Angel Rodríguez Palacios

CONTRIBUCION A LA TEORIA DE LAS C*-ALGEBRAICAS CON UNIDAD

TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA 57

COLEGIO UNIVERSITARIO DE ALMERIA
DPTO. DE ANALISIS MATEMATICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DPTO. DE ANALISIS FUNCIONAL

CONTRIBUCION A LA TEORIA DE LAS C*-ALGEBRAICAS CON UNIDAD

ANGEL RODRIGUEZ PALACIOS

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1974

© CONTRIBUCION A LA TEORIA DE LAS C*-ALGEBRAICAS. Editado e impreso en la Imprenta del Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada para el departamento de Teoría de Funciones. Im.Un.Gr.40.74.22. Dep.leg.Gr.263.1974. ISBN.84.600.6179.5. *Printed in Spain.*

Tesis doctoral, dirigida por el Profesor Dr. D. José Ramón Fuentes Miras, Catedrático de Análisis Matemático. Fue leída el día 30 de setiembre de 1974, ante el Tribunal formado por los Profesores: Gutierrez Suárez; Guiraum Martín; Vigil Vázquez; Valle Sánchez y Fuentes Miras. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

Este trabajo, realizado en el Departamento de Análisis Matemático del Colegio Universitario de Almería del que soy profesor encargado, dependiente del Departamento de Análisis Funcional de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, pretende como su propio nombre indica contribuir a establecer, o aclarar según los casos, algunos resultados de la teoría general de las C^*-álgebras con unidad.

Este objetivo, que podría parecer poco preciso y que a continuación concretaremos, se justifica por el hecho, reconocido por la mayoría de los autores de trabajos sobre el tema, de que la teoría de las C^*-álgebras, si bien ha alcanzado resultados definitivos, está aun lejos de conseguir una forma estéticamente convincente para la exposición de su doctrina. La razón de este hecho es histórica: cuando empieza la teoría de las C^*-álgebras, está en plena madurez el estudio de las álgebras débilmente cerradas de operadores continuos sobre un espacio de Hilbert (álgebras de von Neumann o W^*-álgebras), las cuales constituyen un tipo muy perfecto, pero muy restringido, de C^*-álgebras; enseguida se idea un procedimiento para sumergir canónicamente cualquier C^*-álgebra en una W^*-álgebra, y es, apurando este procedimiento, como se consigue en muchos casos transvasar un resultado de la teoría de W^*-álgebras, en ocasiones con pérdida de fuerza, a la de C^*-álgebras. Evidentemente, en un orden puramente lógico de ideas, el objetivo debería ser exactamente el contrario: disponer de una teoría independiente lo más completa posible para las C^*-álgebras, a partir de la que se edificara la de las álgebras de von Neumann en aquellos aspectos que le son específicos. Es en esta linea en la que se orienta el trabajo que presentamos.

Hecho, en el primer capítulo, un resumen de los resultados más fundamentales de la teoría, se dedica el segundo al estudio, que es esencial para el conocimiento de cualquier estructura, de los isomorfismos de C^*-álgebras. Se llega a demostrar que, para un tal isomorfismo, ser isométrico y ser compatible con la conjugación son afirmaciones equivalentes, lo que establece una intrínseca dependencia mutua entre la norma y la conjugación de una

C^*-álgebra; para C^*-álgebras conmutativas, previo un teorema caracterizando los caracteres de una C^*-álgebra, se llega incluso a que la norma y la unidad del álgebra determinan el producto. Se estructura el grupo de los automorfismos de una C^*-álgebra de manera que el tal grupo aparece como si fuese una parte invariante por conjugación de otra C^*-álgebra, lo que da pie a conjeturar que el álgebra de Banach de los operadores lineales continuos sobre la C^*-álgebra base, con una adecuada conjugación, cuya restricción al grupo de los automorfismos sea la que previamente se ha definido, y con una conveniente norma, sea a su vez una C^*-álgebra. A partir de la estructuración que damos al grupo de los automorfismos de una C^*-álgebra se consigue una demostración independiente del conocido resultado según el cual si dos C^*-álgebras son isomorfas también son $*$-isomorfas.

El tercer capítulo se dedica al estudio de las C^*-álgebras de dimensión finita desde el punto de vista de la caracterización que de ellas hacemos como las únicas álgebras involutivas con unidad sobre las que existe definido un funcional positivo no degenerado tal que la norma canónicamente asociada a este funcional dota al álgebra de estructura de espacio de Banach y hace la conjugación continua. Por este método se llega a caracterizar la Z-traza canónica y la que venimos en llamar traza canónica en términos de la estructura de álgebra abstracta de la C^*-álgebra de dimensión finita en cuestión; es decir: sin aludir a la conjugación y a la norma. Este hecho permite establecer la existencia de trazas no degeneradas invariantes por automorfismos (la canónica es una de ellas), lo que da pie a estructurar como C^*-álgebra el álgebra de los operadores lineales sobre la C^*-álgebra base de acuerdo con la conjetura que se hace en el capítulo segundo.

El capítulo cuarto y último es sin duda el más original pues se trabaja a nivel de primeros resultados. En él se define de forma coherente el concepto de forma hermitiana positiva sobre un espacio vectorial con valores en una C^*-álgebra y se da un procedimiento canónico para conseguir, a partir de una tal forma, una seminorma. Se define la compatibilidad de una forma hermitiana positiva con una estructura de módulo sobre la C^*-álgebra en cuestión, apareciendo de manera natural los conceptos de U-módulo prehilbertiano y de Hilbert. A nivel general se consiguen generalizar con perfección los procedimientos clásicos de suma de Hilbert e inmersión densa de un prehilbertiano en un Hilbert. En el caso en que la C^*-álgebra base es de dimensión finita, se generalizan igualmente los teoremas de la proyección ortogonal y de representación de Riesz e incluso, con una adecuada definición, el teorema de existencia de base ortonormal. Termina este trabajo con una vuelta al origen de la teoría de las C^*-álgebras: se dota al conjunto de los operadores U-lineales continuos sobre un U-módulo de Hilbert suficientemente perfecto, a la manera tradicional, de estructura de C^*-álgebra.

Sólo me queda manifestar mi agradecimiento al Departamento de Análisis Funcional de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, en la persona de su Director prof. Dr. D. José Ramón Fuentes Miras, y al Colegio Universitario de Almería, en las personas de su Director y Jefe de estudios de Ciencias profs. Drs. D. Antonio Arribas Palau y D. Manuel Rodríguez Gallego, respectivamente; quienes no han regateado esfuerzos para poner a mi disposición todo el material bibliográfico necesario para la confección del presente trabajo.

Almería, 5 de Febrero de 1.974.

Angel Rodríguez

A MIS PADRES

I N D I C E

Capítulo I : RESUMEN DE LOS RESULTADOS BASICOS DE LA TEORIA DE LAS C^*ALGEBRAS.-

Capítulo II : APLICACIONES LINEALES ENTRE C^*-ALGEBRAS.HOMOMORFISMOS.-

Capítulo III : C^*-ALGEBRAS DE DIMENSION FINITA.-

Capítulo IV : FORMAS HERMITIANAS POSITIVAS CON VALORES EN UNA C^*-ALGEBRA. MODULOS DE HILBERT SOBRE C^*-ALGEBRAS.-

C A P I T U L O   I :

RESUMEN DE LOS RESULTADOS BASICOS DE LA TEORIA DE LAS C^*-ALGEBRAS

1.- Axiomas.

La teoría de las C^*-álgebras (conocidas con diversos nombres en la bibliografía al respecto: álgebras completamente regulares, álgebras de Gelfand-Naimark, álgebras estelares, B^*-álgebras) no es otra que la de las álgebras nórmicamente cerradas y autoadjuntas del álgebra de operadores lineales continuos sobre un espacio de Hilbert. La teoría comienza en 1.943, cuando Gelfand y Naimark consiguen caracterizar este tipo de álgebras, en el conjunto de las álgebras de Banach con involución, salvo isomorfismos isométricos compatibles con la involución ($*$-isomorfismos), por medio de sencillos postulados intrínsecos. Concretemos conceptos:

Se llama involución de un álgebra compleja U a una aplicación $u \longrightarrow u^*$ de U en sí misma, verificando:

$$(u + v)^* = u^* + v^* \quad , \qquad \forall (u,v) \in U^2$$

$$(z.u)^* = \bar{z}.u^* \quad , \qquad \forall (z,u) \in C \times U$$

$$(u.v)^* = v^*.u^* \quad , \quad \forall (u,v) \in U^2$$

$$(u^*)^* = u \quad , \quad \forall u \in U \quad .$$

Un álgebra compleja dotada canónicamente de una involución se denomina un álgebra involutiva.

Inicialmente Gelfand y Naimark definen las C^*-álgebras como aquellas álgebras de Banach dotadas de una involución satisfaciendo los axiomas:

a.- $\|u^*.u\| = \|u\|^2$, para cada elemento u del álgebra.

b.- Para cada elemento u del álgebra, $I + u^*.u$ es un elemento inversible (I: elemento unidad del álgebra).

A partir de esta definición demuestran el propósito inicial de la teoría:

A.- Toda C^*-álgebra es $*$-isomorfa a una subálgebra (necesariamente autoadjunta y nórmicamente cerrada) del álgebra de los operadores lineales continuos sobre un espacio de Hilbert ([14]-Tomo II, pag. 884; [2],pag 39; [13],pag. 41).

Posteriormente, en 1.953, Kaplansky demuestra que el axioma ((b)) es superfluo; quedando desde entonces como definición clásica de C^*-álgebra (inclusive, sin elemento unidad) la de álgebra de Banach con involución satisfaciendo la igualdad: $\|u^*.u\| = \|u\|^2$. Como toda subálgebra autoadjunta nórmicamente cerrada de un álgebra de operadores lineales continuos en un Hilbert responde a esta situación y, recíprocamente, el teorema ((A)) se generaliza a C^*-álgebras cualesquiera (aun sin unidad), queda perfectamente cubierto el objetivo inicial de la teoría.

Hecha esta introducción, advirtamos que, como el propio título del trabajo indica, nuestro estudio se va a restringir al caso de C^*-álgebras con elemento unidad; es por esto por lo que, para no incurrir en repetición innecesaria, desde este momento, siempre que se hable de C^*-álgebras, se entenderá automáticamente, con elemento unidad.

Llegados a este punto, conviene resumir aquí, por la aplicación que va a tener en lo sucesivo, la nueva axiomatización que proponiamos en [11] y [12] para las C^*-álgebras. Se basa en el análisis del caso clásico: Sea U una subálgebra autoadjunta nórmicamente cerrada del álgebra de operadores lineales continuos sobre un espacio de Hilbert X y que contiene la identidad de X, $I : x \longrightarrow x$; consideremos la familia de funcionales lineales sobre U: $F = \left\{ u \longrightarrow (u.x|x) \;\middle|\; x \in X - \{0\} \right\}$. Si u' es un elemento de F , será $\langle u',u \rangle = (u.x \mid x)$, $\forall u \in U$; para un cierto elemento x de X, con lo que:

$$\langle u',u^*.u \rangle = (u^*.u.x \mid x) = (u.x \mid u.x) = \|u.x\|^2 \geq 0, \forall u \in U;$$

resultando así que los funcionales de F son todos positivos (un funcional lineal v' sobre un álgebra involutiva se llama positivo si es $\langle v', v^*.v\rangle \geqslant 0$ para todo v del álgebra). Además se comprueba sin dificultad que la familia de funcionales positivos F satisface las condiciones:

c.- El funcional nulo no pertenece a F.

d.- $\left.\begin{array}{l} u \in U \\ u' \in F \\ u.u'.u^* \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u.u'.u^* \in F$

(si $(u,u') \in U \times F$, se denota por $u.u'.u^*$ el funcional, evidentemente positivo, $v \longrightarrow \langle u', u^*.v.u\rangle$).

e.- Para cada elemento u no nulo de U, existe un funcional u' de F, tal que $\langle u', u^*.u\rangle \neq 0$.

f.- Para cada elemento u de U, el conjunto de números $\left\{ \langle u', u^*.u\rangle / \langle u', I\rangle \mid u' \in F \right\}$ está mayorado (para un funcional positivo no nulo v' sobre un álgebra involutiva con unidad I, el número $\langle v', I\rangle$ es siempre estrictamente positivo).

Evidentemente la norma usual de nuestra álgebra de operadores U se puede conseguir, a partir de este esquema, por la fórmula:

$$\|u\| = \sup_{u' \in F} \sqrt{\langle u', u^*.u\rangle / \langle u', I\rangle} = \sup_{x \in X - \{0\}} (\|u.x\| / \|x\|) .$$

El análisis que acabamos de hacer nos llevó a considerar en [11] familias de funcionales positivos, sobre un álgebra involutiva con unidad cualquiera, que cumpliesen las condiciones ((c)), ((d)), ((e)) y ((f)); y a tales familias se les apellidó "admisibles". Se demuestra allí:

B.- Si U es un álgebra involutiva con unidad y F es una familia admisible de funcionales positivos sobre U, entonces la aplicación $u \longrightarrow \sup_{u' \in F} \sqrt{\langle u', u^*.u \rangle / \langle u', I \rangle}$, de U en R, es una norma sobre U (llamémosla $\| \ \|_F$) que dota a U de estructura de álgebra normada, verificándose además:

$\|u^*.u\|_F = \|u\|_F^2 \ , \ \forall u \in U$.

Se pasa entonces a estudiar el caso en que U sea completa respecto a una norma del tipo $\| \ \|_F$ (se observará que con estas condiciones se está ya bajo el amparo del axioma ((a)) de Gelfand -Naimark; no obstante se trabaja en [11] con independencia de la teoría clásica de C^*-álgebras), llegándose a establecer:

C.- Sea U un álgebra involutiva con unidad y supongamos que existe una familia admisible F de funcionales positivos sobre U tal que $\{ U , \| \ \|_F \}$ es un álgebra de Banach; entonces se verifica:

g.- La familia P de todos los funcionales positivos no nulos sobre U es admisible y además: $\|u\|_P = \|u\|_F \ , \ \forall u \in U$. En consecuencia:

h.- Si F_1 y F_2 son dos familias admisibles de funcionales positivos sobre U, tales que $\{ U, \| \ \|_{F_1} \}$ y $\{ U , \| \ \|_{F_2} \}$ son álgebras de Banach, se tiene: $\|u\|_{F_1} = \|u\|_{F_2}$, $\forall u \in U$.

A la vista de ((B)) y ((C)), se propone en [11] axiomatizar las C*-álgebras como aquellas álgebras involutivas con unidad U, tales que:

i.- existe una familia admisible F de funcionales positivos sobre U y $\{U, \| \|_F\}$ es un álgebra de Banach;

o bien:

j.- la familia P de todos los funcionales positivos no nulos sobre U es admisible y $\{U, \| \|_P\}$ es un álgebra de Banach.

La equivalencia de los axiomas ((i)) y ((j)) es manifiesta, en virtud de ((C,g)). Cualquiera de ellos implica, por ((B)), el axioma clásico ((a)) de Gelfand-Naimark; y, recíprocamente, dicho axioma, a través del teorema ((A)), implica el ((i)), pues se ha visto que la norma usual de una subálgebra autoadjunta nórmicamente cerrada del álgebra de operadores de un Hilbert se puede obtener por el procedimiento de las familias admisibles.

Tomando como definición de C*-álgebra el axioma ((i)), el resultado ((C,h)) viene a decir que la norma de una C*-álgebra es independiente de la familia admisible de funcionales positivos que la genere siempre y cuando se tenga asegurada la completitud respecto a la norma asociada a la familia en cuestión. Surge entonces la duda sobre si existen familias admisibles de funcionales positivos sobre una C*-álgebra generadoras de normas que doten a la C*-álgebra en cuestión de estructura no completa. Por suerte, la contestación es negativa:

D.- Toda familia admisible F de funcionales positivos sobre una C*-álgebra U genera, por la fórmula $u \longrightarrow \|u\|_F = \sup_{u' \in F} \sqrt{\langle u', u^*.u\rangle / \langle u', I\rangle}$ la única norma estelar de U (se llama norma estelar sobre un álgebra involutiva V a toda norma $v \longrightarrow \|v\|$ que satisfaga: $\|v_1 . v_2\| \leq \|v_1\| \|v_2\|$ y $\|v^*.v\| = \|v\|^2$).

Demostración:

Siendo, por ((B)), la norma $\| \ \|_F$ una norma estelar sobre U, todo se reduce a un resultado de la teoría clásica de C*-álgebras debido a Rickart ([15]; se cita también en [2] y [13]):

E.- Sea U una C*-álgebra, $\| \ \|$ su norma usual, y sea $\| \ \|_1$ otra norma con la que U es un álgebra normada (no necesariamente completa) y tal que se verifica $\|u^*.u\|_1 = \|u\|_1^2$, $\forall u \in U$. Entonces es: $\|u\|_1 = \|u\|$, $\forall u \in U$.

2.- Relación de orden en las C*-álgebras.

Uno de los hechos más interesantes de la teoría de las C*-álgebras consiste en poder disponer en ellas canónicamente de una relación de orden, parcial salvo el caso unidimensional, compatible con la estructura de espacio de Banach real subyacente. Esta relación se va a definir, como de costumbre, por el conocimiento del cono convexo cerrado de los elementos positivos; como todo elemento positivo va a ser simétrico (invariante por conjugación), esta relación generalmente se considera restringida al conjunto de los elementos simétricos del álgebra, pues una desigualdad entre elementos arbitrarios equivaldría a la correspondiente desigualdad de sus partes reales y a la igualdad de sus partes imaginarias.

En la teoría clásica de C^*-álgebras, a partir del axioma ((1,a)) de Gelfand-Naimark, un elemento se llama positivo si es simétrico y su espectro está incluido en el conjunto de los números reales no negativos; y se demuestra, no sin dificultad, que el conjunto de los elementos positivos de una C^*-álgebra es en efecto un cono convexo cerrado, así como la implicación:

$$\left.\begin{array}{r} u \geqslant 0 \\ -u \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u = 0 \quad ;$$

condiciones estas necesarias y suficientes para definir en U por la fórmula $u \leq v \Longleftrightarrow v - u \geqslant 0$ una relación de orden compatible con la estructura R-lineal de U y con el paso al límite.

En [11], teniendo en cuenta que trabajábamos las C^*-álgebras desde el punto de vista del axioma ((1,i)), se proponía llamar positivo a todo elemento u de la C^*-álgebra en cuestión que verificase $\langle u', u \rangle \geqslant 0$ para todo elemento u' de una familia admisible de funcionales positivos (se añadía allí: "generadora de la norma usual del álgebra"; pero esta exigencia, según ((1,D)), es superabundante) y se demostraba que esta definición es equivalente a la clásica (Ver [11]: ((II,1f))-pág. 18 y ((II,5,E,c))-pág. 26). Podemos resumir este hecho en el siguiente resultado (la palabra "positivo" se interpreta en su sentido clásico: simétrico y de espectro contenido en R):

F.- Sea U una C^*-álgebra; un elemento u de U es positivo si y sólo si es $\langle u', u \rangle \geqslant 0$ para todos los elementos u' de una familia admisible de funcionales positivos sobre U.

De esta caracterización pueden obtenerse de forma fácil conocidos resultados que se utilizarán a lo largo del trabajo:

a.- $\forall u \in U$; $u^*.u$ es positivo; en particular el cuadrado de todo elemento simétrico es positivo; el elemento unidad de U es positivo.

b.- $\left.\begin{array}{l} v \geqslant 0 \\ u \in U \end{array}\right\} \Longrightarrow u^*.v.u \geqslant 0$, de donde resulta la posibilidad de multiplicar miembro a miembro una desigualdad a un tiempo por la derecha por un elemento arbitrario y por la izquierda por su adjunto.

c.- El espectro de un elemento simétrico de U está contenido en el conjunto de los números reales. Concretamente:

d.- Si $M(u)$ designa el máximo valor espectral del elemento simétrico u, $M(u)$ es el menor de los números K tales que $u \leq K.I$ (análogo resultado para $m(u)$: mínimo valor espectral de u). En consecuencia:

e.- $-\|u\|.I \leq u \leq \|u\|.I$ (u; elemento simétrico de U).

f.- $0 \leq u \leq v \Longrightarrow \|u\| \leq \|v\|$.

Basándose este último resultado en que, para un elemento positivo w, es $M(w) = \|w\|$, como caso particular de la fórmula: $\|u\| = \text{máx} \{ |m(u)|, |M(u)| \}$, válida para cualquier elemento simétrico u; la cual a su vez puede obtenerse por particularización de:

G.- La norma de un elemento normal (que conmuta con su adjunto) de una C^*-álgebra es igual a su radio espectral ([2] , [5]-Tomo II, [11]).

3.- El teorema de Gelfand-Naimark y sus consecuencias.

Si X designa un conjunto abstracto, el álgebra $B(X,C)$ de todas las funciones sobre X con valores complejos acotadas, con la suma, el producto y la conjugación definidos puntualmente y con la norma de la convergencia uniforme, aparece como un primer ejemplo de C^*-álgebra conmutativa. Supongamos ahora que X es un espacio compacto; el teorema clásico de conservación de la continuidad por límite uniforme pone entonces de manifiesto que $C(X)$ (conjunto de las funciones continuas sobre X con valores complejos) es una subálgebra cerrada y por supuesto autoadjunta de la C^*-álgebra $B(X,C)$; con lo que $C(X)$ es a su vez una C^*-álgebra.

El teorema de Gelfand-Naimark resuelve completamente la teoría de las C^*-álgebras conmutativas estableciendo que, salvo $*$-isomorfismos, no existen más C^*-álgebras conmutativas que las álgebras de funciones continuas sobre un compacto con valores complejos. En realidad no es más que un resultado particular, sin duda el más potente, de toda una teoría elaborada por Gelfand ([4]) para álgebras de Banach conmutativas con unidad en general.

Se basa esta teoría en el concepto de carácter. Se llama carácter sobre un álgebra compleja a todo homomorfismo no nulo del álgebra en cuestión en el cuerpo de los números complejos. Como el valor de un carácter sobre un elemento es siempre un valor espectral del elemento en cuestión, resulta que un carácter sobre un álgebra de Banach con unidad es siempre continuo y de norma igual a uno. Para álgebras de Banach conmutativas con unidad la existencia de caracteres está asegurada, concretamente:

H.- Sea U un álgebra de Banach conmutativa con unidad; la aplicación $f \longrightarrow \mathrm{Ker}(f)$ es una biyección del conjunto de los caracteres de U sobre el conjunto de los ideales maximales de U

(la existencia de estos últimos está asegurada por el lema de Zorn. Referencias: [4] y [5]-Tomo II).

Comentábamos antes cómo, si f es un carácter de un álgebra compleja, para cada elemento u de esta álgebra, $\langle f, u \rangle$ es un elemento del espectro de u. El resultado ((H)), que acabamos de citar, permite entonces, en el caso de álgebras de Banach conmutativas con unidad, enunciar un recíproco:

I.- Sea U un álgebra de Banach conmutativa con unidad; para cada u de U y para cada número complejo z del espectro de u, existe un carácter f de U tal que $\langle f, u \rangle = z$. (Se consigue, a partir de ((H)), sumergiendo el elemento $u - z.I$ en un ideal maximal de U).

En la teoría de Gelfand el conjunto de los caracteres de un álgebra de Banach con unidad U se considera siempre como un espacio topológico con la topología que en dicho conjunto induce la topología débil del dual topológico U´ del espacio de Banach U (hablamos de la topología localmente convexa generada sobre U´ por la familia de seminormas $\{ u' \longrightarrow |\langle u', u \rangle| \mid u \in U \}$). Se sabe (teorema de d´Alaoglu, [8]) que la esfera unidad de U´ es débilmente compacta. Como un carácter f de U queda determinado en U´ por las condiciones $\langle f, u.v \rangle = \langle f, u \rangle \langle f, v \rangle$, $\forall (u,v) \in U^2$ y $\langle f, I \rangle = 1$; resulta que el conjunto de los caracteres de U es una parte débilmente cerrada de la esfera unidad de U', y en consecuencia compacta. El conjunto de los caracteres de U, dotado canónicamente de la topología que se acaba de describir, se acostumbra a llamar espectro del álgebra U, al que designaremos por Ω .

Para cada elemento u de U, la aplicación $\bar{u} : f \longrightarrow \langle f, u\rangle$ del compacto Ω en C es continua, y evidentemente la aplicación $u \longrightarrow \bar{u}$ es un homomorfismo del álgebra de Banach conmutativa con unidad U en la C^*-álgebra $C(\Omega)$, que se conoce con el nombre de homomorfismo de Gelfand. Además, según ((I)), para cada u de U, el recorrido de la función $\bar{u}$ es precisamente el espectro de u, con lo que: $\|\bar{u}\| = \sup_{f\in\Omega} |\bar{u}(f)| = \rho(u) \leq \|u\|$ (ρ : función radio espectral), resultando así que el homomorfismo de Gelfand es continuo.

Hasta aquí la teoría general de Gelfand. Si U se supone ahora una C^*-álgebra conmutativa, cualquiera de sus elementos es normal y en consecuencia, según ((2,G)), es $\rho(u) = \|u\| \Longrightarrow \|\bar{u}\| = \|u\|$, $\forall u \in U$. Con lo que el homomorfismo de Gelfand es isométrico y en consecuencia inyectivo. Se demuestra también que es sobreyectivo, aplicando el teorema de Stone-Weierstrass al álgebra imagen de U en el homomorfismo $u \longrightarrow \bar{u}$. Por otra parte, se verá en ((II,2,F)), un homomorfismo isométrico de C^*-álgebras es necesariamente compatible con la conjugación (en el caso que nos atañe se puede justificar este hecho por procedimientos más directos). Hemos llegado así al <u>teorema de Gelfand--Naimark</u>:

J.- Sea U una C^*-álgebra conmutativa, Ω su espectro (que es un espacio compacto); el homomorfismo de Gelfand es un $*$-isomorfismo de U sobre la C^*-álgebra de las funciones continuas sobre Ω con valores complejos.

Hemos elaborado "ex profeso" prácticamente la demostración de este teorema pues creemos que un enunciado del mismo sin estar en sus antecedentes nos privaría de su perfecta comprensión así como de su interés estético como punto culminante de convergencia de las teorías de C^*-álgebras y de las álgebras de Banach conmutativas con unidad. Referencias: [2], [4], [5]-Tomo II, [13] y [14] .

Las consecuencias del teorema de Gelfand-Naimark son numerosas, inclusive para C^*-álgebras no conmutativas, habida cuenta de que toda C^*-álgebra contiene "muchas" C^*-subálgebras conmutativas. Así por ejemplo, si U es una C^*-álgebra cualquiera y w es un elemento normal de la misma, la C^*-subálgebra de U engendrada por w (la subálgebra cerrada engendrada por $\{I, w, w^*\}$) es conmutativa, llamémosle W. Se puede demostrar que la aplicación $f \longrightarrow \langle f, w \rangle$ es un homeomorfismo del espectro de W sobre el espectro de w. Además W, como C^*-álgebra, está engendrada por un único elemento: w ; con lo que el valor de un $*$-isomorfismo sobre w lo determina perfectamente. Se llega entonces, aplicando el teorema de Gelfand-Naimark, a:

K.- Sea U una C^*-álgebra, w un elemento normal de U, y W la C^*-subálgebra de U engendrada por w. Existe un único $*$-isomorfismo de W sobre la C^*-álgebra de las funciones continuas de $\sigma(w)$ en C, tal que a w le corresponde la función $z \longrightarrow z$ de $\sigma(w)$ en C ($\sigma(w)$: espectro del elemento w). Referencias: [2] y [5]-Tomo II.

Por particularización de este resultado al caso en que w es simétrico o positivo ($\sigma(w)$ está incluido entonces en R o en R_+, respectivamente), se obtienen interesantes útiles de trabajo

a.- Sea U una C^*-álgebra, w un elemento simétrico de U. Existe un único par (w^+, w^-) de elementos positivos ortogonales tales que se verifique: $w = w^+ - w^-$ ([13]-pág. 8).

b.- Todo elemento positivo de una C^*-álgebra posee una única raiz cuadrada positiva conmutando con todos los elementos que conmutan con el elemento en cuestión ([13]-pág. 7).

De aquí resultan algunas aplicaciones al orden de las C^*-álgebras:

c.- El producto de dos elementos positivos de una C^*-álgebra es positivo si y sólo si dichos elementos conmutan ([1]-pág.263).

d.- Sean u y v elementos positivos de una C^*-álgebra siendo u inversible y verificándose $u \leq v$; entonces v también es inversible y se tiene: $0 \leq v^{-1} \leq u^{-1}$ ([2]-pág. 15).

4.- Cociente de una C^*-álgebra respecto a un ideal bilátero cerrado.

Vamos a terminar este primer capítulo de resultados básicos con una de las cuestiones respecto a la que la teoría de las C^*-álgebras está totalmente acabada. Se sabe que el álgebra cociente de un álgebra de Banach U respecto a un ideal bilátero cerrado M, con la norma $\|\{u\}\| = \inf_{m \in M} \|u + m\|$, es a su vez un álgebra de Banach ($\{u\}$: elemento del álgebra cociente U/M que contiene al elemento u de U). Por otra parte, a nivel puramente algebraico, si U es un álgebra involutiva y M es un ideal bilátero autoadjunto, el álgebra cociente U/M se dota "naturalmente" de estructura de álgebra involutiva sin más que definir: $\{u\}^* = \{u^*\}$; definición que evidentemente no depende de la representación que se elija para cada elemento de U/M .

En este contexto, el enunciado que damos a continuación resuelve definitivamente el problema para C^*-álgebras ([2]-pág.17):

L.- Sea U una C^*-álgebra y M un ideal bilátero cerrado de U. Se verifica:

a.- M es autoadjunto.

b.- U/M , con su estructura natural de álgebra involutiva y con la norma cociente, es una C^*-álgebra.

C A P I T U L O   II :

APLICACIONES LINEALES ENTRE C^*-ALGEBRAS. HOMOMORFISMOS.

1.- Aplicaciones lineales positivas.

Si U es un álgebra de Banach involutiva, V una C^*-álgebra y f una aplicación lineal de U en V, f será calificada de "positiva" si es $f(u^*.u) \geqslant 0$, para todo elemento u de U.

Vamos a ver que, en el caso de que U admita elemento unidad, la continuidad de una tal aplicación es automática. En el caso elemental de que V sea precisamente el cuerpo de los números complejos, la continuidad de las formas lineales positivas es conocida (puede verse la demostración en [2] y [5]-Tomo II); así pues nuestro razonamiento lo basaremos en:

A.- Todo funcional u',sobre un álgebra de Banach involutiva con unidad, que sea positivo es continuo y $\|u'\| = \langle u', I \rangle$.

Según esto, si f es nuestra aplicación lineal positiva del álgebra de Banach involutiva con unidad U en la C^*-álgebra V, para cada funcional positivo v' sobre V, $v'.f$ es un funcional positivo sobre U, por lo que se tendrá:

$$((*))\quad |\langle v', f(u)\rangle| = |\langle v'.f, u\rangle| \leq \langle v'.f, I\rangle \|u\| =$$

$$= \langle v', f(I)\rangle \|u\| \leq \|v'\| \|f(I)\| \|u\| \quad ; \quad \forall u \in U .$$

Ahora bien, una C^*-álgebra es "muy rica" en funcionales positivos; recordemos concretamente ([11]-pág. 69):

B.- Para cada elemento normal v de una C^*-álgebra, existe un funcional positivo v', tal que $\|v'\| = 1$ y $|\langle v', v\rangle| = \|v\|$.

Así pues, si u es un elemento de U tal que f(u) sea normal (en particular, si la C^*-álgebra V es conmutativa, esto ocurrirá siempre), tomando en la desigualdad ((*)) v' con las condiciones que nos asegura el lema ((B)), se tendrá:

$$f(u) \text{ normal} \Longrightarrow \|f(u)\| \leq \|f(I)\| \|u\| \qquad ((**)).$$

Si V es conmutativa, esta desigualdad pone de manifiesto la continuidad de f e incluso que $\|f\| = \|f(I)\|$.

En el caso general, tengamos en cuenta que todo elemento u de U se escribe de manera única en la forma $u = u_1 + i.u_2$, con u_1 y u_2 simétricos; que, por ser f positiva, aplica el conjunto de los elementos simétricos de U en el conjunto de los elementos simétricos de V (la identidad

$u = (1/4)(u+I)^*(u+I) - (1/4)(u-I)^*(u-I)$, válida para cualquier elemento simétrico u de U, pone de manifiesto que $f(u)$ es la diferencia de dos elementos positivos de V y es por tanto simétrico). Así pues, $f(u_1)$ y $f(u_2)$ son simétricos y en consecuencia normales, con lo que estamos en condiciones de aplicar la desigualdad ((✱✱)), con lo que:

$$\|f(u)\| \leq \|f(u_1)\| + \|f(u_2)\| \leq \|f(I)\|(\|u_1\| + \|u_2\|) \leq$$

$$\leq 2\,\|f(I)\|\,\|u\| \qquad , \quad \forall u \in U \ .$$

(Se han tenido en cuenta las desigualdades $\|u_1\| \leq \|u\|$ y $\|u_2\| \leq \|u\|$, consecuencia directa de ser $u_1 = (1/2)(u+u^*)$ y $u_2 = (i/2)(u^*-u)$). Resumiendo nuestros resultados:

C.- Sea U un álgebra de Banach involutiva con elemento unidad, V una C^*-álgebra y f una aplicación lineal positiva de U en V; se verifica:

a.- f es continua.

b.- Si V es conmutativa: $\|f\| = \|f(I)\|$.

c.- En todo caso: $\|f\| \leq 2\,\|f(I)\|$.

En el lema ((A)) recordábamos cómo todo funcional positivo u' sobre un álgebra de Banach involutiva con elemento unidad era continuo y $\|u'\| = \langle u', I\rangle$ .En el caso de ser U una C^*-álgebra se sabe que la continuidad de un funcional lineal u' y la igualdad $\|u'\| = \langle u', I\rangle$ son propiedades características de los funcionales positivos ([2] y [3], [11] y [12], [13]). Una generalización de este hecho es:

D.- Sean U y V C^*-álgebras (I_1 e I_2, sus respectivos elementos unidad), f una aplicación lineal continua de U en V tal que $f(I_1) = \|f\|\, I_2$; en estas condiciones f es positiva.

Demostración:

Por razones de homogeneidad podemos suponer $\|f\| = 1$. Empezaremos viendo que f es simétrica (es decir: $f(u^*) = f(u)^*$, para todo u de U; o lo que es equivalente: f aplica el conjunto de los elementos simétricos de U en el conjunto de los elementos simétricos de V. Se vio en la demostración de ((C)) que el ser f positiva implicaba el ser simétrica; no obstante en nuestra demostración es necesario establecer primero la simetría para concluir más tarde el carácter específicamente positivo de f); para ello, sea u un elemento simétrico cualquiera de U, y sea $f(u) = v_1 + i.v_2$ la descomposición canónica de f(u) con v_1 y v_2 simétricos, pretendemos demostrar que $v_2 = 0$, con lo que la simetría de f quedará asegurada. En efecto: para todo número real $\underline{z}$ y para todo valor espectral $\underline{a}$ de v_2, a+z pertenece al espectro de $v_2 + z.I_2$, por lo que:

$$a^2 + z^2 + 2a.z = |z + a|^2 \leq \|v_2 + z.I_2\|^2$$

(Se ha utilizado el hecho de que todo valor espectral de un elemento simétrico de una C^*-álgebra es real: ((I,2,c)); y que en toda álgebra de Banach la norma de un elemento mayora en módulo a su espectro). Por otra parte:

$$\| v_2 + z.I_2 \| \leq \| v_1 + i(v_2 + z.I_2) \| = \| f(u + iz.I_1) \| \leq$$

$\leq \| u + iz.I_1 \|$, sin más que tener en cuenta que en cualquier álgebra normada involutiva la norma de un elemento (aquí: $v_1 + i(v_2 + z.I_2)$) es mayor o igual que las de sus componentes real e imaginaria, y que $\|f\| = 1$ y $f(I_1) = I_2$ por hipótesis. Utilizando la propiedad estelar de la norma de U:

$$\| u + izI_1 \|^2 = \| (u - izI)(u + izI) \| = \| u^2 + z^2.I \| \leq$$

$\leq \|u\|^2 + z^2$. Enlazando las tres desigualdades obtenidas:

$a^2 + 2a.z \leq \|u\|^2$, $\forall z \in R$. Pero esto no es posible a no ser que se tenga $a = 0$. Como <u>a</u> es cualquier valor espectral de v_2 , concluimos $\sigma(v_2) = 0$. Basta entonces recordar que el radio espectral de un elemento simétrico, e incluso normal, de una C^*-álgebra es igual a su norma (((I,2,G))), para tener:

$$\| v_2 \| = \sup_{a \in \sigma(v_2)} |a| = 0 \implies v_2 = 0$$, como se deseaba.

Visto que f es simétrica, tomemos $u \geq 0$ de U; $u - (\|u\|/2)I_1$ es simétrico, por lo que $f(u - (\|u\|/2)I_1)$ lo es igualmente, y se tendrá:

$$f(u - (\|u\|/2)I_1) \geqslant - \|f(u - (\|u\|/2)I_1)\| \, I_2 \geqslant - \|u-(\|u\|/2)I_1\| I_2$$

(se ha tenido en cuenta que para cualquier elemento simétrico de una C^*-álgebra, $\underline{w}$ se verifica: $w \geqslant - \|w\| \, I$; y que $\|f\| = 1$, por hipótesis). Recordemos ahora que un elemento w de una C^*-álgebra es positivo si y sólo si se verifica

$\| w - (\|w\|/2)I \| = \|w\|/2$ ([11] y [12]). Esta igualdad será verificada por nuestro elemento u, con lo que:

$f(u - (\|u\|/2)I_1) \geqslant - (\|u\|/2)I_2$. Visto esto, resulta evidente:

$$f(u) \geqslant f((\|u\|/2)I_1) - (\|u\|/2)I_2 = (\|u\|/2)I_2 - (\|u\|/2)I_2 = 0 \ .$$

Es decir: $u \geqslant 0 \Longrightarrow f(u) \geqslant 0$. En particular: $f(u^*.u) \geqslant 0$, $\forall u \in U$, por ser $u^*.u$ siempre positivo; y f es positiva, con lo que queda terminada la demostración.

Nota.-La parte final de esta demostración la dábamos ya en [11], donde se demostraba nuestra proposición ((D)) bajo la hipótesis adicional de ser f simétrica. Se acaba de ver cómo esta hipótesis es superabundante, y es precisamente este hecho el que va a permitir caracterizar la simetría de los homomorfismos de C^*-álgebras.

2.- Homomorfismos.

Seguiremos en este apartado la nomenclatura de Sakai, [13]; a saber: si U y V son álgebras involutivas, un homomorfismo de U en V será una aplicación lineal de U en V compatible con el producto; mientras que reservaremos el nombre de $*$-homomorfismos u homomorfismos simétricos para aquellos que sean compatibles con la conjugación, es decir: aquellos homomorfismos G tales que $G(u^*) = G(u)^*$ para todo u de U.

Es conocido ([2], [11]) el siguiente resultado, del que doy aquí dos demostraciones independientes de la clásica:

E.- Sea U un álgebra de Banach involutiva con elemento unidad, V una C^*-álgebra y G un homomorfismo simétrico de U en V; se verifica: G es continuo y $\|G\| \leq 1$ ($\|G\| = 1$, salvo que sea $G = 0$).

Primera demostración:

G es una aplicación lineal positiva pues, para todo u de U, se verifica: $G(u^*.u) = G(u)^* G(u) \geqslant 0$; de manera que, sin más que recordar ((1,C)), se concluye su continuidad. Por otra parte, según ((1,C,$**$)), será $\|G(u)\| \leq \|G(I)\| \|u\|$ siempre que $G(u)$ sea normal; en particular, poniendo $u^*.u$ en lugar de u ($G(u^*.u)$ es positivo y por tanto normal), será:

$$\| G(u)\|^2 = \|G(u)^* G(u)\| = \|G(u^*.u)\| \leq \|G(I)\| \|u^*.u\| \leq$$

$\leq \|G(I)\| \, \|u\|^2$, $\forall u \in U$; desigualdad que demuestra que $\|G\|^2 \leq \|G(I)\|$; pero $G(I)$ es un idempotente de V simétrico por serlo G e I ; la propiedad estelar de la norma da: $\|G(I)\| = \|G(I)^2\| = \|G(I)\|^2$, es decir: $G(I)$ vale 1 o 0 . Pero $\|G\| = \|G(I)\|$ ($\|G\|^2 \leq \|G(I)\|$, se ha demostrado antes; y, evidentemente: $\|G(I)\| \leq \|G\| \, \|I\| = \|G\|$).

Segunda demostración:

Teniendo en cuenta que $G(I)$ es una proyección de V y que im(G) está incluida en la C^*-álgebra $G(I).V.G(I)$, cuyo elemento unidad es precisamente $G(I)$, podemos suponer sin restringir la generalidad que $G(I)$ es el elemento unidad de V, I'. En estas condiciones sea u un elemento simétrico de U de norma menor que uno; la serie

$$I - (1/2)u^2 + (1/2!)(1/2)((1/2) - 1)u^4 - \ldots +$$

$$(-1)^n (1/n!)(1/2)((1/2) - 1)\ldots((1/2) - n + 1)u^{2n} + \ldots$$

absolutamente convergente, define por suma un elemento simétrico u_1 permutable con u y tal que $u_1^2 = I - u^2$. Es de comprobación inmediata que, si llamamos $w = u + iu_1$, es $w^*.w = I$; igualdad que lleva a $G(w)^* G(w) = I'$; de donde (salvo $G = 0$) $\|G(w)\| = \|G(w^*)\| = 1$; y entonces

$\| G(u)\| = \| G((1/2)(w + w^*))\| \leq 1$. Según esto, si u es ahora un elemento cualquiera de U de norma menor que uno, $u^*.u$ es simétrico y también de norma menor que uno, con lo que aplicando la desigualdad que acabamos de encontrar, resultará:

$$\| G(u)\|^2 = \| G(u)^* G(u)\| = \| G(u^*.u)\| \leq 1 \quad , \forall u \in U \mid \|u\| < 1.$$

G está, pues, acotado sobre la bola abierta de centro cero y radio uno, lo que prueba su continuidad. Será además:

$\| G \| = \sup_{\|u\|<1} \| G(u)\| \leq 1$. El resto, como en la primera demostración.

Podemos ya enunciar el siguiente teorema que caracteriza los homomorfismos simétricos entre C^*-álgebras:

F.- Sean U y V C^*-álgebras, G un homomorfismo de U en V; las dos condiciones siguientes equivalen:

a.- G es simétrico.

b.- G es continuo y $\|G\| \leq 1$ ($\|G\| = 1$, salvo que sea $G = 0$).

Demostración:

((a)) $\Longrightarrow$ ((b)).- Resulta como particularización de ((E)).

((b)) $\Longrightarrow$ ((a)).- Descartemos el caso trivial $G = 0$ y supongamos en una primera aproximación que fuese $G(I_1) = I_2$ (I_1 e I_2: elementos unidad respectivos de U y V); por ser

$\|G\| \leq 1$, se tiene:

$$1 = \|I_2\| = \|G(I_1)\| \leq \|I_1\|\|G\| = \|G\| \leq 1 \Longrightarrow \|G\| = 1 \quad ,$$

y, trivialmente: $G(I_1) = \|G\|\, I_2$. Pero en estas condiciones el teorema ((D)) afirma que G es positivo y en consecuencia simétrico. En el caso general, pongamos $e = G(I_1)$; e es siempre un idempotente de V. Si e fuese simétrico (es decir, una proyección) el problema se reduciría al de partida sin más que considerar que im(G) estaría contenida en la C^*-álgebra e.V.e cuyo elemento unidad es e. En cualquier caso es cierto que $\|e\| = \|G(I_1)\| \leq$ $\leq \|G\|\,\|I_1\| = 1$; de manera que nuestro teorema ((F)) quedará terminado en cuanto demostremos:

G.- Sea e un idempotente de una C^*-álgebra; las dos condiciones siguientes equivalen:

c.- e es simétrico.

d.- $\|e\| \leq 1$ ($\|e\| = 1$, salvo que sea $e = 0$).

Demostración:

((c)) $\Longrightarrow$ ((d)).- Si e es simétrico, la propiedad estelar de la norma da:

$$\|e\| = \|e^2\| = \|e\|^2 \Longrightarrow \|e\| = 0 \text{ , o bien, } \|e\| = 1 \ .$$

((d)) $\Longrightarrow$ ((c)).- Descartado el caso trivial $e = 0$, será $\|e\| = \|e^2\| \leq \|e\|^2 \Longrightarrow \|e\| \geq 1$; pero como por hipótesis es $\|e\| \leq 1$, resulta $\|e\| = 1$. Visto esto, tengamos en cuenta ahora que por ser e un idempotente e^* también lo es, con lo que para todo número complejo z se verifica idénticamente:

$$z(1+z^2)(i(e-e^*)-zI) = (e^*-izI)(e^*e-(1+z^2))(e+izI) \quad .$$

Como los únicos valores espectrales posibles de un idempotente son 0 y 1, si z es un valor espectral no nulo de $i(e-e^*)$ (z será real por ser $i(e-e^*)$ simétrico), e^*-izI y $e+izI$ son elementos inversibles, y entonces nuestra identidad pone de manifiesto que $1+z^2$ es un valor espectral de e^*e ; se tendrá en consecuencia:

$1 < 1+z^2 \leq \|e^*e\| = \|e\|^2 = 1$, lo que es contradictorio. Así pues, el espectro de $i(e-e^*)$ se reduce a 0 , y en consecuencia::

$$\|e-e^*\| = \|i(e-e^*)\| = \sup_{z\in\sigma[i(e-e^*)]} |z| = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ $e=e^*$; y e es simétrico, como se quería demostrar.

Comentábamos antes cómo la proposición ((G)), que acabamos de demostrar, reducía el problema de los homomorfismos G de C^*-álgebras de norma uno al caso particular $G(I_1) = I_2$. Teniendo esto en cuenta podemos dar un nueva demostración de que la condición $\|G\| = 1$ implica la simetría de G (segunda parte del teorema ((F))). Nos basaremos en dos resultados conocidos:

H.- Para un elemento u de una C^*-álgebra, las dos condiciones siguientes equivalen:

e.- u es unitario.

f.- u es inversible y $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$.

Es evidente que ((e)) $\Longrightarrow$ ((f)) , en cuanto al recíproco cabe simplificar la demostración que dimos en [11], de la siguiente manera:

$$\|u\| = \|u^{-1}\| = 1 \Longrightarrow \begin{cases} u^*.u \leq \|u^*.u\| I = I \\ u^{*-1}.u^{-1} \leq \|u^{*-1}.u^{-1}\| I = I \end{cases} .$$

Multiplicando la segunda desigualdad por la izquierda por u^* y por la derecha por u : $I \leq u^*.u$, que junto con la primera da : $u^*.u = I$. Esto, junto con la hipótesis de que u es inversible, demuestra que u es unitario.

I.- Todo elemento simétrico u de un álgebra de Banach involutiva con unidad se puede escribir en la forma $u = K(w+w^*)$, donde K es un número positivo y w un elemento unitario (este hecho se vio en ((E, segunda demostración)) en la hipótesis adicional $\|u\| < 1$; el paso al caso general es trivial. Para C^*-álgebras se puede exigir además $K = \|u\|/2$ - [2] y [3], [13] - si bien esta especificación por el momento no nos interesa).

Sea ahora G nuestro homomorfismo de U en V (U y V: C^*-álgebras) con las condiciones $\|G\| = 1$ y $G(I_1) = I_2$; para cualquier elemento unitario w de U se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} G(w^*).G(w) = G(w^*w) = G(I_1) = I_2 \\ \\ G(w).G(w^*) = G(ww^*) = G(I_1) = I_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} G(w) \text{ inversible} \\ \\ G(w)^{-1} = G(w^*) \end{array}\right.$$

Por otra parte:

$$1 = \|I_2\| = \|G(I_1)\| = \|G(w^*).G(w)\| \leq \|G(w^*)\|\,\|G(w)\| \leq$$

$$\leq \|w^*\|\,\|w\| = 1 \qquad \|G(w^*)\|\,\|G(w)\| = 1$$; esta igualdad, junto con las desigualdades evidentes $\|G(w^*)\| \leq 1$, $\|G(w)\| \leq 1$, implica: $\|G(w)\| = 1$ y $\|G(w)^{-1}\| = \|G(w^*)\| = 1$. Aplicando ((H)) resulta que $G(w)$ es unitario y por tanto $G(w^*) = G(w)^{-1} = G(w)^*$. Finalmente, sea u un elemento simétrico cualquiera de U y $u = K(w+w^*)$ la descomposición que garantiza ((I)); se tendrá:

$G(u) = K(G(w) + G(w^*)) = K(G(w) + G(w)^*)$; pero el último miembro de esta igualdad es evidentemente simétrico, y esto garantiza la simetría de G, como se pretendía demostrar.

Corolarios al teorema ((F)).-

J.- Todo homomorfismo de una C^*-álgebra en una C^*-álgebra conmutativa es simétrico.

Este hecho, que generaliza el conocido resultado sobre la simetría de los caracteres de las C^*-álgebras, será consecuencia inmediata de ((F)) en cuanto demostremos el resultado más general:

K.- Todo homomorfismo de un álgebra de Banach con elemento unidad en una C^*-álgebra conmutativa es continuo y de norma menor o igual que uno.

Demostración:

Sean U y V nuestras respectivas álgebras en las condiciones del enunciado, I_1 e I_2 sus respectivos elementos unidad, y G el homomorfismo en cuestión. $G(I_1)$ es un idempotente de V normal como cualquier otro elemento de V por ser ésta conmutativa. Pero un idempotente normal es siempre simétrico (si es e el idempotente en cuestión, $\sigma(e) \subseteq \{0,1\}$ con lo que $\|e\| = \sup_{z\in\sigma(e)} |z| \leq 1$, y basta aplicar ((G)) ; esto permite, como de costumbre, reducirse al caso de ser $G(I_1) = I_2$. Con esta hipótesis se verifica sin dificultad que para cualquier elemento u de U se tiene:

$$\sigma(G(u)) \subseteq \sigma(u) \qquad \|G(u)\| = \sup_{z\in\sigma(G(u))} |z| \leq \sup_{z\in\sigma(u)} |z| \leq \|u\| ,$$

que demuestra totalmente nuestra afirmación.

Otra consecuencia importante del teorema ((F)) es que la norma y la conjugación de una C^*-álgebra se determinan mutuamente; en concreto:

L.- Sean $\{U, \| \|, *\}$ y $\{U, \| \|_1, *_1\}$ dos estructuras de C^*-álgebra sobre una misma álgebra abstracta U. Las dos condiciones siguientes equivalen:

g.- $\| \| = \| \|_1$ ($\|u\| = \|u\|_1$; $\forall u \in U$).

h.- $* = *_1$ ($u^* = u^{*_1}$; $\forall u \in U$).

Demostración:

((h)) $\Longrightarrow$ ((g)).- La igualdad $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \rho(u^*u)$, $\forall u \in U$ (ρ : función radio espectral, intrínseca a la estructura de álgebra abstracta de U); consecuencia de la propiedad estelar de la norma y de que el radio espectral de cualquier elemento normal - en este caso: u^*u - es igual a la norma de dicho elemento; pone de manifiesto que, conocida la conjugación, se conoce automáticamente la norma.

((g)) $\Longrightarrow$ ((h)).- Si $\|u\| = \|u\|_1$ para todo elemento u de U, la aplicación G: $u \longrightarrow u$ de $\{U, \| \|, *\}$ en $\{U, \| \|_1, *_1\}$ es evidentemente un homomorfismo isométrico y, en consecuencia, de norma uno; aplicando nuestro teorema ((F)), G será simétrico, con lo que:

$$u^* = G(u^*) = G(u)^{*_1} = u^{*_1} \quad ; \forall u \in U \quad , \text{ c. q. d.}$$

3.- Isomorfismos de C^*-álgebras.

Se debe a Rickart ("The uniqueness of norm problem in Banach algebras") un importante resultado según el cual toda norma que dote a una C^*álgebra de estructura de álgebra de Banach es equivalente a la norma estelar. Por razones de completitud en el exposición y, no siendo excesivamente complicada, doy a continuación la demostración (extraida de [13]):

Sean $\| \ \|$ y $\| \ \|_1$, respectivamente, las normas estelar y problema. Para todo elemento u de la C^*-álgebra (por ser $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \sup_{z \in \sigma(u^*u)} |z|$) :

$\|u\|^2 \leq \|u^*u\|_1 \leq \|u^*\|_1 \|u\|_1$. Esta desigualdad pone de manifiesto que si $\{u_n\}$ $\| \ \|_1$-converge a cero y $\{u_n^*\}$ $\| \ \|_1$-converge, entonces $\{u_n\}$ $\| \ \|$-converge a cero. Si es $u = \lim_{\| \ \|_1} u_n^*$, la misma desigualdad, aplicada a $u_n^* - u$, da:

$$\|u_n - u^*\|^2 = \|u_n^* - u\|^2 \leq \|u_n - u^*\|_1 . \|u_n^* - u\|_1 \longrightarrow 0$$

de la que concluimos que $\{u_n\}$ $\| \ \|$-converge a u^* ; pero $\{u_n\}$ $\| \ \|$-convergía a cero, luego $u^* = u = 0$. El teorema de la gráfica cerrada nos permite afirmar que la conjugación es $\| \ \|_1$-continua. Se tendrá pues: $\|u^*\|_1 \leq K\|u\|_1$, $\forall u$; y, enlazando con la desigualdad de partida: $\|u\| \leq \sqrt{K} \|u\|_1$, $\forall u$. La aplicación $u \longrightarrow u$ de $\{U, \| \|_1\}$ en $\{U, \| \|\}$ es, pues, continua; luego bicontinua (Teorema de los isomorfismos de Banach); de donde la existencia de un número positivo p , tal que:

$p\|u\|_1 \leq \|u\| \leq \sqrt{K}\|u\|_1$, $\forall u$; que prueba la equivalencia de ambas normas.

Este hecho, que acabamos de demostrar, tiene como consecuencias inmediatas:

M.- Todo isomorfismo de una C^*-álgebra sobre un álgebra de Banach es bicontinuo.

En efecto: sea U la C^*-álgebra y G el isomorfismo en cuestión. Basta comprobar que la aplicación $u \longrightarrow \|G(u)\|$ de U en R es una norma que dota a U de estructura de álgebra de Banach, y aplicar el resultado anterior.

N.- Todo homomorfismo de una C^*-álgebra <u>sobre</u> un álgebra de Banach sin radical es continuo.

Demostración:

Sean U,V y G, respectivamente, las álgebras y el homomorfismo en cuestión. Por ser G sobreyectivo, se comprueba sin dificultad que V posee elemento unidad (precisamente G(I), donde I es la unidad de U) y que, para cada ideal por la izquierda maximal M de V (que será necesariamente cerrado), $G^{-1}(M)$ es un ideal por la izquierda maximal de U (y en consecuencia también cerrado). Como V es sin radical, se verifica:

$\{0\} = \bigcap_{M \in X} M$ (X: familia de todos los ideales por la izquierda maximales de V); de donde:

$G^{-1}(0) = \bigcap_{M \in X} G^{-1}(M)$. Así pues, el ideal bilátero $G^{-1}(0)$ es cerrado. Basta pensar que G induce un isomorfismo de la C^*-álgebra $U/G^{-1}(0)$ sobre el álgebra de Banach V que, por ((M)), será continuo, para concluir la continuidad de G.

Caso particular de nuestro enunciado ((N)) es el conocido resultado ([13]; la demostración que hemos hecho no es más que el análisis de la que allí se hace) según el cual todo homomorfismo de una C^*-álgebra U sobre una C^*-álgebra V es continuo. En efecto: bastará recordar que toda C^*-álgebra es sin radical.

Hecha esta introducción, pasemos al estudio de los isomorfismos de C^*-álgebras (no se olvidará que, según se acaba de ver, éstos son automáticamente continuos). Para ambientar el estudio, tengamos en cuenta que, si U y V son C^*-álgebras, un isomorfismo de U sobre V no es más que un elemento privilegiado de $L(U,V)$ (conjunto de las aplicaciones lineales continuas de U en V). Pues bien, si G es un elemento cualquiera de $L(U,V)$, se define "naturalmente" G^* como la aplicación $u \longrightarrow (G(u^*))^*$ de U en V; es inmediato comprobar que G^* pertenece a L(U,V), y que:

a.- $\|G^*\| = \|G\|$; $(G^*)^* = G$; $\forall G \in L(U,V)$.

b.- $(G_1 + G_2)^* = G_1^* + G_2^*$; $G_1, G_2 \in L(U,V)$.

c.- $(z.G)^* = \bar{z}.G^*$; $z \in C$, $G \in L(U,V)$.

d.-$(G_2 . G_1)^* = G_2^* . G_1^*$; $G_1 \in L(U,V)$, $G_2 \in L(V,W)$

(U,V y W: C^*-álgebras cualesquiera). Y, como consecuencia de ((d)):

e.- Si G es una biyección lineal continua de U en V, G^* lo es igualmente y se verifica: $(G^*)^{-1} = (G^{-1})^*$.

También es fácil ver que el hecho de que un elemento G de L(U,V) verifique $G = G^*$ equivale a que G sea simétrico en el sentido que dimos a esta palabra en el apartado ((1)) (es decir: $G(u^*) = G(u)^*$, para cada u de U; o lo que es lo mismo: G transforma cada elemento simétrico de U en un elemento simétrico de V).

Desde el punto de vista que nos atañe conviene darse cuenta de que si G es un homomorfismo (resp.: isomorfismo) de U en V, G^* lo es igualmente. Convengamos en llamar A(U,V) al conjunto de los isomorfismos de U sobre V; si G pertenece a A(U,V), pongamos $G' = G^{*^{-1}} = G^{-1^*}$; G' es un elemento de A(V,U), y se verifica evidentemente:

f.- $(G')' = G$; $G \in A(U,V)$.

g.- $(G_2 . G_1)' = G_1' . G_2'$; $G_1 \in A(U,V)$, $G_2 \in A(V,W)$

(U,V y W: C^*-álgebras cualesquiera).

Un caso especialmente interesante del estudio de las aplicaciones $*$ y $'$ (de L(U,V) en L(U,V), y de A(U,V) en A(V,U), respectivamente) se presenta cuando es $U = V$ (escribiremos entonces $L(U,U) = L(U)$, como de costumbre; y por analogía: $A(U,U) = A(U)$: conjunto de los automorfismos de U). En este caso podríamos ser tentados a pensar que la aplicación $G \longrightarrow G^*$, del álgebra de Banach L(U) en sí misma, es una conjugación; pero esto no es correcto, pues la propiedad ((d)), según la cual es $(G_2 . G_1)^* = G_2^* . G_1^*$, $\forall (G_1, G_2) \in L(U) \times L(U)$, pone de manifiesto que no puede ser, como se desearía, en general $(G_2 . G_1)^* = G_1^* . G_2^*$, si se recuerda que L(U) no es conmutativa salvo que sea U unidimensional. No obstante y con las debidas precauciones utilizaremos para la operación $*$ el mismo lenguaje que se suele utilizar para las conjugaciones (elementos simétricos, unitarios, normales, etc.); además la operación $*$ conserva la típica propiedad (en virtud de ((b)), ((c)) y ((d))):

h.- $\sigma(G^*) = \overline{\sigma(G)}$, $\forall G \in L(U)$ ($\overline{\sigma(G)}$: imagen de $\sigma(G)$ por la aplicación $z \longrightarrow \overline{z}$ de C en C).

Sobre A(U) operan simultaneamente las operaciones $*$ y $'$, y las propiedades ((f)) y ((g)) ponen de manifiesto que ésta última actua de manera análoga a como lo haría la restricción a $\mathbf{A}(U)$ de una auténtica conjugación de $L(U)$ que dejase invariante $\mathbf{A}(U)$.

Existen unos curiosos resultados, por lo demás inmediatos, que enlazan la actuación de las operaciones $*$ y $\bullet$ sobre el conjunto $\mathbf{A}(U)$:

Sea U una C^*-álgebra, G un automorfismo de U; se verifica:

i.- G es $\bullet$-simétrico $\Longleftrightarrow$ G es $*$-unitario.

j.- G es $\bullet$-unitario $\Longleftrightarrow$ G es $*$-simétrico.

k.- G es $\bullet$-normal $\Longleftrightarrow$ G es $*$-normal (esta propiedad se basa en el hecho de que el conjunto de los elementos que conmutan con un elemento inversible de cualquier semigrupo con unidad coincide con el conjunto de elementos que conmutan con su inverso. Cuando ocurra cualquiera de las afirmaciones de esta propiedad, G se llamará, simplemente, normal).

Con estos preparativos, podemos pasar ya a demostrar el siguiente importante resultado:

O.- Sean U y V C^*-álgebras, y G un isomorfismo de U sobre V; $G^\bullet.G$ es claramente un automorfismo de U que, por ((f)) y ((g)), será además $\bullet$-simétrico. Se verifica:

1.- $\|G^\bullet.G\| = \|G\|^2$ (en consecuencia: $\|G^\bullet\| = \|G^{-1}\| =$

$= \|G\|$).

m.- El espectro de $G^{\bullet}.G$ está contenido en el conjunto de los números reales no negativos.

Demostración:

de ((1)).- Para cualquier elemento normal v de V, por tener v y $G^{-1}(v)$ el mismo espectro y ser $\|v\|$ igual al radio espectral de v (y en consecuencia también igual al radio espectral de $G^{-1}(v)$) se tendrá: $\|v\| \leq \|G^{-1}(v)\|$. Si u es ahora un elemento cualquiera de U, $G(u)^{*}.G(u)$ es un elemento normal de V; aplicando la anterior desigualdad, será:

$$\|G(u)\|^2 = \|G(u)^*.G(u)\| \leq \|G^{-1}(G(u)^*.G(u))\| = \|G^{-1}(G(u)^*).u\| \leq$$

$$\leq \|G^{-1}(G(u)^*)\|\,\|u\| = \|(G^{\bullet}.G(u))^*\|\,\|u\| = \|G^{\bullet}.G(u)\|\,\|u\| \leq$$

$\leq \|G^{\bullet}.G\|\,\|u\|^2$. Esta desigualdad muestra que se tiene:

$\|G\|^2 \leq \|G^{\bullet}.G\|$. Pero como evidentemente $\|G^{\bullet}.G\| \leq \|G^{\bullet}\|\|G\|$, resulta: $\|G\| \leq \|G^{\bullet}\|$. Por la propiedad ((f)), podemos concluir: $\|G^{\bullet}\| = \|G\|$, para todo isomorfismo G de C^*-álgebras (en consecuencia: $\|G^{-1}\| = \|G\|$, porser $\|G^{\bullet}\| = \|G^{-1}\|$ según la propiedad ((a)) y la definición de la operación $\bullet$). Se tiene entonces: $\|G\|^2 \leq \|G^{\bullet}.G\| \leq \|G^{\bullet}\|\|G\| = \|G\|^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \|G^{\bullet}.G\| = \|G\|^2$, c. q. d.

de ((m)).- Empezaremos demostrando un lema:

m_1.- Sean u y v elementos de una C^*-álgebra, el último de ellos normal; z un número complejo. Si z pertenece al espectro de u, entonces se verifica que $\|v - u\| \geq d(z, \sigma(v))$.

Para demostrarlo descartemos en primer lugar el caso $z \in \sigma(v)$ en el que la afirmación es trivial y razonemos por reducción al absurdo. Si fuese $\|v - u\| < d(z, \sigma(v))$, se tendría:

$$\|(v - z) - (u - z)\| = \|v - u\| < d(z, \sigma(v)) = \inf_{s \in \sigma(v)} |z - s| =$$

$$= \left(\sup_{s \in \sigma(v)} |(s - z)^{-1}| \right)^{-1} = \|(v - z)^{-1}\|^{-1}$$ (Se ha utilizado el hecho puramente algebraico según el cual el espectro de $(v - z)^{-1}$ es precisamente el conjunto de números de la forma $(s - z)^{-1}$ con s perteneciente al espectro de v, [5]; que $(v - z)^{-1}$ es normal, y que el radio espectral de un elemento normal es su norma).Según esto u-z pertenecería a la bola abierta de centro v-z y radio $\|(v - z)^{-1}\|^{-1}$; pero es conocido, de la teoría general de álgebras de Banach, que si un elemento w de una tal álgebra es inversible la bola abierta $B(w, \|w^{-1}\|^{-1})$ está formada por elementos inversibles. Así pues u-z sería inversible y z no pertenecería al espectro de u, contra la hipótesis.

Demostrado el lema $((m_1))$, pongámonos en el ambiente de nuestro teorema ((O)). Sea u un elemento cualquiera de U y z un número complejo, se verifica:

$$\|u\| \, \|G'.G(u) - zu\| \geq \|u^*. G'.G(u) - zu^*u\| =$$

$$= \|G'(G(u)^*.G(u) - zG^*(u^*u))\| \geq \|G\|^{-1}\|G(u)^*\cdot G(u) - zG^*(u^*u)\| .$$

(La primera desigualdad es inmediata, la igualdad siguiente es una identidad de no difícil comprobación a partir de las definiciones de las operaciones $*$ y $\cdot$, y la última desigualdad, consecuencia de ser $\|F(w)\| \geq \|F\|^{-1}\|w\|$ para cualquier elemento w de una C^*-álgebra y para cualquier isomorfismo F de esta C^*-álgebra en otra). Tengamos ahora en cuenta que $\|u\|^2 \in \sigma(u^*u)$, que $G^*(u^*u)$ tiene igual espectro que u^*u, con lo que $z\|u\|^2 \in \sigma(z.G^*(u^*u))$; y que $G(u)^*.G(u)$ es un elemento normal de V. Aplicando el lema $((m_1))$, será:

$$\|G(u)^*.G(u) - zG^*(u^*u)\| \geq d(z\|u\|^2, \sigma(G(u)^*.G(u))) .$$

Como $G(u)^*.G(u)$ es positivo, su espectro está contenido en R_+ (conjunto de los números reales no negativos), con lo que:

$$\|G(u)^*.G(u) - zG^*(u^*u)\| \geq d(z\|u\|^2, R_+) = \|u\|^2.d(z, R_+) .$$

(Se ha utilizado finalmente que la homotecia $s \longrightarrow \|u\|^2. s$ transforma z en $\|u\|^2.z$ y R_+ en R_+). Enlazando con la desigualdad de partida, previa división por $\|u\|$ (en el caso $u = 0$, la desigualdad que establecemos a continuación es trivial):

$$\| (G^{\bullet}.G - zI)(u)\| \geq \|G\|^{-1}.d(z, R_+).\|u\| \quad , \quad \forall (z,u) \in C\times U \, .$$

Esta desigualdad pone de manifiesto que si $z \notin R_+$ - en consecuencia $d(z, R_+) > 0$ - $G^{\bullet}.G - zI$ es un homeomorfismo lineal de U sobre su imagen, y que si además $z \notin \sigma(G^{\bullet}.G)$ (lo que ocurrirá si y sólo si la imagen de U mediante $G^{\bullet}.G - zI$ es todo U) se verifica:

$\| (G^{\bullet}.G - zI)^{-1}\| \leq \|G\| (d(z, R_+))^{-1}$. Esta desigualdad nos va a permitir demostrar que si un número z no pertenece a R_+ no puede ser punto frontera del espectro de $G^{\bullet}.G$. En efecto: sea z no perteneciente a R_+ y supongámoslo punto frontera del espectro de $G^{\bullet}.G$ (en particular pertenecerá a dicho espectro por ser éste cerrado); será $z = \lim z_n$ con $z_n \notin \sigma(G^{\bullet}.G)$. Por la continuidad de la función $s \longrightarrow \|G\|.(d(s, R_+))^{-1}$ de $C-R_+$ en R, podremos disponer de un entorno de z donde esta función se mantenga acotada, pero en este entorno estarán casi todos los términos de la sucesión $\{z_n\}$. Sin más que aplicar la última desigualdad resulta patente que la sucesión $\{ (G^{\bullet}.G - z_n I)^{-1} \}$ está acotada. Resulta así que la sucesión $\{ G^{\bullet}.G - z_n I \}$, que converge evidentemente a $G^{\bullet}.G - zI$, tiene la sucesión de sus inversos acotada; pero en esta situación se sabe, de la teoría general de álgebras de Banach y es de demostración elemental, que el límite de la sucesión en cuestión, $G^{\bullet}.G - zI$, es inversible, lo que es absurdo pues era $z \in \sigma(G'.G)$. Hemos demostrado así que la frontera de $\sigma(G'.G)$ está contenida en R_+ , lo que implica claramente que el propio espectro de $G'.G$ está contenido en R_+ (téngase en cuenta, por ejemplo, que $\sigma(G'.G)$ es acotado y que R_+ no corta el plano complejo), c. q. d.

El hecho demostrado en la parte ((1)) de nuestro teorema según el cual es $\|G^{-1}\| = \|G\|$ para todo isomorfismo G de C^*-álgebras, permite dar una demostración elemental de que el conjunto de los automorfismos de una C^*-álgebra es nórmicamente cerrado en el álgebra de los operadores lineales continuos. En efecto: sea U una C^*-álgebra y $G = \lim G_n$ con $G_n \in A(U)$, $G \in L(U)$; dado por demostrado, lo que es elemental, que G es un endomorfismo de U, todo se reduce a ver que G es inversible en el álgebra de Banach L(U); pero esto queda patente si se tiene en cuenta que la sucesión convergente $\{G_n\}$ es necesariamente acotada, que $\|G_n^{-1}\| = \|G_n\|$ y por tanto la sucesión $\{G_n^{-1}\}$ es igualmente acotada. G es entonces límite de una sucesión de elementos inversibles de L(U) tal que la sucesión de los inversos es acotada y en esta situación se sabe, lo recordábamos arriba, que G es inversible. Esta demostración simplifica notablemente la de Sakai ([13]).

Otras consecuencias de la parte ((1)) de nuestro teorema ((0)) son:

P.- El radio espectral de un automorfismo normal de una C^*-álgebra es igual a su norma.

Demostración:

Sea G el automorfismo en cuestión; por hipótesis G conmuta con G^* (e igualmente con $G^\bullet$); aplicando entonces convenientemente ((0,1)), se tiene:

$$\|G\|^2 = \|G^\bullet.G\| = \sqrt{\|(G^\bullet.G)^\bullet.G^\bullet.G\|} = \sqrt{\|G^\bullet.G.G^\bullet.G\|} =$$

$= \sqrt{\|(G^2)^\bullet.G^2\|} = \|G^2\|$. Y por recurrencia: $\|G^{2^n}\| = \|G\|^{2^n}$,

con lo que: $\rho(G) = \lim \|G^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|G\|$, c. q. d.

Q.- Sea G un automorfismo de una C^*-álgebra; las dos afirmaciones siguientes equivalen:

n.- G es un $*$-automorfismo ($\Longleftrightarrow$ G es $\bullet$-unitario).

o.- G es normal y su espectro está contenido en la circunferencia $\{ z \in C \quad |z| = 1 \}$.

Demostración:

((n)) $\Longrightarrow$ ((o)).- Si G es un $*$-automorfismo es por definición $G^* = G$ con lo que evidentemente G es normal. Según ((2,F)) será $\|G\| = 1$ y por ((0,1)) $\|G^{-1}\| = \|G\| = 1$, con lo que si z es un valor espectral de G, será $z^{-1} \in \sigma(G^{-1})$ y $|z| \leq 1$, $|z|^{-1} \leq 1$; es decir: $|z| = 1$, c. q. d.

((o)) $\Longrightarrow$ ((n)).- Si G es normal y sus valores espectrales de módulo uno, aplicando ((P)) será $\|G\| = 1$, lo que, según el teorema ((2,F)), nos permite afirmar que G es $*$-simétrico, es decir, un $*$-automorfismo (que G $*$-automorfismo $\Longleftrightarrow$ G $\bullet$-unitario no es más que la propiedad ((j))).

Una primera consecuencia de la parte ((m)) de nuestro teorema ((O)) es:

R.- El espectro de un automorfismo $\bullet$-simétrico ($\Longleftrightarrow$ $*$-unitario) de una C^*-álgebra está contenido en el conjunto de los números reales.

Demostración:

Sea G el automorfismo en cuestión; por hipótesis es $G^\bullet = G$, con lo que $G^2 = G^\bullet.G$ tiene, en virtud de ((O,m)), su espectro formado por números reales no negativos. Pero se sabe que si z pertenece a $\sigma(G)$, z^2 es un valor espectral de G^2 ; z^2 es pues real no negativo, lo que obliga a que z sea real, c. q. d.

Dejándonos llevar de la semenjanza de la operación $\bullet$, en el conjunto de los automorfismos de una C^*-álgebra, con la restricción de una conjugación estelar, convendremos en llamar <u>$\bullet$-positivo</u> a un automorfismo de una C^*-álgebra cuando sea $\bullet$-simétrico y su espectro esté contenido en R_+. Con esta definición ((O,m)) se podría enunciar:

Para todo isomorfismo G de C^*-álgebras, $G^\bullet.G$ es un automorfismo $\bullet$-positivo de la primera.

Veíamos, en la demostración de ((R)), cómo el cuadrado de un automorfismo $\bullet$-simétrico es $\bullet$-positivo. Podríamos preguntarnos si es cierto el recíproco, es decir: si todo automorfismo $\bullet$-positivo es el cuadrado de un automorfismo $\bullet$-simétrico. La contestación va a ser afirmativa, inclusive va a ser posible demostrar la existencia y unicidad de un automorfismo $\bullet$-positivo "raiz cuadrada" del automorfismo en cuestión. Para esto nos es preciso recordar algunas cuestiones relativas a la teoría general de operadores lineales continuos en un Banach y un resultado específico de la teoría de C^*-álgebras. A saber:

p.- Sea X un espacio de Banach, Δ el conjunto de los números complejos z tales que $-\pi < \mathrm{im}(z) < \pi$, Δ' el conjunto de los números complejos que no son reales menores o iguales que cero. Entonces la aplicación $G \longrightarrow e^G$ es un homeomorfismo del conjunto de los elementos de $L(X)$ cuyo espectro está contenido en Δ sobre el conjunto de los elementos de $L(X)$ cuyo espectro está contenido en Δ'. El homeomorfismo recíproco (que se acostumbra a llamar logaritmo neperiano) se puede conocer por la fórmula:

$$\ln(G') = (1/2\pi i) \int_\gamma \ln(z)(zI - G')^{-1} dz \qquad , \text{ siendo } \gamma \text{ cualquier}$$

curva rectificable cerrada simple dejando en su interior el espectro de G' y contenida en Δ' ; $\ln(z)$ designa la determinación principal del logaritmo complejo. Este resultado es consecuencia de la teoría: "Functions of an operator" ([14]-Tomo I, pág. 566 y sig.).

q.- Sea X un álgebra de Banach, d una derivación continua de X. Entonces e^d es un automorfismo de X. Es de demostración elemental.

r.- Sea X un álgebra de Banach, G un automorfismo continuo de X tal que $\sigma(G)$ está contenido en el conjunto $\{ z \in C \mid |\arg(z)| < 2\pi/3 \}$. Entonces $\ln(G)$ (en el sentido de ((p))) es una derivación de X ([3] ; [13], para el caso particular: $\sigma(G) \subseteq \{ z \in C \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \}$).

s.- Toda derivación de una C^*-álgebra es continua (iguales referencias que en ((r)); este resultado ha sido generalizado por Johnson y Sinclair al caso de álgebras de Banach sin radical).

Es elemental comprobar que si d es una derivación de una C^*-álgebra, d^* lo es igualmente, y que en consecuencia toda derivación de una C^*-álgebra se escribe de manera única en la forma $d = d_1 + id_2$ con d_1 y d_2 derivaciones $*$-simétricas.

Podemos ya enunciar un primer lema:

S.- Sea U una C^*-álgebra; la aplicación $d \longrightarrow e^d$ es un homeomorfismo del conjunto de las derivaciones $*$-antisimétricas de U ($d^* = -d$) sobre el conjunto de los automorfismos $*$-positivos de U.

Para la demostración necesitamos un sublema:

S_1.- El espectro de una derivación $*$-simétrica de una C^*-álgebra está contenido en el conjunto de los números imaginarios puros.

En efecto: sea d una derivación cualquiera de nuestra C^*-álgebra U; la igualdad

$\left\| (e^d)^* - \sum_{k=0}^{n} (1/k!)(d^*)^k \right\| = \left\| e^d - \sum_{k=0}^{n} (1/k!).d^k \right\|$, consecuencia de las propiedades de la conjugación en L(U) , pone de manifiesto que es $(e^d)^* = e^{d^*}$ (igualdad esta que sería incluso cierta para cualquier elemento de L(U)); de forma que si d es $*$-simétrica e^d es un automorfismo (por ((q)) y ((s))) $*$-simétrico de U, con lo que según ((Q)) su espectro está formado por números de módulo uno. Entonces si $z \in \sigma(d)$ se sabe - "spectral maping theorem" - que $e^z \in \sigma(e^d)$ y por tanto:

$e^{Re(z)} = |e^z| = 1 \Longrightarrow Re(z) = 0$, y z es imaginario puro, c. q. d.

Podemos pasar ya a la demostración de ((S)): si d es ahora una derivación antisimétrica de nuestra C^*-álgebra U, $-id$ es una derivación simétrica con lo que, según $((S_1))$, $\sigma(-id)$ es un conjunto de números imaginarios y entonces $\sigma(d) = i.\sigma(-id)$ es un conjunto de números reales (en consecuencia trivialmente contenido en $\Delta = \{ z \in C \mid |im(z)| < \pi \}$). Consideremos ahora el automorfismo e^d ; por ser d antisimétrica se verifica:

$(e^d)^* = e^{d^*} = e^{-d} = (e^d)^{-1}$. es decir, e^d es $*$-unitario, lo que equivale según se vio en ((i)) a que e^d es $\bullet$-simétrico; por otra parte todo número de $\sigma(e^d)$ es de la forma e^z con $z \in \sigma(d)$ y por tanto $\sigma(e^d)$ está contenido en el conjunto de los reales no negativos sin más que recordar que $\sigma(d)$ estaba incluido en R. Así pues e^d es $\bullet$-positivo. Resulta entonces que el homeomorfismo del que hablábamos en ((p)) transforma cada derivación antisimétrica en un automorfismo $\bullet$-positivo. Nuestra afirmación ((S)) quedará patente en cuanto demostremos que todo automorfismo $\bullet$-positivo G es de la forma $G = e^d$ con d derivación antisimétrica.

Para ver esto, sea G el automorfismo $\bullet$-positivo en cuestión; el espectro de G ha de estar contenido en el intervalo $[\|G\|^{-1}, \|G\|]$ de R (téngase en cuenta que el espectro de un elemento inversible u de un álgebra de Banach está contenido en la corona circular $\{ z \mid \|u^{-1}\|^{-1} \leq |z| \leq \|u\| \}$, que $\|G^{-1}\| = \|G\|$ y que, por hipótesis, los valores espectrales de G son positivos).

Estamos entonces en un caso particular de ((r)) y en consecuencia $\ln(G)$ es una derivación (llamémosla d); nos queda únicamente por ver que d es antisimétrica. Se tiene:

$$d = (1/2\pi i)\int_\gamma \ln(z)(zI - G)^{-1}dz$$, donde γ puede ser, entre otras, una circunferencia con centro en el eje real y pasando por los puntos reales a^{-1} y a ($a > \|G\|$). Por ser la conjugación en $L(U)$ una isometría semilineal, se verifica:

$$d^* = -(1/2\pi i)\int_\gamma \ln(\bar{z})(\bar{z}I - G^*)^{-1}d\bar{z}$$ (se ha tenido en cuenta que es $\overline{\ln(z)} = \ln(\bar{z})$ para la determinación principal del logaritmo complejo y la propiedad ((e))). Por hipótesis es G $*$-simétrico y por tanto $G^* = G^{-1}$; teniendo esto en cuenta y haciendo el cambio de variable $\bar{z} = 1/w$, resulta:

$$d^* = (G/2\pi i)\int_{\gamma'} (\ln(w)/w)(wI - G)^{-1}dw$$, donde γ' representa la imagen de γ por la inversión $z \longrightarrow 1/\bar{z}$. Si γ se elige como se ha dicho arriba, γ' es la propia γ pero recorrida en sentido contrario. Por tanto:

$$d^* = -G.(1/2\pi i)\int_\gamma (\ln(z)/z)(zI - G)^{-1}dz$$. Ahora bien, se sabe, del cálculo funcional holomorfo en las álgebras de Banach, que la aplicación que a cada función f, analítica en un dominio del plano complejo que contiene a $\sigma(G)$, asocia el elemento del álgebra

$(1/2\pi i)\int_\gamma f(z)(zI - G)^{-1}dz$ es compatible con la multiplicación, y que a la función identidad asocia precisamente el elemento G. Entonces, como es $z.(\ln(z)/z) = \ln(z)$, será:

$$G.(1/2\pi i)\int_\gamma (\ln(z)/z)(zI - G)^{-1}dz =$$

$$= \left((1/2\pi i)\int_\gamma z(zI - G)^{-1}dz \right).\left((1/2\pi i)\int_\gamma (\ln(z)/z)(zI - G)^{-1}dz \right) =$$

$$= (1/2\pi i)\int_\gamma \ln(z)(zI - G)^{-1}dz = \ln(G) = d \quad .$$

Es entonces: $d^* = -d$, y d es antisimétrica, c. q. d.

T.- Sea U una C^*-álgebra, G un automorfismo $*$-positivo de U; existe un único automorfismo $*$-positivo de U F tal que $F^2 = G$ (F se escribirá $G^{\frac{1}{2}}$ o $\sqrt{G}$).

Demostración:

Según ((S)), G se escribe en la forma $G = e^d$, donde d es una derivación antisimétrica; (1/2).d es también una derivación antisimétrica, de manera que si ponemos $F = e^{\frac{1}{2}d}$, utilizando otra vez ((S)), F es un automorfismo $*$-positivo y evidentemente $F^2 = G$. Sea ahora F' otro automorfismo $*$-positivo tal que $F'^2 = G$; si es $F' = e^{d'}$ la escritura que garantiza ((S)) con d' derivación antisimétrica, e^d y $e^{2d'}$ son dos expresiones de G como potencia de base e y exponente derivación antisimétrica. Se tiene entonces $d = 2d'$ y $F' = e^{d'} = e^{\frac{1}{2}d} =$ $= F$, c. q. d.

Consecuencias:

U.- Sean U y V C^*-álgebras, G un isomorfismo de U sobre V. Entonces G se escribe de manera única en la forma $G = G_2 . G_1$, donde G_1 es un automorfismo •-positivo de U y G_2 un $*$-isomorfismo de U sobre V (en consecuencia: si dos C^*-álgebras son isomorfas, son $*$-isomorfas).

Demostración:

Según ((O,m)), $G^{\bullet}.G$ es un automorfismo •-positivo de U; si existe una descomposición $G = G_2 . G_1$ en las condiciones del enunciado (será en particular $G_2^* = G_2 \Longrightarrow G_2^{\bullet} = G_2^{-1}$) se tendría:

$G^{\bullet}.G = G_1^{\bullet}.G_2^{\bullet}.G_2.G_1 = G_1^{\bullet}.G_2^{-1}.G_2.G_1 = G_1^2$, con lo que G_1 no podría ser otro que $\sqrt{G^{\bullet}.G}$ (en el sentido de ((T))) y entonces obligadamente $G_2 = G . G_1^{-1}$; esto prueba la unicidad de la descomposición, caso de existir, y nos pone en la pista para demostrar la existencia. En efecto: pongamos $G_1 = \sqrt{G^{\bullet}G}$ y $G_2 = G . G_1^{-1}$; G_1 es claramente un automorfismo •-positivo de U y la igualdad $G = G_2 . G_1$ es trivial; todo se reduce a comprobar que G_2 es un $*$-isomorfismo, lo que se pone de manifiesto a continuación (téngase en cuenta que G_1^{-1} es •-simétrico por serlo G_1):

$$\left.\begin{array}{l} G_2^{\bullet}.G_2 = G_1^{-1}.G^{\bullet}.G \;.G_1^{-1} = G_1^{-1}.G_1^{2}.G_1^{-1} = I_U \\ G_2.G_2^{\bullet} = G \;.G_1^{-1}.G_1^{-1}.G^{\bullet} = G \;.(G_1^{2})^{-1}.G^{\bullet} = G \;.(G^{\bullet}.G)^{-1}.G^{\bullet} = I_V \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow G_2^{\bullet} = G_2^{-1} \Longrightarrow G_2^{*} = G_2 \qquad , \text{ c. q. d.}$$

El resultado que acabamos de demostrar es parcialmente conocido por Sakai ([13]) quien, a su vez, cita a Gardner ("On isomorphisms of C^*-álgebras"), quedando allí sin suficiente caracterización el factor G_1 del que sólamente se afirma ser de la forma e^d con d derivación de U (Obsérvese que nuestro enunciado añade, sin más que recordar ((S)), que G es de la forma e^d para una y una sola derivación antisimétrica d) lo que no garantiza la unicidad de la descomposición. La demostración se hace allí a base de "representar" en convenientes espacios de Hilbert las C^*-álgebras en cuestión, método este que considero menos elegante que el nuestro que se inspira únicamente en la teoría general de álgebras de Banach.

Una redacción especialmente bella de nuestro teorema ((U)) corresponde al caso en que las dos C^*-álgebras coinciden; se sabe entonces que un $*$-automorfismo no es otra cosa que un automorfismo $\bullet$-unitario (recuérdese ((j))); queda entonces:

U .- Sea U una C^*-álgebra; todo automorfismo G de U se escribe de manera única en la forma $G = G_2.G_1$, donde G_1 es un automorfismo $\bullet$-positivo y G_2 un automorfismo $\bullet$-unitario.

Los resultados ((O)) (en el caso $U = V$), ((P)), ((Q)), ((R)), ((T)) y ((U)) abogan claramente en favor de la siguiente

<u>Conjetura</u>.- Sea U una C^*-álgebra. Existe en L(U) (o al menos en la subálgebra cerrada de L(U) engendrada por $\mathbf{A}(U)$) una conjugación (•) que con la norma usual (o, en el peor de los casos, con una norma equivalente) dota a esta álgebra de estructura de C^*-álgebra, y tal que si G es un automorfismo de U se verifica: $G^\bullet = G^{*^{-1}}$ ($*$: la pseudoconjugación "natural" de L(U)).

Se verá más adelante cómo esta conjetura se puede justificar en el caso de C^*-álgebras de dimensión finita.

Veremos a continuación cómo, si se acepta nuestra conjetura, aunque sólo sea en su versión más débil, se puede dar una satisfactoria explicación al hecho, aparentemente paradójico, demostrado en ((S_1)) según el cual el espectro de una derivación $*$-simétrica de una C^*-álgebra está contenido en el conjunto de los números imaginarios puros.

<u>4.- Derivaciones.</u>

Si U es un álgebra de Banach, se sabe que el conjunto de las derivaciones continuas de U es una variedad lineal cerrada de L(U); en el caso concreto de ser U una C^*-álgebra, se sabe además que toda derivación de U es continua y que el conjunto de las derivaciones de U es invariante por conjugación, lo que trae como consecuencia que toda derivación de U sea combinación lineal de derivaciones $*$-simétricas o, lo que es equivalente, de derivaciones $*$-antisimétricas (téngase en cuenta que: d simétrica $\Longleftrightarrow$ id antisimétrica). Podemos entonces demostrar:

V.- Sea U una C^*-álgebra, $A(U)$ el conjunto de los automorfismos de U; toda derivación de U pertenece a la subálgebra cerrada de $L(U)$ engendrada por $A(U)$.

Demostración:

A la vista de lo que acabamos de decir arriba, bastará demostrar nuestro enunciado en el caso en que la derivación en cuestión es $*$-antisimétrica. Recordemos entonces (((3,p)) y ((3,S))) que el homeomorfismo $G \longrightarrow e^G$ (del conjunto de los elementos de $L(U)$ cuyo espectro está contenido en $\{z \in C \mid -\pi < im(z) < \pi\}$ sobre el conjunto de los elementos de $L(U)$ cuyo espectro está contenido en $\{z \in C \mid -\pi < arg(z) < \pi\}$) transforma el conjunto de las derivaciones $*$-antisimétricas precisamente en el conjunto de los automorfismos $*$-positivos. Según esto, si es d nuestra derivación $*$-antisimétrica, existe un único automorfismo $*$-positivo G (precisamente e^d) tal que:

$d = (1/2\pi i)\int_\gamma \ln(z)(zI - G)^{-1}dz$ (γ con las condiciones de costumbre). Sin más que tener en cuenta el concepto de integral, se desprende que d pertenece a la variedad lineal cerrada engendrada por el conjunto $\{(zI - G)^{-1} \mid z \in \gamma\}$. Nuestra demostración estará terminada en cuanto veamos que cada elemento de este conjunto a su vez pertenece a la subálgebra cerrada de L(U) engendrada por $\{G, I\}$ y entonces con más razón a la subálgebra cerrada engendrada por A(U).

Llamemos V a la subálgebra cerrada de L(U) engendrada por $\{G, I\}$; desde luego el espectro de G en V contiene al espectro de G en L(U), y se sabe ([5]-Tomo II) que la frontera de $\sigma_V(G)$ está contenida en $\sigma(G)$; como $\sigma(G)$ está contenido en R_+ (definición de automorfismo $\bullet$-positivo), resulta que la frontera de $\sigma_V(G)$ está contenida en R_+, lo que - teniendo en cuenta que $\sigma_V(G)$ es acotado - nos lleva a que el propio $\sigma_V(G)$ está contenido en R_+ con lo que todos sus puntos son puntos frontera y en consecuencia $\sigma_V(G) = \sigma(G)$. Según esto si $z \in \gamma$ (desde luego $z \notin \sigma(G)$), $z \notin \sigma_V(G)$, es decir: $zI - G$ es inversible en V, y en consecuencia ($(zI - G)^{-1}$ existía por supuesto en L(U)) $(zI - G)^{-1}$ pertenece a V, con lo que la demostración está terminada.

Si se acepta la conjetura propuesta al final del apartado ((3)) en su versión más débil, a saber: la aplicación $G \longrightarrow G^{*^{-1}}$ de A(U) en sí mismo no es más que la restricción a A(U) de una conjugación estelar ($\bullet$) de la subálgebra cerrada de L(U) engendrada por $A(U)$, siendo la norma estelar equivalente a la restricción de la norma usual en $L(U)$; nuestra proposición ((V)) nos tienta a investigar qué sentido tendría $d^{\bullet}$ (d; derivación de U). Si d es $*$-antisimétrica, la expresión integral de d utilizada anteriormente nos permitiría escribir, sin más que tener en cuenta que la operación $\bullet$ sería un homeomorfismo semilineal y que $G^{\bullet}=G$:

$d^{\bullet} = -(1/2\pi i)\int_{\gamma} \ln(\bar{z})(\bar{z}I - G)^{-1}d\bar{z}$; si se elige γ (lo que es posible) de manera que sea $\bar{\gamma} = -\gamma$, haciendo el cambio de variable $\bar{z} = w$, se obtiene:

$d^{\bullet} = (1/2\pi i)\int_{\gamma} \ln(w)(wI - G)^{-1}dw = d$. Resulta así que una derivación $*$-antisimétrica sería $\bullet$-simétrica, lo que estaría de acuerdo con el hecho conocido ($((3,S_1))$) de que el espectro de una derivación $*$-antisimétrica está contenido en R. Una consecuencia elemental sería:

d $*$-simétrica $\Longrightarrow$ d $\bullet$-antisimétrica (d: derivación de U); y entonces si d es una derivación cualquiera, tomando la descomposición canónica $d = d_1 + id_2$ con d_1 y d_2 derivaciones $*$-simétricas, se tendría:

$$d^{\bullet} = (d_1 + id_2)^{\bullet} = d_1^{\bullet} - id_2^{\bullet} = -d_1 + id_2 = -(d_1 - id_2) = -d^{*} ,$$

resultando así que el conjunto de las derivaciones de U sería invariante por la conjugación y que $d^{\bullet} = -d^{*}$ para toda derivación d . Consecuencia de esta igualdad sería que para una derivación la $\bullet$-normalidad y la $*$-normalidad serían conceptos equivalentes (obsérvese que el concepto de $*$-normalidad no está sujeto a conjetura).

El siguiente resultado abunda en el intento de dar consistencia a la conjetura propuesta al final de ((3)).

W.- Sea U una C*-álgebra, d una derivación $*$-normal de U ($d.d^* = d^*.d$), $\rho(d)$ el radio espectral de d . Se verifica:

$$\rho(d) \leq \|d\| \leq e.\rho(d) .$$

Demostración:

La desigualdad $\rho(d) \leq \|d\|$ es evidente. Tampoco es difícil comprobar que, para cualquier derivación normal d de U, e^{d} es un automorfismo normal y en consecuencia (((3,P))): $\rho(e^{d}) = \|e^{d}\|$. Según esto, sea d la derivación normal en cuestión y z un número complejo, z.d es entonces también una derivación normal y en consecuencia $\|e^{zd}\| = \rho(e^{zd})$; pero $\rho(e^{zd})$ es fácilmente acotable pues se sabe que los valores espectrales de e^{zd} son los números de la forma e^{zs} , con s perteneciente a $\sigma(d)$, para los que se verifica:

$$|e^{zs}| \leq e^{|zs|} = e^{|z||s|} \leq e^{|z|\rho(d)}$$, de donde:

$$\|e^{zd}\| = \rho(e^{zd}) = \sup_{s \in \sigma(d)} |e^{zs}| \leq e^{|z|\rho(d)} .$$

Resulta así que la función entera

$$z \longrightarrow e^{zd} = I + zd + (z^2/2!)d^2 + \ldots + (z^n/n!)d^n + \ldots$$

sobre cada circunferencia $|z| = r$ está mayorada en norma por el número $e^{r\rho(d)}$; aplicando la desigualdad de Cauchy correspondiente al coeficiente de índice uno (d) ([5]-Tomo I), resulta: $\|d\| \leq (e^{r\rho(d)})/r$, cualquiera que sea el número positivo r. Si fuese $\rho(d) = 0$, tendríamos:

$$(\|d\| \leq r^{-1}, \ \forall r > 0) \Longrightarrow \|d\| = 0 \Longrightarrow d = 0 \quad ,$$

y la afirmación que pretendemos demostrar se verifica. En caso contrario, tomando $r = \rho(d)^{-1}$, queda: $\|d\| \leq e.\rho(d)$; que es lo que nos faltaba por demostrar.

Obsérvese que la proposición ((W)), que acabamos de demostrar, es análoga al conocido hecho de que la norma de un elemento normal de una C*-álgebra es igual a su radio espectral si se recuerda que en nuestra conjetura admitiamos que la eventual norma estelar en el álgebra cerrada engendrada por A(U) podría muy bien no ser la usual pero sí equivalente a ella. En todo caso, una consecuencia particular de ((W)) es:

El espectro de una derivación normal de una C*-álgebra no se reduce a cero salvo que se trate de la derivación nula.

Se puede aprovechar este resultado para dar una nueva demostración del hecho conocido ([3] , [13]) de que toda derivación de una C^*-álgebra conmutativa es nula. En efecto: sea d la derivación en cuestión; en vista de que toda derivación es combinación lineal de derivaciones $*$-antisimétricas, podemos suponer ya d $*$-antisimétrica. Entonces e^{d} es un automorfismo de nuestra C^*-álgebra conmutativa necesariamente simétrico en virtud de ((2,J)) y en consecuencia (((3,Q))) su espectro está formado por números de módulo uno. Sea z un valor espectral de d , z es real por $((3,S_1))$, y se sabe que e^z es un valor espectral de e^{d} ; luego $e^z = |e^z| = 1 \Longrightarrow z = 0$. Resulta así que el espectro de d se reduce a cero y como d es evidentemente normal concluimos $\|d\| = 0$, como se quería demostrar.

5.- Caracteres.

Si U es un álgebra sobre C con elemento unidad (I) y u' es un carácter de U (un homomorfismo no nulo de U en C) es evidente que $\langle u', I \rangle = 1$ y que u' no se anula sobre los elementos inversibles de U. Trataremos de ver a continuación que, en el caso de ser U una C^*-álgebra, todo funcional lineal sobre U que cumpla estas dos propiedades es necesariamente un carácter.

Empecemos suponiendo que U es un álgebra de Banach con unidad y que u' es un funcional lineal sobre U que no se anula sobre los elementos inversibles (en particular, será $\langle u', I\rangle \neq o$); cualquiera que sea el elemento u de U, u' se anula sobre $u - (\langle u', u\rangle / \langle u', I\rangle).I$ con lo que este elemento no podrá ser inversible o, lo que es lo mismo, $(\langle u', u\rangle / \langle u', I\rangle)$ es un valor espectral de u y, en consecuencia:

$$|\langle u', u\rangle / \langle u', I\rangle| \leq \|u\| \Longrightarrow |\langle u', u\rangle| \leq |\langle u', I\rangle| \|u\| ;$$

que demuestra que un tal funcional es necesariamente continuo y que además $\|u'\| \leq |\langle u', I\rangle|$ (será en realidad: $\|u'\| = |\langle u', I\rangle|$, puesto que evidentemente: $|\langle u', I\rangle| \leq \|u'\|\|I\| = \|u'\|$).

Por otra parte, si es v un elemento inversible de U, la aplicación $u \longrightarrow \langle u', u.v\rangle$ (que se designa por $v.u'$) es igualmente un funcional lineal sobre U que no se anula sobre los elementos inversibles, es decir, $v.u'$ es del mismo tipo que u' , con lo que será:

$$|\langle u', u.v\rangle| \leq |\langle u', v\rangle| \|u\| \quad , \quad \forall u \in U \quad ;$$

y en particular, poniendo $u = v^{-1}$:

$$\|v^{-1}\|^{-1} |\langle u', I\rangle| \leq |\langle u', v\rangle| \leq |\langle u', I\rangle| \|v\| \quad ;$$

para cualquier elemento inversible v de U. Con estos resultados podemos empezar ya el razonamiento específico de nuestro caso.

Sea U ahora una C^*-álgebra y u' un funcional lineal sobre U tal que $\langle u', I\rangle = 1$ y que no se anula sobre los elementos inversibles de U; según se ha visto u' es necesariamente continuo y $\|u'\| = \langle u', I\rangle$. Pero este hecho es característico de los funcionales positivos ([2] y [3]; [11] y [12]; [13]), luego u' es positivo y con más razón simétrico. Si v es ahora un elemento unitario de U, como es $\|v\| = \|v^{-1}\| = 1$, la última desigualdad demostrada pone de manifiesto que $|\langle u',v\rangle| = 1$, con lo que el funcional lineal $\overline{\langle u',v\rangle}.v.u'$ está, al igual que u' , en la situación de no anularse sobre los elementos inversibles y dar 1 sobre la unidad de U, con lo que igualmente será simétrico. Aceptemos, por el momento, el siguiente lema:

X.- Sea W un álgebra normada involutiva, w' un funcional lineal positivo continuo sobre W, w un elemento de W tal que el funcional lineal $w.w'$ sea simétrico; en estas condiciones, se verifica: $-\|w\|.w' \leq w.w' \leq \|w\|.w'$ ($w'_1 \leq w'_2 \Longleftrightarrow w'_2 - w'_1$ positivo).

Aplicándolo a nuestro caso, donde u' es el funcional positivo en cuestión y $\overline{\langle u',v\rangle}.v$ el elemento del álgebra que multiplicado por u' da funcional simétrico, obtenemos:

$\overline{\langle u',v\rangle}.v.u' \leq \|\overline{\langle u',v\rangle}.v\|.u' = u'$, es decir:

$u' - \overline{\langle u', v\rangle}.v.u'$ es un funcional positivo; su norma será en consecuencia igual al valor sobre I:

$$\| u' - \overline{\langle u', v\rangle}.v.u' \| = \langle u', I\rangle - \overline{\langle u', v\rangle}.\langle v.u', I\rangle =$$

$$= 1 - |\langle u', v\rangle|^2 = 1 - 1 = 0 \Longrightarrow u' = \overline{\langle u', v\rangle}.v.u'$$

$$\Longrightarrow \langle u', v\rangle.u' = v.u' \quad .$$

Recordemos que v era un elemento unitario cualquiera de U; la última igualdad encontrada se escribe entonces:

$$\langle u', u.v\rangle = \langle u', u\rangle.\langle u', v\rangle$$, para todo u de U y para todo v unitario. Si recordamos ahora (((2,I))) que en un álgebra de Banach involutiva con unidad todo elemento es combinación lineal de elementos unitarios, la última igualdad se puede fácilmente extender al caso v arbitrario en U y entonces u' resulta ser un carácter.

Hemos obtenido así (a falta de justificar el lema ((X))):

Y.- Sea U una C^*-álgebra, u' un funcional lineal sobre U. Las tres afirmaciones siguientes equivalen:

a.- u' es un carácter.

b.- u' no se anula sobre los elementos inversibles de U y $\langle u', I\rangle = 1$.

c.- Para cada u de U, $\langle u', u\rangle$ es un valor espectral de u.

(La equivalencia $((b)) \Longleftrightarrow ((c))$ es de carácter algebraico, por lo demás inmediata).

Demostración del lema ((X)):

Por ser w' y $w.w'$ simétricos, para cualquier u de W se tiene:

$$\langle w', u.w\rangle = \langle w.w', u\rangle = \overline{\langle w.w', u^*\rangle} = \overline{\langle w', u^*.w\rangle} =$$

$= \langle w', (u^*.w)^*\rangle = \langle w', w^*.u\rangle$; y fácilmente, por inducción, para cualquier número natural k :

$$\langle w', u.w^k\rangle = \langle w', (w^*)^k.u\rangle \quad ; \quad \forall u \in W \quad .$$

Por otra parte, siendo w' positivo, la aplicación $(u,v) \longrightarrow \langle w', v^*.u\rangle = (u|v)$ es una forma hermitiana positiva sobre W; aplicando convenientemente la desigualdad de Cauchy-Schwart:

$$\langle w', u^*uw^{2^n}\rangle = (uw^{2^n}|u) \leq \sqrt{(uw^{2^n}|uw^{2^n}).(u|u)} =$$

$$= \langle w', (w^*)^{2^n}u^*uw^{2^n}\rangle^{\frac{1}{2}}.\langle w', u^*u\rangle^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \langle w', u^*uw^{2^{n+1}}\rangle^{\frac{1}{2}}.\langle w', u^*u\rangle^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \forall u \in W \quad .$$

Esta igualdad permite demostrar por inducción:

$$|\langle w', u^*uw\rangle| \leq \langle w', u^*uw^{2^n}\rangle^{\frac{1}{2^n}}.\langle w', u^*u\rangle^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} , \forall u \in W;$$

de donde:

$$\left|\langle w.w', u^*u\rangle\right| \leq \|w'\|^{\frac{1}{2^n}}\|u\|^{\frac{1}{2^{n-1}}}\|w\| . \langle w', u^*u\rangle \quad , \forall u \in W \quad ,$$

y, por paso al límite ($n \longrightarrow \infty$):

$$\left|\langle w.w', u^*u\rangle\right| \leq \|w\| . \langle w', u^*u\rangle \quad , \quad \forall u \in W$$

que termina la demostración.

Casos particulares de nuestro lema ((X)) pueden verse demostrados en [3] y [13] .

Demostrada la proposición ((Y)), podemos tomarla como punto de partida para la siguiente interesante generalización:

Z.- Sean U y V C^*álgebras, V conmutativa (I_1 e I_2 sus respectivos elementos unidad); sea G una aplicación lineal de U en V; supongamos que, para cada elemento inversible u de U, G(u) es un elemento inversible de V y que en particular es $G(I_1) = I_2$; en estas condiciones G es un homomorfismo (en vista de ((2,J)) y ((2,K)), automáticamente continuo y simétrico).

Demostración:

Sea f un carácter de V, entonces $f.G$ es un funcional lineal sobre U que no se anula sobre los elementos inversibles y vale 1 sobre el elemento unidad de U, sin más que aplicar ((Y)), resulta que $f.G$ es un carácter de U y en consecuencia:

$$\langle f, G(u_1 . u_2) \rangle = \langle f, G(u_1) \rangle . \langle f, G(u_2) \rangle =$$

$$= \langle f, G(u_1) . G(u_2) \rangle \quad , \quad \forall (u_1, u_2) \in U^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle f, G(u_1 . u_2) - G(u_1) . G(u_2) \rangle = 0$$, cualquiera que

sea f carácter de V. Si ρ designa la función radio espectral en V, se sabe que en cualquier álgebra de Banach conmutativa con unidad se verifica $\rho(v) = \sup_{f \in \Omega} |\langle f, v \rangle|$ ([5]-Tomo II. Ω: conjunto de los caracteres de V). Entonces en nuestro caso:

$$\rho(G(u_1 . u_2) - G(u_1) . G(u_2)) = 0 \quad , \quad \forall (u_1, u_2) \in U^2 \quad ;$$

de manera que si V es además sin radical ($\rho(v) = 0 \Longrightarrow v = 0$); hecho este que será cierto si, como se ha supuesto, V es una C^*-álgebra; se tendrá:

$$G(u_1 . u_2) = G(u_1) . G(u_2) \quad , \quad \forall (u_1, u_2) \in U^2$$; y G es un homomorfismo, como se quería demostrar.

Nota.- Se observará que nuestro teorema ((Z)) subsiste bajo la hipótesis más débil de que V sea simplemente un álgebra de Banach con unidad conmutativa y sin radical, a excepción de las consecuencias de continuidad y simetría de G, propiedad esta última que, en estas condiciones, carece incluso de sentido al no saberse nada sobre la existencia de una conjugación en V. A la vista de ((3,N)), la continuidad de G puede subsistir si se le exige ser sobreyectiva.

Una bellísima consecuencia de, entre otros resultados, nuestro teorema ((Z)) es:

Z_1.- Sean U y V C^*-álgebras conmutativas (I_1 e I_2 sus respectivos elementos unidad), F una biyección lineal isométrica de U en V tal que $F(I_1) = I_2$; en estas condiciones F es un isomorfismo (necesariamente $*$-isomorfismo, por ((2,J))).

Demostración:

Como evidentemente es $\|F\| = 1$ y por hipótesis, $F(I_1) = I_2$, resulta, aplicando ((1,D)),que F es una aplicación lineal positiva y en consecuencia simétrica. Por otra parte, en virtud de las hipótesis:

$$\|F(u)\| - \big\| \|F(u)\|.I_2 - F(u)\big\| = \|u\| - \big\|F(\|u\|.I_1 - u)\big\| =$$

$$= \|u\| - \big\| \|u\|.I - u\big\| \quad , \quad \forall\, u \in U \quad .$$

Pero se sabe ([11] y [12]) que, para un elemento simétrico w de una C^*-álgebra, el número $\|w\| - \big\|\|w\|.I - w\big\|$ es precisamente la cota inferior de w, m(w) (mínimo valor espectral de w o, equivalentemente, máximo de los números reales z tales que $z.I \leq w$). Con esta notación la última igualdad demostrada se resume (téngase en cuenta que F(u) es simétrico siempre que lo sea u): $m(F(u)) = m(u)$, para todo elemento simétrico u de U. En consecuencia si u es positivo (u es simétrico y su espectro está contenido en R_+) u y $F(u)$ son simultáneamente inversibles o no. Llegados a este punto, tenemos todo el material preparado para aplicar el teorema ((Z)) a falta de un lema de carácter general:

Desigualdad de Cauchy-Schwartz para aplicaciones lineales positivas con valores en una C^*-álgebra conmutativa.- Sea A un álgebra normada involutiva con elemento unidad (I_1), B una C^*-álgebra conmutativa (I_2, su elemento unidad), G una aplicación lineal positiva de A en B tal que $G(I_1) = I_2$; se verifica:

$$G(u)^*.G(u) \leq G(u^*u) \quad , \quad \forall u \in A \quad .$$

Demostración: sea $u \in A$ y z un número complejo; como G es automáticamente simétrica y es, por hipótesis, $G(I_1) = I_2$; se verifica:

$$G((u^* - \bar{z}I_1)(u - zI_1)) = G(u^*u) - G(u)^*.G(u) +$$

$$+ (G(u)^* - \bar{z}I_2).(G(u) - zI_2)$$. Sea f un carácter cualquiera de B (los caracteres de una C^*-álgebra son siempre positivos), como es $G((u^* - \bar{z}I)(u - zI)) \geq 0$, aplicando f a la última igualdad y eligiendo $z = \langle f, G(u)\rangle$, se obtiene:

$\langle f, G(u^*u) - G(u)^*.G(u) \rangle \geq 0$, para todo u de A y para todo carácter f de B; lo que por aplicación, por ejemplo, del teorema de Gelfand-Naimark nos lleva a:

$$G(u^*u) - G(u)^*.G(u) \geq 0 \Longleftrightarrow G(u)^*.G(u) \leq G(u^*u) \quad , \text{ c.q.d.}$$

Volviendo a las condiciones de $((Z_1))$ vamos aver que si para un u de U F(u) es inversible entonces también es inversible u (en términos de la biyección lineal inversa: v inversible $\Longrightarrow$ $F^{-1}(v)$ inversible); en efecto: sea $u \in U$ tal que F(u) es inversible; recordando que F es positiva, por aplicación del lema, resulta:

$$0 < m(\ F(u)^*.F(u)\ ).I_2 \leq F(u)^*.F(u) \leq F(u^*u) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 < m(\ F(u)^*.F(u)\ ) \leq m(\ F(u^*u)\ )$$

(hemos aplicado que $m(w)$ es el mayor de los números reales z tales que $zI \leq w$). Resulta entonces que $F(u^*u)$ es inversible; tengamos en cuenta que u^*u es positivo y que para elementos positivos teníamos demostrado que u^*u y $F(u^*u)$ eran a un tiempo inversibles o no; concluimos entonces que u^*u es inversible lo que implica, siendo U conmutativa, que u es inversible.

Tenemos así justificado que la aplicación lineal F^{-1} de V en U es tal que para cada elemento inversible v de V $F^{-1}(v)$ es inversible en U, pero como evidentemente $F^{-1}(I_2) = I_1$, estamos en las condiciones del teorema ((Z)) con lo que F^{-1} es un homomorfismo biyectivo, es decir, un isomorfismo, lo que asegura igual propiedad para F.

El teorema $((Z_1))$ que acabamos de demostrar se puede resumir diciendo que la estructura vectorial, la unidad y la norma de una C^*-álgebra conmutativa determinan completamente su estructura (producto y conjugación); o si se quiere, más específicamente:

Sea X un espacio de Banach complejo ($\| \ \|$, su norma), sea $\perp_i$ y $*_i$ ($i = 1, 2$) respectivamente un producto y una conjugación tales que $\{X, \| \ \|, \perp_i, *_i\}$ es una C^*-álgebra conmutativa y que $I_1 = I_2$ (I_i: elemento unidad de $\{X, \perp_i\}$); entonces es $\perp_1 = \perp_2$ ($x \perp_1 y = x \perp_2 y$, $\forall (x,y) \in X^2$) y $*_1 = *_2$ ($x^{*_1} = x^{*_2}$, $\forall x \in X$).

Considérese la aplicación $x \longrightarrow x$ de $\{X, \| \ \|, \perp_1, *_1\}$ en $\{X, \| \ \|, \perp_2, *_2\}$ que es claramente una isometría lineal conservando las unidades y aplíquese $((Z_1))$.

Notas.- 1.- Puesto que un isomorfismo de C^*-álgebras conmutativas es siempre una biyección lineal isométrica que conserva los elementos unidad (téngase en cuenta, por ejemplo, ((2,K))), nuestro teorema $((Z_1))$ pone de manifiesto que esta propiedad es característica de los isomorfismos de C^*-álgebras conmutativas.

2.- Nuestro teorema $((Z_1))$ resuelve afirmativamente, en el caso de C^*-álgebras conmutativas, el problema planteado en [7] sobre los isomorfismos de orden entre C^*-álgebras. Téngase en cuenta que, en vista de ((1,C,b)) y ((1,D)), para C^*-álgebras conmutativas los conceptos de biyección lineal isométrica conservando las unidades y biyección lineal ordenada (isomorfismo de orden) consevando las unidades son equivalentes. Para C^*-álgebras no conmutativas el planteamiento es esencialmente más complicado puesto que tanto los $*$-isomorfismos como los $*$-antiisomorfismos son isomorfismos de orden conservando las unidades y, en consecuencia, también lo es cualquier suma directa (en el sentido de [7]) de un $*$-isomorfismo y un $*$-antiisomorfismo. Kadison ("Isometries of operator algebras") ha demostrado para W^*-álgebras cualesquiera la generalización "natural" de nuestro teorema ((Z_1)) en el sentido de que todo isomorfismo de orden entre W^*-álgebras es "suma directa" de un $*$-isomorfismo y un $*$-antiisomorfismo, y Miles ha probado en su Tesis ([7]) que este resultado no es en general cierto para C^*-álgebras cualesquiera. Nuestro teorema ((Z_1)) asegura que el resultado de Kadison es cierto al menos para C^*-álgebras conmutativas.

3.- Habiendo llegado a mi poder recientemente el libro de Zelazko "Banach Algebras", tengo que hacer constar que, si bien los razonamientos seguidos en este apartado son originales, no así los resultados. Concretamente:

El teorema ((Y)) y su corolario ((Z)) han sido probados por Gleason, Kahane y Zelazko para álgebras de Banach cualesquiera ([18], pág. 86 y 84, respectivamente). El teorema ((Z_1)) ha sido probado por Nagasawa para subálgebras cerradas de C^*-álgebras conmutativas ("function algebras")([18], pag. 146).

C A P I T U L O   III :

C^*-ALGEBRAS DE DIMENSION FINITA

1.- Una caracterización de las C^*álgebras de dimensión finita.

Si U es un álgebra involutiva con elemento unidad y u' es un funcional lineal positivo sobre U, como la aplicación $(u,v) \longrightarrow \langle u', v^*u \rangle$ es evidentemente una forma hermitiana positiva sobre U, resulta, de la desigualdad de Minkowski, que la aplicación $u \longrightarrow \sqrt{\langle u', u^*u \rangle}$ de U en C es una seminorma. A la vista de esto tendría interés el plantearse el estudio de aquellas álgebras involutivas con unidad sobre las que existiese definido un funcional positivo no degenerado u' ($u \neq 0 \Longrightarrow \langle u', u^*u \rangle \neq 0$) tal que la norma

$$u \longrightarrow |u| = \sqrt{\langle u', u^*u \rangle}$$ cumpliese con unas condiciones

mínimas de compatibilidad respecto a la estructura de U, a saber:

a.- El espacio normado $\{U, |\ |\}$ es completo (obsérvese que " a priori" no se postula la $|\ |$-continuidad del producto de U).

b.- La conjugación de U es $| \ |$-continua.

Si U es una C^*-álgebra de dimensión finita no es difícil ver que responde a la situación que acabamos de describir. En efecto: se sabe ([2], [11], [12], [13]) que todo funcional lineal continuo sobre una C^*-álgebra es combinación lineal de funcionales positivos; en el caso que nos ocupa, siendo U de dimensión finita, todo funcional lineal es continuo de manera que el conjunto de los funcionales positivos sobre U genera linealmente el espacio dual U' de igual dimensión que U; podemos disponer en consecuencia de una base de U' $\{u'_1,\dots,u'_n\}$ cuyos elementos son todos positivos. Si ponemos $u' = u'_1 + \dots + u'_n$, u' es también un funcional positivo; veamos que u' es no degenerado: sea $u \in U$ tal que $\langle u', u^* u\rangle = 0$, entonces, por ser los u'_i positivos, se verifica $\langle u'_i, u^*u\rangle = 0$ ($i = 1,2,\dots,n$) de forma que u^*u es ortogonal a todo U' (recuérdese que u' era una base de U') y en consecuencia $u^*u = 0 \Longrightarrow \|u\|^2 = \|u^*u\| = 0 \Longrightarrow u = 0$. Entonces la norma $u \longrightarrow |u| = \sqrt{\langle u', u^*u\rangle}$ y la norma estelar, definidas ambas sobre el mismo espacio vectorial de dimensión finita U, son necesariamente equivalentes con lo que la $| \ |$- completitud de U y la $| \ |$-continuidad de la conjugación de U resultan evidentes.

El interés de la cuestión reside en que la existencia de un funcional positivo no degenerado cumpliendo los axiomas ((a)) y ((b)) caracteriza a las C^*álgebras de dimensión finita en el conjunto de las álgebras involutivas con elemento unidad.

En el resto de este apartado U designará un álgebra involutiva con elemento unidad sobre la que existe definido un funcional positivo no degenerado u' cumpliendo los axiomas ((a)) y ((b)). Nuestro propósito es demostrar que U es una C^*-álgebra de dimensión finita (el recíproco ha quedado visto arriba).

Para ello, escribamos $(u \mid v) = \langle u', v^*u \rangle$, $| u | = \sqrt{(u \mid u)}$ ($(u,v) \in U^2$). El producto escalar $(\mid)$, que, por el axioma ((a)), dota a U de estructura de espacio de Hilbert, cumple evidentemente la propiedad:

$$(u.v \mid w) = (v \mid u^*.w) \quad , \quad \forall (u,v,w) \in U^3 \qquad ((*))$$

de donde, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|u.v|^2 = (u.v \mid u.v) = (v \mid u^*.u.v) \leq |v| \, |u^*.u.v| \; , \forall (u,v) \in U^2 \; ((**)).$$

La igualdad $(u^*uv \mid w) = (v \mid u^*uw)$, $\forall (u,v,w) \in U^3$; consecuencia de ((*)), pone de manifiesto que, cualquiera que sea u de U, el operador lineal del espacio de Hilbert $\{U, (\mid)\}$ $v \longrightarrow u^*uv$ es simétrico y en consecuencia automáticamente continuo (ver [1]); la desigualdad ((**)) demuestra entonces que el operador lineal $v \longrightarrow uv$ es igualmente continuo. Resulta así que todos los operadores de multiplicación por la izquierda son $| \ |$-continuos o, en otras palabras, el producto de U es continuo respecto a la segunda variable. Si llamamos $\|u\|$ a la norma del operador lineal $v \longrightarrow uv$ del espacio de Hilbert $\{U, (\ | \ )\}$, es decir: $\|u\| = \sup_{|v| \leq 1} |u.v|$; como es $|u| =$ $= |u.I| \leq \|u\|.|I|$, es claro que la aplicación $u \longrightarrow \|u\|$ es una <u>norma</u> que dota a U de estructura de <u>álgebra</u> normada; además, de la desigualdad ((**)), se desprende:

$\|u\|^2 \leq \|u^*u\|$, $\forall u \in U$; de donde fácilmente:

$\|u\|^2 = \|u^*u\|$, $\forall u \in U$. Resulta así que $\{U, \| \ \|\}$ será una C^*-álgebra en cuanto demostremos la $\| \ \|$-completitud de U, lo que será evidente a su vez si demostramos que las normas $| \ |$ y $\| \ \|$ son equivalentes. Para ver esto recordemos que el producto de U era $| \ |$-continuo respecto a la segunda variable; entonces también lo es respecto a la primera puesto que, si $v \longrightarrow v.u$ es un operador de multiplicación por la derecha, la identidad $v.u = (u^*.v^*)^*$ pone de manifiesto que el operador en cuestión se puede descomponer en producto de la conjugación de U (que es continua por el axioma ((b))) por el operador de multiplicación por la izquierda $w \longrightarrow u^*.w$ (que, acabamos de recordar, es también $| \ |$-continuo) y por la conjugación de U; resulta así que el producto de U - álgebra con unidad que es un espacio de Banach respecto a la norma $| \ |$ - es "separadamente" continuo respecto a sus dos variables; en estas condiciones se sabe ([4] y [10]) que su producto es "juntamente" continuo, es decir: existe un número K positivo tal que

$|u.v| \leq K\,|u|.|v| \quad , \quad \forall (u,v) \in U^2$. Esta desigualdad pone de manifiesto que es $\|u\| \leq K\,|u| \quad , \quad \forall u \in U$; que junto con la previamente demostrada; $|u| \leq \|u\|.|I| \quad , \forall u \in U$; deja patente la equivalencia de las normas $\| \;\|$ y $| \;|$. Hemos demostrado así:

A.- Sea U un álgebra involutiva con unidad sobre la que existe definido un funcional lineal positivo u' verificando los axiomas ((a)) y ((b)); para cada u de U el operador $v \longrightarrow u.v$ es $| \;|$-continuo ($|u| = \sqrt{\langle u', u^*u\rangle}$); si ponemos $\|u\| = \sup\limits_{|v| \leq 1}|u.v|$, la aplicación $u \longrightarrow \|u\|$ es una norma equivalente a la de partida y $\{U, \| \;\|\}$ es una C^*-álgebra.

Para satisfacer nuestro propósito inicial, nos queda sólo por ver que U es de dimensión finita.

Para ello consideremos en U el nuevo producto escalar $(u \mid v)_1 = \langle u', u\,v^*\rangle$; como es $(u|u)_1 = (u^*|u^*) = |u^*|^2$, $\forall u \in U$; y la conjugación es es $| \;|$-bicontinua, resulta que $\{U, (\;|\;)_1\}$ es un espacio de Hilbert topológicamente equivalente al de partida $\{U, (\mid)\}$. Si u y v son elementos de U, convengamos en llamarles $*$-ortogonales si $u.v^* = 0$ e hilbertianamente ortogonales si $(u \mid v)_1 = 0$. Evidentemente la $*$-ortogonalidad implica la ortogonalidad hilbertiana o, en otras palabras, el conjunto $*$-ortogonal de una parte dada de U está incluido en el correspondiente conjunto ortogonal hilbertiano. Vamos a ver que, si la parte en cuestión es un ideal por la izquierda, ambos conjuntos ortogonales coinciden. En efecto: en primer lugar tengamos en cuenta que el producto escalar que estamos utilizando goza de la propiedad:

$(uv \mid w)_1 = (u \mid wv^*)_1 , \quad \forall (u,v,w) \in U^3$ (en este punto nuestro desarrollo entra en parte en relación con [6]), de manera que si M es un ideal por la izquierda y u un elemento de U hilbertianamente ortogonal a M, cualquiera que sea $m \in M$, como um^*m también es de M, se tendrá:

$$0 = (um^*m \mid u)_1 = (um^* \mid um^*)_1 = | mu^* |^2 \Longrightarrow m.u^* = 0 , \forall m \in M$$

y u es $*$-ortogonal a M como se pretendía.

Llegados aquí, haremos uso de algunos resultados sobre los ideales por la izquierda de las C^*-álgebras ([11]):

- Sea V una C^*-álgebra, se verifica:

c.- Todo ideal por la izquierda minimal de V es de la forma

$V.e$, con e proyección minimal de V.

d.- Si e es una proyección de V el conjunto $*$-ortogonal del ideal $V.e$ es el ideal $V.(I - e)$.

e.- Si M es un ideal por la izquierda maximal de V tal que su conjunto $*$-ortogonal no se reduce a cero, entonces dicho conjunto $*$-ortogonal es un ideal por la izquierda minimal de V .

f.- Todo ideal por la izquierda maximal de V cuyo conjunto $*$-ortogonal no se reduzca a cero es de la forma $V.e$, con e proyección maximal de V (es consecuencia directa de ((c)), ((d)) y ((e))).

g.- $V.e_1 \subseteq V.e_2 \Longleftrightarrow e_1 \leq e_2$ (e_1 y e_2: proyecciones de V).

h.- El ideal por la izquierda $V.e$ (e : proyección de V) es minimal si y sólo si la C^*-álgebra $e.V.e$ es unidimensional (igual a $C.e$).

Con estos resultados podemos demostrar:

B.- Sea U un álgebra involutiva con unidad sobre la que existe definido un funcional lineal positivo no degenerado u' verificando los axiomas ((a)) y ((b)). Se verifica (se recordará que, por ((A)), U es una C^*-álgebra):

i.- Un ideal por la izquierda de U es minimal si y sólo si es de la forma $U.e$, con e proyección minimal.

j.- Si e_1 y e_2 son proyecciones minimales de U, el espacio vectorial $e_1.U.e_2$ es a lo sumo unidimensional.

k.- Toda proyección no nula de U es suma de un número finito de proyecciones minimales.

Demostración:

de ((i)).- A la vista de ((c)), bastará demostrar que, si un ideal por la izquierda de U es de la forma $U.e$ (e: proyección minimal), dicho ideal es necesariamente minimal. Pongamos $M = U.e$, con e proyección minimal. Sea M' el ideal $*$-ortogonal de M ($M' = M.(I - e)$, en vista de ((d))) y sea M_1 un ideal por la izquierda maximal conteniendo a M' (esto es posible pues en cualquier anillo con unidad el conjunto de los ideales por la izquierda distintos del total es $\bigcup$- inductivo). Como el conjunto ortogonal hilbertiano de M_1 es no nulo y el conjunto ortogonal hilbertiano de un ideal por la izquierda coincide con su conjunto $*$-ortogonal, resulta, como consecuencia de ((f)), que M_1 es de la forma $U.e_1$ con e_1 proyección maximal. Como era $U.(I - e) = M' \subseteq M_1 = U.e_1$, recordando ((g)), se concluye: $I - e \leq e_1$; y como $I - e$ es maximal (recuérdese que por hipótesis e es minimal y que la biyección $e \longrightarrow I - e$ invierte el orden de las proyecciones) resulta $I - e = e_1$ y, en consecuencia, M' (igual a M_1) es maximal. Aplicando ((e)), resulta que M (igual al conjunto $*$-ortogonal de M', por ((d))) es minimal, como se quería demostrar.

de ((j)).- Sean e_1 y e_2 proyecciones minimales de U. En vista de ((i)), $U.e_1$ y $U.e_2$ son ideales por la izquierda minimales de U; aplicando ((h)), resulta que $e_1.U.e_1$ y $e_2.U.e_2$ son espacios vectoriales unidimensionales. Supuesto que $e_1.U.e_2$ no se reduzca a cero, sea $v \in e_1.U.e_2$ tal que $\|v\| = 1$; evidentemente $v^*v \in e_2.U.e_2$ y $vv^* \in e_1.U.e_1$, con lo que sin dificultad se llega a: $v^*v = e_2$ y $vv^* = e_1$. Entonces las aplicaciones $u \longrightarrow u.v$ de $e_1.U.e_1$ en $e_1.U.e_2$ y $u \longrightarrow uv^*$ de $e_1.U.e_2$ en $e_1.U.e_1$ son biyecciones lineales mutuamente recíprocas, en consecuencia el espacio vectorial $e_1.U.e_2$ es isomorfo a $e_1.U.e_1$ del que se sabe es unidimensional.

de ((k)).- Utilicemos el producto escalar $(u|v) = \langle u', v^*u\rangle$ ($|u| = \sqrt{\langle u', u^*u\rangle}$). Se sabe que el producto de U es $|\ |$-continuo por lo que se puede suponer (si acaso se multiplicará el funcional u' por un conveniente número positivo) que es $|u.v| \leq |u|.|v|$, $\forall (u,v) \in U^2$. Se sabe también ([11]) que, si una proyección e de una C^*-álgebra se escribe como suma de dos proyecciones e_1 y e_2 , es $e_1.e_2 = 0$, y que el hecho de que una proyección sea minimal equivale a la imposibilidad de descomponerla en suma de dos proyecciones no nulas. Con estos supuestos sea e una proyección no nula de U; será

$|e| = |e^2| \leqslant |e|^2 \Longrightarrow |e| \geqslant 1$. Si $|e|^2 < 2$, e es minimal, pues en caso contrario si es $e = e_1 + e_2$ una descomposición de e en suma de proyecciones no nulas, como es $e_1 . e_2 = 0$ y con más razón $(e_1 | e_2) = 0$, aplicando el teorema de Pitágoras sería $|e|^2 = |e_1|^2 + |e_2|^2 \geqslant 2$, contra la hipótesis. Razonemos entonces por recurrencia y supongamos que, para un valor natural n , toda proyección e tal que $|e|^2 < n$ es suma de un número finito de proyecciones minimales. Si e es una proyección tal que $|e|^2 < n+1$ y no es minimal, existe una descomposición $e = e_1 + e_2$ con e_1 y e_2 proyecciones no nulas. Entonces:

$$|e_1|^2 = |e|^2 - |e_2|^2 < (n + 1) - 1 = n$$
$$|e_2|^2 = |e|^2 - |e_1|^2 < (n + 1) - 1 = n$$

y se aplica la hipótesis de inducción.

Nota.- La demostración del lema ((k)) está tomada de [5]-Tomo II ; se hace allí para álgebras hilbertianas completas.

Estamos ya en condiciones de culminar nuestro propósito:

C.- Sea U un álgebra involutiva con unidad; las dos afirmaciones siguientes equivalen:

1.- Existe un funcional lineal positivo no degenerado u´ tal que U con la norma $u \longrightarrow |u| = \sqrt{\langle u', u^* u\rangle}$ es un espacio de Banach y la conjugación de U es $|\ |$-continua.

m.- U es una C^*-álgebra de dimensión finita.

Demostración:

((m)) $\Longrightarrow$((l)).- Quedó claro al principio del capítulo.

((l)) $\Longrightarrow$((m)).- Apliquemos ((B,k)) al elemento unidad de U que evidentemente es una proyección no nula; se tendrá $I = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ donde cada e_i es una proyección minimal. Entonces para cada elemento u de U será:

$$u = I.u.I = \Big(\sum_{1\le i\le n} e_i\Big).u.\Big(\sum_{1\le j\le n} e_j\Big) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} e_i.u.e_j \quad ,$$

igualdad que pone de manifiesto que U es suma de los n^2 subespacios $\{ e_i.U.e_j \mid 1\le i\le n,\ 1\le j\le n \}$ que, según ((B,j)) son a lo sumo unidimensionales; en consecuencia U es de dimensión finita. Que U es una C^*-álgebra quedó demostrado en ((A)).

Nota.- Para encontrarle perfecto sentido a la afirmación ((m)) téngase en cuenta ((II,2,L))) que si un álgebra involutiva con unidad es una C^*-álgebra lo es de una única manera.

En el resto del capítulo nos dedicaremos a un estudio, no exaustivo por supuesto, de las C^*-álgebras de dimensión finita desde el punto de vista de la caracterización que acabamos de hacer en ((C)).

2.- Existencia de trazas no degeneradas en las C^*-álgebras de dimensión finita.

Sea U una C^*álgebra de dimensión finita. Hemos visto en el apartado anterior que sobre U existe definido un funcional positivo no degenerado u' definidor de la norma estelar de U por el procedimiento que se indicó en ((1,A)). Cualquier funcional positivo no degenerado sobre U, en vista de la dimensionalidad finita de ésta, se atendrá trivialmente a los axiomas ((1,a)) y ((1,b)) con lo que igualmente por el procedimiento indicado generará la única norma estelar de U (recuérdese ((II,2,L))). Vamos a ver que sobre una C^*álgebra de dimensión finita existe un funcional positivo no degenerado que tiene la propiedad adicional de ser central (un funcional lineal v' definido sobre un álgebra se llama central si se verifica: $\langle v', v_1 v_2 \rangle = \langle v', v_2 v_1 \rangle$, para todo par (v_1, v_2) de elementos del álgebra; un funcional positivo central sobre un álgebra involutiva se llama una traza; así pues vamos hacia la búsqueda de una traza no degenerada).

Tenemos que empezar con un teorema de teoría de espacios de Hilbert:

D.- Se supone: X un espacio de Hilbert; K una parte convexa y cerrada de X; F un grupo de biyecciones de K sobre K, tal que:

1.- Existe un número l verificando:

$\|f(x) - f(y)\| \leq 1\,\|x - y\|$, $\forall (x,y,f) \in K^2 \times F$.

2.- $f(\,(1/2)(x + y)\,) = (1/2).(\,f(x) + f(y)\,)$,

$\forall (x,y,f) \in K^2 \times F$.

3.- $\exists x_0 \in K \mid \sup_{f \in F} \|f(x_0)\| < +\infty$.

En estas condiciones, se tiene:

a.- $\forall x \in K : \sup_{f \in F} \|f(x)\| < +\infty$.

b.- Si ponemos $M(x) = \sup_{f \in F} \|f(x)\|$, se verifica:

1.- $|M(x) - M(y)| \leq 1\,\|x - y\|$, $\forall (x,y) \in K^2$.

2.- $\|x - y\|^2 \leq 2 1^2 (\,M(x)^2 + M(y)^2 - 2M(\,(1/2)(x + y)\,)^2)$,

$\forall (x,y) \in K^2$.

c.- En consecuencia, si ponemos $r = \inf_{x \in K} M(x)$:

1.- Cada sucesión $\{x_n\}$ ($x_n \in K$), tal que $M(x_n) \rightarrow r$, es de Cauchy. Sea $a = \lim x_n$.

2.- a es el único elemento de K tal que $M(a) = r$.

3.- $f(a) = a$, $\forall f \in F$.

Notas al teorema.- La afirmación importante de nuestro teorema es la ((c,3)) relativa a la existencia de "puntos fijos" para un grupo de biyecciones en las condiciones del enunciado, el resto no es sino la recopilación de los principales resultados obtenidos a lo largo de la demostración. No cabe pensar en la unicidad de tal punto fijo, como lo pone de manifiesto el caso en que K sea acotado no reducido a un punto y el grupo de biyecciones F se reduzca a la identidad sobre K; el punto fijo detectado en nuestro teorema es, desde luego, el de norma mínima entre todos los posibles y, con esta condición adicional, sí es único. Si el convexo cerrado K es además acotado, la tercera hipótesis y la afirmación ((a)) son superfluas.

Demostración del teorema.- Por hipótesis, existe un punto x_0 tal que $\sup_{f \in F} \|f(x_0)\| < +\infty$; utilizando la primera hipótesis:

$$\|f(x)\| - \|f(x_0)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| \leq 1\|x - x_0\| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|f(x)\| \leq 1\|x - x_0\| + \|f(x_0)\| \quad , \quad \forall (x,f) \in K \times F ;$$

desigualdad que pone de manifiesto que también $\sup_{f \in F} \|f(x)\| < +\infty$, $\forall x \in K$ (afirmación ((a))). Esta misma desigualdad, poniendo en lugar de x_0 un punto y genérico de K y llamando $M(z) = \sup_{f \in F} \|f(z)\|$, demuestra que $M(x) - M(y) \leq 1\|x - y\|$, $\forall (x,y) \in K^2$. Intercambiando los papeles de x e y se llega inmediatamente a la desigualdad ((b,1)) y, en consecuencia, la función $x \longrightarrow M(x)$ es continua. Por otra parte, sea $f \in F$, x e y de K y apliquemos la hipótesis primera poniendo f^{-1} (que también es de F) f(x), f(y) en lugar, respectivamente, de f, x, y ; resulta:

$$\|x - y\| \leq 1\,\|f(x) - f(y)\| \quad , \quad \forall (x,y,f) \in K^2 \times F \quad ;$$

con lo que aplicando una conocida identidad de las normas procedentes de un producto escalar, la definición de la función M y la segunda hipótesis, se obtiene:

$$\|x - y\|^2 \leq 1^2\,\|f(x) - f(y)\|^2 = 21^2 (\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 -$$

$$- 2\,\|f((1/2)(x + y))\|^2) \leq 21^2 (M(x)^2 + M(y)^2 - 2\|f((1/2)(x+y))\|^2),$$

$\forall (x,y,f) \in K^2 \times F$. Fijados provisionalmente x, y ; para todo número positivo ε , existe $f_\varepsilon \in F$ tal que

$$\|f_\varepsilon((1/2)(x + y))\|^2 \geq M((1/2)(x + y))^2 - \varepsilon \qquad ; \text{ con lo que,}$$

según la última desigualdad:

$$\|x - y\|^2 \leq 21^2 (M(x)^2 + M(y)^2 - 2M((1/2)(x + y))^2) + 41^2\varepsilon \quad ,$$

de donde se concluye inmediatamente ((b,2)) sin más que tener en cuenta la arbitrariedad de ε . Pongamos ahora $r = \inf_{x \in K} M(x)$ y sea $\{x_n\}$ ($x_n \in K$) una sucesión tal que $M(x_n) \longrightarrow r$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists p \in N \mid n \geq p \Longrightarrow M(x_n)^2 < r^2 + \varepsilon \quad .$$

Si n y m son enteros mayores o iguales que p , la desigualdad ((b,2)) da: $\|x_n - x_m\|^2 < 4l^2\varepsilon$. , que prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy (afirmación ((c,1))). Sea $a = \lim x_n$, a pertenece a K por ser éste cerrado y es $M(a) = r$ por la continuidad de la función M. Si a' es otro punto tal que $M(a') = r$, la desigualdad ((b,2)) demuestra que $\|a - a'\|^2 \leq 0 \Longrightarrow a = a'$. Queda así terminada la afirmación ((c,2)). Fijemos $f \in F$ y sea $g \in F$ por lo demás cualquiera y pongamos $b = f(a)$; como $g.f \in F$:

$$\|g(b)\| = \|g.f(a)\| \leq M(a) = r \quad , \forall g \in F \quad ; \text{ de donde:}$$

$$r \leq M(b) = \sup_{g \in F} \|g(b)\| \leq r \Longrightarrow M(b) = r$$

. Pero esta condición es característica del elemento a , luego $f(a) = b = a$, y a es punto fijo del grupo de biyecciones F. El teorema ha quedado demostrado.

Terminado este inciso de teoría de espacios de Hilbert, podemos ya dar un segundo paso más específico hacia la búsqueda de trazas no degeneradas en las C^*-álgebras de dimensión finita:

E.- Toda derivación de una C^*-álgebra de dimensión finita es interior.

Demostración:

Sea U la C^*-álgebra en cuestión y d una derivación de U.

Sobre U existe definido un funcional positivo no degenerado u' de manera que $\{U, \ (u,v) \longrightarrow (u \mid v) = \langle u', v^* u \rangle\}$ es un espacio de Hilbert (denotaremos $| \ |$ la norma hilbertiana). Si A designa el grupo de los elementos unitarios de U, para cada a de A llamemos T_a a la aplicación $u \longrightarrow (au + d(a))a^{-1}$ de U en sí mismo; como se demuestra sin dificultad que es

$$T_a \circ T_b = T_{a.b} \quad , \quad \forall (a,b) \in A^2 \ , \quad y \quad T_I = I_u \quad ,$$

resulta que el conjunto $\{T_a \mid a \in A\}$ es un grupo de biyecciones de U sobre U. Utilizando la norma estelar (que es invariante por multiplicación por elementos unitarios):

$$\| T_a(u) - T_a(v) \| = \| u - v \| \quad , \quad \forall (u,v,a) \in U^2 \times A \quad ;$$

lo que en términos de la norma hilbertiana, necesariamente equivalente a la estelar, se traduce por una condición del tipo:

$$| T_a(u) - T_a(v) | \leq l | u - v | \quad , \quad \forall (u,v,a) \in U^2 \times A \quad ,$$

con l independiente de u, v y a . Evidentemente:

$$T_a((1/2)(u + v)) = (1/2)(T_a(u) + T_a(v)) \quad , \quad \forall (u,v,a) \in U^2 \times A \quad .$$

También: $\| T_a(0) \| = \| d(a).a^{-1} \| = \| d(a) \| \leq \| d \|$, de donde $\sup\limits_{a \in A} | T_a(0) | < + \infty$. Estamos entonces en las condiciones del teorema ((D)) aplicado al espacio de Hilbert $\{U, (\ | \ )\}$ siendo el convexo cerrado K igual a todo el espacio y $\{ T_a \mid a \in A \}$ el grupo de biyecciones. En consecuencia existe un elemento u_o de U tal que

$$T_a(u_o) = u_o \quad , \quad \forall a \in A \iff d(a) = u_o.a - a.u_o \quad , \forall a \in A.$$

Si se recuerda que en una C*-álgebra todo elemento es combinación lineal de elementos unitarios, la última igualdad, válida para todos los elementos unitarios, se extiende por linealidad a todo U. Así pues $d(u) = u_o.u - u.u_o \quad , \quad \forall u \in U$; y d es interior como se quería demostrar.

Nota al teorema ((E)).- Una C*-álgebra de dimensión finita es, como espacio normado, evidentemente reflexiva y en consecuencia isomorfa al dual topológico de un espacio de Banach, con lo que es una W*-álgebra (ver definición de W*-álgebra en [13]) . Se sabe ([3] y [13]) que toda derivación de una W*-álgebra es interior (la parte algebraica de la demostración que acabamos de dar para nuestro caso particular está tomada de la demostración clásica). No obstante hemos dado una demostración analíticamente independiente basada en un resultado de espacios de Hilbert (((D))) ya que nuestro propósito, como se ha dicho al final del primer apartado de este capítulo, es elaborar una teoría de las C*-álgebras de dimensión finita desde el punto de vista de ser la única posibilidad de coexistencia de las estructuras de álgebra involutiva con unidad y de espacio de Hilbert, con unas condiciones de enlace, a saber, que el homomorfismo que a cada elemento asocia el operador de multiplicación por la izquierda por dicho elemento sea un $*$-homomorfismo y que la conjugación sea continua.

Corolario de ((E)) es:

F.- Todo automorfismo $*$-positivo de una C^*-álgebra de dimensión finita es interior. Concretamente: si son U y F, respectivamente, el álgebra y el automorfismo en cuestión, existe un elemento positivo inversible w de U tal que $F(u) = wuw^{-1}$, $\forall u \in U$.

En efecto: según ((II,3,S)), F es de la forma e^d con d derivación $*$-antisimétrica ; d ha de ser interior según se acaba de ver; de manera que existe $u_0 \in U$ tal que

$d(u) = u_0.u - u.u_0$, $\forall u \in U$. Por ser d $*$-antisimétrica:

$d(u) = - d^*(u) = - d(u^*)^* = - (u_0.u^* - u^*.u_0)^* = u_0^*.u - u.u_0^*$,

$\forall u \in U$. Y por tanto:

$d(u) = (1/2)(u_0 + u_0^*).u - u.(1/2)(u_0 + u_0^*)$, $\forall u \in U$;

de manera que el elemento u_0 puede suponerse simétrico. Si ponemos $f(u) = u_0.u$, $g(u) = u.u_0$; f y g son operadores lineales permutables y evidentemente $d = f - g$, y por tanto

$e^{d} = e^{f}.e^{-g}$. Pero fácilmente se ve que $e^{f}(u) = e^{u_0}.u$ y $e^{-g}(u) = u.e^{-u_0}$, $\forall u \in U$; y entonces: $F(u) = e^{d}(u) = e^{f}(e^{-g}(u)) = e^{u_0}.u.e^{-u_0}$. Como e^{u_0} es evidentemente positivo (u_0 era simétrico) el corolario está demostrado.

Podemos ya enunciar:

G.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita; existe una traza no degenerada sobre U.

Demostración:

Recordemos, una vez más, que sobre U existe un funcional positivo no degenerado u' y hagamos uso de la estructura hilbertiana que el producto escalar $(u,v) \longrightarrow (u \mid v) = \langle u', v^*u \rangle$ confiere a U. La aplicación $(u,v) \longrightarrow (v^* \mid u^*)$ es una forma sexquilineal continua sobre el espacio de Hilbert $\{U, (\ |\ )\}$; se sabe entonces la existencia de un único operador $F \in L(U)$ tal que $(v^* \mid u^*) = (F(u) \mid v)$, $\forall (u,v) \in U^2$. Se tiene:

$$(F(uv) \mid w) = (w^* \mid v^*u^*) = (vw^* \mid u^*) = (F(u) \mid wv^*) =$$

$$= (w^*F(u) \mid v^*) = (F(v) \mid F(u)^*w) = (F(u)F(v) \mid w) \quad ,$$

$$\forall (u,v,w) \in U^3 \quad \Longrightarrow \quad F(uv) = F(u)F(v) \quad ;$$

es decir, F es un homomorfismo (se ha utilizado la propiedad $(u_1u_2 \mid u_3) = (u_2 \mid u_1^*u_3)$ del producto escalar y la definición de F). Por otra parte, como es

$(F(u) \mid u) = |u^*|^2 \geq 1|u|^2 \quad , \quad \forall u \in U$ (1 es un número positivo independiente de u , consecuencia de la continuidad de la conjugación); resulta que en la C^*-álgebra $L\{U ,(\mid)\}$ F es positivo e inversible (ver [1]), de manera que F es un automorfismo de U cuyo espectro está contenido en R . Se sabe también que el hecho de que para un operador lineal continuo de un Hilbert ocurra $(F(u) \mid u) \geq 0 \ , \ \forall u \in U$,implica que $(F(u) \mid v) = (u \mid F(v)) \ , \ \forall (u,v) \in U^2$. Aplicando esto y la definición de F, resulta:

$$(u \mid v) = (F(v^*) \mid u^*) = (F(u) \mid F(v^*)^*) = (F(u) \mid F^*(v)) =$$

$$= (u \mid F.F^*(v)) \quad , \quad \forall (u,v) \in U^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F.F^* = I \Longrightarrow F' \overset{\text{def.}}{=} F^{*-1} = F \quad .$$

Resumiendo estos resultados: F es un automorfismo •-simétrico de U cuyo espectro está contenido en R_+, es decir, F es un automorfismo •-positivo de U. En virtud de ((F)) es $F(u) = w^{-1}uw$, $\forall u \in U$; para un cierto elemento positivo inversible w de U. La condición de definición de F interesa ponerla ahora de la siguiente manera:

$$\langle u', u.v\rangle = (v \mid u^*) = (F(u) \mid v^*) = \langle u', v.F(u)\rangle \quad ,$$

$\forall (u,v) \in U^2$. Entonces si llamamos t a la aplicación $u \longrightarrow \langle u', u.w\rangle$ de U en C, t es evidentemente lineal y vamos a ver en primer lugar que t es central. En efecto:

$$\langle t, u.v\rangle = \langle u', u.v.w\rangle = \langle u', v.w.F(u)\rangle =$$

$$= \langle u', v.w.w^{-1}.u.w\rangle = \langle u', v.u.w\rangle = \langle t, v.u\rangle \quad .$$

Además, $\forall u \in U$: $\langle u', w.u\rangle = \langle u', u.F(w)\rangle = \langle u', u.w\rangle$

es decir, $u'.w = w.u'$; de manera que w conmuta con u' . Ahora bien, el conjunto de los elementos de U que conmutan con u' (funcional positivo y por tanto simétrico) es una C^*-subálgebra de U de manera que si contiene a w ha de contener también a $w^{\frac{1}{2}}$ puesto que $w^{\frac{1}{2}}$ pertenece a la C^*-subálgebra de U engendrada por w . Entonces es:

$t = w.u' = w^{\frac{1}{2}}.w^{\frac{1}{2}}.u' = w^{\frac{1}{2}}.u'.w^{\frac{1}{2}}$; con lo que para cada u de U se verifica:

$$\langle t, u^*u\rangle = \langle u', w^{\frac{1}{2}}.u^* .u.w^{\frac{1}{2}}\rangle = |u.w^{\frac{1}{2}}|^2 \quad ;$$

igualdad que muestra que t es positivo e incluso no degenerado puesto que $w^{\frac{1}{2}}$ es inversible; como habíamos visto que t era central, concluimos que t es una traza no degenerada, lo que acaba la demostración.

3.- Identificación de una C^*-álgebra de dimensión finita con su dual por medio de una traza no degenerada.

Recordemos que, si U es un álgebra involutiva con unidad y si $U^{\prime}$ designa el espacio vectorial de todos los funcionales lineales sobre U, $U^{\prime}$ está dotado "naturalmente" de una rica estructura algebraica, a saber:

- El orden $\left\{ u'_1 \leq u'_2 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} u'_2 - u'_1 \text{ es positivo} \right\}$ es compatible con la estructura de R-espacio vectorial de $U^{\prime}$.

- La aplicación $u' \longrightarrow u'^*$ de $U^{\prime}$ en sí mismo, definida por la fórmula

$$\langle u'^*, u \rangle = \overline{\langle u', u^* \rangle} \quad , \quad \forall u \in U$$

es una involución semilineal (que llamaremos la conjugación de $U^{\prime}$).

- La conjugación y el orden de $U^{\prime}$ están relacionados por el hecho de que todo elemento positivo es simétrico.

- Si u y u' son elementos, respectivamente, de U y $U^{\prime}$ y si definimos los productos $u.u'$ y $u'.u$ por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \langle u.u', v \rangle &= \langle u', v.u \rangle \\ \langle u'.u, v \rangle &= \langle u', u.v \rangle \end{aligned}\right\} \quad \forall v \in U \quad ,$$

con estos productos $U^{\prime}$ tiene estructura de U-módulo bilátero.

- La conjugación y la estructura de U-módulo bilátero de U^{t} gozan de la ley de compatibilidad:

$$(u.u')^* = u'^*.u^* \quad , \quad \forall (u.u') \in U \times U^{t} \quad .$$

Si U es una C^*-álgebra de dimensión finita, se sabe que U^{t} coincide con U' (dual topológico de U), que U y U' son linealmente isomorfos y que toda biyección lineal de U sobre U' es un homeomorfismo (hablamos en términos de la única topología separada compatible con la estructura de un espacio vectorial de dimensión finita). Vamos a ver que U y U' se pueden poner en correspondencia biunívoca de manera que se conserven sus estructuras comunes (orden, conjugación y estructura de U-módulo bilátero): .

H.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, t una traza no degenerada sobre U (su existencia quedó probada en ((2,G))) y G la aplicación $u \longrightarrow u.t$ de U en U' ; se verifica:

a.- G es un homeomorfismo lineal tal que $G(u.v.w) = u.G(v).w \quad , \quad \forall (u,v,w) \in U^3$.

b.- $G(u^*) = G(u)^* \quad , \quad \forall u \in U$.

c.- $G(u) \geq 0 \iff u \geq 0 \qquad (u \in U)$.

d.- La imagen por G del centro de U es el conjunto de los funcionales lineales centrales sobre U (como consecuencia de ((c)) y ((d)), el conjunto de las trazas sobre U es la imagen por

G del conjunto de los elementos positivos del centro de U).

Demostración:

de ((a)).- Como t es una traza, se verifica sin dificultad que $u.t = t.u$, $\forall u \in U$; entonces

$$G(u.v.w) = u.v.w.t = u.(v.t).w = u.G(v).w \quad , \quad \forall (u,v,w) \in U^3 \quad .$$

G es claramente lineal. Veamos que es inyectivo: si es $G(u) = = u.t = 0$, será en particular

$$0 = \langle u.t,\ u^* \rangle = \langle t,\ u^* u \rangle \quad , \text{ de donde } \quad u = 0 \quad ,$$

sin más que recordar que t es no degenerada. Siendo G aplicación lineal inyectiva entre espacios vectoriales de igual dimensión finita, G es sobreyectiva y, en consecuencia, un homeomorfismo.

de ((b)).- Para cada u de U se tendrá:

$$G(u^*) = u^*.t = t.u^* = t^*.u^* = (u.t)^* = G(u)^*$$

(se ha tenido en cuenta que es $t.u = u.t$, $\forall u \in U$; que t es simétrica por ser positiva, y que $(u.u')^* = u'^*.u^*$, $\forall (u,u') \in U{\times}U'$).

de ((c)).- Si u es un elemento positivo de U, se verifica:

$$G(u) = u.t = u^{\frac{1}{2}}.u^{\frac{1}{2}}.t = u^{\frac{1}{2}}.t.u^{\frac{1}{2}} \quad , \text{ y, expresado de esta mane-}$$

ra, resulta claro que $G(u)$ es un funcional positivo. Recíprocamente, supongamos que es $G(u) \geqslant 0$; entonces:

$$\langle v.t.v^*, u \rangle = \langle t, v^*.u.v \rangle = \langle t, v.v^*.u \rangle =$$

$$= \langle u.t, v.v^* \rangle = \langle G(u), v.v^* \rangle \geqslant 0 \quad , \forall v \in U \quad .$$

Como se comprueba sin dificultad que $\{v.t.v^* \mid v \in U, \ v \neq 0\}$ es una familia admisible de funcionales positivos sobre U y se sabe que el hecho de que para un elemento w de una C^*-álgebra se verifique $\langle w', w \rangle \geqslant 0$ para todo w' de una tal familia caracteriza al elemento en cuestión como positivo (((I,2,F))) concluimos: $u \geqslant 0$.

de ((d)).- Si u pertenece al centro de U;

$$\langle G(u), v.w \rangle = \langle u.t, v.w \rangle = \langle t, v.w.u \rangle =$$

$$= \langle t, w.u.v \rangle = \langle t, w.v.u \rangle = \langle u.t, w.v \rangle =$$

$$= \langle G(u), w.v \rangle \quad , \quad \forall (v,w) \in U^2$$

; y resulta que $G(u)$ es un funcional lineal central. Recíprocamente, si $G(u)$ es un funcional central:

$$\langle u.v.t, w \rangle = \langle t, w.u.v \rangle = \langle t, v.w.u \rangle =$$

$$= \langle u.t, v.w \rangle = \langle G(u), v.w \rangle = \langle G(u), w.v \rangle =$$

$$= \langle u.t, w.v \rangle = \langle v.u.t, w \rangle \quad , \quad \forall (v,w) \in U^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u.v.t = v.u.t \quad , \quad \forall v \in U$$

; y si se tiene en

cuenta que la aplicación $w \longrightarrow w.t$ es inyectiva: $u.v = v.u$, $\forall u \in U$, y u pertenece al centro de U, como se quería demostrar.

Resulta, como consecuencia de nuestro teorema, que toda posible propiedad de los espacios U y U´,que se pueda enunciar en términos de sus topologías, sus estructuras de U-módulos biláteros, sus conjugaciones y sus órdenes, es a un tiempo cierta para ambos o no. Así por ejemplo:

I.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita. Toda parte superiormente filtrante y mayorada de U tiene extremo superior adherente a la parte en cuestión.

Demostración:

En vista del comentario que acabamos de hacer, nuestra proposición será cierta si es cierta la análoga en U´, de manera que ((I)) quedará patente en cuanto demostremos:

J.- Sea U un álgebra normada involutiva con unidad y U´ su dual topológico. Toda parte de U´ superiormente filtrante y mayorada tiene extremo superior nórmicamente adherente a la parte en cuestión.

Demostración:

Utilizaremos dos hechos conocidos:

- Todo elemento positivo u' de U' cumple la igualdad $\| u' \| = \langle u', I \rangle$ (I: elemento unidad de U).

- El conjunto de los elementos positivos de U' es nórmicamente cerrado (en consecuencia, para cada u' de U', los conjuntos $\{ u' \in U' \mid u' \leq u'_0 \}$ y $\{ u' \in U' \mid u' \geq u'_0 \}$ son igualmente cerrados).

Teniendo en cuenta estos resultados, sea M la parte filtrante y mayorada de U' en cuestión; para cada $u' \in M$, pongamos $B_{u'} = \{ v' \in M \mid v' \geq u' \}$; en vista del carácter filtrante de M, se comprueba sin dificultad que la familia $\{ B_{u'} \mid u' \in M \}$ es una base de filtro sobre U'; veamos que es de Cauchy: sea w' un mayorante de M, como es

$$\langle w' - u', I \rangle \geq 0 \quad , \forall u' \in M \Longrightarrow R(\langle u', I \rangle) \leq$$

$$R(\langle w', I \rangle) \quad , \forall u' \in M$$

(R(z) designa la parte real del complejo z), resulta que el conjunto de números reales $\{ R(\langle u', I \rangle) \mid u' \in M \}$ está mayorado; si es r su extremo superior, para cada ε positivo, existirá un $u'_\varepsilon \in M$ tal que $R(\langle u'_\varepsilon, I \rangle) \geq r - (\varepsilon/2)$; con lo que si u'_1 y u'_2 son elementos cualesquiera de $B_{u'_\varepsilon}$ ($u'_1 - u'_\varepsilon \geq 0$, $u'_2 - u'_\varepsilon \geq 0$):

$$\| u'_1 - u'_2 \| \leq \| u'_1 - u'_\varepsilon \| + \| u'_2 - u'_\varepsilon \| =$$

$$= \langle u'_1 - u'_\varepsilon, I \rangle + \langle u'_2 - u'_\varepsilon, I \rangle =$$

$$= R(\langle u'_1, I \rangle) + R(\langle u'_2, I \rangle) - 2R(\langle u'_\varepsilon, I \rangle) \leq$$

$\leq$ r + r - 2(r - (ε/2)) = ε , con lo que el diámetro de $B_{u'_\varepsilon}$ no supera a ε. Queda así probado que $\{ B_{u'} \mid u' \in M \}$ es una base de filtro de Cauchy sobre el espacio completo U' ; si es u'_o su límite, de la igualdad $\{ u'_o \} = \bigcap_{u' \in M} \overline{B_{u'}}$ se desprende que u'_o es adherente a M. Además, para cualquier u' de M, $u'_o \in \overline{B_{u'}}$, y como el conjunto de los elementos que siguen a u' es cerrado, concluimos: $u'_o \geqslant u'$, con lo que u'_o es un mayorante de M. Si w'_o es otro mayorante de M, como el conjunto de los elementos que preceden a w' es cerrado y u'_o pertenece a $\overline{M}$, se obtiene: $u'_o \leq w'_o$; de manera que u'_o es el extremo superior de M.

El resultado que acabamos de demostrar se conocía ya en [11]; hemos conseguido aquí una demostración sensiblemente más breve.

Corolario de ((J)) es:

J .- Toda sucesión no decreciente y mayorada de funcionales continuos sobre un álgebra normada involutiva con unidad converge, con la topología de la norma, hacia el extremo superior del conjunto de sus términos.

En efecto: si es $\{ u'_n \}$ la sucesión en cuestión, el conjunto de sus términos es superiormente filtrante y mayorado, luego, según ((J)), tiene extremo superior perteneciente a su cierre

(sea u'_o dicho extremo superior), con lo que:

$\forall \varepsilon > 0 \; : \; \exists p \in N \;\; | \;\; \| u'_o - u'_p \| < \varepsilon$; y entonces para $n \geqslant p$, se verifica:

$$\| u'_o - u'_n \| = \langle u'_o - u'_n , I \rangle \leq \langle u'_o - u'_p , I \rangle =$$

$= \| u'_o - u'_p \| < \varepsilon$ (se ha tenido en cuenta que por ser la sucesión no decreciente es $u'_o - u'_n \leq u'_o - u'_p$ para $n \geqslant p$).

Según ((H)) este corolario se traduce automáticamente al caso de las C*-álgebras de dimensión finita:

J .- Toda sucesión no decreciente y mayorada de elementos de una C*-álgebra de dimensión finita converge hacia el extremo superior del conjunto de sus términos.

<u>4.- Teorema de estructura de las C*-álgebras de dimensión finita.</u>

El ejemplo más sencillo de C*-álgebras de dimensión finita lo constituyen las álgebras de matrices $n \times n$ con términos en C o, si se quiere, por isomorfismo, las álgebras de operadores lineales sobre un Hilbert n-dimensional ($n \in N$). Evidentemente por suma directa de un número finito de C*-álgebras de este tipo obtenemos nuevas C*-álgebras de dimensión finita (se llama suma directa de una familia $\{U_i\}$ de C^*-álgebras a una nueva C^*-álgebra construida de la siguiente manera: sus elementos son las familias $\{u_i\}$ - $u_i \in U_i$ - tales que $\sup \|u_i\| < +\infty$; la suma, el producto por complejos, el producto y la conjugación se definen término a término, y la norma, por la fórmula $\|\{u_i\}\| = \sup \|u_i\|$. He utilizado la nomenclatura de Sakai-[13]; este mismo concepto aparece en Dixmier-[2] con el nombre de producto directo). Vamos a ver que toda C^*-álgebra de dimensión finita es isomorfa a la suma directa de un número finito de álgebras de matrices cuadradas con términos en C.

El primer paso consiste en justificar:

K.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita;

a.- La aplicación $e \longrightarrow U.e$ es una biyección ordenada del conjunto de las proyecciones de U (con la restricción del orden de U) sobre el conjunto de los ideales por la izquierda de U (ordenados por inclusión).

b.- La imagen, por esta biyección, del conjunto de las proyecciones del centro de U es precisamente el conjunto de los ideales biláteros de U.

Demostración:

de ((a)).- Para cada proyección e de U, U.e es evidentemente un ideal por la izquierda y la afirmación ((1,g)) muestra a un tiempo que la aplicación $e \longrightarrow U.e$ es ordenada e inyectiva. Así pues sólo falta ver que todo ideal por la izquierda de U es de la forma U.e para una conveniente proyección e. Para ello hagamos uso de la existencia sobre U de un funcional positivo no degenerado u' (como siempre escribiremos; $(u \mid v) = \langle u', v^* u\rangle$, $|u| = \sqrt{\langle u', u^* u\rangle}$). Si M es el ideal en cuestión, M es evidentemente una variedad lineal de U cerrada en vista de su finita dimensionalidad; sea entonces T la proyección ortogonal del espacio de Hilbert $\{U, (\mid)\}$ sobre M y pongamos $e = T(I)$; se sabe que $I - e$ es ortogonal a M, con lo que si m es un elemento cualquiera de M ($m^*(m-m.e)$ también es de M) se tiene:

$$0 = (I - e \mid m^*(m - m.e)) = (m(I - e) \mid m(I - e)) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m = m.e \quad , \quad \forall m \in M \quad .$$

Esta igualdad muestra que M está incluido en U.e y, como la inclusión inversa es trivial, se concluye: $M = U.e$. La misma igualdad da por particularización ($m = e$): $e^2 = e$, con lo que e es un idempotente. Sólo nos resta ver que e puede ser elegido simétrico. Para ello supongamos que el funcional u' definidor de la estructura hilbertiana de U es una traza (lo que es posible en virtud de ((2,G))); entonces para cada u de U se comprueba sin dificultad la fórmula:

$|u - u^*|^2 = 2|u|^2 - (u \mid u^*) - (u^* \mid u)$. Para nuestro elemento e se verifica:

$$(e \mid e^*) = (e^2 \mid I) = (e \mid I) = (e \mid e) = \mid e \mid^2$$

(la igualdad $(e \mid I) = (e \mid e)$ queda patente si se recuerda que $I - e$ es ortogonal a M y se la pone en la forma equivalente $(I - e \mid e) = 0$), con lo que aplicando la fórmula enunciada arriba, resulta: $\mid e - e^* \mid^2 = 0 \Longrightarrow e = e^*$ y e (que era un idempotente) es una preyección.

de ((b)).- Si e es una proyección del centro de U, $U.e$ es evidentemente un ideal bilátero de U. Recíprocamente, si M es un ideal bilátero de U, como en particular es un ideal por la izquierda, se tiene en vista de ((a)) $M = U.e$ donde e es una proyección que, según se ha visto en la demostración de ((a)), puede considerarse como la proyección ortogonal (en el ambiente de la estructura hilbertiana que confiere a U una traza no degenerada) de I sobre M. Si llamamos T a la proyección ortogonal sobre M, para cada u de U se sabe que $T(u)$ es el único elemento de M tal que $u - T(u)$ es ortogonal a M. Pero también:

$$\left.\begin{array}{l} (u - u.e \mid m) = (I - e \mid u^*m) = (I - T(I) \mid u^*m) = 0 \\ (u - e.u \mid m) = (I - e \mid mu^*) = (I - T(I) \mid mu^*) = 0 \end{array}\right\} \forall m \in M.$$

Resulta así que $u.e$ y $e.u$, que son elementos de M, son tales que $u - u.e$ y $u - e.u$ son ortogonales a M. Concluimos: $T(u) = u.e = e.u$, $\forall u \in U$; y e es una proyección del centro de U, como se quería demostrar.

Podemos pasar ya al enunciado del teorema de estructura. Pero demos antes una definición:

Sea U una C^*-álgebra, Z su centro; una proyección de U la llamaremos Z-minimal si pertenece a Z y, considerada como proyección de la C^*-álgebra Z, es minimal (obsérvese que podría muy bien no ser minimal en U).

L.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, Z su centro; se verifica:

c.- El conjunto de las proyecciones Z-minimales de U es finito, de cardinal igual a la dimensión de Z.

d.- Para cada proyección Z-minimal e de U, la C^*-álgebra e.U.e es simple, es decir, sin ideales biláteros propios (se sabe, del álgebra lineal, que toda álgebra compleja con unidad [1] de dimensión finita es isomorfa a un álgebra de matrices cuadradas con términos en C).

e.- Si $\{ e_i \mid 1 \leq i \leq n \}$ es el conjunto de las proyecciones Z-minimales de U, U es isomorfa a la suma directa de las C^*-álgebras simples $\{ e_i.U.e_i \mid 1 \leq i \leq n \}$.

Demostración:

de ((c)).- Como I es una proyección no nula de la C^*-álgebra Z, por aplicación de ((1,C)) y ((1,B,k)), resulta que I se

(1).- simple.

puede escribir como suma de un número finito de proyecciones Z-minimales de U. Pongamos entonces $I = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ con $\{e_i\}$ proyecciones Z-minimales, y veamos que no existe ninguna otra proyección Z-minimal distinta de las $\{e_i\}$. En efecto: si e es una proyección Z-minimal de U distinta de las $\{e_i\}$ es $e.e_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) puesto que $e.e_i$ es una nueva proyección de Z minorante común de e y e_i proyecciones minimales de Z distintas; resulta así: $e = e.I = e(e_1 + \dots + e_n) = 0$, lo que es contradictorio. Veamos que la dimensión de Z es precisamente n . Por aplicación de ((1,C)), ((1,B,i)) y ((1,h)) a la C^*-álgebra Z resulta que $e_i.Z.e_i$ ($1 \leq i \leq n$) es unidimensional igual a $C.e_i$; evidentemente $e_i.Z.e_i = e_i.Z = C.e_i$, con lo que para cada z de Z:

$$z = z.I = z(e_1 + \dots + e_n) = ze_1 + \dots + ze_n = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n \qquad (c_i \in C)$$

y $\{e_i\}$ es un sistema de generadores (en sentido vectorial) de Z. Como es $e_i.e_j = 0$ si $i \neq j$, resulta fácilmente que $\{e_i\}$ es una base de Z y la dimensión de Z es n.

de ((d)).- Si $\{e_i\}$ es el conjunto de las proyecciones Z-minimales de U, claramente es: $(e_i.U.e_i).(e_j.U.e_j) = 0$ para $i \neq j$ y $e_i.U.e_i = U.e_i$ para todo i , de manera que U es suma vectorial de las C^*-álgebras $e_i.U.e_i$ (recuérdese que $I = \sum e_i$). Con estos datos no es dificil comprobar que el centro de cada $e_i.U.e_i$ está contenido en el centro de U. Resulta así que si e es una cualquiera de nuestras proyecciones Z-minimales y M es un ideal bilátero de la C^*-álgebra $e.U.e$, en vista de ((K,b)), M tiene que ser de la forma $(e.U.e).e_o$ con e_o proyección del centro de $e.U.e$; claramente es $e_o \leq e$, y, como el centro de $e.U.e$ está contenido en Z, e_o pertenece a Z. En vista del carácter Z-minimal de e, será $e_o = e$ ($\Longrightarrow$ $M = e.U.e$) o bien $e_o = 0$ ($\Longrightarrow$ $M = 0$) de forma que nuestra C^*-álgebra $e.U.e$ no tiene ideales biláteros propios.

de ((e)).- Sea $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} e_i.U.e_i$ la suma directa (en el sentido que se dijo al principio de este apartado) de las n C^*-álgebras $e_i.U.e_i$ ($\{e_i\}$:conjunto de las proyecciones Z-minimales de U). La aplicación $G: \{u_i\} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i$ de V en U es, en vista de la ortogonalidad de cada dos álgebras distintas de la familia $\{ e_i.U.e_i \mid 1 \leq i \leq n \}$, un homomorfismo. G es sobreyectivo sin más que recordar que la suma vectorial de las álgebras $e_i.U.e_i$ era precisamente U. Es inmediata la comprobación de que $G(v^*) = G(v)^*$, $\forall v \in V$; con lo que G es un $*$-homomorfismo. Por otra parte, si es $G(\{u_i\}) = 0$, será:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^*.u_i = G(\{u_i^*.u_i\}) = G(\{u_i^*\}.\{u_i\}) =$$

$$= G(\{u_i^*\}).G(\{u_i\}) = 0$$; con lo que para todo k

($1 \leq k \leq n$): $0 \leq u_k^*.u_k \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^*.u_i = 0 \Longrightarrow u_k^*.u_k = 0$

$\Longrightarrow \|u_k\|^2 = \|u_k^*.u_k\| = 0 \Longrightarrow u_k = 0$; y en consecuencia $\{u_i\} = 0$. Resulta así que G es un $*$-isomorfismo y las C^*-álgebras V y U son isomorfas.

5.- La Z-traza canónica.

El concepto de Z-traza canónica es clásico de la teoría de W^*-álgebras de tipo finito ([3]-pág. 249, [13]-pág. 93 y [19]-pág. 350). En el caso de las C-álgebras de dimensión finita se puede dar la siguiente caracterización y demostración de su existencia:

M.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, Z su centro; existe un único operador lineal T sobre U, cumpliendo las condiciones:

1.- $\forall u \in U$: $T(u) \in Z$.

2.- $z \in Z \Longrightarrow T(z) = z$.

3.- $\forall (u,v) \in U^2$: $T(u.v) = T(v.u)$.

(T será llamado la Z-traza canónica de U). Este operador es:

a.- positivo: $T(u^*u) \geq 0$, $\forall u \in U$.

b.- no degenerado: $T(u^*u) = 0 \Longrightarrow u = 0$.

c.- Z-lineal: $T(z.u) = z.T(u)$, $\forall (z,u) \in Z \times U$.

d.- $\|T(u)\| \leq \|u\|$, $\forall u \in U$.

e.- $T.G = G.T$, cualquiera que sea G automorfismo de U.

Demostración:

Evidentemente, las condiciones ((M,1)) y ((M,2)) se pueden resumir diciendo que T es una proyección de U sobre su centro; nuestro propósito es por tanto demostrar la existencia y unicidad de una tal proyección cumpliendo la condición adicional ((M,3)). Para ello hagamos uso de la estructura hilbertiana que confiere a U una traza no degenerada t ($(u|v) = \langle t, v^*u \rangle$, $|u| = \sqrt{\langle t, u^*u \rangle}$). Sea T la proyección ortogonal del espacio de Hilbert $\{U, (\ |\ )\}$ sobre la variedad lineal cerrada Z. T cumple evidentemente las condiciones ((M,1)) y ((M,2)); en cuanto a ((M,3)), se tiene (téngase en cuenta que, para cada w de U, $w - T(w)$ es ortogonal a Z y que t es una traza):

$$(T(u.v) - T(v.u) \mid z) = (u.v - v.u \mid z) =$$

$$= (u \mid z.v^*) - (u \mid v^*.z) = 0 \quad , \qquad \forall (u,v,z) \in U^2 \times Z \quad ;$$

en particular, como $T(u.v) - T(v.u)$ pertenece a Z :

$$| T(u.v) - T(v.u) |^2 = 0 \Longrightarrow T(u.v) = T(v.u) \quad , \quad \forall (u,v) \in U^2.$$

Demostrada la existencia pasemos a ver la unicidad. Denotemos $\square$ la conjugación de la C^*-álgebra $L\{U, (\ |\ )\}$ (el símbolo $*$ sería ambiguo pues se podría interpretar como la pseudo-conjugación "natural" de $L(U)$, ((II,3))); es decir: para cada $G \in L(U)$, $G^\square$ designa el único operador tal que $(G(u) \mid v) = (u \mid G^\square(v))$, $\forall (u,v) \in U^2$; el operador T encontrado arriba, por ser una proyección ortogonal, es $\square$-simétrico. Sea entonces G cualquier proyección de U sobre Z tal que $G(u.v) = G(v.u)$; pretendemos ver que es $G = T$. Desde luego es $T.G = G$ y $G.T = T$, por ser G y T proyecciones sobre una misma variedad de U; de la primera igualdad resulta por conjugación: $G^{\square}.T = G^{\square}$; de manera que si G fuese $\square$-simétrica ($G = G^{\square}$) resultaría, comparando con la segunda igualdad: $G = T$, tal como se desea. Veamos que así es en efecto: cualesquiera que sean u y v de U, es por hipótesis $G(uv^*) = G(v^*u)$, de donde:

$$0 = (G(uv^* - v^*u) \mid w) = (uv^* - v^*u \mid G^{\square}(w)) =$$

$$= (u \mid G^{\square}(w).v) - (u \mid v.G^{\square}(w)) = (u \mid G^{\square}(w).v - v.G^{\square}(w)) ,$$

$$\forall (u,v,w) \in U^3 \Longrightarrow G^{\square}(w).v - v.G^{\square}(w) = 0 , \quad \forall (v,w) \in U^2$$

$$\Longrightarrow G^{\square}(w) \in Z , \quad \forall w \in U .$$

Entonces es: $\quad G.G^{\square} = G^{\square}$

y, por conjugación: $\quad G.G^{\square} = G$

$$\left.\begin{array}{l} G.G^{\square} = G^{\square} \\ G.G^{\square} = G \end{array}\right\} \Longrightarrow G = G^{\square} ,$$

que es lo que faltaba por demostrar.

Demostración de las propiedades de la Z-traza canónica:

de ((a)).- Sea $\bar{t}$ la restricción de t a Z; $\bar{t}$ es también una traza no degenerada. Cualquiera que sea z' funcional positivo sobre Z, se sabe (((3,H,c))) que z' es de la forma $z' = z.\bar{t}$ con z elemento positivo de Z. Entonces es:

$$\langle z', T(u^*u)\rangle = \langle z.\bar{t}, T(u^*u)\rangle = \langle \bar{t}, T(u^*u).z\rangle =$$

$$= \langle t, T(u^*u).z \rangle = (T(u^*u) \mid z) = (u^*u \mid T(z)) = (u^*u \mid z) =$$

$$= (u \mid uz^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}) = (uz^{\frac{1}{2}} \mid uz^{\frac{1}{2}}) = | uz^{\frac{1}{2}}|^2 \geq 0 \quad .$$

En resumen: $\langle z', T(u^*u) \rangle \geq 0$ para todo funcional positivo z' sobre Z, lo que implica que $T(u^*u)$ es un elemento positivo de Z, cualquiera que sea u .

de ((b)).- La misma igualdad que acabamos de utilizar, particularizada para $z = I$, da:

$\langle t, T(u^*u) \rangle = |u|^2 \quad , \quad \forall u \in U$; que pone de manifiesto que: $T(u^*u) = 0 \Longrightarrow u = 0$.

de ((c)).- Sea $(z,u) \in Z{\times}U$; se sabe que $T(z.u)$ es el único elemento de Z tal que $z.u - T(z.u)$ es ortogonal a Z. Pero también:

$$(z.u - z.T(u) \mid z_1) = (u - T(u) \mid z^* z_1) = 0 \quad , \quad \forall z_1 \in Z \quad ;$$

sin más que tener en cuenta que $z^* z_1 \in Z$ y que $u - T(u)$ es ortogonal a Z. Resulta así que $z.u - z.T(u)$ es ortogonal a Z ($z.T(u) \in Z$) lo que, en vista de la unicidad apuntada, nos lleva a concluir: $T(z.u) = z.T(u)$.

de ((d)).- Evidentemente: $T(I) = I$, con lo que aplicando ((II,1,C,b)) (se acaba de ver en ((a)) que T es positiva), resulta: $\|T\| = \|T(I)\| = \|I\| = 1$; de donde $\|T(u)\| \leq \|u\| \quad , \quad \forall u \in U$.

de ((e)).- El centro de un álgebra es siempre invariante por las automorfismos de ésta. Si G es un automorfismo de U, se comprueba entonces sin dificultad que $G^{-1}.T.G$ es un operador lineal sobre U cumpliendo las condiciones ((M;1,2 y 3)), con lo que en vista de la unicidad del tal operador, se concluye:

$G^{-1}.T.G = T \Longrightarrow T.G = G.T$, como se deseaba.

Siguiendo en el ambiente de la demostración de nuestro teorema ((M)), se tiene:

$$\langle t, T(u)\rangle = (T(u) \mid I) = (u \mid T(I)) = (u \mid I) = \langle t, u\rangle,$$

$\forall u \in U$; resultando así que al menos las trazas no degeneradas t sobre U cumplen la condición

$\langle t, T(u)\rangle = \langle t, u\rangle$, $\forall u \in U$; situación que describiremos diciendo que t es invariante por la Z-traza canónica. Evidentemente todo funcional lineal sobre U invariante por T es central. El resultado que acabamos de obtener para las trazas no degeneradas induce a plantearse la certeza del recíproco. La respuesta es afirmativa:

N.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita. Un funcional lineal sobre U es central si y sólo si es invariante por la Z-traza canónica. En consecuencia la aplicación $u' \longrightarrow u'|Z$ ($u'|Z$: restricción de u' a Z) es una biyección lineal isométrica ordenada del conjunto de los funcionales lineales centrales de U sobre el conjunto de los funcionales de Z (la biyección opuesta viene dada por la fórmula $z' \longrightarrow z'.T$; T: la Z-traza canónica de U).

Demostración:

Los funcionales lineales de U invariantes por T son evidentemente centrales. Recíprocamente: sea u' un funcional central sobre U; por ((3,H,d)), u' es de la forma $u' = z.t$, donde t es una traza no degenerada sobre U (que, se ha visto arriba, es invariante por T) y z un elemento de Z; con lo que:

$$\langle u', T(u)\rangle = \langle z.t, T(u)\rangle = \langle t, z.T(u)\rangle =$$

$$= \langle t, T(z.u)\rangle = \langle t, z.u\rangle = \langle z.t, u\rangle = \langle u', u\rangle \quad ,$$

$\forall u \in U$ (se ha aplicado la propiedad ((M,c)) de la Z-traza canónica); y u' es invariante por T, como se deseaba.

Sea entonces u' un funcional lineal central sobre U; se acaba de ver que u' es invariante por T, con lo que:

$$|\langle u', u\rangle| = |\langle u', T(u)\rangle| = |\langle u'|Z, T(u)\rangle| \leq$$

$$\leq \|u'|Z\| \, \|T(u)\| \leq \|u'|Z\| \, \|u\| \Longrightarrow \|u'\| \leq \|u'|Z\|$$

(se ha utilizado la propiedad ((M,d)) de la Z-traza canónica); como evidentemente es $\|u'|Z\| \leq \|u'\|$, resulta $\|u'|Z\| = \|u'\|$ que pone de manifiesto que la aplicación claramente lineal

$u' \longrightarrow u'|Z$ del conjunto de los funcionales centrales de U en Z' es isométrica y en consecuencia inyectiva. Para ver que es sobreyectiva téngase en cuenta que si z' es un funcional lineal cualquiera sobre Z, $z'.T$ es un funcional central sobre U cuya restricción a Z es precisamente z'.

Veamos por último que la biyección en cuestión $u' \rightarrow u'|Z$ es ordenada. En efecto: u' y $u'|Z$ dan iguales valores sobre I y, se acaba de ver, tienen igual norma; basta entonces recordar que la condición $\|w'\| = \langle w', I \rangle$ caracteriza a los funcionales positivos de una C^*-álgebra para darse cuenta de que u' y $u'|Z$ (u': funcional lineal central sobre U) son a un tiempo positivos o no. Se puede comprobar fácilmente incluso que, en el caso de ser u' y $u'|Z$ positivos, ambos son a un tiempo degenerados o no (u', como siempre, se supone central); para ello considérese la identidad $u' = (u'|Z).T$ y téngase en cuenta el carácter no degenerado de T.

6.- La traza canónica. Estructura estelar canónica del álgebra de operadores lineales sobre una C^*-álgebra de dimensión finita.

Estamos ya en condiciones de poder detectar en el dual de una C^*-álgebra de dimensión finita un elemento privilegiado, de forma análoga a como el elemento unidad de la C^*-álgebra es un elemento distinguido de la misma; este elemento va a ser, entre otras cosas, una traza no degenerada, con lo que habremos conseguido dos cosas importantes: la primera elegir, de todas las estructuras hilbertianas posibles sobre U del tipo $\{U, (u,v) \to \langle u', v^*u \rangle\}$ (u': funcional positivo no degenerado), una canónicamente; y la otra, a la vista de ((3,H)), disponer de una identificación canónica de la C^*-álgebra en cuestión con su dual.

0.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, Z su centro. Existe un único funcional lineal central sobre U cuyo valor sobre I es 1 y cuya restricción a Z es invariante por todos los automorfismos de Z (este funcional será notado I' y le llamaremos la traza canónica de U). Se verifica además:

a.- I' es positivo no degenerado (el hecho de ser positivo es el que nos ha hecho "a priori" denominarlo traza).

b.- I' es invariante por todos los automorfismos de U.

Demostración:

Empecemos suponiendo que U es además conmutativa. En este caso el teorema se reduce a la existencia y unicidad de un funcional lineal u' sobre U tal que $\langle u', I \rangle = 1$ y $\langle u', G(u) \rangle = \langle u', u \rangle$ cualesquiera que sean u de U y G automorfismo de U y a la comprobación de que este funcional ha de ser necesariamente positivo no degenerado. Según el teorema de Gelfand-Naimark, U es $*$-isomorfa al álgebra de las funciones de Ω en C (Ω : espectro de U o conjunto de sus caracteres, que es finito por ser algebraicamente libre. Es por esto por lo que no hemos hablado de funciones continuas puesto que la topología de Ω, siendo separada, no puede ser otra que la discreta con lo que toda función de Ω en C es continua). Razonemos entonces sobre la C-álgebra $F(\Omega,C)$; todo automorfismo de $F(\Omega,C)$ es de la forma $f \longrightarrow f.b$ donde $\underline{b}$ es una biyección de Ω sobre sí mismo. Con esto es fácil ver que la aplicación

$$f \longrightarrow (1/n) \sum_{x\in\Omega} f(x)$$

de $F(\Omega,C)$ en C (n: cardinal de Ω, igual a la dimensión de $F(\Omega,C)$) es el único funcional lineal sobre $F(\Omega,C)$ invariante por automorfismos y de valor uno sobre la unidad de $F(\Omega,C)$. Como la imagen de $f^*.f$ mediante este funcional es $(1/n) \sum_{x\in\Omega} |f(x)|^2$, queda claro su carácter positivo no degenerado.

Hemos demostrado la existencia y unicidad de la traza canónica sobre una C^*-álgebra de dimensión finita conmutativa. El enunciado de nuestro teorema ((0)) se traduce entonces en términos de la existencia y unicidad de un funcional lineal central sobre U cuya restricción a la C^*-álgebra conmutativa Z sea la traza canónica de Z; enunciada la cuestión de esta manera, resulta evidente, sin más que recordar (((5,N))) que cada funcional lineal sobre Z admite una única extensión central a U. Como la traza canónica de Z, lo hemos visto arriba, es positiva no degenerada, resulta también de ((5,N)) que su única extensión central a U, que es por definición la traza canónica de U, es igualmente positiva no degenerada, con lo que queda probado ((a)).

Para demostrar ((b)), llamemos z' a la traza canónica de Z, I' la de U. Según ((5,M)) es $I' = z'.T$ (T: Z-traza canónica de U). Si G es un automorfismo de U, es $T.G = G.T$ (((5,M,e))). Como Z es invariante por G, la aplicación $z \longrightarrow G(z)$ de Z en sí mismo es un automorfismo de Z. Por último, z' , traza canónica de una C^*-álgebra de dimensión finita conmutativa, se sabe que es invariante por los automorfismos de Z. Haciendo uso de estos resultados, se tiene:

$$I'.G = z'.T.G = z'.G.T = z'.T = I' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle I', G(u)\rangle = \langle I', u\rangle \quad , \quad \forall u \in U \qquad ;$$

con lo que I' es invariante por los automorfismos de U.

Nota al teorema ((O)).- A la vista del caso de las C^*-álgebras de dimensión finita conmutativas y de las afirmaciones ((O,a y b)) podría pensarse en caracterizar la traza canónica como el único funcional positivo no degenerado invariante por automorfismos y que vale uno sobre la unidad de U. Hay que advertir que esto no es correcto. En efecto: el conjunto de elementos de U invariantes por automorfismos es una C^*-subálgebra de U no necesariamente reducida a C.I , como lo demuestra el caso de ser U igual a la suma directa de C y de la C^*-álgebra de las matrices 2x2 con términos en C, en cuyo caso la C^*-subálgebra de U invariante puntualmente por automorfismos es 2-dimensional y existen en consecuencia elementos positivos inversibles invariantes por automorfismos no proporcionales a I; si u_o es uno de estos elementos $\langle I', u_o\rangle^{-1}.u_o.I'$ es, según ((3,H)), un nuevo funcional positivo no degenerado claramente distinto de I' pero que, puede comprobarse fácilmente, es también invariante por automorfismos y da valor uno sobre la unidad de U.

Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, I' su traza canónica; el producto escalar $(u,v) \longrightarrow (u \mid v) = \langle I', v^*u\rangle$ lo llamaremos producto escalar canónico de U, y al par $\{U, (\ \mid\ )\}$, estructura hilbertiana canónica de U ($|u| = \sqrt{\langle I', u^*u\rangle}$). El álgebra L(U) considerada como álgebra de operadores en el Hilbert $\{U, (\ \mid\ )\}$, es decir: con la norma $|F| = \sup_{|u| \leq 1} |F(u)|$ ($F \in L(U)$) es una C^*-álgebra. Si G es un automorfismo de U, como I' es invariante por automorfismos, se tiene:

$$(G(u) \mid v) = \langle I', v^*G(u)\rangle = \langle I', G^{-1}(v^*G(u))\rangle =$$

$$= \langle I', G^{-1}(v^*).u\rangle = \langle I', ((G^{-1}(v^*))^*)^*.u\rangle =$$

$$= \langle I', (G^{-1*}(v))^*.u\rangle = \langle I', (G'(v))^*.u\rangle = (u \mid G'(v)) ,$$

$\forall (u,v) \in U^2$ (se ha recordado - ((II,3)) - que, para un automorfismo G de una C^*-álgebra se definía $G' = G^{-1*}$).

El hecho que acabamos de encontrar sugiere extender la notación $\bullet$ como símbolo de la conjugación de la C^*-álgebra $L\{U, (\ |\ )\}$, es decir: para cada $F \in L(U)$, llamaremos $F^\bullet$ al único operador tal que $(F(u) | v) = (u | F^\bullet(v))$, $\forall (u,v) \in U^2$. Resulta así confirmada, en el caso de C^*-álgebras de dimensión finita, la conjetura que proponíamos al final de ((II,3)) según la cual existía en $L(U)$ una conjugación $\bullet$ que con una adecuada norma (en nuestro caso $F \longrightarrow |F| = \sup_{|u| \leq 1} |F(u)|$), desde luego equivalente a la usual por dimensionalidad finita, dota a $L(U)$ de estructura de C^*-álgebra, y tal que si G es un automorfismo de U se verifica: $G^\bullet = G^{*-1}$.

Se veia al principio de ((II,4)) que, si d era una derivación de una C^*-álgebra donde fuese cierta la mencionada conjetura, ocurría: $d^\bullet = -d^*$ (este hecho puede, si se quiere, verificarse para C^*-álgebras de dimensión finita de forma directa, sin más que tener en cuenta que I' , definidor de la operación $\bullet$, es una traza y que, por ((2,E)), toda derivación de una C^*-álgebra de dimensión finita es interior).

Podemos aprovechar el hecho encontrado según el cual $L(U)$ con la conjugación $\bullet$ es una C^*-álgebra y que dicha conjugación se comporta de manera especial con los automorfismos y derivaciones de U, para demostrar:

P.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, G un automorfismo de U, d una conjugación de U. Se verifica:

c.- El espectro de G es invariante por la aplicación $z \longrightarrow z^{-1}$ de $C - \{0\}$ en sí mismo.

d.- El espectro de d es invariante por la aplicación $z \longrightarrow -z$ de C en C.

Demostración:

Ambos resultados se basan en que tanto la conjugación estelar ($\bullet$) como la pseudo-conjugación "natural" ($*$) de L(U) verifican: $\sigma(F^{\bullet}) = \overline{\sigma(F)}$, $\sigma(F^*) = \overline{\sigma(F)}$. Según esto:

$$z \in \sigma(G) \Longrightarrow \bar{z} \in \sigma(G^*) \Longrightarrow \bar{z}^{-1} \in \sigma(G^{*^{-1}}) = \sigma(G^{\bullet})$$

$$\Longrightarrow z^{-1} \in \sigma(G) \quad .$$

Y análogamente:

$$z \in \sigma(d) \Longrightarrow \bar{z} \in \sigma(d^{\bullet}) = \sigma(-d^*) = -\sigma(d^*) \Longrightarrow$$

$$-z \in \sigma(d) \quad .$$

Nota sobre la estructura estelar canónica de L(U) (U: C^*-álgebra de dimensión finita).- Se ha visto que L(U) con la norma $|F| = \sup_{|u| \leq 1} |F(u)|$ y la conjugación $\bullet$ definida por la fórmula $(F(u) | v) = (u | F^{\bullet}(v))$, $\forall (u,v) \in U^2$ es una C^*-álgebra y que se verifica $G^{\bullet} = G^{*^{-1}}$ para cualquier automorfismo G de U ((|): producto escalar canónico de U,

$|u| = \sqrt{(u|u)}$, $\forall u \in U$). Convengamos en llamar a $\{ L(U), \circ, |\ | \}$ la estructura estelar canónica de L(U) y $\{ L(U), \|\ \| \}$ la estructura usual de L(U) ($\|F\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|F(u)\|$, $F \in L(U)$; $u \longrightarrow \|u\|$: la norma estelar de U). Por desgracia, es una limitación intrínseca a la teoría el hecho de que, salvo el caso trivial de ser U unidimensional, las normas usual y estelar canónica de L(U) no coinciden. Para verlo razonemos por reducción al absurdo; supongamos en consecuencia que es $\|F\| = |F|$, $\forall F \in L(U)$; para cada u de U sea F_u la aplicación $v \longrightarrow \langle I', v \rangle .u$ (I': traza canónica de U) de U en U; evidentemente $F_u \in L(U)$ con lo que $\|F_u\| = |F_u|$. Calculemos independientemente estos dos números:

$$\|F_u\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|F_u(v)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} (|\langle I', v \rangle| . \|u\|) =$$

$$= \|u\| \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle I', v \rangle| = \|u\| . \|I'\| = \|u\| \langle I', I \rangle = \|u\|$$

(se ha tenido en cuenta que I' es positivo con lo que $\|I'\| = \langle I', I \rangle$ y que $\langle I', I \rangle = 1$ por definición de la traza canónica),

$$|F_u| = \sup_{|v| \leq 1} |F (v)| = \sup_{|v| \leq 1} (|\langle I', v \rangle| . |u|) =$$

$$= |u| . \sup_{|v| \leq 1} |\langle I', v \rangle| = |u| . \sup_{|v| \leq 1} (v | I) = |u| . |I| = |u| .$$

Resulta entonces: $\|u\| = |u|$, $\forall u \in U$. Pero si U no es unidimensional esta afirmación es absurda ya que entonces U ha de poseer ideales por la izquierda propios (si no, todo elemento es inversible y se aplica el teorema de Gelfand) lo que equivales, según ((4,K,a)), a la existencia de una proyección e no nula y distinta de I; e y $I - e$ son proyecciones no nulas de U, con lo que $\|I\| = \|e\| = \|I - e\| = 1$; mientras que, por ser $(I - e | e) = 0$: $|I|^2 = |I - e|^2 + |e|^2$.

El hecho que acabamos de ver, según el cual las normas usual y estelar canónica de $I(U)$ no coinciden (salvo U unidimensional), implica otra incompatibilidad entre las estructuras usual y estelar canónica de $L(U)$; concretamente:

Si U es una C^*-álgebra de dimensión finita mayor que uno, la afirmación $\|F'\| = \|F\|$, $\forall F \in L(U)$ no es cierta. Razonemos igualmente por reducción al absurdo; sería entonces:

$$|F|^2 = |F'.F| \leq \|F'.F\| \leq \|F'\|.\|F\| = \|F\|^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |F| \leq \|F\| , \qquad \forall F \in L(U)$$

(la desigualdad $|F'.F| \leq \|F'.F\|$ resulta de ser $\{L(U), \| \ \|\}$ un álgebra de Banach y $|F'.F|$ igual al radio espectral de $F'.F$ por ser $F'.F$ elemento normal de la C^*-álgebra $\{L(U), ' , | \ |\}$). Llegados a este punto, aceptemos por el momento:

Q.- Sea X un espacio normado, $L(X)$ el álgebra normada de los operadores lineales continuos sobre X ($\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F(x)\|$).

Sea $\| \ \|_1$ una norma sobre L(X) tal que $\{L(X), \| \ \|_1\}$ es un álgebra normada y $\|F\|_1 \leq \|F\|$, $\forall F \in L(X)$. Entonces $\| \ \|_1$ coincide con la norma usual.

Aplicando este resultado a nuestro caso, a la vista de la desigualdad $|F| \leq \|F\|$, $\forall F \in L(U)$, y de que $\{L(U), | \ |\}$ es evidentemente un álgebra normada, concluimos: $|F| = \|F\|$, $\forall F \in L(U)$; que va contra el hecho demostrado antes sobre la no coincidencia de las normas usual y estelar canónica de L(U).

Demostración de ((Q)).- Para cada par $(x,x') \in X \times X'$ (X': dual topológico de X) llamemos $x*x'$ a la aplicación $y \longrightarrow \langle x', y \rangle .x$ de X en X ; $x*x'$ es evidentemente un elemento de L(X) y se comprueba sin dificultad que $\|x*x'\| = \|x\|.\|x'\|$. Fijemos un elemento x'_o no nulo de X' y llamemos f a la aplicación $x \longrightarrow x*x'_o$ de X en L(X). Se ve inmediatamente que f es L(X)-lineal, es decir $f(u.x) = u.f(x)$, $\forall (u,x) \in L(X) \times X$ (designamos por u.x el valor del operador u sobre el elemento x).

Sean x e y elementos no nulos de X por lo demás cualesquiera; se sabe la existencia de un elemento $y' \in X'$ tal que $\|y'\| = 1$ y $\langle y', y \rangle = \|y\|$. Con esto se comprueba la igualdad:

$x = \|y\|^{-1}(x*y').y$, y como f es L(X)-lineal:

$f(x) = \|y\|^{-1}(x*y').f(y)$. Haciendo uso de que $\{L(X), \| \ \|_1\}$

es un álgebra normada y de que $\| \ \|_1 \leq \| \ \|$, se obtiene:

$$\|f(x)\|_1 = \| \|y\|^{-1}(x*y').f(y)\|_1 \leq \|y\|^{-1}\|x*y'\|_1 \|f(y)\|_1 \leq$$

$$\leq \|y\|^{-1}\|x*y'\| \|f(y)\|_1 = \|y\|^{-1}\|x\| \|y'\| \|f(y)\|_1 =$$

$$= \|y\|^{-1}\|x\| \|f(y)\|_1 \Longrightarrow \|x\|^{-1} \|f(x)\|_1 \leq \|y\|^{-1} \|f(y)\|_1,$$

cualesquiera que sean x e y elementos no nulos de X. Entonces es: $\|x\|^{-1}\|f(x)\|_1 = \text{cte.}$, $\forall x \in X - \{0\}$. Esta constante puede suponerse igual a uno sin más que sustituir el funcional x_0' definidor de f por un conveniente múltiplo escalar. Con esta hipótesis es: $\|f(x)\|_1 = \|x\|$, $\forall x \in X$. Entonces cualesquiera que sean x de X y u de L(X):

$$\|u.x\| = \|f(u.x)\|_1 = \|u.f(x)\|_1 \leq \|u\|_1 \|f(x)\|_1 = \|u\|_1 \|x\|.$$

Esta desigualdad pone de manifiesto que es $\|u\| \leq \|u\|_1$, $\forall u \in L(X)$; como por hipótesis se verifica la desigualdad contraria, concluimos: $\|u\| = \|u\|_1$, $\forall u \in L(X)$; tal como se deseaba.

Nota.- Si en ((Q)) se sustituye la hipótesis $\| \ \|_1 \leq \| \ \|$ por una del tipo $\| \ \|_1 \leq K \| \ \|$, se puede llegar, razonando de manera análoga a como lo hemos hecho, a la conclusión de que $\| \ \|_1$ y $\| \ \|$ son equivalentes.

C A P I T U L O IV :

FORMAS HERMITIANAS POSITIVAS CON VALORES EN UNA C^*-ALGEBRA. MODULOS DE HILBERT SOBRE C^*-ALGEBRAS.

1.- Formas hermitianas positivas con valores en una C^*-álgebra. Desigualdades de Minkowski y de Cauchy-Schwartz.

Sea X un espacio vectorial complejo, U una C^*-álgebra. Llamaremos forma hermitiana positiva sobre X con valores en U a toda aplicación $(x,y) \longrightarrow (x \mid y)$ de $X \times X$ en U verificando las propiedades:

a.- $(x + y \mid z) = (x \mid z) + (y \mid z)$, $\forall (x,y,z) \in X^3$.

b.- $(c.x \mid y) = c.(x \mid y)$, $\forall (c,x,y) \in C \times X^2$.

c.- $(x \mid y)^* = (y \mid x)$, $\forall (x,y) \in X^2$.

d.- $(x \mid x) \geqslant 0$, $\forall x \in X$.

Si $(x \mid x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, la forma hermitiana se llamará como de costumbre no degenerada. Los axiomas ((a)), ((b)) y ((c)) tienen las clásicas consecuencias:

e.- $(x \mid y+z) = (x \mid y) + (x \mid z)$, $\forall (x,y,z) \in X^3$.

f.- $(x \mid c.y) = \bar{c}.(x \mid y)$, $\forall (c,x,y) \in C \times X$.

Pasamos inmediatamente a generalizar la desigualdad de Minkowski:

A.- Sea X un espacio vectorial complejo, U una C^*-álgebra, $(x,y) \longrightarrow (x \mid y)$ una forma hermitiana positiva sobre X con valores en U. En estas condiciones la aplicación $x \longrightarrow \sqrt{\|(x \mid x)\|}$ de X en R es una seminorma sobre X. En consecuencia se verifica (desigualdad de Minkowski generalizada):

$$\sqrt{\|(x+y \mid x+y)\|} \leq \sqrt{\|(x \mid x)\|} + \sqrt{\|(y \mid y)\|} , \quad \forall (x,y) \in X^2.$$

Demostración:

Comprobada la identidad:

$$a.b(x+y \mid x+y) + (bx-ay \mid bx-ay) =$$

$$= (a+b)(b(x \mid x) + a(y \mid y)) \qquad , \text{ cualesquiera que sean}$$

a y b números reales positivos y x e y elementos de X; como es $(bx-ay \mid bx-ay) \geq 0$, se tiene:

$$0 \leq ab(x+y \mid x+y) \leq (a+b)(b(x \mid x) + a(y \mid y)) \qquad ((*));$$

de donde, multiplicando por $(ab(a+b))^{-1}$, resulta:

g.- $$0 \leq \frac{(x+y \mid x+y)}{a+b} \leq \frac{(x \mid x)}{a} + \frac{(y \mid y)}{b},$$

y, tomando normas (la norma de una C^*-álgebra es compatible con el orden de los elementos positivos):

$$\frac{\|(x+y \mid x+y)\|}{a+b} \leq \left\| \frac{(x \mid x)}{a} + \frac{(y \mid y)}{b} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{\|(x \mid x)\|}{a} + \frac{\|(y \mid y)\|}{b}$$; resultando así que, si llamamos p a la aplicación $x \longrightarrow \sqrt{\|(x \mid x)\|}$ de X en R_+, se verifica:

$$\frac{p(x+y)^2}{a+b} \leq \frac{p(x)^2}{a} + \frac{p(y)^2}{b}$$, y, evidentemente:

$p(c.x) = |c|.p(x)$, $\forall (c,x) \in C \times X$. Llegados a este punto, nuestra proposición ((A)) queda patente en cuanto demostremos:

h.- Sea X un espacio vectorial complejo, p una aplicación de X en R_+. p es una seminorma si y sólo si se verifican las condiciones:

1.- $p(c.x) = |c|.p(x)$, $\forall (c,x) \in C \times X$.

2.- $\dfrac{p(x + y)^2}{a + b} \leq \dfrac{p(x)^2}{a} + \dfrac{p(y)^2}{b}$, cualesquiera que sean

$\underline{x}$ e $\underline{y}$ de X y $\underline{a}$ y $\underline{b}$ reales positivos.

Demostración: si p es una seminorma, ((h,1)) se verifica por definición; para comprobar ((h,2)) tengamos en cuenta la desigualdad:

$$\frac{|z_1 + z_2|^2}{a + b} \leq \frac{|z_1|^2}{a} + \frac{|z_2|^2}{b} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a \text{ y } b \text{ : núms. reales positivos} \\ z_1 \text{ y } z_2\text{: núms. complejos} \end{array} \right.$$

(puede salir como particularización de ((g)) en el caso $X = U = = C$, $(z_1 | z_2) = z_1 . \overline{z_2}$). Entonces:

$$\frac{p(x + y)^2}{a + b} \leq \frac{(p(x) + p(y))^2}{a + b} \leq \frac{p(x)^2}{a} + \frac{p(y)^2}{b}$$, tal como

se deseaba.

Recíprocamente, supongamos que p verifica las propiedades ((h,1)) y ((h,2)); para ver que p es una seminorma sólo hace falta comprobar que se verifica la desigualdad $p(x + y) \leq \leq p(x) + p(y)$, $\forall (x,y) \in X^2$; desigualdad esta que, en el caso de que p(x) y p(y) sean a un tiempo no nulos, resulta directamente de ((h,2)) poniendo en particular $a = p(x)$, $b = p(y)$;

si alguno de los números $p(x)$, $p(y)$ es cero (p. e. : $p(x)$), entonces ((h,2)) se puede poner en la forma:

$b.p(x + y)^2 \leq (a + b).p(y)^2$, de donde tomando límites

($a \longrightarrow 0$) : $p(x + y) \leq p(y) = p(x) + p(y)$, y la desigualdad problema es también cierta.

Establecida ya la generalización de la desigualdad de Minkowski para formas hermitianas positivas con valores en una C^*-álgebra, podemos pasar a hacer un primer intento de generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwartz (una generalización más consistente se verá cuando estudiemos los módulos prehilbertianos sobre una C^*-álgebra). Para ello, con el mismo ambiente y notación de ((A)), pongamos la desigualdad ((*)) en la forma:

$$(x | y) + (y | x) \leq (b/a)(x | x) + (a/b)(y | y) \qquad ((**)) ;$$

si $(x | x)$ e $(y | y)$ son elementos no nulos de U, hagamos $a = \sqrt{\|(x | x)\|}$, $b = \sqrt{\|(y | y)\|}$ y recordemos que para todo elemento simétrico u de una C^*-álgebra se verifica: $u \leq \|u\|.I$; entonces:

$$(x | y) + (y | x) \leq 2\sqrt{\|(x | x)\| \, \|(y | y)\|}\,.I \qquad ,$$

esta desigualdad, junto con las tres que se obtienen cambiando y por $-y$, $i.y$, $-i.y$ sucesivamente, nos lleva a:

$$\begin{cases} -2\sqrt{\|(x\mid x)\|\,\|(y\mid y)\|} \leq (x\mid y) + (y\mid x) \leq 2\sqrt{\|(x\mid x)\|\,\|(y\mid y)\|} \\ -2\sqrt{\|(x\mid x)\|\,\|(y\mid y)\|} \leq i((x\mid y) - (y\mid x)) \leq 2\sqrt{\|(x\mid x)\|\,\|(y\mid y)\|}. \end{cases}$$

Recordemos que, para un elemento simétrico u de una C^*-álgebra, una relación del tipo $m \leq u \leq M$, con m y M números reales, implica $\|u\| \leq \text{máx}\{|m|, |M|\}$ ([11] y [12]).Entonces:

$$\begin{cases} \|(x\mid y) + (y\mid x)\| \leq 2\sqrt{\|(x\mid x)\|\,\|(y\mid y)\|} \\ \|(x\mid y) - (y\mid x)\| \leq 2\sqrt{\|(x\mid x)\|\,\|(y\mid y)\|} \end{cases} .$$

Como $(x\mid y) = (1/2)((x\mid y) + (y\mid x)) + (1/2)((x\mid y) - (y\mid x))$:

$$\|(x\mid y)\| \leq 2\sqrt{\|(x\mid x)\|\,\|(y\mid y)\|} \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2 \quad |$$

$(x\mid x) \neq 0$, $(y\mid y) \neq 0$. Si alguno de los elementos $(x\mid x)$, $(y\mid y)$ es cero, vamos a ver que es $(x\mid y) = 0$, con lo que la desigualdad que acabamos de encontrar será también cierta en este caso. En efecto: supongamos, por ejemplo, $(x\mid x) = 0$; la desigualdad ((**)) queda así:

$(x\mid y) + (y\mid x) \leq (a/b)(y\mid y)$, de donde tomando límites ($a \longrightarrow 0$) : $(x\mid y) + (y\mid x) \leq 0$. Basta entonces cambiar y sucesivamente por $-y$, $i.y$, $-i.y$ para obtener:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq (x \mid y) + (y \mid x) \leq 0 \Longrightarrow (x \mid y) + (y \mid x) = 0 \\ 0 \leq i((x \mid y)-(y \mid x)) \leq 0 \Longrightarrow (x \mid y) - (y \mid x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x \mid y) = 0.$$

Hemos demostrado así:

B.- Sea X un espacio vectorial complejo, U una C^*-álgebra , $(x,y) \longrightarrow (x \mid y)$ una forma hermitiana positiva sobre X con valores en U. Se verifica (desigualdad de Cauchy-Schwartz generalizada):

$$\|(x \mid y)\| \leq 2\sqrt{\|(x \mid x)\| \, \|(y \mid y)\|} \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2 \, .$$

Discusión de los resultados obtenidos hasta el momento.- Recordando que todo elemento positivo de una C^*-álgebra tiene una única raiz cuadrada positiva, cabría pensar en una generalización "literal" de la desigualdad de Minkowski, a saber (manteniendo los conceptos y los símbolos que estamos utilizando desde el principio del capítulo):

$$\sqrt{(x+y \mid x+y)} \leq \sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)} \quad , \forall (x,y) \in X^2 \, .$$

A este respecto hay que decir:

i.- La generalización "literal" de la desigualdad de Minkowski no es en general cierta, como lo muestra el siguiente ejemplo: sea X un espacio de Hilbert no unidimensional y U la C^*-álgebra de los operadores lineales continuos sobre X; si para cada par (x,y) de elementos de X convenimos en llamar $x*y$ a la aplicación $z \longrightarrow (z \mid y).x$ de X en sí mismo, es evidente que $x*y \in U$ y se comprueba sin dificultad que la aplicación $(x,y) \longrightarrow x*y$ es una forma hermitiana positiva sobre X con valores en U. La identidad de comprobación inmediata:

$$(x*y).(z*t) = (z \mid y).(x*t) \quad , \quad \forall (x,y,z,t) \in X^4 \quad ,$$

da por particularización ($x = y = z = t$):

$$(x*x)^2 = \|x\|^2.(x*x) \xRightarrow{x \neq 0} (\|x\|^{-1}.(x*x))^2 = x*x \quad ,$$

de donde la única raiz positiva de $x*x$ ($x \neq 0$) no puede ser otra que $\|x\|^{-1}.(x*x)$. De ser cierta entonces la generalización "literal" de la desigualdad de Minkowski, se tendría:

$$\frac{(x+y)*(x+y)}{\|x+y\|} \leq \frac{x*x}{\|x\|} + \frac{y*y}{\|y\|} \qquad (\ x,\ y,\ x+y \text{ no nulos })$$

de donde, comprobando la identidad inmediata $(x*x(z) \mid z) = $
$= |(x \mid z)|^2$, $\forall (x,z) \in X$, y teniendo en cuenta que la aplicación $u \longrightarrow (u(z) \mid z)$ de U en C es un funcional lineal positivo sobre U, resultaría:

$$\frac{|(x+y \mid z)|^2}{\|x+y\|} \leq \frac{|(x \mid z)|^2}{\|x\|} + \frac{|(y \mid z)|^2}{\|y\|} \qquad \begin{cases} (x,y,z) \in X^3 \\ x,y,x+y \text{ no nulos.} \end{cases}$$

Si en esta desigualdad se toman x e y ortogonales y de norma uno (lo que es posible por no ser X unidimensional; en consecuencia: $\|x + y\| = \sqrt{2}$) y se hace $z = x + y$, resulta, una vez hechas las simplificaciones oportunas: $2^{3/2} \leq 2$, lo que es absurdo. Queda así probada la no posibilidad de establecer en general lo que hemos venido en llamar generalización literal de la desigualdad de Minkowski.

Consecuencia de esto es que, si se definiese el concepto de seminorma sobre un espacio vectorial X con valores en una C^*-álgebra U como una función f de X en U verificando $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, $f(c.x) = |c|.f(x)$; esta generalización del concepto de seminorma clásico no sería coherente en el sentido de que entre estas funciones no aparecerían todas las de la forma $x \longrightarrow \sqrt{(x \mid x)}$ donde $(\mid)$ es una forma hermitiana positiva sobre X con valores en U ; rompiéndose así en un punto esencial la analogía con el caso clásico (U = C). Proponemos como solución al problema llamar seminorma sobre X con valores en U a toda función f de X en el conjunto de los elementos positivos de U que satisfaga las condiciones:

$$\begin{cases} f(c.x) = |c|.f(x) \quad , \quad \forall (c,x) \in C \times X \\ \dfrac{f(x+y)^2}{a+b} \leq \dfrac{f(x)^2}{a} + \dfrac{f(y)^2}{b} \quad \Big\{ \text{cualesquiera que sean } \underline{x} \text{ e } \underline{y} \text{ de X y } \underline{a} \text{ y } \underline{b} \text{ núms. posit.} \end{cases}$$

La definición es consistente puesto que en el caso clásico (U=C) en vista de ((h)) coincide con la tradicional. Por otra parte, si $(\ |\ )$ es una forma hermitiana positiva sobre X con valores en U, la desigualdad ((g)) pone de manifiesto que la aplicación $x \longrightarrow \sqrt{(x \mid x)}$ es en efecto una seminorma sobre X con valores en U (en el sentido que acabamos de dar), con lo que queda restituida la analogía con el caso clásico. La desigualdad ((g)), de la que es consecuencia la propuesta en ((A)) como generalización de la desigualdad de Minkowski, puede interpretarse entonces como la forma "fuerte" de dicha desigualdad.

Siguiendo el método de la demostración de ((A)) se llega a que, si f es una seminorma sobre X con valores en U, entonces la aplicación $x \longrightarrow \|f(x)\|$ es una seminorma sobre X (con valores en C).

Vamos a pasar a discutir la desigualdad generalizada de Cauchy-Schwart enunciada en ((B)) en el sentido de que el factor 2 que allí aparece es esencial a la teoría y no puede por tanto sustituirse por otro más pequeño. Concretamente:

j.- Sea U una C^*-álgebra no conmutativa. Existe: un espacio vectorial complejo X, una forma hermitiana positiva no degenerada sobre X con valores en U $(\ |\ )$, y un par de elementos de X (e_1, e_2) no nulos, tales que se verifica:

$$\|(e_1 \mid e_2)\| = 2\sqrt{\|(e_1 \mid e_1)\| \, \|(e_2 \mid e_2)\|} \quad .$$

Demostración: se sabe que en toda C^*-álgebra no conmutativa existen elementos nihilpotentes no nulos (el resultado se debe a Kaplansky, citado en [2]-pág. 58, [17]-pág. 20 y [16]-pág. 211). Sea entonces w de U tal que $w^2 = 0$ y $\|w\| = 1$. Pongamos $X = C^2$ y para cada par de elementos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ de X definamos $(\ |\ )$ por la fórmula:

$$(x \mid y) = x_1 \overline{y}_1 . I + 2x_1 \overline{y}_2 . w + 2x_2 \overline{y}_1 . w^* + x_2 \overline{y}_2 . I \qquad .$$

Se comprueba sin dificultad que la aplicación $(x,y) \longrightarrow (x \mid y)$ de X en U responde a los axiomas ((a)), ((b)) y ((c)) de las formas hermitianas positivas. Más complicada es la verificación del axioma ((d)): se trata de demostrar que, cualesquiera que sean los números complejos x_1, x_2, se verifica:

$$|x_1|^2 . I + 2x_1 \overline{x}_2 . w + 2x_2 \overline{x}_1 . w^* + |x_2|^2 . I \geq 0 \qquad .$$

Para ello apliquemos la propiedad estelar de la norma de U al elemento simétrico $x_1 \overline{x}_2 . w + x_2 \overline{x}_1 . w^*$ (téngase en cuenta que, por ser $w^2 = 0$, es también $w^{*2} = 0$):

$$\| x_1 \overline{x}_2 . w + x_2 \overline{x}_1 . w^* \|^2 = \| (x_1 \overline{x}_2 . w + x_2 \overline{x}_1 . w^*)^2 \| = |x_1|^2 |x_2|^2 \| ww^* + w^* w \| \ .$$

ww^* y w^*w tienen igual espectro (para cualquier par de elementos u y v de un álgebra sobre C es $\sigma(vu) \cup \{0\} = \sigma(uv) \cup \{0\}$ y evidentemente $0 \in \sigma(ww^*)$ y $0 \in \sigma(w^*w)$) y entonces la identidad

$- c(ww^* + w^*w - cI) = (ww^* - cI)(w^*w - cI) = (w^*w - cI)(ww^* - cI)$

pone de manifiesto que los elementos positivos $ww^* + w^*w$, ww^* y w^*w tienen igual espectro (a excepción hecha de 0 que podría no pertenecer a $\sigma(ww^* + w^*w)$) y en consecuencia igual norma; con lo que queda:

$$\| x_1\bar{x}_2.w + x_2\bar{x}_1.w^* \| = |x_1|.|x_2|.\|w\| = |x_1|.|x_2| \quad .$$

Basta entonces recordar la relación $u \geqslant -\|u\|.I$, válida para cualquier elemento simétrico u de una C^*-álgebra, para concluir:

$$|x_1|^2.I + 2x_1\bar{x}_2.w + 2x_2\bar{x}_1.w^* + |x_2|^2.I \geqslant |x_1|^2.I - 2|x_1|.|x_2|.I + |x_2|^2.I =$$

$$= (|x_1|^2 - |x_2|^2).I \geqslant 0$$; con lo que queda verificado el

axioma ((d)), y en consecuencia la aplicación $(x,y) \longrightarrow (x \mid y)$ de X en U es una forma hermitiana positiva. Si $\{e_1, e_2\}$ designa la base canónica de $X = C^2$ ($e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$), evidentemente:

$$\begin{cases} (e_1 \mid e_1) = (e_2 \mid e_2) = I \implies \|(e_1 \mid e_1)\| = \|(e_2 \mid e_2)\| = 1 \\ (e_1 \mid e_2) = 2w \implies \|(e_1 \mid e_2)\| = 2\|w\| = 2 \end{cases}$$

y entonces, idénticamente:

$$\|(e_1 \mid e_2)\| = 2\sqrt{\|(e_1 \mid e_1)\| \; \|(e_2 \mid e_2)\|}$$, tal como

se deseaba (que la forma $(\ |\ )$ es no degenerada se ve fácilmente a partir de la independencia lineal de los elementos I, w y w^* de U ; concretamente: puede demostrarse la igualdad:

$$\sqrt{\|(x\,|\,x)\|} = |x_1| + |x_2| \quad , \ \forall x = (x_1, x_2) \in X = C^2 \ ).$$

Hay que hacer constar que la discusión de las desigualdades de Minkowski y Cauchy-Schwart, que acabamos de hacer para formas hermitianas positivas con valores en una C^*-álgebra, sólo tiene interés en el caso en que ésta sea no conmutativa. En efecto: para C^*-álgebras conmutativas la analogía con el caso clásico es perfecta:

C.- Sea X un espacio vectorial complejo, U una C^*-álgebra conmutativa y $(x,y) \longrightarrow (x\,|\,y)$ una forma hermitiana positiva sobre X con valores en U. Se verifica:

k.- $\sqrt{(x+y\,|\,x+y)} \leq \sqrt{(x\,|\,x)} + \sqrt{(y\,|\,y)}$ (forma "fuerte" de la desigualdad de Minkowski; la propuesta en ((A)) saldría como consecuencia de ésta sin más que tomar normas en esta desigualdad de miembros positivos y aplicar la propiedad estelar de la norma).

1.- $|(x\,|\,y)| \leq \sqrt{(x\,|\,x).(y\,|\,y)}$ (forma "fuerte" de la desigualdad de Cauchy-Schwart; obsérvese que sólo tiene sentido en C^*-álgebras conmutativas en las que se puede definir el módulo de un elemento u por la fórmula: $|u| = \sqrt{u^* u} = \sqrt{uu^*}$, y donde el producto de dos elementos positivos es siempre positivo). En consecuencia:

m.- $\|(x \mid y)\| \leq \sqrt{\|(x \mid x)\| \; \|(y \mid y)\|}$ (forma "debil" de la desigualdad de Cauchy-Schwart).

Demostración:

Es casi una consecuencia directa del teorema de Gelfand-Naimark y de la teoría clásica de las formas hermitianas positivas: sea f un carácter cualquiera de U (tendremos en cuenta las identidades: $\langle f, \sqrt{u} \rangle = \sqrt{\langle f, u \rangle}$ para todo elemento positivo u de U , y $\langle f, |u| \rangle = |\langle f, u \rangle|$, $\forall u \in U$); la aplicación $(x,y) \longrightarrow \langle f, (x \mid y) \rangle$ de X en C es entonces una forma hermitiana positiva sobre X, con lo que

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\langle f, (x + y \mid x + y) \rangle} \leq \sqrt{\langle f, (x \mid x) \rangle} + \sqrt{\langle f, (y \mid y) \rangle} \\ |\langle f, (x \mid y) \rangle| \leq \sqrt{\langle f, (x \mid x) \rangle \cdot \langle f, (y \mid y) \rangle} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \langle f, \sqrt{(x + y \mid x + y)} \rangle \leq \langle f, \sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)} \rangle \\ \langle f, |(x \mid y)| \rangle \leq \langle f, \sqrt{(x \mid x).(y \mid y)} \rangle \end{array}\right.$$

cualquiera que sea f carácter de U. Entonces por el teorema de Gelfand-Naimark se concluye inmediatamente ((k)), ((l)) y ((m)), teniendo en cuenta que ((m)) se obtiene de ((l)) sin más que tomar normas.

2.- Módulos prehilbertianos sobre C^*-álgebras. Desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Sea U una C^*-álgebra y X un U-módulo por la izquierda; X se puede considerar automáticamente dotado de estructura de espacio vectorial complejo sin más que definir el producto de un número complejo c por un elemento x de X por la fórmula: $c.x = (c.I).x$, siendo I el elemento unidad de U (en adelante utilizaremos sin especial mención esta estructura de C-espacio vectorial de X). Una forma hermitiana positiva sobre X con valores en U la llamaremos compatible con la estructura de U-módulo de X si verifica (sea $(\mid)$ el símbolo de la forma en cuestión):

$$a.- \quad (u.x \mid y) = u.(x \mid y) \quad , \quad \forall (u,x,y) \in U \times X^2 \quad .$$

Este axioma implica evidentemente el ((1,b)). La propiedad ((1,f)) se generaliza inmediatamente en la fórmula:

$$b.- \quad (x \mid u.y) = (x \mid y).u^* \quad , \quad \forall (u,x,y) \in U \times X^2 \quad .$$

Llamaremos U-módulo prehilbertiano (U: C^*-álgebra) al par formado por un U-módulo por la izquierda X y una forma hermitiana positiva no degenerada sobre X con valores en U compatible con la estructura de U-módulo de X. Según ((1,A)), la aplicación $x \longrightarrow \sqrt{\|(x \mid x)\|}$ de X en R es una norma sobre X (notaremos: $\|x\| = \sqrt{\|(x \mid x)\|}$) de manera que todo U-módulo prehilbertiano se considerará canónicamente dotado de estructura de C-espacio vectorial normado; si, respecto a esta estructura, X es completo, le llamaremos U-módulo de Hilbert.

Se comprueba sin dificultad que la norma de un U-módulo prehilbertiano goza de la propiedad:

c.- $\|u.x\| \leq \|u\|\,\|x\|$, $\forall (u,x) \in U \times X$.

El ejemplo más sencillo de U-módulos prehilbertianos lo constituyen sin duda los ideales por la izquierda de U. En efecto: si M es un tal ideal, la aplicación $(u,v) \longrightarrow u.v^*$ de M en U es evidentemente una forma hermitiana positiva no degenerada sobre M con valores en U compatible con la estructura "natural" de U-módulo de M; la propiedad estelar de la norma de U prueba además que la norma canónica del U-módulo prehilbertiano M ($u \longrightarrow \sqrt{\|u.u^*\|}$) no es otra que la restricción a M de la norma estelar de U, con lo que los ideales por la izquierda de U nórmicamente cerrados se convierten en los ejemplos más elementales de U-módulos de Hilbert.

Para la mejor comprensión de la desigualdad de Cauchy--Schwart que vamos a establecer a continuación convendrá tener presente la estructura "natural" de U-módulo de Hilbert de U , considerada ésta como ideal por la izquierda impropio de U.

D.- Sea X un U-módulo prehilbertiano. Se verifica:

d.- $(x \mid y).(x \mid y)^* \leq \|y\|^2.(x \mid x)$ (forma "fuerte" de la desigualdad de Cauchy-Schwart para U-módulos prehilbertianos), verificándose la igualdad si y sólo si es $\|y\|^2.x = (x \mid y).y$. En consecuencia:

e.- $\|(x \mid y)\| \leq \|x\| \, \|y\|$ (forma "debil").

Demostración:

Siendo el teorema evidente para $y = 0$, supongamos $y \neq 0$. Cualquiera que sea u de U se verifica:

$$0 \leq (x - u.y \mid x - u.y) = (x \mid x) + u.(y \mid y).u^* -$$

$$- (x \mid y).u^* - u.(y \mid x) \leq (x \mid x) + \|y\|^2.uu^* -$$

$$- (x \mid y).u^* - u.(x \mid y)^*$$ (la desigualdad $u.(y \mid y).u^* \leq \|y\|^2.uu^*$, resulta de la relación $v \leq \|v\|.I$ váliva para cualquier elemento simétrico v de U y de la posibilidad de multiplicar una desigualdad a un tiempo por la izquierda por un elemento y por la derecha por su conjugado). Haciendo $u = \|y\|^{-2}.(x \mid y)$, queda:

$$0 \leq (x - \|y\|^{-2}(x \mid y).y \mid x - \|y\|^{-2}(x \mid y).y) \leq$$

$$\leq (x \mid x) - \|y\|^{-2}(x \mid y).(x \mid y)^* ,$$

de donde se desprende inmediatamente la desigualdad ((d)) y además se pone de manifiesto, por ser la forma $(\ |\ )$ no degenerada, que de verificarse la igualdad, resulta:

$$x - \|y\|^{-2}(x \mid y).y = 0 \iff \|y\|^2.x = (x \mid y).y \quad .$$

Recíprocamente: si es $\|y\|^2.x = (x \mid y).y$, multiplicando escalarmente por x se llega a:

$\|y\|^2(x \mid x) = (x \mid y).(x \mid y)^*$, tal como se desea. La desigualdad ((e)) se consigue, a partir de la ((d)), tomando normas.

Un ejemplo, que ya nos fue útil en ((1)), nos va a servir para comprobar cómo la forma "fuerte" de la desigualdad de Cauchy-Schwart para U-módulos prehilbertianos, pese a su asimetría, no es en general susceptible de perfeccionamiento; la razón de esta asimetría se debe evidentemente, a la vista de ((C,l)), a la posible no conmutatividad del álgebra U:

f.- Sea, com en ((1,i)), X un espacio de Hilbert y U la C^*-álgebra $L(X)$; si para cada par $(u,x) \in U\times X$ definimos $u.x$ como el valor del operador u sobre el elemento x , con este producto X es un U-módulo por la izquierda. La forma hermitiana positiva que estudiábamos allí ($(x,y) \longrightarrow x * y$, donde $x * y$ era el operador definido por la fórmula $z \longrightarrow (z \mid x).y$) es compatible con la estructura de U-módulo de X (la comprobación es inmediata), es decir:

$$(u.x)*y = u.(x*y) \quad , \quad \forall (u,x,y) \in U \times X^2 \quad .$$

Como se comprueba sin dificultad la fórmula $\|x*y\| = \|x\|\,\|y\|$, resulta que la forma $(x,y) \longrightarrow x*y$ es no degenerada y además que la norma canónica del U-módulo prehilbertiano $\{X, (\ *\ )\}$ ($x \longrightarrow \sqrt{\|x*x\|}$) es precisamente la norma usual en X, con lo que X, con la estructura que se acaba de describir, se presenta como un nuevo ejemplo de U-módulo de Hilbert. Como se vio en ((1,i)) la no certeza de la afirmación:

$$\sqrt{(x+y)*(x+y)} \leq \sqrt{x*x} + \sqrt{y*y} \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2 \quad ;$$

este mismo ejemplo nos da la alerta para no intentar una generalización "literal" de la desigualdad de Minkowski ni aun en el caso de los U-módulos de Hilbert. En cuanto a la desigualdad de Cauchy-Schwart, que es por lo que hemos vuelto sobre este ejemplo; de la identidad:

$$(x*y).(z*t) = (\ z \mid y\ ).(x*t) \quad , \quad \forall (x,y,z,t) \in X^4 \quad ,$$

que citábamos en ((1,i)), sale por particularización ($x = t$, $y = z$):

$$(x*y).(x*y)^* = \|y\|^2.(x*x) \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2 \quad ;$$

de manera que en nuestro U-módulo de Hilbert la desigualdad propuesta en ((D,d)) degenera siempre en igualdad, lo que pone de manifiesto cómo dicha desigualdad ((D,d)) es en general imposible de perfeccionar y que su asimetría es intrínseca.

Suma finita de U-módulos prehilbertianos.- Si $\{X_i\}$ (i = = 1, 2,..., n) es una familia finita de U-módulos prehilbertianos (U se supone una C^*-álgebra prefijada de antemano), el producto cartesiano de los X_i aparece "naturalmente" dotado de estructura de U-módulo por la izquierda sin más que definir la suma y el producto término a término. Si para cada par de elementos de este producto cartesiano $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$, ponemos:

$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \mid y_i)$, tenemos definida sobre el U-módulo $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ una forma hermitiana positiva no degenerada con valores en U compatible con la estructura de U-módulo del mismo (hemos tomado el mismo símbolo para las distintas formas hermitianas tanto de los U-módulos de partida como de la que se acaba de definir en el U-módulo producto); resulta así que el U-módulo producto de los X_i es a su vez un nuevo U-módulo prehilbertiano que llamaremos suma de Hilbert de los U-módulos prehilbertianos X_i . Verificándose además sin dificultad la relación:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{\|x_i\|\} \leq \|x\| \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|^2} \quad , \forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$$

(hemos utilizado igualmente idéntica notación $\| \ \|$ para las n+1 normas canónicas de los U-módulos prehilbertianos en cuestión) resulta que la norma canónica del nuevo U-módulo prehilbertiano es equivalente a cualquiera de las usuales en un producto de espacios normados, con lo que $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} X_i$ (notación que daremos al U-módulo prehilbertiano $\{ X_1 \times \ldots \times X_n , (\mid) \}$) es un U-módulo de Hilbert si y sólo si lo son todos los X_i .

Una primera aplicación la tenemos en el caso en que todos los X_i coinciden con U (con su estructura "natural" de U-módulo de Hilbert: $(u \mid v) = u.v^*$). Se llega entonces, aplicando ((D,e)) al U-módulo de Hilbert U^n , a lo que podríamos llamar desigualdad de Cauchy-Schwart "numérica" para C-álgebras:

$$g.- \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i . v_i^* \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} u_i . u_i^* \right\| . \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i . v_i^* \right\| ,$$

cualquiera que sea el natural n y cualesquiera que sean $u_1, \ldots$ $\ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ de U (U: C^*-álgebra arbitraria).

Utilizando la forma "fuerte" (((D,d))) de la desigualdad de Cauchy-Schwart, resulta:

$$h.- \quad \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i^* \right) . \left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i^* \right)^* \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^* \right\| . \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^* \quad .$$

Desigualdad esta de la que se puede sacar una importante consecuencia:

E.- Sea U una C^*-álgebra; $u_1, u_2, \ldots, u_n$, elementos de U ; se verifica:

i.- El ideal por la derecha cerrado engendrado por $\{u_1,\ldots,u_m\}$ coincide con el ideal por la derecha cerrado engendrado por el elemento positivo $\sum_{i=1}^{m} u_i u_i^*$. En consecuencia:

j.- El ideal por la derecha engendrado por $\{u_1,\ldots,u_m\}$ es igual a U si y sólo si $\sum_{i=1}^{m} u_i u_i^*$ es inversible; o en términos más clásicos: la ecuación diofántica $u_1x_1+\ldots+u_mx_n = I$ ($x_1,x_2,\ldots,x_m$: elementos de U) admite solución si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$ es inversible.

Demostración:

Nos basaremos en un resultado conocido ([2]-pág. 47; se enuncia allí en términos de ideales por la izquierda):

k.- Sea U una C^*-álgebra, M_1 y M_2 dos ideales por la derecha cerrados de U tales que $M_1 \subseteq M_2$. Si toda forma positiva sobre U que se anule sobre M_1 se anula sobre M_2 , entonces $M_1 = M_2$.

Haciendo uso de este resultado, llamemos M_1 al ideal por la derecha cerrado engendrado por $\sum_{i=1}^{m} u_i u_i^*$ y M_2 al ideal por la derecha cerrado engendrado por $\{u_1,\ldots,u_m\}$; como $\sum_{i=1}^{m} u_i u_i^* \in M_2$, se tiene evidentemente: $M_1 \subseteq M_2$; con lo que todo se reduce a comprobar que, si un funcional positivo u' sobre U se anula sobre M_1, también se anula sobre M_2. Para ello sea w de M_2 de la forma $w = u_1v_1^* +\ldots+ u_nv_n^*$; la desigualdad ((h)) pone de manifiesto que se verifica una relación del tipo: $w.w^* \leq K. \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$; de manera que si u' es un funcional positivo sobre U, se tiene:

$$|\langle u', w\rangle|^2 \leq \langle u', I\rangle . \langle u', w.w^*\rangle \leq$$

$$\leq K \langle u', I\rangle . \langle u', \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*\rangle ,$$

con lo que si u' se anula sobre M_1 (se anulará en particular sobre $\sum_{i=1}^{n} u_i u_i^*$) es $\langle u', w\rangle = 0$, para todo w de la forma $w = u_1 v_1^* + \ldots + u_n v_n^*$. Basta entonces recordar que u' es necesariamente continuo y que el conjunto de los elementos w de la forma dicha es denso en M_2 , para concluir que u' se anula sobre todo M_2 ; con lo que está terminada la demostración de ((i)).

((j)) es consecuencia de ((i)) sin más que tener en cuenta que para cualquier ideal M de un álgebra de Banach con unidad U las afirmaciones $M = U$ y $\overline{M} = U$ son equivalentes; en cuanto a la traducción en términos de ecuación diofántica, basta tener en cuenta que a su vez la afirmación $I \in M$ es equivalente a cualquiera de las dos anteriores.

Un ejemplo de U-módulo de Hilbert.- Si A y B son espacios de Hilbert complejos (notaremos con el mismo símbolo (|) sus respectivos productos escalares) y f es una aplicación lineal continua de A en B, se puede definir f^* - que va a ser una aplicación de B en A - siguiendo el método clásico de definición del adjunto de un operador sobre un Hilbert, es decir: para cada b de B la aplicación $a \longrightarrow (f(a) \mid b)$ de A en C es un funcional lineal continuo sobre A con lo que, en vista del teorema de representación de Riesz, existe un único elemento de A que se denota $f^*(b)$ tal que $(f(a) \mid b) = (a \mid f^*(b)), \forall a \in A$. Se ve entonces que la aplicación $b \longrightarrow f^*(b)$ de B en A es lineal y continua y que la aplicación $f \longrightarrow f^*$ de L(A,B) en L(B,A), donde A y B son espacios de Hilbert arbitrarios, es una biyección semilineal verificando las propiedades:

k.- $(f^*)^* = f \quad , \quad \forall f \in L(A,B)$.

l.- $\|f^*\| = \|f\| \quad , \quad \forall f \in L(A,B)$ ..

m.- $(g.f)^* = f^*.g^* \quad , \quad ' f \in L(A,B) \ , \quad g \in L(B,C)$.

n.- Para cada $f \in L(A,B)$, $f.f^*$ (que evidentemente es un elemento de la C^*-álgebra L(B)) es positivo y se verifica: $\| f.f^* \| = \|f\|^2$. (A, B y C: espacios de Hilbert arbitrarios).

Con estos resultados, fijemos A y B espacios de Hilbert ; sea X el espacio de Banach L(A,B) y U la C^*-álgebra L(B); si para cada par $(u,f) \in U \times X$ definimos el producto u.f como la composición ordinaria de la aplicación f con el operador u (u.f pertenece evidentemente a X = L(A,B)), con este producto X tiene estructura de U-módulo por la izquierda. La aplicación $(f,g) \longrightarrow f.g^*$ de $X \times X$ en U es, en virtud de ((k)), ((m)) y ((n)), una forma hermitiana positiva no degenerada sobre X con valores en U; la compatibilidad de esta forma hermitiana con la estructura de U-módulo de X se reduce a la asociatividad del producto de aplicaciones. La propiedad ((n)) pone incluso de manifiesto que la norma canónica del U-módulo prehilbertiano $\{ X, (f,g) \longrightarrow f.g^* \}$ ($f \longrightarrow \sqrt{\|f.f^*\|}$) no es otra que la usual en el espacio de Banach $X = L(A,B)$, con lo que $L(A,B)$ con la estructura que se acaba de describir es un $L(B)$-módulo de Hilbert.

3.- Suma de Hilbert de U-módulos prehilbertianos.

F.- Sea U una C^*-álgebra, H un conjunto de índices cualquiera, $\{ X_i \mid i \in H \}$ una familia de U-módulos prehilbertianos. El producto cartesiano $\underset{i \in H}{\times} X_i$ es de manera natural un U-módulo por la izquierda con la suma y el producto por elementos de U definidos término a término. Si designamos por X el subconjunto de $\underset{i \in H}{\times} X_i$ formado por aquellos elementos $x = (x_i)$ de $\underset{i \in H}{\times} X_i$ tales que la familia de elementos de U $\{ (x_i | x_i) \mid i \in H \}$ sea sumable ([9]-pág. 210), se verifica:

a.- Para cada par (x,y) de elementos de X, $x + y$ también pertenece a X.

b.- Si u es un elemento de U y x de X, u.x pertenece a X .

En consecuencia X es un U-submódulo de $\underset{i \in H}{\times} X_i$.

c.- Si $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ son elementos cualesquiera de X, la familia de elementos de U $\{(x_i | y_i) \mid i \in H\}$ es sumable.

d.- Si para cada par $(x = (x_i), y = (y_i))$ de elementos de X definimos; $(x | y) = \sum_{i \in H} (x_i | y_i)$, la aplicación $(x,y) \longrightarrow (x | y)$ es una forma hermitiana positiva no degenerada sobre X con valores en U compatible con la estructura de U-módulo de X.

En consecuencia $\{X, (\ |\ )\}$ es un U-módulo prehilbertiano.

e.- X es un U-módulo de Hilbert si y sólo si lo son todos los X_i $(i \in H)$.

El nuevo U-módulo prehilbertiano (resp.: de Hilbert) X así definido lo llamaremos suma de Hilbert de la familia de U-módulos prehilbertianos (resp.: de Hilbert) $\{X_i \mid i \in H\}$, y lo denotaremos $X = \bigoplus_{i \in H} X_i$.

Demostración;

Se tendrá en cuenta que, por ser U un espacio de Banach, una familia $\{u_i \mid i \in H\}$ de elementos de U es sumable si y sólo si satisface el criterio de Cauchy, a saber: para cada número positivo ε, existe una parte finita J_o de H tal que, cualquiera que sea J parte finita de H disjunta con J_o, se verifica $\left\| \sum_{i \in J} u_i \right\| < \varepsilon$. Con esto podemos pasar a la demostración de nuestros enunciados:

de ((a)).- Convengamos, de una vez por siempre, en llamar F al conjunto de las partes finitas de H. Sean entonces $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ elementos de X; por hipótesis las familias $\{ (x_i|x_i) \mid i \in H \}$, $\{ (y_i|y_i) \mid i \in H \}$ son sumables, con lo que se verificará el criterio de Cauchy y, cualquiera que sea el número positivo ε:

$$\exists \; J_c^1 \in F \mid J \cap J_c^1 = \phi \quad (J \in F) \Longrightarrow \left\| \sum_{i \in J} (x_i|x_i) \right\| < (\varepsilon/4)$$

$$\exists \; J_c^2 \in F \mid J \cap J_c^2 = \phi \quad (J \in F) \Longrightarrow \left\| \sum_{i \in J} (y_i|y_i) \right\| < (\varepsilon/4)$$

Sea entonces $J_o = J_c^1 \cup J_c^2$; si J es una parte finita cualquiera de H en la situación $J \cap J_o = \phi$, se verifican a un tiempo las dos desigualdades anteriores. Apliquemos entonces la desigualdad de Minkowski (((1,A))) al U-módulo prehilbertiano $\bigoplus_{i \in J} X_i$ (la suma de Hilbert de una familia finita de U-módulos prehilbertianos se ha visto en ((2))); resulta:

$$\sqrt{\left\| \sum_{i \in J} (x_i + y_i \mid x_i + y_i) \right\|} \leq \sqrt{\left\| \sum_{i \in J} (x_i|x_i) \right\|} + \sqrt{\left\| \sum_{i \in J} (y_i|y_i) \right\|} <$$

$$< (\sqrt{\varepsilon}/2) + (\sqrt{\varepsilon}/2) = \sqrt{\varepsilon} \Longrightarrow \left\| \sum_{i \in J} (x_i + y_i \mid x_i + y_i) \right\| < \varepsilon \quad .$$

Resulta así que la familia $\{(x_i + y_i \mid x_i + y_i) \mid i \in H\}$ satisface el criterio de Cauchy y en consecuencia es sumable, con lo que $x + y = (x_i + y_i)$ pertenece a X, tal como se deseaba.

de ((b)).- Si u es cero, la afirmación es trivial. Sea entonces $u \neq 0$ de U y $x = (x_i)$ de X. Siendo por hipótesis la familia $\{(x_i \mid x_i) \mid i \in H\}$ sumable, para todo número positivo ε :

$$\exists J_0 \in F \mid J \cap J_0 = \phi \;(J \in F) \Longrightarrow \Big\| \sum_{i \in J} (x_i \mid x_i) \Big\| < (\varepsilon / \|u\|^2) .$$

Para cada parte finita J de H en la situación $J \cap J_0 = \phi$, apliquemos la desigualdad ((2,c)) al U-módulo prehilbertiano $\bigoplus_{i \in J} X_i$; resulta:

$$\sqrt{\Big\| \sum_{i \in J} (ux_i \mid ux_i) \Big\|} \leq \|u\| . \sqrt{\Big\| \sum_{i \in J} (x_i \mid x_i) \Big\|} < \|u\| . (\sqrt{\varepsilon} / \|u\|) =$$

$$= \sqrt{\varepsilon} \Longrightarrow \Big\| \sum_{i \in J} (ux_i \mid ux_i) \Big\| < \varepsilon \quad ;$$

resultando en consecuencia que la familia $\{(ux_i \mid ux_i) \mid i \in H\}$ satisface el criterio de Cauchy y es por tanto sumable, con lo que $u.x = (u.x_i)$ pertenece a X. En vista de ((a)) y ((b)), X es un U-submódulo de $\underset{i \in H}{\times} X$.

de ((c)).- Sean $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ elementos cualesquiera de X. Por ser sumables las familias $\{(x_i \mid x_i) \mid i \in H\}$ y $\{(y_i \mid y_i) \mid i \in H\}$, para cada número positivo ε :

$$\exists J_0^1 \in F \mid J \cap J_0^1 = \phi \ (J \in F) \Longrightarrow \Big\| \sum_{i \in J} (x_i | x_i) \Big\| < \varepsilon$$

$$\exists J_0^2 \in F \mid J \cap J_0^2 = \phi \ (J \in F) \Longrightarrow \Big\| \sum_{i \in J} (y_i | y_i) \Big\| < \varepsilon \ .$$

Sea, como en ((a)), $J_0 = J_0^1 \cup J_0^2$ y J cualquier parte finita de H en la situación $J \cap J_0 = \phi$; aplicando la desigualdad "debil" de Cauchy-Schwart (((D,e))) al U-módulo prehilbertiano $\bigoplus_{i \in J} X_i$, resulta:

$$\Big\| \sum_{i \in J} (x_i | y_i) \Big\| \leq \sqrt{\Big\| \sum_{i \in J} (x_i | x_i) \Big\| \ \Big\| \sum_{i \in J} (y_i | y_i) \Big\|} < \sqrt{\varepsilon . \varepsilon} = \varepsilon \ ;$$

con lo que también la familia $\{ (x_i | y_i) \mid i \in H \}$ satisface el criterio de Cauchy y es en consecuencia sumable.

de ((d)).- Pongamos $(x \ y) = \sum_{i \in H} (x_i | y_i)$ ($x = (x_i)$, $y = (y_i)$: elementos de X). La propiedad:

$$(x + y | z) = (x | z) + (y | z) \ , \ \forall (x,y,z) \in X^3$$

resulta de la conocida regla: $\sum_{i \in H} (u_i + v_i) = \sum_{i \in H} u_i + \sum_{i \in H} v_i$ válida cualesquiera que sean las familias sumables $\{ u_i \mid i \in H \}$ y $\{ v_i \mid i \in H \}$ de elemetos de un grupo topológico cualquiera.

Recordemos que si $\{ u_i \mid i \in H \}$ es una familia sumable de elementos de un grupo topológico y f es una representación continua de dicho grupo en otro, entonces la familia

$\{ f(u_i) \mid i \in H \}$ es también sumable y se verifica

$\sum_{i \in H} f(u_i) = f(\sum_{i \in H} u_i)$. Aplicando este resultado, tomando f sucesivamente igual a las aplicaciones $v \longrightarrow u.v$, $v \longrightarrow v^*$ de U en sí mismo, resultan inmediatamente las propiedades:

$(u.x \mid y) = u.(x \mid y)$, $\forall (u,x,y) \in U \times X^2$ y

$(x \mid y)^* = (y \mid x)$, $\forall (x,y) \in X^2$.

Para demostrar que la forma $(\mid)$ es positiva no degenerada, aceptemos por el momento el siguiente lema:

G.- Sea U una C-álgebra, $\{ u_i \mid i \in H \}$ una familia sumable de elementos positivos de U, se verifica: la suma de esta familia es el extremo superior del conjunto de las sumas de sus subfamilias finitas.

Haciendo una aplicación parcial de este lema, sea $x = (x_i) \in X$; $(x \mid x)$ está definido como la suma de la familia $\{ (x_i \mid x_i) \mid i \in H \}$, luego:

$0 \leq (x_i \mid x_i) \leq (x \mid x)$, $\forall i \in H$; desigualdad esta que pone de manifiesto el carácter positivo no degenerado de la forma $(\mid)$ sobre X. Tenemos con esto asegurado que $\{ X, (\mid) \}$ es un U-módulo prehilbertiano.

de ((e)).- De la desigualdad $0 \leq (x_i | x_i) \leq (x | x)$ sale, tomando normas: $\|(x_i | x_i)\| \leq \|(x | x)\| \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \|x_i\| \leq \|x\|$, con lo que la aplicación π_i que a cada elemento x de X asocia su i-ésima coordenada del U-módulo prehilbertiano X en el U-módulo prehilbertiano X_i (que evidentemente es U-lineal) es continua. Si f_i designa la aplicación de X_i en X que a cada $s \in X_i$ asocia el elemento de X cuya i-ésima coordenada es s y las restantes nulas, se verifica:

$$(f_i(x_i) \mid f_i(x_i)) = (x_i \mid x_i) \Longrightarrow \|f_i(x_i)\| = \|x_i\| \ , \forall x_i \in X_i .$$

f_i es claramente U-lineal y se tiene la identidad:

$f_i(X_i) = \{ x \in X \mid \pi_j(x) = 0 , \quad j \neq i \}$; de donde, por la continuidad de las funciones π_j, $f_i(X_i)$ es una parte cerrada de X. Resulta así que cada U-módulo prehilbertiano X_i se identifica canónicamente, a través del homeomorfismo U-lineal $x_i \longrightarrow f_i(x_i)$, con un U-submódulo cerrado de X.

Con este resultado, si X es un U-módulo de Hilbert, cada X_i , linealmente homeomorfo a una parte cerrada (y en consecuencia completa) de X, es a su vez completo, es decir, un U-módulo de Hilbert.

Recíprocamente, supongamos que todos los X_i son completos y sea $\{x^n\}$ una sucesión de Cauchy de puntos de X; llamemos x_i^n ($i \in H$) a la coordenada i-ésima del punto x^n ($x_i^n =$ $= \pi_i(x^n)$). Como es

$$\| x_i^n - x_i^m \| \leq \| x^n - x^m \| \ , \qquad \forall (n,m) \in N^2$$; resulta que, para cada i de H, la sucesión $\{ x_i^n \}$ de puntos de X_i es de Cauchy, y como X_i es completo $\{ x_i^n \}$ converge; sea $x_i = \lim \{ x_i^n \}$. Si ponemos $x = (x_i)$, evidentemente x pertenece a $\underset{i \in H}{\times} X_i$; trataremos de ver que x pertenece a X y que la sucesión problema $\{ x^n \}$ converge precisamente a x . Para verlo, razonemos de la siguiente manera: como $\{ x^n \}$ es de Cauchy en X

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \exists \, p \in N \mid n \geq p \ , \quad m \geq p \Longrightarrow \| x^n - x^m \| \leq (\sqrt{\varepsilon}/2).$$

En particular: $n \geq p \Longrightarrow \| x^n - x^p \| \leq (\sqrt{\varepsilon}/2) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \| \sum_{i \in H} (x_i^n - x_i^p \mid x_i^n - x_i^p) \| \leq (\varepsilon/4) \qquad .$$

Teniendo en cuenta el lema ((G)) y que la norma de U es compatible con el orden de los elementos positivos, será también:

$$\| \sum_{i \in J} (x_i^n - x_i^p \mid x_i^n - x_i^p) \| \leq (\varepsilon/4)$$, cualquiera que sea J parte finita de H ($n \geq p$). Como el producto escalar de cada X_i, por ((D,e)), es continuo, se puede tomar límites en esta desigualdad, con lo que queda

$$\| \sum_{i \in J} (x_i - x_i^p \mid x_i - x_i^p) \| \leq (\varepsilon/4) \quad , \qquad \forall J \in F \qquad .$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski en el U-módulo prehilbertiano $\underset{i \in J}{\oplus} X_i$, resulta:

$$\sqrt{\left\| \sum_{i \in J} (x_i | x_i) \right\|} \leq \sqrt{\left\| \sum_{i \in J} (x_i - x_i^p | x_i - x_i^p) \right\|} + \sqrt{\left\| \sum_{i \in J} (x_i^p | x_i^p) \right\|} \leq$$

$$\leq (\sqrt{\varepsilon}/2) + \sqrt{\left\| \sum_{i \in J} (x_i^p | x_i^p) \right\|} \quad , \quad \forall J \in F \quad .$$

Como $x^p = (x_i^p)$ es de X, la familia $\{ (x_i^p | x_i^p) \mid i \in H \}$ es sumable y cumplirá el criterio de Cauchy, con lo que:

$$\exists J_0 \in F \mid J \cap J_0 = \phi \; (J \in F) \Longrightarrow \left\| \sum_{i \in J} (x_i^p | x_i^p) \right\| < (\varepsilon/4)$$

(ε es el número fijado al principio del razonamiento). Enlazando con la desigualdad anterior, resulta que, para cada parte finita J de H en la situación $J \cap J_0 = \phi$, se verifica:

$\left\| \sum_{i \in J} (x_i | x_i) \right\| < \varepsilon$, lo que, en vista de la arbitrariedad de ε , prueba que la familia $\{ (x_i | x_i) \mid i \in H \}$ cumple el criterio de Cauchy y es en consecuencia sumable, con lo que $x = (x_i)$ pertenece a X.

Veamos finalmente que es $x = \lim \{ x^n \}$: como $\{ x^n \}$ es de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \; : \exists p \mid n \geq p \; , \; m \geq p \Longrightarrow \| x^n - x^m \| \leq \varepsilon \; .$$

Trabajando análogamente a como lo hemos hecho antes se llega a (m se mantendrá fijo y se tomará límites con respecto a n):

$\left\| \sum_{i \in J} (x_i - x_i^m | x_i - x_i^m) \right\| \leq \varepsilon^2$, cualquiera que sea J parte finita de H ($m \geq p$). Teniendo en cuenta que para todo elemento simétrico u de una C^*-álgebra es $u \leq \|u\| . I$, resulta:

$$\sum_{i \in J} (x_i - x_i^m | x_i - x_i^m) \leq \varepsilon^2 . I \quad , \quad \forall J \in F \quad .$$

Resulta así que la suma de cualquier subfamilia finita de la familia sumable $\{ (x_i - x_i^m | x_i - x_i^m) \mid i \in H \}$ está por debajo de $\varepsilon^2 . I$; aplicando ((G)) se obtiene:

$$\sum_{i \in H} (x_i - x_i^m | x_i - x_i^m) \leq \varepsilon^2 . I$$, de donde, tomando normas: $\| x - x^m \| = \sqrt{\| \sum_{i \in H} (x_i - x_i^m | x_i - x_i^m) \|} \leq \varepsilon \ , \ \forall m \geq p$;

lo que prueba que la sucesión $\{x^n\}$ converge a x . Así pues, si todos los X_i son completos, $X = \bigoplus_{i \in H} X_i$ es también completo. El teorema ((F)) está por tanto terminado a falta de demostrar el lema ((G)).

La complejidad de la demostración de la última parte se debe a que, salvo que la C^*-álgebra U sea de dimensión finita, la mayoración del conjunto de las sumas de las subfamilias finitas de una familia de elementos positivos de U, que es condición necesaria (como consecuencia de ((G))) para la sumabilidad de la familia en cuestión, no es suficiente (nos referimos evidentemente a la sumabilidad con la topología de la norma estelar).

Demostración del lema ((G)).- Sea H un conjunto de índices y $\{u_i \mid i \in H\}$ una familia sumable de elementos positivos de una C^*-álgebra U (llamemos, como en ((F)), F al conjunto de las partes finitas de H). Pongamos también $v = \sum_{i \in H} u_i$.

Por definición de suma de una familia sumable de elementos de un grupo topológico, v es el único punto adherente a todos los conjuntos de la forma $A_{J_0} = \{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \supseteq J_0 , J \in F \}$, cualquiera que sea J_0 parte finita de H (la familia $\{A_J \mid J \in F\}$ es un filtro sobre U y se define la suma de la familia $\{u_i\}$ como el límite de este filtro). Como $\{u_i\}$ es de elementos positivos, todos los elementos de un A_J son mayorantes de la suma finita $\sum_{i \in J} u_i$; el conjunto de los mayorantes de un elemento de una C^*-álgebra es cerrado, y $v \in \overline{A_J}$; concluimos entonces: $\sum_{i \in J} u_i \leq v$, $\forall J \in F$; con lo que v es un mayorante del conjunto de las sumas de las subfamilias finitas de la familia $\{u_i\}$. Si w es otro mayorante, los elementos de cualquier A_J son minorantes de w ; como el conjunto de los minorantes de w es cerrado y $v \in \overline{A_J}$, concluimos: $v \leq w$ y v es el más pequeño mayorante.

Notas.- Si H es un conjunto de índices y $\{X_i \mid i \in H\}$ es una familia de espacios normados, es conocido un procedimiento para construir un especie de suma de Hilbert de la familia

$\{X_i\}$. Consiste en destacar en el producto cartesiano $\underset{i\in H}{\times} X_i$ aquellos elementos $x = (x_i)$ para los que la correspondiente familia de números $\{\|x_i\|^2 \mid i \in H\}$ sea sumable. Se comprueba que el conjunto de estos elementos es una variedad lineal de $\underset{i\in H}{\times} X_i$ y que la aplicación $x \longrightarrow \sqrt{\sum_{i\in H}\|x_i\|^2}$ es una norma sobre esta variedad, e incluso que la completitud de esta variedad con respecto a esta norma equivale a la completitud de cada X_i. Todo U-módulo prehilbertiano es en particular un espacio normado; podría pensarse en consecuencia que la definición que hemos dado en ((F)) de suma hilbertiana de U-módulos prehilbertianos fuese, en cuanto a estructuras nórmicas se refiere, equivalente a la construcción que acabamos de describir. El problema es importante pues, si la respuesta fuese afirmativa, resultaría supérflua la demostración de los apartados ((a)) y ((e)) de nuestro teorema ((F)). Hay que hacer constar que esto no es así y que por tanto nuestra construcción es independiente.

Empecemos concretando símbolos: sea U una C^*-álgebra, H un conjunto de índices y $\{X_i \mid i \in H\}$ una familia de U-módulos de Hilbert; llamemos X al U-módulo de Hilbert suma hilbertiana de la familia $\{X_i\}$ en el sentido de ((F)) e Y al espacio de Banach de los elementos $x = (x_i)$ de $\underset{i\in H}{\times} X_i$ tales que $\{\|x_i\|^2 \mid i \in H\}$ sea sumable (la norma de Y es, según se ha dicho: $x \longrightarrow \sqrt{\sum_{i\in H}\|x_i\|^2}$). Si un elemento $x = (x_i)$ de $\bigtimes_{i\in H} X_i$ pertenece a Y, la familia $\{\|x_i\|^2 \mid i \in H\}$ es sumable, y como es $\|(x_i | x_i)\| = \|x_i\|^2$, $\forall i \in H$, $\forall x_i \in X_i$; resulta que la familia $\{(x_i | x_i) \mid i \in H\}$ de elementos de U es absolutamente sumable y, en consecuencia, sumable, con lo que x pertenece a X. Hemos probado así: $Y \subseteq X$. Si fuese $Y = X$, las normas

$$x \xrightarrow{\|\ \|_1} \sqrt{\sum_{i\in H}\|x_i\|^2} \qquad \text{y} \qquad x \xrightarrow{\|\ \|} \sqrt{\left\|\sum_{i\in H}(x_i | x_i)\right\|} ,$$

dotando ambas a X de estructura de espacio normado completo y verificando la relación evidente: $\|x\| \leq \|x\|_1$, $\forall x \in X$, han de ser, en vista del teorema de los isomorfismos de Banach, equivalentes. Este hecho nos orienta en el sentido de que la única posibilidad de que las estructuras nórmicas de X e Y sean no equivalentes es que la inclusión probada ($Y \subseteq X$) sea estricta, de manera que probaremos la independencia de la construcción hecha en ((F)) mediante un ejemplo en que esto suceda.

Pero antes saquemos un resultado positivo del análisis que acabamos de hacer. Sale como consecuencia de que la discusión que hacemos es inutil en el caso de que la C^*-álgebra U sea de dimensión finita; en efecto: la sumabilidad de una familia de elementos de un espacio normado finitodimensional es equivalente a la sumabilidad absoluta, con lo que si $x \in \bigtimes_{i\in H} X_i$ las familias $\{\|x_i\|^2 \mid i \in H\}$ y $\{(x_i|x_i) \mid i \in H\}$ son o no a un tiempo sumables, con lo que siempre: $X = Y$, y las estructuras nórmicas de X e Y son equivalentes, según se acaba de ver antes.

H.- Sea U una C*-álgebra de dimensión finita. Existe un número positivo l (dependiente únicamente de la C*-álgebra en cuestión) tal que, cualquiera que sea el número natural n y cualesquiera que sean $u_1, u_2, \ldots, u_n$ elementos positivos de U, se verifica:

$$l. \sum_{i=1}^{n} \|u_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{n} u_i\| \quad .$$

Demostración:

Manteniendo los símbolos que estamos utilizando en nuestra discusión, particularicemos: $H = N$ (conjunto de los números naturales) $X_i = U$, $\forall i \in N$. Resulta entonces que sobre el espacio vectorial $\bigoplus_{i \in N} X$ las normas $x \longrightarrow \sqrt{\sum_{i \in N} \|u_i\|^2}$ y $x \longrightarrow \sqrt{\|\sum_{i \in N} u_i . u_i^*\|}$ son equivalentes ($x = (u_i) \in \bigoplus_{i \in N} X_i$) y, en consecuencia, existe un número positivo l tal que:

$$l. \sum_{i \in N} \|u_i\|^2 \leq \|\sum_{i \in N} u_i . u_i^*\| \quad , \quad \forall (u_i) \in \bigoplus_{i \in N} X_i \quad .$$

Entonces, si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son elementos positivos cualesquiera de U, la sucesión $(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2}, \ldots, \sqrt{u_n}, 0, 0, 0, \ldots)$ es evidentemente un elemento de $\bigoplus_{i \in N} X_i$, con lo que, aplicando la última desigualdad encontrada (téngase en cuenta que, para un elemento positivo u de una C^*-álgebra, se verifica, por la propiedad estelar de la norma: $\| \sqrt{u} \| = \sqrt{\|u\|}$), resulta:

1. $\sum_{i=1}^{n} \|u_i\| \leq \| \sum_{i=1}^{n} u_i \|$, tal como se deseaba.

Esta desigualdad se extiende por paso al límite a familias sumables cualesquiera de elementos positivos de U.

Volviendo a nuestra discusión, he aquí un ejemplo en el que la suma hilbertiana de una familia de U-módulos de Hilbert $\{X_i\}$ no coincide con el conjunto de elementos $x = (x_i)$ de $\times_i X_i$ tales que la familia $\{\|x_i\|^2\}$ sea sumable:

Sea H un conjunto(1) de índices cualquiera; U la C^*-álgebra de las funciones acotadas de H en C. Para cada i de H sea u_i el elemento de U definido por la fórmula $u_i(j) = \partial_{ij}$, $\forall j \in H$; el conjunto $\{ u_i \mid i \in H \}$ es una familia de proyecciones no nulas de U dos a dos ortogonales; con lo que si J es una parte finita de H, se verifica sin dificultad:

$\| \sum_{i \in J} c_i . u_i \| = \sup_{i \in J} \{ |c_i| \}$, cualesquiera que sean los escalares $\{ c_i \mid i \in J \}$ (la función $\sum_{i \in J} c_i . u_i$ es nula en el complemento de J y vale c_i sobre cada i de J. Entonces esta igualdad no es más que la definición de la norma de U). Vamos a

(1).- infinito.

ver que si $\{c_i \mid i \in H\}$ es una familia de números complejos convergente a cero según el filtro de las partes de H de complemento finito (esto es: para cada positivo ε , el conjunto de los $i \in H$ tales que $|c_i| \geq \varepsilon$ es finito), entonces la familia $\{c_i . u_i \mid i \in H\}$ es sumable en U. En efecto: por ser $\{c_i\} \longrightarrow 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists J_0 \in F \mid i \notin J_0 \Longrightarrow |c_i| < \varepsilon$$

(hemos designado, como de costumbre, por F el conjunto de las partes finitas de H); con lo que, si J es cualquier parte finita de H disjunta con J_0, se verifica:

$\left\| \sum_{i \in J} c_i . u_i \right\| = \sup_{i \in J} \{|c_i|\} < \varepsilon$; con lo que hemos probado que nuestra familia $\{c_i . u_i \mid i \in H\}$ satisface el criterio de Cauchy y es por tanto sumable. Con esto podemos ya materializar el ejemplo que nos proponemos: sea X el U-módulo de Hilbert suma hilbertiana de Card(H) U-módulos de Hilbert iguales a U (es decir: $X = \bigoplus_{i \in H} X_i$; $X_i = U$, $\forall i \in H$) y sea $\{c_i \mid i \in H\}$ una familia de números complejos convergente a cero según el filtro de las partes de H de complemento finito y tal que $\{|c_i|^2 \mid i \in H\}$ sea no sumable (la existencia de familias de este tipo es conocida). Evidentemente $\{|c_i|^2\} \longrightarrow 0$, con lo que, según hemos visto antes, la familia $\{|c_i|^2 . u_i \mid i \in H\}$ es sumable, lo que se traduce por el hecho de que el elemento $(c_i u_i)$, de $\underset{i \in H}{\times} X_i$, es de $\underset{i \in H}{\oplus} X_i$ (téngase en cuenta que $(c_i u_i | c_i u_i)$ $= (c_i u_i).(c_i u_i)^* = |c_i|^2.u_i$) y sin embargo, como es $\|c_i u_i\|^2 = |c_i|^2$, resulta evidente que la familia $\{ \|c_i u_i\|^2 \mid i \in H \}$ no es sumable.

4.- Inmersión densa de un U-módulo prehilbertiano en un U-módulo de Hilbert.

Un U-módulo prehilbertiano (resp.: de Hilbert) es en particular un espacio normado (resp.: de Banach), de manera que, si se quiere sumergir densamente un U-módulo prehilbertiano X en un U-módulo de Hilbert, este último no podrá ser otro, en cuanto a estructuras nórmicas se refiere, que el espacio de Banach completado de X (la unicidad de tal espacio completado, salvo biyecciones lineales isométricas, es conocida; X se supone desde este momento identificado con una variedad lineal densamente contenida en este espacio). Si llamamos $\hat{X}$ al espacio de Banach completado de X, nuestro problema se reduce en consecuencia a probar la existencia y unicidad de una estructura de U-módulo prehilbertiano para $\hat{X}$ cuya restricción a X sea la de partida y a comprobar que la norma que sobre $\hat{X}$ defina canónicamente esta estructura coincide cn la usual. Puesto el problema en estos términos, se puede fácilmente contestar con la afirmativa, siendo los útiles de trabajo los teoremas clásicos de existencia y unicidad de extensión de aplicaciones bilineales y sexquilineales continuas definidas sobre productos cartesianos de variedades densas de espacios normados con valores en un espacio de Banach, así como el principio de extensión de identidades.

Así tenemos (utilizamos únicamente las estructuras vectorial y nórmica de la C^*-álgebra U y del U-módulo X):

a.- La aplicación bilineal $(u,x) \longrightarrow u.x$ de $U \times X$ en $\hat{X}$, que es continua en virtud de ((2,c)), se extiende de una única manera en una aplicación bilineal continua de $U \times \hat{X}$ en $\hat{X}$, que seguiremos notando: $(u,\hat{x}) \longrightarrow u.\hat{x}$. El principio de extensión de identidades prueba entonces que es: $u.(v.\hat{x}) = (u.v).\hat{x}$, $\forall (u,v,x) \in U^2 \times \hat{X}$ y $I.\hat{x} = \hat{x}$, $\forall \hat{x} \in \hat{X}$; con lo que el producto $(u,\hat{x}) \longrightarrow u.\hat{x}$ dota a $\hat{X}$ de estructura de U-módulo por la izquierda.

b.- La aplicación sexquilineal $(x,y) \longrightarrow (x \mid y)$ de $X \times X$ en U, que es continua en virtud de ((2,D,e)), se extiende igualmente de una única manera en una aplicación sexquilineal continua $(\hat{x},\hat{y}) \longrightarrow (\hat{x} \mid \hat{y})$ de $\hat{X} \times \hat{X}$ en U. Las propiedades:

$$(u.\hat{x} \mid \hat{y}) = u.(\hat{x} \mid \hat{y}) \quad , \quad \forall (u,\hat{x},\hat{y}) \in U \times \hat{X}^2$$

$$(\hat{x} \mid \hat{y})^* = (\hat{y} \mid \hat{x}) \quad , \quad \forall (\hat{x},\hat{y}) \in \hat{X}^2$$

resultan del principio de extensión de identidades. Que es $(\hat{x} \mid \hat{x}) \geqslant 0$, $\forall \hat{x} \in \hat{X}$, resulta de ser el conjunto de los elementos positivos de U cerrado y de ser $(\hat{x} \mid \hat{x})$ adherente, por la continuidad de la función $\hat{x} \longrightarrow (\hat{x} \mid \hat{x})$, al conjunto $\{(x \mid x) \mid x \in X\}$. Resulta así que la aplicación $(\hat{x},\hat{y}) \longrightarrow (\hat{x} \mid \hat{y})$ es una forma hermitiana positiva sobre $\hat{X}$ con valores en U compatible con la estructura de U-módulo de $\hat{X}$.

c.- La igualdad: $\|(\hat{x} \mid \hat{x})\| = \|\hat{x}\|^2$ $(\hat{x} \longrightarrow \|\hat{x}\|$: norma usual en $\hat{X}$), consecuencia igualmente del principio de extensión de identidades, muestra a un tiempo que la forma $(\ \mid\ )$ es no degenerada y que la norma canónica del U-módulo prehilbertiano $\{\hat{X}, (\ \mid\ )\}$ $(\hat{x} \longrightarrow \sqrt{\|(\hat{x} \mid \hat{x})\|}$) coincide con la usual. en consecuencia $\{\hat{X}, (\ \mid\ )\}$ es un U-módulo de Hilbert que llamaremos <u>completado</u> del U-módulo prehilbertiano X.

5.- Módulos de Hilbert sobre C^*-álgebras de dimensión finita.

La axiomática que dimos en ((2)) para los U-módulos de Hilbert así como los resultados positivos obtenidos en ((3)) y ((4)) incitan a intentar generalizar los principales teoremas de la teoría de espacios de Hilbert, concretamente: el teorema de la proyección ortogonal y su consecuencia, el teorema de representación de Riesz. Por desgracia un intento en este sentido está destinado al fracaso, como lo muestran sencillos ejemplos que daremos a continuación. Es por esto por lo que restringimos nuestro estudio al caso en que la C^*-álgebra U es de dimensión finita; en este caso, con las convenientes definiciones, es posible mantener la analogía con la teoría clásica de espacios de Hilbert.

Veamos ante todo ejemplos que justifiquen la restricción que vamos a hacer en nuestro estudio:

a.- Sea U una C^*-álgebra sin ideales por la izquierda minimales (ejemplos de tales C^*-álgebras se dan en [11]) y sea X un ideal por la izquierda maximal de U (la existencia de ideales maximales en cualquier anillo con unidad es consecuencia del lema de Zorn; todo ideal maximal de un álgebra de Banach con unidad es cerrado); X con el producto escalar $(x \mid y) = x.y^*$ ($(x,y) \in X^2$) es de manera natural un U-módulo de Hilbert. Veamos que en el U-módulo de Hilbert X no se verifica el análogo del teorema de representación de Riesz, es decir: vamos a mostrar una aplicación U-lineal continua de X en U que no es de la forma $x \longrightarrow (x \mid x_o)$ para un cierto x_o de X. En efecto: sea u_o un elemento de U que no pertenezca a X; la aplicación $x \longrightarrow x.u_o^*$ de X en U es U-lineal y continua; si fuese de la forma $x \longrightarrow (x \mid x_o)$, se tendría: $x.(u_o^* - x_o^*) = 0$, $\forall x \in X$; con lo que $u_o - x_o$ pertenecería al que, llamábamos en ((III,1)), conjunto $*$-ortogonal de X. Pero siendo X un ideal por la izquierda maximal de una C^*-álgebra sin ideales por la izquierda minimales, su conjunto $*$-ortogonal tiene que reducirse a $\{0\}$ (véase ((III,1.e))); en consecuencia: $u_0 = x_0$, con lo que u_0 pertenecería a X contra la hipótesis.

b.- Siguiendo con las mismas notaciones, consideremos ahora X como submódulo cerrado del U-módulo de Hilbert U ; como

$$\left((x \mid u) = x.u^* = 0 \ , \ \forall x \in X \right) \Longrightarrow u = 0 \qquad (u \in U)$$

resulta que el submódulo cerrado X no posee complemento ortogonal; lo que prueba la no posibilidad de generalizar el teorema de la proyección ortogonal.

Empecemos pues el estudio de los módulos de Hilbert sobre C^*-álgebras de dimensión finita. Un resultado, de no difícil demostración, constituye el útil básico para iniciar el estudio:

I.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, X un U-módulo prehilbertiano, u' un funcional lineal positivo no degenerado sobre U (la existencia de un tal u' quedó probada en ((III,1,C)).), La aplicación $(x,y) \longrightarrow \langle u', (x \mid y) \rangle$ de $X \times X$ en C es evidentemente una forma hermitiana positiva no degenerada sobre X (llamémosla $(\mid)_1$) y en consecuencia $\{X, (\mid)_1\}$ es un espacio prehilbertiano. Se verifica:

c.- La norma canónica del U-módulo prehilbertiano $\{X, (\mid)\}$ es equivalente a la norma canónica del espacio prehilbertiano $\{X, (\ |\ )_1\}$. En consecuencia, si X es un U-módulo de Hilbert, $\{X, (\ |\ )_1\}$ es un espacio de Hilbert.

d.- $(x|y) = 0 \iff$

$\iff (\ (x|u.y)_1 = 0 \ , \ \forall u \in U \ ) \qquad ((x,y) \in X^2)$.

En palabras: decir que x es ortogonal a y en el U-módulo prehilbertiano $\{X, (\ \ )\}$ equivale a decir que x es ortogonal al U-submódulo engendrado por y en el espacio prehilbertiano $\{X, (\ \ )_1\}$.

Demostración:

de ((c)).- Llamemos $\|\ \ \|$ a la norma canónica del U-módulo prehilbertiano X y $|\ \ |$ a la del espacio prehilbertiano $\{X, (\ |\ )_1\}$; desde luego:

$$|x| = \sqrt{\langle u', (x|x)\rangle} \leq \sqrt{\|u'\|.\|(x|x)\|} = \|u'\|^{\frac{1}{2}}.\|x\| ,$$

$\forall x \in X$. Por otra parte, la norma $u \longrightarrow \sqrt{\langle u', u^*u\rangle}$ sobre la C^*-álgebra U de dimensión finita ha de ser necesariamente equivalente a la norma estelar, con lo que existe un número positivo l tal que: $l.\|u\| \leq \sqrt{\langle u', u^*u\rangle}$, $\forall u \in U$; y entonces:

$$l.\|x\| = l.\sqrt{\|(x|x)\|} = l.\left\|\sqrt{(x|x)}\right\| \leq \sqrt{\langle u', (x|x)\rangle} = |x| .$$

Hemos demostrado: $l.\|x\| \leq |x| \leq \|u'\|^{\frac{1}{2}}\|x\|$, $\forall x \in X$;

con lo que las normas $|\ \ |$ y $\|\ \ \|$ son equivalentes.

de ((d)).- Supongamos $(x \mid y) = 0$. Entonces, cualquiera que sea u de U, es $(x \mid u.y) = (x \mid y).u^* = 0$; y con más razón: $(x \mid u.y)_1 = \langle u', (x \mid u.y)\rangle = 0$.

Recíprocamente: supongamos que es $(x \mid u.y)_1 = 0$ para todo u de U; será en particular: $(x \mid (x \mid y).y)_1 = 0$, y entonces:

$$\langle u', (x \mid y).(x \mid y)^*\rangle = \langle u', (x \mid (x \mid y).y)\rangle =$$

$= (x \mid (x \mid y).y)_1 = 0$. Como el funcional u' es no degenerado, concluimos: $(x \mid y) = 0$, c. q. d.

Haciendo uso del lema que acabamos de demostrar, podemos generalizar el teorema de la proyección ortogonal:

J.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, Y un U-submódulo completo de X (Y con la restricción de la forma $(\ \mid\ )$ es por tanto un U-módulo de Hilbert). Para cada x de X existe un único elemento $F(x)$ de Y tal que $x - F(x)$ es ortogonal a Y, y se verifica:

e.- $F(x)$ materializa la distancia de x a Y.

f.- La aplicación $x \longrightarrow F(x)$ es U-lineal, continua y de norma uno (si Y no se reduce a cero).

g.- $x \in Y \Longleftrightarrow x = F(x)$ $(x \in X)$.

h.- El U-submódulo ortogonal a Y coincide con el U-submómódulo anulador de F (llamémosle Y^*).

i.- X es suma hilbertiana directa de Y e Y^* (suma directa de submódulos ortogonales).

Demostración:

Sea $(\ |\ )_1$ el producto escalar complejo definido en ((I)) sobre X. Se sabe, de ((I,c)), que la topología del espacio prehilbertiano $\{X, (\ |\ )_1\}$ es la misma que la del U-módulo prehilbertiano X. Sea entonces F la proyección ortogonal del espacio prehilbertiano $\{X, (\ |\ )_1\}$ sobre su variedad lineal completa Y; para cada x de X, se sabe que F(x) es el único elemento de Y tal que $(x - F(x) \mid y)_1 = 0 \quad , \forall y \in Y$. Como Y es un U-submódulo del U-módulo X, cualquiera que sea (u,y) de $U \times Y$, u.y pertenece a Y, con lo que:

$$(x - F(x) \mid u.y)_1 = 0 \qquad , \qquad \forall (u,y) \in U \times Y \qquad .$$

Aplicando ((I,d)), se concluye:

$$(x - F(x) \mid y) = 0 \qquad , \qquad \forall\, y \in Y$$; de manera que

x - F(x) es ortogonal a Y. Que F(x) es el único elemento de Y que cumple esta condición sale también de ((I,d)) o, si se quiere, directamente: si y (perteneciente a Y) es tal que x - y es ortogonal a Y, entonces, siendo x - F(x) y x - y ortogonales a Y, también lo es la diferencia y - F(x) , y, como esta diferencia es de Y, se tendrá en particular:

$$(y - F(x) \mid y - F(x)) = 0 \Longrightarrow y = F(x) .$$

Pasemos a demostrar las propiedades:

de ((e)).- Cualquiera que sea y de Y, se tiene:

$$(x - y \mid x - y) = ((x - F(x))+(F(x) - y) \mid (x - F(x))+(F(x) - y))=$$
$$= (x - F(x) \mid x - F(x)) + (F(x) - y \mid F(x) - y) \geqslant$$
$$\geqslant (x - F(x) \mid x - F(x))$$

(se he hecho uso de que $F(x) - y$ pertenece a Y y $x - F(x)$ es ortogonal a Y); tomando normas en esta desigualdad de miembros positivos:

$$\| x - F(x) \|^2 = \| (x - F(x) \mid x - F(x))\| \leq \|(x - y \mid x - y)\| =$$
$$= \|x - y\|^2 \Longrightarrow \|x - F(x)\| \leq \|x - y\| , \forall y \in Y ;$$

que pone de manifiesto: $\|x - F(x)\| = \min\limits_{y \in Y} \|x - y\|$.

de ((f)).- La aplicación $x \longrightarrow F(x)$ es C-lineal por construcción. Si $(u,x) \in U \times X$, $F(u.x)$ y $u.F(x)$ son elementos de Y; $u.x - F(u.x)$ es ortogonal a Y por la caracterización que se ha hecho de F, pero también:

$$(u.x - u.F(x) \mid y) = (u.(x - F(x)) \mid y) = u.(x - F(x) \mid y) =$$
$$= 0 , \forall y \in Y$$. Concluimos entonces:

$$F(u.x) = u.F(x) , \forall (u,x) \in U \times X ,$$ y F es U-lineal.

De la igualdad evidente: $(x - F(x) \mid F(x)) = 0$, $\forall x \in X$, sale $(F(x) \mid F(x)) = (x \mid F(x))$, $\forall x \in X$; aplicando la forma débil de la desigualdad de Cauchy-Schwart (((2,D,e))):

$$\| F(x) \|^2 = \| (F(x) \mid F(x)) \| = \| (x \mid F(x)) \| \leq \| x \| \, \| F(x) \| ,$$

$\forall x \in X$. Entonces, si $F(x)$ es distinto de cero, resulta: $\| F(x) \| \leq \| x \|$, desigualdad que es trivialmente cierta si $F(x)$ es cero, y que por tanto prueba la continuidad de la aplicación F e incluso, que es $\| F \| \leq 1$. Como la restricción de F a Y no puede ser otra que la identidad sobre Y, si Y no se reduce a cero, será $\| F \| = 1$.

Las propiedades ((g)), ((h)) e ((i)) se obtienen, a partir de la caracterización de F, por procedimiento análogo al caso clásico. Sólo diremos, para la mejor comprensión de ((h)), que el conjunto ortogonal a una parte cualquiera de X es siempre un U-submódulo cerrado de X, y, respecto a ((i)), que una suma hilbertiana directa es siempre en particular una suma topológica directa (la demostración se basa en el "teorema de Pitágoras", del que implícitamente hemos hecho uso en la demostración de ((e)), y en que la norma de una C^*-álgebra es compatible con el orden de los elementos positivos).

Discusión.- En la teoría clásica de espacios de Hilbert, el teorema de la proyección ortogonal se demuestra a partir de la existencia, para cada elemento del total, de un <u>único</u> punto, en la variedad completa sobre la que se va a proyectar, que materializa la distancia del elemento en cuestión a dicha variedad. La afirmación ((J,e)) establece, para cada elento x del U-módulo prehilbertiano X, la existencia de un punto $F(x)$ en el U-submódulo completo Y cumpliendo esta misma condición, pero no se afirma nada respecto a la unicidad de tal elemento. Surge entonces la pregunta: ¿ podría haberse hecho una demostración de nuestro teorema idéntica a la conocida para espacios de Hilbert, evitando así el tener que recurrir al caso particular ($U = C$), como lo hemos hecho por medio de ((I,c)), para establecer el general ?. La contestación, salvo $U = C$ como es lógico, es negativa: Concretamente: para cada C^*-álgebra U de dimensión finita mayor que uno se va a mostrar un U-módulo de Hilbert X, un U-submódulo cerrado de X Y, y un elemento x de X para el que existen "muchos" elementos de Y que materializan su distancia a Y. En efecto:

Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita mayor que uno; U posee ideales por la izquierda propios, lo que, en vista de ((III,4,K)), equivale a la existencia de proyecciones distintas de 0 e I ; sea e una tal proyección. Llamemos X al U-módulo de Hilbert $\{U, (u,v) \longrightarrow u.v^*\}$ (la norma canónica de este U-módulo de Hilbert no es otra que la estelar); llamemos Y al

U-submódulo cerrado de X U.e . La proyección ortogonal, en el sentido de ((J)), del elemento I de X sobre Y es necesariamente e , puesto que $(I - e \mid u.e) = (I - e).(u.e)^* = (I - e)eu^* = 0$, $\forall u \in U$; con lo que, en vista de ((J,e)), será: $d(I, Y) = \| I - e \| = 1$. Cualquiera que sea el número complejo c en la situación $|1 - c| = 1$, evidentemente c.e pertenece a Y, y se tiene:

$$\| I - ce \|^2 = \| (I - ce)(I - \bar{c}e) \| = \| I - (c + \bar{c} - |c|^2)e \| =$$

$$= \| I - (1 - |1 - c|^2)e \| = \| I \| = 1$$

; resultando así que todos los elementos de Y de la forma c.e , con c en la situación $|1 - c| = 1$, materializan la distancia de I a Y.

Pasemos a ver el teorema de representación de Riesz. Para ello, si X es un U-módulo prehilbertiano (X es en particular un U-módulo por la izquierda), es conocido cómo el conjunto de las aplicaciones U-lineales de X en U se dota de manera natural de estructura de U-módulo por la <u>derecha</u> y con esta estructura el tal conjunto recibe el nombre de dual <u>algebraico</u> del módulo X. El epíteto "algebraico" ha sido añadido por nosotros adrede pues, como se ha podido sospechar, el conjunto que nos va a interesar para establecer una generalización del teorema de Riesz, es el que convendremos en llamar módulo dual topológico de X (lo designaremos por X^*), a saber: conjunto de las aplicaciones U-lineales continuas del U-módulo prehilbertiano X en la C^*-álgebra U, conjunto este que, puede comprobarse fácilmente, es un submódulo del módulo dual algebraico de X; X^* es canónicamente un espacio de Banach respecto a la estructura vectorial subyacente a su estructura de U-módulo y la norma $\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x^*(x)\|$. Con estos conceptos, se tiene:

K.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, X un U-módulo prehilbertiano (X^*: módulo dual topológico de X). Para cada x de X, convengamos en llamar $\overline{x}$ a la aplicación $y \longrightarrow (y \mid x)$ de X en U. Se verifica:

j.- La aplicación $x \longrightarrow \overline{x}$ es una inyección U-semilineal isométrica de X en X^* (con la palabra U-semilineal queremos indicar que se verifica: $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\forall (x,y) \in X^2$, y $\overline{u.x} = \overline{x}.u^*$, $\forall (u,x) \in U \times X$).

k.- Si X es un U-módulo de Hilbert, la aplicación $x \longrightarrow \overline{x}$ de X en X^* es sobreyectiva. En consecuencia un U-módulo de Hilbert se considera siempre identificado con su módulo dual topológico por medio de la biyección U-semilineal isométrica $x \longrightarrow \overline{x}$.

Demostración:

de ((j)).- Para cada x de X la aplicación $\overline{x}: y \longrightarrow (y|x)$ de X en U es claramente U-lineal y, en vista de la desigualdad débil de Cauchy-Schwart, continua; luego $\overline{x} \in X^*$. Las propiedades $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ y $\overline{u.x} = \overline{x}.u^*$ son de comprobación inmediata. Así pues, la aplicación $x \longrightarrow \overline{x}$ es U-semilineal. Por otra parte, la misma desigualdad de Cauchy-Schwart muestra que es: $\|\overline{x}\| \leq \|x\|$, $\forall x \in X$; pero también:

$$\|x\|^2 = \|(x \mid x)\| = \|\overline{x}(x)\| \leq \|\overline{x}\| \, \|x\| \Longrightarrow \|x\| \leq \|\overline{x}\|.$$

Por tanto, se tiene: $\|\overline{x}\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. Esta igualdad, junto con el carácter lineal de la aplicación $x \longrightarrow \overline{x}$, pone de manifiesto que es isométrica y en consecuencia, inyectiva.

de ((k)).- Sea, como en ((I)), $(\mid)_1$ el producto escalar complejo $(x,y) \longrightarrow \langle u', (x \mid y) \rangle$, donde u' es un funcional positivo no degenerado sobre U. Como X es ahora un U-módulo de Hilbert, en vista de ((I,c)), $\{X, (\mid)_1\}$ es un espacio de Hilbert. Sea f una aplicación U-lineal continua cualquiera del U-módulo de Hilbert X en la C^*-álgebra U; la aplicación $x \longrightarrow \langle u', f(x) \rangle$ de X en C es entonces un funcional C-lineal continuo sobre el espacio de Hilbert $\{X, (\mid)_1\}$. En vista del teorema de representación de Riesz para espacios de Hilbert, existe un elemento x_0 de X tal que

$$\langle u', f(x) \rangle = (x \mid x_0)_1 \quad , \quad \forall x \in X$$; es decir:

$$\langle u', f(x) - (x \mid x_0) \rangle = 0 \quad , \quad \forall x \in X \quad .$$

Cualesquiera que sean u y x de U y X, respectivamente, u.x pertenece a X; aplicando a este elemento la igualdad anterior, teniendo en cuenta que $x \longrightarrow f(x)$ y $x \longrightarrow (x \mid x_o)$ son aplicaciones U-lineales, resulta:

$$\langle u', u.(f(x) - (x \mid x_o)) \rangle = 0 \quad , \quad \forall (u,x) \in U \times X \quad ;$$

y, particularizando $u = (f(x) - (x \mid x_o))^*$, habida cuenta del carácter no degenerado del funcional positivo u' , concluimos: $f(x) = (x \mid x_o)$, $\forall x \in X$; de forma que se tiene: $f = \overline{x_o}$ y, en consecuencia la aplicación $x \longrightarrow \overline{x}$ de X en X^* es sobreyectiva.

6.- Los U-módulos de Hilbert tipo (U: C^*-álgebra de dimensión finita).

El teorema de existencia de base ortonormal para un espacio de Hilbert equivale, como es conocido, a la posibilidad de reducir el estudio de tales espacios al de los llamados espacios de Hilbert tipo, a saber: las sumas hilbertianas de cardinal arbitrario de espacios de Hilbert unidimensionales idénticos a C. Es evidente que una variedad unidimensional de un espacio vectorial cualquiera puede ser caracterizada por el hecho de ser un subespacio minimal, es decir: no incluye estrictamente a ningún otro subespacio salvo el $\{0\}$. Es esta sencilla disquisición la que va a permitirnos dar una definición coherente de base ortonormal para módulos de Hilbert sobre C^*-álgebras de dimensión finita que nos llevará a establecer igualmente los U-módulos de Hilbert tipo.

Empecemos caracterizando los U-submódulos minimales de un U-módulo prehilbertiano (llamaremos isomorfismo de U-módulos a toda biyección U-lineal, e isomorfismo hilbertiano de U-módulos prehilbertianos a un isomorfismo f que verifique además: $(f(x) | f(y)) = (x | y)$; un isomorfismo hilbertiano es siempre una isometría):

L.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, X un U-módulo prehilbertiano e Y un U-submódulo de X. Las cuatro afirmaciones siguientes equivalen:

a.- Y es un U-submódulo minimal de X.

b.- Existe un elemento y_o de Y y una proyección minimal e de U, tales que $(y_o | y_o) = e$ y $U.y_o = Y$.

c.- El U-módulo Y es isomorfo a un ideal por la izquierda minimal de U.

d.- El U-módulo prehilbertiano Y es hilbertianamente isomorfo a un ideal por la izquierda minimal de U (concretamente: todo isomorfismo de U-módulos de un ideal por la izquierda minimal de U sobre Y es un múltiplo escalar de un isomorfismo hilbertiano).

Como consecuencia de ((d)), todo U-submódulo minimal de X es completo y por tanto un U-módulo de Hilbert.

Demostración:

((a)) $\Longrightarrow$ ((b)).- Supongamos que Y es un U-submódulo minimal de X; sea y_1 un elemento no nulo de Y; como es $I.y_1 = y_1 \neq 0$ e I se puede descomponer en suma de un número finito de proyecciones minimales de U (ver ((III,1,B,k))), existe una proyección minimal e tal que $e.y_1 \neq 0$. Pongamos entonces $y_2 = e.y_1$; y_2 pertenece evidentemente a Y, además: $(y_2 \mid y_2) = (e.y_1 \mid e.y_1) = e.(y_1 \mid y_1).e$. Pero se sabe (((III,1,B,i)) y ((III,1,h))) que la C^*-álgebra e.U.e es unidimensional e igual a C.e , luego: $(y_2 \mid y_2) = c.e$, donde c es un número necesariamente positivo por ser $(y_2 \mid y_2)$ y e elementos positivos no nulos de U. Basta entonces poner: $y_0 = c^{-\frac{1}{2}}.y_2$, para tener la relación $(y_0 \mid y_0) = e$. Que es $U.y_0 = Y$, resulta del carácter minimal de Y.

((b)) $\Longrightarrow$ ((c)).- Supuesto que se verifique ((b)) (y manteniendo sus símbolos) U.e es, en vista de ((III,1,B,i)), un ideal por la izquierda minimal de U. Para cada elemento y de Y, aplicando la desigualdad "fuerte" de Cauchy-Schwartz (((e,D,d))), se obtiene:

$$(y_0 \mid y).(y_0 \mid y)^* \leq \|y\|^2 .(y_0 \mid y_0) = \|y\|^2 .e \Longrightarrow$$

$$0 \leq (I - e)(y_0 \mid y)(y_0 \mid y)^* (I - e) \leq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (I - e)(y_0 \mid y).((I - e)(y_0 \mid y))^* = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow (I - e)(y_0 | y) = 0 \Longrightarrow (y_0 | y) = e(y_0 | y)$;

y, por conjugación: $(y | y_0) = (y | y_0)e$; resultando

así que $(y | y_0)$ es un elemento de $U.e$, cualquiera que sea y de Y. Siendo la aplicación $y \longrightarrow (y | y_0)$ de Y en $U.e$ evidentemente U-lineal, probemos que es biyectiva, con lo que quedará terminada esta parte, si se recuerda que $U.e$ es un ideal por la izquierda minimal de U. En efecto: si y (perteneciente a Y) es tal que $(y | y_0) = 0$, como es por hipótesis $Y = U.y_0$, será $y = u.y_0$ para un cierto elemento u de U, y entonces:

$0 = (y | y_0) = (u.y_0 | y_0) = u.(y_0 | y_0) = u.e$, con lo que:

$(y | y) = (u.y_0 | u.y_0) = u.(y_0 | y_0).u^* = u.e.u = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = 0$. Acabamos de ver que el nucleo de la aplicación $y \longrightarrow (y | y_0)$ de Y en $U.e$ se reduce a $\{0\}$. Para ver que es sobreyectiva, sea $u \in U.e$, se verifica:

$u = u.e = u.(y_0 | y_0) = (u.y_0 | y_0)$, que muestra que u

es la imagen del elemento de Y $u.y_0$.

((c)) $\Longrightarrow$ ((d)).- Supuesto verificado ((c)), sea f un isomorfismo de U-módulos de un ideal por la izquierda M minimal de U sobre Y. En vista de ((III,1,B,i)), M es de la forma $U.e$ con e proyección minimal de U. Se tiene entonces:

$$(f(u) \mid f(v)) = (f(u.e) \mid f(v.e)) = (u.f(e) \mid v.f(e)) =$$

$$= u.(f(e) \mid f(e)).v^* \quad , \qquad \forall (u,v) \in M^2 \quad .$$

En particular ($u = v = e$): $(f(e) \mid f(e)) = e(f(e) \mid f(e))e$.

Pero la C^*-álgebra $e.U.e$ es unidimensional (((III,1,h))), de forma que: $(f(e) \mid f(e)) = \|f(e)\|^2 .e$. Y, volviendo a la igualdad general: $(f(u) \mid f(v)) = \|f(e)\|^2 .u.v^*$, $\forall (u,v) \in M^2$; igualdad esta que demuestra que, salvo multiplicación por el escalar $\|f(e)\|^{-1}$, f es un isomorfismo hilbertiano (recuérdese que un ideal por la izquierda de una C^*-álgebra se considera siempre con la estructura natural de U-módulo prehilbertiano asociada al producto escalar $(u,v) \longrightarrow u.v^*$).

((d)) $\Longrightarrow$ ((a)).- A nivel puramente algebraico, dos U-submódulos isomorfos de sendos U-módulos son a un tiempo minimales o no.

El teorema ((L)), que acabamos de demostrar, sugiere las siguientes <u>definiciones</u>:

Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita y X un U-módulo prehilbertiano; llamaremos sistema ortonormal a toda parte de X S tal que dos elementos cualesquiera distintos de S son ortogonales y, para cada x de S, $(x \mid x)$ es una proyección minimal de U (obsérvese que esta definición en el caso clásico (U = C) coincide con la tradicional pues la única proyección minimal de C es 1), e igualmente llamaremos base ortonormal de X a todo sistema ortonormal S tal que el U-submódulo cerrado de X engendrado por S sea igual a X.

Es fácil demostrar que toda base ortonormal es un sistema ortonormal maximal (no contenido en ningún otro), siendo conocida, del caso clásico, la no certeza del recíproco.

Con estas definiciones se pueden generalizar todos los teoremas clásicos al respecto:

M.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, S un sistema ortonormal de X(1) (para simplificar la notación utilizaremos un conjunto de índices H equipotente a S y una biyección $i \longrightarrow x_i$ de H sobre S; en consecuencia llamaremos e_i a la proyección minimal de U $(x_i \mid x_i)$). Se verifica:

e.- Para cada x de X y para cada i de H, el elemento de U $(x \mid x_i)$ pertenece al ideal $U.e_i$ (en consecuencia: $(x \mid x_i).e_i = (x \mid x_i)$).

f.- La familia $\{ (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \mid i \in H \}$ de elementos de U es sumable y se verifica (desigualdad de Bessel):

$$\sum_{i \in H} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \leq (x \mid x) \quad , \quad \forall x \in X \quad .$$

g.- Si X es un U-módulo de Hilbert, para cada x de X, la

---

(1).- X: U-módulo prehilbertiano.

familia $\{ (x \mid x_i).x_i \mid i \in H \}$ de elementos de X es sumable, y la aplicación $x \longrightarrow \sum_{i \in H} (x \mid x_i).x_i$ es la proyección ortogonal de X sobre el U-submódulo cerrado engendrado por S.

Demostración:

de ((e)).- La desigualdad fuerte de Cauchy-Schwartz da: $(x_i \mid x)(x_i \mid x)^* \leq \|x\|^2 .e_i$. Multiplicando a derecha e izquierda por $I - e_i$, se llega fácilmente a $(x \mid x_i) = (x \mid x_i).e_i$.

de ((f)).- Haciendo uso de la propiedad que acabamos de demostrar, de que $i \neq j \Longrightarrow (x_i \mid x_j) = 0$ y del carácter U-sexquilineal de la forma $(\mid)$, se llega a establecer, cualquiera que sea J parte finita de H:

$$0 \leq (x - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \mid x - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i) =$$

$$= (x \mid x) - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i \in J} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \leq (x \mid x) \qquad ((*)).$$

Tomando normas en esta desigualdad de miembros positivos:

$\| \sum_{i \in J} (x \mid x_i)(x \mid x_i)^* \| \leq \|x\|^2$; y, haciendo uso de ((3,H)):

$\sum_{i \in J} \|(x \mid x_i)\|^2 \leq l^{-1} \|x\|^2$, donde l es un número positivo dependiénte únicamente de la C^*-álgebra U. La familia de números positivos $\{ \|(x \mid x_i)\|^2 \mid i \in H \}$, teniendo el conjunto de las sumas de sus subfamilias finitas mayorado, es sumable, lo que se traduce por la sumabilidad absoluta de la familia de elementos de U $\{ (x \mid x_i)(x \mid x_i)^* \mid i \in H \}$ y por tanto dicha familia es sumable por ser U completo. La desigualdad de Bessel resulta de la desigualdad ((*)), válida para toda parte finita J de H, por paso al límite.

de ((g)).- Siendo X ahora completo, se puede probar la sumabilidad de la familia $\{ (x \mid x_i).x_i \mid i \in H \}$ viendo que verifica el criterio de Cauchy. Pero, por ((f)), la familia $\{ (x \mid x_i)(x \mid x_i)^* \mid i \in H \}$ es sumable en U, y por tanto (F designa el conjunto de las partes finitas de H):

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \exists J_0 \in F \mid J_0 \cap J = \emptyset (J \in F) \Longrightarrow \Big\| \sum_{i \in J} (x \mid x_i)(x \mid x_i)^* \Big\| < \varepsilon^2.$$

Basta entonces tener en cuenta la identidad:

$$\Big(\sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \,\Big|\, \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \Big) = \sum_{i \in J} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* ,$$

para llegar a: $\Big\| \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \Big\| < \varepsilon$; que pone de manifiesto que la familia $\{ (x \mid x_i).x_i \mid i \in H \}$ verifica en efecto el criterio de Cauchy. Que $\sum_{i \in H} (x \mid x_i).x_i$ es la proyección ortogonal de x sobre el U-submódulo cerrado engendrado por S, resulta de que $x - \sum_{i \in H} (x \mid x_i).x_i$ es ortogonal a todos los x_i y por U-linealidad a todo el U-módulo engendrado por S y por continuidad al cierre de dicho U-módulo.

Pasamos a caracterizar las bases ortonormales. La redacción que hacemos sigue el esquema de [9] para el caso clásico:

N.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, X un U-módulo prehilbertiano, $\{ x_i \mid i \in H \}$ un sistema ortonormal de X. Las afirmaciones siguientes equivalen:

h.- Para cada par $(x,y) \in X^2$ la familia $\{ (x \mid x_i).(y \mid x_i)^* \mid i \in H \}$ es sumable y de suma $(x \mid y)$.

i.- Para cada x de X, se verifica (igualdad de Parseval);

$$(x \mid x) = \sum_{i \in H} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* .$$

j.- Para cada x de X, la familia $\{(x \mid x_i).x_i \mid i \in H\}$ es sumable y de suma x .

k.- $\{x_i\}$ es una base ortonormal de X.

Demostración:

((h)) $\Longrightarrow$((i)).- Evidente, pues ((i)) resulta de ((h)) por particularización (x = y).

((i)) $\Longrightarrow$((j)).- Traduciendo la hipótesis:

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists J_0 \in F \mid \ J \supseteq J_0 \ (J \in F) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\| (x \mid x) - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \right\| < \varepsilon^2 .$$

Recordando la identidad:

$$0 \leq (x - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \mid x - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i) =$$

$$= (x \mid x) - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \quad , \text{ resulta:}$$

$\| x - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \| < \varepsilon$; que prueba que la familia $\{ (x \mid x_i).x_i \mid i \in H \}$ es sumable y de suma x.

((j)) $\Longrightarrow$ ((k)).- Como según ((j)), cualquiera que sea x de X, es $x = \sum_{i \in H} (x \mid x_i).x_i$; x es límite de elementos del U-módulo engendrado por $\{ x_i \}$, con lo que el U-submódulo cerrado engendrado por $\{ x_i \}$ es todo X, y $\{ x_i \}$ es en consecuencia una base ortonormal.

((k)) $\Longrightarrow$ ((h)).- Realmente esta implicación hay que descomponerla así: ((k)) $\Longrightarrow$ ((j)) $\Longrightarrow$ ((i)) $\Longrightarrow$ ((h)) . Veamos la primera parte: por hipótesis todo elemento x de X es límite de elementos del U-módulo engendrado por $\{ x_i \}$, de manera que para todo número positivo ε existe una parte finita J_o de H tal que $\| x - \sum_{i \in J_o} u_i.x_i \| < \varepsilon$, con $\{ u_i \mid i \in J_o \}$ convenientes elementos de U. Pero si J es una parte finita de H conteniendo a J_o, es fácil ver que $\sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i$ es precisamente la proyección ortogonal de x sobre el U-submódulo engendrado por $\{ x_i \mid i \in J \}$ (que es completo por ser suma hilbertiana directa de los U-submódulos minimales $\{ U.x_i \mid i \in J \}$), luego en vista de ((5,J,e)) será también

$\| x - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \| < \varepsilon$, puesto que $\sum_{i \in J_0} u_i.x_i$ pertenece evidentemente al U-módulo engendrado por $\{ x_i \mid i \in J \}$. Esto prueba ((j)). Que ((j)) implica ((i)) resulta de la identidad que ya se ha utilizado:

$$\| x - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).x_i \|^2 = \| (x \mid x) - \sum_{i \in J} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \| ,$$

válida para toda parte finita J de H. Veamos finalmente que ((i)) implica ((h)): siendo por hipótesis

$$(x \mid x) = \sum_{i \in H} (x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \quad , \quad (y \mid y) = \sum_{i \in H} (y \mid x_i).(y \mid x_i)^*$$

(las correspondientes familias son sumables en virtud de ((M,f))), la sumabilidad de la familia $\{ (x \mid x_i).(y \mid x_i)^* \}$ resulta por aplicación de la fórmula, consecuencia de ((2,g)):

$$\| \sum_{i \in J} (x \mid x_i)(y \mid x_i)^* \|^2 \leq \| \sum_{i \in J} (x \mid x_i)(x \mid x_i)^* \| \| \sum_{i \in J} (y \mid x_i)(y \mid x_i)^* \| ,$$

para toda parte finita J de H, haciendo uso del criterio de Cauchy. Que es $(x \mid y) = \sum_{i \in H} (x \mid x_i).(y \mid x_i)^*$, resulta de la hipótesis ((i)) y de la identidad:

$$4(x \mid y) = (x+y \mid x+y) - (x-y \mid x-y) + i((x+iy \mid x+iy)-(x-iy \mid x-iy))$$

en la que cada elemento de la forma $(z \mid z)$ se sustituirá, en virtud de ((i)), por $\sum_{i \in H} (z \mid x_i).(z \mid x_i)^*$.

Terminada esta clásica caracterización de las bases ortonormales, pasemos a justificar la existencia de dichas bases en los U-módulos de Hilbert:

0.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, X un U-módulo de Hilbert y S una parte de X. Las dos afirmaciones siguientes equivalen:

l.- S es una base ortonormal.

m.- S es un sistema ortonormal maximal (la existencia de sistemas ortonormales maximales en cualquier U-módulo prehilbertiano se justifica por el lema de Zorn).

Demostración:

$((l)) \Longrightarrow ((m))$.- Evidente.

$((m)) \Longrightarrow ((l))$.- Sea S un sistema ortonormal maximal de X; llamemos Y al U-submódulo cerrado de X engendrado por S; queremos demostrar que es $Y = X$. Razonemos por reducción al absurdo: supongamos que Y no es X, Y es, como parte cerrada de un completo, completa, con lo que podemos aplicar el teorema de la proyección ortogonal; en particular, si Y^* es el U-módulo ortogonal a Y, como X es suma directa de Y e Y^*, Y no se reduce a cero. Sea entonces x_o un elemento no nulo de Y ; razonando análogamente a como lo hicimos en la demostración de $((L,a \Longrightarrow b))$, se llega a la existencia de un elemento x de Y tal que $(x \mid x)$ es una proyección minimal de U. Entonces $S \cup \{x\}$ es un nuevo sistema ortonormal conteniendo estrictamente a S, lo que es absurdo por ser S maximal.

Tenemos ya todo el material preparado para establecer el concepto de U-módulo de Hilbert tipo. Si U es una C^*-álgebra de dimensión finita, llamaremos U-módulo de Hilbert tipo a cualquier suma hilbertiana, en el sentido de ((3,F)), de ideales por la izquierda minimales de U (considerados estos ideales con su estructura natural de U-módulos de Hilbert). La razón de esta denominación radica en que, como vamos a demostrar a continuación, todo U-módulo de Hilbert es hilbertianamente isomorfo a un U-módulo de Hilbert tipo. Se puede tipificar aun más considerando que ideales por la izquierda minimales distintos de U pueden ser isomorfos (y en consecuencia, según ((L)), hilbertianamente isomorfos). Se puede demostrar (basándose en el teorema de estructura de las C^*-álgebras de dimensión finita y en el estudio de la equivalencia de proyecciones hecho en [11]):

- Si U es simple, todos sus ideales por la izquierda minimales son isomorfos (pese a que, salvo $U = C$, posee infinitos).
- Si U es conmutativa (sea n su dimensión), U posee sólamente n ideales por la izquierda minimales dos a dos no isomorfos.

Estas dos afirmaciones no son más que casos particulares de la general (llamaremos clase de ideales al conjunto de ideales isomorfos a uno dado):

- El conjunto de las clases de ideales por la izquierda minimales de U es finito, de cardinal igual a la dimensión de su centro.

Según esto, si la dimensión del centro de U es n, eligiendo n ideales minimales $\{M_1,\ldots,M_n\}$ representantes de las respectivas clases y sustituyendo en el U-módulo de Hilbert tipo cada ideal por su representante elegido, se llega a que dicho U-módulo es hilbertianamente isomorfo a la suma hilbertiana de una familia de ideales minimales de U $\{P_i \mid i \in H\}$ tal que existe una partición finita de H $\{H_1,\ldots,H_n\}$ (admitimos que alguna de las partes sea vacía) verificando: $i \in H_k \Longrightarrow$ $\Longrightarrow P_i = M_k$; en otras palabras: la restricción de la aplicación $i \longrightarrow P_i$ a cada H_k es constante de valor igual a M_k. Podemos resumir este hecho diciendo que todo U-módulo de Hilbert tipo es a su vez isomorfo a la suma hilbertiana de una familia, constante salvo partición finita, de ideales por la izquierda minimales de U.

Justifiquemos definitivamente el concepto de U-módulo de Hilbert tipo:

P.- Sea U una C^*-álgebra de dimensión finita, X un U-módulo de Hilbert y $\{x_i \mid i \in H\}$ una base ortonormal de X (su existencia ha sido probada en ((0))). Para cada i de H, llamemos e_i a la proyección minimal $(x_i \mid x_i)$; $U.e_i$ es evidentemente un ideal por la izquierda minimal de U; y, para cada x de X, $(x \mid x_i)$ pertenece a $U.e_i$ según ((M,e)). Se verifica:

- La aplicación $x \longrightarrow ((x \mid x_i))$ es un isomorfismo hilbertiano de X sobre la suma hilbertiana de la familia de ideales minimales de U $\{U.e_i \mid i \in H\}$.

Demostración:

Para cada x de X, la familia $\{(x \mid x_i).(x \mid x_i)^* \mid i \in H\}$ es sumable en vista de ((M,f)), hecho este que se traduce en que el elemento $((x \mid x_i))$ de $\underset{i \in H}{\times} (U.e_i)$ pertenece a la suma hilbertiana de la familia de U-módulos de Hilbert $\{U.e_i \mid i \in H\}$ (no se olvide que el producto escalar en cada $U.e_i$ es $(u,v) \longrightarrow u.v^*$). Llamemos entonces f a la aplicación $x \longrightarrow ((x \mid x_i))$ de X en $\bigoplus_{i \in H} U.e_i$. f es evidentemente U-lineal; además, por aplicación de ((N,h)), resulta:

$$(f(x) \mid f(y)) = (((x \mid x_i)) \mid ((y \mid x_i))) =$$

$$= \sum_{i \in H} (x \mid x_i).(y \mid x_i)^* = (x \mid y) \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2$$

(((N,h)) justifica el último paso; el resto no es más que la definición de f y del producto escalar en una suma hilbertiana); resultando así que f es un isomorfismo hilbertiano a falta de ver que es sobreyectivo. Sea entonces (u_i) un elemento cualquiera de $\bigoplus_{i \in H} U.e_i$; por definición, la familia $\{u_i.u_i^* \mid i \in H\}$ es entonces sumable. La identidad:

$$\left(\sum_{i \in J} u_i . x_i \mid \sum_{i \in J} u_i . x_i \right) = \sum_{i \in J} u_i . u_i^* \quad , \text{ donde } J \text{ es cual-}$$

quier parte finita de H, da, tomando normas:

$$\left\| \sum_{i \in J} u_i . x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i \in J} u_i . u_i^* \right\| \quad , \text{ que demuestra que la fa-}$$

milia $\{ u_i . x_i \mid i \in H \}$ satisface el criterio de Cauchy y, siendo X completo, es en consecuencia sumable. Si ponemos $x = \sum_{i \in H} u_i . x_i$, todo se reduce a comprobar, lo que es inmediato, que $f(x) = (u_i)$, quedando así probado el carácter sobreyectivo de f e igualmente la totalidad de nuestro teorema, según el cual todo U-módulo de Hilbert es hilbertianamente isomorfo a uno de los propuestos como"tipo" .

7.- U-módulos regulares. La C*-álgebra de los operadores U-lineales continuos sobre un U-módulo regular.

Es conocido cómo la teoría de las C*-álgebras nació de la consideración de las álgebras de operadores lineales continuos sobre un espacio de Hilbert; igualmente se recordará que la definición de la conjugación en una tal álgebra de operadores es consecuencia directa del lema de representación de Riesz ([5]- -Tomo 1). Si queremos elaborar una teoría análoga para U-módulos de Hilbert (U: C*-álgebra cualquiera), tropezamos con la dificultad de que el teorema de representación de Riesz no es en general cierto (recuérdese el ejemplo ((5,a))). Sin embargo, si U es de dimensión finita, en vista de ((5,K,k)), esta dificultad desaparece.

Ocurre que la clase de los U-módulos de Hilbert para los que se verifica el teorema de representación de Riesz, es decir, en los que toda aplicación U-lineal continua del U-módulo en cuestión en U es de la forma $x \longrightarrow (x \mid x_c)$, es mucho más amplia que la de los U-módulos de Hilbert con U de dimensión finita. Es por esta razón, con objeto de no restringir innecesariamente la generalidad, por la que introducimos el concepto de U-módulo regular; nomenclatura que daremos a todo U-módulo prehilbertiano para el que se verifique el teorema de representación de Riesz. Como la parte ((j)) del teorema ((5,K)) es cierta aunque la C^*-álgebra U no sea de dimensión finita, resulta de manera fácil que un U-módulo regular es siempre un U-módulo de Hilbert (si es X el U-módulo regular en cuestión, aplicando ((5,K,j)) y la definición de "regular", se llega a la consecuencia parcial de que X es R-linealmente homeomorfo a su módulo dual topológico X^* que es siempre completo).

Hablábamos antes de la existencia, aparte el caso de que U sea de dimensión finita, de U-módulos regulares. En efecto: cualquiera que sea la C^*-álgebra U, ella misma, con su estructura natural de U-módulo de Hilbert, es un U-módulo regular. Manteniendo U arbitraria, pero fija, es fácil ver que toda suma hilbertiana finita de U-módulos regulares es un U-módulo regular (en particular los U-módulos libres tipo U^n , donde n es un número natural cualquiera, con su estructura natural de U-módulos de Hilbert, $((u_i) \mid (v_i)) = \sum_{i=1}^{n} u_i . v_i^*$, constituyen nuevos ejemplos de U-módulos regulares); en efecto: sean $\{ X_1, \ldots, X_n \}$ U-módulos regulares y sea f una aplicación U-lineal continua de $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ en U; siendo, para cada X_i, la aplicación

$x_i \longrightarrow f(0,0,\ldots,x_i,0,\ldots,0)$ de X_i en U U-lineal y continua, y siendo X_i regular, existe un elemento y_i de X_i tal que

$$f(0,0,\ldots,x_i,0,\ldots,0) = (x_i \mid y_i) \quad , \quad \forall\, x_i \in X_i \quad .$$

Basta entonces considerar el elemento (y_i) de $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ y comprobar que es: $f((x_i)) = ((x_i) \mid (y_i))$, $\forall (x_i) \in \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$.

No es cierto en general que una suma hilbertiana infinita de U-módulos regulares sea regular, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Sea U una C^*-álgebra poseyendo una familia infinita de proyecciones no nulas $\{ e_i \mid i \in H \}$ dos a dos ortogonales (por ejemplo: la C^*-álgebra de los operadores continuos sobre un Hilbert infinito-dimensional) y sea X el U-módulo de Hilbert suma hilbertiana de card(H) U-módulos de Hilbert iguales a U; X es evidentemente suma hilbertiana de U-módulos regulares y sin embargo vamos a mostrar una aplicación U-lineal continua de X en U que no es de la forma $x \longrightarrow (x \mid x_c)$. En efecto: cualquiera que sea $(u_i) \in X$ y cualquiera que sea J parte finita de H, aplicando la desigualdad "numérica" de Cauchy-Schwart (((2,g))), resulta:

$\| \sum_{i \in J} u_i . e_i \|^2 \leq \| \sum_{i \in J} e_i \| \; \| \sum_{i \in J} u_i . u_i^* \|$; pero $\sum_{i \in J} e_i$ es una proyección de U y en consecuencia: $\| \sum_{i \in J} e_i \| = 1$, con lo que: $\| \sum_{i \in J} u_i . e_i \|^2 \leq \| \sum_{i \in J} u_i . u_i^* \|$, cualquiera que sea J farte finita de H. Como la familia $\{ u_i . u_i^* \mid i \in H \}$ es sumable por ser $(u_i) \in X$, esta desigualdad demuestra, a través del criterio de Cauchy, que la familia $\{ u_i . e_i \mid i \in H \}$ es también sumable e incluso que se verifica:

$$\| \sum_{i \in H} u_i . e_i \| \leq \sqrt{\| \sum_{i \in H} u_i . u_i^* \|} = \| (u_i) \| \quad , \quad \forall (u_i) \in X \quad .$$

De aquí que, si llamamos f a la aplicación $(u_i) \longrightarrow \sum_{i \in H} u_i . e_i$ de X en U, f es continua y evidentemente U-lineal. Si f fuera de la forma $(u_i) \longrightarrow ((u_i) \mid (v_i))$ para algún elemento (v_i) de X, se llega, particularizando (u_i) sucesivamente en el elemento de X que tiene nulas todas sus coordenadas salvo la de índice i que vale I, a $v_i = e_i$, $\forall i \in H$; resultando así que (e_i) sería un elemento de X con lo que la familia $\{ e_i . e_i^* \mid i \in H \} = \{ e_i \mid i \in H \}$ sería sumable, lo que es absurdo si se tiene en cuenta que, para cada parte finita J de H, es: $\| \sum_{i \in J} e_i \| = 1$, y en consecuencia la tal familia no puede ni tan siquiera satisfacer el criterio de Cauchy.

Centrado el concepto de U-módulo regular, vamos a generalizar la estructuración clásica del álgebra de operadores continuos sobre un espacio de Hilbert. Si U es una C^*-álgebra cualquiera y X es un U-módulo de Hilbert, el conjunto de las aplicaciones U-lineales continuas de X en X, que designaremos por $L_u(X)$, aparece evidentemente como una subálgebra cerrada del álgebra de Banach de todas las aplicaciones C-lineales continuas de X en X; de manera que $L_u(X)$ es de manera canónica un álgebra de Banach con unidad ($\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$). En este contexto, podemos enunciar:

Q.- Sea U una C^*-álgebra, X un U-módulo regular (se recordará que, si U es de dimensión finita, los conceptos de U-módulo regular y de U-módulo de Hilbert son equivalentes), $L_u(X)$ el álgebra de Banach de los operadores U-lineales continuos sobre X. Se verifica:

a.- Para cada f de $L_u(X)$, existe un único elemento f^*

de $L_u(X)$, tal que se verifique:

$$(f(x) | y) = (x | f^*(y)) \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2 \quad .$$

b.- La aplicación $f \longrightarrow f^*$ de $L_u(X)$ en sí mismo es una conjugación sobre el álgebra $L_u(X)$.

c.- El álgebra $L_u(X)$ con la norma usual y la conjugación $*$ es una C^*-álgebra.

d.- Un elemento f de la C^*-álgebra $L_u(X)$ es positivo si y sólo si se verifica:

$$(f(x) | x) \geqslant 0 \quad , \quad \forall x \in X \quad .$$

e.- En consecuencia, para cada f de $L_u(X)$, se verifica:

$$(f(x) | f(x)) \leq \|f\|^2 (x | x) \quad , \quad \forall x \in X.$$

Demostración:

Sea $(f,y) \in L_u(X) \times X$; como la aplicación $x \longrightarrow (f(x) | y)$ de X en U es U-lineal y continua, y como X es regular, existe un único elemento, que denotaremos $f^*(y)$, de X, tal que sea:

$$(f(x) | y) = (x | f^*(y)) \quad , \quad \forall x \in X$$. Fijando f , hemos

conseguido así definir una aplicación $y \longrightarrow f^*(y)$ de X en X que, se comprueba inmediatamente, es U-lineal. Si en la última igualdad hacemos $x = f^*(y)$ y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\| f^*(y) \|^2 = \| (f^*(y) \mid f^*(y)) \| = \| (f.f^*(y) \mid y) \| \leq$$

$$\leq \| f.f^*(y) \| \, \| y \| \leq \| f \| \, \| f^*(y) \| \, \| y \| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \| f^*(y) \| \leq \| f \| \, \| y \| \quad , \quad \forall y \in X \quad ;$$

que demuestra que la aplicación U-lineal f^* es continua y, en consecuencia, un elemento de $L_u(X)$; con lo que queda demostrado ((a)).

Las propiedades:

$(f + g)^* = f^* + g^*$, $\forall (f,g) \in L_u(X) \times L_u(X)$;

$(c.f)^* = \bar{c}.f^*$, $\forall (c,f) \in C \times L_u(X)$;

$(f.g)^* = g^*.f^*$, $\forall (f,g) \in L_u(X) \times L_u(X)$;

$(f^*)^* = f$, $\forall f \in L_u(X)$;

son consecuencia inmediata de la caracterización del adjunto h^* de un operador U-lineal continuo h por la fórmula:

$$(h(x) \mid y) = (x \mid h^*(y)) \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2 \quad .$$

Resultando así que $*$ es una conjugación del álgebra $L_u(X)$ (((b))).

Para demostrar ((c)), como $L_u(X)$ es un álgebra de Banach respecto a su norma usual, bastará establecer la igualdad:

$$\| f.f^* \| = \| f \|^2 \quad , \quad \forall f \in L_u(X) \quad .$$

Ahora bien, en la demostración de ((a)), se establecieron las desigualdades:

$$\|f^*(y)\|^2 \leq \|f.f^*(y)\| \, \|y\| \quad , \quad \|f^*(y)\| \leq \|f\| \, \|y\| \quad ;$$

$(y,f) \in X\times L_u(X)$. De la segunda resulta: $\|f^*\| \leq \|f\|$,
y poniendo f^* en lugar de f , se llega a $\|f^*\| = \|f\|$.
Trabajando entonces con la primera:

$$\|f^*(y)\|^2 \leq \|f.f^*\| \, \|y\|^2 \quad , \quad \forall y \in X$$

$\|f\|^2 = \|f^*\|^2 \leq \|f.f^*\|$; como evidentemente es

$\|f.f^*\| \leq \|f\| \, \|f^*\| = \|f\|^2$, concluimos:

$\|f.f^*\| = \|f\|^2$, tal como se deseaba.

Demostremos ((d)). Para ello recordemos que un elemento w de una C^*-álgebra W es positivo si y sólo si es $\langle w', w \rangle \geq 0$ para todos los elementos w' de una familia admisible de funcionales positivos sobre W (((I,2,F))). Este resultado lo vamos a aplicar tanto a la C^*-álgebra U, siendo la familia admisible el conjunto de todos los funcionales positivos no nulos sobre U al que llamaremos P, como a la C^*-álgebra $L_u(X)$, con la familia admisible que se va amostrar a continuación. Consideremos la familia de funcionales lineales sobre $L\ (X)$

$A = \left\{ f \longrightarrow \langle u', (f(x) \mid x) \rangle \;\middle|\; (u',x) \in P\times X-\{0\} \right\}$. Todos los funcionales de esta familia son positivos; en efecto: si a'

es un tal funcional, es:

$$\langle a', f^*.f \rangle = \langle u', (f^*.f(x) \mid x) \rangle \quad , \quad \forall f \in L_{\mathcal{U}}(X) \quad ;$$

para un cierto par $(u',x) \in P{\times}X$. Pero $(f^*.f(x) \mid x) =$ $= (f(x) \mid f(x))$ es un elemento positivo de la C^*-álgebra U, luego es $\langle u', (f^*.f(x) \quad x) \rangle \geq 0$, cualquiera que sea u' de P, y entonces: $\langle a', f^*.f \rangle \geq 0$, $\forall f \in L_{\mathcal{U}}(X)$; y a' es positivo. Se comprueba entonces sin dificultad que la familia de funcionales positivos sobre $L_{\mathcal{U}}(X)$ **A** es admisible. Con esto podemos ya demostrar ((d)):

Supongamos que f (perteneciente a $L_{\mathcal{U}}(X)$) es tal que para todo x de X es $(f(x) \mid x) \geq 0$, entonces, cualquiera que sea u' de P, será:

$$\langle u', (f(x) \mid x) \rangle \geq 0 \quad , \quad \forall (u',x) \in P{\times}X \quad ;$$

resultando que todos los funcionales de la familia **A** dan valores mayores o iguales que cero sobre f ; en consecuencia f es un elemento positivo de la C^*-álgebra $L_{\mathcal{U}}(X)$. Recíprocamente: supongamos que f es un elemento positivo de la C^*-álgebra $L_{\mathcal{U}}(X)$, será:

$$\langle a', f \rangle \geq 0 \quad , \quad \forall a' \in \mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle u', (f(x) \mid x) \rangle \geq 0 \quad , \quad \forall (u',x) \in P{\times}X \quad .$$

Fijando entonces x y, siendo P una familia admisible de funcionales positivos sobre U, concluimos que, para cada x de X, $(f(x) \mid x)$ es un elemento positivo de la C^*-álgebra U. Con esto queda demostrada la equivalencia:

$$f \geq 0 \iff \left((f(x) \mid x) \geq 0 \quad , \forall x \in X \right) , \ f \in L_{\mathcal{U}}(X).$$

Sea ahora f un elemento cualquiera de $L_{\mathcal{U}}(X)$, como es $f^*.f \leq \|f\|^2.I_X$, aplicando el resultado que acabamos de demostrar, será:

$$((\|f\|^2.I_X - f^*.f)(x) \mid x) \geq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f(x) \mid f(x)) \leq \|f\|^2 (x \mid x) \quad ,$$

quedando de manifiesto ((e)).

B I B L I O G R A F I A   C I T A D A

1.- RIESZ, F. - NAGY, B. SZ. : "lecons d'analyse fonctionelle" (Gauthier-Villars, París; 1.968).

2.- DIXMIER, JACQUES : "les C*-algebres et leurs représentations" (Gauthier-Villars, París; 1.969).

3.- DIXMIER, JACQUES : "Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (algebres de von Neumann)" (Gauthier-Villars, París; 1.969).

4.- GELFAND, I. M. - RAIKOV, D. A. - CHILOV, G. E. : "les anneaux normés commutatifs" (Gauthier-Villars, París; 1.964).

5.- DIEUDONNE, J. : "Eléments d'analyse", Tomos I y II (Gauthier-Villars, París; 1.969).

6.- SMILEY, M. F. : "Right H*-algebras" (Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 4, núm. 1, pág. 1-5; 1.953).

7.- MILES, P. E. : "Order isomorphisms of B*-algebras" (Trans. of the Amer. Math. Soc., Vol. 107, núm. 2, pág. 217-237 ; 1.963).

8.- BERGE, CLAUDE : "Espaces topologiques" (Dunod, París; 1.966).

9.- CHOQUET, GUSTAVE : "Cours d'analyse", Tomo II: "Topologie" (Masson et Cie. Editeurs, París; 1.964).

10.- WAELBROECK, LUCIEN : "Topological vector and algebras" (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York; 1.971).

11.- RODRIGUEZ PALACIOS, ANGEL : "Algebras estelares con elemento unidad" (Memoria de Licenciatura, no publicada; Dpto. de Análisis Funcional de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada; 1.973).

12.- RODRIGUEZ PALACIOS, ANGEL : "Algebras estelares con elemento unidad"(Comunicación a las Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas, 1.973; aparecerá en las actas de estas Jornadas).

13.- SAKAI, SHOICHIRO : "C^*-algebras and W^*-algebras" (Springer--Verlag, Berlin-Heidelberg-New York; 1.971).

14.- DUNFORD, NELSON - SCHWARTZ, JACOB T. : "Linear operators", Tomos I y II (Interscience Publishers Inc., New York ; 1.957).

15.- RICKART, C. E. : "On spectral permanence for certain Banach algebras" (Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 4, núm. 2, pág. 191-197; 1.953).

16.- MC LAUGHLIN, J. E. - ROSEMBERG, ALEX : "Zero divisors and commutativity of ring" (Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 4, núm. 2, pág. 203-213; 1.953).

17.- BEHNCKE, HORST : "Topics in C^*- and von Neumann algebras" ("Tulane University ring and operator theory Year, 1.970-1.971", Vol. II, pág. 2-55; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York; 1.972).

18.- ZELAZKO, WIESLAW : "Banach algebras" (Elsevier Publishing Company, Amsterdan-London-New York; 1.973).

19.- RINGROSE, J. R. : "Lectures on the trace in a finite von Neumann algebra" ("Tulane University ring and operator theory Year, 1.970-1.971", Vol. II, pág. 313-358; Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York; 1.972).

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO
COLEGIO UNIVERSITARIO DE ALMERIA

DEPARTAMENTO DE ANALISIS FUNCIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS