5\varphi'') = 3,564E^{-2} \text{ m}$$

Valores límite: 7.5 cm para vanos de 45 m, 10 cm para vanos de 60 m, 9.5 cm para vanos de 57 m y 9 cm para vanos de 54 m.

Conclusión: No se supera el límite de desplazamiento máximo permitido por la IAPF-07.

4.6.4. Valores máximos. Resto de estructura.

Aceleración

Máximo valor. $A_v^{ideal} = 1,444m/s^2$

Punto: 91 (centro del vano 25).

Tren: A9.

Velocidad: 408 Km/h.

$$A_v = A_v \cdot (1 + 0,5\varphi'') = 1,444m/s^2$$

Valor límite: $0.35g=3.5 m/s^2$.

Conclusión: No se supera el límite de aceleración máxima permitido por la IAPF-07.

4.6.5. Curvas envolventes de aceleraciones máximas

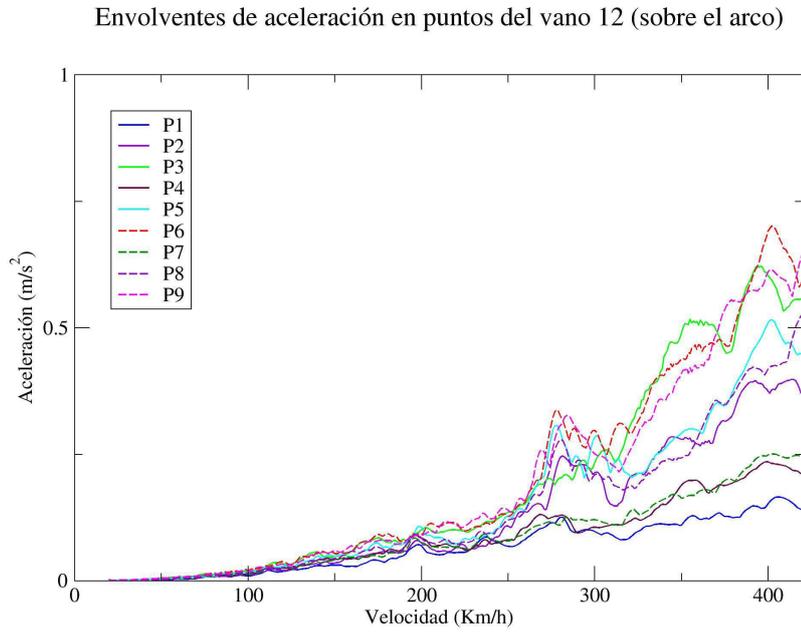


Figura 4.22: Envloventes de aceleración en puntos del vano 12 (sobre el arco).

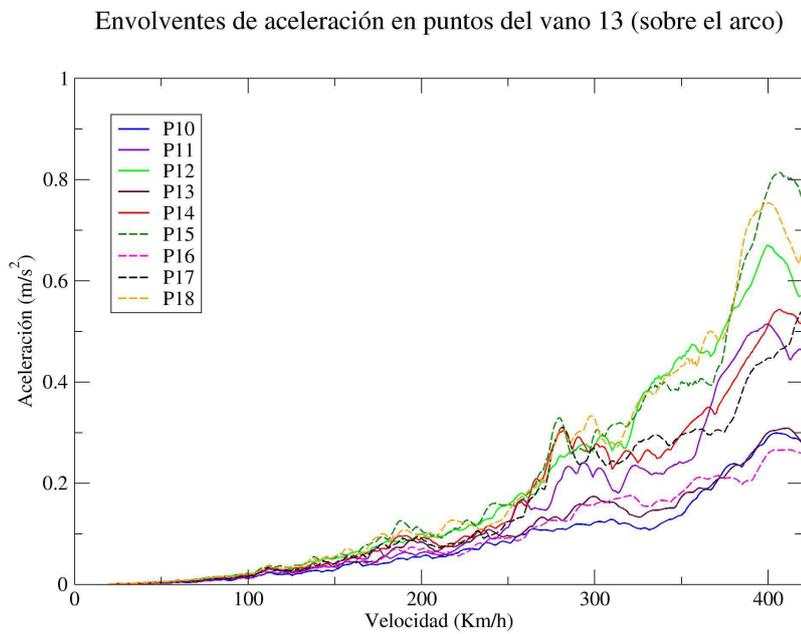


Figura 4.23: Envloventes de aceleración en puntos del vano 13 (sobre el arco).

Envoltentes de aceleración en puntos del vano 14 (sobre el arco)

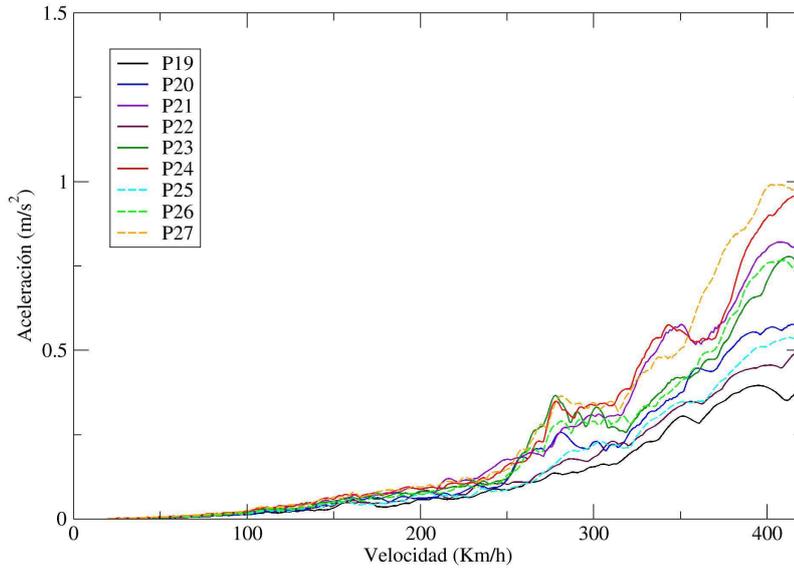


Figura 4.24: Envoltentes de aceleración en puntos del vano 14 (sobre el arco).

Envoltentes de aceleración en puntos del vano 15 (sobre el arco)

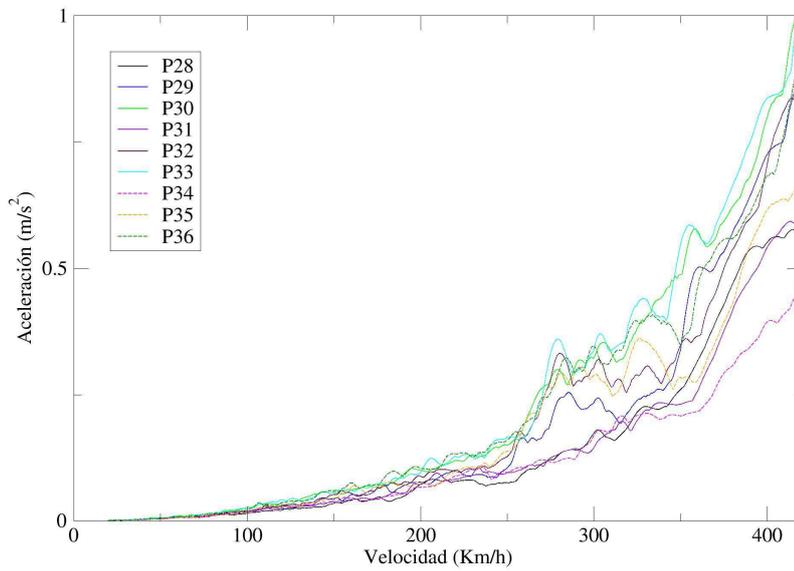


Figura 4.25: Envoltentes de aceleración en puntos del vano 15 (sobre el arco).

Envoltentes de aceleración en puntos del vano 16 (sobre el arco)

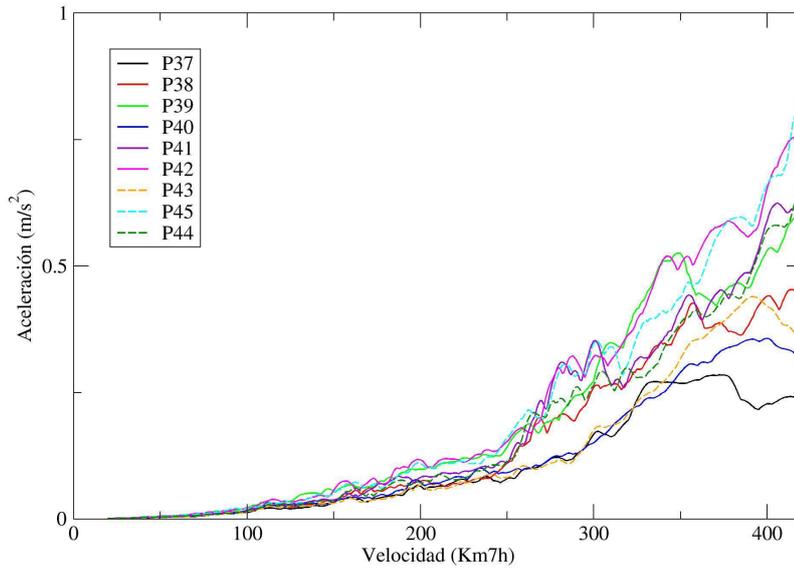


Figura 4.26: Envoltentes de aceleración en puntos del vano 16 (sobre el arco).

Envoltentes de aceleración en puntos del vano 17 (sobre el arco)

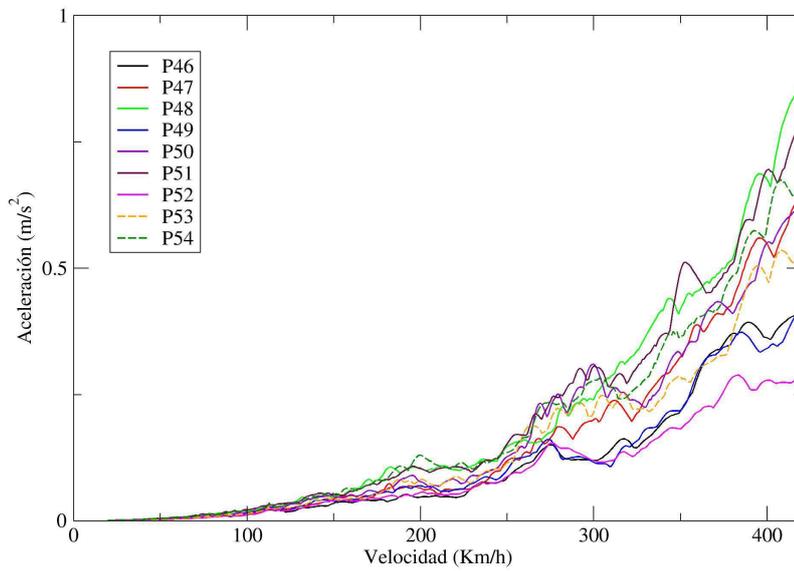


Figura 4.27: Envoltentes de aceleración en puntos del vano 17 (sobre el arco).

Envolventes de aceleración en puntos exteriores al arco (vanos 1-10)

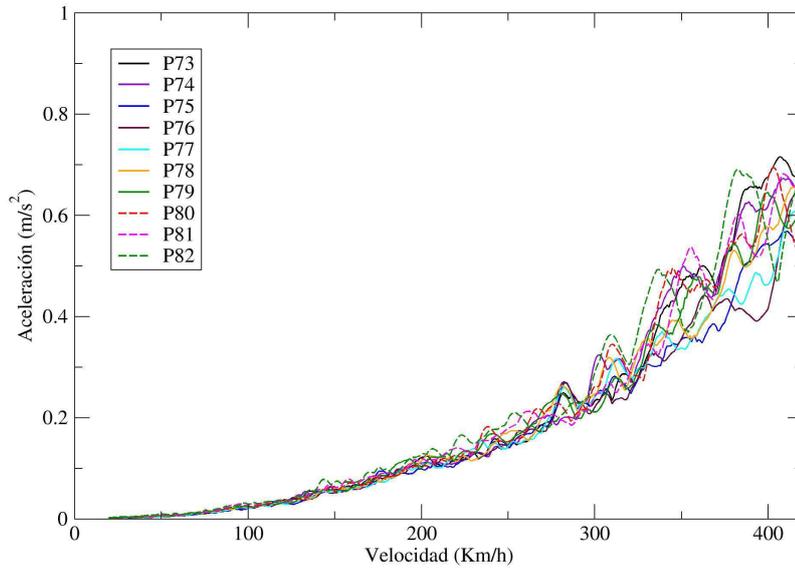


Figura 4.28: Envoltentes de aceleración en puntos exteriores al arco (vanos 1-10).

Envolventes de aceleración en puntos exteriores al arco (vanos 11-,18-26)

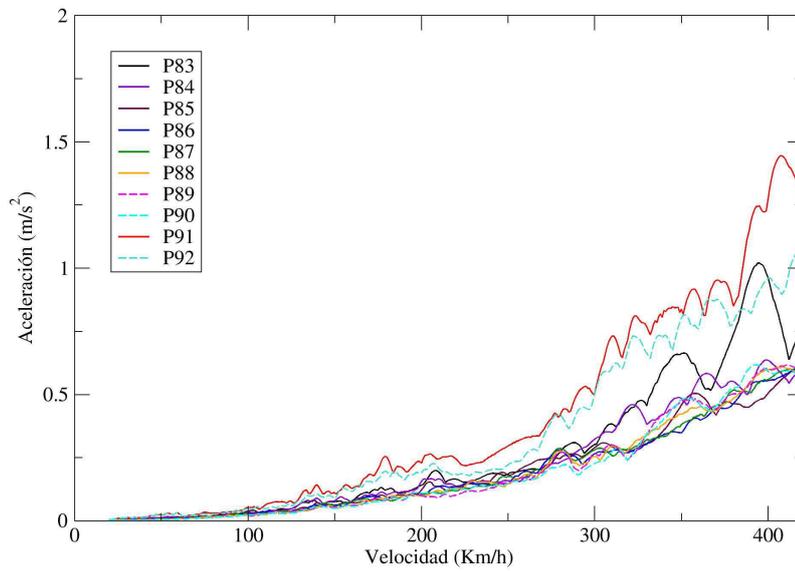


Figura 4.29: Envoltentes de aceleración en puntos exteriores al arco (vanos 11,18-26).

Envolventes de aceleración en el punto 33

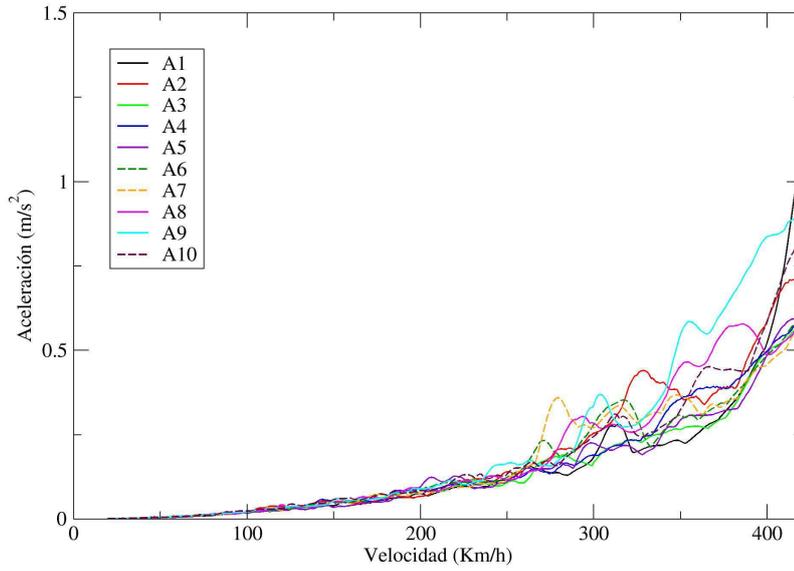


Figura 4.30: Envolventes de aceleración en el punto 33 (vano 15)

Envolventes de aceleración en el punto 91

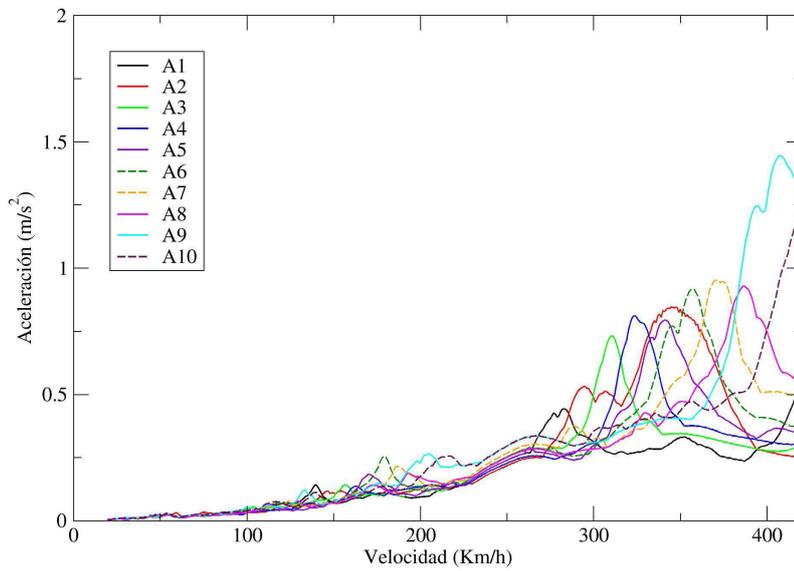


Figura 4.31: Envolventes de aceleración en el punto 91 (centro del vano 25)

4.6.6. Curvas envolventes de desplazamientos máximos

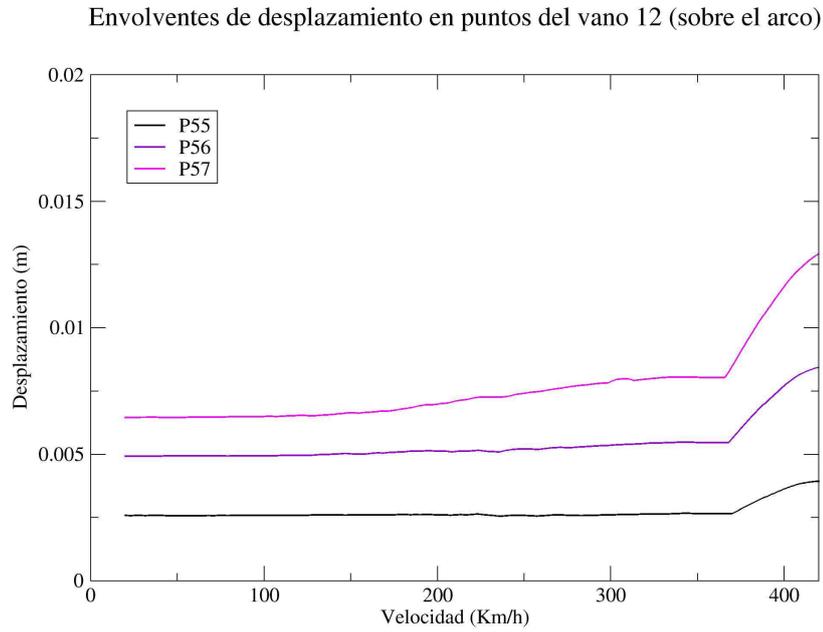


Figura 4.32: Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 12 (sobre el arco).

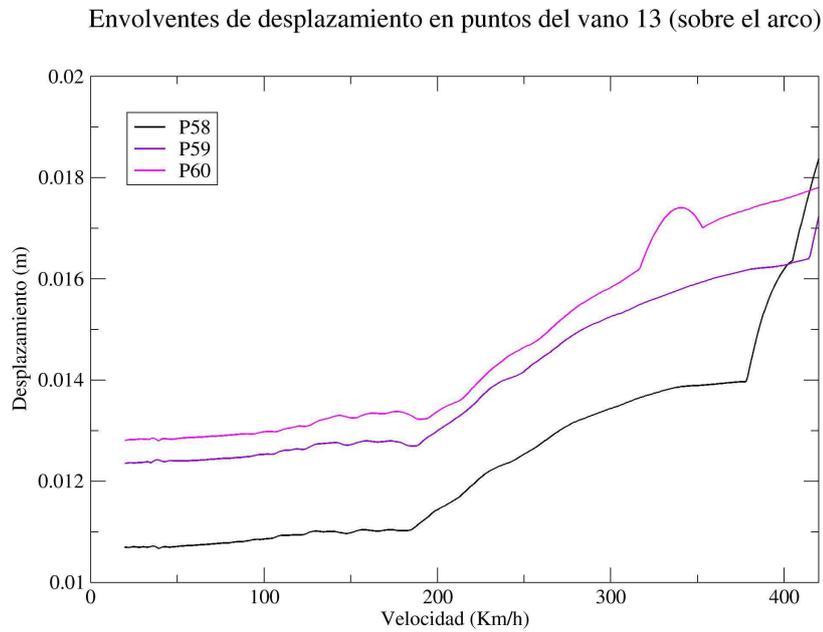


Figura 4.33: Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 13 (sobre el arco).

Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 14 (sobre el arco)

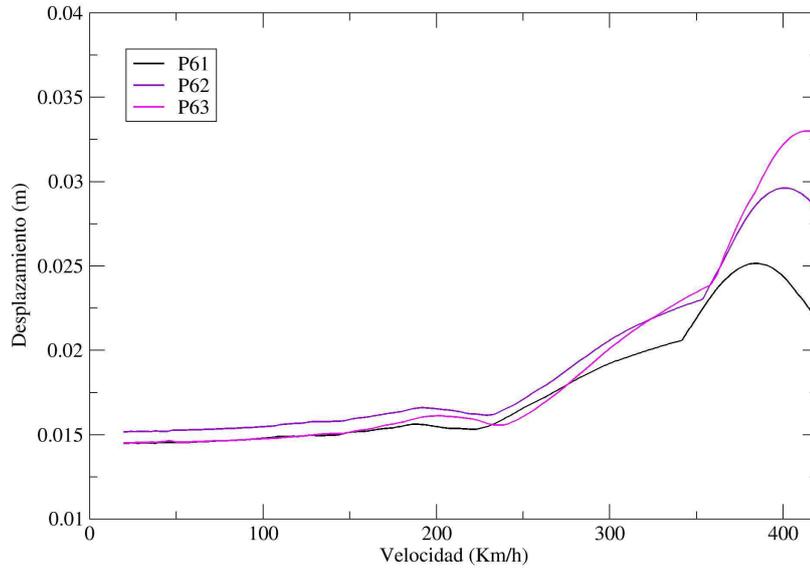


Figura 4.34: Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 14 (sobre el arco).

Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 15 (sobre el arco)

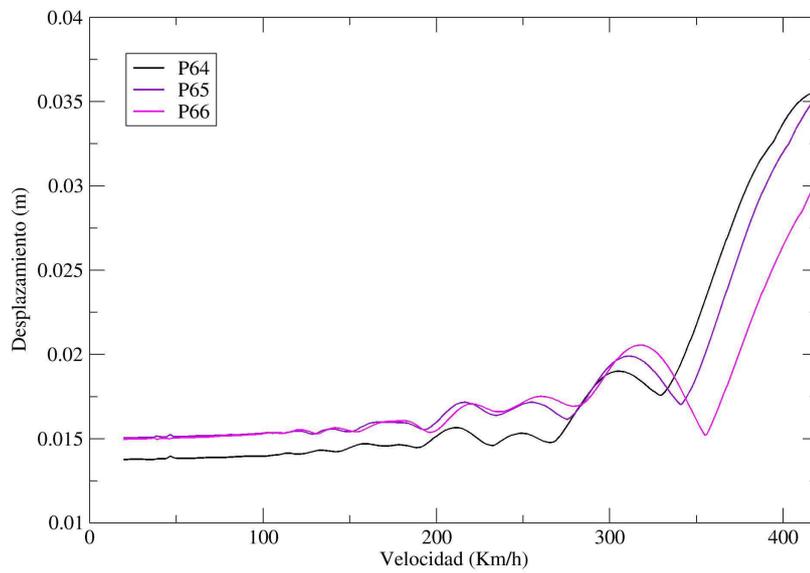


Figura 4.35: Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 15 (sobre el arco).

Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 16 (sobre el arco)

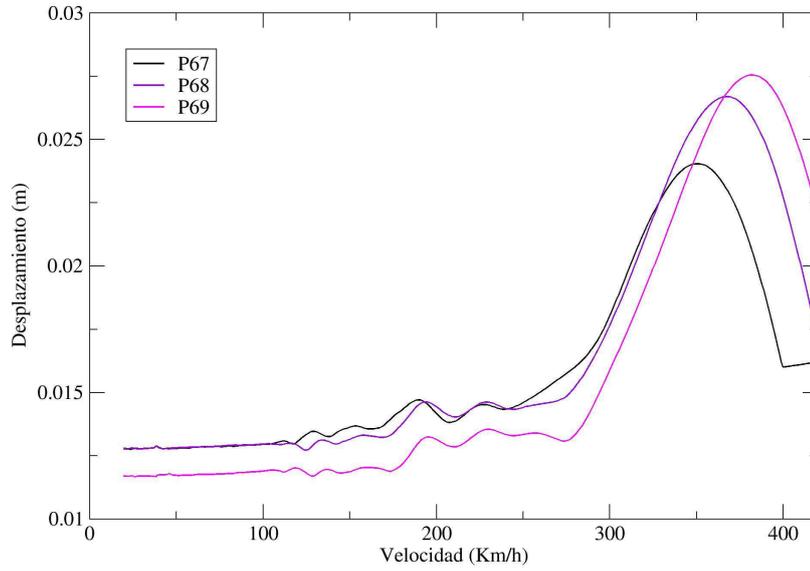


Figura 4.36: Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 16 (sobre el arco).

Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 17 (sobre el arco)

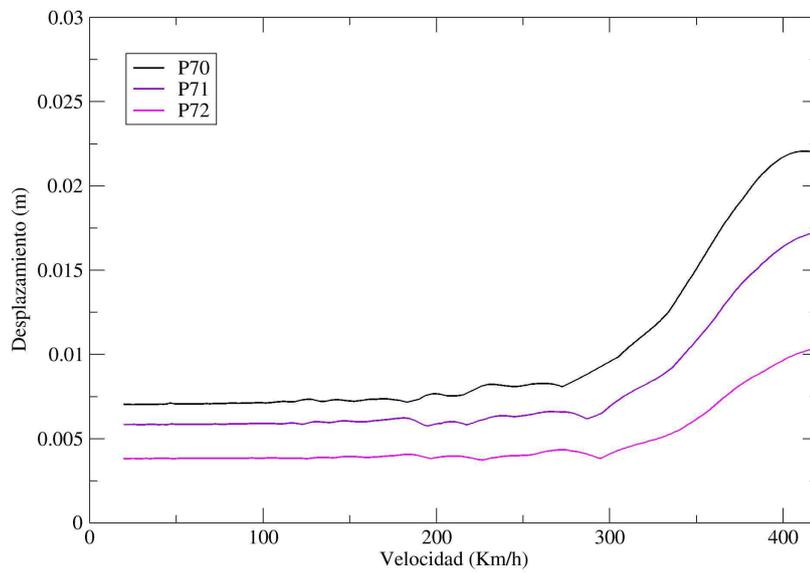


Figura 4.37: Envolventes de desplazamiento en puntos del vano 17 (sobre el arco).

Envolventes de desplazamiento en el punto 64

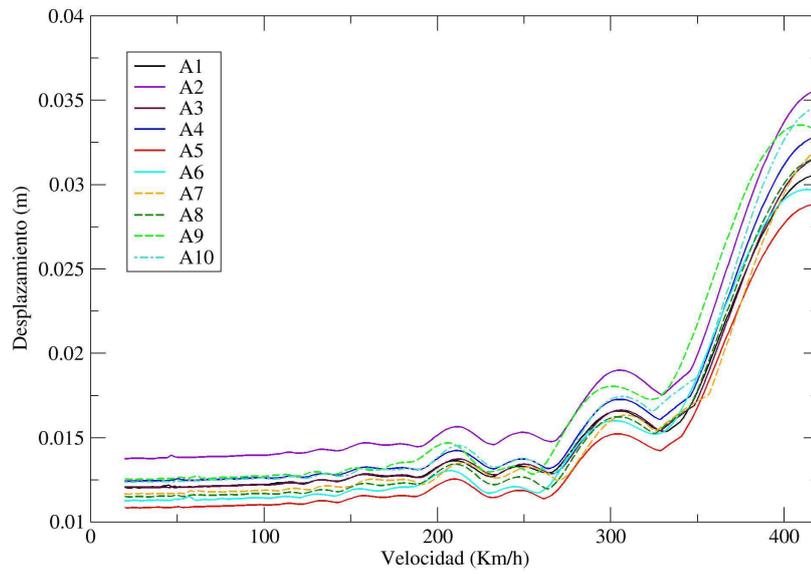


Figura 4.38: Envolventes de desplazamiento en el punto 64 (primer cuarto del vano 15, sobre el arco)

CAPÍTULO 5

Conclusiones

A modo de resumen, se recogen en los siguientes puntos las conclusiones alcanzadas en todo el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster:

1. El método semianalítico de resolución del problema de paso de cargas móviles presenta demostradas ventajas, en términos de precisión y tiempo de cálculo, frente a los métodos de integración incremental paso a paso. Esta metodología permite afrontar, de una manera realista, los pasos de carga de Km/h en Km/h aconsejados por el Eurocódigo, pasos necesarios para determinar con precisión la respuesta dinámica, y que de seguir las indicaciones de la instrucción IAPF, de paso de cargas de 10 km/h en 10 Km/h, no podrían ser registrados con exactitud.
2. Como ha quedado evidenciado según los resultados obtenidos, la estructura es válida. El arco sobre el río Tajo cumple la instrucción IAPF de forma holgada.
3. El análisis pone en evidencia la necesidad de realizar modelos 3D, debido a que existe torsión mixta que no es fácil tener en cuenta con modelos simplificados tipo viga o viga-torsión. La máxima aceleración se está dando en un punto situado en los extremos de la cama de balasto, donde torsión y flexión son relevantes.
4. Necesidad de modelos que combinen la dinámica propia del arco con la del tablero, ya que, como se observa en el modo fundamental, son modos de periodos altos donde tablero y arco responden de forma acoplada.
5. Aunque las curvas de envolventes muestran los máximos a velocidades próximas al máximo teórico, exist resonancia, ya que observando las curvas, se producen los máximos siguiendo un patrón resonante.

Bibliografía

- [1] Instrucción de Acciones a considerar en el proyecto de Puentes de Ferrocarril (IAPF), 2007.
- [2] P. Museros, A. Martínez-Castro, and A. Castillo-Linares. Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span bernoulli-euler beams traversed by moving loads. *Journal of Sounds and Vibration*, 294:278-297,2006.
- [3] UNE-EN 1991-2:2003. Eurocódigo 1: Acciones en estructuras. Parte 2: Cargas de tráfico en puentes. Septiembre 2003.
- [4] Fiche 776-1R. «Charges a prender en consideration dans le calcul des ponts-rails». 5 Ed, Agosto de 2006.
- [5] Comité D214 sobre puentes de ferrocarril para velocidades superiores a 200 Km/h. ERRI D214 (a. Design of Railway Bridges for Speed up to 350 Km/h; Dynamic loadings effects including resonance. Technical report, european Rail Research institute.,1998.
- [6] J. Dominguez-Barbero. *Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia*. PhD thesis, Univeridad Politécnica de Madrid., 2001.
- [7] K. Liu, E. Reynders, G. De Roeck, and G.Lombaert. Experimental and numerical analysis of a composite bridge for high-speed trains. *Journal of Sounds and Vibration*, 320:201-220, 2009.
- [8] L. Frýba. Dinamic behaviour of bridges due to high-speed trains, in: R. Delgado, R. Calçada, A. Campos (eds.). In *Workshop Bridges for High-Speed railways*, pages 137-158, Faculty of Eneginering, University os Oporto, 2004.
- [9] F. Mancel. Cedypia: Analytical software for calculating dynamic effects on railway bridges. In *Proceedings of the Fourth European Conference on Structural Dynamics (Eurodyn'99)*, volume 2, pages 669-674. A.A. Balkema, 1999.
- [10] F. Bleich. *Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken*. Universidad de Michigan, 1924.
- [11] A. Kryloff. *Über die erzwungenen schwingungen von gleichförmigen elastischen stäben*. Mathematische Annalen, 1995.
- [12] L. Frýba. *Vibration of solids and structures under moving loads*. 3rd ed. Thomas Telford, 1999.
- [13] J. Li and M. Su. The resonant vibration for a simply supported girder bridge under high-speed trains. *Journal of Sounds and Vibration*, 224:897-915. DOI:10.1006/jsvi.1999.2226, 1999.
- [14] Y.B. Yang, J.D. Yau, and L.C. Hsu. Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds. *Engineering Structures*, 19(11):936-944. DOI:10.1016/S0141-0296(97)00001-1,1997.
- [15] Y.H. Chen and C.Y. Li. Dynamic response of elevated high-speed railway. *Journal of Bridge Eneginering*, 5:124-130,2000.
- [16] T. Hayashikawa and N. Watanabe. Dynamic behaviour of continuous beams with moving loads.*Journal of the Engineering Mechanics Division,ASCE*,107:229-246,1981.
- [17] K. Henchi, M. Fafard, G. Dhatt, and M. Talbot. Dynamic behaviour of multispan beams under moving loads. *Journal of Sounds and Vibration*,199(1):33-50. doi:10.1006/jsvi.1996.0628,1997.
- [18] R.W.Clough and J. Penzien. *Dynamics of Structures*. Mac Graw-Hill., 1993.
- [19] N.M.Newmark. A method of computation for structural dynamics. *ASCE*, 85, 1959.