DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA

LA COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA EN LOS PRIMEROS NIVELES DE SECUNDARIA

Tesis Doctoral presentada por:
Fany Markela González Barrios

Bajo la dirección de:
Dr. D. Enrique Castro Martínez

Granada, 2015

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autora: Fany Markela González Barrios
ISBN: 978-84-9125-629-8
URI: http://hdl.handle.net/10481/43328

Este trabajo ha sido realizado en el Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico", dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Financiado también por la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) en conjunto con el Instituto para el Aprovechamiento de Recursos Humanos (IFARHU) del Gobierno Nacional de Panamá, República de Panamá.

AGRADECIMIENTOS

Sean mis más sinceros agradecimientos a mi Director de Tesis Doctoral el Dr. D. Enrique Castro Martínez, por creer en mí y dirigir mi trabajo, su disposición permanente, su abnegada labor de enseñanza, por su sutileza de hacerme sentir bien en momentos de tensión, por sus sugerencias, guías, aliento y principalmente por la paciencia demostrada. A ti, Enrique, gracias!

También quiero agradecer efusivamente a mi tutor de Tesis de Fin de Máster el Dr. D. Francisco Fernández García, por la confianza y orientaciones para continuar en este camino. Todo esto siempre acompañado de consejos y una gran sonrisa que llena el espíritu de alegría y bienestar. Gracias “Paco”.

Agradezco a toda mi familia, mis hijas, mis padres, hermanos y sobrinos.

Al Gobierno de Panamá, en especial a las instituciones SENACYT- IFARHU por su apoyo económico y la oportunidad que brinda a muchas panameñas como yo, de alcanzar esta meta.

A mis amigos y compañeros en general, los conocidos en Granada y en Panamá, en especial a Rosario y Danellys por su apoyo incondicional, antes y durante mi estancia en Granada. Gracias chicas!

Dedicado con Amor

a

Natalia y Linda

ÍNDICE GENERAL

V. Capítulo 5. Descripción de las entrevistas

LISTA DE TABLAS

Página

LISTA DE FIGURAS

Página

INTRODUCCIÓN

La revisión de trabajos previos relativos al tema de las representaciones externas, y específicamente del uso de diagramas en la resolución de problemas, nos ha llevado a plantearnos estudiar el pensamiento de los estudiantes cuando traducen de una representación a otra en problemas de comparación multiplicativa. Indagamos sobre las producciones de los estudiantes en tareas de traducción entre representaciones, en las que se les da una tarea en un tipo de representación y tienen que traducirla a otro tipo de representación. Concretamente les pedimos a los estudiantes que traduzcan problemas de comparación multiplicativa a partir y entre enunciados verbales, simbólicos y gráficos.

Desarrollo de la Investigación

Hemos desarrollado un trabajo en el que tras la revisión de antecedentes, que nos ha permitido obtener el estado de la cuestión, elaboramos nuestro Marco Teórico con vistas al diseño y elaboración del material para la recogida de datos, que ha constado de dos fases.

La primera aproximación empírica que hicimos en este trabajo fue la construcción y administración de un cuestionario cuya finalidad ha sido indagar cómo los estudiantes abordan, de forma individual con lápiz y papel, tareas de traducción entre enunciados con formato verbal, gráfico y simbólico. Hemos aplicado dicho material en cuatro aulas de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La aplicación del material fue realizada por los profesores habituales con la presencia de la investigadora, ambos, actuando como observadores del proceso de resolución.

El primer cuestionario (véase Anexo A), el que denominamos PRIMERA APROXIMACIÓN. PROBLEMAS DE 1º DE ESO, fue confeccionado para ser aplicado a estudiantes de primer curso de educación secundaria obligatoria, está conformado por un total de seis problemas o tareas que involucran a la comparación multiplicativa, con dos apartados cada uno. Los seis problemas los hemos agrupado en bloques que contiene dos problemas cada uno, agrupando en dichos bloques aquellos problemas con formatos de enunciados comunes. En el bloque 1 agrupamos las tareas 1 y 2 con enunciado verbal, en el bloque 2, las tareas 3 y 4 con enunciado simbólico, y el bloque 3, las tareas 5 y 6 con enunciado gráfico. Todos los problemas de este cuestionario son de una etapa o problemas simples que pueden resolverse de forma aritmética o algebraica.

La segunda aproximación empírica que hemos realizado ha sido una entrevista individual con alumnos de segundo de la ESO seleccionados ad hoc. Pretendemos con ella indagar si los estudiantes son conscientes de las respuestas gráficas que producen y si tienen preferencia por obtener la respuesta aplicando una forma de representación frente a otra.

Finalmente realizamos el análisis de las producciones de los estudiantes, en ambas aproximaciones de forma independiente, permitiéndonos redactar la elaboración del informe de tesis que consta de los siguientes seis capítulos.

Contenido del informe de tesis

El capítulo 1 contiene el planteamiento del problema en el que explicamos las razones de su abordaje y los objetivos que pretendemos alcanzar relativos a los diversos tipos de traducciones duales entre la representación verbal, la gráfica (diagramas) y la simbólica (expresiones aritméticas y algebraicas simples). Estos tipos de traducciones los hemos realizado sobre problemas de comparación multiplicativa de referente y comparado desconocidos.

El capítulo 2 trata de los aspectos teóricos y de fundamentación de la tesis. Los apartados tratan ideas relativas a las representaciones, especialmente las que toman un formato de diagrama y su papel en la resolución de problemas de comparación multiplicativa. (Este apartado hay que mejorarlo cuando leamos el capítulo 2).

El capítulo 3 desarrolla el marco metodológico de la investigación, constituido por dos partes complementarias. En la primera parte se describe la metodología de recogida de datos mediante pruebas escritas de lápiz y papel. La segunda parte describe la metodología seguida en la entrevista.

El capítulo 4 contiene los resultados de las traducciones entre representaciones, estas traducciones se han planificado y analizado por parejas de representaciones, son pues traducciones duales realizadas de dos en dos: verbal-simbólica, verbal-gráfica, simbólica-verbal, simbólica-gráfica, gráfica-verbal, gráfica-simbólica.

En el capítulo 5 afianzamos y profundizamos en el conocimiento de algunos de los aspectos claves de la investigación a través de entrevistas individuales. En él hemos descrito de forma sintética el transcurso de las entrevistas y las apreciaciones e interpretaciones que de ellas inducimos.

El capítulo 6, sintetiza nuestros hallazgos y conclusiones respecto al conocimiento de aspectos relativos a la forma en la que los estudiantes de primero de la ESO se desenvuelven cuando realizan tareas en las que están involucradas diversas representaciones, contextualizadas en los problemas de comparación multiplicativa.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Resolver problemas enunciados verbalmente de carácter aritmético y algebraico es un aspecto clave del currículo de matemáticas en la Enseñanza Obligatoria, pero también es uno de los aspectos más problemáticos del currículo de matemáticas. ¿Por qué esto es así? ¿Cómo podemos ayudar a los escolares en estas tareas? (Ng y Lee, 2009). Consideramos que la respuesta a estas y otras interrogantes pasa por realizar estudios que se centren en categorías específicas de problemas, en los que se analicen en profundidad los procesos de resolución con estudiantes de un nivel escolar determinado. Nuestro trabajo de tesis aborda puntualmente la resolución de problemas de comparación multiplicativa con estudiantes españoles de primero de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Dada la importancia de las representaciones en el pensamiento matemático, en la comprensión y resolución de problemas, nuestro trabajo aborda distintos procesos de traducción entre representaciones, debido al papel que se le otorga a las traducciones entre representaciones como referente evaluador de la comprensión en matemáticas.

1.1 Motivación del estudio

Desde la aparición de la Teoría del Procesamiento de la Información (Newell y Simon, 1972), los investigadores ligados a esta teoría centraron su interés en los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas. Esta teoría considera dos etapas fundamentales en la resolución de un problema: la *representación mental* del problema que da lugar al espacio de solución de la persona que lo resuelve o resolutor y, *la búsqueda de una solución* en el espacio del problema, que está determinada obviamente por la representación mental inicial que el resolutor hace del problema, empleando estrategias generales o heurísticos. Ambos aspectos han sido, por separado, centro de interés en investigaciones realizadas sobre resolución de problemas (Newell y Simon, 1972). Tanto la resolución de problemas como el uso de representaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, son áreas que presentan grandes dificultades, siendo temas ampliamente estudiados por investigadores dentro de la Didáctica de la Matemática. Las investigaciones referentes a este tema han tratado de diferenciar entre lo que son las representaciones mentales o representaciones internas, de las representaciones externas (Kaput, 1992; Goldin, 1998; Duval, 1999). La representación mental, entendida esta "*como la interpretación o comprensión que del mismo realiza la persona que tiene que resolverlo*" (Chi y Glaser, 1986, p.300).

En el Grupo Pensamiento Numérico y Algebraico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se han desarrollado estudios referentes a los temas antes mencionados (Cañadas, 2007; Castro, 1994; Espinosa, 2004; Fernández, 1997 a; González, 2010; Martínez, 2011). Nuestro trabajo de investigación toma como referencia fundamental el trabajo hecho por Castro (1994) "*Niveles de Comprensión en Problemas Verbales de Comparación Multiplicativa"* focalizado en la representación mental que el estudiante construye durante la resolución de un problema verbal de comparación multiplicativa. En esta tesis se considera como centro de la investigación la actuación de los estudiantes en la comprensión de los problemas verbales de comparación multiplicativa, situándole dentro de la Cognición Matemática.

Tomando como referencia el trabajo anterior pretendemos estudiar la influencia de las representaciones gráficas y su relación con las representaciones verbales y simbólicas en los problemas de comparación multiplicativa. Hacemos especial hincapié en los diagramas como una forma gráfica de representar la comparación multiplicativa. En nuestro trabajo estamos interesados en la construcción de diagramas por parte de los resolutores a partir de problemas de comparación multiplicativa, en la interpretación que le dan a los mismos y los procesos seguidos para su construcción. Todo esto dentro de una estratégica metodológica de traducción o paso de lo verbal a lo simbólico y gráfico, en la que es importante observar cómo resuelven los problemas verbales de comparación multiplicativa de enunciado inconsistente, y a la vez observar si cometen errores como el error de inversión en estos casos.

1.2 Las representaciones

En la literatura especializada sobre resolución de problemas se utiliza el término representación para referirse a la representación interna del problema que construye el resolutor, o bien a las formas externas de carácter semiótico en las que se plantea, reformula o resuelve un problema, y a las que se denominan representaciones externas. Representaciones externas son las que se realizan mediante el uso de lápiz y papel, entendiéndolas en el sentido de Castro y Castro (1997) como: "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como su características y propiedades más relevantes" (pp. 96).

La importancia de las representaciones externas en el proceso de aprendizaje y resolución de problemas ha sido ampliamente subrayada (Cuoco y Curcio, 2001; Goldin, 2002; Janvier, 1987; Martínez, Fernández y Flores, 2011), figurando como uno de los principales elementos a investigar la utilización de representaciones visuales en la resolución de problemas. Al respecto Hiebert y Carpenter (1992) subrayan que podemos concebir la comprensión de una operación matemática como las conexiones que el sujeto puede establecer entre las diferentes situaciones y representaciones de esa operación. Los diagramas, gráficas, imágenes y otros tipos de representaciones externas se utilizan en diversas actividades de carácter cognitivo como aprendizaje, comprensión, resolución de problemas, o toma de decisiones. Nuestro trabajo se centra en los diagramas como un modo de representación de relaciones matemáticas y el modo en que los estudiantes los conciben cuando resuelven problemas enunciados verbalmente. Un diagrama es una representación visual que presenta la información en una disposición espacial (Diezmann y English, 2001). Los diagramas se consideran como representaciones estructurales en los que los detalles superficiales no son importantes. En resolución de problemas, un diagrama puede servir para representar la estructura de un problema, por lo que puede ser una herramienta útil en la comprensión del mismo.

Se ha resaltado su importancia en la fase de comprensión o representación de los problemas aritméticos o algebraicos de enunciado verbal, ya que pueden ser utilizados para ayudar a descomprimir la estructura de un problema, y así sentar las bases para su solución. Son útiles también para simplificar una situación compleja, para hacer los conceptos abstractos más concretos y obtener resultados de forma sencilla (Diezmann y English, 2001; Novick, Hurley y Francis, 1999). Beckman (2004) señala que sin un diagrama los problemas pueden ser más difíciles de resolver. Novick, Hurley y Francis (1999) proponen tres tipos de diagramas para representar los problemas verbales: red, matriz y jerarquía, los autores les denominan diagramas espaciales, los cuales facilitan la resolución de problemas.

Entre las primeras investigaciones que han hecho hincapié en la importancia de cultivar en los estudiantes capacidades en el uso de la heurística, que incluye la promoción de diagramas tenemos el trabajo de Pólya (1945), y en un estudio posterior, Schoenfeld (1985) confirma la eficacia de la heurística y el uso de diagramas como estrategia para la resolución de problemas. Entre las múltiples estrategias que se han sugerido para mejorar la eficacia en la solución de problemas de matemáticas, el uso de diagramas ha sido descrito uno de los más eficaces. Hembree (1992) encuentra mediante el empleo del meta-análisis que el uso de diagramas fue la más eficiente entre las estrategias que se habían sugerido como ayuda para la solución de problemas.

La utilización de diagramas está presente en los trabajos de Willis y Fuson (1988) y Fuson y Willis (1989) en los que mostraron la mejora que ocasiona el uso de diagramas en la resolución de problemas. Enseñando a los estudiantes de segundo grado de educación primaria a utilizar diferentes diagramas esquemáticos para representar diferentes categorías de problemas verbales (cambio, combinación y comparación), que involucran suma y resta, encuentran que los estudiantes fueron capaces de hacer el diagrama correcto para una categoría determinada, siendo los problemas de comparación más difíciles, incluso con la ayuda de los diagramas esquemáticos. El trabajo posterior de Marshall (1995) subraya la importancia en la utilización de diagramas esquemáticos como ayuda para la conceptualización de un gran número de problemas matemáticos. De este modo los problemas aritméticos de suma y resta requieren de diversos esquemas que ayuden a los estudiantes a formarse una representación adecuada para su resolución. Los resolutores necesitan conocimiento estratégico para elegir los esquemas adecuados a los distintos tipos de problemas que mejoren la representación de los mismos (Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003). Otros estudios han demostrado empíricamente los efectos beneficiosos de la presentación de un diagramas específico o representaciones visuales en la resolución de problemas

(Ainsworth y Th Loizou, 2003; Cheng, 2004; Mayer, 2003). Los diagramas también se consideran como una especie de representaciones visuales que pueden ser utilizados como una poderosa herramienta para el pensamiento matemático y la resolución de problemas.

1.3 Los diagramas

El diagrama de un problema se centra en la representación de las características estructurales y no en los detalles superficiales del problema (Pantziara, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004). Estos autores han explorado el papel de los diagramas de problemas no rutinarios con alumnos de 12 años. Los resultados del estudio mostraron que los diagramas facilitaron la solución de los problemas para algunos estudiantes, mientras que causaron dificultades en los procedimientos de solución de otros estudiantes. Por lo tanto, un diagrama concreto no tiene el mismo impacto en todos los estudiantes. Para utilizar diagramas efectivamente, los estudiantes deben desarrollar la capacidad de traducir el problema verbal en una representación esquemática, y la capacidad de interpretar un diagrama en términos de un problema verbal dado (Diezmann e Inglés, 2001).

El uso de diagramas ha sido identificado como una de las estrategias de solución de problemas y ha sido incorporada como elemento metodológico en propuestas para mejorar la eficiencia en la solución de problemas matemáticos (Lewis, 1989; Uesaka, Manalo e Ichikawa, 2007; Yancey, Thompson y Yancey, 1989; Van Garderen, 2007). Van Garderen (2007) introduce a los estudiantes en dos tipos de diagramas: los diagramas lineales que generalmente se utilizan para ordenar linealmente un conjunto de elementos, y los diagramas parte-todo, que los utiliza para agrupar los elementos de un conjunto en subconjuntos, en los que resalta la estructura partitiva y la estructura parte todo de la suma.

Los diagramas también se han utilizado como facilitadores en el proceso de resolución. Pantziara, Gagatsis y Elia (2009) mostraron que la presencia de los diagramas no aumenta el rendimiento general de los estudiantes en la resolución de problemas no rutinarios. Sugieren como implicación de las conclusiones obtenidas, que los profesores pueden dar oportunidades a los estudiantes no sólo a utilizar diagramas, sino también para inventar o buscar su propia estrategia de solución, incluyendo la construcción activa y el uso de diagramas como herramientas en la solución de problemas.

Hay estudios sobre resolución de problemas basados en la instrucción, con el objeto de que los resolutores no cometan o superen el error de inversión que se producen en los problemas enunciados de lenguaje inconsistente (Lewis, 1989). El autor utiliza la instrucción fundamentada en un sólo tipo de problemas. Lleva a cabo un programa de instrucción para resolver los problemas de comparación, con lenguaje inconsistente (LI), de acuerdo con su hipótesis de inconsistencia del lenguaje.

Por su parte Schnotz y Bannert (2003) presentan una visión integrada de aprendizaje a partir de las representaciones verbales y pictóricas. Consideran el aprendizaje como un proceso orientado a las tareas de la construcción de múltiples representaciones mentales. La construcción de estas representaciones incluye la selección y la organización de la información, el análisis de estructuras simbólicas, la cartografía de las estructuras análogas, así como la construcción de modelos y la inspección del modelo.

Jitendra (2002) menciona que una de las características principales de una estrategia de representación gráfica que lo distingue de otros enfoques es el uso de diagramas esquemáticos que permiten a los estudiantes organizar la información, facilitar la traducción y la solución del problema. Encuentra que los diagramas son beneficiosos para los estudiantes con deficiencia de aprendizaje y que estos estudiantes son capaces de recordar su uso y utilizarlos en otros problemas que se les presentan. La representación externa (por ejemplo diagramas) puede servir para reducir la carga de un alumno del procesamiento cognitivo y poner a disposición los recursos mentales para participar en el análisis de problemas y la solución (Jitendra, 2002).

Por otro lado varios estudios han mostrado que los diagramas son más útiles cuando los inventan los participantes que cuando se les proporcionan (Cox, 1999). En esa misma línea, (Castro, Morcillo y Castro, 1999) obtienen que en resolución de problemas de matemáticas los estudiantes de primero de la ESO (estudiantes de 12 y 13 años), utilizan de forma espontánea una amplia variedad de estrategias de carácter gráfico. En este estudio el empleo de estrategias gráficas está asociado a ciertos problemas y, en ellos este tipo de estrategias son más eficaces de cara a obtener la solución correcta que las estrategias de carácter simbólico, evitando que los estudiantes cometan errores persistentes. Sin embargo, no hay acuerdo unánime sobre su utilidad, pues hay resultados de estudios que han concluido que los diagramas espontáneos no siempre son eficaces (De Bock, Verschaffel, Jansen, Van Dooren y Claes, 2003; Van Essen y Hamaker, 1990), mientras que otros estudios señalan que los diagramas construidos por los propios estudiantes son heurísticos de gran alcance en situaciones que involucran resolución de problemas (Koedinger y Terao, 2002). La presentación de la imagen previa a la presentación de la narración es más beneficiosa para la comprensión que la presentación de la imagen posteriormente a la narración (Verdi, Johnson, Stock, Kulhavy y Whitman-Ahern, 1997).

1.4 Problemas de comparación multiplicativa

Tratamos estas ideas sobre la utilidad de los diagramas con problemas verbales de comparación multiplicativa con enunciado inconsistente (Lewis y Mayer, 1987). Los problemas de comparación son considerados uno de los problemas más difíciles para los estudiantes (Stern, 1993), en los que los estudiantes suelen cometer errores persistentes (Castro, 1994; Castro, Rico y Castro, 1992). Una línea importante de investigación ha estudiado los problemas verbales de comparación (Briars y Larkin, 1984; Riley y Greeno, 1988). Debido a su complejidad lingüística y matemática, los estudiantes tienen dificultades para entender y resolver estos problemas (Pape, 2003). No suelen ser tratados explícitamente como tareas escolares, por lo que están desprovistos de influencia de la enseñanza recibida y, por tanto, son útiles para detectar actuaciones de los escolares que estén desligadas de la instrucción previa. Estos problemas describen relaciones estáticas entre cantidades que se enuncian empleando términos como: *veces más que*, *veces menos que,* y en este trabajo empleamos la frase relacional *veces tanto como* (“time as many as” en inglés). En los problemas de comparación multiplicativa intervienen tres cantidades: el *referente, el comparado* y el *escalar*. Cualquiera de las tres cantidades puede ser la incógnita del problema, en el caso de que el referente sea la cantidad desconocida se dice que el enunciado del problema es inconsistente, si lo es el comparado, se denomina enunciado consistente (Lewis y Mayer, 1987). En los primeros no hay conflicto y en los segundo sí lo hay. Señalan que los resolutores tienen un orden de preferencia en la presentación de la información y que resuelven mejor los problemas que presentan este orden, que son precisamente los problemas de lenguaje consistente. En estos problemas, la cantidad desconocida es el sujeto de la segunda frase; pero, en los problemas de lenguaje inconsistente, la cantidad desconocida es el objeto de la secuencia relacional y cuando se presenta un problema inconsistente, en este caso lo que hace el resolutor es reorganizar la frase mentalmente y reconvertir el problema al formato primero, al consistente. Lo que hace la reorganización es invertir el sujeto y objeto de la secuencia relacional, y también la operación sugerida por el término relacional. Esta reorganización es lo que hace más probable el que se cometan errores en los problemas con lenguaje inconsistente que en los de lenguaje consistente.

1.5 OBJETIVOS DEL ESTUDIO

1.5.1 Objetivo 1

- Analizar el tipo de representación simbólica y gráfica que producen estudiantes de primer curso de secundaria a partir de problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa.

1.5.2 Preguntas

Mediante este objetivo nos planteamos analizar los procesos de pensamiento de los resolutores ligados al empleo de diagramas cuando se les enfrenta a la resolución de problemas de comparación multiplicativa.

Para estudiar el papel que desempeñan los diagramas en la resolución de problemas de verbales comparación multiplicativa nos hemos planteado las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa?
b) ¿Qué competencia muestran los estudiantes al representar un problema verbal mediante un diagrama?
c) ¿Qué tipos de diagramas construyen?
d) ¿Qué variantes de diagramas integrados utilizan los resolutores?
e) ¿Qué influencia tiene sobre lo anterior el problema de comparación utilizado?

1.5.3 Objetivo 2

- Analizar el tipo de representación verbal en forma de enunciados de problemas de comparación multiplicativa y gráfica que producen estudiantes de primer curso de secundaria a partir de expresiones en forma simbólica.

1.5.4 Preguntas

Normalmente en el ámbito escolar a los estudiantes se les plantean problemas enunciados verbalmente que tienen que traducir a un modelo o una expresión matemática. El proceso de traducción inverso en el que a partir de un modelo o expresión simbólica de carácter matemático tienen que inventar problemas o construir un gráfico es muy útil para conocer su competencia como resolutores y sus procesos de pensamiento. En este bloque les planteamos a los estudiantes un proceso inverso de traducción en el que tienen que inventar un problema de comparación y dibujar un diagrama que se ajuste a una relación multiplicativa con una de sus tres cantidades componentes desconocidas.

Con respecto a esto nos planteamos las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las características de los problemas que enuncian los estudiantes de primero de la ESO a partir de una ecuación o expresión simbólica simple?
- ¿Qué tipos de diagramas dibujan asociados a estas expresiones simbólicas?

1.5.5 Objetivo 3

- Analizar el tipo de representación verbal y simbólica en forma de enunciados comparativos que producen estudiantes de primer curso de secundaria a partir de problemas de comparación multiplicativa dados de forma gráfica.

1.5.6 Preguntas

La mayoría de las investigaciones que se han centrado su atención en los diagramas en la resolución de problemas, lo hacen desde la perspectiva de que los diagramas son una ayuda para resolver problemas. No se han planteado que el resolver un diagrama constituye un problema en sí mismo, que puede coincidir semánticamente o no con el problema de enunciado verbal que representa. Por ello, para conocer mejor la función de los diagramas en la resolución de problemas nos planteamos las preguntas:

a) ¿Qué problemas enuncian a partir de un enunciado gráfico?
b) ¿Cómo interpretan los estudiantes los dos tipos de diagramas presentados?
c) ¿Qué competencia muestran los estudiantes al representar un problema gráfico mediante una ecuación?

d) ¿Cuáles son los distintos tipos de variables que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas gráficos de comparación multiplicativa?

1.5.7 Objetivo 4 *(primera parte).*

1. Indagar si los estudiantes son capaces de captar la singularidad de los diagramas que construyen.

Para ello, les pedimos a los entrevistados que:

a) Dibujen un diagrama a partir de un problema verbal de comparación multiplicativa, en el que observaremos el tipo de diagrama y la estrategia que utilizan en su construcción.

b) Identifiquen el diagrama que construyen en un conjunto de diagramas lineales que representan distintas posibilidades. Con ello nos aseguramos de la consistencia de las respuestas emitidas a la petición que les hacemos de dibujar un diagrama.

Observaremos cómo interpretan los diagramas, si los interpretan como una relación parte - todo o como relación de comparación. Si los interpretan de forma aditiva o de forma multiplicativa.

1.5.8 Objetivo 4*(segunda parte).*

2. Profundizar en el modo en que los estudiantes priorizan las características de las representaciones gráficas (diagramas) y simbólicas, así como las formas de abordaje de problemas.

Para ello, les planteamos a los entrevistados diagramas que contienen dos relaciones cuantitativas, junto con representaciones simbólicas, que constituyen problemas de dos pasos para que los resuelvan.

Observamos en el proceso de resolución cuál de las representaciones priorizan, si manifiestan dificultades y si aparece la idea de comparación o no en sus respuestas.

Todo esto nos motiva a plantearnos un proceso de actuación en nuestro estudio que consta de cinco pasos fundamentales:

1. Identificar un conjunto de problemas verbales correspondientes al esquema de comparación multiplicativa, cuyas características varían en función a variables de tareas.

2. Elaborar pruebas de lápiz y papel con los problemas verbales identificados en la fase primera y presentarlas a los estudiantes para que resuelvan los problemas en ellas contenidos.

3. Realizar un análisis que nos permita identificar categorías con aquellos grupos similares en comportamiento, tanto en resolución de problemas, como en la interpretación de diagramas.

4. Verificar mediante una entrevista la consistencia del comportamiento de los estudiantes y sus procesos de resolución.

5. Establecer conclusiones.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

El marco teórico que presentamos y que utilizamos en esta tesis se centra en el ámbito de las representaciones y la resolución de problemas aritméticos simples, de una etapa, de estructura multiplicativa y que corresponden a la categoría semántica de comparación.

Una de las estrategias de enseñanza-aprendizaje y resolución de problemas que, a lo largo del tiempo, ha recibido atención es el empleo de gráficos, diagramas e ilustraciones para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Diversas teorías de aprendizaje han llevado a los educadores a crear herramientas gráficas para facilitar la comprensión de los estudiantes en la resolución de problemas, por ejemplo, la teoría cognitiva de Ausubel (1968), el modelo de código dual de Paivio (1986), la teoría de codificación dual de Mayer (1997) y la teoría integradora de Schnotz (Schnotz, 2002; Schnotz y Bannert, 2003).

La revisión de la literatura que presentamos en este trabajo intenta recoger aspectos acerca de lo que se ha investigado en este tema, y principalmente, sobre el uso que se le ha dado a los diagramas en resolución de problemas aritméticos, resaltando aquellos fenómenos que han sido explicados en otras investigaciones. Con ello pretendemos contextualizar nuestro estudio en el campo de conocimiento en la que vamos a trabajar.

2.1 La representación en resolución de problemas

En la literatura especializada se han identificado dos procesos importantes en la resolución de problemas: la representación y la solución del problema (Hayes y Simon, 1974; Mayer, 1985; Newell y Simon, 1972; Riley, Greeno y Heller, 1983). Cuando se trata de problemas verbales estos dos procesos se pueden analizar con más detalles, pero para este informe sólo mostramos lo concerniente a las representaciones por tratarse de uno de los focos generales de atención de nuestro trabajo. Se puede considerar que la representación del problema involucra dos subestadios: (a) la traducción del problema, durante el cual toma lugar la interpretación de los enunciados con base al conocimiento lingüístico y factual; y (b) la integración del problema, durante el cual, se forma una estructura integrada y coherente que describe las relaciones entre las proposiciones del texto del problema (Bovenmayer, 1989).

El término representación se ha utilizado tanto en Psicología como en Didáctica de la Matemática para describir la actividad cognitiva y las formas de expresión externas de los sujetos. En matemáticas, la representación se ha definido como una configuración de signos, personajes, iconos, u objetos que representan las ideas matemáticas y un mapa que muestra sus correspondencias (Cuoco, 2001; DeWindt-King y Goldin, 2003; Goldin, 1998; Kaput, 1985). Se detecta pues la consideración entre los expertos de dos tipos de representaciones, las internas y las externas.

Las representaciones ya sean internas o externas, son objetos o eventos que representan algo (Peterson, 1996). Las representaciones internas y las representaciones externas están fuertemente relacionadas en Matemáticas, de tal manera que, a menos que profundizamos en ello, nos movemos de manera inconsciente de una para otra. De manera que se crea un proceso recursivo en la que distinguimos las siguientes etapas:

- Frente a un problema se construye una imagen (representación interna).
- Se hace un dibujo (representación externa).
- Se vuelve a razonar, tomando base en el dibujo y se construye una imagen más sofisticada.
- Se construye un dibujo más elaborado.
- Se repite el proceso, etc.

Es esta relación entre las representaciones internas y externas las que permitirá analizar e interpretar el trabajo de los estudiantes. Para Plasencia (2002) esto supone que cuando un estudiante utiliza una representación externa para comunicar una de sus ideas, nos revela algo de cómo ese estudiante ha construido esa idea en su mente. Si en el acto de resolver un problema se hace uso de un diagrama, esta representación externa permite al resolutor tener más espacio mental para construir nuevas imágenes y relaciones (Wheatley, 1997).

Las representaciones internas están en la mente de las personas en forma de proposiciones, imágenes mentales (por ejemplo, las tablas de multiplicar, las reglas aritméticas, etc.) y las representaciones externas están situadas en un “mundo exterior” pero perceptible por el individuo como símbolos físicos (por ejemplo, símbolos escritos, cuentas de un ábaco, etc.) o como reglas externas, restricciones, o las relaciones incrustadas en configuraciones físicas (por ejemplo, las relaciones espaciales de los dígitos en un pedazo de papel, etc.) En general, hay una o más representaciones internas y externas que participan en la resolución de cualquier problema (Zhang, 1997).

En el ámbito de la Educación Matemática, los investigadores consideran las representaciones como un sistema cognitivo fundamental para el aprendizaje de matemáticas y resolución de problemas (DeWindt-King, y Goldin, 2003), mientras que los matemáticos expertos, así como estudiantes de matemáticas perciben las representaciones externas como una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos y con frecuencia tratan de utilizarlas (Stylianou, 2001).

El uso de representaciones tanto en la resolución de problemas como en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, son áreas que presentan grandes dificultades, siendo temas ampliamente estudiados por investigadores dentro y fuera de la Didáctica de la Matemática. La naturaleza e importancia de las representaciones externas en el proceso de aprendizaje y resolución de problemas ha sido ampliamente subrayada en diversos trabajos (como por ejemplo: Booth y Thomas, 2000; Castro y Castro, 1997; Diezmann y English, 2001; Janvier, 1987; Novick y Hurley, 2001). Para este estudio nos centramos en las representaciones externas y dentro de ellas los diagramas que se emplean como dibujos para representar una situación problemática y utilizados principalmente en la resolución de problemas verbales.

Las dificultades con la representación de los problemas aumentan a medida que los niños avanzan en la escuela y se espera de ellos que adquieran una gama amplia y compleja de conocimientos matemáticos (Silver y Thompson, 1984). En este sentido, Palarea y Socas (1995), estudian cómo resuelven problemas los estudiantes con diversas representaciones. Señalan que la falta de una buena representación del problema constituye una dificultad central para los estudiantes poco competentes. Presentan la utilización de tres tipos de representaciones: verbal-sintáctica, formal (algebraica) y físico visual (física, icónica, geométrica y diagramática). Parten de la base de elaborar una representación del problema como primer paso para la resolución del mismo y promueven la idea de que algunas de estas representaciones tengan mayor presencia en el sistema educativo, que permita enseñarlo con carácter autónomo, es decir autosuficiente.

Bermejo y Rodríguez (1987) aducen que, en los problemas verbales, el niño tiene que construir una representación interna del problema planteado, antes de ejecutar o emitir su respuesta, requiere para ello un conjunto de procesos cognitivos semánticos de mayor complejidad que en las restantes situaciones, tal y como puede constatarse en los modelos propuestos por Kintsch y Greeno (1985) y De Corte y Verschaffel (1985). Ello explica que a pesar de tratarse de la misma operación aditiva, las sumas o los problemas numéricos resulten más fáciles para los niños que los problemas aditivos verbales.

En la enseñanza de las matemáticas, se subraya la importancia de los roles que desempeñan o pueden desempeñar los maestros consistente en ayudar a los estudiantes a desarrollar la comprensión conceptual y a su presentación matemática idiosincrásica en forma de una representación matemática significativa. En este caso se pueden distinguir y utilizar diferentes maneras de representar los objetos matemáticos (Smith, 2003).

La representación externa, como es el uso de diagramas puede servir de ayuda al estudiante a procesar y poner a disposición los recursos mentales para participar en el análisis de los problemas y la solución (Jitendra, DiPipi y Perron-Jones, 2002). La representación del problema consiste en la traducción de un problema verbal en una representación significativa. Esto podría incluir una "combinación de algo escrito en el papel, algo que existe en la forma de los objetos físicos y una disposición cuidadosamente construida de una idea en la mente de uno" (Janvier, 1987, p. 68)

El primer paso en la representación del problema requiere la organización del conocimiento interno existente (Goldin y Shteingold, 2001). Por ello es importante conocer la forma en que se organiza tal conocimiento, de modo que una estrategia de instrucción adecuada pueda favorecer la habilidad de los estudiantes a la hora de resolver problemas (Banmali, 2010). En ese sentido, Goldin y Kaput (1996) definen representación como una disposición de algún tipo (esquema) que puede ser para denotar un objeto. En esta teoría sobre representación se sugieren tres etapas del proceso de representación. De acuerdo con los autores, los nuevos caracteres o símbolos introducidos durante la primera etapa son utilizados para simbolizar características del sistema formado previamente, que da sentido a la nueva serie de caracteres o símbolos. Los autores señalan que en la segunda etapa se utiliza el sistema anterior como una especie de "plantilla" para el nuevo sistema de símbolos junto con los nuevos significados da lugar a un nuevo sistema de representación. Por último, señalan que en la tercera etapa del nuevo sistema que se convierte en "autónomo", separada de la anterior "plantilla" puede recibir "el significado y una interpretación diferente de los que se asignaron por primera vez" (p.10). Los autores sugieren que "la representación no se produce de forma aislada... (Más bien) que pertenece al sistema altamente estructurado, ya sea personal o idiosincrásico o cultural y convencional" (p.398).

2.2 Representaciones y estándares curriculares

Los Estándares del NCTM (1989) señalan que se debe hacer hincapié en el establecimiento de "conexiones matemáticas", a través del uso de múltiples representaciones externas: "representaciones diferentes de problemas sirven como lentes diferentes a través de los cuales los estudiantes interpretan los problemas y las soluciones. Si los estudiantes llegan a ser matemáticamente potentes, deben ser lo suficientemente flexibles para abordar las situaciones de una gran variedad de formas y reconocer las relaciones entre los diferentes puntos de vista" (p. 84). Sin embargo, las investigaciones han demostrado que los estudiantes no siempre muestran fluidez y flexibilidad en el uso de todas las representaciones externas que están disponibles para resolver un problema, y en la traducción entre representaciones (Bieda y Nathan, 2009; Yerushalmy, 1991).

De acuerdo con la NCTM (2000) la representación matemática se refiere tanto al proceso como al producto, en otras palabras, la captura de una serie de conceptos y relaciones matemáticas en alguna forma. Las representaciones juegan un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Forma parte de uno de los diez Estándares de los Principios. En definitiva este Estándar recomienda que el estudiante "seleccione, aplique y traduzca entre las representaciones matemáticas para resolver problemas" (p.67). Esa representación matemática puede ser en forma de palabras, gráficas, símbolos, números, dibujos e imágenes (NCTM, 2000).

2.3 Representaciones y niños con dificultades de aprendizaje

Varios autores han manifestado la idea de que las representaciones externas facilitan la resolución de problemas matemáticos (Duval 2002; Kaput 1992). Jitendra (2008) reflexiona sobre este aspecto y a partir del enfoque heurístico general de Pólya (1945) sobre el modelo de resolución de problemas y los cuatro pasos a seguir: 1) entender el problema; 2) elaborar un plan; 3) llevar a cabo el plan y 4) mirar atrás y reflexionar. El estudio realizado por Jitendra (2008) contrasta este modelo argumentando que "el entender el problema" lleva consigo una serie de preguntas que el estudiante debe hacerse sobre si ¿Comprendo todo el enunciado del problema? ¿Qué es lo que me pide encontrar? El hecho de elaborar un plan requiere de la selección por parte del estudiante, de una estrategia adecuada dentro de una variedad de estrategias. En definitiva estos pasos se convierten en un problema más para el resolutor y aún en mayor medida si el resolutor tiene dificultades de aprendizaje o presenta problemas de deficiencia en matemáticas. Jitendra (2008) sostiene que estos pasos generales de resolución de problemas, pueden no ser la mejor técnica para los estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas por varias razones. Primero, al elaborar un plan se recomienda hacer un diagrama, pero la estrategia no necesariamente puede conducir a los estudiantes con dificultades de aprendizaje a generar un diagrama que represente las relaciones entre los elementos del enunciado verbal que le sirva de ayuda para resolver el problema. Segundo, aunque el uso de múltiples estrategias se ve como un medio para desarrollar un pensamiento flexible y la solución de problemas, no está claro si la exposición de múltiples estrategias es beneficioso para los estudiantes con dificultades de aprendizaje, posiblemente debido a la carga de memoria cognitiva que envuelve el proceso (Woodward, 2006).

2.4 Múltiples representaciones

Los investigadores enfatizan el papel (estimulante) de múltiples representaciones externas en las matemáticas. Matteson (2006) explica que el aprendizaje de las matemáticas es como aprender un idioma extranjero, y de este modo las representaciones son elementos clave en el vocabulario de esta lengua, y los estudiantes necesitan adquirir fluidez en su uso, si quieren tener éxito en la expresión y la comprensión de las ideas matemáticas con exactitud y precisión. Después de todo, las representaciones externas son inherentes a la disciplina de las matemáticas, ya que una característica de cualquier concepto matemático es que puede ser representado en un lenguaje integrado signos de carácter abstracto acompañados de textos y gráficos.

Se ha encontrado también que la capacidad de los estudiantes para seleccionar un modelo matemático para una determinada situación de la vida real está mediada por el modo de representación de ese modelo: una representación particular puede poner de relieve los aspectos de un modelo que se nota fácilmente por los estudiantes y por lo tanto facilitar razonamiento correcto, pero ser engañoso cuando la situación dada se representa con otro modelo (De Bock, Van Dooren y Verschaffel, 2011).

En educación se recomienda que profesores y alumnos deben tener las ideas claras de los beneficios que reporta y de cómo resolver un problema matemático utilizando múltiples representaciones. Tomando como base la idea de que la utilización de diversas representaciones enriquece el desarrollo conceptual del estudiante se han desarrollado investigaciones al respecto (como por ejemplo: Cifarelli, 1998; Duval, 1999; Goldin, 1998).

Las múltiples representaciones incluyen cosas tales como gráficos, tablas o explicaciones escritas que pueden ayudar a los estudiantes a visualizar la idea más grande de la tarea matemática. Sin embargo, si los profesores y los estudiantes no están familiarizados en la solución de problemas a través de múltiples representaciones, a continuación, llegar a entender las ideas matemáticas podría convertirse en un problema. “La solución de problemas de modelado puede ser compleja, especialmente cuando los estudiantes no tienen representaciones y estrategias a mano” (Izsák, 2003, p. 192). Este autor defiende la idea que es posible presentar situaciones en la que los estudiantes generen sus propias representaciones, las utilicen y evalúen posteriormente. Hines (2003) plantea un estudio sobre la instrucción, para que los estudiantes desarrollen la capacidad de conectar e interpretar diversos tipos de representaciones.

El lenguaje y las imágenes se consideran como dos tipos distintos de representación y comunicación de las ideas matemáticas, con diferencias fundamentales en lo que se refiere a su contenido informativo con la estructura y la capacidad de uso (Schnotz, 2002), que se complementan entre sí. En relación con las representaciones, la visualización ligada a las representaciones externas es una de las características que se consideran relevantes en la comprensión de un problema. Esta es una de las nociones asociadas a las representaciones de un concepto (Cañadas, 2007).

En su estudio, Larkin y Simon (1987) señalan que dos representaciones son informativamente equivalentes si toda la información que puede ser tomado de una representación también se puede tomar de la otra representación. Como una pieza de información puede ser relevante para algunas tareas e irrelevante para otras tareas, es posible definir el contenido de información de una representación con respecto a un conjunto específico de tareas. En consecuencia, dos representaciones son (en un sentido de tarea específica) informativamente equivalentes, si permite la extracción de la misma información que se requiere para resolver las tareas específicas. Sin embargo, la extracción de esta información puede ser más fácil de una representación que de la otra representación.

2.5 Las representaciones externas: gráficos, esquemas y diagramas

Investigadores como Booth y Thomas, 2000; Diezmann y English, 2001, y Novick y Hurley, 2001, subrayan la importancia de las representaciones externas en el proceso de resolución de problemas, figurando como uno de los principales elementos a investigar la utilización de representaciones gráficas en la resolución de problemas.

El apoyo externo como dibujos, esquemas, diagramas, figuras o una representación icónica hace más tangible y manejable la idea inicial que se tiene de un problema (Plasencia, 2002). Estas representaciones externas desempeñan un papel importante en cualquier estrategia de resolución de problemas, por lo que realizamos una revisión de las mismas.

2.5.1 Los gráficos

La era de la información ha proporcionado nuevas demandas y el aumento de nuestra capacidad para representar, manipular y decodificar la información en formas esquemáticas y gráficas (Lowrie y Diezmann, 2007). A una edad temprana, los estudiantes están obligados a dar sentido a las representaciones gráficas en una variedad de contextos. Es cierto que el procesamiento no verbal de información, tales como la interpretación de gráficos, mapas y dibujos, es necesario en los contextos educativos, así como la vida cotidiana (Aberg-Bengtsson, 1999). Por lo tanto, la atención a los gráficos es imperativo (Aberg-Bengtsson y Ottosson, 2006), es decir, "graficar, se está convirtiendo en una parte importante del conocimiento cotidiano, el mismo estatus que saber leer y escribir y ser competente en el cálculo" (pp. 43-44).

Los gráficos atraen a aquellos alumnos que prefieren una aproximación visual del problema, sin embargo esta representación gráfica podría carecer de la precisión requerida, está influenciada por factores externos y, por lo general, presenta sólo una parte del dominio y rango del problema (Friedlander y Tabach, 2001).

Estudios sobre el efecto de los gráficos en la resolución de problemas han analizado el grado en que los estudiantes utilizan gráficos y texto para interpretar la información. Esta conectividad entre el texto y los gráficos se ha investigado en términos de la carga cognitiva (Sweller, 1994), diseño gráfico (Kosslyn, 2006) y si el gráfico contiene información esencial para la solución (Elia, Gagatsis, y Demetriou, 2007; Gagatsis y Elia, 2004). Otros investigadores (Postigo y Pozo, 2004) han argumentado que la investigación previa realizada en este campo es muy heterogénea ya que el estudio de los mapas, diagramas y gráficos numéricos tienen su propia sintaxis y convenciones.

Investigaciones anteriores en el área de la psicología han demostrado que la auto-explicación es una eficaz estrategia meta cognitiva que puede ayudar a los alumnos a desarrollar un entendimiento más profundo de la materia que estudian. Ainsworth y Th Loizou (2003) presentan un experimento que explora si el formato del material (es decir, texto o diagramas) influye en el efecto de auto-explicación. Veinte sujetos se les presentó la información sobre el sistema cardiovascular y se les pide explicar lo que han aprendido, diez recibieron esta información en forma de texto y diez en diagramas. Los resultados mostraron que los estudiantes que utilizaron diagramas se desempeñaron significativamente mejor en el post-test que los alumnos que no. En los estudiantes con diagramas se generan explicaciones mucho más autónomas que los estudiantes con sólo texto. Además, los beneficios de la auto-explicación fueron mucho mayores en la condición de diagramas. Los resultados se interpretan con referencia a las múltiples diferencias en las propiedades semánticas, cognoscitivas y afectivas de las representaciones de texto y diagrama utilizados en este estudio para determinar por qué los diagramas pueden promover el efecto de auto-explicación.

2.5.2 Los esquemas

En este apartado hacemos una pequeña reflexión sobre la idea de esquemas. Tomamos algunas investigaciones anteriores observando los múltiples esquemas, el interés, la interpretación y uso. Con el propósito de atender tanto a las facilidades o beneficios de su uso como a las limitaciones que presentan.

(Bruner, 1996) señala que los seres humanos han desarrollado tres sistemas paralelos para procesar la información y para representarla: la primera, por medio de la manipulación y de la acción; la segunda, por medio de la organización perceptual y la imaginaria y la tercera, por medio del aparato simbólico (p.28).

El objetivo principal de la psicología cognitiva es determinar cómo la información se almacena y se accede a los recuerdos de las personas. La forma en que se registra esta información o se expresa se llama representación de la información (Glass y Holyoak, 1986).

Muchos filósofos y psicólogos consideran la noción de esquemas con algunas variaciones. (Piaget e Inhelder, 1969; Piaget, 1971, 1967,1985) se refieren a un esquema de acción: Un esquema de acción consiste en aquellos aspectos que son repetibles, extrapolables o generalizables (Piaget, 1980, p.205).

Al respecto, Hershkovitz y Nesher (2003), exponen: el término esquema se utiliza como una forma de percibir el mundo como un desarrollo lógico innato y como patrones de acción.

Botsmanova (1972), realiza una clasificación de las imágenes que aparecen en los libros de texto, las denomina de la siguiente manera: a) objetos ilustrativos (no reflejan la estructura matemática), son imágenes de objetos individuales mencionados en el problema e ilustraciones del tema del problema; b) objetos analíticos (reflejan la estructura matemática), son dibujos de objetos individuales, pero que por una adecuada configuración espacial dan cuenta de las relaciones numéricas entre los datos; únicamente aparecen los datos pertinentes y c) diagramas espaciales abstractos que reflejan sólo las relaciones numéricas entre los datos. Afirma que, aunque no se disponga de datos precisos, algunos exámenes no sistemáticos de los libros de texto muestran que los más frecuentes son los del tipo a), que hay pocos ejemplos del tipo b), y que prácticamente no hay ninguno del tipo c).

Además de destacar que cuando hay dibujos del tipo “objetos ilustrativos”, la resolución puede realizarse en el dibujo reemplazando la traducción del texto por el simple recuento de los objetos representados, por lo que el autor opina que estos dibujos no ayudan a encontrar el curso de la solución. Si los dibujos son objetos analíticos, éstos sirven de ayuda en los problemas fáciles, pero suele requerirse la intervención del profesor, ya que se trata de representaciones abstractas. Los esquemas abstractos, que son teóricamente los más provechosos, suelen ser inútiles si aparecen, sin más, en los libros de texto, ya que los estudiantes no pueden comprenderlos sin la preparación especial. Hace falta que se organice una instrucción específica en su realización y en su uso (Botsmanova, 1972).

Hershkovitz y Nesher (2003), han demostrado que la capacidad de resolver problemas de matemáticas depende del nivel de esquemas y de estructuras disponibles para los niños y los cambios de éstos según el tiempo, y al aprendizaje. Los estudiantes pueden beneficiarse más si fueran conscientes de los esquemas que se necesitan en cada nivel de aprendizaje y los problemas presentes en su forma más general.

Un esquema es construido de acuerdo con las condiciones necesarias de la unidad de la razón. El esquema de una cosa en general, que es útil a la producción de un alto grado de unidad sistemática en el ejercicio empírico de la razón, simplemente indica cómo, bajo la orientación de la idea, tenemos que investigar la constitución y las relaciones de los objetos en el mundo de la experiencia (Kant, 1724-1804).

Kant distingue: esquema de la sustancia, esquema de causa, esquema de la comunidad, esquema de las posibilidades, esquema de la realidad, esquema de la necesidad, esquema de la calidad, esquema de la relación, esquema de la modalidad y sus categorías.

En este sentido, Fischbein (Fischbein y Grossman 1997; Fischbein, 1999), basó su definición, según la noción de Piaget de un esquema, que define un esquema no sólo como un marco de percepción, sino más bien como una pauta de acción. En particular Fischbein cree que un esquema es también una estrategia para resolver cierto tipo de problemas, haciendo énfasis en el aspecto del comportamiento de un esquema. Para él un esquema es un plan de acción.

Fischbein distingue entre dos tipos de esquemas: primero, indica un tipo de la representación condensada y simplificada de una clase de objetos o eventos. Segundo, es el comportamiento de adaptación del organismo, donde se logra la asimilación, y la acomodación (pp.36-37).

Para Fischbein, un esquema es un programa que permite al individuo registrar, procesar, controlar y mentalmente integrar la información, y reaccionar de manera significativa y eficaz a los estímulos ambientales, es decir un esquema permite almacenar y generalizar ideas. El esquema es el medio por el cual se asimilan experiencias similares, agregadas de forma rápida y fácil de recordar, dejando su uso para diferentes circunstancias, permitiendo almacenamiento y generalización de las ideas.

Por otro lado, Schank y Abelson (1977), sostienen que un esquema es una representación mental de algún aspecto del mundo.

En esta misma línea, Rumelhart y Norman (1987), afirman que los esquemas son la estructura de los datos para representar los conceptos generales almacenados en la memoria. Además de representar los estereotipos de los conceptos, es decir que los esquemas son como los modelos del mundo exterior.

Rumelhart y Norman (1987), presentan algunas características importantes de los esquemas:

- Los esquemas tienen variables
- Los esquemas pueden integrarse uno dentro del otro
- Los esquemas pueden representar el conocimiento en todos los niveles de abstracción
- Los esquemas representan el conocimiento en lugar de las definiciones
- Los esquemas son dispositivos activos de reconocimiento cuyo procesamiento está dirigido en la evaluación de su grado a los datos procesados. (p.36).

Finalmente Rumelhart (1980) destaca que a pesar de que un esquema se compone de muchos detalles, no es más que un montón de objetos, más bien una colección organizada de los objetos con las relaciones entre ellos, dando sentido a todos sus componentes.

Cabe destacar que la noción de esquemas no se inicia con Piaget, o dentro de la investigación en educación matemática, sino que la podemos remontar a Kant (1724 - 1804), en un capítulo sobre los esquemas de los Conceptos puros del entendimiento, escribió:

“Esta condición formal y pura de la sensibilidad a la que se restringe el empleo del concepto de entendimiento, que dará derecho al esquema del concepto. El procedimiento de la comprensión de estos esquemas nos dará derecho al esquematismo del entendimiento puro. El esquema es en sí mismo siempre un producto de la imaginación, dado que sin embargo, la síntesis de la imaginación apunta a ninguna intuición especial, pero sólo en la unidad en la determinación de la sensibilidad, el esquema tiene que distinguirse de la imagen”. (Kant, 1980 edición, p.182).

Sowder y Harel, (1998) sostienen que a la hora de aprender una tarea matemática, los estudiantes desarrollan diferentes tipos de planes sobre cómo probar nuevas estrategias para resolver dicha tarea, y lo siguiente es la obtención de diferentes tipos de esquemas

Por otro lado, tras las investigaciones centradas en el uso de esquemas, mostramos otro tipo de representación presentada para describir la estructura del problema, basada en unos esquemas en forma de grafos (grafos trinomiales), propuestos por Fridman, (1990) los cuales representan una lectura analítica de un problema verbal aritmético- algebraico. Las cantidades se representan mediante los vértices y las relaciones mediante las aristas, y para diferenciar las cantidades conocidas de las desconocidas se asocian vértices oscuros circulares a las primeras y vértices claros cuadrangulares a las segundas. En definitiva el grafo supone una representación topológica de las relaciones entre cantidades.

2.5.3 Diagramas

La alfabetización de los estudiantes en el uso de diagramas es un componente esencial del desarrollo matemático (NCTM, 2000). Con el fin de utilizar eficientemente los diagramas, los estudiantes deben desarrollar la capacidad de traducir los problemas verbales en una representación esquemática y la capacidad de interpretar un diagrama en función de un problema verbal dado (Diezmann y English, 2001; Novick y Hurley, 2001). Para Pantziara et, al. (2004), un diagrama específico no tiene el mismo impacto en todos los estudiantes. Es probable que los diagramas presentados puedan ser incompatibles con algunos de las representaciones mentales de los estudiantes. Por lo tanto, es muy importante que los estudiantes utilicen múltiples representaciones en el proceso de resolver problemas. El desarrollo de la alfabetización de los estudiantes en el empleo de diagramas sólo puede conseguirse a través de actividades de enseñanza que incluyan diagramas cuidadosamente diseñados. Estos diagramas pueden resultar en una herramienta eficaz para el pensamiento.

Diezman y English (2001), consideran cuatro tipos de diagramas, cuya descripción hemos resumido en la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Tipos de diagramas generales (Diezmann y English, 2001)

Diagramas	Descripción
Redes	Consiste en un conjunto de nodos (puntos) unidos con una o más líneas surgiendo el enlace entre nodos, son algunas veces referido como diagramas lineales.
Matrices	Consiste en el uso de dos dimensiones para representar las relaciones entre dos conjuntos de información.
Jerarquía	Comprenden la trayectoria divergente o convergente entre una serie de puntos.
Parte-Todo	Representan las relaciones existentes entre una parte y un todo.

Por su parte, Novick y Hurley presentan tres diagramas (redes, jerarquía y matriz) y las propiedades para cada uno de los mismos. (Ver tabla 2.2).

Tabla 2.2. Propiedades de los tres diagramas (tomado de Pantziara et. al, 2009).

Propiedades	*Redes*	*Jerarquía*	*Matriz*
Estructura global	No tiene definida estructura formal	Está organizado dentro de un nivel, comenzando con un único nodo o raíz que ramifica a nivel posterior	Todos los valores de una variable tienen valores de otras variables en común (estructura factorial)
Conjunto de números	Un conjunto de información	Sin límite sobre el conjunto de información	Dos conjuntos de información
Restricción del enlace de ítems	Cualquier nodo puede ser enlazado a cualquier otro nodo	Pueden no ser enlazados entre nodos en el mismo nivel	Los valores en la misma dimensión no pueden ser enlazados
Tipos de vínculos	En cada dos nodos hay un vínculo entre ellos y los vínculos son flexibles	Un único nodo da lugar al menos a otros dos nodos y los enlaces son dirigidos	Una célula denota la intersección de un valor *i* sobre una variable y un valor *j* sobre otra variable
Enlaces y relaciones	Ambos enlaces están relacionados	Uno de los dos enlaces están relacionados, pero no ambos al mismo tiempo	El enlace asociado con cada fila o columna representa el valor de uno o muchos, y de muchos a una relación, pero la existencia de esta relación puede ser inferida desde la representación
Posibles caminos	Múltiples caminos desde un nodo a otro son posibles	Para un par de nodos A y B hay sólo un camino para ir de uno al otro	No hay caminos en la representación

2.6. Tipos de diagramas construidos por los estudiantes

Hemos observado en algunos trabajos de investigación se realizan clasificaciones obtenidas a partir de los diagramas construidos por los estudiantes cuando resuelven problemas verbales. Por ejemplo la clasificación que hacen Uesaka, Manalo e Ichikawa (2007). En la tabla 2.3 mostramos los criterios tomados por los autores para clasificar los diagramas construidos por los estudiantes en problemas verbales de una y dos etapas.

Tabla 2.3. Criterios para evaluar los diagramas. Tomado de Uesaka, et al. (2007).

Puntos para la evaluación	categoría	Criterios para las categorías
Estructura del diagrama	A	representa la situación correctamente
	B	no representa correctamente la situación
Información contenida en el diagrama	A	contiene inferencias adicionales extraídas del problema
	B	contiene todos los números especificados en el problema
	C	contiene algunos de los números especificados en el problema
	D	contiene algunos números, pero todos ellos son incorrectos o no relacionados con el problema
	E	no contiene números

Cuando se refiere a la estructura, un diagrama fue colocado en la categoría mayor “A” si representa la situación correctamente. Por el contrario, si un diagrama se considera que no representa correctamente la situación, se colocó en la categoría inferior “B” Cuando se refiere a la información contenida en los diagramas, la cantidad y el tipo de información relevante fueron considerados. Así, por ejemplo, los diagramas se colocaron en la más alta categoría “A” si contenían deducciones adicionales extraídas del problema dado, sino que se colocaron en la siguiente categoría “B” si contienen todos los números de los especificados en el problema, pero sin evidencia de inferencias adicionales. En el otro extremo de la escala, los diagramas fueron colocados en la categoría menor “E” si no contienen número. En definitiva los autores clasifican los diagramas construidos como de “alta calidad” o de “baja calidad”.

Los criterios de evaluación utilizados por Simon (1986) fueron los siguientes: (1) el tipo de diagrama, (2) la exactitud del diagrama, (3) la integridad del diagrama, y (4) el etiquetado del diagrama. El tipo de diagrama generado y la exactitud del diagrama son criterios adecuados, ya que son parte integral del reconocimiento y la representación de la estructura del problema (Novick, 1996). Sin embargo, el etiquetado es inapropiado porque aunque el diagrama puede haber sido utilizado como una herramienta cognitiva, el estudiante no haya tenido la intención comunicativa. La integridad es también inadecuada, porque cuando el estudiante conceptualiza el problema de sus representaciones internalizadas puede ser más desarrollado que su representación externa (Hegarty y Narayanan, 1994). La frecuencia de generación de diagrama es un criterio adicional apropiado porque los estudiantes son reacios a utilizar diagramas (por ejemplo, Veloo y Lopez Real, 1994). Mientras que para Vygotsky (1978), el grado de autonomía del alumno en la generación de diagrama también es un criterio importante, porque puede haber un cambio en el área de estudio al que está acostumbrado.

En este sentido Koedinger y Terao (2002) en su estudio han clasificado las imágenes dibujadas por los estudiantes, en cinco categorías: tamaño de preservación, incompleto, abstracto, incorrecto, y no-diagrama.

Tener presente las investigaciones recientes y novedosas no implica que olvidemos las más antiguas en cuanto a los precursores de la Didáctica de la Matemática. Hacemos un recorrido sobre las diversas investigaciones que han tratado el uso de diagramas como herramienta de ayuda, además de recomendar su uso en resolución de problemas verbales en matemáticas. Este tema a cerca del uso de diagramas en la resolución de problemas es un tema antiguo, pero no deja de ser actual.

2.7 El uso de diagramas en resolución de problemas

El interés por el efecto de los diagramas como estrategia para resolver problemas aritméticos enunciados verbalmente tiene antecedentes desde la década de 1950, en la que encontramos autores que han defendido su utilidad. Henderson y Pingry (1953) señalan que los profesores deberían enseñar a los estudiantes a dibujar un diagrama de un problema como una ayuda para su resolución. Los diagramas ayudan a clarificar las relaciones entre las cantidades del problema y hacen que estén más disponibles en su memoria. Además indican que hay que alentar a los estudiantes utilizar diagramas en muchos de los problemas que resuelven. Otro estudio que también sugiere el empleo del dibujo de diagramas en los problemas es el de Brueckner y Grossnickle (1953). Consideran que el uso de objetos y dibujos ayudan a los alumnos a visualizar la situación presentada en un problema y esto hace que sea más claro para ellos. Grossnickle en su estudio (Grossnickle y Reckzeh, 1973) mantiene la recomendación de usar diagramas en resolución de problemas.

La década de 1960 y 1970 fueron prolíficas en este aspecto. Riedesel (1963) señala el incremento en las habilidades, en estudiantes de sexto grado, para resolver problemas verbales después de una instrucción con un procedimiento específico, en el que uno de los cinco métodos utilizados en la instrucción fue la construcción de diagramas. Posteriormente Riedesel (1964) también sugiere que se debe seguir un proceso específico como lo es el uso de dibujos y diagramas en resolución de problemas y señala que esta técnica puede mejorar la habilidad de los alumnos a resolver problemas.

Bank (1964) incluye la estrategia metodológica de dibujar diagramas entre diversos procedimientos diseñados para aumentar la competencia en resolución de problemas y señala que el acto de dibujar una imagen frecuentemente clarifica con nitidez la relación entre las cantidades del enunciado.

Por su parte Spitzer (1967) también defiende la idea del uso de diagramas en resolución de problemas verbales y señala que cuando hay dudas acerca de la respuesta o la solución de un problema verbal se debe recurrir al uso de un diagrama para esclarecer las ideas.

Igualmente Sims (1969) señala que ilustrar el problema por medio de un diagrama, es una estrategia destacable para la resolución de problemas verbales.

Más tarde Suydam y Weaver (1970) muestran una lista de once estrategias específicas para mejorar la habilidad en resolución de problemas. Una de las once estrategias es enseñar a los alumnos a construir un diagrama que represente el problema verbal.

Sherrill (1972, 1973) encuentra de forma significativa que en los problemas verbales acompañados por un diagrama correcto los estudiantes de grado diez obtienen puntuaciones más altas que si estos problemas son presentados sólo con el enunciado verbal. A su vez éstos estudiantes puntúan mejor en los problemas presentados sólo mediante enunciados verbales que si éstos van acompañados de diagramas incorrectos. Da la impresión de que los sujetos tienden a darle más importancia a la representación pictórica del problema que al enunciado verbal del problema.

Por otra parte en un estudio similar con 116 alumnos de noveno grado, Kulm, Lewis, Omaris y Cook (1974), obtienen resultados que no confirman los resultados de Sherrill, por lo que presentar un problema verbal acompañado de un diagrama tuvo un resultado limitado.

Glen (1974) presenta un estudio para determinar los efectos en la enseñanza de alumnos en la construcción de diagramas, imágenes y bocetos para la resolución de problemas verbales y los efectos de la presentación de problemas prácticos verbales y la presentación de problemas prácticos en forma de diagramas. El autor presenta un estudio basado en tres estrategias de instrucción de grupo, al primer grupo les presenta problemas verbales sin enseñarles a dibujar diagramas; el segundo grupo les presenta algunos problemas en forma verbal y otros en forma de diagrama sin instrucción en dibujo de diagramas y un tercer grupo al que presenta problemas verbales y en forma de diagramas con instrucción en dibujo de diagramas para determinar si tal traducción es efectiva en mejorar la resolución de problemas y si esto tiene efectos sobre la estrategia usada por los estudiantes.

Con respecto a la representación con diagramas "diagramming representation", Fremont (1979) señala que el uso de diagramas es muy esencial para entender qué está pasando en un problema y que a través del diagrama podemos ayudar a los estudiantes a "ver" las matemáticas. (Fremont, 1979).

2.7.1 Los diagramas

En el estudio realizado por Diezman y English (2001), promueven el conocimiento que debe tener el estudiante para llegar a la alfabetización de diagramas e identificar algunas dificultades que experimentan los estudiantes en el uso de los mismos. Los autores señalan que es esencial que los estudiantes conozcan ¿Por qué un diagrama puede ser útil? ¿Cuál diagrama es apropiado para una determinada situación? Y ¿Cómo usar un diagrama en la resolución de problemas?

Dentro de dicho estudio se destacan algunas de las investigaciones que tratan sobre el uso de diagramas como:

- (Nickerson, 1994) señala que la habilidad del uso efectivo de diagramas es integral para el pensamiento y el aprendizaje de las matemáticas.
- (Hartin, 1994, p.25) enfatiza en que la alfabetización de diagramas es un componente de alfabetización visual que es "la habilidad para comprender (leer) y usar (escribir) y pensar, y aprender en términos de imágenes".

- (Balchin y Coleman, 1965; Box y Cochenour, 1994) destacan que la alfabetización visual se ha descuidado por mucho tiempo en el área de la Educación.

Según Diezmann y English (2001), un diagrama es una representación visual que presenta la información en una disposición espacial. Las redes simples con pocos puntos y líneas son conocidas como diagramas lineales. Los diagramas normalmente se basan en las convenciones para mostrar los componentes tanto de la situación representada y su organización.

En la resolución de problemas, un diagrama puede servir para representar la estructura de un problema, por lo que puede ser una herramienta útil en la solución del problema. Estos convenios se deben aprender y entender antes de utilizar exitosamente los diagramas, además describen formas en que los maestros pueden apoyar a sus estudiantes en la comprensión de la relación entre un problema y la necesidad de hacer un diagrama (Diezmann y English, 2001). La resolución de problemas efectiva depende de la calidad de los diagramas de los estudiantes (Yancey, Thompson, y Yancey, 1989).

Los diagramas se consideran las representaciones estructurales en los que los detalles superficiales no son importantes (Vekiri, 2002).

El paso para generar un diagrama es identificar cuál diagrama es adecuado para cada situación y depende de lo bien que representa la estructura del problema. Por ello los autores enfocan su discusión en cuatro diagramas generales: redes, matrices, jerarquía y parte-todo. Estos diagramas representan relaciones entre los datos del enunciado del problema, y son especialmente útiles en la resolución de problemas elementales (Novick, Hurley y Francis, 1999). Los autores mencionan que los diagramas deben ser conocidos para poder ser aplicados apropiadamente en un problema o en otro, por ejemplo, señalan que el diagrama de redes es más adecuado utilizarlo en problemas que tengan que ver con longitudes, donde se utilicen los nodos, las líneas de manera apropiada para lograr éxito en la resolución del problema. Mientras que las matrices son particularmente útiles en problemas que requieren pensamiento deductivo o razonamiento combinatorio, porque los diagramas de matrices ayudan a mantener el seguimiento de la información y permite que la información implícita llegue a ser explícita. En un problema de combinatoria, la matriz ofrece representación visual de la combinación de los números, por ejemplo si un niño tiene que elegir uno de tres alimentos y una de dos bebidas para la comida, las seis combinaciones pueden ser fácilmente vistas sobre una matriz. También algunos estudiantes pueden calcular simplemente los números de la combinación de número de cada información, mientras que otros estudiantes no pueden, por lo tanto la matriz ofrece un referente visual importante para ellos. Para los diagramas de jerarquía los autores dan como ejemplos comunes, los diagramas de árbol y familia de árboles. Para los diagramas parte-todo, en contraste con las matrices y jerarquía, este diagrama no tiene una forma externa fácilmente identificable. Los estudiantes que son expertos en estos tipos de diagramas saben cuándo usarlo para alcanzar una solución exitosa (Diezmann y English, 2001).

Casi al mismo tiempo Novick y Hurley (2001) proponen tres tipos de diagramas que tienen gran aplicabilidad en las situaciones en un problema de matemáticas, los mismos son denominados: redes, jerarquía y matriz, los cuales utilizan en su investigación con problemas no rutinarios. A pesar de que estos diagramas han sido estudiados algunas décadas atrás, es en estas investigaciones es en donde se desarrolla un marco coherente diferenciando las propiedades de éstos tipos de diagramas. Estos diagramas subrayan las estructuras comunes a través de situaciones que son superficialmente muy diferentes (Novick y Hurley, 2001).

Novick (2006) describe estos diagramas mencionados anteriormente de la siguiente manera:

- El diagrama de redes transmite información dinámica mostrando la conexión local y la conexión global de la ruta que recorre el ítem que se está representando.
- El diagrama de jerarquía ejemplifica una rígida estructura de poder y precedencia.
- El diagrama de matriz mantiene relación entre el ítem, y la matriz representa información estática a cerca de los tipos de relaciones que existen entre pares de ítems en diferentes conjuntos.

Novick y Hurley (2001) confirman la existencia de estas propiedades con estudiantes de colegio utilizando un escenario basado en la tarea. Ellos encuentran que seis de las diez propiedades eran discretas.

Diezmann (2005) en su estudio con estudiantes de escuela primaria investiga cuál de estas seis propiedades contribuyen más al conocimiento de los diagramas, por parte de los estudiantes, con las tareas basadas en la historia. Los resultados del estudio revelaron que las propiedades transversales y las del tipo de vínculo parecían ser los mejores indicadores de comprensión de los estudiantes de los diagramas de orientación espacial.

El uso de diagramas ha sido identificado como una de las estrategias de solución de problemas (Polya, 1945) que ha sido incorporada como elemento metodológico en propuestas para mejorar la eficiencia en la solución de problemas matemáticos (Lewis, 1989; Uesaka, Manalo y Ichikawa, 2007; Yancey, Thompson y Yancey, 1989). Su importancia se ha resaltado en la fase de comprensión o representación de los problemas aritméticos o algebraicos de enunciado verbal, ya que pueden ser utilizados para ayudar a descomprimir la estructura de un problema, y así sentar las bases para su solución. Son útiles también para simplificar una situación compleja para hacer los conceptos abstractos más concretos y obtener resultados de forma sencilla (Diezmann y English, 2001; Larkin y Simon, 1987; Novick, Hurley y Francis, 1999).

Por su parte, Vekiri (2002) sugiere que los gráficos son herramientas de aprendizaje eficaces sólo cuando permiten a los lectores interpretar e integrar la información con el procesamiento cognitivo mínimo.

2.7.2 El uso de diagramas como método

Los diagramas se han utilizado como método en el proceso de resolución de problemas en distintas situaciones. Cheng (1996) presenta un enfoque en el que trata de proporcionar un método de principio para la selección y diseño de diagramas eficaces para problemas particulares. Centrándose en el papel funcional de los diagramas, que directamente se refieren a los tipos de información que son fácilmente accesibles. En los diagramas, la estructura puede proporcionar el enlace entre los requisitos de las tareas y los tipos de actividad el apoyo de diagramas diferentes. Señala, además que “los diagramas pueden ser considerados como artefactos cognitivos, que han evolucionado a lo largo de la historia como eficaces herramientas cognitivas para la resolución de problemas” (p. 212).

Por otra parte, González (2010) presenta un estudio sobre cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas utilizando diagramas lineales, después de ser instruidos para ello, en la que expresan ser capaces de hacer un razonamiento de las distintas fases de la resolución, llegando a comprender mejor todo el proceso. En esa misma línea (Martínez, 2011), introduce la enseñanza de un diagrama lineal basado en el uso de segmentos de tal manera que los estudiantes puedan resolver problemas algebraicos de forma gráfica, mostrando la aceptación del mismo por parte de los estudiantes como forma de representación de cantidades.

Van Garderen (2007) expone algunos aspectos relativos a los estudios sobre diagramas en resolución de problemas, introduce a los estudiantes dos tipos de diagramas, utiliza los diagramas lineales que generalmente son usados para poner elementos en orden y los diagramas parte todo, los utiliza para agrupar cosas o colocarlas juntas, en los que resalta la estructura partitiva y la estructura parte todo de la suma.

2.7.3 El uso de diagramas como facilitadores

La comunidad de educación matemática ha reconocido desde hace tiempo la importancia de los diagramas en la solución de problemas matemáticos. En particular, se afirma que los diagramas facilitan la solución de problemas matemáticos, ya que representan la estructura de problemas y la información (Novick y Hurley, 2001; Diezmann, 2005). En este sentido los diagramas también se han utilizado como facilitadores en el proceso de resolución con o sin la presencia de ellos (Pantziara, Gagatsis y Elia, 2009). Este estudio mostró que la presencia de los diagramas no aumenta el rendimiento general de los estudiantes en la resolución de problemas no rutinarios. Sugiriendo, como implicación de las conclusiones obtenidas, que los profesores pueden dar oportunidades a los estudiantes no sólo a utilizar diagramas, sino también para inventar o buscar su propia estrategia de solución, incluyendo la construcción activa y el uso de diagramas como herramientas en la solución de problemas.

2.7.4 El uso de diagramas basados en la instrucción

La mayoría de los estudios previos que hemos abordado hasta la fecha que tratan sobre el uso de estrategias de los estudiantes se han centrado en los factores cognitivos que influyen en la decisión que toman los estudiantes a la hora de usar estas estrategias. El uso de diagramas en particular puede ser decidido no sólo por factores cognitivos, sino también por las conductas cotidianas de aprendizaje de los estudiantes para el desarrollo y uso de habilidades pertinentes, incluso los estudiantes pueden percibir el beneficio y eficiencia del uso de diagramas, pero esto pueden no ser capaces de utilizarlos de forma efectiva sino tienen la práctica adecuada en el uso de diagramas en clase o en casa. Por lo tanto, es importante examinar los aspectos de comportamiento y percepción de los estudiantes, al igual que el comportamiento de los profesores que podrían contribuir en el desarrollo de habilidades en el uso de diagramas.

Hay estudios que se basan en la ayuda de la instrucción, con el objeto de que los alumnos no cometan los errores de inversión, que hemos visto que se producían en los problemas de lenguaje inconsistente. Lewis (1989) utiliza la instrucción fundamentada en un sólo tipo de problemas. Lleva a cabo un programa de instrucción para resolver los problemas de comparación, con lenguaje inconsistente (LI), de acuerdo con su hipótesis de inconsistencia del lenguaje. La instrucción proporcionada consistía en: un curso previo a estudiantes de Psicología, éstos fueron elegidos de una muestra en la que todos cometían errores de inversión. Se hicieron tres grupos: un primer grupo denominado *grupo diagrama* que recibió entrenamiento en traslación, donde se definían los tres tipos de sentencias de los problemas de comparación (asignación, relación y preguntas) y en integración, con el método de diagrama lineal en el que integraban la información de las sentencias de asignación y de relación. Un segundo grupo denominado *grupo frases* que fue entrenado solamente en traslación. Y un tercer grupo denominado *grupo control* que no recibió ningún tipo de entrenamiento. Los tres grupos realizaron los mismos problemas y los resultados indicaron que el grupo diagrama cometió menos errores de inversión de forma significativa que los otros dos grupos. Además, este grupo tuvo más éxito cuando realizó posteriormente otros problemas más complejos, por lo que las conclusiones fueron que los que recibían instrucción completa no solo reconocen la estructura de las sentencias relacionales, sino que también han aprendido una técnica para comprender esta estructura.

La instrucción en resolución de problemas matemáticos no sólo debe hacer hincapié en el conocimiento conceptual de las operaciones, sino también debe facilitar "un conocimiento altamente integrado de las operaciones y los muchos significados diferentes, pero relacionados entre sí, que estas operaciones asumen en contextos reales" (Van de Walle, 1998, p. 117).

Po su parte Schnotz y Bannert (2003) presentan una visión integrada de aprendizaje a partir de las representaciones verbales y pictóricas donde aprender de estas representaciones se considera como un proceso orientado a las tareas de la construcción de múltiples representaciones mentales. La construcción de estas representaciones incluye la selección y la organización de la información, el análisis de estructuras simbólicas, la cartografía de las estructuras análogas, así como la construcción de modelos y la inspección del modelo. Sobre la base de este punto de vista teórico se realizó un experimento para analizar los efectos de diferentes tipos de múltiples representaciones externas sobre la estructura de los modelos mentales. En este estudio participaron sesenta estudiantes universitarios y fueron asignados aleatoriamente a una de las tres condiciones experimentales. El grupo de sólo texto ha aprendido la materia con un hipertexto, mientras que los otros dos grupos aprendieron la materia incluyendo este hipertexto y los diferentes tipos de gráficos. Los resultados indican que la estructura de gráficos afecta a la estructura del modelo mental. También indican que la presentación gráfica no siempre es beneficiosa para la adquisición de conocimientos. Mientras que los gráficos apropiados en las tareas pueden apoyar el aprendizaje, y los gráficos inapropiados pueden interferir con la construcción de modelos mentales.

Por su parte Rathmell (1986), ha centrado su instrucción con niños de 1º y 2º curso en la discusión de la estructura parte-todo para todos los tipos de problemas. Los resultados muestran que después de la instrucción los niños eran capaces de resolver los problemas, incluidos los más difíciles de cambio y comparación.

En este sentido se han mostrado diversas investigaciones que se basan en la instrucción de los conceptos matemáticos mediante el uso de modelos estructurados de instrucción que son isomorfos a la estructura matemática (Meron y Peled, 2004). Este enfoque se fundamenta en que los conceptos matemáticos son abstractos y por ello deben estar representados por algo que los estudiantes sean capaces de comunicar en el lenguaje natural (Nesher, 1989).

En párrafos anteriores mencionamos que han habido estudios sobre los diagramas que construyen los estudiantes de forma espontanea como una buena estrategia en resolución de problemas , sin embargo hay resultados de algunos estudios que han sugerido que los diagramas espontáneos no siempre son eficaces (por ejemplo, De Bock, Verschaffel, Jansen, Van Dooren y Claes, 2003; Van Essen y Hamaker, 1990), mientras que otros estudios señalan que los diagramas espontáneos son heurísticos de gran alcance en situaciones que involucran resolución de problemas (Cheng, 2002; Koedinger y Terao, 2002; Stern, Aprea y Ebner,2003).

Otros estudios muestran que la obtención de esquemas permite aprender a resolver problemas que tengan estructura similar. Tal es el estudio de Willis y Fuson (1988) donde muestran que la utilización de *diagramas gráficos* mejora la resolución de problemas con estudiantes de segundo grado de educación primaria, sugiriendo la inclusión de este tipo de ayuda en los libros de texto.

Más tarde Marshall (1995) subraya la importancia en la utilización de representaciones gráficas (diagramas) como ayuda para la conceptualización de un gran número de problemas matemáticos. De este modo los problemas aritméticos de suma y resta necesitan diversos esquemas que ayuden a formarse una representación adecuada para su resolución. Los alumnos necesitan conocimiento estratégico para elegir los esquemas adecuados a los distintos tipos de problemas que mejoren la representación de los mismos (Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003).

En esta misma línea, Beckman (2004) pone de manifiesto que el uso de dibujos o imágenes sencillas que acompañan a los problemas verbales, sirven de ayuda a los niños a darle sentido a los problemas y utilizar estrategias de solución que se puede justificar sobre bases sólidas y conceptuales. Obteniendo como resultados que aquellos niños que utilizan el enunciado del problema acompañado de un diagrama sencillo que representa las relaciones de los datos presentes en el enunciado, tienen más éxito a la hora de resolver problemas que aquellos que el enunciado del problema no estaba acompañado por el diagrama respectivo. Para lo cual sugiere la presencia en los libros de texto de diagramas sencillos que acompañen en paralelo el enunciado del problema para ayudar al estudiante a resolver problemas.

En el estudio de Willis y Fuson (1988), enseñan a los estudiantes a utilizar diferentes dibujos esquemáticos para representar diferentes categorías de problemas verbales (cambio, combinación y comparación), que involucran suma y resta, lo que requería una comprensión de los diferentes tipos de situaciones que se presentan en los problemas verbales, encontrando que los estudiantes fueron capaces de hacer el dibujo correcto para una categoría determinada, siendo los problemas de comparación más difíciles incluso con la ayuda de los dibujos esquemáticos.

Jitendra (2002) menciona que una de las características principales de una estrategia de representación gráfica que lo distingue de otros enfoques es el uso de diagramas esquemáticos que permiten a los estudiantes organizar la información, facilitar la traducción y la solución del problema.

La representación externa (por ejemplo diagramas) puede servir para reducir la carga de un alumno del procesamiento cognitivo y poner a disposición los recursos mentales para participar en el análisis de problemas y la solución (Jitendra 2002). La autora destaca dos aspectos clave de esta instrucción, en que los estudiantes: (1) pueden identificar las características distintas de cada problema como por ejemplo los problemas que implican un cambio, una agrupación o una comparación y (2) les permite organizar y representar la información pertinente en la situación de la historia del uso de diagramas esquemáticos.

Algunos de los artículos publicados en revistas como *Reading Teacher y Aritmetic Teacher* han sugerido que los dibujos generados por estudiantes se pueden utilizar para una variedad de tareas. Entre los usos sugeridos incluyen la adquisición de vocabulario (Ford, 1988; Zivkovich, 1997), resolución de problemas aritméticos (van Essen y Hamaker, 1990; Yancey, Thompson, y Yancey, 1989), la comprensión de la historia de la gramática (Ritchie, 1988), preparación de escritura (Karnowski, 1989), la facilitación de la comprensión (Shanklin y Rhodes, 1989), y como un medio de expresión del conocimiento (Ernst, 1997; Guillaume, 1998).

En esta misma línea Van Meter (2001) presenta un estudio en el que examina el uso del dibujo como una estrategia de aprendizaje para los estudiantes 5 º y 6 º grados de lectura de texto de ciencias. Muestra que tres grupos experimentales de dibujo y uno de control aprueban la hipótesis de que el dibujo es efectivo sólo cuando los estudiantes son apoyados durante el proceso de construcción.

Lo cual es evidente que se debe continuar investigando sobre el tema y promocionar la enseñanza de estrategias instruccionales basadas en el uso de diagramas, esquemas y representaciones gráficas para ayudar al entendimiento conceptual de la estructura y tipo de problema.

2.7.5 El uso espontáneo de diagramas

Los educadores de matemáticas son fervientes partidarios de la utilización de la estrategia de dibujar un diagrama para resolución de problemas matemáticos (por ejemplo NCTM, 1989). Esta perspectiva está fuertemente basada en la creencia de que la generación de un diagrama facilita la conceptualización de la estructura del problema (van Essen y Hamaker, 1990). Aunque el uso de un diagrama como una herramienta de las matemáticas puede permitir a los estudiantes de primaria a hacerle frente a la novedad (NCTM, 1989). Por lo tanto, la generación de diagramas de alta calidad debe ser un objetivo de cualquier programa de instrucción sobre el uso de diagrama. Conocer las condiciones de aplicabilidad de cada una de estas representaciones es ventajoso en la selección de un tipo de gráfico apropiado, que es el primer paso en la generación de un diagrama de éxito (Diezmann, 1999).

Estudios han demostrado que los diagramas son útiles cuando los inventan los alumnos, no cuando se les proporcionan (Cox, 1999). Hay investigaciones que subrayan la necesidad de distinguir entre las situaciones que requieren la interpretación y el uso de un esquema determinado y situaciones que implican la construcción de un diagrama por el alumno (Cox, 1999; Stern, Aprea, y Ebner, 2003; Uesaka, Manalo e Ichikawa, 2007). En esa misma línea Castro, Morcillo y Castro (1999) obtienen que en algunos problemas de matemáticas los estudiantes de primero de la educación secundaria obligatoria, utilicen de forma espontánea una amplia variedad de estrategias de carácter gráfico. En esos problemas este tipo de estrategias son más eficaces de cara a obtener la solución correcta que las estrategias de carácter simbólico y evitan que los estudiantes cometan errores persistentes en estos problemas.

Por otro lado, hay investigadores y profesores que tienden a mantener la visión positiva del uso de diagramas en la resolución de problemas de la que muchos estudiantes no comparten esta idea. Algunos estudios han señalado que algunos estudiantes utilizan diagramas de forma espontánea sólo cuando se encuentran con problemas difíciles, a pesar de que sus profesores suelen utilizar diagramas para explicar cómo resolver problemas (por ejemplo, Dufour-Janiver et al., 1987; Ichikawa, 1993, 2000). Señalan los autores que esta falta de uso espontáneo podría deberse a que los estudiantes no saben construir diagramas y no aprecian los beneficios potenciales del uso de diagramas en resolución de problemas.

Ichikawa (1993), señala que ha tenido la experiencia con el caso de una niña de octavo grado que trató de resolver un problema sin el uso de diagramas, y renunció a la solución (a pesar de que anteriormente se les dio instrucción para utilizar diagramas). Sin embargo la niña fue capaz de resolver el problema con facilidad después de que el investigador le instó a utilizar los diagramas. Para este caso, Ichikawa llega a la conclusión que los estudiantes no utilizan los diagramas de forma espontánea si no perciben la eficiencia que los resultados de su uso puedan tener, aunque son perfectamente capaces de utilizar bien los diagramas en la resolución de problemas.

El uso espontáneo por parte de los estudiantes en la resolución de problemas verbales de matemáticas también parece estar influenciado por el contexto de la historia que viene en el enunciado del problema (Uesaka, Manalo e Ichikawa, 2007).

Estudios anteriores como el de Hall, Kibler, Wenger y Truxaw (1989) muestran que los estudiantes utilizan diagramas con más frecuencia cuando se trata de problemas relacionados con la distancia en comparación con el menor uso en problemas espaciales.

Uesaka (2003) encontró que la influencia del uso de diagramas depende del contexto de la historia que viene en el enunciado del problema y también en gran medida por la estructura del problema (Mayer, 1981).

Estos resultados proporcionan mejor la comprensión de los factores que influyen en el uso de diagramas. Sin embargo, son factores externos a los estudiantes y por lo tanto no explican las diferencias individuales en la espontaneidad con que los estudiantes utilizan diagramas. A pesar de ello pocos estudios han examinado los factores que implican las diferencias individuales en el uso espontáneo de diagramas en resolución de problemas en matemáticas (Uesaka, Manalo e Ichikawa, 2007). Los tipos de factores que influyen en la decisión de recurrir a estrategias particulares para un aprendizaje más efectivo se han explorado en numerosos estudios sobre la estrategia de aprendizaje (McCombs, 1988; Sato, 1998; Uesaka, 2002).

Aunque investigaciones previas han demostrado que los diagramas son herramientas poderosas para la resolución de problemas, los estudios relativos a las prácticas educativas indican que los estudiantes manifiestan diversos problemas en el uso del diagrama. Hay estudios que han propuesto métodos de enseñanza para hacer frente a estos problemas, pero estos métodos no están totalmente integrados con el currículo escolar. En este sentido el estudio presentado por Uesaka y Manalo (2008), informa sobre el desarrollo de un programa de instrucción y apoyo para promover el uso espontáneo de diagramas por parte de los estudiantes como parte de un plan de estudios de la escuela. El programa se proporcionó a los alumnos en el primer grado de una escuela secundaria pública en colaboración con los profesores. Los resultados de una encuesta y entrevistas con los estudiantes mostraron que, tras el programa, han mejorado sus comportamientos diarios de aprendizaje que implican el uso de diagramas. Estos hallazgos sugieren la efectividad en la provisión de alfabetización gráfico como parte del currículo escolar.

2.8 El rol de los diagramas en resolución de problemas

Hemos tomado del trabajo realizado por Cheng (1996), donde muestra que la siguiente lista de roles funcionales se recopiló mediante el examen de muchos diagramas de una variedad de dominios (ingeniería, ciencias físicas, ciencias sociales y medicina). Las fuentes incluyeron: Colecciones de diagramas, libros de texto, manuales de instrucciones, documentos publicados, diseño de planes de laboratorio y libros de notas.

2.8.1 El rol funcional de los diagramas

Algunos diagramas tienen múltiples roles funcionales. Los tipos de tratamiento de la información asociada a cada diagrama se estudió, y doce papeles funcionales fueron identificados por Cheng (2004), aunque no se efectúa la declaración acerca de la integridad de esta lista.

- **F1**: *Muestra la estructura espacial y la organización*. Un papel funcional de algunos diagramas es describir las características espaciales de los objetos y la disposición de sus componentes, con un poco de fidelidad. Tales diagramas tienen asignaciones espaciales estrechas de la forma y ubicación de objetos de destino a la forma y la posición de los símbolos que los representan. La captura de la estructura espacial es una función importante de la ingeniería y dibujos de arquitectura o "impresiones azules". Estos dibujos muestran la estructura local y global de los objetos simbólicamente, en lugar de pictóricamente. Detalles ocultos por el material puede ser demostrado por las secciones de corte transversal y convenciones simbólicas utilizadas para ocultar detalles innecesarios o proporcionar información adicional (por ejemplo, líneas de centro).

- **F2**: *capturar relaciones físicas*. Los diagramas pueden utilizarse para resaltar seleccionado relaciones físicas que son de importancia en un dominio de destino, sin mostrar la estructura espacial de los objetos y las relaciones espaciales entre sus componentes. En los diagramas esquemáticos de los circuitos eléctricos, por ejemplo, la interconectividad y la secuencia de los componentes se muestra, pero la ubicación de los símbolos en el diagrama puede tener poca relación a la ubicación física de los componentes en la placa de circuito.

- **F3**: *Mostrar el montaje físico*. Un papel funcional de algunos diagramas es mostrar cómo un objeto se encuentra físicamente reunido a partir de componentes; qué partes hay y cómo se van juntos. Esto se puede conseguir de forma explícita que muestra una serie de subconjuntos o que representa el objeto como si hubiera sido sistemáticamente desmantelado. La muestra subconjuntos es común en la ingeniería "anteproyectos" y de uso frecuente en los manuales de instrucciones de los juguetes de construcción (por ejemplo, Lego, mecanoterapia). Cuando tales diagramas proporcionan información sobre el orden de montaje también se representa un proceso (véase F8).

- **F4**: *Definir y distinguir las variables, términos y componentes*. Algunos diagramas se utilizan para definir o identificar componentes, variables y características pertenecientes a un dominio de destino. Etiquetas escritas pueden ser utilizadas para nombrar o especificar los componentes o características particulares. Elementos esquemáticos que pueden ser ellos mismos símbolos especiales, que tienen significados convencionales en dominios particulares, tales como los símbolos de los componentes en los esquemas eléctricos.

- **F5**: *Ver valores*. Una función de algunos diagramas es representar los valores de las variables de manera que las instalaciones cualitativas y cuantitativas de razonamiento acerca de ellos, por lo general en la forma de comparaciones. A menudo formatos estándar o sistemas de referencia se utilizarán, tales como gráficos cartesianos, histogramas y gráficos circulares. Solucionadores de problemas utilizan su conocimiento de las convenciones que rigen los formatos al razonamiento.

- **F6**: *Representar estados*. Algunos diagramas muestran el estado de un sistema, sin referencia especial a las transiciones de un estado a otro. Por ejemplo, algunos manuales de instrucciones equipos electrónicos incluyen diagramas esquemáticos de fábrica establecer posiciones de internos (DIP) interruptores. Mediante la comparación de la diagrama de los interruptores reales, podemos ver si el equipo está en su estado predeterminado. En las gráficas del tiempo se tiene la representación de los estados como una de sus funciones principales.

- **F7**: *Representar espacios estatales.* Un papel funcional de algunos diagramas, que lógicamente sigue a la anterior, es la representación del espacio de estados (pero no necesariamente en espacios problemáticos). Estos diagramas tienen varios componentes que representan dos o más estados, con componentes adyacentes normalmente representan estados estrechamente relacionados. La tabla periódica de los elementos químicos es un ejemplo. Cada elemento puede ser considerado como un estado individual, con su posición horizontal y vertical de ser significativo en términos químicos.

- **F8**: *Codificar secuencias temporales y procesos*. Los diagramas pueden ilustrar el orden temporal o de flujo de un proceso, representando los estados y los cambios a los estados. Algunas de las maneras en que esto se hace son: (i) la colocación de elementos diagramáticos en una secuencia ordenada; (ii) usando flechas para mostrar el progreso o de movimiento, y, (iii) que tiene contornos etiquetados con incrementos de tiempo. Un propósito de este papel funcional es para proporcionar algún sentido cinestésico de los procesos que se representan, tal vez como una ayuda para la generación de un modelo mental.

- **F9**: *flujo del proceso de abstracción y control*. Un papel funcional de algunos diagramas para representar abstractamente es el flujo de complejos procesos no lineales. Tales procesos pueden incluir ciclos, bucles iterativos, contingente ramificación y tareas paralelas. Estos diagramas utilizan símbolos convencionales (íconos) para representar las etapas del proceso sin que ilustre los propios estados. Programas tradicionales de informática y los diagramas de flujo de datos tienen esto como uno de sus principales funciones. Diferentes procesos son nombrados y los de tipo similar comparten la forma del mismo símbolo, por ejemplo, los diamantes para representar decisiones. El flujo de información se muestra, pero el estado de la información no es necesariamente representado.

- **F10**: *Captura de leyes*. Un papel funcional de algunos diagramas es capturar una ley por medio de su estructura interna, de tal manera que el diagrama no se limita a mostrar los valores de las variables, sino que encarna la ley. Por ejemplo, en la física, la resultante de dos fuerzas que actúan en un punto se puede encontrar mediante la construcción de un paralelogramo (dos lados adyacentes representan las fuerzas dadas, y la línea desde el punto dado a la esquina opuesta proporciona la fuerza resultante). Tales diagramas capturan y pasan a poner en práctica, la suma de vectores. La captura de las leyes es una de las características distintivas de la ley de codificación de diagramas, LED. Las LEDs tienen restricciones geométricas, espaciales o topológicas que gobiernan su estructura, tal que la forma del diagrama es siempre compatible con las leyes de destino de un dominio (Cheng, 1994, 1995).

- **F11**: *Hacer cálculos*. Los cálculos pueden hacerse directamente usando la estructura de algunos diagramas. El mejor ejemplo para los cálculos numéricos son nomogramas, que están estrechamente relacionados con reglas de cálculo. Diagramas de la ley de codificación también permiten cálculos se hagan con su estructura.

- **F12**: *secuenciación y computación*. Los diagramas pueden ayudar a organizar, planificar y realizar un seguimiento de secuencias complejas de cálculos. Por ejemplo, cuando se realiza la integración numérica, por ejemplo por el método de Simpson, un diagrama puede ser utilizado para explicar por qué el cálculo toma la forma que se hace. Tabachneck, Leonardo y Simon

(1994) describen, cómo un experto en economía utiliza un gráfico como un marcador de posición durante el razonamiento y, a su vez como un resumen.

Cheng (1996) propone en su trabajo que una nueva forma de análisis cognitivo de las representaciones esquemáticas es en términos de los roles funcionales que pueden jugar en la resolución de problemas. Los roles funcionales son capacidades o características que pueden poseer un diagrama, que pueden apoyar formas particulares de razonamiento o de resolución de problemas específicos tareas. Una persona puede explotar varios roles funcionales de un sólo diagrama en un problema.

2.9 Los problemas verbales de comparación

En la investigación sobre problemas verbales en los niños pequeños, la atención se volvió hacia procesar los modelos que explican por qué algunos problemas verbales son más difíciles que otros. Por ejemplo, hay diversos modelos de simulación por ordenador (por ejemplo, Briars y Larkin, 1984; Dellarosa, 1986; Kintsch y Greeno, 1985; Reusser, 1989, 1990, Riley y Greeno, 1988; Riley, Greeno y Heller, 1983) que tratan de modelar la forma de procesamiento de texto y el conocimiento matemático se integran para comprender y resolver un problema verbal. En la investigación sobre el procesamiento de texto, se hace una distinción entre dos niveles de representación: El nivel proposicional se basa en la comprensión del lenguaje, mientras que el nivel de la situación que caracteriza el proceso de construcción de un modelo situacional (Kintsch, 1988; van Dijk y Kintsch, 1983) o un modelo mental (Johnson-Laird, 1983). Varios estudios han demostrado que los problemas verbales de la misma operación matemática no siempre son iguales en dificultad. En concreto, los problemas que tienen que ver con la comparación son de los conjuntos de problemas más difíciles para los niños (Cummins, Kintsch, Reusser, y Weimer, 1988, Riley y Greeno, 1988; Riley et.al., 1983; Stern, 1992, Stern y Lehmdorfer, 1992; Verschaffel, De Corte, y Pauwels, 1992).

Los problemas de comparación describen relaciones estáticas entre cantidades que se enuncian empleando términos como: *veces más que, veces menos que, veces tanto como*. En los problemas de comparación multiplicativa intervienen tres cantidades: *el referente, el comparado y el escalar*. Cualquiera de las tres cantidades puede ser la incógnita del problema, en el caso de que el referente sea la cantidad desconocida se dice que el enunciado del problema es inconsistente, si lo es el comparado, se denomina enunciado consistente (Castro, 1994; Lewis y Mayer, 1987). Un ejemplo de problemas de comparación con comparado y referente desconocido respectivamente:

Ejemplo de un problema con enunciado consistente de carácter aditivo en el que el comparado es el término desconocido:

1. Juan tiene 5 canicas.
   Pedro tiene 2 canicas menos que Juan.
   ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

Veamos las tres cantidades en la frase:

$$\underbrace{\text{Pedro}}_{\textit{Comparado}}\ \text{tiene}\ \underbrace{\text{2 canicas}}_{\textit{diferencia}}\ \overbrace{\text{menos que}}^{\textit{Frase relacional}}\ \underbrace{\text{Juan.}}_{\textit{referente}}$$

La cantidad referente siempre va después de la frase relacional en este caso Juan. Este primer ejemplo el enunciado del problema contiene un conjunto comparado desconocido, estos problemas son considerablemente más fáciles que los problemas con un conjunto de referencia desconocido.

Ejemplo de un problema con enunciado inconsistente de carácter aditivo en el que el referente es el término desconocido:

1. Juan tiene 5 canicas.
   Juan tiene 2 canicas más que Pedro.
   ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

Veamos:

$$\underbrace{\text{Juan}}_{\textit{Comparado}}\ \text{tiene}\ \underbrace{\text{2 canicas}}_{\textit{diferencia}}\ \overbrace{\text{más que}}^{\textit{Frase relacional}}\ \underbrace{\text{Pedro.}}_{\textit{referente}}$$

La dificultad en este ejemplo donde el referente es el término desconocido, radica en que la expresión relacional no coincide con la operación aritmética a utilizar. En el ejemplo anterior la frase relacional es más que y la operación aritmética es la sustracción, luego el estudiante tiende a confundirse y a cometer errores a la hora de resolver problemas. Estos problemas generan un tipo de error denominado error de inversión, el cual consiste en el empleo de la operación inversa a la que se debe utilizar para resolver el problema es decir multiplica en lugar de dividir o viceversa y suma en lugar de restar o viceversa y cuyos resultados muestran que estos estudiantes cometen más errores de inversión en problemas con enunciado inconsistente que en problemas con enunciado consistente. (Castro, 1994; Lewis y Mayer, 1987).

Pape (2003), trata de ampliar la investigación de la hipótesis de la inconsistencia, mediante la exploración de estudiantes de séptimo grado en resolución de problemas de comparación multiplicativa utilizando las conductas: pensar en voz alta y recuperar datos, las tasas de éxito, los patrones de error, la lectura y tiempos de respuesta son examinados para investigar el impacto del lenguaje en términos relacionales.

Los resultados destacan la necesidad de una revisión más amplia de los procesos de resolución de problemas, quedando como evidencia que la reflexión en torno al tema está muy lejos de agotarse en Educación Matemática.

2.10 Teorías explicativas de la dificultad de los problemas de comparación

Muchos han sido los estudios realizados acerca de la resolución de problemas verbales de comparación en matemáticas encontrándose éstos entre los más difíciles para los estudiantes (Kaput y Clement, 1979; Lewis y Mayer, 1987; Nesher, 1980; Verschaffel, 1994; Weinberg, 2007). Debido a su complejidad lingüística y matemática, los estudiantes tienen dificultades para entender y resolver estos problemas (Lewis y Mayer, 1987).

El creciente interés que se tiene en la capacidad de los niños pequeños para resolver problemas aritméticos verbales y cuya comprensión y resolución les demanda la posibilidad de tener o adquirir muchas habilidades diferentes tales como la comprensión del lenguaje, la comprensión de la situación descrita, la capacidad de encontrar una ecuación y las capacidades de cálculo para resolver el problema y que todo esto lleva a hacerse la pregunta de cómo los niños adquieren habilidades para resolver problemas (Stern,1993).

A partir de estos resultados y estas interrogantes nuestro estudio pretende comprender mejor las operaciones mentales que los estudiantes de los primeros niveles de secundaria llevan a cabo cuando resuelven problemas de comparación multiplicativa. Y en cuya componente de actuación pretendemos dar cuenta de las acciones que realiza el estudiante a la hora de enfrentarse a resolver un problema, con la finalidad de caracterizar las estrategias que utiliza, los obstáculos que encuentra y los errores que comete.

Entre una de las dificultades que presentan estos problemas podemos mencionar su estructura semántica y la comprensión.

2.10.1 La estructura semántica y la comprensión

Aún cuando existen bastantes investigaciones realizadas en torno a la estructura semántica y la comprensión de problemas verbales de comparación, creemos necesario presentar algunas que nos ayuden a comprender ciertas afirmaciones respecto a la dificultad que muestran los problemas verbales de comparación.

En efecto hay estudios que muestran que los alumnos leían rápidamente el problema con el objetivo de decidir la operación aritmética adecuada para su resolución y no realizaban ningún análisis profundo y algunos autores coinciden en que la estructura semántica de estos problemas es la que afecta en mayor medida a la dificultad percibida por los niños (Vergnaud, 1983, 1988; Nesher, 1980). Por esta razón se hace énfasis en que son varias las posibles respuestas que han dado diversos autores sobre la dificultad de los problemas de comparación.

Los problemas de cambio, que implican una concepción unitaria, resultan más fáciles, seguidos de los de combinación y finalmente los de comparación. Por ello para muchos autores la estructura semántica del problema determina diferencias en las ejecuciones de los niños (Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Bermejo y Rodríguez, 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; Ibarra y Lindvall, 1979; Riley y cols., 1983; Vergnaud, 1981, 1982).

Según De Corte y cols. (1985, p. 461-462): “La estrategia utilizada por los niños para resolver problemas elementales de suma y resta, no sólo depende de la estructura semántica de la tarea, sino también de la secuencia de elementos dados en el texto del problema".

No obstante "El contenido semántico de un problema verbal puede ser analizado a trozos atendiendo a los diversos modos de codificar lingüísticamente las relaciones lógicas entre las tres proposiciones básicas del problema, o bien globalmente atendiendo a la naturaleza y el sentido del texto como un todo" (Puig y Cerdán, 1988, p. 98). Estos autores afirman que en el enunciado de un problema verbal cabe distinguir dos tipos de palabras: las que desempeñan algún papel en la elección de la operación y las que no lo desempeñan. Estas últimas suelen limitarse a conectar el problema con la realidad o a delimitar el contexto del problema. Hay otras palabras, tales como "ganó", perdió", "los dos juntos", que determinan, al menos en parte, la elección de la operación. Por ello se les llama palabras clave, y a su vez las dividen en tres categorías: a) palabras propias de la terminología matemática, b) palabras conectivas, verbos, que no son propias de la terminología matemática y c) palabras que expresan relaciones (Puig y Cerdán, 1988).

En esa misma línea se han mostrado los estudios de Suppes, Loftus y Jerman (1969), que tienen como finalidad determinar si la variable presencia o ausencia de las palabras clave facilita o dificulta la resolución de los problemas. Los resultados no fueron significativos, la presencia de palabras clave no explicaba de forma suficiente los grupos observados.

Por otro lado (De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Hudson, 1983) señalan que la formulación verbal del problema también puede influir en los resultados obtenidos por los niños.

Siguiendo las investigaciones antes mencionadas se puede agregar que la estructura semántica y la situación de la incógnita, el grado con que se describe en el texto del problema las relaciones entre las cantidades conocidas y las desconocidas y la secuencia de presentación de los datos pueden incidir en los procesos de resolución de los problemas. Además en el estudio longitudinal de Carpenter y Moser (1983), han señalado que la edad en los niños es un factor determinante en los niveles de resolución de los problemas verbales.

Por otra parte los experimentos realizados por Hegarty, Mayer y Green, (1992); Lewis, (1989); Lewis y Mayer, (1989) han demostrado la importancia de la comprensión en la resolución de problemas con expresiones relacionales.

Concretamente, hay autores que han realizado investigaciones con estudiantes universitarios que tenían que resolver este tipo de problema en forma consistente e inconsistente (Hegarty, Mayer y Monk, 1995).

Surgen investigaciones en donde un número significativo de universitarios, a los que se les podría considerar malos resolutores de problemas, usan las operaciones aritméticas inadecuadas en los problemas inconsistentes, pero resuelven bien los problemas consistentes (Hegarty y cols. 1995; Lewis y Mayer, 1997; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992). Lo que indica que los procesos de comprensión juegan un papel clave en la resolución de problemas.

Por otro lado autores que se ocupan de la capacidad de resolución de problemas (Hegarty et.al, 1995; Montague y Applegate, 1993; Pericola, Harris y Graham, 1992; Van Lieshout, Jaspers y Landewé, 1994) observan que el bajo rendimiento de los alumnos, sobre todo, los que presentan algún tipo de dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, está más relacionado con su incapacidad para comprender, representar los problemas y seleccionar las operaciones adecuadas, que con los errores de ejecución.

Los estudios de Dellarosa (1986); Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, (1988) presentan un tipo de problemas aritméticos en formato numérico y formato verbal a estudiantes de primeros grados de educación primaria. Los resultados mostraron que los niños cometen más de errores en problemas verbales que en problemas en formato numérico, además que el problema aritmético fue resuelto por todos los niños de primer grado cuando se le planteó en formato numérico, lo que parece un síntoma de su limitada comprensión del problema en formato verbal.

Esta discrepancia en el índice de dificultad de un problema según el formato numérico o verbal sugiere que la dificultad que plantea un problema a los niños no está determinada sólo por las destrezas de cálculo implicadas sino que hay otros aspectos que contribuyen a su dificultad, entre ellos, aspectos relacionados con la fase de comprensión.

2.10.2 El conjunto Referente desconocido

Stern (1993) en sus varios experimentos con niños de primeros cursos escolares y en su afán de encontrar una posible respuesta al porqué los problemas verbales que implican comparación son más difíciles para los niños, nos revela varios datos que han surgido de dichas investigaciones.

Los problemas aritméticos verbales con un conjunto referente desconocido, como "Juan tiene 7 huevos. Tiene 4 huevos menos que Pedro ¿Cuántos huevos tiene Pedro?", son mucho más difíciles para los niños que los problemas con un conjunto comparado desconocido. Tal y como hemos mencionado anteriormente Lewis y Mayer (1987) proponen que para cuando surgen estos casos se debe reorganizar el enunciado, por ejemplo: "Juan tiene 7 huevos. Pedro tiene 4 huevos más que Juan ¿Cuántos huevos tiene Pedro?", con la finalidad de convertir el enunciado de la forma IL a la forma CL,

Stern (1993) ha realizado seis experimentos con alumnos de primero y del jardín de infancia, razones suficientes para este hallazgo. Los experimentos del uno al cuatro, revelan que ni las dificultades en la tramitación del pronombre personal ni el uso de las estrategias clave podrían explicar las diferentes dificultades. El experimento cinco, muestra que la mayoría de alumnos de primero no eran conscientes de que la diferencia entre los dos conjuntos se pueden expresar de cualquiera de las dos formas: "en el conjunto x hay n más objetos que en el conjunto y" o "en el conjunto y hay n menos objetos que en el conjunto x". En el experimento seis, se indica que esta falta de acceso a utilizar un lenguaje flexible es lo que hace que los problemas de comparación con el conjunto de referente desconocido sean tan difíciles.

Quiere decir con esto que los problemas se centran en una diferencia muy conocida y replicada a menudo en conflicto entre dos tipos de problemas que tienen que ver con la comparación de conjuntos. No hay diferencia en el conocimiento matemático requerido para resolver los problemas con comparado desconocido en los que hay que restar los números, y para los que hay que añadir los números (Stern, 1993).

Otra dificultad que se presenta en estos problemas de comparación es la presencia del error de inversión.

2.10.3 El error de inversión

Los problemas de comparación ocasionan cierto error denominado error de inversión que según Lewis y Mayer, 1987 definen como aquel en el que el estudiante utiliza la operación inversa a la que debería utilizar para resolver el problema, en el caso de problemas de comparación multiplicativa, ocurre cuando se utiliza la división en lugar de la multiplicación o viceversa. No obstante el error de inversión consiste en una alteración o transposición del orden lógico-secuencial, en este caso, de las operaciones usuales de la aritmética (Lewis y Mayer, 1987). Para este hecho Lewis y Mayer (1987) se refieren a alumnos sin éxito en la resolución de problemas como los que cometen error de inversión en los problemas con enunciados inconsistentes y alumnos con éxito a los que no lo cometen.

English (1998) investigó las habilidades de estudiantes de 10 años de edad para razonar por analogía en la resolución de problemas de comparación en los que interviene la suma y resta. Se argumenta que tal razonamiento requiere tanto el conocimiento de relación y el conocimiento condicional. Tal y como se predijo, los estudiantes no tuvieron éxito en la resolución de la tarea, es decir los resultados muestran que el estudiante: (a) no pudo identificar la relación de las propiedades de un problema, (b) no pudo detectar las propiedades comunes de relación en isomorfismo (o casi isomorfismo) de los casos, y (c) no sabía cómo ni cuándo utilizar estas correspondencias relacionales. Muestra como resultado que los niños respondieron de manera coherente con las tareas que incluyen los problemas básicos de suma, lo que indica un conocimiento sustancial de relación de éstos, pero los niños respondieron de un modo irregular a los casos en los que interviene la sustracción.

Las respuestas de los niños a este último no son compatibles con la popular hipótesis de inconsistencia de Mayer, Lewis y Hegarty (1992), lo cual indica que se necesita seguir estudiando el razonamiento de los estudiantes.

Según Cohen y Kanim (2005), el error de inversión es relativamente común en estudiantes cuando resuelven problemas verbales de una relación proporcional entre dos cantidades, en estos casos muchos estudiantes colocan la constante de proporcionalidad en el lado equivocado del signo igual. Por ello los autores describen una investigación en tres posibles influencias sobre los estudiantes que cometen este error de inversión: (1) la elección del símbolo de la variable, (2) la estructura de la oración y (3) la familiaridad del contexto. El resultado muestra que la estructura de la oración es lo más significativo de estas tres posibilidades, sin embargo, la estructura de la frase por sí sola no proporciona una explicación completa para el error de inversión.

Se han encontrado otros errores en la traducción de problemas verbales a ecuaciones lineales simples, pero el error de inversión es uno de los más estudiados y la causa principal por la que se incurre en el error de inversión es en el intento de traducir directamente de palabras a símbolos (Hershkovics, 1989; Laborde, 1990; Mestre, 1988).

La dificultad que presenta esta inversión se ha planteado en varios estudios (Bilsky y Judd, 1986; De Corte y Verschaffel, 1987; Ryley y Greeno, 1988; Verschaffel, 1994; Deblois, 1997). Una de las causas de la dificultad que se plantea en estos estudios es la falta de concordancia entre los operadores semánticos y matemáticos. Un operador de semántica se define como "la conexión de un concepto y una expresión verbal en la que se indique una acumulación (por ejemplo, perder ganando,) o la comparación (por ejemplo, más, menos, veces más, veces menos)". El operador matemático se refiere a la operación matemática que se requiere para resolver el problema. Así, en el problema, "Juan tiene 5 canicas, tiene 3 canicas menos que María ¿Cuántas canicas tiene María?" el operador de semántica (de menos) y el operador matemático (de adición) no son concordantes. Esto es conocido como el modelo de Lewis-Mayer (LM) (Lewis y Mayer, 1987).

El modelo de comprensión de los problemas verbales de comparación y los procesos desarrollados por Lewis y Mayer (1987) y retomado por Verschaffel (1994) presenta una hipótesis sobre el tratamiento de los problemas inconsistentes. En este modelo se distinguen dos tipos de problemas, uno de la forma CL (lenguaje consistente) y otro de la forma IL (lenguaje inconsistente).

La hipótesis en que se basa el modelo de LM es que la solución de problemas mentales presentados de la forma IL requiere reorganizar el tipo de relación que se expresa en ellos para que se ajusten a un problema en la forma CL (Lewis y Mayer, 1987).

En el primer experimento los autores obtienen dos resultados importantes con respecto a la incomprensión de los estudiantes con enunciados relacionales en problemas verbales, en primer lugar, se demostró que los participantes son más probables que no comprendan un problema y por lo tanto cometan un error de inversión cuando el problema se presenta en la forma de lenguaje inconsistente, y en segundo lugar, los resultados también indican que la tendencia a no comprender un problema de lenguaje inconsistente IL es aún mayor cuando la operación necesaria es suma o multiplicación.

2.11 El simbolismo algebraico

Con el objeto de entender la traducción de problemas a expresiones algebraicas hemos creído conveniente revisar la literatura existente en el área del álgebra sobre cómo interpretan los estudiantes los signos algebraicos básicos. La misma nos permitirá dar respuesta a lo que ya se sabe sobre el problema y qué otros aspectos se han tratado de resolver para basarnos en algunos fenómenos que han sido explicados anteriormente o se han visto más recientemente.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000) requiere que los estudiantes de secundaria sean capaces de explicar y comprender el significado de las símbolos matemáticos y concretamente de los que se utilizan en álgebra. Los estudios previos han demostrado que no sólo los estudiantes de secundaria tienen dificultades, también los de edades de universidad específicamente en las siguientes áreas: las desigualdades en forma de ecuaciones, comprensión limitada de los términos más y menos y del signo igual, dificultades relacionadas con el uso de diferentes técnicas de resolución y la interpretación de las soluciones (Hegarty, Mayer y Green, 1992; Lewis 1989; Lewis y Mayer, 1987).

Reconocer el significado de los símbolos en las ecuaciones, las formas en que se relacionan no es tarea fácil, si partimos de que son elementos fundamentales para el pensamiento matemático, además de que el uso de formalismos simbólicos constituyen un obstáculo más para muchos estudiantes que comienzan a estudiar matemáticas avanzadas (Dubinsky y Yiparaki, 2000).

Entre la aritmética y el álgebra encontramos que tienen en común las operaciones básicas y el signo de igual. Sin embargo los signos presentes en las expresiones algebraicas deben interpretarse de manera distinta de como se hace en aritmética y este problema de interpretación crea dificultades a los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra (kieran, 2006).

Los estudiantes antes de tener contacto con el álgebra, han utilizado letras en fórmulas como las de áreas de figuras planas. Sin embargo muestran dificultades para interpretar esas letras como incógnitas, variables o parámetros (Küchemann (1978, 1981).

El estudio realizado por Küchemann (1978, 1981) identifica seis niveles de interpretación de las letras: letra evaluada, letra no usada, letra usada como un objeto, letra usada como una incógnita específica, letra usada como número generalizado y letra usada como variable. Este estudio realizado con estudiantes de entre 11 y 16 años de edad, mostró que la mayoría de los participantes tenían dificultades para abordar actividades que requerían interpretar letras como números generalizados, incógnitas específicas o variables. En su investigación observa $b + r = 90$ como respuesta más común a la tarea: "Los lápices azules cuestan 5 peniques cada uno y los lápices rojos cuestan 6 peniques cada uno. Compro algunos lápices azules y algunos lápices rojos y juntos me cuestan 90 peniques. Sí b es el número de lápices azules comprados y r el número de lápices rojos comprados, ¿Qué puedes escribir sobre b y r?" (Küchemann, 1978, p. 26).

Por otro lado Collis (1974) en lo que se refiere a los signos de operación en las expresiones algebraicas, sin dejar de lado la predisposición por la acción, describe la tendencia que tienen los estudiantes de interpretar y ver las expresiones algebraicas como algo que necesita ser completado y llama a este fenómeno la dificultad para aceptar la falta de cierre.

En otro estudio realizado por Booth (1984, 1988) en el proyecto *Strategies and Errors in Secondary Mathematics (SESM),* expone dificultades y errores en el uso de notaciones algebraicas. Hay tendencia por parte de los estudiantes en obtener un único término como respuesta como por ejemplo en la expresión $2a + 5b$ la convierten en $7ab$ o transforman $a + b$ en ab. Esto se debe, según Collis (1974), a que los estudiantes tengan como consecuencia una dificultad cognitiva. O puede que refleje las expectativas derivadas de la aritmética respecto a lo que supone que son "respuestas bien formadas" (Booth, 1988, p.23).

Observamos que estos primeros estudios centran su interés en las dificultades y errores de los estudiantes al iniciarse en el mundo del álgebra y que existen otras investigaciones cuyo objetivo es describir cómo los estudiantes dan sentido a la sintaxis del álgebra además de construir modelos de enseñanza para lograr este fin.

No obstante cuando se resuelven problemas verbales aritmético-algebraicos, una parte importante del proceso de resolución consiste en traducir el enunciado del problema al lenguaje algebraico; es decir poner el problema en ecuaciones. Dentro de los estudios que se centran en cómo afecta las relaciones entre cantidades a la dificultad del problema, Bednarz y Janvier (1994, 1996) establecen criterios para describir la complejidad: la naturaleza y número de las relaciones implicadas, la presencia de comparaciones aditivas y/o multiplicativas, la comparación entre dos cantidades desconocidas o una sola desconocida. Los resultados experimentales mostraron la influencia que ejercen estos factores de complejidad en el éxito al resolver problemas algebraicos.

En un estudio realizado en 1980 ó 1976 por Behr, Erlwanger y Nichols, analizaron si estudiantes de entre 6 y 12 años de edad consideraban el signo de igual como una relación (comparación de los miembros de una igualdad) o como un operador (una señal para hacer algo). Los resultados mostraron una fuerte tendencia a ver la igualdad como una señal para hacer algo, lo que nos parece ser producto de la limitada comprensión que poseen los estudiantes de términos relacionales como el signo de igual, más que, menos que, tantos como, etc. Los autores indican que con el aumento de la edad no se produce mejora en los resultados de los estudiantes, sino que se observa el efecto contrario.

Kieran (1981) coincide con estos autores en que los estudiantes desde preescolar hasta la universidad interpretan el signo de igual como una señal para hacer algo. En igualdades numéricas, el signo igual representa la relación de equivalencia numérica entre las expresiones que se encuentran en ambos lados del signo igual (Molina, 2006).

Investigaciones relacionadas con estudiantes en edades de educación secundaria que ya trabajan con expresiones algebraicas podemos mencionar los trabajos presentados por Essien y Setati (2006); Hunter (2006); Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2005) en donde señalan que un gran porcentaje de estudiantes muestran interpretación operacional del signo igual en los que además se comprueba que el éxito en resolución de ecuaciones algebraicas se debe a la interpretación que tienen del signo igual.

Con la aparición en la historia de las matemáticas de signos para representar conceptos o ideas, surge entre ellos, el signo igual. Y en cuyo origen centran su atención los estudios realizados por Molina, Castro y Castro (2007), sobre los diferentes significados, sus usos y mal usos, las representaciones de la igualdad previas al surgimiento del signo igual (=), su evolución y adopción universal. En este estudio nos muestran que incluso, en la actualidad sigue teniendo variedad de significados y se le continúa utilizando en diversos contextos. La igualdad entre dos objetos queda, por tanto, determinada por las relaciones específicas del dominio al que pertenecen dichos objetos (Freudenthal, 1994).

Es de nuestro interés mostrar de este estudio, algunos de los significados que se le otorgan a este signo en el contexto de la aritmética y el álgebra escolar, y observar las diferentes interpretaciones que los estudiantes le pueden dar al signo igual, con el objeto de acercarnos, un poco más, a lo que pueda ser una de las posibles dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven los problemas de comparación. En estudios realizados por Molina y cols. (2007) presentan las distintas interpretaciones que le dan los estudiantes al signo igual, las cuales han denominado de la siguiente manera:

- Propuesta de actividad de cálculo: Significado del signo igual en expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos, encadenados con símbolos operacionales, seguida a su derecha del signo igual (Ejemplo: $16: 3 =$, $x(x +1) - 3x(x + 5) =$). Este tipo de expresiones se utilizan en actividades de cálculo de operaciones o simplificación de expresiones, para proponer al alumno una actividad a realizar que no necesariamente ha de abordarse en el formato de una igualdad. (Identificado por Freudenthal (1994)).

- Operador: Significado del signo igual en igualdades o sentencias, unidireccionales, compuestas por una cadena de operaciones, dispuesta a su izquierda, y su resultado, dispuesto a la derecha (Ejemplo: $4 \times 5 = 20$, $x (x -2) + 3x2 = 4x2 - 2x$). En estos casos el signo igual indica la respuesta a un cálculo o simplificación; es interpretado como un operador. Este significado es denominado por algunos autores como significado aritmético u operacional del signo igual (Rojano, 2002; Van Ameron, 2002). En ocasiones el signo igual es utilizado por los alumnos con este significado para encadenar diferentes operaciones en el cálculo de una cadena de operaciones (Ejemplo: $12 + 3 = 15 + 21 = 36 - 9 = 25$), dando lugar a expresiones matemáticamente incorrectas. En este uso del signo igual la sentencia no está siendo considerada como una totalidad sino como una secuencia unidireccional de izquierda a derecha.

- Separador: Significado del signo igual otorgado por los alumnos al hacer uso de este signo como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad (Ejemplo: $= = x2 + 1= x = x2 – x + 1 = 0$, $f(x) = x2 =$ $f 2(x) = x4$). En este caso el signo igual relaciona expresiones que pueden no tener relación alguna, siendo pasos sucesivos en la resolución de la actividad en cuestión.

- Expresión de una equivalencia condicional (ecuación): Este significado del signo igual se encuentra en el contexto del álgebra en situaciones en las que la equivalencia expresada por medio del signo igual sólo es cierta para algún o algunos valores de la variable o variables, pudiendo no existir ninguno (Ejemplo: $x2 + 4x = 5x – 6$).

- Expresión de una relación funcional o de dependencia: Este significado se refiere al uso del signo igual para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros (Ejemplo: $l = 2$, $y = 3x+ 2$). Por ejemplo, éste es el significado del signo igual en fórmulas del área de figuras geométricas.

- Indicador de cierta conexión o correspondencia: Significado impreciso del signo igual que refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como, por ejemplo, entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas (Ejemplo: $= 3$; Precio bici $= 3x + 5$, siendo x el precio de un balón de baloncesto).

- Aproximación: Este significado corresponde a las situaciones en las que este símbolo relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico. (Ejemplo: $1/3 = 0.33$).

- Definición de un objeto matemático. En este caso el signo igual se utiliza para definir un objeto matemático o asignarle un nombre. En algunos contextos se utiliza el símbolo ≡ en vez del signo igual, así ocurre cuando se considera la ecuación o ecuaciones de una recta o plano. (Ejemplo: a 0 =1 con a un número natural, f(x) = 2x + 3, r ≡ ax + by + c = 0) (tomado de Molina y cols., 2007).

Por ello se debe hacer énfasis en la comprensión e interpretación de símbolos y cómo pueden utilizarse para estructurar ideas y comprender situaciones. En los Estándares de NCTM (2000) señalan que los programas de enseñanza deberían capacitar a los estudiantes para:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en contextos diversos.

Lo antes expuesto evidencia que es un área problemática que debe ser objeto de investigación desde diversos puntos de vista con la finalidad de lograr un avance efectivo dirigido al logro de soluciones en el área de la Educación Matemática.

En lo que se refiere a la principal diferencia entre el pensamiento aritmético y algebraico es que el primero implica la determinación numérica, y el último implica la indeterminación numérica (Radford, 2006). De acuerdo con Sfard (1995), esto requiere un cambio en el pensamiento de un individuo, un proceso evolutivo que refleja el desarrollo histórico del álgebra, donde el uso de representaciones simbólicas con el tiempo reemplaza a los enfoques puramente numéricos para hacer frente a la generalización.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 Tipo de estudio

Situamos nuestro trabajo dentro de los estudios de tipo descriptivo. En este trabajo nos interesa dar cuenta de cómo los estudiantes resuelven problemas de comparación multiplicativa y los diagramas que utilizan en el proceso. De acuerdo con Best (1970), la investigación descriptiva se preocupa de las condiciones o relaciones que existen; de las prácticas que prevalecen; de las creencias, puntos de vista o actitudes que se mantienen; de los procesos en marcha; de los efectos que se sienten o de las tendencias que se desarrollan. "A veces, la investigación descriptiva se preocupa de cómo lo que es o lo que existe se relaciona con algún hecho precedente que ha influido o afectado a un suceso o condición presentes" (en Cohen y Manion, 1990, pág.101).

Esta investigación tiene una doble componente en cuanto a su enfoque metodológico general. Hemos optado por una metodología mixta, en la que empleamos las metodologías cuantitativa y cualitativa de forma sucesiva y complementaria, es decir, una vez obtenidos los primeros resultados, tratamos de aplicar la técnica que permita complementar el conocimiento obtenido anteriormente.

(Hart, Smith, Swars y Smith, 2009). Gall, Borg y Gall (1996, p. 767) (Citado en Hart et al. (2009), p. 28) define la investigación cuantitativa como, "indagación que se basa en el supuesto de que las características del entorno social constituye una realidad objetiva que es relativamente constante en el tiempo y el entorno. La metodología dominante es describir y explicar las características de esta realidad mediante la recogida de datos numéricos sobre conductas observables de muestras y sometiendo estos datos a análisis estadísticos".

Los autores citados definen la investigación cualitativa como, "indagación que se basa en el supuesto de que los individuos construyen la realidad social en la forma de significados e interpretaciones, y que estas construcciones tienden a ser transitorias y situacionales. La metodología dominante consiste en descubrir estos significados e interpretaciones mediante el estudio de casos en profundidad en entornos naturales y sometiendo los datos resultantes a inducción analítica” (p. 767).

3.2 Participantes en el estudio

Han participado 89 estudiantes de cuatro grupos de primer curso de educación secundaria obligatoria de dos centros educativos de la ciudad de Granada y cuyas edades oscilan entre los 12 y 14 años. Los centros utilizados pueden considerarse como centros prototípicos de la enseñanza pública, y representativos de alumnos procedentes de familias de clase media granadina.

Los estudiantes a quienes se les aplicó el instrumento fueron seleccionados al azar, eligiendo en cada caso, cuatro grupos de primero de ESO. Mostramos los detalles en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Centros educativos y número de estudiantes.

Localidad	Centro	Tipo de Centro	Nº de Grupos	Nivel	Nº de Estudiantes
Granada	Zaidín Vergeles	Instituto Educación Secundaria	2	1º ESO	46
Granada	Ángel Ganivet	Instituto Educación Secundaria	2	1º ESO	43
					89

La elección de los cuatro grupos y la aplicación del instrumento fueron hechas según disponibilidad de cada centro escolar, con la precaución de aplicar el instrumento el mismo día en los dos grupos correspondientes a cada centro, evitando la divulgación de su aplicación entre estudiantes del mismo centro escolar. La tabla 3.2 muestra el orden de aplicación del instrumento, el centro escolar, el nivel que cursan y la cantidad de estudiantes por grupo.

Tabla 3.2 Orden de los grupos y cantidad de estudiantes por grupo.

Grupo	Centro escolar	Curso	Cantidad de estudiantes
1º	IES Zaidín Vergeles	1A	24
2º	IES Zaidín Vergeles	1C	22
3º	IES Ángel Ganivet	1B	22
4º	IES Ángel Ganivet	1C	21
			89

3.3 El instrumento

Con el objeto de tener un primer acercamiento y poder llevar a cabo la aplicación experimental, necesitábamos muestras de estudiantes que resolvieran problemas de comparación multiplicativa con lápiz y papel, sin preparación previa al respecto. Se tomó en cuenta la naturaleza del entorno escolar, pretendiendo que los estudiantes estén confortables y que el ambiente les produjera la menor presión posible a la hora de resolver los problemas.

3.3.1 Objetivos del instrumento

Cuando decidimos confeccionar el instrumento con el que se va a recoger la información empírica de nuestro estudio nos planteamos algunos objetivos:

1. Estudiar los diversos procesos de traducción entre las tres representaciones presentadas en los enunciados de las tareas: verbal, simbólica y gráfica, observando la actuación de los estudiantes.
2. Observar si se comete el error de inversión durante estos procesos de traducción.

3.3.2 Elaboración del instrumento

Al abordar el currículo de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) de España, hemos observado que uno de los objetivos del mismo es manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

A su vez no podemos dejar de lado la disponibilidad y actitud de los estudiantes, en cuanto al interés que ponen de manifiesto y la predisposición que les supone una prueba de matemáticas, sin previo aviso, siendo la preocupación principal, para algunos estudiantes, el saber si dicha prueba será evaluada por el profesor de la clase. Una vez aclarada la cuestión, actuaron con mayor naturalidad y tranquilidad, lo que nos permitió continuar con la aplicación del instrumento.

Hemos tomado en cuenta las relaciones entre las representaciones, verbal, simbólica y gráfica y sus posibles combinaciones. Estas representaciones las resumimos esquemáticamente en la matriz 3x3 con las combinaciones que surgen de dicha relación al igual que aparecen en la figura 3.1. Para la matriz de relaciones entre las representaciones, utilizamos las abreviaturas V: Verbal; S: Simbólico; G: Gráfico.

	V	S	G
V	VV	VS	VG
S	SV	SS	SG
G	GV	GS	GG

Figura 3.1 Matriz 3x3 de las relaciones entre representaciones.

A partir de esta matriz surgen las combinaciones de las representaciones para cada enunciado de los problemas que hemos diseñado en el cuestionario. (ver figura 3.2).

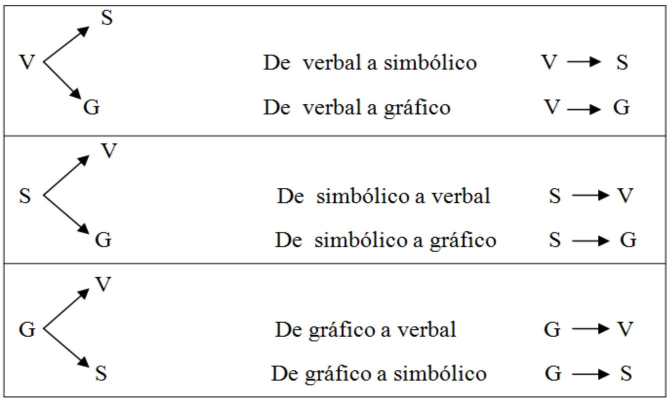


Figura 3.2 Combinaciones entre representaciones.

Al repetirse las relaciones: verbal-verbal, simbólico-simbólico y gráfico-gráfico, no las hemos considerado para elaborar nuestro cuestionario, razón por la cual dicho cuestionario se centra en mostrar cómo los estudiantes traducen y qué habilidades tienen para pasar de una representación a otra, diferente. Dado que los problemas del Bloque 1 son verbales, dejamos a consideración del estudiante la manera natural que utilizan a la hora de resolver problemas, pasando, así, de verbal a simbólico sin la necesidad de sugerirlo en el cuestionario.

Hemos diseñado un cuestionario propio que consta de seis problemas de comparación multiplicativa de referente desconocido, con dos apartados (a y b) cada uno, para ser aplicados a estudiantes de primero de Educación Secundaria Obligatoria en dos centros educativos de la ciudad de Granada-España.

Los problemas contenidos en dicho cuestionario están orientados a la exploración en el desempeño individual de los estudiantes en la resolución de problemas de comparación multiplicativa presentados con enunciado verbal, simbólico o gráfico y a la interpretación que muestran en cada caso. A continuación en la tabla 1 presentamos el cuestionario planteado a los estudiantes de primero de Educación Secundaria Obligatoria.

Para elegir los problemas sobre los que los estudiantes de 1º de ESO van a trabajar en su resolución, se cuidó que siguieran algunos criterios.

3.3.2.1 Criterios de selección para los problemas de 1º de ESO

Los problemas presentados a los estudiantes deben cumplir con ciertos criterios que nos han llevado a su selección definitiva. Estos criterios son:

a) Que los problemas sean de comparación multiplicativa (ver Castro, 1994).

b) Dentro de los problemas de comparación que sean de igualación, es decir aquel problema de comparación que en su enunciado verbal, utilice la expresión “veces tanto como” como frase relacional.

Veamos un ejemplo del problema de comparación planteado:

Marta tiene 42 cromos.
Marta tiene 6 veces tanto como Pedro
¿Cuántos cromos tiene Pedro?

Observemos en el problema verbal donde aparece la frase relacional ("veces tanto Como"), también observamos sus tres elementos, el comparado (Marta), el referente (Pedro) y el escalar (6 veces). (Véase figura 3.3).

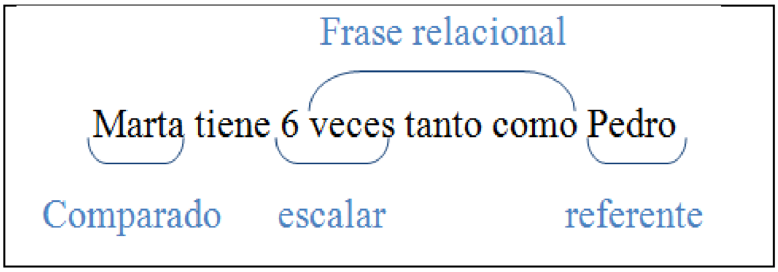


Figura 3.3 Problema verbal de comparación multiplicativa.

c) Los problemas planteado sean de un paso o simples, es decir cuando el estudiante resuelva el problema utilice una sola operación una sola vez. Al tratar de resolver el ejemplo anterior observamos que sólo se utiliza la división, una sola vez y se obtiene la respuesta al problema.

   Ejemplo: 42 : 6 = 7 (respuesta: Pedro tiene 7 cromos)

d) Que los diagramas para representar la información en los problemas de comparación fueran diagramas lineales con forma de banda rectangular, ya utilizados en investigaciones anteriores (Beckman, 2004), y que esos diagramas tengan una estructura isomorfa a los enunciados verbales o a los enunciados simbólicos dados por una ecuación de primer grado.

   Ejemplo: el problema antes enunciado verbalmente hemos utilizado un diagrama lineal para representar las relaciones existentes entre los datos del enunciado.

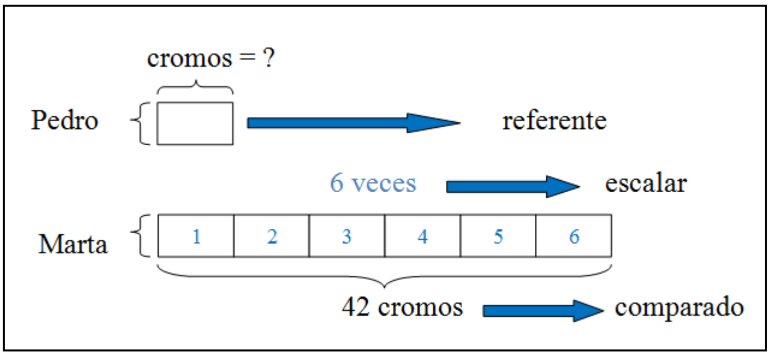


Figura 3.4 Diagrama rectangular o de banda.

e) El enunciado verbal fuese un enunciado inconsistente, en el sentido que le dan Lewis y Mayer (1987) a esta expresión, es decir, aquellos problemas donde el referente sea desconocido.

- Ejemplo: En el ejemplo anterior, la incógnita es "los cromos de Pedro", y Pedro es el referente. Al ser "Pedro" el referente y el término desconocido, este problema sería un problema inconsistente o con referente desconocido.

Teniendo en cuenta que queremos plantear problemas que sean equivalentes en tres formas de representaciones distintas, hemos elaborado tres bloques de dos problemas cada uno.

El orden en que hemos colocado los problemas tiene como finalidad proporcionarnos información sobre las traducciones entre los distintos tipos de representaciones y observar el papel de los diagramas como mediadores entre las representaciones verbales y algebraicas.

Usualmente un problema verbal se traduce a una representación simbólica de carácter aritmético o algebraico para su solución, si colocamos el bloque de diagramas antes de lo verbal corremos el riesgo de que la solución al problema enunciado verbalmente se obtenga por el aprendizaje en la resolución de diagramas, así mismo, ocurriría si los colocamos antes del bloque algebraico, lo que falsearía en este caso es la traducción de lo simbólico a lo verbal. Por ello, el bloque de diagramas lo hemos colocado al final. Así pues, el orden en que se presentan los bloques de problemas responde a una planificación predeterminada, que además responde a la siguiente descripción de condiciones:

- El primer y segundo problema fuesen de enunciado verbal, por ser habitualmente los utilizados en clases, y de esta forma les permitiera familiarizarse con el lenguaje y las expresiones o frases relacionales de los mismos.
- El tercer y cuarto problema, contengan en el enunciado una expresión de igualdad y una ecuación respectivamente. El tema de las ecuaciones, que según su profesor natural, fue recientemente enseñado, y al ser un tema visto por primera vez en clases, no podemos asegurar que todos los estudiantes recuerden las ecuaciones, esto hace que aumente un poco la dificultad de estos problemas con respecto de los anteriores.
- El quinto y sexto problema tengan un enunciado gráfico en formato diagrama; es decir un diagrama lineal con forma de bandas rectangulares que contenga las relaciones de las cantidades que actúan como datos, no utilizados previamente en el aula por los estudiantes para resolver problemas.

Cabe destacar que se tomó en cuenta la ausencia, en los contenidos curriculares de primero de Educación Secundaria Obligatoria, del uso de diagramas para representar los enunciados de los problemas de matemáticas, siendo los diagramas de barra en estadística y probabilidad los únicos utilizados y conocidos por los estudiantes para representar cantidades en estos niveles. Lo que nos supone incluir diagramas que contengan la situación problemática accesible para el nivel escolar del estudiante. Tal y como aparecen en la tabla 3.5 (problemas 5 y 6).

3.3.3 Descripción del cuestionario

El cuestionario consta de 6 problemas con 2 apartados cada uno, los enunciados corresponden a tres tipos de representaciones: verbal, simbólica y gráfica. Estos problemas los hemos agrupado en tres bloques, que hemos denominado Bloque 1, Bloque 2 y Bloque 3. Dichos bloques fueron agrupados tomando en cuenta el tipo de enunciado y, a su vez, las preguntas que corresponden a cada enunciado. Entendiendo por enunciado, la forma de expresar un problema.

3.3.3.1 Descripción del Bloque 1

En la tabla 3.3 mostramos los problemas del Bloque 1 planteados a los estudiantes de primero de ESO.

Tabla 3.3 Problemas planteados a los estudiante de 1º de ESO. Bloque 1.

Tarea	*Enunciado*	*Preguntas*
1	En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.
2	Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

Este bloque de tareas contiene los problemas 1 y 2. Son problemas de enunciado verbal de estructura multiplicativa de comparación (igualación) y referente desconocido. A partir del problema enunciado verbalmente, se les pide a los estudiantes, en primer lugar, que resuelvan el problema y luego dibujen un diagrama que represente las relaciones contenidas entre los datos del enunciado. El objetivo de este bloque es analizar el paso de verbal a gráfico y verbal a simbólico, observando cómo los estudiantes de primero de secundaria resuelven problemas verbales y qué dibujos construyen a partir de un enunciado verbal.

3.3.3.2 Descripción del Bloque 2

En la tabla 3.4 mostramos los problemas del Bloque 2 planteados a los estudiantes de primero de ESO.

Tabla 3.4 Problemas planteados a los estudiante de 1º de ESO. Bloque 2.

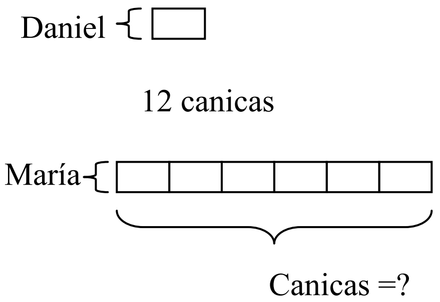
Tarea	*Enunciado*	*Preguntas*
3	Dada la siguiente igualdad **5·7 = x**	a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como". b) Dibuja un diagrama que represente gráficamente la igualdad anterior (**5·7 = x).**
4	Dada la siguiente ecuación **6·x = 72**	a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como". b) Dibuja un diagrama que represente gráficamente la ecuación anterior.

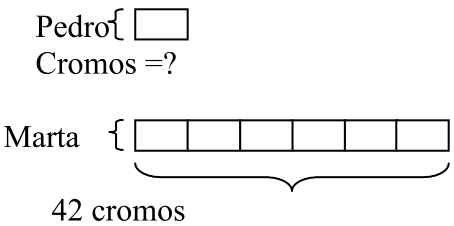
Consta de los problemas 3 y 4, en los que a partir de una ecuación se les propone a los estudiantes que inventen un problema utilizando la expresión "veces tanto como" y posteriormente que dibujen un diagrama que represente gráficamente la ecuación dada. En el primer caso, es decir en el problema 3, la incógnita es un producto y en el segundo caso (problema 4), la incógnita es un factor. Con el objetivo de observar qué tipos de problemas inventan los estudiantes de primero de secundaria, partiendo de una ecuación, observando las formas de incomprensión en el proceso de traducción del paso de lo simbólico a lo verbal y de lo simbólico a lo gráfico.

3.3.3.3 Descripción del Bloque 3

En la tabla 3.5 mostramos los problemas del Bloque 3 planteados a los estudiantes de primero de ESO.

Tabla 3.5 Problemas planteados a los estudiante de 1º de ESO. Bloque 3.

<table>
<tr><th>Tarea</th><th>Enunciado</th><th>Preguntas</th></tr>
<tr><td>5</td><td>Dado este diagrama que representa las cantidades que tienen Daniel y María.
</td><td>a) Inventa un problema que se ajuste al mismo y que contenga la expresión “veces tanto como”. Resuelve el problema que has enunciado.

b) Si D representa la cantidad de canicas de Daniel y M representa la cantidad de canicas de María, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>En el diagrama siguiente están representadas las cantidades de Pedro y Marta.
</td><td>a) Inventa un problema que se corresponda con el diagrama que contenga la expresión “veces tanto como”. Resuelve el problema que has enunciado.

b) Empleando las letras P y M para representar las cantidades de Pedro y Marta respectivamente, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.</td></tr>
</table>

Consta de los problemas 5 y 6, en ellos el enunciado viene dado por un diagrama lineal con forma de banda rectangular en el que aparece la información cuantitativa que representa las cantidades que actúan como datos. Se les pide en un primer apartado que inventen un problema que se ajuste al diagrama y que utilicen la expresión “veces tanto como” en el enunciado del problema, a la vez que resuelvan el problema que han inventado y en el segundo apartado se les pide que escriban una ecuación que relacione las cantidades del diagrama dado. El objetivo en este bloque es observar qué tipos de problemas inventan los estudiantes de primero de secundaria partiendo de un diagrama, y saber qué habilidades tienen para pasar de lo gráfico a lo verbal y de lo gráfico a lo simbólico.

3.3.4 Aplicación del instrumento

Los estudiantes, sólo recibieron las indicaciones verbales por parte de la investigadora en cuanto a: a) resolver los problemas con lápiz y papel, sin borrar, tachar o usar líquido corrector y b) si consideran que la respuesta está incorrecta, sólo deben trazar una línea encima de lo incorrecto, con el objeto de no perder información sobre la interpretación que le daban a cada problema a lo largo del proceso de resolución.

La elección de los grupos y el momento de la aplicación dependieron de la disposición y el horario de clases de los profesores de matemáticas de cada centro escolar.

Las tareas fueron aplicadas a primeras horas de la mañana, en el curso 2010/2011, durante los primeros días del mes de mayo y fueron resueltas de manera individual, en una hora normal de clase en el aula habitual de matemáticas con la presencia del profesor habitual y la investigadora, en calidad de observadores del proceso de resolución.

Los tres bloques fueron aplicados a los estudiantes el mismo día, por separado, es decir una vez terminan de responder el bloque 1, se les retira y se les entrega el bloque 2, y de la misma forma, cuando terminan el bloque 2, se les retira y se les entrega el bloque 3, por el simple hecho de evitar la réplica de los problemas enunciados en la tarea anterior. En todos los bloques, los estudiantes debían escribir sus datos personales para que al final, nos permitiera unir los tres bloques de cada estudiante. En la tabla 3.6, mostramos la distribución de los bloques, por enunciado y por pregunta relacionada. Las x son el indicador de cada bloque.

Tabla 3.6 Distribución de los bloques.

			Tipo	de	Enunciado
Bloques	Problemas	Apartado	Verbal	Simbólico	Gráfico
	1	a	x		
	1	b	x		
	2	a	x		
1	2	b	x		
	3	a		x	
	3	b		x	
	4	a		x	
2	4	b		x	
	5	a			x
	5	b			x
	6	a			x
3	6	b			x

Como nuestra investigación pretende observar el proceso de resolución de problemas, el investigador debía tener un grado de intervención muy bajo (Schoenfeld, 1985). Sin embargo, no podía ser inexistente, debido a que teníamos que evitar los diálogos entre los estudiantes tratando de explicarse unos a otros aquellas dificultades asociadas a la resolución de los problemas de comparación (por ejemplo, la aparición de frases relacionales poco utilizadas o casi desconocidas, el no saber la operación a realizar, etc.). Además, de cuidar que no se detengan en una sola tarea, sugiriéndoles que pasen a otra tarea, al no observarse actividad o se hubiera superado cierto tiempo.

Teniendo en cuenta el contenido y la planificación anual de los profesores que voluntariamente colaboran en nuestro estudio, el instrumento se diseñó para ser utilizado al finalizar el tema de álgebra. Álgebra. Currículo para 1º y 2º de ESO. Junta de Andalucía (Real Decreto. 116/2004).

Una vez enseñado este tema, los estudiantes deben estar familiarizados con el empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar y la traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa (Real Decreto 1631/2006).

De esta manera nos facilita la aplicación de las pruebas en el aula, ya que las pruebas se centran en la representación de cantidades desconocidas y en la resolución de problemas con el uso de enunciados verbales, simbólicos y gráficos. Si bien es cierto que los problemas de comparación no son muy usuales en el currículo de ESO, sí es cierto que se utilizan en el lenguaje coloquial.

3.4 La entrevista

En un primer acercamiento con el alumnado obtuvimos resultados acerca de cómo utilizan e interpretan diagramas los estudiantes de 1º de ESO en la resolución de problemas con enunciado verbal y gráfico. Estos resultados son de gran provecho para nuestro objetivo, pero falta completar algunas interrogantes que surgen de los mismos, impulsando a construir otro instrumento de recogida de información. Hemos diseñado una entrevista semiestructurada propia, con la finalidad de estudiar el comportamiento, las actuaciones, las estrategias que utilizan y los errores que cometen, los estudiantes cuando resuelven problemas aritméticos verbales o problemas enunciados gráficamente. Estos problemas fueron vistos en los primeros resultados.

3.4.1 Tipo de entrevista

Para observar la forma de actuación de los estudiantes en la construcción de diagramas y la resolución de problemas de enunciado verbal o gráfico, es necesario el uso de técnicas o instrumentos de investigación. En este caso hemos utilizado un protocolo de entrevista semiestructurada, propio, compuesto por preguntas directas y cortas, utilizando un lenguaje sencillo, de forma que la respuesta pueda ser breve, precisa y con libertad de transmitir emociones e inquietudes desde el punto de vista personal de cada alumno.

"la entrevista semiestructurada es una forma o modalidad de realizar entrevistas en las que se prevén los temas o tipos de cuestiones que deben ser planificados antes de su ejecución y, en el momento del desarrollo, se decide la secuencia y redacción de las preguntas que, muchas veces, van siendo marcadas por la dinámica de la conversación" (citado en Güemes, 1994, pág. 71).

Este tipo de entrevista trata de establecer cuestiones y preguntas que permiten varias direcciones hacia una alternativa previamente definida. El entrevistador debe saber conducir hacia esas posibles alternativas de respuesta siguiendo el protocolo prefijado (Bisquerra, 1989).

Para la elaboración de esta entrevista hemos tomado en cuenta ciertos aspectos como: el contexto, a quién se le va a aplicar, quién la va a aplicar, cómo lo va a aplicar y la finalidad de la misma. La entrevista se ha estructurado mediante un organigrama que permite a la entrevistadora interactuar sobre los formularios propuestos al entrevistado (alumno o alumna) en función de sus actuaciones.

3.4.2 Los participantes

En este informe de investigación pretendemos observar las actuaciones de estudiantes españoles en la construcción de diagramas y en la resolución de problemas. Describimos una experiencia de aula con nueve alumnos de ambos sexos entre 12 y 13 años, de primero y segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria de un instituto público de la ciudad de Granada.

3.4.2.1 Elección de los participantes de la entrevista

Apoyándonos en los resultados obtenidos en la primera aproximación elegimos para esta entrevista estudiantes de primero y segundo de educación secundaria obligatoria de un instituto público de la ciudad de Granada, entre 12 y 13 años de edad.

La participación de los estudiantes en la entrevista obedece a la disposición y la autorización de sus padres/madres o tutores. Esta autorización fue realizada a través de una hoja de consentimiento que firman sus padres/madres o tutores en señal de aprobación, puesto que la entrevista fue grabada en vídeo para evidenciar el hecho.

La entrevista se desarrolló dentro del horario normal de clases en el período correspondiente a su hora de matemáticas. La entrevista se les aplicó de forma individual fuera del aula de clases, en un recinto funcional no utilizado para dictar clases, pero lo bastante cómodo y tranquilo como para que el entrevistado no se sienta reprimido delante de sus compañeros de clases. Con la presencia de la entrevistadora y la camarógrafa.

3.4.3 Proceso de construcción de la entrevista

Este instrumento consta de tres partes:

- Primera parte: Un par de problemas verbales con ciertas características, adecuadas para nuestro objetivo, y seleccionados de entre un grupo de problemas planteados en un primer acercamiento en este estudio.
- Segunda parte: Tres soluciones en forma de diagramas, a manera de contraste entre los problemas anteriores.
- Tercera parte: Tres problemas compuestos enunciados gráficamente.

Para la construcción de la entrevista hemos utilizado dos problemas tomados del cuestionario planteado en un primer acercamiento, con modificación en las cantidades presentes en el enunciado. Tres soluciones, en forma de diagramas, presentadas en una única hoja de contraste hechas por otros estudiantes en un primer acercamiento y tres diagramas distintos presentados en un primer acercamiento. Toda esta información la hemos presentado por separado en seis formularios.

3.4.4 Material de entrevista

Hemos utilizado seis formularios en los que se presenta toda la información concerniente a la entrevista, descritos a continuación.

3.4.4.1 Descripción de los formularios

A partir de los resultados que se obtengan del anterior instrumento, necesitamos contrastar las producciones escritas por los estudiantes con sus razonamientos y justificaciones a la hora de plasmar sobre el papel la construcción de diagramas, relaciones y operaciones en la resolución de problemas de enunciado verbal y enunciado gráfico.

Para lograr esta información es necesario entrevistar al estudiante en el mismo momento de la construcción del diagrama y resolución del problema, solicitándole explicaciones, justificaciones y aclaraciones entre lo escrito y lo declarado verbalmente. Por lo que hemos administrado un instrumento compuesto por seis formularios que explicaremos con detalle a continuación.

Empezamos por describir los seis formularios (incluidos en el anexo 2 con el nombre de "FORMULARIOS DE ENTREVISTA") presentados a los alumnos durante la entrevista. Los formularios son presentados uno a uno.

- Formularios 1 y 2: El formulario 1, además de contener el problema 1 consta de una cabecilla para rellenar los datos personales de cada alumno. El formulario 2 consta del problema 2. Los problemas 1 y 2 son problemas verbales de comparación multiplicativa con referente desconocido. En estos dos problemas se les pide a los estudiantes que lean cuidadosamente el problema y que muestren cómo dibujan un diagrama que represente las relaciones existentes entre los datos presentes en el enunciado del problema.
- Formulario 3: Está compuesto por una hoja auxiliar de contraste con tres soluciones de forma gráfica, consta de tres diagramas: diagrama a, diagrama b y diagrama c. Estos diagramas representan los datos del problema 1 y 2. Los diagramas que representan los datos del problema 1 (formulario1), fueron presentados a los alumnos de primero de ESO y los diagramas que representan los datos del problema 2 (formulario 2), fueron presentados a los alumnos de segundo de ESO. Estos diagramas fueron dibujados por otros alumnos en un primer acercamiento. En este formulario se les pide que elijan cuál de los tres diagramas es parecido al construido por ellos mismos y que expresen el porqué no eligieron los otros dos.
- Formularios 4, 5 y 6: Cada uno de estos formularios constan de un problema compuesto enunciado gráficamente con la ayuda de un diagrama lineal en forma de

bandas rectangulares, y se les pide que hallen el valor que corresponde a las incógnitas “x” e “y”, en cada caso. Los tres diagramas son distintos.

3.4.4.2 Propósito de los formularios

De este modo una vez presentados los formularios a los estudiantes, resulta conveniente solicitar cómo procedieron en la resolución de las distintas tareas. La idea básica radica en:

1. Observar la estrategia que utilizan en la construcción de diagramas, si inician la construcción, por el referente o por el comparado.
2. Observar cómo interpretan los diagramas, si los interpretan como una relación parte - todo o como relación de comparación. Si los interpretan de forma aditiva o de forma multiplicativa.
3. Plantear cuál de los modelos de diagramas integrados es el mejor para representar el problema de comparación y porqué.
4. De no construir un diagrama de forma espontánea o a petición observar qué representación utilizan.
5. Observar si cometen error de inversión.
6. Obtener los resultados.

A partir de los resultados obtenidos anteriormente y de las ideas básicas surgen las interrogantes para la entrevista en la que se debe cuidar la estructura y la secuencia en función de las actuaciones de los estudiantes.

3.4.5 Desarrollo secuencial de la entrevista

Para la observación de la forma de actuación de los estudiantes en el uso de diagramas es necesario el uso de técnicas o instrumentos de investigación. Hemos construido un protocolo de entrevista semiestructurada, compuesta por preguntas directas y cortas, utilizando un lenguaje sencillo, de forma que la respuesta pueda ser breve, precisa y con libertad de transmitir emociones e inquietudes desde el punto de vista personal de cada alumno.

Este tipo de entrevista trata de establecer cuestiones y preguntas que permiten varias direcciones hacia alternativas previamente definidas. El entrevistador debe saber conducir hacia esas posibles alternativas de respuesta siguiendo el protocolo prefijado (Bisquerra, 1989).

Hemos tomado en cuenta, además, ciertos aspectos para su elaboración como: a) El contexto en el que se va a realizar; b) ¿A quién se le va a aplicar?; c) ¿Quién la va a aplicar?; y d) ¿Cómo la van a aplicar? Y la finalidad de la misma.

La entrevista se ha estructurado mediante un organigrama o esquema (véase figura 8) que permite al entrevistador (investigadora) interactuar sobre las tareas que le va a proponer al entrevistado (alumnado), en función de sus actuaciones.

Figura 3.5 Organigrama de la entrevista.

El desarrollo de la entrevista, tomando el organigrama antes mencionado, se preparó siguiendo algunos pasos:

- Si el alumno tiene una actuación satisfactoria al resolver los dos problemas se da fin y no se entrevista.

- Si al resolver los problemas (uno o los dos) tiene una actuación no satisfactoria, se observa si ha cometido error de inversión o no.
- Si el alumno no comete error de inversión se da fin y no se aplica la entrevista.
- Si el alumno comete el error de inversión, se le pide que dibuje un diagrama que represente los datos del enunciado.
- Se observa si el estudiante dibuja o no un diagrama.
- Si el estudiante no dibuja, se le interroga sobre qué le impide dibujar un diagrama, tratando de que explique las dificultades que tiene para ello.
- Además de preguntarle si recuerda un diagrama que haya utilizado en clases anteriores para resolver problemas de matemáticas. Alentándole de esta forma, a construir un diagrama.
- Si luego de animarle a construir un diagrama el estudiante no hace un dibujo se da fin a la entrevista.
- Si el estudiante construye un diagrama, se le pregunta cómo lo hizo y a continuación se le presenta un diagrama integrado construido por uno de sus compañeros para que interprete cómo ha sido construido.
- Una vez contesta a la interrogante anterior se le pide que compare el diagrama realizado por su compañero con el que él ha construido y se le pregunta cuál de los dos le parece más apropiado para representar el enunciado del problema de comparación explicando brevemente su respuesta.

En resumen, la secuencia didáctica de la entrevista se estructura de manera que permita avanzar en un sentido u otro, dependiendo de las competencias de cada alumno en particular.

A continuación proponemos dos ejercicios de observación de cómo utilizan diagramas los estudiantes de primeros cursos de secundaria en la resolución de problemas de comparación multiplicativa.

El objetivo es observar el papel que juegan los diagramas en la resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa, prestando particular interés en la forma de interpretar y representar por parte de los estudiantes, y los conflictos que dicho proceso conlleva.

Basado en estos cuatro puntos:

1. Resolver un problema verbal de comparación multiplicativa.
2. Observar si se comete el error de inversión
3. Proponer que dibujen un diagrama que represente los datos presentes en el enunciado del problema. A medida que el estudiante va avanzando, plantear preguntas con el fin de que el estudiante verbalice el procedimiento que esté llevando a cabo.
4. Una vez ha hecho el diagrama, discutir con el estudiante respecto de si entiende el diagrama construido y cómo lo ha hecho, y comparar un diagrama integrado con el diagrama construido por él.

3.4.6 Procedimiento de la entrevista

Esta entrevista fue guiada por la investigadora. Fue realizada dentro del horario escolar en un aula donde solamente estaban él o la estudiante, la investigadora y la persona autorizada para grabar en vídeo. Cada estudiante fue entrevistado de forma individual.

El procedimiento general de la entrevista lo hemos preparado de la siguiente manera:

En primer lugar se le presenta el formulario 1, y se les pide que rellenen sus datos personales, y una vez rellenan sus datos se les pide que dibujen un diagrama que represente los datos presentes en el enunciado del problema 1.

Se observa si el estudiante dibuja o no un diagrama. Si el estudiante no dibuja, se le interroga sobre qué le impide dibujar un diagrama, tratando de que explique las dificultades que tiene para ello. Además de preguntarle si recuerda un diagrama que haya utilizado en clases anteriores para resolver problemas de matemáticas. Alentándole de esta forma, a construir un diagrama. Si dibuja o no, se da fin al formualrio1.

Una vez termina con el formulario 1, se le presenta el formulario 2 con otro problema verbal para que dibuje un diagrama que represente las relaciones existentes entre los datos del enunciado del problema. Si dibuja o no se da fin al formulario 2.

A continuación se les presenta el formulario 3, que contiene los tres diagramas integrados construidos por sus compañeros en una hoja de contraste, para que elija el que más se parece al construido por él o ella (suponemos que construye diagrama). Una vez contesta a la interrogante anterior, se les pregunta el porqué no podrían ser los otros dos diagramas de la hoja de contraste y se da fin al formulario 3.

Al terminar con el formulario 3, se les presentan por separado los formularios 4, 5 y 6, que contienen tres problemas distintos, enunciados gráficamente, para que hallen el valor de las incógnitas que aparecen en los tres formularios. Si encuentran el valor de las incógnitas se les pregunta cómo lo han hecho, y se da fin a cada formulario y a la entrevista.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En este capítulo analizamos las respuestas dadas por estudiantes de educación secundaria a la traducción de problemas de comparación multiplicativa a representación simbólica, verbal y gráfica.

Hemos categorizado las respuestas en la traducción de problemas verbales a una representación simbólica y gráfica, al igual categorizamos las respuestas en la traducción de problemas gráficos a una representación verbal. Lo que nos ha permitido elucidar categorías para cada tipo de representación, e hipotetizar indicios de prioridad y subordinación entre ellas.

Describimos el análisis realizado de los datos obtenidos en este estudio, siendo necesario codificar los datos que posteriormente se analizarían estadísticamente. Hemos ejemplificado los resultados a partir de las producciones de los estudiantes.

4.1 Codificación de datos

Hemos codificado los datos obtenidos de tal manera que nos permita hacer el análisis estadístico de la información que se ha obtenido en los problemas de cada nivel, según las producciones de los estudiantes de la escuela secundaria obligatoria 1º de ESO. Es por ello que hemos analizado las respuestas de los estudiantes en los apartados a y b. Agrupando en cada caso los apartados con enunciados e interrogantes comunes. Esta codificación la hemos hecho en base a:

- Los participantes en el estudio
- Las tareas propuestas

- Si utilizan la representación correcta o no, para cada tarea en el proceso de resolución del problema.

4.1.1 Codificación de los participantes

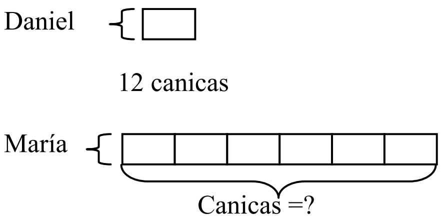
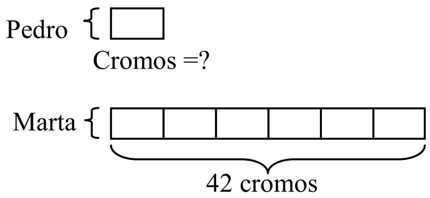
Los estudiantes de primero de ESO que resolvieron las tareas del bloque 1, 2 y 3, fueron 89 en total. Los hemos identificado de forma numérica utilizando números de dos dígitos del 01 al 89 y anteponiendo la letra mayúscula A. (por ejemplo: A-01, A-02, A-03). En el caso de que el análisis sea en un bloque de tareas o en otro, colocamos de forma específica el bloque al que pertenece el análisis B1, B2 o B3 (ejemplo: B1-A-01, para indicar que estamos analizando los datos del alumno 01 en el bloque 1).

4.1.2 Codificación de los problemas propuestos

Tal y como hemos descrito antes las tareas que vamos a analizar son las contenidas en el bloque 1, bloque 2 y bloque 3. En cada bloque hay dos tareas con dos apartados cada uno y para distinguir las tareas una de otra colocamos el dígito que corresponde a la tarea y la letra del apartado, dependiendo si corresponde al apartado a ó b; es decir si vamos a analizar la tarea 2 en el apartado b colocamos 2b y así en cada caso. A continuación detallamos las tareas presentadas a los estudiantes en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 tareas planteadas a los estudiantes.

Bloques	*Enunciado*	*Preguntas*	*código*
Bloque 1	1. En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.	1a 1b
	2. Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.	2a 2b

Bloque 2	3. Dada la siguiente igualdad: **5·7 = x**	a) Invente un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como". b) Dibuja un diagrama que represente gráficamente la igualdad anterior **(5·7 = x).**	3a 3b
	4. Dada la siguiente ecuación **6·x = 72**	a) Invente un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como". b) Dibuja un diagrama que represente gráficamente la ecuación anterior.	4a 4b
Bloque 3	5. Dado este diagrama que representa las cantidades que tienen Daniel y María. 	a) Inventa un problema que se ajuste al mismo y que contenga la expresión "veces tanto como". Resuelve el problema que has enunciado. b) Si D representa la cantidad de canicas de Daniel y M representa la cantidad de canicas de María, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.	5a 5b
	6. En el diagrama siguiente están representadas las cantidades de Pedro y Marta. 	a) Inventa un problema que se corresponda con el diagrama que contenga la expresión "veces tanto como". Resuelve el problema que has enunciado. b) Empleando las letras P y M para representar las cantidades de Pedro y Marta respectivamente, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.	6a 6b

4.1.3 Codificación del Bloque 1

En este bloque las tareas son de enunciado verbal. Conviene recordar que los problemas de este bloque son 1 y 2.

Para cada una de las dos tareas, hemos analizado de forma conjunta las respuestas de los estudiantes en los dos apartados correspondientes (1a con 2a y 1b con 2b), con la finalidad de categorizar las producciones desde el punto de vista verbal, simbólico y gráfico. Tomando en cuenta que estas tareas tienen distintos enunciados y distintas interrogantes hemos categorizado de acuerdo a ciertos criterios en los distintos pasos, observemos a continuación.

4.1.3.1 Codificación del apartado a del bloque 1

En este bloque vamos a evaluar las respuestas del paso verbal a simbólico. En el apartado **a** hemos categorizado de forma inductiva a partir de las producciones de los resolutores las distintas formas con que traducen el enunciado verbal en una representación simbólica**.** Las respuestas producidas por los estudiantes han sido evaluadas en función del proceso utilizado en la traducción del enunciado a la representación simbólica, independientemente de los errores de cálculo. Para ello hemos tenido en cuenta las caracterizaciones de las fases del proceso de resolución. Para efectos de este trabajo hemos tomado en cuenta las dos fases generales utilizadas por Castro (1994), que son: la comprensión del problema y la solución del problema, tal y como se muestra en la figura 4.1.

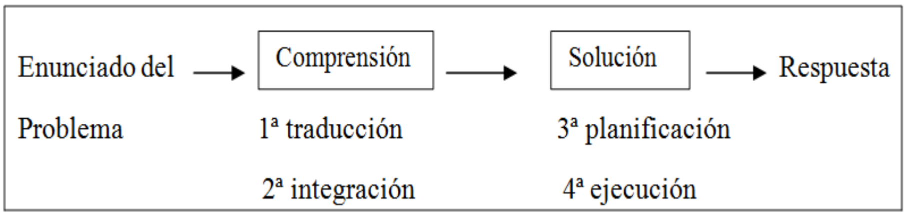


Figura 4.1 Fases de resolución de problemas verbales. Tomado de Castro (1994).

En este estudio tomamos en cuenta sólo la fase de comprensión con las dos subetapas (traducción e integración), independientemente si cometen errores de cálculo o no.

A través de un proceso inductivo hemos llegado a establecer seis categorías en las respuestas producidas por los participantes al problema enunciado en el apartado **a** de los problemas 1 y 2 del cuestionario de problemas. Mediante un proceso de refinamiento progresivo hemos detectado que las categorías de respuestas de los participantes se pueden reducir a seis tipos, armonizadas en torno a tres ideas claves iniciales: 1) ausencia de respuesta, 2) respuesta errónea y 3) respuesta correcta. Y dentro de cada una de ellas hemos indagado si había variantes con una significación propia diferenciada.

Para el establecimiento de las categorías hemos tenido también en cuenta los tipos de errores más frecuentes que se han detectado en este tipo de problemas y que están recogidos en la literatura (Castro, Rico y Castro, 1992).

Finalmente presentamos las categorías establecidas para el apartado **a** del bloque 1 (tareas 1y 2) con ejemplos de las mismas, excepto aquellas categorías donde no hay registro.

- R0: no hay información/sin proceso de resolución; el estudiante no produce ningún tipo de registro escrito, deja el espacio en blanco y no presenta proceso de resolución.

- REA: error aditivo; el estudiante utiliza la suma o la resta en lugar de la multiplicación o la división, es decir, el estudiante interpreta el problema como si fuese de estructura aditiva, empleando una adición o una sustracción para resolverlo.

  Ejemplo REA: El estudiante A-36 en la tarea 2a, comete error aditivo, en este caso interpreta “7 veces” como “restar 7”, y pasa de la estructura multiplicativa a la aditiva, es decir resta 287 - 7 en lugar de dividir 287 : 7. (Véase figura 4.2).

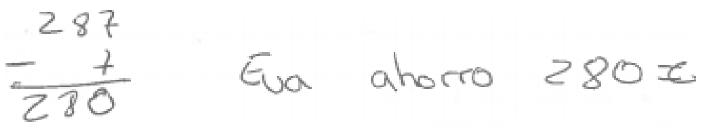


Figura 4.2 Error aditivo del estudiante A-36.

- REI: error de inversión; el resolutor utiliza la operación inversa a la que debería utilizar, es decir emplea la multiplicación por la división o viceversa.

  Ejemplo REI: En este caso el estudiante A-04 en la tarea **1a** utiliza la multiplicación en lugar de la división, y comete error de inversión, es decir resuelve el problema con la operación inversa, en este caso multiplica 64 x 4 en lugar de dividir 64: 4. (Véase figura 4.3).

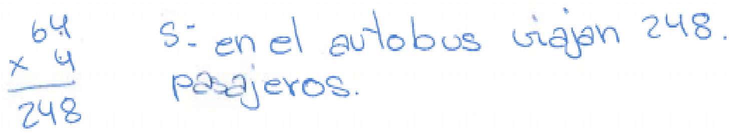


Figura 4.3 Error de inversión del estudiante A-04.

- REIR: error de inversión con rectificación; el estudiante anota una primera respuesta en la que comete error de inversión y a continuación tacha la respuesta que supone equivocada y resuelve nuevamente.

  Ejemplo REIR: El estudiante A-30 en la tarea **1a,** comete error de inversión con rectificación. Primeramente multiplica 64 x 4 = 256, seguido rectifica tachando todo el proceso hecho anteriormente, y a continuación divide 64: 4 =16 mostrando esto como única respuesta.(véase figura 4.4).

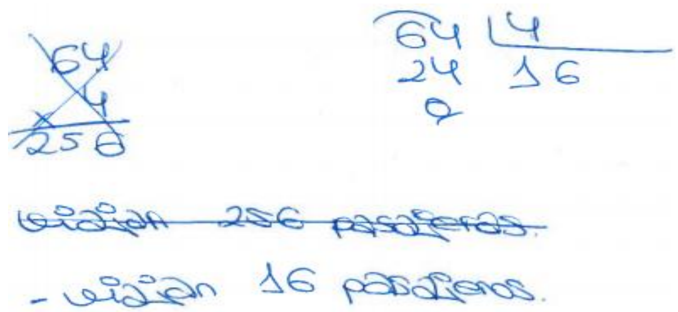


Figura 4.4 Error de inversión con rectificación del estudiante A-30.

- RC: representación aritmética correcta; cuando utilizan números y operaciones aritméticas de forma correcta para resolver el problema.

  Ejemplo RC: El estudiante A-77 en la tarea **2a** representa y resuelve el problema con procedimientos puramente aritméticos de forma correcta.

Figura 4.5 Representación aritmética del estudiante A-77.

- RAC: representación algebraica correcta; cuando en el proceso de resolución los estudiantes explicitan de manera correcta relaciones de carácter algebraico (ecuaciones simples) entre los datos utilizando operaciones algebraicas para resolver el problema.

Ejemplo RAC: El estudiante A-52 en la tarea **2a,** utiliza un procedimiento algebraico y representa el problema verbal de comparación utilizando una ecuación simple.

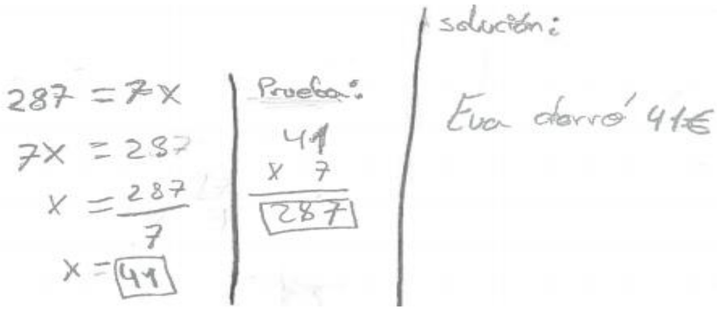


Figura 4.6 Representación algebraica del estudiante A-52.

4.1.3.2 Frecuencias del apartado a del Bloque 1

En la tabla 4.2 mostramos un resumen de las frecuencias y porcentajes obtenidas de las producciones de los estudiantes en cada categoría para este apartado.

Tabla 4.2 Frecuencias del apartado *a* del Bloque 1

		Frecuencias			Porcentajes
Categoría	Descripción	1a	2a	Total	%
R0	en blanco/sin proceso de resolución	4	5	9	5,1
REA	error aditivo	1	2	3	1,7
REI	error de inversión	9	25	34	19,1
REIR	error de inversión con rectificación	10	6	16	9,0
RC	representación aritmética correcta	62	48	110	61,8
RAC	representación algebraica correcta	3	3	6	3,4
	Total	89	89	178	100

A partir de esta tabla 4.2 comentamos:

- Las 178 respuestas (correctas e incorrectas) dadas por los sujetos al apartado **a** de los dos primeros problemas las han producido empleando el cálculo aritmético, no han utilizado ningún diagrama u otro tipo de gráfico para abordar la resolución de los dos problemas de comparación.

- Observamos un alto porcentaje de respuestas correctas en ambos problemas, si tomamos como correctas las tres últimas categorías de la tabla 4.2 (REIR, RC, RAC suman un 74,2%), teniendo mayor éxito en el problema 1, que en el 2.
- El tipo de error que mayormente se comete es el de inversión (19,1%), aunque se comete el error aditivo, pero con menor frecuencia.
- El segundo problema presenta mayor dificultad, puesto que permite un mayor número de respuestas con error de inversión.
- Da la impresión que el aumento de las cantidades en el enunciado del segundo problema, da paso al aumento del error de inversión y por consiguiente a un menor éxito en el segundo problema en comparación con el primero.

Observamos que la frecuencia con la que los estudiantes utilizan una representación algebraica es muy baja comparada con la representación aritmética.

4.1.3.3 Codificación del apartado b del Bloque 1

Para completar la información de este primer bloque, en lo que sigue exponemos los resultados obtenidos correspondientes a la segunda pregunta planteada en los dos primeros problemas, que corresponde con la capacidad de traducción de lo verbal a lo gráfico que manifiestan los resolutores.

Hemos tomado en cuenta las categorizaciones utilizadas en estudios anteriores como las de Edens y Potter (2007), categorizan los dibujos o diagramas producidos por los estudiantes en *esquemáticos* y *no esquemáticos*. Por otra parte Uesaka, Manalo e Ichikawa (2007) los llaman *diagramas de alta calidad o esquemáticos* y *diagramas de baja calidad o pictóricos.* Algunas de estas categorías pueden coincidir con nuestro análisis.

En el apartado **b** de los problemas 1 y 2 se les pide a los estudiantes que dibujen un diagrama a partir del problema enunciado verbalmente. Se trata pues, de que realicen una traducción desde una representación verbal de un problema de comparación multiplicativa a una representación gráfica. Para analizar las producciones de los sujetos en respuesta a esta traducción entre la representación verbal y la gráfica, hemos establecido unos criterios previos en función de los cuales categorizar las respuestas. Concretamente, los criterios para analizar los diagramas producidos por los estudiantes han sido: a) Si en la respuesta aparece un dibujo o no; b) grado de integración del problema, es decir, si se reflejan las relaciones entre las cantidades. De acuerdo con estos criterios hemos obtenido respuestas de los siguientes tipos:

- Sin dibujo
  - Respuestas en blanco.
  - Reformulación verbal del enunciado del problema.
  - En forma de expresión esquemática.
- Con dibujo
  - Dibujo cualitativo.
  - Dibujo cuantitativo:
    - Representan las cantidades que se comparan pero el resolutor no establece una relación multiplicativa correcta entre ellas.
    - Representan las cantidades que se comparan y cuantifican correctamente la relación multiplicativa entre ellas.

A continuación describimos las categorías establecidas anteriormente según las producciones de los estudiantes de este estudio y mostramos ejemplos de cada una de ellas, excepto las categorías sin dibujo.

- **D0:** sin dibujo / en blanco; no hay información, no dibuja o está en blanco.
- **DRE**: sin dibujo/ reformulación del enunciado. El estudiante no dibuja, hace anotaciones, reescribe el enunciado.
- **DEP:** sin dibujo/ diagrama esquemático. El estudiante escribe en forma sintética, telegráfica, resumida, esquematiza la información, es decir escribe frases que

ayudan a organizar la información presente en el enunciado, unos son parecidos a los esquemas de proporcionalidad, de manera visual, sencilla captando parte o toda la información del enunciado del problema.

- **DCL:** dibujo cualitativo. Se observan dibujos de personajes u objetos alusivos a la temática o el contexto del enunciado.

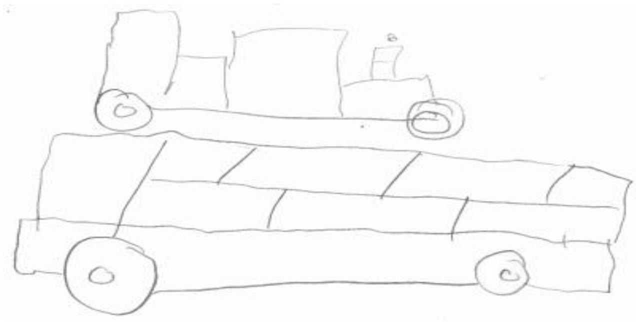


Figura 4.7 Dibujo cualitativo producido por el estudiante A-07.

- **DCN:** diagrama cuantitativo. Son diagramas más elaborados que los cualitativos. En ellos, se observa un dibujo que refleja las dos cantidades que intervienen en el esquema de comparación (referente y comparado) y también la relación multiplicativa que existe entre ellos. En este dibujo no se refleja la relación entre los datos presentes en el enunciado.

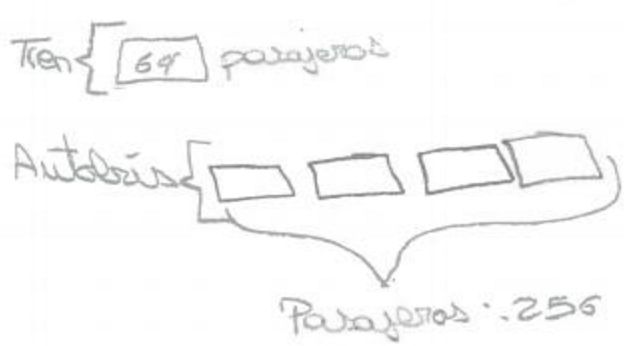


Figura 4.8 Diagrama cuantitativo producido por el estudiante A-35.

- **DCNI:** diagramas cuantitativos integrados. Estos diagramas además de tener características similares a los diagramas cuantitativos (DCN) reflejan una representación coherente de la estructura del problema. Estos diagramas son más elaborados que los diagramas cuantitativos, desde el punto de vista aritmético. Según las fases en resolución de problemas verbales, los resolutores han realizado un proceso de traducción y de integración del problema, por ello, los denominamos *diagramas integrados*. En la tabla 4.3, observamos que los diagramas cuantitativos y los cuantitativos integrados se han utilizado con menor frecuencia que los cualitativos.

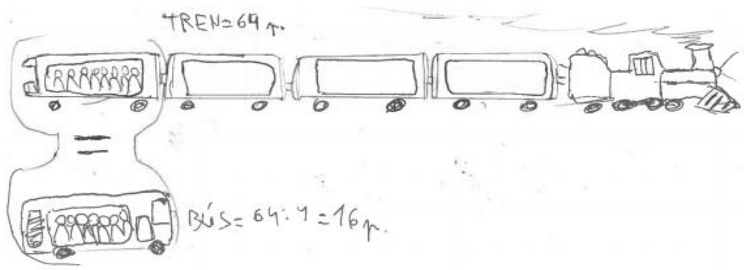


Figura 4.9 Diagrama cuantitativo integrado producido por el estudiante A-71.

4.1.3.4 Frecuencias del apartado b del Bloque 1

En la Tabla 4.3 observamos las frecuencias y los porcentajes de las producciones de los estudiantes para este apartado de dibujo de diagramas.

Tabla 4.3 Frecuencias del apartado b del Bloque 1.

		Frecuencias			Porcentajes
Categoría	Descripción	1b	2b	Total	%
D0	Sin dibujo/ en blanco	7	14	21	11,8
DRE	Reformulación del enunciado	6	6	12	6,7
DEP	Expresión esquemática	11	14	25	14,0
DCL	Dibujos cualitativos	34	36	70	39,3
DCN	Diagramas cuantitativos	7	12	19	10,6
DCNI	Diagramas cuantitativos integrados	24	7	31	17,4
	Total	89	89	178	100

A partir de esta tabla 4.3 podemos comentar:

- Las producciones en blanco son de apenas un máximo del 11,8%. Lo que nos supone la familiaridad que tienen los estudiantes con estos problemas de enunciado verbal.

- La frecuencia es mayor donde utilizan diagramas cualitativos (39,3%), que representan personajes u objetos de la temática del enunciado al igual que los dibujos en los que aparecen representadas las respuestas del problema, en otros casos el uso de otros tipos de dibujos, donde actúan como operador en ambos casos las frecuencias alcanzan poco más del 34% y 45% respectivamente.
- La frecuencia con la que hacen dibujos cuantitativos en el apartado 1b es mayor que en el apartado 2b, esto nos lleva a pensar que el apartado 1b es más fácil de representar en forma cuantitativa que el apartado 2b.

4.1.4 Codificación del Bloque 2

El Bloque 2 consta de los problemas 3 y 4, ambos con sus apartados a y b. En este bloque el enunciado es simbólico. La tarea 3 es una expresión de igualdad y la tarea 4 es una ecuación lineal simple, donde en el primer apartado (*apartado 3a y 4a*) se les recomienda inventar un problema con cierta condición, y en el segundo apartado (*apartado 3b y 4b*) se les pide que dibujen un diagrama que represente gráficamente la igualdad o la ecuación simple, en ambas tareas.

4.1.4.1 Codificación del apartado a del Bloque 2

Mediante un proceso inductivo, hemos realizado la categorización de las respuestas a partir de las producciones de los estudiantes. Presentamos ejemplos de cada categoría, excepto la que no hay registro o información. Concretamente, los criterios para analizar los diagramas producidos por los estudiantes han sido: a) Si inventan un problema verbal o no; b) si en el problema se reflejan las relaciones entre las cantidades; c) presencia o no de errores del enunciado. De acuerdo con estos criterios hemos obtenido respuestas de los siguientes tipos:

- No inventan problema
    - Respuesta en blanco; no hay registro, sin información

- Información sin sentido, utilizan frases que no tienen coherencia global o ininteligibles, es decir utilizan frases sueltas que no representan la estructura global del problema.

➢ Inventan problema

- No es de comparación; inventan problema verbal de otro tipo (grupos repetidos, de isomorfismo de medidas o de proporcionalidad)

  - Incompleto le hace falta un dato o la interrogante

- Es de comparación

  - Incompleto le hace falta un dato o la interrogante

  - Cambian la frase relacional a "veces más que" y "veces menos que"

  - Cometen error de inversión

  - Correctamente

Las categorías finales establecidas son:

- **I_1** no hay información o está en blanco

- **I_2** información sin sentido

  Ejemplo I_2: El estudiante A-42 en la tarea 3a inventa un problema verbal sin sentido, no responde a los datos que se le dan en el enunciado, trata de asociarlo con algo sin llegar, al final del enunciado, a asociarlo con ese algo.

Dada la siguiente igualdad:

$$5 \cdot 7 = x$$

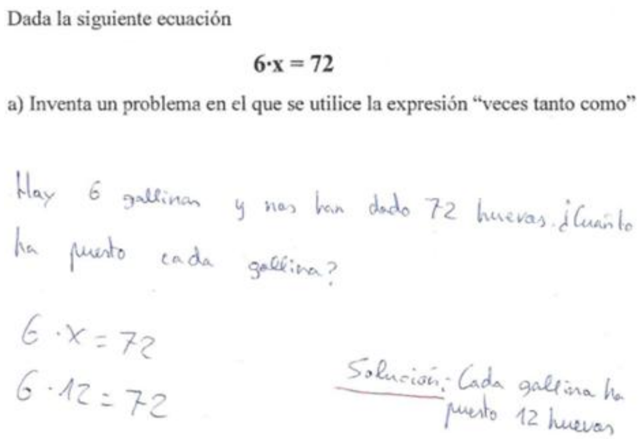
a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como"

Un niño tina 5 ~~tinos~~ balonazos 7 veces tanto como 35 balonazos ¿Y si en vez de tina 5 balonazos tina 8 cada vez?

Figura 4.10 Invención de problemas del estudiante A-42.

- **I3** inventan un problema de estructura multiplicativa que no es de comparación: construyen un enunciado verbal, pero utilizan una expresión no comparativa, es decir inventan problemas de grupos repetidos, de isomorfismo de medidas o de proporcionalidad y algunas veces la información es incompleta.

  Ejemplo I3: El estudiante A-12 en la tarea 4a inventa un problema verbal, pero no es de comparación. En el proceso de resolución mantiene la estructura multiplicativa del problema.


Dada la siguiente ecuación

$$6 \cdot x = 72$$

a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como"

Hay 6 gallinas y nos han dado 72 huevos. ¿Cuánto ha puesto cada gallina?

$6 \cdot x = 72$

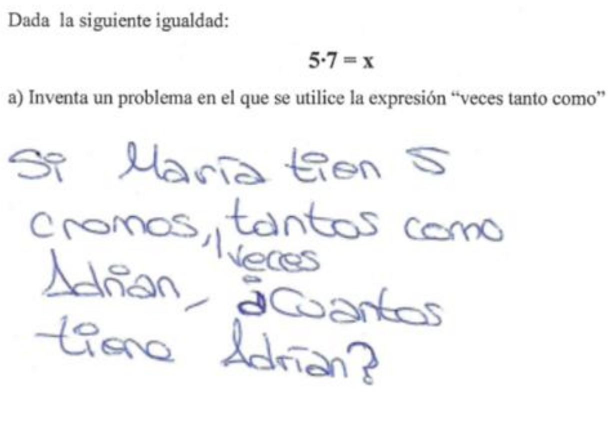
$6 \cdot 12 = 72$

Solución: Cada gallina ha puesto 12 huevos

Figura 4.11 Invención de problemas del estudiante A-12.

- **I4** es de comparación con información incompleta; hace falta algún dato o la pregunta en el enunciado.

  Ejemplo **I4**: el estudiante A-30 en la tarea 3a, en este caso enuncia un problema verbal de comparación, pero le hace falta un dato para completar el problema.


Dada la siguiente igualdad:

$$5 \cdot 7 = x$$

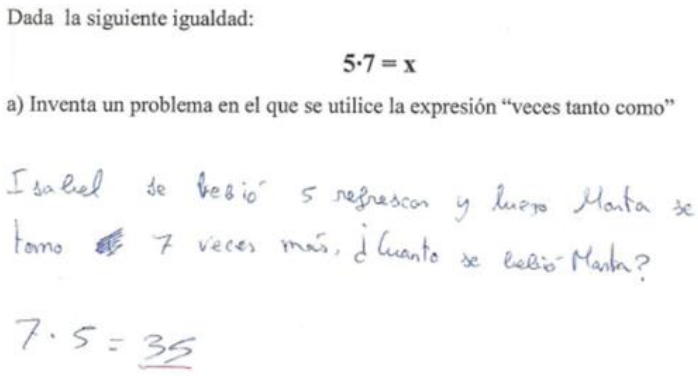
a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como"

Si María tien 5 cromos, veces tantos como Adrían. ¿Cuantos tiene Adrían?

Figura 4.12 Invención de problemas del estudiante A-30.

- **I_5** cambian frase relacional por otra frase relacional

  Ejemplo I_5: El estudiante A-12 en la tarea 3a inventa un problema verbal, pero cambia la frase relacional sugerida. Utiliza la frase "veces más" en lugar de "veces tanto como" en el enunciado inventado, en este resuelve utilizando la multiplicación.



Dada la siguiente igualdad:

$$5\cdot 7 = x$$

a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como"

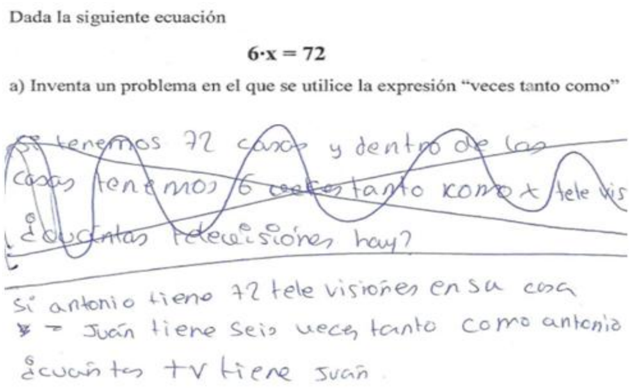
Isabel se bebió 5 refrescos y luego Marta se tomo 7 veces más, ¿Cuanto se bebió Marta?

$7 \cdot 5 = 35$

Figura 4.13 Invención de problemas del estudiante A-12.

- **I_6** cometen error de inversión: cometen error de inversión en el enunciado del problema, es decir invierten los datos

  Ejemplo I_6: El estudiante A-27 en la tarea 4a inventa un problema verbal de comparación multiplicativa, comete error de inversión al enunciar el problema.



Dada la siguiente ecuación

$$6\cdot x = 72$$

a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como"

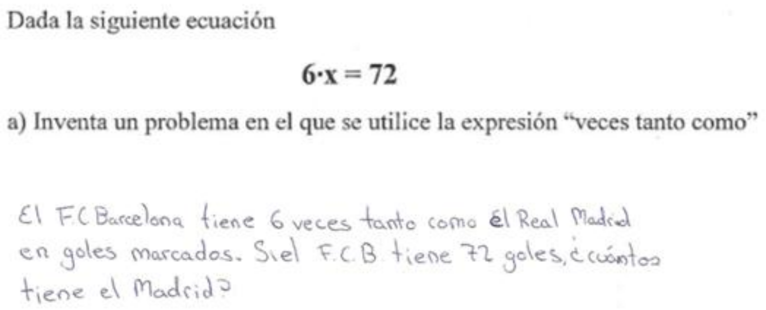
~~Si tenemos 72 casas y dentro de las casas tenemos 6 veces tanto como x tele vis ¿cuantas televisiones hay?~~

Sí antonio tiene 72 tele visiones en su casa y Juán tiene Seis veces tanto como antonio ¿cuántos tv tiene Juan

Figura 4.14 Invención de problemas del estudiante A-27.

- **I_7** inventan problemas verbales de comparación multiplicativa correctamente: el enunciado es correcto, es decir inventan un problema utilizando la expresión "veces tanto como", tomando los datos de la ecuación, respetando la incógnita, referente y comparado.

Ejemplo I_6: El estudiante **E-69** en la tarea **4a** inventa un problema verbal de comparación correctamente, utiliza la frase relacional sugerida y mantiene la estructura del problema.


Dada la siguiente ecuación

$$6 \cdot x = 72$$

a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como"

El F.C Barcelona tiene 6 veces tanto como él Real Madrid en goles marcados. Si el F.C.B. tiene 72 goles, ¿cuántos tiene el Madrid?

Figura 4.15 Invención de problemas del estudiante A-69.

4.1.4.2 Frecuencias del apartado a del Bloque 2

La Tabla 4.4 muestra la codificación y las distintas categorías basadas en las producciones de los estudiantes, el análisis de frecuencias y los porcentajes de las soluciones de los estudiantes de primero de secundaria para los problemas 3a y 4a.

Tabla 4.4 Frecuencias del apartado a del Bloque 2

Categoría	Descripción	Frecuencia			Porcentaje
		3a	4a	Total	%
I_1	No hay información o en blanco	7	16	23	12,9
I_2	Información sin sentido	20	20	40	22,5
I_3	El problema no es de comparación	12	23	35	19,7
I_4	Es de comparación incompleto	12	6	18	10,1
I_5	Cambian frase relacional	4	2	6	3,4
I_6	Cometen error de inversión	4	7	11	6,1
I_7	Inventan problemas verbales de comparación multiplicativa correctamente	30	15	45	25,3
	Total				100

A partir de esta tabla 4.4 de frecuencias y porcentajes presentamos los siguientes comentarios:

- La información en blanco se observa con mayor frecuencia en la segunda tarea más que la primera, alcanzando un 12,9 %.
- La frecuencia donde los problemas que inventan los estudiantes son incongruentes, sobrepasa el 20% en ambos casos.
- Los estudiantes inventan problemas de diversos tipos, incluyendo sumas repetidas, cambio, combinación entre otros, obteniendo un porcentaje mayor al 19% en ambas tareas.
- Se comete el error de inversión sin alcanzar el 10%.
- en la fase de invención de problemas verbales correctamente en el primer apartado tiene una frecuencia equivalente a un poco más que en el segundo apartado, desciende las producciones correctas de los estudiantes, en una u otra tarea, lo que nos supone una disminución considerable en esta fase, alcanzando un 25 %.

4.1.4.3 Codificación del apartado b del Bloque 2

Como se ha dicho antes las tareas 3b y 4b son tareas de enunciado simbólico. En las que se pide a los estudiantes que dibujen un diagrama que represente gráficamente la ecuación simple. Para saber los diagramas que los estudiantes dibujan a partir de un enunciado simbólico mostramos ejemplos de las producciones de estudiantes en los casos donde hacen dibujos, C_4 y C_5, hemos codificado las producciones en las siguientes categorías:

C_1: sin dibujo / en blanco; no hay información, no dibuja o está en blanco.

C_2: sin dibujo/ reformulación del enunciado; no dibujan, hacen anotaciones, reescriben el enunciado en forma sintética, telegráfica, resumida.

C_3: sin dibujo/ en forma de esquemas de proporcionalidad.

C_4: dibujo cualitativo; dibujan personajes u objetos alusivos a la temática o el contexto del enunciado.

- Ejemplo C_4: El estudiante A-09 en la tarea 3b observamos que hace un diagrama cualitativo, donde no relaciona las cantidades dadas en la igualdad.

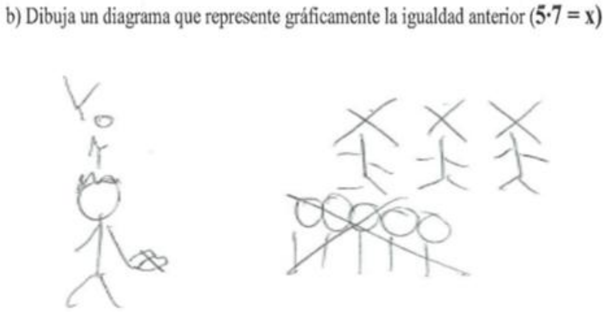


Figura 4.16 Diagrama cualitativo del estudiante A-09.

C_5: dibujo cuantitativo; los diagramas más elaborados los hemos denominados cuantitativos. En ellos, se observa un dibujo que refleja cantidades (referente, escalar o comparado), y también la relación multiplicativa que existe entre ellos. Puesto que en estos dibujos se refleja la integridad del problema los denominamos diagramas integrados.

-Ejemplo C_5: El estudiante A-71 en la tarea 3b hace un dibujo con aspecto relacional es decir trata de relacionar las cantidades que aparecen en el enunciado, dibujando figuras similares a canastas las cuales tienen un valor numérico que a continuación refleja en un solo diagrama que representa las cantidades de la igualdad.

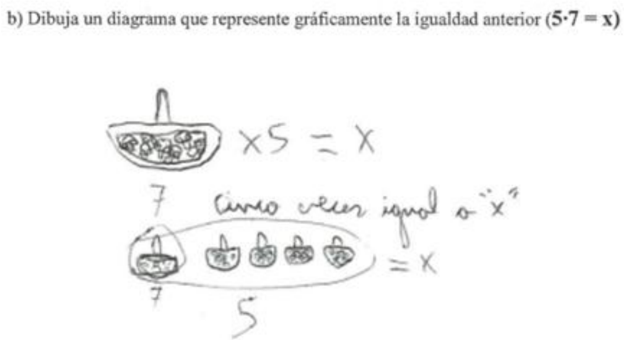


Figura 4.17 Diagrama cuantitativo del estudiante A-71.

- Ejemplo C_5: El estudiante A-19 en la tarea 3b hace un diagrama cuantitativo, puesto que trata de relacionar las cantidades de la igualdad presentes en el enunciado.

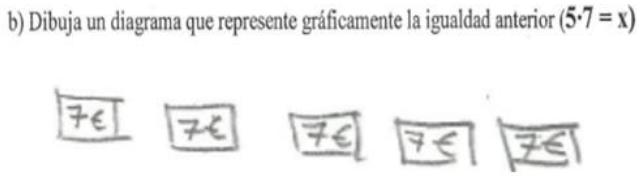


Figura 4.18 Diagrama cuantitativo del estudiante A-19.

- Ejemplo C_5: El estudiante A-67 en la tarea 4b hace un diagrama cuantitativo en el cual utiliza barras estadísticas para representar las cantidades existentes en la ecuación y en este caso, el estudiante representa la solución del problema.

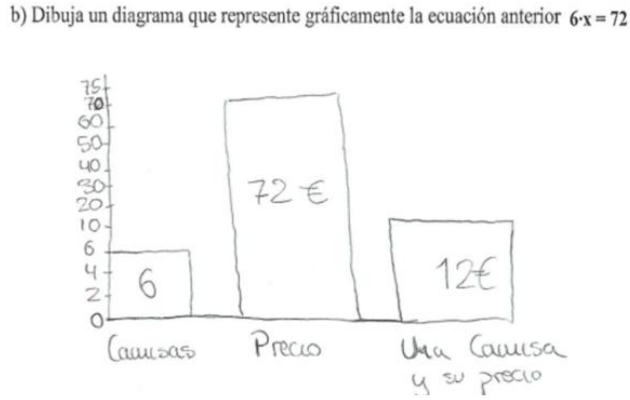


Figura 4.19 Diagrama cuantitativo del estudiante A-67.

4.1.4.4 Frecuencias del apartado b del Bloque 2

La Tabla 4.5 muestra la codificación y las distintas categorías basadas en las producciones de los estudiantes, el análisis de frecuencias y los porcentajes de las soluciones de los estudiantes de primero de secundaria para los problemas 3b y 4b.

Tabla 4.5 Frecuencias del apartado b del Bloque 2

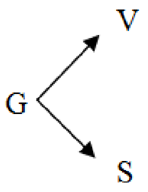
Categoría	Descripción	Frecuencia 3b	4b	Porcentaje Total	%
C_1	sin dibujo/ está en blanco	17	29	46	25,8
C_2	sin dibujo/reformulación del enunciado	17	13	30	16,8
C_3	sin dibujo/ esquemas de proporcionalidad	4	5	9	5,1
C_4	con dibujo/ diagramas cualitativos	19	18	37	20,8
C_5	con dibujo/ diagramas cuantitativos	32	24	56	31,5
	Total				100

De esta tabla 4.5 se desprenden los siguientes comentarios:

- Se observa que los estudiantes que dejan el espacio en blanco o sin información, llega a alcanzar en la tarea 4b una mayor frecuencia que en la tarea 3b, lo que nos supone que la tarea 4b es menos abordable para los estudiantes.
- las producciones donde tratan de reformular verbalmente el enunciado del problema se mantienen con una frecuencia casi similar en ambas tareas.
- En los diagramas cualitativos donde dibujan personajes alusivos al contexto del enunciado superan el 20% de las producciones en ambas tareas.
- Por otro lado los estudiantes que hacen dibujos cuantitativos que tienen un aspecto funcional, diagramas de barra o estadísticos relacional, llegan a alcanzar el 36% de las producciones en la tarea 3b y un 27 % en la tarea 4b.

4.1.5 Bloque 3. Análisis e interpretación de las respuestas

El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes lo hemos realizado de forma inductiva, partiendo de los datos y tratando de identificar categorías y realizar interpretaciones a partir de ellos. Las respuestas de los estudiantes en los apartados a y b de las tareas 5 y 6 del cuestionario las hemos analizado por separado, agrupando los apartados con interrogantes comunes, (5a y 6a) y (5b y 6b), para que nos permita categorizar las producciones y realizar el análisis de frecuencias simples de las mismas de manera conjunta. Estos apartados tienen como finalidad la de observar qué tipos de enunciados inventan, partiendo de diagramas de comparación multiplicativa, y saber qué habilidades tienen los estudiantes para pasar de lo gráfico (G) a lo verbal (V) y de lo gráfico (G) a lo simbólico (S).



De gráfico a verbal: G $\longrightarrow$ V

De gráfico a simbólico: G $\longrightarrow$ S

En primer lugar analizamos las producciones de los sujetos en el apartado a de las dos tareas propuestas y que corresponde a la traducción del diagrama a un problema enunciado verbalmente. A los participantes se les pide que a partir de la información cuantitativa que proporciona el diagrama se redacte el enunciado de un problema. En un apartado posterior analizamos la traducción del diagrama en una expresión algebraica, que corresponde al apartado b de las dos tareas propuestas.

4.1.5.1 Traducción diagrama a enunciado verbal

La primera decisión que hemos tomado ha sido distinguir entre respuestas que contienen o no un problema completo enunciado verbalmente, que contiene enunciadas las cantidades, la relación entre ellas y la pregunta. Dentro de cada una de estas opciones hemos delimitado categorías de respuestas (véase tabla 4.6).

Tabla 4.6 Categorización de los enunciados producidos

No hay problema enunciado verbalmente	Contienen problema enunciado verbalmente
• I0: Respuesta en blanco; no hay registro escrito, sin información. • ID: Dibuja diagrama nuevo con estructura similar al dado cambiando los nombres de los personajes y las cantidades que se le asignan en el diagrama dado. • ISS: Enunciado sin sentido o incoherente • ICI: Incompleto; al enunciado le falta un dato o la pregunta	• INC: No es comparación multiplicativa, es isomorfismo de medidas. • ICA: Enuncian problema de comparación aditiva • IEI: Error de inversión en el enunciado • ICR: Cambian la expresión relacional a "veces más que" y "veces menos que". • IC: Enunciado correcto

Durante el proceso inductivo de categorización de las respuestas, hemos perfilado y definido como respuesta correcta (IC) la que se ajusta completamente a la información cuantitativa proporcionada por el diagrama (datos numéricos y relación entre ellos). En ella los sujetos enuncian un problema coherente en el lenguaje usual, y en el que utilizan los números y los nombres de los objetos que se comparan en el diagrama, así como el término relacional "veces tanto como". Es decir, inventan un problema utilizando la expresión "veces tanto como", tomando los datos presentes en el modelo gráfico, respetando la incógnita, el referente y el comparado.

Ejemplo IC: La figura 4.20 recoge la respuesta correcta al apartado a) del problema 5, dada por el estudiante A-28, que enuncia un problema verbal de comparación correctamente, utiliza la frase relacional sugerida, mantiene la estructura del problema y lo resuelve.

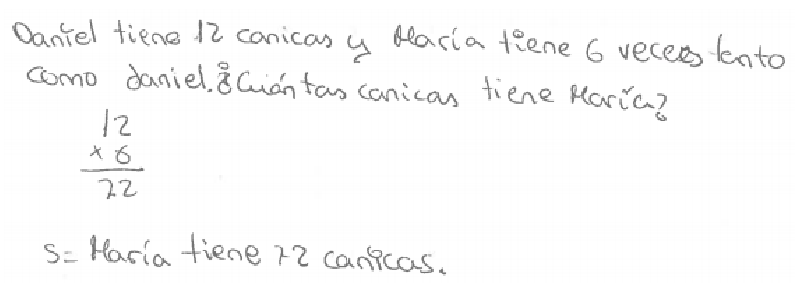


Figura 4.20. Enunciado correcto del estudiante A-28.

Aunque se han presentado en menor medida, hemos considerado también como correctos los enunciados en los que se mantienen las relaciones estructurales dadas en el diagrama pero en los que se cambian los números y el nombre de los objetos que se comparan. Pensamos que realmente este hecho no supone falta de comprensión del diagrama como modelo de comparación. En las respuestas que no hemos considerado como correctas, hemos identificado matices que permiten diferenciarlas en varias categorías, que exponemos seguidamente.

4.1.5.2 Categorías de respuestas no correctas

Además de las respuestas correctas, en las producciones de los participantes hemos delimitado una serie de categorías entre las que hemos incluido las que están en blanco y aquellas que contienen una respuesta explícita pero que no es correcta. Tanto unas como otras nos aportan información para alcanzar algún aspecto de los objetivos de nuestro estudio. Por ejemplo, las respuestas en blanco van a permitir observar la mayor dificultad de comprensión del diagrama modelo de referente desconocido.

Las categorías definidas son las siguientes:

- I0: Sin invención /en blanco; no hay información, sin registro o está en blanco.

De las 178 respuestas posibles hay 30 están en blanco. La frecuencia con la que no escriben un enunciado o dejan en blanco la pregunta es alta (16,8%) comparada con las otras categorías (véase tabla 4.6). Es la segunda frecuencia más alta sólo superada por la frecuencia de los enunciados correctos.

Las respuestas en blanco suben de 11 a 19 de la tarea 5 al 6. La mayor dificultad de comprensión que tiene concebir un enunciado de referente desconocido que de comparado desconocido ocasiona que estos estudiantes no construyan el enunciado del problema. Recordemos que la tarea 5 contiene un diagrama que condiciona el enunciado a realizar, que debe ser un problema de comparado desconocido, mientras que el diagrama incluido en la tarea 6 conlleva que el problema a redactar sea de referente desconocido. Así pues, una de las decisiones tomadas por los estudiantes frente a la dificultad de inventar un problema a partir del diagrama algebraico ha sido abstenerse y no redactar un enunciado.

- ID: Sin invención/dibuja un diagrama con estructura similar

Un grupo de sujetos considera el diagrama modelo que se les proporciona como la respuesta a dar y construyen un diagrama similar al dado cambiando los personajes y las cantidades del enunciado dado. Consideran que lo que se les pide en primer lugar es resolver el problema constituido por el diagrama en sí mismo junto con la información numérica que le acompaña. Una vez que lo han resuelto, continúan su respuesta con una reproducción del diagrama modelo incluido en el enunciado cambiando los datos y resolviendo el diagrama reproducido.

La figura 4.21 es un ejemplo de respuesta ID. El estudiante dibuja para la tarea 5 un diagrama similar al dado en el problema, no escribe un contexto del problema. Sólo dibuja las bandas rectangulares y coloca nombres y cantidades sobre ellas distintas a las que se les habían proporcionado en el diagrama inicial de la tarea. Puesto que se pide resolver el problema, el estudiante responde completando los datos que faltan en el diagrama realizando la operación aritmética correspondiente.

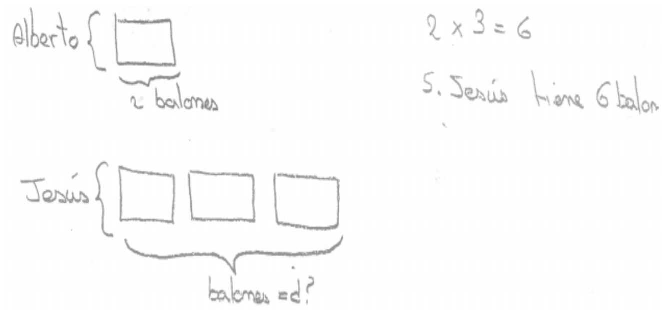
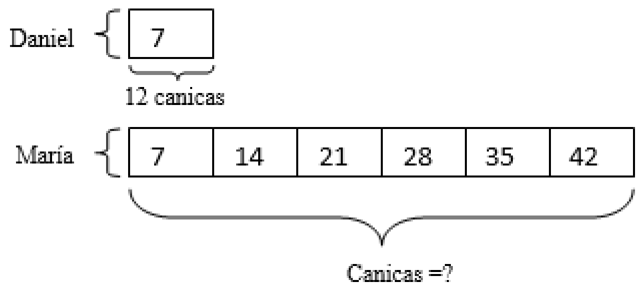


Figura 4.21 Diagrama con estructura similar del estudiante A-01

- ISS: el enunciado es incongruente/sin sentido

No establecen relación entre las cantidades, los datos no encajan, confunden lo que es el multiplicador y el multiplicando o faltan datos. En cierto caso confunden el referente con el comparado o viceversa. En este tipo de respuesta los estudiantes entienden que lo que hay que hacer es resolver el diagrama y, sobre esa solución construyen enunciados incongruentes/sin sentido; en el enunciado que construyen dan cantidades, pero no establecen relación entre ellas, los datos no encajan de forma lógica, o faltan datos, o la pregunta.

Ejemplo ISS: El estudiante A-53, en la tarea 6 completa primero cada una de las casillas del modelo con las cantidades correspondientes a los múltiplos de 7. Esta acción la realiza porque entiende que lo que se le pide es completar y resolver el diagrama.



Después de completar cada casilla del diagrama con la serie de los múltiplos de 7, construye un enunciado que trata de reflejar el modelo resuelto. Empieza describiendo las cantidades de cada personaje pero no es capaz de precisar cuantitativamente la relación de comparación multiplica. El escalar lo expresa en forma indefinida. No plantea pregunta puesto que lo que hace es tratar de reflejar o describir el modelo visual que previamente ha resuelto mediante las serie de los múltiplos de 7.

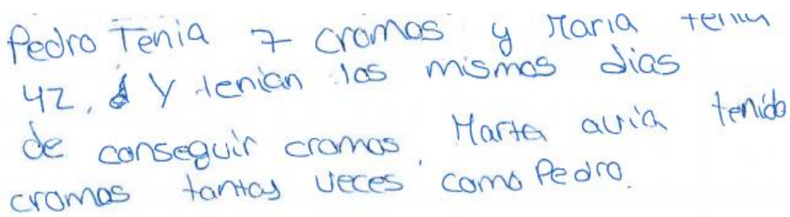


Figura 4.22 Enunciado incongruente del estudiante A-53.

- ICI: enunciado incompleto; le hace falta algún dato o la interrogante.

En las respuestas han aparecido también enunciados incompletos. Los enunciados incompletos se caracterizan por omitir algún dato que es necesario para responder a la pregunta formulada.

Ejemplo ICI: el estudiante sólo escribe las cantidades de María en la información verbal del problema, faltando los datos de Daniel para completar el enunciado.

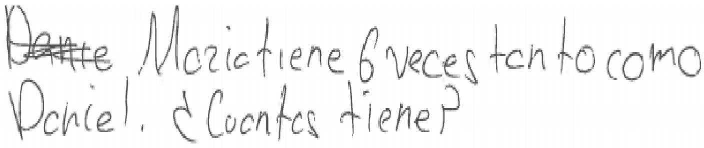


Figura 4.23 Enunciado incompleto del estudiante A-23

- INC: No es comparación multiplicativa

El enunciado del problema es de estructura multiplicativa, pero no es de comparación, construyen un enunciado verbal, pero no corresponde a la categoría semántica de comparación. Los problemas enunciados corresponden a la categoría que Vergnaud (1983, 1988) denomina isomorfismo de medidas, más concretamente en estas respuestas aparece con asiduidad la idea de grupos iguales (Greer, 1992) o grupos repetidos. Consideran el rectángulo más pequeño del modelo como un grupo que contiene 12 elementos y que este grupo se repite seis veces en el rectángulo grande. Como ejemplo, el estudiante A-74 enuncia para la tarea 6 un problema verbal que no es de comparación. Considera que el rectángulo grande del modelo está constituido por seis cajas que, aunque no lo dice, considera iguales en la cantidad de lápices que contienen.

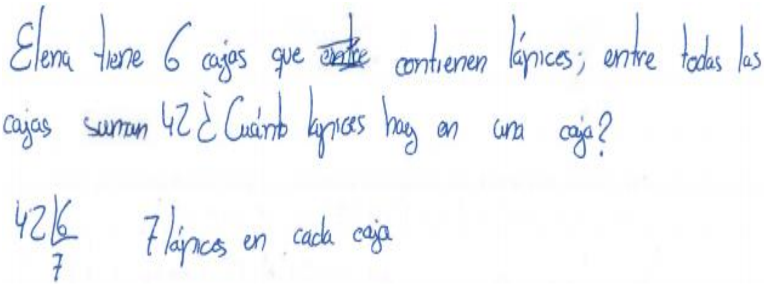


Figura 4.24 El enunciado del problema no es de comparación del estudiante A-74

En esta interpretación del modelo seis estudiantes (A-41, A-74, A-82, A-84, A-85, A-86, A- 88) interpretan el rectángulo pequeño como una *caja* y la cantidad mayor como una repetición de cajas para contextualizar el modelo.

De manera similar, cuatro estudiantes (A-11, A-13, A-56, A-87) consideran el rectángulo menor del modelo como un *paquete* de objetos que se reitera 6 veces en el rectángulo mayor. Los alumnos A-61 y A-64 utiliza el término *bolsa*: “1 bolsa con 12 canicas”. El estudiante (A-25) lo interpreta directamente empleando la palabra cuadro y 6 cuadros. El estudiante A-52 utiliza directamente la expresión “la suma de seis números consecutivos de las canicas que tiene María” para expresar la relación.

Ante la mayor demanda cognitiva del modelo algebraico frente al aritmético, tres estudiantes (A-85, A-86 y A-88) que han realizado correctamente el enunciado para el modelo aritmético han recurrido a este tipo de interpretación para el modelo algebraico.

El porcentaje sobre el total de respuestas que contienen un problema de isomorfismo de medidas no es muy elevado (15,73%), pero si tenemos en cuenta que se les pide a los estudiantes que enuncien un problema con la expresión comparativa “veces tanto como”, cabe pensar que en realidad este porcentaje hubiera sido mayor sin esta condición. Si consideramos el porcentaje de estudiantes que interpretan el modelo visual como isomorfismo de medidas sobre el número de alumnos que redactan un problema completo de estructura multiplicativa es 29%. Todos estos alumnos dominan correctamente las relaciones multiplicativas entre los datos del problema, por lo que sacamos la conclusión de que más de un tercio de los sujetos pueden resolver un problema de comparación multiplicativa empleando un esquema mental asociado al significado de grupos iguales.

Esto tiene implicaciones para la evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Para realizarlo usualmente planteamos problemas al estudiante y en función de sus respuestas decidimos si ha adquirido determinados aprendizajes o si ha construido determinados esquemas mentales. Los resultados que hemos obtenido muestran que los estudiantes pueden acomodar un esquema mental correspondiente a una categoría semántica de problemas para resolver los problemas que corresponde a otra categoría semántica de la que no disponen aún de un esquema mental totalmente construido.

- ICA. El enunciado es de comparación aditiva

El enunciado es un problema de comparación en los que aparece la frase relacional “más que” o “menos que”.

Ejemplo ICA: el estudiante A-30 en la tarea 3a enuncia un problema verbal de comparación, pero le hace falta un dato para completar el problema.

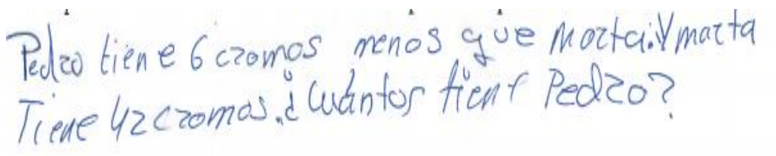

Pedro tiene 6 cromos menos que Marta. Y marta
Tiene 42 cromos. ¿Cuántos tiene Pedro?

Figura 4.25 El problema es de comparación aditiva, enunciado por el estudiante A-32.

- IEI: cometen error de inversión en el enunciado

En estos enunciados invierten los datos del problema, en lugar del comparado coloca el referente o viceversa.

Ejemplo IEI: El inventa un problema verbal de comparación multiplicativa, comete error de inversión al enunciar el problema.

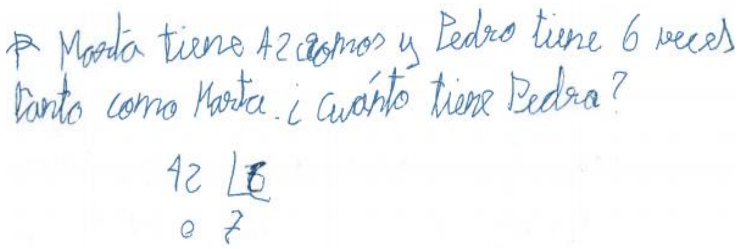

Marta tiene 42 cromos y Pedro tiene 6 veces
tanto como Marta. ¿Cuánto tiene Pedra?
42 |6
0 7

Figura 4.26 Enunciado con error de inversión del estudiante A-59

- ICR: **C**ambian frase relacional

Escriben enunciado con la frase relacional "veces más" o "veces menos", en lugar de "veces tanto como" .

Ejemplo ICR: El estudiante enuncia un problema verbal, pero cambia la frase relacional sugerida. Utiliza la frase "veces más" en lugar de "veces tanto como".

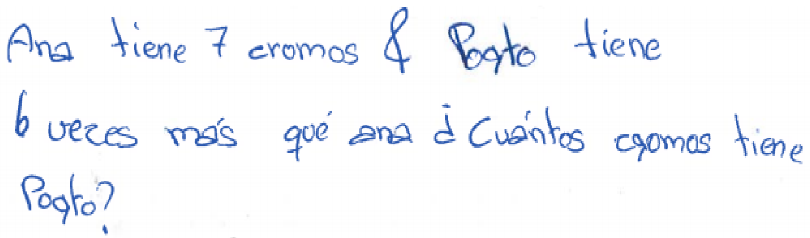

Ana tiene 7 cromos & Pogto tiene
6 veces más qué ana ¿Cuántos cromos tiene
Pogto?

Figura 4.27 Cambio de frase relacional del estudiante A-04.

4.1.5.3 Frecuencias

En cuanto al estudio de frecuencias simples hemos realizado la descripción de las producciones de los estudiantes con el fin de detallar el tipo de representación utilizada para resolver los problemas.

La Tabla 4.7 muestra la codificación y las distintas categorías basadas en las producciones de los estudiantes de primero de secundaria para los problemas 5a y 6a así como las frecuencias y los porcentajes correspondientes a cada una de ellas.

Tabla 4.7 Frecuencias del Apartado a del Bloque 3

		Frecuencias			Porcentaje
Código	Descripción	5a	6a	Total	%
1-I0	Sin enunciado/en blanco	11	19	30	16,8
2-ID	Con estructura similar	9	6	15	8,4
3-ISS	Incoherente	7	7	14	7,8
4-ICI	Incompleto	10	16	26	14,6
5-INC	No es de comparación	7	10	17	9,5
6-ICA	Comparación aditiva	1	1	2	1,1
7-IEI	Invierte la relación	2	3	5	2,8
8-ICR	Cambio de frase relacional	6	10	16	8,9
9-IC	Enunciado correcto	34	15	49	29,7
	Total	89	89	178	100

Las frecuencias de respuestas correctas obtenidas a las dos tareas son 34 de 89 para la tarea 5 y 15 de 89 para la tarea 6. Esto supone un mayor porcentaje de éxito en la invención de problemas de comparado desconocido (38%) frente al porcentaje de éxito en la invención de problema de referente desconocido (16,9%). La presencia del diagrama no elimina la diferencia de dificultad de comprensión entre los dos tipos de enunciados comparativos: los enunciados comparativos de referente desconocido siguen siendo también más difíciles de comprender cuando se trata de inventar enunciados a partir del modelo de barras correspondiente. Esto ocurre al margen de que los sujetos cambien los datos del diagrama presentado en los enunciados que producen.

La diferencia de dificultad global entre las dos tareas puede darse de forma arbitraria o forma implicativa, en la que los sujetos que responden correctamente a la tarea más difícil (con menos porcentaje de respuestas correctas), lo hacen también a la tarea más fácil. Observando las concordancias de respuestas correctas en las dos tareas hemos obtenido que los 15 estudiantes que responden correctamente a la tarea 6 con modelo de referente desconocido también lo hacen en la tarea 5 con modelo de comparado desconocido. Sí pues la respuesta no ha sido completamente arbitraria, sino que lo hacen de forma implicativa.

Hay 19 de los 89 sujetos que han producido un enunciado correcto para el modelo de carácter aritmético pero no a la de carácter algebraico, nos preguntamos qué tipo de respuestas han producido estos sujetos. Las respuestas erróneas han sido variadas, los sujetos que no redactan correctamente el problema de comparación de referente desconocido pero si el de comparado desconocido han optado por cinco alternativas: dejarlo en blanco, redactar un problema de isomorfismo de medidas en el que un grupo se repite, utilizar una comparación de disminución y utilizar de forma forzada la expresión “1 vez tanto como” e invertir la relación. Estos enunciados incorrectos constituyen tipos de respuestas que los han producido también sujetos que no enuncian un problema en la tarea 6.

4.1.5.4 Tipo de errores

La literatura ha mostrado que los estudiantes suelen cometer errores sistemáticos asociados a los problemas de comparación multiplicativa (Castro, 1995). Sin embargo, muy pocas respuesta de las que hemos obtenido en este estudio contienen problemas de comparación con dichos errores. Han aparecido enunciados de comparación aditiva y enunciados que invierten el papel de los datos, lo que se conoce como error de inversión. En los enunciados de comparación aditiva, se redacta un problema de comparación en los que aparece en el enunciado el término relacional “más que” o “menos que”. Como ejemplo, de comparación aditiva, el estudiante A-30 en la tarea 5a enuncia un problema verbal aditivo de comparación con la diferencia desconocida.

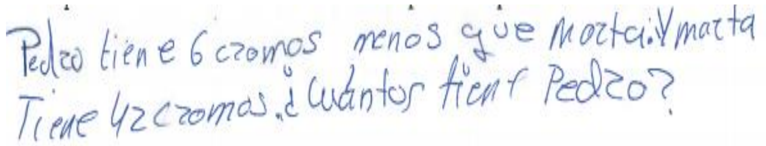


Figura 4.28 Enunciado de comparación aditiva del estudiante A-32

El error de inversión ha aparecido en los enunciados que invierten el papel que juegan los datos dados en la relación de comparación: en lugar del comparado coloca el referente o viceversa. Como ejemplo, de error de inversión damos la respuesta El sujeto A-59, respeta los datos dados en el diagrama, pero redacta la proposición relacional “Pedro tiene 6 veces tanto como Marta” que tiene invertidos el papel de los sujetos en la comparación. Debería haber sido “Marta tiene 6 veces tanto como Pedro”.

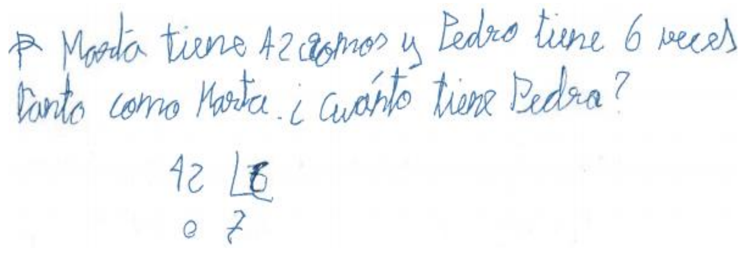


Figura 4.29 Enunciado con error de inversión del estudiante A-59

4.1.5.5 Traducción diagrama a ecuación algebraica

En el apartado b de las dos tareas se pide la traducción del diagrama correspondiente a una expresión algebraica. Al examinar las producciones de los sujetos, lo primero que llama la atención es el alto porcentaje de estudiantes que no hacen nada, que no producen representación externa de ningún tipo como resultado del proceso de traducción que se les pide. En los dos tareas (5 y 6) el número de respuestas al apartado b) que han entregado en blanco son 27 (30,4%) en la tarea 5 y 34 (38,2%) en la tarea 6, con la particularidad de que los 27 sujetos que han dejado en blanco la tarea 5 también han dejado en blanco la tarea 6. En la tarea 6 hay siete sujetos más que se han abstenido de responder pero que han producido una respuesta en la tarea 5. Esta diferencia puede ser debida a que en el segundo problema los números son más grandes que en el primero a lo que se une que es un problema de referente desconocido.

Siguiendo este análisis, en las respuestas dadas por los sujetos se observa una variedad de uso de letras. En las producciones de los sujetos que han registrado algún tipo de respuesta escrita se observa que hay dos tipos: las que contienen las letras indicadas en el enunciado de la tarea (D y M en la tarea 5, P y M en la tarea 6) y aquellas en las que no se han utilizado estas las letras en sus respuestas. Una segunda cuestión a destacar entre los estudiantes que producen respuestas es que 18 de los 63 estudiantes que dan respuestas emplean la letra x para producir al menos una respuesta, sea o no necesario el uso de la x. Tres de estos estudiantes sólo utilizan la letra x en uno de los problemas. Considerando los dos problemas son por tanto 33 respuestas con x de 126 posibles, es decir el 26% de las respuestas contienen la letra x.

Tabla 4.8 respuestas con x y sin x

	Tarea 5b	Tarea 6b
	46 Sin x Con x	44 Sin x Con x
No utilizan las letras	17 Sin x 5 Con x 12	11 Sin x Con x

Las ideas anteriores las hemos completado con el hecho de que los estudiantes establezcan o no relaciones funcionales entre las variables y el uso de operaciones aritméticas. La categorización que hemos obtenido es:

Categoría 1 - No respuesta: En blanco

Categoría 2 – No utilizan las letras, utilizan el signo igual para expresar las sentencias asignativas, en ellas asigna a los sujetos las cantidades correspondientes, ejemplos: Daniel = 12 canicas, María = 72 canicas.

Categoría 3 - Etiquetas: Utilizan las letras como etiquetas y no las utilizan para expresar relación entre las cantidades.

Categoría 3. *Operaciones aritméticas*: En este caso, los estudiantes no utilizan las letras que se les dan como variables, en vez de eso utilizan los números y realizan con ellos una operación aritmética

Categoría 4. Ecuaciones en x: Una de las categorías de respuestas que hemos observado son aquellas en las que los participantes utilizan dos números y la letra x para expresar la relación entre las cantidades. Las letras sugeridas en el enunciado (D, P, M) no las utilizan para expresar la relación. Así, un estudiantes (el estudiante 35) da como solución "$12 \cdot 6 = x$" al apartado b de la tarea 5. Para la tarea 6 da como respuesta "$x \cdot 6 = 42$".

Categoría 5 - Relaciones funcionales: Las respuestas incluidas en esta categoría, relaciones funcionales, son las que contienen o expresan una relación de tipo funcional entre las variables dadas en los enunciados de las tareas propuestas. Los sujetos utilizan las letras que les hemos asignado a las cantidades como variables y establecen entre ellas una relación o función de proporcionalidad que en algunos casos contiene errores. En esta categoría hemos detectado tres grupos de respuestas: a) las que establecen la relación funcional de proporcionalidad y la razón de la proporcionalidad la expresan con un número; b) las que establecen la relación funcional de proporcionalidad y utilizan la letra x como la razón de la proporcionalidad, y c) los que establecen una relación funcional entre las variables, pero cometen algún tipo de error

- *Utilizando números como escalar*. (número de respuestas (n=21) Establecen una relación de tipo funcional entre las variables dadas y el escalar expresado numéricamente (por ej. "M = D · 6" en la tarea 5 y "M : 6 = P" en la tarea 6).
- *Utilizando x para simbolizar el escalar*. (n=5). Utilizan las letras como variables y la x como el escalar en una relación funcional (por ej., "D · x = M" en la tarea 5 y" M : x = P" en la tarea 6).
- *Escribiendo relaciones funcionales con errores*. (n=23*).* En este caso los sujetos escriben una relación entre las variables que contiene algún tipo de error. - Uno de los errores detectados ha sido el error de inversión de las variables, es decir, establecen una relación de proporcionalidad simple entre las cantidades pero invirtiendo en ella el papel de las cantidades (por ej., en la tarea 6b han aparecido respuestas del tipo "P : 6 = M", cuando debía haber sido M : 6 = P, es decir, se ha intercambiado el papel que desempeñan la letras en la relación.

  -Un segundo tipo de error ha consistido en proponer una relación funcional que corresponde a la proporcionalidad inversa. Por ejemplo, un sujeto da como respuestas, D·M=x a la cuestión 5b, y P:M=x, como respuesta a la cuestión 6b.

-Relaciones funcionales aparentes. Un tercer tipo de respuesta lo es funcional solo en apariencia, tiene las características de una traducción criptica del enunciado del problema, en el que los sujetos traducen la expresión comparativa mediante el signo igual, pero sin considerar que se están comparando dos cantidades. Lo que se iguala son las expresiones simbólicas a las que traducen (de forma sui generis) las cantidades que se comparan. No hacen intervenir al escalar. Este es el caso de respuestas como "12 · D = 72 · M" a la tarea 5b, que revelan una escritura criptica del enunciado. La expresión significa 12 tiene Daniel y 72 tiene María. De manera similar hay que interpretar la respuesta "D/12= x/M = 72" es decir, Daniel tiene 12 y x tiene María que tiene 72.

Tabla 4.9 Frecuencias de las categorías en los apartados 5b y 6b de las tareas

Categorías		Frecuencia		Porcentaje		Total	
Códigos	Descripción	5b	6b	5b %	6b %	N	%
1-NO	No responden	27	34	30,4	38,2	61	34,27
2-LE	Letra evaluada	6	7	6,7	7,8	13	7,30
3-EA	Operación aritmética	19	16	21,3	18,0	35	19,66
4-E	Ecuación	10	8	11,3	9,0	18	10,11
5-RF	Relación funcional	20	21	22,5	23,6	41	23,03
6-O	Otros	7	3	7,8	3,4	10	5,62
	Total	89	89	100	100	178	100

La mayor dificultad de comprensión del problema de referente desconocido se observa en la frecuencia de la categoría NO-no responden. El porcentaje de estudiantes que no dan respuesta es más alto en el problema de referente desconocido (38,2%) que en el problema de comparado desconocido (30,4%). En las otras categorías las diferencias no son tan abultadas, pero podemos observar indicios de comportamiento diferente de un problema a otro. Así en el problema de comparado desconocido los estudiantes lo han interpretado con más frecuencia que el de referente desconocido como una operación aritmética a realizar y también como una ecuación. Lo mismo ocurre con la que hemos denominado O-Otros. Las categorías LE-letra evaluada y RF-relación funcional obtienen porcentajes muy similares en ambos problemas.

4.1.5.6 Interpretación conjunta

Una vez analizadas y categorizadas por separado las respuestas de los sujetos con respecto a la invención de problemas y a la representación algebraica de los dos diagrama de comparación, procedemos a categorizar las respuestas de los sujetos simultáneamente en ambas aspectos, tratando de detectar si estos dos procesos de invención y de simbolización algebraica son independientes o no en los estudiantes de primero de ESO que han participado en el estudio.

La pregunta que nos hacemos es si las respuestas que han producido los estudiantes de primero de la ESO en la tarea de invención de un enunciado a partir del diagrama de comparación guardan alguna relación con la tarea de escribir una ecuación algebraica. Para ello hemos construido una tabla de contingencia con las frecuencias de respuesta a las dos variables: invención y representación simbólica (véase tabla 4.10)

Para realizar la categorización cruzada hemos agrupado las categorías establecidas previamente, en cada una de las variables de clasificación (véase tabla 4.10). En cada variable hemos establecido tres valores: nivel bajo, medio y alto. La decisión de adoptar estos valores ha venido inducida o sugerida por un análisis clúster previo de los datos.

En esta tabla de frecuencias hemos sintetizado las distintas categorías de respuestas de los estudiantes en el apartado a) de invención como bajo (categorías 1-2-3), medio (categorías 4-5) y alto (categorías 6-7-8) para la parte de invención de problemas, de igual forma para la representación simbólica-algebraica el rendimiento bajo (categorías 0,1), medio (categorías 2-3) y alto (categorías 4-5).

Tabla 4.10 Frecuencia conjunta de las variables invención y representación algebraica en las tareas 5 y 6

Representación algebraica	Invención			Total
	bajo	medio	alto	
bajo	41	11	19	71
medio	6	21	21	48
alto	12	13	34	59
Total	59	45	74	178

El valor de Chi-cuadrado de Pearson, utilizado para estudiar la independencia entre la invención de enunciados comparativos y la representación simbólica a partir del diagrama de comparación es igual a $\chi 2$ (4, N=178) = 38.928, p=0.000 siendo éste significativo. Por lo tanto, rechazamos la hipótesis nula de independencia entre la invención y la representación simbólica.

En la tabla de contingencia se observa que las frecuencias más altas se encuentran en la diagonal principal de la tabla. La suma de los tres valores (41+21+34= 96) nos indica que más del cincuenta por ciento de las respuestas (55%) tienen un comportamiento similar en ambas variables. La mayor frecuencia se da entre los estudiantes que tienen una respuesta conjunta baja en invención y en representación, seguido por el grupo de estudiantes que tienen una respuesta de nivel alto en ambas variables. Por otro lado destacar que hay un grupo de estudiantes con un nivel de representación simbólica mediano que se sitúan en un nivel mediano (21 respuestas) o alto en invención (21 respuestas). En general, el nivel medio y alto en invención es más frecuente que en representación simbólica.
Las apreciaciones globales anteriores las matizamos con respecto a cada uno de los problemas 5 y 6, cuyas frecuencias respectivas aparecen en la tablas x e y.

Tabla. 4.11 Frecuencia conjunta de las variables invención y representación algebraica en el problema 5

Representación algebraica	Invención			Total
	bajo	medio	alto	
bajo	20	2	12	34
medio	2	10	14	26
alto	5	6	18	29
Total	27	18	44	89

Tabla 4.12 Frecuencia conjunta de las variables invención y representación algebraica en la tarea 6

Representación algebraica	Invención			Total
	bajo	medio	alto	
bajo	21	9	7	37
medio	4	11	9	24
alto	7	7	14	28
Total	32	27	30	89

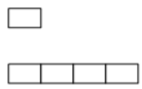
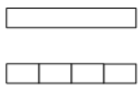
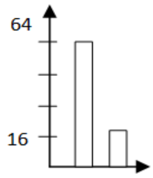
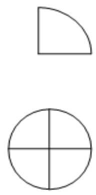
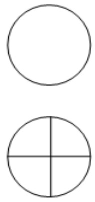
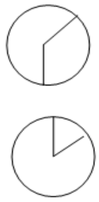
En el diagrama que denominamos modelo algebraico, de referente desconocido (tarea 6), en el que se pide hallar una cantidad referente a partir de otra cantidad comparada y el escalar, los sujetos han tenido un rendimiento menor en invención de enunciados que en el diagrama de comparado desconocido (tarea 5). Se deduce que el tipo de cantidad desconocida en el diagrama de comparación tiene influencia en la invención de enunciados, es decir, el hecho de que sea el referente la cantidad desconocida ocasiona cierta dificultad de articular enunciados de problemas de comparación. Observamos sin embargo, que este hecho no incide prácticamente en la representación algebraica, es decir, la distribución de las frecuencias en el apartado representación algebraica, de nivel alto, medio y bajo, es similar en los diagramas de referente desconocido y comparado desconocido (tareas 5 y 6).

4.2 Análisis de los modelos teóricos de los diagramas producidos por los estudiantes

A continuación de haber analizado las partes anteriores, y observar sus frecuencias simples nos interesa profundizar en la construcción de diagramas por parte de los estudiantes. Por lo que hemos analizado más en profundidad los diagramas integrados.

Hemos analizado los diagramas integrados producidos por los estudiantes para detectar el modelo teórico al que se ajuntan los dibujos producidos por los estudiantes y también la estrategia empleada en su construcción. Los estudiantes han utilizado el rectángulo y el círculo como figuras básicas (véase tabla 4.13) en representaciones visuales que tienen alguna de ellas aspecto de diagramas estadísticos, de barra y circulares, y en otros casos asociados con cantidades fraccionarias (la parte y el todo). La tabla 4.13 recoge los distintos modelos teóricos que sintetizan los diagramas dibujados por los estudiantes de primero de la ESO en respuesta a que dibujen un diagrama para los problemas de comparación multiplicativa.

Tabla 4.13 Tipos de diagramas integrados producidos por estudiantes

	Tipos de diagramas integrados			
Forma	Diagrama D1	Diagrama D2	Diagrama D3	Diagrama D4
rectangular				
circular				

4.2.1 Descripción de las Estrategias empleadas por los estudiantes para la construcción de los diagramas

Describimos a continuación de manera sintética las estrategias empleadas para la construcción de los diagramas D1, D2, D3, D4, encontradas en las respuestas de los participantes.

4.2.1.1 Descripción de la Estrategia D1

Para esta estrategia que hemos denominado D1, el punto de partida que han utilizado los resolutores para hacer este modelo es el referente. En este diagrama aparecen dos dibujos, el primero representa el referente como punto de partida y a partir del cual surge el segundo dibujo representando el comparado observándose en él una partición que refleja el escalar. Este diagrama puede coincidir con los diagramas propuestos por Beckmann (2004).

Ejemplo:

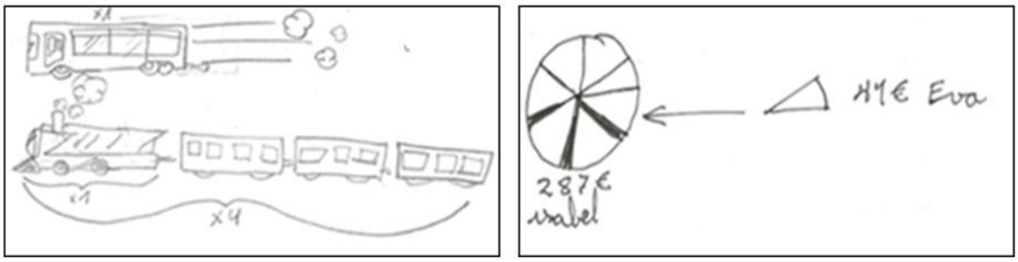


Figura 4.30 Diagrama D1 producido por estudiantes.

4.2.1.2 Descripción de la Estrategia D2

Este modelo de diagrama lo han construido los estudiantes tomando como punto de partida el comparado, que se representa y, a su vez, en otro dibujo paralelo, se hace una representación que equivale al dibujo del comparado, pero empleando el referente tantas veces como indica el escalar.

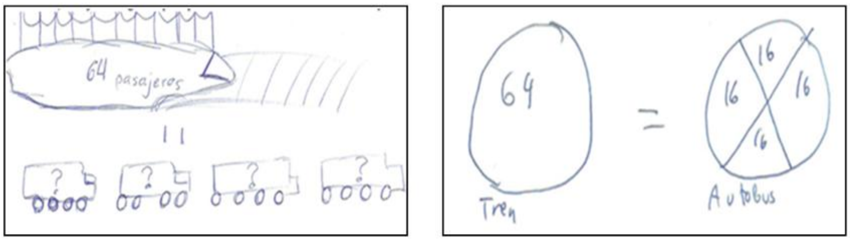


Figura 4.31 Diagrama D2 producido por estudiantes.

4.2.1.3 Descripción de la Estrategia D3

En este tipo de diagrama producido por los participantes del estudio resalta la ayuda de un instrumento externo auxiliar de medida (en este caso un eje similar al eje de coordenadas cartesianas) que sirve para establecer las medidas de los dibujos verticales tanto del referente como el comparado.

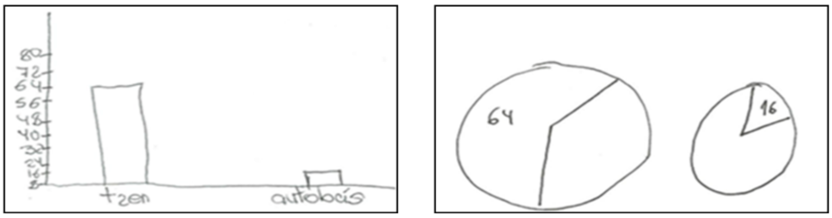


Figura 4.32 Diagrama D3 producido por estudiantes.

4.2.1.4 Descripción de la Estrategia D4

En este diagrama los estudiantes representan el referente y el comparado en una única figura como partes de un todo, bien en una relación parte-todo o parte-parte.

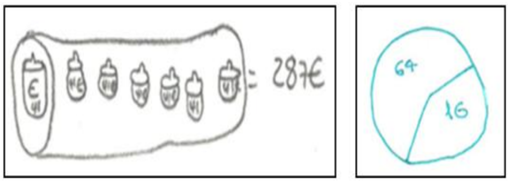


Figura 4.33 Diagrama D4 producido por estudiantes.

4.2.2 Frecuencias de los tipos de diagramas integrados

En la tabla 4.14 mostramos las frecuencias de los tipos de diagramas integrados en las tareas 1b y 2b.

Tabla 4.14 Frecuencias de los tipos de diagramas integrados.

Forma utilizada	Preguntas	Frecuencias de los tipos de diagramas integrados			
		D1	D2	D3	D4
rectangular	1b	12	2	6	1
	2b	3	0	2	0
circular	1b	0	2	1	1
	2b	1	0	0	0
	Total	16	4	9	2

Según los resultados obtenidos en esta tabla 4.14 observamos que la representación lineal es más utilizada por los estudiantes que la circular y los diagramas que hemos denominado D1 y D3 tienen mayor frecuencia que D2 y D4.

4.3 Relación entre tipo de procesos y diagramas

Estudiamos dos tipos de relaciones. En principio analizamos la habilidad de los estudiantes en la construcción de un diagrama (adecuado o inadecuado) a partir de un problema de comparación multiplicativa enunciado verbalmente, en relación al éxito o fracaso en su resolución. En la segunda parte analizamos la asociación entre la eficiencia en resolver problemas verbales de comparación multiplicativa y el tipo de diagrama producido.

La tabla 4.15 recoge de forma conjunta las frecuencias y porcentajes de la tasa de éxitos en la resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa y la construcción de diagramas adecuados a los mismos. Hemos denominado diagramas adecuados a aquellos que representan de forma visual tantos las cantidades del problema como la cuantificación de la relación multiplicativa existente entre ellas. Consideramos que la resolución ha tenido éxito si el estudiante en su respuesta ha utilizado una operación aritmética o algebraica que le permite llegar al resultado.

Hemos obtenido que hay asociación significativa entre las variables que conforman las filas y columnas de la tabla 4.15, es decir, entre la tasa de éxitos para resolver los problemas verbales de comparación multiplicativa y la capacidad de los estudiantes para dibujar diagramas (χ=9,178, p=0,05) si bien el grado de asociación entre las variables no es muy alto (Phi=0.227). Al no ser las dos variables independientes, además de mostrar el efecto individual de cada variable, es necesario subrayar los efectos conjuntos de las dos variables.

Tabla 4.15 Frecuencias y porcentajes de éxito y fracaso. Tareas 1 y 2.

Resolución de problemas		Diagrama		
		ADECUADO	INADECUADO	Total
	ÉXITO	50 (28,1%)	83 (46,6%)	133 (74,7%)
	FRACASO	6 (3,4%)	39 (21,9%)	45 (25,3%)
	Total	56 (31,5%)	122 (68,5%)	178 (100%)

En los valores totales (véase tabla 4.15) vemos que sólo el 31,5% de los estudiantes construyen diagramas adecuados, mientras que el 74,7% resuelven correctamente los problemas enunciados, es decir, los estudiantes tienen mayor éxito en resolución de problemas enunciados verbalmente que en la construcción de un diagrama adecuado.

Las asociaciones parciales permiten realizar un análisis más pormenorizado, del que destacamos que hay sólo un 28,1% de estudiantes que resuelven con éxito los problemas anunciados y realizan un diagrama adecuado. Así mismo, observamos que un 46,6% de los estudiantes tienen éxito en la resolución de los problemas enunciados y no hacen diagramas adecuados. Sólo un 3,4% proporcionan un diagrama adecuado y no resuelven el problema enunciado. Por último, el 25,3% fracasan tanto en construir un diagrama como en resolver el problema verbal.

Para dar una idea más pormenorizada de la asociaciones parciales entre las dos variables desglosamos los niveles de las dos variables de acuerdo al los tipos de procesos y a los tipos de diagramas que han utilizado los estudiantes y que hemos reflejado anteriormente.

La tabla 4.16 recoge los datos de estas asociaciones parciales de las variables en detalle.

Tabla 4.16 Asociación de las variables de acuerdo a los tipos de procesos y de diagramas.

			Diagramas						
			Adecuado		No adecuado				
			DEP	DCNI	D0	DRE	DCL	DCN	Total
Resolución de Problemas	Éxito	REIR	3	1	1	1	8	2	16
		RC	15	30	5	4	51	5	110
		RAC	1	0	2	2	0	1	6
	Fracaso	R0	0	0	6	1	1	1	9
		REA	0	0	0	0	1	2	3
		REI	6	0	7	3	10	8	34
		Gran Total	25	31	21	11	71	19	178

Sin necesidad de realizar un análisis estadístico, en esta tabla 4.16 cabe destacar que los estudiantes que previamente habían resuelto correctamente los problemas enunciados verbalmente muestran un comportamiento variado y heterogéneo en la construcción de diagramas para estos problemas.

Cabe destacar que los estudiantes que construyen diagramas integrados han resuelto con éxito previamente el problema de comparación enunciado verbalmente (30 de 110), pero no al revés, pues 51 de los 110 estudiantes construyen diagramas cualitativos y 15 de 110 realizan diagramas esquemáticos.

Los estudiantes que cometen el error de inversión en la resolución de los problemas no construyen un diagrama cuantitativo integrado, la mayoría de los casos producen un diagrama cualitativo o parcialmente cuantitativo, sin llegar a mostrar la relación entre los datos.

CAPÍTULO 5

DESCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS

Este capítulo contiene las transcripciones comentadas de los aspectos fundamentales de las entrevistas realizadas a nueve estudiantes de primeros niveles de Educación Secundaria de un Instituto público de la Ciudad de Granada. Con este formato de informe pretendemos mostrar de forma fundamentada si los estudiantes de la ESO de segundo curso son capaces de captar la singularidad de los diagramas que construyen, el modo en que los estudiantes priorizan las características de las representaciones gráficas (diagramas) y simbólicas, así como las formas de abordaje de problemas y los escollos que encuentran.

La exposición de las transcripciones respeta el orden temporal de los entrevistados y la secuencia de su desarrollo, en el que se insertan las apreciaciones de la investigadora en su justo momento. Hemos preferido recoger detalles del desarrollo de las entrevistas para comprender de forma contextualizada la actuación y las respuestas de los estudiantes. Con ello podemos aproximarnos con más fiabilidad al pensamiento de estos estudiantes, a sus dudas y aciertos, a las conexiones que realizan.

La entrevista fue realizada por la investigadora dentro del horario escolar en un aula donde solamente estaban la investigadora, el o la estudiante y la persona autorizada para grabar en vídeo. Cada estudiante fue entrevistado de forma individual.

Recordemos que la entrevista consistió en entregarle a cada estudiante un total de seis formularios (véase anexo C) que contenían problemas enunciados de forma verbal o gráfica, y al mismo tiempo que los estudiantes desarrollan los problemas, la investigadora les va haciendo preguntas seleccionadas entre las siguientes:

1) Has utilizado algún tipo de diagramas anteriormente para representar problemas de matemáticas? Recuerdas cuáles?

2) Dibuja un diagrama que represente los datos presentes en el enunciado del problema.
3) ¿Qué información del enunciado representarías y cómo lo harías?
4) ¿Cuál dato has tomado como punto de partida? ¿por qué has tomado ese y no otro?
5) ¿Has utilizado toda la información del enunciado? Has tomado en cuenta la solución del problema como parte del diagrama?
6) Cuál crees que ha sido la forma de construir este diagrama que te presento?
7) ¿Lo comprendes, crees que está bien o no? ¿Por qué?
8) Compara el diagrama que has construido con el de tu compañero ¿Cuál te parece más adecuado para representar este tipo de problemas? ¿Por qué piensas eso?
9) ¿Es más difícil dibujar un diagrama que resolver de forma numérica el problema? ¿Es difícil o fácil dibujar diagramas para este tipo de problemas?
10) ¿Te ayuda el diagrama a resolver el problema o no? El diagrama te facilita la comprensión del problema?

Estas preguntas las conduce la investigadora y las aplica en el orden en que ella ve conveniente durante la entrevista.

Una vez expuestas las transcripciones comentadas de las entrevistas realizamos una síntesis de ideas que han surgido de la entrevista. En la descripción a los estudiantes de 1º y 2º de la ESO entrevistados los designamos con el término genérico de alumno/a.

5.1 Alumna 01

La alumna 01 tiene 13 años, cursa el segundo año de educación secundaria obligatoria en un instituto público de la ciudad de Granada, no es repetidora, es extrovertida, muestra actitud positiva a realizar la entrevista, según su profesor de curso es una alumna con desempeño académico bueno en la asignatura de matemáticas.

5.1.1 Formulario 1

En primer lugar se le presenta el formulario 1 que contiene una cabecera para identificarse y el problema 1, para que rellene sus datos personales, su nombre, el curso al que pertenece, edad y fecha.

Una vez que la alumna 01 ha terminado con los datos, la entrevistadora le da las indicaciones de lo que debe hacer con el problema verbal que aparece en el formulario.

- *Entrevistadora: Bueno, ahora vas a leer detenidamente el problema uno y me vas a mostrar cómo dibujas un diagrama que represente los datos que están en el problema.*
- *Alumna 01: No responde. Silencio de unos cinco segundos mientras lee mentalmente el problema.*

La alumna no escribe ni dibuja, y repite la palabra "un diagrama", insinuando por su tono de voz, tener dudas sobre el significado de "diagrama". La alumna se muestra desconcertada y no sabe cómo seguir.

- *Alumna 01: ¿Un diagrama?*

La entrevistadora al observar que la alumna 01 no escribe ni dibuja en el papel, inicia una conversación con ella para avanzar con la entrevista. La entrevistadora le hace algunas preguntas con el propósito de saber si utilizan o no, algún tipo de diagramas en clases de matemáticas, y si los utilizan saber en qué tipo de problemas. La alumna 01 responde que ha utilizado, en días pasados, los diagramas de barras para representar un problema que, en un principio manifestó no recordar, pero que describió verbalmente, y la entrevistadora interpretó que podría ser de tipo estadístico.

- *Entrevistadora: ¿Has utilizado antes un diagrama, en clase de matemáticas?*
- *Alumna 01: Diagramas de barras*

- *Entrevistadora: Lo que hayas utilizado antes, ¿diagramas de barras?*
- *Alumna 01: Sí, lo utilizamos el otro día*
- *Entrevistadora: ¿Y qué más has utilizado?*
- *Alumna: Pues…(hace silencio)*
- *Entrevistadora: ¿No lo recuerdas?*
- *Alumna 01: No, a lo mejor el año pasado, pero este año, no.*
- *Entrevistadora: ¿Para qué lo has utilizado?*
- *Alumna 01: El otro día en un examen y lo usé en un problema que salió…*
- *Entrevistadora: ¿De qué tipo el problema?*
- *Alumna 01: No lo recuerdo… ah sí, en una clase que había tantos alumnos y tenían que salir… pasaban al siguiente curso, bueno era a cuarto de ESO, otros a formación profesional, otros repetían, otros se iban a la vida laboral, entonces saber cuántos alumnos se iban a cada sitio.*
- *Entrevistadora: Ah. ¿En estadística?*

La alumna 01 continúa sin escribir en el papel y la entrevistadora le pregunta sobre qué datos del problema utilizaría para representarlos en el diagrama, la alumna responde que utilizaría “64 y 4”, y expresa que se deben dividir, pero que no sabe cómo representar esos datos en un diagrama.

- *Entrevistadora: En un diagrama, ¿qué datos tu utilizarías para?...*
- *Alumna 01: Pues, los datos que salen sesenta y cuatro, y cuatro. Porque sería dividir sesenta y cuatro entre cuatro…lo que pasa es que no sé, no sé cómo representarlo en un diagrama.*

La alumna aclara la idea de lo que es un diagrama cuando la entrevistadora interviene para guiar la entrevista, le dice que haga un “dibujo” que pueda representar los datos del problema. Parece que al escuchar la palabra “dibujo”, le permitió aclarar que “hacer un dibujo” podría significar lo mismo que “hacer un diagrama”. Antes de terminar la indicación completa, la entrevistadora observa que la alumna inicia a dibujar y prefiere quedarse en silencio observando cómo la alumna construye el dibujo.

- *Entrevistadora: Haz un dibujo que pueda representar…*

A partir de esta indicación, la alumna 01dibuja el diagrama. Inicia dibujando un primer rectángulo indicando en el papel que representa los 64 pasajeros del tren (el comparado) y a continuación lo divide en cuatro partes, según indica el enunciado "4 veces" (el escalar), y debajo de este primer rectángulo dibuja un segundo rectángulo más pequeño en paralelo que indica en el papel como "un cuarto de 64 pasajeros", en este caso representa los pasajeros del autobús (referente).

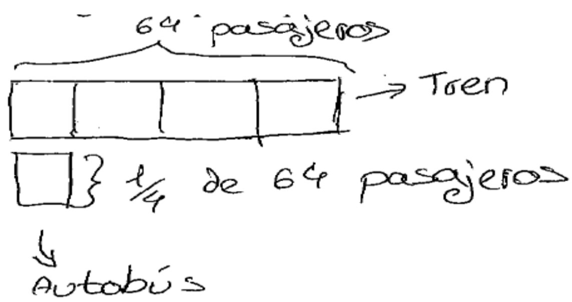


Figura 5.1 Diagrama construido en el formulario 1. Alumna 01.

Al mismo tiempo que dibuja va señalando y expresando lo que representa cada parte del dibujo.

- *Alumna 01: Esto sería un tren (señalando con una flecha el primer rectángulo dibujado) y esto un autobús (señalando el otro rectángulo). Y esto el total sería sesenta y cuatro por cuatro (señalando el primer rectángulo) y esto sería un cuarto de sesenta y cuatro pasajeros (señalando el otro rectángulo).*

Aunque es obvio que la alumna empieza a dibujar por el comparado, la entrevistadora le pregunta, para su propia aclaración, que si ha empezado a dibujar por el tren, la alumna responde que sí.

- *Entrevistadora: Muy bien, perfecto. Has empezado por el tren ¿no?*
- *Alumna 01: Sí.*
- *Entrevistadora: Muy bien, perfecto.*

Hemos observado que la alumna 01, en este formulario 1, una vez que resuelve mentalmente el problema, dibuja un diagrama que consta de dos rectángulos, uno representa el comparado dividido en las veces que indica el escalar y construye otro dibujo paralelo que indica el referente. El referente no está subsumido en el comparado. Utiliza un esquema de comparación de dos cantidades de forma independiente. Utiliza un diagrama lineal de tira y el modelo de diagrama integrado es de tipo D1. La alumna conecta con la idea de fracción, aunque expresa haber utilizado diagramas en problemas de tipo estadísticos. Aparecen conocimientos previos del tema de fracción.

5.1.2 Formulario 2

Una vez la alumna 01 termina de desarrollar el formulario 1, la entrevistadora le presenta el formulario 2 que contiene el problema 2, para que dibuje un diagrama que represente las relaciones existentes entre los datos del enunciado. La alumna 01, observa detenidamente el enunciado del problema 2, toma un corto tiempo y le pregunta a la entrevistadora si tiene que hacer lo mismo que antes. Muestra inseguridad en cuanto pregunta sobre si el diagrama que debe construir en este formulario debe ser igual al que construyó en el formulario anterior.

- *Entrevistadora: Vamos a ver este segundo formulario, es parecido, igualmente dibuja un diagrama.*

- *Alumna 01: Vale. (silencio de aproximadamente 20 segundos). Igual que antes ¿no?*

De inmediato que hace la pregunta, la alumna 01 comienza a construir el diagrama. Construye dos rectángulos, un primer rectángulo que divide en cinco partes, según indica el enunciado como “5 veces” (el escalar) y señala todo el rectángulo como la parte de Isabel (comparado), el otro rectángulo dibujado debajo y paralelo al primero lo señala como “un quinto de 75” que indica como la parte de Eva (referente).

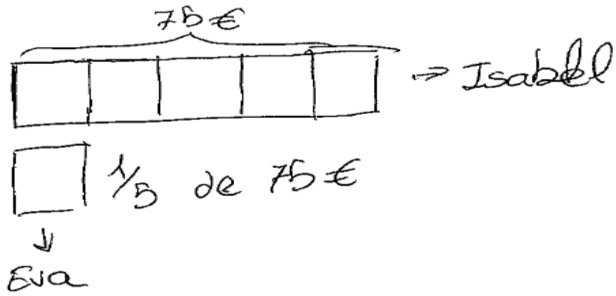


Figura 5.2 Diagrama construido en el formulario 2. Alumna 01.

A modo de aclarar lo que la alumna ha hecho, la entrevistadora le replica sobre los valores de Isabel y de Eva.

- *Entrevistadora: ¿Ese sería lo de Isabel y lo de Eva?*
- *Alumna 01: Sí.*
- *Entrevistadora: Muy bien.*

Hemos observado que en este formulario 2 la alumna 01 dibuja un diagrama que consta de dos rectángulos, inicia el dibujo por el comparado y lo divide las veces que señala el escalar, y a continuación dibuja el referente. Es consistente con su dibujo de diagramas, puesto que el primer dibujo es similar al segundo. Utiliza un diagrama integrado de tiras de tipo D1. Se manifiesta que la alumna 01 construye el mismo tipo de diagrama en ambos problemas.

5.1.3 Formulario 3

A continuación de terminar el formulario 2, la entrevistadora le muestra el formulario 3 que contiene una hoja auxiliar de contraste con tres diagramas (a, b y c) que han construido otros alumnos en un primer acercamiento y le pide que diga cuál de los tres es parecido al que ella ha construido.

- *Entrevistadora: Ahora te muestro unos diagramas que han hecho antes algunos de tus compañeros, para que observes, ¿Cuál se parece al tuyo*?

La alumna mientras la entrevistadora le da la indicación, observa los tres diagramas y de inmediato indica que es el diagrama "c" que se parece al que ella ha construido y gesticula con el bolígrafo que al rectángulo mayor que tiene marcado "75 euros" le faltaría dividirlo en partes.

- *Alumna 01: Este (señalando el diagrama "c")*

La entrevistadora le pide que rellene el diagrama con los datos que hacen falta para que sea similar al que ella ha dibujado.

- *Entrevistadora: Completa los datos que le faltan a ese diagrama (diagrama "c").*

y la alumna 01 coloca en el rectángulo mayor y entre paréntesis el nombre de "Isabel" y en el rectángulo menor lo señala como "un quinto de 75" y entre paréntesis el nombre de "Eva".

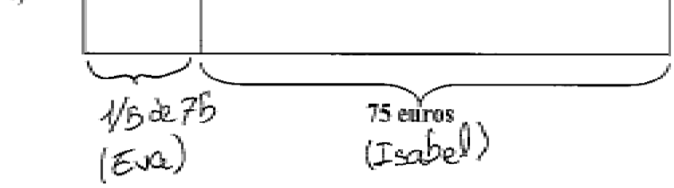


Figura 5.3 Diagrama elegido por la alumna 01.

A continuación la entrevistadora le pregunta el porqué no podrían ser el diagrama “b” o el diagrama “a” la representación para el problema. La alumna argumenta que el diagrama “b” podría ser, pero le faltaría la parte que ha ahorrado Eva y manifiesta que el diagrama “a” tampoco podría ser porque los “75 euros” son el ahorro mayor que se hace en el problema 2, y en este caso están representados en el menor de los rectángulos del diagrama “a”.

Figura 5.4 Diagrama “b” del formulario 3. Alumna 01.

- *Entrevistadora: ¿Por qué no podría ser éste?... (refiriéndose al diagrama “b” de la hoja de contraste).*
- *Alumna 01: Podría ser si esto (la alumna señala la totalidad del diagrama) se dividiera en cinco partes, pero faltaría la parte de Eva.*

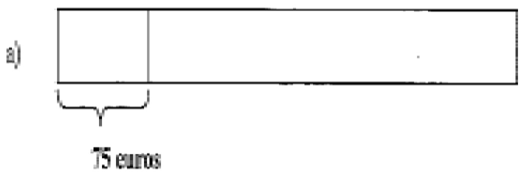


Figura 5.5 Diagrama “a” del formulario 3. Alumna 01.

- *Entrevistadora: Ah, muy bien. Y éste, ¿podría ser? (refiriéndose al diagrama “a” de la hoja de contraste)*
- *Alumna 01: No, porque el de setenta y cinco euros es mucho más grande que el resto.*

Cuando elije el diagrama “c”, la alumna 01 tiene la capacidad de transformar el que ella ha hecho a un diagrama parte-parte. No reconoce como una posibilidad, la relación del problema dentro de un diagrama parte-todo (diagrama b). Además observamos que la alumna 01 no cae en el error de inversión al descartar la posibilidad de que sea el diagrama “a”.

5.1.4 Formulario 4

Una vez termina el formulario 3, la entrevistadora le presenta el formulario 4 con un problema compuesto enunciado gráficamente en un primer diagrama para que encuentre los valores de “x” e “y”.

- *Entrevistadora: Te muestro este diagrama (refiriéndose al diagrama del formulario 4) para ver si tú encuentras o hallas el valor de “x” e “y”.*

La alumna encuentra los valores solamente observando, sin escribir en el papel y expresa los valores de cada una de las incógnitas. Para que el hecho quede evidenciado en papel, la entrevistadora le pide que lo escriba.

- *Alumna 01: Si esto sería, quince (la alumna indica la “x”) y esto, cinco (indica la “y”)*
- *Entrevistadora: Muy bien, escribe cómo lo has encontrado*

Al pedirle que lo escriba en papel, la alumna explica con palabras cómo lo ha hecho, sin escribir en el papel. Por lo que la entrevistadora le dice que está bien, pero que lo escriba.

- *Alumna 01: Pues, porque si esto (la alumna señala la totalidad de caramelos) es veinte, en total, y esto (se refiere a los 20 caramelos) dividido en cinco, si se divide veinte en factores primos sería cinco por dos al cuadrado, y dos al cuadrado es cuatro.*

- *Entrevistadora: Escríbemelo aquí (la entrevistadora señala el formulario 4).*

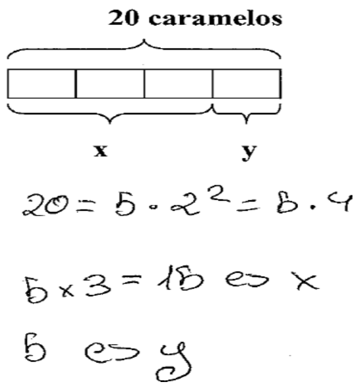


Figura 5.6 Valor de las incógnitas en el formulario 4. Alumna 01.

Y ya para corroborar que la alumna encontró el valor de las incógnitas, La entrevistadora vuelve a preguntarle sobre el valor de "x" e "y", al escuchar que la alumna responde correctamente el valor de "x", la entrevistadora interrumpe al ver que ya tiene ambos valores escritos en papel.

- *Entrevistadora: ¿Cuánto vale, entonces, "x" y cuánto vale "y"...me has dicho?*
- *Alumna 01: "x" vale quince…*
- *Entrevistadora: Ah, vale.*

5.1.5 Formulario 5

Una vez termina con el formulario 4, la entrevistadora le presenta el formulario 5 que consta de otro problema compuesto enunciado gráficamente a través de un diagrama lineal en forma de bandas rectangulares. Para que encuentre los valores de las incógnitas "x" e "y".

- *Entrevistadora: Haz igualmente éste (la entrevistadora se refiere al diagrama del formulario 5) y encuentra el valor de "x" e "y".*

La alumna 01 observa el diagrama e inicia contando la cantidad de rectángulos que hay, pero al ver que hay un rectángulo más grande que los demás en el mismo diagrama, pregunta si a ese rectángulo le faltaría dividirlo en dos para ser igual a los otros. La entrevistadora le responde que ese trozo tiene escrito el valor. La alumna responde que ese trozo equivale a trece. La entrevistadora le pregunta qué tiene que hacer en ese caso. La alumna se muestra desconcertada, pues no le queda claro si el trozo que equivale a trece canicas, forma un sólo rectángulo o le falta la raya que lo divida en dos y de ese modo quedaría igual que los demás. La entrevistadora le aclara que es uno sólo.

- *Alumna 01: Aquí (la alumna señala el rectángulo que tiene las 13 canicas) faltaría un… de esto… (la alumna se refiere a una raya que lo divida en dos) ¿no?*

La alumna parece no tener en cuenta los valores numéricos que aparecen en el diagrama, sin embargo parece respetar las dimensiones del gráfico, pues propone agregarle una raya en medio del rectángulo (que indica las trece canicas), puesto que a simple vista parece ser dos veces el rectángulo que indica la "x", y concluimos que de ese modo su único propósito consiste en dividir trece entre dos y encontrar el valor de "x". La entrevistadora le advierte que observe que ese rectángulo indica que vale trece, con la intención de que no continúe por ese camino.

- *Entrevistadora: Bueno, aquí (la entrevistadora señala el número 13) te está indicando cuánto vale.*
- *Alumna 01: Trece.*

Tras preguntar la entrevistadora qué tiene que hacer para encontrar el valor de las incógnitas. La alumna vuelve a tener dudas de si el rectángulo que aparece con el valor de “trece” le falta la raya en medio o no, y de si es uno sólo o son dos rectángulos. La entrevistadora le aclara que es uno sólo.

- *Entrevistadora: ¿Qué tendrías que hacer ahí?*
- *Alumna 01: Esto (la alumna se refiere al rectángulo señalado con las 13 canicas) ¿qué sería un cuadradito o dos… que le falta una raya?*
- *Entrevistadora: ese sería uno sólo.*

La alumna no avanza en el desarrollo del problema ni escribe en el papel, y la entrevistadora percibe las dudas de la alumna 01 sobre el valor de las incógnitas, y le guía hacia la respuesta en lugar de permitirle encontrarla por sí sola. Por lo que en esta conversación observamos que la entrevistadora le da indicios a la alumna 01 para que halle el valor de las incógnitas.

La alumna en un principio parece tener en cuenta las dimensiones del gráfico, pero hay un momento en el que pensamos que no la tiene, cuando dice que si el rectángulo “x” sería “trece”. La entrevistadora evitando responder directamente sí o no, le advierte si los rectángulos de “x” y el que corresponde el valor de “trece” son del mismo tamaño, con el fin de que omita ese aspecto. La alumna 01 no termina de aclararse y como se le ha advertido que no debe continuar por ese camino, vuelve a considerar la posibilidad de dividir trece entre dos para encontrar el valor de “x” y así solucionar el diagrama.

- *Alumna 01: “x” sería trece ¿no?*
- *Entrevistadora: ¿Es del mismo tamaño?*
- *Alumna 01: No, por eso. Entonces sería trece entre dos, sería seis con cinco.*

La entrevistadora al observar que la alumna está teniendo dificultades en encontrar el valor de las incógnitas le sugiere observar el valor numérico total del diagrama (90 canicas) para que lo tome en cuenta al igual que el trozo de diagrama que indica el valor numérico de "trece", a la hora de hacer algún cálculo que le permita encontrar los valores de las incógnitas.

- *Entrevistadora: Sí, observa que aquí es noventa (la entrevistadora le señala el valor total de diagrama), y este trocito es trece.*
- *Alumna 01: Vale…*

La entrevistadora asume que, con los datos y todos los indicios de cómo desarrollar el diagrama, ha encaminado a la alumna 01 hacia la respuesta y que la alumna 01 ha aclarado sus dudas sobre los cálculos que debe hacer para hallar el valor de las incógnitas. La entrevistadora le pregunta, cuánto sería el valor de "y", la alumna responde que "x" vale diez e "y" sería setenta. Según esta respuesta la entrevistadora interpreta que la alumna vuelve a omitir que hay un rectángulo en el diagrama que tiene como valor "trece". Le advierte que si su respuesta es setenta para el valor de "y" la suma de "y" más los "trece" resulta el total del diagrama (90 canicas). La alumna responde que no y da otro resultado erróneo. Esto nos da la señal de que la alumna 01 está resolviendo el diagrama por ensayo y error.

- *Entrevistadora: ¿Cuánto sería, entonces, esta parte? (la entrevistadora señala la parte que corresponde a "y").*
- *Alumna 01: La "x" sería diez y esto (la alumna señala el valor de "y") sería setenta.*
- *Entrevistadora: ¿Y setenta más los trece te da noventa?*
- *Alumna 01: No, entonces este (refiriéndose a la "x") podría ser siete y este (refiriéndose a la "y"), sería…*

La entrevistadora al observar la confusión en la alumna 01 y que no logra desarrollar el diagrama, decide interrumpirle insistiendo que debe centrar su atención en la cantidad total de canicas, al igual que debe tomar en cuenta el rectángulo señalado con las trece canicas que aparecen en el diagrama y le pregunta cómo podría saber el valor de la "y" que viene a ser el resto del diagrama. Con esta información, la alumna observa el diagrama y responde que debe hacer la resta de 90 menos 13. La entrevistadora le anima que lo escriba para dejar evidenciado en papel.

- *Entrevistadora: Con los datos que tienes allí como encontrarías esa "x". El todo vale noventa. Toda esta línea vale noventa y te están dando que esto vale trece. Como podrías saber cuánto equivale esta "y"? o sea todo lo demás.*
- *Alumna 01: Pues restándole a noventa, trece*
- *Entrevistadora: Muy bien, escríbelo entonces.*

La alumna procede a escribir y encuentra el valor de "y", la entrevistadora le pregunta que si ahora que tiene el valor de "y" podría encontrar el valor de "x", y la alumna realiza una división entre el valor de "y" y la cantidad de rectángulos que corresponden a "y", y manifiesta que "x" vale once.

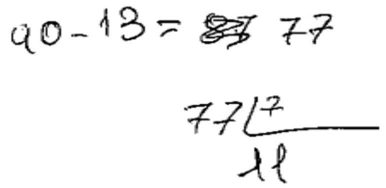


Figura 5.7 Valor de las incógnitas del formulario 5. Alumna 01.

- *Alumna 01: Sería setenta y siete (refiriéndose al valor de "y")*
- *Entrevistadora: Entonces, ¿podrías encontrar el valor de "x"?*
- *Alumna: Pues… once.*
- *Entrevistadora: Muy bien. Perfecto.*

Hemos observado que el diagrama de este formulario 5 le produce algunas perturbaciones. Una puede ser debida a que las dimensiones del gráfico no coinciden proporcionalmente con los datos numéricos, y otra cuando la alumna 01 pretende obviar las indicaciones numéricas y centrarse en semejanzas y analogías del diagrama.

La alumna 01 encuentra cierta dificultad. Podría deberse a que en unas ocasiones quería imponer el gráfico ante los valores numéricos y en otras ocasiones lo contrario, es decir que quería ubicar números sin respetar las dimensiones del gráfico y otras veces tomaba en cuenta lo gráfico sin respetar los valores numéricos señalados en el diagrama. Se pone de manifiesto el empeño de la entrevistadora por reconducir a la alumna a desarrollar el problema numéricamente y el de la alumna de desarrollarlo gráficamente. La alumna intenta resolver el problema localmente, prescindiendo de los datos, se inclina por el desarrollo gráfico. Manifiesta dudas de si tiene que conservar la proporción entre las partes del diagrama sin pensar si es coherente con la estructura numérica que aparece.

5.1.6 Formulario 6

Una vez la alumna 01 logra terminar el formulario 5, la entrevistadora le presenta un último formulario, el formulario 6 para que encuentre el valor de las incógnitas "x" e "y". La alumna observa el diagrama y comienza a dividir en el papel, los setenta euros entre cinco y responde que el resultado de esa división es el valor de "x", y a continuación manifiesta y escribe que el valor de "y" va a ser el resultado de multiplicar el resultado de esa división por seis que es la cantidad de rectángulos que corresponden a "y".

- *Entrevistadora: Igualmente haz éste (refiriéndose al diagrama del formulario 6).*
- *Alumna: (Silencio mientras calcula el valor de las incógnitas)*

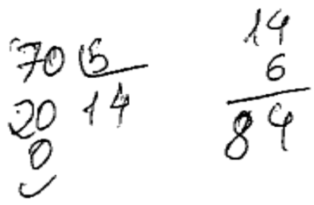


Figura 5.8 Valor de las incógnitas en el formulario 6. Alumna 01.

- *Alumna: sería catorce (la alumna se refiere al valor de "x")*
- *Entrevistadora: ¿El valor de "x"?*
- *Alumna: Aquí (la alumna señala "x") sería catorce e "y" sería… seis (dice "seis" para referirse a la cantidad de rectángulos que corresponden a "y"), catorce por seis sería… Ochenta y cuatro.*
- *Entrevistadora: Muy bien, esto sería todo ¡Gracias!*

Observamos que la alumna maneja bien los gráficos, cuándo éstos son proporcionales, en este diagrama del formulario 6 la alumna 01 no tuvo dificultad en encontrar el valor de las incógnitas. Cuando se le presenta el formulario 6 lo hace con otro tipo de estructura, por ejemplo la estructura de cantidades repetidas. En el formulario 3 no es capaz de ver el problema representado en el diagrama parte todo (diagrama "b"), pero sí es capaz de resolver el diagrama del formulario 6, que es un ejemplo de diagrama parte-todo.

La alumna 01 tanto en el formulario 1 como en el formulario 2, inicia dibujando diagrama, una vez lo ha resuelto mentalmente. Inicia a dibujar por el comparado. Dibuja los datos del enunciado, no así la solución. Utiliza estructura multiplicativa para el dibujo del diagrama y no comete error de inversión. En el formulario 3 mantiene su postura en la elección del diagrama "c", donde separa la parte del todo. El formulario 4 no le ocasiona dificultad y lo resuelve a simple vista. El formulario 5 le ocasiona perturbación, le cuesta el concordar las dimensiones del diagrama con las cantidades numéricas presentes en el mismo y se le hace difícil encontrar las incógnitas por sí sola. En el formulario 6 identifica con facilidad las incógnitas.

5.2 Alumna 02

La alumna 02 tiene 13 años y cursa segundo año de Educación Secundaria Obligatoria en un instituto público de la ciudad de Granada. La alumna 02 se muestra con ánimos de colaborar en el desarrollo de la entrevista. Según su profesor de curso es una estudiante tímida, pero que mantiene buen rendimiento académico en la asignatura de matemáticas.

5.2.1 Formulario 1

La entrevistadora le presenta el formulario 1 que contiene la cabecera para rellenar los datos personales y el problema 1. Le pide que rellene la cabecera. Una vez termina de rellenar la cabecera, la entrevistadora le da la indicación sobre lo que debe hacer en el problema 1.

- *Entrevistadora: Bueno mira, te voy a hacer unas preguntas y las vas respondiendo a medida que te las vaya haciendo. Primero pon tu nombre, la fecha de hoy que es veinticinco, tu edad y el curso.*
- *Alumna 02: No responde. (toma unos pocos segundos para rellenar sus datos).*
- *Entrevistadora: Pues muy bien, ahora vas a leer detenidamente el problema número uno y me vas a mostrar como tú haces un diagrama que represente las relaciones que hay en ese problema (la entrevistadora se refiere al problema 1).*
- *Alumna 02: Vale. (toma unos 15 segundos aproximadamente para leer el problema).*

Tras darle un tiempo para leer el problema, la entrevistadora le pregunta con el propósito de saber si han utilizado algún tipo de diagrama anteriormente y saber si conoce el término de "diagrama" y para qué los han utilizado. La alumna responde que sí han utilizado diagramas en el tema de fracciones

- *Entrevistadora: ¿Has utilizado anteriormente diagramas en clases de matemáticas?*
- *Alumna 02: Sí*
- *Entrevistadora: ¿Para qué lo utilizas?*

- *Alumna 02: Normalmente los utilizamos para fracciones.*
- *Entrevistadora: Ah, para fracciones.*

La alumna 02 comienza por escribir los datos del problema, tarda más de un minuto y pregunta sobre qué significa “cuatro veces”, tiene la duda que si esa expresión significa que viajan igual cantidad de pasajeros en el tren que en el autobús. Y la entrevistadora le relee la frase que aparece en el enunciado.

- *Alumna 02: Silencio, tarda más de un minuto para escribir los datos del problema.*
- *Alumna 02: ¿Cómo que cuatro veces viajan… viajan igual o?…*
- *Entrevistadora: ¿Cuatro veces… dice allí? Tantos pasajeros como en un autobús.*

La alumna en silencio observa el enunciado y luego escribe en el papel algunos datos y calcula la división de sesenta y cuatro entre cuatro, comete error de cálculo y dice que los pasajeros que viajan en el autobús son trece. La entrevistadora a modo de aclarar y tratando de darle las mínimas sugerencias, le pregunta que si en el autobús viajan menos o más pasajeros que en el tren, para que la alumna tenga claro que en el tren viajan más pasajeros que en el autobús. La alumna 02 vuelve a leer el enunciado y advierte que viajan “cuatro veces más”. Y continúa haciendo cálculos. La entrevistadora al observar que comete error de cálculo le sugiere que revise la respuesta y le recuerda que lo que se le está pidiendo es que dibuje un diagrama que represente los datos y no que resuelva el problema, pero la alumna 02 continúa rectificando su respuesta.

- *Alumna 02: silencio mientras lee nuevamente el enunciado*
- *Alumna 02: ¿Entonces, en un autobús viajan trece pasajeros?*
- *Entrevistadora: Si, ¿en el autobús viajan menos o más que en el tren?*
- *Alumna 02: Dicen que en el tren viajan cuatro veces tantos pasajeros como en el autobús. Viajan cuatro veces más… que en el autobús.*

- *Entrevistadora: Si, perfecto.*
- *Alumna: continúa haciendo cálculos en silencio.*
- *Entrevistadora: Revisa bien esa división. Tranquila, piénsalo bien. Ya sabes que en el tren viajan más que en el autobús, pero lo que necesito es un diagrama que represente eso (la entrevistadora se refiere al problema 1)*
- *Alumna 02: silencio, continúa haciendo cálculos y tratando de corregir la división.*

La alumna 02 se muestra nerviosa porque no logra resolver el problema, por lo que la entrevistadora en ese momento le dice que se tranquilice que va bien, animándole a continuar. La alumna corrige el cálculo anterior, pero vuelve a cometer error y dice que viajan once pasajeros, casi de inmediato se da cuenta de que su actual respuesta también es errónea y continúa rectificando hasta que logra resolver de manera correcta. La entrevistadora, le da la aprobación de que en verdad es la respuesta correcta, y a continuación le vuelve a pedir que dibuje un diagrama que represente los datos que tiene en el enunciado del problema.

- *Alumna 02: Viajan once, ¿no?... no, espera.*
- *Entrevistadora: Tranquila, no te pongas nerviosa.*
- *Alumna 02: silencio y continúa rectificando la división.*

La alumna 02 Continúa rectificando su error de cálculo. Toma su tiempo, y logra encontrar la respuesta.

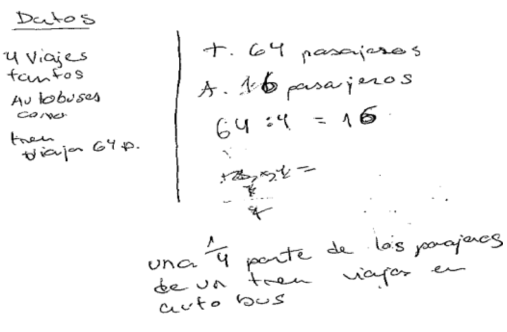


Figura 5.9 Resolución del problema del formulario 1. Alumna 02.

- *Entrevistadora: Muy bien, ahora que sabes cuántos viajan, ¿cómo representarías eso (refiriéndose a los datos) en un diagrama?*
- *Alumna 02: Procede a dibujar. Toma su tiempo.*

La alumna 02 dibuja un primer rectángulo y lo divide en 16 partes, indicando los pasajeros del autobús. Y a continuación dibuja otros tres rectángulos, similares en tamaño, hacia abajo y unidos al primero (uno a uno), dividiendo cada rectángulo en 16 unidades. Finalmente obtiene una sola figura de forma rectangular dividida en 64 unidades, resultante de los cuatro rectángulos dibujados previamente, indicando los pasajeros del tren.

Dibuja un sólo diagrama en el que el referente está inmerso en el comparado.

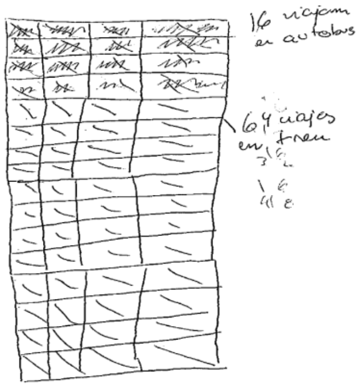


Figura 5.10 Diagrama construido en el formulario1. Alumna 02.

- *Alumna 02:¿Así?(la alumna le muestra a la entrevistadora el diagrama que ha hecho).*
- *Entrevistadora: Muy bien, ¿esto (la entrevistadora le señala la totalidad del diagrama) qué representa?*
- *Alumna 02: Este (la alumna señala la totalidad del diagrama) representa todos los viajeros del tren y este (la alumna indica solamente el primer rectángulo dividido en 16 partes) representa la cuarta parte que representa los viajeros del autobús.*
- *Entrevistadora: Ah, muy bien, perfecto.*

Observamos que la alumna 02 ha resuelto el problema y a partir de la solución inicia a dibujar el diagrama con la insistencia de la entrevistadora sobre la construcción del diagrama.

5.2.2 Formulario 2

Una vez termina de desarrollar el formulario 1, la entrevistadora le presenta el formulario 2 que contiene el problema 2, para que dibuje un diagrama que represente los datos que aparecen en el enunciado del problema.

- *Entrevistadora: vamos a ver este otro formulario, igualmente trata de representarlo con un diagrama, trata de representar los que se presentan aquí.*
- *Alumna 02: silencio y empieza a resolver el problema. Una vez termina comienza a dibujar el diagrama.*

La alumna escucha la indicación de la entrevistadora y comienza a resolver el problema en el que comete error de inversión, multiplica 75 x 5 en lugar de dividir 75: 5. Una vez termina con la resolución del problema, dibuja una única figura rectangular que divide en cinco partes tal como indica el enunciado "5 veces" (el escalar), señalando todo el rectángulo como "los 375 euros que ahorró Eva" (el referente) y tomando una de las cinco partes de la misma figura como la parte que ahorró Isabel (comparado).

Es decir, la alumna 02 dibuja una única figura a partir de la solución del problema y muestra un diagrama con error de inversión, donde compara la parte con el todo.

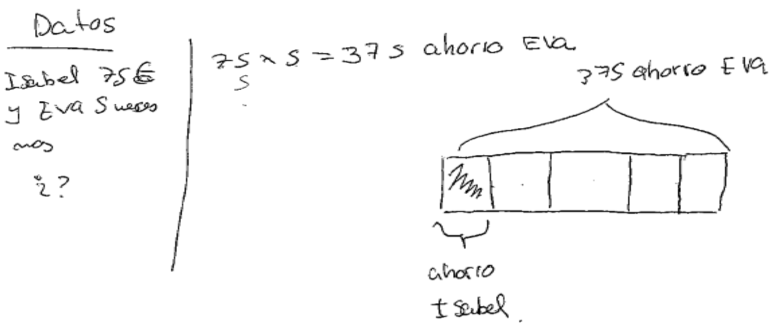


Figura 5.11 Diagrama construido en el formulario 2. Alumna 02

- *Entrevistadora: Eso (la entrevistadora señala todo el diagrama) sería los datos de…*
- *Alumna 02: Esto (la alumna señala la totalidad del diagrama) sería lo que ha ahorrado Eva y esto (señalando uno de los cinco rectángulos) lo que ha ahorrado Isabel.*
- *Entrevistadora: Ah, muy bien.*

Observamos que en este formulario 2, la alumna, aunque comete error de inversión se siente más segura con el desarrollo del mismo, puesto que no se muestra nerviosa e intranquila con el desarrollo del problema ni con el dibujo de diagramas.

5.2.3 Formulario 3

A continuación la entrevistadora le presenta el formulario 3, que consta de una hoja de contraste con tres soluciones para el formulario 2, en forma de diagramas , para que elija entre las tres, el diagrama que se parece a la que ha construido. La alumna observa los tres diagramas y dice que el diagrama “a” es similar al que ella ha construido.

- *Entrevistadora: Pues cuál de estos diagramas que ahora te muestro, unos diagramas que han hecho tus compañeros antes ¿Cuál se ajustan al que tú has hecho?*
- *Alumna 02: El “a”*

- *Entrevistadora: El "a" y ¿cómo completaría los datos en ese diagrama?*
- *Alumna 02: Faltaría lo que tendría Eva.*
- *Entrevistadora: Pues, pónselo.*
- *Alumna 02: silencio mientras escribe en el diagrama "a" los datos de Eva.*

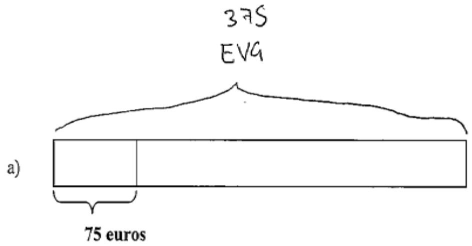


Figura 5.12 Diagrama "a" elegido por la alumna 02.

Observamos que la alumna elije el diagrama "a" con error de inversión, la entrevistadora le pregunta por qué no podría ser el diagrama "b" o "c", contesta que no podría ser el "b" porque Eva no ha ahorrado 75 euros en total, y el "c" tampoco porque Isabel no ha ahorrado más que Eva. Observamos que el ver otras soluciones no le hace cambiar su respuesta. La alumna 02 se mantiene en la idea del error de inversión e incluye en el diagrama la parte en el todo.

- *Entrevistadora: Y ¿por qué no podría ser este? (la entrevistadora se refiere al diagrama "b").*

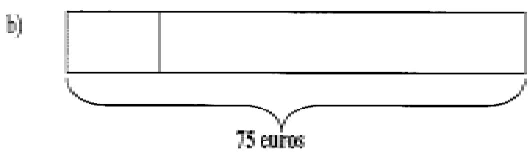


Figura 5.13 Diagrama "b" del formulario 3. Alumna 02.

- *Alumna 02: Porque en total Eva no ha ahorrado setenta y cinco, ha sido Isabel, que ha ahorrado una quinta parte de lo que ha ahorrado Isabel, (la alumna se equivoca cuando menciona el nombre de Isabel dos veces,* *ella quiere decir que Isabel ha ahorrado una quinta parte de lo que ha ahorrado Eva).*

- *Entrevistadora: ¿Y éste (la entrevistadora le señala el diagrama "c") por qué no podría ser?*

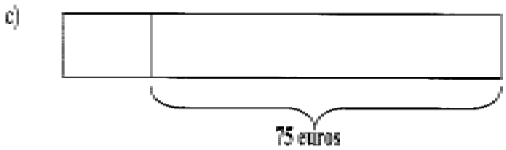


Figura 5.14 Diagrama "c" del formulario 3. Alumna 02.

- *Alumna 02: ¿Por qué no podría ser? Porque, Isabel (la alumna señala el rectángulo mayor del diagrama "c") no ha ahorrado más que Eva.*
- *Entrevistadora: ¿Esta (la profesora le señala el rectángulo mayor del diagrama "c") sería Isabel para ti?*
- *Alumna 02: Sí,*
- *Entrevistadora: Ah, vale…*

5.2.4 Formulario 4

Una vez termina con el formulario 3 , la entrevistadora le muestra el formulario 4, que consta de un problema compuesto enunciado gráficamente con la ayuda de un diagrama de bandas rectangulares, para que halle el valor de las incógnitas que aparecen en el diagrama.

- *Entrevistadora: ahora te muestro este diagrama para que me encuentres el valor de "x" y de "y".*

La alumna 02 cuenta la cantidad de rectángulos que hay en el diagrama, y hace una división de 20: 4 y a continuación escribe el valor de "y", debajo hace la multiplicación de 5×3 y escribe el valor de "x", la entrevistadora le pregunta cómo lo hizo y responde que si cuatro rectángulos son 20 caramelos, tiene que dividir 20: 4 para hallar el valor de un rectángulo que en ese caso es "y"= 5, y los otros tres rectángulos que faltan serían el resultado de multiplicar 15 × 3, que es el valor de "x". La alumna 02 hace la rectificación de los valores de las incógnitas con los datos del diagrama, entonces quince más cinco es veinte.

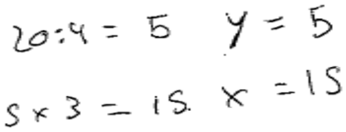


Figura 5.15 Valor de las incógnitas en el formulario 4. Alumna 02.

- *Entrevistadora: Vale, ¿cómo has encontrado el valor de "x" y de "y"?*
- *Alumna 02: Pues, sabiendo que cuatro veces son veinte caramelos entonces veinte entre cuatro son cinco que sería esto, sería "y", entonces si cinco por los tres que faltan son quince, esto (la alumna se refiere a "x") sería quince. Quince más cinco sería veinte.*
- *Entrevistadora: Ah, vale.*

Hemos observado que la alumna 02 no tiene dificultad en encontrar los valores de las incógnitas en el formulario 4 y al explicar cómo ha encontrado los valores de las incógnitas, observamos que tiene claro lo que ha hecho.

5.2.5 Formulario 5

Una vez la alumna encuentra los valores de las incógnitas en el formulario 4, la entrevistadora le presenta el formulario 5, para que encuentre los valores de las incógnitas en otro problema compuesto enunciado gráficamente.

- *Entrevistadora: Observa éste… (la entrevistadora le presenta el formulario 5) encuentra el valor de "x" e "y".*

Tras observar por unos segundos el diagrama del formulario 5, la alumna comienza a hacer algunos cálculos que le permiten encontrar los valores de “x” e “y”.

- *Alumna 02: No responde. (silencio mientras hace algunos cálculos para encontrar los valores de las incógnitas).*

La alumna 02 en silencio hace cálculos para encontrar las incógnitas, toma el número trece y lo divide entre dos y el resultado lo escribe como el valor de “x”, luego cuenta los rectángulos pequeños que hay en el diagrama, los agrupa de dos en dos, le resultan tres grupos de 2 y le queda uno, por lo que multiplica 13 × 3 y le suma los seis con cinco del restante y ese resultado lo coloca como el valor de “y”.

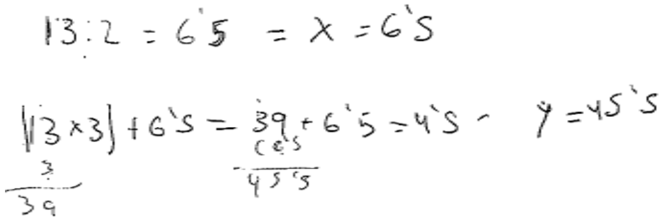


Figura 5.16 Valor de las incógnitas en el formulario 5. Alumna 02.

- *Entrevistadora:¿cómo has encontrado el valor de ”x”?*
- *Alumna 02: Pues, porque trece es el doble de un cuadrito, entonces si le quitamos la mitad son seis con cinco “x” son tres con cinco, sabiendo que trece son dos cuadritos si sumamos un cuadrito otro cuadrito, otro cuadrito son trece por tres que son treinta y nueve mas seis con cinco cuarenta y cinco con cinco.*
- *Entrevistadora: Ah, muy bien.*

La alumna respeta las dimensiones del diagrama y no rectifica su respuesta con los datos numéricos del diagrama, por lo que no se da cuenta de su error y la entrevistadora no hace comentarios al respecto.

5.2.6 Formulario 6

Tras haber terminado con el formulario 5, la entrevistadora le presenta el último formulario, el formulario 6, para que halle el valor de las incógnitas que aparecen en otro diagrama. La alumna guarda silencio mientras observa por unos segundos el diagrama y realiza algunos cálculos que le permiten encontrar los valores de las incógnitas.

- *Entrevistadora: Mira éste último, encuentra el valor de "x" y de "y".*
- *Alumna 02: No responde (guarda silencio unos segundos y comienza a hacer cálculos y encuentra el valor de "x" e "y").*

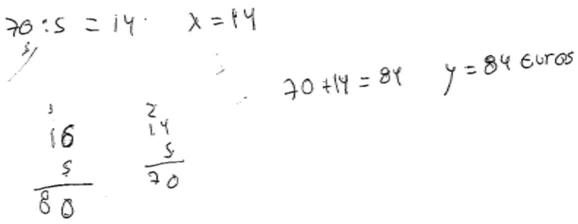


Figura 5.17 Valores de las incógnitas del formulario 6. Alumna 02.

La entrevistadora tras observar que la alumna 02 ha encontrado los valores de las incógnitas en este formulario 6, le pregunta cómo lo ha hecho. La alumna responde que al ver que cinco rectángulos del diagrama equivalen a setenta, entonces al dividir setenta entre cinco resulta catorce que sería el valor de "x", y que si a esos catorce se le suman los setenta, resulta el valor total del diagrama que sería ochenta y cuatro euros.

- *Entrevistadora: ¿Cómo has encontrado el valor de" x" y de "y"?*
- *Alumna02: ¿El de "x"?, sabiendo que cinco cuadritos son setenta y dividir setenta entre cinco da catorce que es el valor de*

"x" si setenta le sumamos catorce que es el valor de "x" da ochenta y cuatro que es el valor de y euros.

- *Entrevistadora: Perfecto, eso es todo, muchas gracias.*

Observamos que en este formulario 6 la alumna no presenta dificultad en encontrar los valores de las incógnitas y en cuanto a su respuesta sobre cómo lo ha hecho, observamos que verifica su respuesta tanto con las dimensiones del diagrama como con los valores numéricos presentes en el diagrama.

La alumna 02 en el formulario 1 hace un diagrama parte-todo, empieza a dibujar por el referente una vez resuelve el problema en el papel, utiliza la solución como parte del diagrama. Continúa utilizando, en el formulario 2, el mismo tipo de diagrama (parte-todo) cometiendo error de inversión en la solución del problema al igual que dibuja el diagrama con error y luego mantiene su error, eligiendo en el formulario 3, el diagrama "a". Mostrarle otros diagramas no le ayuda a reflexionar sobre lo que ha hecho ni le permite darse cuenta del error cometido, manteniendo su respuesta con error de inversión. En el formulario 4 se impone lo gráfico ante lo numérico, no tiene dificultad para encontrar los valores de las incógnitas. El formulario 5 continua imponiéndose lo gráfico ante lo numérico y esto le impide percatarse del error de cálculo que comete al encontrar los valores de las incógnitas. El formulario 6 no le presenta dificultad en encontrar los valores correctos de las incógnitas.

5.3 Alumno 03

El alumno 03 tiene 13 años y cursa el segundo año de educación secundaria obligatoria en un instituto público de la ciudad de Granada. Se muestra animado a colaborar con el desarrollo de la entrevista. Según su profesor de curso es un estudiante tímido, pero que mantiene buen desempeño académico en la asignatura de matemáticas.

5.3.1 Formulario 1

La entrevistadora le da una breve explicación de lo que se trata la entrevista mientras le presenta el formulario 1 y le pide que rellene sus datos en la cabecera del formulario. Una vez rellena la cabecera con sus datos, la entrevistadora le pide que dibuje un diagrama que represente las cantidades presentes en el enunciado del problema. El alumno 03, inicia resolviendo el problema y luego que obtiene la solución se detiene en señal de haber terminado, la entrevistadora interviene, al observar que no construye un diagrama le pregunta si había utilizado diagramas anteriormente en clases de matemáticas, el alumno 03 responde que "no". La entrevistadora insiste en preguntarle sobre el uso de diagramas y el alumno repite que no ha utilizado diagramas en clases de matemáticas.

- *Entrevistadora: Bueno, yo te voy a hacer unas preguntas… primero pon tu nombre aquí, la edad… muy bien, ahora vas a leer el problema número uno y me vas a mostrar cómo dibujas un diagrama que represente las cantidades que están en ese problema.*
- *Alumno 03: Alumno rellena la cabecera con sus datos. Silencio por unos segundos mientras resuelve el problema.*
- *Alumno 03: Ya está.*
- *Entrevistadora: Muy bien. ¿has hecho algún diagrama antes?*
- *Alumno 03: No.*
- *Entrevistadora: ¿En clase de matemáticas, no has utilizado ningún diagrama?*
- *Alumno 03: No.*

La entrevistadora tras escuchar la negativa en las respuestas del alumno 03 sobre el uso de diagramas en clases, le pregunta que cómo dibujaría algo que represente los datos que tiene en el enunciado del problema. El alumno hace silencio y comienza a dibujar. Dibuja un cuadrado y lo divide por la mitad de forma vertical y luego la otra mitad horizontalmente, resultando cuatro partes, señalando una de ellas como los pasajeros del autobús y explica lo que ha hecho.

- *Entrevistadora: ¿Y cómo dibujarías algo que me represente lo que está aquí?*
- *Alumno 03: comienza a dibujar el diagrama.*

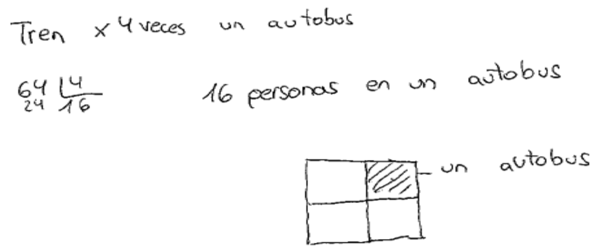


Figura 5.18 Diagrama construido en el formulario 1. Alumno 03.

El alumno 03 una vez termina de dibujar el diagrama, explica diciendo que el cuadrado grande representa los pasajeros del tren y que al dividirlo en cuatro partes, representa las veces de los pasajeros que van en el autobús, y que una parte de ese cuadrado grande representa los pasajeros de autobús. La entrevistadora a modo de aclaración, le pregunta cómo ha representado el tren, el alumno vuelve a explicar de la misma manera que antes dejándolo claro.

- *Alumno 03: Esto (el alumno señala todo el diagrama) sería el tren y una parte del tren sería como el autobús.*
- *Entrevistadora: ¿Cómo representarías el tren allí, todo del tren?*
- *Alumno 03: El tren sería este cuadrado (el alumno señala la totalidad del diagrama), entonces al dividirlo por cuatro sería las veces que es un autobús, una parte representaría un autobús.*
- *Entrevistadora: Está muy bien.*

El alumno 03, tras resolver el problema, dibuja un diagrama parecido al que se utiliza en el tema de las fracciones y en una única figura, comienza a dibujar por el comparado y coincidiendo con el diagrama integrado D4.

5.3.2 Formulario 2

Una vez termina con el formulario 1, la entrevistadora le presenta el formulario 2 que contiene el problema 2. Para que dibuje un diagrama que represente las cantidades que aparecen en el enunciado del problema.

- *Entrevistadora: Observa este otro (la entrevistadora se refiere al problema 2 del formulario 2), es muy parecido (se refiere a que es parecido al problema 1 del formulario 1), dibuja un diagrama.*
- *Alumno 03: No responde (hace silencio mientras lee mentalmente el problema).*

El alumno 03 una vez lee el problema mentalmente, dibuja un diagrama.

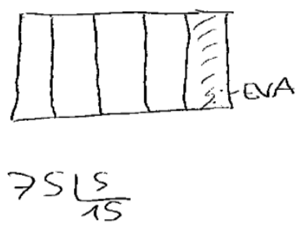


Figura 5.19 Diagrama construido en el formulario 2. Alumno 03.

El alumno 03 dibuja un rectángulo y lo divide en cinco partes de forma vertical y la última parte, la señala como la parte de Eva, a continuación resuelve la división de 75: 5, y expresa que todo el diagrama representa lo que ha ahorrado Isabel y que si divide lo de Isabel entre cinco se obtiene lo que ha ahorrado Eva.

- *Alumno 03: Esto, sería todo lo que tenía ahorrado Isabel, entonces como ella ahorra cinco veces más que Eva, tenemos que dividir todo lo que consiguió Eva entre cinco y es lo que ahorró.*
- *Entrevistadora: Perfecto.*

A pesar de manifestar no haber utilizado antes diagramas en clases de matemáticas, el alumno 03 dibuja diagramas de fracciones en ambos formularios (1 y 2).

5.3.3 Formulario 3

Tras terminar el formulario 2, la entrevistadora le presenta el formulario 3, que consta de una hoja de contraste para el problema 2 del formulario 2, en la que aparecen tres soluciones en forma de diagramas hechas por otros alumnos en un primer acercamiento. Para que elija la respuesta que más se ajusta al diagrama que ha construido. El alumno observa los tres diagramas.

- *Entrevistadora: Mira te muestro estos diagramas (la entrevistadora se refiere a que son tres diagramas, pues habla en plural, pero solamente le presenta la hoja de contraste), que han hecho otros compañeros tuyos, ¿Cuál tú crees que se parece al tuyo?*
- *Alumno 03: observa en silencio los tres diagramas.*

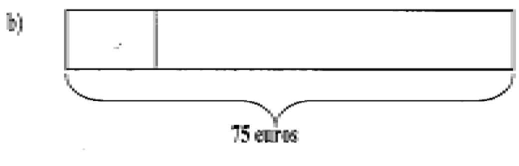


Figura 5.20 Diagrama “b” elegido. Alumno 03.

El alumno 03, señala el diagrama “b”. La entrevistadora le pregunta sobre qué datos le hacen falta a ese diagrama, el alumno responde que los datos de Eva, que sería el rectángulo pequeño. El alumno supone el rectángulo grande como lo que ha ahorrado Isabel. La entrevistadora no le recomienda que lo escriba y es por ello que no se muestra registro escrito en el papel.

- *Alumno 03: Ese...El "b"*
- *Entrevistadora: ¿Cuál dato faltaría en ese diagrama?*
- *Alumno 03: Lo que consigue Eva.*
- *Entrevistadora: ¿Dónde estaría ese dato?*
- *Alumno 03: Eva sería este cuadrado (el alumno señala el rectángulo pequeño).*

La entrevistadora le pregunta por separado por qué no podrían ser los otros dos diagramas y el alumno 03 responde que el diagrama "c" no puede ser porque él ha representado todo en una única figura y esa figura la ha dividido en cinco partes que una de ellas sería lo que ha ahorrado Eva, pero en este diagrama "c" han tomado sólo una parte de lo que ha ahorrado Isabel dejando aparte lo que ha ahorrado Eva y lo han calculado después. El diagrama "a" tampoco podría ser porque simplemente no se parece en nada al que él ha dibujado, además de que el diagrama "a" lo han construido de manera inversa.

- *Entrevistadora: ¿Y por qué no puede ser este? (Diagrama "c").*

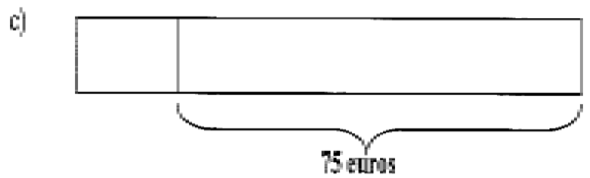


Figura 5.21 Diagrama "c" del formulario 3. Alumno 03.

- *Alumno 03: Porque yo he representado todo y luego lo he dividido en cinco y entonces, me daría lo que da Eva. Pero aquí (el alumno señala el rectángulo grande marcado con 75 euros) solamente han cogido lo que ha dividido Eva.*
- *Entrevistadora: ¿Y éste por qué no puede ser? (Diagrama "a").*

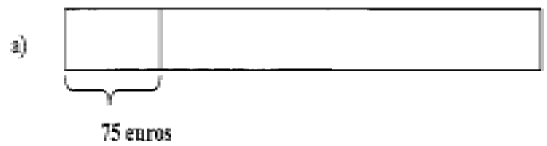


Figura 5.22 Diagrama "a" del formulario 3. Alumno 03.

- *Alumno 03: Porque no se parece nada al mío… Porque ellos han hecho, así, lo que yo he hecho invertido.*
- *Entrevistadora: Ah, muy bien.*

El alumno 03 mantiene su respuesta eligiendo el diagrama "b", un diagrama parte-todo.

5.3.4 Formulario 4

La entrevistadora le presenta al alumno 03 el formulario 4, que consta de un problema compuesto enunciado gráficamente para que encuentre los valores de "x" e "y".

- *Entrevistadora: Ahora te muestro este diagrama para que encuentres el valor de "x" y de "y".*

El alumno 03 observa el diagrama por unos segundos y escribe en el papel al mismo tiempo que dice los valores de las incógnitas.

Figura 5.23 Valores de las incógnitas en el formulario 4. Alumno 03.

- *Alumno 03: No responde (observa el diagrama por unos segundos) y escribe en el papel a la vez que dice, "y" son cinco y "x" quince.*

La entrevistadora le pregunta sobre cómo lo ha encontrado y el alumno 03 responde que 20 dividido entre cuatro resultan cinco caramelos en cada rectángulo.

- *Entrevistadora: ¿Cómo lo has encontrado?*
- *Alumno: Porque veinte entre cuatro son cinco cada uno y cada bloque cuenta como cinco caramelos.*
- *Entrevistadora: Ah, vale.*

Observamos que el alumno 03 resuelve de manera gráfica y no presenta dificultad en hallar los valores de las incógnitas.

5.3.5 Formulario 5

Una vez termina con el formulario 4, la entrevistadora le presenta el formulario 5, para que halle los valores de las incógnitas en otro problema compuesto enunciado gráficamente.

- *Entrevistadora: Ahora observa este… (la entrevistadora se refiere al diagrama del formulario 5).*

El alumno interpreta el rectángulo que está indicado en el diagrama con el valor de trece como dos de los bloques, encontrando el valor de "x = 6,5", a continuación cuenta la cantidad de rectángulos pequeños que hay, y los multiplica por "6,5", encontrando el valor equivalente a "y".

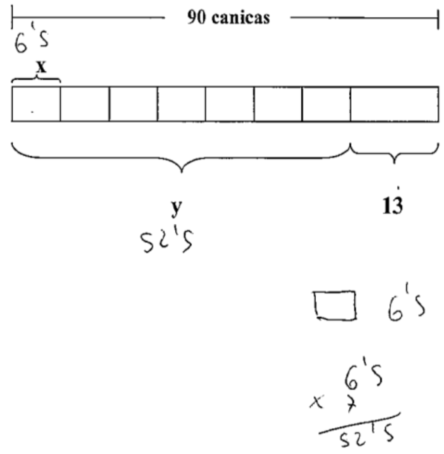


Figura 5.24 Valores de las incógnitas en el formulario 5. Alumno 03.

La entrevistadora le pregunta cómo ha encontrado los valores de la "x" e "y". El alumno explica que el rectángulo que tiene el valor de trece equivalen a dos de los otros, entonces al dividir 13: 2 resulta el valor de "x" e "y" equivale a siete rectángulos, se debe multiplicar el valor de "x" por siete y ese sería el valor de "y". La entrevistadora le advierte si ese resultado le da el valor de todas las canicas y el alumno responde que sí.

- *Alumno 03: "x" son seis coma cinco y "y" son cincuenta y dos con cinco.*
- *Entrevistadora: ¿Cómo has encontrado el valor ese?*
- *Alumno 03: Porque tres… no, me he equivocado. Si este bloque que son como dos son trece, al dividirlo entre dos te sale lo que da un bloque, un bloque entre "y" multiplicamos "x" son seis con cinco y "y" son cincuenta y dos con cinco.*
- *Entrevistadora: Y te da toda la cantidad de las canicas.*
- *Alumno 03: Sí.*
- *Entrevistadora: Vale, perfecto.*

Observamos que el alumno 03 en este formulario 5, respeta las dimensiones del diagrama, pero no toma en cuenta los valores numéricos. El diagrama no le ayuda a corregir el error, no le advierte proporcionalmente que no hay relación entre las cantidades numéricas y el dibujo. Realiza una solución de forma local, sólo fija su atención en un aspecto (lo gráfico) cuando numéricamente no corresponde.

5.3.6 Formulario 6

Para terminar con la entrevista, se le presenta el formulario 6, para que halle el valor de "x" e "y". El alumno 03 observa por unos segundos el diagrama y comienza a hacer algunos cálculos, divide los setenta euros entre la cantidad total de rectángulos que en este caso son 6, y el resultado de esa división es el valor de "x" y al sumarle los setenta a "x" resulta el valor de "y".

- *Entrevistadora: Observa esto (la entrevistadora se refiere al formulario 6)*
- *Alumno 03: No responde (observa el diagrama).*

El alumno 03 una vez observa el diagrama empieza a hacer algunos cálculos y encuentra el valor de las incógnitas de forma errónea.

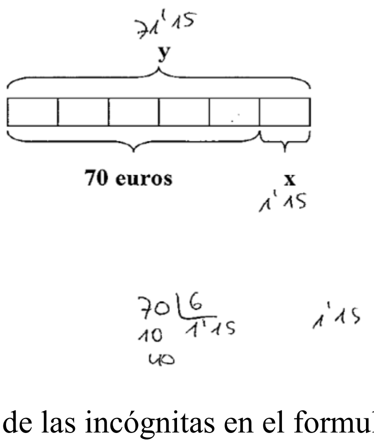


Figura 5.25 Valores de las incógnitas en el formulario 6. Alumna 03.

La entrevistadora le pregunta cómo lo ha hecho el alumno responde que si cinco bloques equivalen a 70, al dividirlo entre el total de rectángulos que forman el diagrama se obtiene el valor de uno de los rectángulos, que sería el valor de "x". La entrevistadora le pregunta, pues no queda claro si lo ha dividido entre cinco o entre seis, el alumno 03 responde que ha dividido entre 6, y la entrevistadora le pregunta si ese resultado obtenido le da el valor de todo el diagrama, y el estudiante responde que sí.

- *Entrevistadora: ¿Cómo has encontrado el valor de "y"?*
- *Alumno 03: Si esto son setenta y cuenta como cinco bloques, si lo cogemos y dividimos por seis, te sale el valor de cada bloque.*
- *Entrevistadora: ¿Lo has dividido entre cinco o entre seis?*
- *Alumno 03: Entre seis.*
- *Entrevistadora: Vale. Esto es todo, gracias.*

En este formulario 6, el alumno 03, además de interpretar de forma incorrecta el diagrama, comete error de cálculo y no verifica su respuesta con los datos numéricos del diagrama. Da la impresión de que no advierte las indicaciones numéricas del diagrama.

El alumno 03 en el formulario 1 inicia resolviendo el problema y a continuación dibuja un diagrama de fracción (parte-todo), en el formulario 2 dibuja otro diagrama de fracción y a continuación resuelve el problema. En el formulario 3 mantiene su respuesta (parte-todo) eligiendo el diagrama "b". En el formulario 4 lo resuelve gráficamente y encuentra fácilmente los valores de las incógnitas. El formulario 5, lo resuelve localmente, solo toma en cuenta la parte gráfica del diagrama y no se da cuenta de que tiene error. El formulario 6 además de tomar en cuenta la parte gráfica para resolver, no advierte las indicaciones numéricas y comete error de cálculo sin percatarse de que proporcionalmente no hay relación entre las cantidades y el dibujo.

5.4 Alumno 04

El alumno 04 tiene 13 años, cursa el segundo año de educación secundaria obligatoria en un instituto público de la ciudad de Granada. Es un alumno que va con su curso, no es repetidor y se muestra animado a colaborar con el desarrollo de la entrevista. Es un alumno extrovertido, según su profesor de curso, además de tener buen desempeño en la asignatura de matemáticas.

5.4.1 Formulario 1

La entrevistadora, tras una breve explicación de lo que se trata la entrevista, le presenta al alumno 04 el formulario 1 que consta de una cabecilla para anotar sus datos y un problema verbal de comparación multiplicativa para que dibuje un diagrama que represente las relaciones existentes entre los datos del enunciado del problema.

El alumno una vez anota sus datos, observa el problema por unos segundos, la entrevistadora le interrumpe para preguntarle si en su clase han utilizado diagramas anteriormente, el alumno contesta que sí, en problemas similares al presentado en el formulario 1 y en otros que en ese momento no recuerda, la entrevistadora le pide que haga un dibujo que represente los datos del problema, el alumno con cierta duda acerca de lo que es un diagrama pregunta si el diagrama es algo así como la regla de tres. La entrevistadora respeta la representación que el alumno desee dibujar, y por ello le contesta que lo haga como él crea que es un diagrama.

- *Entrevistadora: Te hago algunas preguntas. Primeramente pon tu nombre, el curso, la edad… Muy bien. Ahora vas a leer detenidamente el problema uno y me vas a hacer un diagrama que represente los datos que hay en ese problema.*
- *Alumno 04: hace silencio mientras observa por unos segundos el enunciado del problema.*
- *Entrevistadora: ¿Has utilizado diagramas antes, en clase de matemáticas?*
- *Alumno 04: Pero pocos, algunos pero pocos.*
- *Entrevistadora:¿En que lo has utilizado?*

- *Alumno 04: En problemas de este tipo…. Y no me acuerdo de más.*
- *Entrevistadora: Vale.*
- *¿Alumno 04: Un diagrama puede ser como una regla de tres?*
- *Entrevistadora: Como tú veas.*
- *Alumno 04:¿Desarrollo el problema?*
- *Entrevistadora: Como tú quieras.*
- *Alumno 04: el alumno resuelve el problema…*
- *Alumno 04: Ya (el alumno dice que ha terminado "ya", pero sólo resuelve, no dibuja).*

La entrevistadora observa que el alumno 04 sólo ha resuelto y no ha dibujado, le pide que construya un diagrama que represente los datos que tiene en el problema, y el alumno tiene dudas al preguntar sobre hacer un dibujo y si tiene que desarrollar otra vez el problema o puede utilizar lo que ha encontrado, la entrevistadora le repite que sí, que se trata de hacer un diagrama o un dibujo que represente lo que ya tiene que no es necesario que lo vuelva a desarrollar.

- *Entrevistadora: Muy bien. Ahora ¿cómo representaría esto en un dibujo?, que dibujo harías para representar este problema.*
- *Alumno 04: ¿Un dibujo?*
- *Entrevistadora: Sí, es un diagrama, un dibujo.*
- *Alumno 04:¿Lo desarrollo de nuevo o puedo usar esto?*
- *Entrevistadora: No, utiliza lo que ya tienes.*
- *Alumno: No responde (hace silencio mientras dibuja en el papel).*

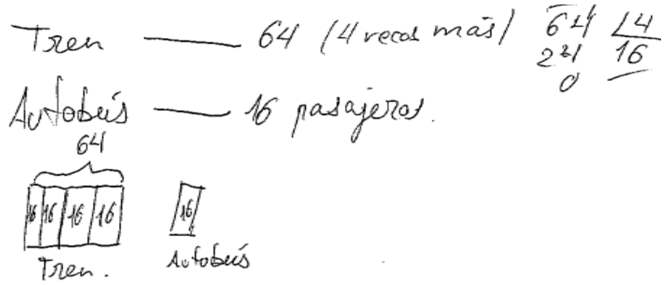


Figura 5.26 Diagrama construido en el formulario 1. Alumno 04.

Una vez obtiene la solución del problema, el alumno 04 dibuja un rectángulo que divide en cuatro partes (escalar), de forma vertical, señalando la figura como "tren" (comparado) y colocando dentro de cada parte la solución del problema (el número 16) y al lado dibuja un rectángulo más pequeño que el primero y escribe "autobús" (referente) y escribe también el número 16 dentro. La entrevistadora al observar el dibujo del alumno le queda claro el dibujo y no le pide explicación al respecto.

- *Entrevistadora: Muy bien, eso serían los datos del tren y del autobús.*

Observamos que el alumno 04 dibuja un diagrama iniciando a partir de la solución e inicia a dibujar por el comparado. Construye, de forma separada, dos rectángulos, uno para el comparado y otro para el referente, refleja el escalar en el comparado. Dibuja un diagrama integrado del tipo D1.

5.4.2 Formulario 2

Una vez termina con el formulario 1 la entrevistadora le muestra el formulario 2, que contiene el problema 2, para que dibuje un diagrama que represente los datos presentes en el enunciado del problema.

- *Entrevistadora: Ahora, mira este que sería parecido (la entrevistadora se refiere al formulario 2 que es parecido al anterior), utiliza un diagrama para representarlo.*
- *Alumno 04: No responde (observa el problema y procede a resolverlo).*
- *Entrevistadora: Muy bien. ¿cómo representarías en un diagrama eso?*
- *Alumno 04: Hace silencio, mientras dibuja, sin decir ni explicar lo que ha hecho.*

Al igual que en el formulario 1, el alumno inicia resolviendo el problema y a continuación construye un rectángulo (comparado) y lo divide de forma vertical en cinco partes (escalar), colocando dentro de cada parte la solución del problema (15), indicando el ahorro de Isabel. Al lado construye otro rectángulo más pequeño (referente), indicando el ahorro de Eva.

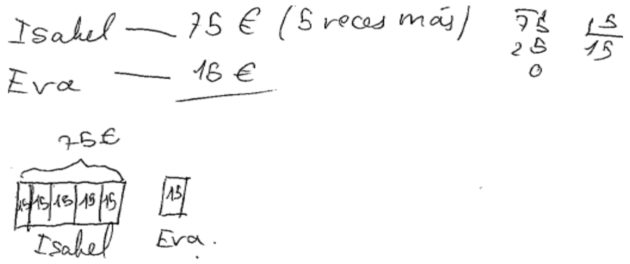


Figura 5.27 Diagrama construido en el formulario 2. Alumno 04.

- *Entrevistadora: ¿Eso representa? (la entrevistadora se refiere al dibujo que ha construido el alumno 04).*

El alumno 04 en el formulario 2 construye el diagrama partiendo de la solución del problema, inicia por el comparado y construye dos figuras. Dibuja un diagrama integrado de tipo D1.

5.4.3 Formulario 3

A continuación del formulario 2 la entrevistadora le presenta el formulario 3 que contiene una hoja de contraste con tres soluciones en forma de diagramas que han construido otros alumnos en un primer acercamiento, y que hemos adaptado para que representen el problema 2 del formulario 2, para que elija cuál de las tres soluciones se parece más al diagrama que ha construido. El alumno 04 elige el diagrama "c". La entrevistadora le sugiere que rellene el diagrama elegido con los datos que le hacen falta, el alumno divide el rectángulo mayor en cinco partes, les coloca el número 15 a cada parte y rellena el rectángulo pequeño también con el número 15.

- *Entrevistadora: Bien, ahora te presento unos diagramas que han hecho algunos de tus compañeros y me vas a decir ¿cuál se parece al que tú has hecho?*
- *Alumno 04: el alumno observa un par de segundos y dice… este (el alumno se refiere al diagrama "c").*
- *Entrevistadora: ¿Ese? Y rellena los datos que le faltan a este (diagrama "c").*

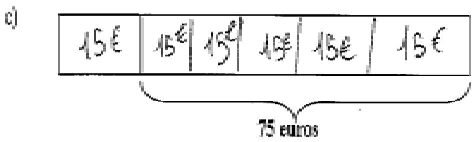


Figura 5.28 Diagrama elegido por el alumno 04.

La entrevistadora no hace preguntas sobre el diagrama que ha elegido y le pregunta por qué no podría ser el diagrama "b", el alumno responde que el diagrama englobaría otros 15 euros, y que sería 90 y no 75. La entrevistadora le pregunta por qué no podría ser al diagrama "a" y este responde que el rectángulo que equivale a 75 euros es muy pequeño para representar 75 y que no es equivalente a 15.

- *Entrevistadora: Y ¿por qué no podría ser éste? (la entrevistadora se refiere al diagrama "b").*

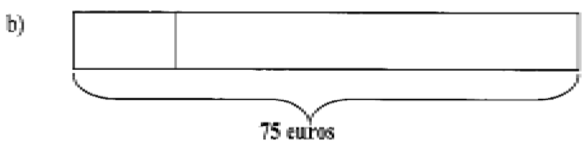


Figura 5.29 Diagrama "b" del formulario 3. Alumno 04.

- *Alumno 04: Este, porque ya englobaría otros quince euros más que serían noventa euros.*
- *Entrevistadora: ¿Se pasaría?*

- *Alumno 04: Hace el gesto con la cabeza, en lugar de decir "sí".*
- *Entrevistadora: ¿Y éste, por qué no? (la entrevistadora le señala el diagrama "a").*

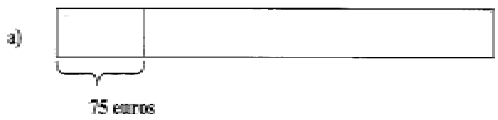


Figura 5.30 Diagrama "a" del formulario 3. Alumno 04.

- *Alumno 04: Porque esto sería muy corta (señala el rectángulo marcado con 75 euros) para setenta y cinco euros, no es equivalente a quince.*

Observamos que el alumno 04 elige el diagrama "c", se parece al que él ha construido y no admite que puedan incluirse los datos en un único diagrama. Ni que pueda haber un ahorro mayor de 75 euros.

5.4.4 Formulario 4

A continuación del formulario 3, la entrevistadora le presenta al alumno 04 el formulario 4, para que halle los valores de las incógnitas "x" e "y" presentes en el diagrama. El alumno de forma inmediata escribe el número cinco en el rectángulo que corresponde al valor de "y", de igual forma rellena con el número cinco, los demás rectángulos que corresponden a "x". A continuación escribe los valores de "x" e "y". La entrevistadora le pregunta cómo lo ha hecho, el alumno 04 responde que al ver que dan 20 caramelos y hay cuatro rectángulos, al dividir 20: 4 resulta 5 que es "y", y cómo "x" son tres rectángulos, equivale a 15.

- *Entrevistadora: Mira ahora te muestro otros diagramas para que me encuentre el valor de "x" y de "y".*
- *Alumno 04: observa el diagrama y escribe los valores de "x" e "y".*
- *Entrevistadora:¿Cómo lo has hecho?*

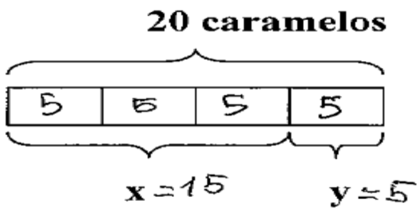


Figura 5.31 Valores de las incógnitas en el formulario 4. Alumno 04.

- *Pues al ver que dan veinte caramelos entre cuatro partes, lo he dividido entre cuatro y como "x" da tres es quince e "y" cinco.*

Observamos que el alumno 04 no tiene dificultad en encontrar los valores de las incógnitas en el formulario 4. Da la impresión de que toma en cuenta las indicaciones numéricas y las dimensiones del gráfico.

5.4.5 Formulario 5

Tras terminar con el formulario 4, la entrevistadora le presenta el formulario 5 para que encuentre los valores de las incógnitas que aparecen en un diagrama.

El alumno 04 rellena los siete primeros rectángulos del diagrama con el número diez, y al último rectángulo (indicado con el número 13) lo rellena con el número veinte, de manera que coincidan con la cantidad total (90 canicas) que indica el diagrama. A continuación advierte que algo no está bien y a 90 le resta 13, pero comete error de cálculo y de allí en adelante continua realizando cálculos erróneos que lo alejan cada vez más de la solución. Al final se da por vencido, porque no le coinciden los cálculos que ha hecho con las dimensiones del diagrama y manifiesta no saber hacerlo, por lo que no encuentra ningún valor de las incógnitas. La entrevistadora le dice que lo deje y que pasaría a otro problema.

- *Entrevistadora: Ahora observa e igualmente encuentra el valor de "x" y de "y".*
- *Alumno 04: Hace silencio y trata de encontrar los valores de las incógnitas.*
- *Entrevistadora: ¿Qué valor da ése? ¿Diecisiete?*
- *Alumno 04: Uno con setenta y uno.*
- *Entrevistadora: Ah, uno con setenta y uno.*
- *Alumno 04: No sé si éste se podría resolver.*
- *Entrevistadora: No lo sé… ¿Cuánto te da el valor?*
- *Alumno 04: Esto me da un valor… No me cuadra.*
- *Entrevistadora: ¿No te cuadra? ¿Habrá otra forma de resolver eso?... ¿Qué estás haciendo?*
- *Alumno 04: Viendo si pueden tener el mismo valor todos, aunque diferente…*
- *Entrevistadora: ¿Ya?*
- *Alumno 04: No, lo consigo resolver.*
- *Entrevistadora: Bueno vamos a pasar a otro.*

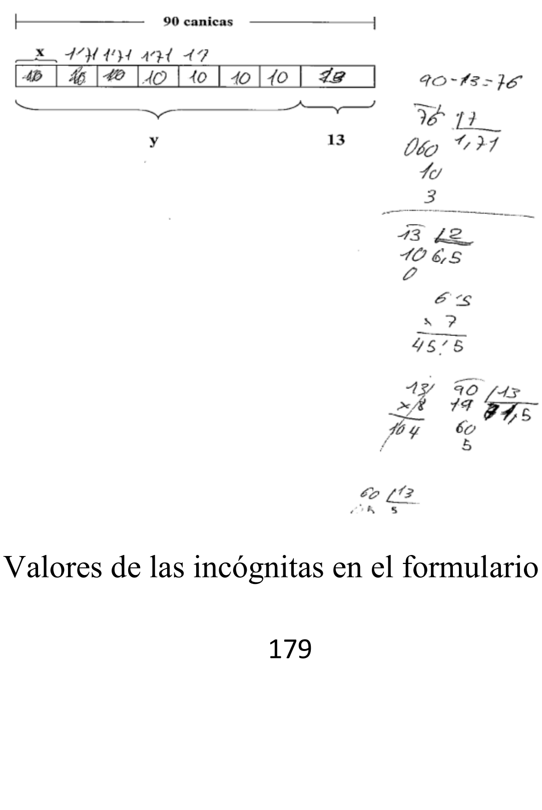


Figura 5.32 Valores de las incógnitas en el formulario 5. Alumno 04.

En definitiva, el alumno no encuentra el valor de las incógnitas. Además de tener un error de cálculo al principio de la resolución, parece tener alguna dificultad con el diagrama y decide abandonar la resolución. Posiblemente si la entrevistadora le advierte de que rectifique sus cálculos podría haber llegado a la solución.

5.4.6 Formulario 6

Para terminar, la entrevistadora le presenta al alumno 04 el formulario 6, para que halle el valor de las incógnitas que aparecen en otro diagrama. El alumno 04 inicia contando el total de rectángulos que hay en el diagrama, y luego cuenta una vez más los rectángulos equivalentes al valor de 70 euros y realiza la división de 70:5 y cuyo resultado le da 14, rellena todos los rectángulos con la solución y encuentra el valor de “x”, a continuación multiplica 14x6 y encuentra el valor de “y”.

- *Entrevistadora: este es el último.(la entrevistadora le presenta el formulario 6)*
- *Alumno 04: Observa el diagrama por unos segundos e inicia a hacer cálculos para encontrar el valor de las incógnitas.*

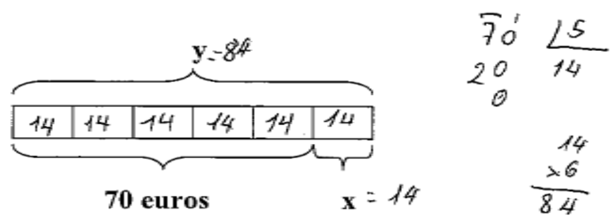


Figura 5.33 Valores de las incógnitas en el formulario 6. Alumno 04.

El alumno halla los valores de las incógnitas, la entrevistadora le pregunta cómo lo ha hecho, el alumno responde que al ser setenta euros cinco rectángulos, divide 70:5 y encuentra el valor de un rectángulo que viene a ser el valor de “x” y al multiplicar ese valor por seis, encuentra el valor “y”.

- *Entrevistadora: Muy bien, ¿cómo has encontrado el valor de “x” y de “y”?*
- *Alumno 04: ¿Cuál?*
- *Entrevistadora: De “x” y de “y”.*
- *Alumno 04: Setenta euros son cinco cuadraditos, setenta dividido entre cinco, saco el valor de un cuadradito y cómo “y” eran seis, pues multiplico por seis.*
- *Entrevistadora: Gracias, eso es todo.*

Observamos que el alumno no muestra tener dificultad al encontrar los valores de las incógnitas.

El alumno 04 en el formulario 1 y 2 comienza por resolver el problema y a continuación dibuja el diagrama, en dos figuras (diagrama parte-parte). Dibuja un diagrama integrado de tipo D1. En el formulario 3 mantiene su respuesta al elegir el diagrama “c” (diagrama parte-parte). En el formulario 4 el diagrama no le ocasiona dificultad para encontrar los valores de las incógnitas. En el formulario 5 se muestra desconcertado por no encontrar la respuesta a los valores de las incógnitas, toma en cuenta los datos numéricos y las dimensiones del diagrama, pero un error de cálculo en un principio le impide continuar de manera exitosa. En el formulario 6, encuentra sin dificultad los valores de las dos incógnitas.

5.5 Alumna 05

La alumna 05 tiene 12 años, cursa el primer año de educación secundaria obligatoria en un instituto público de la ciudad de Granada, no es repetidora, es tímida, muestra actitud positiva a realizar la entrevista, según su profesor de curso es una alumna con desempeño académico “regular-malo” en la asignatura de matemáticas.

5.5.1 Formulario 1

En primer lugar se le presenta el formulario 1 que contiene una cabecera para identificarse y el problema 1, para que rellene sus datos personales, su nombre, el curso al que pertenece, edad y fecha, y una vez ha terminado con los datos, la entrevistadora le da las indicaciones de lo que debe hacer con el problema verbal que aparece en el formulario 1.

- *Entrevistadora: Bueno ahora lee el problema uno y me vas a mostrar cómo puedes hacer un diagrama que me represente los datos que aparecen en el enunciado.*
- *Alumna 05: No responde (hace silencio unos segundos mientras lee el enunciado del problema 1 y empieza a dibujar).*

La alumna 05 empieza a dibujar un diagrama que hemos denominado como cualitativo-figurativo, es decir hace un dibujo alusivo a la temática del enunciado, en el que aparece un autobús y le coloca la operación a realizar, además de cometer error de inversión, puesto que explica que se debe multiplicar 64 x 4.

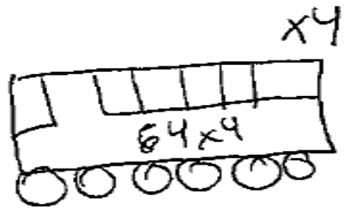


Figura 5.34 Diagrama construido en el formulario 1. Alumna 05.

Una vez inicia a dibujar, al entrevistadora se da cuenta de que la alumna 05 está construyendo un dibujo alusivo a la temática del enunciado, en este caso un tren o un autobús, le pregunta si ha utilizado diagramas en clases anteriores de matemáticas o en otra asignatura y la alumna manifiesta que no ha utilizado diagramas en matemáticas ni en ninguna otra asignatura.

- *Entrevistadora: ¿Has utilizado, antes, diagramas?*
- *Alumna 05: No.*
- *Entrevistadora: ¿En matemáticas, no?*
- *Alumna 05: No.*
- *Entrevistadora: ¿En otras clases?*
- *Alumna 05: No.*
- *Entrevistadora: ¿Ningún tipo de diagramas?*
- *Alumna 05: No.*
- *Entrevistadora: Vale.*

Estas respuestas negativas sobre el uso de diagramas anteriormente nos dan la idea de lo poco que utilizan diagramas para resolver problemas en estos niveles.

Una vez dibuja el diagrama, la entrevistadora le pregunta sobre qué cantidad está representada y la alumna contesta que ha dibujado el autobús porque en el tren hay 64 pasajeros y que los que viajan en el autobús son esa cantidad multiplicada por cuatro porque en el enunciado dice que en el autobús viajan cuatro veces más (según lo que la alumna 05 interpreta en el enunciado del problema1).

- *Entrevistadora: ¿Ese… (la entrevistadora se refiere al dibujo que ha hecho) qué te está representando? ¿Cuál dato?*
- *Alumna 05: En un autobús hay sesenta y cuatro viajeros por cuatro porque si en un tren viajan sesenta y cuatro…*
- *Entrevistadora: Vale muy bien.*

En este formulario 1, la alumna 05 no dibuja diagrama integrado.

5.5.2 Formulario 2

Una vez termina con el formulario 1 se le presenta el formulario 2, que contiene el problema 2, un problema verbal de comparación multiplicativa de enunciado inconsistente, para que haga un diagrama que represente los datos presentes en el enunciado del problema.

- *Entrevistadora: Bueno, ahora observa este problema número dos, que es parecido al anterior y me haces, también, un diagrama para representarlo.*
- *Alumna: No responde (observa el enunciado del problema por unos segundos).*

La alumna 05 observa el enunciado del problema, pero no dibuja diagrama sólo reescribe los datos de Isabel, y en los de Eva sólo escribe la operación a realizar sin resolverla. Debajo hace unos pequeños cuadraditos que simulan ser los billetes en euros para Isabel y Eva.

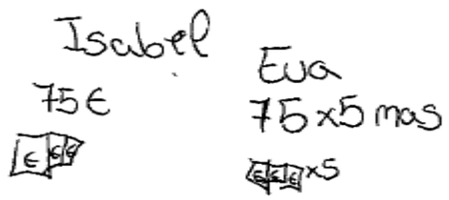


Figura 5.35 Diagrama construido en el formulario 2. Alumna 05.

Una vez muestra haber terminado de hacer el diagrama la entrevistadora le pide que explique qué representa cada una de las expresiones que ha escrito, incluso los pequeños cuadritos que ha dibujado debajo. La alumna contesta que los setenta y cinco euros pertenecen a lo que ha ahorrado Isabel y lo de Eva serían los setenta y cinco por cinco y que los cuadritos representan los billetes que ha ahorrado cada una, pero que no los dibujó todos sólo dibujó unos pocos.

- *Entrevistadora: ¿Este valor que tienes aquí de quién sería?*
- *Alumna: De Eva.*
- *Entrevistadora: De Eva. ¿Y éste?*
- *Alumna: De Isabel.*
- *Entrevistadora: ¿Aquí, cuánto?*
- *Alumna: Setenta y cinco el de Isabel y Eva setenta y cinco por cinco.*
- *Entrevistadora: Ah vale, muy bien.*
- *Entrevistadora: Y el diagrama, ¿Cuál es?*
- *Alumna: Pues, los billetes.*
- *Entrevistadora: Y ese billete cuánto equivale.*
- *Alumna: Pues…*
- *Entrevistadora: Es que no entiendo*
- *Alumna:¿El qué?*
- *Entrevistadora: ¿Cuántos billetes son?*
- *Alumna: He puesto unos cuantos, nada más.*

La alumna 05 hace dibujos alusivos a la temática del enunciado del problema. Dibuja diagramas cualitativos- figurativo en ambos problemas.

La alumna 05 termina con el formulario 2 y antes de presentarle el formulario 3, la entrevistadora le pide a la alumna 05 que resuelva el problema 1 con la finalidad de que recuerde de qué trata el problema y pueda comparar su dibujo con las tres soluciones presentes en el formulario 3. Además de ver si se da cuenta del error de inversión cometido y trata de corregir, pero la alumna 05 multiplicó lo que ya había dejado escrito y no se percató del error.

- *Entrevistadora: Ahora resuélveme este problema (la entrevistadora le presenta nuevamente el problema 1 del formulario 1). Resuélvelo.*
- *Alumna: no responde (hace silencio mientras resuelve).*

La alumna hace silencio mientras resuelve la multiplicación de 64 x 4 y escribe la respuesta.

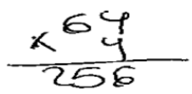


Figura 5.36 Resolución del problema del formulario 1. Alumna 05.

La entrevistadora le pregunta sobre el resultado que obtuvo a qué cantidad corresponde y la alumna 05 expresa que el resultado corresponde a los pasajeros del tren, y de forma inmediata rectifica expresando que esa cantidad corresponde a los pasajeros del autobús.

- *Entrevistadora: Ya está.*
- *Entrevistadora: O sea, que esto (la entrevistadora señala el cálculo realizado) sería la cantidad ¿de qué?*
- *Alumna: Del tren… No, del autobús, perdón.*
- *Entrevistadora: Del autobús, vale.*

5.5.3 Formulario 3

Una vez termina de resolver el problema 1, la entrevistadora le presenta el formulario 3 con las tres soluciones en forma de diagrama que han hecho otros alumnos en un primer acercamiento para el problema 1. Con la finalidad de comparar cuál de los tres diagramas se ajusta al que ella ha hecho en el problema 1.

- *Entrevistadora: te muestro unos diagramas que han realizado otros de tus compañeros, para que observes y me digas cuál de estos diagramas se ajusta a lo que tú has hecho o encontrado.*

La alumna 05 hace silencio mientras observa las tres soluciones y elije el diagrama “c”, la entrevistadora le pregunta sobre los datos que faltarían en ese diagrama y la alumna responde que los datos del autobús que serían “256”, la entrevistadora le dice que lo escriba en el diagrama. La alumna escribe encima de la figura el número “256”, y la entrevistadora le pide que le aclare si esa cantidad representa solamente una parte o toda esa parte del diagrama y la alumna le contesta que equivale a todo. La entrevistadora le pide que escriba en el papel algo que señale el trozo de diagrama al que corresponde. La alumna señala con un paréntesis que cubre todo ese trozo del diagrama.

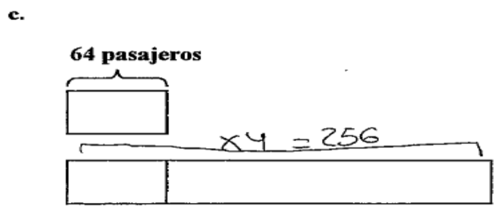


Figura 5.37 Diagrama “c” elegido. Alumna 05.

- *Alumna: Este (la alumna señala el diagrama “c”).*
- *Entrevistadora: ¿Ese?*
- *Entrevistadora: ¿Y qué dato le faltaría allí?*
- *Alumna: ¿Pues… cuántas veces más hay en el tren?*
- *Entrevistadora: ¿Estos serían los datos del…?*
- *Alumna: Del autobús.*
- *Entrevistadora: Pon allí los datos que le faltan.*

- *Alumna: ¿Aquí?*
- *Entrevistadora: Sí.*
- *Alumna: Por cuatro.*
- *Entrevistadora: ¿Cuánto sería, entonces, todo?*
- *Alumna: Pues doscientos cincuenta y seis.*
- *Entrevistadora: ¿Dónde lo pondrías? Pero ¿A qué corresponde doscientos cincuenta y seis? es todo esto (la entrevistadora le señala todo el diagrama inferior) o sólo este trozo? (La entrevistadora señala el trozo mayor del diagrama inferior)*
- *Alumna: Todo.*
- *Entrevistadora: Pon una señal que indique que vale todo. Todo eso vale doscientos cincuenta y seis. Muy bien.*

5.5.4 Formulario 4

Tras terminar con el formulario 3 la entrevistadora le presenta el formulario 4 que contiene un diagrama con forma de bandas rectangulares para que halle el valor de las dos incógnitas presentes. La alumna 05 pregunta si debe buscar ambas incógnitas y la entrevistadora le contesta que sí que debe encontrar el valor de cada una.

- *Entrevistadora: Te muestro este tipo de diagrama para que encuentres el valor de "x" y de la "y"*
- *Alumna 05: ¿Tengo que buscar el valor de cada una?*
- *Entrevistadora: El valor de cada una, sí.*
- *Alumna: no responde (hace silencio mientras observa el diagrama).*

Mientras la alumna 05 observa el diagrama, la entrevistadora le advierte que tenga en cuenta que el valor total del diagrama es de veinte caramelos con el fin de que lo resuelva tomando en cuenta la parte numérica. La alumna responde señalando el primer rectángulo de los cuatro que equivale a cinco, luego señala la "y" y dice que equivale a cuatro y los demás equivalen cinco. La entrevistadora le pregunta el porqué de ese cuatro y la alumna advierte su error y recapacita manifestando que el valor de cada uno de los cuatro rectángulos es cinco. La entrevistadora le pregunta que cuál es concretamente el valor de “y” y la alumna responde que es cinco por cuatro, la entrevistadora insiste en que ya se sabe que todo es veinte, pero que sólo se le pide saber el valor de “y” que es un pequeño trozo del todo, que diga cuánto valen las dos incógnitas. La alumna responde que “y” vale cinco y que “x” vale quince.

- *Entrevistadora: Observa que todo el diagrama equivale a veinte caramelos.*
- *Alumna 05: Pues, aquí cinco (la alumna señala un sólo rectángulo, el primero de izquierda a derecha, de los cuatro) aquí van a salir cuatro (señala la “y”) y las demás de cinco.*
- *Entrevistadora: ¿Por qué cuatro?*
- *Alumna 05: No perdón. Todas de cinco.*
- *Entrevistadora:¿Entonces cuánto vale “y”?*
- *Alumna 05: Pues, cinco por cuatro.*
- *Entrevistadora: Escríbemelo ahí. Veinte es el valor de todo. Pero yo solo quiero saber este pedacito ¿cuánto vale?*
- *Alumna 05: Cinco.*

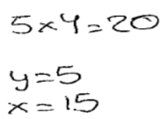


Figura 5.38 Valores de las incógnitas en el formulario 4. Alumna 05.

La entrevistadora le pide que lo escriba apara evidenciar el hecho en el papel, además de preguntarle cómo ha encontrado el quince. La alumna responde que de dividir vente entre cinco. La entrevistadora no se da cuenta de que ha dicho “entre cinco” y no corrige el error que pensamos pudo ser sólo verbal, es decir que pensamos que la alumna 05 quiso decir “entre tres”, pero que al momento de expresarlo con palabras dijo de otra manera, puesto que tenía claro de dónde le había salido el quince desde un principio.

- *Entrevistadora: Pónmelo ahí, "y" igual a cinco y el valor de "x" ¿cuánto sería en ese caso? ¿Qué has hecho para encontrar ese quince?*
- *Alumna 05: Dividir veinte por cinco.*
- *Entrevistadora: Vale, muy bien.*

Observamos que la alumna tiene dudas al principio, pero con la guía de la entrevistadora la alumna encuentra los valores de las incógnitas.

5.5.5 Formulario 6

Una vez termina con el formulario 4, la entrevistadora le presenta el formulario 6 (el formulario 5 por haber mostrado en los alumnos antes entrevistados: alumnos 01, 02, 03 y 04 una mayor dificultad la entrevistadora decide, sobre la marcha, cambiar el orden entre el formulario 5 y 6, dejando el formulario 5 para último). El formulario 6 contiene otro diagrama para que encuentre el valor de "x" e "y". La alumna 05 hace silencio mientras observa el diagrama y pregunta si puede hacer algún cálculo, inicia haciendo la división de setenta euros entre los seis rectángulos, en el momento tiene dudas sobre qué dividir y continúa haciendo la división de 70:6, no se da cuenta que los 70 euros sólo equivalen a cinco rectángulos y ese resultado lo considera como el valor de "x", luego la entrevistadora a manera de hacerle ver su error le pregunta si ese resultado le daría el valor de "y" y cuánto sería el valor de "y". La alumna responde que sería 70, luego rectifica y dice que sería 81.

- *Entrevistadora: Encuentra el valor de "x" y de "y".*

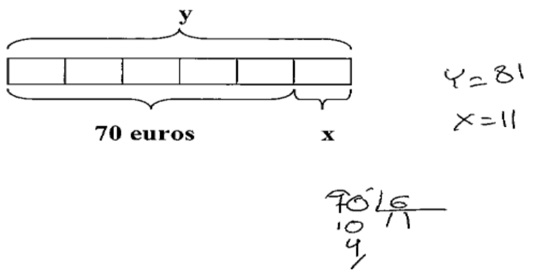


Figura 5.39 Valores de las incógnitas en el formulario 6. Alumna 05.

- *Alumna 05: No responde (hace silencio mientras observa el diagrama y pregunta) ¿Puedo hacer cuentas? (Hace silencio y continua con el cálculo de 70:6, tiene dudas y pregunta) ¿Qué divido? (nuevamente guarda silencio y expresa) Esto serían… once cada uno (la alumna se refiere a cada rectángulo del diagrama).*
- *Entrevistadora: ¿Y te daría el valor de "y"*
- *Alumna 05: Sí*
- *Entrevistadora: ¿Cuánto sería?*
- *Alumna 05: ¿De cada uno?*
- *Entrevistadora: Sí, para saber este trocito de aquí, que es la "x" ¿Cuánto vale cada…?*
- *Alumna 05: Pues, once.*
- *Entrevistadora: Ponlo entonces. Pon que equivale a once, y ¿Cuánto vale "y", entonces?*
- *Alumna 05: ¿Todo?*
- *Entrevistadora: Sí*
- *Alumna 05: Setenta. No ochenta y uno.*
- *Entrevistadora: Vale ponlo ahí. Muy bien.*

La alumna 05 no se da cuenta de su error ni rectifica la respuesta encontrada, no respeta las dimensiones, sólo toma en cuenta las expresiones numéricas existentes en el diagrama.

5.5.6 Formulario 5

A continuación, la entrevistadora le presenta el formulario 5 como el último de los formularios que contiene un diagrama para que encuentre los valores de las incógnitas.

- *Entrevistadora: Este es el último (la entrevistadora se refiere al último formulario de la entrevista).*
- *Alumna 05: no responde (hace silencio por unos segundos mientras hace algunos cálculos).*

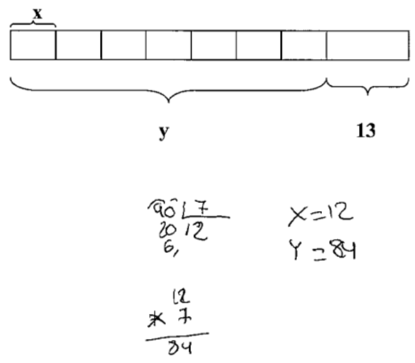


Figura 5.40 Valores de las incógnitas en el formulario 5. Alumna 05.

La alumna 05 hace silencio mientras hace la división de noventa entre siete, tras encontrar el resultado de la división, manifiesta que todos los rectángulos valen doce. La entrevistadora le pregunta si doce equivalen a cada uno de los rectángulos pequeños o equivalen a todos los rectángulos del diagrama y ella responde que los siete primeros menos el rectángulo que tiene el "trece". La entrevistadora le pide que lo escriba en el papel, y le pregunta del porque de la división 90: 7, y la alumna responde que ha dividido los noventa entre siete porque son siete los rectángulos y no incluye el otro rectángulo porque ese tiene marcado el número trece. La entrevistadora al observar que la alumna 05 no se percata de su error, le pregunta cuánto es el valor de "y", tras hacer una multiplicación de doce por siete responde que el valor de "y" es ochenta y cuatro.

- *Alumna 05: Esto serían… todos estos serían doce. (la alumna señala los primeros siete rectángulos).*

- *Entrevistadora: ¿Doce cada una? o doce todo.*
- *Alumna 05: Doce todo, esto (la alumna señala los siete rectángulos pequeños) menos esto que es… (ininteligible)… (la alumna señala el rectángulo marcado con el número trece).*
- *Entrevistadora: Vale, ponlo ahí lo que vale la "x", ¿Cómo has hecho aquí noventa entre siente? Noventa, por qué entre siete?*
- *Alumna 05: Porque como son siete cuadrados y este no porque tiene trece, he dividido noventa entre siete.*
- *Entrevistadora: Vale, e "y" ¿Cuánto vale?*
- *Alumna 05: Ochenta y cuatro.*
- *Entrevistadora: Muy bien, esto es todo. Gracias.*

La alumna 05 inicia los formularios 1 y 2 haciendo un dibujo cualitativo-figurativo en los que hace un dibujo alusivo a la temática de ambos enunciados, manifiesta que no ha utilizado diagramas anteriormente en matemáticas ni en ninguna otra asignatura. En ambos comete error de inversión. En el formulario 3 elije el diagrama "c" manteniendo el error de inversión, es coherente con su error. En el formulario 4 la alumna encuentra los valores de las incógnitas, interpreta bien el diagrama. En el formulario 5 la alumna en ocasiones toma en cuenta las dimensiones de enunciado y en otras ocasiones toma en cuenta la parte numérica, pero encuentra los valores sin rectificar si numéricamente corresponden con el diagrama o no. Respeta las dimensiones, pero como el número trece no le coinciden con los demás datos no lo ha considerado como parte del todo. En el formulario 6 comete error de cálculo al encontrar los valores de las incógnitas y al final no rectifica su resultado. Confunde al dividir setenta entre seis en lugar de dividir setenta entre cinco. Le da lo mismo que en la división de 70: 6 obtenga un resto de cuatro y escribe "x= 11". La alumna 05 sabe lo que es una llave y lo que implica, sin embargo asigna la cantidad total de setenta euros a los seis rectángulos pequeños. Hace cambios de valor en determinadas cantidades.

5.6 Alumno 06

El alumno 06 es un alumno tímido y se muestra un poco nervioso al inicio de la entrevista, pero está animado a colaborar en el desarrollo de la misma. Tiene 12 años y cursa el primer año de ESO en un instituto público de la ciudad de Granada.

5.6.1 Formulario 1

La entrevistadora le presenta el formulario 1 que consta de una cabecera para rellenar los datos personales y del problema 1, este es un problema de enunciado verbal de comparación multiplicativa con referente desconocido, para que dibuje un diagrama que represente las relaciones entre los datos del enunciado. Una vez que termina de rellenar los datos personales la entrevistadora le da las indicaciones sobre lo que debe hacer en el problema 1. El alumno se dispone a leer el problema y la entrevistadora interrumpe para preguntarle si ha utilizado diagramas en clases anteriores y en qué los ha utilizado. El alumno responde que sí han utilizado diagramas en algunos problemas que describe, y que la entrevistadora interpreta que son temas de estadística. La entrevistadora le pregunta que si recuerda cómo eran esos diagramas y el alumno responde que eran unas barritas. La entrevistadora le sugiere nuevamente que lea el enunciado del problema y dibuje un diagrama.

- *Entrevistadora: Bueno, ahora vas a leer detenidamente el problema uno y me vas a mostrar como harías un diagrama que represente los datos que aparecen aquí en el problema. (la entrevistadora señala el problema1).*
- *Alumno 06: Vale. (el alumno observa el enunciado en silencio).*
- *Entrevistadora: ¿Has utilizado diagramas antes, en clase de matemáticas?*

- *Alumno 06: Si los he utilizado.*
- *Entrevistadora: ¿En que lo has utilizado?*
- *Alumna 06: Pues, en los colores de los favoritos, los números de votos que le gustaba a la gente de la primavera, otoño… y número de coches vendidos cada mes.*
- *Entrevistadora: ¿Y cómo eran esos diagramas? ¿Recuerdas?*
- *Alumno 06: Eran barritas el que más gustaba y luego había una rayita que iba en cada punto de la barrita que iba diciendo cual había sido el más vendido.*

- *Entrevistadora: ¿De los coches? A vale. Trata de hacer un diagrama que represente eso, pero lee primero el problema.*

El alumno 06 hace silencio mientras lee el problema e inicia a dibujar unas líneas similares a las de un eje cartesiano y le coloca dos barras una más grande que la otra. Además de haberles colocado algunas cantidades sin guardar la proporción de las mismas.

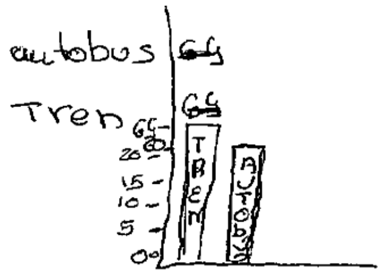


Figura 5.41 Diagrama construido en el formulario 1. Alumno 06.

La entrevistadora no le queda claro cuál de las barras corresponde al tren o al autobús y le pide que indique cuál barra representa el tren y el autobús. El alumno 06 escribe la palabra “tren” en la barra más grande y en la otra escribe la palabra “autobús”. Por la forma del diagrama podemos pensar que advierte que en el tren van más pasajeros que en el autobús, por lo que no comete error de inversión en el diagrama.

- *Entrevistadora: ¿Cual representa el tren y el autobús?*
- *Alumno 06: El tren sesenta y cuatro, y yo creo que el autobús sesenta.*
- *Entrevistadora: ¿Pero cuál de las dos barritas es una y cual la otra?*
- *Alumno 06: No responde. Escribe en la barra mayor la palabra "tren" y en la menor "autobús".*
- *Entrevistadora: ¿Ese el autobús? Ah, el tren. Muy bien.*

El alumno 06 en este primer formulario no resuelve, hace un diagrama cuantitativo, pero no logra integrar los datos del enunciado.

5.6.2 Formulario 2

Una vez termina con el formulario la entrevistadora le presenta el formulario 2, que contiene el problema 2, para que dibuje un diagrama que represente los datos del enunciado del problema.

- *Entrevistadora: Te muestro otro problema. Dibuja un diagrama que represente los datos que están presentes en el enunciado.*
- *Alumno 06: No responde mientras dibuja.*

El alumno inicia escribiendo los números de cinco en cinco empezando por el cero hasta el setenta y cinco, luego dibuja líneas rectas similares a los ejes de las coordenadas cartesianas que coincidan con los números antes colocados verticalmente, a continuación dibuja una barra vertical que coincide con el número setenta y cinco del eje de las "y" y le escribe el nombre de "Isabel", al lado dibuja otra barra un poco más grande que sobrepasa las cantidad de setenta y cinco y le coloca el nombre de "Eva".

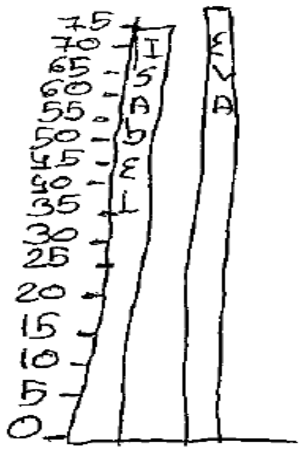


Figura 5.42 Diagrama construido en el formulario 2. Alumno 06.

Una vez termina el dibujo, la entrevistadora le pregunta que según su dibujo cuál de las dos ha ahorrado más y el alumno responde que ha sido Eva.

- *Entrevistadora: ¿Ya está? Según tienes aquí en el diagrama ¿Cuál ahorró más, Eva o Isabel?*
- *Alumno 06: Eva.*
- *Entrevistadora: Eva, muy bien.*

El alumno hace un diagrama cualitativo, pero no integra las relaciones del enunciado, además en este formulario comete el error de inversión en el diagrama.

5.6.3 Formulario 3

A continuación del formulario 2 la entrevistadora le presenta el formulario 3, que contiene tres soluciones para el problema 1, que han hecho otros alumnos en un primer acercamiento en forma de diagramas, para que elija cuál de las tres soluciones se acerca o se parece más al diagrama que él ha dibujado. El alumno 06 pregunta si debe señalar cuál es el tren, la entrevistadora le advierte que más tarde lo debe señalar, pero que antes indique cuál de los diagramas se justa al que él ha hecho, no hay ninguno parecido.

- *Entrevistadora: Mira ahora te presento unos diagramas que han hecho otros alumnos, ¿Cuál de estos diagramas crees que se ajusta, recuerdas* *el tren y de los sesenta y cuatro pasajeros? ¿Cuál crees que se ajusta al que tú has hecho?*

- *Alumno 06: ¿El autobús, cuál es?*
- *Entrevistadora: Ahora tú le vas a poner los datos que le hace falta. Pero ¿Cuál de ellos se ajusta más al que tú has hecho? ¿Cuál se parece? o ¿No hay ninguno parecido?*

Una vez escucha que la entrevistadora le vuelve a preguntar sobre cuál de los diagramas se ajusta más al que él ha hecho, el alumno elije el diagrama "b". La entrevistadora le pregunta sobre los datos que le faltarían a ese diagrama. El alumno señala al rectángulo marcado con los sesenta y cuatro pasajeros como los que van en el tren y el otro lo señala y la entrevistadora lo interrumpe para decirle que lo escriba en el papel. El alumno permanece en silencio mientras escribe los datos.

- *Alumno 06: Creo que el "b".*
- *Entrevistadora: El "b" ¿se parece al que tú has hecho? Y ¿qué dato le faltaría allí para que se ajuste al enunciado del problema?*
- *Alumno 06: Ése (el alumno señala el rectángulo que tiene señalado como los sesenta y cuatro pasajeros) es el tren y ese es el ...(la entrevistadora interrumpe y le dice)*
- *Entrevistadora: Pónselo, lo que hace falta.*
- *Alumno 06: no responde, sólo escribe en el diagrama "b" las palabras "tren" y "autobús".*

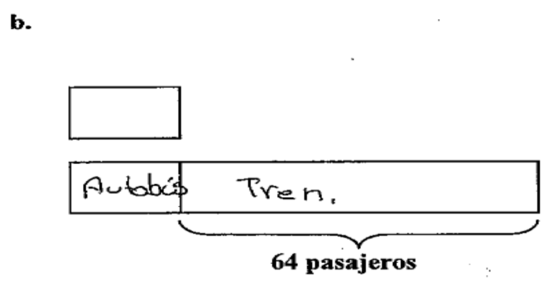


Figura 5.43 Diagrama elegido. Alumno 06.

El alumno 06 escribe en el rectángulo menor inferior la palabra "autobús" y en el rectángulo mayor inferior la palabra "tren" y omite o deja sin cantidad al rectángulo pequeño superior del diagrama. La entrevistadora le pregunta sobre el rectángulo pequeño superior qué representaría. El alumno dice que son los pasajeros y la entrevistadora le pregunta que los pasajeros del autobús. El alumno 06 responde con la cabeza que sí. La entrevistadora le pregunta del porque no podría ser el diagrama "a".

- *Ese es el autobús y ese el tren. ¿Y esto que sería?*
- *Alumno 06: El número de pasajeros*
- *Entrevistadora: ¿En el autobús?*
- *Alumno 06: responde con la cabeza que sí.*
- *Entrevistadora: Y ¿Por qué no puede ser este? (la entrevistadora señala el diagrama "a").*

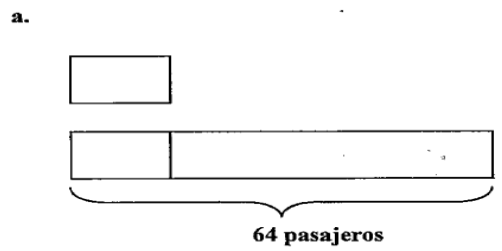


Figura 5.44 Diagrama "a" en el formulario 3. Alumno 06.

El alumno responde que el diagrama "a" no podría ser porque no tienen la misma cantidad de pasajeros. El tren tiene más que el autobús. La entrevistadora le pregunta sobre qué datos faltarían en ese diagrama y el alumno 06 responde que faltarían los datos del autobús y replica que no tienen el mismo número de pasajeros.

- *Alumno 06: Porque he puesto que el tren tiene más pasajeros que el autobús, no que sean iguales.*
- *Entrevistadora: ¿Y aquí que faltaría? (la entrevistadora se refiere al diagrama "a") ¿qué dato le faltaría, para que no se pueda ajustar?*

- *Alumno 06: ¿La del autobús? Que no tiene el mismo número de pasajeros que el tren.*
- *Entrevistadora: Vale.*

No hay registro del porqué no podría ser el diagrama “c”. Observamos que el alumno 06 toma el diagrama “b” y le coloca los datos como parte-parte y no reconoce que podría ser el diagrama “a” como parte-todo.

5.6.4 Formulario 4

A continuación del formulario 3, la entrevistadora le presenta el formulario 4 que contiene un problema compuesto enunciado de forma gráfica con la ayuda de un diagrama de bandas rectangulares, para que halle el valor de las incógnitas presentes en el diagrama.

- *Entrevistadora: Mira, ahora te muestro este diagrama para que encuentres el valor de “x” y de “y”.*
- *Alumno 06: No responde. Hace silencio mientras escribe sobre el diagrama.*

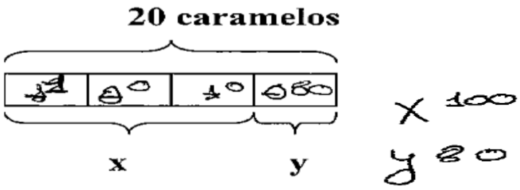


Figura 5.45. Valores de las incógnitas en el formulario 4. Alumno 06.

El alumno rellena los rectángulos del diagrama con números. La entrevistadora al observar que el alumno 06 escribe algunos números dentro de los rectángulos del diagrama, le dice que no comprende cuál es el valor de las incógnitas. El alumno responde que “x” vale doscientos y cuando va a decir el valor de “y” se da cuenta que se ha equivocado y rectifica su respuesta. La entrevistadora le pregunta sobre la cantidad de caramelos que hay en total con la finalidad de que tome en cuenta que los números que ha dicho son muy grandes comparados con el valor total del diagrama. El alumno responde que veinte, pero insiste en colocar números en cada rectángulo sin importar la cantidad numérica del diagrama.

- *Entrevistadora: No comprendo el valor, ¿cuál es? El de "x" y el de "y"*
- *Alumno 06: El de "x" doscientos porque aquí van tres números y el de la "y" es una cifra por lo tanto… no, me he equivocado.*
- *Entrevistadora: ¿Cuántos caramelos hay en total?*
- *Alumno 06: Veinte.*
- *Entrevistadora: Veinte.*
- *Alumno 06: La "x" es más grande que "y".*
- *Alumno 06: hace silencio por unos segundos, mientras observa el diagrama y escribe otra cantidad.*

El alumno se mantiene en silencio mientras observa el diagrama y escribe otra cantidad que es ininteligible, pues ha escrito un número encima del otro. La entrevistadora le pregunta que cómo ha encontrado esos valores. El alumno responde que como "x" es más grande que "y", la "x" vale cien y a cien le ha restado los veinte caramelos y le da por resultado ochenta que es el valor de "y". La entrevistadora le pregunta que de dónde ha salido el número "cien". El alumno responde que al ser el mayor número le ha restado el número menor y le resulta la cantidad que busca que sería "y" en este caso. La entrevistadora le pide que escriba el valor de las incógnitas.

- *Entrevistadora: ¿Cómo hiciste para encontrar eso?*
- *Alumno 06: Pues, como la "x" es más grande que la "y" he restado, he buscado un número que se ajuste a la operación y he restado cien menos ochenta.*
- *Entrevistadora:¿De dónde sale el cien?*
- *Alumno 06: Porque al ser el mayor número he pensado, que si le resto un número menor me puede salir la cantidad.*
- *Entrevistadora: Vale escribe el valor de "x" y el de "y".*

- *Alumno 06: No responde. Hace silencio mientras escribe los valores de las incógnitas.*
- *Entrevistadora: Muy bien.*

El alumno 06 hace silencio mientras escribe el valor de “x” e “y” en el papel.

Observamos que el alumno 06 interpreta que en el diagrama del formulario 4 tiene que rellenar cada rectángulo con una cantidad, ya sea unidad decena o centena y que como la “x” tiene tres rectángulos, pues tiene que ser un número con tres cifras y ese número sería el “cien” y de ese modo encontrar el valor de “y” que resulta de restarle los veinte caramelos a cien.

5.6.5 Formulario 6

Una vez termina con el formulario cuatro la entrevistadora le presenta el formulario 6, dejando el formulario 5 para último. El formulario 6 consta de otro diagrama para que halle el valor de las incógnitas.

- *Entrevistadora: Muy bien te muestro este.(la entrevistadora se refiere al formulario 6).*
- *Alumno 06: No responde (observa el diagrama por unos segundos e inicia a rellenar los rectángulos de diagrama con números).*

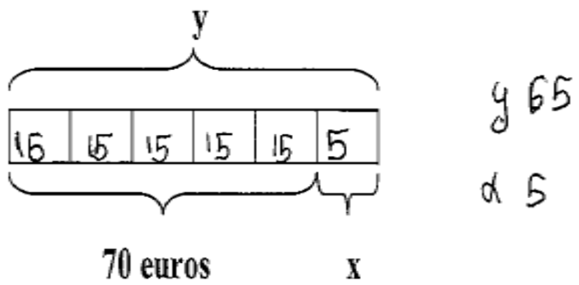


Figura 5.46 Valores de las incógnitas del formulario 6. Alumno 06.

El alumno rellena los cinco primeros rectángulos con el número quince y el que corresponde a la “x” lo rellena con el número cinco. La entrevistadora le pregunta que de dónde ha salido ese quince y el alumno responde que al ser la “y” cinco veces más grande ha buscado un número que se ajuste a la operación que ha pensado, la entrevistadora le pregunta cuál es esa operación y responde que la suma de quince cinco veces y que ha hallado el valor de “y” que sería cinco.

- *Entrevistadora: Aquí… ¿de dónde salió ese quince?*
- *Alumno 06: Porque al ser la “y” en el diagrama cinco veces más grande que la “x”, he buscado un número que se ajuste a la operación que he pensado.*
- *Entrevistadora: Y ¿qué operación has pensando?*
- *Alumno 06: Pues quince más quince, más quince, más quince, y he hallado la “x” que sería cinco.*
- *Entrevistadora: ¿Entonces, este sería el valor de “y” y el de “x”?*
- *Alumno 06: responde con la cabeza que sí..*

Observamos que el alumno conserva la misma manera de encontrar el valor de las incógnitas. Trata de amoldar cualquier cantidad numérica al diagrama.

5.6.6 Formulario 5

Una vez termina con el formulario 6 se le presenta el último de los formulario, el formulario 5 para que encuentre el valor de las incógnitas.

- *Entrevistadora: Este sería el último (la entrevistadora se refiere al formulario 5) igualmente encuentra el valor de “x” y de “y”.*
- *Alumno 06: No responde (hace silencio mientras trata de encontrar los valores).*

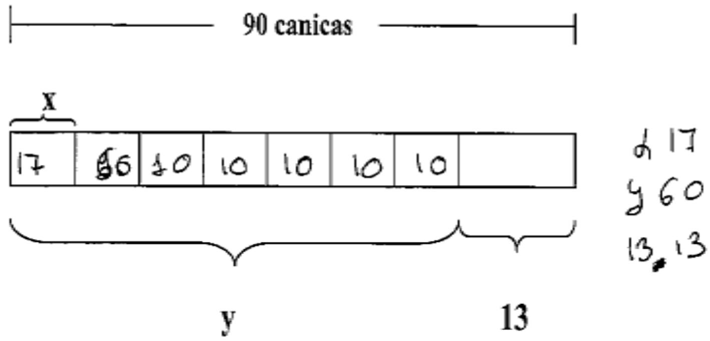


Figura 5.47 Valores de las incógnitas en el formulario 5. Alumno 06.

El alumno rellena los rectángulos con números diferentes y escribe los valores de "x" e "y". La entrevistadora le pregunta cómo ha encontrado esos valores y el alumno responde que a los noventa le restó trece y ha buscado un número que se ajuste a la operación y éste número sería el "diez". Al ver la entrevistadora que continúa con la idea de rellenar los rectángulos con números sin importar el diagrama y las relaciones numéricas del mismo, le interrumpe y le pregunta sobre el "trece coma trece" de dónde salió y el alumno aclara que no es "trece coma trece" que es "trece igual a trece".

- *Entrevistadora: ¿Cómo has encontrado el valor de "x"?*
- *Alumno 06: Pues de noventa le resto trece y luego he buscado un número que se ajuste también a la operación que sería el diez y luego la "x" y lo que me sobra... (interrumpe la entrevistadora).*
- *Entrevistadora: Trece coma trece ¿dónde salió?*
- *Alumno 06: Ha vale trece igual a trece.*
- *Entrevistadora: Eso es todo. Gracias.*

El alumno 06 en general tuvo una competencia baja en cuanto a dibujar e interpretar un diagrama. En el formulario 1 y 2 se apoya de una escala numérica para hacer el diagrama, pero no lo integra con los datos que aparecen en el enunciado del problema, hace un diagrama parecido en ambos formularios, la expresión "5 veces tantos como" la interpreta como "5 veces más", mantiene un pensamiento aditivo, hace un diagrama de comparación aditiva y no utiliza la relación parte-todo. En el formulario 3 elije un diagrama y coloca las cantidades como parte-parte, no es capaz de asimilar su dibujo con los diagramas presentados. Interpreta cada cosa por separado no los considera como dos barras, mientras que en el formulario 1 y 2 hace dos barras. En el formulario 4, 5 y 6 el alumno 06 interpreta que en los diagramas debe rellenar todos los rectángulos sin importar si las cantidades son iguales o no, solo debe ajustar las cantidades al diagrama y no al revés. Se observa que ha utilizado los diagramas presentados como tableros de valores de posición del sistema decimal y los interpreta como posiciones, es decir interpreta los diagramas como casilleros para colocar cifras.

5.7 Alumna 07

La alumna 07 tiene 12 años y cursa el primer año de ESO, no es repetidora, según su profesor de curso es una alumna "regular" en la asignatura de matemática.

5.7.1 Formulario 1

En primer lugar se le presenta el formulario 1 para que rellene sus datos y a continuación haga un diagrama que represente los datos del enunciado del problema 1. Mientras la alumna observa el problema, la entrevistadora le pregunta si ha utilizado diagramas en clases anteriores de matemáticas, la alumna responde que no había escuchado anteriormente la palabra "diagramas", la entrevistadora le explica que un diagrama es un dibujo, que recuerde si ha hecho algún dibujo o algo parecido para representar un problema, y la alumna expresa que los ha utilizado cuando hace problemas con su padre para poner elementos juntos y para separarlos, la entrevistadora le insiste en que dibuje. La alumna se encuentra desconcertada y repite que no sabe cómo hacer un diagrama que represente ese problema, además que no sabe sobre la frase "4 veces tantos como en un autobús" y que en el enunciado no aparece lo del autobús, expresa que no sabe qué dibujar. La entrevistadora le pregunta sobre qué datos le hacen falta y la alumna responde que hace falta el dato del autobús. La entrevistadora le recomienda que lea nuevamente el enunciado con la intensión de que la alumna aclare sus dudas. La alumna con la ayuda de la entrevistadora vuelve a leer el enunciado, una vez termina de leer, la entrevistadora le guía diciéndole que represente los datos que dicen en el enunciado como por ejemplo los sesenta y cuatro pasajeros que dice que van en el tren y le incita a dibujar. La alumna menciona que podría dibujar cuatro muñequitos y la entrevistadora le dice que está bien. La alumna vuelve y expresa sus dudas y pregunta si puede dibujar el tren, la entrevistadora le dice que lo que ella considere que pueda representar los datos antes mencionados. La alumna hace silencio por unos segundos mientras dibuja una figura que representa los pasajeros y escribe sobre la misma: "x 64", a continuación hace dos dibujos alusivos a la temática del enunciado (un tren y un autobús), empieza dibujando el tren y luego el autobús y debajo coloca algunas frases que aparecen en el enunciado del problema.

- *Entrevistadora: Primero pon tu nombre allí, la fecha que es veinticinco la edad y el curso, muy bien Omaima, ahora vas a leer el problema número uno y me vas a mostrar cómo dibujas un diagrama, que represente las cantidades presentes en ese problema.*
- *Alumna 07: Vale. ¿Lo dibujo?*
- *Entrevistadora: Si dibuja, haz hecho algún diagrama antes, lo has utilizado en matemáticas, en otras clases, un diagrama, un dibujo…*
- *Alumna 07: Es que nunca había escuchado antes, la palabra diagrama.*
- *Entrevistadora: ¿No? Es como un dibujo, pero no has utilizado en otro, algo para representar algo que…*
- *Alumna 07: Sí, en algunos problemas con mi padre.*
- *Entrevistadora: ¿Pero, para qué lo has utilizado?*
- *Alumna 07: Para por ejemplo, para separarlo y luego hacerlo todo.*
- *Entrevistadora: Bueno trata de hacer un dibujo o un diagrama, que represente esa relación…*

- *Alumna 07: Es que no sé, es que si me dice cuatro veces tantos pasajeros como un autobús… y no me da lo del autobús, no sé.*
- *Entrevistadora: ¿Qué más necesitarías de otro dato?*
- *Alumna 07: Pues, el autobús.*
- *Entrevistadora: Lo que necesites.*
- *Alumna 07: No sé cómo hacerlo.*
- *Entrevistadora: ¿No? Un dibujo que me represente los pasajeros que van en el tren, van en el autobús, ¿cómo lo harías?*
- *Alumna 07: Pues, pondría cuatro muñequitos…*
- *Entrevistadora: Muy bien ponlo, haz cómo representarías eso.*
- *Alumna 07: Es que no estoy segura si cuatro son los pasajeros que viajan, no sé, no estoy segura.*
- *Entrevistadora: Lee nuevamente la frase…En un tren viajan 4 veces…*
- *Alumna 07: Tantos pasajeros como en un autobús.*
- *Entrevistadora: Y ya te da el dato del tren, ¿Cuántos viajan en el tren?*
- *Alumna 07: Sesenta y cuatro pasajeros.*
- *entrevistadora: Sesenta y cuatro pasajeros.*
- *Alumna 07: Entonces, sería sesenta y cuatro por cuatro.*
- *Entrevistadora: Vale.*
- *Alumna 07: ¿Y ahora, qué hago?*
- *Entrevistadora: Hazme un dibujo que represente eso, sesenta y cuatro, no necesariamente sesenta y cuatro personas, algo que me represente eso.*
- *Alumna 07: ¿Hago el tren?*
- *Entrevistadora: Lo que tú quieras representar… los datos de ese enunciado.*

- *Alumna 07: No responde (hace silencio por unos segundos) Es que no sé…*

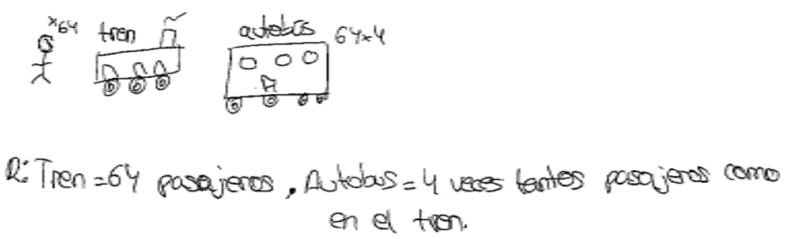


Figura 5.48 Diagrama construido en el formulario 1. Alumna 07.

La entrevistadora a modo de aclaración le pide que le coloque a cada dibujo el nombre de lo que representa.

- *Entrevistadora: ¿Cuál representa el autobús?*
- *Alumna 07: Este el autobús (la alumna señala el segundo dibujo)*
- *Entrevistadora: Pues, ponle tren, autobús. Vale. ¿Aquí cuántos van (la entrevistadora se refiere a los pasajeros del tren) cuántos pasajeros?*
- *Alumna 07: Eh…sesenta y cuatro.*
- *Entrevistadora: Ponlo.*
- *Alumna 07: No responde (hace silencio mientras escribe sobre el papel).*
- *Entrevistadora: Ya, bien.*

Observamos que la alumna 07 mantiene la duda en todo momento sobre lo que es un diagrama y sobre lo que debe dibujar. No dibuja diagrama, hace un dibujo que hemos denominado cualitativo-figurativo, que son aquellos dibujos alusivos a la temática del problema.

5.7.2 Formulario 2

Una vez termina con el formulario 1, la entrevistadora le presenta el formulario 2 para que haga un dibujo que represente el enunciado del problema 2. La alumna observa el enunciado y replica que es la palabra "tanto" la que no le queda claro lo que significa, la entrevistadora para guiar la entrevista le pregunta si esa palabra le suena a "más" o a "menos", la alumna contesta que le suena a "más", e inicia a escribir datos que están en el enunciado y escribe la multiplicación "75x5 = Eva". Esta expresión nos indica que ha cometido error de inversión.

- Entrevistadora: Ahora te presento este otro, igualmente dibuja un diagrama para representar ese problema.
- Alumna 07: Es que lo de "tanto" no lo tengo claro.
- Entrevistadora: ¿Te suena a más o a menos?
- Alumna 07: A más.
- Entrevistadora: Vale.
- Alumna 07: No responde (hace silencio mientras escribe en el papel).

Figura 5.49 Formulario 2. Alumna 07.

La entrevistadora observa que la alumna tiene dificultad para hacer el diagrama y decide no insistirle a que dibuje, puesto que la alumna manifiesta que lo que ha escrito es lo que se le ocurre.

- Alumna 07: Es lo que se me ocurre.
- Entrevistadora: Pues, muy bien.

Observamos que tanto en este problema como en el anterior la alumna 07 mantiene la confusión sobre la palabra "tantos", además de no saber qué datos debe representar en un diagrama. Por lo que además de cometer error de inversión en el problema 2, la alumna 07 no dibuja diagrama en este formulario 2.

5.7.3 Formulario 3

A continuación del formulario 2, se le presenta el formulario 3 para que elija entre las tres respuestas en forma de diagramas. La alumna observa por unos segundos y señala el diagrama "b".

- *Entrevistadora: Te muestro, recuerda este del autobús, te muestro unos diagramas que han hechos unos de tus compañeros ¿cuál de estos diagramas, el "a", el "b" o el "c", crees que se ajuste a los datos que hay en el problema?*
- *Alumna 07: No responde (hace silencio mientras observa las tres respuestas y dice…) Éste (la alumna señala el diagrama "b").*

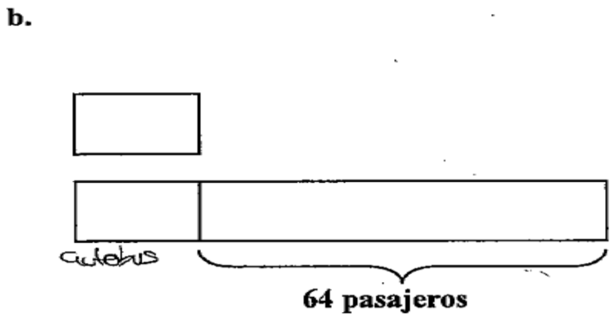


Figura 5.50 Diagrama elegido. Alumna 07.

La entrevistadora le pregunta sobre qué datos le faltarían a ese diagrama para completar las relaciones del enunciado del problema, la alumna responde que faltan los datos del autobús. La entrevistadora le pregunta que cuál trozo del diagrama corresponde al autobús, la alumna señala el rectángulo pequeño unido al que tiene la expresión "64 pasajeros" la entrevistadora le pide que lo escriba en el papel, la alumna interpreta que tiene que resolver el problema y le pregunta a la entrevistadora si lo tiene que resolver, la entrevistadora le dice que no, sólo debe colocar en la figura elegida los datos que hacen falta. La alumna replica que no puede colocar los datos del autobús porque en el enunciado no están, por lo que la entrevistadora le señala que los datos que tiene el diagrama son los datos del tren y la otra parte que hace falta a qué dato corresponde, la alumna indica que es la parte de los pasajeros del autobús. La entrevistadora le pide que escriba la palabra "autobús" donde corresponda en el diagrama. Una vez escrito, la entrevistadora a manera de aclaración, le pregunta si considera que los pasajeros del autobús son menos que los que viajan en el tren y la alumna responde que sí, que son menos, pero al instante duda diciendo que no son menos los pasajeros del autobús, la alumna se nota desconcertada y confiesa que no sabe, porque ella es muy mala en matemáticas, por lo que la entrevistadora le dice que no se preocupe, con la intensión de que se sienta relajada y pueda continuar con la entrevista.

- *Entrevistadora: ¿Qué datos le faltaría allí para completar las relaciones del enunciado?*
- *Alumna 07: Eh… el autobús.*
- *Entrevistadora: ¿Cuál sería el autobús en ese caso?*
- *Alumna 07: Éste (la alumna señala el rectángulo pequeño en la misma figura donde está al rectángulo que tiene la expresión: "64 pasajeros")*
- *Entrevistadora: Ponle allí lo que le hace falta.*
- *Alumna 07: ¿Allí?*
- *Entrevistadora: Aquí… Ponle allí, éste sería qué cosa, ¿el tren?*
- *Alumna 07: Sí.*
- *Entrevistadora: Ponle los datos que te hacen falta*
- *Alumna 07: ¿Qué haga la operación?*
- *Entrevistadora: No, no, los datos que le hacen falta. Allí solamente está un dato ¿verdad? ¿Cual otro dato dices tú que le hace falta?*
- *Alumna 07: El del autobús.*
- *Entrevistadora: Vale*
- *Alumna 07: Pero, es que no me da los datos del autobús.*

- *Entrevistadora: Pero, aquí en este caso éste sería el tren y ¿cuál sería la parte que le corresponde al autobús?*
- *Alumna 07: Ésta (indica el rectángulo anteriormente señalado).*
- *Entrevistadora: Vale, pónsela allí señala y pon autobús. Ese sería el autobús, para ti en ese caso sería menos ¿no? El autobús.*
- *Alumna 07: No, sería más que…, no, menos sí, es que no sé…*
- *Entrevistadora: Hay…no te pongas nerviosa, tranquila.*
- *Alumna 07: Es que soy muy mala en matemáticas.*
- *Entrevistadora: No, no… no te preocupes. Vale. Bueno. ¿Y por qué no podría ser éste?*

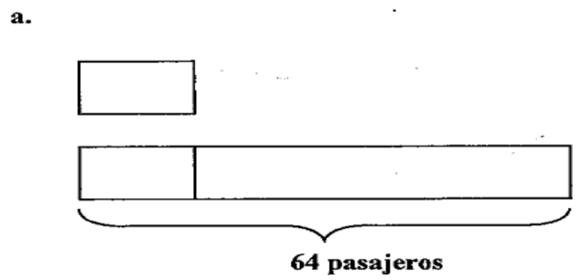


Figura 5.51 Diagrama "a" del formulario 3. Alumna 07.

La entrevistadora le pregunta por qué no podría ser el diagrama "a" y la alumna responde que no podría ser porque dice: "cuatro veces más" y el diagrama señala que hay sesenta y cuatro pasajeros solamente.

- *Alumna 07: Porque aquí dice que en el tren viajan sesenta y cuatro y se supone que estos datos no serían porque te dice que cuatro veces más.*
- *Entrevistadora: Vale.*

La entrevistadora no se percata de la respuesta de la alumna en el momento, pero al leer detenidamente podemos pensar que la alumna en ese momento estaba cometiendo error de inversión.

5.7.4 Formulario 4

A continuación le presenta el formulario 4 con un problema compuesto enunciado gráficamente a través de un diagrama de bandas rectangulares para que halle el valor de las incógnitas presentes en el diagrama. La alumna observa el diagrama y escribe los valores de las incógnitas, pero al instante se da cuenta que son erróneos y rectifica su respuesta.

- *Entrevistadora: Mira toma este diagrama, para que encuentres el valor de "x" y de "y" según los datos que están allí.*
- *Alumna 07: No responde (hace silencio mientras observa el diagrama y pregunta…) ¿Pues, lo escribo?*
- *Entrevistadora: Sí, escríbelo.*
- *Alumna 07: No responde (solo escribe dos cantidades y cree que está equivocada y dice…) No, perdón, perdón…*
- *Entrevistadora: No importa.*
- *Alumna 07: ¿Lo tacho?*
- *Entrevistadora: Sí.*
- *Alumna 07: Ah, vale, ya.*

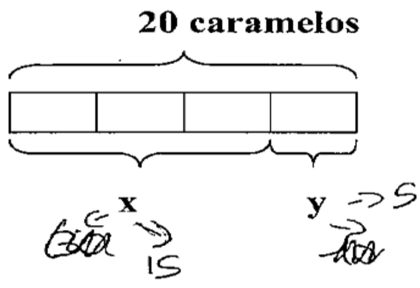


Figura 5.52 Valores de las incógnitas en el formulario 4. Alumna 07.

La entrevistadora le pregunta sobre cómo ha encontrado los valores de las incógnitas. La alumna en un principio responde que ha visto la mitad y así lo encontró, pero al preguntarle la entrevistadora sobre qué mitad, la alumna se nota nerviosa y manifiesta no poder explicar cómo lo hizo, la entrevistadora le dice que se tranquilice para ver si así ordena la idea y contesta cómo lo que ha hecho. La alumna toma su tiempo y responde que ha probado números y que ha visto que cada rectángulo del diagrama vale cinco y que sumando todo le resultó veinte.

- *Entrevistadora: Muy bien, como has encontrado el valor de "x" y de " y"*
- *Alumna 07: Pues como dice que hay veinte caramelos, voy viendo la mitad y lo saco.*
- *Entrevistadora: ¿Cómo la mitad?*
- *Alumna 07: Si por ejemplo, al principio pensaba que cada uno era diez, pero me he dado cuenta de que no, entonces pues….no sé cómo explicarlo*
- *Entrevistadora: Tranquila, piénsalo bien, que vas bien, piensa. ¿Cómo lo has hecho?*
- *Alumna 07: Pues he ido probando números por ejemplo al principio he hecho cinco y sumando salen veinte*
- *Entrevistadora: Ah vale, sumaste y salió veinte.*

Observamos que la alumna 07 encuentra los valores de las incógnitas, pero con dificultad puede explicar cómo lo hizo.

5.7.5 Formulario 6

Una vez termina con el formulario 4 la entrevistadora le presenta el formulario 6 para que halle el valor de las incógnitas presentes en otro diagrama. La alumna observa el diagrama y pregunta si los números que van dentro de los rectángulos del diagrama pueden ser diferentes. La entrevistadora le dice que ya se le está dando un valor numérico y que debe encontrar los trozos del diagrama que no tienen valor numérico. La alumna replica que no sabe cómo hacerlo, porque al sumar algunos números le puede dar setenta, la entrevistadora le interrumpe y le pregunta a qué números está refiriéndose y la alumna inicia diciendo números diferentes y que sumados le dan setenta. Al ver que la alumna sigue confusa, la entrevistadora le indica que en el diagrama los rectángulos son iguales y que las cantidades que van dentro también. La alumna mantiene la confusión y manifiesta no saber hacerlo y la entrevistadora decide no seguir insistiendo por considerar que podría terminar en informarle la respuesta.

- *Entrevistadora: En este formulario 6, es parecido lo que tienes que hacer al anterior, encuentra igualmente el valor de" x" y de "y".*
- *Alumna 07: No responde (la alumna observa el diagrama por unos segundos y dice…) ¿Pueden ser los números que hay aquí diferentes? ¿No?*
- *Entrevistadora: Pues, encuentra el valor, de aquí hasta ahí te está mostrando que hay setenta ya sólo te necesitas saber cuánto vale este sólo (la entrevistadora señala lo que corresponde a la "x") y cuánto todo (se refiere a el valor de "y" que sería todo lo demás).*
- *Alumna 07: No sé.*
- *Entrevistadora: ¿No sabes? piensa un poquito.*
- *Alumna 07: Yo se que sumando unos número suman setenta, pero ¿aquí? Porque tú no sabes lo…*
- *Entrevistadora: Sumando ¿qué números?*
- *Alumna 07: Por ejemplo aquí, veinte más treinta más diez, que son treinta más veinte que son cincuenta más diez que son sesenta y más diez que son setenta.*
- *Entrevistadora: Sí, pero bueno aquí te está indicando que son iguales.*
- *Alumna 07: Es que no tengo idea.*
- *Entrevistadora: ¿No? Bueno.*

5.7.6 Formulario 5

A continuación del formulario 6, la entrevistadora le presenta el formulario 5, para que halle el valor de “x” e “y”. La alumna observa el diagrama y la entrevistadora interviene para preguntarle lo que haría para encontrar los valores de las incógnitas. La alumna sigue observando y responde que no tiene idea cómo encontrar los valores e “x” e “y”. La entrevistadora le dice que no pasa nada y que eso es todo. La entrevistadora se da cuenta que la alumna está nerviosa y decide no insistir para no hacerla sentir presionada a resolver el formulario.

- *Entrevistadora: observa éste (la entrevistadora le presenta el formulario 5).*
- *Alumna 07: No responde (hace silencio mientras observa el diagrama).*
- *Entrevistadora: ¿Qué harías para encontrar el valor de “x” y de “y”?*
- *Alumna 07: Pues, no tengo ni idea*
- *Entrevistadora: ¿No? Bueno, no pasa nada, ya está.*

Observamos que la alumna 07 se mantuvo nerviosa todo el momento de la entrevista, muy insegura de sus respuestas y del qué hacer. En el formulario 1 no dibuja diagrama, hace un dibujo cualitativo-figurativo, alusivo a la temática del enunciado del problema. En el formulario 2 sólo escribe los datos presentes en el enunciado del problema2, no dibuja diagrama ni resuelve el problema. En el formulario 3 elije el diagrama “b” lo interpreta como la parte y el todo. No es capaz de asimilar el diagrama como parte-parte. En el formulario 4, encuentra los valores de las incógnitas tras cometer un error de cálculo rectifica y halla el valor de “x” e “y”. En el formulario 5 y 6 manifiesta no saber cómo se hace y no encuentra el valor de las incógnitas.

5.8 Alumno 08

El alumno 08 tiene 13 años cursa el segundo de ESO, según su profesor de curso es un alumno que mantiene buenas calificaciones en la asignatura de matemáticas, se muestra tímido en clases y está animado a colaborar con la entrevista.

5.8.1 Formulario 1

Primeramente se le presenta el formulario 1 para que rellene sus datos personales y para que lea el enunciado del problema 1 y dibuje un diagrama que represente los datos presentes en el enunciado. El alumno observa el enunciado del problema y pregunta si lo lee en voz alta, la entrevistadora le advierte que como él se sienta más cómodo, el alumno lee en voz baja y pregunta si hace los cálculos, la entrevistadora le dice que lo que considere necesario, pero que recuerde que sólo se le está pidiendo que haga un diagrama, el alumno hace silencio mientras hace algunos cálculos sobre el papel.

- *Entrevistadora: Vas a poner tu nombre, la edad, el curso…Bien, seguidamente vas a leer el problema número uno y me vas hacer un dibujo o un diagrama que me represente las relaciones entre los datos que están en ese problema.*
- *Alumno 08: ¿Lo leo en voz alta?*
- *Entrevistadora: No, como tú quieras, si te concentras más leyendo en voz alta.*
- *Alumno 08: No responde (lee en voz baja el problema). Hago las cuentas entonces, ¿no? para resumir.*
- *Entrevistadora: Como tú creas, sólo necesito un diagrama que represente eso.*

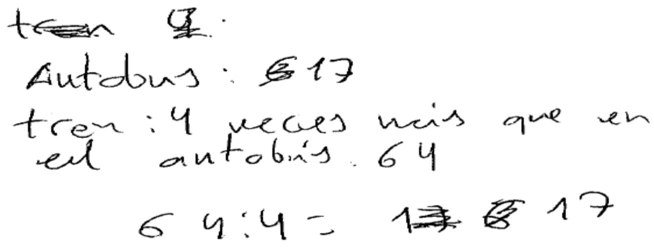

~~tren~~ 4.
Autobus: ~~8~~ 17
tren: 4 veces más que en el autobús. 64
64:4 = ~~13~~ ~~8~~ 17

Figura 5.53 Formulario 1. Alumno 08.

Tras hacer algunos cálculos el alumno 08 manifiesta haber terminado y no sabe lo que quiere decir la palabra diagrama. La entrevistadora le pregunta si ha utilizado diagramas anteriormente en clases de matemáticas, el alumno responde no haber utilizado diagramas antes, manifiesta no recordar el haber utilizado diagramas.

- *Alumno 08: Ya está. Es que no sé a qué se refiere cuando dice "diagrama".*
- *Entrevistadora: ¿Has utilizado diagrama anteriormente en clase de matemáticas?*
- *Alumno 08: No*
- *Entrevistadora: No, no recuerdas haber utilizado ningún diagrama.*
- *Alumno 08: No.*

La entrevistadora al observar que el alumno no sabe lo que es un diagrama le dice que se trata de un dibujo y le pregunta sobre qué datos presentes en el enunciado podría utilizar para hacer un dibujo. El alumno sigue confundido y expresa que no se le ocurre qué datos podría utilizar para hacer un dibujo. La entrevistadora insiste y le pregunta cómo representaría ese problema con un dibujo. El alumno manifiesta claramente no saber cómo hacerlo. La entrevistadora le dice que haga algo que represente los datos del problema. El alumno observa en silencio el problema, tacha la respuesta encontrada y coloca al lado el número "17" como la respuesta, y finalmente responde que no sabe cómo hacer el dibujo.

- *Entrevistadora: Es como un dibujo que me va a representar los datos que estén en el problema. ¿Qué dato tú crees que podrías hacer en un dibujo?*

- *Alumno 08: Pues… no se me ocurre.*
- *Entrevistadora: ¿Cómo tú representarías ese problema?*
- *Alumno 08: No lo sé.*
- *Entrevistadora: Haz algo que me represente esas cantidades que tienes allí.*
- *Alumno 08: No responde (el alumno 08 toma su tiempo observando el problema). No lo sé.*

La entrevistadora al ver que no dibuja le trata de preguntar sobre las operaciones que ha hecho y le advierte sobre un seis que ha colocado antes como respuesta a los pasajeros que viajan en el autobús, no está claro de dónde salió. El alumno responde que había hecho mal la división de 64:4, lo tacha y coloca el número "17" como la respuesta a los pasajeros del autobús. La entrevistadora se da cuenta de que ha cometido error de cálculo le advierte sobre si ha rectificado la respuesta y el alumno responde que sí ha rectificado. La entrevistadora no continúa con ese formulario.

- *Entrevistadora: Ese seis de ¿dónde salió?*
- *Alumno 08: ¿Ese seis? Que había hecho mal la división.*
- *Entrevistadora: ¿Has rectificado la división?*
- *Alumno 08: Sí.*
- *Entrevistadora: Vale, bueno.*

El alumno en este formulario 1 no dibuja diagrama sólo resuelve el problema y comete error de cálculo.

5.8.2 Formulario 2

A continuación del formulario 1 se le presenta el formulario 2, para que haga un diagrama que represente los datos del enunciado del problema 2. El alumno pregunta si se trata de algo parecido a un dibujo, la entrevistadora le responde que es como un dibujo. El alumno pregunta si podría ser una tabla, la entrevistadora le dice que dibuje lo que crea mejor. El alumno hace silencio mientras escribe el nombre de "Eva" y el de "Isabel", a continuación calcula 75:5 y ese resultado lo coloca debajo del nombre de Eva. El alumno pregunta si cuando dice: "cinco veces", se refiere a "cinco veces más", la entrevistadora le responde con gesto que sí.

- *Entrevistadora: Te muestro este otro,(la entrevistadora le presenta el formulario 2) para que hagas un diagrama que me represente los datos que están en el problema.*
- *Alumno 08: ¿Una especie de dibujo?*
- *Entrevistadora: una especie de dibujo.*
- *Alumno 08: ¿También puede ser una tabla?*
- *Entrevistadora: Pues, como tú quieras.*
- *Alumno 08: Con cinco veces se ahorra…, se refiere a cinco veces más que ella ¿no?*
- *Entrevistadora: sí.*
- *Alumno 08: No responde (hace silencio mientras escribe sobre el papel).*

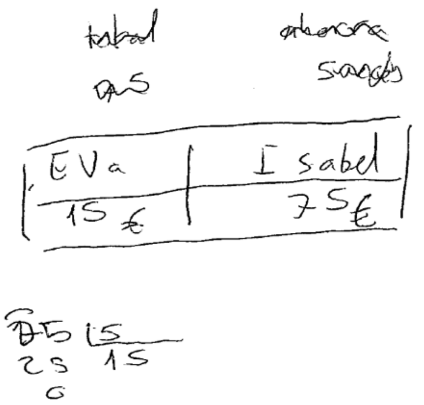


Figura 5.54 Diagrama del formulario 2. Alumno 08.

El alumno luego de hacer los cálculos, encierra en una caja los nombres de Eva e Isabel con las cantidades en euros que corresponden a cada una, esta caja la divide en cuatro partes y pregunta si es más o menos algo así lo que debía hacer. La entrevistadora para aclarar lo que ha hecho el alumno 08, le pregunta sobre qué es cada cosa que hay dentro de la caja. El alumno responde que son los quince euros que ha ahorrado Eva y los setenta y cinco de Isabel.

- *Alumno 08: Así más o menos.*
- *Entrevistadora: Vale, eso que… ¿éste es?*
- *Alumno 08: Eva que ahorra quince euros, Isabel setenta y cinco*
- *Entrevistadora: Vale, bueno.*

El alumno 08 no dibuja diagrama en el formulario 2, solo resuelve el problema correctamente.

5.8.3 Formulario 3

Una vez termina con el formulario 2 se le presenta el formulario 3, para que elija uno de los tres diagramas que han hecho otros alumnos en un primer acercamiento, que pueda representar al problema del formulario 2. El alumno observa por unos segundos y responde que el diagrama "c" es el que más se ajusta al problema 2. Y que sólo le faltarían los quince euros.

- *Entrevistadora: Mira ahora te muestro estos diagramas que han hecho tus compañeros anteriormente, ¿cuál de ellos tú crees que se ajuste más al enunciado de este problema y que dato le faltaría a ese diagrama que tú dices que se ajusta más?*
- *Alumno 08: Yo creo que es éste (el alumno señala el diagrama "c") y poner aquí quince euros.*

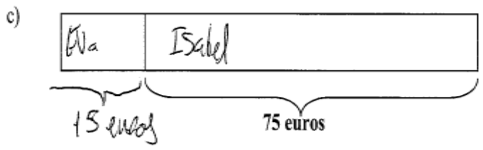


Figura 5.55 Diagrama elegido. Alumno 08.

La entrevistadora le dice que lo escriba en el diagrama, el alumno escribe los quince euros en el trozo del diagrama más pequeño, la entrevistadora le pregunta que a quién corresponden los quince euros y el alumno responde que corresponden a Eva y el otro trozo de diagrama corresponde a Isabel.

- *Entrevistadora: Ponlo.*
- *Entrevistadora: Éste, entonces, sería el dato ¿para quién? (la entrevistadora señala el trozo de diagrama donde el alumno ha colocado los quince euros) Para cuál de las dos que han ahorrado ¿Para Eva o para Isabel?*
- *Alumno: Éste, para Eva (señala el trozo más pequeño del diagrama) y éste para Isabel (señala el trozo más grande del diagrama) ¿lo escribo?*
- *Entrevistadora: Sí.*

Tras haber señalado el diagrama "c" como el diagrama que más se ajusta al problema 2, la entrevistadora le pregunta que por qué no podría ser el diagrama "b". El alumno responde que faltaría la parte de Eva que es la parte del diagrama más pequeña que corresponde a los quince euros.

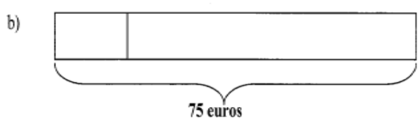


Figura 5.56 Diagrama "b" del formulario 4. Alumno 08.

- *Entrevistadora: A ver y éste (la entrevistadora le señala el diagrama "b") ¿por qué no podría ser?*
- *Alumno 08: Porque quince euros son menos que setenta y cinco tendría que ser la parte más pequeña, el rectángulo más pequeño para Eva que ahorra quince euros y setenta y cinco el más grande para Isabel.*

A continuación la entrevistadora le pregunta por qué no podría ser el diagrama "a", el alumno responde que no podría ser porque la parte que tiene los setenta y cinco euros en el diagrama debería ser la parte que corresponde a los quince euros, por ser la cantidad más pequeña.

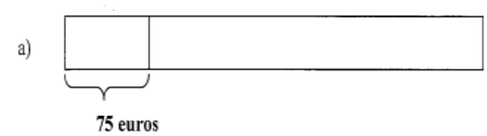


Figura 5.57 Diagrama "a" del formulario 4. Alumno 08.

- *Entrevistadora: Vale. Y éste (la entrevistadora le señala el diagrama "a") ¿por qué no puede ser?*
- *Alumno 08: Porque setenta y cinco es la parte más pequeña.*
- *Entrevistadora: Vale, muy bien.*

El alumno 08 interpreta el diagrama como parte-parte y no admite que pueda ser parte-todo.

5.8.4 Formulario 4

A continuación se le presenta el formulario 4 para que halle los valores de las incógnitas presentes en un problema compuesto enunciado gráficamente. El alumno observa el diagrama por unos segundos y dice que "el quince" sería el valor de la "x" y "cinco" sería el de "y", la entrevistadora le dice que lo escriba.

- *Entrevistadora: Ahora te muestro este diagrama para que me encuentres el valor de la "x" y de la "y"*
- *Alumno 08: la "x" quince caramelos y la "y" cinco.*
- *Entrevistadora: Anótalo.*
- *Alumno 08: ¿Dentro?*
- *Entrevistadora: Como tú quieras.*

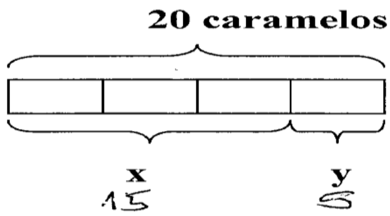


Figura 5.58 Valores de las incógnitas en el formulario 4. Alumno 08.

Mientras el alumno lo escribe la entrevistadora le pregunta cómo ha encontrado los valores de las incógnitas. El alumno dice que ha dividido veinte entre cuatro y así cada rectángulo vale cinco por lo que "x" vale quince e "y" vale cinco.

- *Alumno 08: Aquí mismo.(se refiere a escribirlo debajo de la "x" e "y").*
- *Entrevistadora: ¿Cómo lo has hecho?*
- *Alumno 08: Porque veinte entre cuatro sería cinco, entonces cada uno de estos vale cinco.*
- *Entrevistadora: Vale, perfecto.*

Observamos que el alumno 08 no tiene dificultad en encontrar los valores de las incógnitas en el formulario 4.

5.8.5 Formulario 5

Una vez termina con el formulario 4, la entrevistadora le presenta el formulario 5 para que halle el valor de las incógnitas presentes en otro diagrama. El alumno observa unos segundos el diagrama e inicia contando los rectángulos que hay en el diagrama y pregunta si puede hacer cálculos, la entrevistadora le dice que los que necesite hacer.

- *Entrevistadora: Mira éste formulario (le entrega el formulario 5) encuentra el valor de "x" y de "y".*
- *Alumno 08: ¿Puedo hacer cuentas?*
- *Entrevistadora: Si, haz lo que necesites.*
- *Alumno 08: No responde (hace silencio mientras hace cálculos). Pues, ya.*

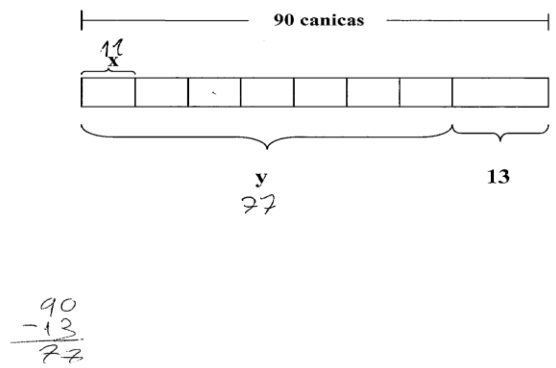


Figura 5.59 Valores de las incógnitas en el formulario 5. Alumno 08

El alumno escribe la resta de noventa menos trece y luego escribe debajo de la "y" el resultado de esa resta y expresa que "x" sería once, pues como hay un rectángulo que vale trece y todo es noventa, al restarle a noventa los trece le quedan setenta y siete, y setenta y siete entre los siete rectángulos resulta que cada rectángulo vale once. La entrevistadora le pide que escriba el valor de "x".

- *Entrevistadora: ¿Cuánto vale?*
- *Alumno 08: "x sería once caramelos, porque trece que ocupa éste trozo se lo quitas a noventa son setenta y siete, entonces setenta y siete entre siete cuadritos sería once.*
- *Entrevistadora: Ah, bueno, anótame cuánto vale la "x". "x" igual a once. Muy bien.*

El alumno es capaz de interpretar correctamente el diagrama del formulario 5 y encuentra los valores de las incógnitas.

5.8.6 Formulario 6

Para terminar le presenta el formulario 6 con otro diagrama para que halle el valor de las incógnitas presentes. El alumno 08 inicia contando los rectángulos que corresponden a los setenta euros y divide setenta entre cinco y ese resultado (catorce) lo escribe como el valor de "x", a continuación mentalmente suma esos catorce más los setenta y siete y escribe el resultado (ochenta y cuatro) como valor de "y". La entrevistadora al observar que el alumno lo tiene claro no le hace preguntas sobre cómo encontró los valores de las incógnitas.

- *Entrevistadora: Igualmente encuentra el valor de "x" y de "y".*
- *Alumno 08: no responde (hace silencio mientras encuentra los valores de las incógnitas).*

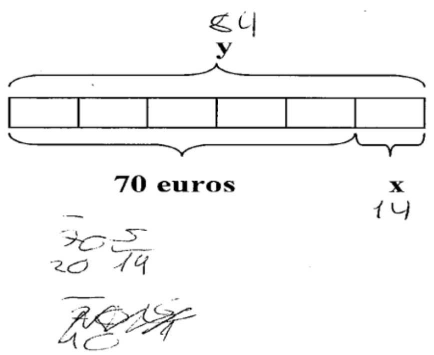


Figura 5.60 Valores de las incógnitas en el formulario 6. Alumno 08.

La entrevistadora, sin más, le dice que está muy bien y no le hace preguntas al respecto.

- *Entrevistadora: Muy bien.*

El alumno 08 en el formulario 1 y 2 no dibuja diagrama sólo resuelve el problema y en el primer problema comete error de cálculo. Asegura no haber utilizado diagramas anteriormente en clases de matemáticas. En el formulario 3 elije el diagrama "c", interpreta el diagrama como parte-parte. En el formulario 4, 5 y 6 el alumno interpreta correctamente los diagramas y encuentra los valores de las incógnitas. Cabe destacar que el alumno 08 no es capaz de dibujar diagramas, pero es capaz de interpretar correctamente los diagramas que se le presentan.

5.9 Alumna 09

La alumno 09 tiene 13 años y cursa el segundo año de ESO, según su profesor de curso es una alumna buena en matemáticas, es extrovertida, pero a la vez nerviosa. La alumna 09 está animada a colaborar con la entrevista.

5.9.1 Formulario 1

Primeramente le presenta el formulario 1 para que rellene sus datos personales y para que dibuje un diagrama que represente los datos del enunciado del problema 1. La entrevistadora le pregunta si ha utilizado diagramas anteriormente en clases de matemáticas, la alumna responde que no ha utilizado diagramas, pero expresa que los ha utilizado en primaria, pero hace mucho tiempo, y que no recuerda para qué ni cómo eran los diagramas. La entrevistadora le dice que no importa y la alumna hace silencio mientras dibuja unas coordenadas con escalas proporcionales, dibuja una barra vertical que hace coincidir con lo más alto del eje las "y" y escribe como la parte que representa los pasajeros del tren. La alumna se detiene y pregunta si debe resolver el problema o sólo representar el enunciado, la entrevistadora le dice que sólo debe representar el enunciado, la alumna vuelve a escribir sobre el papel, pero le queda la duda si debe encontrar la solución para poder representar los pasajeros del autobús u vuelve a preguntar si debe encontrar la solución, la entrevistadora le responde que no lo sabe, pero que si la necesita y para qué la necesita, la alumna no responde y continua y hace otra barra más pequeña que la primera y manifiesta haberse quedado atascada, no sabe continuar.

- *Entrevistadora: Primeramente pones tu nombre, el curso y la edad que tienes. Ahora vas a leer detenidamente el problema uno y me vas a mostrar cómo harías un diagrama que represente los datos que están en ese enunciado.*
- *Alumna 09: Vale.*
- *Entrevistadora: ¿Has utilizado diagramas antes, en clase de matemáticas?*
- *Alumna 09: No.*
- *Entrevistadora: No recuerdas haber utilizado diagramas.*
- *Alumna 09: No, hace mucho tiempo, pocas veces, en primaria.*
- *Entrevistadora: ¿Para qué lo habías utilizado? ¿Lo recuerdas?*
- *Alumna 09: Sí, pero para diagramas más sencillos, para representar… no sé, ya no recuerdo.*
- *Entrevistadora: Da igual.*
- *Alumna 09: No responde (hace silencio mientras observa y dibuja sobre el papel). (Después de un rato la alumna pregunta) ¿Pero, tiene que ser solucionando el problema o simplemente representando el enunciado?*
- *Entrevistadora: Representando el enunciado.*
- *Alumna 09: No responde y observa el dibujo que ha hecho (vuelve a preguntar) ¿Entonces, tengo que solucionarlo?*

- *Entrevistadora: No lo sé, ¿lo necesitas solucionar? ¿Para qué lo necesitarías solucionar?*
- *Alumna 09: No responde (hace silencio mientras dibuja). Es que no sé, me he quedado atascada.*

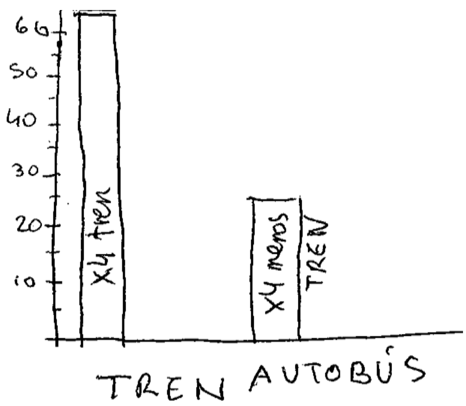


Figura 5.61 Diagrama construido en el formulario 1. Alumna 09.

La entrevistadora le pregunta sobre lo que representan las barras que ha hecho para ver si le ayuda a continuar con el dibujo, la alumna escribe dentro de la barra pequeña “x4 menos”

- *Entrevistadora: ¿Éste representa los del tren? (la barra grande) y éste los del autobús? (la barra pequeña)*
- *Alumna 09: Sí (hace silencio mientras escribe). Creo que ya está.*
- *Entrevistadora: Bueno, muy bien.*
- *Alumna 09: Es que no sé hacerlo de otra forma.*

La alumna 09 hace un diagrama cuantitativo con la ayuda de una escala numérica. Este tipo de diagrama lo hemos denominado D3.

5.9.2 Formulario 2

A continuación se le presenta el formulario 2 para que dibuje un diagrama que represente los datos del enunciado del problema.

- *Entrevistadora: Vas a hacer éste (le presenta el formulario 2). Léelo también, el número dos, vas a hacer un diagrama que represente los datos de ese enunciado.*
- *Alumna 09: No responde (hace silencio mientras dibuja y una vez dibuja dice) Sí, eso representa el enunciado.*

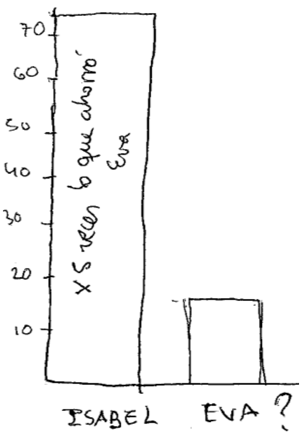


Figura 5.62 Diagrama construido en el formulario 2. Alumna 09.

La alumna sólo dibuja la parte de Isabel, la parte de Eva no dibuja barra y le escribe un signo de interrogación, por lo que la entrevistadora le dice que cuánto sería la parte de Eva en el diagrama, sería mayor o menor que la barra que ha dibujado para Isabel, la alumna responde que sería menor, la entrevistadora le sugiere que dibuje algo que represente la parte de Eva y la alumna dibuja otra barra más pequeña al lado de la de Isabel.

- *Entrevistadora: Vale y ¿cuánto sería lo de Eva? No en la solución si no allí cómo lo representarías, lo de Eva con respecto a lo de Isabel, ¿un diagrama mayor, un diagrama menor?*
- *Alumna 09: Menor. ¿Dibujo el diagrama?*
- *Entrevistadora: Dibuja algo que represente la parte de Eva.*
- *Alumna 09: No responde mientras dibuja la parte de Eva.*
- *Entrevistadora: Vale. Esa es la parte de Eva.*

La alumna mantiene el dibujo con forma de diagramas estadísticos y no comete error de inversión.

5.9.3 Formulario 3

Una vez termina con el formulario 2 se le presenta el formulario 3 que contiene tres soluciones para el problema 2, para que elija una de las tres respuestas, la que más se ajuste a la respuesta que ha dado anteriormente a ese problema. La alumna observa por unos segundos las tres respuestas y expresa que es el diagrama "b".

- *Entrevistadora: Te muestro esto que ha dibujado uno de tus compañeros anteriormente ¿cuál de ellos crees que se ajusta al que tú has hecho? ¿Y qué dato le faltaría?*
- *Alumna 09: No responde (hace silencio mientras observa los tres diagramas). Yo creo que es el "b".*

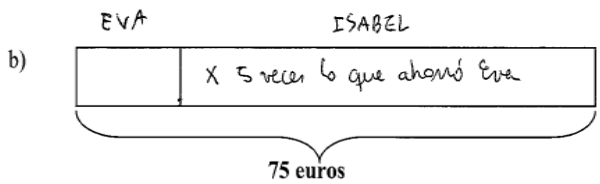


Figura 5.63 Diagrama elegido. Alumna 09.

La entrevistadora le pregunta sobre qué datos le harían falta a ese diagrama para que se ajuste a su dibujo. La alumna responde que faltarían las veces más que ha ahorrado Isabel, la entrevistadora le sugiere que lo escriba y la alumna escribe dentro del trozo mayor del diagrama "b" la frase: "x 5 veces lo que ahorró Eva". La entrevistadora no tiene claro su frase y le pregunta si corresponde a lo que ahorró Eva y la alumna sin responder escribe encima del trozo del diagrama el nombre de Isabel y en el trozo pequeño escribe el nombre de Eva.

- *Entrevistadora: El "b" y ¿Qué dato le faltaría allí?*
- *Alumna 09: Lo que ha ahorrado…. Ah bueno no, cuántas veces más ha ahorrado Isabel que Eva.*
- *Entrevistadora: ¿Puedes ponerlo allí? ¿Puedes escribirlo?*
- *Alumna 09: ¿Escribirlo?*
- *Entrevistadora: O en el mismo diagrama que es lo que le hace falta… puedes rellenarlo con los datos que le hace falta.*
- *Entrevistadora: ¿Esto es lo que ahorró Eva, según tú? ¿Y lo de Isabel?*
- *Alumna 09: Eh, no, esto es… (alumna escribe en la parte superior del diagrama el nombre de Isabel, y al lado escribe el nombre de Eva).*
- *Entrevistadora: Ah, esto es Isabel.*

Una vez aclarado todo sobre el diagrama "b", la entrevistadora le pregunta por qué no eligió el diagrama "c", la alumna responde que el valor de Eva está dentro del todo y en el diagrama "c" no podría ser porque estaría por separado.

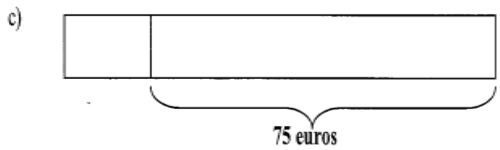


Figura 5.64 Diagrama "c" del formulario 3. Alumna 09.

- *Entrevistadora: Y ¿por qué éste no puede ser? (la entrevistadora señala el diagrama "c").*
- *Alumna 09: Pues, porque los setenta y cinco euros representan como el todo, y lo que ahorró Eva… forma parte… es proporcional porque forma… porque multiplicándolo por cinco… pues, te da lo que ahorró Isabel entonces, como que esto (señala el trozo más pequeño del diagrama) va aparte lo que*

ahorró Eva está dentro de lo que ahorró Isabel, forma parte de eso.

Del mismo modo la entrevistadora le pregunta por qué no podría ser el diagrama "a" y la alumna responde que no podría ser porque la parte que tiene los setenta y cinco euros es más pequeña y se supone que Eva ahorró menos que Isabel.

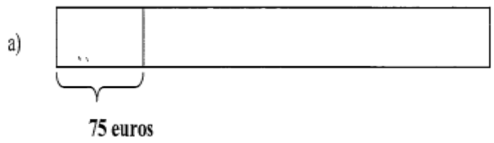


Figura 5.65 Diagrama "a" del formulario 3. Alumna 09.

- *Entrevistadora: Vale. ¿Y éste? (la entrevistadora señala el diagrama "a").*
- *Alumna 09: Pues, porque aparte que representa una cosa muy pequeña, se supone que lo que ahorró Eva está por debajo de lo que ahorró Isabel entonces, tendría que formar parte de setenta y cinco, siendo una unidad más pequeña.*
- *Entrevistadora: Bueno, muy bien.*

5.9.4 Formulario 4

A continuación le presenta el formulario 4 para que halle los valores de "x" e "y". La alumna hace silencio mientras observa el diagrama y escribe sobre el papel los valores de las incógnitas.

- *Entrevistadora: ahora te muestro este diagrama (formulario 4) y vas a encontrar el valor de "x" y de "y".*
- *Alumna 09: Vale. (hace silencio mientras observa el diagrama y escribe los valores de "x" e "y" sobre el papel).*

$$y = 5$$

$$x = 15$$

Figura 5.66 Valores de las incógnitas en el formulario 4. Alumna 09.

La entrevistadora le pregunta cómo lo ha encontrado y responde que la “y” gráficamente representa una cuarta parte del todo que es veinte caramelos y al obtener un cuarto de veinte resulta cinco y la “x” representa tres cuartos que serían quince.

- *Entrevistadora: ¿Cómo lo has encontrado?*
- *Alumna 09: Pues, porque “y” gráficamente representa una cuarta parte del todo que son veinte caramelos, habría que calcular un cuarto de veinte caramelos y me dan cinco y después “x” representa la tres cuartas partes de veinte caramelos que son quince.*
- *Entrevistadora: Perfecto, muy bien.*

5.9.5 Formulario 5

A continuación le presenta el formulario 5 para que halle los valores de las incógnitas presentes en el diagrama. La alumna observa por unos segundos el diagrama y comienza por dividir las noventa canicas entre los siete rectángulos iguales, al observar que le da un número infinito de cifras decimales, decide no continuar y escribe que el valor de “y” es setenta y siete y a continuación hace la división de setenta y siete entre siete y ese resultado lo escribe como el valor de “x”.

- *Entrevistadora: ahora observa este igualmente me vas a encontrar el valor de “x” y de “y”.*

- *Alumna 09: Vale (hace silencio mientras observa el diagrama). Trece ¿qué significa? ¿El número que hay aquí?*
- *Entrevistadora: Sí, que eso vale trece.*
- *Alumna 09: Puedo hacer aquí…*
- *Entrevistadora: Si, puedes hacer las operaciones que necesites.*
- *Alumna 09: No responde (la alumna hace silencio mientras realiza algunos cálculos sobre el papel). Ya está.*

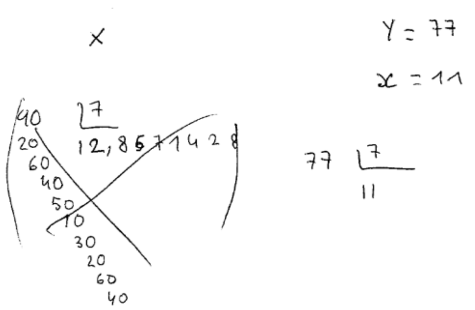


Figura 5.67 Valores de las incógnitas en el formulario 5. Alumna 09.

Al ver que la alumna ha escrito el número setenta y siete de forma instantánea, es decir sin cálculo aparente, la entrevistadora le pregunta de dónde le salió el setenta y siete y la alumna contesta que le restó a noventa las trece canicas, y le resultó esa cantidad y más tarde dividió esa cantidad entre los siete rectángulos iguales y le dio el valor de “x”.

- *Entrevistadora: ¿De dónde te salió el setenta y siete?*
- *Alumna 09: Puesto que, esto son noventa canicas, menos trece que hay aquí, me dan setenta y siete entonces, lo divido en siete partes que son iguales, son once.*
- *Entrevistadora: ¿A noventa le has restado trece?*
- *Alumna 09: Sí.*

Observamos que en un principio la alumna no había tomado en cuenta el número trece, pero más tarde rectifica y encuentra correctamente los valores de las incógnitas.

5.9.6 Formulario 6

Para terminar le presenta el formulario 6 para que halle el valor de las incógnitas presentes en otro diagrama. La alumna observa el diagrama y comienza por dividir los setenta euros entre los cinco rectángulos que le corresponden, más tarde ese resultado le suma los setenta y escribe los valores para “x” e “y”. Al observar todo el proceso que hace la alumna para encontrar los valores de las incógnitas y al ver que es correcto la entrevistadora decide no preguntar cómo lo hizo.

- *Entrevistadora: Ahora éste… (la entrevistadora le presenta el formulario 6).*
- *Alumna 09: No responde (hace silencio mientras hace algunos cálculos sobre el papel). Ya está.*
- *Entrevistadora: ¿ya está? Muy bien.*

$$\begin{array}{r|l} 70 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 14 \end{array}$$

$$70 + 14 = 84$$

$$y = 84$$

$$x = 14$$

Figura 5.68 Valores de las incógnitas en el formulario 6. Alumna 09.

La alumna 09 en el formulario 1 y 2 dibuja diagrama cuantitativo similar a los diagramas estadísticos, no comete error de inversión. En el formulario 3 elige el diagrama “b”, interpreta el diagrama como parte-todo no asimila el diagrama como parte-parte, sin embargo en los formularios 1 y 2 hace dibujos por separado. En el formulario 4, 5 y 6 la alumna interpreta de forma correcta los diagramas, respeta las dimensiones del diagrama y las cantidades numéricas en los tres casos.

5.10 Resumen

A partir de la aplicación de la Entrevista hemos observado:

5.10.1 Formulario 1

- Hay cuatro estudiantes que inician resolviendo el problema.
- Cinco de los nueve estudiantes inician dibujando un diagrama.
- La mayoría de los participantes dibujan diagrama (ocho dibujan, uno no dibuja). Seis estudiantes dibujan diagramas cuantitativos y dos estudiantes dibujan diagramas cualitativos. De los seis que dibujan diagramas cuantitativos, cinco inician a dibujar por el comparado y solamente un estudiante inicia por el referente. Entre los que aparecen diagramas integrados que representan los diagramas llamados D2, D3 y D4.
- Cinco de los ocho estudiantes que dibujan diagramas en general, inician dibujando el diagrama utilizando los datos del enunciado del problema y tres dibujan la solución del problema.
- Los nueve participantes mantienen una estructura multiplicativa y sólo dos cometen error de inversión.

5.10.2 Formulario 2

- Ocho de los nueve participantes resuelven el problema. Tres inician resolviendo el problema y cinco inician con el dibujo de un diagrama.
- De los ocho estudiantes que resuelven el problema, seis dibujan diagramas cuantitativos de los cuales cinco inician a dibujar por el comparado y uno por el referente. Un estudiante dibuja diagrama cualitativo.

- Cuatro de los seis estudiantes que dibujan diagramas cuantitativos, dibujan el diagrama utilizando los datos del enunciado de problema en sí y los otros dos estudiantes dibujan la solución del problema.
- De los seis que dibujan diagramas cuantitativos, dos estudiantes dibujan diagramas similares a los del diagrama D2, dos a D3 y dos a D4.
- Los nueve estudiantes mantienen la idea de una estructura multiplicativa y cuatro cometen error de inversión.

5.10.3 Formulario 3

El formulario 3 se aplicó para ver si los estudiantes reconocían el diagrama que habían construido previamente (formulario 1 ó formulario 2) en alguno de los diagramas que contiene dicho formulario. Los dos problemas que aparecen en los formularios 1 y 2 son del mismo tipo (comparación multiplicativa de referente desconocido).

Los resultados para este formulario son:

- Tres de los nueve entrevistados construyen diagramas de comparación. Un diagrama parte-parte en el que se comparan dos cantidades independientes, y a la hora de reconocer con los diagramas mostrados, eligen un diagrama parte-parte. Manteniendo la idea de parte-parte.
- Al igual que otros dos estudiantes que dibujan diagramas parte-parte y reconocen el diagrama parte-parte.
- Dos entrevistados construyen dibujos cualitativos y reconocen el diagrama parte-parte.
- Otros dos estudiantes dibujan diagramas parte-todo y reconocen diagramas parte-todo, manteniendo la idea parte-todo.

5.10.4 Formularios 4, 5, 6

Recordamos que estos tres formularios contienen un problema con formato gráfico (un diagrama de barras rectangulares con ciertas cantidades numéricas), con el fin de ver cómo los estudiantes interpretan diagramas y resuelven el valor de las incógnitas en cada caso.

Encontramos que:

- Ocho de los nueve estudiantes resuelven el formulario 4 correctamente, sólo uno resuelve cometiendo errores de cálculo.
- De los ocho que resuelven el formulario 4, cinco estudiantes hacen cálculos auxiliares para encontrar los valores de las incógnitas y los otros tres lo resuelven mentalmente.
- Tres estudiantes resuelven el formulario 5 correctamente y seis lo resuelven de forma incorrecta, cometiendo errores de cálculo.
- Dos estudiantes rellenan las casillas del diagrama del formulario 5 y 6 con cantidades numéricas sin importar las dimensiones de las mismas, mientras que en el formulario 4 toman en cuenta las dimensiones del diagrama.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

Durante la realización de la tesis hemos prestado especial atención a la predisposición de los estudiantes para dibujar diagramas cuando resuelven problemas de comparación multiplicativa y a la interpretación que hacen de los diagramas comparativos empleados en los currículos de diversos países. Nuestra finalidad no ha sido emplearlos como método gráfico para resolver problemas, sino estudiar la potencialidad que tienen los diagramas basados en modelos de barras para representar la comparación multiplicativa y la competencia que demuestran los estudiantes, sin formación previa específica, en su construcción. Las potencialidades de los diagramas en resolución de problemas la hemos restringido a un tipo de problemas: la categoría semántica de problemas de comparación multiplicativa, que se ha mostrado difícil de comprender por los estudiantes que acaban la etapa de Educación Primaria.

Puesto que la comprensión de un concepto u objeto matemático es más completa si se interpreta desde distintas representaciones y se es capaz de traducir el objeto representado de una a otra representación, la estrategia que hemos utilizado para elicitar de los estudiantes respuestas a nuestros interrogantes ha sido someterlos a procesos de traducción ente distintas representaciones de la comparación multiplicativa. En esos procesos de traducción los estudiantes han tenido que resolver, representar, e inventar un enunciado de problema a partir de otra representación del mismo. Con esta aproximación desde distintos frentes representacionales hemos intentado vislumbrar el papel que juega cada una de ellas.

La tesis que hemos realizado está conformada por dos fases de recogida de datos para dar respuesta a los objetivos planteados. La primera fase ha consistido en una prueba escrita en las que hay tres bloques de tareas. Las conclusiones las vamos a exponer de acuerdo a estas dos fases bien diferenciadas y dentro de cada una de ellas expondremos las conclusiones que hemos extraído según cada uno de los objetivos planteados dentro de cada bloque de tareas.

6.1 Conclusiones de la prueba

La prueba está compuesta por tres bloques de tareas con dos apartados cada una en la que se demandan proceso de traducción entre representaciones.

6.1.1 Bloque 1(verbal a simbólico y verbal a gráfico)

Con este bloque uno se pretende dar respuesta al siguiente objetivo

- Objetivo 1. Analizar el tipo de representación simbólica y gráfica que producen estudiantes de primer curso de secundaria a partir de problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa.

En respuesta a las preguntas que nos hemos planteado y según los resultados obtenidos en este estudio hemos encontrado los siguientes resultados:

6.1.2 Apartado Verbal a Simbólico (Resolución de problemas)

- La mayoría (70% y 53%) de los estudiantes producen una representación aritmética correcta de los problemas, muy pocos lo dejan en blanco, se podría decir que este tipo de problemas son abordables para este nivel de alumnado.
- Un pequeño porcentaje (3%) utiliza ideas algebraicas.

- Se pone de manifiesto que el error de inversión se produce en estos niveles escolares. No obstante hay estudiantes que rectifican el error cuando resuelven este tipo de problemas.
- Hay estudiantes que cometen el error aditivo.

6.1.3 Apartado Verbal a Gráfico. (Dibujo de diagramas)

- En general, se observa que los estudiantes no dibujan el diagrama a partir del enunciado, sino a partir de la solución.
- A causa de ello mantienen el error de inversión en el diagrama que utilizan para representar los datos que aparecen en la solución, sin percatarse del error una vez hecho el dibujo.
- Los diagramas que más utilizan son el dibujo alusivo a la temática del enunciado, así como también los que en el dibujo utilizan la solución del problema como dato del mismo.
- Los estudiantes no hacen diagramas que expresen la relación entre las cantidades que aparecen en el enunciado del problema.

6.1.4 Discusión y conclusiones generales- bloque 1

6.1.4.1 Discusión del bloque 1

Nuestro primer objetivo ha sido investigar si los estudiantes de secundaria con dificultades para la comprensión de problemas de comparación multiplicativa tienden a usar diagramas cuando resuelven este tipo de problemas. Éste es el propósito de la cuestión que encontramos en el apartado *a*, en el que se pide resolver problemas verbales que incluyen comparación multiplicativa. Esperábamos que algunos estudiantes emplearan diagramas o modelos que facilitarán la comprensión, especialmente aquellos con respuestas incorrectas. Dado que los estudiantes no han dibujado nada que les ayude a resolver los problemas de comparación multiplicativa que les habíamos propuesto, creemos que tales problemas no suscitan la elaboración de diagramas. Consideremos por ello que los estudiantes han resuelto los problemas de comparación que les hemos propuesto directamente a partir de su representación verbal, escribiendo la operación matemática, sin que medie ninguna representación gráfica. En estudios previos (Castro, Morcillo y Castro, 1999) se había observado que estudiantes de edades similares habían utilizado o no diagramas en función del problema y que cuando se les presentan problemas que suscitan el uso de diagramas, los estudiantes habían llevado a cabo espontáneamente diferentes estrategias gráficas para la resolución de los mismos. Otra explicación alternativa es que los estudiantes carecen de conocimientos para elaborar modelos gráficos en forma de diagramas.

La segunda cuestión que propusimos a los participantes del estudio tenía por objeto dilucidar esta dicotomía y demostrar su nivel de competencia en la elaboración de diagramas de comparación multiplicativa. Para ello, hemos pedido a los estudiantes en el apartado b de las tareas del bloque 1 del cuestionario, que elaboren un diagrama que represente los problemas de comparación que les propusimos previamente en el apartado anterior de esa misma tarea (apartado a). Como resultado, un tercio de los alumnos no dibujaron nada, por lo que, en general, no parecen ser competentes para asociar un modelo visual a la comparación multiplicativa. Los dos tercios restantes, sí que dibujaron algo, pero las respuestas no fueron homogéneas. La calidad de las respuestas y su adaptación a un esquema de comparación son muy diferentes. La clasificación de los diagramas producidos por los sujetos nos ha permitido distinguir en ellos los aspectos cualitativos y cuantitativos de los diagramas cuya principal diferenciación es la presencia de una relación comparativa en el diagrama. La diferenciación que hemos hecho entre los diagramas cualitativos y los cuantitativos, también llamados pictóricos y esquemáticos (Hegarty y Kozhevnikov, 1999); Van Garderen y Montague, 2003), ha demostrado ser adecuada para clasificar las representaciones elaboradas por los sujetos.

Resaltamos que solo han aparecido dos tipos de modelos en los diagramas producidos por los estudiantes que corresponde a dos tipos de representaciones esquemáticas destacadas: el modelo partitivo, en el que el referente se hace coincidir con una parte de un todo; y el modelo de comparación, en el que el referente y el comparado se dibujan en paralelo e independientes visualmente uno del otro. A pesar de no haber recibido una enseñanza previa, los estudiantes parecen emplear los modelos o los diagramas rectangulares utilizados en otros países (Beckmann, 2004).

6.1.4.2 Conclusiones bloque 1

Uno de los propósitos de este estudio es detectar si los estudiantes usan o no diagramas para resolver problemas aritméticos de comparación multiplicativa y qué tipo de representaciones o gráficos relacionados con la comparación multiplicativa utilizan. Como respuesta a la primera cuestión, hemos comprobado que los alumnos no utilizan diagramas en respuesta a la petición que les hicimos de que resolvieran los problemas de comparación. Este resultado nos lleva a la conclusión de que la comparación multiplicativa no suscita el uso de representaciones visuales por parte de los estudiantes. Más interesantes son los resultados obtenidos para la segunda cuestión. Las respuestas de los alumnos a la petición de que dibujaran un gráfico muestran la falta de interpretación visual de los estudiantes en la comparación multiplicativa. Aproximadamente, el 33% de las respuestas no contienen dibujos, el 39% son dibujos cualitativos, y sólo el 28% son dibujos cuantitativos que muestran la relación de los datos del problema. Los terceros son los más interesantes, ya que reflejan una representación de la relación comparada con diagramas esquemáticos o cuantitativos. Dentro del 28% de respuestas que incluían algún diagrama cuantitativo o esquemático, los alumnos usaron únicamente formas rectangulares y circulares, siendo las primeras las más comunes. Estos diagramas representan los modelos comparativos que los estudiantes han adoptado espontáneamente sin haber recibido una enseñanza previa. Creemos que este resultado se debe al hecho de que los estudiantes utilizan diagramas para dibujar el conocimiento sobre fracciones, y diagramas estadísticos que han adquirido anteriormente en clases de matemáticas. Esto concluiría que los estudiantes no están familiarizados con la elaboración de diagramas que integren las relaciones existentes en la resolución del problema, y que, por lo tanto, extrapolan su conocimiento a otra área de las matemáticas para representar los problemas de comparación que les planteamos.

El análisis de los diagramas cuantitativos nos ha permitido detectar cuatro posibles estrategias para la elaboración de diagramas. Algunos estudiantes comienzan a elaborar el diagrama tomando la representación de la cantidad referente como su punto de partida, y después, en una figura paralela, dibujan la cantidad comparada, en la cual se refleja el valor del escalar; otros siguen una segunda estrategia: primero dibujan la cantidad comparada y después, en otra figura paralela, dibujan la cantidad referente tantas veces como indique el escalar; una tercera estrategia consiste en usar una escala numérica auxiliar para la elaboración de la cantidad comparada y la referente; por último, la cuarta estrategia que han seguido los alumnos es dibujar la cantidad comparada y la cantidad referente en una única figura. Estas estrategias se reflejan en los cuatro gráficos cuantitativos, a los que llamamos D1, D2, D3 y D4 respectivamente.

6.1.5 Bloque 2 (Simbólico a verbal y Simbólico a gráfico)

Con este bloque se pretende dar respuesta al siguiente objetivo

- Objetivo 2. Analizar el tipo de representación verbal en forma de enunciados de problemas de comparación multiplicativa y gráfica que producen estudiantes de primer curso de secundaria a partir de expresiones en forma simbólica.

En respuesta a las preguntas que nos hemos planteado y según los resultados obtenidos en este estudio hemos encontrado los siguientes resultados:

6.1.6 Simbólico a verbal (Invención de problemas)

- La información en blanco se observa con mayor frecuencia en la segunda tarea que la primera, alcanzando un 12,9 %.
- La frecuencia donde los problemas que inventan los estudiantes son incongruentes, sobrepasa el 20% en ambos casos.
- Los estudiantes inventan problemas de diversos tipos, incluyendo sumas repetidas, cambio, combinación entre otros, obteniendo un porcentaje mayor al 25% en la tarea 4a.
- Se comete el error de inversión sin alcanzar el 10%.

- Las respuestas sin información o en blanco se han dado con mayor frecuencia en la segunda tarea alcanzando un 18%, que en la primera con un 7,9%.
- La frecuencia donde los problemas que inventan los estudiantes no tienen sentido sobrepasa el 22,4% en ambos casos.
- Los estudiantes inventan problemas de estructura multiplicativa que no son de comparación. Los problemas inventados son de diversos tipos, incluyendo sumas repetidas, cambio, combinación entre otros, obteniendo un porcentaje del 25,8 % en la tarea (4a).
- El porcentaje de respuestas en las que aparece el error de inversión es relativamente pequeño en los dos apartados: un 4,5% en el apartado (3a) y un 7,9% en el apartado (4a).
- La categoría de invención de problemas verbales correctamente en el primer apartado (3a) tiene una frecuencia del 33,7%, y en el segundo apartado (4a), desciende a un 16,9 % de las producciones correctas de los estudiantes, lo que supone una disminución considerable.

6.1.7 Simbólico a gráfico (Dibujo de diagramas)

Las ideas que destacamos en este apartado son las siguientes:

- Se observa que los estudiantes que no responden (dejan la respuesta en blanco o sin información), alcanza en la tarea 4b una mayor frecuencia del 33%, bastante mayor que en la tarea 3b que es del 19%. Lo que pone de manifiesto que la tarea 4b es menos abordable para los estudiantes.
- Las producciones donde tratan de reformular verbalmente el enunciado del problema se mantienen con una frecuencia relativamente alta, casi similar en ambas tareas.
- Las respuestas con diagramas cualitativos contienen dibujos de personajes alusivos al contexto del enunciado. Su frecuencia supera el 20% de las producciones en ambas tareas.

- Por otro lado, los estudiantes que hacen dibujos cuantitativos, entre los que se encuentran los que tienen un aspecto funcional, diagramas de barra o estadístico relacional, llegan a alcanzar el 36% de las producciones en la tarea 3b y un 27 % en la tarea 4b.

6.1.8 Discusión y conclusiones del bloque 2

La invención de problema o dibujar un diagrama son tareas que exigen creatividad y que no son fáciles para los estudiantes. Pero esta dificultad nos sirve para observar diferencias en los estudiantes respecto a sus capacidades y comprensión del objeto matemático que tratamos, en este caso la comparación multiplicativa.

El primer apartado ha puesto de manifiesto que si bien la invención de problemas ha sido difícil para estos estudiantes, lo ha sido más cuando la expresión simbólica corresponde con la de factor desconocido. Si intentamos inventar un problema de comparación a partir de esta expresión el problema corresponde al tipo de comparación de referente desconocido o enunciado inconsistente. Esta situación se repite cuando se quiere realizar un gráfico. La literatura previa (Castro, 1994) había resaltado que los problemas de referente desconocido eran más difíciles para niños de finales de primaria, pero vemos que estos dos tipos de problemas mantienen su diferencia de dificultad cuando se trata de trabajarlos en otros formatos o desde otro punto de vista. Interpretar una expresión de factor desconocido en términos comparativos es más difícil que interpretar una expresión en la que lo que se desconoce es el producto. Esto nos hace concluir que la diferencia de dificultad entre los problemas de comparación de referente desconocido y los de comparado desconocido se debe en parte a la relación lógica subyacente entre las cantidades comparadas y la capacidad del resolutor para invertir la relación.

La escasa presencia del error de inversión en los dos apartado de esta tarea y la poca diferencia entre los dos porcentajes de ocurrencia en los dos casos, nos hace pensar que la naturaleza del error de inversión tiene poco que ver con este tipo de tareas, es decir, este tipo de tareas no inducen a los estudiantes a cometer el error de inversión, no lo propician. Interpretar una relación numérica en la que uno de los factores es desconocido no les resulta mucho más difícil a en estos estudiantes que interpretar una relación multiplicativa con el producto desconocido.

Hemos observado que los estudiantes dibujan diagramas de diversas formas, según la interpretación que cada uno tenga del enunciado simbólico.

Predominando el dibujo alusivo a la temática del enunciado del problema e igualmente los que tratan de relacionar las cantidades existentes en la igualdad y la ecuación presentes en el enunciado simbólico.

6.1.9 Bloque 3 (Gráfico a verbal y Gráfico a simbólico)

Pretendemos dar respuesta al siguiente objetivo:

Objetivo 3. Analizar el tipo de representación verbal y simbólica en forma de enunciados comparativos que producen estudiantes de primer curso de secundaria a partir de problemas de comparación multiplicativa dados de forma gráfica.

En este bloque hemos llegado a las siguientes conclusiones:

6.1.10 Gráfico a verbal (La invención de problemas)

- Estudiantes no inventan problemas con enunciado verbal, obteniendo un bajo porcentaje de dibujos con estructura similar, (inferior al 10%).
- La frecuencia con que planteaban enunciados verbales incompletos superó el 10%, siendo en ambos problemas la misma frecuencia (14 en cada uno).
- Inventan otro tipo de problemas (isomorfismo de medidas, proporcionalidad, grupos repetidos), supera el 10%.
- Muy pocos estudiantes cometen el error de inversión en estos casos, siendo la frecuencia de apenas un 5%.
- La frecuencia con que cambian la estructura del problema de multiplicativa a aditiva (1%).

6.1.11 Apartado gráfico a simbólico (Escritura de ecuación)

En cuanto a la escritura de ecuaciones, observamos:

- La frecuencia de estudiantes que no escriben ecuaciones, es decir se limitan a colocar los datos del enunciado es de un 20%. Dejando la información incompleta.
- La frecuencia con que escriben la relación de forma numérica, es aproximada al porcentaje anterior (19%).
- Muy pocos estudiantes escriben la ecuación con la operación inversa cometiendo el error de inversión. La frecuencia está por debajo del 2%.
- Mientras que la frecuencia con que escriben la ecuación correctamente, supera el 20%.

6.1.12 Conclusiones en general Bloque 3

6.1.12.1 Traducción a enunciado verbal

El estudio que hemos realizado conlleva realizar dos tipos de traducciones: a partir de dos diagramas que representan dos tipos de comparación, una de referente desconocido (tarea 2) y otra de comparado desconocido (tarea 1), se trata de hacer una primera traducción de estos diagramas modelo a un problema de enunciado verbal y una segunda traducción de los diagramas modelo a una expresión algebraica de carácter simbólico. La primera traducción implica inventar o reformular un problema análogo al que se propone en el diagrama pero de forma verbal, habilidad en la que no han sido ejercitados estos escolares, éste es sólo uno de los factores que influyen en el alto porcentaje (16,85 %) de respuestas en blanco. A este porcentaje contribuyen de forma distinta los dos problemas. Mientras que en la tarea 1 (comparado desconocido) el porcentaje es del 12,35%, en la tarea 2 (referente desconocido) el porcentaje es 21,34, es decir, casi el doble. Con ello se pone de nuevo de manifiesto la mayor dificultad de comprensión de los problemas con referente desconocido frente a los de comparado desconocido.

Entre los dos tipos de problemas de comparación no sólo se manifiestan diferencias de comprensión en las respuestas en blanco. Con respecto al proceso de traducción a un enunciado verbal, el diagrama que representa el modelo de comparación multiplicativa con referente desconocido (tarea 2) ha provocado más respuestas inadecuadas o incorrectas que el diagrama correspondiente al modelo de comparación de comparado desconocido (tarea 1). Esto es coincidente con resultados obtenidos en resolución de problemas de comparación, en donde los problemas de referente desconocido tienen una tasa menor de éxitos. Pero hay una diferencia fundamental con respecto al tipo de error que cometen en nuestro estudio. En las investigaciones previas sobre resolución de problemas verbales de comparación multiplicativa (Castro, 1994) se resalta la frecuencia con la que aparece el error de inversión en los problemas de referente desconocido frente a los de comparado desconocido. Sin embargo, en este estudio en el que el problema de comparación se plantea mediante un diagrama modelo, en el proceso de invención de enunciados, el error de inversión ha aparecido un número muy reducido de veces, siendo el tipo de respuesta incorrecta que menor frecuencias ha obtenido junto con redactar un problema de comparación aditiva. Esperábamos que aparecieran, en los enunciados producidos por los estudiantes, errores sistemáticos asociados a la resolución de problemas de comparación multiplicativa, como el error de inversión o comparación aditiva. Nos ha sorprendido la escasa presencia de enunciados de comparación que contengan errores sistemáticos y la escasa diferencia entre los que se han producido en el modelo algebraico frente al aritmético.

Las diferencias de actuación que han tenido los participantes en las dos tareas de invención de problemas se han manifestado en varios aspectos. En el problema de referente desconocido (modelo algebraico) hay mayor número de respuestas en blanco, mayor número de respuestas incompletas, mayor número de enunciados que no corresponden a problemas de comparación o cambian la frase comparativa. Todos ellos son síntomas de la mayor dificultad de comprensión que tiene el problema de comparación multiplicativa de referente desconocido frente al de comparado desconocido. No todas las dificultades son del mismo nivel, pero todas revelan que los problemas de comparación de referente desconocido son más difíciles de comprender que los comparado desconocido.

Puesto que en los diagramas propuestos como modelos de la comparación multiplicativa, la barra mayor aparece con una partición de la misma en partes equivalentes al referente, en los enunciados construidos a partir del modelo algebraico cabía la posibilidad de que se expresara la relación utilizando fracciones. Sin embargo, ninguna de las 89 respuestas contiene fracciones explícitamente. Lo más aproximado al empleo de ideas fraccionarias ha sido la expresión presente en un par de respuestas "Marta tiene 42 canicas y Pedro tiene una vez" se supone que de las seis de la partición presentada gráficamente de esas 42 canicas.

Con respecto a los resultados sobre el proceso de traducción de diagrama a enunciado verbal encontramos que el porcentaje sobre el total de respuestas que contienen un problema de isomorfismo de medidas no es muy elevado (15,73%), pero si tenemos en cuenta que se les pide a los estudiantes que enuncien un problema con la expresión comparativa "veces tanto como", cabe pensar que en realidad este porcentaje hubiera sido mayor sin esta condición.

Por otro lado, si consideramos el porcentaje de estudiantes que interpretan el modelo visual como isomorfismo de medidas sobre el número de alumnos que redactan un problema completo de estructura multiplicativa obtenemos un 29%. Todos estos alumnos dominan correctamente las relaciones multiplicativas entre los datos del problema, por lo que concluimos que más de un tercio de los sujetos pueden resolver un problema de comparación multiplicativa empleando un esquema mental asociado al significado de grupos iguales.

Este resultado tiene implicaciones para la evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Para realizarlo usualmente planteamos problemas al estudiante y en función de sus respuestas decidimos si ha adquirido determinados aprendizajes o si ha construido determinados esquemas mentales. Los resultados que hemos obtenido muestran que los estudiantes pueden acomodar un esquema mental correspondiente a una categoría semántica de problemas para resolver los problemas que corresponde a otra categoría semántica de la que no disponen aún de un esquema mental totalmente construido.

6.1.12.2 Traducción algebraica

En las respuestas a las tareas 1b y 2b destaca el alto porcentaje de abstención o de no respuesta. Este resultado no es de extrañar, dado que los estudiantes se encuentran en la etapa de iniciación en el lenguaje algebraico y las tareas que les hemos propuesto no son habituales para ellos. Se ha hipotetizado que este tipo de diagramas favorece la escritura de las ecuaciones algebraicas, sin embargo, vemos que un primer efecto que produce es el de bloqueo del estudiante, que se abstiene de dar una respuesta. Resolver un diagrama como los que le presentamos en las tareas no es difícil para estos estudiantes, pero sí lo es traducirlo a relaciones algebraicas.

El proceso de traducción de los diagramas comparativos a la expresión algebraica se ha visto fuertemente condicionado por el conocimiento específico del lenguaje algebraico por parte de los participantes, lo que ha provocado una regresión hacia procesos previos, como escribir una ecuación en x, una operación aritmética o evaluar las letras. En los diferentes apartados por ejemplo en “en blanco” y “letra evaluada” los sujetos simplemente no dan respuesta o es incompleta; sin embargo, en los apartados “ecuación” y “relación funcional” observamos que hay sujetos que cometen errores, entre ellos, cometen el error de inversión en pocas ocasiones, y confunden el escalar con el comparado. Otros sujetos utilizan una forma más compleja de escribir algo parecido a una proporción (regla de tres), que finalmente viene a ser una forma de escribir el enunciado siguiendo sus propias pautas. De todo ello, concluimos que hay dos aspectos fundamentales que han condicionado las respuestas de los sujetos. Una es el nivel de conocimiento del lenguaje algebraico y otra es la mayor dificultad de comprensión del diagrama algebraico que el diagrama aritmético.

6.1.12.3 Comparación entre los dos procesos de traducción

Enunciar un problema o escribir una ecuación a partir de los diagramas comparativos no han resultado ser procesos independientes. En general, los estudiantes han sido más competentes en traducir los diagramas a enunciados verbales que a expresiones algebraicas. Pensamos que la representación simbólica requiere adquirir conocimientos específicos y manejo de las variables para escribir el modelo algebraico, conocimiento del que estaban faltos los estudiantes, mientras que la invención no requiere un conocimiento específico que haya que aprender.

El tipo de diagrama-modelo (aritmético o algebraico) que se plantea como problema de comparación, influye en la invención de enunciados, produciendo un menor rendimiento de los estudiantes el modelo algebraico que el aritmético. Sin embargo, la diferencia en la escritura de ecuaciones entre los dos modelos no es apreciable.

A través de los resultados de esta experiencia se ha podido observar cómo los estudiantes inventan problemas y escriben ecuaciones a partir de un problema con enunciado gráfico. Según las producciones de los estudiantes, el error de inversión no sólo se da en enunciados verbales sino también se da cuando el enunciado está en forma gráfica.

6.2 Conclusiones de la Entrevista

La segunda recogida de datos fue realizada mediante una entrevista cuyo objetivo tenía dos fines claramente diferenciados:

6.2.1 Objetivo 4 (primera parte)

1. Indagar si los estudiantes son capaces de captar la singularidad de los diagramas que construyen.

Para ello, les pedimos a los entrevistados que:

a) Dibujen un diagrama a partir de un problema verbal de comparación multiplicativa, en el que observaremos el tipo de diagrama y la estrategia que utilizan en su construcción.
b) Identifiquen el diagrama que construyen en un conjunto de diagramas lineales que representan distintas posibilidades. Con ello nos aseguramos de la consistencia de las respuestas emitidas a la petición que les hacemos de dibujar un diagrama.

Observaremos cómo interpretan los diagramas, si los interpretan como una relación parte - todo o como relación de comparación. Si los interpretan de forma aditiva o de forma multiplicativa.

6.2.2 Objetivo 4 (segunda parte)

2. Profundizar en el modo en que los estudiantes priorizan las características de las representaciones gráficas (diagramas) y simbólicas, así como las formas de abordaje de problemas.

Para ello, les planteamos a los entrevistados diagramas que contienen dos relaciones cuantitativas, junto con representaciones simbólicas, que constituyen problemas de dos pasos para que los resuelvan.

Observamos en el proceso de resolución cuál de las representaciones priorizan, si manifiestan dificultades y si aparece la idea de comparación o no en sus respuestas.

Los datos para la primera parte se recogieron mediante los formularios 1, 2 y 3, y los datos correspondientes a la segunda parte del objetivo se recogieron mediante los formularios 4, 5 y 6. Por lo que las conclusiones las describimos de acuerdo a los formularios analizados.

6.2.3 Formularios 1, 2 y 3

El inicio de las entrevistas pone de manifiesto que algunos de los participantes desconocen el significado del término diagrama, lo que les bloques y se paralizan. Esto puede explicar o puede ser una de las razones del alto porcentaje de respuestas en blanco o ausencia de respuesta en las pruebas escritas.

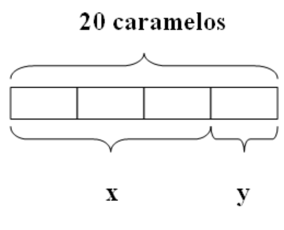
Uno de los aspectos que queríamos observar durante las entrevistas es si los estudiantes eran capaces de identificar el tipo de diagrama que habían dibujado e identificarlo en un conjunto de diagramas que contiene relaciones parte-todo y parte-parte.

Las respuestas de los participantes más competentes en los tres formularios de las entrevistas son consistentes, en lo que respecta a la relación subyacente en el diagrama que dibuja o elijen. Las explicaciones y justificaciones que dan muestran que son conscientes del diagrama que han dibujado y son capaces de identificar su diagrama entre un conjunto de diagramas alternativos. Los participantes que dibujan un diagrama cuantitativo en los dos primeros formularios y que cometen el error de inversión elijen un diagrama que conserva el error de inversión. Los participantes en la entrevista con baja competencia matemática han dibujado un diagrama cualitativo que ilustra por separado las cantidades el problema, cometen el error de inversión y les cuesta identificar un diagrama apropiado.

6.2.4 Formularios 4, 5 y 6

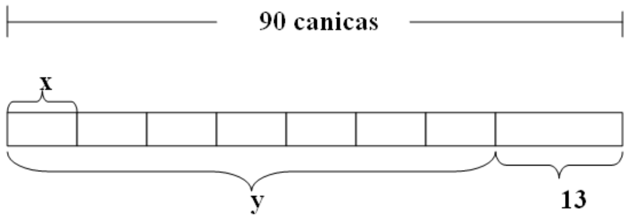
La finalidad de los cuestionarios 4, 5 y 6 era indagar la preferencia de los estudiantes por el empleo de una u otra representación en la resolución de tareas en cuyo enunciado la información se proporciona como mezcla de las tres representaciones (gráfica, numérica y algebraica).

La tarea contenida en el formulario 4 contiene un diagrama con dos incógnitas



que se puede resolver algebraicamente planteando dos ecuaciones $x+y=20$, $3y=x$. Sin embargo, ninguno de los estudiantes entrevistados mostró intención de emplear alguna idea que condujera a esta u otra solución algebraica. Los estudiantes se han inclinado por utilizar una estrategia aritmética apoyados en el diagrama que se incluye en la tarea. El diagrama les permite visualizar el reparto de los 20 caramelos en cuatro grupos de cinco caramelos, que es el valor de y. Posteriormente multiplican por 3 para obtener el valor de la y. No tienen problemas para utilizar la x y la y como etiquetas que representan cantidades que hay que calcular, pero no consideran la posibilidad de operar con ellas. Sólo uno de los estudiantes entrevistados se muestra incapaz de interpretar el diagrama correctamente, y realiza una serie de elucubraciones aritméticas.

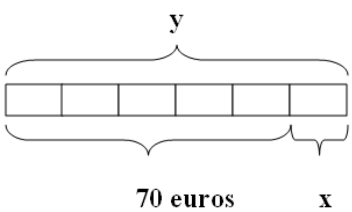
La tarea contenida en el formulario 5 contiene un diagrama con dos incógnitas



.

que se puede resolver algebraicamente planteando dos ecuaciones 90=y+13, y=7x. Al igual que en la tarea anterior no utilizan sus conocimientos para plantear estas ecuaciones. La peculiaridad que plantean las respuestas de los entrevistados a esta tarea es que los estudiantes priorizan la representación gráfica sobre la numérica. Consideran el diagrama como un modelo lineal que representa cantidades proporcionales y, por tanto, consideran que x es la mitad de 13, puesto que el rectángulo que representa 13 es el doble que los otros. Para estos estudiantes lo que tiene que cuadrar es la representación gráfica, no las relaciones numéricas. Los números tienen que ajustarse al modelo gráfico que se les presenta.

La tarea contenida en el formulario 6 contiene un diagrama con dos incógnitas



que se puede resolver algebraicamente planteando dos ecuaciones y=x+70, y=6x, pero al igual que en los casos anteriores los estudiantes se inclinan por estrategias aritméticas con el apoyo visual que aporta el diagrama. Hay dos estudiantes que tienen problemas para comprender y gestionar el diagrama y la información que representa.

Como conclusión general extraída de las respuestas a los tres formularios, proponemos que los estudiantes han resuelto las tres tareas proyectando sobre ellos el modelo parte-todo aprendido en el tema de las fracciones. Salvo dos estudiantes de bajo nivel, los demás poseen un buen dominio de este modelo, hasta el punto de que priorizan lo gráfico sobre las relaciones numéricas presentes en el enunciado. En este nivel de alumnos (1º y 2º de la ESO) hay una buena interconexión entre lo gráfico y lo numérico, pero aún no han desarrollado un pensamiento algebraico que les permita sustituir las estrategias aritméticas por las algebraicas. Desde el punto de vista de la enseñanza-aprendizaje, éste sería un buen momento para conectar los diagramas con los sistemas de ecuaciones.

6.3 Limitaciones y cuestiones abiertas

El estudio que hemos realizado ha estado centrado en los problemas de comparación multiplicativa expresados mediante "veces tantos como". Esto ha sido una restricción autoimpuesta al diseño de la investigación pero que limita las posibilidades de extrapolar los resultados obtenidos a otras expresiones comparativas y a otros problemas de estructura multiplicativa. Así mismo, los problemas de más de una etapa han quedado fuera de nuestro estudio y merecerían ser estudiados en estos procesos de traducción.

La comparación de aumento y la de disminución suelen aparecer en enunciados de problemas escolares durante el estudio del álgebra. Los resultados de este estudio se pueden completar si se indaga con tareas que incorporen la comparación de aumento y la de disminución.

El tipo de participantes en la investigación han sido estudiantes de primero y segundo de la ESO, su desarrollo académico natural ha ocasionado que el estudio de la traducción de problemas comparativos a expresiones algebraicas se haya visto mermado y limitado en comparación con las otras traducciones entre representaciones que hemos trabajado en la tesis. Es decir, la profundización que hemos conseguido en el estudio de la traducción entre la representación verbal y gráfica no hemos podido realizarla con tanta profundidad cuando se trata de traducir de una representación a la representación algebraica.

El estudio no ha pretendido ser inferencial, por lo cual no hemos tenido en cuenta que la muestra sea numerosa y aleatoria. Pero si sería provechoso contrastar estadísticamente los resultados que hemos obtenido con respecto a los procesos de traducción. En este estudio inferencial se debería abordar con más amplitud la interacción de tercer orden entre las representaciones verbal, gráfica y simbólica.

Hay una cuestión fundamental que queda abierta. Si hemos detectado que la comprensión de un problema verbal de comparación es previa al dibujo de un diagrama, ¿hasta qué punto es útil con estos problemas la estrategia de dibujar un diagrama durante el proceso de su resolución? Los modelos visuales son útiles cuando se les dan ya hechos a los estudiantes, pero cuando tienen que construirlos durante la resolución de un problema pueden devenir tanto o más difíciles que el propio problema.

REFERENCIAS

Aberg-Bengtsson, L. (1999). Dimensions of performance in the interpretation of diagrams, tables and maps: Some gender differences in the Swedish scholastic aptitude test. *Journal of Research in Science* Teaching, *36* (5), 565-582.

Aberg-Bengtsson, L. y Ottosson, T. (2006). What lies behind graphicacy? Relating students' results on a test of graphically represented quantitative information to formal academic achievement. *Journal of Research in Science Teaching*, *43*(1), 43-62.

Aguilar, M., Navarro, J. I. y Alcalde, C. (2003). El uso de esquemas figurativos para ayudar a resolver problemas aritméticos. *Cultura y Educación, 15*(4), 385-397.

Ainsworth, S. y Th Loizou, A. (2003). The effects of self-explaining when learning with text or diagrams. *Cognitive Science: A Multidisciplinary Journal*, *27*(4), 669-681.

Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: a cognitive view*. New York, Holt, Rinehart and Winston.

Balchin, W. y Coleman, A. (1965). Graphicacy-the fourth "ace" in the pack. *Times Educational Supplement*, Nov. 5th.947.

Banks, J. H. (1964). *Learning and Teaching Arithmetic*, 2nd Ed. Boston: Allyn & bacon, p. 417.

Banmali, B. (2010). *The effects of using diagramming as a representational technique on high school students' achievement in solving math word problems*. Thesis (Ed.D.) Montclair State University.

Beckmann, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4-6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator, 4* (1), 42-46.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: a problem analysis. En J. P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 64-71.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How Children View Equality Sentences.* (PMDC Technical Report. No. 3). Tallahassee, Fl. Florida State University.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje,* 39-40, 71-81.

Best, J. W. (1970) *Research in Education*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Bieda, K. N. y Nathan, M. J. (2009). Representational disfluency in algebra: Evidence from student gestures and speech. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 41*(5), 637- 650.

Bilsky, L.H. y Judd, T. (1986). Sources of difficulty in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and nonretarded individuals. *American Journal of Mental Deficiency, 90,* 395-402.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa*. Guía Práctica. Barcelona: Ceac.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children´s Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Windsor, United Kingdom: NFER-NELSON.

Booth, L. R. (1988).Children`s Difficulties in Beginning Algebra. En A.F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.). *The Ideas of Algebra*, K-12 (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Booth, L. R. y Thomas, M. (2000) Visualization in Mathematics Learning: Arithmetic Problem-Solving and student Difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 169-190.

Botsmanova. M. E. (1972). *The Forms of Pictorial Visual Aids in Instruction in Arithmetic Problem Solving*, en Kilpatrick y Wirszup (Eds.).

Box, C.A. y Cochenour, J. (1994). *Visual literacy: What do prospective teachers need to know?* Paper presented at the Annual Conference of the Visual Literacy Association, Tempe, Arizona.

Briars, D.J. y Larkin, J.H.(1984). An integrated model of skill in solving elemental word problems. *Cognition and Instruction, 1*(3), 245-296.

Brueckner, L. J. y Grossnickle, F. E. (1953). *Making Arithmetic Meaningful*. Philadelphia: John C. Winston Company.

Bruner. J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. (Harvard University Press: Cambridge. Mass).

Cañadas, C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M.(1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 7-44). Orlando, Florida: Academic Press.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179-202.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: ICE/Horsori.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en los problemas verbales de comparación multiplicativa.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: ICE/Horsori.

Castro, E, Rico, L. y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin and K. Graham, *Proceedings of the sixteenth* PME, *1*, pp. 113-120. Durham, NH (USA): University of New Hampshire.

Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations Produced by Secondary Education Pupils in Mathematical Problem Solving. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, pp. 547-558. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Cheng, P. C. H. (1994). An empirical investigation of law encoding diagrams for instruction. *En Proceedings of the 16th Annual Conference of the Cognitive Science Society*. (pp. 171-176). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cheng, P. C. H. (1995). Law encoding diagrams for instructional systems. *Journal of Artificial Intelligence in Education, 7*(1).

Cheng, P. C. H. (1996). Functional Roles for the Cognitive Analysis of Diagrams in Problem Solving. En G. W. Cottrell (Eds.), *Proceeding of the Eighteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society,* (pp. 207-212). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cheng, P. C. H. (2004). Why diagrams are (sometimes) six times easier than words: benefit beyond locational indexing. En A. Blackwell, K.Marriott, y A. Shimojima (Eds.), *Diagrammatic representation and inference, third international conference, diagrams*, pp. 242-254. Heidelberg: Springer.

Chi, M.T.H. y Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. En R. J. Sternberg (Ed.), *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información* (pp. 303-324). Barcelona: Labor.

Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 239-264.

Cohen, E. y Kanim, S. E. (2005). Factors influencing the algebra “reversal error”. *American Journal of Physics, 73*(11), 1074-1078.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, La Muralla.

Collis, K. F. (1974). *Cognitive Development & Mathematics Learning*. Documento presentado en el Psychology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction, 9,* 343-363.

Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K. y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20,* 405-438.

Cuoco, A. A. y Curcio, F. R. (Eds.). (2001). The roles of representation in school mathematics. Reston, Virginia: *The National Council of Teachers of Mathematics*.

DeBlois L. (1997). Quand additionner ou soustraire implique comparer. *Éducation et Francophonie XXV*. Québec: Association canadienne d'éducation en langue française. 102-120.

De Bock, D., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2011). Students‟ over-use of linearity: An exploration in physics. *Research in Science Education, 41*(3), 389-412.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W. y Claes K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students’ performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13* (4), 441-463.

De Corte, E. y Verschaffel, L.(1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 363-381.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children’s problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*, 460-470.

Dellarosa, D. (1986). A computer simulation of children`s arithmetic word problem solving. *Behavior Research Methods, Instruments, and Computers, 18,* 147-154.

De Windt-King, A.M. y Goldin, G. A. (2003). Children’s visual imagery: Aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2* (1), 1-42.

Diezmann, C. M. (1999). Assessing diagram quality: Making a difference to representation. En *Proceedings of the 22nd Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia,* (pp.185-191), Adelaide.

Diezmann, C. M. (2005). *Assessing primary students' knowledge of networks, hierarchies and matrices using scenario-based tasks*. En P. Clarkson, A. Downtown, D. Gronn, M. Horne, A. McDonagh, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 289-296). Sydney: MERGA.

Diezmann, C. M. y English, L. D. (2001).Promoting the use of diagrams as tools for thinking. En A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (pp. 77-89). Reston, VA: NCTM.

Dubinsky, E. y Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *CMBS issues in mathematics education* (pp. 239-289). Providence, RI: American Mathematical Society.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. y Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in mathematical Thinking. *Basic Issues for Learning. 21th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Cuernavaca, Mexico (ERIC Document Reproduction Service Nº. ED 466 379).

Edens, K. y Potter, E (2007). The Relationships of Drawing and Mathematical problem Solving: Draw for Math Tasks. *Studies in Art Education A Journal of Issues and Research. 48*(3), 282-298.

Elia, I., Gagatsis, A. y Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17* (6), 658-672.

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83-106.

Ernst, K. (1997). What a picture can be. *Teaching PreK-8, 28*, 26.

Espinosa, E. (2004).*Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Essien, A. y Setati, M. (2006). Revisiting the equal sign: Some Grade 8 and 9 learners' interpretations. African Journal of Research in Science, *Mathematics and Technology Education, 10*(1), 47-58.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 11-50.

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 27-47.

Ford, M. (1988). The picture box worksheet. *The Reading Teacher, 42*, 90-91.

Fremont, G. (1979). « Casse-texte », *Etudes Littéraires, 12*(3), 315-330.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenológica didáctica de las estructuras matemáticas* (Textos seleccionados). Traducción, notas e introducción de L. Puig. México D.F.: Cinvestav, IPN.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. En A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics, 2001 Yearbook* (pp. 173-185). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, 17- 18, 51-59.

Fuson, K. C. y Willis, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *81*(4), 514-520.

Gagatsis, A. y Elia, I. (2004). The effects of different modes of representations on mathematical problem solving. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 447-454). Bergen, Norway: PME.

Gall, M. D., Borg, W. R. y Gall, J. P. (1996) *Educational Research: An Introduction*. New York: Longman.

Glass, A.L. y Holyoak, K. J. (1986). *Cognition (2ª Ed.).*New York: Randon House.

Glen, B. (1974). *The Effects of Diagram Drawing and Translation on Pupils' Mathematics Problem-Solving Performance.* Dissertation and theses. The University of Iwoa. Education Elementary.

Goldin, G. y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. A. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics,* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G.A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

González, F.M., (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada.

Greer, B. 1992. Multiplication and division as models of situations. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, ed. D. A. Grouws, (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Grossnickle, F. E. y Reckzeh, J. (1973). *Discovering Meanings in Elementary School Mathematics*. New York: Holt, Rinehart, Winston.

Guillaume, A. M. (1998). Learning with text in the primary grades. *The Reading Teacher, 51*, 476-486.

Güemes, R. (1994). *Libros de texto y desarrollo del curriculum en el aula. Un estudio de casos*. Tesis doctoral, La Laguna (Tenerife): Dpto. de Didáctica e Investigación Educativa y del Comportamiento, Universidad de La Laguna.

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E. y Truxsaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of Algebra story problem solving. *Cognition and Instruction, 6*, 223-283.

Hart, L. C., Smith, S. Z., Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education. *Journal of Mixed Methods Research, 30*, 26–41.

Hegarty, M; Mayer, R. E. y Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students-eye fixations. *Journal of Educational Psychology*, *84*(1), 76-84.

Hegarty, M., Mayer, R., y Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*, 18-32.

Hegarty, M. y Narayanan, N. H. (1994).Visual reasoning in problem solving. En A. Ram & K. Eiselt (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 982-984). Hillsdale, NJ: Elbaum.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving a metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 242-273.

Henderson, K. B. y Pingry, R. E. (1953). Problem solving in mathematics. En H. F. Fehr (Ed.), *The learning of mathematics: Its theory and practice* (pp. 228-270). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Hershkovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-86). Reston, VA: NCTM.

Hershkovitz, S. y Nesher, P. (2003). The Rol of Schemes in Solving Word Problems. *The Mathematics Educator, 7*(2), 1 – 24.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Mcmillan.

Hines, E. (2003). Instructional decisions: helping students build links between representations. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 25*(1), 14-28.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90.

Hunter, R. (2006). Structuring the talk towards mathematical inquiry. En P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities cultures and learning spaces: Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 309–318). Adelaide, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Ibarra, C. G. y Lindvall, C. M (1979). *And investigation of factors Associates with children´s comprehension of simple history problems insolving addition and substraction prior to formal instruccion on these operations.* National Council of Theachers of Mathematics, Boston. Mass.

Ichikawa, S. (1993). Case report of cognitive counseling in 'mathematical thinking. *En S. Ichikawa (Ed.), Cognitive counseling that supports learning: A new approach bridging psychology and education.* (pp. 36-61). Tokyo: Brain Press.

Ichikawa, S. (2000). *A book about changing the approach to learning*. Tokyo: Iwanami Press.

Izsák, A. (2003). “We want a statement that is always true”: Criteria for a good algebraic representations and the development of modelling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 34* (3), 191-227.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jitendra, A. K. (2002). Teaching students math problem-solving through graphic representations. *Teaching Exceptional Children, 34*(4), 34-38.

Jitendra, A. K., DiPipi, C. M. y Perron-Jones, N. (2002). An exploratory study of word problem-solving instruction for middle school students with learning disabilities: An emphasis on conceptual and procedural understanding. *Journal of Special Education, 36*(1), 23-38.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*. Cambridge, Harvard University Press.

Kant, I. (1980 Edition). *Critique of pure reason*. London: Macmillan.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan Publishing.

Kaput, J. J. y Clement, J. (1979). Letter to the editor of JCMB. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 2*, pp. 208.

Karnowski, L. (1989). Using LEA with process writing. *The Reading Teacher, 42*, 462-465.

Kieran, C. (2006) Research of the Learning and Teaching of Algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Educations: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. *Psychological Review, 95,* 163-182.

Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*, 109-129.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A. y Stephens, A. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76.

Koedinger, K. R. y Terao, A. (2002). A cognitive task analysis of using pictures to support prealgebraic reasoning. *En C.D. Schunn & W. Gray (Eds.), Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp.542–547). Mawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kosslyn, S. M. (2006). Graph design for the eye and mind. New York: Oxford University Press.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in the school*, *7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics:* 11-16 (pp. 102-119) London: John Murray.

Laborde, C. (1990). Language and mathematics. En P. Nesher P. y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 53-69). New York: Cambridge University Press.

Larkin, J. y Simon, H. A. (1987). Why a diagram (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science, 11*, 65-99.

Lewis, A. B. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 81*, 521-531.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Lindvall, C. M., Tamburino, J. L. y Robinson, L. (1982, March). *An exploratory study of the effect of teaching primary grade children to use specific problem solving strategies in solving simple arithmetic story problems*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

Lowrie, T. y Diezmann, C. M. (2007). Solving graphics problems: Student performance in the junior grades. *The Journal of Educational Research, 100*(6), 369-377.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

Martínez, M. (2011). *Utilización del Método Geométrico Lineal (MGL) para la Resolución de Problemas de Álgebra Elemental*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2011).Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución de un modelo geométrico lineal. *UNION, 25*, 43-61.

Matteson, S. (2006). Mathematical literacy and standardised mathematical assessments. *Reading psychology, 27*(2-3), 205-233.

Mayer, R. E. (2003). The promise of multimedia learning: using the same instructional design methods across different media. *Learning and Instruction, 13*, 125-139.

Mayer, R.E. (1981). Frequency Norms and Structural Analysis of Algebra Story Problems into Families, Categories, and Templates; *Instructional Science, 10*, 135-175.

Mayer, R.E. (1997). *What Money Can't Buy: Family Income and Children's Life Chances*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Mayer, R. E., Lewis, A. B. y Hegarty, M. (1992). *Mathematical misunderstandings: Qualitative reasoning about quantitative problems*. En J. I. D. Campbell (Ed.), The nature and origins of mathematical skills (pp. 137-154). Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

McCombs, B. L. (1988). Motivational skill training: affective learning strategies. En C. E. Westin, E. T. Goetz, & A. Alexander (Eds.), *Learning and study strategies: Issues in assessment, instruction, and evaluation* (pp. 141-169). San Diego: Academic Press.

Meron, R. y Peled, I. (2004) Situated or abstract: the effect of combining context and structure on constructing an additive (part-part-whole) schema. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 1-8).

Mestre, J. P. (1988). The role of language comprehension in mathematics and problem solving. En R. R. Cocking y J. P. Mestre (Eds.), *Linguistic and cultural influences on learning mathematics* (pp. 201-220). Hillsdalle, NJ: Erlbaum.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán, *Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

Montague, M. y Applegate, B. (1993). Matematical problem solving characterictss of middle school students with learning difficulties. *The Journal of Special Education*, *7*, 175-201.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston VA: The Council.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problem. *For the Learning of Mathematics*, *1*, 41-48.

Nesher, P. (1989). Microworlds in mathematical education: A pedagogical realism. En L.B. Resnick (Ed.), *Knowing Learning and Instruction.* (p. 187-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human Problem Solving. Englewood Cliffs*, NJ: Prentice-Hall.

Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 282-313.

Nickerson, R.S., Perkins, D.N. y Smith, E.E. (1994). *Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual*. Barcelona: Paidós-M.E.C.

Novick, R. (1996). *Developmentally Appropriate and Culturally Responsive Education: Theory in Practice*. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory.

Novick, L. y Hurley, M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: that is the question. *Cognitive Psychology*, *42*, 158-216.

Novick, L. R., Hurley, S. M. y Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition, 27,* 288-308.

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. New York: Oxford University Press.

Pantziara, M., Gagatsis, A. y Pitta-Pantazi, D. (2004). The use of diagrams in solving non-routine problems. En M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.),*Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3,* (pp. 489-496). Bergen, Norway: Bergen University College.

Palarea, M. y Socas, M. (1995). Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma, 20*, 29-35.

Pantziara, M., Gagatsis, A. y Elia, I. (2009). Using diagrams as tool for the solution of non-routine mathematical problems. *Education Students Mathematics, 72*, 39-60.

Pape, S. J. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. *Contemporany Educational Psychology*, *28*, 396-142.

Pericola, L., Harris, K. y Graham, S. (1992).Improving the Mathematical Problem-Solvingskills of Students with Learning Dissabilities: Selfregulated Strategy Development. *The Journal of Special Education*, *26* (1), 1-19.

Peterson, D. B. (1996). Executive coaching at work: The art of one-on-one change. *Consulting Psychology Journal: Practice & Research*, *48*(2), 78-86.

Piaget, J. (1971, 1967). *Biology and knowledge*. Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1980). *Experiments in contradiction.* Chicago and London: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1985). *The equilibrium of cognitive structures*. Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. New York: Basic Books.

Plasencia, C. E. (2002). Fire and rain: A case study using the life history method. *Dissertation Abstracts International: Section B: The Sciences & Engineering, 62* (7), 33-86.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Postigo, Y. y Pozo, J. (2004). On the road to graphicacy: The learning of graphical representation systems. *Educational Psychology, 24*(5), 623-644.

Puig, L. y Cerdán, F (1988).*Problemas Aritméticos Escolares.* Madrid: Síntesis.

Radford, L. (2006). *Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective*. En S.Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Groupfor the Psychology of Mathematics Education: Vol. 1 (pp. 2-21). Mérida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.

Rathmell, E. C. (1986). Helping children learn to solve story problems. En A. Zollman, W. Speer y J. Meyer (Eds.), *The fifth mathematics methods conference papers* (101-109). Bowing Green, OH: Bowling Green State University.

Reusser, K. (1989). *Textual and situational factors in solving mathematical word problems* (Research Rep. No. 7). Bern, Switzerland: University of Bern, Department of Educational Psychology.

Riedesel, C. A. (1963). *Improving Verbal Problem Solving Ability in Arithmetic*. Un published doctoral dissertation. University of Iowa.

Riedesel, C. A. (1964). Verbal Problem Solving: Suggestions for Improving Instruction. *Arithmetic Teacher, 11*, 312-316.

Riley, M. S. y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5*, 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. J. (1983). *Development of children's problem solving ability in arithmetic.* En H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 153-196), New York: Academic Press.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students´ Access to Significant Mathematical Ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143-163). Mahwak, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Rumelhart, D. E. (1980). *Schemata: The building blocks of cognition*. En W. F. Brewer (Ed.), Theoretical issues in reading comprehension. Hillsdale, NJ: Llawrence Erlbaum Associates.

Rumelhart, D. E. y Norman, D. A. (1985). *Representation and knowledge*. En A. M. Aitkenhead & J. M. Slack (Eds.), Issues in cognitive modeling. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sato, J. (1998). Effects of learners' perception of utility and costs, and learning strategy preferences. *Japanese Educational Psychology, 46*, 367-376.

Schank, R. y Abelson, R. (1977). *Scripts, plans, goals and understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Shanklin, N. L. y Rhodes, L. K. (1989). Comprehension instruction as sharing and extending. *The Reading Teacher, 42*, 496-500.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.

Schnotz, W. y Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, *13*, 141-156.

Schnotz, W. (2002). Towards an integrative view of learning from text and visual displays. *Educational Psychology Review, 14*(1), 101-120.

Schnotz, W. y Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, *13*, 141-156.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Sherrill, J. M. (1972). The Effects of Differing Presentations of mathematical Word Problems Upon the Achievement of Tenth Grade Students. *Investigations in Mathematics Education*, *73,* 277-282.

Silver, E. A. y Thompson, A. G. (1984). Research perspectives on problem solving in elementary school mathematics. *The Elementary School Journal, 84*, 529-545.

Simon, M. (1986). Components of effective use of diagrams in math problem solving. Proceedings of the North American *Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (pp. 1-7). East Lansing, MI. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 309 924).

Sims, J. (1969). Improving Problem Solving Skills, *Arithmetic Teacher, 16*(1), 20.

Smith, S. P. (2003). Representation in school mathematics: Children's representations of problems. En J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 263-274). Reston, NJ: NCTM.

Sowder, L. y Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Spitzer, H.F. (1967). *Teaching Elementary School Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Co.

Stern, E. (1992). *Why do children solve nonsense problems? Understanding and solving arithmetic word problems from a psychological point of view, 4,* 7-29.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology*, *85*(1), 7-23.

Stern, E., Aprea, C. y Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and Instruction*, *13*, 191-203.

Stern, E. y Lehmdorfer, A. (1992). The role of situational context in solving words problems. *Cognitive Development, 7*(1), 259-268.

Sternberg, R. J. y Horvath, J. A. (1995). A prototype view of expert teaching. *Educational Researcher, 24*(6), 9-17.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 225-232. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Suppes, P., Loftus, E. y Jerman, M. (1969). Problem solving on a computer-based teletype. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 1-15.

Suydam, M.N. y Weaver, J. F. (1970). *Interpretive study of research and development in elementary school mathematics.* University Park, Pennsylvania: Center for Cooperative Research with Schools.

Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction, 4*, 295-312.

Tabachneck, H.J.M., Leonardo, A. M. y Simon, H. A. (1994). How does an expert use a graph? A model of visual and verbal inferencing in economics. En A. Ram & K. Eiselt (Eds.), *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 842-847). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Uesaka, Y. (2002). The relationship between students' use, and beliefs about the effectiveness and difficulties involved in the use of diagrams. *Proceedings of the 44th annual conference of Japanese educational psychology* (p. 176). Tokyo: The Japanese Association of Educational Psychology.

Uesaka, Y. (2003). The influence of visualized skills on diagram use in mathematical problem solving. *Proceedings of the 67th annual conference of the Japanese Psychological Association* (p. 501). Tokyo: The Japanese Association of Educational Psychology.

Uesaka, Y. y Manalo, E. (2008). School curriculum development to promote student spontaneous diagram use in problem solving. En G. Stapleton, J. Howse, & J. Lee (Eds.), *Lecture Notes in Artificial Intelligence 5223* (pp. 437-439). Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.

Uesaka, Y., Manalo, E. e Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instructions*, *17*(3), 322-335.

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition form arithmetic to algebra*. Utrecht: CD–β Press y Center for Science and Mathematics Education.

Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics:Teaching developmentally* (3rd ed.). New York: Longman.

Van Dijk, T. A. y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. San Diego, CA: Academic Press.

Van Essen, G. y Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research, 83*(6), 301-312.

Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities, 40*(6), 540-553.

Van Lieshout, E.C.D., Jaspers, M.W. y Landewé, B.R. (1994). Mathematical word problem solving of normally achieving and mildly mentally retarded children. En J.E.H. Van Luit (Ed.), *Research on learning and instruction of mathematical in kindergarten and primary school* (pp.344-365).

Van Meter, P. (2001). Drawing Construction as a Strategy for Learning From Text. *Journal of Educational Psychology, 93*(1), 129-140.

Vekiri, I. (2002). What is the value of graphical displays in learning? *Educational Psychology Review*, *14*(3), 261-312.

Veloo, P. K. y Lopez-Real, F. (1994). An analysis of diagrams used by secondary school pupils in solving mathematical problems. En J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 1, pp. 80). Lisbon, Portugal:PME.

Verdi, M.P., Johnson, J.T., Stock, W.A., Kulhavy, R.W. y Whitman-Ahern, P. (1997). Organized spatial displays and texts. Effects of presentation order and display type on learning outcomes. *Journal of Experimental Education*, *4,* 303-317.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En Lesh, R. and Landau, M. (Eds.). *Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes*, (pp. 127-174). New York.: Academic Press Inc.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, (pp. 141-161). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum,

Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children´s representations and solutions of compare problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2)*,* 141-165.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*(1), 85-94.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weinberg, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. En T. Lamberg & L. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Lake Tahoe, NV: University of Nevada-Reno.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. En L. D. English (Ed*.) Mathematical Reasoning: Analogies, metaphors, and images*, (pp. 281- 297). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Willis, G.B. y Fuson, K.C. (1988).Teaching Children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word problem. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.

Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. *Learning Disability Quarterly, 29*, 269–289.

Yancey, A. V., Thompson, C. S. y Yancey, J. S. (1989). Children must learn to draw diagrams. *Arithmetic Teacher*, *36*(7), 15-23.

Yerushalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning, 7*, 42-57.

Zhang, J. (1997). The Nature of External Representations in Problem Solving. *Cognitive Science, 21*(2), 179-217.

Zivkovich, P. V. (1997). Building vocabulary with a 3-D word wall. *Teaching preK-8*, 28, 58-59.

ANEXO A

CUESTIONARIO 1º DE ESO

Hoja de Problemas 1
Centro: ___________________________________Fecha__________________
Nombre y apellidos: ____
Fecha de Nacimiento: día____mes____año_______Curso_________ Grupo______

Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

1. En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?

a) Resuelve el problema

b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema

Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

2. Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?

a) Resuelve el problema

b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

I de ESO.

Hoja de Problemas 2

Centro: ____________________________________Fecha___________________

Nombre y apellidos: ____

Fecha de Nacimiento: día____mes____año_______Curso_________ Grupo______

3. Dada la siguiente igualdad:

$$\mathbf{5 \cdot 7 = x}$$

a) Invento un problema en el que se utilice la expresión "veces tanto como"

b) Dibuja un diagrama que represente gráficamente la igualdad anterior ($\mathbf{5 \cdot 7 = x}$)

4. Dada la siguiente ecuación

$$6 \cdot x = 72$$

a) Inventa un problema en el que se utilice la expresión “veces tanto como”

b) Dibuja un diagrama que represente gráficamente la ecuación anterior

I de ESO.

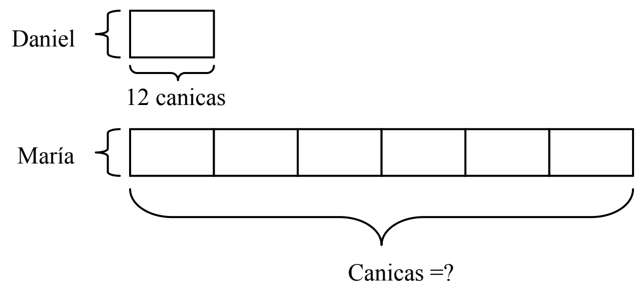
Hoja de Problemas 3

Centro: ___________________________________Fecha__________________

Nombre y apellidos: ____

Fecha de Nacimiento: día____mes____año_______Curso_________ Grupo______

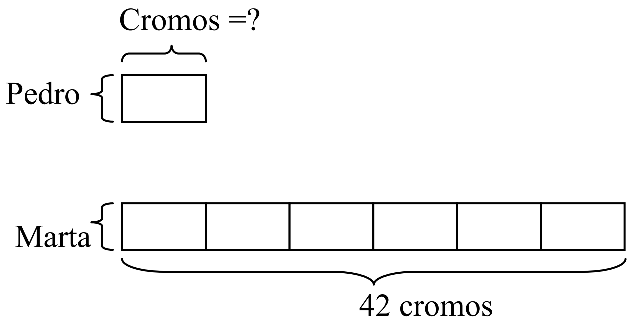
5. Dado este diagrama que representa las cantidades que tienen Daniel y María



a) Inventa un problema que se ajuste al mismo y que contenga la expresión “veces tanto como”. Resuelve el problema que has enunciado.

b) Si D representa la cantidad de canicas de Daniel y M representa la cantidad de canicas de María, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.

6. En el diagrama siguiente están representadas las cantidades de Pedro y Marta.



a) Inventa un problema que se corresponda con el diagrama que contenga la expresión “veces tanto como”. Resuelve el problema que has enunciado.

b) Empleando las letras P y M para representar las cantidades de Pedro y Marta respectivamente, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.

ANEXO B

AUTORIZACIÓN ENTREVISTA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Estimados padres y madres de familia, les informo que en los próximos días la profesora de matemáticas Dña. Fany González, realizará una entrevista a alumnos de 1ºESO y 2ºESO sobre resolución de problemas matemáticos.

Esta entrevista será grabada en vídeo garantizando la confidencialidad de las imágenes y de los datos obtenidos. Los resultados se utilizarán como parte de un trabajo de investigación en el ámbito educativo referente a las respuestas verbales que dan los alumnos y alumnas ante los problemas y situaciones de matemáticas. La entrevista forma parte de un proyecto de investigación del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada y no se trata de evaluación del alumno/alumna.

Si ustedes no tienen inconveniente en que su hijo o hija sea entrevistado les pido que mediante el siguiente escrito autoricen dicha entrevista. Gracias.

D./Dña. ____ autorizo a mi hijo o hija ____, alumno/a del curso _____________________ a que participe en la entrevista que se realizará en el Centro IES Ángel Ganivet como parte de un proyecto educativo dirigido por Dr. D. Enrique Castro Martínez, profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación.

En Granada a _____ de ___________ de ____________________

Copia para la familia

D. /Dña. ____ autorizo a mi hijo o hija ____, alumno/a del curso _____________________ a que participe en la entrevista que se realizará en el centro IES Ángel Ganivet como parte de un proyecto educativo dirigido por D. Enrique Castro Martínez profesor de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación.

En Granada a _____ de ___________ de ____________________

ANEXO C

PLANTILLAS PARA ENTREVISTA

Formulario 1

Centro: ___________________________________Fecha__________________

Nombre y apellidos: ____

Fecha de Nacimiento: día____mes____año_______Curso_________ Grupo______

I. Parte. Dado los problemas enunciado verbalmente:

1. En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?

a) dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema

Formulario 2

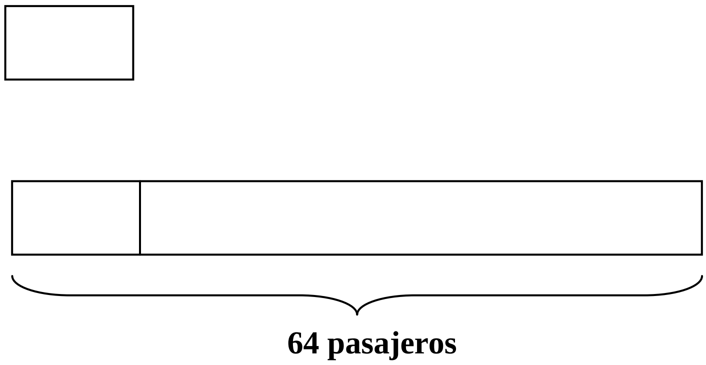
2. Isabel ahorró 75 euros. Ella ahorró 5 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?

a) dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

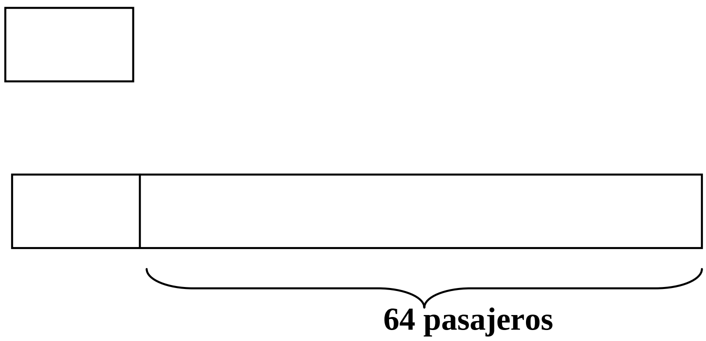
Formulario 3

3a. Te presento tres diagramas dibujados por tus compañeros ¿Cuál representa los datos del enunciado del problema del formulario 1? Explica tu respuesta.

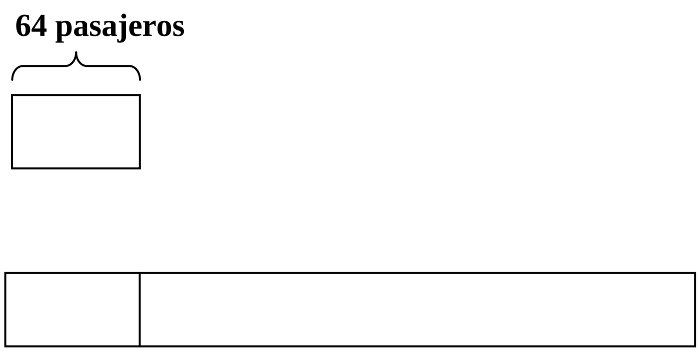
a.



b.

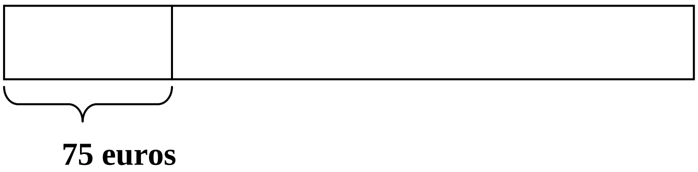


c.

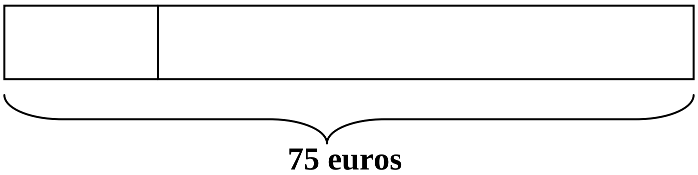


3b. Te presento tres diagramas ¿Cuál de los tres representa los datos del enunciado del problema del formulario 2? ¿Por qué?

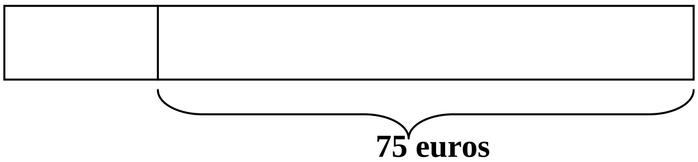
a)



b)



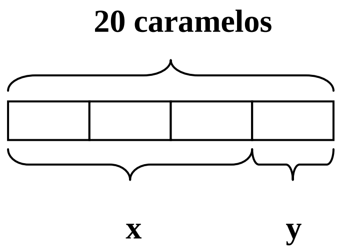
c)



Formulario 4

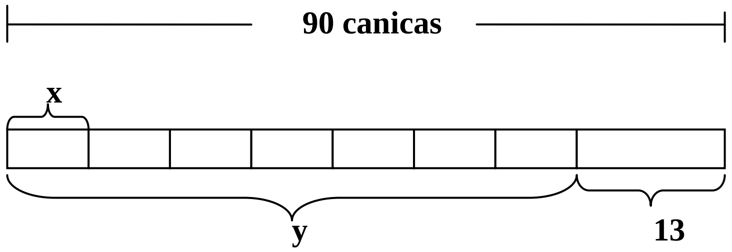
II Parte. A continuación te presento unos diagramas.

1. Halla el valor de x e y



Formulario 5

2. Halla el valor de x e y



Formulario 6

3. Halla el valor de x e y