Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

Departamento de Estadística Matemática

Problemas de decisión en ambiente difuso

José Luis Verdegay Galdeano

TESIS DOCTORAL

Noviembre 1980

Departamento de Estadística Matemática
Facultad de Ciencias

PROBLEMAS DE DECISION EN AMBIENTE DIFUSO

JOSE LUIS VERDEGAY GALDEANO

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1980

Realizado el acto publico de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el -- dia 6 de Marzo de 1981, en la Universidad de Granada, ante el tribunal formado por:

Presidente: Dr. D. Segundo Gutierrez Cabria

Vocales: Dr. D. Francisco Cano Sevilla
Dr. D. Rafael Infante Macias
Dr. D. Ramiro Melendreras Gimeno

Secretario: Dr. D. Miguel Delgado Calvo-Flores

obtuvo la Calificacion de:

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Quiero expresar mi agradecimiento al Prof.·Dr. D. Miguel Delgado -- Calvo-Flores y al Prof. Dr. D. Ramiro Melendreras Gimeno por su dirección y consejos en la elaboración de esta Memoria. Asi mismo , hago extensivo este agradecimiento a todas aquellas personas que, de un modo u otro, han colaborado en la realizacion de la misma.

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I: CONCEPTOS BASICOS

I.1: Introduccion

I.2: El reticulo de los Subconjuntos Difusos

I.3: Teorema de Representacion de los Subconjuntos Difusos

I.4: Estudio de las Relaciones Difusas

I.5: Convexidad y Subconjuntos Difusos

CAPITULO II: DECISION EN AMBIENTE DIFUSO

II.1: Introduccion

II.2: El Concepto de Decision Difusa de Bellman-Zadeh

II.3: Aproximacion de Jain al Problema de Decision en Ambiente Difuso

II.4: El Enfoque de Orlovsky

II.5: Otros Metodos de Resolucion

II.6: Un Nuevo Enfoque de la Toma de Decisiones en Ambiente Difuso

II.6.1: Relacion de Preferencia Difusa en el Problema General de Decision

II.6.2: Espacio de Acciones Admisibles Difuso en el Problema General de Decision

II.6.3: Problema General de Decision con Espacio de Acciones Admisibles y Relacion de Preferencia Difusos

CAPITULO III: PROGRAMACION MATEMATICA DIFUSA

III.1: Introduccion

III.2: El Planteamiento de Tanaka

III.3: El Planteamiento de Zimmermann

III.4: Comentarios

III.5: Un Nuevo Enfoque de la Programacion Difusa

III.5.1: Conjunto de Restricciones Difuso en el Problema de Programacion Matematica

III.5.2: Objetivo Difuso en el Problema de Programacion Matematica

III.5.3: Funcion Objetivo y Restricciones Difusas en el Problema de P. M.

III.6: Interpretacion del Objetivo Difuso segun la Teoria de la Dominacion

REFERENCIAS

INTRODUCCION

El concepto de subconjunto difuso, fue inicialmente presentado por Zadeh (1965) como una generalizacion natural de la nocion de conjunto.

El no ser una teoria con una base perfectamente establecida, por su corto tiempo de existencia, hace, y hemos de reconocerlo, que tenga muchos detractores, los -- cuales se hacen, principalmente, dos preguntas: ¿Porquehan de usarse los subconjuntos difusos? y, ¿Sera una moda cientifica pasajera?.

Con respecto a la primera cuestion, podemos razonar del siguiente modo. Los problemas que normalmente estamos acostumbrados a encontrarnos, podemos clasificarlos, de un modo muy amplio, en dos grandes grupos: Aquellos - cuyo planteamiento, a todos los niveles, esta perfectamente determinado, es decir, se tiene un conocimiento - exacto sobre los datos y relaciones que se dan en el problema (lo cual no significa que se trate de un modelo determinista) y aquellos otros que llevan aparejada, con - la formulacion del problema, cierta incertidumbre, es decir, hay elementos en el planteamiento del modelo, que - no son conocidos exactamente.

En relacion con el primer grupo, hemos de pensar -- que, al menos teoricamente, no hay dificultad en su resolucion. En el segundo grupo que comentamos, hay que hacer ciertas consideraciones. La incertidumbre que consideramos sobre estos problemas, a su vez, podemos verla - en dos formas. La primera seria relativa a que existiera una incertidumbre de tipo probabilistico en el establecimiento del problema. En este caso, dicho problema, ten -

dria que ser resuelto en el campo de la teoria del Calculo de probabilidades e, igual que en el primer grupo que consideramos, sin entrar en detalles, suponer que se resolveria.

Ahora bien, cabe un segundo tipo de incertidumbre,- que no excluye al anterior, correspondiente a la "imprecision" del planteamiento del problema. Esta imprecision hemos de entenderla en el sentido de que los problemas,- tengan una formulacion flexible, es decir, considerando- mas dimensiones las empleadas comunmente: bien-mal, cierto-falso, si-no, etc.

Exactamente en este lugar es donde hay que colocar- a la teoria de subconjuntos difusos, entendiendola como- una nueva herramienta para resolver problemas con planteamiento impreciso, en el sentido ya señalado.

Logicamente, contestando asi a la primera pregunta- que planteabamos, hemos de ver que, a su vez, hemos respondido a la segunda. En efecto, si la teoria de subconjuntos difusos se ha establecido como un modo de enfocar una serie de problemas existentes en la vida real, y hasta ahora no bien resueltos, debemos entender que no se - trata de una moda cientifica pasajera sino, como hemos - dicho, de una nueva herramienta para atacar los proble - mas de los que hablabamos.

Uno de los primeros campos de aplicacion de los subconjuntos difusos, fue el de la Teoria de la Decision.Su comienzo podemos fijarlo en el año 1970, en el que se publica la filosofia de base de la llamada Teoria de la Decision en ambiente difuso, debida a Bellman y Zadeh. El- porque de la decision en ambiente difuso, esta claro: mu chas de las decisiones que se toman en la vida real, tienen lugar en un contexto en el que los objetivos, las restricciones y las consecuencias de las posibles acciones, no son conocidas precisamente, dando lugar a una imprecision que justifica la introduccion de esta teoria.

Con esta base establecida, Jain (1976) da una cierta estructura formal a los problemas de decision en ambiente difuso, si bien, y como viene siendo habitual en la literatura especializada, no presta ninguna importancia a los problemas concernientes a la aplicacion de la teoria, como ocurre, por ejemplo, con la cuestion de la determinacion de la funcion de utilidad, la cual siempre se supone existente.

Parece logico el pensar que una teoria cuyo proposito es su aplicacion a los problemas de la vida real, debiera primero resolver los problemas sobre su propia existencia. Este sera, en consecuencia uno de nuestros propositos en esta memoria, la construccion de una funcion de utilidad para los problemas de decision en ambiente difuso.

El problema de decision de Jain, es resuelto tambien por Tanaka et al. (1976) pero desde el punto de vista de la informacion contenida en los sucesos difusos, dando un algoritmo para la determinacion de la alternativa de mayor utilidad pero, como antes, sin dar una justificacion de la existencia de la utilidad.

Orlovsky (1978) traslada el problema a la relacion de preferencia entre las alternativas, supuesta difusa, dando un algoritmo para encontrar la mejor alternativa -

en base exclusivamente a la relacion de orden que se suponga en el problema.

Si tuvieramos que destacar algo, como factor comun de los metodos empleados en la resolucion de estos problemas, tendriamos que fijarnos en que, si bien el planteamiento de todos los problemas es difuso, no ocurre lo mismo con sus soluciones. En efecto, todos los autores, enfocan los metodos de resolucion a obtener una solucion bien definida al problema. Resulta contradictorio, sin embargo pensar que un problema de planteamiento inexacto, tenga una solucion exacta, cuando lo logico es que si la formulacion es imprecisa, la solucion tambien lo sea. Esta premisa, sera fundamental en el desarrollo de esta memoria, por lo que la resolucion de los problemas que contemplamos en ella, se enfocara bajo este punto de vista.

Paralelamente al desarrollo de la Teoria de la Decision en ambiente difuso, se empiezan a conocer los primeros problemas sobre Programacion Matematica difusa, sin tener ninguna relacion ambos estudios, es decir, no estudiandose la programacion como un problema de decision. En realidad, este hecho no es importante al tratarse de una teoria de reciente implantacion, aunque en este trabajo, consideraremos los problemas de programacion difusa, como problemas de decision difusa de un tipo particular.

La base de la programacion difusa, se encuentra en un trabajo de Tanaka et al. (1974) en el que se resuelve el primer ejemplo practico de este tipo, mediante un algoritmo basado en "aproximaciones sucesivas" a la mejor solucion, con un margen de error previamente fijado. Igual que en los trabajos anteriores, relativos a decision propiamente, el algoritmo se centra en la busqueda de una solucion unica para el problema.

Precisamente en este camino, se orientan los trabajos desarrollados por Zimmermann entre 1976 y 1979, aunque a diferencia del anterior, este emplea tecnicas clasicas para la resolucion de los problemas difusos si bien, igual que Tanaka et. al, estas tecnicas las enfoca a la obtencion de una unica solucion.

A lo largo de la memoria, tendremos ocasion de analizar detenidamente todos los resultados obtenidos en este campo.

El trabajo, en consecuencia, se ocupa del problema general de decision unipersonal, considerando dos vertientes: La construccion de una utilidad para los problemas de decision en ambiente difuso (atendiendo a los tres contextos basicos: Certidumbre, riesgo e incertidumbre) y por otro lado, el estudio de los problemas de programacion difusa, bajo el punto de vista de la Teoria de la Decision difusa. Para realizar este estudio, hemos dividido la memoria en tres capitulos que pasamos a describir brevemente, a continuacion.

Dedicamos la primera parte a exponer de una forma rapida el concepto de subconjunto difuso y las nociones mas importantes relacionadas con el. La definicion de relacion difusa, merecera un estudio un poco mas detallado, al desempeñar un papel fundamental en el estudio de los problemas de decision.

En el segundo capitulo, se exponen, de una manera muy esquematica, los principales problemas resueltos hasta ahora en la Teoria de la Decision en ambiente difuso. Tras esta introduccion, presentamos el nuevo metodo de -enfoque para la resolucion de dichos problemas, pasando- a continuacion a estudiar la existencia de una "utilidad difusa" para los modelos de decision en los diferentes -contextos, con planteamiento difuso. Esta utilidad difusa, atendiendo a la filosofia ya expresada, la obtendremos como una familia difusa de utilidades, de la que podremos extraer el subconjunto difuso optimal solucion --del problema.

Con este metodo de estudio, de los problemas en ambiente difuso, en el tercer capitulo, pasamos a analizar los modelos de programacion matematica difusa resueltos, para estudiarlos segun el enfoque propuesto y generali -zar su planteamiento al caso no lineal . Comprobaremos -que todas las soluciones obtenidas para estos problemas, pueden ser consideradas soluciones particulares de la solucion difusa que encontramos.

Pondremos de manifiesto, ademas, que el concepto de objetivo difuso que habitualmente se emplea, realmente,-funciona como una restriccion mas en el problema, con lo que justificaremos la introduccion de una nueva defini -cion de objetivo difuso, compatible con el planteamiento teorico de la Teoria de la Decision.

La memoria termina con la enumeracion de la bibliografia mas importante utilizada para su realizacion.

CAPITULO I

I.1. INTRODUCCION.- En este primer capitulo, damos un -- breve repaso a la teoria de subconjuntos difusos (s. d.). La introduccion de las definiciones mas importantes, nos serviran para ir centrando el tema y dar algunos conceptos nuevos que seran utilizados con posterioridad en el desarrollo de esta memoria.

La nocion de relacion difusa, merecera un estudio mas detallado y profundo, debido a que sera usda ampliamente en el resto de los capitulos, debiendo destacar la importancia de todas las proposiciones referentes a la obtencion de relaciones clasicas a partir de las difusas

Como es logico, la mayor parte de los resultados de este capitulo no son originales. Sin embargo, se han incluido las demostraciones de algunas proposiciones, por su importancia en desarrollos posteriores. En cualquier caso, siempre se cita la referencia correspondiente.

Digamos por ultimo que, en todo lo que sigue, notaremos $\vee$ y $\wedge$ los operadores superior e inferior, respectivamente.

I.2. EL RETICULO DE LOS SUBCONJUNTOS DIFUSOS.- Para dar los fundamentos de la teoria de s. d., comenzaremos dando algunas ideas sobre la nocion clasica de pertenencia.

Si X es un conjunto universal, notamos P(X) al conjunto "Partes de X",

$$P(X) = \{A: A \subseteq X\}$$

Si $A \in P(X)$, recordemos que se le puede asociar una funcion denominada caracteristica (tambien indicador) definida por,

$$\mu_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \varepsilon A$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad x \notin A$$

y que puede interpretarse diciendo que $\mu_A(x)$ es el grado- de pertenencia de x a A.

Es bien conocido que P(X) es un Algebra de Boole respecto de las operaciones union, interseccion y complementacion (compatibles a su vez, con la relacion de inclu -- sion).

Si notamos C(X) al conjunto de funciones caracteristicas sobre X, tambien podemos definir una estructura de- Algebra de Boole para este conjunto, mediante las opera - ciones,

$$(\mu \vee \mu')(x) = \mathrm{Sup}\{ \mu(x), \mu'(x) \}$$

$$(\mu \wedge \mu')(x) = \mathrm{Inf}\{ \mu(x), \mu'(x) \}$$

$$\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x) \qquad \forall \mu, \mu' \varepsilon C(X)$$

y una relacion de inclusion compatible,

$$\mu \leqslant \mu' \leftrightarrow \mu(x) \leqslant \mu'(x) \qquad \forall x \varepsilon X$$

En estas condiciones, es inmediato comprobar que estos -- dos conjuntos son isomorfos como Algebras de Boole, sin - mas que identificar cada conjunto con su funcion caracteristica.

Si bien la teoria conjuntista clasica y la nocion de pertenencia bivaluada (correspondiente a la logica de dos estados) permite la modelizacion de multitud de situaciones reales, existen otras muchas que no pueden ser facilmente encajadas en esta estructura, si no es mediante convenios taxonomicos de gran rigidez, que pueden llegar a -

desvirtuar el modelo

Consideremos, por ejemplo, el conjunto de todos los seres humanos y establezcamos el subconjunto de todos -- los seres humanos vivos. Salvo consideraciones de tipo - clinico, esta claro que, en este caso, siempre se puede-decidir si una persona pertenece o no a dicho subconjunto y fijar, perfectamente, los limites del mismo.

Por el contrario, si consideramos de nuevo el con - junto de todos los seres humanos vivos y tratamos de determinar el subconjunto de los deficientes mentales, el-problema no es tan claro: Dado un determinado individuo, la teoria clasica, solo permite asegurar si es deficiente mental o no, y en caso de serlo no hay modo de distinguir los diferentes grados de deficiencia. Dicho de otro modo, los limites del subconjunto de deficientes menta - les, no estan bien definidos, adaptandose poco a la realidad la estructura de la teoria clasica de conjuntos.

En identica situacion nos encontramos al analizar - en profundidad cualquier proceso de decision, de obten-- cion de informacion y, en general, sobre cualquier afirmacion acerca de la verdad o falsedad de una proposicion

Se hace pues necesario, introducir modelos matematicos mas flexibles y acordes con la forma del pensamiento humano y con las situaciones reales. Esta estructura nueva, fue introducida por L.A. Zadeh (1965) mediante la -- teoria de s.d., correspondientes a logicas multivaluadas en la que se aborda el problema relajando la nocion de - pertenencia y admitiendo para esta, variaciones gradua - les, y no restringida solo a tomar dos valores.

I.2.1.DEFINICION (Zadeh, 1965).- Dado un conjunto ordinario X (que denominaremos referencial) un s.d. de X es un conjunto de pares:

$$\{ (x,\alpha),\ x\varepsilon X,\ \alpha\varepsilon[0,1] \}$$

donde cada elemento de X debe ser miembro de un par y solo de uno.

El valor α recibe el nombre de "grado de pertenencia" de x al s.d., siendo inmediato que a todo s.d. se le puede asociar una funcion, llamada de pertenencia,

$$\mu : X \longrightarrow [0,1]$$

tal que,

$$\mu(x) = \alpha \qquad \forall x\varepsilon X$$

de modo inverso, toda funcion $\mu : X \longrightarrow [0,1]$,engendra un s.d. tal que $\mu(x)$ es el grado de pertenencia de x en el mismo.

De acuerdo con esto, tambien podemos dar la siguiente definicion, a la cual nos referiremos continuamente por ser su manejo mas simple,

I.2.2.DEFINICION (Zadeh, 1965).- Un s.d. de X es una funcion,

$$\mu : X \longrightarrow [0,1]$$

Al conjunto de las funciones de pertenencia sobre X, lo notaremos por F(X) y lo identificaremos con la familia de s.d. sobre X, $P_D(X)$. Cuando hablemos de s.d. en el sentido de I.2.1, los notaremos por mayusculas con una tilde; $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$,$\underset{\sim}{C}$,..., quedando bien claro que es lo mismo referirnos al s.d. $A\varepsilon P_D(X)$ que a $\mu_A \varepsilon F(X)$.

I.2.3.DEFINICION (Zadeh,1965).- En F(X) definimos las siguientes operaciones y relaciones:

$\forall \mu,\mu' \varepsilon$ F(X),

$$\text{Union: } (\mu\cup\mu')(x) = \text{Sup}\{\mu(x),\mu'(x)\}$$

$$\text{Interseccion : } (\mu\cap\mu')(x) = \text{Inf}\{\mu(x),\mu'(x)\}$$

$$\text{Complementacion : } \overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$$

$$\text{Inclusion : } \mu\subseteq\mu' \leftrightarrow \mu(x)\leqslant\mu'(x), \forall x\varepsilon X$$

y, como consecuencia,

$$\text{Igualdad : } \mu= \mu' \leftrightarrow \mu(x)=\mu'(x) \qquad \forall x\varepsilon X$$

Puesto que $[0,1]$ es un reticulo completo, podemos definir en F(X) uniones e intersecciones de familias arbitrarias,

$$(\bigcup_{i\varepsilon I} \mu_i)(x) = \text{Sup}_{i\varepsilon I}\ \mu_i(x)$$

$$(\bigcap_{i\varepsilon I} \mu_i)(x) = \text{Inf}_{i\varepsilon I}\ \mu_i(x) \qquad \mu_i \varepsilon F(X), \forall i\varepsilon I$$

Hay autores, Hamacher (1975), que consideran el producto de las funciones de pertenencia asociado con la operacion interseccion,

$$(\mu\cap\mu')(x) = \mu(x)\cdot\mu'(x)$$

Nosotros, sin embargo, siempre supondremos el operador inferior para tal operacion.

I.2.4.TEOREMA (Zadeh,1965).- El conjunto F(X) tiene estructura de reticulo distributivo completo.

Teniendo en cuenta que el conjunto de referencia tiene por funcion de pertenencia,

$$\mu_X(x) = 1 \quad \forall x\varepsilon X$$

y el conjunto vacio,

$$\mu_{\emptyset}(x) = 0 \qquad \forall x \in X$$

se demuestra inmediatamente que,

A) $\mu \cup \mu' = \mu' \cup \mu$; $\mu \cap \mu' = \mu' \cap \mu$

B) $(\mu \cup \mu') \cup \mu'' = \mu \cup (\mu' \cup \mu'')$; $(\mu \cap \mu') \cap \mu'' = \mu \cap (\mu' \cap \mu'')$

C) $\mu \cup \mu = \mu$; $\mu \cap \mu = \mu$

D) $\mu \cup (\mu' \cap \mu) = \mu \cap (\mu' \cup \mu) = \mu$

E) $\mu \cup (\mu' \cap \mu'') = (\mu \cup \mu') \cap (\mu \cup \mu'')$

$\mu \cap (\mu' \cup \mu'') = (\mu \cap \mu') \cup (\mu \cap \mu'')$

F) $\mu \cup 0 = \mu$; $\mu \cap 0 = 0$; $\mu \cup 1 = 1$; $\mu \cap 1 = \mu$

G) $\overline{\overline{\mu}} = \mu$; $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$

Asi mismo las leyes distributivas no finitas,

H) $\mu \cap (\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} (\mu \cap \mu_i)$

$\mu \cup (\bigcap_{i \in I} \mu_i) = \bigcap_{i \in I} (\mu \cup \mu_i)$ $\forall \mu, \mu', \mu'' \in F(X), \forall \mu_i \in F(X)\ i \in I$

NOTA.- El reticulo F(X) no es un Algebra de Boole, como o-curre con P(X), ya que,

$$\mu \cap \overline{\mu} \neq 0 \text{ y } \mu \cup \overline{\mu} \neq 1$$

Por otro lado, es inmediato que,

$$P(X) \subset F(X)$$

Si consideramos la estructura de orden fuera del intervalo unitario, cabe una generalizacion de la definicion de-s.d.,

I.2.5.DEFINICION (Goguen, 1967).- Sea un referencial arbitrario X y L un conjunto parcialmente ordenado, un L-conjunto es una funcion,

$$\mu : X \longrightarrow L$$

donde a X se le denomina sosten de μ (no soporte, que es-un concepto distinto) y a L, conjunto de realizacion de μ

siendo $\mu(x)$ el grado de pertenencia del elemento $x \in X$.

Al conjunto de todos los L-conjuntos se le nota por $F_L(X)$, de modo que,

$$F_{[0,1]}(X) = F(X)$$

En lo que sigue, nos referiremos a s.d. con realizacion en $[0,1]$, si bien los resultados que obtengamos podrian generalizarse al caso de L-conjuntos.

I.2.6.DEFINICION (Zadeh, 1970).- Consideremos dos conjuntos X e Y y una funcion

$$f : X \longrightarrow Y$$

las aplicaciones imagen directa e inversa,

$$f : F(X) \longrightarrow F(Y)$$

$$f^{-1}: F(Y) \longrightarrow F(X)$$

estan definidas respectivamente por,

$$f(\mu) = \mu' : \mu'(y) = \begin{cases} \operatorname{Sup}_{f(x)=y} \mu(x) & \text{si } y \in f(X) \\ 0 & \text{si } y \in Y - f(X) \end{cases}$$

$$f^{-1}(\mu') = \mu' \cdot f$$

I.2.7.TEOREMA (Negoita y Ralescu,1975).- Las funciones f y f^{-1}, tienen las siguientes propiedades,

a) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\mu_i)$

b) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} \mu_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(\mu_i)$

(es decir, f^{-1} es un homomorfismo de reticulos completos)

c) $f(\bigcup_{i \in I} \mu_i) = \bigcup_{i \in I} f(\mu_i)$

d) $f(\bigcap_{i \in I} \mu_i) \leq \bigcap_{i \in I} f(\mu_i)$

e) $\overline{f(\mu)} \leqslant f(\overline{\mu})$

f) $\overline{f^{-1}(\mu')} = f^{-1}\overline{(\mu')}$

g) $f(f^{-1}(\mu')) \leqslant \mu'$

h) $f^{-1}(f(\mu)) \geqslant \mu$ $\qquad \forall \mu \varepsilon F(X)$ $\quad \forall \mu' \varepsilon F(Y)$

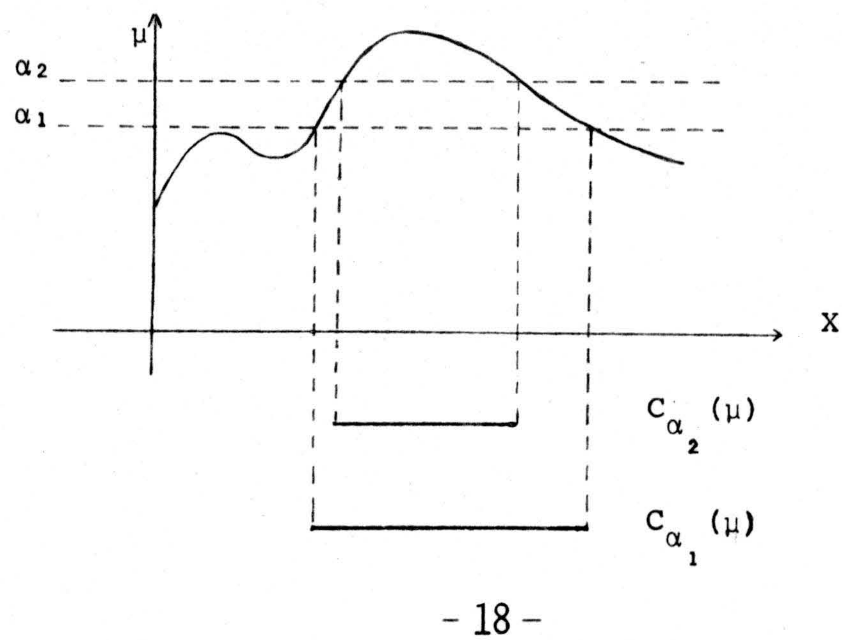
I.2.8. DEFINICION (Zadeh,1965).- Dado un s.d.$\mu\varepsilon$ F(X) se define su soporte como el conjunto ordinario,

$$S(\mu) = \{ x\varepsilon X : \mu(x) > 0 \}$$

Llegamos, asi, a la definicion mas importante dentro de la teoria de los s.d., por cuanto nos permite relacionar los s.d. con los conjuntos ordinarios. Este -- concepto sera motivo de referencia continua a lo largode todo el trabajo.

I.3.1.DEFINICION (Zadeh, 1965).- Dado un s.d. $\mu\varepsilon F(X)$, - llamamos α-corte de dicho s.d., con $\alpha\varepsilon[0,1]$,al conjunto ordinario,

$$C_{\alpha}(\mu) = \{ x\varepsilon X : \mu(x) \geqslant \alpha \}$$



Claramente se ve como los α-cortes $\{C_\alpha(\mu),\ 0\leq\alpha\leq 1\}$ - constituyen una sucesion decreciente,

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \ \rightarrow\ C_{\alpha_1}(\mu) \subseteq C_{\alpha_2}(\mu) \quad \forall \alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$$

Tambien es inmediato que,

$$C_0(\mu) = X$$

Una posible relacion entre los α-cortes de un s.d. y su- funcion de pertenencia, puede darla la siguiente,

I.3.2.PROPOSICION.- Sea X un espacio lineal y un s.d.μ - en F(X), entonces para cualquier valor $\alpha\varepsilon[0,1]$, si μ es concava, $C_\alpha(\mu)$ es convexo.

Si μ es concava,

$\forall\alpha\varepsilon[0,1],\forall x_1,x_2\varepsilon C_\alpha(\mu)$,

$$\mu[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \lambda\mu(x_1) + (1-\lambda)\mu(x_2)$$

y, como,

$$\mu(x_1)\geq\alpha \ ,\ \mu(x_2)\geq\alpha$$

entonces

$$\mu[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \alpha \qquad \forall\lambda\varepsilon[0,1]$$

de manera que si,

$$x_1,x_2\varepsilon C_\alpha(\mu) \ \rightarrow\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \varepsilon C_\alpha(\mu) \qquad \alpha\varepsilon[0,1]$$

El concepto de α-corte, empieza a tener importancia con el siguiente resultado, debido a Negoita y Ralescu (1975),

I.3.3.TEOREMA DE REPRESENTACION DE S.D..- Si $\mu\varepsilon F(X)$ y notamos sus α- - cortes por,

$$\{C_\alpha(\mu),\ \alpha\varepsilon[0,1]\}$$

se verifica que

$$\mu = \bigcup_{\alpha\varepsilon[0,1]} \alpha\cdot C_\alpha(\mu)$$

Entendiendo esta notacion formal de la siguiente manera: Si $\mu_{C_\alpha(\mu)}$ nota la funcion caracteristica de $C_\alpha(\mu)$, caso-particular de la funcion de pertenencia, y μ la funcion-de pertenencia del s.d. que consideramos, entonces:

$$\forall x\varepsilon X, \quad \mu(x) = \operatorname*{Sup}_{\alpha\varepsilon[0,1]} \alpha\cdot\mu_{C_\alpha(\mu)}(x)$$

Existe tambien la version reciproca de este Teorema, establecida de la forma siguiente,

I.3.4.TEOREMA (Negoita y Ralescu,1975).- Toda familia de conjuntos verificando,

a) $X_\alpha \subseteq X \; , \forall\alpha\varepsilon[0,1]$

b) $X_o = X$

c) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \rightarrow X_{\alpha_2} \subseteq X_{\alpha_1} \; , \forall\alpha_1, \alpha_2 \varepsilon[0,1]$

define un s.d. de X, con funcion de pertenencia,

$$\mu(x) = \operatorname*{Sup}_{\alpha\varepsilon[0,1]} \alpha\cdot\mu_{X_\alpha}(x)$$

Es importante destacar que I.3.4 es valido, no solo para-[0,1], sino para cualquier conjunto L con estructura de -reticulo completo.

NOTA.- A partir de I.3.3 y I.3.4, aparece claramente como podemos generar un concepto difuso, de un modo natural, a partir de conceptos ordinarios y, reciprocamente como obtener los conceptos o problemas normales, en forma de coleccion encajada.

I.3.5. EJEMPLO.- Supongamos un s.d. dado por,

$$\underset{\sim}{A} = \{ (x_1,.2),\ (x_2,0),\ (x_3,.5),(x_4,1),\ (x_5,.7) \}$$

Segun el Teorema de Representacion, podemos expresarlo como,

$$\underset{\sim}{A} = \mathrm{Sup}\{ (.2 \cdot (x_1,1),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,1),(x_5,1),$$
$$.5 \cdot (x_1,0),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,1),(x_5,1),$$
$$.7 \cdot (x_1,0),(x_2,0),(x_3,0),(x_4,1),(x_5,1),$$
$$1 \cdot (x_1,0),(x_2,0),(x_3,0),(x_4,1),(x_5,0)\}$$

Como se sabe, cualquier relacion o aplicacion entre dos conjuntos, en la teoria clasica se define como un subconjunto del producto cartesiano de los mismos. Coherentemente con la generalizacion realizada hasta el momento, podemos dar la siguiente,

I.4.1.DEFINICION (Zadeh,1965).- Llamamos funcion difusa, o relacion difusa, de X en Y, notada por $f:X \rightsquigarrow Y$, a un s.d. del producto cartesiano XxY.

Esta definicion hace que podamos poner indistintamente,

$$f:XxY \longrightarrow [0,1]$$

o bien,

$$f \in F(XxY)$$

que, abreviadamente, escribiremos $f \in F(X,Y)$.

$f(x,y)$ se puede considerar como el grado de pertenencia de y en la imagen de x por f o bien, como la intensidad de la relacion entre x e y.

Evidentemente, con esta definicion, va a tener sentido la composicion de relaciones. Asi, si tenemos,

$$f: X \rightsquigarrow Y$$

$$g: Y \rightsquigarrow Z$$

entonces,

$$g\ f: X \rightsquigarrow Z$$

de acuerdo con,

$$g \cdot f(x,z) = \operatorname*{Sup}_{y \in Y} \{f(x,y) \wedge f(y,z)\}$$

Notese que esta definicion es asociativa.

Del mismo modo podemos hablar de la composicion de n funciones,

$$f_i: X_i \rightsquigarrow X_{i+1} \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$(f_n \cdot \dots \cdot f_1)(x_1, x_{n+1}) =$$

$$= \operatorname*{Sup}_{\substack{x_2 \in X_2 \\ \vdots \\ x_n \in X_n}} \{f_1(x_1,x_2) \wedge f_2(x_2,x_3) \wedge \dots \wedge f_n(x_n,x_{n+1})\}$$

sin mas que tener en cuenta las propiedades de $[0,1]$ como reticulo.

Como $F(X,Y) = F(X\times Y)$, es inmediato que tiene estructura de reticulo con las operaciones usuales

$$(f \cup g)(x,y) = f(x,y) \vee g(x,y)$$

$$(f \cap g)(x,y) = f(x,y) \wedge g(x,y)$$

$$f \leqslant g \leftrightarrow f(x,y) \leqslant g(x,y) \qquad \forall (x,y) \in X\times Y$$

Del mismo modo, tambien podemos establecer el Teorema de Representacion para las relaciones difusas,

I.4.2.TEOREMA (Negoita y Ralescu,1975).- Si $f \in F(X,Y)$ es una relacion difusa, entonces.

$$f = \operatorname*{Sup}_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot f_\alpha$$

donde $\{f_\alpha, \alpha\varepsilon[0,1]\}$ son los α-cortes de la relacion f.

La demostracion es inmediata a partir de I.3.3, expresandonos una relacion difusa por medio de sus α-cortes. Evidentemente, los α-cortes de relaciones difusas,- como subconjuntos del producto cartesiano XxY, son relaciones clasicas entre los elementos de X e Y.

I.4.3.PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DIFUSAS.- Supongamos una relacion difusa $\mu \varepsilon F(X,X)$

$$\mu : X\text{x}X \longrightarrow [0,1]$$

decimos que es,

a) Reflexiva si,

$$\forall x\varepsilon X \rightarrow \mu(x,x) = 1$$

b) Irreflexiva si,

$$\forall x\varepsilon X \rightarrow \mu(x,x) = 0$$

c) Simetrica si,

$$\forall x,y\varepsilon X \rightarrow \mu(x,y) = \mu(y,x)$$

d) Asimetrica si,

$$\forall x,y\varepsilon X \rightarrow \mu(x,y)>0 \rightarrow \mu(y,x) = 0$$

e) Antisimetrica si

$$\forall x,y\varepsilon X \rightarrow \mu(x,y) \neq \mu(y,x), \text{ ó}$$

$$\mu(x,y) = \mu(y,x) = 0$$

f) Transitiva (max-min) si,

$$\forall x,y,z\varepsilon X \rightarrow \mu(x,z) \geqslant \operatorname*{Sup}_{y\varepsilon X}\{\mu(x,y)\wedge\mu(y,z)\}$$

g) Transitiva (min-max o N-Transitiva),

$$x,y,z\varepsilon X \rightarrow \mu(x,z) \leqslant \operatorname*{Inf}_{y\varepsilon X}\{\mu(x,y)\vee\mu(y,z)\}$$

I.4.4.PROPOSICION.- Una relacion difusa $\mu\varepsilon F(X,X)$ es N -

transitiva si, y solo si,

$$\forall x,y,z\varepsilon X : \mu(x,y) = \alpha \rightarrow \mu(x,z) \geqslant \alpha \text{ o } \mu(z,y) \geqslant \alpha, \forall z\varepsilon X$$

En efecto si,

$$\alpha = \mu(x,y) \leqslant \operatorname*{Inf}_{z\varepsilon X}\{\mu(x,z) \vee \mu(z,y)\}$$

entonces,

$$\mu(x,z) \geqslant \alpha \quad \text{o } \mu(z,y) \geqslant \alpha \text{ , } \forall z\varepsilon X$$

Inversamente si,

$$\forall z\varepsilon X \rightarrow \mu(x,z) \geqslant \alpha \quad \text{o } \mu(z,y) \geqslant \alpha \rightarrow$$

$$\mu(x,z) \vee \mu(z,y) > \alpha$$

luego,

$$\mu(x,y) \leqslant \operatorname*{Inf}_{z\varepsilon X}\{\mu(x,z) \vee \mu(z,y)\}$$

I.4.5.PROPOSICION.- Sea $\mu\varepsilon F(X,X)$ una relacion difusa:

a) Si es asimetrica es irreflexiva

b) Si es irreflexiva y transitiva, es asimetrica.

a) es inmediato, si

$$\mu(x,y)>0 \rightarrow \mu(y,x)=0$$

entonces,

$$\forall x\varepsilon X \quad \rightarrow \mu(x,x) = 0$$

En b) por ser transitiva, entendemos transitiva max-min como en todo lo que sigue. Si no fuera asimetrica,

$$\exists y,x\varepsilon X : \mu(x,y)>0 \text{ y } \mu(y,x)>0$$

pero entonces

$$\mu(x,x) = 0 \geqslant \operatorname*{Sup}_{y}\{\mu(x,y) \wedge \mu(y,x)\} > 0$$

contradiciendo el que la relacion sea irreflexiva.

I.4.6.PROPOSICION.- Toda relacion difusa $\mu\varepsilon F(X,X)$ asimetrica y N-transitiva, es transitiva

Supongamos que no lo fuera,

$$\exists \omega \varepsilon X \ : \ \mu(x,z) < \mu(x,\omega) \wedge \mu(\omega,z)$$

Para un par $(x,z) \varepsilon XxX$ dado.

Esta claro que,

$$\mu(x,\omega) \wedge \mu(\omega,z) > 0$$

entonces, por la asimetria,

$$\mu(\omega,x) = \mu(z,\omega) = 0$$

y como,

$$\mu(x,\omega) > \mu(x,z)$$

$$\mu(\omega,z) > \mu(x,z)$$

por ser N-transitiva,

$$\mu(\omega,z) \leqslant \operatorname*{Inf}_{y}\{\mu(\omega,y) \vee \mu(y,z)$$

luego,

$$\forall y \varepsilon X \rightarrow \mu(\omega,z) \leqslant \mu(\omega,y) \vee \mu(y,z)$$

Concretamente, si $y = x$,

$$\mu(\omega,z) \leqslant \mu(\omega,x) \vee \mu(x,z)$$

pero como,

$$\mu(\omega,x) = 0$$

obtenemos,

$$\mu(\omega,z) \leqslant \mu(x,z)$$

lo que contradice lo anterior.

I.4.7.RELACIONES DIFUSAS PARTICULARES.- Damos a continuacion, las definiciones de las relaciones difusas que emplearemos. Dada una relacion difusa $\mu \varepsilon F(X,X)$ definimos,

a) Preorden Difuso: Toda relacion reflexiva y Transitiva.

b) Orden Debil Difuso: Si cumple las propiedades asimetrica y N-transitiva.

c) Similitud: Si es reflexiva, simetrica y transitiva

d) Orden Parcial Difuso: Se verifican las propiedades reflexiva, antisimetrica y transitiva.

e) Orden Parcial Estricto Difuso: Si es irreflexiva y -- transitiva.

I.4.8. DEFINICION (Zadeh, 1971).- Dada una relacion difusa $\mu \varepsilon F(X,X)$, se define el - dominio de dicha relacion como el s.d.,

$$\mu_{dom}(x) = \sup_y \mu(x,y) \quad , \quad \forall x \varepsilon X$$

A continuacion, basandonos en el Teorema de Repre - sentacion, vamos a estudiar los α-cortes de las relaciones difusas. Los resultados que obtengamos, seran importantes por que los aplicaremos directamente cuando nos - dediquemos a los problemas de decision en ambiente difuso.

I.4.9. TEOREMA (Zadeh, 1971).- Sea,

$$S = \sum_\alpha \alpha \cdot S_\alpha \qquad 0<\alpha \leqslant 1$$

la descomposicion de una relacion de similitud en X. Entonces, cada S_α es una relacion de equivalencia en X. Inversamente, si los S_α, $0<\alpha \leqslant 1$, forman una sucesion encajada de relaciones de equivalencia distintas en X tales -- que,

$$\alpha_1 > \alpha_2 \leftrightarrow S_{\alpha_1} \subset S_{\alpha_2}$$

siendo S_1 no vacia y,

$$\text{dom } S_\alpha = \text{dom } S_1 \qquad \alpha \varepsilon (0,1]$$

entonces, para cualquier eleccion de α's en $(0,1]$ que in cluya a $\alpha = 1$, S es una relacion de similitud en X.

Sea S una similitud. Como,

$$\forall x \varepsilon \text{dom } S \rightarrow \mu_s(x,x) = 1 \quad \rightarrow$$

$$\forall \alpha \varepsilon (0,1], \quad (x,x) \varepsilon S_\alpha$$

con lo que se verifica la propiedad reflexiva en todo α-corte de S.

Tomemos un S_α cualquiera, entonces,

$$\forall (x,y) \varepsilon S_\alpha \rightarrow \mu_s(x,y) \geq \alpha \rightarrow \mu_s(y,x) \geq \alpha \rightarrow (y,x) \varepsilon S_\alpha$$

por ser S simetrica.

Consideremos ahora $(x,y),(y,z) \varepsilon S_\alpha$, osea

$$\mu_s(x,y) \geq \alpha \quad \mu_s(y,z) \geq \alpha$$

como S es transitiva,

$$\mu_s(x,z) \geq \alpha \rightarrow (x,z) \varepsilon S_\alpha$$

Reciprocamente, como $S_1 \neq \emptyset$, entonces,

$$\forall x \varepsilon \text{dom} S_1 \rightarrow (x,x) \varepsilon S_1 \rightarrow \mu_s(x,x) = 1$$

La descomposicion de S, segun I.4.2, podemos expresarla- en terminos de funciones de pertenencia:

$$\mu_s(x,y) = \sup_\alpha \alpha \cdot \mu_{s_\alpha}(x,y) \qquad \forall (x,y) \varepsilon \text{dom } S$$

de aqui se sigue inmediatamente, que la simetria de S_α,- para $\alpha \varepsilon (o,1]$, implica la de S.

Comprobemos, por ultimo, la transitividad de S:

$$\forall x,y,z \varepsilon X: \; \mu_s(x,y) \geq \alpha, \mu_s(y,z) \geq \beta \rightarrow (x,y), \; (y,z) \varepsilon S_{\alpha \Lambda \beta}$$

luego,

$$(x,z) \varepsilon S_{\alpha \Lambda \beta}$$

ya que $S_{\alpha \Lambda \beta}$ tiene la propiedad transitiva.

I.4.10.TEOREMA (Zadeh, 1971).- Sea,

$$P = \sum_{\alpha} \alpha \cdot P_{\alpha}$$

la descomposicion de un orden parcial difuso en X. Entonces cada P_{α} es un orden parcial en X. Inversamente, si los P_{α}, $0<\alpha\leq 1$, forman una sucesion encajada de ordenes parciales distintos en X, tales que

$$\alpha_1 > \alpha_2 \leftrightarrow P_{\alpha_1} \subset P_{\alpha_2}$$

P_1 es no vacio y,

$$\text{dom } P_{\alpha} = \text{dom } P_1$$

entonces, para cualquier eleccion de los α's en $(0,1]$, que incluya $\alpha = 1$, P es un orden parcial difuso.

Demostramos la propiedad antisimetrica,

$$\forall \alpha \in (0,1] \ , \ (x,y) \in P_{\alpha} \leftrightarrow \mu_P(x,y) \geq \alpha$$

Si,

$$\mu_P(x,y) = \mu_P(y,x) \rightarrow \alpha = 0$$

por la antisimetria de P.

Reciprocamente, si

$$\mu_P(x,y) = \alpha \ \text{ y } \ \mu_P(y,x) = \beta$$

entonces,

$$(x,y), (y,x) \ P_{\alpha \wedge \beta}$$

y como en ese α-corte se verifica la antisimetria,

$$\mu_{P_{\alpha\wedge\beta}}(x,y) \neq \mu_{P_{\alpha\wedge\beta}}(y,x)$$

y si $\alpha = \beta$

$$\mu_{P_{\alpha}}(x,y) = \mu_{P_{\alpha}}(y,x) = 0 \rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

con lo que queda demostrado el Teorema. Como consecuencia inmediata de él, podemos dar el siguiente

I.4.11.COROLARIO.- Sea,

$$O = \sum_{\alpha} \alpha \cdot O_{\alpha} \qquad 0<\alpha\leq 1$$

la descomposicion de un preorden difuso en X. Entonces cada O_α es un preorden en X. Reciprocamente, si los O_α, con $\alpha\varepsilon(0,1]$, forman una sucesion encajada de preordenes distintos en X tales que,

$$\alpha_1 > \alpha_2 \leftrightarrow O_{\alpha_1} \subset O_{\alpha_2}$$

O_1 es no vacio y,

$$\text{dom } O_{\alpha} = \text{dom } O_1 \qquad \forall\alpha\varepsilon(0,1]$$

entonces, para cualquier eleccion de los α's en $(0,1]$ que incluya a $\alpha= 1$, O es un preorden difuso.

I.4.12.TEOREMA.- Sea,

$$D = \sum_{\alpha} \alpha \cdot D_{\alpha} \qquad 0<\alpha\leq 1$$

la descomposicion de un orden debil en X. Entonces cada D_α, $0<\alpha\leq 1$, es un orden debil en X. Inversamente, si los D_α, $\alpha\varepsilon(0,1]$, constituyen una sucesion encajada de ordenes debiles distintos en X tales que,

$$\alpha_1 > \alpha_2 \leftrightarrow D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2}$$

entonces, para cualquier eleccion de los α's en $(0,1]$ D es una relacion de orden debil difusa.

Supongamos que D es un orden debil difuso,

$$\forall\alpha\varepsilon(0,1],\ \forall(x,y)\varepsilon D_{\alpha} : \mu_D(x,y)\geq\alpha \rightarrow \mu_D(y,x) = 0 \rightarrow$$

$$(y,x)\notin D_{\alpha}$$

Analogamente, si

$$(x,z)\varepsilon D_{\alpha} \leftrightarrow \mu_D(x,z)\geq \alpha \qquad \rightarrow$$

$$\forall y,\ \mu_D(x,y) \geqslant \alpha \ \text{o} \ \mu_D(y,z) \geqslant \alpha$$

luego,

$$\forall y \varepsilon X \rightarrow (x,y)\varepsilon D_\alpha \ \text{o} \ (y,z)\varepsilon D_\alpha$$

Al reves, es lo mismo. Si $\forall \alpha \varepsilon (0,1]$ D_α es un orden debil,

$$(x,y)\varepsilon D_{\alpha_o} \leftrightarrow \mu_D(x,y) \geqslant \alpha_o \rightarrow (y,x) \not\varepsilon D_{\alpha_o}$$

$$\forall \alpha \varepsilon (0,1] : \alpha < \alpha_o \rightarrow (y,x) \not\varepsilon D_\alpha \leftrightarrow \mu_D(y,x) = 0$$

Asi mismo, si en cada D_α se verifica la propiedad N-transitiva,

$$(x,z)\varepsilon D_\alpha \rightarrow (x,y)\varepsilon D_\alpha \ \text{o} \ (y,z)\varepsilon D_\alpha \quad \forall y \varepsilon X$$

luego D es un orden debil difuso.

Tambien resulta inmediato el siguiente,

I.4.13.COROLARIO.- Sea,

$$E = \sum_\alpha \alpha \cdot E_\alpha \qquad 0<\alpha\leqslant 1$$

la descomposicion de una relacion de orden parcial estricto difusa. Entonces, cada E_α es una relacion de orden parcial estricto en X. Reciprocamente, si los E_α, con $\alpha\varepsilon(0,1]$, forman una sucesion encajada de relaciones de orden parcial estricto en X tales que,

$$\alpha_1 > \alpha_2 \leftrightarrow E_{\alpha_1} \subset E_{\alpha_2}$$

E_1 es no vacia y,

$$\text{dom } E_1 = \text{dom } E_\alpha \qquad \forall \alpha \varepsilon (0,1]$$

entonces, para cualquier eleccion de los α's en $(0,1]$ que incluya $\alpha = 1$, E es un orden parcial estricto difuso en X.

Por los anteriores resultados, la demostracion resulta trivial

I.4.14.DEFINICION (Zadeh, 1971).- Sea P un orden parcial difuso en X. A cada elemento $x \varepsilon X$, le asociamos dos clases definidas como s.d. la clase dominante, notada $P_{\geqslant}(x)$ y dada por,

$$\mu_{P_{\geqslant}(x)}(y) = \mu_P(x,y) \qquad \forall y \varepsilon X$$

y la clase dominante, notada por $P_{\leqslant}(x)$ y definida por,

$$\mu_{P_{\leqslant}(x)}(y) = \mu_P(y,x) \qquad \forall y \varepsilon X$$

En funcion de estas clases, $x \varepsilon X$ es no dominada si,- y solo si,

$$\mu_P(x,y) = 0 \qquad y \neq x$$

y $x \varepsilon X$ es no dominante si, y solo si,

$$\mu_P(y,x) = 0 \qquad y \neq x$$

Nos referiremos, finalmente en este capitulo dedicado a resultados basicos, al concepto de convexidad en -- los s.d. Este concepto, como en la teoria clasica, jugara un importante papel en el resto de la memoria.

I.5.1.DEFINICION (Zadeh,1965).- Sea X un espacio lineal- y $\mu \varepsilon F(X)$, si

$$\forall x,y \varepsilon X \rightarrow \mu[\lambda x + (1-\lambda)y] \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y) \qquad \lambda \varepsilon [0,1]$$

decimos que μ es un s.d. convexo.

Naturalmente, tambien podemos suponer $x \neq y$ con -- $\lambda \varepsilon [0,1]$. Resulta claro que si μ_C es la funcion caracteristica de $C \subset P(X)$,

$$\mu_C: X \longrightarrow \{0,1\}$$

entonces μ_C sera convexo, en el sentido anterior, si, y- solo si, C es un conjunto convexo en el sentido clasico.

Por otro lado, sabemos por I.3.2 que, siempre que μ_c sea una funcion concava, C sera un s.d. convexo.

Los conjuntos convexos difusos quedan caracterizados por la siguiente,

I.5.2.PROPOSICION (Zadeh, 1965).- Un s.d. $\mu \varepsilon F(X)$ es convexo si, y solo si, todos sus α-cortes, $0<\alpha\leq 1$, son conjuntos convexos.

En efecto, si el s.d. es convexo, sea

$$C_\alpha(\mu) = \{ x \varepsilon X : \mu(x) \geq \alpha \}$$

Vamos a probar que si,

$$x,y \varepsilon C_\alpha(\mu),\ \lambda \varepsilon [0,1] \rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \varepsilon C_\alpha(\mu)$$

pero como,

$$\mu[\lambda x + (1-\lambda) y] \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq \alpha$$

$$\lambda x + (1-\lambda) y \ \varepsilon \ C_\alpha(\mu)$$

Reciprocamente, supongamos que todos los $C_\alpha(\mu)$ son convexos y sean,

$$x,y \varepsilon X : \mu(x) \leq \mu(y)$$

entonces,

$$C_{\mu(y)}(\mu) \subseteq C_{\mu(x)}(\mu)$$

luego,

$$x,y \ \varepsilon \ C_{\mu(x)}(\mu)$$

como todos los α-cortes son convexos,

$$\lambda x + (1-\lambda) y \ \varepsilon \ C_{\mu(x)}(\mu)$$

o sea,

$$\mu[\lambda x + (1-\lambda) y] \geq \mu(x) = \mu(x) \wedge \mu(y)$$

Evidentemente, si $\mu(x) > \mu(y)$, la demostracion es identica

Por tanto, si un s.d. es convexo (en el sentido definido) todos sus α-cortes son convexos ordinarios.

A la vista de esto, utilizaremos la caracterizacion- que da la proposicion anterior como definicion alternativa de s.d. convexo.

Despues de esto, resulta inmediato dar la siguiente,

I.5.3.PROPOSICION (Zadeh, 1965).- La interseccion de s.d. convexos, sobre un mismo conjunto referencial, es un s.d. convexo.

En el ultimo capitulo de la memoria, ahondaremos mas en el concepto de convexidad difusa, para llegar a trasladar algunos resultados de la teoria de la dominacion al campo difuso. Estos resultados, nos permitiran contrastar la definicion de alternativa no dominada, expuesta en I.4.14, de Zadeh, con la caracterizacion que encontraremos de tales soluciones.

CAPITULO II

II.1.INTRODUCCION.- Vamos a dedicar este segundo capitulo a dar una introduccion a la Teoria de la Decision en Ambiente difuso, comentando los principales trabajos y resultados conocidos.

En una segunda etapa, introduciremos un nuevo metodo de enfocar la resolucion de dichos problemas de decision difusos, refiriendonos a la construccion de la funcion de utilidad para dichos problemas. Esta funcion de utilidad, que generalmente se supone conocida, como a continuacion veremos, se nos mostrara como una familia difusa de utilidades, la cual consideraremos como solucion del problema de decision en ambiente difuso.

II.2.EL CONCEPTO DE DECISION DIFUSA DE BELLMAN Y ZADEH (1970) .- El problema de decision en ambiente difuso, tiene su origen en 1970 con la publicacion que citamos de estos autores. Desde aqui arranca la teoria que, posteriormente, ha ido perfeccionandose con multiples trabajos.

Cuando estos autores estudian un proceso de decision desde la perspectiva mas amplia del ambiente difuso, aparece una estructura diferente, cuya caracteristica mas importante, quizas, sea la simetria existente entre objetivos y restricciones, simetria que disminuye las diferencias entre ambos y permite relacionarlos de una manera relativamente simple, de cara a buscar la decision que solucione el problema.

Mas concretamente, sea X un conjunto dado de alternativas, podemos dar la siguiente, II.2.1.DEFINICION.- Un objetivo difuso, o simplemente un objetivo, es un s.d. $\underset{\sim}{G}$ de X caracterizado por una funcion de pertenencia,

$$\mu_G : X \longrightarrow [0,1]$$

Asi, si X $\equiv$R, el objetivo difuso " el beneficio debe ser superior a diez y no muy superior a treinta y cinco" puede ser representado, subjetivamente, por un s.d. en R de funcion de pertenencia,

$$\begin{aligned} \mu_G(x) &= 0 && \text{si} \quad x<10 \\ &= 1 && \text{si} \quad 10\leqslant x\leqslant 35 \\ &= (1 + (x - 35)^{-2})^{-1} && \text{si} \quad x\geqslant 35 \end{aligned}$$

Con el metodo de siempre, la funcion de recompensa asociada a un problema de decision, sirve para definir un orden lineal en el conjunto de alternativas. Obviamente, la funcion de recompensa de un objetivo difuso debe servir para lo mismo y, de hecho, puede ser obtenida de una funcion de recompensa dada mediante normalizacion, dejando inalterado el orden. De este tipo son las funciones de pertenencia que Tanaka et al. (1974) emplean en los problemas de programacion matematica difusa.

Del mismo modo,

II.2.2.DEFINICION.- Una restriccion difusa $\underset{\sim}{C}$ en X, es un s.d. de X caracterizado por una funcion de pertenencia,

$$\mu_C : X \longrightarrow [0,1]$$

Un aspecto importante de estas definiciones de objetivo y restriccion, es que ambos estan definidos como s.d. en el espacio de alternativas, pudiendolos tratar iden ticamente para la formulacion de una decision. Sin embargo, en la teoria clasica, al tomar las restricciones en - un conjunto X y la funcion de recompensa de X en otro espacio, resulta que esta similitud de la que hablamos, no- se hace patente.

Refiriendonos al concepto de decision, observamos -- que intuitivamente, una decision es una eleccion de entre otras posibles, dentro de un conjunto de alternativas admisibles. Parece, pues, claro que una decision difusa se- defina como el s.d. de alternativas que resultan de la intersección de objetivos y restricciones.

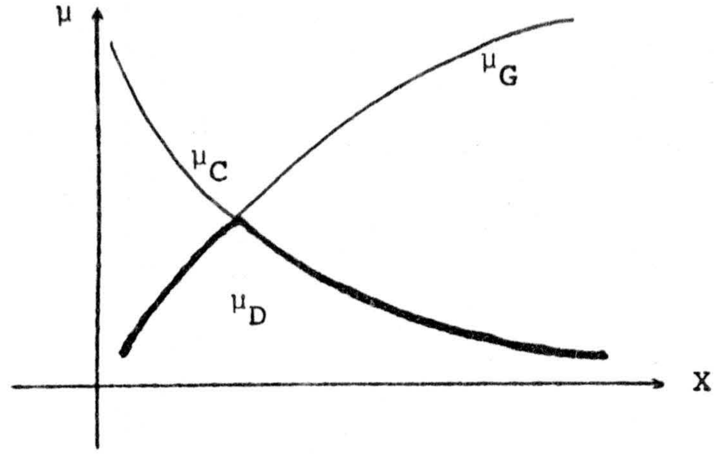
Concretamente,

II.2.3.DEFINICION.- Supongamos dado un objetivo difuso G- y una restriccion difusa C en un espacio de alternativas X. Llamamos decision difusa a,

$$D = G \cap C$$

y, correspondientemente, segun nuestro modo habitual de - interpretar la interseccion,

$$\mu_D = \mu_G \wedge \mu_C$$



En la figura ponemos de manifiesto esta relacion,donde se ve como aparece la decision como el inferior entre-objetivo y restriccion.

Mas generalmente,

II.2.4.DEFINICION.- Una decision difusa es un s.d. de X - dado por,

$$\mu_D = (\bigwedge_{i=1}^{p} \mu_{C_i}) \wedge (\bigwedge_{j=1}^{q} \mu_{G_j})$$

donde $\mu_{C_i} \varepsilon F(X)$, $i = 1,\ldots,p$, son restricciones difusas y- $\mu_{G_j} \varepsilon F(X)$, $j = 1,\ldots,q$, son objetivos difusos.

Puesto que, como dijimos, algunos autores asocian la interseccion con el producto,Hamacher (1975), es posible- dar una version alternativa

II.2.5.DEFINICION.- Una decision difusa es el s.d. de X - dado por,

$$\mu_D = (\prod_{i=1}^{p} \mu_{C_i}) \cdot (\prod_{j=1}^{q} \mu_{G_j})$$

(con el mismo significado de antes).

Esto hace que segun el problema de que se trate (a - tendiendo, sobre todo, a que exista una gran interdepen - dencia entre objetivos y restricciones, o a que sea mas - suave) se pueda emplear una u otra definicion.

En general, se puede resumir diciendo que una deci - sion difusa, no es mas que una confluencia entre objeti - vos y restricciones,

$$\mu_D = \Phi(\mu_{C_1},\ldots,\mu_{C_p},\mu_{G_1},\ldots,\mu_{G_q})$$

El siguiente ejemplo pone de manifiesto como aplican do una u otra definicion, obtenemos decisiones distintas.

II.2.6.EJEMPLO.- Se quiere decidir la ubicacion de una nueva planta en una de tres posibles ciudades x_1, x_2 y x_3. La decision debe minimizar el costo G dela localizacion y debe estar cerca de los mercados de materias primas, C_1, y de los de demanda, C_2.

Supongamos que los siguientes s.d. definen el grado en que cada ciudad verifica las condiciones,

$$G = \{(x_1,.5),(x_2,.8),(x_3,.3)\}$$

$$C_1 = \{(x_1,.7),(x_2,.9),(x_3,.5)\}$$

$$C_2 = \{(x_1,.4),(x_2,.2),(x_3,.9)\}$$

entonces, aplicando II.2.4, la decision sera,

$$D^i = \{(x_1,.4),(x_2,.2),(x_3,.3)\}$$

Sin embargo, segun II:2.5, tenemos,

$$D^p = \{(x_1,.14),(x_2,.144),(x_3,.135)\}$$

que pone de manifiesto lo que deciamos.

Definiendo decision difusa como interseccion o como confluencia, de objetivos y restricciones, estamos suponiendo implicitamente, que tanto unos como otros, tienen igual importancia. No obstante, hay situaciones en las quealgunos objetivos, e incluso algunas restricciones, tienen mas importancia que otros. En tales casos, la decision difusa podria ser expresada como combinacion convexa de objetivos y restricciones, con coeficientes que reflejen la importancia relativa de los terminos correspondientes.

Esto es lo que expresa la siguiente,

II.2.7.DEFINICION.- Una decision difuso-convexa es el s.d.

F(X) dado por,

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mu_{C_i}(x) + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \cdot \mu_{G_j}(x)$$

donde,

$$\sum_{i=1} \alpha_i + \sum_{j=1} \alpha_j = 1$$

Sin entrar en el problema de decision difusa con multiobjetivo, diremos que Yager (1979) la asignacion de pesos segun la importancia, y la obtencion de la decision final, la hace mediante la construccion de una matriz de importancias relativas, de la que se obtiene un autovector que sirve para ponderar los diferentes objetivos y restricciones.

Queda destacar, en el sentido de Bellman y Zadeh, un problema. Se trata del caso mas general, en que objetivos y restricciones no estan considerados sobre un mismo espacio.

Concretamente, sea una aplicacion,

$$f: X \longrightarrow Y$$

Supongamos que los objetivos son s.d. de Y, $G_1,\dots,G_q$, y que las restricciones sean s.d. en X, $C_1,\dots,C_p$. Dado un s.d. G_j en Y, podemos encontrar un s.d. G_j^* en X, inducido por G_j, definido por,

$$\mu_{G_j^*}(x) = \mu_{G_j}[f(x)] \quad , \ j = 1,\dots,q$$

Entonces, la decision difusa D que buscamos, podemos expresarla, como un s.d. de X, por,

$$\mu_D(x) = \left(\bigwedge_{i=1}^{p} \mu_{C_i}(x)\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{q} \mu_{G_j}[f(x)]\right)$$

donde tambien se podria utilizar el operador producto, asi como una combinacion convexa que valorara las importancias relativas.

El concepto de decision difusa puede parecer artificial, sin embargo, el hecho de que los objetivos y las restricciones esten expresados de un modo impreciso, justifica su sentido.

Ahora bien, la obtencion de tal decision difusa, pone de manifiesto el que no pueda ejecutarse la instruccion que se obtenga de ella. Esto nos lleva, por tanto, a la siguiente,

II.2.8.DEFINICION.- Sea μ_D una decision difusa y D^M el conjunto ordinario de puntos en X en los que $\mu_D(x)$, $x \epsilon X$, alcanza su valor maximo si existe. Diremos que cualquier $x \epsilon D^M$ es una decision maximizante.

Por tanto, $x^* \epsilon X$ sera maximizante si,

$$\mu_D(x^*) = \underset{x}{\mathrm{Max}} \left[\mu_C(x) \wedge \mu_G(x) \right]$$

Podemos decir que con esto se cierra la resolucion de los problemas de decision segun Bellman y Zadeh. Hemos visto como a partir del concepto de objetivo y del de restriccion, obtenemos la decision difusa solucion del problema. Ademas, ha quedado claro como mediante la definicion de decision maximizante, esta solucion del problema, queda caracterizada como un punto en el conjunto de las posibles soluciones.

Despues de diversos intentos de resolver el problema de decision planteado clasicamente, aunque en un contexto difuso, R. Jain (1976) da un metodo de resolucion basado-en la teoria expuesta de Bellman y Zadeh. Esto es lo que vemos a continuacion.

II.3.APROXIMACION DE JAIN AL PROBLEMA DE DECISION EN AMBIENTE DIFUSO.-

Supongamos un sistema con n estados posibles,

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_3\}$$

y un conjunto de acciones admisibles,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_3\}$$

sabemos que si se elige la alternativa a_i, cuando el estado del sistema es el x_j, entonces la utilidad de la eleccion es u_{ij}. Asi, para este sistema, las utilidades-- para las diversas altërnativas, vienen dadas por una matriz U,

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} \ldots u_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ u_{m1} \ldots u_{mn} \end{bmatrix}$$

Si el estado del sistema es conocido, por ejemplo - $x_j \varepsilon X$, entonces el problema de seleccionar la mejor alternativa, se reduce a encontrar aquella que proporcione mayor utilidad para este estado, es decir, se ha de encontrar la utilidad,

$$u_o = \bigvee_{i=1}^{m} u_{ij}$$

y la alternativa que proporciona esta utilidad, se selecciona como la alternativa optima. Sin embargo, si el sistema se considera en ambiente difuso, esta claro que este procedimiento no podra ser empleado.

Supongamos que el conjunto de estados del sistema -

sea un s.d. $\mu_X \varepsilon F(X)$,

$$\{ x_k, \mu_X(x_k) ; x_k \varepsilon X \}$$

y supongamos que el conjunto de las acciones admisibles y las utilidades asociadas con este problema, no sean difusas.

A cada alternativa $a_i \varepsilon A$, le vamos a asociar una "utilidad difusa" del siguiente modo,

$$\underset{\sim}{U}_i = \{\mu_{\underset{\sim}{U}_i}(u_k), u_k\}$$

donde,

$$u_k = u_{ik}$$

y,

$$\mu_{\underset{\sim}{U}_i}(u_k) = \mu_X(x_k)$$

(Notese que estas utilidades difusas se construyen de un modo totalmente subjetivo, una vez supuesta la existencia de la matriz de utilidades U en este problema difuso).

Nos encontramos ahora con dos posibilidades:

a) Elegir una alternativa que proporcione el mayor grado de pertenencia en el conjunto U_i, o

b) Escoger una alternativa que de la mayor recompensa, o mejor, la mayor utilidad.

Pero en el primer caso, puede que la utilidad asociada a la alternativa elegida sea baja, mientras que en el segundo, puede que el grado de pertenencia sea muy pequeño. Para conjugar estos dos aspectos, es para lo que se introduce el concepto de Conjunto Maximizante.

II.3.1.DEFINICION.- Se define el conjunto maximizante de un conjunto Y, notandolo M(Y), como un s.d. tal que el grado de pertenencia de un elemento -- $y \in Y$ en $M(Y)$ representa el grado en que y se aproxima al - Sup Y, en algun sentido especificado.

Para aplicar este concepto, se construye el conjunto

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} S(\underset{\sim}{U}_i)$$

siendo $S(\underset{\sim}{U}_i)$, $i = 1,\ldots,m$, los conjuntos soportes de los- $\underset{\sim}{U}_i$.

A continuacion, se determinan los conjuntos maximi - zantes para cada alternativa $a_i \in A$, los cuales representa- mos por $\underset{\sim}{U}_{im}$, dados por,

$$\underset{\sim}{U}_{im} = \{ \mu_{\underset{\sim}{U}_{im}}(u_k),\ u_k \}$$

donde,

$$\mu_{\underset{\sim}{U}_{im}}(u_k) = [u_k / u_{max}]^n$$

$$u_{max} = \text{Sup } Y$$

siendo n un numero entero que puede ser seleccionado se - gun las aplicaciones.

Combinando las informaciones que ofrecen los conjun- tos $\underset{\sim}{U}_{im}$ y $\underset{\sim}{U}_i$, se construye el s.d. $\underset{\sim}{U}_{io}$ mediante su inter- seccion, teniendo como funcion de pertenencia,

$$\mu_{\underset{\sim}{U}_{io}}(u_k) = \mu_{\underset{\sim}{U}_{im}}(u_k) \wedge \mu_{\underset{\sim}{U}_i}(u_k)$$

y, de aqui, extraemos, por ultimo, el grado de pertenen - cia de cada alternativa en el conjunto de soluciones,

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_i) = \bigvee_k \mu_{\underset{\sim}{U}_{io}}(u_k)$$

que nos define el s.d.,

$$A_o = \{ \mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_i),\ a_i \}$$

del cual tomamos la alternativa solucion de nuestro pro - blema, como aquella a_o^* tal que,

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_o^*) = \operatorname*{Sup}_i \mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_i)$$

Hay que destacar que a veces un cierto elemento u_p aparece en un s.d. mas de una vez, con el mismo o diferente -- grado de pertenencia. Se utiliza entonces una regla de reduccion: Si u_p aparece k veces con grados de pertenencia- $f_1, f_2, \ldots, f_k$, el grado de pertenencia, f, que se toma - para u_p esta dado por,

$$f = f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_k$$

donde

$$f_1 \oplus f_2 = f_1 + f_2 - f_1 \cdot f_2$$

Veamos ahora toda la resolucion con el siguiente,

II.3.2.- Sea el conjunto de alternativas de un sistema,

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

que puede estar en diez estados diferentes,

$$X = \{x_1, \ldots, x_{10}\}$$

Sea la matriz de utilidades para el sistema,

$$U = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 1 & 7 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

y supongamos que el estado del sistema es,

$$\underset{\sim}{X} = \{(.4,x_3),(.8,x_4),(1,x_5),(.7,x_6),(.3,x_7)\}$$

entonces,

$$\underset{\sim}{U}_1 = \{(.88,2),(1,3),(.7,1),(.3,7)\}$$

$$\underset{\sim}{U}_2 = \{(.82,7),(.8,8),(1,1),(.3,6)\}$$

$$\underset{\sim}{U}_3 = \{(.4,3),(.8,4),(1,5),(.7,6),(.3,8)\}$$

Determinamos Y,

$$Y = S(\underset{\sim}{U}_1)\cup S(\underset{\sim}{U}_2)\cup S(\underset{\sim}{U}_3) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

tomando n = 1, para determinar el conjunto maximizante,

$$\underset{\sim}{U}_{1m} = \{(.25,2),(.375,3),(.125,1),(.875,7)\}$$

$$\underset{\sim}{U}_{2m} = \{(.875,7),(1,8),(.125,1),(.75,6)\}$$

$$\underset{\sim}{U}_{3m} = \{(.375,3),(.5,8),(.625,5),(.75,6),(1,8)\}$$

de donde obtenemos

$$\underset{\sim}{U}_{1o} = \{(.25,2),(.375,3),(.125,1),(.3,7)\}$$

$$\underset{\sim}{U}_{2o} = \{(.82,7),(.8,8),(.125,1),(.3,6)\}$$

$$\underset{\sim}{U}_{3o} = \{(.375,3),(.5,8),(.625,5),(.75,6),(.3,8)\}$$

Resultando definitivamente,

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_1) = .375, \ \mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_2) = .82, \ \mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_3) = .7$$

por lo que la solucion del problema es,

$$a_2 : \mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_2) = \sup_i \mu_{\underset{\sim}{A}_o}(a_i)$$

Si en el problema se consideran difusas las utilidades (entendiendo por utilidad difusa, un predicado impreciso sobre los valores posibles de la utilidad, representable mediante un s.d. de ℝ) y no las acciones ni los estados, tendremos, entonces, una matriz de s.d.,

$$\begin{bmatrix} u_{11} \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ u_{m1} \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

donde,

$$\underset{\sim}{u}_{ij} = \{\mu_{\underset{\sim}{u}_{ij}}(u_k), \ u_k\}$$

El problema, segun Jain, es entonces simple puesto que da do un estado del sistema (que nos señala una columna de - la matriz) por ejemplo, x_j, de entre los correspondientes s.d. $\underset{\sim}{u}_{ij}$, siempre podremos extraer el que nos de mayor utilidad.

II.3.3.EJEMPLO.- Supongamos que los conjuntos de estados y de alternativas, son los mismos de antes, pero que la matriz de utilidad esta dada por,

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} VH & H & L & L & M & VL & H & VH & VH & M \\ L & VL & H & VH & VL & H & H & M & M & VH \\ H & M & L & M & M & H & VH & M & L & L \end{bmatrix}$$

donde L, M, H, VL y VH corresponden a bajo, medio, alto - muy bajo y muy alto, respectivamente.

Los valores asociados a estas variables, son difusos y dados por los siguientes s.d.,

$$L = \{(.4,1),(1,.2),(.5,3)\}$$

$$VL = \{(1,1),(.4,2)\}$$

$$M = \{(.4,3),(.7,4),(1,5),(.7,6),(.4,7)\}$$

$$H = \{(.5,7),(1,8),(.5,9)\}$$

$$VH = \{(.5,9),(1,10)\}$$

Suponiendo que el estado del sistema sea el x_9, entonces, las utilidades difusas de las diferentes alternativas son,

$$\underset{\sim}{U}_1 = \{(.5,9),(1,10)\} \rightarrow VH$$

$$\underset{\sim}{U}_2 = \{(.4,3),(.7,4),(1,5),(.7,6),(.4,7)\} \rightarrow M$$

$$\underset{\sim}{U}_3 = \{(.4,3),(1,2),(.5,3)\} \rightarrow L$$

Para Jain: "... es obvio que la mejor alternativa es la a_1, que tiene la mayor utilidad".

De este modo la alternativa difusa optimal (que ahora viene dada por un s.d. pero que, en realidad, sigue -- siendo una solucion puntual) es,

$$\underset{\sim}{A}_o = \{(1,a_1),(.6,a_2),(.2,a_3)\}$$

donde los grados de pertenencia han sido fijados de una - manera subjetiva, atendiendo a los valores de la utilidad anteriormente obtenidos.

Por ultimo, cuando tanto el espacio de estados como- las utilidades son s.d., este autor, emplea el mismo metodo que cuando solo era difuso el espacio de estados, obteniendo ahora, segun la matriz de utilidad difusa, s.d. de s.d. de utilidades, de los que se extrae un s.d. optimal- del alternativas, empleando la regla de reduccion que antes señalamos, del cual se escoge la alternativa de mayor grado de pertenencia.

II.3.4.COMENTARIO.- El metodo expuesto anteriormente, presenta algunos inconvenientes que vamos a analizar.

1.- La reduccion de datos que se establece en II.3.1, segun indican Wierzchon y Zalewsky (1979), para el caso en que un cierto elemento u_p aparezca en un s.d. mas- de una vez, lleva consigo una perdida de informacion- sobre los datos del problema. Ademas, esta regla de - reduccion no esta justificada en ningun sentido, al - no haber ninguna razon de tipo matematico o logico - que la explique.

2.- En II.3.3, la eleccion que se hace de alternativa optimal esta basada exclusivamente en apreciaciones per sonales, al hablar de alternativa con mayor utilidad, no dandose ningun criterio para la clasificacion de - las alternativas segun los s.d. de utilidades que lle van asociados.

3.- No existe ninguna justificacion para definir utilidad difusa tal como se hace en II.3.3. Se podria utilizar cualquier otro concepto, de manera igualmente valida, al menos en principio.

4.- En II.3.3, vemos como el conjunto optimal $\underset{\sim}{A}_o$, s.d. de alternativas optimales, se crea de un modo totalmente subjetivo, sin encontrar justificacion para la asigna cion que se hace de los grados de pertenencia de las- diferentes alternativas.

5.- "La introduccion del conjunto maximizante, no influye para nada en los resultados del problema", segun se - prueba en Wierzchon y Zalewsky (1979).

Queda aun otra via mas de estudio del problema de de cision en ambiente difuso. Esta es la de suponer que la - relacion de orden entre las alternativas, o para ser mas- precisos, la relacion de preferencia entre ellas, es difu sa, es decir, se considera un problema en el que el deci- sor no tiene perfectamente claras las preferencias entre- alternativas. Esto ha sido estudiado inicialmente por Or- lovsky (1978) y, a continuacion, desarrollamos brevemente sus puntos basicos.

II.4.EL ENFOQUE DE ORLOVSKY.- Supongamos definida una re- lacion difusa,

$$\mu_R: X\times X \longrightarrow [0,1]$$

que nos representa una preferencia no estricta, en un conjunto de alternativas X, entendiendose $\mu_R(x,y)$ como el -- grado en que se verifica la preferencia $x \geqslant y$. Esta relacion se supone reflexiva pero no, necesariamente, transitiva.

A partir de la dada, se definen dos relaciones difusas mas: Una de indiferencia y otra de preferencia estricta del siguiente modo:

Si $\mu_R(x,y) \geqslant 0$ y $\mu_R(x,y) \geqslant \mu_R(y,x)$, para algun par de alternativas, entonces x e y se consideran indiferentes con grado $\mu_R(y,x)$, asi como x mas preferido estrictamente que y, con grado $\mu_R(x,y) - \mu_R(y,x)$.

Formalmente, se definen como sigue,

1) Relacion de indiferencia difusa,

$$R^I = R \cap R^{-1}$$

2) Relacion de preferencia estricta difusa,

$$R^P = R - (R \cap R^{-1}) = R - R^{-1}$$

estando definida la diferencia de relaciones difusas por,

$$\mu_{R-R'}(x,y) = \mu_R(x,y) - \mu_{R'}(x,y)$$

siempre que $\mu_R(x,y) \geqslant \mu_{R'}(x,y)$, y cero en los otros casos

Analogamente, la inversa de una relacion difusa se - define por,

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x) \qquad \forall x,y \in X$$

para cualesquiera relaciones R, R' $\in$ F(X,X).

Por tanto, las funciones de pertenencia para las nuevas relaciones definidas, vendran dadas por,

$$\mu_{R^I}(x,y) = \mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,x)$$

$$\mu_{R^P}(x,y) = \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x) \quad \text{si } \mu_R(x,y) \geqslant \mu_R(y,x)$$

$$= 0 \qquad\qquad \text{en caso contrario}$$

A partir de esto, es facil definir el denominado s.-d. de acciones no dominadas en X:

$$\mu_R^{ND}(x) = 1 - \sup_{y\varepsilon X}\{ \mu_R(y,x) - \mu_R(x,y)\} \ \forall x\varepsilon X$$

pudiendose extraer de el un conjunto de alternativas maximales no dominadas,

$$X^{ND} = \{x\varepsilon X : \mu_R^{ND}(x) = \sup_{z\varepsilon X} \mu_R^{ND}(z)\}$$

que se toma como solucion del problema.

Logicamente, a partir de X^{ND}, podemos obtener el conjunto ordinario de soluciones no dominadas y no difusas,- X^{NND}, como,

$$X^{NND} = \{x\varepsilon X: \mu_R^{ND}(x) = 1\}$$

siendo facil probar que una condicion suficiente para que X^{NND} sea no vacio, es que la relacion $\mu_R(x,y)$ sea un preorden difuso.

II.4.1.EJEMPLO.- Consideremos la siguiente relacion difusa,

$$\mu_R(x_i,x_j) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & .2 & .3 & .1 \\ .5 & 1 & .2 & .6 \\ .1 & .6 & 1 & .3 \\ .6 & .1 & .5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

inmediatamente podemos comprobar que la relacion de preferencia estricta difusa es:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & .2 & 0 \\ .3 & 0 & 0 & .5 \\ 0 & .4 & 0 & 0 \\ .5 & 0 & .2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

de donde,

$$\mu_{R^{ND}} = \{(x_1,.5),(x_2,.6),(x_3,.8),(x_4,.5)\}$$

por lo que la solucion al problema de decision difusa, podria ser la alternativa x_3, siendo evidentemente $X^{NND} = \emptyset$

II.5.OTROS METODOS DE RESOLUCION.- La relacion entre la teoria de la probabilidad y los s.d., fue establecida por primera vez por Zadeh (1968). Posteriormente, han sido muchos los autores que han seguido trabajando en esa linea y, particularmente Tanaka et al. (1976), en Teoria de la Decision.

El problema, brevemente, se plantea del siguiente modo. Sean S y S' dos conjuntos de sucesos,

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

$$S' = \{s'_1, s'_2, \ldots, s'_m\}$$

con probabilidades, respectivas, $Q(s_i)$ y $Q'(s'_j)$. Un suceso difuso A (B) se define como un s.d. de S (S' respectivamente) cuya funcion de pertenencia μ_A (μ_B) es medible Borel.

Si $R(s_i, s'_j)$ es la distribucion de probabilidad conjunta de s_i y s'_j, Zadeh (1968) da las siguientes relaciones,

$$P(A) = \sum_i \mu_A(s_i)\cdot Q(s_i)$$

$$P(A,B) = \sum_i \sum_j \mu_A(s_i)\cdot \mu_B(s'_j)\cdot R(s_i,s'_j)$$

$$P(A/s'_j) = P(A,s'_j) \;/\; Q(s'_j)$$

$$P(A/B) = P(A,B) \;/\; P(B)$$

donde a $P(A)$ se le llama probabilidad del suceso difuso A a $P(A,B)$ probabilidad conjunta de los sucesos difusos A y B, y asi sucesivamente.

Con esto, Tanaka et al. (1976) dan la siguiente definicion del problema de decision, supuesto un contexto difuso;

Un problema de decision con sucesos difusos, es una tetra-upla $\{F, A, Q, u\}$ donde,

$$F = \{F_1, F_2, \ldots, F_r\}$$

es un conjunto de estados difusos, que son sucesos difusos en un espacio probabilistico S.

$$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_q\}$$

es un conjunto de acciones difusas, que son sucesos difusos en un conjunto de acciones D.

Q es la medida de probabilidad asociada al espacio probabilistico S y $u(\cdot,\cdot)$ es una funcion de utilidad definida en $A\times F$.

Definiendo utilidad esperada de una accion difusa A_i como,

$$u(A_i) = \sum_j u(A_i,F_j)\cdot Q(F_j)$$

una decision optimal, puede definirse como una accion difusa A_o que maximiza a la funcion de utilidad esperada -- $u(A_i)$.

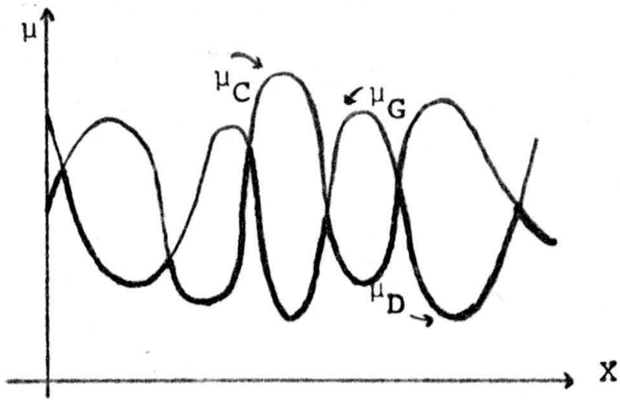
$$u(A_o) = \underset{i}{\mathrm{Max}}\ u(A_i)$$

M. Sugeno (1977) hace una aproximacion al problema - utilizando medidas difusas. Para ello usa como medio de - calculo de la perdida media por accion, la conocida "Integral de Sugeno" (1972). No nos detendrémos en esto ya que tendriamos que extendernos necesariamente en los concep - tos de medida e integral difusa.

Si hubiera que sacar alguna conclusion comun al modo de resolver el problema de decision difusa, destacariamos el hecho de que en todas las resoluciones que hemos visto la solucion del problema ha sido puntual. El metodo que - presentamos a continuacion, ante todo, difiere de los anteriores en eso, y lo entendemos como,

II.6.UN NUEVO ENFOQUE DE LA TOMA DE DECISIONES EN AMBIENTE DIFUSO.-

Al definir objetivos y restricciones difusas, simplemente, como s.d., aparece una simetria entre - ambos conceptos que hace tomar una decision difusa como - la interseccion de objetivos y restricciones, segun hemos visto, mediante el operador inferior (si bien, en general puede considerarse como una confluencia entre ambos.



Ha quedado claro que, los autores dan como solucion a los problemas de este tipo, un punto en el espacio de- posibles alternativas. Sin embargo, parece bastante logico pensar que si un problema planteado en terminos exactos, tiene una solucion bien definida, en el sentido de- no ser imprecisa, cualquier problema planteado en terminos difusos, tenga tambien una solucion difusa, y no una bien definida en el anterior sentído.

Partiendo de esta idea, vamos a dedicar nuestro trabajo a encontrar una solucion difusa a los problemas de- planteamiento difuso.

Esta filosofia, esta en la linea de la propuesta -- por D. Ralescu (comunicacion privada que se cita) quien- considera que los problemas de planteamiento difuso, deben tener tambien una solucion difusa, encontrando la utilidad de esta version en lo siguiente, citando textualmente a Aizerman(1977): "... Por hacer difuso el concepto de un conjunto, tomandolo menos restringido, cuanto - menos preciso, aun mantenemos el mismo nivel de rigor -- que cuando, normalmente, trabajamos con conjuntos no difusos".

Esto se ajusta exactamente a un problema de deci -- sion, ya que no esta claro que precision es necesaria en los resultados para tener buenas decisiones en ambiente- difuso.

Segun I.3.3, sabemos que cualquier s.d. puede expresarse mediante conjuntos ordinarios (Teorema de Representacion de los s.d.), garantizando I.3.4 el resultado inverso.

Como dijimos, el Teorema es importante, ya que segun el, podriamos representar cualquier propiedad difusa a -- partir de sus α-cortes. Esto significa poder resolver, mediante el esquema clasico, los problemas con planteamiento difuso sin mas que α-cortar el conjunto problema. En - cada α-corte podremos encontrar la solucion que nos interese, si es que se conserva el mismo problema sobre estos conjuntos, con lo que obtendremos una familia de soluciones que, si cumplen las propiedades que se exigen, nos definira, en virtud de I.3.4, la solucion difusa del problema.

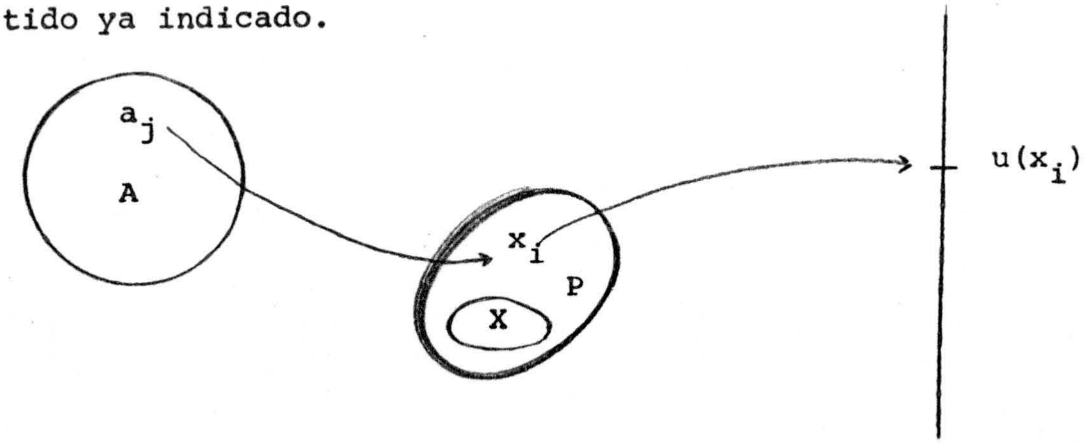
Ademas, este procedimiento, nos va a permitir una relativa comodidad en el trabajo, al ser los α-cortes siempre conjuntos ordinarios, ya que sobre ellos, podremos encontrar sin dificultades las soluciones del problema, -- cuando existan, permitiendonos contrastar estas soluciones bien calculadas, con las que se obtienen en la aplicacion de otros metodos (como son los propuestos por Tanaka Zimmermann, etc.) que veremos mas adelante.

Para aplicar este metodo, vamos a partir de la ideabasica del problema general de decision, para intentar ampliarla al caso en el que el ambiente sea difuso.

Segun S. Rios (1976) el problema general de decision unipersonal, se puede enfocar del siguiente modo:

Dado un espacio P, constituido por elementos $\{x_i\}$, - definidos como las consecuencias de las posibles decisiones $\{a_j\}$ de un individuo, y supuesta una relacion binaria entre sus elementos, que notaremos $\leqslant$, reflejando las preferencias de dicho individuo, definido un subconjunto X -

de P, el de las acciones admisibles, determinar los ele - mentos maximales de X. En estas condiciones, el problema- se puede representar por una tripleta (P,X,$\leq$) con el sentido ya indicado.



A partir de esta esquema, generalizaremos los proble mas de decision unipersonales al ambiente difuso, enten - diendolos como tripletas, en el sentido anterior, en las- que algun, o algunos, elemento (s) es (son) difuso (s).

Sobre esto, podemos hacer las consideraciones si - - guientes: No parece muy logico tomar el espacio P como un s.d., puesto que todas las acciones posibles de un deci - sor, y sus consecuencias, suelen ser conjuntos perfecta - mente definidos. En el Capitulo III, analizaremos un problema en el que al ser $P \equiv \mathbb{R}^n$, esto se pone de manifiesto. No obstante, si es logico admitir que el conjunto de acciones admisibles, y como consecuencia X, y/o la relacion de preferencia del decisor, no esten determinados claramente

De este modo, aparecen tres posibles problemas generales de decision en ambiente difuso:

1.- La relacion de preferencia existente entre las alternativas, es una relacion difusa,

$$\mu: P{\times}P \longrightarrow [0,1]$$

Naturalmente, segun el caracter de esta relacion (ya sea un preorden, orden debil, etc) tendremos situaciones diferentes.

De un modo intuitivo, corresponderia este caso a que el decisor no tuviera perfectamente claras sus preferencias entre alternativas. Un problema de este tipo es el que resuelve Orlovsky (1978) que ya mencionamos Este tipo de problemas, los representaremos por la tripleta $(P, X, \underset{\sim}{\leq})$, indicando que la relacion es difusa y los otros elementos no.

2.- El espacio X constituido por las consecuencias de acciones admisibles, es un s.d. de P. Este caso es interesante, e intuitivamente justificable, desde el momento en que existen multitud de situaciones reales, en las que el decisor no conoce exactamente los limites del conjunto de acciones que le esta permitido utilizar, o lo que es lo mismo, cada alternativa es admisible con un cierto grado.

Con el mismo sentido de siempre, este tipo de problemas lo representaremos mediante la tripleta $(P, \underset{\sim}{X}, \leqslant)$

3.- El ultimo caso es aquel en el que tanto la relacion de preferencia, como el conjunto de alternativas admisibles, son difusos. Este problema es el mas general, si bien su solucion estara en funcion de las resoluciones de los otros dos casos, por lo que sera menos complicada que las anteriores. La representacion de este problema, logicamente, sera $(P, \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{\leqslant})$.

Nos dedicaremos, por tanto, a estudiar detenidamente cada uno de estos problemas en un contexto estricto de --

Teoria de la Decision, para poder construir una funcion de utilidad que nos permita resolver satisfactoriamente los problemas. Despues, trasladaremos este estudio al caso de la Programacion Matematica

Como sabemos, en terminos generales, el camino que habitualmente se sigue para la resolucion del problema unipersonal $(P,X,\leqslant)$ es el de introducir la llamada funcion de utilidad, de la cual se determinan sus extremos. El camino que vamos a seguir aqui para la resolucion de los problemas en ambiente difuso sera, tambien, la construccion de una utilidad que, de acuerdo con la filosofia basica anteriormente expuesta, sera difusa en el sentido que posteriormente veremos.

Hay que resaltar que en todos los trabajos de toma de decisiones en ambiente difuso que hemos comentado antes, la funcion de utilidad se ha supuesto conocida, sin dar ningun procedimiento, ni justificacion, para su construccion.

II.6.1. RELACION DE PREFERENCIA DIFUSA EN EL PROBLEMA GENERAL DE DECISION.-

Consideremos el problema $(P,X,\underset{\sim}{\leq})$ donde $X\in P(P)$ y $\underset{\sim}{\leq}$ es una relacion de preferencia difusa entre alternativas que viene dada por,

$$\mu_D: P \times P \longrightarrow [0,1]$$

Supongamos, en primer lugar que μ_D es un orden debil difuso, es decir, que verifica,

a) $\forall\, x,y\in P : \mu_D(x,y) > 0 \rightarrow \mu_D(y,x) = 0$

b) $\forall x,y,z \varepsilon P \rightarrow \mu_D(x,z) \leqslant \underset{y}{\mathrm{Inf}}\{\mu_D(x,y) \vee \mu_D(y,z)\}$

Segun I.4.12, sabemos que cualquier α-corte (α>0) de un orden debil difuso, es un orden debil en el sentido ordinario. Por tanto, para cualquier $\alpha\varepsilon(0,1]$ que consideremos, obtenemos una relacion, que notaremos $\leqslant_\alpha$, que es un orden debil.

De este modo $(P,X,\leqslant_\alpha)$ podemos considerarlo como un α-problema de decision unipersonal y, por el Teorema de Representacion, $(P,X,\underset{\sim}{<})$ expresarlo mediante la familia,

$$\{(P,X,\leqslant_\alpha),\ 0<\alpha\leqslant 1\}$$

De acuerdo con nuestra filosofia, si notamos x^*_α a la solucion optima del problema $(P,X,\leqslant_\alpha)$, la familia,

$$\{(x^*_\alpha\ ,\alpha\ ),\ 0<\alpha\leqslant 1\}$$

sera la solucion del problema primitivo $(P,X,\underset{\sim}{<})$.

Para su obtencion, recordemos lo siguiente. Como es bien sabido, si μ_D es un orden debil difuso, notamos $x\succ_\alpha y$ si, y solo si, $\mu_D(x,y) \geqslant \alpha$, $\forall x,y\varepsilon P$, y decimos que x es indiferente a y, a grado $\alpha\varepsilon(0,1]$, notandolo $x\sim_\alpha y$, si, y solo si, $x \not\succ_\alpha y$ e $y \not\succ_\alpha x$.

Del mismo modo, para cualesquiera $x,y\varepsilon P$, decimos que x es mas preferido o indiferente que y, a grado $\alpha\varepsilon(0,1]$, notandolo $x\succsim_\alpha y$, si, y solo si, $x \succ_\alpha y$ o $x \sim_\alpha y$.

Notemos que este par de relaciones que acabamos de dar, no son difusas, sino clasicas, siendo la indiferencia una relacion de equivalencia.

Con esto, estamos en condiciones de dar el siguiente resultado para ambiente de certidumbre. (Incluimos aqui las demostraciones de los teoremas, a pesar de ser genera lizaciones inmediatas de los ya conocidos en el caso no - difuso, con objeto de poner de manifiesto la forma de trabajar por α-cortes. No obstante, no se incluiran las correspondientes a los ambientes de riesgo y de incertidumbre).

II.6.1.1.TEOREMA.- Si $\mu_D \in F(P,P)$ es un orden debil difuso y $P/\sim_\alpha$, para cualquier $\alpha\varepsilon(0,1]$, es finito numerable, existe una familia difusa de funciones valuadas reales en P, $\{u_\alpha,\ \alpha\varepsilon(0,1]\}$ tales que,

$$x \succ_\alpha y \leftrightarrow u_\alpha(x) > u_\alpha(y) \qquad \forall x,y\varepsilon P,\ \alpha\varepsilon(0,1]$$

Veamos la demostracion. Consideremos un α-corte cualquiera de la relacion dada, $\alpha\varepsilon(0,1]$, y el conjunto cociente $P/\sim_\alpha$, constituido por clases de equivalencia,

$$P/\sim_\alpha = \{a_i,\ i\varepsilon I\}$$

En $P/\sim_\alpha$ definimos la siguiente relacion,

$$a_i \succ^*_\alpha a_j \leftrightarrow x \succ_\alpha y, \text{ para algun } x\varepsilon a_i,\ y\varepsilon a_j$$

y es inmediato comprobar que se trata de un orden estricto.

Siguiendo la demostracion de Fishburn (1970) para el caso no difuso, definimos una funcion valuada real u_α en $P/\sim_\alpha$ del siguiente modo:

Supongamos las clases de equivalencia ordenadas de - cualquier forma, atendiendo a un conjunto de indices I. - Sea $\{r_i,\ i\varepsilon I\}$ una enumeracion de los numeros racionales.- Tomamos,

1) $u_\alpha(a_1) = 0$, siendo a_1 la primera clase de equivalencia que encontremos en la ordenacion mencionada.

2) Si $\forall i<m,\ a_m \succ^*_\alpha a_i \rightarrow u_\alpha(a_m) = m$

3) Si $\forall i<m,\ a_i \succ^*_\alpha a_m \rightarrow u_\alpha(a_m) = -m$

4) Si para algun $i,j<m$, $a_j \succ^*_\alpha a_m \succ^*_\alpha a_i$ y $a_j \not\succ^*_\alpha a_h \not\succ^*_\alpha a_i$ para cualquier entero positivo $h<m$ ($h \neq i,j$), tomamos -- $u_\alpha(a_m)$ igual al primer numero r_k en la enumeracion r_1, $r_2,\ldots$, para el que,

$$u_\alpha(a_j) > r_k > u_\alpha(a_i)$$

Segun esta construccion, resulta evidente que,

$$\forall i < m \rightarrow u_\alpha(a_m) \neq u_\alpha(a_i)$$

y ademas,

$$\forall i,j \leq m \rightarrow a_j \succ^*_\alpha a_i \leftrightarrow u_\alpha(a_j) > u_\alpha(a_i)$$

Finalmente, para evaluar la utilidad de cada alternativa, a grado α, tomamos,

$$\forall x \varepsilon a_i \rightarrow u_\alpha(x) = u_\alpha(a_i) \qquad \forall a_i \varepsilon\ P/\sim_\alpha$$

Repitiendo el proceso para cada $\alpha(0,1]$, obtenemos -- una familia difusa de funciones de utilidad, la cual podemos considerar como la "utilidad difusa" solucion del problema de decision en ambiente de certidumbre, con rela -- cion de preferencia difusa en tre las alternativas.

A continuacion, veremos la construccion de esta familia difusa con el siguiente,

II.6.1.2.EJEMPLO.- Supongamos un problema general de decision, en el que la relacion de prefe - rencia entre las alternativas, viene dada por un orden debil difuso, el cual esta definido mediante la siguiente - matriz:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & .3 & .4 & .5 \\ 0 & 0 & .4 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Construimos los α-cortes de la relacion, $\alpha \varepsilon (0,.3]$ y - en ellos, definimos la relacion de equivalencia de indife- rencia, de finida anteriormente,

$$D_\alpha = \begin{array}{c|cccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \sim_\alpha = \begin{array}{c|cccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Las clases de equivalencia que obtenemos son,

$$a_i = \{x_i\} \ , \ i = 1,2,3,4$$

luego,

$$u_\alpha(a_1) = 0 \text{ y } u_\alpha(a_i) = -i, \ i = 2,3,4 \ \forall \alpha \varepsilon (0,.3]$$

Por tanto,

$$u_\alpha(x_1) = 0 \text{ y } u_\alpha(x_i) = -i, \ i = 2,3,4 \ \forall \alpha \varepsilon (o,.3]$$

Analogamente, $\forall \alpha \varepsilon (.3,.4]$,

$$D_\alpha = \begin{array}{c|cccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \sim_\alpha = \begin{array}{c|cccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Obteniendo,

$$a_1 \{x_1, x_2\},\ a_2 = \{x_3\},\ a_3 = \{x_4\}$$

$$u_\alpha(a_1) = 0,\ u_\alpha(a_2) = -2,\ u_\alpha(a_3) = -3 \qquad \forall \alpha \varepsilon (.3,.4]$$

$$u_\alpha(x_1) = u_\alpha(x_2) = 0;\ u_\alpha(x_3) = -2;\ u_\alpha(x_4) = -3.$$

Por ultimo, $\forall \alpha \varepsilon (.4,.5]$

$$D = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \sim_\alpha = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

de modo que,

$$a_1 = \{x_1, x_2, x_3\},\ a_2 = \{x_4\}$$

$$u_\alpha(a_1) = 0 \text{ y } u_\alpha(a_2) = -2 \qquad \forall \alpha \varepsilon (.4,.5]$$

$$u_\alpha(x_1) = u_\alpha(x_2) = u_\alpha(x_3) = 0,\ u_\alpha(x_4) = -2$$

y, evidentemente,

$$\forall \alpha \varepsilon (.5,1] \rightarrow u_\alpha(x_i) = 0,\ i = 1,2,3,4$$

Cuando la relacion de preferencia que se considera - es un orden estricto parcial difuso, en sus α-cortes, la- relacion de indiferencia que estamos usando, no tiene por que ser transitiva, para evitar esto, se da una nueva,

II.6.1.3.DEFINICION.- Dado un orden parcial estricto difuso $\mu_E \ \varepsilon\ F(P,P)$, en cada α-corte E_α, $\alpha \varepsilon (0,1]$, definimos la siguiente relacion de indiferencia,

$$\forall x,y \varepsilon P,\ x \approx_\alpha y \leftrightarrow (x \sim_\alpha z \leftrightarrow y \sim_\alpha z, \forall z \ \varepsilon\ P) \qquad \alpha \varepsilon (0,1]$$

Es facil comprobar que esta relacion es de equivalencia en cada α-corte E_α

Asi, con esta definicion, y teniendo en cuenta I.4.13 (donde se probaba que los α-cortes de un orden parcial estricto difuso, eran ordenes parciales estrictos ordinarios bajo las condiciones de siempre) podemos asegurar el si -- guiente resultado,

II.6.1.4.TEOREMA.- Si $\mu_E \in F(P,P)$ es un orden parcial es - tricto difuso y el espacio cociente $P/\approx_\alpha$ es finito numerable, entonces existe una familia difusa de funciones valuadas reales $\{u_\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1\}$ definida sobre P tal que,

$$\forall x,y \in P, \mu_E(x,y)\geqslant\alpha \rightarrow u_\alpha(x) > u\ (y) \qquad \text{(II.6.5,a)}$$

$$x \approx_\alpha y \quad \rightarrow u_\alpha(x) = u_\alpha(y) \qquad \text{(II.6.5,b)}$$

De nuevo en este Teorema, su importancia radica en -- que podamos construir una familia difusa de utilidades, que nos permita resolver, en este caso, el problema con preferencias difusas.

La demostracion resulta practicamente inmediata considerando I.4.13 y los dos siguientes resultados, debidos a- Fishburn y Szpilrajn.

II.6.1.5.TEOREMA.- Sea $\succ_\alpha$ en P un orden parcial estricto.- Entonces, se cumple lo siguiente:

a) $\forall x,y\in P$, solo se verifica una de las siguientes posibilidades,

$$x\succ_\alpha y\ ,\ y\succ_\alpha x,\ x\approx_\alpha y \text{ ó } (x\sim_\alpha y\ \&\ x \not\approx_\alpha y)$$

b) $\approx_\alpha$ es una equivalencia

c) $x\approx_\alpha y \leftrightarrow (z\succ_\alpha x \leftrightarrow z\succ_\alpha y\ \&\ x\succ_\alpha z \leftrightarrow y\succ_\alpha z,\ \forall z \in P)$

d) $(y \succ_\alpha x,\ z \approx_\alpha y) \rightarrow z \succ_\alpha x$ & $(x \approx_\alpha y,\ z \succ_\alpha y) \rightarrow z \succ_\alpha x$

e) La relacion $\succ_\alpha^*$ definida en $P/\approx_\alpha$ por,

$$b \succ_\alpha^* a \leftrightarrow y \succ_\alpha x \ , \text{ para algun } x \varepsilon a \ \& \ y \varepsilon b$$

es un orden parcial estricto.

II.6.1.6.TEOREMA.- Si $\succ_\alpha^*$ es un orden parcial estricto en un conjunto Y, entonces existe un orden estricto $\succ_\alpha^\circ$ en Y que incluye al anterior y tal que,

$$y \succ_\alpha^* x \ \rightarrow y \succ_\alpha^\circ x \ , \forall x,y \ \varepsilon \ Y$$

Con esto es inmediata la demostracion de II.6.1.4. - Sea E_α un α-corte, $0<\alpha\leqslant 1$, de la relacion dada. Por I.4.13 se trata de un orden parcial estricto. Por e) en el resultado anterior, si $P/\approx_\alpha$ es finito numerable, $\succ_\alpha^*$ es un orden parcial estricto.

Por II.6.1.6, existe un orden estricto $\succ_\alpha^\circ$ en $P/\approx_\alpha$ que incluye al $\succ_\alpha^*$.

II.6.1.1, garantiza una funcion u_α en $P/\approx_\alpha$ tal que,

$$b \succ_\alpha^\circ a \leftrightarrow u_\alpha(b) > u_\alpha(a) \qquad \forall a,b \ \varepsilon \ P/\approx_\alpha$$

tomando,

$$u_\alpha(x) = u_\alpha(a) \qquad \forall x \ \varepsilon \ a$$

si $a \ \varepsilon \ P/\approx_\alpha$.

Entonces, si $x \approx_\alpha y$, $u_\alpha(x) = u_\alpha(y)$, de modo que se verifica (II.6.5,b). Asi mismo, si $x \succ_\alpha y$, con $x \varepsilon a$, $y \varepsilon b$, entonces,

$$a \succ_\alpha^* b$$

por e) enII.6.1.5 y d). Por tanto, $a \succ_\alpha^\circ b$ y $u_\alpha(a) > u_\alpha(b)$ - por lo que,

$$u_\alpha(x) > u_\alpha(y).$$

Veamos un,

II.6.1.7.EJEMPLO.- Supongamos el siguiente orden parcial estricto difuso,

$$\begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & .9 & .7 & .3 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & .7 & .3 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & .3 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Construimos sus α-cortes y el correspondiente espacio cociente, $\forall \alpha \varepsilon (0,.3]$:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Por lo que,

$$a_i = \{x_i\} \quad i= 1,2,3,4,5$$

luego,

$$u_\alpha(a_1) = 0, \; u_\alpha(a_i) = -i, \; i = 2.3.4.5$$

$$\forall \alpha \varepsilon (0,.3] \qquad u_\alpha(x_1) = 0, \; u_\alpha(x_i) = -i, \; i = 2,3,4,5$$

Por la forma particular de la relacion que consideramos, la indiferencia en cada α-corte, proporciona identica estructura para el espacio cociente, por lo que los va lores de la utilidad, $\forall\alpha\varepsilon(0,1]$, son los mismos que hemos calculado antes.

Como hemos visto, para los problemas planteados, encontramos una familia de utilidades,

$$\{u_\alpha(x),\ 0<\alpha\leqslant 1\}\qquad \forall x\ \varepsilon\ P$$

pero no un s.d. puesto que, como es evidente, hay valores de la utilidad que son los mismos para diferentes α-cortes, es decir, un mismo elemento del conjunto, lleva asociado mas de un grado de pertenencia, lo que hace que no sea un s.d.

Pero, el s.d. solucion del problema, que a nosotros nos interesa, lo podemos definir como,

$$\mu^s[u_\alpha(x)] = \underset{\alpha\varepsilon(0,1]}{\mathrm{Sup}}\{u_\alpha(x):\ u_\alpha(x) = k\}$$

con $k\varepsilon V(x)$,

$$V(x) = \{u_\alpha(x),\ 0<\alpha\leqslant 1\}\qquad \forall x\ \varepsilon\ P$$

Por tanto, podemos dar la siguiente,

II.6.1.8.DEFINICION.- Llamamos utilidad del problema de decision, en ambiente de certidumbre, con relacion de preferencia difusa, al s.d.,

$$\mu^s[u_\alpha(x)] = \underset{\alpha}{\mathrm{Sup}}\{u_\alpha(x):\ u_\alpha(x) = k,\ k\ \varepsilon\ V(x)\}$$

es decir, asociamos como grado de la utilidad de un elemento, el superior de los valores α, correspondientes a los α-cortes en los que $x\varepsilon P$ toma dicho valor.

Destaquemos el hecho de que nos ha aparecido de un modo natural, lo que podemos llamar, la utilidad difusa del problema.

A continuacion, pasamos a estudiar este mismo problema pero, en ambiente de riesgo. Los resultados que mencionamos, son generalizaciones practicamente inmediatas de los ya conocidos. No obstante, igual que antes, nos permitiran definir un s.d. como solucion al problema, con las utilidades de los elementos que intervengan.

Resaltemos que, la diferencia esencial con respecto al anterior problema, es la estructura de P, al que se le impone ser un espacio de mixtura, hecho que no interviene para nada en la estructura difusa del problema, puesto que el decisor, ahora, lo que no tiene perfectamente claro es el orden que hay establecido entre loterias.

Para construir la utilidad, en este caso, necesitaremos el siguiente,

II.6.1.9.TEOREMA.- Supongamos que P es un espacio de mixtura y que se cumplen las siguientes propiedades, $\forall S,Q,R \in P$:

a) $\mu_D \in F(P,P)$ es un orden debil difuso.

b) $\mu_D(S,Q)\geq\alpha,\ 0<\lambda<1 \rightarrow \mu_D[\lambda Q + (1-\lambda)R,\ \lambda S + (1-\lambda)R] \geq \alpha$

c) $\mu_D(S,Q)\geq\alpha\ ,\ \mu_D(R,Q)\geq\alpha \rightarrow$

$$\mu_D(Q,\ \lambda S + (1-\lambda)R)\geq\alpha \quad y,$$

$$\mu_D(\beta S + (1-\beta)R,\ Q)\geq\alpha$$

para algun $\lambda,\beta\in(0,1)$ y $\forall\alpha\in(0,1]$

Entonces, $\forall T,Q,R,S \in P$, se verifica,

d) $\mu_D(T,Q)\geq\alpha,\ 0\leq\lambda<\beta\leq 1 \rightarrow \mu_D[\lambda T + (1-\lambda)Q,\ \beta T + (1-\beta)Q] \geq \alpha$

e) $Q\succsim_\alpha T,\ R\succsim_\alpha Q,\ \mu_D(R,T)\geq\alpha,\ 0<\alpha\leq 1 \rightarrow Q\sim_\alpha \lambda T + (1-\lambda)R$

para solo un $\lambda\in[0,1]$.

f) $\mu_D(Q,T) \geq \alpha$, $\mu_D(S,R) \geq \alpha$, $0 \leq \lambda \leq 1 \rightarrow$

$$\mu_D[\lambda Q + (1-\lambda)S, \lambda T + (1-\lambda)R] \geq \alpha$$

g) $T \sim_\alpha Q$, $0 \leq \lambda \leq 1 \rightarrow \lambda T + (1-\lambda)Q \sim_\alpha T$

h) $T \sim_\alpha Q$, $0 \leq \lambda \leq 1 \rightarrow \lambda T + (1-\lambda)R \sim_\alpha \lambda Q + (1-\lambda)R$

La demostracion, apoyandonos en I.4.12, siguiendo la dada por Fishburn (1970) es inmediata.

Ahora, podemos obtener la version difusa del celebre Teorema de la Utilidad de von Neuman,

II.6.1.10.TEOREMA.- Supongamos que P es un espacio de mixtura. Entonces, se verifican a), b), y c), de II.6.1.9, si, y solo si, existe una familia de funciones valuadas reales $\{u_\alpha, 0<\alpha\leq 1\}$ en P, tal que:

a) $\mu_D(R,S) \geq \alpha \leftrightarrow u_\alpha(R) > u_\alpha(S) \quad \forall R,S \in P \quad \forall \alpha \in (0,1]$

b) los α-cortes de μ_D, D_α, constituyen una sucesion encajada de ordenes debiles en P tales que,

$$\alpha_1 > \alpha_2 \leftrightarrow D_{\alpha_1} \subset D_{\alpha_2} \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$$

c) $u_\alpha[\lambda R + (1-\lambda)S] = \lambda u_\alpha(R) + (1-\lambda)u_\alpha(S)$, $\forall (\lambda,R,S) \in [0,1] \times P^2$

Ademas, si u_α en P satisface a) y c), con u_α reemplazada por v_α, v_α satisface a) y c) si, y solo si, existen numeros a y b tales que,

$$v_\alpha(R) = a \cdot u_\alpha(R) + b \quad \forall R \in P,\ a>0$$

Destaquemos que, a diferencia del Teorema de von Neuman clasico, aqui hemos tenido que introducir una nueva condicion, la b), para poder probar la necesidad de a) en II.6.1.9, ya que, en caso contrario, no obtendriamos un orden debil difuso.

Realizando la demostracion para cada α-corte, esta - coincide con la clasica y nos permite obtener la familia- difusa que buscabamos. De este modo, a cada elemento $R \varepsilon P$, le podemos asociar una utilidad difusa,

$$\forall R \varepsilon P : R \longrightarrow u_{\alpha}(R), \quad \forall \alpha \varepsilon (0,1]$$

e, igual que antes, podemos definir el conjunto de los va lores que toma la utilidad de cada elemento, segun los -- distintos α-cortes y, por tanto, la utilidad difusa para- este caso, podemos definirla del mismo modo a como lo hi- cimos en ambiente de certidumbre, de acuerdo con II.6.1.8

Entramos, por ultimo, en el problema de decision en- ambiente de incertidumbre, con preferencias difusas. Como se sabe, ahora las perspectivas que se consideran en el - problema, son paquetes de acciones, que llamaremos pers - pectivas inciertas.

Si notamos S al conjunto de estados de la naturaleza actuando de modo analogo a los anteriores casos, podemos- dar el siguiente,

II.6.1.11.TEOREMA.- Supongamos que S es finito, y que se- verifican las siguientes hipotesis pa ra cualesquiera $S,Q,R \varepsilon P$,

a) $\mu_D \varepsilon F(P,P)$ es un orden debil difuso.

b) $\mu_D(Q,S) \geqslant \alpha$, $0<\lambda<1 \rightarrow$

$$\mu_D[\lambda Q + (1-\lambda)R, \lambda S + (1-\lambda)R] \geqslant \alpha, \forall \alpha \varepsilon (0,1]$$

c) $\mu_D(Q,S) \geqslant \alpha$, $\mu_D(R,Q) \geqslant \alpha$

$$\mu_D[Q, \lambda S + (1-\lambda)R] \geqslant \alpha \text{ y } \mu_D[\beta S + (1-\beta)R,Q] \geqslant \alpha$$

$\forall \alpha \varepsilon (0,1]$ y para algun $\lambda,\beta \varepsilon (0,1)$

Entonces, con $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, existe una familia difusa de funciones valuadas reales $u_\alpha^1, u_\alpha^2, \ldots, u_\alpha^n$ en los respectivos conjuntos de consecuencias de los estados, tal que:

$$\mu_D(Q,R) \geq \alpha \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} E(u_\alpha^i, Q(s_i)) > \sum_{i=1}^{n} E(u_\alpha^i, R(s_i)) \quad \forall R, Q \in P$$

y las u_α^i, $\forall \alpha \in (0,1]$, que satisfacen esto, son unicas, salvo transformaciones lineales positivas, siendo constantes si, y solo si, el correspondiente s_i, es nulo.

Como hemos dicho, la demostracion vuelve a coincidir con la del teorema clasico, considerando los α-cortes de la relacion, lo cual nos garantiza la verificacion del teorema en cada uno de ellos y, por tanto, la existencia de una familia de utilidades.

Para definir la utilidad difusa, eliminaremos los grados de pertenencia redundantes, como antes, con lo que volvemos a la definicion II.6.1.8.

De acuerdo con todo lo dicho, cualquier problema de la forma $(P,X,\underset{\sim}{<})$ puede resolverse mediante la construccion de una utilidad difusa $\{u_\alpha(x),\ 0<\alpha\leq 1\}$. Si notamos $x^*(\alpha)$ a la solucion de,

$$\text{Max: } u_\alpha(x)$$
$$x \in X$$

y, de nuevo, eliminamos los grados de pertenencia repetidos, entonces la familia $\{x^*(\alpha),\alpha\} \in F(P)$ sera considerada como la solucion difusa del problema, sin entrar en consideraciones acerca de la posible existencia del anterior maximo.

II.6.2.ESPACIO DE ACCIONES ADMISIBLES DIFUSO EN EL PROBLEMA GENERAL DE DECISION

.- Como dijimos la admisibilidad de una alternativa, no es un hecho siempre claro para el decisor. De ahi, que tenga sentido hablar de espacio de acciones admisibles difuso.

Consideremos, entonces, el problema $(P,\underset{\sim}{X},\leqslant)$, donde $\underset{\sim}{X}$ es un s.d. de P. Aplicando nuestra filosofia basica, dicho problema, podemos identificarlo con la familia,

$$\{(P,X_\alpha,\leqslant),\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

representando X_α los α-cortes de X.

Si, dependiendo del contexto en el que consideremos el problema, admitimos las hipotesis adecuadas sobre P y la relacion de preferencia $\leqslant$, siempre sera posible construir una funcion de utilidad,

$$u: P \longrightarrow \mathbb{R}$$

que sea valida para cualquier problema del tipo $(P,X_\alpha,\leqslant)$, $0 \leqslant\alpha\leqslant 1$.

En estas condiciones, podemos obtener la solucion de

$$\text{Max: } u(x)$$
$$x \in X_\alpha,\ \alpha\in[0,1]$$

la cual notaremos $x^*(\alpha)$. Si eliminamos los grados de pertenencia redundantes, el s.d. $\{x^*(\alpha),\alpha\}\in F(P)$, lo consideraremos como la solucion al problema original $(P,\underset{\sim}{X},\leqslant)$.

Evidentemente, aqui aparece una cuestion de tipo practico, como es la posibilidad de existencia de $x^*(\alpha)$.- Este problema no vamos a estudiarlo aqui, pero volveremos pero volveremos a el en el proximo capitulo, suponiendo un un caso particular de funcion de utilidad.

Destaquemos que, para los problemas estudiados hasta-ahora: $(P,X,\underset{\sim}{<})$ y $(P,\underset{\sim}{X},\leqslant)$, el s.d. solucion, es formalmente identico si bien, en general, no tienen por que coincidir. Esto nos hace pensar en la posibilidad de una dualidad entre ambos problemas, la cual, desgraciadamente, no podemos poner de manifiesto por dificultades algoritmicas para su-resolucion. Por otra parte, esta idea de dualidad viene a-a recaer en la simetria existente entre objetivos y res -- tricciones segun el enfoque de Bellman y Zadeh.

II.6.3.PROBLEMA GENERAL DE DECISION CON ESPACIO DE ACCIONES ADMISIBLES Y RELACION DE PREFERENCIA DIFUSOS.- Consideremos, por ultimo, los problemas del tipo $(P,\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{<})$ los cuales, nuevamente, los identificaremos con la familia,

$$\{(P,X_\alpha,\leqslant_\alpha),\ 0<\alpha\leqslant 1\}$$

con el sentido habitual de esta notacion.

Aplicando los resultados obtenidos en II.6.1, y bajo-las hipotesis convenientes, es posible construir una utilidad para cada $\alpha\varepsilon(0,1]$,

$$u_\alpha: P \longrightarrow \mathbb{R}$$

que conserve el orden $\leqslant_\alpha$.

Para obtener la solucion difusa, actuando como antes, definimos $x^*(\alpha)$ como la solucion de,

$$\text{Max: } u_\alpha(x)$$
$$x \varepsilon X_\alpha \ , \ \alpha \varepsilon (0,1]$$

que conduce, por eliminacion de los grados redundantes, al s.d. $\{x^*(\alpha),\alpha\}$.

Como antes, tampoco entramos aqui en el estudio de -- las condiciones para la existencia de $x^*(\alpha)$, dejandolo, como hemos dicho, para el siguiente capitulo.

Debemos resaltar, finalmente, un hecho importante: El modo de construir la funcion de utilidad en cada α-corte,- sobre un espacio cociente, hace que, debido a poder tomar- las clases de equivalencia en cualquier orden (e incluso - en orden distinto para α-cortes diferentes) las utilidades que se les van asignando no guarden ninguna relacion, para una misma clase de equivalencia, de un α-corte a otro.

Por tanto, aunque los problemas vayan encajados, desgraciadamente no podemos decir lo mismo de sus soluciones. Incluso si mantuvieramos inalterable el modo de ordenar -- las clases de equivalencia, no tendria por que verificarse ese encajamiento de soluciones, del que hablamos.

CAPITULO III

III.1.INTRODUCCION.- En este tercer capitulo, se estudian los problemas de programacion matematica difusa como problemas de decision. Comenzaremos dando un repaso a las diferentes formas de enfocar el problema, partiendo de la de Tanaka et al. (1974) que, ademas - de ser la primera que se conocio, es la mas elaborada. Todos estos diversos enfoques, veremos que tienen como fundamento la filosofia de Bellman y Zadeh, estando, por tanto, orientados a la busqueda de una solucion puntual optima.

En una segunda fase, nos dedicaremos a aplicar a la- programacion matematica difusa, el metodo introducido en- II.6, habida cuenta de que estos problemas, no son mas -- que un caso particular de aquellos, en los que $P \equiv R^n$ y - X es el conjunto de restricciones sobre el que se intenta optimizar la funcion objetivo f(x) que, ahora, hay que entenderla como un caso particular de la funcion de utili - dad, ya construida, de la que alli hablabamos.

II.2.EL PLANTEAMIENTO DE TANAKA.- Como hemos dicho, este- es el primer autor que- se ocupa del problema de programacion matematica difusa.- Basicamente, consiste en optimizar una funcion sobre un - conjunto de restricciones difusas. Formalmente:

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{\underset{\sim}{C}}: f(x)$$

con $f: R^n \longrightarrow R^+ - \{0\}$ y $\underset{\sim}{C} \in F(R^n)$, con funcion de pertenencia $\mu_C: R^n \longrightarrow [0,1]$.

Para la resolucion de este problema, Tanaka et al.,-

emplean la filosofia de Bellman y Zadeh, definiendo una - decision como un s.d. de R^n e individualizando un punto-- como solucion maximizante (II.2.8).

De cara a conseguir esto, se define $\mu_G(x) = f(x)/M$ - siendo,

$$M = \operatorname*{Max}_{\overline{S_c}} f(x)$$

$$S_c = \{x/ \ \mu_c(x)>0\}$$

es decir, la clausura del soporte de μ_c, con la topologia usual en R^n, el cual se supone denso en R^n. Evidentemente μ_G: $R^n \longrightarrow [0,1]$ y es considerada por estos autores como la funcion de pertenencia de un cierto objetivo difuso (en- el sentido de II.2.1) inducido por f(x), la cual, en principio, no se ha supuesto difusa. En estas condiciones, y- de acuerdo con II.2, se entiende decision, para este problema, el s.d. de funcion de pertenencia,

$$\mu_D(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_c(x) \qquad \forall x \in R^n$$

transformandose el problema original en calcular,

$$\operatorname*{Sup}_{x\in R^n} \mu_D(x) = \operatorname*{Sup}_{x\in R^n}[\mu_G(x) \wedge \mu_c(x)]$$

Este calculo, puede simplificarse, aplicando la si - guiente proposicion, de la que damos una demostracion inspirada en la de Negoita y Ralescu (1975).

III.2.1.PROPOSICION.- Se verifica la siguiente relacion:

$$\operatorname*{Sup}_{x\in R^n} \mu_D(x) = \operatorname*{Sup}_{\alpha}[\alpha \wedge \operatorname*{Sup}_{x\in C_\alpha} \mu_G(x)]$$

donde,

$$C_\alpha = \{x\in R^n: \ \mu_c(x) \geqslant \alpha\}$$

son los α-cortes de la restriccion difusa $\underset{\sim}{C}$.

Si μ_α es la funcion caracteristica de C_α, segun el Teorema de Representacion,

$$\mu_C = \sup_\alpha (\alpha \cdot \mu_\alpha) = \sup_\alpha (\alpha \wedge \mu_\alpha)$$

donde,

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in C_\alpha \\ 0 \text{ si } x \notin C_\alpha \end{cases}$$

Asi, tenemos,

$$\mu_D(x) = \mu_C(x) \wedge \mu_G(x) = \left[\sup_\alpha (\alpha \wedge \mu_\alpha(x))\right] \wedge \mu_G(x) =$$
$$= \sup_\alpha \left[\alpha \wedge \mu_\alpha(x) \wedge \mu_G(x)\right]$$

Pero,

$$\sup_{x \in R^n} \mu_D(x) = \sup_{x \in R^n} \sup_\alpha \left[\alpha \wedge \mu_\alpha(x) \wedge \mu_G(x)\right] =$$
$$= \sup_\alpha \left[\alpha \wedge \sup_{x \in R^n} (\mu_\alpha(x) \wedge \mu_G(x)\right]$$

Por otro lado,

$$\sup_{x \in R^n} \left[\mu_\alpha(x) \wedge \mu_G(x)\right] = \sup_{x \in C_\alpha} \left[\mu_\alpha(x) \wedge \mu_G(x)\right] \vee \sup_{x \notin C_\alpha} \left[\mu_\alpha(x) \wedge \mu_G(x)\right]$$
$$= \sup_{x \in C_\alpha} \mu_G(x)$$

Luego,

$$\sup_{x \in R^n} \mu_D(x) = \sup_\alpha \left[\alpha \wedge \sup_{x \in C_\alpha} \mu_G(x)\right]$$

Destaquemos que hemos considerado a μ_C como unica restriccion en el problema. No hay ninguna dificultad en suponer que haya mas de una: $\mu_{C_1}, \mu_{C_2}, \ldots, \mu_{C_q}$ pues bastaria tomar,

$$\mu_C = \bigwedge_{i=1}^{q} \mu_{C_i}$$

para, de nuevo, encontrarnos en el caso anterior.

Por otra parte, una o varias de estas restricciones, pueden ser de tipo clasico, es decir, funciones caracte - risticas ordinarias. Por comodidad, y sin que suponga perdida alguna de generalidad, supongamos que,

$$\mu_{c_1}, \mu_{c_2}, \ldots, \mu_{c_p} \varepsilon\ F(R^n) \text{ y,}$$

$$\mu_{c_{p+1}}, \ldots, \mu_{c_q}\ \varepsilon\ C(R^n)$$

entonces se puede probar el siguiente,

III.2.2.COROLARIO.- Sea,

$$X = \{x\varepsilon R^n : \mu_{c_i}(x) = 1, i = p+1,.,q\}$$

$$\mu_D = \mu_G \wedge \mu_{c_1} \wedge .. \wedge \mu_{c_q},\ \mu_{D'} = \mu_G \wedge \mu_{c_1} \wedge .. \wedge \mu_{c_p} \text{ y } \mu_c = \mu_{c_1} \wedge \ldots \wedge \mu_{c_p}$$

Entonces:

$$\operatorname*{Sup}_{x\varepsilon R^n} \mu_D(x) = \operatorname*{Sup}_{x\varepsilon X} \mu_{D'}(x) = \operatorname*{Sup}_{\alpha} \Big[\alpha \wedge \operatorname*{Sup}_{C^1_\alpha \cap \ldots \cap C^p_\alpha \cap X} \mu_G(x)\Big] =$$

$$= \operatorname*{Sup}_{\alpha}\Big[\alpha \wedge \operatorname*{Sup}_{X\cap C_\alpha} \mu_G(x)\Big] = \operatorname*{Sup}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p} \Big[\alpha_1 \wedge .. \wedge \alpha_p \wedge \operatorname*{Sup}_{C^1_{\alpha_1} \cap \ldots \cap C^p_{\alpha_p} \cap X} \mu_G(x)\Big]$$

La demostracion se sigue inmediatamente de III.2.1, teniendo en cuenta que,

$$\forall\ \alpha\varepsilon[0,1] \rightarrow C^1_\alpha \cap \ldots \cap C^p_\alpha = C^1_\alpha \cap \ldots \cap C^p_\alpha \cap X = C^1_{\alpha_1} \cap \ldots \cap C^p_{\alpha_p} \cap X$$

para cualesquiera valores $\alpha_1 \ldots \alpha_p \varepsilon [0,1]$ tales que,

$$\bigwedge_{i=1}^{p} \alpha_i = \alpha$$

NOTA.- La importancia de este corolario, radica en el he - cho de que en cualquier problema podemos considerar dos conjuntos de restricciones. Por un lado las difusas, -

que mediante su interseccion pueden ser consideradas como una sola y, por otro, las clasicas, con las que se trabaja del modo habitual.

Consideremos las siguientes funciones,

$$\phi(\alpha) = \sup_{C_\alpha \cap X} \mu_G(x) \quad y,$$

$$\psi(\alpha) = \alpha \wedge \phi(\alpha)$$

Segun III.2.1, resulta evidente que,

$$\sup_{x \in X} \mu_{D'}(x) = \sup_{\alpha} \psi(\alpha)$$

III.2.3.LEMA.- La funcion ϕ tiene las siguiente propiedades:

a) $\phi(0) = \sup_{X} \mu_G(x)$

b) $\alpha \leqslant \beta \rightarrow \phi(\alpha) \geqslant \phi(\beta)$

c) $\phi(\alpha \wedge \beta) \geqslant \phi(\alpha) \wedge \phi(\beta)$

La demostracion es trivial, ya que,

$$\alpha = 0 \rightarrow C_o = R^n$$

y, evidentemente,

$$C_o \cap X = X$$

Las otras dos propiedades, son, asi mismo, inmediatas por las propiedades de los α -cortes,

$\alpha \leqslant \beta \rightarrow C_\beta \subseteq C_\alpha \quad C_\beta \cap X \subseteq C_\alpha \cap X \rightarrow \phi(\beta) \leqslant \phi(\alpha)$

siendo la c) consecuencia de esta.

Cuando solo consideramos restricciones difusas, supusimos que

$$M = \max_{S_c} f(x)$$

Para la nueva situacion, con restricciones de tipo clasico y difusas, consideraremos que,

$$M = \underset{X}{\mathrm{Max}}\ f(x)$$

y supondremos que es finito. Con esto, nos aseguramos que $\phi(\alpha)$ y $\psi(\alpha)$ estan definidas de $[0,1]$ en $[0,1]$, verificandose que $\phi(0) = 1$.

Si notamos $\mathcal{C}([0,1])$ el espacio de todas las funciones reales continuas definidas en $[0,1]$, se sabe que $\mathcal{C}([0,1])$ es de Banach, con la norma,

$$\forall u \in \mathcal{C}([0,1]) \to ||u|| = \underset{\alpha\in[0,1]}{\mathrm{Sup}}|u(\alpha)|$$

Supongamos entonces que μ_C y μ_G son funciones continuas. Observemos que,

$$\phi(\alpha) = ||\mu_\alpha \cdot \mu_G||$$

siendo ahora μ_α la funcion caracteristica de $C_\alpha \cap X$. Entonces, se verifica la siguiente,

III.2.4.PROPOSICION.- Si ϕ es continua en $[0,1]$, tiene un punto fijo, es decir,

$$\exists \alpha^* \in [0,1] : \phi(\alpha^*) = \alpha^*$$

significando la continuadad de ,

$$\forall \alpha_o \in [0,1],\ \alpha_n \longrightarrow \alpha_o \to ||\mu_{\alpha_n} \cdot \mu_G|| \longrightarrow ||\mu_{\alpha_o} \cdot \mu_G||$$

o lo que es lo mismo,

$$\text{Si } \alpha_n \longrightarrow \alpha_o \to \lim_{n\to\infty} |\underset{C_{\alpha_n}\cap X}{\mathrm{Sup}} \mu_G(x)| = \underset{C_{\alpha_o}\cap X}{\mathrm{Sup}} \mu_G(x)$$

la proposicion es cierta siempre que ϕ sea continua y este definida de $[0,1]$ en $[0,1]$.

De este modo,

$$\alpha^* \varepsilon [0,1] : \sup_{x \varepsilon C_{\alpha^*} \cap X} \mu_G(x) = \alpha^*$$

III.2.5.PROPOSICION.- En las hipotesis anteriores,

$$\sup_X \mu_D(x) = \alpha^* : \mu_D = \mu_G \wedge \mu_{C_1} \wedge \ldots \wedge \mu_{C_p}$$

En efecto, sabemos que,

$$\sup_X \mu_D(x) = \sup_{\alpha \varepsilon [0,1]} \psi(\alpha)$$

Vamos a probar que,

$$\sup_\alpha \psi(\alpha) = \alpha^* : \psi(\alpha) = \alpha \wedge \phi(\alpha)$$

Tenemos que,

$$\psi(\alpha^*) = \alpha^* \wedge \phi(\alpha^*) = \alpha^*$$

Ahora bien:

$$\text{Si: } \alpha<\alpha^* \to \phi(\alpha) \geqslant \phi(\alpha^*) = \alpha^* > \alpha \to \psi(\alpha) = \alpha<\alpha^* = \psi(\alpha^*)$$

$$\text{Si } \alpha>\alpha^* \to \phi(\alpha) \leqslant \phi(\alpha^*) = \alpha^*<\alpha \to \psi(\alpha) = \phi(\alpha)<\alpha^* = \psi(\alpha^*)$$

Esta proposicion pone de manifiesto que el problema de programacion difusa que planteamos, se ha reducido a calcular

$$\alpha^* = \sup_{C_{\alpha^*} \cap X} \mu_G(x) \qquad \text{(III.2.5,a)}$$

No obstante, la decision maximizante solo sera determinable, cuando el anterior superior sea accesible. Evidentemente, si:

$$\sup_{X \cap C_\alpha} \mu_G(x) \qquad \forall \alpha \varepsilon [0,1]$$

es finito y la funcion $\phi(\alpha)$ es continua, α^* sera accesible sobre X, en un cierto $x^* \varepsilon X$.

Las condiciones bajo las cuales se va a cumplir esto, pueden verse en Tanaka et al. (1974). En cualquier caso, -

siempre podremos encontrar soluciones ε-optimas.

Para la resolucion de (III.2.5,a), Tanaka et al., - proponen el siguiente,

III.2.6.ALGORITMO.- Realizar las siguientes etapas, paso- a paso:

1.- Fijar un $\alpha_1 \varepsilon [0,1]$, $k = 1$

2.- Calcular,

$$\mu_k = \underset{X \cap C_{\alpha_k}}{\mathrm{Max}} \mu_G(x)$$

3.- Calcular,

$$\varepsilon_k = \alpha_k - f_k$$

Si $|\varepsilon_k| > \varepsilon$, seguir a 4.- y si no, pasar a 5.-

4.- Hacer,

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - r_k \cdot \varepsilon_k$$

y volver a 2.- con $k = k + 1$; siendo r_k un valor se - leccionado tal que $r_k \geqslant 0$ y $0 \leqslant \alpha_{k+1} \leqslant 1$.

5.- Se hace $\alpha^* = \alpha_k$ y se obtiene,

$$\mu_G(x^*) = \underset{C_{\alpha^*} \cap X}{\mathrm{Max}} \mu_G(x)$$

Se puede probar que el algoritmo es convergente, si- bien, y aun cuando α^* sea accesible, no esta garantizada- su localizacion en un numero finito de pasos, obteniendose siempre soluciones ε-optimas.

III.2.7.EJEMPLO.- Consideremos la manufactura de dos productos diferentes x_1 y x_2, por tres procesos I, II y III. Se quiere determinar la cantidad optima de los productos x_1 y x_2 necesaria para maximizar,

$$\alpha \wedge \max_{C_\alpha} f(x)$$

donde f(x) es una funcion de beneficio.

En la tabla adjunta, se dan el numero de horas de trabajo necesarias para la elaboracion de cada producto en cada - proceso, mensualmente, la funcion de beneficio y las capa cidades de cada proceso:

Item

Proceso	x_1	x_2	
I	2	0	$\lesssim 80$
II	0	1	$\lesssim 30$
III	4	5	$\lesssim 200$
beneficio	2	1	

Para su solucion, Tanaka et al. toman,

$$\varepsilon = .01,\ \alpha_1 = .8 \text{ y } r = .5$$

obteniendo como solucion:

$$\alpha^* = .95,\ f(x^*) = 88.2,\ x_1^* = 40.1 \text{ y } x_2^* = 8.0$$

habiendo considerado la siguiente funcion de pertenencia - para el conjunto de restricciones:

$$f_A(x) = .022x_1 + .011x_2$$

Analogamente, tomando como funcion de pertenencia,

$$f_B(x) = .016x_1 + .008x_2$$

se obtiene,

$$\alpha^* = .78,\ f(x^*) = 96.9,\ x_1^* = 46.1 \text{ y } x_2^* = 5.8$$

El ejemplo lo hemos desarrollado extensivamente, del- mismo modo que figura en la referencia citada, porque vol- veremos sobre el mas adelante.

III.3.EL PLANTEAMIENTO DE ZIMMERMANN.- Como hemos visto hasta aqui, la optimizacion difusa se ha planteado suponiendo una funcion objetivo usual,

$$f: X \longrightarrow R \qquad X \subset R^n$$

acotada, de la que se obtenia una funcion de pertenencia por normalizacion.

Zimmermann (1976) propone un nuevo enfoque del problema que, sobre todo, incide en la anterior idea de objetivo Por otra parte, Zimmermann considera problemas mas concretos que los tratados hasta ahora, en el contexto de la programacion lineal.

En efecto, supongamos un problema de P.L.,

$$\begin{aligned} \min: \ & z = c \cdot x \\ S: \ & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Partiendo de la hipotesis de que el decisor puede quedar satisfecho con un valor z_o, que no sea exactamente el optimo para el problema, pero que se ajuste mejor a las restricciones que otros puntos de mayor recompensa; dado que las restricciones se establecen en terminos como: "x debe ser tal que Ax sea aproximadamente menor o igual que" es decir, permitiendo ciertas violaciones en su verificacion, y considerando la simetria existente entre objetivos y restricciones, se acepta la siguiente version difusa del problema

$$\left[\begin{array}{lll} \min: & c.x \underset{\sim}{\prec} z_o & (a) \\ S: & Ax \underset{\sim}{\leq} b & (b) \\ & x \geqslant 0 & \end{array}\right] \quad \text{(III.3,a)}$$

en la que tambien se suele poner:

$$\underset{\sim}{\min}: c\cdot x \leftrightarrow \min: c\cdot x \underset{\sim}{\leq} z_o$$

Evidentemente, cada una de las desigualdades anteriores, se entiende como un s.d.. Concretamente, (a) representaria el objetivo difuso y (b) el conjunto de restricciones difusas.

La filosofia de la resolucion de este problema, como la del anterior, es la de Bellman-zadeh, basada en la dualidad objetivo-restricciones, enfocada a conseguir una solucion maximizante.

Para la resolucion de esta version simplificada del problema, Zimmermann utiliza, ademas, funciones de pertenencia de un tipo muy especifico. Concretamente, para -- cualquier desigualdad de la forma siguiente (incluidas -- las correspondientes al objetivo)

$$(\sum_j a_{ij}\cdot x_j \underset{\sim}{\leq} b_i) \varepsilon F(R^n)$$

la funcion de pertenencia seria,

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (Ax)_i \leq b_i \\ 1 - \dfrac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & \text{si } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si} \quad (Ax)_i \geq b_i + d_i \end{cases}$$

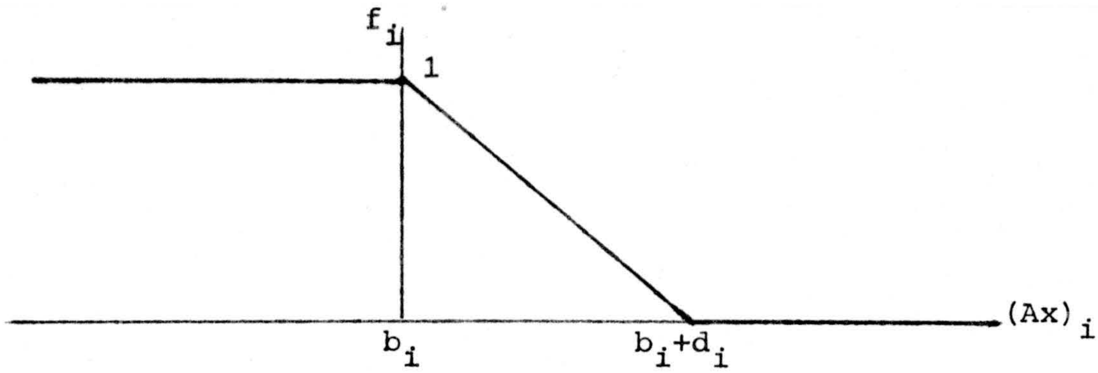
donde abreviadamente, hemos notado,

$$(Ax)_i = \sum_j a_{ij}\cdot x_j \quad i = 0,1,\ldots,m$$

y donde el subindice i = 0, corresponde a la funcion de - pertenencia de la funcion objetivo,

$$(Ax)_o = c\cdot x$$

Graficamente, se representan por,



Se observa, intuitivamente, que estas funciones ponderan el grado de violacion de la i-esima restriccion, aceptando un margen maximo de valor d_i, al que llamamos holgura de la restriccion.

En estas condiciones, el problema viene dado como:

$$\mu_D(x) = \bigwedge_i f_i(x)$$

o, lo que es lo mismo, en calcular,

$$\max_{x \geq 0} \mu_D(x) = \max_{x \geq 0} \min_i f_i(x)$$

cuya resolucion, es equivalente a la del programa lineal

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max: } \lambda \\ \quad \text{S:} \\ \qquad \lambda \leq \dfrac{b_i}{d_i} - \dfrac{(Ax)_i}{d_i} \quad i=o,1\ldots,m \\ \qquad x \geq 0 \end{array}\right]$$

(III.3,b)

Notemos que el valor λ^* optimo en (III.3,b) cumple,

$$\lambda^* = \max_{x \geq 0} \mu_D(x)$$

A la solucion del problema (III.3,a) que nos proporcione el programa auxiliar (III.3,b) la llamaremos solucion Zimmermann.

III.3.1.EJEMPLO (Zimmermann, 1974).- Una compañia tiene-que decidir sobre el tamaño y la estructura de los cascos de sus barcos. Se consideran cuatro cascos diferentes x_i, $i = 1,2,3,4$. El objetivo es minimizar el costo, siendo -- las restricciones, los pedidos de los clientes, que fluctuan estacionalmente. Esto significa que algunas cantidades en las restricciones, deben ser cambiadas, incluyendo siempre a seis de los cascos mas pequeños en la produc -- cion.

El problema se presenta como el siguiente programa - lineal,

$$\begin{array}{llllll} \text{min:} & 41.400x_1 & + 44,300x_2 & + 48.100x_3 & + 49.100x_4 & \\ \text{S:} & .84x_1 + & 1.44x_2 + & 2.16x_3 + & 2.40x_4 & \geq 170 \\ & 16x_1 + & 16x_2 + & 16x_3 + & 16x_4 & \geq 1300 \\ & x_1 & & & & \geq 6 \\ & & & & & x_i \geq 0 \end{array}$$

Permitiendo una holgura de 100.000 unidades en el objetivo y de 10, 100 y 6 en las restricciones, respectivamente y aplicando el modelo(III.3,b) la solucion que se obtiene es la siguiente:

No difusa	Difusa
$x_1 = 6$	$x_1 = 8.568$
$x_2 = 16.2916$	$x_2 = 14.348$
$x_3 = 0$	$x_3 = 0$
$x_4 = 58.9583$	$x_4 = 61.009$
$z_o = 3.864.970'41$	$z_o = 3.985.869'57$

teniendo en cuenta que, al estar definidas las restricciones en $\geq$ las funciones de pertenencia son monotonas no decrecientes.

III.3.2.CASO DE VARIOS OBJETIVOS.- El enfoque que da Zimmermann a los problemas de programacion difusos, es inmediatamente valido en el caso de que exista mas de un objetivo en el problema, puesto que al tratar a estos como restricciones, lo unico que hay que hacer es construir la funcion de pertenencia de cada uno de ellos y aplicar el mismo metodo anterior, resolviendolo como (III.3.b)

En el siguiente ejemplo, ponemos esto de manifiesto, destacando que las funciones de pertenencia que se emplean en las restricciones, son funciones caracteristicas ordinarias, al tratarse aquellas de restricciones clasicas.

III.3.3.EJEMPLO (Zimmermann, 1978).- Consideremos el siguiente problema multiobjetivo difuso,

$$\text{Max: } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{S: } \begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leqslant 21 \\ x_1 + 3x_2 &\leqslant 27 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leqslant 45 \\ 3x_1 + x_2 &\leqslant 30 \\ x_i &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Suponiendo funciones de pertenencia comprendidas entre -3 y 14 para $z_1(x)$ y entre 7 y 21, para $z_2(x)$, obtenemos el siguiente programa auxiliar, por aplicacion directa de (III.3,b)

$$
\begin{aligned}
\text{Max} &: \lambda \\
\text{S} &: \lambda \leqslant -.05882x_1 + .117x_2 + .1764 \\
&\quad \lambda \leqslant .1429\, x_1 + .0714x_2 - .5 \\
&\quad Ax \leqslant b \\
&\quad x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

donde por $Ax \leqslant b$, entendemos el anterior conjunto de restricciones. La solucion que se obtiene es,

$$\lambda^* = .74$$

$$x^* = (5.03;\ 7.32)$$

$$z_1(x) = 17.38,\ z_2(x) = 9.64$$

III.3.4.SENSIBILIDAD DE LOS PROGRAMAS DIFUSOS.- Igual que en el caso de la P.L., la sensibilidad se entiende como la violacion que se permite en las restricciones sin que la solucion deje de ser optima.

En relacion con el enfoque de Zimmermann, Hamacher - et al. (1978) establecen el problema del siguiente modo ; Supuesto un problema de programacion difusa, tal como el- (III.3.a) en el que las restricciones han de verificarse- lo mejor posible, el decisor esta dispuesto a tolerar violaciones t_i, hasta un valor tope $p_i \geqslant 0$ (para cada restriccion). Asi, una solucion sera factible si cumple,

$$Ax \leqslant b + t \quad , t \leqslant p$$

$$x \geqslant 0$$

definiendose el grado de satisfaccion del decisor por,

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 - (t_i/p_i) & : (Ax)_i = b_i + t_i,\ t_i \geqslant 0 \\ 1 & : (Ax)_i \leqslant b_i \end{cases}$$

es decir, $\mu_i(x)$ es la funcion de pertenencia del conjunto difuso de soluciones factibles, con respecto a la i-esima restriccion. De modo analogo, se define la funcion de pertenencia del objetivo. De este modo, t_i es el margen (diferencia) sobre b_i con que se presenta el optimo en cada restriccion.

Para resolver el problema, se llega al siguiente programa lineal,

$$\begin{aligned} \text{Max: } & \lambda \\ \text{S: } & \\ & \lambda p + t \leqslant p \\ & Ax - t \leqslant b \\ & t \leqslant p \\ & x,t \geqslant 0 \end{aligned}$$

en correspondencia con los expuestos por Zimmermann anteriormente.

III.3.5.EJEMPLO (Hamacher et al., 1978).- Se trata de resolver el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \text{Max: } & x_1 + x_2 \\ \text{S: } & \\ & -x_1 + 3x_2 \lesssim 21 \\ & x_1 + 3x_2 \lesssim 27 \\ & 4x_1 + 3x_2 \lesssim 45 \\ & 3x_1 + x_2 \leqslant 30 \\ & x_i \geqslant 0 \end{aligned}$$

tomando $b_o = 14.5$ y $p_o = 2$ (para el objetivo) y $p_1 = 3$, - $p_2 = 6$ y $p_3 = 6$ (en las restricciones difusas, respectiva mente) se obtiene,

$$\lambda_{max} = .625, \; x_1{}^* = 6.0, \; x_2{}^* = 7.75$$

$$t_o{}^* = .75, \; t_1{}^* = 1.125, \; t_2{}^* = 2.25, \; t_3{}^* = 2.25$$

III.4.COMENTARIO.- Sobre los modelos y metodos vistos hasta ahora para la resolucion del problema de programacion difusa, podemos decir lo siguiente:

1.- En el planteamiento de Tanaka, la forma de introducir el objetivo es sumamente artificial y escasa de consistencia, ya que para un objetivo no difuso, no parece muy logico el introducir un termino de funcion de pertenencia que, ademas, no es mas que un cambio de escala.

2.- Con el algoritmo III.2.6, una mala eleccion del punto inicial α_1 puede alargar enormemente los calculos, -- con el inconveniente, como dijimos, de no estar garantizado el que alcancemos la solucion optima.

3.- En el enfoque de Zimmermann, el concepto de objetivo difuso que se utiliza, si bien es coherente con los principios de Bellman-Zadeh, no se corresponde exactamente con la idea de que un objetivo difuso, induzca una relacion de orden difusa entre alternativas, que parece lo mas natural, habida cuenta que un problema de programacion, no es mas que un caso particular de problema de decision difusa.

4.- Al resolver problemas de programacion difusa, segun el metodo de Zimmermann, siempre hay que aumentar el numero de restricciones y variables, con la posibilidad consiguiente de cometer errores en el calculo de-soluciones.

5.- Las soluciones que se obtienen son siempre puntuales, lo que parece ser, como hemos dicho, en cualquier caso, una violacion del principio de incertidumbre inherente a los problemas de decision difusa.

III.5.UN NUEVO ENFOQUE DE LA PROGRAMACION DIFUSA.- Dado un problema generico de programacion matematica,

$$\text{Max: } f(x)$$
$$\text{S: } \quad x \in C$$

con f: $R^n \longrightarrow R$ y $C \subset R^n$, esta claro que se trata de un problema de decision unipersonal que, segun nuestra nomenclatura habitual, notaremos $(R^n, C, \leqslant_f)$ donde por $\leqslant_f$ entendemos la relacion,

$$x_1 \leqslant x_2 \leftrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in R^n$$

y en el cual, la utilidad esta inducida por f(x), no siendo necesaria, por tanto, su construccion.

De acuerdo con lo analizado en II.6, existen tres posibles versiones difusas para este problema de programacion:

a) Admitir que la relacion $\leqslant_f$ es difusa. Esto es equivalente a suponer un objetivo difuso. Si bien, desde el punto de vista de la Teoria de la Decision, esto esta perfectamente claro, bajo el punto de vista de la programacion matematica, no esta definida la forma de construir objetivos difusos a partir de relaciones de orden difusas, ni inversamente. Precisamente, esta era una de las criticas que se hacian al enfoque de Zimmermann. De hecho, habra que precisar que se entiende por objetivo difuso en un problema de programacion matematica.

b) Suponer que el conjunto $C \subset R^n$, sobre el que se optimiza es difuso. Evidentemente, este problema corresponde a admitir que las restricciones nos definen un s.d. de R^n, estando clara su justificacion intuitiva.

c) La ultima via de difuminacion, consiste en suponer tanto objetivos, como restricciones, difusos, con el sentido inducido por los anteriores problemas.

Comenzaremos analizando el problema b), ya que para los a) y c), como hemos dicho, necesitaremos establecer una definicion mas exacta de objetivo difuso, por lo que los estudiaremos al final del capitulo.

III.5.1.CONJUNTO DE RESTRICCIONES DIFUSO EN EL PROBLEMA DE PROGRAMACION MATEMATICA .- Tal como hemos dicho anteriormente, en un plano general, el problema a considerar es el siguiente:

$$\underset{\underset{\sim}{C}}{\text{Max:}}\ f(x) \qquad \text{(III.5.1,a)}$$

siendo el objetivo una funcion $f: R^n \longrightarrow R$ y $\underset{\sim}{C} \in F(R^n)$ un s.d. sobre el que optimizamos.

Por aplicacion inmediata del metodo de estudio expuesto en II.6, dicho problema sera identificado con la familia de α-problemas,

$$\{\underset{x \in C_\alpha}{\mathrm{Max}}\ f(x)\ ,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

donde C_α nota el correspondiente α-corte de $\underset{\sim}{C}$.

Del mismo modo que razonamos en III.2, podemos suponer que existe un conjunto de restricciones no difusas, - que generan un conjunto $X \subset R^n$, dado lo cual, el problema - que consideraremos sera,

$$\left[\underset{x \in C_\alpha \cap X}{\mathrm{Max}}\ f(x)\ ,\ \forall \alpha \in [0,1]\right] \quad \text{(III.5.1,b)}$$

Si notamos $x(\alpha), \forall \alpha \in [0,1]$, a la solucion de este pro blema y eliminamos los grados de pertenencia redundantes, igual que haciamos con los problemas de decision, propiamente dichos, el s.d.,

$$\{x^*(\alpha), \alpha\} \in F(R^n)$$

sera considerado como la solucion de (III.5.1,a).

Concretamente, supongamos que,

$$X = \{x \in R^n /\ x \geqslant 0,\ g_i(x) \leqslant b_i,\ i = 1,\dots,m\}$$

Analogamente, sea

$$\underset{\sim}{C}_i = \{x \in R^n /\ x \geqslant 0,\ g_i(x) \underset{\sim}{\leq} b_i\}\ \ i = m+1,\dots,q$$

esta claro que,

$$\underset{\sim}{C} = \bigcap_{i=m+1}^{q} \underset{\sim}{C}_i$$

viniendo cada uno de estos s.d., representado por una fun cion de pertenencia,

$$\mu_i : R^n \longrightarrow [0,1]$$

indicando el grado de cumplimiento de la i-esima restriccion, para cualquier $x \in R^n$. En general, estas $\mu_i(x)$ seranfunciones de las $g_i(x)$, por lo que escribiremos:

$$\mu_i(x) = h_i[g_i(x)] \qquad i = m+1,\ldots,q$$

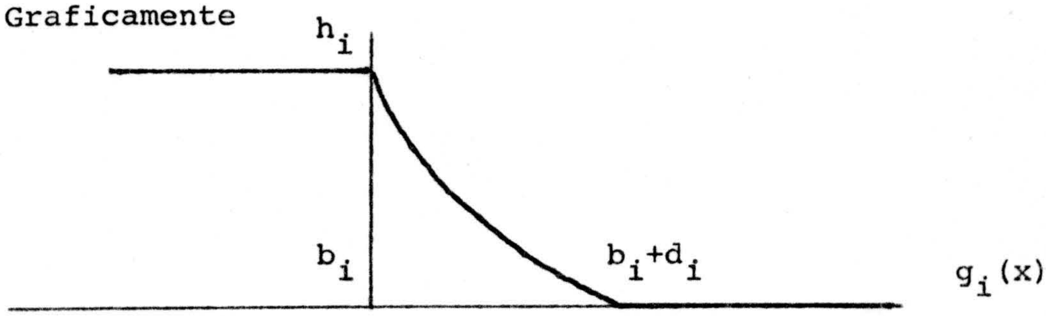
con h_i: $R \longrightarrow [0,1]$.

Admitiremos funciones $h_i(\cdot)$ de la forma,

$$h_i[g_i(x)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g_i(x) \geqslant b_i+d_i \\ \gamma_i(x) & \text{si} \quad b_i \leqslant g_i(x) \leqslant b_i+d_i \\ 1 & \text{si} \quad g_i(x) \leqslant b_i \end{cases}$$

que sean continuas y monotonas no crecientes en R.

Graficamente



La justificacion de las hipotesis hechas sobre las - funciones $h_i(\cdot)$ es la siguiente.

Se admite un rango maximo de tolerancia d_i, en la no verificacion de la restriccion, de modo que para valores-mayores que b_i+d_i, se supone que la restriccion no se verifica, mientras que si el valor alcanzado es menor que - b_i, admitimos que se satisface plenamente. En cada caso,- este margen debe ser fijado por el decisor.

Para valores de $g_i(x)$ comprendidos en el rango de -- violacion, se admite que la restriccion se verifica con - cierto grado (entre cero y uno) el cual debe disminuir -- conforme $g_i(x)$ se aproxima a b_i+d_i, de forma continua. Es te grado nos lo da la funcion $\gamma_i(\cdot)$.

Las funciones $\gamma_i(\cdot)$ mas utilizadas seran las conca - vas o convexas y, en particular, las lineales. El uso de- estas funciones, desde el punto de vista de la Teoria dela Decision es logico, puesto que permiten al decisor valorar, de un modo positivo o negativo, la violacion que se produzca en cada restriccion, paralelamente a lo que ocurre con las curvas de utilidad. Tambien seran casos importantes aquellos en los que $\gamma_i(\cdot)$ admita concavidad a un lado y convexidad del otro lado del rango de violacion

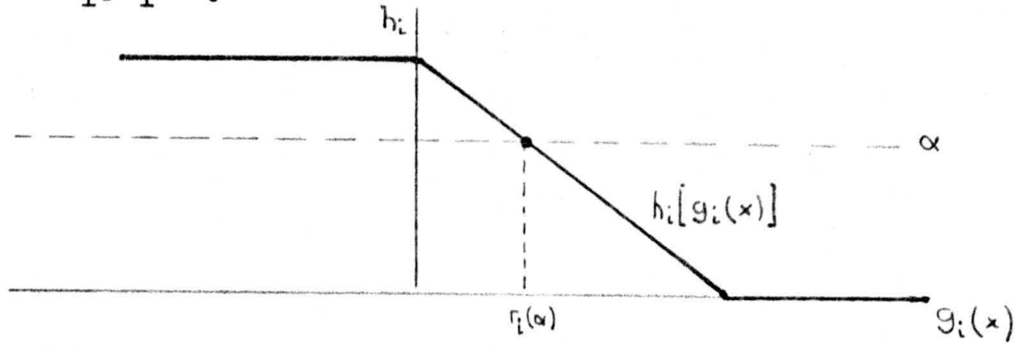
Evidentemente, si las restricciones del problema son en mayor o igual, seguiremos utilizando las mismas funciones de pertenencia, salvo que ahora seran continuas y monotonas no decrecientes.

Finalmente, si las restricciones son de igualdad, igual que ocurre en programacion no difusa, las descompondremos en dos restricciones en desigualdades, utilizando para cada una de ellas, funciones como las que hemos indicado.

En estas condiciones esta claro que,

$$\begin{aligned} C &= \{ x \in R^n : x \geq 0,\ \mu_C(x) \geq \alpha \} = \\ &= \bigcap_i \{ x \in R^n : x \geq 0,\ \mu_{C_i}(x) \geq \alpha \} = \\ &= \bigcap_i \{ x \in R^n : x \geq 0,\ h_i[g_i(x)] \geq \alpha \} = \\ &= \bigcap_i \{ x \in R^n : x \geq 0,\ g_i(x) \leq r_i(\alpha) \} \end{aligned}$$

donde $r_i(\alpha)$ viene univocamente determinada por la funcion $h_i[g_i(x)]$.



Entonces, esta claro que, cualquier problema del tipo (III.5.1,b) puede expresarse bajo la forma,

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } f(x) \\ \text{S:} \\ \quad g_i(x) \leqslant b_i \quad , i = 1,\ldots,m \\ \quad g_i(x) \leqslant r_i(\alpha), i = m+1,\ldots,q \\ \quad\quad x \geqslant 0 \\ \quad\quad \alpha\varepsilon[0,1] \end{array}\right] \qquad \text{(III.5.1,c)}$$

en cuya resolucion general no entramos, ya que esto se saldria de los limites de nuestro estudio.

Desde luego, (III.5.1,c) puede interpretarse ya como una familia de problemas en $\alpha\varepsilon[0,1]$, ya como un problema de programacion parametrico en $\alpha\varepsilon[0,1]$, estando resuelto, al menos teoricamente, bajo las hipotesis adecuadas.

Si notamos $x^*(\alpha)$ la solucion de (III.5.1,c), $\alpha\varepsilon[0,1]$ de acuerdo con lo visto en II.6.2, daremos la siguiente,

III.5.1.1.DEFINICION.- Llamamos solucion del problema de programacion difusa (III.5.1,c) al s.d. de R^n de funcion de pertenencia,

$$\mu(x) = \begin{cases} \sup\limits_{\alpha} \alpha & : x = x^*(\alpha) \\ 0 & : \nexists\alpha\varepsilon[0,1],\ x = x^*(\alpha) \end{cases}$$

Aclaramos estas ideas con el siguiente,

III.5.1.2.EJEMPLO.- Reconsideremos III.2.7 y tomemos, igual que Tanaka et al., una holgura de cinco unidades en cada restriccion. Evidentemente, el problema, segun (III.5.1.c) puede plantearse del siguiente modo (tomando las funciones $h_i[g_i(x)]$ lineales y en la forma ya definida),

$$\begin{aligned}
\text{Max: } & 2x_1 + x_2 \\
\text{S: } & \\
& 2x_1 \leqslant 80 + 5(1-\alpha) \\
& x_2 \leqslant 30 + 5(1-\alpha) \\
& 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 + 5(1-\alpha) \\
& x_i \geqslant 0,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1
\end{aligned}$$

El cual, resolviendo parametricamente en $\alpha \varepsilon [0,1]$, da como solucion,

$$x_1^* = 40 + 2.5(1-\alpha),\ x_2^* = 8 - (1-\alpha),\ z_o^* = 88+4(1-\alpha)$$

de modo que, segun III.5.1.1, la solucion, como s.d., sera,

$$\underset{\sim}{\Omega} = \{(40 + 2.5(1-\alpha),\alpha);\ (8 - (1-\alpha),\alpha),\ \forall \alpha \varepsilon [0,1]\}$$

Una cuestion importante a destacar es que las holguras -- que intervienen en las funciones de pertenencia, no tenemos porque fijarlas de antemano. En efecto, podemos dejarlas como parametros del problema, con lo cual, al menos - teoricamente, conseguimos resolverlo para todos los posibles valores de holguras, obteniendo asi, un problema q-m parametrico que, en general, tomara la forma siguiente,

$$\left[\begin{array}{lll}
\text{Max: } & f(x) & \\
\text{S: } & & \\
& g_i(x) \leqslant b_i & i = 1,\ldots,m \\
& g_i(x) \leqslant r_i(\alpha,\ d_i) & i = m+1,\ldots,q \\
& \quad x \geqslant 0 & \\
& \alpha \varepsilon [0,1],\ d_i \varepsilon R,\ i = m+1,\ldots,q &
\end{array}\right]$$

(III.5.1,d)

y a partir del cual, podemos determinar la solucion del -

mismo modo que en III.5.1.1.

III.5.1.3.EJEMPLO.- Consideremos el mismo caso que en III.5.1.2, salvo que las holguras ahora son parametros,

$$\begin{aligned}
\text{Max: } & 2x_1 + x_2 \\
\text{S: } & \\
& 2x_1 \leqslant 80 + \lambda(1-\alpha) \\
& x_2 \leqslant 30 + \lambda(1-\alpha) \\
& 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 + \lambda(1-\alpha) \\
& x_i \geqslant 0 \\
& \alpha\varepsilon[0,1],\ \lambda\varepsilon R
\end{aligned}$$

cuya solucion es,

$$\lambda(1-\alpha)\leqslant 40 \rightarrow x_1^* = 40 + \frac{\lambda(1-\alpha)}{2},\ x_2^* = 8 - \frac{\lambda(1-\alpha)}{5}$$

$$\lambda(1-\alpha)\geqslant 40 \rightarrow x_1^* = 50 + \frac{\lambda(1-\alpha)}{4},\ x_2^* = 0$$

que coincide exactamente con la encontrada cuando $\lambda = 5$, y a partir de la cual, como antes, podemos determinar el s. d. $\underset{\sim}{\Omega}$ solucion del problema.

A continuacion, vamos a estudiar la relacion entre este metodo y los estudiados por Tanaka et al. y Zimmermann. Comprobaremos como las soluciones dadas por estos autores, pueden obtenerse de la nuestra como particularizacion de un valor α^* determinado.

III.5.1.4.RELACION CON LA SOLUCION DE TANAJA ET AL.- Recordemos que Tanaka et al. partian de un problema como el (III.5.1,a) y que, en su version mas general, trataban de encontrar un par (α^*, x^*) optimo tal que,

$$\mu_G(x^*) = \operatorname*{Max}_{x \in C_\alpha \cap X} \mu_G(x)$$

siendo $\mu_G(x) = f(x)/M$ y $M = \text{Max } f(x)$ sobre el conjunto de restricciones no difusas, estando garantizada la existencia de ese par por III.2.4.

En estas condiciones, si $x^*(\alpha)$ es la solucion del problema parametrico (III.5.1.c) correspondiente a nuestro metodo, es inmediato que,

$$M = f[x^*(0)]$$

y, por tanto,

$$\mu_G(x) = f(x)/f[x^*(0)]$$

y el punto fijo $\alpha^* \varepsilon [0,1]$ solucion para el problema, sera en consecuencia, la solucion de la ecuacion,

$$\frac{f[x^*(\alpha)]}{f[x^*(0)]} = \alpha$$

Consideremos III.5.1.2, el valor que encontrabamos para el objetivo era,

$$f[x^*(\alpha)] = 88 + 4(1-\alpha) \qquad M = 88 + 4(1-\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 92$$

Por tanto, resolviendo la ecuacion anterior, obtenemos,

$\alpha^* = .958$, $x_1^* = 40.084$, $x_2^* = 8.0168$, $f(x^*) = 88.182$

que no coincide plenamente con la obtenida en III.2.7 puesto que alli solo teniamos garantizado, el encontrar soluciones ε-optimas.

Del mismo modo podriamos individualizar esta solucion a partir del ejemplo III.5.1.3, asi como la otra solucion dada por Tanaka et al., para el caso de tomar holguras de amplitud cincuenta en las restricciones.

III.5.1.5.RELACION CON LA SOLUCION DE ZIMMERMANN.- Recordemos-

que Zimmermann partia de un problema del tipo,

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\mathrm{Max}}: c \cdot x \equiv z_o \underset{\sim}{<} c \cdot x \\ &S: \\ &\quad Ax \underset{\sim}{<} b \\ &\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

el cual resolvia, suponiendo lineales las funciones de -- pertenencia del objetivo y de las restricciones (μ_G y μ_{C_i}) mediante un problema auxiliar basado en el calculo de,

$$\underset{x \geqslant 0}{\mathrm{Max}} \ \underset{i}{\min} \left[\mu_G(x) \wedge \mu_{C_i}(x)\right]$$

Ahora bien, segun III.2.2,

$$\underset{x \geqslant 0}{\mathrm{Max}} \ \underset{i}{\min} \left[\mu_G(x) \wedge \mu_{C_i}(x)\right] = \underset{\alpha}{\mathrm{Sup}}\left[\alpha \wedge \underset{C_\alpha \cap \{x \geqslant 0\}}{\mathrm{Sup}} \mu_G(x)\right]$$

Ademas, por III.2.5,

$$\underset{\alpha}{\mathrm{Sup}}\left[\alpha \wedge \underset{C_\alpha \cap \{x \geqslant 0\}}{\mathrm{Sup}} \mu_G(x)\right] = \alpha^*$$

siendo α^* el punto fijo de la funcion $\phi(\alpha)$, que en este - caso siempre existe y es accesible, por ser lineal el problema.

En estas condiciones, basta resolver,

$$\underset{C_\alpha \cap \{x \geqslant 0\}}{\mathrm{Max}} \mu_G(x)$$

y notando $x^*(\alpha)$ su solucion, podemos encontrar la solu -- cion de Zimmermann sin mas que resolver,

$$\mu_G[x^*(\alpha)] = \alpha$$

Pero por la forma particular de las funciones de per tenencia que se utilizan en este problema, esta claro que para cualquier conjunto $A \subset R^n$,

$$\operatorname*{Max}_{A} \mu_G(x) \leftrightarrow \operatorname*{Max}_{A} c\cdot x$$

siendo,

$$C_\alpha \cap \{x \geqslant 0\} = \{x \in R^n\colon x \geqslant 0,\ (Ax)_i \leqslant b_i + d_i(1-\alpha), i=m+1,..q\}$$

y, por tanto, el problema que queda es,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } c\cdot x \\ &\text{S:} \\ &\quad Ax \leqslant b + d(1-\alpha) \\ &\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Si $x^*(\alpha)$ es so solucion, la de Zimmermann se encontrara como caso particular de esta cuando tome el valor α^* solucion de,

$$\alpha = \frac{cx(\alpha) - z_o}{d_o}$$

que es la funcion de pertenencia del objetivo difuso que se utiliza.

Resaltemos el hecho de que el problema anterior, es un problema del tipo (III.5.1,c) con la particularidad de ser lineal, puesto que asi lo era el primitivo.

III.5.1.6.EJEMPLO.- Reconsideremos el ejemplo III.3.1, la solucion a dicho problema vendra dada por aplicacion inmediata de (III.5.1,c) por,

$$\begin{aligned} x_1^* &= 6 + 6\alpha \\ x_2^* &= 16.2916 - 4.5416\alpha \\ x_3^* &= 0 \\ x_4^* &= 58.9583 + 4.7916\alpha \end{aligned}$$

con,

$$z_o^* = 3.864.970'41 + 282.474'68\alpha$$

la solucion de Zimmermann, la obtenemos resolviendo,

$$\mu_G(z_o^*) = \alpha \rightarrow \alpha^* = ,428$$

de donde,

$$x_1^z = 8.568,\ x_2^z = 14.348,\ x_3^z = 0,\ x_4^z = 61.009,\ y$$

$$z_o^z = 3.985.869'57$$

que coincide exactamente con la calculada mediante el problema auxiliar utilizado por Zimmermann en III.3.1.

Por razones analogas a las ya expuestas, el problema de programacion difusa multiobjetivo, planteado como en III.3.2. y que segun el planteamiento de Zimmermann, puede resolverse calculando,

$$\underset{x \geqslant 0}{\text{Max}}\ (\mu_{G_1}(x) \wedge \ldots \wedge \mu_{G_p}(x) \wedge \mu_C(x))$$

siendo μ_C la funcion de pertenencia del conjunto de restricciones difusas, ahora podemos resolverlo (teniendo en cuenta que la "maximizacion difusa" se entiende como un nuevo requerimiento sobre las funciones objetivo) con ayuda del siguiente problema,

$$\begin{aligned} \text{Max: } & c_k \cdot x \\ \text{S: } & \\ & Ax \leqslant b + d(1-\alpha) \\ & c_i \cdot x \geqslant z_{io} + d_i(1-\alpha),\ i=1,\ldots,p \\ & x \geqslant 0,\ i \neq k \end{aligned}$$

donde hemos seleccionado un objetivo $c_k \cdot x$, entre los p dados, sin basarnos en ningun criterio, por suponerlos con igual importancia. Es evidente, con el razonamiento que empleamos, que la eleccion de dicho objetivo no influye -

para nada en la solucion final del problema.

Precisamente, si la solucion que obtenemos es $x^*(\alpha)$, esta claro que la solucion de Zimmermann a dicho problema la obtendremos como particularizacion de la nuestra en el valor α solucion de la ecuacion,

$$\mu_G\left[x^*(\alpha)\right] = \alpha$$

Concretamente, si planteamos el problema III.3.3 segun nuestro modelo, empleando las mismas funciones de pertenencia que alli, la solucion que encontramos es:

$$\alpha\varepsilon\left[1/2,6/7\right] \rightarrow x_1^*(\alpha) = -6/5 + 42\alpha/5$$

$$x_2^*(\alpha) = 47/5 - 14\alpha/5$$

(siendo ese el intervalo en el que vamos a encontrar el punto fijo que nos interesa). De este modo, resolviendo,

$$\phi(\alpha) = \alpha \rightarrow \alpha^* = .74$$

y, por tanto,

$$x_1^* = 5.016,\ x_2^* = 7.328$$

que, de nuevo, nos coincide con la solucion dada por Zimmermann. Con esto ponemos claramente de manifiesto, la relacion existente entre la solucion difusa que obtenemos y las soluciones particulares estudiadas.

Aprovecharemos finalmente esta relacion, para estudiar la sensibilidad sobre los programas difusos.

Segun III.3.4, el valor en que se sobrepasa al correspondiente valor del vector demanda b en el optimo, es lo que se considera como rango sensible para una solucion factible x^*.

Para calcular estos valores, vimos como habia que --

plantear un programa de mayor dimension que el propuesto a partir del cual se determinaban las variables t_i que nos daban las holguras permitidas en el optimo.

Sin embargo, esta claro que a partir del programa auxiliar que proponemos (III.5.1,c) como solucion para los programas difusos,

$$t_i^* = d_i(1-\alpha^*), \; i = m+1,\ldots,q$$

si las restricciones son lineales.

Evidentemente, este valor nos da el incremento sobre b_i que se obtiene en el optimo, segun Hamacher et al. es decir, el rango de la violacion que se produce en cada restriccion.

Por tanto, si queremos determinar esos valores, lo unico que hay que hacer es, a partir de la solucion difusa que encontremos, determinar la de Zimmermann, la cual nos determinara un $\alpha^* \varepsilon [0,1]$, y calcular los correspondientes $d_i(1-\alpha^*)$.

Aplicando esto al problema III.3.5, resolviendolo mediante (III.5.1.c) obtenemos la siguiente solucion,

$$x_1^* = 6, \; x_2^* = 7 + 2(1-\alpha), \; \forall \alpha \varepsilon [0,1]$$

de donde determinamos que,

$$\alpha^* = .625$$

Particularizando, obtenemos:

$$x_1^z = 6, \; x_2^z = 7.75, \; z_o^z = 13.75$$

y, ademas,

$$t_1^z = 9/8, \; t_2^z = 18/8, \; t_3^z = 18/8$$

Asi mismo, la violacion permitida en el objetivo vale,

$$t_o^z = 6/8$$

coincidiendo todos estos valores con los obtenidos en -- III.3.5.

Desde luego, esta claro, que si necesitaramos la solucion del problema para otras holguras diferentes, resolviendo directamente (III.5.1,d) obtenemos todas las soluciones del problema, sin tener que ir cambiando el programa segun las holguras, como en Hamacher et al. (1978).

Vemos, pues, como lo que se entiende por sensibilidad en las soluciones de los programas difusos, se reduce al calculo del valor en que una solucion viola (dentro -- del rango admitido) a las restricciones.

Creemos que, en realidad, la sensibilidad en la programacion difusa, hemos de entenderla exactamente igual - que en el caso no difuso, pudiendola considerar sobre las holguras, como se establece en (III.5.1,d), sobre los valores del vector demanda, o sobre los costos. Estos serian problemas parametricos de programacion difusa, cuya resolucion, con el modelo que proponemos, se realizaria - de un modo paralelo al caso no difuso, sin estar restringidos, ademas, al caso lineal, que es el unico resuelto - en la literatura.

Como hasta ahora hemos visto, lo que se propone como objetivo difuso, no es mas que un nuevo requerimiento sobre la funcion objetivo, lo cual hace que, en realidad,se trate de una restriccion mas en el problema. Debido a esto, nos dedicamos a continuacion a intentar encontrar una definicion valida de objetivo difuso.

III.5.2.OBJETIVO DIFUSO EN EL PROBLEMA DE PROGRAMACION MATEMATICA .- Como hemos indicado reiteradamente el concepto de objetivo difuso establecido en la literatura habitual, no solo es impreciso sino que, ademas, su aplicacion practica se reduce a la imposicion de una nueva restriccion al problema, para mostrarse finalmente como una funcion objetivo ordinaria, segun vimos en III.5. 1.5. Esto, fundamentalmente, es debido a que la funcion de pertenencia del objetivo, se toma definida para los valores $c \cdot x$, $\forall x, c \in R^n$.

Para paliar esto, es por lo que introducimos una nueva definicion de objetivo difuso que, si bien, se mostrara coherente con todo lo anterior y con la reciente Teoria de la Dominacion por Conos Difusos de Takeda et al. (1980), presentara inconvenientes algoritmicos que haran dificil su resolucion, salvo en casos muy especiales.

Para introducir la nueva definicion de la que hablamos, nos remontaremos al bien conocido Principio de Difuminacion de Goguen, Goguen (1967), el cual se establece en los siguientes terminos: "Todo concepto difuso, es un s.d. en el conjunto de los conceptos". De acuerdo con esto, se puede pensar en un objetivo difuso como un s.d. del conjunto de los objetivos.

Concretamente, si consideramos los problemas que venimos estudiando de un modo general, la funcion objetivo es un elemento del conjunto,

$$\mathcal{F}(R^n) = \{f \ / \ f\colon R^n \longrightarrow R\}$$

Por tanto, segun el anterior principio, un objetivo difuso sera un elemento del conjunto $F[\mathcal{F}(R^n)]$, que vendra definido por una funcion de pertenencia,

$$\mu\colon \mathcal{F}(R^n) \longrightarrow [0,1]$$

De manera que, en general, sin distinguir problemas lineales de no lineales, podemos dar la siguiente,

III.5.2.1.DEFINICION.- Un objetivo difuso es un s.d. de $\mathcal{F}(R^n)$.

Esto quiere decir que un objetivo difuso viene dado por una funcion,

$$\mu\colon \mathcal{F}(R^n) \longrightarrow [0,1]$$

Supuesto, entonces, un objetivo difuso $\mu \varepsilon F[\mathcal{F}(R^n)]$, para cualquier $\alpha\varepsilon[0,1]$ podemos definir la siguiente relacion ordinaria,

$$\forall x,y \varepsilon R^n,\ x \underset{\sim\alpha}{>} y \leftrightarrow f(x) \geqslant f(y), \forall f \ \varepsilon \mathcal{F}(R^n)\colon \mu(f) \geqslant 1-\alpha$$

donde, como siempre, por $x \underset{\sim\alpha}{>} y$ entendemos que x es mas preferido o indiferente que y a grado $\alpha\varepsilon[0,1]$.

Es inmediato comprobar que para cada $\alpha\varepsilon[0,1]$, esta relacion es al menos un preorden.

Por otro lado, se verifica la siguiente,

III.5.2.2.PROPOSICION.- Sea $\{P_\alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ una sucesion encajada de preordenes tales que,

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \leftrightarrow P_{\alpha_1} \supseteq P_{\alpha_2} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \varepsilon [0,1]$$

con P_0 no vacio y,

$$\text{dom } P_{1-\alpha} = \text{dom } P_0 \ , \quad \forall \alpha \varepsilon [0,1]$$

entonces, para cualquier eleccion de α's en $[0,1]$ que incluya $\alpha = 0$, la relacion

$$P = \sum_{\alpha} \alpha \cdot P_{1-\alpha}$$

es un preorden difuso, y reciprocamente.

En efecto, la demostracion es inmediata, puesto que en estas condiciones, la sucesion $\{P_{1-\alpha},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ satisface las hipotesis de I.4.11, con lo que se verifica la proposicion.

III.5.2.3.PROPOSICION.- Sea $\psi \in F[\mathcal{F}(R^n)]$ un objetivo difuso, la relacion definida por,

$$\forall x,y \in R^n,\ \mu(x,y) = \text{Sup}\{\alpha /\ f(x) \geqslant f(y),\quad f:\psi(f) \geqslant 1 - \alpha\}$$

es un preorden difuso.

En efecto, basta tener en cuenta que podemos tomar como preorden $P_\alpha, \alpha \in [0,1]$, la relacion:

$$\forall x,y \in R^n,\ x \underset{\sim\alpha}{\geq} y \leftrightarrow f(x) \geqslant f(y), \forall f:\ \psi(f) \geqslant 1 - \alpha$$

verificando inmediatamente, la sucesion $\{P_\alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ las condiciones de III.5.2.2.

De este modo esta claro, como definiendo objetivo difuso como un elemento de $F[\mathcal{F}(R^n)]$, un problema de programacion matematica, va a poder plantearse, coherentemente con lo estudiado hasta ahora, como un problema de decision con relacion de preferencia difusa (estando esta inducida por el objetivo que tengamos en consideracion).

El hecho de que los α-cortes se tomen en los valores $1 - \alpha$, y no en α como ha sido habitual, se justifica por lo siguiente. Si asociaramos el grado de pertenencia α al corte del objetivo de nivel α, significaria que el-nivel de preferencia mas alto ($\alpha = 1$) se le daria a los-pares de elementos que se comparan sobre un conjunto, C_1 que esta contenido en todos los demas. Sin embargo, si asociamos el valor α con el nivel $1 - \alpha$, en el objetivo - difuso, esta claro que, un par de elementos tendra grado de preferencia 1, cuando un punto sea mas preferido que-el otro, para todas las posibles funciones objetivo ordinarias que se puedan considerar en el problema. El razonamiento es valido para cualquier $\alpha \varepsilon [0,1]$ y obliga a asociar los grados de preferencia y los α-cortes del objetivo, en el modo en que lo hacemos.

En el caso de que el problema que se considere, sea lineal en el objetivo, se puede dar una nueva,

III.5.2.4.DEFINICION.- Un objetivo difuso es un s.d. de-R^n, caracterizado por una funcion de pertenencia,

$$\mu : R^n \longrightarrow [0,1]$$

La definicion se simplifica, en relacion a III.5.2.3, debido a que si las funciones objetivo a considerar son lineales,

$$\mathcal{H}(R^n) = R^n$$

resultando el objetivo ordinario como particularizacion-inmediata del difuso, cuando este se define sobre el conjunto $\{0,1\}$, en lugar de sobre el intervalo $[0,1]$.

Si consideramos n objetivos difusos sobre R,

$$\mu_i : R \longrightarrow [0,1] \quad , \; i = 1,2,\ldots,n$$

tambien podemos dar la siguiente definicion, de modo acorde con el producto cartesiano de ellos.

III.5.2.5.DEFINICION.- Para problemas lineales, un objetivo difuso es un s.d. $\mu \varepsilon F(R^n)$ definido por,

$$\forall c \varepsilon R^n \rightarrow \mu(c) = \inf_i \mu_i(c_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

con $c = (c_1,\ldots,c_n)$.

Puesto que el espacio de alternativas coincide con el de objetivos, R^n, puede parecer que recaemos en la definicion de Bellman y Zadeh. Sin embargo, la filosofia de su aplicacion es completamente distinta, como veremos en lo que sigue.

A continuacion, estudiamos la optimizacion de un objetivo difuso, de manera compatible con la relacion de preferencia antes establecida.

Supongamos un problema general de programacion,

$$\underset{\sim}{\mathrm{Max}}: f(x)$$

$$S; \quad x \varepsilon X$$

donde $\underset{\sim}{\mathrm{Max}}$, se entiende en el sentido de que el objetivo es difuso, es decir, se admite la existencia de una funcion,

$$\mu : \mathcal{P}(R^n) \longrightarrow [0,1]$$

y reciprocamente.

Considerando, para cualquier $\alpha \varepsilon [0,1]$, el preorden $P_{1-\alpha}$ que este objetivo induce, podemos plantear el siguiente problema:

$$\text{Max} : \{f(x) \;/\; \mu(f) \geqslant 1 - \alpha\}$$

$$\text{S:} \quad x \in X$$

o, si $\mu \varepsilon F[\mathcal{Y}(R^n)]$ viene dada por,

$$\mu(f) = \inf_{i} \mu_i(f_i) \;, \; i = 1,2,\ldots,n$$

como,

$$\text{Max} : \{f(x) \;/\; \mu_i(f_i) \geqslant 1 - \alpha, \; i = 1,\ldots,n\}$$

$$\text{S :} \quad x \in X$$

Esta claro que, en cualquiera de las dos versiones, el - problema que nos queda para resolver es multiobjetivo, induciendose siempre a traves de el la relacion de preferencia $\underset{\sim\alpha}{>}$, obteniendose siempre un s.d. como solucion al -- problema.

III.5.3.FUNCION OBJETIVO Y RESTRICCIONES DIFUSAS EN EL PROBLEMA DE PROGRAMACION MATEMATICA.- Siguiendo un camino paralelo al trazado en el Capitulo II, nos encontramos finalmente con los problemas del tipo $(R^n, \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{<})$ con- el sentido conocido.

Sea $\psi \varepsilon F[\mathcal{Y}(R^n)]$ un objetivo difuso en un problema de programacion con conjunto de restricciones $\mu \varepsilon F(R^n)$, tam - bien difuso. Si el problema que se nos plantea es el de,

$$\underset{\sim}{\text{Max}} : f(x)$$

$$\underset{\sim}{X}$$

segun lo ya expuesto, podemos resolverlo mediante el programa auxiliar,

$$\text{Max: } \{f(x),\ \psi(f) \geq 1 - \alpha\}$$
$$\text{S: } \mu(x) \geq \alpha$$
$$\alpha \epsilon [0,1]$$

que corresponde al planteamiento mas general para un problema de programacion difusa que podemos considerar. En particular, si el conjunto de restricciones viene dado como interseccion de hiperplanos, considerando funciones de pertenencia de las habituales, el problema toma la forma,

$$\text{Max: } \{f(x),\ \psi(f) \geq 1 - \alpha\}$$
$$\text{S: } A \cdot x \leq b + d(1 - \alpha)$$
$$x \geq 0,\ \alpha \epsilon [0,1]$$

donde "d" es el vector columna de las holguras permitidas en las restricciones que, como sabemos, podemos considerarlo como un parametro, para obtener un modelo mas general en el que las holguras no hay que fijarlas de antemano.

Como siempre, si $x^*(\alpha)$ es la solucion de este problema, eliminando los grados de pertenencia redundantes, obtenemos el s.d. solucion.

III.6. INTERPRETACION DEL OBJETIVO DIFUSO SEGUN LA TEORIA DE LA DOMINACION.-

La definicion de objetivo difuso que hemos introducido, quedaria incompleta si no la pudieramos relacionar, igual que en el caso no difuso, con la Teoria de la Dominacion por Conos Difusos dada por Takeda et al. (1980).

La diferencia esencial que ahora vamos a encontrar perfectamente justificable, es que la dominacion no va a venir dada por un cono propiamente dicho, sino por una sucesion encajada de estos, que nos definira un "Cono Difuso". Esto es logico porque, ademas, hemos introducido el concepto de objetivo difuso a partir de una sucesion encajada de preordenes clasicos.

III.6.1.TEOREMA.- Sea $\{K_\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$ una sucesion encajada de conos convexos, $K_\alpha \subset R^n$, $\forall \alpha\varepsilon[0,1]$, tal que,

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \quad \rightarrow \quad K_{\alpha_1} \supseteq K_{\alpha_2} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \ \varepsilon[0,1]$$

con K_o no vacio. Entonces, la relacion difusa,

$$\mu:\ R^n \times R^n \longrightarrow [0.1]$$

definida por,

$$\forall x,y\varepsilon R^n,\ \mu(x,y) = \mathrm{Sup}\{\alpha/y\varepsilon x + K_{1-\alpha}\}$$

es un preorden difuso.

En efecto, es trivial que,

$$\forall \alpha\varepsilon[0,1] \rightarrow x\varepsilon\ x + K_{1-\alpha} \rightarrow \mu(x,x) = 1\ ,\ \forall x\varepsilon R^n$$

Por otro lado, si $\forall\, x,y,z\varepsilon R^n$,

$$\mu(x,y) = \alpha,\ \mu(y,z) = \beta:\ \alpha \geqslant \beta$$

entonces, sabemos que,

$$y\ \varepsilon\ x + K_{1-\alpha}$$

$$z\ \varepsilon\ y + K_{1-\beta}$$

pero como,

$$\alpha\geqslant\beta \ \rightarrow\ K_{1-\alpha} \subseteq K_{1-\beta}$$

tenemos que,

$$y \in x + K_{1-\beta}$$

Por tanto, por la convexidad,

$$\mu(x,z) \geqslant \beta$$

con lo que la relacion es reflexiva y transitiva y, por - consiguiente, se trata de un preorden difuso.

Tiene entonces sentido la siguiente,

III.6.2.DEFINICION.- Un s.d. $\underset{\sim}{K} \in F(R^n)$ se dice que es un cono difuso, si todos sus α-cortes,- son conos.

Del mismo modo, podemos hablar de cono-convexo difuso, si todos los α-cortes son conos convexos o, equivalentemente de acuerdo con Lowen (1980) si se trata de un convexo difuso y, ademas;

$$\forall x \in R^n, \forall \lambda > 0 \rightarrow \mu(\lambda x) \geqslant \mu(x)$$

Ademas, igual que en el caso clasico, podemos caracterizar a los conos convexos difusos, mediante la siguiente,

III.6.3.PROPOSICION.- Sea un s.d. $\mu \in F(R^n)$, la condicion necesaria y suficiente para que sea un cono convexo difuso es que,

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 \ , \forall x,y \in R^n \rightarrow \mu[\lambda_1 x + \lambda_2 y] \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$$

La demostracion es inmediata. Tomando $\lambda_1 = \lambda \in [0,1]$ y tambien $\lambda_2 = 1 - \lambda$, tenemos,

$$\mu[\lambda x + (1-\lambda)y] \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$$

Por otro lado,

$$\mu(\lambda x) = \mu(\lambda x - 0x) \geqslant \mu(x), \forall \lambda > 0$$

Reciprocamente, si

$$\mu(\lambda x) \geqslant \mu(x), \forall\lambda>0$$

$$\mu(\lambda_1 x+\lambda_2 y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y), \forall\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$$

Tenemos,

$$\mu[\lambda_1 x + \lambda_2 y] = \mu\left|(\lambda_1+\lambda_2)\frac{(\lambda_1 x+\lambda_2 y)}{\lambda_1+\lambda_2}\right| \geqslant \mu\left(\frac{\lambda_1 x+\lambda_2 y}{\lambda_1+\lambda_2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$$

Estamos. por tanto, en la misma linea que la Teoria clasica, es decir, si alli todo cono generaba un preorden, ahora en nuestro caso, vemos como un cono difuso, genera tambien un preorden difuso.

Consideremos ahora un objetivo difuso $\psi\varepsilon F(R^n)$, segun el cual,

$$\forall x,y\varepsilon R^n,\ x \underset{\sim\alpha}{\geq} y \leftrightarrow cx \geqslant cy,\ \forall c\colon \psi(c) \geqslant 1-\alpha$$

sea un $(1-\alpha)$-corte cualquiera,

$$C(1-\alpha) = \{c\varepsilon R^n / \psi(c) \geqslant 1-\alpha\}$$

entonces, esta claro que,

$$\forall x,y\varepsilon R^n,\ x \underset{\sim\alpha}{\geq} y \leftrightarrow cx \geqslant cy, \forall c\ \varepsilon\ C(1-\alpha)$$

Definamos,

$$K^*_{1-\alpha} = \{u\varepsilon R^n : uc \leqslant 0, \forall c\varepsilon C(1-\alpha)\}$$

el cono polar del $(1-\alpha)$-corte de $\psi\varepsilon F(R^n), \forall\alpha\varepsilon[0,1]$

Entonces,

$$\forall x,y\varepsilon R^n,\ x \underset{\sim\alpha}{\geq} y \leftrightarrow y\ \varepsilon\ x + K^*_{1-\alpha}$$

Como, ademas es trivial que $K^*_{1-\alpha}, \forall\alpha\varepsilon[0,1]$ es un cono convexo y cerrado, la sucesion $\{K^*_\alpha, 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$ generada por el objetivo difuso $\psi\varepsilon F(R^n)$, esta constituida por conos convexos.

Por otra parte,

$$\alpha \geqslant \beta \quad \rightarrow \quad C(1-\beta) \subseteq C(1-\alpha)$$

pero entonces,

$$C(1-\beta) \subseteq C(1-\alpha) \rightarrow K^*_{1-\alpha} \subseteq K^*_{1-\beta}$$

de manera que,

$$\alpha \geqslant \beta \rightarrow K^*_\beta \subseteq K^*_\alpha$$

y como, evidentemente, K^*_o no es vacio, segun III.6.1, vemos como el objetivo difuso $\psi \varepsilon F(R^n)$ induce una sucesion- encajada de conos convexos que, a su vez, nos definen un preorden difuso.

Asi, esta justificada la siguiente,

III.6.4.DEFINICION.- Llamamos cono polar difuso, asociado al objetivo difuso $\psi \varepsilon F(R^n)$, al - definido por,

$$K^* = \bigcup_\alpha \alpha \cdot K^*_{1-\alpha}$$

de acuerdo con III.5.2.2.

Con esto hemos llegado al mismo resultado que Takeda et al. (1980). La diferencia a destacar estriba en -- que alli se partia de un problema en que se conocia la - estructura de dominacion para el mismo, mientras que aqui hemos supuesto el caso en que se conoce el objetivo difuso, a partir del cual, al menos teoricamente, siempre podemos determinar la estructura de dominacion del problema.

Es evidente, por otro lado, que si K es una estructura de dominacion difusa, definiendo su cono polar de acuerdo con III.6.4,

$$K^* = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot K^*_{1-\alpha}$$

y tomando,

$$\forall x,y \varepsilon R^n,\ x \underset{\sim\alpha}{>} y \leftrightarrow y \ \varepsilon\ x + K^*_{1-\alpha}$$

K^* induce un objetivo difuso, cuya estructura de domina - cion es K.

Con el fin de relacionar la definicion de solucion - no dominada de Zadeh (I.4.14) con la que podemos obtener- por este camino, damos la siguiente,

III.6.5.DEFINICION.- Decimos que $x^* \varepsilon X$, $X \subset R^n$, es una solucion no dominada a grado $\alpha\varepsilon[o,1]$,con respecto a K^* si, y solo si,

$$\forall y \varepsilon X \nrightarrow\ x^* \not\in y + K^*_{1-\alpha}$$

y, consecuentemente, definimos el conjunto de soluciones- no dominadas a grado $\alpha\varepsilon[0,1]$ como,

$$N(K^*,\alpha) = \{x^* \varepsilon X / \forall y \varepsilon X \rightarrow x^* \not\in y + K^*_{1-\alpha}\}$$

de modo que x^* sera no dominada si $\forall \alpha\varepsilon[0,1]$, x^* es no dominada a grado $\alpha\varepsilon[0,1]$.

III.6.5.PROPOSICION.- Sea $\{K^*_\alpha,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$ la sucesion de co - nos inducida por un objetivo difuso Un elemento $x^* \varepsilon X$ sera no dominada si, y solo si,

$$x^* \ \varepsilon\ N(K^*,0)$$

La demostracion es trivial ya que,

$$\alpha \geqslant \beta \ \rightarrow\ K^*_{1-\alpha} \subseteq K^*_{1-\beta}$$

$$N(K^*,\beta) \subseteq N(K^*,\alpha)$$

por lo que si,

$$x^* \in N(K^*,0) \leftrightarrow \forall\alpha\in[0,1],\ x^* \in N(K^*,\alpha)$$

A partir de aqui, se deduce inmediatamente el concepto de solucion no dominada de Zadeh, puesto que,

$$x^* \in N(K^*,\alpha), \forall\alpha\in[0,1] \leftrightarrow x^* \notin y + K^*_{1-\alpha}, \forall y \in X \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \quad \forall\alpha\in[0,1],\ \mu(y,x^*) < \alpha \leftrightarrow \mu(y,x^*) = 0$$

Es evidente, ademas, que el concepto de solucion no-dominada de Zadeh, admite una version dual, segun la cual x^* sera no dominada si,

$$\mu(y,x^*) = 1 \ , \forall y \in X$$

Por otra parte, el conjunto $N(K^*,0)$ sera no vacio, - cuando $X \subset R^n$ sea cerrado y acotado y los conos $K^{\#}, \alpha\in[0,1]$ (conos polares estrictos de los $C(1-\alpha)$) no vacios.Estas - condiciones pueden rebajarse, introduciendo la nocion de- conjunto debilmente K^*_α-compacto, sobre X, Coladas (1979).

REFERENCIAS

1. AIZERMAN, M.A.

Some Unsolved Problems in the Theory of Automatic Control and Fuzzy Proofs. IEEE Trans. on Automatic Control (1977

2. ASAI, K., TANAKA, H., OKUDA, T.

Decision Making and its goal in a Fuzzy Environment - Fuzzy Sets and their Appl. Academic Press (1975).

3. ASAI, K., TANAKA, H., OKUDA, T.

On Discrimination of Fuzzy States in Probability Space. Kybernetes (1977), Vol. 6, pp. 185-192.

4. AUMANN, R. J.

Utility Theory without the Completeness Axiom. Econometrica, Vol. 30, 3, (1962).

5. BELLMAN, R. E., ZADEH, L. A.

Decision Making in a Fuzzy Environment. NASA CR-1594-(1970).

6. BELLMAN, R. E., GIERTZ, M.

On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets Information Sciences, 5, pp. 149-156 (1973).

7. CAPOCELLI, R. M., DE LUCA, A.

Fuzzy Sets and Decision Theory. Information and Control, Vol 23, 5 (1973).

8. CHANG, S.S.L.

On Risk and Decision Making in a Fuzzy Environment. - Fuzzy Sets and Their Appl. Academic Press (1975)

9. COLADAS, L.

Problemas Multiobjetivo: Estructuras de Dominacion. Tesis Doctoral. Santiago (1979).

10. FISHBURN, P. C.

Utility Theory for Decision Making. John Wiley and -- Sons Inc. (1970)

11. FUNG, L.W., FU, K.S.

An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in a Fuzzy Environment. Fuzzy Sets and Their Appl. Academic Press (1975)

12. GOGUEN, J.A.

L-Fuzzy Sets. Jour. of Math. Anal. and Appl, 18, pp. - 145-174 (1967)

13. GUPTA, M.M., SARIDIS, G.N., GAINES, B.R.

Fuzzy Automata and Decision Processes. North-Holland - (Elsevier) (1977)

14. HAMACHER, H., LEBERLING, H., ZIMMERMANN, H.J.

Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 1, 4, (1978)

15. HANNAN, E.L.

On The Efficiency of the Product Operator in Fuzzy Programming with Multiple Objectives. Fuzzy Sets and Systems, 2, 4, (1979)

16. IFAC REPORT

Second Ifac Round Table on Fuzzy Automata and Decision Processes. Automatica, Vol. 12, pp. 291-296 (1976)

17. JAIN, R.

Decision Making in the Presence of Fuzzy Variables. -- IEEE Trans. on Systems, Man and Cyber., pp. 698-703,- (1976)

18. KANDEL, A., BYATT, W.J.

Fuzzy Sets, Fuzzy Algebra and Fuzzy Statistics. Proceedings of the IEEE, Vol. 66, 12 (1978)

19. KAUFMANN, A.

Introduction a la Theorie des Sous-Ensembles Flous. Tomo I (Elements Theoriques de Base). Masson et Cie. Ed. (1973)

20. KAUFMANN, A.

Introduction a la Theorie des Sous-Ensembles Flous. Tomo II (Applications a la Linguistique, a la Logique et a la Semantique) Masson et Cie. Ed. (1975)

21. KAUFFMAN, A.

Introduction a la Theorie des Sous-Ensembles Flous. Tomo III (Applications a la Classification et a la Reconnaissance des Formes aux Automates et aux Systemes aux Choix des Criteres). Masson et Cie. Ed. (1975)

22. KICKERT, J.M.
Fuzzy Theories on Decision Making. Martinus Nyhoff Ed. (Social Sciences Division) (1978)

23. LOWEN, R.
Convex Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 3,3, (1980)

24. MANGASARIAN, O.L.
Nonlinear Programming. McGraw-Hill Book Co., New-York- (1969)

25. NEGOITA, C.V.
Fuzziness in Management. ORSA/TIMS Meeting Miami (1976)

26. NEGOITA, C.V., FLONDOR, P., SULARIA, M.
On Fuzzy Environment in Optimization Problems. Econ. - Comp. and Econ. Cyber. Stud. and Res., 1 (1977)

27. NEGOITA, C.V., RALESCU, D.
Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Birk - hauser-Verlag (1975)

28. OKUDA, T., TANAKA, H., ASAI, K.
Decision-Making and Information in Fuzzy Events. Bulle

tin of University of Osaka Prefecture, Series A, Vol. 23, 2 (1974)

29. ORLOVSKY, S.A.
Decision Making with a Fuzzy Preference Relation. Fuzzy Sets and Systems,1,3 (1978)

30. ORLOVSKY, S.A.
On Formalization of a General Fuzzy Mathematical Problem. Fuzzy Sets and Systems,3,3 (1980)

31. ORLOVSKY, S.A.
On Programming with Fuzzy Constraint Sets. Kybernetes Vol. 6, pp. 197-201 (1977)

32. PONSARD, C.
On the Axiomatization of Fuzzy Subsets Theory. Document de Travail du IME (1975)

33. RALESCU, D.
Inexact Solutions for Large Scale Control Problems. - Comunicacion Privada.

34. RIOS, S.
Analisis de Decisiones. Ediciones ICE. Madrid (1976)

35. SAGAAMA, S.
Subjetive Probabilities, Fuzzy Sets and Decision Making. Third Eur. Meeting. Cyber. Syst. Res. Viena --- (1976)

36. SIMONNARD, M.

Programation Lineaire (Technique du Calcul Economique) Dunod (1972)

37. SUGENO, M.

Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals. A Survey. First - World Conference on Mathematics at the Service of the Man. Barcelona (1977)

38. STALLINGS, W.

Fuzzy Sets Theory Versus Bayesian Statistics. IEEE -- Trans. on Syst. and Cyber. Marzo (1977)

39. TAKEDA, E., NISHIDA, T.

Multiple Criteria Decision Problems with Fuzzy Domination Structures. Fuzzy Sets and Systems, 3,2 (1980)

40. TANAKA, H., OKUDA, T., ASAI, K.

On Fuzzy Mathematical Programming. Journal of Cybernetics, 3,4, pp. 37-46 (1974)

41. TANAKA, H., OKUDA, T., ASAI, K.

A Formulation of Fuzzy Decision Problems and its Application to a Investment Problem. Kybernetes, Vol 5, pp. 25-30 (1976)

42. TERANO, T., SUGENO, M.

Conditional Fuzzy Measures and their Applications. Fu zzy Sets and their Appl. Academic Press (1975)

43. WIEDEY, G., ZIMMERMANN, H.J.
Media Selection and Fuzzy Linear Programming. Jor. of the Operational Research Society, 29,11 (1978)

44. WIERZCHON, S.T., ZALEWSKI, J.
A Set of Soubroutines for Applications of Fuzzy Con - cepts to Decision Making Problems. Proc. of the 5^{th} - Intn. Conf. on Syst. Sci. (1978)

45. WIERZCHON, S.T., ZALEWSKI, J.
On Some Equivalence betwen Control Theory and Deci -- sion Making Theory. Current Topics in Cybernetics and Systems (1978)

46. WIERZCHON, S.T., ZALEWSKI, J.
The Application of Fuzzy Sets to Automatic Control -- and Decision Making. Proc. of the 4^{th} Intn. Symposium System-Modelling-Control (1979)

47. WIERZCHON, S.T.
The Algorithms for Fuzzy Decision and Control of ill-Structured Problems. Por aparecer en Advances in Mana- gement Applications of Systems Theory.

48. THE WORKING GROUP ON FUZZY SYSTEMS. TOKYO (JAPON)
Report 1 (Sumary of Papers on General Fuzzy Problems) (1975)

49. YAGER, R.

Decision Making with Fuzzy Sets. Decision Sciences, - Vol. 6, 3 (1975)

50. YAGER, R.

Fuzzy Decision Making Including Unequal Objectives. Fuzzy Sets and Systems, 1,1 (1978)

51. YAGER, R.

Multiple Objective Decision Making Using Fuzzy Sets. - Por aparecer.

52. YU, P.L.

Cone Convexity, Cone Extreme Points and Nondominated - Solutions in Decision Problems with Multiobjectives. - JOTA, 14, 3 (1974)

53. ZADEH, L.A.

Fuzzy Sets. Information and Control, 8, pp. 338-353, - (1965)

54. ZADEH, L.A.

Fuzzy Sets and Systems, en Fox, J. (ed.). Systems Theory, Microwave Research Institute Symposia Series XV. - Polytechnic Press, New York (1965)

55. ZADEH, L.A.

Probability Measures of Fuzzy Events. Jour. of Math. - Anal. Appl., 23 (1968)

56. ZADEH, L.A.
Similarity Relations and Fuzzy Orderings. Information Sciences, 3 (1971)

57. ZADEH, L.A., FU, K.S., TANAKA, K., SHIMURA, M.
Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes. Academic Press (1975)

58. ZIMMERMANN, H.J.
Bibliografie: Theory and Applications of Fuzzy Sets.- Lehrstuhl fur Unternehmensforschung, RWTH (1975)

59. ZIMMERMANN, H.J.
Description and Optimization of Fuzzy Systems. International Journal of General Systems, Vol. 2 (1976)

60. ZIMMERMAN, H.J.
Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Function. Fuzzy Sets and Systems, 1,1 (1978)