Universidad de Granada

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas

José García Suárez

2015

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: José García Suárez
ISBN: 978-84-9125-797-4
URI: http://hdl.handle.net/10481/43529

Granada, 2015

Universidad de Granada

Errores y dificultades de estudiantes de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas

Tesis Doctoral presentada por:

JOSÉ GARCÍA SUÁREZ

Bajo dirección de:

Dr. D. Isidoro Segovia Alex

Dr. D. José Luis Lupiáñez Gómez

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

El doctorando D. JOSÉ GARCÍA SUÁREZ y los directores de la tesis, DR. D. ISIDORO SEGOVIA ALEX y DR. D. JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ GÓMEZ, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, España 2015

Director/es de la Tesis **Doctorando**

Fdo.: Isidoro Segovia Alex Fdo.: José García Suárez

Fdo.: José Luis Lupiáñez Gómez

El trabajo que se presenta en este documento pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctora dentro del programa de doctorado “Didáctica de la Matemática” impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Esta investigación se ha realizado en el seno del Grupo FQM193 “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía” y se ha llevado a cabo con el apoyo del Proyecto de Investigación "Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I de España.

AGRADECIMIENTOS

A los profesores doctores Isidoro Segovia Alex y José Luis Lupiáñez Gómez, por su colaboración y aportes invaluables en el desarrollo de este trabajo.

Al grupo de Investigación de Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, por las facilidades prestadas para el desarrollo de esta investigación.

Al Dr. Pablo Flores, por su amistad entrañable y sus consejos siempre que perdía el rumbo.

A la Dra. Ileana Landeros, por su apoyo incondicional durante las primeras etapas de este trabajo.

Al Dr. Gerardo Núñez por su colaboración desinteresada, sin la cual no hubiera sido posible la finalización de este

A la Universidad de Guadalajara (México), por la beca otorgada a través del Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) de la Secretaría de Educación Pública del Gobierno de México para la realización del Doctorado.

Al Centro Universitario de la Costa Sur (Autlán de Navarro, Jalisco, México) por las facilidades otorgadas en el desarrollo de este trabajo.

A los compañeros de generación, anteriores y posteriores del Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por los momentos y experiencias compartidas.

A mis padres, por su apoyo y comprensión para llevar a cabo este proyecto de vida.

A mis hijas Lupita y Mari José, porque ellas son el motivo y causa principal de haber emprendido esta aventura.

A mi esposa Judith, quien en todo momento ha estado a mi lado y sin su apoyo no hubiera concluido este proyecto.

A todos gracias…

Índice General

Capítulo 5. Conclusiones

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

Origen de la investigación y delimitación del problema de investigación

En este capítulo nos ocupamos de la génesis del problema de investigación y de establecer los objetivos del trabajo referidos a los usos y significados de las letras como fuentes de errores algebraicos por parte de los estudiantes del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara (México) (CUCSUR).

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Durante mi experiencia docente de 18 años impartiendo álgebra a estudiantes de bachillerato y universidad, en continuas ocasiones percibí, algunos patrones repetitivos en los errores que manifestaban al responder a las tareas de las evaluaciones correspondientes a los temas de álgebra.

Así mismo, observé las continuas dificultades que manifestaban al intentar desarrollar distintas tareas algebraicas, proporcionadas con motivo de practicar los temas cotidianos expuestos en cada clase.

A partir de estas observaciones y evidencias que me causaban inquietud, me pregunté en numerosas ocasiones cuáles serán las fuentes de los errores con que tropezaban los estudiantes regularmente, por qué se repiten con tanta frecuencia algunos de ellos y cuáles serán las causas, por las cuales los estudiantes de distintos etapas educativas manifiestan errores comunes a pesar de tener distintos niveles de formación educativa en matemáticas. En la búsqueda de respuestas, y de manera un poco ingenua en principio — pues la respuesta a tales interrogantes es compleja por naturaleza — decidimos iniciar nuestra incursión en la investigación en el área de la Didáctica de la Matemática enfocando mi atención en los errores algebraicos que cometen los estudiantes en el primer semestre de un centro educativo como el CUCSUR. La necesidad de información al respecto fue la que me motivó a iniciar mi formación en el campo de la investigación en Didáctica de la Matemática a través de un máster, concretamente el Máster de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España.

Con base en el interés que se ha descrito, en el contexto de los cursos del Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, analizamos algunas respuestas relacionadas con la solución de distintas tareas matemáticas resueltas por estudiantes universitarios. Esto nos llevó a efectuar nuestra primera aproximación documental al tema de los errores que se presentan en educación matemática. Las lecturas realizadas en esa investigación documental nos ilustraron acerca de la importancia y vigencia de esta línea de investigación dentro del ámbito de la Didáctica de la Matemática. Además, reafirmó nuestro interés por este tema ya que nos permitió conocer más a fondo diversos enfoques teóricos e investigaciones sobre el álgebra y concretar mi Trabajo Fin de Máster en el campo de los errores algebraicos de los estudiantes universitarios (García, 2010).

Inicialmente llevamos a cabo una revisión bibliográfica de las distintas concepciones del álgebra que forman parte de la instrucción matemática de los estudiantes, y una vez que tomamos en consideración los distintos contenidos que implican la enseñanza del álgebra desde cada nivel, inferimos la necesidad de la elección y fundamentación de un instrumento de evaluación que permitiera explorar los conocimientos adquiridos por los alumnos que reciben la instrucción de álgebra bajo los enfoques mencionados. En la lectura de las investigaciones encontradas acerca del error algebraico, se manifestó, la preocupación por los errores que tenían los estudiantes de todos los niveles, sus características particulares, sus puntos de vista acerca de los problemas en sus sujetos de estudio y algunas recomendaciones para reducir el problema que se presenta en la mayoría de estudiantes que, ante el hecho de saberse poco competentes en el área matemática, muchas veces deciden elegir materias en las que no exista interacción constante con el área matemática.

Sobre la deserción, Chumba (2009, p. 12) explica los principales factores por los que un estudiante decide dejar sus estudios superiores, entre los que se encuentras la mala formación previa, que ocasiona baja autoestima e incapacidad para superar obstáculos. Esto puede sugerirle realizar una elección inadecuada de sus estudios que puede abocarle al abandono. Detrás de toda esta cadena de implicaciones en muchas ocasiones en las áreas físico-matemáticas de los estudios superiores están los errores del álgebra que documentaron autores como Franchi y Hernández (2003), Hartnett y Gelman (1998), Mason (2002), Chi y Roscoe (2002), Merenluoto y Lehtinen (2002), Kieran (1992), Brown, Montfort y Findley (2007). La revisión de las investigaciones acerca de los errores en educación matemática sigue el proceso de la Figura 1.

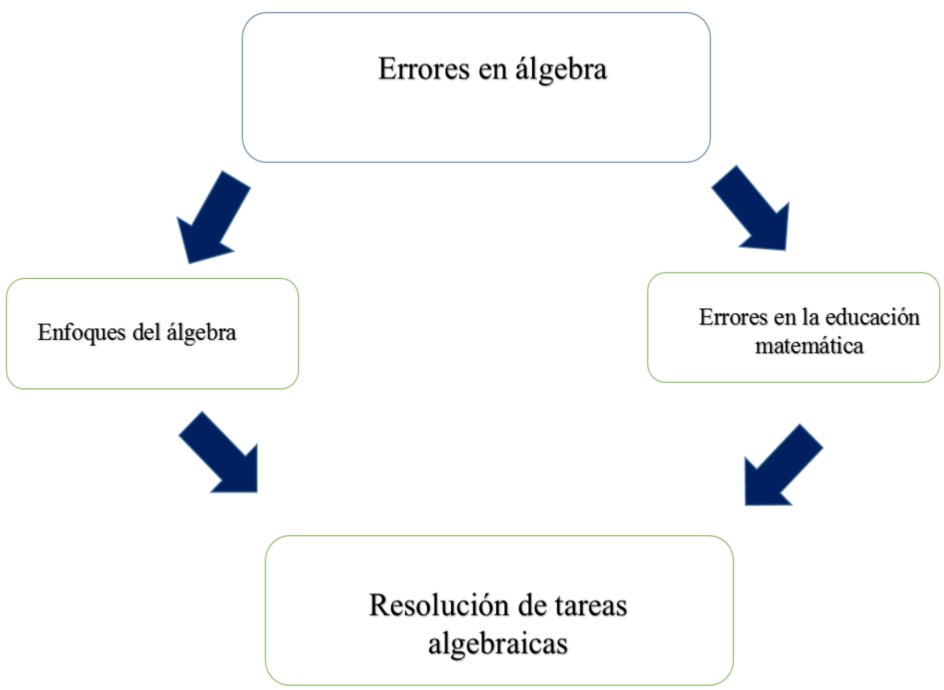


Figura 1. Planteamiento de investigación documental

Para contextualizar nuestro problema de investigación, realizamos una primera aproximación a la definición del concepto de álgebra, además de hacer un análisis de sus características más comunes y que han sido estudiadas desde las diferentes perspectivas establecidas por los investigadores de la Educación Matemática. En la revisión, ha quedado evidente la existencia de diversos conceptos acerca del álgebra que bien pueden ser considerados como fuente de errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje en la relación profesor-alumno, destacando en muchos de ellos el diferente papel que juegan las letras.

Como hemos indicado existe un problema en el CUCSUR ocasionado porque los estudiantes de primer ingreso llegan con problemas en su desempeño algebraico. Esto puede ocasionar problemas de bajo rendimiento y una frustración posterior que puede ocasionar la deserción escolar o que el estudiante tenga problemas para avanzar en su educación superior. El hecho de que el álgebra forme parte importante de las titulaciones que incluyen matemáticas, acrecienta este problema.

Por esta razón consideramos necesario realizar un estudio que permita conocer cuáles son las causas principales por las que estos alumnos tienen dificultades que les impiden resolver adecuadamente las tareas algebraicas que se les presentan regularmente en sus estudios universitarios y qué papel juegan las letras en esas dificultades. Esta necesidad nos permite plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las causas más frecuentes de los errores que cometen los estudiantes universitarios cuando es necesario el manejo y la comprensión de los distintos usos de las letras en álgebra?

Para abordar esta pregunta, a lo largo de esta memoria de tesis responderemos a las siguientes preguntas específicas:

1. ¿Es posible caracterizar algunos elementos de las respuestas de los estudiantes y agruparlas para evidenciar las distintas fuentes de errores originados por los distintos usos y significados de las letras en álgebra?

2. ¿Qué sucede en la introspección cognitiva del estudiante cuando se enfrenta a tareas que conscientemente sabe que no puede resolver, como es el caso de algunas tareas de álgebra, donde se involucran los distintos usos y significados de las letras?
3. ¿Existe relación entre el rendimiento de los estudiantes y los errores que cometen de acuerdo a las titulaciones en las que están inscritos?
4. ¿Existe relación entre el rendimiento de los estudiantes y los errores que cometen de acuerdo al sexo al que pertenecen?

Considerando su formación académica previa, ¿están situados los estudiantes de nivel universitario en los niveles más altos de comprensión de los distintos usos y significados de las letras en álgebra?

1.2 OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de la investigación es estudiar, analizar y caracterizar los errores en los que incurren los estudiantes al resolver tareas algebraicas con el fin de proponer un conjunto de sugerencias dirigidas a implementar estrategias de enseñanza del álgebra.

1.2.1 Objetivos Específicos

1. Adaptar la prueba diseñada por Küchemann (1980) para que permita explorar y profundizar en los errores en los que incurren los estudiantes cuando se enfrentan a tareas que requieran soluciones algebraicas.
2. Organizar y caracterizar los errores que se manifiestan en las producciones de los estudiantes del primer curso universitario de distintas titulaciones del CUCSUR al resolver las tareas algebraicas de la prueba adaptada de Küchemann (1980).
3. Analizar y comparar los resultados obtenidos en este trabajo con los niveles de comprensión del modelo *The Concepts in Secondary Mathematics and. Science* (CSMS).
4. Identificar, clasificar y caracterizar los errores que se presentan en las producciones de los estudiantes de acuerdo a los distintos usos y significados de las letras propuestos por Küchemann (1980).

5. Indagar el rendimiento general y por nivel de entendimiento de los estudiantes participantes en esta investigación.
6. Analizar la dificultad de los ítems de la prueba considerando su ubicación en los niveles de entendimiento propuestos por Küchemann (1980).
7. Comparar el rendimiento entre los hombres y mujeres participantes para determinar si hay diferencias significativas en el rendimiento entre ambos sexos.
8. Comparar el rendimiento de los estudiantes de las titulaciones del área de ingeniería y las de otras áreas para determinar si hay diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes de esas áreas.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Es importante destacar que actualmente, en muchos currículos escolares de secundaria y bachillerato que se imparten en México, no profundizan en la reflexión teórica acerca de los diferentes enfoques sobre álgebra y sólo se presentan como contenidos de programas de estudio de manera superficial.

También cabe señalar que, al menos hipotéticamente, los alumnos de primer curso universitario ingresan a este nivel con una preparación matemática previa, que en teoría han superado lo que debería permitirles la resolución de determinadas tareas algebraicas sin dificultad. Sin embargo, la realidad muestra que esto no es así y se hace necesario realizar cursos iniciales de nivelación, lo que retrasa el avance en la adquisición de nuevos conocimientos.

Esta educación previa no es, en ocasiones, lo suficientemente sólida como para afrontar situaciones de tareas relacionadas con el álgebra e incluso la aritmética, y esto hace percibir que los alumnos llegaron con conocimientos previos pobres, como se documentó en García (2011), o en la serie de investigadores mencionados anteriormente que están de acuerdo que, un factor importante que ocasiona los errores algebraicos y aritméticos en los estudiantes universitarios es su formación previa.

Es importante pues señalar bajo qué perspectiva se conduce la enseñanza del álgebra en los niveles educativos precedentes al de licenciatura, ya que uno de los objetivos principales de este trabajo, será el explorar las principales fuentes de errores que puedan presentarse en las producciones de los alumnos al resolver distintas tareas algebraicas. El resultado de nuestro estudio pretende ser un análisis detallado acerca de las posibles fuentes de errores que se presentan en las producciones de los estudiantes de primer ingreso en un centro universitario concreto de México, que esperamos sirva para documentar esta problemática y marque la pauta para el inicio de posteriores investigaciones orientadas a paliar el problema de la enseñanza y aprendizaje del álgebra en esta y otras instituciones.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo, inicialmente se realiza una primera aproximación a la definición del concepto de álgebra, analizando sus características más comunes estudiadas desde las diferentes perspectivas establecidas por varios investigadores de educación matemática. El recorrido evidencia la existencia de diversos conceptos que pueden ser considerados como fuente de errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Así mismo, hacemos un recorrido sobre los fundamentos filosóficos del error, tomando en cuenta los distintos enfoques como oportunidad del aprendizaje y como producto de las experiencias. Por otra parte, también se analizan los antecedentes del estudio de errores de principios del siglo XX hasta la actualidad, con el objetivo de identificar investigaciones relacionadas con la clasificación de los errores encontrados en las producciones de los estudiantes.

2.1 ¿QUÉ ES EL ÁLGEBRA?

Desde el nacimiento del álgebra como conocimiento científico, fue concebida como una generalización de la aritmética para la resolución de ecuaciones y el estudio de las operaciones y sus propiedades. Siendo un área del conocimiento que siempre ha ido evolucionando, algunos autores dividen su desarrollo histórico en tres grandes etapas: la etapa retórica, la sincopada y la simbólica, que describimos a continuación.

2.1.1 Etapas históricas del álgebra

Etapa Retórica

Nesselman asignó en 1842 (Puig, 1998), los nombres a cada etapa del desarrollo del lenguaje simbólico, y menciona que en esta etapa los problemas algebraicos eran resueltos a través del lenguaje natural. Históricamente se reconoce el trabajo algebraico de tres civilizaciones: la babilónica, la egipcia y la griega. Además estas civilizaciones no se conformaron únicamente con utilizar el lenguaje retórico: tuvieron el primer acercamiento al significado de variable, según se demostró en algunos de los problemas encontrados en tablillas y papiros de la época.

La Tabla 1 muestra que a pesar de no contar con un lenguaje simbólico, las civilizaciones mencionadas lograron avances significativos en los temas que se refieren al manejo de las matemáticas, ya que mostraron que dominaban los aspectos básicos del álgebra, aunque reconociendo que apenas comenzaban con este tipo de ejercicios, no los expresaban con rigor, ni con la generalidad actual, como pueden ser las ecuaciones lineales y las de segundo grado, como explica su autora.

Tabla 1. Etapa Retórica del álgebra: aportes por civilización

	Civilización Babilónica (2000- 300 a.C)	Civilización egipcia (siglos XX y X a.C)	Civilización griega (2800 a.C)
En cuanto al lenguaje algebraico	Se destacaron en la resolución de ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, aunque en tablillas se describían sus procedimientos sin usar variables. Al acercarse a encontrar el valor de $\sqrt{2}$, descubrieron la relación entre lado y diagonal del cuadrado. Según ARBELAEZ (1998) en una tablilla babilónica aparece el problema de determinar la constante por la que se debe multiplicar 30 (not. sexag.) al lado de un cuadrado para obtener la diagonal 45,25. Usando un ensayo y error concluyen que la constante es 1,2545110 es decir, obtenían una aproximación al número racional $\sqrt{2}$	Calcularon varias raíces cuadradas, efectuaron potencias, e incluso obtuvieron la solución de ecuaciones de primero y segundo grado. Le dan el nombre de *aha* a la incógnita (valor desconocido): Resolvieron problemas como los siguientes: *"a aha, si se le añade la cuarta parte, resulta 15. ¿Cuál es esa cantidad?"* A través del método de la falsa posición razonan de la siguiente manera: Cuenta con 4, al cuarto es 1 total 5. Cuenta con 5 para encontrar 15. 1 5 2 10 El resultado es Multiplicar 3 por 4 *"¿Cómo dividir 100 en dos partes para que la raíz de una de ellas sea los ¾ de la otra?"* Usan de nuevo el método de la falsa posición, es posible plantear que dan significado a la variable como incógnita pero no utilizan para ella una representación simbólica.	Usaron procesos geométricos para solucionar situaciones algebraicas. La idea de cambio y variable no era ajena para los griegos, aunque no fue estudiada desde el punto de vista cuantitativo. No hay consideración general sobre la idea de variable, dependencia o función, pues las aproximaciones cuantitativas y cualitativas están aún disociadas. Sin embargo Diofanto hace interesantes aproximaciones al trabajo con expresiones algebraicas y avanza significativamente en el uso del lenguaje sincopado.

Nota. Fuente: Guzmán, N. (2013). Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia. (p. 7)

Etapa sincopada

Diofanto, quien vivió alrededor del año 250 D.C., reconoció el uso de letras y símbolos que representaban cantidades, solucionando con ellos algunos problemas algebraicos; estas abreviaturas o síncopas permitían economizar el uso del lenguaje y eran usadas en lugar de incógnitas o valores desconocidos (Guzmán, 2013). Este autora agrega que las civilizaciones como la china, la hindú y la árabe lograron grandes avances en el estudio de esta rama del conocimiento ya que fueron motivados por varias necesidades, como la de explicar el funcionamiento de diversos fenómenos físicos, sobre todo aquellos que se relacionaban con la astronomía.

Posteriormente (siglo V), la civilización hindú tuvo la necesidad de abreviar una simplificación trascendente, suprimiendo cualquier referencia a las palabras que usaban para nombrar las potencias y los números y haciendo más notorias las síncopas al encontrar una eficiente notación decimal posicional y en particular el uso del cero, que es una herencia hindú. En el caso de la civilización árabe, aparte de adoptar el cero y los nueve símbolos hindúes que representan los números naturales, adoptaron su sistema posicional, siendo uno de los ejemplos más relevantes en lo referente a la economía del pensamiento del ser humano.

Por su parte, Malisani (1999) menciona además que la transición del álgebra retórica al álgebra sincopada tardó varios siglos y la ubica con autores que la seguían usando entre los años de 1500 y 1600, cuando fueron introducidos todos los símbolos y abreviaturas que se conocen actualmente. Pero a pesar de los avances logrados con las dos épocas, hubo un escaso desarrollo algebraico por lo que surge la necesidad de recurrir a otros lenguajes o de hacer uso de la geometría, con la intención de sustentar las premisas, usar un lenguaje más natural o usar otros métodos o argumentos aritméticos para la solución de problemas.

Etapa simbólica

Según Guzmán (2013), esta etapa se inicia formalmente a partir del siglo XV con los trabajos de Tartaglia, Cardano,Viette, Galileo, Descartes, Wallis, Peacock, Boole, Newton y Leibniz. En esta etapa se usan de manera sistemática las letras para las cantidades y los signos para las operaciones; este tipo de lenguaje algebraico además se usa para resolver ecuaciones y para demostrar reglas generales. En esta época nació la geometría analítica, que da paso al cálculo infinitesimal, progresando el estudio de funciones al abordar ecuaciones y sus gráficas con variables x e y, pudiendo utilizar una relación de dependencia entre ellas y se define el término función.

Viette genera un cambio fundamental en el lenguaje simbólico, ya que hasta ese momento solo se habían utilizado abreviaturas del lenguaje natural; en este momento se entiende la importancia del uso de variables para representar potencias, lo que significó un gran avance en el desarrollo del lenguaje simbólico. En este campo, Jordan Nemorarius utilizó los signos *p* y *m* para indicar el más y el menos, mientras que el guion (–) para señalar el menos en la resta fue introducido por los alemanes en los siglos XV y XVI, siendo tomado por los libros de contabilidad de los comerciantes quienes lo utilizaban para simbolizar sus faltantes.

La facilidad que da la simbología es la que ha ocasionado un desarrollo mayor del álgebra, permitiendo que con el uso de estos símbolos dar una mayor libertad a las matemáticas para la construcción de un álgebra superior. La diferencia con las dos etapas anteriores, reside en que lo fundamental ya no era representar, sino operar ese nuevo sistema de símbolos sin recurrir a otros lenguajes, pudiendo afirmar que el lenguaje simbólico es auto-suficiente, aún sin el uso de la retórica.

Un acercamiento al significado del álgebra

En la descripción de esas tres etapas se ha observado que el álgebra ha ido evolucionando para poder tener un mayor grado de expresión, además de un manejo más adecuado por parte de los estudiosos en matemáticas, en el que esta rama del conocimiento se ha ampliado para beneficio del conocimiento y la ciencia. Es de mencionar que este amplio campo de estudio conocido como álgebra es definido de manera concisa por Lacampagne (1995), como el lenguaje de las matemáticas. Sin embargo, otra idea extendida es que el álgebra es la ciencia que se encarga de resolver ecuaciones, graficar funciones en el plano de coordenadas, y muchos otros algoritmos que se realiza con las omnipresentes letras x e y. El matemático Euler, ya en el siglo XVI la definía como “la ciencia que enseña a determinar las cantidades desconocidas a través de lo que se sabe” (Katz, 2007, p. 41).

La naturaleza del álgebra tiene sus raíces epistemológicas y ha estado en el centro de las discusiones y definiciones desde siempre. Kieran (1992) habla de un serio debate entre los matemáticos británicos en la primera mitad del siglo XX, que sostenían la posición de que el álgebra es la aritmética universal. En este sentido, se da una devaluación de la definición de álgebra reduciendo su significado a las cantidades y las operaciones con ellas. Sus reglas son definidas por las propiedades cuantitativas de la aritmética. Por otro lado, debatían si el álgebra es puramente un sistema de símbolos arbitrarios y es esencialmente regida por los principios arbitrarios (García, Segovia y Lupiáñez, 2012).

Ante tal disyuntiva, Kieran (1992) cuestiona el uso legítimo de los números negativos, irracionales, imaginarios, por el hecho de que no pueden ser interpretadas como medidas de cantidad. Por su parte Wheeler (1996), aborda el problema como que, el álgebra debería ser una extensión o conclusión de la aritmética, ya que reconoce que el álgebra resuelve problemas que la aritmética no incluye y que al mismo tiempo el álgebra no puede manejarse por sí misma. Por tanto, la aritmética no puede vivir sin la ayuda del álgebra, ya que necesita de los números reales para su funcionamiento.

Este autor advierte además, que un enfoque de álgebra como aritmética generalizada puede no ser apropiado desde la perspectiva de la pedagogía escolar, debido a que el álgebra tiene sus propias raíces, no necesariamente deducibles de las relaciones aritméticas. Finalmente señala que la existencia de ciertas continuidades entre el álgebra y la aritmética crea conflictos sobre la definición y extensión de álgebra.

En nuestros días, se ha desarrollado el concepto de que el álgebra es la disciplina que involucra la manipulación de símbolos, la resolución de ecuaciones y expresiones en donde se implica la simplificación de símbolos. Sin embargo, el álgebra es más que mera manipulación de símbolos, en este sentido se coincide con el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003), quienes afirman que el álgebra comprende además las relaciones entre cantidades, incluyendo las funciones, formas de representar las relaciones matemáticas y el análisis del cambio.

Existen varias definiciones y enfoques sobre el álgebra, y sobre ellas se ha afirmado y negado demasiado. Por ejemplo, en el Currículo y Estándares de Evaluación para las Matemáticas

Escolares que desarrolló el NCTM en 1989, el álgebra fue descrita como la lengua a través de la cual la mayor parte de las matemáticas se comunican. Esta definición se reestructuró más tarde como, “la rama que estudia las estructuras abstractas y sobre el uso de los principios de esas estructuras en la solución de problemas expresados con los símbolos” (NCTM, 2000, p. 37), definición compartida con el Instituto Nacional para el Desarrollo Curricular (INDEC) (2003).

Sin embargo, el álgebra puede ser vista como el lenguaje con dialectos de símbolos literales, gráficos, tablas, palabras, diagramas y otros medios visuales, así como también se considera como una manera de pensar y representar muchas situaciones, también dispone de un lenguaje y la sintaxis, junto con herramientas y procedimientos, que promueven una determinada forma de pensar y modelar.

Al igual que el NCTM, Sharma (1998, citado en García, 2012) definió el álgebra como el lenguaje simbólico de los números reales. Bajo este contexto, entender el álgebra es conocer las relaciones entre los elementos del lenguaje y dónde se utilizan estas relaciones para resolver problemas; hacer o realizar álgebra es la manipulación de los símbolos para producir otro tipo de relaciones y soluciones a los ejemplos, ejercicios y problemas, que en determinado momento se pueden plantear.

Una de las definiciones más precisas es la de Lane y Birkhoff (1999) quienes consideran que:

“El álgebra empieza como el arte de manipular sumas, productos, y potencias de números; las reglas para estas manipulaciones son válidas para todos los números, así que las manipulaciones pueden llevarse a cabo con letras que representan a los números.” (p. 1)

Hasta aquí se han revisado diversas reflexiones teóricas con el objetivo de establecer una definición que englobe todos los aspectos del término de álgebra, sin embargo, hasta el momento no se ha llegado a ningún consenso. Por lo anterior, es necesario analizar las distintas perspectivas de estudios orientados hacia las diversas caracterizaciones del algebra que algunos autores denominan como enfoques.

2.1.2 Enfoques del álgebra

Más allá de las discusiones epistemológicas y de contenido que giran en torno al álgebra y que se han desarrollado a lo largo de la historia, diversos investigadores han descrito y desarrollado diferentes caracterizaciones del álgebra que se pueden encontrar en el currículo del área matemática. Kaput (1995), menciona que existen varios conceptos del álgebra en el programa de enseñanza de las matemáticas; sostiene además que el álgebra se basa en la generalización, en la manipulación de la sintaxis, en el aprendizaje de la estructura, además del estudio de las funciones, relaciones, variaciones y lenguaje modelado.

Por otra parte, el NCTM (1998) establece que los temas que se tratan en el álgebra escolar deben ser las funciones y las relaciones, el modelado y el estudio de los esquemas, junto con el lenguaje y la representación. Por su parte Kieran (1996), caracteriza álgebra escolar como una actividad generacional, ya que esta actividad consiste en la formación de las ecuaciones con incógnitas o variables que representan situaciones problemáticas, que permite conocer las expresiones que se forman a partir de patrones numéricos geométricos, Además de la formación de las expresiones entre la relaciones numéricas, tal como menciona esta autora.

El álgebra también es una actividad de transformación, con actividades que se basan en normas o reglas bien definidas como factorizar, sustituir, sumar, restar, multiplicar, dividir polinomios, resolver ecuaciones y expresiones, simplificar y trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes que deben ser más manejables a otras (García, *et al*., 2012).

También Kieran (1996) caracteriza álgebra escolar como las actividades "meta-level", es decir, las actividades que pueden realizarse sin usar álgebra o que se utiliza solo como una herramienta. Estas actividades son la solución de problemas, el modelado, el estudio de esquemas, el estudio del cambio, la generalización, el análisis de las relaciones, las justificaciones, demostraciones y las predicciones (García, *et al*., 2012), aunque éstas últimas no son patrimonio exclusivo del álgebra.

Bednarz, Kieran y Lee (1996) desarrollaron cuatro enfoques relacionados con los objetivos y contenidos del currículo de álgebra que se presentan habitualmente en la escuela basados en los cuatro aspectos diferentes del álgebra y en cada uno de ellos ponen una especial atención. Socas (1999) los expresa así: 1) el álgebra como la expresión de la generalidad; 2) el álgebra como una herramienta para resolver problemas; 3) álgebra como el modelado, el uso de múltiples representaciones; y 4) el álgebra como el estudio de las funciones.

Usiskin (1998), quien analiza el tema del álgebra desde una perspectiva utilitarista, propone cuatro enfoques para el álgebra, los cuales se correlacionan con los distintos usos de las variables:

Aritmética generalizada en la cual, las variables, se pueden considerar como patrones generalizadores, como por ejemplo 3 + 5.7 = 5.7 + 3, que se generaliza como a + b = b + a.

Álgebra como un estudio de los procedimientos para la resolución de ciertos tipos de problemas, en los que las variables aparecen como incógnitas o constantes. Como ejemplo de esta concepción es "Cuando se suma tres a cinco veces cierto número el resultado es 40. ¿Cuál es el número?" Usiskin (1988).

Usiskin también menciona que el álgebra debe ser considerado como el estudio de las relaciones entre las cantidades, en las cuales las variables cambian; en este grupo están los problemas del tipo "¿Qué le sucede al valor $\frac{1}{x}$ cuando x se hace más grande?", que es una situación en apariencia simple, pero que ha servido para retar a una gran cantidad de estudiantes.

Álgebra como el estudio de la manipulación y justificación de las estructuras en las que la esencia se encuentra en las propiedades de las variables, Usiskin agrega que en las relaciones entre *x´s, y´s* y *n´s*, ya sean sumandos, como factores, bases, o exponentes. Esta última percepción de la variable se ha convertido en un objeto arbitrario, en una estructura abstracta relacionada con ciertas propiedades

En síntesis, el primer enfoque sostiene que el álgebra puede ser concebida como aritmética generalizada, es decir, esta perspectiva concibe el álgebra como un tipo de aritmética en la que los números se sustituyen por letras, comúnmente llamadas variables; por ejemplo, cuando se parte de un patrón aritmético para obtener una propiedad algebraica como en la siguiente tarea:

$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4$ $5 + 5 + 5 + 5 = 5 \times 4$

Son casos particulares del enunciado algebraico $z + z + z + z = 4z$

Sobre este mismo concepto, Mason (1996) considera la generalización como un camino hacia el álgebra e incluso como la esencia del álgebra, afirmando "que la generalización es la sangre y el corazón de las matemáticas" (Ruano, Socas y Palarea, 2008), y sostiene que la estructura de la aritmética, cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada. Hewitt (1998) considera que el álgebra o el pensamiento algebraico subyace a la aritmética, ya que la aritmética no consiste en la memorización de cientos de hechos numéricos sino en el aprendizaje de métodos para hacer cálculos aritméticos, en el proceso que se ha definido anteriormente como generalización.

Para Kaput (1999) la generalización consiste en:

[...] extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 6).

Este autor destaca que en álgebra, con el conocimiento adecuado de la generalización, se pueden intentar resolver algunos casos utilizando la experiencia obtenida en casos similares por medio del uso de los patrones, procedimientos, estructuras, etc. ya que estos pueden apoyar a los estudiantes en la búsqueda de la resolución de tareas algebraicas, por medio de la comprensión de las relaciones existentes en este tipo de razonamiento.

En el mismo sentido, para Kieran (2006, 2007), el "álgebra como generalización" es una perspectiva que tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica siendo usada como una herramienta para expresar demostraciones (Trujillo, 2008). Afirma además que la experiencia previa de los alumnos con la estructura de las matemáticas, con especial atención en la estructura de expresiones aritméticas, puede tener un efecto importante en la capacidad de los alumnos en dar sentido al álgebra, lo que les permitiría tener una mayor comprensión de esta materia, si se entiende la generalización en el álgebra.

El segundo enfoque al que se refiere Usiskin (1988), es a la orientación del álgebra como un método para la solución de problemas que impliquen la presencia de incógnitas obtenidas a partir de la generalización, es decir, que una vez establecido el patrón generalizador algebraico, la etapa siguiente consiste en la solución del problema. El ejemplo citado '*Cuando se añade 3 a 5 veces un número determinado, la suma es 40. Encontrar el número*' se traduce al lenguaje algebraico de la siguiente manera:

$$5x+3=40$$

Bajo la concepción del álgebra como generalizador de patrones, se ha encontrado el modelo que se genera, en este caso; cuando se tiene conocimientos del álgebra adecuados, entonces es posible aplicar las técnicas apropiadas para su resolución. Sin embargo, para considerarlo como un método para solución de problemas, es necesario complementar el primer paso del procedimiento hasta obtener un valor de la incógnita. Dando secuencia al ejemplo anterior se soluciona de la siguiente manera:

Si se añade -3 a cada lado tenemos:

$5x + 3 – 3 = 12$

Simplificando:

$5x = 37$

Finalmente resolviendo esta ecuación se obtiene que: $x = 7.4$, por lo tanto el número buscado en el problema es 7.4.

En la solución de este tipo de problemas muchos estudiantes tienen dificultades para pasar de la aritmética al álgebra. Considerando que la solución aritmética consiste en restar 3 y dividir por 5, la forma algebraica $5x + 3$ implica la multiplicación por 5 y la adición de 3, es decir, pueden percibirse como operaciones inversas. En este tipo de tareas, para establecer la ecuación hay que pensar precisamente lo contrario de la forma en que lo resolvería con la aritmética; además no se debe olvidar que en esta concepción del álgebra las variables pueden ser incógnitas o constantes.

Mientras que las palabras claves del primer enfoque de Usiskin muestran el álgebra como aritmética generalizada en donde traducir y generalizar es el principal objetivo, la prioridad del segundo enfoque es simplificar y resolver, obteniendo expresiones equivalentes. Algunos investigadores apoyan este último enfoque; por ejemplo, en las diversas propuestas de reforma de la educación matemática, se ha sugerido el término razonamiento algebraico, con el fin de ampliar el significado del álgebra y para destacar su importancia en todos los niveles escolares (NCTM, 2000; Driscoll, 1999).

Dentro de las definiciones del razonamiento algebraico se encuentran algunas relacionadas con la perspectiva del álgebra como un método de solución de problemas cuando implican expresiones que presentan valores desconocidos o incógnitas. Tal es el caso del trabajo de Langrall y Swafford (1997), quienes describen el razonamiento algebraico como "la capacidad de operar sobre una cantidad desconocida así como si la cantidad es conocida" (p. 2). Destacamos que esta visión contrasta con el razonamiento aritmético, en cuyo caso las cantidades son siempre conocidas, en consecuencia el concepto de variable y su manipulación se convierte en el foco de esta descripción del razonamiento algebraico, alineándose con la perspectiva del álgebra que se recalca en este enfoque.

El tercer enfoque que menciona Usiskin (1988), se refiere al álgebra como un instrumento utilizado en el estudio de las relaciones entre cantidades; un ejemplo de esta orientación es cuando escribimos $A = bh$, la fórmula del área de un rectángulo. En este tipo de fórmulas o expresiones algebraicas se está describiendo una relación entre tres cantidades. En este tipo de expresiones no existe la percepción de un valor desconocido, porque no se está resolviendo nada; aunque se debe tener cuidado cuando uno se aborda en este tipo de expresiones, ya que la percepción de fórmulas tales como $A= bh$, es diferente de la de generalizaciones tales como $1 = n\left(\frac{1}{n}\right)$, aún a pesar de que se puede pensar en una fórmula como un tipo especial de generalización.

Consideremos el siguiente enunciado: ¿Qué ocurre con el valor de $\frac{1}{x}$ cuando x se hace más y más grande?

En este ejemplo no se ha pedido encontrar un valor desconocido, entonces la variable no es una incógnita; tampoco se pide al alumno que traduzca ya que existe un patrón para generalizar, pero es fundamentalmente un modelo algebraico. Otro ejemplo de este enfoque lo da Fey y Good (1985, p. 48) quienes proponen las siguientes preguntas que consideran clave para el estudio del álgebra y que se refiere a las variables:

Para una f dada x, se debe tener en cuenta opciones diferentes para determinar:

$f(x)$ para $x = a$

x para $f(x) = a$

x para que se produzcan los valores máximo o mínimo de $f(x)$

La tasa de cambio de f cuando $x = a$

El valor promedio de f en el intervalo (a, b)

Bajo esta concepción, una variable es un parámetro que representa un número del que dependen otros números o también puede ser un argumento que podría representar un valor en el dominio de una función o tal vez no.

Sobre el enfoque algebraico utilizado para el estudio de la relación entre las cantidades, Driscoll (1999) sugiere desde su visión del razonamiento algebraico que la define como la "capacidad de representar situaciones cuantitativas a fin de que se manifiesten las relaciones entre las variables" (p. 1). Este autor también identifica algunos hábitos mentales, que son necesarios para el desarrollo de este razonamiento: los estudiantes deban tener la capacidad para la construcción de reglas algebraicas para representar las funciones, ecuaciones, igualdades, entre otras cosas.

Finalmente el cuarto enfoque que menciona Usiskin (1988), concibe el álgebra como el estudio de estructuras abstractas algebraicas como grupos, anillos, dominios de integridad, campos y espacios vectoriales. En este sentido, en la concepción del álgebra visto como el estudio de las estructuras, la variable es poco más que un símbolo arbitrario. El propio autor recurre al siguiente problema como ejemplo:

Factorizar $3x^2 + 4ax - 132a^2$

Ante una expresión algebraica como la anterior, Usiskin (1988) menciona que la concepción de álgebra representada aquí no es la misma que en cualquiera de las descritas anteriormente. En este tipo de representaciones no existe un patrón aritmético a generalizar, tampoco hay ninguna ecuación que resolver, por lo que la variable no está actuando como una incógnita y además no existe una función o relación y por último, la variable no es un argumento. Es evidente que cuando un alumno se enfrenta a expresiones de este tipo, cuando no ha comprendido, ni construido expresiones algebraicas, entonces tiene problemas para poder captar que se le ha pedido en tareas como la solución del problema expuesto; pero si el alumno ya ha tenido práctica en expresiones o tareas de ese tipo y ha logrado entender cómo se pueden resolver, entonces le resulta viable la factorización de dicho polinomio.

En el trabajo docente, cuando se trabaja con el álgebra, se pretende que los alumnos sean capaces de operar sobre las variables sin tener que recurrir siempre al nivel del referente. Por ejemplo, consideremos un problema cuyo objetivo sea resolver una identidad trigonométrica como la siguiente expresión

$2\, sen\, 2x - 1 = sen4\, x - cos4x,$

El estudiante no debe de interpretar que las funciones seno o coseno tienen un valor específico. Simplemente se requiere que el alumno manipule *sen x* y *cos x* utilizando las propiedades que son tan abstractas como la identidad que se quiere obtener. Estas expresiones algebraicas tienen ciertas reglas definidas que han sido expuestas tan ampliamente, que el estudio del álgebra se centra en las propiedades de las variables, en las relaciones entre *x´s* , *y´s* y *n´s*, ya sean como sumandos, factores, bases o exponentes.

En este mismo sentido hay que destacar las consideraciones que hacen al respecto los Principios y Estándares de la Educación Matemática del NCTM (2000; 2003), quienes mencionan que el álgebra trata de estructuras abstractas, además del uso de los principios de esas estructuras en la solución de los problemas expresados con símbolos.

Por otra parte, algunos trabajos de investigación describen las características del razonamiento algebraico, encontrando en ellos similitudes en relación a los cuatro enfoques del álgebra propuestos por Usiskin. Tal es el caso de Bell (1996), quien considera que el álgebra consiste en las herramientas conceptuales que se utilizan para realizar abstracciones como la capacidad de clasificar, comparar, transformar y utilizar la reversibilidad asociada con las estructuras básicas de conjuntos de números, relaciones, funciones, entre otros.

Este autor distingue también cuatro enfoques del álgebra: generalización, resolución de problemas, modelado y funciones; afirma que, históricamente el álgebra se concibe como plantear y resolver ecuaciones y que tuvo un inicio en la solución de problemas relacionados con las cuatro operaciones básicas de la aritmética. Bell (1996) sostuvo además que para garantizar un aprendizaje significativo del álgebra por parte de los alumnos, éstos deben ser capaces de utilizar el lenguaje algebraico para expresar relaciones por medio de representaciones, así como explorar estas relaciones por medio de la manipulación de expresiones simbólicas con el fin de que logren un entendimiento correcto de las tareas relacionadas con el planteamiento y solución de ecuaciones, la generalización y el trabajo con funciones. Cuando un alumno tiene la capacidad de construir expresiones algebraicas a partir de problemas de la realidad o de problemas expresados verbalmente, él está en un entendimiento que le permitirá enfrentarse a tareas algebraicas con argumentos sólidos.

Por su parte, Kaput (1995) explica que para entender álgebra es necesario hacer las conexiones, abstracciones y generalizaciones del razonamiento algebraico y describe este como un compuesto complejo de cinco formas interrelacionadas de pensamiento que comprende los siguientes elementos:

1. La capacidad de generalización y formalización de los procesos;
2. La manipulación sintácticamente guiada de éstos;
3. El estudio de las estructuras;
4. Las funciones; y
5. La adquisición de un lenguaje para la modelación (Kaput, 1995; Díaz, Martínez y Soto, 2007).

En el mismo sentido, investigadores como Dugdale *et al*., (1995), conciben que el álgebra es una forma de razonamiento que incluye tres temas generales relacionados entre sí. Sugieren además, que el razonamiento algebraico, identifica varias características como:

1. Las variables y relaciones que incluyan las representaciones a partir de ecuaciones, Tablas o gráficos; además sugieren que cuando los estudiantes estudian la aritmética pueden incluir experiencias con variables y relaciones funcionales.
2. La generalización y los modos de representación, preferentemente mediante el desarrollo y uso de fórmulas, traducción de ideas orientándolas hacia distintas representaciones y la manipulación de dichas representaciones.
3. La investigación de la matemática que les permita a los estudiantes argumentar a partir de la observación de patrones, la formulación de conjeturas, las pruebas y comprobación de las mismas y reformular el razonamiento si es necesario.

Otros autores, como Koedinger, Alibali y Nathan (2008) explican que los alumnos tienen entonces la capacidad de realizar una transición de la aritmética al álgebra mediante la representación, teniendo las mismas opiniones que autores como Dugdale *et al.,* (1995), Kaput (1995) o Díaz, *et al*. (2007), siendo entonces necesario remarcar que la representación es una de las herramientas más usadas cuando se trabaja en álgebra.

A manera de conclusión es posible afirmar que no existe un acuerdo global para definir el término "álgebra" ya que involucra diferentes tareas y procesos de cognición, por lo que es difícil que exista un consenso en el que todos los involucrados estén satisfechos, como se vio en la serie de autores que explicaban el término. Por tanto, una definición que encierre todos los procesos que abarca el álgebra en toda la extensión de la palabra, su comprensión, su explicación, su significado más acertado, queda corta. Por otra parte, distintos investigadores han intentado homogenizar la definición del término álgebra, orientando sus investigaciones hacia la aclaración de lo que se deben incluir desde sus distintos enfoques tomando en cuenta que la mayoría de éstos convergen en puntos comunes como el tratado anteriormente de la generalización de la aritmética, o como método de resolución de problemas, también como instrumento para el estudio de las relaciones entre las cantidades y como el manejo de estructuras abstractas algebraicas.

Así mismo, se ha recurrido complementar la definición del álgebra mediante la propuesta del concepto razonamiento algebraico cuyas características, incluyen las definiciones básicas del álgebra y proporcionan más aspectos a considerar, pero, al igual que el término álgebra el concepto de razonamiento algebraico presenta distintas acepciones, que van desde la capacidad de operar sobre cualquier cantidad conocida o desconocida, representar situaciones cuantitativas, hasta las formas de razonamiento que involucran distintos hábitos mentales haciendo uso de símbolos. Lo dicho hasta aquí nos conduce a considerar que lo más apropiado sería el uso de ambos términos para explicar en qué consiste el álgebra.

Después de conocer los conceptos que giran en torno al álgebra y el razonamiento algebraico, además del recorrido de los teóricos acerca de este tema, se hace necesario realizar un primer acercamiento, con el problema que tienen muchos estudiantes con el error sobre el que hacemos una reflexión teórica para luego enlazarlo con las tareas algebraicas, lo que permitirá tener un acercamiento a la comprensión sobre porque los estudiantes tienen problemas para realizar adecuadamente tareas algebraicas que demuestren su dominio.

2.2 EL ERROR ALGEBRAICO

En este apartado se presenta un recorrido histórico de los principios filosóficos del error. También se analizan las principales líneas de investigación en torno de los errores en la educación matemática con el objetivo de esclarecer las probables fuentes de los errores presentes en las producciones de los estudiantes.

2.2.1 Fundamentos filosóficos del error

La falibilidad del conocimiento humano ha sido una preocupación constante de filósofos y pensadores dedicados a estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender, pues en todo proceso de conocimiento está latente la posibilidad de considerar como verdaderos conceptos y procedimientos erróneos. (Del Puerto, 2006)

De igual forma sucede en el conocimiento científico, en el curso de diversas investigaciones se puede encontrar el error como parte del conocimiento humano, un error que permite aprender y comprender el porqué de dichas respuestas equivocadas. Esta comprensión ha contribuido al progreso de la humanidad en cada una de las diferentes ciencias del saber del hombre, entre ellas la filosofía, siendo ésta la encargada de estudiar el pensamiento humano, establece que el error es atribuible a la capacidad de considerar verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, pudiendo por ejemplo, estar incompletos o inacabados lo que permite que el sujeto tenga elementos inacabados o equivocados que le impedirán llegar a buen puerto, estos pueden ser ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas (Lucchini, Cuadrado y Tapia, 2006).

De igual manera, en la historia de las matemáticas hubo que encontrar proposiciones que se consideraron como verdaderas en su momento y que con el tiempo se demostró su falsedad; esto lo sostienen Abrate, Pochulu y Vargas (2006) en sus investigaciones sobre los números de Fermat. Otras proposiciones falsas fueron la trilogía de problemas (planteados por los griegos), es decir, la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, descritos por Fernández (1999), así como el problema de los cuatro colores, que incluso es tratado aun actualmente como el trabajo que realizó López (2009), que busca formulaciones diferentes de este problema. Finalmente ellos señalaron que la identificación y análisis de estos errores ha permitido sustituir los conocimientos anticuados por conocimientos actuales.

El problema del error se vincula a un encuentro con la verdad como la fuente última del conocimiento, y esto se pudo considerar desde que el hombre ha podido mantener las memorias de sus avances; ya desde los comienzos de la filosofía se intentaba interpretar desde diferentes enfoques las respuestas a los múltiples errores y sus posibles soluciones y habían observado que el error puede generar conocimiento nuevo.

Uno de los primero en analizar el origen de los errores fue Sócrates, a través de su doctrina de la falibilidad, en la que proponía que el hombre que puede errar individual y colectivamente debe aspirar a la verdad objetiva examinando sus errores mediante la autocrítica y la crítica racional. Esta doctrina no debe ser considerada como una idea de epistemología pesimista, ya que como se explicó, implica que el hombre puede buscar la verdad, la verdad objetiva, aunque en muchos casos se puede equivocar por amplio margen; esta idea socrática agrega que, si se respeta la verdad, se debe aspirar a ella examinando persistentemente los errores cometidos, siendo críticos y autocríticos, tal como sugiere Popper (1983).

A partir de su estudio socrático, surgen distintas corrientes filosóficas que tratan ese tema. Erasmo de Rotterdam intentó revivir esta doctrina con la de "¡Conócete a ti mismo y admite, por consiguiente, cuán poco sabes!" (Popper, 1983), aunque destaca la del empirismo filosófico de Hume, en el que se sostiene que los conceptos matemáticos tienen origen empírico y que las verdades matemáticas se derivan de observaciones del mundo físico. Opuesto a los empiristas, los racionalistas, afirmaban que los conocimientos se adquieren por medio del razonamiento. Por su parte, la corriente del autoritarismo, postuló que en ausencia de una verdad, la autoridad impone lo que es verdadero, sin dar margen al error. De las corrientes antes mencionadas se deduce que la búsqueda de cualquier conocimiento conlleva la posibilidad de incurrir en errores, pero también de aprender de ellos para crear nuevo conocimiento.

Siguiendo sobre las bases filosóficas del error, el investigador británico Karl Popper en su momento analizó todas las corrientes relacionadas con la búsqueda de la verdad y concluyó, entre otras cosas, que el problema de la verdad se reduce a detectar y eliminar el error a través de la crítica permanente de las teorías propias y de otros; afirma también, que la fuente más importante de nuestro conocimiento es la tradición, pues la mayoría de las cosas las aprendemos a través del ejemplo, la lectura o la transmisión oral, partiendo de sus postulados, él generó el siguiente pensamiento “el conocimiento no puede partir de la nada. El avance del conocimiento consiste, principalmente, en la modificación del conocimiento anterior” (Popper, 1983). Es de indicar que todas las bases filosóficas acerca del error lo utilizan para la mejora del conocimiento de la humanidad.

Actualmente, el error es objeto de consideración por parte de algunas aéreas del conocimiento común y científico, ya que se puede encontrar inmerso en distintas concepciones del ser humano como: la sabiduría popular, la estadística, la historia, la filosofía, la enseñanza, las matemáticas, las nuevas tecnologías, la física, la literatura, el derecho, entre otras, como afirma De la Torre (2004). Este autor agrega que el campo semántico del error es tan amplio, que tal vez existan pocas palabras con tantas variantes y matizaciones, lo ejemplifica de la siguiente forma (Figura 2):

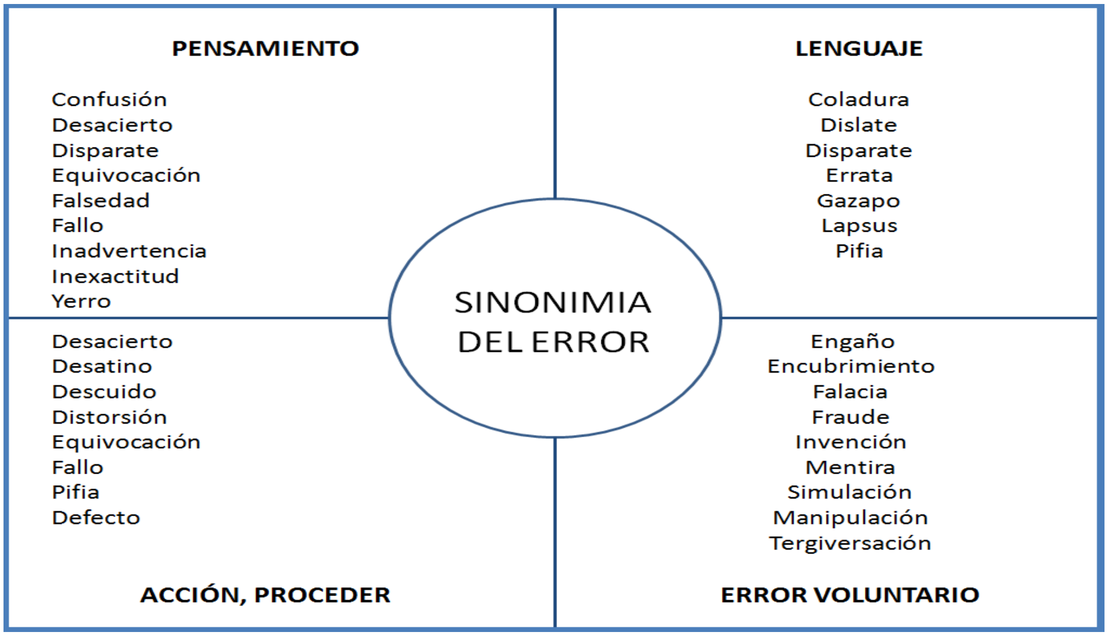


Figura 2. Sinonimia del Error

Fuente: De la Torre, S. (2004) Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación (p. 22) Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Dentro las categorías establecidas por De la Torre (2004), es de interés para esta investigación hacer énfasis en aquellas acepciones relacionadas con el pensamiento, el lenguaje y los procedimientos. La razón es que estas están relacionadas con el área de estudio de este trabajo, ya que, pensando en un alumno, él puede efectuar una tarea algebraica en que intentará solucionar los posibles problemas haciendo uso de ciertas habilidades adquiridas. Por ejemplo, empezando con la interpretación del lenguaje oral y escrito, seguido del conocimiento cognoscitivo y finalmente, para desarrollar una serie de procedimientos algebraicos que culminarán en la posible resolución de las tareas con una respuesta que sea adecuada de acuerdo a su conocimiento. En estas fases hay posibilidades de que se cometan errores en cualquiera de las tres etapas y que como consecuencia tengamos un resultado erróneo.

A lo largo de este apartado se ha intentado hilvanar el principio y los cimientos sobre los que se apoyan los errores, tomando en cuenta que son la razón principal que empuja a algunos investigadores a encontrar la verdad. Después de considerado lo anterior, se hará lo posible, en lo sucesivo, dirigir la atención hacia los diversos enfoques que acercan a este trabajo hacia las distintas fuentes por las que se genera el error algebraico.

2.2.2 Diversas aproximaciones del error

En la percepción del ser humano, el error siempre ha sido considerado un resultado sancionable, como un hecho que no debe existir, como un acto indeseable; se entiende que siempre se ha tratado de limitar sus efectos perniciosos, para eliminarlo, incluso antes de que este ocurriera, como explica De la Torre (2004). En la búsqueda de la verdad, encontrarse con el error ocasionaba malestar en los investigadores y en la sociedad en general, pero llegó un momento en que se comprendió su importancia, por lo que el error comenzó a ser estudiado en sus dimensiones y propiedades; hasta ese momento, la generalidad era intentar erradicar al error, pero siendo consistentes en el aprendizaje y el encuentro del conocimiento, el error promueve oportunidades para el avance del ser humano y todas las ciencias del conocimiento.

Lo anterior lo refuerza Rückert (citado por De la torre, 2004), un poeta lírico de Alemania que hizo constar la potencialidad de la visión constructivista y creativa del error cuando señalaba que un error despejado proporciona una sólida base para apoyar el conocimiento que se construye posteriormente. Para este autor, se debe considerar el error como un obstáculo provocador que debe ser superado en beneficio del aprendizaje, del conocimiento. Si se lleva este entendimiento al ámbito educativo, cuando se encuentra al error, por sí solo no conduce a un cambio en el alumno; es necesario que exista la reflexión sobre el mismo que permita modificar la comprensión equivocada, en un entendimiento que deje enseñanza verdadera.

Otro autor, Astolfi (1999, citado por Franchi y Hernández, 2004) sugiere ver los errores de manera individual, pues según su naturaleza, se pueden proponer distintas modalidades de intervención didáctica que ayude a las personas a evitar dichos problemas. Entre otros menciona los errores debidos a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas, aquellos que provienen de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas de los alumnos; también menciona a los errores que son el resultado de las concepciones o alternativas de los alumnos, aquellos ligados a las operaciones intelectuales implicadas, procesos adoptados, sobrecarga por actividad cognitiva, que tienen origen en otras disciplinas y los causados por la complejidad del contenido. Para Astolfi, no se puede considerar al error como algo superficial o como una desviación que deba ser eliminada, se puede convertir en un inconveniente provocador que ocasione que las personas busquen la superación de aquellas condiciones que provocaron su aparición.

Según lo visto hasta este punto, el error puede concebirse como una oportunidad de aprendizaje, ya que si es posible evidenciar aquellas causas que lo originaron, se pueden orientar los procesos de enseñanza hacia la superación de las condiciones que los provocan. Al identificar las causas es posible generar nuevo conocimiento que sea susceptible de ser aplicado en situaciones iguales similares que se presenten en el futuro.

Brousseau (1993) menciona que el error, además de ser un efecto de la ignorancia, de la inseguridad y del azar, puede surgir como resultado de un conocimiento anterior que ahora se revela falso. Así un error no sólo es la ausencia de una respuesta correcta o el resultado de un accidente, es más también un producto de la experiencia que se adquiere al enfrentar problemas desconocidos, como menciona Radatz (1980). Las carencias en el conocimiento del álgebra en estudiantes de primer curso, llevan a pensar a este investigador en la posibilidad de que sean resultado de una pobre adquisición conocimientos matemáticos en cada una de las etapas educativas anteriores.

Centramos nuestra atención ahora en presentar las principales líneas de investigación desarrolladas por la comunidad científica internacional referidas a los errores en el álgebra.

2.2.3 Trabajos de investigación sobre errores en educación matemática

Rico (1995), en una reseña histórica acerca de la investigación de los errores en educación matemática, menciona que es en Estados Unidos, en el año de 1917, cuando se comienza la difusión y el conocimiento de trabajos sobre la determinación de los errores. Se puede afirmar que la investigación de los errores comienza formalmente con los estudios de Meyers (1924), quien es considerado como el pionero en la investigación de los errores en cálculo aritmético, centrando su trabajo en el diagnóstico de errores persistentes en esta área.

Otros autores, Buswell and Judd (1925, citados por Lannin, 2006), analizaron más de 30 trabajos sobre diagnóstico y remediación de los errores aritméticos, pudiendo establecer la fiabilidad en el diagnóstico y solución los patrones de error encontrados; esta idea sería confirmada por Brueckner (1929) citado en Cox (1974) en un estudio que realizó sobre los procesos de cálculo de los números racionales. Otro trabajo con las mismas características que incluía el proceso de cómputo en la división de números enteros, fue desarrollado por Grossnickle (1935) citado en Cox (1974). En el mismo sentido, se tienen los trabajos de Llinares y Sanchez (1988) y Castro y Toralbo (2001) quienes en sus trabajos recogen los errores más frecuentes resultados de diversas investigaciones.

Ya en 1980, Radatz, afirmó que la aritmética y el conocimiento numérico son parte del área que predomina en la mayoría de los estudios sobre errores en matemáticas a nivel educativo. Este autor sostuvo además que en Estados Unidos se logró un desarrollo teórico continuo desde principios del siglo XX en realizar análisis relacionados al error; el desarrollo, sin embargo fue más lento en Europa.

Rico (1995) menciona que hubo una gran cantidad de estudios acerca de los errores antes de 1960. En estas investigaciones algunas solo trataban recuentos numéricos, en las que analizaban sólo el número de respuestas incorrectas y luego le asignaban una categoría. En otros trabajos, partiendo de esa categorización, intentaban determinar de dónde surgían los errores y realizaban inferencias sobre los elementos o factores que conducían a la equivocación.

Abrate, Pochulu y Vargas (2006) mencionan que en años posteriores a 1960 las aplicaciones e implicaciones en la educación en que se abordaba el error, desde una perspectiva constructivista, estimulan el suceso del error, que brinda posibilidades para que el sujeto construya su conocimiento. Pochulu (2004) establece que las investigaciones relacionadas con el análisis de los errores pueden clasificarse según dos objetivos principales; el primero comprende la superación del error a través de su eliminación, desde pensamientos conductistas y del procesamiento de la información y el segundo, desde el constructivismo, a través de la exploración de las potencialidades de los sujetos estudiados.

En este trabajo, se retoman estudios realizados sobre el error, tomando en cuenta la forma en que se categorizaban; ello permitió desarrollar un primer acercamiento de los errores producidos en el aprendizaje del álgebra (García, 2010).

Consideramos que desde la educación inicial y llegando hasta niveles superiores, los estudiantes aprenden conceptos y principios matemáticos en su sentido abstracto así como procedimientos que les permiten desarrollar tareas matemáticas; pero hay muchos estudiantes que tienen dificultades para comprender los conceptos y principios que dan sostén a los procedimientos; estos alumnos son los que emplean procedimientos equivocados y mal comprendidos, que arrastran consigo durante toda su formación en los distintos niveles educativos y que afloran con mucha fuerza si acceden a estudios superiores de las áreas de científicas.

Así, cometer los errores y aprender cómo es posible su identificación, con el fin de corregirlos, es parte importante del aprendizaje de los alumnos en cualquier nivel educativo y por lo que distintos investigadores realizan estudios para identificar las razones por las que surgen y a partir de ahí, tener posibilidades de ayudar a cada alumno o grupo de alumnos a que se corrijan, tal como lo refiere Bachor (1979). Meyerson (1976) comparó los errores de los estudiantes con síntomas de una enfermedad o un conjunto de enfermedades que requieren un análisis médico especial; supuso que con los errores en matemáticas sucede lo mismo: es necesario primero, identificar los errores, clasificarlos y luego de reconocer sus causas mediante el estudio y tratarlos adecuadamente. Este tipo de pensamiento se ha mantenido y ha cobrado impulso en los últimos años en el campo de la matemática, de tal suerte, que los errores se estarían reconociendo como componentes elementales en el proceso de aprendizaje, permitiendo tener la oportunidad para profundizar en la comprensión para una mejor enseñanza, ya que se reconocerían los elementos presentes en los principales tipos de errores y se tendrían elementos pasa subsanarlos.

También hemos identificado una considerable colección de investigaciones acerca del error matemático en estudiantes de diversos niveles educativos entre los que se encuentra los trabajos de Hartnett y Gelman (1998), Mason (2002), Chi y Roscoe (2002), Merenluoto y Lehtinen (2002), Kieran (1992), Brown, Montfort y Findley (2007). Todos ellos pusieron de manifiesto que los conocimientos previos eran las fuentes de los errores de los estudiantes.

Otros autores dedicaron sus investigaciones a las creencias intuitivas que daban origen a los errores como Ashlock (2002), Vosniadou y Verschaffel (2004) o Matz (1982), quienes consideran que el uso inadecuado de los procedimientos específicos es la causa que los origina. También hubo investigadores que se centraron en una teoría denominada 'Buggy algorithms', en la que se intenta escudriñar las causas de los errores con base en el mal uso de procedimientos como el caso de VanLehn (1990), Resnick y Omanson (1987), Young y O'Shea, (1981), Brown y Burton (1978), Payne y Squibb (1990), entre otros. Como derivación del anterior y que se complementó con la diferenciación que hacen del conocimiento conceptual y sus procedimientos se mencionan en los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986) y Silver (1986).

2.2.4 Estudios sobre análisis, causas y elementos que llevan al error algebraico y matemático

En nuestro estudio toma especial relevancia la clasificación organizada de los errores presentados por los estudiantes universitarios al afrontar la resolución de tareas algebraicas. Una parte notable de las investigaciones sobre errores en matemáticas se ha centrado en las causas que los provocaban y como consecuencia, el establecimiento de diversos factores condicionantes derivó en sistemas clasificatorios. Por esta razón, muchos resultados de este tipo de estudios han generado diferentes categorías de errores. Como veremos a continuación, algunas de esas categorías obedecen a facetas propias del pensamiento matemático, mientras que otras se han focalizado en diferentes habilidades y conocimientos del trabajo en álgebra.

Un primer trabajo de referencia es el de Roberts (1968), quien al analizar el desempeño de escolares de tercer curso de educación primaria en cálculos aritméticos, identificó varias estrategias erróneas y las agrupó en cuatro categorías: selección errónea de operación, cuando los escolares escogían equivocadamente la operación a realizar; error básico de cálculo, cuando los escolares escogían la operación correcta pero presentan errores al aplicar hechos numéricos básicos; algoritmos defectuosos, cuando aplican correctamente la operación pero se equivocan en un paso específico del algoritmo; respuesta aleatoria, cuando los escolares responden algo que no tiene relación con el problema dado. Este estudio fue la base de investigaciones posteriores que depuraron o enriquecieron esa clasificación, centrándose en algunos casos en tareas algebraicas. Uno de ellos es el de Cox (1975), quien identifica errores sistemáticos con motivo de la aplicación de algoritmos básicos y también que varios sujetos de su estudio muestran evidencias de saber cómo realizar los procesos y cálculos correctos, pero debido a distracciones, aburrimiento o a una lectura inapropiada, generan una comprensión inadecuada que redunda en un error.

Engelhardt (1977), reprodujo la investigación de Roberts (1968) con niños de otra edad y documentó ocho categorías de errores, con una mayor concreción de habilidades matemáticas: Error básico de ejecución, algoritmos defectuosos, error de agrupamiento, inversión inadecuada, operación incorrecta, algoritmo incompleto, error de identidad y errores relacionados con el cero. En este estudio se destaca la presencia de errores en las cuatro primeras categorías. Zigmond *et al*. (1981) identificaron dos categorías más: el descuido y no entender el concepto involucrado. Davis (1984) utilizó también el trabajo original de Roberts y categorizó los errores de los estudiantes en reversiones binarias, errores inducidos por el lenguaje o la notación, errores por la recuperación de un esquema previo, errores producidos por una representación inadecuada y reglas que producen reglas erróneas.

Otra investigación que ha sido un referente importante en esta línea es la de Radatz (1980), quien en el contexto del procesamiento de la información y desde la revisión de literatura de investigación, estableció las siguientes categorías de errores:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje.
2. Errores debidos a las dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destreza y conceptos previos.
4. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.
5. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

Radatz (1980) sugiere que los errores de la última categoría dependen de la experiencia de los alumnos sobre problemas similares, es decir, de su práctica. Ésta puede producir una rigidez en su modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar o decodificar información nueva, razón por la cual, los estudiantes continúan empleando operaciones cognitivas que les son familiares, incluso cuando hay modificaciones en las condiciones iniciales.

Otro trabajo de referencia es el de Mosvshovitz-Hadar, *et al*. (1987), quienes desarrollaron una clasificación empírica sobre los errores, utilizando como base el análisis constructivo de las soluciones de un grupo de alumnos a una serie de tareas, y sometiéndolo al juicio de determinados expertos. Los resultados generaron seis categorías:

1. Datos mal utilizados.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.
3. Inferencias no válidas lógicamente.
4. Teoremas o definiciones deformados.
5. Falta de verificación en la solución.
6. Errores técnicos.

Una investigación que trata directamente los errores algebraicos es la que realizaron Ruano *et al*. (2008), quienes sostienen que uno de los orígenes de los errores es la evolución de las distintas etapas de aprendizaje del sistema de representación que involucra el lenguaje algebraico con respecto al trabajo en aritmética. De esa manera distinguen errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, errores de procedimiento en los que los estudiantes usan de forma inapropiada las fórmulas o reglas de procedimiento y los errores del álgebra que son debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Estos investigadores finalizan afirmando que algunos errores tienen otros orígenes como por ejemplo en las actitudes afectivas y emocionales, en excesos de confianza, bloqueos u olvidos, entre otros.

Caputo y Macías (2006) realizaron de un estudio sobre los errores algebraicos de los estudiantes de la asignatura Álgebra I, correspondiente a un primer curso universitario. En este trabajo se destacó la importancia de considerar que los errores de los alumnos son valiosos indicadores que permiten conocer los indicadores de los procesos cognitivos e intelectuales que cada escolar realiza al enfrentarse a tareas algebraicas. Por tanto, resulta fundamental analizar dichos indicadores, con la intención de determinar las razones por las cuales los alumnos no logran concluir o realizar correctamente un ejercicio o procedimiento algebraico, identificando los posibles obstáculos con que se enfrentan y planificar en función de futuras intervenciones e investigaciones. Estos autores clasificaron los errores en cinco categorías, en las que ya se vislumbran coincidencias importantes con trabajos referidos anteriormente:

1. Secuencias incoherentes o a primera vista que sean incomprensibles, en las que no es posible su justificación o se justifica incorrectamente en alguno de los pasos de demostración.
2. Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje algebraico; destacando aquellos que se relacionan en los distintos contextos en los que se usan las letras propias del álgebra, además de los significados que las letras tienen en cada uno de dichos contextos y los problemas de traducción que afronta el estudiante para pasar del lenguaje usual al lenguaje algebraico y viceversa.
3. Errores algebraicos elementales, que se dan debido a la carencia de los conocimientos adecuados en los niveles anteriores de educación.
4. Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura de álgebra.
5. Demostraciones incompletas o conclusiones por decreto o con pasos "intermedios" incompletos.

Por su parte, Booth (1984) reporta una investigación, en la que se apoya nuestro trabajo, relacionada con el enfoque del álgebra como una generalización de la aritmética. En ella se investiga el uso de las letras como generalización de los números, así como las distintas formas de construir expresiones con letras y números. En este estudio las pruebas de comprensión se diseñaron con base en los conceptos que los investigadores consideraron importantes, y tomando como referencia la revisión de libros de texto, las discusiones con profesores, las consideraciones psicológicas y las distintas referencias de la literatura consultada, así como la misma información obtenida de las entrevistas realizadas a los estudiantes. El estudio toma como referencia las siguientes interpretaciones de las letras como fuentes de errores:

1. Letra evaluada.
2. Letra ignorada.
3. Letra como objeto.
4. Letra como cantidad desconocida con valor único.
5. Letra como número generalizador.
6. Letra como variable.

Booth (1984), menciona que los errores que se presentan en el uso de las letras en álgebra pueden tener como fuente las siguientes razones:

1. Los alumnos muestran una tendencia natural a interpretar las letras con valores específicos y sin posibilidad de que representen distintos valores, idea que se estudia también en Palarea (1998).

2. Para los estudiantes es más fácil concebir que las letras representan números con valores únicos. En algunos casos pueden manejarlos como entidades más que como cantidades, como en la manipulación de la expresión $2a + 5a + b = 7ab$, en donde es común que inventen reglas para sumar los números y agrupar las letras. Palarea (1998) menciona también este tipo de errores.

3. Algunos estudiantes no hacen la distinción cuando las letras representan valores de números, medidas de objetos y cuando representan medidas o valores por sí mismos. Y algunos interpretan las letras como etiquetas utilizándolas como en los casos de las iniciales de los objetos representados. Por ejemplo: Utilizar la letra "*m*" para manzanas, la letra "*e*" para estudiantes, entre otras, situación mencionada también por Palarea (1998).

Así mismo, Booth (1984) atribuye a la formalización de los métodos las siguientes dificultades:

1. Algunos estudiantes tienen problemas para explicar los métodos que utilizan para resolver problemas algebraicos.

2. Además los procedimientos que los estudiantes utilizan para resolver problemas aritméticos son frecuentemente informales y son difíciles de codificar para transformarlos en métodos algebraicos válidos.

3. Por último, la mayoría de los procedimientos son contexto-dependientes, es decir, no se pueden generalizar para otros problemas parecidos y sólo se pueden simbolizar de manera informal, siempre y cuando se haga referencia al contexto particular de la interpretación.

Una tercera fuente de errores señalada por este mismo autor, está en la pobre comprensión de la notación algebraica por parte de los estudiantes:

1. Los estudiantes desean siempre obtener una respuesta numérica de las operaciones algebraicas, lo que los lleva a realizar operaciones inventadas que generan resultados erróneos.
2. Generalmente los estudiantes ignoran el uso de los signos de agrupación, muchas veces por considerarlos innecesarios, esto puede ser debido a que:
    a) El contexto del problema determina el orden de las operaciones.
    b) En ausencia del contexto, las operaciones se hacen de izquierda a derecha.
    c) Consideran que se obtienen siempre los mismos valores independientemente del orden de las operaciones.

3. Los estudiantes presentan diversas confusiones con la notación. Por ejemplo $4y$ puede ser interpretada como 4 veces y o como cuarenta y o como $4 + y$. En otros casos si se le da un valor a la incógnita por ejemplo si $y = 3$, $4y$ puede ser interpretada como 43 o como 7, hecho documentado por Palarea (1998).

Con esta revisión es posible afirmar que en los últimos años ha ocurrido un cambio significativo de un enfoque conductista a un enfoque cognitivo para la clasificación de errores de los estudiantes. Los investigadores han desarrollado clasificaciones de errores basados en distintos modelos teóricos cognitivos, y este cambio ha hecho hincapié en los “procesos de pensamiento” que dan pie a los errores que presentan los estudiantes.

A manera de conclusión, se puede confirmar que se distinguen dos grandes categorías comunes a la mayoría de las investigaciones antes mencionadas y las cuales se toman como punto de partida para esta investigación:

1. Errores de carácter procedimental: aquellos que están relacionados con los cálculos o que se ven reflejados en el momento de realizar alguna manipulación de incógnitas u operaciones necesarias para el desarrollo de una tarea, así como procedimientos incompletos atribuibles a decisiones arbitrarias de los estudiantes.

2. Errores de carácter conceptual: aquellos errores cuyo origen se sitúa en el cambio del lenguaje utilizado en la aritmética al pasar al lenguaje algebraico y realizar por tanto representaciones inadecuadas de la información que requieren para resolver las nuevas situaciones a las que se enfrentan. También se incluyen aquí inferencias lógicas no válidas, que generan una mala comprensión de los conceptos básicos algebraicos. Todos estos errores pueden deberse a una aparente rigidez de su pensamiento que no les permite adaptar sus conocimientos previos al nuevo contexto en el que se desenvuelven o también, por una sobrecarga cognitiva en las distintas etapas de desarrollo intelectual en el que se encuentran los estudiantes.

2.2.5 Posibles fuentes de errores

Como se mencionó anteriormente, es sabido que en el desarrollo académico del estudiante, antes de llegar a niveles universitarios, éste adquiere conocimientos matemáticos, desde los niveles preescolares hasta la educación media superior; estos conocimientos, posible fuentes de errores, han sido clasificados e identificados en dos categorías que son las ideas previas y los conceptos falsos. Una idea previa se le reconoce como un tipo de conocimiento simple que es fácilmente alterado o borrado a través de la instrucción adecuada, el otro, el concepto falso, es un tipo de conocimiento nativo en el estudiante que también está muy arraigado y por lo tanto es muy resistente al cambio, incluso con formas ingeniosas de enseñanza. De ahí, es importante considerar la influencia adquirida en los niveles pasados de los estudiantes y que afectan su comprensión actual, ya que los errores pueden venir arraigados desde la estructura básica y se presentan como un problema que se debe encontrar, analizar, comprender, corregir y validar.

Enfocando ahora la atención en el álgebra, se debe comprender la relevancia del uso de las letras en los diferentes programas escolares de la secundaria y el bachillerato, por el papel diverso que juega cada letra de acuerdo a distintos conceptos y situaciones en que se usa, como incógnita, como relación funcional o parámetro, como un número general, etc., ya que este conocimiento permite minimizar los errores que pueden generar el uso de las letras en actividades algebraicas.

Usiskin (1988) pone de manifiesto cuatro usos diferentes en las variables, y que se asocian a cuatro distintas concepciones del álgebra, en la que se hace énfasis en la relación que existe entre ellas y que se utiliza con propósitos en la enseñanza del álgebra. Estos usos se representan en la Tabla 2, en la se muestran las diversas concepciones del álgebra y los distintos usos de ellas.

Tabla 2. Uso de la variable según Usiskin (1988)

Concepción del álgebra	Usos de la variable
Aritmética generalizada	Generalizadores de patrones
Procedimientos para resolver problemas	Incógnitas y constantes
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos y parámetros
Estudio de estructuras	Marcas arbitrarias en el papel

Este autor sostiene que la diversidad de enfoques bajo los cuales los estudiantes de secundaria y bachillerato aprenden álgebra, puede condicionar el aprendizaje no holístico de los conceptos algebraicos básicos, lo cual puede tener repercusiones en las producciones de los estudiantes cuando son incapaces de integrar los cuatro enfoques antes mencionados para una correcta y completa comprensión del álgebra.

Sobre el uso y estudio de las variables en el álgebra, existen investigaciones realizadas con universitarios, destacándose principalmente las de Ursini y Trigueros (1997, 1998, 2006). En estos trabajos observaron y analizaron que el aprendizaje del concepto de variable durante los niveles básico o secundaria y medio superior o bachillerato, en los que su comprensión es poco significativa, alcanzando el nivel de manejo de estos estudiantes en su nivel elemental (ya sea variable como incógnita específica, como número general y en su relación funcional), cada alumno recurre de manera frecuente a sus conocimientos previos para poder resolver las nuevas situaciones que se les presentan, aunque estos conocimientos sean deficientes.

Estos autores explican que, ya en su paso de estudiantes a nivel superior, los universitarios ya han aprendido más técnicas, por lo que tienen la capacidad de aplicar los algoritmos y expresiones algebraicas con mayor rapidez y fluidez, mejorando su capacidad de interpretación de variables en las expresiones; agregan que la gran mayoría de estudiantes no utilizan las variables para analizar y resolver los problemas a los que se enfrentan. Ursini y Trigueros (1998) mencionan que estos estudiantes cuando se enfrentan a problemas complejos, suelen evitar el acercamiento algebraico y utilizan el conocimiento aritmético, en que confían más.

Estos investigadores llegaron a la conclusión de que durante la enseñanza secundaria los alumnos se enfrentan a una serie de problemas que requieren cada uno de los usos mencionados para las variables, ya sea de manera separada o integrada y los textos escolares de apoyo diseñados para ayudar a los alumnos a desarrollar una comprensión integrada del concepto de variable no ayudan en este sentido. Adicionalmente las autoras mencionan que por lo general, los estudiantes tampoco reciben apoyo de los profesores, ya que ellos también carecen de una comprensión adecuada del concepto del elemento analizado.

Rosnick (1981) afirma que las implicaciones del uso de las letras como variables en la escuela secundaria son muy importantes y defiende que se debe marcar como objetivo en los planes de estudio de los niveles medio y superior, que los estudiantes sean capaces de distinguir entre diferentes formas en que los símbolos y las letras sean utilizadas en las ecuaciones. Los estudiantes deben aprender a diferenciar cuándo las letras son utilizadas como etiquetas que se refieren a entidades concretas o en forma alternativa, como variables que representan de forma abstracta algún número o cantidad. Cuando esto no es así, se dan casos en que, alumnos de nivel secundaria tienen dificultades para hacer distinciones entre los usos de las letras como etiquetas en las variables y como consecuencia encontrar casos, ya a nivel universitario, en que aún se carece del nivel adecuado de desarrollo intelectual para tener la capacidad de hacer la diferenciación adecuada.

Uno de los problemas encontrados sobre el error del reconocimiento de los símbolos algebraicos lo exponen también Wagner y Parker (1999); para los autores una expresión algebraica es una descripción de unas operaciones que contienen signos matemáticos y además emplean dos sistemas de símbolos distintos, uno de letras y otro de números, y se puede presentar confusión acerca de la comprensión del uso adecuado de las letras. Inciden en que una situación muy común por la que pasan una gran cantidad de estudiantes al ver la notación algebraica de la multiplicación (por ejemplo, *ab*), es que le dan valor como un solo símbolo con *a* decenas y *b* unidades, es decir le dan valores a *a* y *b* y los acomodan como la unión de esos números y no como proceso multiplicativo. También, indican los autores, que en etapas iniciales, cuando el alumno está aprendiendo aritmética, se suele hacer uso de letras, por ejemplo *P* para un punto, *N* para un número, etc., haciendo entender a los alumnos que esta es la forma usual en que se manejan las letras, y cuando llegan a cursos de álgebra persisten en esa idea del uso de las letras para nombrar las cosas, no para realizar procesos matemáticos y algebraicos (Wagner y Parker, 1999).

Otro estudio sobre errores en álgebra (Ursini *et al*, 2005), documentó que las principales causas por las que se cometen errores en el manejo de las variables se refieren a que los estudiantes, en sus esfuerzos por darle sentido a las variables, recurren a conocimientos previos de la aritmética, similar a lo que explicaban Wagner y Parker (1999). Cuando los estudiantes hacen sus primeros acercamientos al álgebra, generalmente es cuando inician su educación secundaria, o despúes de seis años de estudio de la aritmética (posiblemente la primaria), los profesores no tienen la costumbre de enseñarles detalles específicos sobre el significado de los símbolos literales y dedicando más tiempo en instruirles técnicas para resolver ecuaciones y practicar reglas de manipulación de expresiones algebraicas para plantear algunos problemas en los que se espera que sus alumnos empleen los procedimientos que han aprendido mecánicamente para encontrar la solución (Ursini *et al*, 2005).

Siguiendo la línea de influencia de los conocimientos previos como causa de los principales errores algebraicos, Chi y Roscoe (2002) están en contra de la idea que indica que los estudiantes entran a situaciones de aprendizaje como si llegaran a un pizarrón en blanco. Consideran que los estudiantes tienen algún conocimiento previo acerca de un dominio de estudio, y que este conocimiento, al compararse con el conocimiento formal tiene una tendencia a ser incorrecto, ya que, probablemente, tiene bases empíricas no fundamentadas adecuadamente, lo que dificulta el aprendizaje de conocimientos formales con un sentido más profundo y correcto. Este conocimiento previo puede ser visto como una base de la que parte el nuevo conocimiento, en la que ellos fundamentan los nuevos conceptos para ser integrados y de ahí que traen los errores que pueden producirse.

Otros investigadores coinciden en mencionar que es difícil aumentar la comprensión conceptual de los alumnos, porque gran parte de ellos llega al aula con una serie de creencias pre-existentes sobre un concepto que puede ser difícil de corregir (Chi y Roscoe, 2002; Brown, Montfort y Findley, 2007). En este caso el conocimiento previo puede ser frecuentemente visto como un obstáculo de cambio conceptual, como refiere Mason (2002). En estas dos explicaciones se refuerza la idea que los alumnos tienen un conocimiento previo que ha sido mal encauzado, por lo que tienen problemas de entendimiento sobre el uso de los símbolos y de las variables que ocasionan los problemas que enfrentan en estudios posteriores, llegando a veces a llevarlos a la universidad sin haber sido corregidos a tiempo.

Brown *et al*., (2007) mencionan los 'misconceptions', como elementos que son difíciles de abordar en las investigaciones. Ellos consideran que sin un conocimiento específico de los conocimientos erróneos de los estudiantes, es poco probable modificar el pensamiento de ellos a través de la enseñanza tradicional; esto lo explican partiendo de que se pueden dar cambios sólo después de que ciertos hechos hayan sido corregidos de la mente y no se pueden corregir si se desconocen.

Se argumenta también que los errores existen debido también a discordancias y conflictos entre los muchos conceptos de matemática avanzada y matemática básica (Stafylidou y Vosniadou, 2004), fundamentando lo anterior con trabajos como el de Fischbein (1987), quien puso de manifiesto que las creencias intuitivas pueden ser las causas de los errores sistemáticos de los estudiantes. Este hecho también fue observado por Stavy y Tirosh (2000), quienes establecieron una teoría respecto a las reglas intuitivas. Todos estos autores relacionan los errores que se dan en el álgebra con respecto a diferencias de conocimiento, ya que si se fija en las matemáticas avanzadas, a veces su relación con las básicas es muy distante. Tómese como ejemplo las integrales de orden superior si se comparan con al álgebra de secundaria. En definitiva la incompatibilidad entre los conocimientos previos y los nuevos conocimientos ocasiona problemas de comprensión y constituye una de las razones por las que los estudiantes cometen errores en tareas algebraicas, fracciones, números racionales, etc. (Hartnett y Gelman, 1998, Merenluoto y Lehtinen, 2002 y Kieran, 1992).

En García (2010) hemos analizado el trabajo de estudiantes universitarios y hemos encontrado que sus errores pudieron ser originados por el conflicto que presentan algunos de ellos para lograr un cambio conceptual derivado del aprendizaje previo. Este hecho origina un desequilibrio que lo obliga a encontrar soluciones o alternativas sobre las tareas algebraicas a las que están enfrentados.

Otras probables fuentes de errores se pueden apreciar en la investigación de Ashlock (2002), quien clasificó algunos errores de los estudiantes en cálculo, geometría y álgebra atribuyéndolos a la generalización y a la particularización. Sin embargo, el hecho de que los alumnos cometan ciertos errores no responde a la pregunta de por qué se producen. Para ofrecer una respuesta Matz (1982, p. 25), explica que "los errores son el resultado razonable, aunque sin éxito, de los intentos de adaptar los conocimientos previamente adquiridos a nueva situación". En esta situación es necesario que el profesor sea un apoyo sólido para que el estudiante logre adaptar el nuevo conocimiento de forma correcta, recordando el objetivo que mencionó anteriormente Rosnick (1981).

Se ha documentado y comprobado en el aula, que muchos estudiantes cometen errores como el siguiente: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. En este caso, Matz (1981, p. 29) afirma que una de las causas es la linealidad que define como"una forma de trabajar con un objeto que puede ser descompuesto mediante el tratamiento de cada una de sus partes de forma independiente", y esto lo relaciona con en clases de aritmética donde tienen la costumbre de utilizar la ley distributiva cuya estructura se relaciona en apariencia a la ley de linealidad definida, pero que conceptualmente se rigen por reglas diferentes.

Con relación a los *buggy algorithms* antes mencionados, Burton (1978) y Young & O'Shea (1981) han tratado de explicar y además diagnosticar los errores de los estudiantes que aplican ciertos algoritmos defectuosos o equivocados; estos autores explican que los errores de los estudiantes son causados por el seguimiento correcto de algoritmos defectuosos y no por desconocimiento de los procesos. Por tanto es necesario analizar y conocer los errores de los estudiantes para identificar los algoritmos defectuosos que ellos aplican. Se da mucho el caso en que hay estudiantes que son muy buenos para seguir ciertos procedimientos, aunque muchas veces dichos pasos son equivocados. En la Figura 3 se muestra el *buggy algorithm* que muestra las producciones de algunos estudiantes en el proceso de la adición que formaron parte de la investigación de Brown y Burton (1978).

En este ejemplo se entiende que el estudiante, ante sumas sencillas de dos números, en el proceso de adición, si la suma de los dos elementos es menor a 10 puede obtener el resultado sin problema. Pero si la suma de los dos elementos es igual o mayor que 10, en vez de acarrear el dígito del lado derecho (que corresponde a las unidades) debajo del sitio de correspondencia, acarrea el dígito del lado izquierdo (que corresponde a las decenas), siendo este siempre el número 1.

$$\begin{array}{r} 365 \\ +\ 574 \\ \hline 819 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 679 \\ +\ 794 \\ \hline 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 923 \\ +\ 481 \\ \hline 114 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27493 \\ +\ 1509 \\ \hline 28891 \end{array}$$

Figura 3. Ejemplo de “buggy algorithm” (Brown y Burton, 1978, p.158)

En este ejercicio se puede percibir cómo el estudiante realiza el algoritmo de la suma de manera correcta, cuando el resultado de la suma de dos números es menor de diez, pero cuando el resultado de dicha suma es mayor de diez, solo registra el digito de la decena ignorando el de las unidades y por consecuencia obtiene un resultado incorrecto.

Sobre este error VanLehn (1980, p. 7) explica en forma detallada que en muchos casos la respuesta puede ser pronosticada con precisión con una pequeña modificación de la estructura del procedimiento correcto. Esas pequeñas modificaciones pueden servir posiblemente como una descripción precisa del error, son las llamadas bugs.

Esta teoría proporciona una buena explicación de los errores de los estudiantes, pero también es importante saber de dónde se origina el error; se sabe que, en muchos casos, estos elementos son invenciones de los estudiantes, porque ningún centro escolar enseña procedimientos incorrectos de forma intencionada (Payne y Squibb, 1990).

Respecto a este mismo tema, VanLehn (1990) diferencia dos tipos de errores: los sistemáticos y los despistes, reconociéndose como la “Teoría de VanLehn” (Sánchez y López, 2011, p. 431). En esta teoría los errores sistemáticos significan la aplicación de métodos defectuosos: los algoritmos o reglas son cometidas por practicantes novatos; los slips, como se conocen los despistes de VanLehn, son por lo general por falta de cuidado y éstos pueden ser cometidos por practicantes expertos o novatos, aunque es más complicado que le suceda a un experto.

Una de las principales explicaciones de la fuente de los errores es la *Repair Theory*, propuesta por Brown y VanLehn en el año de 1980. En ella se explica que cuando un estudiante no es capaz de realizar una acción y se produce un callejón sin salida, en este momento el estudiante puede tomar varias líneas de acción como, dejar sin resolver el problema, intentar repararlo con el fin de poder continuar con la ejecución del procedimiento o, tal vez, hacer uso de conocimientos previos que tengan o no relación con el problema que se intenta resolver.

Lo que recomienda Muller (2010) cuando un estudiante se enfrenta a un callejón sin salida, es que debe reorganizar su información y hacer un alto en el camino para buscar la mejor solución posible, que vaya en el mismo sentido de la meta. Aunque lo dicho por Müller es sencillo, cuando el estudiante carece del conocimiento correcto sobre el problema a resolver, es necesario que pida ayuda a su profesor y aprenda cuál es el camino correcto para que no se vuelva a bloquearse en tareas similares.

Existen otras investigaciones que tratan la naturaleza del conocimiento matemático y que proporcionan pistas para dar explicaciones sobre las fuentes de error haciendo uso de las teorías de los *bugs*, que van más allá de la estructura superficial de los procedimientos entrando a fondo en los principios matemáticos que se encuentran involucrados. Se hace necesario entonces, revisar la base conceptual de los errores que producen los estudiantes; hay investigaciones que diferencian el conocimiento procedimental y conceptual. El primero se define como las reglas, algoritmos, el lenguaje formal de las matemáticas, además de aquellos procedimientos utilizados para resolver las tareas relacionadas con la matemática. El segundo lo constituyen las conexiones existentes entre la información, una red de datos de las matemáticas y las proposiciones (Hiebert y Lefevre, 1986).

Hiebert y Lefevre (1986, p. 200) explican que los estudiantes de matemáticas a menudo se dedican a observar los problemas en forma superficial, luego recuerdan y aplican las reglas memorizadas en la manipulación de símbolos. La consecuencia es recurrente en que se dan respuestas que son irracionales, por lo que se obtiene un bajo rendimiento en una serie de problemas, que son a veces repetidos y practicados por estudiantes que desarrollar tareas algebraicas. En este caso, una posible forma de corregir estos errores es que el profesor esté seguro que el alumno comprendió, más que en modo memorista los procedimientos correctos aunque esto es complicado de hacer cuando se tienen decenas de estudiantes dentro de sus aulas.

También existen fuentes conceptuales de los errores que producen errores sistemáticos en los procedimientos que se remontan a los defectos del conocimiento conceptual o de la falta de vínculos entre conceptual y procedimental (Silver, 1986; Resnick *et al*., 1989). Estos autores examinaron los esfuerzos de los niños por darle sentido a los nuevos conocimientos a los que enfrentaban; en su investigación documentaron las principales categorías de los errores que aparecían constantemente cuando los niños aprendían fracciones decimales, sugiriendo además, que ellos son una secuencia natural de los intentos de los estudiantes por integrar el nuevo material que se les enseñó con el conocimiento que ya poseen del pasado. Se puede entender que el niño lucha por comprender los conceptos e ideas matemáticas, los procesos de aprendizaje, y unirlos con el conocimiento existente; cuando lo hace bien, se crea nuevo conocimiento, pero cuando se hace mal, entonces surgirán problemas en el futuro cuando el niño enfrente problemas similares.

En este apartado hemos presentado los fundamentos teóricos que sirven de base a esta investigación, esas referencias nos orientan hacia la elección de una concepción holística del algebra, la cual estructuramos con base en las definiciones y enfoques mencionados anteriormente y sustentada en los distintos trabajos de investigación revisados, dicha concepción consiste en considerar el álgebra como:

- Una generalización de la aritmética.
- Un método para la resolución de problemas.
- Una herramienta para el estudio de las funciones.
- El estudio de estructuras matemáticas.

Tomando en cuenta esta perspectiva del álgebra y en la búsqueda de un instrumento de evaluación que incluyera estos preceptos, se consideró lo mencionado por Booth (1984), relacionado con el enfoque del álgebra como una generalización de la aritmética, como el punto de partida de nuestro trabajo de investigación. Booth (1984) considera las siguientes interpretaciones de las letras como fuentes de errores:

- Letra evaluada.
- Letra ignorada.
- Letra como objeto.
- Letra como cantidad desconocida con valor único.
- Letra como número generalizador.
- Letra como variable.

La búsqueda de un instrumento de evaluación que nos fuera de utilidad para la valoración de las competencias algebraicas de los estudiantes al resolver distintas tareas algebraicas, nos dirigió al trabajo de Kücheman (1980) quien basado en el trabajo de Booth, diseña y aplica un instrumento que valora el uso y significado de las letras en álgebra y el cual es parte esencial de este trabajo. En el capítulo siguiente se describe el citado instrumento.

Capítulo 3

Marco Metodológico

En este capítulo describimos el diseño metodológico de nuestra investigación. En primer lugar se caracteriza el tipo de investigación y se describe la selección del centro y de los alumnos que actuaron como sujetos. Posteriormente, describimos los instrumentos de recogida y análisis de datos justificando las razones que nos llevaron a elegir estos instrumentos.

3.1 FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación que recogen estas páginas ha sido abordada desde los enfoques cuantitativo y cualitativo. Por un lado, nos centramos en la aplicación del test creado en el proyecto denominado, *The Concepts in Secondary Mathematics and Science Project* (*CSMS),* que es de corrección cuantitativa; por otro lado, realizamos doce entrevistas semi-estructuradas, con el objetivo de "maximizar la comprensión de los hechos y facilitar la interpretación de los datos" (Hitchcock y Hughes, 1995, p. 296). La investigación tiene dos fases claramente diferenciadas. La primera, que constituyó el Trabajo Fin de Máster, con un marcado carácter exploratorio, se centró en la recogida de datos con un instrumento de evaluación diseñado para conocer el rendimiento algebraico con una muestra de estudiantes universitarios y su posterior análisis (García, 2010; García *et al,* 2011, García *et al*, 2014). Esta primera fase nos permitió documentar la presencia de errores sistemáticos en la resolución de tareas algebraicas y constatar la necesidad de analizar las causas de esos errores. Un resumen de esta fase se presenta en el anexo IV. La segunda fase se centra en la aplicación del instrumento de evaluación del *CSMS* para estudiar con detalle en qué tipo de habilidades y sobre qué tipo de conocimientos algebraicos presentaban errores. Esta segunda fase también incluye la realización de una entrevista semiestructurada en algunos de los estudiantes participantes en el estudio, con el fin de conocer su razonamiento y sus argumentos en aquellas preguntas en las que se presentaron errores. Los instrumentos empleados los describiremos y justificáremos más adelante.

3.2 EL CONTEXTO ACADÉMICO

La institución educativa en la que se desarrolla la investigación es una universidad pública mexicana localizada en la ciudad de Autlán de Navarro, en el Estado de Jalisco. Se trata del Centro Universitario de la Costa Sur, dependiente de la Universidad de Guadalajara, en donde se ofrecen las titulaciones de:

1. Agronomía
2. Abogado
3. Administración
4. Biología Marina
5. Contaduría Publica
6. Nutrición
7. Turismo
8. Ingeniería en Teleinformática
9. Ingeniería en Mecatrónica
10. Ingeniería en Obras y Servicios
11. Ingeniería en Procesos y Comercio Internacional
12. Ingeniería en Recursos Naturales y Agropecuarios.
13. Técnico Superior Universitario en Electrónica y Mecánica Automotriz.
14. Enfermería

En todas estas titulaciones se contemplan materias del área de matemáticas, a excepción de las de Abogado y Enfermería en las cuales solo se incluyen algunos tópicos dentro de algunas asignaturas en específico (Derecho laboral, Fundamentos de enfermería).

3.3 TAMAÑO DE LA MUESTRA Y MÉTODO DE MUESTREO

La selección de este centro universitario se debió a la relación laboral del doctorando como docente. La muestra seleccionada es de tipo no probabilístico (Hernández *et al*. 2010), debido a que en el momento del estudio no se contaba con las facilidades para diseñar una muestra probabilística en donde todos los sujetos tuvieran la posibilidad de participar. De esta manera, para la integración de la muestra fueron considerados los estudiantes de los profesores que aceptaron apoyar este trabajo.

La muestra final se compone de 194 estudiantes de primer curso universitario, pertenecientes a seis carreras que ofrece el centro universitario donde se desarrolló esta investigación. La distribución de estudiantes por titulación la recogemos en la Tabla 4. El grupo más numeroso fue el de Administración seguido por Nutrición. Los grupos con menos estudiantes son los de Ingeniería en Recursos Naturales y Agropecuarios, así como los de Ingeniería en Teleinformática.

Tomando en consideración la notable diferencia en cuanto a la cantidad de estudiantes de cada una de las titulaciones y con el propósito de realizar análisis comparativos confiables, se decidió agrupar en dos categorías a los estudiantes: estudiantes de ingeniería y estudiantes de otras titulaciones, con lo cual los grupos mencionados quedaron conformados por 98 y 96 sujetos, respectivamente.

Tabla 3. Muestra según la titulación

Titulación	Número de estudiantes
Licenciado en Administración	52
Licenciado en Nutrición	44
Técnico Superior en Electrónica y Mecánica Automotriz	36
Ingeniero en Procesos y Comercio Internacional	37
Ingeniero en Recursos Naturales y Agropecuarios	17
Ingeniero en Teleinformática	8

La edad media de los participantes en el estudio era de 18.7 años en el momento de realizar el estudio. La edad más frecuente oscilaba entre los 17 y 19 años (83.5%), el 13.9% estaba entre los 20 y 22 años, y el resto (2.1%), tenían entre 23 y 29 años. Respecto al sexo, dentro del grupo de participantes en el estudio se consideró igual número de hombres que de mujeres.

3.4 DISEÑO Y APLICACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

En este apartado presentamos y justificamos el diseño de los instrumentos de recogida de información y la aplicación que se realizó de los mismos en el marco de nuestra investigación. En primer lugar aplicamos un instrumento de evaluación ex post facto como primer acercamiento al problema de investigación, posteriormente nos centramos en el cuestionario CSMS y más adelante en las entrevistas semiestructuradas.

3.4.1 Breve descripción del trabajo de fin master

Con el fin de estudiar, analizar y caracterizar los errores que cometen los estudiantes de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas, se realizó un primer acercamiento a la investigación de las fuentes de los errores y su naturaleza por medio de la investigación llevada a cabo en el trabajo de García (2010), en el cual se pretendía evaluar el rendimiento, cuantificar y tipificar los errores en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer curso de diferentes carreras del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara México.

A continuación se hace un resumen de las ideas más sobresalientes de esta primera aproximación a nuestro problema de investigación.

Con el interés de documentar la existencia de errores algebraicos en las producciones de los estudiantes universitarios, se realizó un estudio expo-facto del análisis de los errores encontrados en las respuestas de 153 estudiantes en el instrumento de evaluación aplicado en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara (CUCSUR). El instrumento utilizado para ese estudio fue el primer examen departamental de matemáticas I para el calendario 2008, aplicado por el departamento de ingenierías de dicho centro (ver Anexo 1).

Este instrumento constó de 10 ejercicios de desarrollo de operaciones de tipo algebraico. Evaluaba contenidos procedimentales, distribuidos en los bloques temáticos que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Descripción del contenido algebraico de las tareas

Número de tarea	**Contenido algebraico**
1 , 3	Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales
2 , 7	Aplicación de reglas de operaciones algebraicas
4 , 5	Desarrollo de reglas de productos notables
6 , 8	Factorización de expresiones algebraicas
9 , 10	Resolución de inecuaciones lineales

La Tabla 4 explica cómo se distribuyeron los contenidos algebraicos por cada tarea, ello para una mejor observación.

La asignatura de matemáticas I se caracterizaba mayoritariamente por tener contenidos procedimentales, por ello la prueba recogía en su totalidad, preguntas de contenido procedimental, en esta prueba las cuestiones estaban planteadas en forma de evocación.

La construcción del examen que medía el nivel de conocimiento en matemáticas al finalizar el primer bimestre del primer ciclo del curso de matemáticas I se elaboró de la siguiente forma: Cada inicio de ciclo se convoca a un equipo de trabajo con profesores de la academia de matemáticas del departamento de ingenierías del CUCSUR, compuesto de profesores que imparten asignaturas de matemáticas en todas las titulaciones que ofrece la institución. Los profesores proporcionaban tareas que ellos creen que son imprescindibles para superar la asignatura.

Se contaba con la colaboración de docentes de distintos ciclos escolares, para confirmar que existía un acuerdo en cuanto a los contenidos mínimos que debe saber un alumno para superar ese ciclo educativo y que sirvieran de antecedentes a cursos posteriores relacionados con las matemáticas. Una vez seleccionado el material que proponía el profesorado, seguía una contrastación de estos contenidos con los objetivos curriculares y contenidos de la asignatura a evaluar y, finalmente, se comprobaba que los objetivos y contenidos seleccionados formaban parte de la bibliografía básica que aparece en los programas analíticos de la misma.

De todas estas fuentes de información, se seleccionaban aquellas tareas que involucraran contenidos que fueran compartidos por todas estas fuentes, es decir, si los profesores consideraban que determinados contenidos eran conocimientos básicos, se confirmaban que éstos estaban en los objetivos curriculares del ciclo y que además se trabajaba en los diferentes libros sugeridos como bibliografía básica, en este momento cabe mencionar que la elección final de los ejercicios estaba a cargo de profesores que no impartían la asignatura en el ciclo que se iba aplicar la prueba, intentando evitar algún tipo de sesgo por parte del diseñador final de la prueba.

La fecha para la aplicación de la prueba se acordaba considerando el calendario escolar vigente y además un periodo de tiempo adecuado según las experiencias de los profesores que impartían la asignatura en cuestión. En la selección de los alumnos, ellos fueron distribuidos en grupos de aproximadamente 25 integrantes, utilizando el criterio del orden alfabético de sus apellidos, evitando con esta medida que no se concentraran los mismos alumnos que tomaban el curso en las diversas titulaciones.

La fecha programada para la aplicación de la prueba. En esta etapa acudían los alumnos al mismo horario y se les daba un tiempo de dos horas para la resolución de la misma.

Al iniciar la prueba se les daba a conocer las instrucciones normativas, destacando en la cuestión pedagógica, la regla que no se les permitía usar ningún tipo de instrumento electrónico de cálculo y se les insistía en la utilidad de desarrollar procedimientos en las hojas que se les proporcionaba para ese fin.

Una vez terminada la aplicación de la prueba, los alumnos entregaban las hojas de procedimientos y respuestas al responsable de la academia de matemáticas quien citaba al resto de responsables a una reunión posterior para la evaluación de ésta.

Finalmente se reunían los profesores aplicadores para evaluar las pruebas, se les proporcionaba una guía de respuestas pero con la recomendación de considerar los procedimientos de las respuestas y consensuar cualquier duda acerca del valor que debería de asignarse a los mismos.

La población considerada para efectuar la investigación fue la de estudiantes de primer ingreso del nivel de Licenciatura de las titulaciones de Licenciado en Administración de Empresas, Licenciado en Turismo, Ingeniero en Recursos Naturales y Agropecuarios, Ingeniero en Obras y Servicios y Técnico Superior Universitario en Electrónica y Mecánica Automotriz, inscritos en el CUCSUR de la Universidad de Guadalajara (México).

A partir de los resultados encontrados en esta primera aproximación al problema de estudio, en los cuales se evidenció la presencia de errores algebraicos básicos por parte de los estudiantes universitarios, surgió la necesidad de proponer una herramienta de evaluación cuantitativa que partiera de la valoración del uso de las letras como fuentes de errores, pues consideramos pertinente partir de la estimación del conocimiento básico del uso y comprensión del álgebra en estudiantes del citado nivel. El objetivo inicial fue obtener, analizar y clasificarla información conseguida con la citada herramienta para posteriormente dirigir la investigación hacia el siguiente paso que consistió en la elección de un instrumento de estimación cualitativa, que permitiera profundizar en el análisis y esclarecimiento de las probables fuentes de los errores cometidos por los alumnos de primer curso universitario del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara. (Los resultados se pueden ver en el Anexo IV)

3.4.2 El cuestionario CSMS

El principal instrumento de evaluación considerado en esta investigación, fue obtenido del proyecto denominado *The Concepts in Secondary Mathematics and Science Project* (*CSMS)*, que se basa en la categorización de los distintos usos de las letras propuestos por Küchemann (1980), con el fin de caracterizar la forma en la que los estudiantes interpretan los símbolos literales en diferentes contextos algebraicos. Dicho instrumento consta de un cuestionario escrito en el que los estudiantes deben interpretar y manipular expresiones algebraicas, así como resolver problemas representados por símbolos literales. Cabe mencionar que al cuestionario original se le realizaron modificaciones en cuanto a la redacción para adaptarlo al contexto social mexicano en el cual se implementó.

El instrumento, originalmente diseñado por Küchemann, Brown y Blackeley (Küchemann, 1980, p.16), está compuesto por 23 tareas y 53 ítems en torno a distintos contenidos algebraicos: sustitución formal, simplificación, generalización y formulación, interpretación y solución de ecuaciones.

Las tareas fueron diseñadas por Küchemann para cada categoría, describiéndose cada una de ellas en función de la respuesta esperada, es decir, distinguiendo cuándo los estudiantes tenían que interpretar letras en cada ítem como valores evaluados, objetos, incógnitas con valor específico, números generalizados y variables. La evaluación de la prueba fue organizada de acuerdo con los niveles de entendimiento en el manejo de las letras de este autor, bajo el siguiente formato:

Letra evaluada. Se asigna a la letra un valor numérico.

Letra ignorada. Se ignora la letra presente o al menos se reconoce su existencia sin darle significado.

Letra como objeto. Se considera la letra como una forma abreviada de un objeto o como objeto en sí mismo con valor propio.

Letra como incógnita de valor específico. Se considera una letra como número único, pero desconocido y que pueden operar directamente sobre ella.

Letra como número generalizado. La letra es vista como una incógnita que puede tomar varios valores.

Letra como variable. Las letras son la representación de un rango de valores desconocidos y con una relación sistemática existente entre estos conjuntos de valores**.**

Las tareas relacionadas con cada uno de los niveles de entendimiento, que fueron consideradas para el análisis de las respuestas de la prueba aplicada se presentan en la Tabla 6 (véase sección 3.5) y son las mismas que propone Küchemann (1980).

El diseño del cuestionario tiene tres partes diferenciadas y en el Anexo 2 se presenta tal y como se aplicó en nuestro estudio. La primera es una presentación a los estudiantes en la que se describe la finalidad de la investigación. La segunda incluye algunos datos personales del encuestado y unos ítems de prueba que introducen a modo de ensayo a los encuestados en el modo de presentación de las tareas y la forma de responder. Finalmente, la parte principal del instrumento incluye las 22 tareas algebraicas, algunas de ellas con varios apartados.

El instrumento empleado evalúa contenidos conceptuales y procedimentales distribuidos en los siguientes bloques temáticos que se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Descripción del contenido de los ítems

Número de ítem	Contenido matemático
1a,1b,1c,2a,2b,4a,4b,4d,5a,5b, 6a,7a,7b,8,11a,11b, 15a	Sumas, restas y productos aritméticos, sustituciones numéricas en expresiones algebraicas.
7c,9a,9b,9c,13a,13b,13c,13d,13e,13f,13g, 13h,13i,	Aplicación de fórmulas geométricas, reconocimiento de las letras como objetos con valores propios.
4c, 4f, 6b, 7d, 17b,21	Sustitución de valores numéricos en expresiones algebraicas, interpretación de datos numéricos en problemas algebraicos, resolución de ecuaciones algebraicas lineales.
3,4e,5c, 9d, 10a,10b,12, 14, 15b,16,17a,18a,18b,20,22	Manejo de rango de valores para hacer válidas las ecuaciones algebraicas, generalización de resultados, planteamiento de ecuaciones a partir de problemas contextualizados.
19a,19b	Manipulación de rangos de valores desconocidos, análisis de relación entre cantidades y manejo de operaciones con estructuras algebraicas abstractas.

La tarea 23, que originalmente se encontraba en el instrumento aplicado por Küchemann (1980) no fue considerada en nuestro trabajo de investigación ya que para resolverla se necesitaba la implementación de secuencias didácticas específicas para familiarizar a los estudiantes con este tipo de estructuras y eso no entraba dentro de los objetivos de este trabajo.

En las páginas que siguen se describen las 22 tareas así como cada uno de sus ítems, especificando lo que persigue explorar cada una de ellas y agrupándolas según los niveles de entendimiento anteriormente mencionados.

Descripción de la Tarea 1

En esta tarea se requería a los estudiantes completar los espacios en blanco de los ítems, con el objetivo de estimar el manejo de las letras como letras evaluadas; para resolver de manera correcta esta tarea requerían de conocimientos de sumas y productos aritméticos y al mismo tiempo deberían demostrar conocimientos para realizar sustituciones en expresiones algebraicas. Los ítems de esta tarea fueron considerados dentro del nivel de entendimiento I. En la Figura 4 se presenta dicha tarea.

Tarea 1

1. Completar los espacios: $x \longrightarrow x + 2$ $\quad$ $x \longrightarrow 4x$

$6 \longrightarrow$ .... $\quad$ $3 \longrightarrow$ ....

$r \longrightarrow$ ....

Figura 4. Tarea 1

Descripción de la Tarea 2

En esta tarea se les requería a los estudiantes determinar cuál de las expresiones era mayor o menor, lo cual deberían realizar sustituyendo con valores arbitrarios todas las expresiones de la tarea. Por lo anterior, la tarea estaba diseñada para evaluar el uso de las letras como letras evaluadas o como incógnitas de valor especifico; para resolverla era necesario tener conocimientos de las operaciones aritméticas básicas, así como de sustituciones de valores en expresiones algebraicas. Por la estructura algebraica de sus ítems esta tarea fue clasificada en el nivel de entendimiento I.

2. Escribe el menor y el mayor de las siguientes expresiones: menor mayor

$n + 1$, $n + 4$, $n - 3$, n, $n - 7$. ....

Figura 5. Tarea 2

Descripción de la Tarea 3

En esta tarea se les solicitaba a los estudiantes que determinaran cuál de las dos expresiones algebraicas era mayor, lo cual deberían resolver utilizando las letras como números generalizados, es decir sustituir distintos valores para poder dar una respuesta que implicara un valor generalizado. Por lo anterior, el objetivo de esta tarea era evaluar el uso de las letras como números generalizados mediante la demostración de conocimientos que implicaran el manejo de rangos de valores que hicieran valida la expresión; así mismo, los estudiantes deberían ser capaces de realizar multiplicaciones y sumas aritméticas para poder dar una respuesta que implicara la generalización del resultado. Esta tarea está considerada en el nivel de entendimiento IV.

3. Cuál es más grande, $2n$ o $n+2$ . . . .

Explícalo: . . . .

Figura 6. Tarea 3

Descripción de la Tarea 4

Esta tarea estaba compuesta por 6 ítems, en los cuales, a una expresión, se les debe sumar y/o multiplicar una cantidad constante. La estructura algebraica de los ítems es diversa, lo cual implica que el nivel de entendimiento requerido para resolverla es distinto. De esta manera, para resolver los ítems *4a, 4b y 4d*, habían de sumar o multiplicar la constante que se daba como dato; así pues para resolverlos se deberían realizar operaciones aritméticas básicas ya sea de suma o producto. Por lo anterior, estos ítems fueron considerados de nivel de entendimiento I puesto que para su resolución solo se deberían evaluar las expresiones mediante la ejecución de la operación indicada en las instrucciones del problema. Por otra parte, para los ítems *4c* y *4f*, con expresiones algebraicas a la cuales también se les debería sumar o multiplicar la constante que se daba como dato, los estudiantes, deberían demostrar conocimientos del uso de la letra como incógnitas de valor especifico y además deberían ser capaces de aceptar que la respuesta pudiera contener una letra como incógnita; por lo anterior estos ítems están clasificados en el nivel de entendimiento III. Finalmente la estructura algebraica del ítem *4e* así como la operación indicada para la evaluación de la expresión algebraica que representaba, ubican a este ítem en el nivel de entendimiento IV, ya que para su resolución se requería que los estudiantes fueran capaces aplicar reglas de operaciones algebraicas (producto algebraico), manipulación de estructuras algebraicas abstractas, así como expresar un resultado que implicara un rango de valores desconocidos.

4. **4 sumado a n** puede ser escrito como **$n + 4$.** Suma 4 a cada una de las siguientes expresiones:

a) 8 .... b) $n + 5$ .... c) $3n$ ....

n multiplicado por 4 puede ser escrito como **$4n$**. Multiplica cada una de las siguientes expresiones por 4:

d) 8 .... e) $n + 5$ .... f) $3n$ ....

Figura 7. Tarea 4

Descripción de la Tarea 5

Esta tarea consta de 3 ítems, dos de los ítems (*5a* y *5b*) están diseñados para evaluar el uso de las letras como letras evaluadas, ya que para resolverlos se requiere sustituir los valores que aparecen como datos en el enunciado del problema en las letras que aparecen como incógnitas; por esto dichos ítems se ubican en los niveles de entendimiento I y II respectivamente, ya que la única diferencia entre ellos es la dificultad que implica su resolución como resultado de su diferente estructura algebraica. Por otra parte para la resolución del ítem *5c*, implica el empleo de las letras como números generalizados, ya que para resolver dicho ítem, los estudiantes deberían identificar y aceptar que algunas expresiones algebraicas tienen soluciones que incluyen letras como incógnitas y que éstas representan rangos de valores desconocidos; por lo anterior el ítem *5c* está ubicado en el nivel de entendimiento III.

5.

a) Si $a + b = 43$; $a + b + 2 = \ldots\ldots$

b) Si $n - 246 = 762$; $n - 247 = \ldots\ldots$

c) Si $e + f = 8$; $e + f + g = \ldots\ldots$

Figura 8. Tarea 5

Descripción de la Tarea 6

Esta tarea consta de dos ítems (*6a* y *6b*) los cuales fueron diseñados para evaluar el uso de las letras como letras evaluadas; para resolver estos ítems era necesario que los estudiantes demostraran capacidad para evaluar las letras y sustituir esos valores en las expresiones dadas. Por la estructura algebraica del ítem *6a* este queda ubicado en el nivel de entendimiento I, por su parte el ítem *6b* fue ubicado en el nivel de entendimiento II.

---

6. a) Qué puedes decir de a si $a + 5 = 8$ ....

   b) Qué puedes decir de b si $b + 2$ es igual a $2b$ ....

Figura 9. Tarea 6

Descripción de la Tarea 7

Esta tarea consta de 4 ítems; los ítems *7a* y *7b* están diseñados para evaluar el uso de las letras como letras evaluadas, por lo tanto se ubican en el nivel de entendimiento I, ya que para su resolución es necesario recordar la fórmula del área del rectángulo y aplicarla en las figuras correspondientes. Por su parte, el ítem *7c* está planteado para evaluar el uso de las letras como objetos; en este caso, por el valor de los lados de la figura, se ubica en el nivel II, por la dificultad que implica el manejo de letras como valores desconocidos. Con respecto al ítem *7d*, éste está diseñado para valorar el uso de las letras como números generalizados, ya que para resolverlo, los estudiantes requerían aceptar que el resultado podía contener una letra que representaba un rango de valores desconocidos; por lo tanto este ítem es considerado dentro del nivel de entendimiento IV.

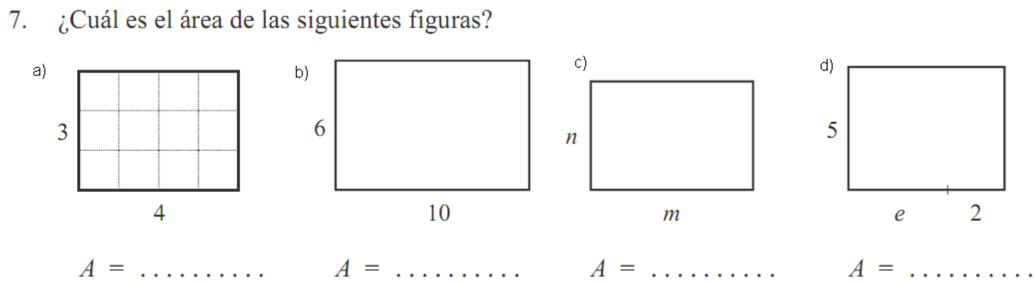


Figura 10. Tarea 7

Descripción de la Tarea 8

Esta tarea consistía en sumar la longitud de los lados de la figura geométrica para obtener su perímetro; por la estructura de la misma está considerada dentro del nivel de entendimiento I, ya que para resolverla requiere conocimientos relacionados con las operaciones aritméticas básicas, en este caso la suma, y de recordar el concepto geométrico de perímetro.

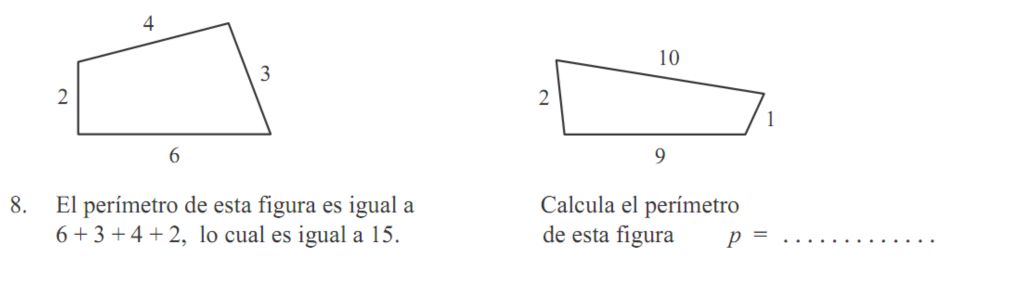


Figura 11. Tarea 8

Descripción de la Tarea 9

Esta tarea está compuesta por 4 ítems: el ítem *9a* está diseñado para evaluar el uso de las letras como objetos (lados de la figura); al contener solo una letra como incógnita, se considera de nivel de entendimiento I; los ítems *9b* y *9c* también están diseñados para la valoración del uso de la letra como objetos, pero al contener dentro de su estructura más de una letra y números, son considerados de una mayor dificultad y por lo tanto están ubicados en el nivel de entendimiento II. El ítem *9d* por su parte, estaba diseñado para evaluar el uso de la letra como números generalizado — pues para su resolución se requería de plantear una expresión algebraica que indujera a un resultado generalizado — por lo tanto está ubicado en el nivel de entendimiento III.

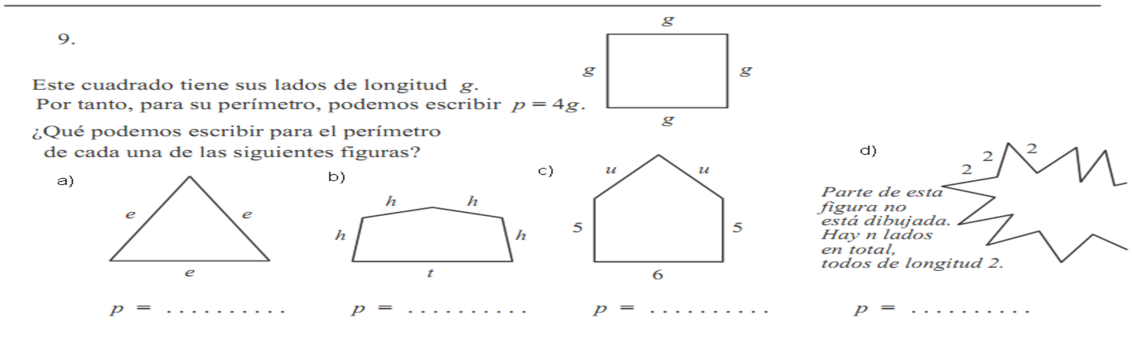


Figura 12. Tarea 9

Descripción de la Tarea 10

Esta tarea consta de dos ítems. La tarea está diseñada para evaluar el uso de las letras como números generalizados. Para resolverlo los estudiantes deberían ser capaces de comprender que el ítem *10a* es una expresión algebraica que representa un rango desconocido de valores. Así mismo, para dar respuesta al ítem *10b,* era necesario que plantearan una expresión algebraica que representara la generalización del resultado. Por lo anterior estos ítems fueron considerados en el nivel de entendimiento III.

---

10. Las zanahorias cuestan 8 centavos cada una y los pepinos cuestan 6 centavos cada uno.

a) Si z representa el *número* de zanahorias compradas
y p representa el *número* de pepinos comprados,
¿Qué representa

$8z + 6p$? ....

b) ¿Cuál es el número total de verduras compradas? ....

Figura 13. Tarea 10

Descripción de la Tarea 11

Esta tarea consta de 2 ítems. Ambos ítems (*11a* y *11b*) están diseñados para valorar el uso de las letras como letras evaluadas. Para su resolución los estudiantes deberían mostrar capacidad para realizar sustituciones de valores conocidos en expresiones algebraicas. Por lo tanto, ambos ítems quedaron están en el nivel de entendimiento II.

---

11. Qué puede decir sobre **a)** u si $u = v + 3$
y $v = 1$ . . . .

Qué puede decir sobre **b)** m si $m = 3n + 1$
$n = 4$ . . . .

Figura 14. Tarea 11

Descripción de la Tarea 12

Esta tarea está diseñada para evaluar el uso y manejo de las letras como números generalizados ya que la respuesta implica el planteamiento de una expresión algebraica que induzca a un rango de valores desconocidos a través de la interpretación de problemas contextualizados y por medio de la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico. Esta tarea se ubicó en el nivel de entendimiento III.

---

12. Si Juan tiene J canicas y Petra tiene P canicas,
¿Qué puede escribir para el número de canicas
que tienen juntos? . . . .

Figura 15. Tarea 12

Descripción de la tarea 13

Esta tarea está compuesta por 9 ítems. La tarea está diseñada para evaluar el uso de las letras como objetos con características particulares, así como el manejo de las letras como incógnitas de valor específico. Los ítems *13a* y *13g* estan ubicados en el nivel de entendimiento I debido a que su solución implicaba una suma algebraica. Por otra parte, los ítems *13c, 13d, 13e*, *13f* y *13i*, al contener dentro de su estructura signos de agrupación, esto implicaba un mayor grado de dificultad para su resolución y por lo tanto se ubicaron dentro del nivel de entendimiento II. Por lo que se refiere a los ítems *13b* y *13g* estos se ubican dentro del nivel de entendimiento III considerando que su estructura hacía referencia a la reducción de términos semejantes de letras distintas dentro de una expresión algebraica siendo esto parte del estudio de las estructuras algebraicas abstractas.

13. $\boldsymbol{a + 3a}$ puede escribirse de manera más sencillamente como $\boldsymbol{4a}$.

Escribe las siguientes expresiones más sencillamente, si es posible:

a) $2a + 5a =$ ....

b) $2a + 5b =$ ....

c) $(a + b) + a =$ ....

d) $2a + 5a + a =$ ....

e) $(a - b) + b =$ ....

f) $3a - (b + a) =$ ....

g) $a + 4 + a - 4 =$ ....

h) $3a - b + a =$ ....

i) $(a + b) + (a - b) =$ ....

Figura 16. Tarea 13

Descripción de la tarea 14

Esta tarea está diseñada para valorar el uso de la letra como incógnita de valor especifico. La solución de esta tarea involucraba realizar sustituciones algebraicas para resolver la expresión algebraica resultante de esa sustitución. Esta tarea está ubicada en el nivel de entendimiento III.

14. Qué puede decir sobre r si $r = s + t$

y $r + s + t = 30$ ....

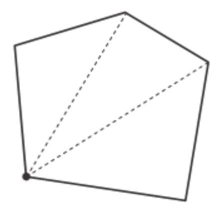
Figura 17. Tarea 14

Descripción de la Tarea 15

Esta tarea consta de 2 ítems. El ítem *15*a está diseñado para valorar el uso de las letras como letras evaluadas, por lo tanto, fue ubicado en el nivel de entendimiento II. Por su parte el ítem *15b* fue ubicado en el nivel de entendimiento III debido a que para su resolución los estudiantes deberían plantear una expresión algebraica que representara un rango de valores desconocidos o números generalizados.

15.

En un dibujo como este puedes calcular el número de diagonales restando 3 del número de lados.



Por lo tanto, una figura con 5 lados tiene 2 diagonales;

a) una figura con 57 lados tiene .... diagonales;

b) una figura con k lados tiene .... diagonales.

Figura 18. Tarea 15

Descripción de la Tarea 16

Esta tarea está diseñada para evaluar el uso de la letra como números generalizados; para resolverla los estudiantes requerían analizar un rango de valores que hicieran válida la expresión algebraica. Por lo anterior esta tarea fue ubicada en el nivel de entendimiento III.

16. Qué puedes decir sobre de c si $c + d = 10$
y c es menor que d ....

Figura 19. Tarea 16

Descripción de la Tarea 17

Esta tarea consta de dos ítems. La tarea está diseñada para evaluar el uso de las letras como números generalizados. Para resolver el ítem *17a* los estudiantes deberían ser capaces de plantear una expresión algebraica que simbolizara las condiciones del enunciado problema y que esta expresión algebraica representara un rango de valores desconocidos; así, este ítem está ubicado en el nivel de entendimiento IV. En el ítem *17b*, una vez obtenida una ecuación que representara las condiciones del problema era necesaria la sustitución de los valores numéricos presentes en el enunciado y la comprensión de problemas contextualizados. Es por esto último que este ítem fue considerado en el nivel de entendimiento III.

17. El salario base de María es de $\$200$ por día.
Ella también recibe otro pago de $\$20$ por cada hora extra que trabaja.

a) Si h representa el número de horas extras que ella trabaja, y
si P representa su paga total por día (en \$)
escribir una ecuación que relacione P y h: . . . .

b) ¿Cual sería la paga total del día si ella
trabajó 4 horas extras? . . . .

Figura 20. Tarea 17

Descripción de la Tarea 18

Esta tarea consta de 2 ítems. La tarea está diseñada para valorar el uso de las letras como números generalizados; para su resolución era necesario que los estudiantes fueran capaces de probar con un rango determinado de valores numéricos la validez de las expresiones. El ítem *18a* al presentar las mismas letras requería que los estudiantes sustituyeran valores numéricos directamente en ambos miembros de la igualdad y que validaran la respuesta; por esta razón este ítem fue ubicado en el nivel de entendimiento III. Por su parte el ítem *18b* presentaba una mayor dificultad al introducir dos letras distintas en diferentes miembros de la igualdad por lo que se ubica en el nivel de entendimiento IV.

18. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones - siempre, nunca, o a veces?

Subrayar la respuesta correcta:

a) $A + B + C = C + A + B$ Siempre. Nunca. A veces, cuando . . . .

b) $L + M + N = L + P + N$ Siempre. Nunca. A veces, cuando . . . .

Figura 21. Tarea 18

Descripción de la tarea 19

La tarea 19 consta de dos ítems. La tarea está diseñada para evaluar el uso de las letras como variables; en esta tarea el estudiante debería mostrar la capacidad para la manipulación de rangos de valores que satisfagan la expresión así como el análisis de la relación entre cantidades y el manejo adecuado de operaciones con expresiones algebraicas. De esta forma los ítems que conformaban esta tarea (*19a* y *19b*) fueron ubicados en el nivel de entendimiento IV.

a) 19. $a = b + 3$. ¿Qué sucede con a si b se incrementa en 2 ? . . . .

b) $f = 3g + 1$. ¿Qué sucede con f si g se incrementa en 2 ? . . . .

Figura 22. Tarea 19

Descripción de la Tarea 20

Esta tarea está diseñada para evaluar el uso de las letras como números generalizados. Para resolverla los estudiantes deberían ser capaces de plantear una expresión algebraica que simbolizara las condiciones del enunciado problema, traduciendo el lenguaje común al lenguaje algebraico demostrando con esto la capacidad para la resolución de problemas contextualizados; así mismo la solución debería ser una expresión algebraica que representara un rango desconocido de valores. Este ítem está ubicado en el nivel de entendimiento IV.

20. Los pasteles cuestan p centavos cada uno y las empanadas e centavos cada una.

Si compro 4 pasteles y 3 empanadas,
¿Qué significa

$4p + 3e$? . . . .

Figura 23. Tarea 20

Descripción de la Tarea 21

Esta tarea está diseñada para valorar la capacidad de los estudiantes del manejo de la letra como incógnita de valor desconocido; así mismo la solución de esta tarea implica el uso de números racionales y el conocimiento de la resolución de ecuaciones algebraicas lineales, por lo que esta tarea está ubicada en el nivel de entendimiento IV.

21. Si esta ecuación $\longrightarrow$ $(x + 1)^3 + x = 349$
es verdadera cuando $x = 6$,

Entonces
¿Qué valor de x
hará esta ecuación $\longrightarrow$ $(5x + 1)^3 + 5x = 349$
verdadera?

$x =$ . . . .

Figura 24. Tarea 21

Descripción de la Tarea 22

Esta tarea está diseñada para evaluar el uso de las letras como números generalizados. Para resolverla los estudiantes deberían ser capaces de plantear una expresión algebraica que simbolizara las condiciones del enunciado del problema, traduciendo el lenguaje común al lenguaje algebraico y demostrando con esto la capacidad para la resolución de problemas contextualizados; así mismo la solución debería ser una expresión algebraica que representara un rango de valores desconocidos. Este ítem está ubicado en el nivel de entendimiento IV.

22. Los lápices azules cuestan 5 pesos cada uno y los lápices rojos cuestan 6 pesos cada uno. Si compro algunos lápices azules y algunos rojos y en total me cuestan 90 pesos.

Si a es el número de lápices azules comprados, y
si r es el número de lápices rojos comprados,
¿Qué puede escribir acerca de a y r? . . . .

Figura 25. Tarea 22

3.4.3 Descripción del análisis cualitativo

Para la realización de este análisis se eligió como instrumento de recogida de datos la entrevista. En el caso de las entrevistas, asumimos el significado de Cohen y Manion (1990) a la entrevista de investigación; "un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado por los objetivos de investigación de descripción, de predicción o de explicación sistemática" (p.378). Se trata de un método que comprende la reunión de datos a través de una interacción oral directa entre individuos.

Centramos nuestro trabajo en una entrevista semiestructurada y dirigida. A los entrevistados se les plantea una situación y éstos tienen flexibilidad y libertad para dar respuesta. El entrevistador puede, cuando considere adecuado, representar un papel más activo, introduciendo indicaciones orales más explícitas para estimular las respuestas de los entrevistados.

Taylor y Bogdan (1986) consideran la investigación cualitativa como "aquella que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable". Así mismo, Miles y Huberman (1994) señalan que una de las características básicas de la investigación cualitativa es que persigue explicar las formas en que las personas en situaciones particulares comprenden, narran, actúan y manejan sus situaciones cotidianas. Estas características son las que justifican nuestro estudio cualitativo: perseguimos interpretar de manera correcta los significados que los estudiantes les dan a las letras cuando resuelven tareas algebraicas, así como explicar esas actuaciones. En la investigación que realizó Palarea (1998) centrada también en álgebra, señaló que al aplicar una entrevista, se pretende analizar con algunos estudiantes en particular, los elementos conceptuales, cognitivos y metacognitivos, con el fin de registrar la observación del mayor número posible de hechos en algunos individuos específicos. Además, sostiene que estas indagaciones son importantes, ya que no siempre lo escrito responde a todo lo que es capaz de hacer el alumno y sobre todo porque interesa que él mismo sea consciente de por qué actúa de una u otra manera y del efecto que produce su actuación.

Siendo uno de los objetivos de este trabajo indagar en el análisis de las respuestas a las cuestiones planteadas en el instrumento de evaluación aplicado para valorar el uso y significado de las letras en álgebra por parte de estudiantes universitarios y considerando los resultados obtenidos del análisis cuantitativo se diseñaron y realizaron entrevistas semiestructuradas (Cohen y Manion, 1980).

La selección de los estudiantes que participaron en la entrevista fue intencional. Para la discriminación de los participantes, posteriormente a la aplicación del instrumento de evaluación, se examinaron las respuestas a las tareas considerando los distintos usos de las letras presentes en las producciones de los estudiantes. De esta forma, se seleccionaron 12 estudiantes en cuyas producciones identificamos el empleo de distintos usos de las letras y paralelamente proporcionándoles distintos significados, como los propuestos por Küchemann (1980) a saber: letra evaluada, letra como objeto, letra ignorada, letra como incógnita de valor específico, letra como número generalizado y letra como variable. Así mismo, se tomó en cuenta que las respuestas escritas de los sujetos elegidos, no fueran tan evidentes para inferir de manera directa la fuente de los errores que se presentaron en sus respuestas, buscando con esto profundizar en la búsqueda de las posibles fuentes de esos errores. Una vez realizada la elección de los sujetos, se citó inicialmente a 20 estudiantes, buscando tener una muestra de aproximadamente el 10% del total de estudiantes participantes en este trabajo, pero debemos mencionar que al ser una actividad voluntaria ajena al curso en el cual estaban inscritos en ese momento, solo se presentaron 12 estudiantes del total originalmente citado. Los estudiantes fueron identificados como sujetos entrevistados del #1 al #12 siguiendo el orden cronológico de su asistencia a las entrevistas.

Las entrevistas tuvieron una duración aproximada de 20 minutos por cada estudiante, y se programaron una semana después de la aplicación del instrumento de evaluación, ajustándose a los tiempos libres disponibles de los participantes. Así mismo, se realizaron grabaciones de audio para facilitar los análisis posteriores de las entrevistas. Después de cada entrevista se realizaban las anotaciones relevantes que se consideraban pertinentes.

El análisis de las entrevistas sirvió para explorar sobre algunas de las situaciones típicas que pueden ser la fuente de los errores que se presentan por parte de los estudiantes, asociados posiblemente a sus deficiencias de conocimientos sobre los diferentes usos y significados de las letras en álgebra. Así mismo, este análisis nos fue útil para comprobar si nuestras inferencias acerca de las respuestas a algunos ítems eran correctas cuando no era tan evidente la dificultad que daba origen a las respuestas erróneas a los mismos.

3.4.4 Aplicación del instrumento de evaluación cuantitativo (CSMS)

La aplicación de este instrumento se llevó a cabo en 6 sesiones de 50 minutos cada una y fue dirigida por el autor de esta tesis con el apoyo de los profesores titulares de las asignaturas. Al inicio de la aplicación se destinaron 5 minutos para dar una breve explicación sobre el estudio que se estaba realizando y se brindaron las instrucciones necesarias para su cumplimentación. Durante la aplicación del cuestionario no se permitió el uso de dispositivos electrónicos de apoyo para el cálculo de las tareas propuestas. Así mismo, el investigador y los profesores se limitaron a vigilar que los participantes contestaran de manera individual el cuestionario

3.4.5 Aplicación de las entrevistas semiestructuradas

Una vez aplicado el cuestionario, se hizo necesario un estudio cualitativo en el cual pudimos indagar acerca de los procesos cognitivos que siguen los estudiantes en sus producciones, así como ahondar en la aceptación por parte de ellos de los distintos significados y usos de las letras necesarias para resolver diferentes tareas algebraicas. Este estudio nos permitió afrontar la tercera pregunta de investigación, centrada en el porqué de la presencia de errores en la resolución de tareas algebraicas. La entrevista semiestructurada se aplicó a doce sujetos de estudio, ubicados los niveles de entendimiento I, II y III propuestos por Küchemann (1980). Los estudiantes ubicados en el nivel de entendimiento IV no fueron tomados en cuenta para la entrevista debido a que no presentaron errores atípicos en sus respuestas.

Las preguntas de la entrevista se centraron en las posibles dificultades que se presentaron a través de las interpretaciones de los usos y significados de las letras y los distintos niveles de comprensión. La atención se centró en cómo y por qué los estudiantes interpretan las letras de cierta manera. Para estructurar las preguntas de las entrevistas se utilizó una breve introducción, una serie de preguntas de seguimiento y otras de sondeo. La introducción a la entrevista se utilizó para familiarizar a los estudiantes en los temas y distintos aspectos para la discusión. Las preguntas de seguimiento se utilizaron para investigar las respuestas fundamentales de los alumnos en relación con las preguntas de investigación. También se hizo uso de preguntas de sondeo que impulsaran a los estudiantes a explicar su forma de pensar sobre la realización de las tareas, pero se tuvo cuidado de no canalizar sus respuestas. A continuación detallamos el protocolo seguido en estas entrevistas.

El objetivo general de las entrevistas era profundizar en algunos aspectos relacionados con los errores encontrados en las respuestas de los estudiantes de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas.

Partimos del supuesto de que los estudiantes de este nivel educativo, cuentan con una formación matemática previa que ha sido adquirida en los distintos cursos de los niveles de secundaria y del bachillerato. Antes de iniciar las preguntas de la entrevista, se informó al estudiante del motivo de la misma, así como su carácter de confidencialidad, tratando con esto de crear un ambiente de amabilidad entre el entrevistador y el entrevistado, buscando con esto, que el estudiante cooperara de la mejor forma posible en este trabajo.

Para iniciar la entrevista se utilizaban frases como "*observé tu respuesta pero no alcancé a comprender bien lo que haces, ¿me puedes comentar un poco acerca de cómo obtienes ese resultado?*". Una vez que el estudiante tomaba la palabra se empleaban frases orientadoras como *¿esa información no te daba una idea? ¿No creíste, al momento de responder, que eso estaba incompleto y deberías interpretarlo de alguna otra forma para obtener una respuesta más general? ¿No te llamó la atención? ¿Por qué?* Lo que se buscaba con ellas era estimular a los estudiantes a desarrollar aclaraciones explícitas de sus respuestas escritas. Además, se les daba la libertad de expresarse sin estar sujetos a un guion rígido, logrando con esto una interacción cordial entre el entrevistador y el entrevistado.

3.5 PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Para la recogida de datos, y en consonancia con el marco teórico, se tomó como referencia la investigación de Küchemann (1980). La corrección del cuestionario fue organizada de acuerdo con los niveles de entendimiento en el manejo de las letras de este autor, como se menciona en la sección del marco teórico de este trabajo de investigación. Las tareas relacionadas con cada uno de los niveles de entendimiento, que fueron consideradas para el análisis de las respuestas del instrumento aplicado se presentan en el Tabla 6 y son las mismas que propone Küchemann (1980).

Tabla 6. Tareas y niveles de entendimiento

Nivel	Criterio
0	Menos de 4 respuestas correctas de las tareas del nivel 1
1	Al menos 4 de 6 respuestas correctas de las tareas 5(a), 6(a), 7(b), 8, 9(a), 13(a).
2	Al menos 5 de 7 respuestas correctas de las tareas 7(c), 9(b), 9(c), 11(a), 11(b), 13(d), 15(a).
3	Al menos 5 de 8 respuestas correctas de las tareas 4(c), 5(c), 9(d), 13(b), 13(h), 14, 15(b), 16.
4	Al menos 6 de 9 respuestas correctas de las tareas 3, 4(e), 7(d), 17(a), 18(b), 13(e), 20, 21, 22.

Fuente: Küchemann, D. (1980). The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school children. (pp. 64-69). PhD Thesis, University of London

Es importante mencionar que en nuestro trabajo descartamos el ítem *13e* del nivel de entendimiento IV pues consideramos que, en estudiantes universitarios, las respuestas a ese ítem no serían significativas. Además se agregaron los ítems *19a* y *19b,* descartados en el estudio de Küchemann (1980) al encontrar que lo estudiantes participantes en ese trabajo no fueron capaces de comprender la estructura de los mismos, haciendo referencia a las variables, ya que en los estudiantes universitarios si debería ser comprendido este concepto por la formación académica previa de dichos estudiantes.

Las tareas del instrumento de evaluación se clasificaron en seis interpretaciones de las letras y cuatro niveles de comprensión. Las diferentes interpretaciones se refieren al significado mínimo necesario que debe darse a la letra para resolver cada tarea. Por otra parte, se analizan los niveles de comprensión que implican las dos dimensiones de la interpretación de las letras y la complejidad estructural de las mismas.

En los niveles I y II, las tareas tienen una estructura aritmética y los estudiantes podrían resolverlas mediante las siguientes opciones:

- Evaluando las letras.
- Utilizando las letras como objetos.
- Sin usar las letras.

Se requiere una mayor noción algebraica de la letra a resolver las tareas en el nivel III y IV por la interpretación de las letras como incógnitas, números generalizados o variables. En el nivel IV las tareas son más abstractas y tienen una estructura compleja. Una vez definidos los criterios de evaluación del instrumento se organizaron las respuestas encontradas en las producciones de los estudiantes utilizando la siguiente categorización.

En un primer momento las respuestas fueron clasificadas de forma general como correcta (1) e incorrecta (2). En una segunda categorización se clasificaron de acuerdo al uso de la letra como: correcta (0), letra evaluada (1), letra como objeto (2), letra ignorada (3), letra con valor especifico (4), letra como número generalizado (5) y letra como variable (6). Así mismo, durante la clasificación se identificó el sexo y la titulación de cada uno de los participantes en el estudio.

Para el desarrollo de esta tarea se utilizó el software Microsoft Excel, como medio de captura y almacenamiento de la información, mientras que para su posterior análisis estadístico se emplearon los paquetes estadísticos SPSS y R. Dicho análisis consistió en obtener los estadísticos descriptivos, la representación gráfica de resultados y las pruebas de hipótesis. En este trabajo para la realización de la prueba de hipótesis se utilizaron dos metodologías, a saber la prueba *t* de Student y la prueba *U* de Mann Whitney. La primera de ellas se utilizó para probar de manera global la existencia de diferencias en el rendimiento por sexo y por titulaciones. La segunda fue utilizada para analizar la existencia de diferencias en el rendimiento por sexo y por titulaciones de acuerdo a los niveles de entendimiento propuestos por Küchemann (1980). La elección de esta prueba estuvo basada en el tamaño de la muestra formada para cada uno de los niveles de entendimiento, las cuales, desde el punto de vista estadístico, se pueden considerar como pequeñas.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo presentamos los resultados de la aplicación del instrumento de evaluación del uso y significado de las letras en álgebra, que ha sido llevado a cabo en una muestra de 194 estudiantes del primer curso universitario del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara México. Aunque Küchemann (1980) aplica un estudio similar en Inglaterra, la edad y el nivel de educativo son diferentes. Küchemann se interesó por estudiantes de 14 a 16 años, edades que consideramos como equivalentes de estudiantes regulares del bachillerato en México. En nuestro estudio las edades más frecuentes oscilan entre los 17-19 años y abarcamos el nivel de enseñanza superior.

Varios son los aspectos de los que nos ocuparemos a lo largo de este capítulo. En primer lugar describimos la composición de la muestra según edad, sexo y tipo de estudios. Después analizamos los datos según aciertos y errores de los ítems ubicándolos en los niveles establecidos por Kücheman (op. cit.), consideramos los ítems más complejos y más sencillos, a continuación estudiamos éstos ítems agrupados por niveles de entendimiento según Kücheman. Después del análisis de ítems examinamos el rendimiento de los sujetos de la muestra y ubicamos éstos en los niveles de Kücheman y por último comparamos los resultados según sexo y tipo de estudios.

4.1 DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

Como se indicó en el capítulo anterior (apartado 3.3) la muestra está compuesta por 194 estudiantes mexicanos de entre 17 y 29 años de edad de seis titulaciones diferentes.

La codificación de las titulaciones para su estudio se estableció como se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Titulaciones participantes en la investigación

Código	Nombre de la titulación
I	Licenciado en Nutrición
II	Licenciado en Administración
III	Técnico Superior en Electrónica y Mecánica Automotriz
IV	Ingeniero en Procesos y Comercio Internacional
V	Ingeniero en Teleinformática
VI	Ingeniero en Recursos Naturales y Agropecuarios

La distribución de los estudiantes por carrera se presenta en la Figura 26.

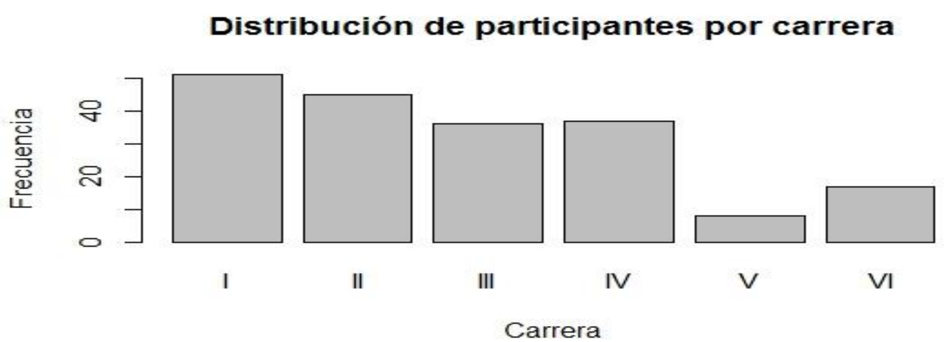


Figura 26. Distribución de estudiantes por carrera

En cuanto a la distribución de los estudiantes por sexo, la Figura 27, muestra que la cantidad de hombres y mujeres fue idéntica 50% por cada sexo.

Figura 27. Distribución de participantes por sexo

La distribución de la muestra por edades, es la siguiente (Figura 28):

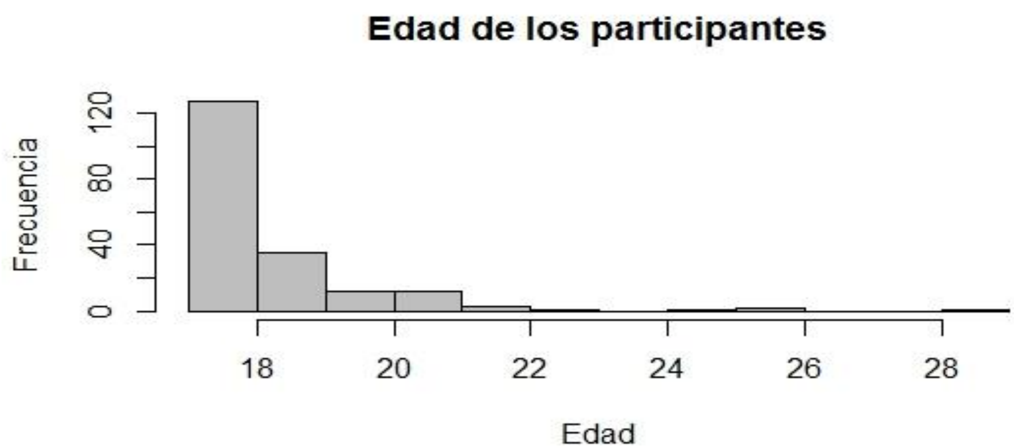


Figura 28. Rango de edades

Las edades características de los estudiantes que formaron parte de la muestra de este estudio, estuvieron comprendidas entre los 17 y los 19 años; este rango de edades representa el 83.5% del total de la muestra. El resto de la muestra (16.5%) se distribuyó de la siguiente manera: 12 estudiantes de 20 años, 12 estudiantes de 21 años, 3 estudiantes de 22 años, 1 estudiante de 23 años, 1 estudiante de 25 años, 2 estudiantes de 26 años y 1 estudiante de 29 años.

4.2 RESULTADOS GENERALES. RENDIMIENTO GENERAL Y DIFICULTAD DE LOS ÍTEMS

Interesa estudiar la dificultad de los ítems medida según el porcentaje de aciertos/errores ya que es la primera vez que se aplica este instrumento en nuestro contexto de investigación. Partimos del supuesto de que el instrumento era el adecuado para evaluar el razonamiento algebraico de estudiantes universitarios, reflejando el nivel de entendimiento en el uso y significado de las letras en álgebra. El instrumento está compuesto por diferentes niveles de dificultad, lo cual posibilitó estudiar diferentes tipos de error en las producciones de los estudiantes. Así mismo, permitió diferenciar a los estudiantes en un continuo de menor a mayor rendimiento. La distribución de las respuestas obtenidas se muestra en la Figura 29 donde se puede apreciar que, en términos generales, a nivel global la cantidad de aciertos y la de errores son muy parecidas, aunque la cantidad de errores fue predominante. Así mismo, en los resultados obtenidos se encontraron ítems sin respuestas, a pesar de que se les recomendó en las instrucciones para la resolución de las pruebas evitar estos casos. Este primer resultado ya pone de manifiesto la deficiencia de los sujetos universitarios para afrontar las tareas algebraicas diseñadas para niveles de secundaria.

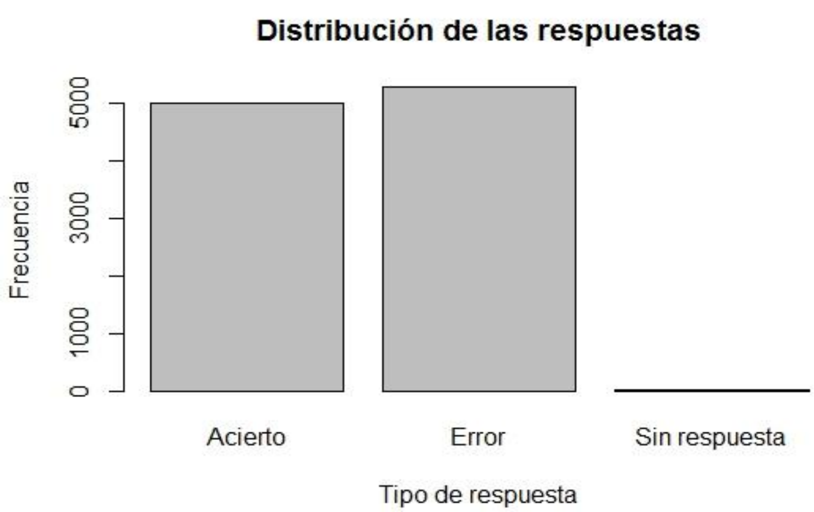


Figura 29. Distribución de las respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes

En la Tabla 8 se resumen los resultados de los ítems según porcentaje de aciertos. Se puede observar que el ítem de mayor número de aciertos obtuvo el 98.5% del total de respuestas correctas, mientras el ítem con el mínimo de aciertos fue del 1%. La media de respuestas acertadas se ubicó en 94 respuestas correctas de un total de 194 posibles. Por otra parte, destacamos que el 47.2% de los ítems fueron resueltos de manera correcta con más del 50% de aciertos, mientras que el 22.6% de los ítems fueron resueltos con más del 75% de aciertos y se destaca que solamente el 9.4% de los ítems alcanzó más del 90% de aciertos.

Tabla 8. Tabla resumen de los aciertos obtenidos por ítem en el instrumento de evaluación.

	No. Aciertos	**Porcentaje**
Mínimo	2	1.0%
Máximo	191	98.5%
Media	94	
Mediana	93	
Desviación Estándar	55	

Prosiguiendo con el análisis de las respuestas obtenidas en nuestro estudio, en la Tabla 9 se presentan los ítems ordenados según el porcentaje de las respuestas correctas iniciando con los que tuvieron menor número de aciertos hasta los de mayor número de respuestas correctas. Los distintos colores se corresponden con los niveles de Küchemann (1980) a los que nos referiremos más adelante. En la tabla mencionada se presenta una propuesta de clasificación propia, derivada del análisis cuantitativo de la totalidad de los ítems que componían la prueba. Los resultados del análisis cuantitativo de los ítems nos dieron evidencias claras, según nuestro punto de vista, de que el total de los ítems se pueden agrupar en 4 niveles de dificultad equiparables con los 4 niveles de entendimiento propuestos por Küchemann (1980).

Teniendo en cuenta estos resultados, más adelante se analizarán de manera detallada los casos que presentaron una frecuencia menor al 10%, así como los casos que muestran una frecuencia mayor al 90%.

Tabla 9. Tabla de aciertos por ítem del instrumento de evaluación

Nivel	Ítem	No. aciertos	Porcentaje
IV	19b	2	1.0%
IV	3	6	3.1%
IV	19a	8	4.1%
IV	21	8	4.1%
IV	10b	11	5.7%
III	18b	31	16.0%
III	6b	32	16.5%
III	7d	36	18.6%
III	16	38	19.6%
III	13i	41	21.1%
III	22	41	21.1%
III	4e	44	22.7%
III	17a	48	24.7%
III	5c	52	26.8%
III	20	52	26.8%
III	10a	54	27.8%
IIII	13e	54	27.8%
III	14	54	27.8%
IIII	13f	57	29.4%
III	15b	60	30.9%
III	13b	66	34.0%
III	9d	67	34.5%
III	13c	69	35.6%
III	4c	74	38.1%
III	1b*	82	42.3%
III	4b	86	44.3%
III	13g	93	47.9%

Nivel	Ítem	No. aciertos	Porcentaje
III	1c*	94	48.5%
II	4f	99	51.0%
II	1a	100	51.5%
II	13h	102	52.6%
II	15a	112	57.7%
II	18a	119	61.3%
II	11b	121	62.4%
II	4d	124	63.9%
II	4a	134	69.1%
II	7c	138	71.1%
II	2a	141	72.7%
II	11a	142	73.2%
II	17b	144	74.2%
II	5b	145	74.7%
I	2b	151	77.8%
I	9c	152	78.4%
I	12+	157	80.9%
I	13d	160	82.5%
I	9b	162	83.5%
I	7a	167	86.1%
I	7b	167	86.1%
I	6a	176	90.7%
I	13a	177	91.2%
I	5a	178	91.8%
I	9a	183	94.3%
I	8	191	98.5%

*Cambió de nivel 1 a nivel 3, + cambió de nivel 3 a 1.

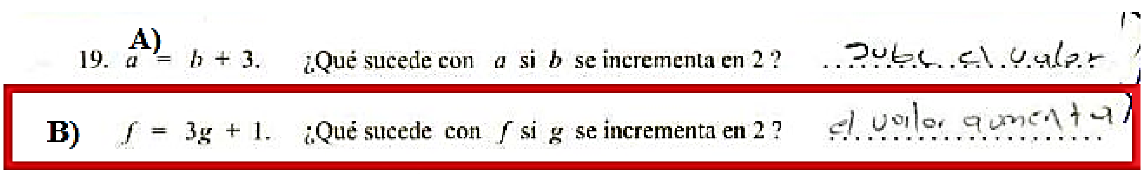
Análisis de los ítems de mayor índice de complejidad

Los ítems con menor frecuencia de respuestas correctas corresponden a casos en los cuales el nivel de complejidad es alto, ya que los conocimientos requeridos para su resolución implicaban la comprensión del uso y significado de las letras como números generalizados, así como la interpretación de las letras como variables, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ítem *19b*: este ítem consideraba la manipulación de rangos de valores que cumplieran la expresión algebraica a resolver, el análisis de relación de cantidades y la ejecución operaciones con expresiones algebraicas por parte de los estudiantes.

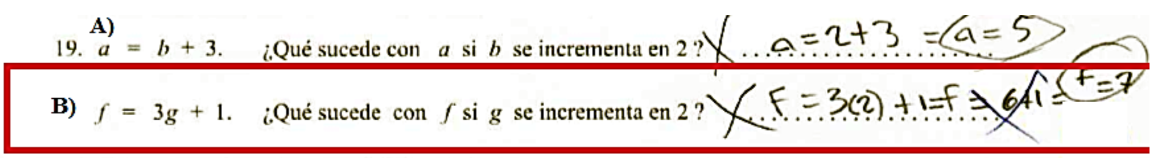
Objetivo: Uso de las letras como variables.

En los resultados encontrados observamos evidencias de que los estudiantes eran capaces solamente de relacionar la palabra incremento con un aumento de valor de la expresión, pero son incapaces de comprender, que cuando se presenta un cambio de valor en uno de los elementos de la expresión el otro forzosamente cambia y puede cuantificarse el valor de ese cambio. En el siguiente ejemplo se muestra este tipo de respuestas.


19. A) $a = b + 3$. ¿Qué sucede con a si b se incrementa en 2 ? ..sube el valor

B) $f = 3g + 1$. ¿Qué sucede con f si g se incrementa en 2 ? el valor aumenta 7

Por otra parte, encontramos que una considerable cantidad de estudiantes evaluaban la expresión con el valor que aparecía como dato en el enunciado del problema (*2*).


19. A) $a = b + 3$. ¿Qué sucede con a si b se incrementa en 2 ? $a = 2+3 = a = 5$

B) $f = 3g + 1$. ¿Qué sucede con f si g se incrementa en 2 ? $f = 3(2)+1 = f = 6+1 = f = 7$

Mas adelante en el análisis de las respuestas del ítem *19a* y por la similitud de la estructura algebraica de los ítems (*19a* y *19b*) que conformaban esta tarea, presentamos las evidencias obtenidas con base en las respuestas recogidas en las entrevistas realizadas a los estudiantes participantes.

Ítem *3*: este ítem estaba diseñado para estudiar la manipulación de rangos de valores para satisfacer la expresión a resolver, así como el análisis de relación de cantidades, las multiplicaciones, sumas y la generalización por parte de los estudiantes.

Objetivo: uso de las letras como variables.

3. **Cuál es más grande,** $2n$ o $n+2$ ....

Explícalo: Si n vale 1 en la primera serían 2 y en la segunda serían 3

3. Cuál es más grande, $2n$ o $n+2$ 2n

Explícalo: porq 2n es multiplicado y n+2 sumado. ej: n=8 2n=2(8)=16 n+2=(8)+2=10

El análisis de las respuestas obtenidas para este ítem muestra que los estudiantes, en el mayor número de los casos, tienden a evaluar arbitrariamente la expresión y con base en esa valoración expresar el resultado (como se muestra en los ejemplos anteriores). De la misma manera observamos en buena medida una preferencia por hacer una evaluación mental donde consideran que la multiplicación siempre es mayor que la suma y se convencen de ello, como se muestra a manera de ejemplo a continuación.

3. **Cuál es más grande,** $2n$ o $n+2$ ..2n..

Explícalo: Porque al multiplicar por un número te dará más que al sumar

También cabe señalar que al analizar las producciones de algunos estudiantes encontramos respuestas en las que consideraban las letras (n) como objetos que al ser o representar lo mismo se pueden sumar o hacer equivalentes. Enseguida se muestran algunos casos representativos de estos tipos de respuesta.

3. **Cuál es más grande,** $2n$ o $n+2$ ....

Explícalo: ..Son..iguales...porque...al...suma...n+2 = 2n........

3. **Cuál es más grande,** $2n$ o $n+2$ ..n+2..

Explícalo: es más grande n+2 porque n tiene valor de uno y suma 3n

Para confirmar las competencias de los estudiantes para el manejo de las letras como números generalizados, presentamos a continuación algunos segmentos de entrevistas que nos permitieron comprobar nuestras inferencias.

Segmento de entrevista #1 (Sujeto entrevistado #3)

En este caso, muy frecuente según el análisis de las respuestas obtenidas para este ítem, el estudiante se limita a sustituir un valor arbitrario y con el resultado obtenido considera que es suficiente para generalizar ese resultado, siendo incapaz de comprender que las letras pueden representar un rango de valores y no solo valores unicos. En el siguiente fragmento de entrevista se ejemplifica esta idea:

> **Investigador (i):** Al observar tu respuesta no me queda claro cómo llegas a la misma. ¿Me puedes comentar cómo obtienes esa respuesta?
>
> **Estudiante (e):** *2n* es más grande porque está multiplicando, y la multiplicación siempre es más grande que la suma.
>
> **(i):** ¿Puedes darme un ejemplo numérico de esa afirmación que haces?
>
> **(e):** Por ejemplo, si *n* es 3, sería *2x3* y *2+3*. Y 6 es más grande que 5.
>
> **(i):** ¿Así fue como obtuviste esa conclusión? ¿Con un solo ejemplo?
>
> **(e):** Si
>
> **(i):** Ok, ¿Consideras que pueda haber algún caso en el cual no se cumpla esa respuesta?
>
> **(e):** No creo.
>
> **(i):** Muy bien, haremos unos ejemplos con números negativos, por ejemplo con el -1, ¿Cómo quedan esas expresiones con -1? Hazlo por favor.
>
> **(e):** 2 por -1 es igual a -2 y 2 más -1 es igual a 1.
>
> **(i):** Ahora, ¿cuál es más grande, la multiplicación o la suma?
>
> **(e):** La suma.
>
> **(i):** Considerando esto último, ¿qué dirías de tu respuesta inicial?
>
> **(e):** Que está mal.
>
> **(i):** ¿Y cuál sería la respuesta correcta?
>
> **(e):** ¿Que depende del valor de *n*?
>
> **(i):** Así es. De acuerdo con esto último, ¿Podrías indicarme el motivo de tu respuesta inicial?

(e): Que solo sustituí un valor para dar la respuesta.

Segmento de entrevista #2 (Sujeto entrevistado #3)

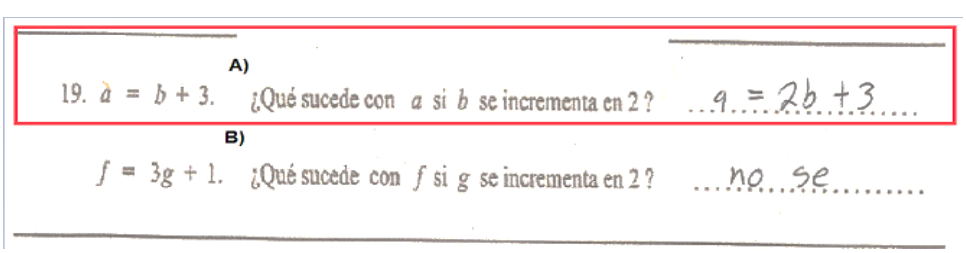
Un caso que vale la pena destacar, es cuando el estudiante considera que la operación $2 + n$ es igual a $2n$, evidenciando desconocimiento de las reglas básicas de las operaciones algebraicas, exhibiendo dificultades para distinguir una suma algebraica de un producto algebraico, algo inesperado en estudiantes universitarios. Como puede observarse en el siguiente fragmento de entrevista:

> **Investigador (i):** Vamos al número tres, al ítem 3. ¿Me puedes leer la pregunta y la respuesta?
>
> **Estudiante (e):** ¿Cuál es el más grande $2n$ o $2+n$?
>
> **(i):** Explícalo.
>
> **(e):** Yo le puse que igual, y es igual porque, al sumar 2 por n es igual que al sumar $2+n$ es igual que $2n$.
>
> **(i):** Entonces ahí, algebraicamente, cometiste un error.
>
> **(e):** Ahí sería, según yo, lo que estamos viendo ahorita, que iría el error que cometí en el problema 5. No fue un error, sino que $8+g$, eso fue mi duda de hace ratito, nomás que no le había preguntado, $8+g$ ya no se puede sumar ¿no? Y ya así queda el mismo signo, es el que los está identificando.

Ítem *19a*: al igual que el ítem *19b* (señalado anteriormente) en este se consideraba la manipulación por parte de los estudiantes de los rangos de valores que cumplieran la expresión algebraica a resolver, el análisis de relación de cantidades y la ejecución operaciones con expresiones algebraicas.

Objetivo: Uso las letras como variables.

La mayoria de los resultados obtenidos en las respuestas a este ítem nos mostraron que los estudiantes agregaban el valor dado como dato (2) en la expresión a resolver, sin realizar ninguna operación.


A)
19. $a = b + 3$. ¿Qué sucede con a si b se incrementa en 2 ? ... $a = 2b + 3$ ....
B)
$f = 3g + 1$. ¿Qué sucede con f si g se incrementa en 2 ? ... no se ....

Asímismo, algunos estudiantes no son capaces de recordar el concepto de variable, como lo expresan en los siguientes segmentos de las entrevistas realizadas en este trabajo; con el fin de profundizar en estas consideraciones presentamos a continuacion diversas respuestas obtenidas.

Segmento de entrevista #3 (Sujeto entrevistado #4)

Este estudiante presenta dificultad para comprender las reglas de las operaciones basicas algebraicas pues manifiesta problemas para distinguir que al multiplicar una expresion algebraica por una constante se ve afectada toda la expresion y derivada de esta dificultad manifiesta que al multiplicar *2* por $b+3$ el resultado es $2b+3$, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

> **Investigador (i):** Al observar tu respuesta, no me queda claro como llegas a la misma. ¿Me puedes comentar acerca de cómo obtienes la respuesta a la primera pregunta?
>
> **Estudiante (e):** En el primer inciso respondí $2b + 3$.
>
> **(i):** Si lees de nuevo, ahí mismo dice cuanto se incrementa, ¿estás de acuerdo?
>
> **(e):** Si, dice que se incrementa en 2. Por eso multipliqué esto (señala el segundo miembro de la expresión algebraica) por 2.
>
> **(i):** Considerando esto último, entiendo que multiplicaste el 2 por $b + 3$, ¿Cuánto te quedó?
>
> **(e):** $2b + 3$, eso puse.
>
> **(i):** No es correcto, ¿sabes porque?
>
> **(e):** No.
>
> **(i):** Cuando multiplicas un número por una expresión algebraica, debes multiplicar por todos los elementos de esa expresión.
>
> **(e):** Ya no me acordaba.

Otros estudiantes solo eran capaces de identificar que la palabra incremento producia un cambio en el valor de las expresiones, siendo incapaces de percibir que al afectarse un lado de la expresión se afectaba el otro lado de la misma. Nótese que sí manifestaban conocer este razomiento básico, nos indicaría la comprensión del concepto de variable en su modo mas primario. Lo anterior lo concluimos de una entrevista realizada y de la cual transcribimos el siguiente segmento:

Segmento de entrevista #4 (Sujeto entrevistado #5)

Investigador (i): Vamos con el último ítem de esta entrevista, sería el 19.

Estudiante (e): El 19.

(i): El 19 lo sacaste incorrecto.

(e): Ay sí qué pena, otro.

(i): Dice: $a=b+3$ ¿qué sucede si a, si b se incrementa en 2?

(e): El valor de a aumenta.

(i): …por eso te decía que está parcialmente correcto, porque dices el valor aumenta y eso lo expresas aquí, pero te faltó decir que también aumenta en 2.

(e): Sí, es cierto.

En otro caso, se muestra como algunos estudiantes no son capaces de comprender el uso de las letras como variables, es decir que pueden representar un rango de valores desconocidos con una relación sistemática existente entre ese conjunto de valores y se limitan a evaluar las incognitas desconocidas con valores arbitrarios que toman de los datos presentes en los enunciados de las tareas.

Segmento de entrevista #5 (Sujeto entrevistado #1)

Investigador (i): El ítem 19 dice: si $a=b+3$, te pregunta qué sucede con a si b se incrementa en 2, y das como respuesta $a=5$, ¿qué hiciste?

Estudiante (e): Pues aquí, en la fórmula, dice: $a=b+3$ ¿qué sucede con a si b se incrementa en 2? si b se incrementa en 2, pues sería el mismo error, porque no te está dando qué valor numérico es b si se incrementa en 2 podemos darle 2 más, es $b+2$, pero a cuánto equivale b.

(i): Ah ok, pero lo que tú tienes…

(e): Pero aquí mi respuesta fue $a=5$, yo lo que hice fue… sumé, como si dijéramos que yo le puse un valor numérico. Sí, sustituí, y es el mismo error en que caí en los demás.

(i): Sí, ahorita rescatamos eso. Volvamos al error, tu error fue que sustituiste el valor de la literal desconocida, el dato que tú tenías, entonces te quedó 2+3=5.

(e): Si pues igual a 5…

Otro caso típico de este tipo de respuestas se presenta a continuación:

Segmento de entrevista #6 (Sujeto entrevistado #7)

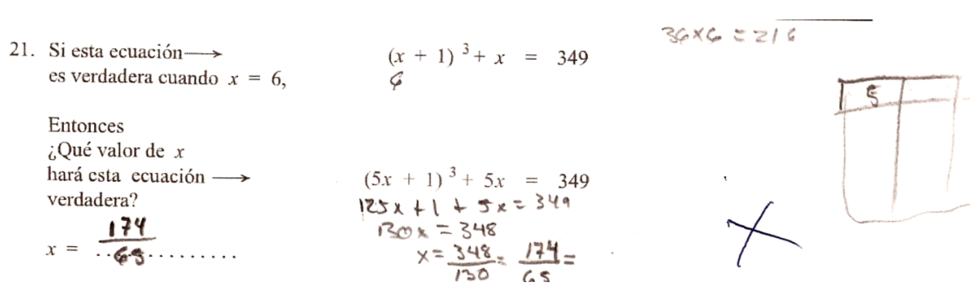
> **Investigador (i):** Al observar tu respuesta a la primera pregunta, no me queda claro cómo llegas a la misma. ¿Me puedes comentar acerca de cómo obtienes esa respuesta?
>
> **Estudiante (e):** Sustituí directamente el *2* por la *b* y me dio *5*
>
> **(i):** Entonces tu respuesta es que $a = 5$, porque la pregunta es ¿qué sucede con *a*?
>
> **(e):** Es cierto, solo resolví la ecuación.
>
> **(i):** ¿Recuerdas el concepto de variable?
>
> **(e):** Es algo que no es fijo.
>
> **(i):** Entonces, ¿podrías dar otra respuesta al problema con esta última información?
>
> **(e):** No, no entiendo…

En resumen y de acuerdo a los resultados obtenidos de las respuestas de algunos de los estudiantes entrevistados, se pudo ratificar, que aparentemente la mayoría de estudiantes no son capaces de recordar el concepto de variable, ya sea porque no lo han tratado en su formación escolar previa o por olvido, limitándose a distinguir que la palabra incremento implica una suma, así mismo, muestran una marcada tendencia a sustituir los valores conocidos sin validar la respuesta obtenida de esa sustitución.

Ítem *21*: aquí se analizó el manejo de las operaciones con expresiones algebraicas y números racionales, la aplicación de reglas algebraicas y la resolución de ecuaciones por parte de los estudiantes.

Objetivo: Uso de las letras como incógnita con valor desconocido.

En practicamente todos los casos los errores encontrados corresponden a intentos de resolver el problema evaluando la expresión con el resultado del proceso erróneo, como se muestra en el ejemplo siguiente.


21. Si esta ecuación ⟶ es verdadera cuando $x = 6$, $(x + 1)^3 + x = 349$

Entonces ¿Qué valor de x hará esta ecuación ⟶ verdadera? $(5x + 1)^3 + 5x = 349$

$125x + 1 + 5x = 349$

$130x = 348$

$x = \frac{348}{130} = \frac{174}{65} =$

$x = \frac{174}{65}$

$36 \times 6 = 216$

Ítem *10b*: en este ítem se estudia la interpretación de problemas contextualizados y traducción a expresiones algebraicas, así como el concepto de números generalizados, por parte de los estudiantes.

Objetivo: uso de las letras como incógnitas que pueden tomar múltiples valores (número generalizador).

Los resultados obtenidos, nos muestran que casi la totalidad de los estudiantes, relacionan las letras como etiquetas, en este caso la letra inicial del objeto representa al objeto mismo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

10. Las zanahorias cuestan 8 centavos cada una y los pepinos cuestan 6 centavos cada uno.

A) Si *z* representa el *número* de zanahorias compradas y *p* representa el *número* de pepinos comprados, ¿Qué representa $8z+6p$? 8.zanahorias.+.6pepinos

B) ¿Cuál es el número total de verduras compradas? .14.....................

La mayoría de los estudiantes muestran una fuerte tendencia a relacionar las letras con las iniciales de las palabras de los objetos que representan como se demuestra con los resultados obtenidos y como se puede observar en los siguientes fragmentos de entrevistas:

Segmento de entrevista #7 (Sujeto entrevistado #9)

> **Investigador (i):** Vamos con el 10, regrésate al 10 por favor. Éste decía sobre las verduras: si "z" representa el número de zanahorias compradas y "p" representa el número de pepinos comprados, ¿Qué representa *8z+6p*? ¿Cuál fue tu respuesta primera?
>
> **Estudiante (e):** 8 zanahorias más 6 pepinos
>
> **(i):** Basado en esto ¿verdad? Señalo la expresión *8z+6p*
>
> **(e):** Si basado en eso.
>
> **(i):** Pero en información anterior decía que tenían un costo, ¿eso donde lo representaste?

(e): mmm no.

(i): No verdad, lo omitiste, veo que hasta aquí tienes unas anotaciones que dicen.

(e): Dice: z = n zanahorias.

(i): ¿Y la *P*?

(e): ey (sí), por ejemplo z = al número de zanahorias y p = al número de pepinos.

(i): Entonces te faltó multiplicar.

(e): Por la cantidad.

(i): Entonces, el error fue que cometiste asumiendo que éste era el número de zanahorias y pepinos, cuando esto es el costo de cada pepino y el costo de cada zanahoria.

(e): Entonces es multiplicar, por ejemplo 8 por los centavos.

(i): Exactamente. Y bueno, muy a la par de esto, si te fijas, concluyes de acuerdo a la información que creías válida.

(e): mmm.

(i): Que en total son 14.

(e): Pero no.

Otro caso frecuente se presenta a continuación:

Segmento de entrevista #8 (Sujeto entrevistado #3)

Investigador (i): Vamos con el 10, regrésate al 10 por favor. Éste decía sobre las verduras: si "z" representa el número de zanahorias compradas y "p" representa el número de pepinos comprados, ¿Qué representa $8z+6p$? ¿Cuál fue tu respuesta primera?

Estudiante (e): 8 zanahorias más 6 pepinos

(i): Basado en esto ¿verdad? (Le señalo la expresión $8z+6p$ en la prueba)

(e): Si basado en eso.

(i): Pero en información anterior decía que tenían un costo, ¿eso donde lo representaste?

(e): mmm no.

(i): No verdad, lo omitiste, veo que hasta aquí tienes unas anotaciones que dicen.

(e): Dice: z = n zanahorias.

(i): ¿y la *P*?

(e): ey (sí), por ejemplo z = al número de zanahorias y p = al número de pepinos.

(i): Entonces te faltó multiplicar.

(e): Por la cantidad.

(i): Entonces, el error fue que cometiste asumiendo que éste era el número de zanahorias y pepinos, cuando esto es el costo de cada pepino y el costo de cada zanahoria.

(e): Entonces es multiplicar, por ejemplo 8 por los centavos.

(i): Exactamente. Y bueno, muy a la par de esto, si te fijas, concluyes de acuerdo a la información que creías válida.

(e): mmm.

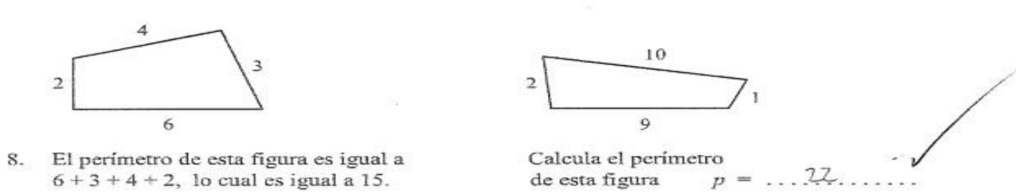
(i): Que en total son 14.

(e): Pero no.

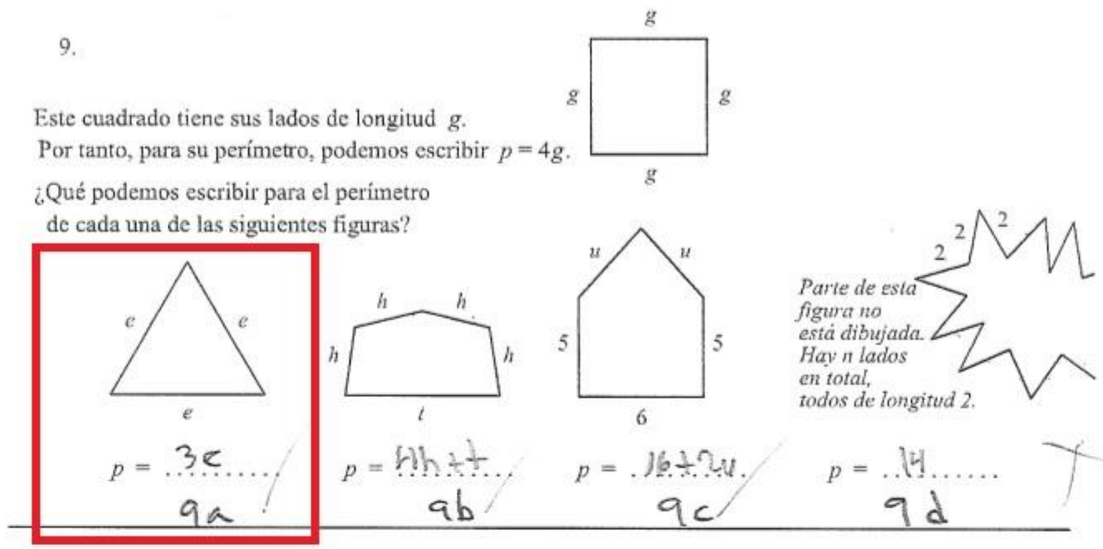
Con estas evidencias, consideramos que quedan sustentadas nuestras inferencias acerca de la tendencia común de los estudiantes universitarios para relacionar las letras como etiquetas (objetos) y esto los conduce a interpretar las iniciales de las palabras como objetos con características propias y a su vez los lleva a ignorar información importante que puede estar establecida en los enunciados de los problemas.

Análisis de los ítems con menor índice de complejidad. Los ítems con mayor frecuencia de respuestas correctas corresponden a casos en los cuales el nivel de complejidad es bajo, ya que los conocimientos requeridos para su resolución implicaban operaciones aritméticas, sustituciones simples, identificación de letras como objetos, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ítem 8: relación de cantidades



Ítem 9a: Análisis de relación de cantidades



9.

Este cuadrado tiene sus lados de longitud g.
Por tanto, para su perímetro, podemos escribir $p = 4g$.

¿Qué podemos escribir para el perímetro de cada una de las siguientes figuras?

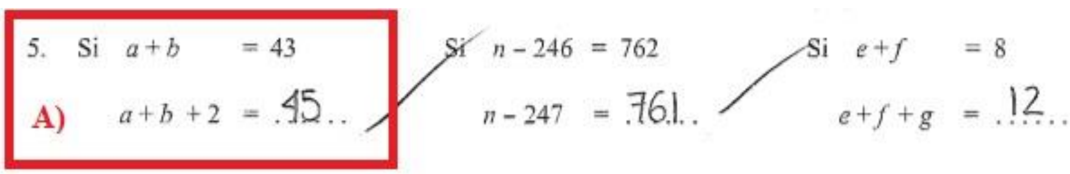
$p =$ 3e 9a

$p =$ 4h+t 9b

$p =$ 16+2u 9c

$p =$ 14 ...... 9d

Ítem 5a: resolución de ecuaciones y sustituciones algebraicas.



5. Si $a + b = 43$

A) $a + b + 2 =$ 45

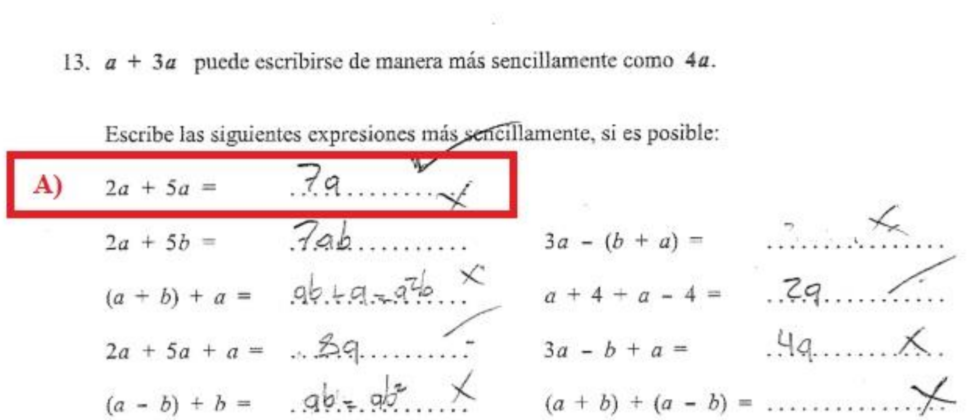
Si $n - 246 = 762$

$n - 247 =$ 761

Si $e + f = 8$

$e + f + g =$ 12

Ítem 13a: operaciones con expresiones algebraicas; aplicación de reglas algebraicas.



13. $a + 3a$ puede escribirse de manera más sencillamente como $4a$.

Escribe las siguientes expresiones más sencillamente, si es posible:

A) $2a + 5a =$ 7a

$2a + 5b =$ 7ab

$(a + b) + a =$ ab+a=a²b

$2a + 5a + a =$ 8a

$(a - b) + b =$ ab=ab²

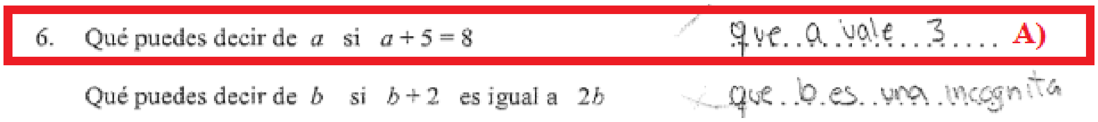
$3a - (b + a) =$ ....

$a + 4 + a - 4 =$ 2a

$3a - b + a =$ 4a

$(a + b) + (a - b) =$ ....

Ítem 6a: resolución de ecuaciones, sustituciones algebraicas


6. Qué puedes decir de a si $a+5=8$ que a vale 3.... **A)**

Qué puedes decir de b si $b+2$ es igual a $2b$ que b es una incognita

Finalmente, consideramos importante destacar que en los resultados obtenidos se puede distinguir cuatro agrupaciones relacionadas con los porcentajes de aciertos de las respuestas de los estudiantes; dichas agrupaciones se compararon con los 4 niveles de entendimiento del uso y significado de las letras propuestos por Küchemann (1980) encontrando algunas concordancias, a pesar de las distintas edades y niveles educativos de los participantes; estas relaciones encontradas se discutirán un poco más adelante. Teniendo en cuenta lo anterior, en la Tabla 9 se señalan los ítems (*1b y 1c*) que pasan de un nivel menor a un nivel mayor (*) así como el ítem (*12*) que se ubicó de un nivel mayor a uno menor (+).

Conclusiones

Destacamos que el total de los estudiantes participantes en esta investigación manifestaron respuestas incorrectas en el instrumento aplicado. No obstante, no hubo evaluaciones erradas en la totalidad de los ítems para ninguno de los estudiantes; se constató que si bien existe capacidad en los estudiantes universitarios para la comprensión del uso de las letras en distintos contextos, no es la esperada en ese nivel educativo. Esta conclusión, se vio refrendada en las respuestas incorrectas de la tarea diseñada para evaluar el uso de las letras como variables, donde casi la totalidad de los estudiantes contestaron de manera errónea lo que nos hace pensar que no comprenden ese significado de las letras.

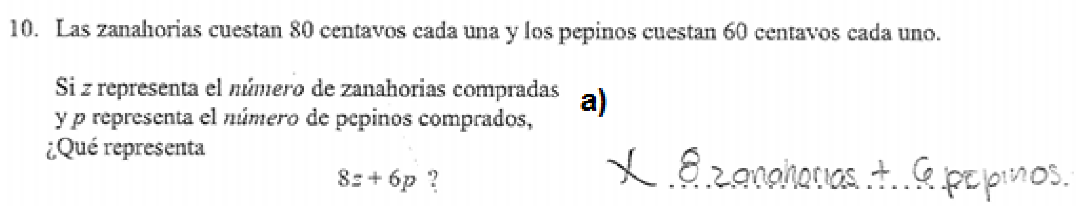
Cabe recordar que la mayoría de las edades de los participantes en nuestro estudio, se concentran entre los 17-19 años, siendo éstas mayores a las edades de los participantes en el trabajo de investigación de Küchemann (1980) las cuales oscilaban entre los 13 y los 15 años; en dicho trabajo se observa una tendencia por parte de los estudiantes participantes a ubicarse en un mayor nivel de entendimiento en proporción directa a su edad, es decir, a mayor edad le correspondía un mayor nivel de entendimiento. Partiendo de esa suposición, en nuestro estudio, inicialmente esperábamos que la mayoría de los estudiantes de nivel universitario lograran responder de manera correcta la mayoría de los ítems que conformaban el instrumento y de esta manera ubicarse dentro del nivel más alto de entendimiento en el uso y significado de las letras en álgebra; es decir, que los estudiantes fueran capaces de interpretar las letras como números generalizados y como variables, pero no resultó así, pues los porcentajes de aciertos del nivel IV fueron inferiores al 10%. Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos que los resultados obtenidos son causados probablemente por las diferencias observadas en los niveles educativos entre los países en los cuales se desarrollaron los estudios, lo cual puede ser respaldado por los resultados de la prueba PISA 2012 en el área de competencias matemáticas. En dichos resultados, se puede observar que el Reino Unido se encuentra en el lugar 22 de los países participantes, mientras que México se ubica en el lugar 49 de 61 países evaluados, revelando esto, la disparidad de conocimientos matemáticos entre estudiantes de la misma edad pero de distintos contextos. Lo anterior nos lleva a coincidir con lo que se ha manifestado en García *et al*., (2014) en el sentido que, parece necesario revisar con detalle el tratamiento que recibe el álgebra en los programas de estudio de los niveles de primaria, secundaria y bachillerato en nuestro contexto educativo, en cuanto al significado de las letras y especialmente en su papel de variable aunque, ya pusimos de manifiesto en García (2010) que los contenidos en álgebra en los niveles preuniversitarios en México son similares a los de otros países como el caso del Reino Unido. Así mismo, podría también ser de interés, atender la formación de profesores acerca del tratamiento escolar que deben tener los diferentes usos de las letras, ya que, por ejemplo en algunos estudios como el de Juárez (2010), se sugiere que las dificultades que presentan los estudiantes en el manejo de las letras como variables, podrían ser causadas por la poca comprensión que tiene el profesor de los diferentes aspectos de la variable y que al momento de enseñar los contenidos, esta misma incomprensión es transmitida a los estudiantes sin que el profesor sea consciente de ello, dificultando de esta forma, lograr un desarrollo más adecuado del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Respecto al índice de dificultad de los ítems, en nuestro estudio se realizó una clasificación de acuerdo a los porcentajes de aciertos alcanzados por los participantes, tratando de hacerla equiparable con los niveles de entendimiento propuestos por Küchemann (1980), encontrando algunos casos que consideramos importante destacar: Los ítems *1b* y *1c*, considerados por Küchemann como ítems diseñados para que el estudiante aplique el uso de la letra evaluada para su resolución, y que de acuerdo a su complejidad los clasifica en el nivel de entendimiento I, en nuestro estudio y con base en los porcentajes de respuestas correctas obtenidas, se catalogó, que estos ítems pertenecían al tercer nivel de dificultad, ya que menos del 50% de los participantes lo contestaron de forma correcta. Estos resultados sugieren que algunos estudiantes no aceptan las expresiones algebraicas "sin cerrar" como respuestas válidas, es decir expresiones como *r+2*, no tienen validez para ellos por "carecer" de un resultado únicamente numérico; consideramos que probablemente, es por esto que, en el ítem *1b*, en el que se pedía adicionar dos unidades a la letra *r* y obtener como resultado: *r + 2*, los estudiantes no fueron capaces de aceptar una respuesta sin resultado numérico y no lo contestaban, coincidiendo con lo señalado por Collis (1975).

Por otra parte, la tarea número *12* nos arrojó resultados que consideramos pertinente destacar ya que en el estudio realizado por Küchemann, este ítem se diseñó para evaluar el uso de las letras como números generalizados y por lo tanto exigía nivel alto de entendimiento (Nivel III). Sin embargo, en nuestro trabajo de investigación y con base en los resultados de las respuestas correctas, lo catalogamos como un ítem de dificultad baja (Nivel I) ya que el 80.9% de los estudiantes respondieron de manera acertada donde el requerimiento consistía en el planteamiento algebraico de un problema a partir de un enunciado en donde se les proporcionan como datos las letras para representar cantidades desconocidas. Este resultado parece entrar en contradicción con los resultados del ítem *17a,* cuya respuesta exigía también el planteamiento de una expresión algebraica representativa de números generalizados y donde se registraron sólo 48 respuestas correctas; mientras que parece más concordante con los resultados del ítem *17b* donde se obtuvieron 144 respuestas correctas al requerimiento de una respuesta numérica que se podía obtener a partir del enunciado del problema; quizás porque en el primer caso las letras *P y J,* algunos alumnos las hayan considerado como valores específicos.

Así mismo, considerando que los estudiantes universitarios hipotéticamente deberían responder correctamente al menos las tareas del nivel III, se observa que no es así, ya que por ejemplo el ítem *18b* sólo ha sido respondido correctamente por 16% (el que tiene la tasa más baja de acierto en este nivel). El tema se agrava si observamos que el ítem de menor dificultad del nivel III (*1c*) solo ha sido acertado por el 48.5% de los participantes en el estudio. Por lo tanto, hay un gran porcentaje de estudiantes que no alcanzan a responder correctamente los ítems que deberían manejar con fluidez de acuerdo a su nivel educativo, manifestando deficiencias en el manejo de letras como números generalizados y como variables (nivel de entendimiento III y IV), a pesar de su formación matemática adquirida en los niveles educativos previos a su ingreso a la universidad.

Teniendo en cuenta lo anterior, destacamos que se documentaron 3633 respuestas erróneas (ver Tabla 10), cuando se consideraron solo los ítems clasificados en cada nivel de entendimiento. El error más frecuente es el de *letra como objeto* (17.6%) por ejemplo, en el ítem *10a* que se presenta a continuación, se puede apreciar, como algunos estudiantes emplean las letras como etiquetas, en este caso relacionan las iniciales de los nombres de los objetos representados en el enunciado la tarea, z para zanahorias y p para pepinos.


10. Las zanahorias cuestan 80 centavos cada una y los pepinos cuestan 60 centavos cada uno.

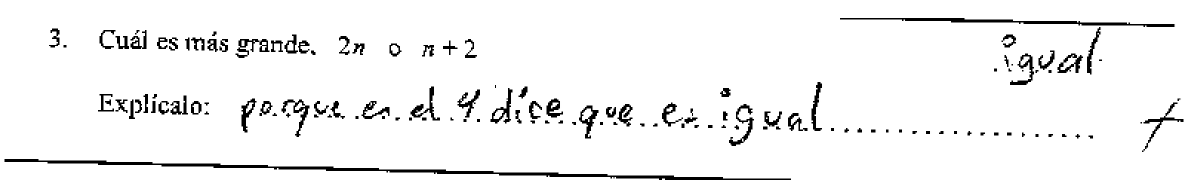
Si z representa el *número* de zanahorias compradas y p representa el *número* de pepinos comprados, ¿Qué representa

$8z + 6p$?

a)

X 8 zanahorias + 6 pepinos.

En segundo lugar de frecuencias de errores fue el *error de letra evaluada*, el cual se presentó en el 13.2% de las respuestas. Un ejemplo de este error se presenta a continuación en el ejemplo que se muestra de la respuesta a la tarea 3, en la que se puede apreciar como algunos estudiantes evalúan de manera arbitraria las tareas algebraicas en el intento de resolverlas, en ese caso en particular le asigna el valor *2* a la expresión y basado en ese valor expresan el resultado. Dicho ejemplo es el siguiente:

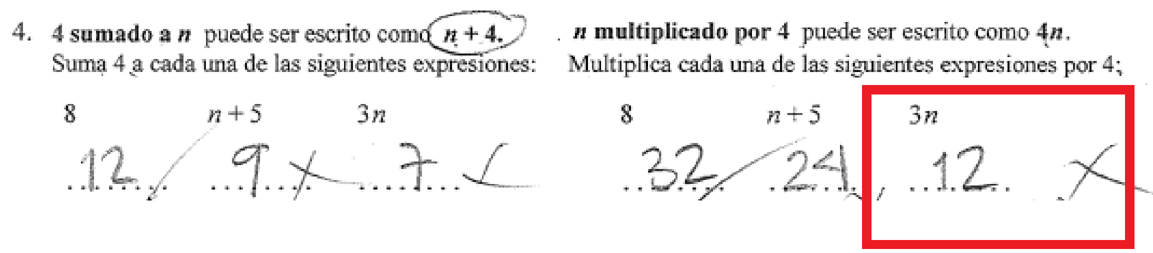

3. Cuál es más grande. $2n$ o $n + 2$

igual

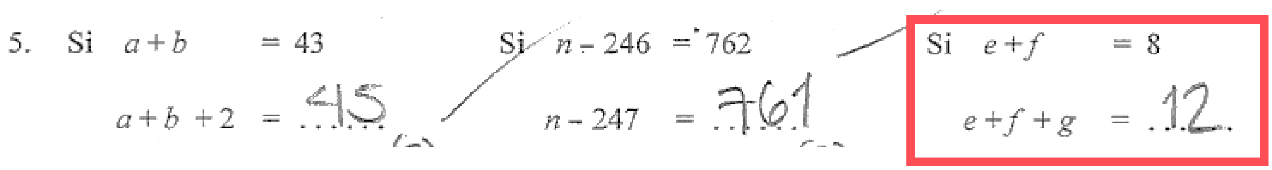
Explícalo: porque en el 4 dice que es igual

En segundo lugar de frecuencias de errores fue el *error de letra evaluada* —

Se registraron pocos casos de error de *letra ignorada* (321 respuestas, suponen un 3,1%), en los cuales los estudiantes ignoran las letras presentes y expresan resultados erróneos sin utilizarlas, como el ejemplo que se presenta a continuación, en el cual se puede observar que el estudiante intenta resolver la operación *4 x 3n* y realiza la operación aritmética pero ignora la existencia de la letra *a*.



Además, se presentaron 154 respuestas (1.5%) con errores al emplear la *letra como incógnita de valor específico*, estos errores se presentan cuando los estudiantes no son capaces de comprender que la letra representa un número particular pero desconocido y son capaces de operar directamente sobre ella, como ejemplo se muestra la respuesta de un estudiante que considera que la letra *g* tiene un valor especifico, en ese caso *4* y lo suma al valor conocido 8; expresando como resultado *12*, como se muestra a continuación.



En un apartado posterior (objetivo específico 4) abordaremos el estudio de los errores detectados. Por ahora, solo se presenta una visión general de los errores detectados en los resultados obtenidos con el instrumento de evaluación.

Tabla 10. Frecuencias de los errores

	Error	Nº Errores	%ᵃ
Tipo 1:	Letra evaluada (LE)	1353	13.2
Tipo 2:	Letra como objeto (LO)	1805	17.6
Tipo 3:	Letra ignorada (LI)	321	3.1
Tipo 4:	Letra como incógnita de valor específico (Live)	154	1.5
Tipo 5:	Letra como números generalizados	0	0
Tipo 6:	Letra como variable	0	0
	Total	3633	35.2

a. El total de respuestas registradas son 10282 (194 casos por 53 ítems)

Finalmente como resultado de la aplicación del instrumento de evaluación podemos mencionar que a pesar que el instrumento fue diseñado originalmente para un nivel educativo precedente al nivel universitario y en un contexto educativo diferente, en nuestro caso nos fue útil ya que al aplicarlo sin modificaciones significativas[1], nos permitió detectar diferentes errores en las producciones de los estudiantes, así como los distintos niveles de entendimiento en la comprensión del uso y significado de las letras en álgebra por parte de los estudiantes participantes en el estudio.

4.3 DIFICULTAD DE LOS ÍTEMS AGRUPADO POR NIVELES DE ENTENDIMIENTO

En este apartado se presentan el análisis según los niveles de entendimiento descritos por Küchemann (1980). Los ítems relacionados con cada uno de los niveles de entendimiento, que fueron considerados para el análisis de las respuestas del instrumento de evaluación aplicado se presentan en la Tabla 6 del apartado 3.5 y que corresponden a los considerados por Küchemann (1980). Tal y como se describió, el instrumento de evaluación aplicado posee un número determinado de ítems que al corregirlos nos establecen el nivel de entendimiento

[1]Cabe recordar que la tarea número 23 no fue tomada en consideración para el análisis de los resultados por no haber sido contestada de manera correcta por ningún estudiante de los participantes del estudio. Los motivos podrían estar relacionados con el hecho de que no fue posible implementar una secuencia didáctica específica con los estudiantes similar a la implementada en el estudio de Küchemann (1980) para resolver esta tarea.

de los sujetos, el cual varía de 0 a IV. En este apartado se van a describir las respuestas en los ítems propuestos para la corrección de cada nivel. Se espera que entre ellos las tasas de aciertos no sean muy diferentes, pero sí al compararlos en los diferentes niveles de entendimiento. Además se espera que al aumentar el nivel de entendimiento el número de aciertos disminuya gradualmente.

La corrección por nivel se realizó con un cálculo del porcentaje medio para cada tipo de respuesta: acierto, no contestó (NC) y error. No consideramos el nivel 0 ya que los ítems relacionados con este nivel son los mismos que los del nivel 1; para situar a los alumnos en el nivel 0 deben tener menos de cuatro respuestas correctas de los ítems considerados en el nivel I.

4.3.1 Dificultad de los ítems de Nivel I.

Recordamos que los estudiantes que se encuentran en este nivel evitan trabajar con la letra, le dan un valor arbitrario a la misma, las ignoran o las tratan como objeto.

Tabla 11. Análisis de resultados del nivel de entendimiento I

Ítem	Porcentaje correctas	Porcentaje Incorrectas
8	98.5	1.5
9a	94.3	5.7
5a	91.8	8.2
13a	91.2	8.8
6a	90.7	9.3
7b	86.1	13.9

Como puede apreciarse en la Tabla 11, la gran mayoría de los estudiantes (entre el 86.1% y el 98.5%), resolvieron con facilidad este tipo de ítems, al tratarse de ítems que son puramente aritméticos o requerían el uso de las letras como letras evaluadas o como objetos. Sin embargo, los resultados encontrados nos indican que, a pesar de que los estudiantes universitarios cuentan con una formación matemática adquirida previamente, persisten errores en el manejo y comprensión del uso de las letras en álgebra al evaluarlas o considerarlas como objetos. Nuestros resultados concuerdan con los encontrados por Küchemann (1980), quien menciona que entre el 87% al 93% de los estudiantes participantes en su estudio contestan de manera correcta los ítems catalogados en este nivel de entendimiento. A continuación ejemplificamos algunos de los errores significativos encontrados en las respuestas de los participantes ubicados en este nivel de entendimiento.

Un error significativo documentado en este nivel, se observa en la Figura 30, donde se aprecia un error al sumar los lados de la figura geométrica; aparentemente el estudiante conoce el concepto de perímetro, ya que suma los lados de la figura, pero se equivoca al obtener el resultado de la suma.

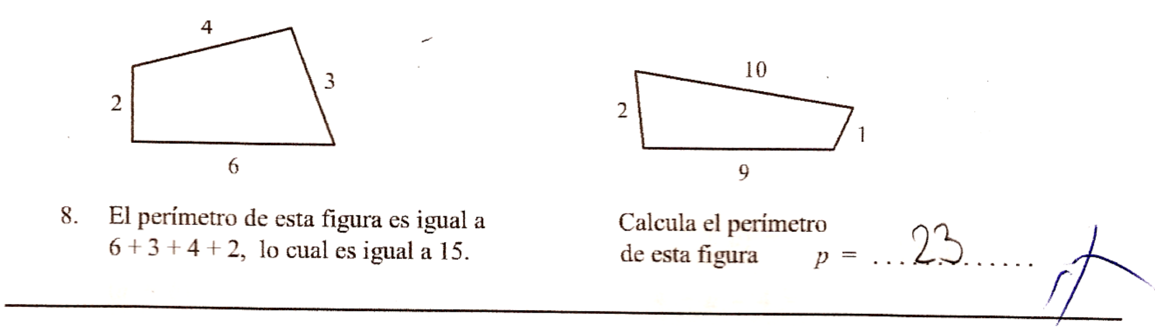


Figura 30. Ejemplo de error por descuido (Nivel I)

Considerando que es usual que los estudiantes en ocasiones, cuando enfrentan poco dificultad cognitiva en alguna tarea, tienden a emitir una respuesta sin analizarla ya que al requerir poco trabajo de introspección y evaluación, el alumno no realiza una actividad que se considera un buen hábito: revisar la tarea realizada para poder detectar a tiempo errores como el de la Figura 30, lo que ocasiona que se confirme el descuido. Similar opinión se tiene si se revisa a Mosvshovitz-Hadar, *et al*. (1987), quienes ubican este tipo de error en su escala en el nivel 5 que se refiere a la falta de verificación de la solución.

Continuando con el análisis de los errores de los ítems diseñados para este nivel, concordamos con Küchemann (1978) quien menciona que, un estudiante de álgebra que no es muy diestro para el manejo algebraico o no lo ha comprendido muy bien, frecuentemente le adjudica un valor a la letra, ya que no puede aceptar (o entender) que es un elemento desconocido cuando se presenta en una ecuación algebraica. Con base en esta explicación se puede ver en la Figura 31, que el estudiante no tiene la capacidad de enfrentarse a situaciones como las que menciona Küchemann (1978), al no comprender qué sucede con el ejemplo ofrecido al principio de la pregunta, algo sucede en la mente del alumno que en la suma *a + b + 2*, obtiene por resultado el número *9*.

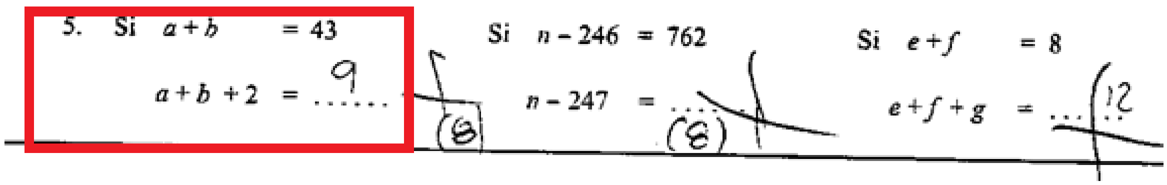


Figura 31. Ejemplos de errores frecuentes en ítems de nivel I

Finalmente, encontramos en las respuestas del ítem *13a*, como la que se muestra en la Figura 32, la presencia del errores al utilizar la letra como objeto, tal como se mencionó en Küchemann (1980) y Booth (1984); los estudiantes al considerar que las letras y los números tienen valor propio, suman las cantidades conocidas y operan las letras como si tuvieran valores propios, obteniendo como resultado en el ejemplo citado que: $a+a = a^2$, sin evaluarla correctamente, lo cual evidencia una falta de conocimiento adecuado para realizar el proceso correcto.

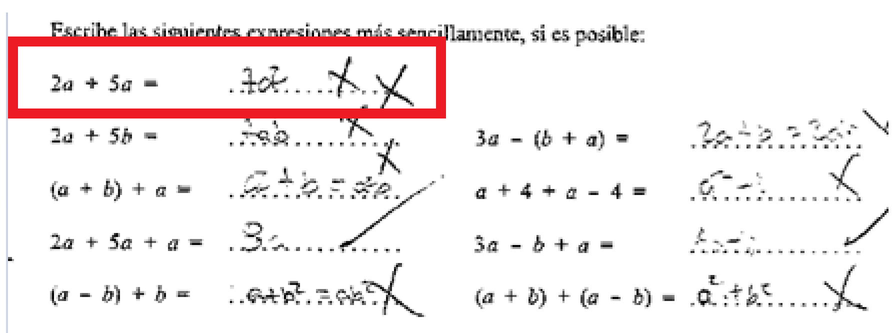


Figura 32. Ejemplo de error por uso de la letra como objeto (Nivel I)

4.3.2 Dificultad de los ítems de Nivel II.

Recordamos que el estudiante que está ubicado en este nivel resuelve problemas más complejos que los del nivel anterior, por ejemplo la introducción de varias letras en la tarea algebraica a resolver. (Mientras que un ítem de nivel 1 sería por ejemplo la expresión: *si* $a + 5 = 8$, *entonces* $a = ?$ En el nivel II el ítem involucraría la resolución de una expresión como: $m = 3n + 1$ *con* $n=4$ *y* $m = ?$ La Tabla 12 recoge los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas de los ítems de este nivel.

Tabla 12. Análisis de resultados del nivel de entendimiento II

Ítem	Porcentaje correctas	Porcentaje incorrectas
9b	83.5	16.5
13d	82.5	17.5
9c	78.4	21.6
11a	73.2	26.8
7c	71.1	28.9
11b	62.4	37.6
15a	57.7	42.3

Como puede verificarse en la Tabla 12, en los ítems del nivel II aumentaron los porcentajes de las respuestas erróneas, pasando de un 7.9%, obtenido como promedio en el primer nivel, a un promedio de 27.3%. En este nivel la tasa de respuestas acertadas varía de 57.7% (ítem *15a*) a 83.5% (ítem *9d*), siendo el promedio de aciertos de un 72.7%. Cabe señalar que el porcentaje de error mencionado toma en cuenta los casos donde el estudiante no contesto o en su defecto cometió un error. Este incremento en el porcentaje de error lo podemos considerar normal ya que según Küchemann (1980) la diferencia entre el Nivel I y el Nivel II de entendimiento del uso de las letras, es básicamente el incremento en la dificultad de los ítems considerados en cada nivel; se comprueba que el mayor nivel de complejidad produce un considerable aumento en el porcentaje de errores en las respuestas de las tareas de los estudiantes. Sin embargo, debemos mencionar que la mayoría de ellos logra resolver adecuadamente esta clase de tareas, como es de esperar en estudiantes de este nivel educativo. A continuación, ejemplificamos varios de los errores más significativos encontrados en las contestaciones de los participantes ubicados en este nivel de entendimiento.

En el ítem *15a*, mostrado en la Figura 33, consideramos que el error fue ocasionado también por descuido; aparentemente el estudiante comprende el ejemplo dado al inicio del problema y realiza la operación de resta indicada y por descuido da un resultado incorrecto, coincidiendo con lo expresado por Mosvshovitz-Hadar, *et al*. (1987).

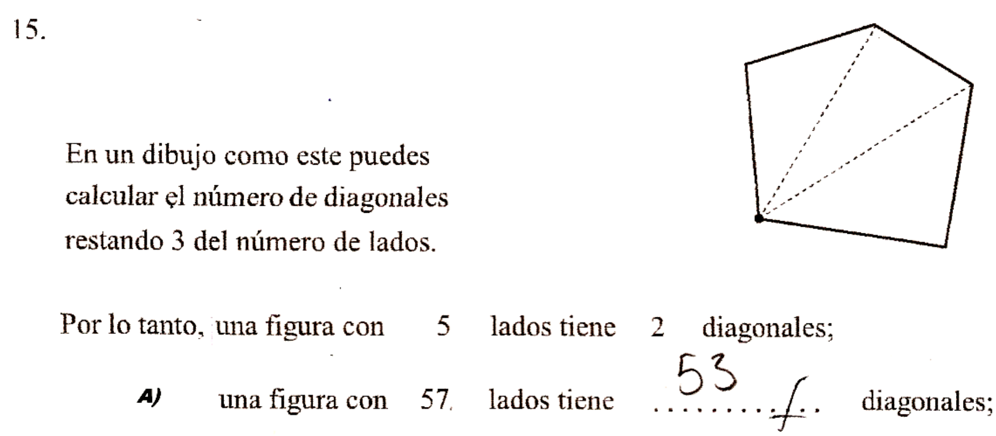


Figura 33. Ejemplo de error por descuido (Nivel II)

Este ítem (*15a*) tuvo una tasa de respuestas incorrectas del 37.1% de la muestra total, un dato que hace inferir que los estudiantes no analizan los datos del ejemplo adecuadamente, lo que lo lleva al error.

Otro ejemplo de error se presenta en el ítem *11b*, que se muestra en la Figura 34; se puede apreciar en la respuesta incorrecta que el alumno no alcanza a entender qué la letra *m* está multiplicando al número 3. En la misma figura se puede apreciar que este sujeto no tiene dificultades para resolver las expresiones algebraicas de estructura simple (*11a*) pero manifiesta dificultades para resolver las expresiones con estructuras algebraicas más complejas (*11b*).

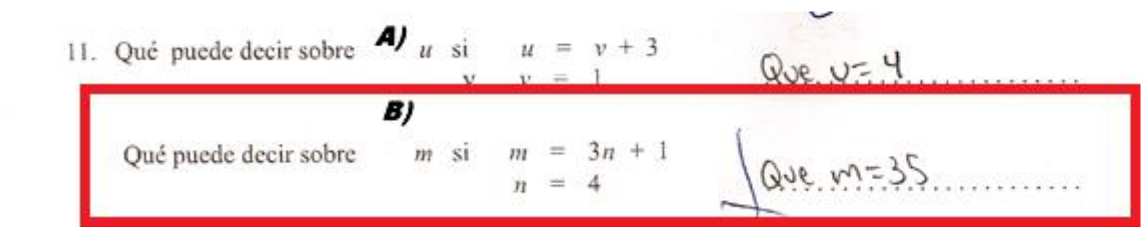


Figura 34. Ejemplo de error de letra de concatenación (Nivel II)

En el caso referido los estudiantes utilizan las letras como objetos en lugar de darles un valor específico; en este caso parece ser que consideran que las letras son posiciones dentro de una expresión algebraica, es decir, en la expresión del ítem *11b*, como se puede ver en la Figura 34, consideran que el valor especifico de la incógnita debe ser colocado en la posición en la que se encuentra en la expresión y por lo tanto se limitan a sustituirla en dicha posición y de esa manera se obtiene el resultado. Matz (1981), sostiene que estos tipos de errores consisten en que los estudiantes consideran que los valores conocidos representan valores posicionales y por consiguiente los escriben en el resultado; este tipo de error lo documenta como error de concatenación. Por ejemplo, cuando algunos estudiantes concluyen que $4x = 46$, cuando $x = 6$, el *4* representa el número conocido ubicado en la posición de las unidades y *6* lo ubican en la posición de las decenas.

Sobre el mismo problema, Mosvshovitz-Hadar, *et al*. (1987) identificaron este error y lo clasificaron como datos mal utilizados, además de como una interpretación incorrecta del lenguaje algebraico por la que los estudiantes muestran sus carencias en el dominio aritmético-algebraico.

Respecto al ítem *7c*, en los resultados generales se obtuvo un 28.9% de respuestas incorrectas; el 71.1% de los estudiantes la contestaron correctamente. En la Figura 35 se presenta el caso de un estudiante que le asigna un valor arbitrario, tanto al lado *n* como al lado *m*. Evidentemente es muestra que el estudiante ve la letra y no entiende cómo proceder con ella, por lo que necesita transformarla a notación aritmética, para que pueda darle un sentido para resolver el problema con los conocimientos previos de la aritmética, no del álgebra; el resultado es un error, se presenta en muchas ocasiones cuando el estudiante no tiene conocimiento adecuado del álgebra básica. En este caso se recuerda lo que mencionaba

García (2011), en el sentido que los estudiantes llegan con conocimientos previos pobres al nivel universitario.

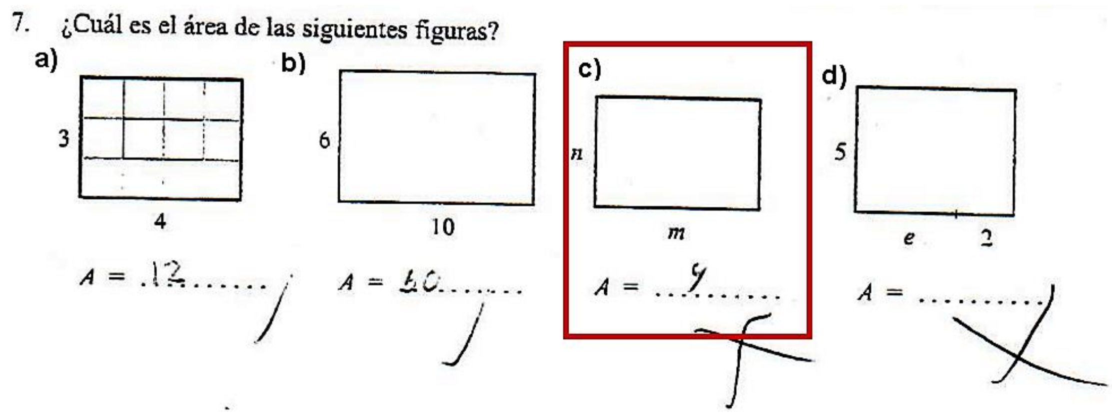


Figura 35. Ejemplo de error de uso de letra con valor específico (Nivel II)

La segunda tendencia percibida en este ítem, es la de la letra como objeto; en este tipo de errores los estudiantes reconocen que los lados de la figura son representados por letras, pero son incapaces de establecer de manera correcta la relación adecuada que expresa el área de la misma obteniendo resultados como: $m + n$, $4m + n$, $m^2 + n^2$, etc., tal como se puede apreciar en la Figura 36. En este caso se puede contemplar cómo el estudiante tiene noción de las reglas algebraicas, pero en un aprendizaje memorístico, que ya prácticamente casi olvidó, lo que lo lleva a recordar vagamente cómo se realiza la operación, opta por tomar esos recuerdos difusos y reconoce a la letra como objeto, intentando resolver con sus elementos.

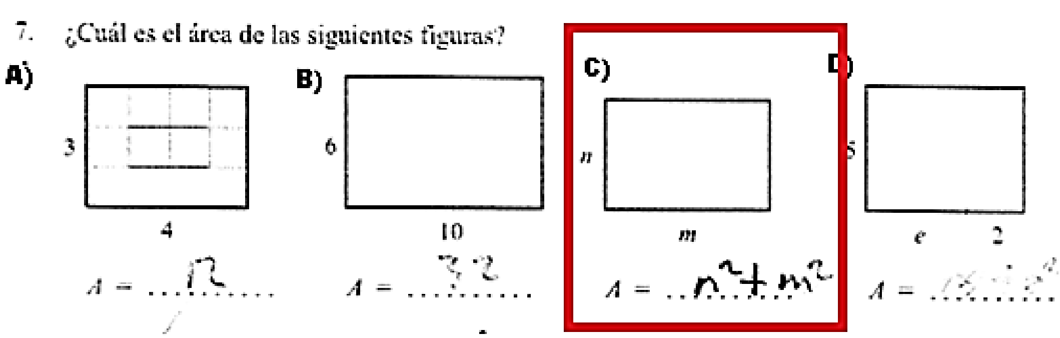


Figura 36. Segundo ejemplo de error por uso de letra como objeto (Nivel II)

En este nivel II también se pudo distinguir cómo algunos estudiantes ubicados en el mismo, insisten en interpretar que letras como objetos que representan cosas distintas; un error muy frecuente fue el que se muestra en la Figura 37.

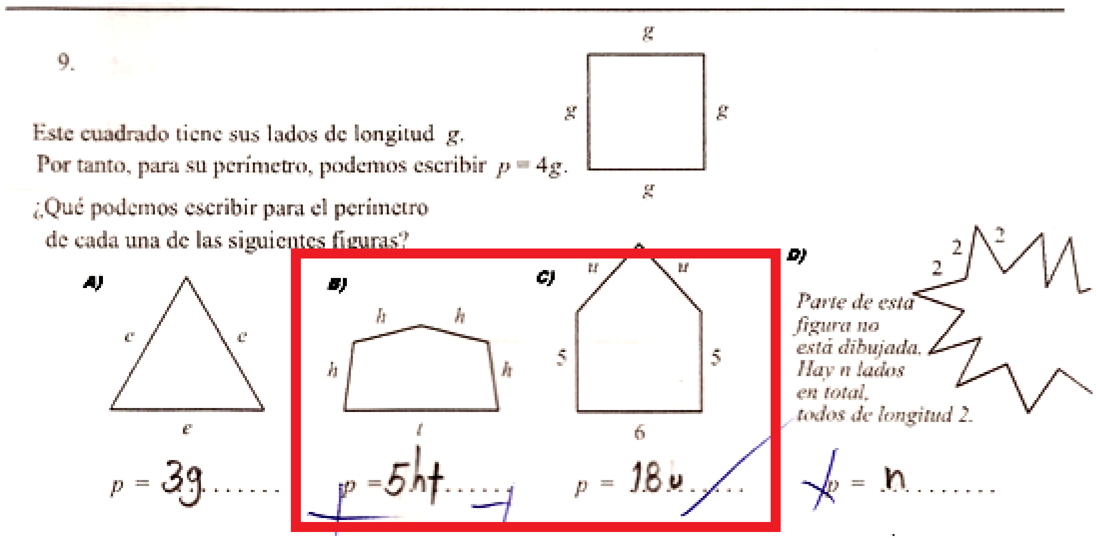


Figura 37. Tercer ejemplo de error del uso de letra por objeto (Nivel II)

En los ítems *9b* y *9c*, se observa como el estudiante considera el ejemplo como el objeto patrón (*3g*) y bajo esa regla evalúa los ítems referidos, considerando que el patrón es el valor con que debe medir, lo que le conduce al error; para Booth (1984), los estudiantes tienen una tendencia natural a interpretar las letras con valores específicos y sin la posibilidad que representen distintos valores.

4.3.3 Dificultad de los ítems de Nivel III.

Como ya se describió anteriormente, los estudiantes que se ubican en este nivel utilizan la letra como incógnita específica, son capaces de calcular su valor específico que hace verdadera una expresión.

En la Tabla 13, se observa como el porcentaje de respuestas correctas disminuye de manera considerable, pasando del 83.5% (máximo del Nivel II), hasta un 52.6% máximo en el nivel III, (ítem *13h*). El ítem con menos aciertos (24.7%) es el 16. El ítem *13h*, se distancia bastante en dificultad del resto en este nivel, ya que pasa de un 52.6% de aciertos a 38.1%, 34.5% o 34% en los ítems *4c, 9d y 13b*, que son los más parecidos en el porcentaje de aciertos.

Tabla 13. Análisis de resultados del nivel de entendimiento III

Ítems	Porcentaje correctas	Porcentaje incorrectas
13h	52.6	47.4
4c	38.1	61.9
9d	34.5	65.5
13b	34	66
15b	30.9	69.1
14	27.8	72.2
5c	26.8	73.2
16	24.7	75.3

De manera coherente con los datos de los dos niveles anteriores, los ítems del Nivel III pueden reconocerse de un mayor nivel de complejidad en el uso e interpretación de las letras en álgebra, ya que el promedio de error asciende a 66.3%. Hay señalar que, como en los casos anteriores, el porcentaje de error mencionado toma en cuenta los casos donde el estudiante no contesto.

En los resultados presentados se observa que, al contrario de los obtenidos en los dos niveles anteriores (Nivel I y Nivel II), en los cuales, los porcentajes de aciertos eran más altos en los participantes de nuestro estudio con respecto al estudio de Küchemann (1980), en este tercer nivel, los porcentajes de aciertos son más bajos que los reportados para los participantes del trabajo de citado. Lo anterior manifiesta las diferencias en el entendimiento del uso y significado de las letras en álgebra entre estudiantes de distintos contextos educativos, México y Reino Unido, tal como se mencionó en el apartado 4.2, que ponen de manifiesto los resultados de la prueba PISA para el área de matemáticas.

Algunos de los errores más usuales que se observaron en las respuestas de los participantes de nuestro estudio se muestran a continuación.

En el caso del ítem 16 el cual mostró mayor frecuencia de error, inicialmente detectamos que algunos estudiantes le dan valores arbitrarios a la expresión, obteniendo resultados como: *c*

$= 3$ *y* $d = 7$*;* $d = 7, 4, 6, 2$, etc. La Figura 38 muestra un caso típico donde los estudiantes utilizan la letra como incógnita con valor específico, además muestran que son capaces de calcular su valor específico lo que hace verdadera una expresión, pero no son capaces de comprender el uso de la letra como número generalizado.

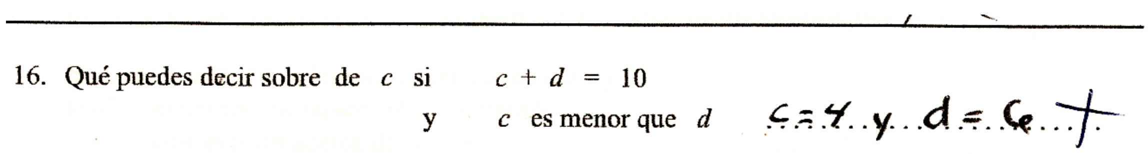

16. Qué puedes decir sobre de c si $c + d = 10$
y c es menor que d c=4 y d=6

Figura 38. Primer ejemplo de error por uso de la letra como valor específico (Nivel III)

Para sustentar nuestras afirmaciones, se analizaron las respuestas de las entrevistas realizadas, a continuación presentamos las más significativas.

Segmento de entrevista #9 (Sujeto entrevistado #9)

Investigador (i): Seguimos con el 16

Estudiante (e): ¿Qué puedes decir sobre "*c*" si "*c+d=10*" y "*c< d*"?

(i): Aquí respondes 4 y 6, está parcialmente correcto porque si lo aplicas *4+6* es 10 y también se cumple que "*c*" es menor que "*d*".

(e): Ajá (sí)

(i): Pero ahora te pregunto, ¿es la única pareja de números que te puede dar ese resultado?

(e): no, puede haber más ¿no?, puede ser, no sé, el "*c*" puede ser 1, 2, 3, 4

(i): Por ejemplo el 3 ¿y qué?

(e): ¿7?

(i): Ok, te vuelvo a poner aquí 2 y 8, 1 y 9, con eso ya tenemos: entonces "c" debe ser ¿qué? ¿Menor o igual a?

(e): a 4

(i): Esa era la respuesta, al utilizar un solo valor evaluaste la letra con este mismo valor, pero ¿no te detuviste a pensar que había más números? ¿O no los había? Lo que quiero que me expliques, ¿por qué nada más una respuesta?

(i): Yo dije, debe tener una respuesta y ya no me puse a pensar que había más respuestas

(e): Correcto. Evaluaste con un solo valor y me dijiste: con esto se cumple, ¡vamos! Al cumplirse con esta condición ya no buscaste más, muy bien, pero había más ¿no?...

(i): sí…

En otra tendencia encontrada en el análisis de las respuestas de los ítems de este nivel, distinguimos que algunos estudiantes insisten en considerar que las letras son objetos con características propias, y no son capaces de comprender que estas pueden representar un conjunto de valores, como se puede percibir en la Figura 39.

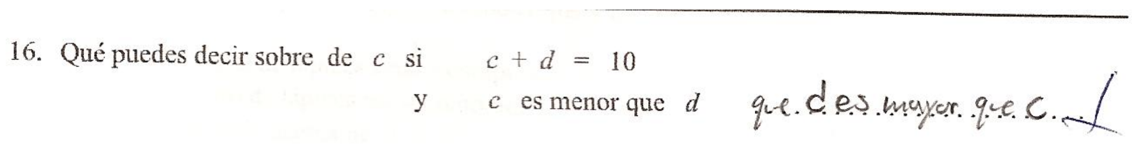

16. Qué puedes decir sobre de c si $c + d = 10$
y c es menor que d que d es mayor que c.

Figura 39. Primer ejemplo de error en el uso de la letra como objeto (Nivel III)

Además la Figura 39 muestra una carencia en el manejo de los símbolos del álgebra que hace notar que los estudiantes no se deciden a efectuar procesos adecuados que los acerquen a un resultado acertado.

En la Figura 40 se presenta un caso particular, ya que varios de los estudiantes, ante la afirmación de *c* es menor que *d*, deciden asignar el mismo valor *4* a *c* para cumplir el requisito planteado; estos estudiantes aparentemente recuerdan que en aritmética solo hay un valor verdadero en las operaciones; entonces al encontrar el primero, ya terminaron el proceso, ya que cumplieron el requisito que planteaba el problema.

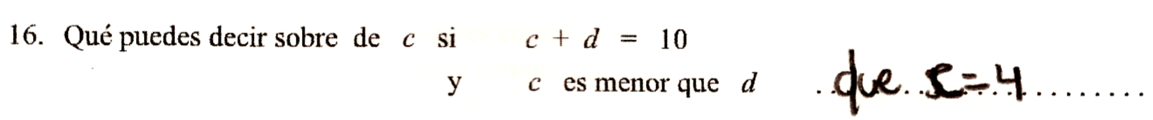

16. Qué puedes decir sobre de c si $c + d = 10$
y c es menor que d que c=4

Figura 40. Segundo ejemplo de error por uso de la letra como valor específico (Nivel III)

En términos generales observamos que en la mayoría de los casos se presentan las mismas tendencias, cumpliendo y comprobando lo que Küchemann (1980) planteó en su investigación. La forma en que organizó y clasificó los errores permite tener un elemento que da seguridad y facilita ver el comportamiento de los estudiantes en torno al álgebra.

Otro caso que presentamos en nuestro análisis, es del ítem *5c*, en el cual encontramos que los estudiantes, consideran la como letra como incógnita de valor especifico (Figura 41). Así, los estudiantes le asignan un valor arbitrario a la letra desconocida ($c = 4$), sin ser capaces de considerar que las letras pueden representar cualquier rango de valores y solo se limitan a asignarles con valores arbitrarios aun cuando las identifican como incógnitas, tal como lo mencionaba Booth (1984) y Küchemann (1980) en sus respectivos trabajos.

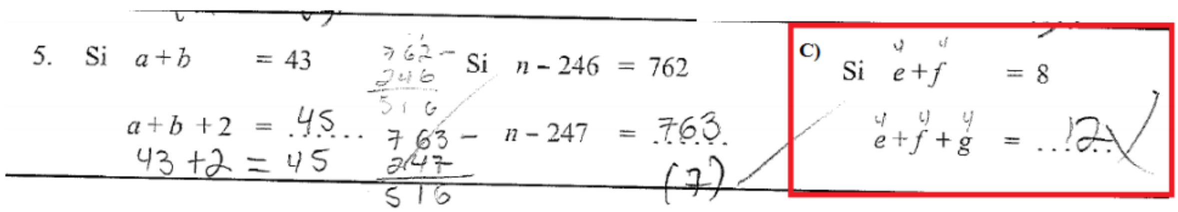


Figura 41. Primer ejemplo de error por uso de la letra evaluada (Nivel III)

A continuación presentamos un segmento de entrevista donde se puede observar como un estudiante resuelve este ítem:

Segmento de entrevista #10 (Sujeto entrevistado #1)

Investigador (i): Vamos al 5. A ver, ¿qué se te pregunta en el inciso cinco? ¿Me lo puedes leer?

Estudiante (e): Si "*e*" más "*f*" es igual a 8, ¿*e* más *f* más *g* es igual a? y es como la incógnita que ahí te pide.

(i): Si, según tu respuesta, "*e*" más "*f*" más "*g*" es igual a doce, ¿eso quiere decir que no existen otros valores que satisfagan esta ecuación? Supongo. Y bueno, yo supuse que repartiste, ¿no es así?

(e): *Ey* (sí), cuatro por tres.

(i): Sí verdad, así que pusiste, cuatro más cuatro más cuatro, ¿es correcto?

(e): Si porque si hay dos literales acá, valen 8.

(i): Ah ok. Lo dividiste.

(e): Ahí lo dividí entre dos.

(i): Ah ok. Pero es un poco parecido al de la primera que te decía, ¿qué sucede si yo aquí pongo? Por ejemplo: nueve más dos más uno, ¿también se puede?

(e): *Ey* (sí), nueve más dos más uno, también serían doce.

(i): ¿Sí? Entonces ¿crees ahora que es posible que obtengas el valor de esta expresión, que obtengas un valor numérico, si no conoces cuáles son los valores que los satisfacen? ¿se podrá? Por decir, si yo te digo *a* más *b* más *c*, bueno le pongo otro: "*e*", y no conoces ninguno, no puedes decir que es dos, no se puede decir…

(e): No se puede decir científicamente, basándome en que no te está dando ningún valor.

(i): Si, no puedes afirmar que es un valor numérico conocido.

(i): Sí.

En el segundo caso, Figura 42, el estudiante considera la letra como un objeto y al ser distinta que el número presente en el ítem, une los dos objetos obteniendo como resultado *8g*, sin realizar algún procedimiento algebraico ni aritmético.

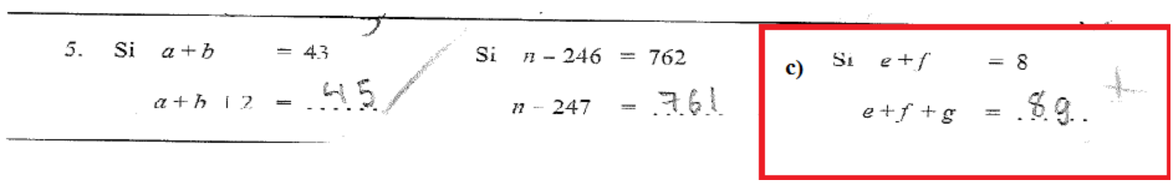


Figura 42. Segundo ejemplo de error en el uso de la letra como objeto (Nivel III)

Lo anterior lo podemos corroborar en el siguiente segmento de entrevista:

Segmento de entrevista #11 (Sujeto entrevistado #12)

En este caso podemos ver como el estudiante es incapaz de recordar las reglas básicas de las operaciones algebraicas básicas, que le permita distinguir la suma del producto algebraico, así mismo distingue que al ser dos cosas u objetos distintos los debe agrupar sin efectuar algún procedimiento sobre ellos.

Investigador (i): Al igual que las anteriores, no me queda claro cómo obtienes la respuesta a este ítem, ¿me puedes comentar cómo lo hiciste?

Estudiante (e): Como en el problema dice que $e+f = 8$, entonces solo sustituí en $e+f+g$ y me quedó $8g$.

(i): Pero al sustituir ¿Te queda $8g$ u $8 + g$?

(e): Tiene razón, queda $8 + g$

(i): ¿Tenías alguna razón en particular para considerar que $8g$ es igual a $8 + g$?

(e): Al no poder sumarse pasan igual en el resultado.

(i): ¿Estás segura? Por lo que acabas de mencionar, una suma es igual a una multiplicación.

(e): Tiene razón, no son iguales, se me había olvidado.

(i): Correcto.

De esta forma, se puede observar que los ítems que deberían ser resueltos utilizando el concepto de letra como número generalizado, gran parte de los estudiantes no tuvieron la capacidad de realizar el proceso de lo particular a lo general, tal es el caso del ítem *15b* (Figura 43); en este ejemplo las letras y los números son cosas distintas, por lo tanto el estudiante las trata por separado; los estudiantes pueden resolver problemas específicos, pero cuando una tarea debe generalizarse, entonces no sabe qué hacer y ocasiona este error dando como resultado una conjunción de todos los datos del problema, *-3k*

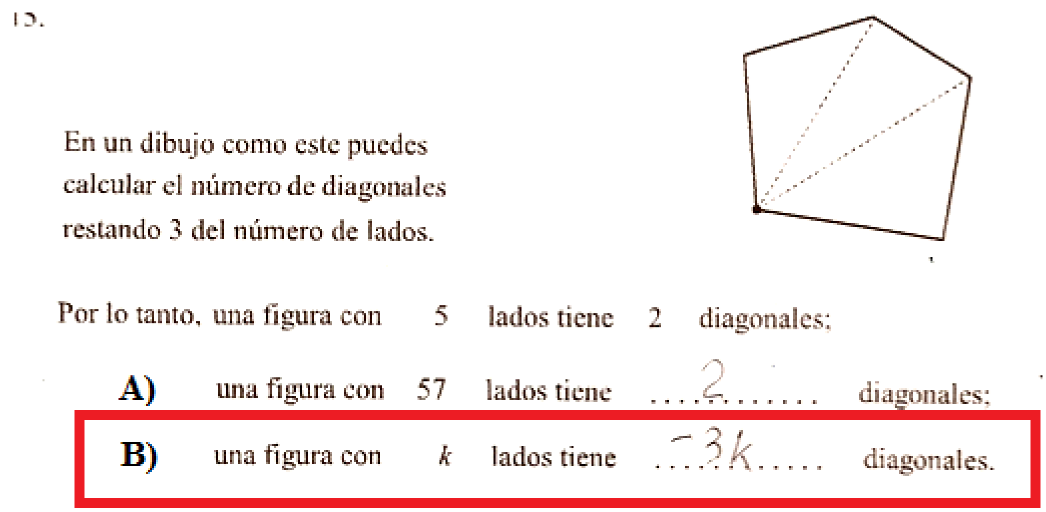
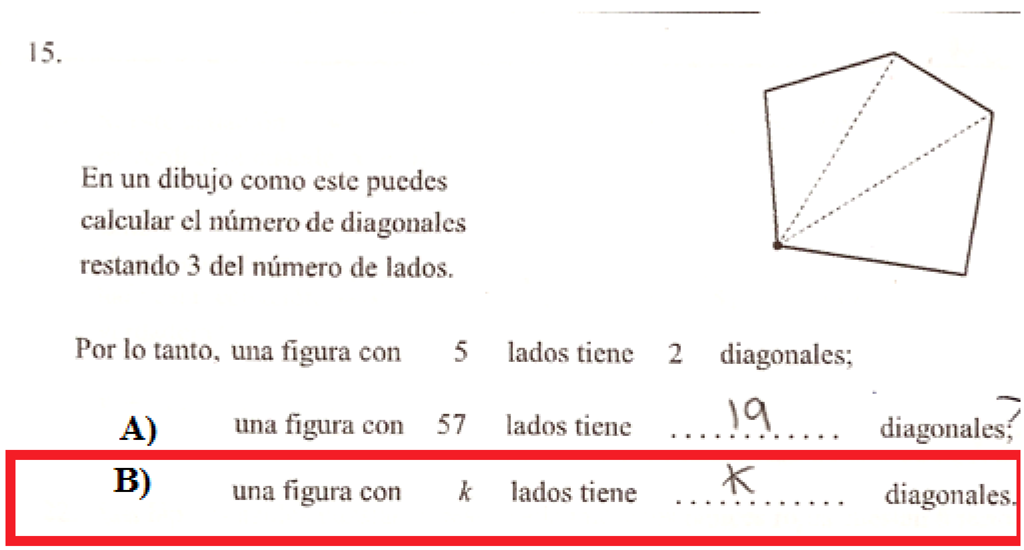


Figura 43. Ejemplo de error en el uso de la letra como número generalizado

En otro caso sobre el mismo ítem, los estudiantes consideran que las letras representan valores específicos desconocidos y al no conocer su valor expresan resultados tales como: *k, n, x*, etc. En el ejemplo mostrado en la Figura 44, se puede apreciar que el estudiante no sabe qué hacer con la generalización y procede de la forma más simple, copia solo el valor *k* como resultado. Para Cox (1975) el estudiante en sus estudios previos no tiene una adecuada comprensión de las tareas algebraicas y entonces manifiesta el error documentado.


15.

En un dibujo como este puedes calcular el número de diagonales restando 3 del número de lados.

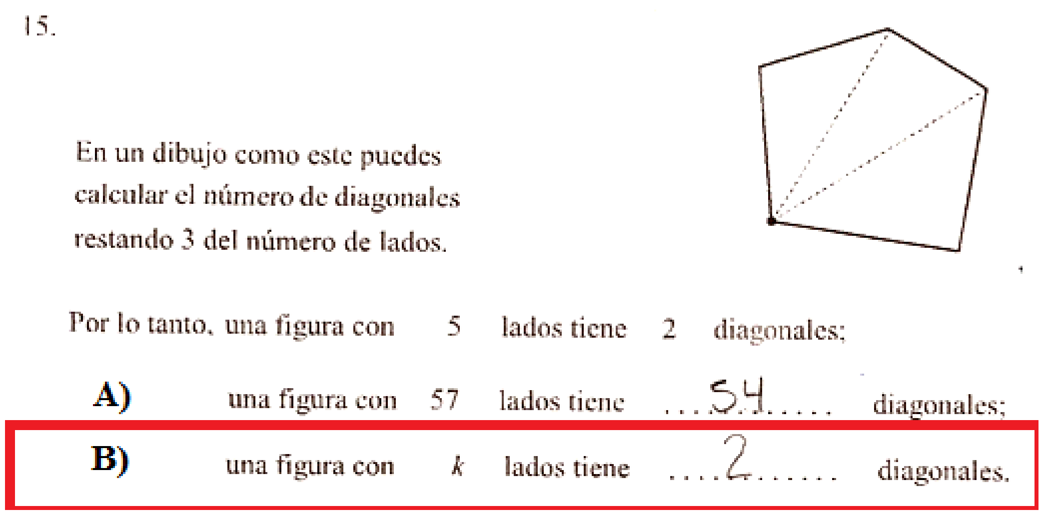
Por lo tanto, una figura con 5 lados tiene 2 diagonales;

A) una figura con 57 lados tiene ....19..... diagonales;

B) una figura con k lados tiene ....K...... diagonales.

Figura 44. Tercer ejemplo de error en el uso de la letra como valor específico (Nivel III)

Existe un tercer caso de error presentado en el ítem *15b* donde el estudiante evalúa la letra presente y le asigna valores arbitrarios, expresando resultados tales como: *-2, -3, 1, 2* (Figura 45).


15.

En un dibujo como este puedes calcular el número de diagonales restando 3 del número de lados.

Por lo tanto, una figura con 5 lados tiene 2 diagonales;

A) una figura con 57 lados tiene ...54..... diagonales;

B) una figura con k lados tiene ...2...... diagonales.

Figura 45. Cuarto ejemplo de error en el uso de la letra como valor específico (Nivel III)

En el mismo sentido, en la Figura 46 (ítem *14*) se muestra el error al emplear la letra como incógnita con valor especifico; se puede apreciar la dificultad del estudiante para manejar las relaciones algebraicas, debido al desconocimiento de su uso. Como afirmamos en García

(2011), algunos estudiantes deben llevar las tareas de este tipo a un campo conocido, trasladando el álgebra a la aritmética.

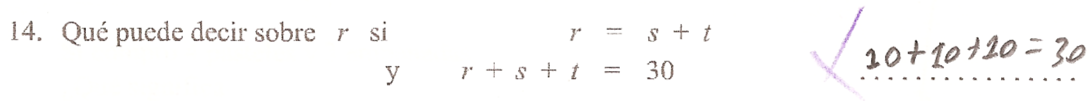
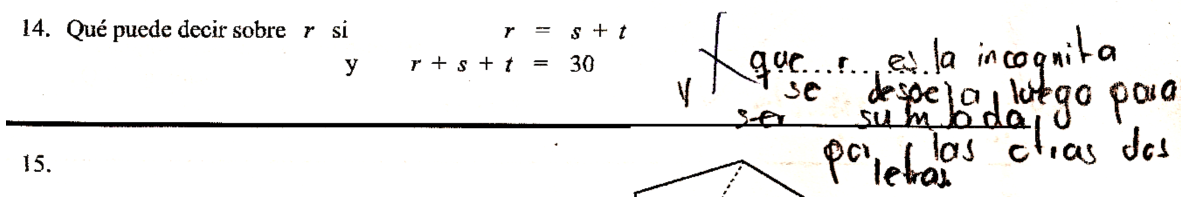

14. Qué puede decir sobre r si $r = s + t$ y $r + s + t = 30$ 10+10+10=30

Figura 46. Quinto ejemplo de error en el uso de la letra como valor específico (Nivel III)

En el caso del ejemplo de la Figura 46, el estudiante no evalúa las letras, solo les da un valor arbitrario con la intención de ajustar el resultado y que de esta manera quede la igualdad definida.

En otra variante de respuesta errónea del mismo ítem, se considera a la letra una incógnita con valor específico; en la Figura 47, se percibe cómo el alumno reconoce la letra *r* como incógnita, pero no sabe cómo continuar y solo ofrece una respuesta que permite comprender que no tiene la capacidad para realizar la valoración correcta.


14. Qué puede decir sobre r si $r = s + t$ y $r + s + t = 30$ que r es la incognita se despeja luego para ser sumada por las otras dos letras

15.

Figura 47. Tercer ejemplo de error por uso de letra como objeto (Nivel III)

Una respuesta atípica que encontramos en el análisis de estos ítems, se presentó en un estudiante que muestra capacidad para distinguir que las letras pueden representar distintos valores desconocidos, pero es incapaz de terminar la tarea concluyendo solamente que las letras pueden tener diferentes valores desconocidos, como se muestra en la Figura 48.

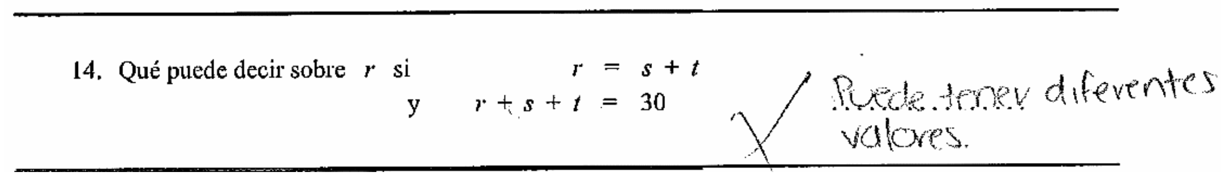


Figura 48. Sexto ejemplo de error en por uso de letra como incógnita de valor específico (Nivel III)

El ítem *9d* que alcanzó un 64.9% de respuestas incorrectas (Tabla 9), es decir que casi las 2/3 partes del total de estudiantes tienen el problema del manejo de las letras como números generalizados. En la Figura 49 se observa el ejemplo de un error que se presenta al considerar que el ítem *9d* puede resolverse como una letra evaluada, es decir, el estudiante da un valor arbitrario al número de lados, como se menciona Booth (1984) y Palarea (1998), quienes sostienen que los estudiantes manifiestan una tendencia natural para asignarle a las letras valores específicos.

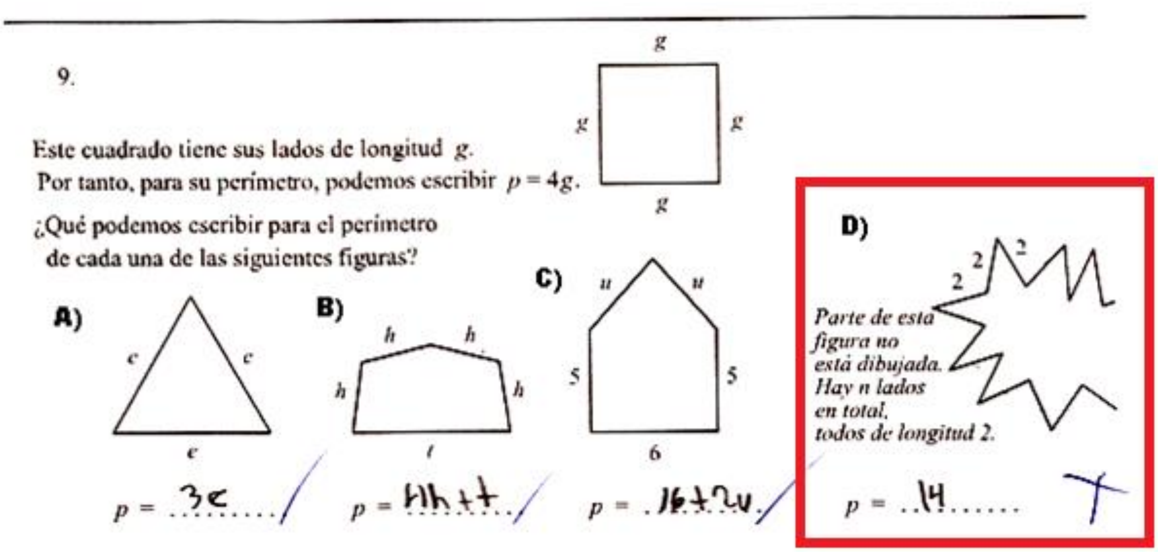


Figura 49. Segundo ejemplo de error por uso de letra evaluada (Nivel III)

De igual forma, en otras respuestas documentadas en el análisis de este ítem, como el caso que se puede apreciar en la Figura 50, el estudiante decidió concretar el número de lados de la figura y luego lo expresó el resultado de la mejor forma posible obteniendo el resultado *21n*, manifestando un error clasificado como uso de letra evaluada. De acuerdo con Booth

(1984), la mayoría de procedimientos son contexto-dependientes, es decir, no se pueden generalizar para otros problemas parecidos, entonces el estudiante intenta simbolizar el resultado de manera informal, utilizando como referencia un contexto que le es familiar, en este caso recurre a sus conocimientos previos de geometría aplicando dichos conocimientos sin considerar el nuevo contexto que se le presenta, como en el caso del ítem *9d*.

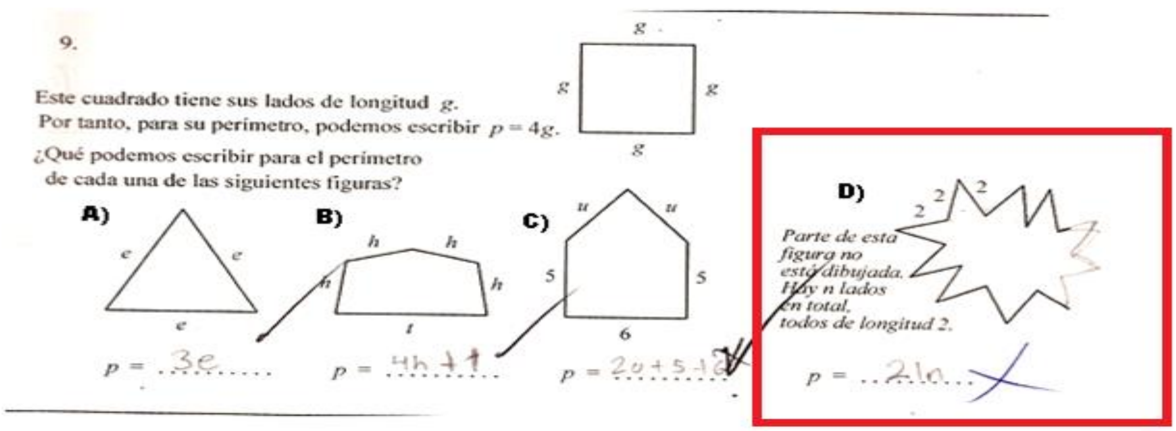


Figura 50. Cuarto ejemplo de error por uso de letra como objeto (Nivel III)

Mención especial merece el caso de los estudiantes que no aceptan que una figura abierta pueda tener una respuesta, lo cual se manifestó en algunas de las entrevistas realizadas y de las cuales presentamos a continuación las que consideramos más significativas:

Segmento de entrevista #12 (Sujeto entrevistado #1)

En este caso el estudiante reconoce que cierra la figura, pues al verla abierta es incapaz de obtener una respuesta y recurre a sus conocimientos previos para tratar de resolver el problema manifestando dificultades para hacer un planteamiento utilizando las letras como números generalizados que puedan representar un rango infinito de valores desconocidos.

> **Investigador (i):** En el problema número 9 observé tu respuesta, pero no logré comprender bien lo que haces ¿me puedes comentar un poco de dónde sale el resultado?
>
> **Estudiante (e):** Pues lo que pasa es que está la figura, y yo me basé en mi imaginación y la cerré. Entonces, como cada lado son 2, sumé todos los lados, y es lo que me hace pensar que es 2 por 20. Según yo, son 20 lados los que existen en esta figura.
>
> **(i):** Ok, si agregas o quitas 1 lado ¿crees que daría el mismo resultado? O más bien, te replanteo la pregunta, si agregas va a ser mayor ¿no? Y si quitas es menor, entonces ¿eso no te da una idea de que puede haber cierta variación en el resultado?

(e): Pues solo que pudiera reducir la figura en tamaño, que se pudiera agrandar como dice usted, sería otro margen, a lo mejor.

(i): Bueno. Pero volviendo al original ¿te acuerdas del original? Te la muestro, es una figura incompleta. Mira, aquí está la figura original, entonces, al momento de responder ¿no creíste que eso que está incompleto deberías interpretarlo para establecer una respuesta para algo más general?

(e): Pues lo que pasa es que me basé, principalmente, en cómo está la figura de acá, quise darle el terminado más o menos así, que quedara del tamaño, del mismo tamaño por ambos lados, porque también, queriendo, se podría cerrar, pero ya no quedaría igual.

(i): Entonces, desde tu punto de vista, es que el tamaño de cada uno de los picos de la figura responde al tamaño ¿de qué?

(e): A los faltantes.

(i): Entonces por eso cerraste con 2 por 20, y con lo que me mencionas, ¿no te llamó la atención que al estar abierto pudiera representar que debías expresar los resultados de manera general? ¿No pensaste eso?

(i): No, la verdad no me lo imaginé.

Segmento de entrevista #13 (Sujeto entrevistado #3)

En este caso, el estudiante inicialmente identifica el valor conocido que tiene como dato, pero es incapaz de expresar este dato con una letra que represente un valor generalizado y hace intentos por resolver el problema mediante la estimación arbitraria de los datos desconocidos. Como se muestra a continuación:

Investigador (i): Vamos a iniciar con el problema número 9. En el problema número 9 se te pregunta que si puedes escribir algo acerca del perímetro de cada una de las figuras. Tuviste correcta la tercera y, en la primera tenías las 3 incógnitas de los 3 lados. En la segunda no tuviste problemas con los lados, fue de la número cuatro en donde no me quedó clara tu respuesta. ¿Qué respondiste? por favor léeme.

Estudiante (e): No se puede porque la figura no está completa.

(i): Ok. Y también veo que hiciste unas anotaciones, que pusiste el número 2 en todos los lados verdad.

(e): mmm, sí.

(i): ¿Para qué hiciste esas anotaciones?

(e): Pues para sumar los números de los lados, entonces, lo que hice fue simular todos los tamaños de cada lado para después sumarlos.

(i): ¿Alcanzaste a sumar?

(e): No.

(i): Porque no veo ningún resultado y, sin embargo, te diste cuenta que una vez que ponías los lados no te servía de mucho, concluiste que al ser abierta no podías tener la respuesta.

(e): Sí.

Segmento de entrevista #14 (Sujeto entrevistado #12)

Se identificaron estudiantes que aparentemente reconocían que las letras pueden representar valores generalizados pero resultaron incapaces de hacerlo de manera correcta, como en el caso que se presenta a continuación:

Investigador (i): He observado tu respuesta a esta tarea, pero no he logrado comprender qué es lo que haces, ¿me puedes comentar un poco más acerca de tu respuesta? ¿Cómo obtienes que el resultado es $n+2$?

Estudiante (e): Creo que al no conocer el número de lados, pensé que se podía poner como n… y se le sumaba lo que medía cada lado.

(i): Pero, ¿Por qué sumado?

(e): Porque había que sumar lo que mide cada lado, de acuerdo con el número de lados.

(i): Ok, a ver, pongamos un ejemplo: si la figura fuera un pentágono, cuyos lados miden 3 unidades, ¿Cuál sería su perímetro?

(e): A ver, 5 lados, $3+3+3+3+3 = 15$, 15 unidades

(i): Espera, y la expresión que utilizaste al resolver el problema, ¿La puedes aplicar en este caso? Siendo n el número de lados y su longitud 3.

(e): $n + 3$, entonces si n vale 5, $5 + 3 = 8$.

(i): ¿Te queda el mismo resultado? ¿Cómo tendrías que expresarla para que fuera 15?

(e): No da lo mismo… debería ser 5 por 3.

(i): Correcto, entonces en lugar de la suma se multiplica, ¿Estás de acuerdo?

(e): Si y quedaría *2 por n*.

(i): Así es, $2n$ expresaría el resultado correcto para una figura abierta en la cual solo conoces la longitud de sus lados. Por lo que me dices ahora, el error que tuviste fue al momento de formular la expresión que represente esa información, porque me da la impresión que consideraste que era una figura abierta en la cual desconocías el número total de lados.

(e): Si, creo que no supe como representar el número desconocido de lados con la longitud dos.

En nuestro estudio el ítem *4c* tuvo un porcentaje de respuestas incorrectas del 61.9% (Tabla 9), destacando que en estas respuestas erróneas el 40.2% de esas respuestas presentaban el error de ignorar la letra. Algunas otras evidencias de esta problemática se presentarán en los siguientes casos; en la Figura 51 se aprecia cómo el estudiante ignora la letra y solo considera los números.

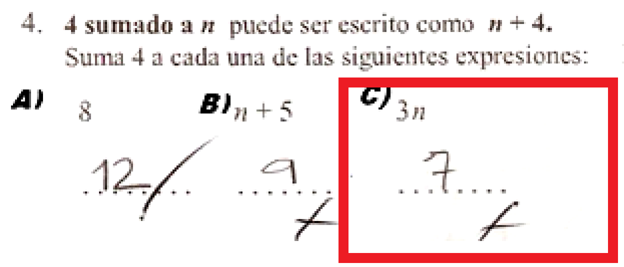


Figura 51. Primer ejemplo de error por uso de letra ignorada (Nivel III)

La segunda tendencia percibida en las respuestas a este ítem, es la de considerar las letras como objetos que tienen propiedades distintas a los números; en la Figura 52 el estudiante sumó los números por separado y conservó la letra, presentándose nuevamente el error de la letra ignorada documentado en Booth (1984).

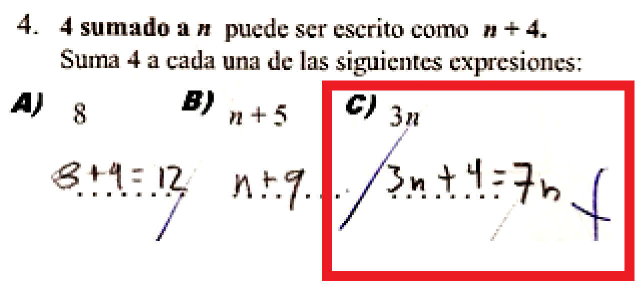
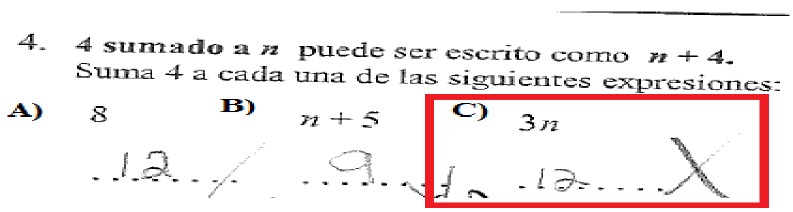


Figura 52. Segundo ejemplo de error por uso de letra ignorada (Nivel III)

Existe en este ítem una tercera tendencia, en la que se evalúa la letra con el valor que incluye el ítem, es decir n lo sustituye por 4 y realiza la multiplicación, expresando el resultado como *12* (Figura 53).



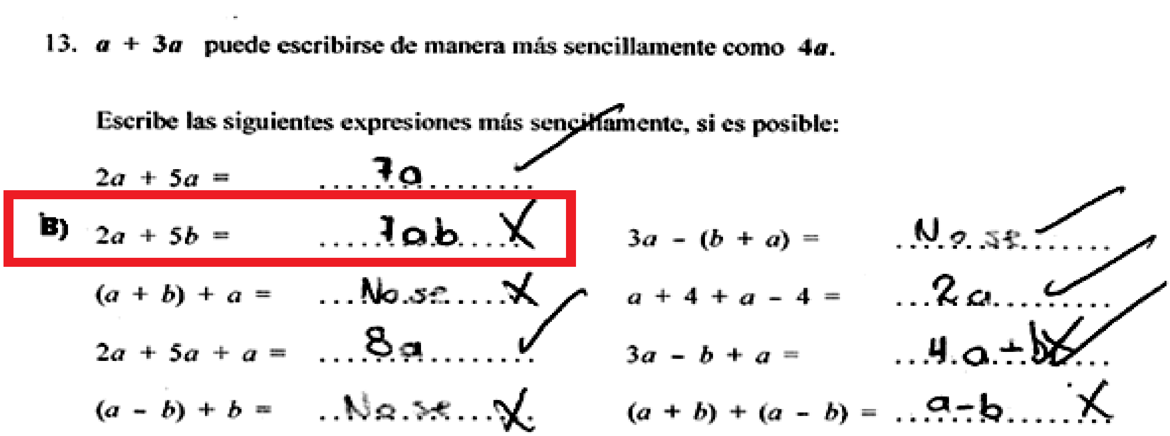
4. 4 sumado a n puede ser escrito como $n + 4$.
Suma 4 a cada una de las siguientes expresiones:

A) 8 ..12..
B) $n + 5$ ..9..
C) $3n$ ..12..

Figura 53. Séptimo ejemplo de error por asignación de valor específico (Nivel III)

Los resultados obtenidos hasta este momento, nos llevan a considerar que la mayoría de los errores manifestados por los participantes de nuestro estudio pueden ser ocasionados por una mala formación algebraica previa; para reforzar esta hipótesis presentamos lo que sucedió en el ítem *13b*, en el cual las respuestas incorrectas llegaron a un 66%, un porcentaje muy alto (Tabla 9).

En el ejemplo de la Figura 54 se aprecia que el estudiante utilizó la letra como objeto; en este ítem sólo sumaba los números e ignoraba las letras, de esta forma maneja adecuadamente los problemas aritméticos y no sabe cómo proceder con las letras, por lo que sólo las traslada hasta la respuesta final.



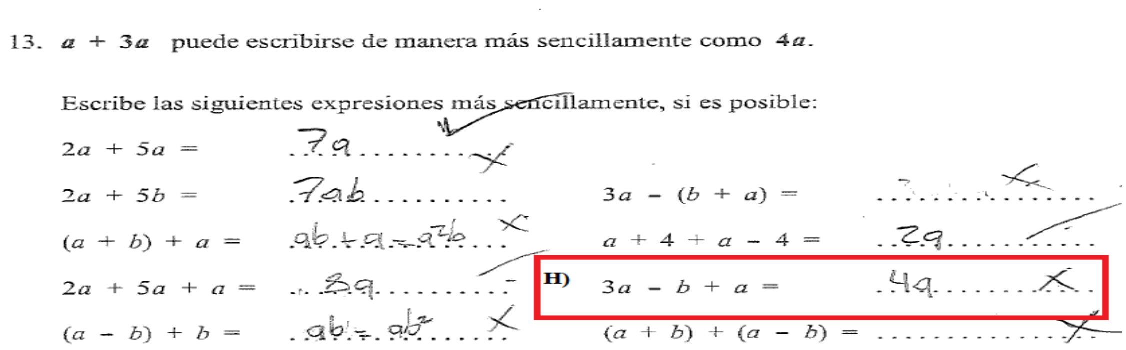
13. $a + 3a$ puede escribirse de manera más sencillamente como $4a$.

Escribe las siguientes expresiones más sencillamente, si es posible:

$2a + 5a =$ ...7a...
B) $2a + 5b =$ ...7ab...
$(a + b) + a =$ ...No se...
$2a + 5a + a =$ ...8a...
$(a - b) + b =$ ...No se...
$3a - (b + a) =$ ...No se...
$a + 4 + a - 4 =$ ...2a...
$3a - b + a =$ ...4a−b...
$(a + b) + (a - b) =$ ...a−b...

Figura 54. Quinto ejemplo de error por uso de letra como objeto (Nivel III)

Una situación parecida sucede con el ítem *13h*, donde el estudiante únicamente acierta a sumar las letras iguales demostrando tener conocimiento para realizar esta operación pero desconociendo para expresar el resultado correcto, pues ignora la otra letra presente en la expresión (*b*). (Figura 55)



13. $a + 3a$ puede escribirse de manera más sencillamente como $4a$.

Escribe las siguientes expresiones más sencillamente, si es posible:

$2a + 5a =$ 7a

$2a + 5b =$ 7ab

$(a + b) + a =$ ab+a=a²b

$2a + 5a + a =$ 3a

$(a - b) + b =$ ab=ab²

$3a - (b + a) =$

$a + 4 + a - 4 =$ 2a

H) $3a - b + a =$ 4a

$(a + b) + (a - b) =$

Figura 55. Sexto ejemplo de error por uso de la letra como objeto (Nivel III)

4.3.4 Dificultad de los ítems de Nivel IV.

Recordamos que en este nivel, el estudiante además de tratar a las letras como números generalizados, debe ser capaz de emplearlas como cantidades variables e interpretarlas relaciones funcionales entre ellas.

En este nivel el rango de aciertos oscila entre 26.8% en el más fácil (ítem *20*) y tan sólo 1% en el más difícil (ítem *19b*). Como ya se describió, el ítem más difícil del nivel III alcanzaba el 24.7% de aciertos, por lo que este último ítem tiene una dificultad similar a los del Nivel IV.

Consideramos importante mencionar, que para el análisis de los ítems de este nivel, se introducen los ítems *19a* y *19b* que en el trabajo de Küchemann (1980) aplicado a nivel secundaria, fueron omitidos en la conformación de los niveles de entendimiento, argumentando que la estructura de éstos se malinterpretaba por parte de los estudiantes participantes en ese trabajo sustituyendo valores específicos y respondiendo que la expresión "aumentaba" o se "incrementaba" y evidenciando una carencia absoluta del concepto de variable. En nuestro trabajo, consideramos que, en estudiantes universitarios, era interesante analizar los resultados obtenidos de las respuestas de los citados ítems, ya que hipotéticamente deberían ser significativos por el nivel educativo de los participantes; así mismo dichos ítems eran los únicos que estaban estructurados para evaluar la interpretación de la letra como variable y este conocimiento supuestamente debería ser dominado por los estudiantes participantes en nuestra investigación. Por otra parte, el ítem *13e* que Küchemann (1980) ubica en un nivel IV de entendimiento, en nuestro caso y de acuerdo a las respuestas obtenidas (más de la cuarta parte del total de los estudiantes (27.8%) lo resolvieron de manera correcta, consideramos que no era apropiado ubicarlo en ese nivel, ya que los ítems ubicados en ese nivel registraron índices de respuestas por debajo del 5% del total de estudiantes

Tabla 14. Análisis de resultados del nivel de entendimiento IV

Ítem	Porcentaje correctas	Porcentaje incorrectas
20	26.8	73.2
17	24.7	75.3
4e	22.2	77.8
22	21.1	78.9
7d	18.5	81.5
18b	16	84
19a	4.1	95.9
21	4.1	95.9
3	3	97
19b	1	99

Así el nivel de respuestas incorrectas (suma de NC y errores) llega a superar en varios casos el 95% (ítems *3, 21, 19a y 19b*), situándose claramente como los ítems más difíciles de todos los niveles descritos. El promedio de aciertos en este nivel alcanzó el 14.2% en los participantes de nuestro estudio, mientras en el estudio de Küchemann los participantes lograron un 19.6% de respuestas correctas. Además, los resultados obtenidos en nuestro estudio confirman los esperados al considerar el análisis de las respuestas de la tarea *19* (ítem *19a* e ítem *10b*) como parte de los ítems de nivel IV en sustitución del ítem *13e* propuesto originalmente por Küchemann (1980) en este nivel; la tarea *19* registró los dos porcentajes más bajos de aciertos en el instrumento aplicado en estudiantes universitarios, a pesar de que hipotéticamente deberían de tener comprendido el concepto de variable al haber cursado niveles educativos previos al ingreso a la universidad.

Algunos de los errores más significativos de los ítems de mayor dificultad del instrumento aplicado se muestran a continuación. Los ítems *19a, 19b, 3, 21 y 10b* de este nivel se analizaron en el apartado 4.2 de este capítulo. Analizamos otros ítems diferentes del mismo nivel.

En el caso del ítem *4e*, se identificaron tres tendencias de error que prevalecieron en este ítem, a saber; letra evaluada (Figura 56), letra como objeto (Figura 57) y letra ignorada (Figura 58).

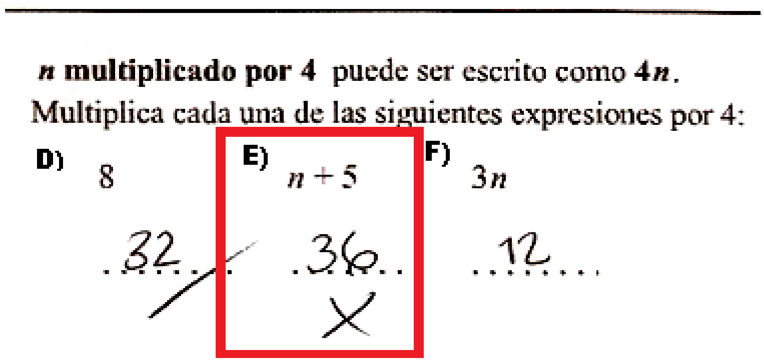


Figura 56. Ejemplo de error por uso de letra evaluada

En el caso de la Figura 56, el estudiante toma en forma aritmética la operación de multiplicar asignando un valor arbitrario a la letra.

En el ejemplo presentado en la Figura 57, el estudiante percibe la letra como un objeto, procediendo a multiplicar *5 por 4*, y obteniendo como resultado *n + 20,* ignorando inicialmente la letra y volviéndola a situar en el resultado.

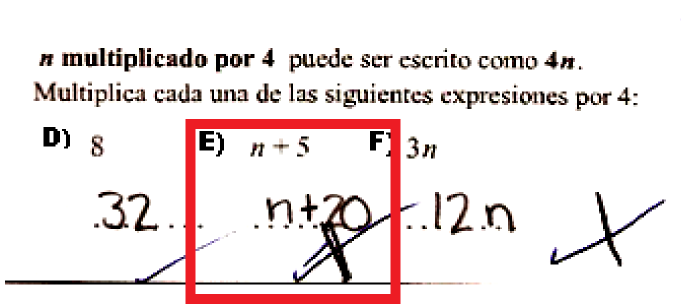


Figura 57. Primer ejemplo de error por uso de la letra como objeto (Nivel IV)

Caso similar sucedió en la Figura 58, en que otro estudiante ignora literalmente la letra, no apareciendo en el resultado final.

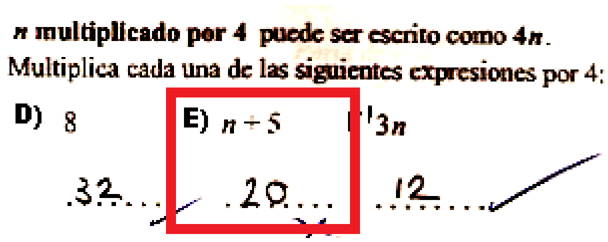


Figura 58. Segundo error por uso de la letra como objeto (Nivel IV)

Estos altos porcentajes en las respuestas incorrectas, nos corroboran la falta de conocimientos de los estudiantes de este nivel para el manejo y comprensión de las letras como números generalizados y como variables; así mismo, se encontraron evidencias de estudiantes, que a pesar de estar ubicados dentro de uno de los niveles de mayor exigencia cognitiva en el manejo de las letras, continúan con su tendencia a utilizar las letras como objetos, como se identificó en las respuestas encontradas en el ítem *18b* (Figura 59).

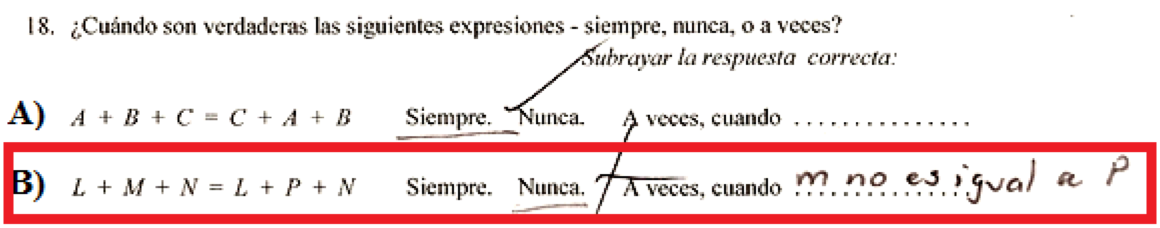


Figura 59. Tercer ejemplo de error por uso de la letra como objeto (Nivel IV)

Esta respuesta concuerda con un patrón repetitivo de soluciones a este ítem. Algunos estudiantes ubicados en este nivel dieron como respuesta la opción establecida como *Nunca*, lo que nos llevó a suponer que la fuente del error que ocasionaba las respuestas incorrectas podría ser que los estudiantes consideraban las letras como objetos o que letras iguales representan valores iguales y que las letras distintas no pueden tener valores iguales.

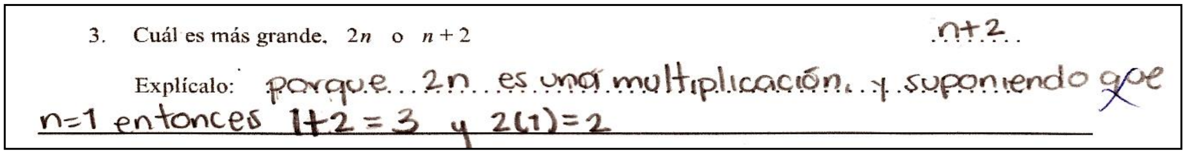
Esta hipótesis fue validada en las entrevistas realizadas, como se muestra en un segmento de entrevista que presentamos a continuación:

Segmento de entrevista #15 (Sujeto entrevistado # 9)

Algunos estudiantes relacionan las letras como objetos con valores propios ya que sostienen que las letras iguales poseen valores iguales y de manera contraria las letras distintas no pueden representar valores iguales, como se observa en el siguiente segmento de entrevista.

> **Investigador (i):** Vamos al 18, ¿cuándo son verdaderas las siguientes expresiones? si las opciones eran: siempre, nunca y a veces. La primera ¿qué dice?
>
> **Estudiante (e):** $a + b + c = c + a + b$
>
> **(i):** y que respondiste, ¿siempre?
>
> **(e):** si, porque son letras iguales
>
> **(i):** Correcto porque son letras iguales, ok pero la que me interesa es la segunda, ¿Qué decía?
>
> **(e):** $l + m + n = l + p + n$
>
> *(i):* ¿Y me respondiste?
>
> **(e):** nunca, porque la *p*...
>
> **(i):** dime, la *p* ¿qué?
>
> **(e):** Pues la *p* no venía acá (señala el primer miembro de la expresión)
>
> **(i):** ok, la *p* es distinta a las letras que tienes acá (señalo el segundo miembro de la expresión). ¿Entonces con eso cambia?
>
> **(e):** ¿la *p* podría valer como *m*?
>
> **(i):** A ver, con el razonamiento inicial que tenías, ¿me dices que no viste la *p* acá? (le señalo el primer miembro de la expresión)
>
> **(e):** no
>
> **(i):** en este caso, para ti las letras iguales representan valores iguales ¿verdad?
>
> **(e):** si…

Otro tipo de respuestas comunes, son las que encontramos para el ítem 3. La Figura 60 muestra un ejemplo de respuesta dada a esta tarea.



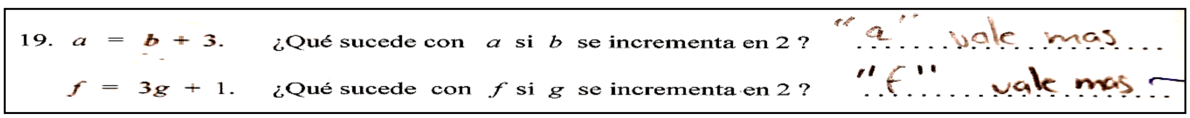
3. Cuál es más grande. $2n$ o $n+2$ n+2

Explícalo: porque 2n es una multiplicación y suponiendo que n=1 entonces 1+2=3 y 2(1)=2

Figura 60. Primer ejemplo de error por uso de letra como valor específico (Nivel IV)

Como se puede observar en la respuesta del estudiante, persiste su tendencia a utilizar las letras como incógnitas de valores específicos y no concebir que las letras pueden representar un rango de valores (número generalizado), limitándose a elegir un par de valores que satisfagan la expresión que se le presenta y dando como válido el resultado correspondiente.

Por otra parte, en la tarea *19*, casi el 75% de los estudiantes ubicados en este nivel proporcionaron respuestas similares a la ilustrada en la Figura 61.



19. $a = b + 3$. ¿Qué sucede con a si b se incrementa en 2 ? "a" vale mas

$f = 3g + 1$. ¿Qué sucede con f si g se incrementa en 2 ? "f" vale mas

Figura 61. Segundo ejemplo de error por uso de letra como valor específico (Nivel IV)

Este tipo de respuestas exhibe que los estudiantes identifican la palabra *incrementa* con un cambio del valor en la expresión, pero no son capaces de comprender el concepto de variable, es decir, la relación existente entre los miembros de dicha expresión. Conforme a las evidencias encontradas en el análisis de las respuestas en este nivel de entendimiento, la mayoría de los estudiantes presentó carencias significativas en el uso y comprensión del significado de las letras como números generalizados y como variable.

Finalmente, señalamos algunas respuestas a los ítems *20 y 22* (Figura 62 y Figura 63), cuya estructura estaba diseñada para evaluar el uso de letras como números generalizados; se encontró que una gran cantidad de estudiantes tiende a identificar las letras como etiquetas, en este caso, relacionan las letras iniciales de los nombres de los objetos presentes en el enunciado del problema y las utilizan para intentar construir una expresión algebraica que represente las condiciones del mismo. De esta manera, coincidimos con Kieran (1989) quien sostiene que el uso de las letras como etiquetas interfiere a menudo con la forma como los estudiantes llegan a entender el significado de los términos variables en las ecuaciones algebraicas.

En la Figura 62 se puede corroborar que algunos estudiantes identifican las letras como etiquetas ya que al preguntar que significa *4p + 3e,* relacionan las letras con las iniciales del objeto que representan en ese caso *p = pasteles* y *e = empanadas*.

20. Los pasteles cuestan p centavos cada uno y las empanadas e centavos cada una.

Si compro 4 pasteles y 3 empanadas,
¿Qué significa

$4p + 3e$? 4 pasteles + 3 empanadas

Figura 62. Primer ejemplo de error por uso de letra como etiqueta (Nivel IV)

Algo parecido a lo descrito anteriormente, se presenta en la Figura 63, donde los estudiantes identifican las letras *a* y *r* como las iniciales de los nombres de los objetos, corroborando así lo encontrado en Kieran (1989).

22. Los lápices azules cuestan 5 pesos cada uno y los lápices rojos cuestan 6 pesos cada uno.
Si compro algunos lápices azules y algunos rojos y en total me cuestan 90 pesos.

Si a es el número de lápices azules comprados, y
si r es el número de lápices rojos comprados,
¿Qué puede escribir acerca de a y r? $a + r = 90$

Figura 63. Segundo ejemplo de error por uso de letra como etiqueta (Nivel IV)

Por último en la tarea *17* se obtuvieron evidencias de que algunos estudiantes universitarios son capaces de resolver problemas algebraicos utilizando procedimientos aritméticos sin aplicar los principios algebraicos que aparentemente no dominan, como se puede observar en la Figura 64.

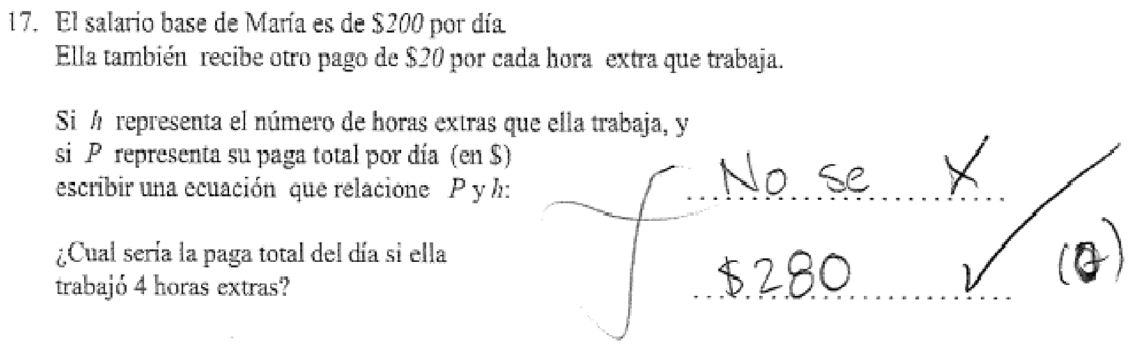
17. El salario base de María es de $\$200$ por día.
Ella también recibe otro pago de $\$20$ por cada hora extra que trabaja.

Si h representa el número de horas extras que ella trabaja, y
si P representa su paga total por día (en \$)
escribir una ecuación que relacione P y h: $x = p + h$

¿Cual sería la paga total del día si ella
trabajó 4 horas extras? \$280

Figura 64. Tercer ejemplo de error por uso de letra como etiqueta (Nivel IV)

En este mismo orden de ideas nos encontramos algunos estudiantes, quienes aceptan que el trabajar con letras o incógnitas es más difícil que trabajar con números y lo demuestran al resolver sin dificultad la segunda parte de este problema pero son incapaces de utilizar las letras para plantear una expresión algebraica que represente un número generalizado, como se muestra la Figura 65.


17. El salario base de María es de $200 por día.
Ella también recibe otro pago de $20 por cada hora extra que trabaja.

Si h representa el número de horas extras que ella trabaja, y
si P representa su paga total por día (en $)
escribir una ecuación que relacione P y h: No se X

¿Cual sería la paga total del día si ella
trabajó 4 horas extras? $280 ✓ (0)

Figura 65. Error por uso de la letra como número generalizado (Nivel IV)

Lo anterior ha sido confirmado por nosotros en algunas de las entrevistas, como ejemplo presentamos el siguiente segmento de una entrevista realizada.

Segmento de entrevista #16 (Sujeto entrevistado #8)

El estudiante reconoce la dificultad que implica trabajar con letras y al mismo tiempo manifiesta facilidad para realizar cálculos numéricos.

Investigador (i): Vamos al problema 17, léelo por favor.

Estudiante (e): El salario base de María es de 200 pesos por día. Ella, también, recibe otro pago de $20 por cada hora extra que trabaja. Si *h* representa el número de horas extras que trabaja, y si *P* representa su paga total por día (en $) escribir una ecuación que relacione *P y h* y ¿Cuál sería la paga total del día si ella trabajó 4 horas extras?…

(i): Permíteme, veo que en el primero no tienes respuesta, pero el siguiente sí lo respondes, ¿qué resultado diste?

(e): Ahí es más fácil. El pago normal es de 200 pesos, eso los tiene de cajón, pero trabajó 4 horas extras y cada hora es de 20 pesos; significa que acumuló 80 pesos, más los 200 pesos que ya tenía, son 280.

(i): Quiero plantearte una pregunta, cuando lees *h y p* y te dice que tienes que relacionarlo ¿no alcanzas a visualizar cuál es la relación que debe haber para obtener ese resultado?

(e): Tal vez ahorita que estoy más tranquilo si pueda decirte.

(e): Entonces ¿en el examen no lo recordaste?

(i): No, es que es más común tratar con números que con letras…

4.4. RENDIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES POR NIVEL DE ENTENDIMIENTO

En la Tabla 15 se pone de manifiesto como el porcentaje de aciertos va disminuyendo conforme avanzan los niveles de entendimiento, a saber I, II, III y IV (96.7%, 71.7%, 34.8% y 15.5% respectivamente). A su vez los errores y los ítems sin respuesta aumentan en relación a la dificultad de los mismos. En el caso de los errores se pasa de un 1.8% en el nivel I a un 52.3% en el nivel IV; mientras que el NC está en un 1.5% en el primer nivel y en un 32.2% en el último (IV). Así, no sólo aumenta el número de errores, sino también el número de estudiantes que aparentemente no tienen las competencias necesarias para contestar los ítems de estos niveles.

Tabla 15. Tabla resumen por nivel de entendimiento

Nivel	**Aciertos**	**Errores**	**NC**
Nivel I	96.7	1.8	1.5
Nivel II	71.7	17.8	10.5
Nivel III	34.8	46	19.2
Nivel IV	15.5	52.3	32.2

Distribución de los estudiantes en los niveles de entendimiento. Se determinó para cada estudiante el nivel a qué pertenecía según lo expuesto en la Tabla 6 del apartado 3.5. Recordemos que, por ejemplo, para que un alumno se estableciera en el nivel IV debería responder correctamente al menos 6 de los ítems de ese nivel (*3, 4e, 7d, 17a, 18b, 19a, 19b, 20, 21, 22*), sino se confirmaban los requisitos necesarios para ubicarlo en dicho nivel, se verificaban las respuestas a los ítems requeridos del nivel inferior y así sucesivamente hasta situarlo en su nivel.

Según estos criterios, los estudiantes se ubicaron en las siguientes proporciones en cada uno de los niveles considerados, 25.8% en el nivel I, 53.6% en el nivel II, 18% en el nivel III y 2.6% en el nivel IV. Como puede observarse la mayoría de los estudiantes (79%) se sitúan entre los niveles I y II, por debajo de lo esperado para su nivel académico, sin embargo se encuentran por encima de los porcentajes obtenidos por Küchemann (1980) para estos mismos niveles. Consideramos que los estudiantes de nuestro estudio al tener una trayectoria académica mayor han estado repetitivamente en contacto con tareas algebraicas simples como las de los niveles I y II lo que les permitió alcanzar un mejor rendimiento al enfrentarse a esas tareas.

La presente investigación permite entrever de manera global dos resultados preliminares. El primero, que el instrumento de evaluación ha permitido conocer y caracterizar el bajo nivel de conocimientos algebraicos que los estudiantes tienen al ingresar a la Universidad, a través de los errores más comunes que han quedado evidenciados en esta investigación. El segundo es que los errores evidenciados en este estudio no corresponden al grado académico de los estudiantes.

Con base en los resultados del análisis total de respuestas del instrumento de evaluación y a la clasificación realizada de los estudiantes en los distintos niveles de entendimiento, reconocemos que en general la mayoría de los estudiantes ingresan con un bajo nivel algebraico como se muestran en la Tabla 16.

Tabla 16. Resultados generales por nivel de entendimiento

Nivel de comprensión	**Número de estudiantes**	**%**
Nivel 0	0	0
Nivel I	50	25.8
Nivel II	104	53.6
Nivel III	35	18
Nivel IV	5	2.6

En la Tabla 16, no encontramos evidencias de estudiantes que presentaran fuertes deficiencias en sus conocimientos algebraicos que los ubicaran en el nivel 0. Sin embargo, sí identificamos 50 estudiantes universitarios (25.6 %) que fueron ubicados en el nivel 1, ya que manifestaron un aceptable manejo de las letras al evaluarlas y las identificaron como objetos con valores propios. Sin embargo, en ocasiones ignoraron su presencia en las expresiones algebraicas y fueron incapaces de identificarlas con otro significado. Por otro lado, 104 estudiantes (53.6%) mostraron, además de las habilidades propias del nivel 1, evidencias de, al menos, identificar las letras como incógnitas de valor específico. Pero al igual que los anteriores, tampoco fueron capaces de comprender el uso de las letras como números generalizados o variables.

También cabe señalar que 35 estudiantes manifestaron evidencias del manejo de las letras como números generalizados, lo que permitió ubicarlos en el nivel III, una vez comprobadas sus competencias en la comprensión del uso y significado de las letras exigidos para superar los niveles inferiores. Debemos destacar que tan sólo 5 estudiantes se ubicaron en el nivel IV de entendimiento, mostrándose una notable comprensión y manejo del uso y significado de las letras en sus más elevados niveles cognitivos. Finalmente, debemos mencionar que sólo un estudiante fue capaz de contestar de manera correcta la tarea *19*, la única diseñada para ser resuelta por medio del uso y comprensión del significado de las letras como variables.

Este análisis nos brinda evidencias de que, aproximadamente, el 80% de los estudiantes sólo son capaces de reconocer el uso de las letras evaluadas, letras como objetos y letras como incógnitas con valor específico. Además, se detectó la recurrencia de ignorar, en una gran cantidad de respuestas de estos estudiantes, la presencia de las mismas en las expresiones algebraicas que se les presentaron.

Por otra parte, sólo algo más del 20% de los estudiantes fueron capaces de identificar el uso de las letras como números generalizados: sólo cinco estudiantes mostraron evidencias parciales del uso de las letras como variables. Así mismo, sólo un estudiante fue capaz de responder, al mismo tiempo y de manera correcta a las tareas *3* y *19* diseñadas para evaluar el manejo de las letras como números generalizados y como variables.

De los resultados obtenidos en el instrumento de evaluación, deducimos que esos errores no se corresponden al nivel educativo donde desarrollamos este estudio: los errores encontrados en las pruebas que realizó Küchemann (1980) con estudiantes de secundaria, aún prevalecen en las producciones de los estudiantes universitarios participantes en este estudio.

Los resultados obtenidos en este estudio sugieren que durante el paso de los cursos de matemáticas de los estudiantes, previos a su ingreso en la universidad, no logran madurar los conocimientos necesarios para ser capaces de concebir los distintos usos de las letras en álgebra. En consecuencia, no alcanzan a desarrollar un aprendizaje significativo global, en el que el significado de variable no se desarrolla, si bien se consideran necesarios en estudios universitarios que incluyan materias de álgebra.

4.4.1 Designación de los estudiantes en los diferentes niveles de entendimiento

Con el objetivo de explicar el método empleado para ubicar a los estudiantes en los respectivos niveles de entendimiento, describiremos como ejemplo el análisis de las respuestas del estudiante número 1, situado en el primer nivel (Tabla 17).

Tabla 17. Respuestas correctas requeridas para el nivel I

	Tareas					
# Estudiante	5a	6a	7b	8	9a	13a
1	✓	✓	✓	✓	x	x

La Tabla 17 muestra que el estudiante contesta correctamente (✓) a cuatro ítems e incorrectamente (x) a dos de las diseñadas para el nivel 1. Es decir, responde correctamente al menos a 4 de las 6 tareas de ese nivel, cumpliendo con suficiencia la condición requerida en la Tabla 6 (Ver apartado 3.5). Para completar nuestra valoración, evaluamos las respuestas a las tareas consideradas en el nivel 2, no cumpliendo con el número mínimo de respuestas correctas de las tareas requeridas de ese nivel, 5 de 7, como muestra la Tabla 18.

Tabla 18. Respuestas correctas requeridas para el nivel II

	Tareas						
# Estudiante	7c	9b	9c	11a	11b	13d	15a
1	✓	x	x	✓	x	X	✓

De manera similar se procedió con el total de las pruebas analizadas con el objetivo de categorizar a todos los estudiantes. A continuación, reseñaremos los resultados obtenidos, distinguiendo las respuestas de los estudiantes ubicados en cada nivel de entendimiento.

4.4.1.1 Resultados particulares del nivel de entendimiento I

La Tabla 19 muestra los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes ubicados en este primer nivel de entendimiento. A los ítems del nivel II. Se presentan, el número de estudiantes que no dieron respuestas a determinados ítems, la cantidad de respuestas correctas y las respuestas incorrectas. Consideramos conveniente recordar que de acuerdo con la metodología establecida por Küchemann (1980), se analizan las respuestas erróneas del nivel inmediato superior, las cuales imposibilitan ubicar a los estudiantes en ese nivel de entendimiento. Por último, en la parte inferior se presenta el análisis de las respuestas incorrectas que se observaron en las producciones de los estudiantes de ese nivel indicando el tipo de error según el significado de la letra utilizada. Las respuestas analizadas nos llevaron a situar en este nivel al 25.8% de estudiantes del total de la muestra.

Tabla 19. Estudiantes del nivel I: tipos de respuesta y usos de las letras del nivel II

	Ítem						
	7c	*9b*	*9c*	*11a*	*11b*	*13d*	*15a*
Tipo de respuesta							
Sin respuesta	19	7	10	20	22	4	12
Correctas	17	34	28	24	12	28	13
Incorrectas	14	9	12	6	16	18	25
Uso de las letras							
Evaluada	2	2	7	✓	✓	0	25
Ignorada	12	7	5	0	4	18	0
Como objeto	0	0	0	0	0	✓	0
Incógnita de valor especifico	✓	0	0	2	9	0	✓
Número generalizado	0	✓	✓	4	3	0	0

Como se puede observar en la Tabla 19, el ítem *15a*, presentó la mayor frecuencia de respuestas erróneas por parte de los estudiantes ubicados en este nivel. El 74% de los estudiantes respondieron de manera incorrecta o no contestaron el citado ítem, aplicando un procedimiento mediante el cual sustituían los datos numéricos dados en el enunciado del problema para intentar resolverlo.

Algunas otras respuestas incorrectas frecuentes exhibían diversas deficiencias en los conocimientos no sólo algebraicos, sino aritméticos, pues encontramos respuestas erróneas de sumas y multiplicaciones (aritméticas) en las respuestas de algunas tareas. Así mismo, en algunas otras respuestas se advirtió la tendencia de los estudiantes a responder correctamente las expresiones que les permitían resolver una expresión con una sola operación y se mostraban incapaces de resolver aquellas que les exigían más de dos operaciones o relacionar varias de éstas, evidenciando, de esta forma, deficiencias en sus conocimientos algebraicos elementales. En algunos casos, los estudiantes son incapaces de resolver una suma algebraica.

4.4.1.2 Resultados particulares del nivel de entendimiento II

Los resultados sitúan en este nivel al 53.6% de los estudiantes, que fueron los que resolvieron de manera correcta las tareas propias de los dos primeros niveles, pero en cambio, no superaron las del nivel III. La Tabla 20 muestra los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes ubicados en este segundo nivel de entendimiento.

Tabla 20. Estudiantes del nivel II: tipos de respuesta y usos de las letras en el nivel III

	Ítem							
	4c	5c	9d	13b	13h	14	15b	16
Tipo de respuesta								
Sin respuesta	3	19	23	10	10	29	22	17
Correctas	35	25	30	38	60	29	27	11
Incorrectas	66	60	51	56	34	46	55	76
Uso de las letras								
Evaluada	38	39	28	0	0	31	11	0
Ignorada	26	0	0	4	21	0	0	0
Como objeto	0	17	23	52	13	10	41	3
Incógnita de valor especifico	✓	2	0	0	0	✓	0	60
Número generalizado	0	✓	✓	✓	✓	0	✓	✓
Otros	2	2	0	0	0	5	3	13

La Tabla 20 destaca como el ítem que presentó mayor frecuencia de respuestas incorrectas fue el *16*, ya que más del 78% de los estudiantes de este nivel expresaron respuestas utilizando las letras como incógnitas de valor específico en lugar de considerarlas como números generalizados. Sobresale, también, la frecuencia elevada de respuestas incorrectas encontradas en el ítem *13b*, que presentó una frecuencia alta de respuestas erróneas, utilizando la letra como objeto, la mayoría de ellos son incapaces de aceptar una respuesta que incluya letras con el significado de incógnitas.

Los resultados del análisis de las respuestas nos permite inferir que los estudiantes ubicados dentro de este nivel manejan adecuadamente las letras en estructuras algebraicas con mayor dificultad cognitiva que las consideradas en el nivel I. Sin embargo, persiste su tendencia a evaluar las letras cuando desconocen el procedimiento correcto para resolver una determinada tarea. Por otro lado, muestran deficiencias para comprender que las letras pueden representar números generalizados y variables. Finalmente, se percibe en las respuestas de estos estudiantes una mayor disposición para aceptar respuestas que parecen incompletas o ambiguas, lo cual puede deberse a una mayor familiaridad con la notación algebraica.

4.4.1.3 Resultados particulares del nivel de entendimiento III

En este nivel se incluyen aquellos estudiantes que pueden operar las letras como incógnitas de valor específico, es decir, las letras ahora representan números en lugar de objetos. Sin embargo, estos estudiantes sólo pueden manejar las incógnitas que presentan estructuras algebraicas simples y siguen encontrando dificultades para realizar las operaciones que implican el manejo de estructuras algebraicas más complejas.

Los resultados obtenidos del análisis en las respuestas nos indicaron que el 18% de los estudiantes quedaron ubicados en este nivel de acuerdo a los criterios establecidos en la Tabla 6 presentada en la sección 3.5. La Tabla 21 muestra el resumen de resultados obtenidos en este nivel.

Tabla 21. Estudiantes del nivel III: tipos de respuesta y usos de las letras del nivel IV

	3	4e	7d	17a	18b	19a	19b	20	21	22
Tipo de respuesta										
Sin respuesta	0	1	3	0	1	2	1	3	23	4
Correctas	5	20	17	15	11	4	0	25	3	17
Incorrectas	30	14	15	20	23	29	34	7	9	14
Uso de las letras										
Evaluada	0	4	0	6	0	5	31	0	0	0
Ignorada	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0
Como objeto	4	0	11	14	23	0	0	4	0	10
Incógnita de valor especifico	26	✓	0	0	0	16	3	0	✓	0
Número generalizado	✓	0	✓	✓	✓	0	0	0	0	✓
Variable	0	0	0	0	0	✓	✓	0	0	0
Otros	0	5	4	0	0	8	0	3	9	4

En este caso hacemos especial énfasis en los ítems *3* y *19b* los cuales presentan unas de las mayores frecuencias de respuestas erróneas entre los estudiantes ubicados en el nivel III. Estos dos ítems son los de mayor exigencia cognitiva, ya que para responderlos de manera correcta los estudiantes deben de involucrar la comprensión del uso y significado de las letras como números generalizados y como variable. Para el ítem *3*, el 85.7% de los estudiantes expresaron una respuesta incorrecta, siendo el ítem *19b* el de mayor índice de frecuencia de respuestas erróneas ya que no se documentaron respuestas correctas en las respuestas de los estudiantes de este nivel. En ambos casos se advirtió que la mayoría de los estudiantes, tienden a evaluar las letras o emplearlas como incógnitas de valor específico.

Además, los resultados obtenidos muestran que sólo un poco más del 11% de los estudiantes ubicados en el nivel III fueron capaces de emplear las letras como variables. Más de la mitad de los estudiantes del mismo nivel emplearon el uso de la letra como incógnita de valor especifico, como procedimiento alternativo para resolver este ítem.

Conforme a las evidencias encontradas en el análisis de las respuestas en este nivel de entendimiento, consideramos que la mayoría de los estudiantes presentó carencias significativas en el uso y comprensión del significado de las letras como números generalizados y como variable.

4.4.1.4 Resultados particulares del nivel de entendimiento IV

Para la ubicación de los estudiantes en el nivel de mayor exigencia cognitiva, consideramos aquellos que eran capaces de emplear las 6 categorías descritas del uso de las letras. Los resultados obtenidos del análisis de las respuestas, nos indicaron que el 2.6% del total de la muestra quedaron ubicados en este nivel de acuerdo a los criterios establecidos en la Tabla 6 del apartado 3.5. En la Tabla 22 se muestran los resultados de los estudiantes ubicados en este nivel.

Tabla 22. Estudiantes del nivel IV: tipos de respuesta y usos de las letras del nivel IV

	3	4e	7d	17a	18b	19a	19b	20	21	22
Tipo de respuesta										
Sin respuesta	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0
Correctas	1	5	5	4	4	1	0	5	4	5
Incorrectas	4	0	0	1	1	3	3	0	1	0
Uso de las letras										
Evaluada	4	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Ignorada	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Como objeto	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
Incógnita de valor especifico	0	✓	0	0	0	3	2	0	✓	0
Número generalizado	✓	0	✓	✓	✓	0	0	0	0	✓
Variable	0	0	0	0	0	✓	✓	0	0	0

Es importante enfatizar que los estudiantes situados en este nivel muestran avances significativos en cuanto a la comprensión de los diferentes usos y significados de las letras, pues la mayoría no deja sin respuesta ninguna de las tareas que le exigen un menor nivel de dificultad cognitiva. Otra evidencia de su mayor nivel cognitivo, se manifestó al no haber encontrado respuestas incorrectas relacionadas con la omisión de las letras presentes en las tareas. Sin embargo, el análisis de las respuestas a las tareas *3* y *19*, nos arrojan resultados poco satisfactorios relacionados con la comprensión y manejo de las letras como números generalizados y variables, ya que casi la totalidad de los estudiantes fueron incapaces de resolver de manera correcta la tarea *3*, la cual implicaba una respuesta por medio de una expresión que inducía a la generalización del resultado. Otro aspecto a destacar, es el hecho de que sólo un estudiante ubicado en el nivel IV, fue capaz de contestar de manera correcta el ítem *19a* que, como se mencionó anteriormente, estaba diseñado para propiciar que los estudiantes demostraran su capacidad para emplear y comprender el significado de las letras como variables. Así pues, sólo 5 estudiantes de los 194 de la muestra, se sitúan en el nivel IV.

4.5 ANÁLISIS DE COMPARACIÓN DE MEDIAS POR SEXO

En este apartado se va a tratar de dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación: ¿Hay diferencias en el rendimiento de los estudiantes según el sexo al que pertenecen? ¿Hay diferencias en el nivel de entendimiento en cada uno de los sexos? En este apartado presentamos los resultados del análisis de comparación de medias del rendimiento obtenido en la prueba aplicada a nivel de sexo. La Tabla 23 muestra los estadísticos descriptivos para esta variable a nivel de sexo tomando en cuenta los aciertos obtenidos de manera global en la prueba; N es el número de tareas resueltas por cada sexo que recordemos, son 97 mujeres y 97 hombres. Así mismo, en la Tabla 24 se presenta el resultado puntual del análisis de comparación de medias. En dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula, la cual plantea que el rendimiento medio entre los sexos es el mismo (p = 0.562).

Tabla 23. Estadísticos de grupo (sexo)

	Sexo	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Aciertos	Masculino	53	45.6226	27.70256	3.80524
	Femenino	53	48.7736	28.11217	3.86150

De la misma manera, en la Figura 66 se muestra de manera gráfica el rendimiento global de cada uno de los sexos basado en el número de aciertos obtenidos considerando el número total de ítems y participantes. En esta figura se observa, de forma clara que la diferencia en cuanto al rendimiento global entre los sexos fueron mínimas, lo cual da sustento a los resultados obtenidos en la prueba estadística.

Tabla 24. Prueba de hipótesis para muestras independientes por sexo

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		**Prueba T para la igualdad de medias**						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
									Inferior	Superior
Aciertos	Se han asumido varianzas iguales	.140	.709	-.581	104	.562	-3.15094	5.42135	-13.90169	7.59980
	No se han asumido varianzas iguales			-.581	103.978	.562	-3.15094	5.42135	-13.90171	7.59983

Los resultados presentados anteriormente, sugieren que el sexo no es un factor decisivo en cuanto al nivel de entendimiento sobre el uso y significado de las letras en álgebra por parte de los estudiantes universitario participantes en esta investigación. Este hallazgo podría entenderse como un indicador de que en la actualidad, en nuestro contexto, existen condiciones de igualdad de oportunidades para la preparación académica.

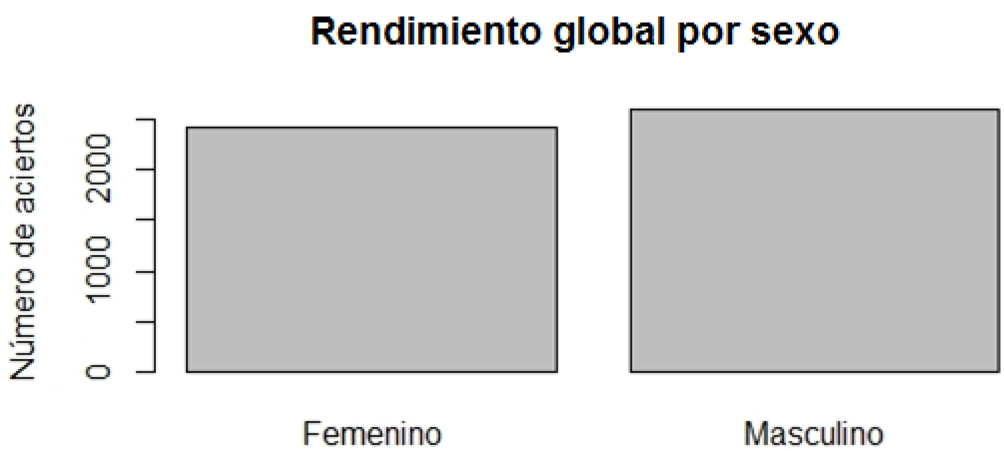


Figura 66. Rendimiento global por sexo

Analizamos a continuación los diferentes niveles de entendimiento respecto al sexo; en principio la distribución de alumnos por niveles según el sexo es equilibrada salvo en el nivel IV donde de los cinco estudiantes sólo hay una alumna. En el nivel I hay 24 alumnas y 26 alumnos, en el nivel II, 54 alumnas y 50 alumnos y en el nivel III hay 18 alumnas y 17 alumnos.

Análisis de comparación de medias por sexo (nivel I)

La Tabla 25 muestra los estadísticos descriptivos por sexo tomando en cuenta únicamente a los estudiantes, 24 mujeres y 26 hombres, que fueron ubicados en el nivel de entendimiento I donde N es el número de tareas resueltas de este nivel. Así mismo, en la Tabla 26 se presenta el resultado puntual del análisis de prueba de hipótesis para este nivel de entendimiento. En dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no se encontraron evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula que plantea que el rendimiento entre los sexos para el nivel de entendimiento I es el mismo (p = 0.603).

Tabla 25. Estadísticos de grupo por sexo Nivel I

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de ACIERTOS es la misma entre las categorías de GENERO.	Prueba U de Mann-Whitney de muestras independientes	.603[1]	Retener la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es .05.

[1] Se muestra la significancia exacta para esta prueba.

Así mismo, en la Figura 67 presentamos una comparativa sobre el rendimiento observado en el nivel de entendimiento I basándonos en el número de aciertos obtenidos por cada uno de los sexos al considerando el número total de ítems y participantes. En esta figura se observa que las diferencias encontradas por sexo para los estudiantes ubicados en nivel de entendimiento I fueron mínimas, respaldando los resultados obtenidos en la prueba estadística.

Tabla 26. Prueba de hipótesis por sexo Nivel I

Estadísticos de grupo

	Sexo	N	Media	Desviación típ.	Mediana	Recorrido intercuartílico
Aciertos	Masculino	14	72.3571	18.91116	80	30.75
	Femenino	14	75.1429	17.25758	78	13.5

Los resultados obtenidos para el nivel de entendimiento I, al igual que en los resultados encontrados de manera global sugieren que el sexo no es un factor decisivo en cuanto al uso y significado de las letras en álgebra por parte de los estudiantes universitario participantes en esta investigación. De la misma manera que a nivel global, no se encontraron evidencias estadísticamente significativas en cuanto al rendimiento de los miembros de cada uno de los sexos participantes en este trabajo mismos que se ubicaron en el nivel de entendimiento I; consideramos que la baja exigencia cognitiva planteada en los ítems de este nivel, así como la preparación matemática previa de los participantes de ambos les permite obtener un rendimiento parecido.

Figura 67. Rendimiento por sexo Nivel I

Análisis de comparación de medias por sexo (nivel II)

De igual manera que en los casos anteriores, en la Tabla 27 mostramos los estadísticos descriptivos a nivel de sexo para los estudiantes ubicados en el nivel de entendimiento II. Así mismo, en la Tabla 28 se presenta el resultado puntual del análisis de prueba de hipótesis. En dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula la cual plantea que el rendimiento medio entre los sexos para el nivel II es el mismo ($p = 0.564$).

Tabla 27. Estadísticos de grupo por sexo Nivel II

Estadísticos de grupo

	Sexo	**N**	**Media**	**Desviación típ.**	**Mediana**	**Recorrido intercuartílico**
Aciertos	Masculino	16	47.0625	21.23038	44	39.50
	Femenino	16	51.9375	22.39782	54	45.25

De la misma manera, en la Figura 68 se muestra el número de aciertos obtenidos para cada uno de los sexos considerando el número total de ítems y participantes. En esta misma figura se observa que las diferencias entre los sexos ubicados en nivel II son pequeñas, tal como había sucedido en el nivel I.

Tabla 28. Prueba de hipótesis por sexo Nivel II

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de ACIERTOS es la misma entre las categorías de GENERO.	Prueba U de Mann-Whitney de muestras independientes	.564[1]	Retener la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es .05.

[1] Se muestra la significancia exacta para esta prueba.

Figura 68. Rendimiento por sexo Nivel II

Los resultados obtenidos en este nivel concuerdan con los encontrados en el nivel de entendimiento I, con lo cual se fortalece nuestra conclusión acerca de que el sexo no es un factor decisivo en cuanto al nivel de entendimiento sobre el uso y significado de las letras en álgebra por parte de los estudiantes universitario participantes en esta investigación.

Análisis de comparación de medias por sexo (Nivel III)

Al igual que en los casos anteriores, la Tabla 29 muestra los estadísticos descriptivos a nivel de sexo tomando en cuenta a los estudiantes ubicados en el nivel de entendimiento III. Así mismo, en la Tabla 30 se presenta el resultado puntual de la prueba de hipótesis realizada. En esta tabla se puede apreciar, de acuerdo a los resultados obtenidos, que no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula en el caso de los sexos para el nivel de entendimiento III ($p = 0.839$).

Tabla 29. Estadísticos de grupo por sexo Nivel III

Estadísticos de grupo

	Sexo	N	Media	Desviación típ.	Mediana	Recorrido intercuartílico
Aciertos	Masculino	14	39.0714	22.99654	32.5	34.50
	Femenino	14	41.0000	23.52740	34.0	42.25

Tabla 30. Prueba de hipótesis por sexo Nivel III

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de ACIERTOS es la misma entre las categorías de GENERO.	Prueba U de Mann-Whitney de muestras independientes	.839[1]	Retener la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es .05.

[1] Se muestra la significancia exacta para esta prueba.

De la misma manera, en la Figura 69 se muestra el rendimiento global observado a partir del número de aciertos obtenidos por cada uno de los sexos. En esta figura se observa que las diferencias entre los sexos fueron mínimas, lo cual da sustento a los resultados obtenidos en la prueba estadística.

Figura 69. Rendimiento por sexo Nivel III

Hasta este punto, podemos decir que los resultados en este nivel concuerdan con los encontrados en los niveles de entendimiento descritos anteriormente en el sentido de que aparentemente el sexo no es un factor decisivo en cuanto al nivel de entendimiento sobre el uso y significado de las letras en álgebra por parte de los estudiantes universitario participantes en esta investigación.

Análisis de comparación de medias por sexo (Nivel IV)

No es pertinente el análisis en este nivel dado el pequeño número de alumnos pertenecientes a este nivel, sólo cinco, de los cuales cuatro son chicos y una sola chica.

4.6 ANÁLISIS DE COMPARACIÓN DE MEDIAS POR TITULACIÓN

Este apartado se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación: ¿hay diferencias en el rendimiento según la titulación a la que pertenecen los estudiantes participantes? ¿Hay diferencias en el nivel de entendimiento entre los estudiantes de las carreras de ingenierías y los estudiantes de las demás titulaciones? En este apartado presentamos los resultados del análisis de comparación de medias del rendimiento obtenido en la prueba aplicada a nivel de titulación. Para este análisis se consideraron las respuestas de las tareas de 98 estudiantes de las titulaciones de ingenierías y 96 de las otras titulaciones. La Tabla 31 muestra los estadísticos descriptivos para esta variable a nivel de titulación tomando en cuenta los aciertos obtenidos de manera global en la prueba; N es el número total de tareas resueltas por cada titulación. Así mismo, en la tabla 32 se presenta el resultado puntual del análisis de comparación de medias. En dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula la cual plantea que el rendimiento medio entre las titulaciones es el mismo (*p = 0.499*).

Tabla 31. Estadísticos de grupo (titulación)

Estadísticos de grupo

	Titulación	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Aciertos	Ingeniería	53	45.3585	27.54025	3.78294
	Otras	53	49.0377	28.23048	3.87775

Tabla 32. Prueba de hipótesis para muestras independientes por titulación

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
									Inferior	Superior
Aciertos	Se han asumido varianzas iguales	.213	.645	-.679	104	.499	-3.67925	5.41735	-14.42205	7.06356
	No se han asumido varianzas iguales			-.679	103.936	.499	-3.67925	5.41735	-14.42212	7.06363

En la Figura 70 se muestra de manera gráfica el rendimiento global de cada una de las categorías de titulaciones consideradas, basados en el número de aciertos obtenidos tomando en cuenta el número total de ítems y participantes. En esta figura se observa que las diferencias entre las distintas clases de titulaciones fueron mínimas, lo cual da sustento a los resultados obtenidos en la prueba estadística.

Figura 70. Rendimiento global por titulación

Análisis de comparación de medias por titulación (Nivel I)

Se revisaron las respuestas a las tareas en esta perspectiva, la Tabla 33 muestra los estadísticos descriptivos a nivel de titulaciones tomando en cuenta únicamente los estudiantes que fueron ubicados en el nivel de entendimiento I. En la Tabla 34 se presenta el resultado puntual del análisis de prueba de hipótesis para este nivel de entendimiento; N es el número total de tareas resueltas por cada titulación. Así mismo, en dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no se encontraron evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula la cual plantea que el rendimiento medio entre las titulaciones es el mismo (p = 0.769).

Tabla 33. Estadísticos de grupo por titulación Nivel I

Estadísticos de grupo

	Titulación	**N**	**Media**	**Desviación típ.**	**Mediana**	**Recorrido intercuartílico**
Aciertos	Ingeniería	14	72.7857	17.52878	75.0	30.5
	Otras	14	74.7143	18.88601	82.5	29.5

De la misma manera, en la Figura 71 se muestra el número de aciertos obtenidos por cada uno las categorías de titulaciones considerando el número total de ítems y participantes. En esta figura se observa que las diferencias entre dichas categorías fueron mínimas

Tabla 34. Prueba de hipótesis por titulación Nivel I

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de ACIERTOS es la misma entre las categorías de TITULACION.	Prueba U de Mann-Whitney de muestras independientes	.769[1]	Retener la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es .05.

[1] Se muestra la significancia exacta para esta prueba.

Estos resultados sugieren que las titulaciones a las que pertenecen los estudiantes participantes de este trabajo, no es un factor decisivo en cuanto al nivel de entendimiento sobre el uso y significado de las letras en álgebra, recordando que el nivel de entendimiento I es el de más bajo nivel cognitivo de los establecidos por Küchemann (1980).

Figura 71. Rendimiento por titulación Nivel I

Análisis de comparación de medias por titulación (Nivel II)

La Tabla 35 muestra los estadísticos descriptivos a nivel de titulaciones tomando en cuenta los estudiantes ubicados en el nivel de entendimiento II. Así mismo, en la Tabla 36 se presenta el resultado puntual del análisis de comparación de medias; N es el número total de tareas resueltas por cada titulación. En dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula la cual plantea que el rendimiento medio entre las titulaciones para el nivel II es el mismo (p = 0.445).

Tabla 35. Estadísticos de grupo por titulación Nivel II

Estadísticos de grupo

	Titulación	N	Media	Desviación típ.	Mediana	Recorrido intercuartílico
Aciertos	Ingeniería	16	46.6875	21.15252	42.0	39
	Otras	16	52.3125	22.27321	54.5	46

De la misma manera, en la Figura 72 se muestra el número de aciertos obtenidos por cada uno de los sexos considerando el número total de ítems y participantes. En esta figura se observa que las diferencias entre los sexos ubicados en nivel II fueron mínimas, tal como sucedió en el nivel I.

Tabla 36. Prueba de hipótesis por titulación Nivel II

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de ACIERTOS es la misma entre las categorías de TITULACION.	Prueba U de Mann-Whitney de muestras independientes	.445[1]	Retener la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es .05.

[1] Se muestra la significancia exacta para esta prueba.

Los resultados obtenidos en este nivel concuerdan con los encontrados en el nivel de entendimiento I, con lo cual se fortalece nuestra conclusión acerca de que las titulaciones a las que pertenecen los estudiantes no es un factor decisivo en cuanto al nivel de entendimiento sobre el uso y significado de las letras en álgebra por parte de los estudiantes universitarios participantes en esta investigación.

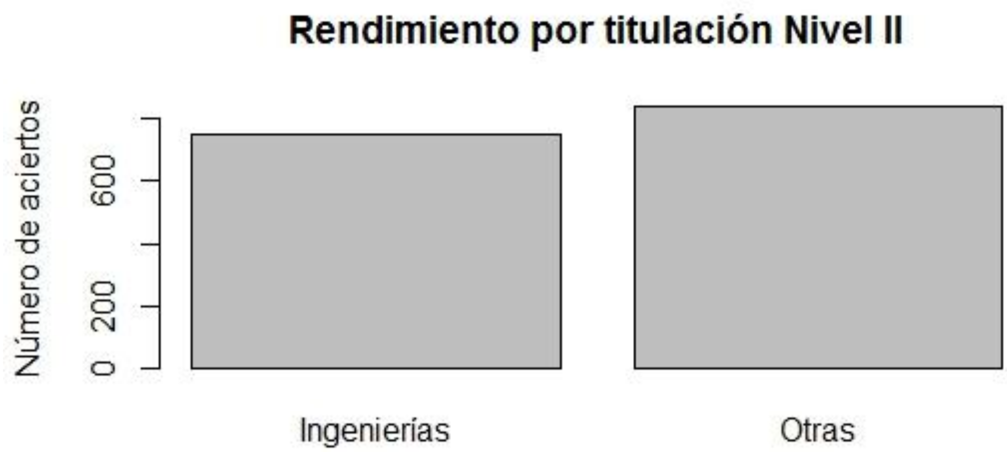


Figura 72. Rendimiento por titulación Nivel II

Análisis de comparación de medias por titulación (nivel III)

La Tabla 37 muestra los estadísticos descriptivos a nivel de titulaciones tomando en cuenta los estudiantes ubicados en el nivel de entendimiento III. Así mismo, en la Tabla 38 se presenta el resultado puntual del análisis de comparación de medias; N es el número total de tareas resueltas por cada titulación. En dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula la cual plantea que el rendimiento medio entre las distintas titulaciones para el nivel III es el mismo ($p = 0.734$).

Tabla 37. Estadísticos de grupo por titulación Nivel III

Estadísticos de grupo

	Titulación	N	Media	Desviación típ.	Mediana	Recorrido intercuartílico
Aciertos	Ingeniería	14	38.2143	22.46426	31	33.75
	Otras	14	41.8571	23.78059	35	41.50

En la Figura 73 se muestra el número de aciertos obtenidos por cada una de las categorías de titulaciones considerando el número total de ítems y participantes. En esta figura se observa que las diferencias entre las titulaciones fueron mínimas, lo cual da sustento a los resultados obtenidos en la prueba estadística.

Tabla 38. Prueba de hipótesis por titulación Nivel III

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de ACIERTOS es la misma entre las categorías de TITULACION.	Prueba U de Mann-Whitney de muestras independientes	.734[1]	Retener la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es .05.

[1] Se muestra la significancia exacta para esta prueba.

Los resultados obtenidos en este nivel concuerdan con los encontrados en el nivel de entendimiento I y II en el sentido de que aparentemente las distintas titulaciones no es un factor decisivo en cuanto al nivel de entendimiento sobre el uso y significado de las letras en álgebra por parte de los estudiantes universitario participantes en esta investigación.

Figura 73. Rendimiento por titulación Nivel III

Análisis de comparación de medias por titulación (Nivel IV)

La Tabla 39 muestra los estadísticos descriptivos a nivel de sexo tomando en cuenta los estudiantes ubicados en el nivel de entendimiento IV; N es el número total de tareas resueltas por cada titulación. Así mismo, en la Tabla 40 se presenta el resultado puntual del análisis de comparación de medias. En dicha tabla se puede apreciar que de acuerdo a la prueba estadística aplicada no existen evidencias suficientes para rechazar la hipótesis nula la cual plantea que el rendimiento medio entre los sexos para el nivel III es el mismo ($p = 0.605$).

Tabla 39. Estadísticos de grupo por titulación Nivel IV

Estadísticos de grupo

	Titulación	**N**	**Media**	**Desviación típ.**	**Mediana**	**Recorrido intercuartílico**
Aciertos	Ingeniería	9	11.4444	8.27815	12	16.5
	Otras	9	14.4444	11.82277	19	23.0

Asimismo, en la Figura 74 se muestra el número de aciertos obtenidos por cada una de las categorías de titulaciones considerando el número total de ítems y participantes. En esta figura se observa que las diferencias entre dichas categorías fueron mínimas, lo cual da sustento a los resultados obtenidos en la prueba estadística.

Tabla 40. Prueba de hipótesis por titulación Nivel IV

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de ACIERTOS es la misma entre las categorías de TITULACION.	Prueba U de Mann-Whitney de muestras independientes	.605[1]	Retener la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es .05.

[1] Se muestra la significancia exacta para esta prueba.

Los resultados obtenidos en este nivel concuerdan con los encontrados en los niveles de entendimiento I, II y III presentados en este aparatado, en el sentido de que aparentemente las diferentes titulaciones a las que pertenecen los participantes en este trabajo de investigación, no son un factor decisivo en cuanto al nivel de entendimiento sobre el uso y significado de las letras en álgebra.

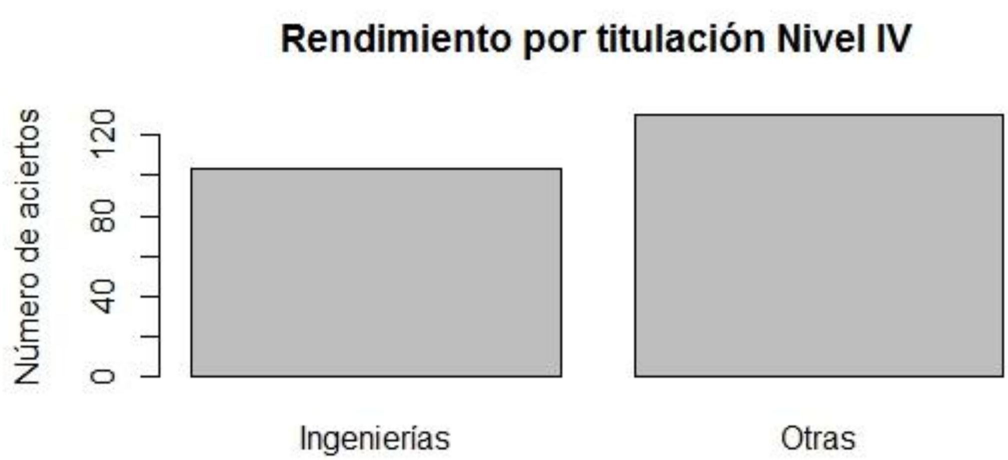


Figura 74. Rendimiento por titulación Nivel IV

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo de investigación desarrollado se ha centrado en el estudio de los errores que se presentan en las producciones de los estudiantes universitarios al resolver distintas tareas algebraicas. Se han analizado los distintos niveles de entendimiento en los que se ubican dichos estudiantes respecto al uso de los distintos significados que les dan al emplear las letras en álgebra por medio del análisis de sus respuestas a las cuestiones planteadas. En este apartado se presentan las respuestas y conclusiones de las preguntas de investigación planteadas al inicio de este trabajo, así mismo las recomendaciones que creemos pertinentes para darle seguimiento a esta línea de investigación y también se describen las limitaciones que se presentaron durante el desarrollo de este trabajo. Finalmente se exponen los aportes obtenidos como productos de esta investigación.

5.1 RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Como se expuso en el capítulo 1, el problema de investigación surge a partir de seis preguntas de investigación a las cuales se ha ido dando respuesta con motivo del trabajo realizado. Sintetizamos aquí los argumentos que acreditan ese cumplimiento para cada una de ellas.

P1. ¿Es posible identificar cuáles son algunas de las causas más comunes de los errores que cometen los estudiantes cuando es necesario el manejo y la comprensión de los distintos usos y significados de las letras en álgebra?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, ya que por medio de la aplicación del instrumento de evaluación y las entrevistas realizadas ha sido posible identificar las fuentes de errores más comunes que cometen los estudiantes universitarios del CUCSUR al enfrentarse a distintas tareas algebraicas, la cuales, les exigen el empleo de los diferentes usos y significados de las letras en algebra para su resolución. En este trabajo se han tratado y documentando los errores presentes en las respuestas de las producciones de los estudiantes, corroborando las dificultades de los estudiantes universitarios al emplear las letras en álgebra. Así mismo, llevamos a cabo la reflexión de las probables causas de esas dificultades. Por otra parte, se confirmó la validez del instrumento de evaluación utilizado, el cual a pesar de que originalmente fue diseñado en un contexto educativo diferente a donde se aplicó, resultó útil para identificar los errores anteriormente mencionados, evidenciando también los bajos niveles de entendimiento en el uso y significado de las letras en álgebra por estudiantes universitarios. Se debe agregar que una de las posibles líneas de continuidad de este trabajo reside en la revisión de los tipos de conocimientos de los profesores que imparten en las asignaturas de álgebra en los niveles de secundaria y bachillerato, para esclarecer si una de las fuentes de los errores que cometen los estudiantes al utilizar los distintos usos y significados de las letras en álgebra, puede estar originado en la falta de conocimiento o dominio de algún tema de carácter algebraico por parte de los profesores y que esto se vea reflejado en el aprendizaje del estudiante.

P2. ¿Es factible caracterizar algunos elementos de las respuestas de los estudiantes y agruparlas para evidenciar las distintas fuentes de errores originados por los distintos usos y significados de las letras en álgebra?

La respuesta a esta cuestión también es afirmativa, ya que por medio del análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario, ha sido posible determinar los atributos específicos de los errores evidenciados en sus producciones, logrando así identificar esos errores con la aplicación de los diversos significados de las letras en las tareas. Posteriormente fue posible compararlos con los errores encontrados en el trabajo de Küchemann (1980), obteniendo como resultado una clasificación similar a la propuesta de este autor. Lo dicho hasta aquí nos lleva a concluir que las diferencias en la enseñanza del álgebra existentes entre los dos contextos educativos en los cuales se llevaron a cabo ambos estudios, es un factor determinante para explicar la persistencia de esos errores en dos niveles educativos con participantes de distintas edades, tal como se expuso en el apartado 4.3. Considerando que los errores caracterizados más comunes documentados en este trabajo, corresponden al uso de la letra como objeto y a la letra evaluada, creemos que la causa está en los conocimientos previos con los que llegan los estudiantes a este nivel, ya que se observó que los estudiantes se resisten abandonar esos conocimientos y manifiestan dificultades para adaptarlos a los nuevos contextos que se les presentan. De esta forma, se observó que los estudiantes asocian las letras con las propiedades de los objetos tales como las iniciales de las palabras y no son capaces de aceptar los demás significados que tienen las letras en álgebra como son descritas en el trabajo de Küchemann (1980). Esto puede ser debido a que en su formación previa se acostumbran a ver enunciados de problemas algebraicos en los cuales se utilizan las letras iniciales de las palabras para plantear las ecuaciones que representan los datos conocidos y las incógnitas, y esto puede causar confusión en los estudiantes cuando se les presentan otros contextos en los cuales las letras toman otros significados como valores específicos, valores de números generalizados o variables. En esta misma línea, se observó que en numerosas ocasiones cuando el estudiante está se enfrenta a una tarea algebraica que no sabe resolver, recurre a sus conocimientos aritméticos y evalúa las expresiones sin razonar si el procedimiento o el resultado obtenido es válido. Así, coincidimos con Chi y Roscoe (2002) en que no se debe considerar que los estudiantes se introducen en situaciones de aprendizaje como si llegaran como un pizarrón en blanco, ya que, probablemente, tienen bases empíricas, no fundamentadas, que dificultan el aprendizaje de conocimientos formales con un sentido más profundo y correcto.

Por todo lo anterior, consideramos que los estudiantes participantes en nuestro trabajo no adquirieron, en sus formaciones académicas previas, conocimientos significativos de los conceptos algebraicos evaluados; consideramos por tanto que es necesario investigar cuáles son los conocimientos algebraicos previos con los que llegan los estudiantes al nivel universitario, mediante la aplicación del mismo instrumento de evaluación utilizado en este trabajo.

P3. ¿Qué sucede en la introspección cognitiva del estudiante cuando se enfrenta a tareas que conscientemente sabe que no puede resolver, como es el caso de algunas tareas de álgebra donde se involucran los distintos usos y significados de las letras?

Una de las tendencias de respuestas más notorias en este trabajo fue la preferencia de los estudiantes por evaluar las letras con un solo o como máximo dos valores, para posteriormente expresar un resultado que involucraba un resultado general. Los estudiantes argumentaban que no habían considerado necesario utilizar más valores para comprobar los resultados. Esta manera de proceder coincide con lo encontrado por Booth (1984) quien sostiene que los estudiantes desean siempre obtener una respuesta numérica de las operaciones algebraicas que los conducen a resultados erróneos. Así mismo, coincidimos con Ursini y Trigueros (1998) en el sentido de que los estudiantes tienden a utilizar el conocimiento aritmético por confiar más en este y suelen evitar los procedimiento algebraicos.

Por otra parte, algunos estudiantes manifestaron dificultades en la lectura comprensiva de los enunciados de las tareas que se les presentaban, de esta forma, asociando las iniciales de las letras con las características particulares del objeto. Creemos que esto puede ser ocasionado porque desde los niveles educativos previos a la universidad, es común que los estudiantes utilicen las primeras letras de los objetos para representan las expresiones algebraicas, coincidiendo con lo encontrado en estudios como los de Davis (1984), Küchemann (1980) y Mac Gregor y Stacey (1997), entre otros.

En otros casos los estudiantes mostraban evidencias de aprendizajes erróneos o distorsionados derivados de conocimientos previos como en el caso del estudiante que manifestó creer que $3 + n$ era igual a $3n$, argumentando que así lo habían aprendido desde la preparatoria. Así mismo, estos estudiantes mostraban resistencia a dejar de lado algunos de los conocimientos adquiridos en su formación previa cuando se enfrentaban a los nuevos contextos que les planteabas tareas algebraicas diferentes, limitándose en ocasiones a intentar adaptarlos de manera forzada dando como resultado la aparición de errores en sus producciones, esto puede considerarse en la línea de lo expresado por Brown y Vanlehn (1980) quienes argumentan que, en ocasiones los estudiantes cuando no son capaces de realizar una acción se bloquean como en un callejón sin salida y pueden hacer uso de sus conocimientos previos aunque no tengan relación con el problema que se intenta resolver.

Otra de las conclusiones derivadas del análisis de las entrevistas realizadas fue obtenida con base en la observación de las dificultades evidentes que manifestaron algunos estudiantes para transitar de lo particular a lo general. Es decir, algunos estudiantes son capaces de resolver tareas en las cuales se implica el manejo y conocimiento del significado de la letra como número generalizado sin plantear expresiones algebraicas; esto lo hacen empleando esquemas mentales, en las cuales utilizan información relacionada con las experiencias previas que les permiten realizar actividades mentales de comprensión, como lo documenta Tijero (2009). Es por esto que consideramos que algunos de los estudiantes universitarios son propensos a utilizar esquemas mentales en lugar del planteamiento de expresiones algebraicas, debido a la madurez cognitiva que alcanzan de acuerdo a su edad. Un ejemplo de esto es que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de resolver el ítem *17b* de manera aritmética pero no fueron capaces de plantear la expresión algebraica requerida para el ítem *17a*. De manera similar, para el ítem *9d* algunos de estos manifestaron su preferencia para la aceptación de que algunas tareas algebraicas pueden tener como respuesta una expresión que contenga una letra que represente un número con un rango de valores desconocidos y prefirieron hacen suposiciones arbitrarias tratando de adaptar sus conocimientos matemáticos previos hasta el grado de creerlos correctos. Así se documentó en los casos de los estudiantes que "cerraban" la figura geométrica abierta del ítem en cuestión y le daban un valor arbitrario especifico a la figura para obtener un resultado numérico y así fue refrendado en las entrevistas realizadas.

Para finalizar con las conclusiones a esta pregunta de investigación, creemos importante destacar que casi la totalidad de los estudiantes entrevistados argumentan que no conocían el concepto de variable por lo que fueron incapaces de resolver la tarea diseñada para evaluar su manejo. Esto nos conduce a considerar que durante la formación previa de los estudiantes no cuentan con una formación adecuada que los dirija a una buena comprensión de dicho concepto, tal vez ocasionado por lo que mencionan Ursini y Trigueros (2006) quienes sostienen que en México, desde la enseñanza secundaria no existen textos escolares diseñados para lograr que los estudiantes desarrollen una comprensión integrada del concepto de variable. Así mismo, coincidimos con lo que mencionan estos autores, en el sentido que generalmente los estudiantes tampoco reciben apoyo de los profesores, ya que ellos también carecen de una comprensión adecuada del concepto de variable. Esta problemática puede ser derivada de que históricamente en nuestro país y particularmente en el bachillerato y la universidad, los profesores que impartían las asignaturas de matemáticas eran profesionistas habilitados como profesores. En la mayor parte de los casos carecían de un conocimiento del contenido y la enseñanza, limitándose a aplicar su conocimiento común de contenido (Ball *et al*., 2008). Cabe mencionar que en la actualidad existen programas de actualización docente con la finalidad de capacitar a los profesores para que desarrollen competencias relacionadas con el conocimiento del contenido y la enseñanza, por lo que se sugiere darle seguimiento a estos programas para paliar las deficiencias del proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra en los niveles educativos antes mencionados y para que esto se vea reflejado en una mejora en el rendimiento escolar en las asignaturas de matemáticas de los estudiantes universitarios.

P4. ¿Existe relación entre el rendimiento de los estudiantes y los errores que cometen de acuerdo a las titulaciones en las que están inscritos?

La idea original de esta pregunta nos conducía a suponer que los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería deben poseer mejor desempeño en las asignaturas de matemáticas. Inversamente, los estudiantes de las titulaciones del área de las ciencias económicas administrativas y de las ciencias de la salud, al tener un reducido número de asignaturas de matemáticas, hipotéticamente deberían tener peores resultados en matemáticas. Sin embargo, los resultados nos indicaron que no es verdadera esta hipótesis, ya que las diferencias entre el rendimiento de los estudiantes de esas categorías no fue estadísticamente significativa. La razón puede encontrarse en el hecho de que en las titulaciones distintas al área de la ingeniería se ubicaron estudiantes con buen nivel de competencia algebraica, cuyo acceso depende de la combinación del promedio de calificaciones obtenido en el bachillerato y el puntaje alcanzado en la prueba de admisión aplicada a los aspirantes a ingresar a la universidad. Por otra parte, consideramos importante resaltar la necesidad de darle continuidad a este trabajo analizando las competencias matemáticas de los estudiantes de ingeniería ya que en los resultados obtenidos en esta investigación se evidenciaron casos particulares de estudiantes que no evidencian los logros esperados.

P5. ¿Existe relación entre el rendimiento de los estudiantes y los errores que cometen de acuerdo al sexo al que pertenecen?

De acuerdo al anuario estadístico de educación superior de 2013 (ANUIES, 2013), en México están matriculadas más mujeres (50.1%) que hombres en las universidades. De manera similar, el número de participantes en este trabajo fue equitativo, por lo que el análisis de las respuestas por sexo resulto equilibrado y encontramos que no hubo diferencias significativas en el rendimiento de los estudiantes de ambos sexos. Esto puede ser debido a que en los últimos años se ha incrementado el número de mujeres que tienen acceso a los distintos niveles educativos en nuestro país; por tanto, actualmente las mujeres tienen las mismas posibilidades que los varones de alcanzar una formación académica aceptable antes de ingresar a la universidad. Todo esto nos lleva a considerar que actualmente no hay elementos suficientes para pensar que el sexo es un factor determinante en el rendimiento de los estudiantes universitarios.

P6. ¿Los estudiantes de nivel universitario, considerando su formación académica previa, estarán ubicados en los niveles más altos de entendimiento de comprensión de los distintos usos y significados de las letras en álgebra?

Considerando los resultados obtenidos en esta investigación, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes participantes en este trabajo no resultaron ubicados en el nivel esperado de entendimiento del uso y significado de las letras; el 25.8% de los estudiantes están en el nivel I y al 53.6% en el nivel II. Teniendo en cuenta que la totalidad de los participantes de este trabajo cursaron secundaria y bachillerato, se esperaba que la mayoría superaran al menos estos niveles, ya que en ellos los estudiantes deben resolver tareas puramente numéricas o que tienen una estructura algebraica simple, tales como, sustituciones numéricas directas en expresiones algebraicas en donde las literales no tienen coeficientes o si los tienen son cantidades pequeñas, multiplicación de datos numéricos, simplificación de términos semejantes que involucran una sola letra como incógnita, entre otras. Estos contenidos son estudiados desde la secundaria y es de esperar que los participantes en nuestro estudio se ubicaran en los niveles III y IV, los de más alta exigencia cognitiva. Sin embargo aproximadamente el 80% de los estudiantes participantes evidenciaron su bajo nivel de entendimiento para utilizar las letras como incógnitas de valor específico, las cuales representan números en lugar de objetos. Tampoco son capaces de expresar y justificar respuestas a ítems de manera generalizada y se limitan sólo a la evaluación de algunos valores numéricos que satisfagan la expresión, así mismo, muestran desconocimiento del concepto de variable.

Los resultados de la aplicación del CSMS en el Centro Universitario de la Costa Sur no difieren mucho de los resultados de la aplicación original de dicha prueba en el Reino Unido, pero debemos destacar las edades diferentes de los sujetos de investigación, así como los distintos niveles educativos en los que se han aplicado, estos resultados nos indican que los estudiantes universitarios participantes en este estudio a pesar de tener conocimientos previos de diversos contenidos algebraicos, dichos conocimientos no han sido comprendidos de manera significativa, lo que nos conduce a inferir que durante su formación educativa de secundaria y bachillerato el conocimiento y la compresión del álgebra es deficiente. Lo anterior, podría ser un resultado del tipo de enfoque de instrucción procedimental que en la actualidad es frecuente en el sistema de educación conductista, el cual conduce a la enseñanza y aprendizaje mecanicista en los niveles educativos previos a la universidad.

Es de gran preocupación en este trabajo, que, incluso en el nivel universitario algunos estudiantes manifiesten errores en la comprensión de diversos conceptos algebraicos, que revelan en algunos casos, una ausencia total del conocimiento de los conceptos de más alto nivel cognitivo en la comprensión y uso de las letras en álgebra, a saber, el uso de la letra como número generalizado o como variable.

Consideramos que las posibles soluciones al problema de enseñanza y aprendizaje del álgebra son una empresa compleja, pensamos que un punto de partida puede ser la propuesta de un cambio de actitud entre los estudiantes y profesores que aún en la actualidad consideran que comprender un concepto algebraico consiste en memorizar y efectuar un procedimiento. Creemos que la memorización es vista como un conjunto de reglas aisladas, las cuales son deficientemente retenidas y por consecuencia fácilmente olvidadas. En el mismo sentido, estimamos que deben continuar los esfuerzos por parte de las instituciones educativas de nivel básico para seguir revisando y evaluando los planes educativos actuales, para que se incluyan en ellos los distintos enfoques del álgebra que se mencionan en este trabajo, con el propósito de promover estrategias que conduzcan a un óptimo desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes desde la educación básica para intentar que desarrollen su máximo potencial cuando cursen el nivel universitario.

5.2 POSIBILIDADES DE CONTINUIDAD

Tomando como base los resultados obtenidos en este estudio, consideramos pertinente exponer una serie de sugerencias con el fin de darle continuidad a esta línea de investigación:

Es necesario ampliar la muestra de estudiantes evaluados a nivel universitario para tener una idea más precisa si los resultados encontrados en una muestra como la que se obtuvo en este trabajo es reflejo fiel de la población total de estudiantes universitarios que pertenecen a esta institución. Así mismo, estimamos conveniente ampliar el universo de la muestra hacia el nivel de bachillerato, para posteriormente comparar los resultados de esos estudiantes con los estudiantes de nivel universitario, para de esta manera obtener conclusiones acerca del nivel de entendimiento entre estudiantes con distinta preparación académica y de diferentes edades.

Se recomienda también hacer una valoración de la conceptualización del álgebra escolar que poseen los profesores de los niveles educativos previos a la universidad, puesto que consideramos que algunas de las causas de los errores que tienen los estudiantes para comprender el uso y significado de las letras en álgebra, pueden encontrarse en deficiencias relacionadas con la interpretación de los distintos enfoques del álgebra que pueden tener sus profesores.

También puede ser de interés examinar las fuentes comunes de los errores, para de esta forma proponer estrategias didácticas que contribuyan a disminuirlos en las producciones de los estudiantes por el uso y comprensión de los distintos significados en álgebra. Posteriormente, se puede observar si se refleja en la mejora del rendimiento de las asignaturas de matemáticas en los estudiantes universitarios.

Consideramos importante también otorgarle una mayor importancia a la investigación cualitativa como una forma de profundizar en el análisis de las fuentes de los errores en álgebra, ya que indudablemente este tipo de estudios nos permite interactuar de manera directa con los sujetos investigados y a la vez permite acercarnos de una manera activa sus razonamientos. En el caso particular de nuestra investigación, nos permitió descubrir algunas fuentes de errores que no hubiera sido posible documentarlas con el análisis cuantitativo.

Las fuentes de error originadas por causas emocionales y afectivas no fueron analizadas a fondo en este trabajo, pero por la experiencia profesional del autor de esta tesis así como los trabajos revisados de distintos investigadores (Ruano *et al* 2008, Socas, 1997) quienes las destacan como fuentes de probables causas de errores; nos lleva a considerar la posterior aplicación de un instrumento de evaluación diseñado especialmente con ese objetivo.

5.3 LIMITACIONES DE ESTE ESTUDIO

Durante el desarrollo de este trabajo se tuvieron las siguientes limitaciones:

Debido a que en el momento de aplicar el instrumento de evaluación el investigador del presente trabajo no estaba incorporado como profesor en la institución, no fue posible diseñar una muestra estadística que nos permitiera contar con un espacio muestral más amplio, limitándonos a solicitar el apoyo de un solo departamento que contaba con profesores que impartían en ese momento asignaturas de matemáticas en varias titulaciones. Esta limitación también se manifestó en el hecho de que algunos de los grupos no acudieron a la cita para la aplicación del instrumento ya que previamente se les indicó que no contaba para la evaluación del curso en el que estaban inscritos.

De manera parecida al punto anterior, solo acudieron a las entrevistas 12 de los 20 estudiantes citados. Nos ha resultado difícil convencerlos de la necesidad de acudir a las entrevistas por no ser el profesor titular de las asignaturas que estaban cursando en ese momento.

5.4 APORTES

El presente trabajo ha servido para detectar, analizar y categorizarlos errores que cometen los estudiantes al trabajar con distintas tareas algebraicas, en las que deben emplear los diversos usos y significados de las letras en álgebra. Así mismo, hemos puntualizado en algunas de las fuentes que originan dichos errores, por lo que consideramos que este trabajo sentará las bases para futuras investigaciones relacionadas con el estudio de las fuentes que provocan los citados errores, teniendo como objetivo buscar posibles estrategias didácticas que apoyen a la disminución de los errores cometidos por los estudiantes universitarios.

En relación con la aplicación del instrumento de evaluación, el cual originalmente se aplicó con estudiantes del Reino Unido y de nivel educativo equivalente al bachillerato, hemos valido su pertinencia para estudiantes de mayor edad y de distinto contexto educativo.

Por otra parte consideramos que dentro de las aportaciones de este trabajo se encuentran las siguientes publicaciones, las cuales fueron sujetas a un proceso de arbitraje para su publicación:

Seminarios de investigación

García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J.L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 145-155). Granada: Universidad de Granada.

García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez yA. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 139-148). Valencia: Universitat de València y SEIEM.

Publicaciones en revistas indexadas

García, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L.. (2014). El Uso de las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1545-1566.

Referencias bibliográficas

A

Abrate, R., Pochulu, M. & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática*. *Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Anuarios Estadísticos de Educación Superior, 2013 [en línea]. *Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior*. [Fecha de consulta: 30 abril 2015]. Disponible en http://www.anuies.mx/gestor/data/personal/anuies05/anuario/ANUARIO_EDUCACION_SUPERIOR-LICENCIATURA_2013-2014.zip

Ashlock, R. (2002). *Error patterns in computation: using error patterns to improve instruction*. Columbus, USA: Pearson Prentice Hall.

B

Bachor, D. (1979). Using Work Samples as Diagnostic Information. *Learning Disability Quarterly,* 2(1), pp. 45-52.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. In Approaches to algebra (pp. 167-185). Springer Netherlands.

Bednarz, N.; Kieran, C.; Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brown, J. S., & Burton, R. R. (1978). Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematical Skills. *Cognitive science*, *2*(2), 155-192.

Brown, S., Montfort, D., & Findley, K. (2007). Student understanding of states of stress in mechanics of materials. In *American Society of Engineering Education Annual Conference*.

Brown, J., & Vanlehn, K. (1980). Repair Theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4: 379-426.

Buswell, G. (1926). Summary of Arithmetic Investigations. *The Elementary School Journal*, 26(9) (May): 692-703.

C

Caputo, S., & Macías, D. (2006). *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones.* Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste (UNNE). Recuperado el 1 de octubre de 2014 de: http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-012.pdf

Castro, E., & Torralbo, M. (2001) en Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis. Madrid.

Chi, M. T., & Roscoe, R. D. (2002). The processes and challenges of conceptual change. In *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 3-27). Springer Netherlands.

Chumba, R. H. (2009). *El aprendizaje cooperativo y la deserción escolar en la Licenciatura en Contaduría y Administración del Centro de Estudios Superiores CTM*. Tesis para obtener el grado de Maestra en Innovación Educativa. Facultad de Educación. Mérida, Yucatán. Universidad Autónoma de Yucatán (UADY). Recuperado el 12 de octubre de 2014 de: http://www.alfaguia.org/alfaguia/files/1319038570_01.pdf

Cohen, L., & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla

Collis, K. F. (1975). *Concrete and formal operations in school mathematics*. Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Cox, L. (1974). *Analysis, Classification, and Frequency of Systematic Error Computational Patterns in the Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Vertical Algorithms for Grades 2-6 and Special Education Classes*. [Washington, D.C.]. Distributed by ERIC Clearinghouse, http://www.eric.ed.gov/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED092407

Cox, L. S. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 202-220.

D

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Greenwood Publishing Group.

Del Puerto, S. M., & Minnaard, C. L. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *38*(4), 7.

De la Torre, S. (2004) *Aprender de los errores*. *El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

Díaz, J. J., Martínez, A. L., & Soto, M. A. (2007). Comprensión de la función de dos variables en problemas verbales de álgebra. *Enseñanza e Investigación en Psicología*, 12(2), 259-275.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912.

Dugdale, S., Thompson, P. W., Harvey, W., Demana, F., Waits, B., Kieran, C., & Christmas, P. (1995). Technology and algebra curriculum reform: Current issues, potential directions, and research questions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 14, 325-325.

E

Engelhardt, J. M. (1977). Analysis of children's computational errors: A qualitative approach. British *Journal of Educational Psychology*, 47(2), 149-154.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisas*, (23), 23-29.

F

Fernández, S. (1999). Los tres problemas clásicos. En: *Seminario de Alumnos de Matemáticas (Geometría y Topología), 2* (pp. 81-92). Edición de Raúl Ibáñez. Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco. Recuperado el 23 de octubre de 2014, de: http://rsme.es/rec/pgt9899.pdf#page=88

Fey, J. T., & Good, R. A. (1985). Rethinking the Sequence and Priorities of High School Mathematics Curricula. *In The Secondary School Mathematics Curriculum. 1985 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 43-52). Reston, Va.: NCTM.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Franchi, L., & Hernández, A. I. (2004).Tipología de errores en el área de la geometría plana. Educere: *Revista Venezolana de Educación*, (24), 63-71.

G

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Master en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de octubre de 2014 de: http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Garcia.pdf

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 145-155). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2011.

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 139-148). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València / SEIEM.

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1545-1566.

Grossnickle, F. E. (1935). Reliability of diagnosis of certain types of errors in long division with a one-figure divisor. *The Journal of Experimental Education*, 4(1), 7-16.

Guzmán Bautista, N. A. *Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).

H

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings?. *Learning and instruction*, 8(4), 341-374.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana (5ª ed.)

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching*, 163, 19-29.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hitchcock, G., & Hughes, D. (1995*). Research and the teacher: A qualitative introduction to school-based research*. Psychology Press.

I

Instituto Nacional para el Desarrollo Curricular (INDEC) (2003). *Marco curricular del programa de matemáticas*. Puerto Rico: INDEC. Recuperado el 12 de octubre de 2014 de: http://www.eleducador.com/pr/images/stories/documentos_descarga/593_Matema.pdf

J

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76, 83-103.

K

Kaput, J. (1995). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. *In The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). National Research Council, National Academy Press Washington, DC.

Kaput, J. J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Massachusetts, USA: University of Massachusetts-Dartmouth.

Katz, V. (2007). Learning algebra: An historical overview. *Algebra: Gateway to a technological future*, 41-45.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C., 1989. *The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective*, In Wagner, S. & Kieran, C., eds. (1989).

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. In Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. In Lester, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM.

Koedinger, K. R., Alibali, M. W., & Nathan, M. J. (2008). Trade-Offs Between Grounded and Abstract Representations: Evidence From Algebra Problem Solving. *Cognitive Science*, 32(2), 366-397.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, 23-26.

Küchemann, D. (1980). *The understanding of generalized arithmetic (algebra) by secondary school children* (Doctoral dissertation, Chelsea College, University of London).

L

Lacampagne, C. B. (1995). *The Algebra Initiative Coloquium. Volume 1: Plenary and Reactor Papers*. Washington, D. C.: Office of Educational Research and Improvement.

Langrall, C. W., & Swafford, J. O. (1997). Grade six students' use of equations to describe and represent problem situation. *American Educational Research Association*.

Lannin, J., Townsend, B., & Barker, D. (2006). The reflective cycle of student error analysis. *For the Learning of Mathemati*cs, 33-38.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones*. Síntesis. Madrid.

López, O. D. (2009). *La formulación equivalente del Teorema de los Cuatro Colores*. Trabajo para optar al título de Magister en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Escuela de Matemáticas. Medellín. Recuperado el 20 de octubre de 2014 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/1920/1/8161124.2009.pdf

Lucchini, G., Cuadrado, B. & Tapia, L. (2006). *Errar no es siempre un error*. Santiago de Chile: Fundación Educacional Arauco. Recuperado el 14 de octubre de 2014 de: http://www.fundacionarauco.cl/_file/file_3878_errar%20no%20es%20siempre%20un%20error.pdf

M

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación* (IRICE), 13.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). STUDENTS'UNDERSTANDING OF ALGEBRAIC NOTATION: 11–15. *Educational studies in mathematics*, 33(1), 1-19.

Mason, L. (2002). Developing epistemological thinking to foster conceptual change in different domains. *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice,* 301-335.

Mason, L. (2002). Developing epistemological thinking to foster conceptual change in different domains. In M. Limón & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change*. *Issues in theory and practice* (pp. 301-336) Dordrecht: Kluwer.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high-school algebra errors in D. Sleeman and JS Brown (eds.), *Intelligent Tutoring Systems*, 25-50.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 232-257). Springer Netherlands.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). Qualitative data analysis: An expanded sourcebook. Sage.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, 3-14.

Muller, W. (2010). ¿Qué es una estrategia de Aprendizaje en TIC?. *Revista InteracTIC*. 13(2), 13-23.

N

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft*. Reston. Virginia: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y Estándares para la educación matemática*. Sevilla: NCTM. Recuperado el 14 de octubre de 2014 de: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/Executive%20Summary%20_Spanish_e-Final.pdf

P

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife, España: Universidad de la Laguna.

Payne, S. J., & Squibb, H. R. (1990). Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error. *Cognitive science*, 14(3), 445-481.

Popper, K. (1983). *Conjeturas y refutaciones: El desarrollo del conocimiento científico*. Traducción de Néstor Míguez adaptada a la cuarta edición inglesa. Barcelona; Paidós. [Ed. or., 1963, 4ª ed. inglesa 1972].

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación,* 35(4), 1-14.

Puig, L. 1998. Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwârizmî restaurado. En F. Hitt, (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

R

Radatz, H. (1979). Errors Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 163-172.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, 16-20.

Resnick, L., S. Omanson (1987). Learning to understand arithmetics. In R. Glaser, *Advances in instructional psychology*. Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, 8-27.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática*. *Errores y dificultades de los estudiantes*. *Resolución de problemas*. *Evaluación*. *Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una empresa docente.

Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetic pupils. *The Arithmetic Teacher*, 442-446.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, 74(6), 418-450.

Ruano, R. M., Socas, M. M. & Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática,* 2(2), 61-74.

S

Sánchez, A. B., & López, R. F. (2011). La transferencia del aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción. *Revista de Educación*, 354, 429-445.

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. En L. Rico (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Ice - Horsori.

Socas, M. M. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. En Ortega, T. (Ed.). *Tercer Simposio Actas del III SEIEM* (pp. 261-282). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How Students (Mis-) Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. New York: Teachers College Press.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction*, 14(5), 503-518.

T

Taylor, S. J., Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación - La búsqueda de significados*. Buenos Aires: Paidos.

Tijero, T. (2009). Representaciones mentales: discusión crítica del modelo de la situación de Kintsch. *Onomázien*, 111-138.

Trujillo, P. A. (2008). *Proceso de Generalización que realizan futuros maestros*. Trabajo de Fin de Máster en Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 15 de octubre de 2014 de: http://funes.uniandes.edu.co/1588/1/Trabajo_Final_de_master.pdf

U

Ursini, S., & Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. *Proceedings of the XXI PME International Conference*, 254-261. Lahti (Finland).

Ursini, S., & Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 445-463). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?. *Educación Matemática*. 18 (3), 5-38.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Trillas: México.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-1:. 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator and computer age. In Morrow, L. J. & Kenney, M. J. (Eds.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics: 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 7-20), Reston, VA: NCTM.

V

VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass: MIT Press.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and instruction*, 14(5), 445-451.

Y

Young, R. M., & O'Shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5(2), 153-177.

W

Wagner, S., & Parker, S. (1993). Advancing algebra. *Research ideas for the classroom: High school mathematics,* 119-139.

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. In *Approaches to Algebra* (pp. 317-325). Springer Netherlands.

Z

Zigmond, N., Vallecorsa, A. & Silverman, R. (1981). *Assessment for instructional planning in special education*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

ANEXOS

ANEXO I

Examen departamental Matemáticas I

Nombre: __________________ **Carrera:** _______________ **Fecha:** _______ **ID: A**

PRIMER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS I, 2008-B

Resuelve lo que se te pide, anexando tus procedimientos en hojas por separado. Recuerda que no se permite hacer uso de calculadora, formulario ni celular.

1. Encuentra el valor de x para la siguiente ecuacion: $3(x+4)-4=2x-5$
2. Efectuar la siguiente división: $\frac{2y^3+5y^2+2y+15}{y+3}$
3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
   2x+2y+2z=4 ; 4x+10y+6z=2 ; 6x-2y-4z=-2
4. Desarrollar el siguiente binomio: $\left(2r-3s^2\right)^2$
5. Desarrolla el siguiente binomio: $\left(ab^2+y^2\right)^3$
6. Factoriza el siguiente polinomio: $x^2-15x+54$
7. Desarrolla la siguiente expresión: $4xy\left(5x+3y-3xy\right)$
8. Factorizar la siguiente expresión: $8x^2y^3-2xy^2+4x^3y^2+x^2y^2$
9. Encontrar el intervalo de solucion de la desigualdad: $4 < 3x - 4 < 11$
10. Resolver la siguiente desigualdad: $\frac{2x+3}{2}+4<3x+5$

ANEXO II

The Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS)-Algebra test.

Estimado/a alumno/a :

Tenemos el gusto de dirigirnos a ti para solicitar tu participación en una actividad de apoyo a la investigación. En el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, estamos investigando acerca de las posibles fuentes de los errores que se presentan al resolver diversas tareas algebraicas.

Solicitamos tu cooperación solidaria pues la información que aportes puede resultar de gran ayuda para mejorar las condiciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Tu participación consiste en rellenar unos datos y responder a una serie de cuestiones que se recogen en una prueba. Esta tarea no te llevará más de 45 minutos.

Es importante que a la hora de responder tengas presente las siguientes instrucciones generales:

Tus respuestas son absolutamente CONFIDENCIALES, de acuerdo con el Informe del Comité de Ética y la Ley de Secreto Profesional y de Protección de Datos. Los profesores no podrán acceder a ellos y, en ningún caso tendrán incidencia alguna en tus resultados académicos.

Esto no es un examen ni una evaluación. Las respuestas obtenidas serán utilizadas con el único fin de evaluarlas de acuerdo con los criterios de valoración utilizados en nuestra investigación.

Trabaja rápido, pero no lo hagas a la ligera. Es de vital importancia para nuestra investigación que trates de desarrollar un procedimiento que te lleve a la respuesta que buscas. Así que te solicitamos escribas las operaciones que creas convenientes y no las borres.

Y sobre todo, *no olvides responder a todas las preguntas.*

Muchas gracias por tu cooperación.

RELLENA LOS SIGUIENTES DATOS

Nombre ______________________________ Carrera ____

Código de alumno: ______________ Sexo: **Masculino** ____ **Femenino** ____ Edad: _______

Nombre .... Fecha ....

Sexo .... Edad ....

Ejercicio de ensayo 1

Qué número da $a + 4$ si $a = 2$ ....

si $a = 5$ ....

Qué número da $4a$ si $a = 2$ ....

si $a = 5$ ....

Ejercicio de ensayo 2

Completa los espacios:
(trabajar la página hacia abajo)

$x \longrightarrow 3x$	$x \longrightarrow x + 3$	$x \longrightarrow 7x$	$x \longrightarrow x + 8$
$2 \longrightarrow 6$	$5 \longrightarrow 8$	$2 \longrightarrow$	$3 \longrightarrow$ ....
$5 \longrightarrow$	$4 \longrightarrow$		
	$n \longrightarrow$		

Ejercicio de ensayo 3

Puedes introducir cualquier número esta maquina: $\longrightarrow \boxed{+\ 4} \longrightarrow \boxed{\times\ 2} \longrightarrow$

¿Puedes encontrar otra maquina que haga el mismo efecto global? $\longrightarrow \boxed{\times\ \ldots\ldots} \longrightarrow \boxed{+\ \ldots\ldots} \longrightarrow$

Ahora da la vuelta a la página para ver las RESPUESTA

Ejercicio de ensayo 1 RESPUESTAS

Qué número da $a + 4$ si		$a = 2$	....6....
	si	$a = 5$	....9....
Qué número da $4a$	si	$a = 2$	....8....
	si	$a = 5$	....20...

Ejercicio de ensayo 2 RESPUESTAS

Completa los huecos:
(trabaja la página hacia abajo)

$x \longrightarrow 3x$	$x \longrightarrow x + 3$	$x \longrightarrow 7x$	$x \longrightarrow x + 8$
$2 \longrightarrow 6$	$5 \longrightarrow 8$	$2 \longrightarrow \mathbf{14}$	$3 \longrightarrow \mathbf{11}$
$5 \longrightarrow \mathbf{15}$	$4 \longrightarrow \mathbf{7}$		
	$n \longrightarrow \mathbf{n + 3}$		

Ejercicio de ensayo 3 RESPUESTAS

Si introduces en ambas maquinas, por ejemplo el número 6 , se obtienen los mismos resultados con las operaciones indicadas:

$$6 \longrightarrow \boxed{6 + 4} \longrightarrow \boxed{10 \times 2} \longrightarrow 20$$

$$6 \longrightarrow \boxed{6 \times 2} \longrightarrow \boxed{12 + 8} \longrightarrow 20$$

Ahora comienza el test en la página siguiente

ALGEBRA 1

1. Completar los espacios:

$x \longrightarrow x + 2$ $\qquad$ $x \longrightarrow 4x$

$6 \longrightarrow$ .... $\qquad$ $3 \longrightarrow$ ....

$r \longrightarrow$ ....

2. Escribe el menor y el mayor de las siguientes expresiones: menor mayor

$n + 1$, $n + 4$, $n - 3$, n, $n - 7$. ....

3. Cuál es más grande, $2n$ o $n + 2$ ....

Explícalo: ....

4. **4 sumado a n** puede ser escrito como **$n + 4$.** Suma 4 a cada una de las siguientes expresiones:

8 $\qquad$ $n + 5$ $\qquad$ $3n$

....

n multiplicado por 4 puede ser escrito como **$4n$**. Multiplica cada una de las siguientes expresiones por 4:

8 $\qquad$ $n + 5$ $\qquad$ $3n$

....

5. Si $a + b = 43$ $\qquad$ $a + b + 2 =$ ......

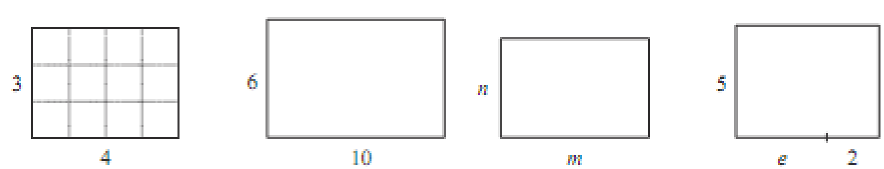
Si $n - 246 = 762$ $\qquad$ $n - 247 =$ ......

Si $e + f = 8$ $\qquad$ $e + f + g =$ ......

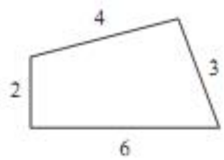
6. Qué puedes decir de a si $a + 5 = 8$ ....

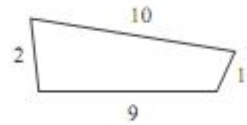
Qué puedes decir de b si $b + 2$ es igual a $2b$ ....

7. ¿Cuál es el área de las siguientes figuras?



$A =$ .... $\qquad$ $A =$ .... $\qquad$ $A =$ .... $\qquad$ $A =$ ....

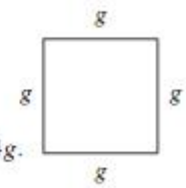




8. El perímetro de esta figura es igual a $6 + 3 + 4 + 2$, lo cual es igual a 15.

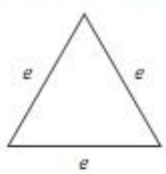
Calcula el perímetro de esta figura $p =$ . . . .

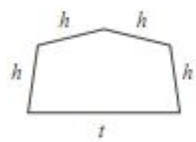
9.

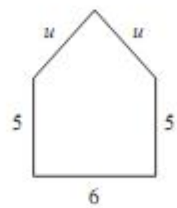


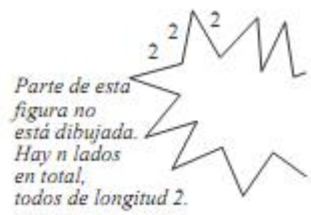
Este cuadrado tiene sus lados de longitud g.
Por tanto, para su perímetro, podemos escribir $p = 4g$.

¿Qué podemos escribir para el perímetro de cada una de las siguientes figuras?









$p =$ . . . . $p =$ . . . . $p =$ . . . . $p =$ . . . .

---

10. Las zanahorias cuestan 80 centavos cada una y los pepinos cuestan 60 centavos cada uno.

Si z representa el *número* de zanahorias compradas
y p representa el *número* de pepinos comprados,
¿Qué representa

$8z + 6p$? . . . .

¿Cuál es el número total de verduras compradas? . . . .

---

11. Qué puede decir sobre u si $u = v + 3$
y $v = 1$ . . . .

Qué puede decir sobre m si $m = 3n + 1$
$n = 4$ . . . .

---

12. Si Juan tiene J canicas y Petra tiene P canicas,
¿Qué puede escribir para el número de canicas que tienen juntos? . . . .

13. $\boldsymbol{a + 3a}$ puede escribirse de manera más sencillamente como $\boldsymbol{4a}$.

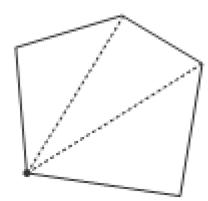
Escribe las siguientes expresiones más sencillamente, si es posible:

$2a + 5a =$	....		
$2a + 5b =$	....	$3a - (b + a) =$	....
$(a + b) + a =$	....	$a + 4 + a - 4 =$	....
$2a + 5a + a =$	....	$3a - b + a =$	....
$(a - b) + b =$	....	$(a + b) + (a - b) =$	....

---

14. Qué puede decir sobre r si $r = s + t$
y $r + s + t = 30$ ....

15.



En un dibujo como este puedes calcular el número de diagonales restando 3 del número de lados.

Por lo tanto, una figura con 5 lados tiene 2 diagonales;

una figura con 57 lados tiene .... diagonales;

una figura con k lados tiene .... diagonales.

---

16. Qué puedes decir sobre de c si $c + d = 10$
y c es menor que d ....

---

17. El salario base de María es de \$*200* por día.
Ella también recibe otro pago de \$*20* por cada hora extra que trabaja.

Si h representa el número de horas extras que ella trabaja, y si P representa su paga total por día (en \$) escribir una ecuación que relacione P y h: ....

¿Cual sería la paga total del día si ella trabajó 4 horas extras? ....

18. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones - siempre, nunca, o a veces?

Subrayar la respuesta correcta:

$A + B + C = C + A + B$ Siempre. Nunca. A veces, cuando ....

$L + M + N = L + P + N$ Siempre. Nunca. A veces, cuando ....

---

19. $a = b + 3$. ¿Qué sucede con a si b se incrementa en 2 ? ....

$f = 3g + 1$. ¿Qué sucede con f si g se incrementa en 2 ? ....

---

20. Los pasteles cuestan p centavos cada uno y las empanadas e centavos cada una.

Si compro 4 pasteles y 3 empanadas,
¿Qué significa

$4p+3e$? ....

---

21. Si esta ecuación ⟶ $(x + 1)^3 + x = 349$
es verdadera cuando $x = 6$,

Entonces
¿Qué valor de x
hará esta ecuación ⟶ $(5x + 1)^3 + 5x = 349$
verdadera?

$x =$ ....

---

22. Los lápices azules cuestan 5 pesos cada uno y los lápices rojos cuestan 6 pesos cada uno.
Si compro algunos lápices azules y algunos rojos y en total me cuestan 90 pesos.

Si a es el número de lápices azules comprados, y
si r es el número de lápices rojos comprados,
¿Qué puede escribir acerca de a y r ? ....

Anexo III

Artículo publicado

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas

Use of Letters as a Source of Errors for University Students in Solving Algebraic Tasks

José García Suárez*
Isidoro Segovia Alex**
José Luis Lupiáñez Gómez***

Resumen

La presente investigación es un estudio realizado con 194 estudiantes del Centro Universitario de la Costa Sur, en Autlán, México, cuyo objetivo es analizar los errores más comunes que los alumnos de primer semestre presentan en las producciones, al operar con los distintos significados que pueden tener las letras en álgebra y con base a esos resultados, establecer su ubicación dentro de alguna de las cuatro categorías de entendimiento en el uso y significado de las letras en álgebra que propone Küchemann (1980). Los resultados muestran que más de la mitad de los estudiantes de este nivel educativo no manifiestan dificultades al evaluar las letras, manejarlas como objetos o considerar su presencia, sin embargo, sí revelan deficiencias en el discernimiento para comprender el uso y significado de las letras como incógnitas de valor específico, números generalizados y como variables.

Palabras-clave: Errores. Tareas Algebraicas. Usos de las Letras. Niveles de Entendimiento. Estudiantes Universitarios.

Abstract

The present investigation is a study with 194 students of the Centro Universitario de la Costa Sur in Autlan, Mexico. It aims to analyze the most common mistakes that first semester students show in the productions, to operate with different meanings that may have letters in algebra and, based on these results, establish its location within one of the four categories of understanding in the use and meaning of letters in algebra proposed by Küchemann (1980). The results show that more than half of the students at this level of education do not show difficulties in evaluating letters, handling them as objects or considering their presence, however, it does reveal deficiencies in the discernment to understand the use and meaning of the letters as unknown of specific value, numbers, and variables such as widespread.

Keywords: Errors. Algebraic Tasks. Uses of Letters. Levels of Understanding. University Students.

1 Introducción

* Master Oficial de Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesor Docente del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México (CUCSUR). Dirección postal: Casimiro Castillo 19, C.P. 48900, Autlán, Mexico. *Email:* josegar@cucsur.udg.mx
** Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesor Titular en el Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (UGR). Granada, España. Dirección postal: Facultad de Educación, Campus de Cartuja, 18071 Granada, España. *E-mail:* isegovia@ugr.es
*** Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada (UGR). Profesor Titular en el Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (UGR). Granada, España. Dirección postal: Facultad de Educación, Campus de Cartuja, 18071 Granada, España. *E-mail:* lupi@ugr.es

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Históricamente la enseñanza y aprendizaje del álgebra no han producido los resultados deseados en la formación educativa de los estudiantes de educación secundaria y bachillerato (BOOTH, 1981, 1988; KÜCHEMANN, 1978, 1980; URSINI; TRIGUEROS, 2004; USISKIN, 1988; RUANO; SOCAS; PALAREA, 2008; HODGEN et al., 2009). En la actualidad, esta situación no ha cambiado y se refleja en el desempeño de aquellos estudiantes, quienes al ingresar a la universidad manifiestan un deficiente aprendizaje, con nociones pobres acerca de conceptos algebraicos elementales, exhibiendo un cúmulo de ideas confusas que difícilmente asimilan o retienen, provocando dificultades en el entendimiento de nociones y conceptos básicos del álgebra (LINCHEVSKI, 1995; POCHULU, 2005; CAPUTO; MACIAS, 2006; FERREYRA et al., 2010). Esta situación puede tener importantes repercusiones cuando los estudiantes se enfrentan con asignaturas de matemáticas cuyos contenidos tienen un mayor nivel de complejidad cognitiva y que pueden tener mucha importancia en su desarrollo profesional posterior.

En lo que respecta a investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra en niveles educativos superiores en México, consideramos aportaciones importantes los trabajos de Backhoff y Tirado (1993), quienes afirman que, aproximadamente, más de la mitad de los estudiantes universitarios participantes en su investigación, tienen problemas con el dominio de los conocimientos básicos de álgebra que se imparten en secundaria (comprensión del despeje de incógnitas, evaluación de expresiones algebraicas, simplificación de ecuaciones algebraicas lineales, solución de ecuaciones de primer grado y planteamiento y solución de problemas en términos de ecuaciones). Así mismo, Ursini y Trigueros (2006 realizaron estudios orientados a evaluar el domino del manejo de la variable en estudiantes universitarios y mencionan, en sus resultados, que la mayoria de los sujetos analizados sólo son capaces de integrar los usos de las letras como número general y como incognita cuando se les presentan problemas sencillos. Muchos de ellos tampoco son capaces de simbolizar expresiones, ni interpretar el papel de las variables involucradas en el problema, ni establecer o manejar las relaciones entre las variables.

Por otra parte, Usiskin (1988) señaló que en el aprendizaje del álgebra, un tema de gran dificultad ha sido, resolver tareas algebraicas centradas en las operaciones básicas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas), en la formulación y solución de ecuaciones, así como el manejo de las funciones. Küchemann (1980), al respecto, estableció que las razones de estas dificultades pueden residir en los diferentes usos que los estudiantes dan a las letras cuando éstas se presentan en distintos contextos, manifestando en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

muchas ocasiones su incapacidad de distinguir sus significados. Diversos trabajos de investigación han sido enfocados a los usos de las letras en álgebra y su relación con el concepto de variable, entre ellos Collis (1975), que documenta las diversas maneras que los estudiantes interpretan las letras empleadas como símbolos matemáticos. Tomando como base este trabajo, Küchemann (1980), identifica seis tipos de usos de las letras en las matemáticas escolares de nivel secundaria: letra evaluada, letra no utilizada o ignorada, letra como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable, que constituyen el referente que usaremos en la parte empírica de nuestro estudio.

En este trabajo queremos constatar el bajo nivel de conocimientos algebraicos que los estudiantes tienen al ingresar a la universidad a través de los errores más comunes y que no corresponden a su grado académico. Así, el objetivo de nuestro estudio es detectar, analizar y organizar los errores sistemáticos que tienen los estudiantes universitarios cuando abordan tareas algebraicas que requieren el conocimiento y el manejo de distintos usos de las letras y relacionar las dificultades que los originan con sus niveles de comprensión en álgebra. Para esto se consideró el test de evaluación de *Concepts in Secondary Mathematics and Science Study in Álgebra* (CSMS), desarrollado en Inglaterra por el King's College London, en 1980, actualizado en 2008 y modificado y adaptado al contexto de México. A partir de esta indagación, revelamos cómo los problemas de aprendizaje no resueltos del álgebra escolar en niveles educativos obligatorios, en México, tienen incidencias aún en el nivel terciario de formación.

Muchos trabajos indagan sobre las dificultades de niños de escuela elemental al usar álgebra, mientras que otros muestran formas de ayudar a los estudiantes para facilitar la transición curricular entre la aritmética y el álgebra. Sin embargo, pocos estudios se enfocan en mostrar que las dificultades que los estudiantes padecen en los niveles primario y secundario persisten cuando éstos inician sus estudios superiores.

Por esta razón, consideramos que la relevancia de esta investigación radica en documentar las dificultades que presentan los estudiantes en el primer curso de matemáticas en la Universidad; de esa manera, podemos establecer un marco interpretativo importante para todas aquellas instituciones educativas de nivel superior en las cuales el primer curso de matemáticas se compone, esencialmente, de contenidos algebraicos. Estudios de este tipo pueden sugerir dónde reforzar el conocimiento algebraico en aquellos estudiantes que, a pesar de contar con una formación algebraica previa, muestran carencias en esos conocimientos.

2 Antecedentes y Marco teórico

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Diversos investigadores han manifestado que la dificultad de la *significación*[1] de las letras, no es un algo trivial para un buen número de estudiantes. Esta situación fue constatada por Kieran (1990, p.96) quien ejemplifica esta dificultad a través del siguiente ejemplo: "En aritmética, 12m puede significar 12 metros, es decir, 12 veces 1 metro. Pero en álgebra, 12m puede significar 12 veces un número indeterminado de metros". Por tanto, la letra tiene dos significados diferentes según el contexto. Davis (1975) proporcionó otro dilema en el uso de la misma expresión para expresar dos cosas diferentes en el mismo contexto: $a + b$ representa a la vez, el procedimiento de añadir a y b y el resultado de la suma; esto se caracteriza como el dilema proceso-producto. El mismo Davis sostiene que en álgebra no hay una distinción clara entre esas dos entidades. Para el mejor entendimiento del uso de las letras; Philipp propuso siete categorías de agrupación y describe con ejemplos los distintos usos de las mismas:

> *Letras como etiquetas, como: f e y en $3f = 1y$. En donde f se usa para denotar pies e y para denotar yarda; como constantes π, e, y c; como incógnitas para denotar x en $5x\text{-}9 = 11$; como números generalizados para denotar a, b en $a+b=b+a$; como cantidades variables para denotar x, y* en *$y=9x\text{-}2$; como parámetros para denotar m, b en $y=mx+b$,* y *como símbolos abstractos para denotar e, x en $e^x=x$.* (Philipp, 1992, p.160)

La variedad de significados que una sola letra puede tomar indica la complejidad que tiene para los estudiantes, especialmente cuando éstos intentan identificarlas y utilizarlas en diferentes contextos.

Mac Gregor y Stacey (1997) afirmaron que la mayoría de los estudiantes, hasta los 15 años, no pueden interpretar letras como números generalizados o incluso como incógnitas con valor específico; generalmente ignoran las letras y las reemplazan con valores numéricos, o consideran las letras como etiquetas, es decir, abreviaturas de las características de los objetos (iniciales de nombres de personas, de objetos o lados de figuras geométricas, entre otras). Afirmaron, también, que la principal explicación para este tipo de error tiene vínculo directo con los niveles de desarrollo cognitivo; sin embargo, proporcionaron explicaciones alternativas para orígenes específicos de interpretaciones erróneas que no han tenido demasiada repercusión en la literatura, ya que pueden o no estar asociados con el nivel cognitivo. Según ellos, estos orígenes son supuestos intuitivos y de razonamiento pragmático acerca de una nueva notación, las analogías con los sistemas de símbolos familiares, la

[1] Palarea (1999) define significación de las letras como: el uso y significado que los estudiantes les dan a las letras en el álgebra.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

interferencia del nuevo aprendizaje en matemáticas y los efectos de los materiales didácticos mal elaborados.

Un análisis más detallado acerca del uso de la letra en el álgebra, lo encontramos en Küchemann (1980), quien realizó investigaciones que involucraban a estudiantes ingleses entre 15 y 18 años que cursaban sus estudios de secundaria, clasificando los usos de las letras de la siguiente manera:

1. *Letra evaluada*. Es la asignación de valores numéricos arbitrarios a las letras; por ejemplo ante la cuestión, *Si* $e + f = 8$; $e + f + g = ?$ algunos estudiantes expresan como resultado, $e + f + g = 12$, asignándole valores arbitrarios de 4 a cada una de las incognitas, $4 + 4 + 4 = 12$.
2. *Letra ignorada*. En expresiones como $2x + 3y + 7z$, algunos estudiantes dan como respuesta $12xyz$; en este caso, los estudiantes trabajan realizando las operaciones aritmeticas $(2+3+7)$, ignorando la presencia de las letras o, en el mejor de los casos, las consideran, pero no tienen significado para ellos.
3. *Letra como un objeto*. Las letras pueden ser utilizadas como abreviaturas de nombres de objetos o como objetos en sí mismos, por ejemplo: $4p + 3e$, podría representar el enunciado 4 profesores y 3 estudiantes.
4. *Letra como una incógnita específica*. Los estudiantes perciben que las letras tienen un valor específico pero desconocido. Por ejemplo, la expresión $E + B + C$ nunca será igual a $E + D + C$, porque B no es igual a D (aunque ambas sean reconocidas como variables que deben ser siempre con valor diferente una de la otra), ya que son representadas por diferentes letras del alfabeto.
5. *Letras como números generales*. Los estudiantes perciben que las letras representan valores, o por lo menos son capaces de tomar varios valores en lugar de sólo uno. Por ejemplo, los estudiantes, si se les pide que elaboren una lista de todos los valores posibles para la expresión $a + b = 20$, presentan generalmente una lista con varios números enteros que satisfacen la condición. Sin embargo, tienden a no darse cuenta de que deben expresar, de manera obligatoria, todos los números que satisfacen la condición.
6. *La letra como variación de cantidad (variable)*. Aquí los estudiantes ven las letras como la representación de un rango de valores no especificados, incluyendo todos los números racionales e irracionales. Los estudiantes también comprenden que la variable se define por su relación con otros términos en la expresión. Por ejemplo, en la expresión $f + g = 10$ el valor de f es dependiente del valor de g.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

En el mismo estudio, Küchemann (1980, p.70) identifica las primeras tres categorías de los usos de la letra (evaluada, ignorada y como objeto) en el nivel más elemental del manejo de ésta. En cambio, cuando los participantes reconocen las variables como incógnitas específicas, números generales o variación de cantidades, considera que tienen un entendimiento alto sobre el concepto de la misma. En este mismo sentido, sostiene que un estudiante habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la "letra como variable". Sugiere también, que es más fácil para el estudiante trabajar con la "letra como incógnita específica" que con la "letra como número generalizado", y que es más fácil trabajar con la "letra como número generalizado" que con la "letra como variable".

A partir de estas consideraciones, Küchemann formula la relación existente entre los distintos usos de las letras y caracteriza cuatro niveles de entendimiento de estudiantes en relación a su significado y su uso.

Nivel 1: en el primer nivel se resuelven las tareas puramente numéricas o que tienen una estructura algebraica simple (sustituciones numéricas directas en expresiones algebraicas en donde las literales no tienen coeficientes, multiplicación de datos numéricos, simplificación de términos semejantes que involucran una sola letra como incógnita). Los estudiantes en este nivel son capaces de resolver problemas mediante el uso de las letras como objetos (lados de figuras geométricas, iniciales de nombres de objetos) o sin usarlas en absoluto. Cuando a estos estudiantes se les presentan letras como incógnitas específicas, tienden a evaluarlas o no utilizarlas para resolver dichas situaciones. Un ejemplo de tarea propia de este nivel es: *Si* $a + 5 = 8$ *entonces* $a = \ldots$, donde la letra puede ser evaluada directamente con un valor numérico que cumpla la igualdad.

Nivel 2: la diferencia con el anterior, es la mayor familiaridad con la notación algebraica que les permite a los estudiantes resolver tareas de más complejidad. Por ejemplo, en la tarea: *Si* $m = 3n+1$ *y* $n = 4$ *entonces* $m = \ldots$, los estudiantes deben hacer frente a una expresión literal ambigua antes de poder evaluar una letra. En este nivel existe una mayor disposición para aceptar respuestas que aparecen incompletas o ambiguas.

Nivel 3: en este nivel las letras son usadas como incógnitas de valor específico, que representan números en lugar de objetos; sin embargo, los estudiantes en este nivel sólo pueden manejar las incógnitas que presentan estructuras algebraicas simples. Por ejemplo, cuando se les solicita *sumar 4 a* $3n$, no encuentran dificultad, pero al intentar resolver tareas en las que sea necesario *multiplicar 4 por* $n+5$, son incapaces de efectuar de manera correcta las 2 operaciones necesarias.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Nivel 4: los estudiantes de este nivel pueden hacer frente a contextos en los cuales se requiere, como mínimo, que las letras sean consideradas como incógnitas específicas, pero donde hay una fuerte tendencia a tratar las letras como objetos, como se indica en esta otra tarea: *Si los pasteles cuestan p centavos cada uno y las empanadas e centavos cada una ¿Qué significa 4p + 3e?* En este caso, los estudiantes deben ser capaces de distinguir que las letras no son etiquetas de las características propias de los objetos (iniciales) e inferir que la expresión enunciada puede representar distintos valores. Así mismo, este nivel involucra el manejo de las letras como números generalizados y como variables, como muestra la siguiente: *¿Cuál es más grande 2+n o 2n?* Los estudiantes considerados dentro de este nivel de entendimiento deben ser capaces de expresar y justificar la respuesta a este ítem de manera generalizada y no limitarse a la evaluación de sólo algunos valores numéricos que satisfagan la expresión. Por esta razón, este nivel es considerado el de mayor exigencia cognitiva descrito por Küchemann.

Usiskin (1988) sostiene que el uso de las letras puede aplicarse en diferentes contextos y con distintos significados en cada uno de ellos y, dependiendo del contexto en el que se presentan, son tratadas de diferente manera; sostiene que el entendimiento del concepto de *variable* es el de mayor nivel de entendimiento del uso de las letras, pues implica la posibilidad de superar la simple realización del cálculo y operaciones con letras o con símbolos, para alcanzar un entendimiento de las razones por las que funcionan estos procedimientos, la capacidad de prever hacia dónde conducen y la posibilidad de establecer relaciones entre los aspectos que asume la variable. De esta forma, destaca varias asociaciones de uso de las letras a diferentes concepciones del álgebra en el cual se utilizan. Por ejemplo, una letra puede representar una *incógnita específica,* esto es, un número desconocido pero específico que puede ser calculado considerando las restricciones dadas; como *número generalizado,* es decir, un número indeterminado comprendido dentro de un método general; o ser utilizado para representar una *relación funcional* entre dos cantidades cuyos valores cambian. Más aún, puede utilizarse de diferentes formas en momentos distintos dentro de un mismo problema, asumiendo distintas caracterizaciones. Estas capacidades son esperadas en alumnos de primer curso universitario, como con quienes se llevó a cabo esta investigación.

3 Descripción metodológica

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Nuestra investigación responde a un estudio descriptivo de carácter cuantitativo y cualitativo, dirigido al análisis del uso de las letras en álgebra y los errores manifestados por los estudiantes de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas. Los participantes fueron en total 194 estudiantes de primer curso universitario, del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México, cuyas edades oscilaron entre 18 y 20 años. Los alumnos participantes fueron elegidos por el nivel educativo en el que estaban inscritos en el momento de realizar este trabajo.

El desarrollo del estudio se llevó a cabo entre septiembre y diciembre de 2012 y se basó en la categorización de los distintos usos de las letras propuestos por Küchemann (1980), con el fin de caracterizar la forma en la que los estudiantes interpretan los símbolos literales en diferentes contextos algebraicos. Para ello se aplicó un cuestionario escrito en el que los alumnos deben interpretar y manipular expresiones algebraicas, así como resolver problemas representados por símbolos literales. Este instrumento está basado en el modelo del proyecto *Concepts in Secondary Mathematics and Science Study in Álgebra* referido en la introducción, y para su mejor comprensión por los estudiantes, se realizaron modificaciones en el lenguaje para adaptarlo al contexto social mexicano en el cual se implementó.

El instrumento, originalmente diseñado por Küchemann, Brown y Blackeley (KÜCHEMANN, 1980, p.16), está compuesto por 23 tareas en torno de distintos contenidos algebraicos: sustitución formal, simplificación, generalización y formulación, interpretación y solución de ecuaciones[2]. Se aplicó en sesiones de 50 minutos y, una vez analizadas las respuestas, se realizaron entrevistas semi-estructuradas (HERNÁNDEZ; FERNÁNDEZ; BAPTISTA, 1999) a una muestra de 10 estudiantes, con el objetivo de profundizar en la búsqueda de las fuentes de los errores mediante las respuestas expresadas de manera incorrecta.

3.1 Las tareas

Las tareas fueron diseñadas por Küchemann para cada categoría, describiéndose cada una de ellas en función de la respuesta esperada, es decir, distinguiendo cuándo los estudiantes tenían que interpretar letras en cada ítem como valores evaluados, objetos, incógnitas con valor específico, números generalizados y variables. La evaluación de la

[2] Es posible consultar el cuestionario a través del enlace: http://goo.gl/MSQIXQ.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

prueba fue organizada de acuerdo con los niveles de entendimiento en el manejo de las letras de este autor, bajo el siguiente formato:

Letra evaluada. Se asigna a la letra un valor numérico.

Letra ignorada. Se ignora la letra presente o al menos se reconoce su existencia sin darle significado.

Letra como objeto. Se considera la letra como una forma abreviada de un objeto o como objeto en sí mismo con valor propio.

Letra como incógnita de valor específico. Se considera una letra como número único, pero desconocido y que pueden operar directamente sobre ella.

Letra como número generalizado. La letra es vista como una incógnita que puede tomar varios valores

Letra como variable. Las letras son la representación de un rango de valores desconocidos y con una relación sistemática existente entre estos conjuntos de valores.

Las tareas relacionadas con cada uno de los niveles de entendimiento, que fueron consideradas para el análisis de las respuestas de la prueba aplicada se presentan en el Cuadro 1 y son las misma que propone Küchemann (1980).

Nivel	Criterio
0	Menos de 4 respuestas correctas de las tareas del nivel 1
1	Al menos 4 de 6 respuestas correctas de las tareas 5(a), 6(a), 7(b), 8, 9(a), 13(a).
2	Al menos 5 de 7 respuestas correctas de las tareas 7(c), 9(b), 9(c), 11(a), 11(b), 13(d), 15(a).
3	Al menos 5 de 8 respuestas correctas de las tareas 4(c), 5(c), 9(d), 13(b), 13(h), 14, 15(b), 16.
4	Al menos 6 de 9 respuestas correctas de las tareas 3, 4(e), 7(d), 17(a), 18(b), 19, 20, 21, 22.

Cuadro 1 - Tareas y niveles de entendimiento
Fuente: Küchemann (1980, p.64-69)

La prueba se aplicó en las primeras semanas del ciclo escolar y se seleccionaron las carreras de Licenciatura en Nutrición, Licenciatura en Administración de Empresas, Técnico Superior en Electrónica y Mecánica Automotriz, Ingeniería en Procesos y Comercio Internacional, Ingeniería en Teleinformática e Ingeniería en Recursos Naturales y Agropecuarios.

4 Resultados y discusión

En este apartado presentamos y discutimos los resultados obtenidos mediante la aplicación del cuestionario. En primer lugar se fundamentan las razones por las cuales se ubicaron a los estudiantes en los distintos niveles de entendimiento tomando como referencia principal el marco propuesto por Küchemann (1980). A continuación, detallamos algunas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

respuestas significativas, que nos llevaron a situar a los estudiantes participantes en este estudio en los distintos niveles antes mencionados. Al mismo tiempo, consideramos que el análisis de los errores en las producciones de los estudiantes, junto con las entrevistas realizadas, aportaron evidencias importantes sobre las probables fuentes de los mismos, lo cual permitió confirmar cierta similitud de los errores informados en este estudio con aquellos errores reseñados en la literatura consultada.

4.1 Designación de los estudiantes en los diferentes niveles de entendimiento

Con el objetivo de explicar el método empleado para ubicar a los estudiantes en los respectivos niveles de entendimiento, describiremos como ejemplo el análisis de las respuestas del estudiante número 1, situado en el primer nivel (Tabla 1):

Tabla 1 - Respuestas correctas requeridas para el nivel 1

# Estudiante	Tareas					
	5a	6a	7b	8	9a	13a
1	✓	✓	✓	✓	x	x

La tabla 1 muestra que el estudiante contesta correctamente (□) a cuatro tareas e incorrectamente (x) a dos de las diseñadas para el nivel 1. Es decir, responde correctamente al menos a 4 de las 6 tareas de ese nivel, cumpliendo con suficiencia la condición requerida en el Cuadro 1. Para completar nuestra valoración, evaluamos las respuestas a las tareas consideradas en el nivel 2, no cumpliendo con el número mínimo de respuestas correctas de las tareas requeridas de ese nivel, 5 de 7, como muestra la tabla 2.

Tabla 2 - Respuestas correctas requeridas para el nivel 2

# Estudiante	Tareas						
	7c	9b	9c	11a	11b	13d	15a
1	✓	x	x	✓	x	x	✓

De manera similar se procedió con el total de las pruebas analizadas con el objetivo de categorizar a todos los estudiantes. A continuación, reseñaremos los resultados obtenidos, distinguiendo las respuestas de los estudiantes ubicados en cada nivel de entendimiento.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

4.2 Resultados particulares del nivel 1 de entendimiento

La tabla 3 muestra los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes ubicados en este primer nivel de entendimiento[3] a los ítems del nivel 2. Se presentan el número de estudiantes que no dieron respuestas a determinadas tareas, la cantidad de respuestas correctas y la e respuestas incorrectas. Consideramos conveniente recordar que de acuerdo con la metodología establecida por Küchemann (1980), se analizan las respuestas erroneas del nivel inmediato superior, las cuales imposibilitan ubicar a los estudiantes en ese nivel de entendimiento. Por último, en la parte inferior se presenta el análisis de las respuestas incorrectas que se observaron en las producciones de los estudiantes de ese nivel. Las respuestas analizadas nos llevaron a situar en él al 25.6% del total de la muestra.

Tabla 3 - Estudiantes del nivel 1: tipos de respuesta y usos de las letras

	Ítem						
	7c	*9b*	*9c*	*11ª*	*11b*	*13d*	*15a*
Tipo de respuesta							
Sin respuesta	19	7	10	20	22	4	12
Correctas	17	34	28	24	12	28	13
Incorrectas	14	9	12	6	16	18	25
Uso de las letras							
Evaluada	2	2	7	✓	✓	0	25
Ignorada	12	7	5	0	4	18	0
Como objeto	0	0	0	0	0	✓	0
Incógnita de valor específico	✓	0	0	2	9	0	✓
Número generalizado	0	✓	✓	4	3	0	0

Como se puede observar en la tabla 3 , el ítem 15(a), presentó la mayor frecuencia de respuestas erróneas por parte de los estudiantes ubicados en el nivel 1. El 74% de los estudiantes respondieron de manera incorrecta el citado ítem, aplicando un procedimiento mediante el cual sustituían los datos numéricos dados en el enunciado del problema para intentar resolverlo.

La Figura 1 muestra un ejemplo prototípico de las respuestas que fueron consideradas dentro de este primer nivel de entendimiento para el caso de los ítems de la tarea 9.

[3] En las tablas de resultados emplearemos el símbolo (✓) para indicar cuál es el uso de la letra esperado como respuesta correcta en cada una de las tareas analizadas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

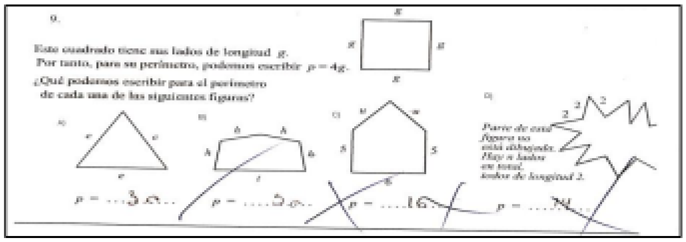


Figura 1 - Respuestas del estudiante número 5 a la tarea 9

En la figura 1 se pueden apreciar las respuestas de dos de los usos más habituales que los estudiantes de este nivel atribuyen a las letras: *letra como objeto* y *letra ignorada*. En el ítem 9 (b), el estudiante responde que el perímetro de la figura es $p = 5e$. En este caso el estudiante identifica las letras presentes como objetos (los lados de la figura), asociando a la letra e un valor desconocido, según manifestó el estudiante en la entrevista posterior. Por otra parte, se puede advertir en el ítem 9 (c), que el mismo estudiante ignora las letras presentes al afirmar que el perímetro de esa figura es: $p = 16$.

Algunas otras respuestas incorrectas frecuentes exhibían diversas deficiencias en los conocimientos no sólo algebraicos, sino aritméticos, pues encontramos respuestas erróneas de sumas y multiplicaciones aritméticas en las respuestas de algunas tareas. Así mismo, en algunas otras respuestas se advirtió la tendencia de los estudiantes a responder correctamente las expresiones que les permitían resolver una expresión con una sola operación y se mostraban incapaces de resolver aquellas que les exigían más de dos operaciones o relacionar varias de éstas, evidenciando, de esta forma, deficiencias en sus conocimientos algebraicos elementales. En algunos casos, los estudiantes son incapaces de resolver una suma algebraica, como la incluida en el ítem 13 (a), del primer nivel - *Escribe de manera sencilla la siguiente expresión:* $2a + 5a = ?$... obteniendo respuestas como 7 o $7a^2$.

4.3 Resultados particulares del nivel 2 de entendimiento

Los resultados sitúan en este nivel al 53.8% de los estudiantes, que fueron los que resolvieron de manera correcta las tareas propias de los dos primeros niveles, pero en cambio, no superaron las propias del nivel 3. La tabla 4 muestra los resultados del análisis de las

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

respuestas de los estudiantes ubicados en este segundo nivel de entendimiento respecto a los ítems del nivel 3.

Tabla 4 -Estudiantes del nivel 2: tipos de respuesta y usos de las letras

	Ítem							
	4c	5c	9d	13b	13h	14	15b	16
Tipo de respuesta								
Sin respuesta	3	19	23	10	10	29	22	17
Correctas	35	25	30	38	60	29	27	11
Incorrectas	66	60	51	56	34	46	55	76
Uso de las letras								
Evaluada	38	39	28	0	0	31	11	0
Ignorada	26	0	0	4	21	0	0	0
Como objeto	0	17	23	52	13	10	41	3
Incógnita de valor específico	✓	2	0	0	0	✓	0	60
Número generalizado	0	✓	✓	✓	✓	0	✓	✓
Otros	2	2	0	0	0	5	3	13

La tabla 4 destaca cómo la tarea que presentó mayor frecuencia de respuestas incorrectas fue la 16 (Figura 2), ya que más del 73% de los estudiantes de este nivel expresaron respuestas utilizando las letras como incógnitas de valor especifico en lugar de considerarlas como números generalizados. Sobresale, también, la frecuencia elevada de respuestas incorrectas encontradas en el ítem 13 (b), que presentó una alta frecuencia de respuestas erróneas en los estudiantes ubicados en el nivel 2 (53.8%), utilizando la letra como objeto, la mayoría de ellos son incapaces de aceptar una respuesta que incluya letras con el significado de incógnitas.

La figura 2 muestra otro ejemplo típico encontrado en las respuestas de los estudiantes de este nivel.

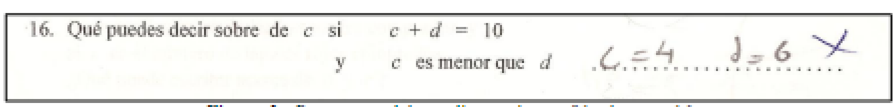

16. Qué puedes decir sobre de c si $c + d = 10$
y c es menor que d $c=4$ $d=6$ ✗

Figura 2 - Respuestas del estudiante número 81 a la tarea 16

En este caso, el estudiante empleó la letra como una incógnita de valor especifico, es decir, asigna un valor que satisface la condición dada en el enunciado del problema, y acepta ese valor como respuesta válida sin considerar que puede incluir un rango determinado de valores conocidos (números generalizados). Para profundizar en esta consideración, se entrevistó al alumno:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Investigador: Al observar tu respuesta al ítem 16, no me queda claro como la obtienes. ¿Me puedes comentar acerca de cómo obtienes que c = 4 y d = 10 como respuesta?
Estudiante: Como dice que c y d, deben sumar 10, entonces dividí 10 entre 2 y me dio 5. Después dice que c es menor que d, por lo que d es 6 y c debe ser 4.
I: ¿El resultado que obtuviste, satisface todos los casos posibles de respuestas que pueden presentarse de la expresión algebraica enunciada?
E: No entiendo, ¿Cuales casos posibles?
I: Es decir, ¿Puede haber otras parejas de números que sumados den 10 y que uno sea mayor que el otro?
E: Oh si, por ejemplo 3 y 7.
I: Así es, otros ejemplos 2 y 8, 1 y 9. ¿Mantienes la misma respuesta, después de las observaciones que hicimos?
E:Ummm...no, entonces ¿c puede tener más valores aparte del 4?
I: Así es, y como deben ser esos valores, observa los ejemplos. ¿Cuánto valía c en los ejemplos que dimos?
E: 4, 3, 2,1...
I: ¿Cómo puedes expresar el valor de c, de acuerdo a esos ejemplos?
E: Quec puede ser 4 o menor que 4.
I: Correcto, finalmente para este problema, ¿Puedes decirme porque considerabas que la incógnita sólo tenía un valor?
E: Pues, porque al encontrar un valor que la resolvía no busque más, al pensar que con eso era suficiente...

Este análisis nos permite inferir que los estudiantes ubicados dentro de este nivel manejan adecuadamente las letras en estructuras algebraicas con mayor dificultad cognitiva que las consideradas en el nivel 1. Sin embargo, persiste su tendencia a evaluar las letras cuando desconocen el procedimiento correcto para resolver una determinada tarea. Por otro lado, muestran deficiencias para comprender que las letras pueden representar números generalizados y variables. Finalmente, se percibe en las respuestas de estos estudiantes una mayor disposición para aceptar respuestas que parecen incompletas o ambiguas, lo cual puede deberse a una mayor familiaridad con la notación algebraica.

4.4 Resultados particulares del nivel 3 de entendimiento

En este nivel se incluyen aquellos estudiantes que pueden operar las letras como incógnitas de valor específico, es decir, las letras ahora representan números en lugar de objetos. Sin embargo, estos estudiantes sólo pueden manejar las incógnitas que presentan estructuras algebraicas simples y siguen encontrando dificultades para realizar las operaciones que implican el manejo de estructuras algebraicas más complejas.

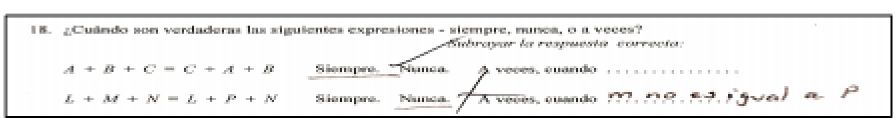
Los resultados obtenidos del análisis en las respuestas nos indicaron que el 17.9 % de los estudiantes quedaron ubicados en este nivel de acuerdo a los criterios establecidos en el Cuadro 1. La tabla 5 muestra el resumen de resultados respecto a los ítems del nivel 4.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Tabla 5 - Estudiantes del nivel 3: tipos de respuesta y usos de las letras

	Ítem								
	3	4e	7d	17a	18b	19	20	21	22
Tipo de respuesta									
Sin respuesta	0	1	3	0	1	2	3	23	4
Correctas	5	20	17	15	11	4	25	3	17
Incorrectas	30	14	15	20	23	29	7	9	14
Uso de las letras									
Evaluada	0	4	0	6	0	5	0	0	0
Ignorada	0	5	0	0	0	0	0	0	0
Como objeto	4	0	11	14	23	0	4	0	10
Incógnita de valor específico	26	✓	0	0	0	16	0	✓	0
Número generalizado	✓	0	✓	✓	✓	0		0	✓
Variable	0	0	0	0	0	✓	0	0	0
Otros	0	5	4	0	0	8	3	9	4

En este caso hacemos especial énfasis en las tareas 3 y 19, las cuales presentan la mayor frecuencia de respuestas erróneas entre los estudiantes ubicados en el nivel 3. Estas dos tareas son las de más alta exigencia cognitiva, ya que para responderlas de manera correcta los estudiantes deben de involucrar la comprensión del uso y significado de las letras como números generalizados y como variable. Para la tarea 3, el 87.5% de los estudiantes expresaron una respuesta incorrecta, mientras que casi el 83% contestaron de manera incorrecta la tarea 19. En ambos casos se advirtió que la mayoría de los estudiantes, tienden a emplear las letras como incógnitas de valor específico. Estos registros altos en las respuestas incorrectas, nos corroboran la falta de conocimientos de los estudiantes de este nivel para el manejo y comprensión de las letras como números generalizados y como variables; así mismo, se encontraron bastantes evidencias de estudiantes, que a pesar de estar ubicados dentro de uno de los niveles de mayor exigencia cognitiva en el manejo de las letras, continúan con su tendencia a utilizar las letras como objetos, como se identificó en las respuestas encontradas en el ítem 18 (b) (Figura 3).


18. ¿Cuándo son verdaderas las siguientes expresiones - siempre, nunca, o a veces? Subrayar la respuesta correcta:

$A + B + C = C + A + B$ Siempre. Nunca. A veces, cuando ....

$L + M + N = L + P + N$ Siempre. Nunca. A veces, cuando m.no.es.igual a P

Figura 3 - Respuestas a la cuestión 18 del estudiante número 176

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

Esta respuesta concuerda con un patrón repetitivo de soluciones a este ítem. Específicamente 20 de los 35 estudiantes ubicados en este nivel dieron como respuesta *Nunca*, lo que nos llevó a suponer que la fuente del error que ocasionaba las respuestas incorrectas podría ser que los estudiantes consideraban las letras como objetos o que letras distintas no pueden tener valores iguales.

Otro tipo de respuestas comunes, son las que encontramos para la tarea 3. La figura 4 muestra un ejemplo de respuesta dada a esta tarea.

Figura 4 - Respuestas a la tarea 3 del estudiante número 190

Cómo se puede observar en la respuesta del estudiante, persiste su tendencia a utilizar las letras como incógnitas de valores específicos y no concebir que las letras pueden representar un rango de valores (número generalizado), limitándose a elegir un par de valores que satisfagan la expresión que se le presenta y dando como válido el resultado correspondiente.

Respecto a la tarea 19, casi el 75% de los estudiantes ubicados en este nivel proporcionaron respuestas similares a la ilustrada en la figura 5.

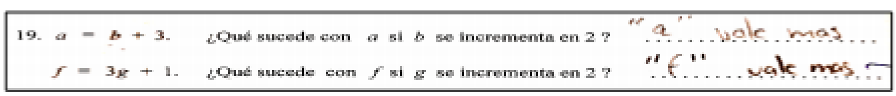


Figura 5 -Respuesta a la tarea 19 del estudiante 189

Los resultados obtenidos muestran que sólo un poco más del 11% de los estudiantes ubicados en el nivel 3 fueron capaces de emplear las letras como variables. Más de la mitad de los estudiantes del mismo nivel emplearon el uso de la letra como incógnita de valor especifico, como procedimiento alternativo para resolver este ítem.

Conforme a las evidencias encontradas en el análisis de las respuestas en este nivel de entendimiento, la mayoría de los estudiantes presentó carencias significativas en el uso y comprensión del significado de las letras como números generalizados y como variable.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

4.5 Resultados particulares del nivel 4 de entendimiento

Para la ubicación de los estudiantes en el nivel de mayor exigencia cognitiva, consideramos aquellos que eran capaces de emplear las 6 categorías descritas del uso de las letras. Los resultados obtenidos del análisis de las respuestas, nos indicaron que el 2.7% del total de la muestra quedaron ubicados en este nivel de acuerdo a los criterios establecidos en el Cuadro 1. En la tabla 6 se muestran los resultados de los alumnos ubicados en este nivel respecto a los ítems correspondientes al mismo.

Tabla 6 - Estudiantes del nivel 4: tipos de respuesta y usos de las letras

	Ítem								
	3	4e	7d	17a	18b	19	20	21	22
Tipo de respuesta									
Sin respuesta	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Correctas	1	5	5	4	4	1	5	4	5
Incorrectas	4	0	0	1	1	3	0	1	0
Uso de las letras									
Evaluada	4	0	0	0	0	0	0	1	0
Ignorada	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Como objeto	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Incógnita de valor específico	0	✓	0	0	0	3	0	✓	0
Número generalizado	✓	0	✓	✓	✓	0	0	0	✓
Variable	0	0	0	0	0	✓	0	0	0

Es importante enfatizar que los estudiantes situados en este nivel muestran avances significativos en cuanto a la comprensión de los diferentes usos y significados de las letras, pues la mayoría no deja sin respuesta ninguna de las tareas que le exigen un menor nivel de dificultad cognitiva. Otra evidencia de su mayor nivel cognitivo se manifestó al no haber encontrado respuestas incorrectas relacionadas con la omisión de las letras presentes en las tareas. Sin embargo, el análisis de las respuestas a las tareas 3 y 19, nos arrojan resultados poco satisfactorios relacionados con la comprensión y manejo de las letras como números generalizados y variables, ya que casi la totalidad de los estudiantes fueron incapaces de resolver de manera correcta la tarea 3, la cual implicaba una respuesta por medio de una expresión que inducía a la generalización del resultado. Otro aspecto a destacar, es el hecho de que sólo un estudiante ubicado en el nivel 4, fue capaz de contestar de manera correcta la tarea 19 que, como se mencionó anteriormente, estaba diseñada para propiciar que los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

estudiantes demostraran su capacidad para emplear y comprender el significado de las letras como variables. Así pues, sólo 5 estudiantes de los 194 de la muestra, el 2.7%, se sitúan en el nivel 4.

4.6 Resultados generales por niveles de entendimiento

La presente investigación permite vislumbrar de manera global dos resultados preliminares. El primero, que el cuestionario y las entrevistas han permitido conocer y caracterizar el bajo nivel de conocimientos algebraicos que los estudiantes tienen al ingresar a la Universidad, a través de los errores más comunes que han quedado evidenciados en esta investigación. La segunda es que los errores evidenciados en este estudio no corresponden al grado académico de los estudiantes. A continuación se fundamentan cada uno de ellos.

Con base a los resultados del análisis del total de respuestas de la prueba y a la clasificación de los estudiantes en los distintos niveles de entendimiento, reconocemos que en general todos los estudiantes ingresan con un bajo nivel algebraico como se muestran en la tabla 7.

Tabla 7 - Resultados generales por nivel de entendimiento

Nivel de comprensión	Número de alumnos	%
Nivel 0	0	0
Nivel 1	50	25.6
Nivel 2	105	53.8
Nivel 3	35	17.9
Nivel 4	5	2.7

Como se puede observar en la tabla 7, no encontramos evidencias de estudiantes que presentaran deficiencias en sus conocimientos algebraicos que los ubicaran en el nivel 0. Sin embargo, sí identificamos 50 estudiantes universitarios (25,6 %) que fueron ubicados en el nivel 1, ya que manifestaron un aceptable manejo de las letras al evaluarlas y las identificaron como objetos con valores propios. Sin embargo, en ocasiones ignoraron su presencia en las expresiones algebraicas y fueron incapaces de identificarlas con otro significado. Por otro lado, 104 estudiantes (53,8 %) mostraron, además de las habilidades propias del nivel 1, evidencias de, al menos, identificar las letras como incógnitas de valor específico. Pero al igual que los anteriores, tampoco fueron capaces de comprender el uso de las letras como números generalizados o variables.

Con estos resultados, corroboramos que la mayor parte de los estudiantes de nivel universitario que participan en esta investigación (79,4 %), a pesar de haber tomado cursos previos de algebra en los niveles educativos precedentes, poseen conocimientos algebraicos deficientes. También cabe señalar que 35 estudiantes manifestaron evidencias del manejo de las letras como números generalizados, lo que permitió ubicarlos en el nivel 3, una vez comprobadas sus competencias en la comprensión del uso y significado de las letras exigidos para superar los niveles inferiores. Debemos destacar que tan sólo 5 estudiantes se ubicaron en el nivel 4 de entendimiento, mostrandose una notable comprensión y manejo del uso y significado de las letras en sus más elevados niveles cognitivos. Finalmente, debemos mencionar que sólo un estudiante fue capaz de contestar de manera correcta el ítem 19, el único diseñado para ser resuelto por medio del uso y comprensión del significado de las letras como variables.

Este análisis nos brinda evidencias de que, aproximadamente, el 80% de los estudiantes sólo son capaces de reconocer el uso de las letras evaluadas, letras como objetos y letras como incógnitas con valor específico. Además, se detectó la recurrencia de ignorar, en una gran cantidad de respuestas de estos alumnos, la presencia de las mismas en las expresiones algebraicas que se les presentaron.

Por otra parte, sólo algo más del 20% de los estudiantes fueron capaces de identificar el uso de las letras como números generalizados: sólo cinco estudiantes mostraron evidencias parciales del uso de las letras como variables. Así mismo, sólo un estudiante fue capaz de responder, al mismo tiempo y de manera correcta a las tareas 3 y 19 diseñadas para evaluar el manejo de las letras como números generalizados y como variables.

De los resultados obtenidos en las pruebas, así como en las entrevistas semi-estructuradas realizadas, deducimos que esos errores no se corresponden al nivel educativo donde desarrollamos este estudio: los errores encontrados en las pruebas que realizó Küchemann (1980) con estudiantes de secundaria, aún prevalecen en las producciones de los estudiantes universitarios participantes en este estudio.

Los resultados obtenidos en este estudio sugieren que durante el paso de los cursos de matemáticas de los estudiantes, previos a su ingreso en la universidad, no adquieren conocimientos necesarios para ser capaces de concebir los distintos usos de las letras en álgebra. En consecuencia, no alcanzan a desarrollar un aprendizaje significativo global, en el que el significado de variable no se desarrolla, si bien se considera necesario en estudios universitarios que incluyan materias de álgebra.

5 Reflexiones finales

Partiendo de una situación problemática constatada por la literatura de investigación sobre el rendimiento en álgebra de estudiantes universitarios, hemos adoptado un instrumento elaborado por Küchemann (1980) que ha resultado apropiado para lograr nuestros objetivos, si bien ha resultado imprescindible adaptarlo al contexto mexicano. Los resultados de su aplicación nos han permitido analizar algunas de las causas de errores y los niveles de rendimiento de los sujetos analizados.

Destacamos que el total de los estudiantes participantes en esta investigación manifestaron respuestas incorrectas en la prueba aplicada. No obstante, no hubo evaluaciones erradas en su totalidad de los ítems para ninguno de los estudiantes; se constató que si bien existe capacidad en los estudiantes universitarios para la comprensión del uso de las letras en distintos contextos, no es la esperada en ese nivel educativo. Especialmente esto se ve refrendado en las respuestas incorrectas de la tarea diseñada, para evaluar el uso de la letras como variables: casi la totalidad de los estudiantes la contestaron de manera errónea y esto nos hace pensar que no comprenden ese significado de las letras.

Parece pues conveniente establecer líneas de apoyo encausadas para coadyuvar a los estudiantes universitarios a superar las dificultades que representan los diferentes usos de las letras en el álgebra. También parece necesario revisar con detalle el tratamiento que recibe el álgebra en los programas de estudio de los niveles de primaria, secundaria y bachillerato en cuanto al significado de las letras y especialmente en su papel de variable. Podría tambien ser interés, atender a la formación de profesores acerca del tratamiento escolar que deben tener los diferentes usos de las letras, para de esta forma, tratar de lograr un desarrollo más adecuado del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Referencias

BACKHOFF, E. y TIRADO, F. Habilidades y Conocimientos Básicos del Estudiante Universitario: hacia los estándares nacionales. **Revista de la Educación Superior**, México, D.F, v. 22, n. 88, p. 45-65, Diciembre. 1993.

BOOTH, L. R. Child methods in secondary mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Queensland, v. 15, n.12, p. 29-41, Feb. 1981.

BOOTH, L. R. Children's difficulties in beginning algebra. In: A. F. Coxford y A.P. Shulte (Ed.). **The Ideas of Algebra, K-12**.Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 20-32.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

CAPUTO, S. y MACIAS, D. Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura. "Algebra I" al elaborar demostraciones. En: Reunión anual de Comunicaciones Científicas de la Unión Matemática Argentina. 41., 2006, Buenos Aires, Argentina. Disponible en: <http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-012.pdf> Acesso en: 11 dic. 2012.

COLLIS, K. F. **A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint**, Melbourne: Australian Council for Educational Research, 1975.

DAVIS, R. B. Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations. **Journal of Children's Mathematical Behavior**, New Jersey, v.1, n. 3, p. 7-35, 1975.

FERREYRA,N.; RECHIMONT, E.; PARODI, C.; CASTRO, N. De la aritmética al álgebra. Experiencia de trabajo con estudiantes universitarios. UNION.**Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, La laguna, n. 21, p. 59-67,Mar. 2010.

HERNÁNDEZ , R.; FERNÁNDEZ, C y BAPTISTA P.**Metodología de la Investigación**. México: McGraw Hill, 1999.

HODGEN, J., KÜCHEMANN, D., Brown, M., & Coe, R. Children's understandings of algebra 30 years. **Research in Mathematics Education**, Reston, v. 11, n. 2, p. 193-194, Sep. 2009.

KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. In: D. A. GROUWS (Ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Information Age Publishing, 1990. p. 390-419.

KÜCHEMANN, D. Children's understanding of numerical variables. **Mathematics in School**, v. 7, n. 4, p. 23-26, Sep. 1978.

KÜCHEMANN, D. **The understanding of generalised arithmetic (algebra) by secondary school children.** 1980. 232h. Tesis (Doctoral en Filosofía) sin publicar,University of London, London, 1980.

LINCHEVSKI, L. Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. **Journal of Mathematical Behavior**, New Jersey, v. 14, n.1, p. 113-120, Mar. 1995.

MAC GREGOR, M. y STACEY, K. Students' understanding of algebraic notation: 11-15.**Educational Studies in Mathematics**, Queensland, v. 33, n.1, p. 1-19, Jun. 1997.

PALAREA M.M. La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones sobre una investigación. **Números. Revista de didáctica de las matemáticas**, Santa Cruz de Tenerife, v. 40, p. 3-28, Dic.1999.

PHILIPP, R. The many uses of algebraic variables. **Mathematics Teacher**, Reston, v. 85, n.7, p. 557-561, Oct. 1992.

POCHULU, M. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad. **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid, v. 35, n. 4, p.1-14,Mar. 2005.

RUANO, R. M.; SOCAS, M.; PALAREA, M. Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. **PNA**, Granada, v. 2, n. 2, p. 61-74, Ene.2008.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a26

URSINI, S. y Trigueros, M.¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?, **Revista Educación Matemática,** México, D.F, v 18, n. 3, p. 5-38, Editorial Santillana. 2006.

URSINI, S. y TRIGUEROS, M. How do high school students interpret parameters in algebra? In: M. J. HOINES y A. B. FUGLESTAD (Ed.). **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Norway: Bergen University College,2004. p. 361-368.

USISKIN, Z. Conceptions of school algebra and uses of variables. In: A. F. COXFORD. **The Ideas of Algebra, K-12**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics,1988. p. 8-19.

Submetido em Junho de 2013.
Aprovado em Setembro de 2013.

ANEXO IV

Memoria trabajo de investigación tutelada

ERRORES Y DIFICULTADES DE ESTUDIANTES MEXICANOS DE PRIMER CURSO UNIVERSITARIO EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS

José García Suárez, Isidoro Segovia y José Luis Lupiáñez

Universidad de Granada

Resumen

En diversas investigaciones se ha puesto de manifiesto las dificultades que presenta el aprendizaje del algebra en niveles preuniversitarios. La persistencia de errores al resolver tareas algebraicas en niveles universitarios observados en la práctica docente sugiere ampliar ese estudio a dichos niveles. En esta comunicación se recogen algunos resultados que se obtuvieron al aplicar una prueba a 153 estudiantes universitarios. Los resultados obtenidos muestran un alto índice de alumnos que presentan grandes deficiencias en sus conocimientos algebraicos básicos que no corresponden al nivel en donde se aplica la prueba. De este trabajo surge la idea de continuar con la investigación en esta dirección para profundizar el análisis de las probables causas que originan las dificultades que están en la base de esos errores.

Palabras clave: Álgebra, errores, estudiantes universitarios, tareas algebraicas

Abstract

In diverse investigations there have been revealed the difficulties that the learning of the algebra presents in pre-university levels. The persistence of errors in solving algebraic tasks in university level teaching practice observed in this study suggests extending these levels. In this work shows some results obtained by applying a test to 153 university students. The results show a high rate of students with serious deficiencies in basic algebraic skills that do not correspond to the level where the test is applied.From this work the idea arises to continue with the investigation in this direction to deepen the analysis of the probable causes that originate the difficulties that are in the base of those errors.

Keywords: Algebra, algebraic tasks, errors, university students

Introducción

Los errores son un tema de constante malestar en los docentes de todos los niveles educativos. En el desarrollo de la construcción de conocimientos matemáticos se presentan de manera sistemática los errores y es por eso que dicho proceso debe considerar criterios de diagnóstico, corrección y superación de los mismos.

Evidentemente, estos errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos y es imprescindible que los estudiantes los reconozcan y admitan la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje. Su análisis sirve para ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y contribuyen a una mejor preparación de instancias de corrección.

García Suárez, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 145-155). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Numerosas investigaciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Palarea, 1998; Fernández, 1997; Socas y Palarea, 1997; Kieran, 2006) han puesto de manifiesto las dificultades que presenta el aprendizaje del álgebra en niveles preuniversitarios. Estas investigaciones, desde una perspectiva cognitivista, se centran en el análisis de los errores que tienen los alumnos cuando resuelven tareas algebraicas y en la asociación de estos errores a diferentes tipos de dificultades (Ruano, Socas y Palarea, 2008), para después proponer y llevar a cabo propuestas curriculares que palien estas dificultades. La persistencia de errores en niveles universitarios observados en la práctica docente sugiere ampliar estos estudios a dichos niveles (Caputo y Macías, 2006).

En este trabajo se presentan resultados de un estudio exploratorio donde se pone de manifiesto que alumnos de primer curso de nivel licenciatura del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México, presentan un rendimiento claramente deficiente en la resolución de tareas algebraicas relativamente sencillas y propias de cursos no universitarios. En dicho estudio, los alumnos presentan una amplia gama de errores en la resolución de las tareas cuyo origen podría ser orientador para establecer propuestas curriculares que eviten estas tipologías de errores.

Así pues, este trabajo se centra en el análisis de los resultados estadísticos de las pruebas aplicadas así como el estudio de los errores que presentan estos estudiantes, así como en el análisis y la categorización de esos errores.

Objetivos

El objetivo de este trabajo fue el identificar, categorizar y analizar los errores en la resolución de tareas algebraicas cometidos por alumnos de nuevo ingreso en la universidad. Para ello se analizaron las respuestas de 153 sujetos en pruebas aplicadas durante el segundo semestre del calendario escolar 2008. De manera inicial se revisaron las respuestas de los alumnos identificando y tipificando los errores comunes en las pruebas examinadas de acuerdo con unas categorías propias propuestas considerando los contenidos de los ítems analizados; después se compararon estas categorías con algunas clasificaciones encontradas en la literatura previamente revisada. La continuidad del estudio se centrará en la exploración, el análisis y la descripción de las causas de los errores encontrados.

Marco teórico

La investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es una de las principales preocupaciones actuales de la Educación Matemática. Lupiáñez (2009), a partir de la propuesta de Rico (1995), propone cuatro prioridades de la investigación en torno a los errores:

1. Análisis, causas y tipologías de errores
2. Tratamiento curricular de los errores
3. Los errores y la formación del profesorado
4. Técnicas de análisis de los errores

Rico (1995) y Lupiáñez (2009) también presentan varias propuestas para la categorización de los errores así como investigaciones centradas en cada una de las líneas anteriores.

En Socas (1997), se consideran tres ejes, que permiten analizar el origen del error. De esta forma, podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculos: conocimientos adquiridos que demuestran su afectividad en ciertos contextos pero no válidos en otros.
- Ausencia de sentido: relacionado en las distintas etapas de aprendizaje de un sistema de representación, semiótica, estructural y autónoma.
- Actitudes afectivas y emocionales: Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

A continuación se presentan algunas categorizaciones y clasificaciones realizadas por diferentes autores y teniendo en cuenta distintos enfoques.

En Radatz (1979) propone una taxonomía de errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo cinco categorías generales para este análisis:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, que generalmente son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Se subdividen en cinco subtipos:
   - Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
   - Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
   - Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
   - Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
   - Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, que surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), se hace una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta, se determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. Datos mal utilizados.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.
3. Inferencias no válidas lógicamente.
4. Teoremas o definiciones deformados.
5. Falta de verificación en la solución.
6. Errores técnicos.

En lo que respecta a los errores asociados al álgebra, en Caputo y Macías (2006) se realiza un estudio desarrollado con alumnos de la asignatura Álgebra I, en el cual se destaca la importancia de considerar que los errores de los alumnos son valiosos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan. Por lo tanto, es importante analizarlos, para tratar de determinar las razones por las cuales los alumnos no logran concluir o realizar correctamente una demostración, detectar los posibles obstáculos con que se enfrentan y planificar en función de ellos las futuras intervenciones.

Como resultado de este trabajo se establecieron categorías, clasificando los errores encontrados en cinco tipos, que se mencionan a continuación:

1. Secuencias incoherentes, o a primera vista incomprensibles, en las que no se justifican, o se justifican de manera incorrecta, los pasos de la demostración.

2. Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico; en este sentido, se destacan los relacionados con los distintos contextos en los que se usan las letras en álgebra, los significados que las letras tienen en cada uno de esos contextos y los problemas de traducción del lenguaje usual al simbólico y viceversa.

3. Errores algebraicos elementales, debido a la insuficiencia de los conocimientos adquiridos en los niveles anteriores de enseñanza.

4. Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura.

5. No lograr concluir la demostración, o concluirla "por decreto" o con pasos "intermedios" incompletos.

En este mismo sentido, Palarea (1998) propone la siguiente organización de errores:

1. Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética. Y dentro de estos se distinguen:
    - Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.
    - Errores relativos al uso de recíprocos.
    - Errores de cancelación.
2. Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Metodología

De manera resumida el proceso de investigación parte de la constatación de unos resultados anómalos en la evaluación en la resolución de tareas algebraicas de los alumnos de primer curso de diferentes carreras y de la disponibilidad de información sobre esta cuestión a través de los exámenes que realizan año a año; se ha seleccionado un curso determinado, que implica un examen determinado, unos determinados alumnos y unos resultados; del análisis de esta información se extraen conclusiones.

En este estudio, la metodología está orientada al análisis de la problemática que se presenta en el Centro Universitario donde se realizó la investigación; hasta el momento no se había realizado análisis alguno de los resultados de los exámenes departamentales de Matemáticas I aplicados a los alumnos de primer curso de diversas carreras.

Población del estudio

La población considerada para efectuar la investigación fue la de estudiantes de primer curso del nivel de Licenciatura de las titulaciones de Licenciado en Administración de

Empresas, Licenciado en Turismo, Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales, Ingeniero en Obras y Servicios y Técnico Superior Universitario en Electrónica y Mecánica Automotriz, inscritos en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, en México.

Para el estudio se consideraron 153 estudiantes inscritos en la asignatura de matemáticas I en el curso académico 2008-2009. Los estudiantes de la población fueron escogidos en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo incidental, por lo tanto, no aleatoria, ya que los estudiantes se eligieron porque estaban inscritos en el curso de Matemáticas I.

Instrumento de análisis

El instrumento utilizado para este estudio es el Primer Examen departamental de Matemáticas I para el calendario 2008 B aplicado por el Departamento de Ingenierías de la institución educativa antes mencionada. Este instrumento consta de 10 ejercicios de desarrollo de operaciones de tipo algebraico. Evalúa contenidos procedimentales, distribuidos por los bloques temáticos que se muestran en la Tabla 1.

Numero de Ítem	Contenido algebraico
1 , 3	Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales
2 , 7	Aplicación de reglas de operaciones algebraicas
4 , 5	Desarrollo de reglas de productos notables
6 , 8	Factorización de expresiones algebraicas
9 , 10	Resolución de inecuaciones lineales

Tabla 1: Descripción del contenido de los ítems

La asignatura de matemáticas se caracteriza mayoritariamente por tener contenidos procedimentales. Por ello, el examen recoge en su totalidad, preguntas de contenido procedimental.

La construcción del examen que mide el nivel de conocimiento en Matemáticas al finalizar el primer bimestre del primer ciclo del curso de Matemáticas I se elaboró de la siguiente forma:

Cada inicio de ciclo se convoca a un equipo de trabajo con profesores de la academia de Matemáticas del Departamento de Ingenierías, compuesto de profesores que imparten asignaturas de Matemáticas en todas las titulaciones que se ofrecen en la institución citada.

Los profesores proporcionaban ejercicios, que ellos creen imprescindibles para superar la asignatura.

Se contó con la colaboración de docentes de distinto nivel educativo de la propia institución, para confirmar que existía un acuerdo en cuanto a los contenidos mínimos que debe saber un alumno para superar ese ciclo educativo y que sirvieran de antecedentes a cursos posteriores relacionados con las Matemáticas.

Una vez seleccionado el material que proponía el profesorado, se continúa contrastando estos contenidos con los objetivos curriculares y contenidos de la asignatura a evaluar y, finalmente, se comprobaba que los objetivos y contenidos seleccionados formaban parte de la bibliografía básica que aparece en los programas analíticos de la misma.

De todas estas fuentes de información, se seleccionaban aquellos contenidos que fueron compartidos por todas estas fuentes. Es decir, si consideraban que determinados contenidos eran conocimientos básicos, se confirmaban que estos contenidos estaban en los objetivos curriculares del ciclo y que, además, se trabajaba en los diferentes libros sugeridos como bibliografía básica. Cabe mencionar que la elección final de los ejercicios estaba a cargo de profesores que no impartían la asignatura en el ciclo que se iba aplicar la prueba para evitar algún tipo de sesgo por parte del diseñador final de la prueba.

La fecha para la aplicación de la prueba se acordaba considerando el calendario escolar vigente y además un periodo de tiempo adecuado según las experiencias de los profesores que impartían la asignatura en cuestión. Los alumnos se distribuían en grupos de aproximadamente 25 integrantes y bajo el criterio del orden alfabético de sus apellidos buscando con esta medida que no se concentraran los mismos alumnos que tomaban el curso en las diversas titulaciones.

La fecha programada para la aplicación de la prueba acudían los alumnos al mismo horario y se les daba un tiempo de dos horas para la resolución de la misma. Al iniciar la prueba se les daba a conocer las instrucciones normativas, destacando en la cuestión pedagógica que no se les permitía usar ningún tipo de instrumento electrónico de cálculo y se les insistía en la utilidad de desarrollar procedimientos en las hojas que se les proporcionaba para ese fin. Una vez terminada la aplicación de la prueba se entregaban las hojas de procedimientos y respuestas al responsable de la academia de matemáticas quien citaba a una reunión posterior para la evaluación de esta.

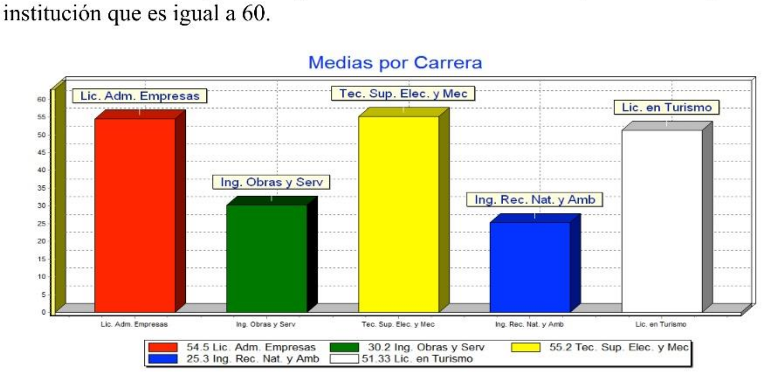
Finalmente, se reunían los profesores aplicadores para evaluar las pruebas, se les proporcionaba una guía de respuestas pero con la recomendación de considerar los procedimientos de las respuestas y consensuar cualquier duda acerca del valor que debería de asignarse a los mismos.

Resultados

Los resultados atienden principalmente a dos aspectos: El análisis cuantitativo de los datos de la prueba y la clasificación de los errores encontrados en las mismas.

Análisis cuantitativo de los datos

De acuerdo a los datos estadísticos obtenidos en este trabajo, se obtuvo de manera global una media de 43, por debajo de la calificación mínima aprobatoria requerida por la institución que es igual a 60.



Destacamos que las Licenciaturas de Ingeniero en Obras y Servicios e Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales son las de menor media obtenida, algo poco esperado al ser estudios donde se esperaría un mejor rendimiento en las asignaturas relacionadas con las matemáticas.

Análisis de los errores en la resolución de las tareas

Para iniciar el estudio de los errores de los ítems, se consideraron los datos obtenidos del análisis estadístico el cual nos indicaba la cierta tendencia de agrupamiento de los mismos debidos principalmente por la afinidad del contenido temático entre ellos. Por esta razón decidimos realizar el análisis 5 de los 10 ítems en qué consistía la prueba considerando el índice de dificultad que presentaban, de esta manera, una vez seleccionados los ítems representativos se procedió examinar cada una de las respuestas de las 153 pruebas aplicadas en esta investigación.

Inicialmente se distinguieron los errores que se presentaban en cada uno de los ítems de las pruebas, enseguida se clasificaban de acuerdo con criterios comunes de aquellos errores que coincidían entre las pruebas y finalmente se categorizaron de una manera más general tratando de resaltar las relaciones entre ellos. Por último, se clasifican los errores de acuerdo a las categorías existentes surgidas de investigaciones previas.

Se identificaron 11 tipos de errores particulares en la resolución de las tareas algebraicas. Dichos errores son los siguientes:

I. Eliminación incorrecta de denominadores.

II. Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas.

III. Procedimiento inconcluso.

IV. Procedimientos propios incorrectos e inferencias no validas.

V. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común.

VI. Asociación incorrecta de productos notables.

VII. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra.

VIII. Error en la determinación de la potencia de otra potencia.

IX. Resolución aditiva de la potencia de un binomio.

X. Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio.

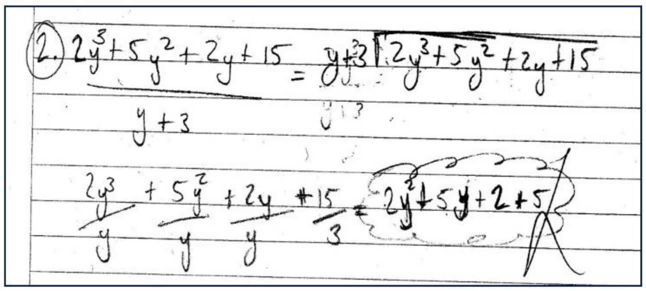
XI. Error al realizar productos de polinomios.

La frecuencia con la que se presentaron estos errores se pueden observar en la Tabla 2, donde E_t representa el número total de de errores.

Ítem	Errores												E_t
	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii	ix	x	xi	xii	
2	0	10	0	46	0	0	0	0	0	0	0	0	56
3	0	23	0	28	0	0	0	0	0	0	0	19	70
5	0	0	0	20	0	0	0	15	47	4	14	0	100
8	0	0	0	15	52	16	9	0	0	0	0	0	92
10	71	15	8	38	0	0	0	0	0	0	0	0	132
Total	71	48	8	147	52	16	9	15	47	4	14	19	

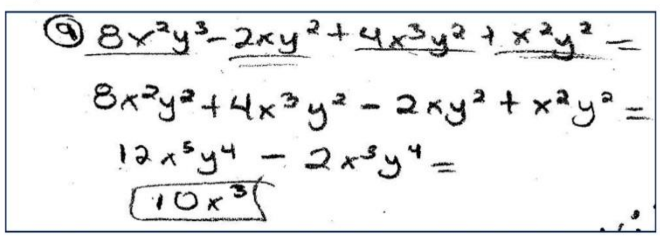
Tabla 2: Errores por ítem

Algunos ejemplos de los errores encontrados los presentamos a continuación:



En este ejemplo, ubicado en la categoría *procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas*, podemos ver como el alumno inicialmente plantea el procedimiento a seguir pero lo desarrolla utilizando un procedimiento propio incorrecto aparentemente intentando adaptar un conocimiento previamente adquirido del cual le cuesta trabajo desprenderse y pretende aplicarlo en cualquier situación.

El ejemplo siguiente se ubica en la categoría *uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra*:



Consideramos importante destacar este ejemplo ya que muestra cómo un alumno de nivel superior recurre a conocimientos básicos de niveles de educación inferiores no correspondientes al nivel donde se aplica las pruebas.

Una vez analizados los errores se procedió a buscar su relación con las clasificaciones previas encontradas en la bibliografía consultada, obteniendo los resultados que muestra la Tabla 3.

Descripción del error encontrado	Radatz (1979)	Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	Caputo y Macías (2006)
i. Eliminación incorrecta de denominadores	Aprendizaje deficiente	Técnico	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
ii. Errores al realizar operaciones aritmético-algebraicas	Aprendizaje deficiente	Técnico	Errores algebraicos elementales
iii. Procedimiento inconcluso			No lograr concluir la demostración
iv. Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas	Errores de asociación	Inferencias no válidas lógicamente	Secuencias incoherentes
v. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común	Aprendizaje deficiente	Teoremas o definiciones deformadas	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
vi. Asociación incorrecta de productos notables	Asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento		Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
vii. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra	Aprendizaje deficiente		Errores algebraicos elementales
viii. Error en la determinación de la potencia de otra potencia	Aprendizaje deficiente	Técnico	Errores algebraicos elementales y desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
ix. Resolución aditiva de la potencia de un binomio	Aprendizaje deficiente		Errores algebraicos elementales
x. Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio	Aplicación de reglas irrelevantes	Teoremas o definiciones deformadas	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades

Descripción del error encontrado	Radatz (1979)	Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	Caputo y Macías (2006)
xi. Error al realizar productos de polinomios	Aprendizaje deficiente	Errores técnicos	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades

Tabla 3: Errores encontrados en relación con diferentes clasificaciones

Conclusiones

En relación con el rendimiento de los alumnos de cada carrera, es importante resaltar que los datos obtenidos nos muestran un fenómeno aparentemente poco lógico, al ser las carreras de Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales con un promedio de 25.37 e Ingeniero en Obras y Servicios con un promedio de 30.22, las que presentan los más bajos promedios siendo estas carreras de corte científico – tecnológico, lo cual implicaría un mayor nivel de conocimientos de los alumnos aceptados en ellas. Estos rendimientos pueden ser relacionados con la baja demanda de aspirantes que, de manera histórica, tienen estas carreras y que ocasiona que no haya un puntaje mínimo de admisión para el ingreso a las mismas, lo que se refleja en las bajas puntuaciones que obtienen los aspirantes a estas carreras, en la Prueba de Aptitud Académica que aplica la Universidad para su aceptación. Y como se demuestra en este estudio, resulta estar muy relacionado con el rendimiento que tienen una vez en el primer curso.

Es importante destacar que, en este estudio se ha puesto de manifiesto la grave problemática que se presenta con respecto al bajo rendimiento de los alumnos, lo que de manera inicial se evidencia con los datos estadísticos obtenidos en esta investigación.

Al mismo tiempo, se encuentra errores que no corresponden al nivel de estudio en el que se realizó la investigación, aparentemente ocasionados por deficiencias de los alumnos en su formación matemática en niveles de bachillerato y secundaria, anteriores a su ingreso al nivel de Licenciatura. Considerando lo anterior, en un futuro trabajo se pretende descubrir las causas y los errores específicos que pueden ser el origen de estos bajos rendimientos.

El aporte que consideramos importante de este trabajo es que se propone una clasificación más específica para el tipo de tareas algebraicas.

Finalmente, consideramos la presente investigación como un punto de partida importante, para exponer con mayor detalle las causas de esta problemática, para que le sirva a la Institución Universitaria para proponer vías de soluciones internas y, a la vez, que pueda manifestar a las instituciones de nivel medio y medio superior, las deficiencias con las que se reciben a los alumnos al momento de ingresar y, de esta manera, tratar de que se involucren desde su perspectiva a la solución del tema tratado.

Referencias

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Dordrecht: Kluwer Academics Publisher.

Caputo, S. y Macías, D. *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones*. Descargado el 30 de agosto de 2010 de http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematical education: Past, present and More* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

León, O.G. y Montero, I. (2003). *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* Madrid: McGraw-Hill.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje desde una perspectiva curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. y Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna.

Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 16-20.

Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2*(2), 61-74.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. En L. Rico (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Ice - Horsori.

Socas, M. M., Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el algebra escolar. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14*, 7-24.