



Universidad de Granada
Departamento de Geometría y Topología

JOSÉ LUIS TERUEL CARRETERO

Tesis doctoral

**Superficies completas
de curvatura no positiva**

Directores: *José Antonio Gálvez López, Antonio Martínez López.*

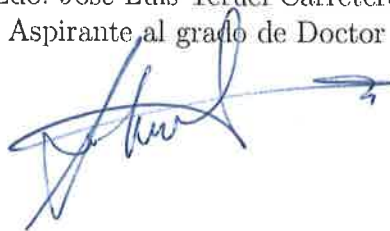
Editorial: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: José Luis Teruel Carretero
ISBN: 978-84-9125-246-7
URI: <http://hdl.handle.net/10481/40938>

SUPERFICIES COMPLETAS DE CURVATURA NO POSITIVA

Memoria realizada por el licenciado José Luis Teruel Carretero en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de D. José Antonio Gálvez López y D. Antonio Martínez López, Catedráticos de la Universidad de Granada, con objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Granada, 1 de Septiembre de 2015

Ldo. José Luis Teruel Carretero
Aspirante al grado de Doctor



Dr. José Antonio Gálvez López
Codirector de la memoria



Dr. Antonio Martínez López
Codirector de la memoria



DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Agradecimientos

Durante los últimos cuatro años he conocido a muchas personas que, de una forma u otra, han entrado a formar parte de esta gran aventura que es escribir una tesis doctoral y a las que he de agradecer sus respectivas aportaciones. Pero en este apartado de agradecimientos hay dos personas que ocupan un lugar muy especial y a los que me he de referir en primer lugar: quiero dar las gracias a mis directores, Antonio y José Antonio, por el gran apoyo que me han brindado a lo largo de estos años de máster y de tesis, porque nada de esto hubiera sido posible sin ellos. Porque no sólo han estado ahí para celebrar los éxitos, sino que han estado cerca sobre todo en los momentos menos buenos, sobre todo en aquellos momentos de dudas, momentos en los que no era capaz de ver el sentido a todo el gran esfuerzo que supone escribir cada línea de un trabajo como éste, de esta memoria en particular. Por la enorme paciencia que siempre han mostrado, por la dedicación y el esfuerzo que han puesto en formarme como investigador, por las felicitaciones y por las regañinas, ambas siempre dirigidas a hacerme crecer en este difícil mundo de la investigación, siempre con una sonrisa y palabras amables de ánimo. Por haber creído en mí, por eso y por todo lo demás, muchísimas gracias. Ya sabéis que siempre estaré a vuestra disposición, porque difícilmente podré nunca devolveros si quiera una parte de todo lo que habéis hecho por mi.

Si mis directores han sido mi apoyo fundamental dentro de los muros de la facultad, Mari Carmen lo ha sido fuera. Mi compañera en este viaje y en otros muchos, que ha estado en las buenas y en las malas, que ha tenido más fe en mi que yo mismo y ha sabido darme fuerzas cuando las he necesitado. Muchas gracias guayavera.

A mis padres Rafael[†] y Leonor, a mis hermanas Cristina y Eva, a mis hermanos Rafael y Miguel Ángel, a mis sobrinos Alejandra, Carlos (y Juan, que llegará en breve), a Isidro y Juan, a Rosa y Nuria. A mi familia política: mis suegros Ricardo y Carmela[†], a mis cuñados Manolín[†], Juanri y Sonia, a mis sobrinos Sara y Leo. A todos ellos y a los que no he nombrado, a todos muchas gracias por ser parte de mi vida, por ser un pilar fundamental en el que apoyarme y hacer que siempre tenga ganas de volver a casa en vacaciones (y que siempre que voy tenga después pocas ganas de irme).

Muchas gracias a Asun y a Elena por ser como sois, por darme vuestra amistad, vuestro apoyo y una buena cantidad de grandes consejos, por tantas risas y confianzas. A mis compis de despacho Magda y Jesús por hacer que ir a trabajar sea un rato agradable. A João por enseñarme el valor de la constancia y lo divertido que puede llegar a ser hacer cuentas (recuerda que Bergamoth siempre nos protege). Al profesor YanYan Li por su cálida acogida en la Universidad de Rutgers y haber hecho más agradable mi aventura americana con su amabilidad y sus muchísimos buenos consejos, thank you very much sir. A mi tocayo José Luis por los buenos momentos que siempre compartimos entre téis mañaneros. A Ana Lerma, Manzano, Domingo, Francis, Juande, Alarcón, Paco, ... y al resto de compañeros y compañeras del Departamento de Geometría y Topología, por su buena acogida y por su compañerismo, muchas gracias a todos y a todas. A mi lieber Bruder Ralf und meine geliebte Deutsche Familie Jürgen, Rita und Mark. Ich liebe euch und hoffe Bald euch zu besuchen, vielen Dank für Alles. A Marcos y Sandra, y por supuesto a todos mis compis de Temples of Mirmidonia, muchas gracias chavales, hacéis del riesgo algo divertido. A Fran, gran músico (y filósofo negro), mi medio limón musical, gracias a personas como tú el mundo es un poco mejor. A todos mis amigos y amigas de Elche y a todos los satélites y pillalugas del Cuerpo de Inteligencia Alpujarreño, sois familia y os quiero.

Todas aquellas personas que he nombrado y todas las que no, todas ellas han formado parte de esta aventura que es escribir una tesis doctoral. A todas ellas muchas gracias, de verdad.

A mi familia

Las matemáticas son
la música de la razón
J. J. Sylvester

Índice general

Introducción.	I
1. Una extensión del teorema de Efimov.	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Preliminares.	3
1.3. Pseudoconvexidad de la tercera forma fundamental.	6
1.4. Variación acotada de la aplicación de Gauss.	15
1.5. Topología y comportamiento de los finales.	23
2. Superf. completas con $K \leq 0$ en espacios modelo.	33
2.1. Introducción.	33
2.2. Preliminares.	36
2.3. La ecuación de Codazzi y curvatura no positiva.	38
2.4. Superficies completas con $K \leq 0$ en \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 .	44
3. Grafos enteros con $K \leq 0$ en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.	49
3.1. Introducción.	49
3.2. Grafos con curvatura extrínseca negativa.	50
3.3. Superficies completas con $K_{ext} < 0$ constante.	58
4. Realización de métricas llanas en \mathbb{H}^3.	63
4.1. Introducción.	63
4.2. Superficies llanas en \mathbb{H}^3 con singularidades aisladas.	65
4.2.1. Sobre la topología.	67
4.2.2. Propiedades métricas.	68
4.2.3. Fórmula tipo Gauss-Bonnet y consecuencias.	73
4.3. Clasificación de esferas con picos.	75
5. Abstract and conclusions.	81

Introducción.

En 1827, C. F. Gauss publicó su obra «Disquisitiones generales circa superficies curvas», ver [16], precursora de la Geometría Diferencial, en la que se introducen conceptos como la aplicación de Gauss esférica, la curvatura gaussiana, la curvatura total y las ecuaciones básicas que permitieron su interpretación y estudio. Esta idea de curvatura no tardó en ser considerada como el invariante más natural asociado a una superficie y su estudio ha orientado el desarrollo de la Geometría Diferencial desde múltiples direcciones y sentidos.

Cuando la curvatura es no negativa, las investigaciones realizadas han permitido conocer muy tempranamente cuestiones fundamentales tanto de su geometría extrínseca como de su geometría intrínseca. Por ejemplo hoy día es conocido que:

- * Una superficie completa de curvatura no negativa en \mathbb{R}^3 es o bien el borde de un conjunto convexo o un cilindro generalizado en \mathbb{R}^3 .
- * Toda métrica de curvatura positiva sobre una esfera es realizada de forma única, salvo movimientos rígidos, como la métrica de una superficie convexa en \mathbb{R}^3 .

Los problemas centrales de la teoría de superficies de curvatura no positiva son análogos a los del caso convexo y, básicamente, vienen determinados por la investigación de su geometría intrínseca y extrínseca. Sin embargo en este campo, y en contraste con las superficies convexas, los resultados permanecen, en varios aspectos, lejos de ser resueltos completamente. El objetivo fundamental de esta memoria es profundizar en el comportamiento geométrico global de las superficies de curvatura no positiva y en los problemas de realización de métricas de curvatura no positiva.

Desde un punto de vista histórico el estudio de las superficies de curvatura negativa ha estado ligado al desarrollo de la geometría no Euclídea. Ya en la década de 1830 a 1840, Minding, ver [47, 48], descubrió ciertas superficies helicoidales de curvatura constante negativa que fueron posteriormente investigadas por Dini en 1865, ver [13]. Minding consiguió integrar por cuadraturas la ecuación diferencial de los meridianos de una superficie de revolución de curvatura constante negativa. Probó que, esencialmente, éstas superficies están divididas en tres tipos, dos de ellos a menudo conocidos

como Minding Bobbing y Minding Top, ver figura 5.1, y un tercer tipo que, salvo semejanzas, consta de una única superficie: la pseudoesfera generada por la tractriz, ver figura 5.2, y que fue estudiada más tarde en detalle por Beltrami en un trabajo de 1872, ver [9].

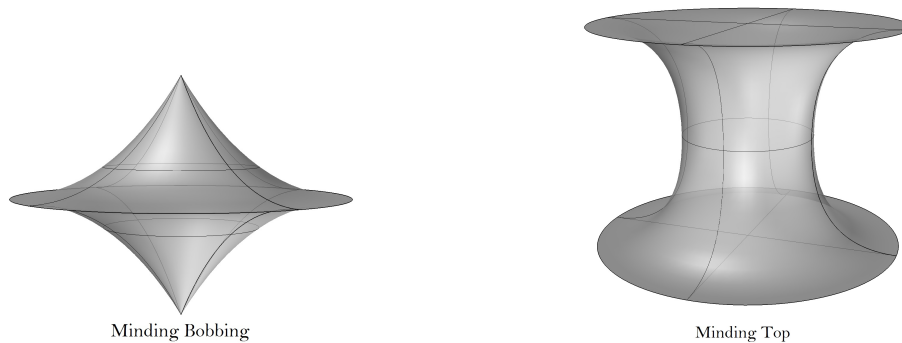


Figura 1: Ejemplos de superficies de curvatura constante negativa de Minding.

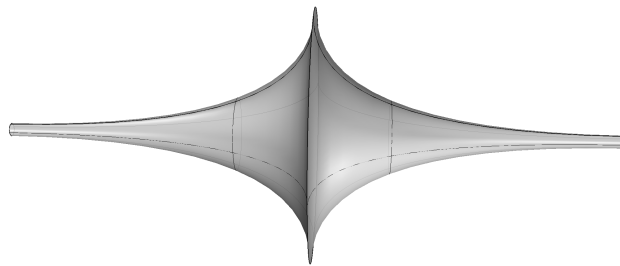


Figura 2: La pseudoesfera.

También en 1840 Minding encontró que en las superficies de curvatura constante negativa se tenían una serie de relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos geodésicos, análogas a las de la trigonometría esférica. El hecho de que estas fórmulas eran equivalentes a las relaciones trigonométricas en el plano hiperbólico, o plano de Lobachevskii, pasó desapercibido a los matemáticos de la época y algunos historiadores creían que Minding, realmente no estaba interesado en asociar su estudio a la geometría no euclidea, sino que sus obras solo se conectaron accidentalmente con Lobachevskii. A este respecto se puede consultar Norden (1956, ver [49]) o Galchenkova,

Lumiste, Ozhigova y Pogrebysski (1970, ver [22]).

En 1868, más de un cuarto de siglo después de la muerte de Lobachevskii, Beltrami, ver [8], utilizando los resultados de Minding, probó que las superficies del espacio euclídeo tridimensional con curvatura constante negativa tienen, localmente, la misma geometría que el plano hiperbólico. Es evidente, entre otras cosas, que Beltrami ya había percibido las dificultades globales del problema y que la cuestión de interpretar todo el plano hiperbólico como una superficie de curvatura constante negativa en \mathbb{R}^3 quedaba aún sin resolver.

Fue Hilbert en 1901, quien primero abordó el problema de realizar el plano hiperbólico en \mathbb{R}^3 y quien un año más tarde probó su clásico teorema, ver [34, 33]:

TEOREMA DE HILBERT: *el plano hiperbólico no puede ser inmerso isométricamente en \mathbb{R}^3 .*

En otras palabras, si tenemos en cuenta que toda superficie completa simplemente conexa de curvatura constante negativa es isométrica a un plano hiperbólico, no es posible extender una superficie regular de curvatura de Gauss constante negativa sin la aparición de singularidades.

El trabajo de Hilbert atrajo la atención de muchos matemáticos que investigaron en esta dirección y obtuvieron resultados interesantes. El siguiente paso en este sentido, conjeturado por Cohn Vossen, sería extender este resultado a superficies con curvatura no constante, pero por debajo de una cantidad estrictamente negativa. La solución final a este problema, conocido como el problema de Hilbert-Cohn Vossen, fue obtenida por Efimov en 1964, ver [18, 41]:

TEOREMA DE EFIMOV: *No existen superficies completas C^2 -inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss acotada superiormente por una constante negativa.*

En los siguientes años, el propio Efimov extendió este resultado en dos direcciones: una de ellas fue la de debilitar la condición sobre la curvatura, es decir, se consideran superficies en las que el valor recíproco de la curvatura K tiene variación con estimación lineal, ver [17], es decir, que se cumple la desigualdad

$$\left| \frac{1}{\sqrt{-K(p)}} - \frac{1}{\sqrt{-K(q)}} \right| \leq \epsilon_1 d(p, q) + \epsilon_2$$

para todo par de puntos p y q de la superficie. La otra dirección es la de permitir cierto borde sobre la superficie, pero suponiendo que la curvatura es negativa y constante, ver [19]. En esta última dirección, Vorobéva extendió el resultado de Efimov cuando

el borde es geodésico con ciertas condiciones sobre su curvatura normal, ver [63] (para mayor información al respecto se pueden consultar [6] y [11]). Otros resultados tipo Efimov en dimensiones superiores pueden encontrarse, también, en [60].

A pesar de los resultados de Efimov, otras cuestiones importantes sugeridas por el teorema de Hilbert permanecen aún sin resolver. Destaca por su interés la conjetura establecida por John Milnor en 1966, ver [43]:

CONJETURA DE MILNOR. Sea Σ una superficie completa sin puntos umbilicales, C^2 -inmersa en \mathbb{R}^3 y tal que la suma de los cuadrados de las curvaturas principales de Σ están acotadas inferiormente por una constante positiva. Entonces o Σ es llana o su curvatura tiene que cambiar necesariamente de signo.

Por ejemplo, en el caso de una superficie completa no llana y con curvatura no positiva, la conjetura de Milnor implicaría la existencia de puntos en los que las dos curvaturas principales tienden simultáneamente a cero. De ser cierta la conjetura, generalizaría el teorema de Efimov, el cual sólo asegura la existencia de puntos en los que el producto de las curvaturas principales tiende a cero.

Es de mencionar, en este sentido, la siguiente solución parcial a la conjetura de Milnor obtenida por Smyth y Xavier en 1987, ver [60]:

TEOREMA DE SMYTH-XAVIER: Si el cuadrado de una de las curvaturas principales de una superficie completa de \mathbb{R}^3 , con curvatura de Gauss no positiva, está acotada inferiormente por una constante positiva, entonces la superficie es un cilindro generalizado.

En particular, los cilindros generalizados son las únicas superficies completas inmersas en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss no positiva y con curvatura media acotada uniformemente lejos de cero.

En esta línea, decir también que, a pesar de conocerse algunos resultados parciales como el obtenido por Schlenker en [59], el estudio de un análogo al teorema de Efimov en espacios de curvatura constante no euclídeos es, hasta la fecha, un problema sin resolver. Todas estas observaciones nos han motivado a plantear en esta memoria los siguientes objetivos:

- (A) Estudiar, desde un punto de vista topológico y geométrico, las superficies completas de \mathbb{R}^3 cuya curvatura de Gauss es menor que una constante negativa fuera de un compacto.
- (B) Obtener resultados tipo Efimov y Milnor en ambientes no euclídeos.

- (C) Estudiar el problema de realización de métricas llanas con singularidades cónicas sobre una esfera en \mathbb{H}^3 .

Así, a lo largo del capítulo 1 extendemos los resultados obtenidos por Efimov en [18, 17] a superficies completas de \mathbb{R}^3 con curvatura acotada superiormente por una constante negativa fuera de un compacto y, más generalmente, a superficies completas cuyo valor recíproco de la curvatura tiene variación con estimación lineal. Comenzamos haciendo un recordatorio de los principales objetos geométricos asociados a una inmersión y a su aplicación de Gauss. La tercera forma fundamental *III*, es decir, la métrica inducida por la aplicación de Gauss cuando ésta es un difeomorfismo local, resulta ser una herramienta fundamental en todo el estudio previo a la demostración del resultado principal de este capítulo.

Efimov probó en [17] que si se toma una superficie completa S inmersa en \mathbb{R}^3 de curvatura negativa y tal que el valor recíproco de la curvatura tiene variación con estimación lineal, entonces se cumple una cierta propiedad de convexidad en el infinito asociada a la imagen esférica de dicha superficie, es decir en los puntos de la completación métrica de (S, III) . Nosotros observamos que dicha propiedad de convexidad no solamente es cierta cuando la hipótesis sobre la curvatura se satisface en toda la superficie, sino también cuando sólo se cumple fuera de un conjunto compacto. A partir de este hecho somos capaces de probar que existe un compacto $C \subseteq S$ tal que todo punto fuera de C puede ser unido al borde de C por medio de una curva geodésica minimizante de longitud menor que π para la distancia asociada a la tercera forma fundamental.

Usando todo el estudio previo sobre la imagen esférica de S y algunos resultados clásicos de Hüber, podemos probar el siguiente teorema:

Si S es una superficie con borde compacto ∂S y $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^2 -inmersión completa con curvatura de Gauss $K < 0$ tal que el valor recíproco de la curvatura tiene variación con estimación lineal, entonces la inmersión tiene curvatura total finita. En particular, S es parabólica y tiene topología finita, es decir, es homeomorfa a una superficie compacta menos una cantidad finita de puntos.

Como consecuencia veremos que el resultado anterior sigue siendo cierto si partimos de una C^2 -inmersión completa en \mathbb{R}^3 de una superficie sin borde que satisface las hipótesis del teorema fuera de un subconjunto compacto de la misma. Con esto, bajo las condiciones sobre la curvatura del teorema principal de esta sección, hemos sido capaces de obtener información topológica global de la inmersión. Si cambiamos dichas hipótesis sobre K a las del teorema clásico de Efimov, no sólo podemos obtener información topológica global, sino que también podemos dar información relativa al comportamiento asintótico de cada uno de los finales:

Sea $\Psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie completa C^2 -inmersa y con curvatura de Gauss $K \leq -\epsilon < 0$ fuera de un subconjunto compacto $C \subseteq \Sigma$. Entonces Σ tiene topología finita, Ψ es propiamente inmersa y tiene área finita para la métrica inducida. Además, cualquier final de la superficie es asintótico a una semirrecta de \mathbb{R}^3 .

Observamos que, bajo las hipótesis anteriores y usando un teorema clásico de Hüber, se puede dar información precisa del valor de la curvatura total de la inmersión: no sólo se puede estimar que es acotada, sino que vale exactamente $2\pi\chi(\Sigma)$, donde χ denota la característica de Euler.

Muchos resultados clásicos de la teoría de superficies de \mathbb{R}^3 son consecuencia de la ecuación de Codazzi, la cual sigue siendo cierta en otros espacios tridimensionales de curvatura constante, como por ejemplo \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 . No resulta pues sorprendente que diferentes resultados de la teoría de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 puedan ser probados en el contexto abstracto de los pares de Codazzi. Es por esto que los pares de Codazzi aparecen de manera natural en la teoría de subvariedades, ya que la primera y la segunda forma fundamental de cualquier superficie inmersa en un espacio modelo tridimensional es un par de Codazzi.

El capítulo 2 está dedicado a la obtención de resultados tipo Milnor y tipo Efimov sobre superficies completas, inmersas en espacios de curvatura constante no nula. Para ello nos valemos de la teoría de pares de Codazzi: pares (I, II) de formas cuadráticas reales definidas sobre una superficie, donde I es una métrica riemanniana que satisface las ecuaciones de Mainardi-Codazzi de la teoría clásica de superficies desde un punto de vista abstracto.

El resultado principal de este capítulo es el siguiente teorema de pares de Codazzi:

Sea (I, II) un par de Codazzi sobre Σ con curvaturas principales k_1, k_2 estrictamente separadas, esto es,

$$k_1 \leq c_1 < c_2 \leq k_2,$$

para ciertas constantes c_1, c_2 . Si (Σ, I) es una superficie completa con curvatura de Gauss $K(I) \leq 0$, entonces

- * I es llana y Σ es homeomorfa a un plano, un cilindro o un toro; o bien
- * I no es llana, Σ es homeomorfa a un plano y su curvatura total es menor o igual que 2π .

Probaremos un teorema similar cuando las hipótesis anteriores se satisfacen fuera de un subconjunto compacto de la superficie.

En el contexto de las inmersiones en \mathbb{R}^3 , el resultado principal de este capítulo es una versión débil del teorema clásico de Smyth-Xavier de 1987. Cambiando al contexto de las inmersiones en \mathbb{H}^3 y en \mathbb{S}^3 , veremos como consecuencia de nuestros resultados anteriores que no se pueden tener inmersiones completas en \mathbb{H}^3 (resp. \mathbb{S}^3) con curvatura $K \leq -1$ (resp. $K \leq c_0 < 0$) siempre y cuando una de sus curvaturas principales esté separada de cero. Entre otras consecuencias probaremos también que, bajo las condiciones anteriores sobre las curvaturas, el área de los finales de una superficie inmersa en un espacio modelo tridimensional es finita para la métrica inducida.

Basándose en trabajos de Bernstein y Efimov, el matemático alemán E. Heinz dio en 1955 una solución parcial al problema de Hilbert-Cohn Vossen, ver [32]. Heinz demostró que no existen grafos enteros (completos) inmersos en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss acotada superiormente por una constante negativa.

Haciendo una adaptación de las ideas de Heinz al contexto de los espacios producto, dedicamos el tercer capítulo de esta memoria al estudio de grafos verticales enteros inmersos en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, siendo \mathbb{M}^2 una superficie riemanniana con un polo en uno de sus puntos, esto es, un punto tal que la aplicación exponencial en dicho punto es un difeomorfismo del correspondiente plano tangente en todo \mathbb{M}^2 .

Sea \mathbb{M}^2 una superficie riemanniana con un polo en un punto p_0 . Si la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 es no negativa, entonces no existe ningún grafo vertical entero Σ en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ que tenga curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa.

Del resultado anterior se puede concluir que el clásico teorema de Efimov se verifica para grafos verticales completos inmersos en espacios producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con un polo en la base y con $K_{\mathbb{M}} \geq 0$. Llegados a este punto, lo natural es preguntarse si el teorema de Efimov también será cierto para grafos completos en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ pero con curvatura estrictamente negativa en la base. Probamos que esto no es posible ya que somos capaces de construir ejemplos de superficies de rotación inmersas en el espacio producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ y con curvatura extrínseca constante negativa, siendo $\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^2$ dotado con una métrica de curvatura estrictamente negativa.

El capítulo cuarto está dedicado al estudio de superficies completas con métrica llana, embebidas en el espacio hiperbólico tridimensional y con una cantidad finita de singularidades aisladas. En primer lugar obtendremos resultados con información relativa a su topología, al tipo conforme y al comportamiento asintótico de sus finales y sus singularidades aisladas. En segundo lugar abordaremos el problema de la realización de métricas llanas, completas y embebidas en \mathbb{H}^3 con singularidades

aisladas, conocido como el problema generalizado de Weyl, basándonos en los resultados obtenidos y en los trabajos de realización de Alexandrov y de regularidad de Pogorelov.

Probaremos que toda superficie Σ embebida, completa y llana de \mathbb{H}^3 con singularidades aisladas es homeomorfa a una esfera menos una cantidad finita de puntos. Veremos que todo final es conforme a un disco punteado y es de tipo cónico, es decir, que tiene la geometría del final de un cono o cilindro llano de \mathbb{R}^3 (con orden cónico $\beta \in (-2, -1]$). Probaremos además que toda singularidad aislada de la superficie es conformemente un disco punteado y, por tanto, un entorno suyo es isométrico a un entorno del vértice de un cono llano de \mathbb{R}^3 (con ángulo cónico total $2\pi\beta$, con $-1 < \beta < 0$).

De los resultados de Hulin y Troyanov [38] y Finn [21], se obtiene que una fórmula de tipo Gauss-Bonnet ha de verificarse sobre la superficie Σ , lo que nos dará una ligadura entre los ángulos cónicos de los finales y de las singularidades aisladas. Esto nos lleva a que Σ puede tener a lo sumo dos finales. Además, si Σ tiene dos finales entonces de hecho ha de ser un cilindro hiperbólico sin singularidades.

Para finalizar este capítulo, abordamos el problema de la realización y embebimiento de las métricas llanas abstractas con las características previamente obtenidas. Para ello, usando todo lo anterior y los resultados de existencia de Alexandrov y de regularidad de Pogorelov, demostraremos que:

CASO NO COMPACTO: Sea \mathcal{C} una estructura conforme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$, $n \geq 1$, y $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ números reales que verifican $0 > \beta_i > -1$, $i = 1, \dots, n$ y $-2 < \beta_{n+1} \leq -1$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una esfera euclídea completa y embebida en \mathbb{H}^3 , con n singularidades cónicas de ángulo total $2\pi(\beta_1 + 1), \dots, 2\pi(\beta_n + 1)$, respectivamente, un final de orden β_{n+1} y tal que \mathcal{C} es la estructura conforme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ para su métrica intrínseca, es que $2 + \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 0$.

Respecto a la unicidad no damos respuesta en la memoria, quedando ese punto abierto para posibles trabajos en el futuro. El caso compacto es idéntico al caso no compacto, pero para n puntos singulares con $n \geq 3$.

Capítulo 1

Una extensión del teorema de Efimov.

1.1. Introducción.

Una parte importante del estudio de las superficies completas con curvatura de Gauss no positiva en \mathbb{R}^3 está directamente relacionada con la no existencia de inmersiones isométricas. Para empezar a hablar acerca de la investigación de métricas isométricamente inmersas con curvatura de Gauss negativa debemos dar marcha atrás en el tiempo y estudiar las aportaciones de D. Hilbert, a principios del siglo XX. Hilbert demostró en 1901 que el plano hiperbólico no puede estar isométricamente inmerso en el espacio euclídeo tridimensional, ver [34, 33], y en consecuencia tampoco lo puede estar ninguna superficie completa de curvatura de Gauss constante y negativa, ya que estas son isométricas al plano hiperbólico por el teorema de Cartan. En otras palabras, no es posible extender una superficie regular de curvatura de Gauss constante negativa sin la aparición de singularidades.

El teorema de Hilbert atrajo la atención de muchos matemáticos que trabajaron en esta dirección y obtuvieron resultados muy interesantes. El siguiente paso en este sentido, conjeturado por Stefan Cohn Vossen, sería extender este resultado a superficies con curvatura no constante, pero por debajo de una cantidad estrictamente negativa. La solución final a este problema, conocido como el problema de Hilbert-Cohn Vossen, fue obtenida por Efimov en 1964, ver [18, 41]. Efimov probó que ninguna superficie completa para la métrica inducida y con curvatura de Gauss acotada superiormente por una constante negativa puede estar C^2 -inmersa en \mathbb{R}^3 . Posteriormente el propio Efimov extendió este resultado a una familia de superficies más amplia, ver [17].

Su prueba, aunque algo compleja, es ingeniosa y muy geométrica, y no requiere de

técnicas demasiado sofisticadas. De hecho, se obtiene a partir de un resultado general acerca de ciertas C^1 -inmersiones entre dominios planos, ver [18, Lemma 1] y [41, Main Lemma]. Como consecuencia, bajo hipótesis de completitud sobre la métrica inducida por la inmersión, la imagen esférica de una superficie Σ cumple una cierta propiedad de convexidad (ver [41, Lemma A]), lo cual le lleva a la conclusión de que la imagen de la superficie Σ por la aplicación de Gauss N asociada a la inmersión es un conjunto convexo.

Por tanto N es uno a uno, o lo que es lo mismo, su curvatura total es finita (ver [41, Lemma B]). Esto nos lleva a una contradicción evidente, ya que es bien sabido que toda superficie completa, simplemente conexa y con curvatura de Gauss acotada superiormente por una constante negativa tiene área infinita, lo que implica que su curvatura total también lo es. En este capítulo veremos que se puede modificar el método anterior para el estudio de superficies completas cuya curvatura de Gauss está por debajo de un valor estrictamente negativo fuera de un subconjunto compacto.

Este capítulo queda distribuido de la siguiente forma. En los preliminares explicaremos con detalle la extensión que el propio Efimov hizo en 1968 en [17] de su lema principal (ver [41, Main Lemma]) y que le permitió ampliar su resultado a superficies cuya curvatura de Gauss K cumple hipótesis más débiles. Además presentamos los teoremas de Hüber, que nos serán de gran utilidad no solo en este primer capítulo, sino a lo largo de toda esta memoria por las interesantes consecuencias de tipo topológico que se pueden obtener para las superficies que son objeto de nuestro estudio.

En la tercera sección comprobaremos que, bajo hipótesis más generales sobre la curvatura de Gauss en superficies con borde compacto, la superficie junto con la métrica inducida por la aplicación de Gauss sigue cumpliendo dicha cierta propiedad de convexidad, como en [41, Lemma A].

En la cuarta sección demostraremos dos resultados técnicos que serán clave para la siguiente sección. Aseguramos que bajo hipótesis más generales sobre K , podemos unir dos puntos cualesquiera de nuestra superficie con borde compacto mediante un arco geodésico de longitud estrictamente menor que π .

Para finalizar el capítulo probaremos que, como consecuencia de los trabajos de Hüber [35], las superficies objeto de nuestro estudio son de tipo parabólico y tienen curvatura total finita. Además usaremos los conocidos teoremas de Osserman [53] y de Burago [11] para demostrar que:

Toda inmersión C^2 -regular en el espacio euclídeo tridimensional, completa y con curvatura de Gauss acotada superiormente por una constante negativa fuera de un conjunto compacto es también de tipo parabólico, sus finales tienen área finita para la métrica inducida y son asintóticos a semirrectas de \mathbb{R}^3 .

1.2. Preliminares.

Consideramos Ψ una C^2 -inmersión de una superficie Σ en el espacio euclídeo tridimensional. Podemos suponer Σ orientable, ya que en caso contrario se trabajaría con el correspondiente recubridor orientable de dos hojas.

Sea $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss y $A = -dN$ el endomorfismo de Weingarten de la inmersión y $N(\Sigma)$ la imagen esférica de la superficie. Denotamos por k_1 y k_2 a las respectivas curvaturas principales de Ψ , esto es, a los autovalores de A y definimos la curvatura de Gauss de la inmersión como $K = k_1 k_2$. Denotamos por $K^- := \min\{K, 0\}$ y $K^+ := \max\{K, 0\}$ a las partes negativa y positiva de la curvatura de Σ respectivamente y asimismo, si existe, llamamos curvatura total de la superficie al valor

$$\mathcal{C} := \int_{\Sigma} K^+ dA - \int_{\Sigma} K^- dA \equiv \int_{\Sigma} |K| dA.$$

Se denota por I y II a la primera y segunda forma fundamental de Ψ respectivamente, esto es I es la métrica inducida por la inmersión y $II(X, Y) := I(AX, Y)$ para cualesquiera campos diferenciables $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

La tercera forma fundamental de la inmersión está dada por

$$III(X, Y) := \langle dN(X), dN(Y) \rangle = I(AX, AY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Es evidente que III es la métrica inducida por N sobre Σ y cuando N es difeomorfismo local, su curvatura es constante $K_{III} \equiv 1$.

Si consideramos una parametrización $X(u, v)$ de Σ , se puede comprobar que

$$N_u \wedge N_v = K X_u \wedge X_v,$$

esto es, N es difeomorfismo local cuando $K \neq 0$. Tomando módulos, se obtiene la conocida fórmula

$$dA_{III} = |K| dA_I, \tag{1.2.1}$$

la cual relaciona los elementos de volumen de las métricas I y III sobre la superficie. Además, usando (1.2.1) se tiene

$$\int_{\Sigma} dA_{III} = \int_{\Sigma} |K| dA_I = \mathcal{C},$$

esto es, el área de la imagen esférica de Σ contada con multiplicidades es la curvatura total de la superficie.

La métrica *III* es una herramienta clave en todo este proceso y es fundamental para entender la demostración que Efimov desarrolló de su clásico teorema, ver [18, 41].

TEOREMA DE EFIMOV, 1964. *No hay superficies completas con curvatura de Gauss acotada superiormente por una constante negativa y C^2 -inmersas en el espacio euclídeo tridimensional.*

La hipótesis sobre que la curvatura de Gauss sea negativa y esté uniformemente acotada lejos de cero en el teorema de Efimov puede ser debilitada a que, siendo negativa, cambie lentamente de punto a punto. En esta dirección, el propio Efimov obtuvo un número importante de resultados entre los años 1964 y 1968, algunos de los cuales pasaremos a comentar.

Si introducimos el valor recíproco de la curvatura, o radio de la curvatura, en una superficie con curvatura de Gauss negativa como la función

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{-K}},$$

Efimov probó en 1968 el siguiente teorema, ver [17]:

Teorema 1.2.1. *Una superficie completa de curvatura negativa no puede ser inmersa en \mathbb{R}^3 si*

$$|\nabla\kappa| \leq \text{cons} < \infty.$$

Definición 1.2.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en X . Se dice que b tiene variación con estimación lineal si existen constantes no negativas ϵ_1 y ϵ_2 de manera que se cumple la desigualdad

$$|b(P_1) - b(P_2)| \leq \epsilon_1 d(P_1, P_2) + \epsilon_2, \quad (1.2.2)$$

donde P_1 y P_2 son puntos arbitrarios de X .

El siguiente resultado, también de Efimov, es más general que el teorema 1.2.1 y que el teorema clásico de Efimov enunciado anteriormente:

Teorema 1.2.2. *Si la curvatura de Gauss de una superficie completa C^2 -inmersa en \mathbb{R}^3 es negativa, entonces el radio de la curvatura de Gauss no admite una variación con estimación lineal.*

Mediante los siguientes ejemplos, Rozendorn [11] mostró que las condiciones del teorema 1.2.2, en cierto sentido, están próximas a ser también necesarias. Concretamente, si consideramos la familia de métricas completas

$$ds_m^2 = \cosh^2 u du^2 + \cosh^{2m} u dv^2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

sobre \mathbb{R}^2 , vemos que todas ellas son de curvatura negativa

$$K_m = \frac{-m}{\cosh^4 u} (\cosh^2 u + (m - 2)\sinh^2 u).$$

Si $m > 1$, ninguna de ellas puede ser inmersa en \mathbb{R}^3 según el teorema 1.2.2. Sin embargo, cuando $m = 1$, vemos que ds_1^2 es la métrica inducida sobre un catenoide de \mathbb{R}^3 , ver figura 1.1.

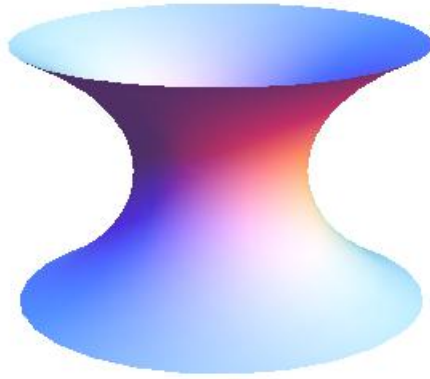


Figura 1.1: Catenoide.

La demostración del teorema 1.2.2 se sigue del estudio de la imagen esférica de una superficie con curvatura de Gauss negativa. Esencialmente, Efimov realizó este estudio usando un resultado fundamental para ciertas C^1 -inmersiones $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, ver [41, Main Lemma], donde \mathcal{D} es un tipo especial de dominios planos que describiremos y usaremos en el siguiente epígrafe de este capítulo.

Algunos de los trabajos de Alfred Hüber en [35], nos serán de gran utilidad a lo largo de esta memoria, por eso enunciaremos los que serán usados en este capítulo y en capítulos posteriores.

Definición 1.2.2. Consideramos S una superficie topológica. Se dice que S tiene topología finita si es homeomorfa a una superficie compacta menos un conjunto finito de puntos.

Definición 1.2.3. Una superficie de Riemann S se dice que es de tipo parabólico si las únicas funciones subarmónicas negativas sobre S son las constantes.

Teorema 1.2.3 (Hüber, 1957). *Sea S una superficie riemanniana conexa, completa y orientada. Si*

$$\int_S |K^-| < +\infty,$$

entonces S tiene topología finita y cumple que

$$\int_S K^+ dA \leq 2\pi\chi(S),$$

donde χ es la característica de Euler de S . Además S es de tipo parabólico.

Como consecuencia del teorema 1.2.3, se puede obtener el siguiente teorema de clasificación:

Teorema 1.2.4 (Hüber). *Sea S una superficie riemanniana conexa, completa, no compacta y de curvatura de Gauss no negativa. Entonces se da una de las siguientes posibilidades:*

1. *S es topológicamente un plano.*
2. *S es llana y, por tanto, es un cociente del plano euclídeo \mathbb{R}^2 .*

1.3. Pseudoconvexidad de la tercera forma fundamental.

En este apartado veremos con detalle la construcción de la C^1 -inmersión F , siguiendo el procedimiento descrito por T. Klotz-Milnor en [41, Sección 2]. Para dicha construcción, es de resaltar que dicho procedimiento no fue originalmente pensado para superficies con borde compacto. Sin embargo, la existencia de dicho borde no supone un impedimento en su desarrollo debido al carácter local del mismo.

Sea $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^2 -inmersión con curvatura de Gauss K acotada superiormente por una constante negativa, $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ su aplicación de Gauss asociada y III la tercera forma fundamental de Ψ , que en este caso es métrica riemanniana ya que $K \neq 0$. Por d_N denotamos a la C^0 -distancia asociada a III .

Llamamos $(\tilde{\Sigma}, III)$ a la completación de (Σ, III) como espacio métrico y $\partial\tilde{\Sigma}$ al conjunto definido como

$$\partial\tilde{\Sigma} := \tilde{\Sigma} \setminus \Sigma.$$

Como N es isometría local y \mathbb{S}^2 es completa, podemos considerar $\tilde{N} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^2$ la extensión de N por continuidad. Además, si U es una región de Σ , denotamos por \tilde{U} a su clausura métrica, esto es, a la clausura de U en el espacio métrico $(\tilde{\Sigma}, III)$.

Definición 1.3.1. Sea Γ un arco circular abierto y no geodésico de \mathbb{S}^2 , $p \in \Gamma$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Saliendo de cada punto de Γ se toma el segmento geodésico abierto de longitud ϵ , que es perpendicular a Γ y está dirigido hacia el complemento no convexo de Γ . La región $R(\Gamma, \epsilon)$ formada por la unión de Γ y todos estos segmentos se conoce como rectángulo exterior de Γ en p . Ver figura 1.2.

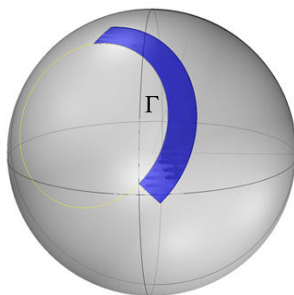


Figura 1.2: Rectángulo exterior de un arco abierto no geodésico de la esfera.

Definición 1.3.2. Decimos que $(\tilde{\Sigma}, III)$ es cóncavo en un punto $p \in \partial\tilde{\Sigma}$ si existe un dominio $U \subseteq \Sigma \setminus \partial\Sigma$ con $p \in \tilde{U}$ y tal que \tilde{N} es uno a uno en \tilde{U} y $N(U)$ contiene el interior de un rectángulo exterior a $\tilde{N}(p)$. Si $(\tilde{\Sigma}, III)$ no es cóncavo en ningún punto de $\partial\tilde{\Sigma}$, se dice que (Σ, III) es pseudoconvexo.

Si suponemos que $(\tilde{\Sigma}, III)$ es cóncava en algún punto $p \in \partial\tilde{\Sigma}$, entonces por la definición 1.3.2 existe un conjunto abierto U en Σ tal que $p \in \tilde{U}$, \tilde{N} es uno a uno en \tilde{U} y $N(U)$ contiene el interior de un rectángulo exterior a $\tilde{N}(p)$. Reduciendo $N(U)$ si fuera necesario, podemos considerar $N(U) = R(\Gamma, \epsilon)$ para cierto $\epsilon > 0$ y cierto arco circular y no geodésico de la esfera Γ , el cual se puede tomar totalmente contenido en el semiespacio $\{y \geq 0\}$. Además, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que \tilde{N} lleva el punto p al polo norte de la esfera y que $R(\Gamma, \epsilon)$ está totalmente contenido en el casquete superior de la misma, a altura $z > \sqrt{2}/2$, lo cual implica que el ángulo entre $N(q)$ y el vector $(0, 0, 1)$ es menor que $\pi/4$ para cualquier $q \in U$. En consecuencia, la proyección vertical π de U sobre el plano horizontal $\{z = 0\}$ es una C^2 -inmersión y U es localmente un grafo sobre dicho plano.

Usando coordenadas locales, $\pi(x, y, z(x, y)) = (x, y, 0)$, donde z es una función diferenciable y el vector normal viene dado por

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1).$$

Consideramos también la función auxiliar $\mu : \mathbb{S}_+^2 \rightarrow \{z = 0\}$ dada por

$$\mu(a, b, c) = \left(\frac{-b}{c}, \frac{a}{c}, 0 \right) \equiv \left(\frac{-b}{c}, \frac{a}{c} \right),$$

donde $\mathbb{S}_+^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{S}^2 : c > 0\}$ es el hemisferio norte de la esfera unidad. Geométricamente, μ proyecta radialmente cada punto (a, b, c) de la esfera al plano $\{z = 1\}$, después lo proyecta verticalmente al plano $\{z = 0\}$ y lo gira un ángulo $\pi/2$ en sentido antihorario. La aplicación μ lleva el conjunto $N(U)$ en una región plana abierta \mathcal{D} de manera difeomorfa. Podemos suponer que $\mu(\tilde{N}(p)) = (0, 0)$ y situar $\mu(\Gamma)$ en el semiplano $\{x \leq 0\}$, siendo $\mu(\Gamma)$ un arco de sección cónica no lineal que contiene al origen de coordenadas.

Finalmente la aplicación

$$F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad F := \pi \circ N^{-1} \circ \mu^{-1}, \quad (1.3.1)$$

es una inmersión de \mathcal{D} en el plano euclídeo con regularidad al menos C^1 , ver figura 1.3.

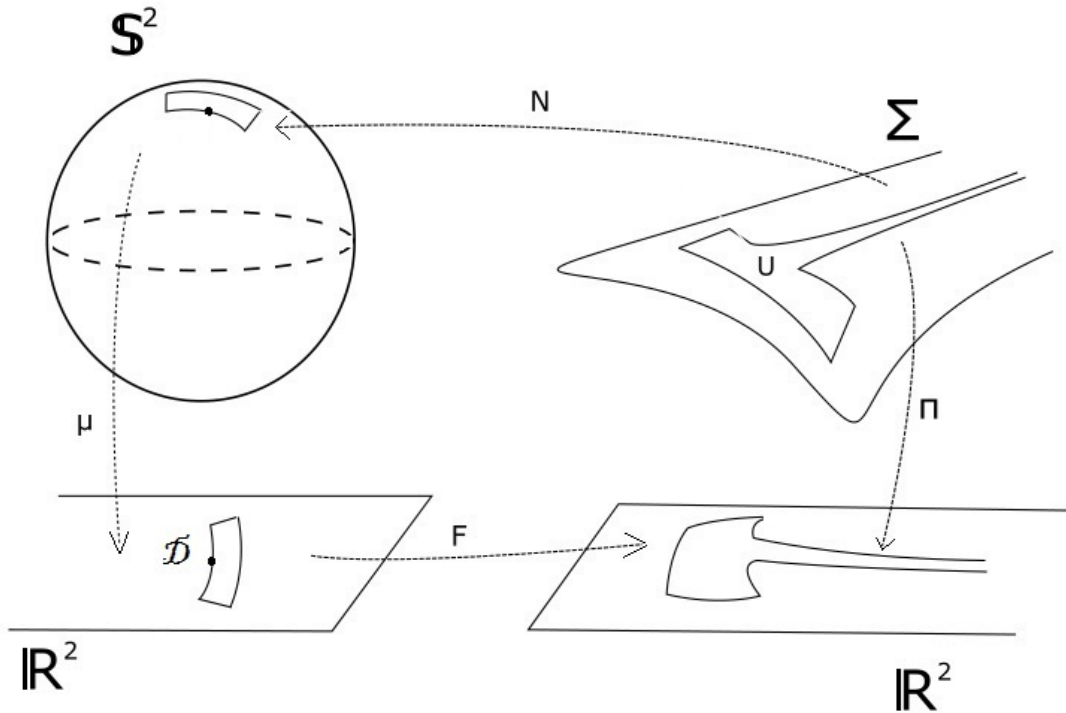


Figura 1.3: Construyendo la inmersión F .

Por cómo ha sido construido el dominio \mathcal{D} , se puede encajar en su interior un arco simétrico γ de la parábola $x = -cy^2$ para algún valor $c > 0$, del cual sustraemos el punto $(0, 0)$. Y si elegimos un valor $r > 0$ suficientemente pequeño, γ interseca a la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r en dos puntos diferentes del interior de \mathcal{D} , puntos que separan la circunferencia en dos arcos disjuntos, quedando uno de ellos totalmente contenido dentro de \mathcal{D} , al cual llamamos C_r .

Denotamos por Ω (ver figura 1.4) al recinto limitado por α y C_r menos el origen. Explícitamente se describe como:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq r^2, y^2 \geq -cx, r, c > 0\} \subseteq \mathcal{D}$$

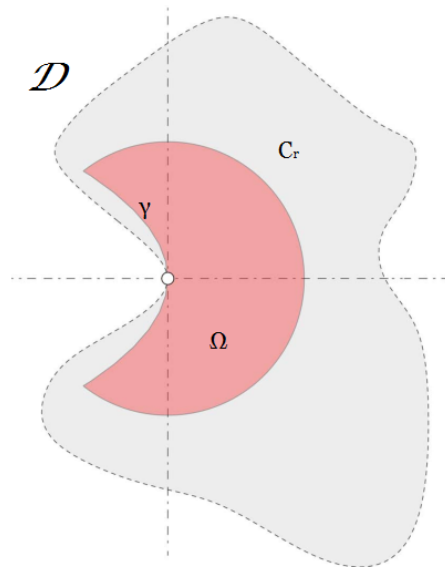


Figura 1.4: Región abierta simplemente conexa que contiene a Ω .

Como $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una C^1 -inmersión, podemos considerar en \mathcal{D} la métrica g^* inducida por la métrica usual del plano y denotar por d^* a su distancia asociada. Es decir entonces que la g^* -longitud de un arco α en \mathcal{D} es la longitud euclídea de $F \circ \alpha$.

Sea $d_\Omega^* : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función que a cada par de puntos $p, q \in \Omega$ le asocia el ínfimo de las g^* -longitudes de arcos de curvas rectificables en Ω que los unen. La función d_Ω^* es una distancia y por estar Ω totalmente contenido en \mathcal{D} se tiene que

$$d^*(p, q) \leq d_\Omega^*(p, q), \quad \forall p, q \in \Omega.$$

Es importante destacar el carácter local de todo el proceso de construcción de F , es decir, podríamos repetirlo alrededor de un punto interior de una superficie con

borde compacto sin tocar a dicho borde.

Con las notaciones anteriores, se puede probar el siguiente resultado, ver [18, 41]:

Lema 1.3.1 (Lema Principal de Efimov, 1964). *Si $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una C^1 -inmersión y los autovalores λ_1 y λ_2 de dF son reales y existe alguna constante $\alpha > 0$ tal que*

$$-\alpha \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \alpha,$$

entonces el espacio métrico (Ω, d_Ω^) no es completo.*

Observación 1.3.1. La peculiar forma del recinto \mathcal{D} facilita la demostración del teorema de Efimov y cabe preguntarse si quizás otro tipo de recintos también servirían para tales propósitos. Como Tilla K. Milnor observó en [41], la conclusión del lema 1.3.1 sigue siendo cierta bajo ciertas alteraciones en la forma de dicho recinto, pero se debe mantener una característica del recinto que es fundamental: es esencial que \mathcal{D} sea cóncavo en el origen como veremos en el siguiente ejemplo:

Si consideramos la función $F : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, / x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = \left(x, \frac{1}{x} - y \right),$$

entonces su aplicación diferencial, dF , tiene autovalores 1 y -1 . Sin embargo F es una inmersión analítica de \mathbb{R}^2 que lleva la región convexa

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, / (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x > 0\}$$

en un subconjunto cerrado del plano. Las curvas en R que van hacia el origen son aplicadas por F en curvas que tienden a infinito, lo que implica que las longitudes de sus imágenes en $F(R)$ divergen para la métrica euclídea usual. Luego R dotado con la distancia d_R^* asociada a la métrica riemanniana g^* inducida por F es un espacio métrico completo.

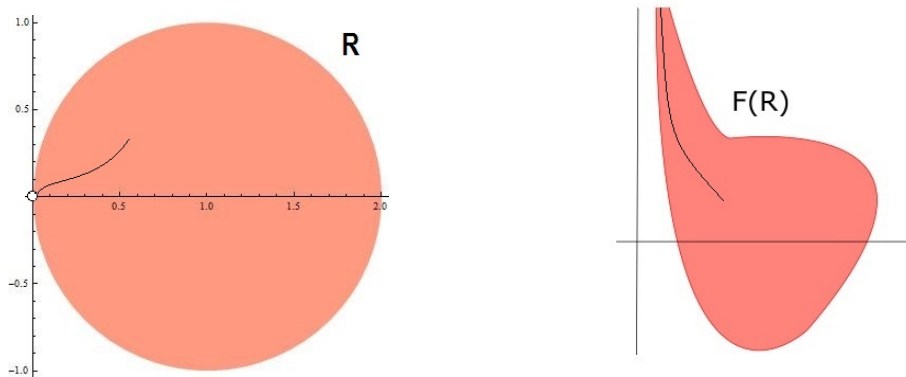


Figura 1.5: La región R es completa para la métrica inducida por F .

Aplicando el lema principal 1.3.1, la demostración del teorema de Efimov se puede hacer en dos pasos fundamentales:

- ✓ PASO 1: Si Σ es una superficie completa C^2 -inmersa y con curvatura de Gauss acotada superiormente por una constante negativa, entonces (Σ, III) es pseudoconvexa.
- ✓ PASO 2: Si $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una C^1 -inmersión isométrica de una superficie Σ dotada de una métrica continua g y pseudo-convexa para dicha métrica, entonces es de g -área acotada.

Para ver el PASO 1, consideramos la C^1 -inmersión F dada por (1.3.1), es fácil ver que los autovalores de su aplicación diferencial tienen la particularidad de ser reales, no nulos, de signo opuesto y uniformemente acotados en \mathcal{D} , ver [41, Assertion 1], esto es, estaríamos en condiciones de aplicar el lema principal de Efimov. Ahora bien, bajo estas hipótesis también se puede demostrar que (Ω, d_Ω^*) es un espacio métrico completo, ver [41, Assertion 2], lo cual entra en contradicción con el lema 1.3.1.

Si suponemos ahora que Σ es completa, por lo dicho en el PASO 1 se tiene que (Σ, III) es pseudo-convexo. Usando ahora lo que dice el PASO 2 se tiene que la III -área de Σ es finita, lo que implica por (1.2.1) que también lo es su correspondiente I -área usando la hipótesis sobre la curvatura de Gauss. Esto contradice el hecho de que toda variedad completa, simplemente conexa, con curvatura de Gauss no positiva y que está C^2 -inmersa en \mathbb{R}^3 , tiene área infinita para la métrica inducida.

En [17, Subsección 4], Efimov demuestra una generalización del lema 1.3.1. Para explicar en qué consiste la misma, tendremos en cuenta que todo difeomorfismo local del plano en sí mismo tiene inversa bien definida sobre su conjunto imagen cuando éste es considerado como un dominio multivaluado de \mathbb{R}^2 .

Sea $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$, una aplicación C^1 -diferenciable. Llamamos $\Delta = \text{Det}(\text{Jac}(G))$, donde $\text{Jac}(\cdot)$ denota a la matriz Jacobiana, y asumimos que G verifica que

$$\Delta < 0. \tag{1.3.2}$$

Denotamos por $a(x, y)$ una función real positiva que cumple la desigualdad

$$|\Delta| \geq a |J| + a^2, \tag{1.3.3}$$

donde J es el rotacional del campo vectorial G .

En la construcción realizada anteriormente, consideramos el conjunto $W := \pi(U)$ y lo vemos como un dominio sobre el plano euclídeo posiblemente multivaluado. En [17, Generalized Lemma A], Efimov demostró que si una aplicación C^1 -diferenciable $G : W \rightarrow \Omega$ satisface hipótesis de los tipos (1.3.2) y (1.3.3), donde a es una función cuyo valor recíproco, $b = 1/a$, varía con estimación lineal, entonces el espacio métrico Ω no es completo. En particular, si G es un potencial, entonces el rotacional se anula y el resultado sigue siendo verdad si se toma $a(x, y) = 1/\sqrt{|\Delta|}$. Más concretamente, Efimov probó la siguiente generalización del lema 1.3.1:

Lema Generalizado 1. (Efimov, 1968) *Sea W un dominio posiblemente multivaluado de \mathbb{R}^2 y $G : W \rightarrow \mathcal{D}$ un potencial de una función C^2 -diferenciable $g : W \rightarrow \mathcal{D}$ tal que*

$$\text{Det}(\text{Hess}(g)) \leq \frac{-1}{h^2} < 0, \quad (1.3.4)$$

donde $\text{Hess}(\cdot)$ denota a la matriz Hessiana y

$$|h(p) - h(q)| \leq \epsilon_1 d(p, q) + \epsilon_2, \quad \forall p, q \in W \quad (1.3.5)$$

para alguna función positiva $h : W \rightarrow \mathbb{R}^+$. Entonces el espacio métrico (Ω, d_Ω^*) no es completo.

En adelante vamos a suponer que S es una superficie con borde compacto ∂S y $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una C^2 -inmersión completa con curvatura de Gauss $K < 0$. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que S es orientable, porque en caso contrario se trabajaría con el correspondiente recubridor orientable de dos hojas.

Sea $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss de Ψ y III la tercera forma fundamental, que es métrica riemanniana por ser $K \neq 0$. Denotamos por d_N a su C^0 -distancia asociada. Llamamos (\tilde{S}, III) a la completación métrica de (S, III) , $\partial \tilde{S} = \tilde{S} \setminus S$ y $\tilde{N} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ a la extensión por continuidad de N a \tilde{S} .

Lema Generalizado 2. *Sea $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^2 -inmersión completa con curvatura de Gauss $K < 0$. Si el valor recíproco de la curvatura de Ψ tiene variación con estimación lineal, entonces (S, III) es pseudoconvexa.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que (S, III) no es pseudoconvexa, entonces existe $p \in \partial \tilde{S}$ tal que \tilde{S} es cóncava en él.

Debido al carácter local de la construcción de la C^1 -inmersión $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, podemos repetir dicha construcción tal cual, pero con una pequeña variación que no afecta en absoluto al resultado: en lugar de tomar la función auxiliar μ que proyecta

radialmente en el plano los puntos de \mathbb{S}_+^2 y posteriormente los rota un ángulo de $\pi/2$, consideramos la nueva función auxiliar

$$\mu(a, b, c) \equiv \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \right),$$

que viene a ser únicamente la proyección radial, sin el giro.

Tomando coordenadas locales $(x, y, z(x, y))$, donde z es una función diferenciable, se tiene que $F^{-1} : W \rightarrow \mathcal{D}$, con $W = F(\mathcal{D})$ una región plana posiblemente multivaluada. Se escribe localmente

$$\begin{aligned} F^{-1}(x, y) &= \mu \circ N \circ \pi^{-1}(x, y) = \mu \circ N(x, y, z(x, y)) \\ &= \mu \left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) \equiv (-z_x, -z_y). \end{aligned}$$

Además

$$\text{Det}(\text{Jac}(F^{-1})) = \begin{vmatrix} -z_{xx} & -z_{xy} \\ -z_{xy} & -z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = K(1+z_x^2+z_y^2),$$

por la fórmula de la curvatura de Gauss para grafos. Entonces

$$\text{Det}(\text{Hess}(z)) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \leq K < 0.$$

Existen por hipótesis dos constantes no negativas ϵ_1 y ϵ_2 tales que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{-K(p)}} - \frac{1}{\sqrt{-K(q)}} \right| \leq \epsilon_1 d_{\Omega}^*(p, q) + \epsilon_2, \quad \forall p, q \in S. \quad (1.3.6)$$

Sea \bar{g}^* la métrica sobre U inducida por el difeomorfismo $\mu \circ N$. Esta métrica coincide con la inducida por π , que es la métrica llana de \mathbb{R}^2 .

Denotamos por $\mathcal{U} := N^{-1} \circ \mu^{-1}(\Omega) \subseteq U$ y consideramos para cada par de puntos p, q en \mathcal{U} la distancia intrínseca para la métrica \bar{g}^* , esto es

$$d_{\mathcal{U}}^*(p, q) := \text{ínfimo de las } \bar{g}^*\text{-longitudes de arcos en } \mathcal{U} \text{ que unen } p \text{ y } q,$$

y $d_{\mathcal{U}}$ la distancia intrínseca para I . Vamos a probar que $(\mathcal{U}, d_{\mathcal{U}}^*)$ es completo siguiendo el procedimiento descrito en [41], es decir, primero probaremos que $(\mathcal{U}, d_{\mathcal{U}})$ es completo y de ahí que también lo es $(\mathcal{U}, d_{\mathcal{U}}^*)$ probando que las distancias $d_{\mathcal{U}}$ y $d_{\mathcal{U}}^*$ son equivalentes.

Supongamos que \mathcal{U} no es cerrado en S . Existe pues un punto $q \in S \setminus \mathcal{U}$ que es límite de una sucesión en \mathcal{U} , y por continuidad de N , se tiene que $N(q) \in \overline{N(\mathcal{U})}$. Pero por otro lado $N(q) \notin N(\mathcal{U})$ por ser \tilde{N} uno a uno en $\tilde{\mathcal{U}}$. Por la construcción del conjunto Ω , el único punto de estas características es $p \in \partial\tilde{S}$, que es llevado por N al polo norte de la esfera, luego $N(q) = \tilde{N}(p)$. Como además $N(q) = \tilde{N}(q)$, se tiene pues que $p = q$ por la inyectividad de \tilde{N} , lo que es una contradicción.

Luego \mathcal{U} es completo por ser un cerrado en una superficie completa. Como además \mathcal{U} es una subvariedad de S con borde diferenciable a trozos, entonces por [41, Apéndice III] se tiene que \mathcal{U} es completo para $d_{\mathcal{U}}$.

Recordemos de la construcción de F que $N(U)$ está contenido en la porción del hemisferio norte de la esfera a altura mayor que $\sqrt{2}/2$. En coordenadas locales se tiene que

$$z_x^2 + z_y^2 < 1. \quad (1.3.7)$$

Sea $\alpha = z(x(s^*), y(s^*))$ un arco de curva \bar{g}^* -parametrizado por el arco en \mathcal{U} . La longitud de α para la métrica I se escribe como

$$s(s^*) = \int_0^{s^*} \sqrt{1 + (z_x x' + z_y y')^2} ds^*. \quad (1.3.8)$$

Por (1.3.7) y ya que $x'^2 + y'^2 = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} z_x^2 + z_y^2 &= (z_x^2 + z_y^2)(x'^2 + y'^2) = z_x^2 x'^2 + z_y^2 y'^2 + z_x^2 y'^2 + z_y^2 x'^2 \\ &= (z_x x' + z_y y')^2 + (z_x y' - z_y x')^2, \end{aligned}$$

luego

$$(z_x x' + z_y y')^2 = z_x^2 + z_y^2 - (z_x y' - z_y x')^2 \leq z_x^2 + z_y^2 \leq 1. \quad (1.3.9)$$

Usando (1.3.9) en (1.3.8) y teniendo en cuenta las definiciones de $d_{\mathcal{U}}$ y de $d_{\mathcal{U}}^*$, estas satisfacen en \mathcal{U} la desigualdad

$$d_{\mathcal{U}}^* \leq d_{\mathcal{U}} \leq \sqrt{2}d_{\mathcal{U}}^*,$$

es decir, son distancias equivalentes.

Podemos concluir entonces que $(\mathcal{U}, d_{\mathcal{U}}^*)$ es completo y en consecuencia también lo es (Ω, d_{Ω}^*) . Además, en Ω se cumple la desigualdad $d_{\Omega}^* \leq \sqrt{2}d$ por ser $\mu \circ N$ un difeomorfismo. Usando esto en (1.3.6) estaríamos en las hipótesis del lema generalizado 1, lo que nos lleva a contradicción por suponer que hay puntos de concavidad en (S, III) . \square

1.4. Variación acotada de la aplicación de Gauss.

En este epígrafe se probarán dos lemas técnicos que serán clave en la demostración del teorema principal del siguiente apartado. Denotamos por S a una superficie con borde compacto ∂S . Consideramos la inmersión $\Psi : S \mapsto \mathbb{R}^3$ que suponemos C^2 -diferenciable, completa para la métrica inducida y con curvatura $K < 0$. Suponemos, además, que el valor recíproco de la curvatura de Ψ tiene variación con estimación lineal.

En esta sección se va a considerar la superficie S dotada con la estructura riemanniana inducida por la tercera forma fundamental *III*. Elegimos C un subconjunto compacto de S de modo que ∂S quede totalmente contenido en el interior de C , que denotamos por $\text{int}(C)$. Llamamos $\widehat{\partial C}$ al borde del conjunto $S \setminus \text{int}(C)$, el cual viene dado por una cantidad finita de curvas cerradas. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $N(\widehat{\partial C})$ es la unión de una cantidad finita de curvas C^∞ -diferenciables en \mathbb{S}^2 , bastaría elegir un compacto C adecuado en S . Por último, denotamos por d_N a la distancia asociada a *III*.

Definición 1.4.1. Se llama arco geodésico de S a cualquier arco parametrizado en S que sea, localmente, el camino más corto entre cualesquiera de sus puntos.

En estas condiciones, la aplicación de Gauss es una C^1 -inmersión isométrica de S en \mathbb{S}^2 , con lo que cualquier arco geodésico en S de longitud menor que π es minimizante. Esto es, cualquiera de estos arcos son globalmente el camino más corto entre cualesquiera dos de sus puntos y son llevados por N uno a uno en caminos de igual longitud a lo largo de círculos máximos de la esfera.

Definición 1.4.2. Sea $p \in S \setminus \partial S$ y $\epsilon > 0$. Llamamos disco geodésico de centro p y radio ϵ al conjunto abierto

$$D_\epsilon(p) := \{q \in S \setminus \partial S : d_N(p, q) < \epsilon\}.$$

Se dice que $D_\epsilon(p)$ es un disco totalmente geodésico si existe un rayo geodésico abierto de longitud ϵ saliendo desde p en cualquier dirección.

Entendemos que \mathcal{H} es un subconjunto convexo de S (o de \mathbb{S}^2) si es no vacío y tiene la propiedad de que cualesquiera dos de sus puntos pueden ser unidos por medio de un arco geodésico minimizante totalmente contenido en \mathcal{H} .

Lema 1.4.1. *Bajo las hipótesis anteriores. Sea $r > 0$ un número real tal que $3r = d_N(\partial S, \widehat{\partial C})$ y sean $p, q \in S \setminus \text{int}(C)$ de modo que*

$$d_N(p, q) < \min \left\{ \max \left\{ d_N(p, \widehat{\partial C}), d_N(q, \widehat{\partial C}) \right\} + r, \pi \right\}. \quad (1.4.1)$$

Si el valor recíproco de la curvatura de Ψ tiene variación con estimación lineal, entonces existe un único arco geodésico minimizante γ de p a q .

En primer lugar observamos que bajo las hipótesis del lema 1.4.1 se cumple el siguiente resultado:

Afirmación 1.4.1. Si γ es un arco geodésico de p a q y $D_\epsilon(p)$, $D_\epsilon(q)$ son discos totalmente geodésicos en $S \setminus \partial S$ tales que $\text{long}(\gamma) + 2\epsilon < \pi$ y $\epsilon < r/2$, entonces existe un subconjunto abierto y convexo \mathcal{H} en $S \setminus \partial S$ que contiene a $D_\epsilon(p) \cup \gamma \cup D_\epsilon(q)$.

Demostración de la Afirmación 1.4.1. Podemos suponer que $d_N(p, \widehat{\partial C}) > d_N(q, \widehat{\partial C})$, entonces por (1.4.1) $D_\epsilon(p) \cup \gamma \cup D_\epsilon(q)$ queda totalmente contenido en el disco geodésico $\mathbb{D} := D_{d_N(p,q)+2\epsilon}(p) \subseteq S \setminus \partial S$.

Vamos a construir el subconjunto convexo \mathcal{H} en el interior de \mathbb{D} adaptando los argumentos de [41, Observación 4, ítem B] al contexto de superficies con borde compacto. Esto es posible debido al carácter local de dichos argumentos. El procedimiento que vamos a seguir es el siguiente: en primer lugar construiremos el conjunto \mathcal{H} imponiendo una hipótesis extra sobre el cierre de los discos de centros p y q , y finalmente construiremos el convexo en el caso más general.

CASO I. Construimos el conjunto \mathcal{H} bajo la hipótesis adicional de que las clausuras métricas de $D_\epsilon(p)$ y $D_\epsilon(q)$ están en el interior de $S \setminus \partial S$.

Sea $T(\tau)$ el entorno tubular cerrado de γ de radio τ dentro de \mathbb{D} . Como N es un difeomorfismo local existe un valor positivo de τ tal que N es uno a uno en $\overline{D_\epsilon(p)} \cup T(\tau) \cup \overline{D_\epsilon(q)}$, donde $\overline{D_\epsilon(p)}$ denota la clausura en S del disco.

Llamamos $\hat{\tau}$ al supremo de los $\tau \in]0, \epsilon[$ tales que N es uno a uno en $\overline{D_\epsilon(p)} \cup T(\tau) \cup \overline{D_\epsilon(q)}$. Entonces se puede afirmar que $\hat{\tau} = \epsilon$ ya que, de otro modo, existiría un punto $\tilde{p} \in \partial \tilde{S}$ en algún lugar de la clausura métrica de $T(\hat{\tau})$ tal que su imagen por N estaría situada en un segmento de círculo no geodésico del borde de $N(T(\hat{\tau}))$. Con lo que tendríamos que \tilde{S} es cóncavo en \tilde{p} entrando en contradicción con el lema generalizado 2.

Salvo movimientos en la esfera podemos suponer que $N \circ \gamma$ parametriza alguna porción del ecuador $\{y = 0\}$ de \mathbb{S}^2 con su punto medio en $(0, -1, 0)$ y tal que un cierto valor $y_0 < 0$ es la coordenada y -ésima de los puntos $N(p)$ y $N(q)$.

Denotamos por \mathcal{R} al cilindro elíptico recto de \mathbb{R}^3 formado por la unión de todas las líneas paralelas al eje OX entre los bordes de $D_\epsilon(N(p))$ y $D_\epsilon(N(q))$. Sean además Π_τ^+ y Π_τ^- los planos de \mathbb{R}^3 que forman un ángulo $\tau \in [0, \pi/2]$ con el plano OXY y son tangentes al cilindro \mathcal{R} a lo largo de una línea en la cual $y = \text{const} > y_0$, con $z = \text{const} \geq 0$ y $z = \text{const} \leq 0$ respectivamente, ver figura 1.6(a). Es claro que existe un único $\tau_0 \in]0, \pi/2[$ para el cual los planos $\Pi_{\tau_0}^+$ y $\Pi_{\tau_0}^-$ pasan por el origen de \mathbb{R}^3 y cortan a \mathbb{S}^2

en sendos círculos máximos tangentes a los bordes circulares de $D_\epsilon(N(p))$ y $D_\epsilon(N(q))$.

Tomamos en la esfera el entorno de $N \circ \gamma$ limitado por abajo por Π_τ^- , por arriba por Π_τ^+ , por la derecha por $D_\epsilon(N(q))$ y por la izquierda por $D_\epsilon(N(p))$. Llamamos \mathcal{E}_τ a dicho entorno, ver la figura 1.6(b). Observamos que de la primera parte de la construcción, N es uno a uno en $D_\epsilon(p) \cup T(\epsilon) \cup D_\epsilon(q) \subseteq U$ y lleva dicho conjunto en el entorno \mathcal{E}_τ .

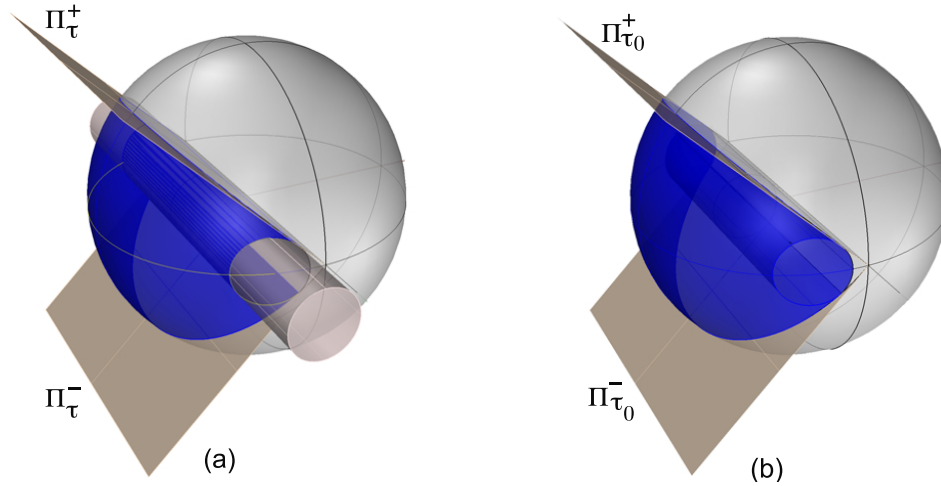


Figura 1.6: Construcción del subconjunto convexo $N(\mathcal{H})$.

Si consideramos ahora $\tilde{\tau}$ el supremo de los $\tau \in [0, \tau_0]$ para los cuales algún entorno de \mathcal{N}_τ de γ en \mathbb{D} es llevado uno a uno por N en \mathcal{E}_τ , entonces podemos afirmar que $\tilde{\tau} = \tau_0$. De otro modo existiría un punto $\tilde{p} \in \partial\tilde{\mathcal{S}}$ en la clausura métrica de $\mathcal{N}_{\tilde{\tau}}$ que por la hipótesis adicional cumpliría que $N(\tilde{p})$ está a distancia mayor que ϵ de $N(p)$ y $N(q)$. Luego $N(\tilde{p})$ pertenecería a alguno de los segmentos de círculo no geodésico de la esfera $\Pi_{\tilde{\tau}}^+$ o $\Pi_{\tilde{\tau}}^-$ y tendríamos que $\tilde{\mathcal{S}}$ sería cóncavo en \tilde{p} , lo que también contradice al lema generalizado 2.

Finalmente, si se toma el subconjunto convexo $\mathcal{H} := \mathcal{N}_{\tau_0}$, se tendría demostrado el CASO I.

CASO II. En el caso general, se puede aplicar el CASO I al conjunto $D_\tau(p) \cup \gamma \cup D_\tau(q)$ para cada $\tau \in]0, \epsilon[$ y construir el correspondiente conjunto convexo \mathcal{H}_τ . Así construido, el convexo queda contenido en \mathbb{D} y, además, contiene al conjunto $D_\tau(p) \cup \gamma \cup D_\tau(q)$. Podemos concluir la demostración de la afirmación si se toma el

conjunto

$$\mathcal{H} = \bigcup_{0 < \tau < \epsilon} \mathcal{H}_\tau.$$

□

Demostración del lema 1.4.1. Suponemos que $p \neq q$, ya que el otro caso es trivial. Por (1.4.1) y por el hecho de que el conjunto $S \setminus \partial S$ es conexo, se puede tomar un arco parametrizado Γ entre p y q que cumpla la desigualdad

$$0 < \text{long}_N(\Gamma) < \min \left\{ \max \left\{ d_N(p, \widehat{\partial C}), d_N(q, \widehat{\partial C}) \right\} + r, \pi \right\}, \quad (1.4.2)$$

donde long_N denota la longitud para la distancia d_N .

Como N es isometría local y Γ es un compacto, entonces existe un número real $0 < \epsilon < r$ tal que

$$\text{long}_N(\Gamma) + 2\epsilon < \min \left\{ \max \left\{ d_N(p, \widehat{\partial C}), d_N(q, \widehat{\partial C}) \right\} + r, \pi \right\} \quad (1.4.3)$$

y $D_\epsilon(x)$ es un disco totalmente geodésico en $S \setminus \partial S$ para cualquier $x \in \Gamma$.

De nuevo, por ser Γ compacto, se pueden fijar puntos $p = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = q$ de Γ ordenados según su parametrización y cumpliendo, además, que cada uno de ellos está contenido en el disco totalmente geodésico de radio ϵ centrado en el punto anterior de la sucesión, esto es

$$d_N(x_k, x_{k+1}) < \epsilon, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.4.4)$$

Por estar $x_1 \in D_\epsilon(x_0)$ existe un arco geodésico γ_0 en $S \setminus \partial S$ que une x_0 con x_1 y verifica que $\text{long}_N(\gamma_0) + 2\epsilon < \pi$. Además este arco es único por (1.4.3).

Usamos un argumento de inducción, suponiendo que existe un único arco geodésico γ_{k-1} dentro de $S \setminus \partial S$ de x_0 a x_{k-1} con

$$\text{long}_N(\gamma_{k-1}) + 2\epsilon < \pi.$$

Por la afirmación 1.4.1, se puede construir un conjunto convexo \mathcal{H}_{k-1} en $S \setminus \partial S$ que contiene a $D_\epsilon(p) \cup \gamma_{k-1} \cup D_\epsilon(x_{k-1})$ y por (1.4.4) se tiene que $x_k \in D_\epsilon(x_{k-1})$, por lo tanto $x_k \in \mathcal{H}_{k-1}$ y eso nos dice que existe un arco geodésico minimizante γ_k de p a x_k dentro de \mathcal{H}_{k-1} .

Por último, si llamamos Γ_k a la porción del arco Γ entre p y x_k , es claro que

$$\text{long}_N(\gamma_k) \leq \text{long}_N(\Gamma_k) \leq \text{long}_N(\Gamma),$$

y por (1.4.2) se tiene que

$$\text{long}_N(\gamma_k) + 2\epsilon \leq \text{long}_N(\Gamma) + 2\epsilon < \min \left\{ \max \left\{ d_N(p, \widehat{\partial C}), d_N(q, \widehat{\partial C}) \right\} + r, \pi \right\}.$$

Por inducción podemos afirmar que existe un arco γ de p a q que es minimizante, luego único por ser N isometría en \mathcal{H}_{k-1} , lo que concluye la prueba. \square

Acabamos de probar que cualquier par de puntos interiores de S pueden ser unidos por medio de una curva geodésica minimizante. Veamos ahora que, bajo las mismas condiciones, la longitud de dicha curva no puede alcanzar el valor π .

Lema 1.4.2. *Bajo las hipótesis anteriores se cumple*

$$d_N(p, \widehat{\partial C}) < \pi,$$

para cualquier $p \in S \setminus C$. Además, existe una geodésica minimizante que une cada punto $p \in S \setminus C$ con $\widehat{\partial C}$.

Demostración. Si no fuera cierto, por compacidad de C se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que existen puntos $p \in S \setminus C$ y $q \in \widehat{\partial C}$ de manera que $d_N(p, q) = d_N(p, \widehat{\partial C}) = \pi$. Observamos que si la distancia de p a q fuera mayor que π , podríamos considerar una porción de arco parametrizado de longitud exactamente igual a π y tomar por punto q el extremo de dicha porción.

Sea $\epsilon > 0$ un número real tal que $\epsilon < \min \{\pi/2, r\}$ y $D_{2\epsilon}(q)$ es un disco totalmente geodésico en $S \setminus \partial S$. Denotamos por $\mathbb{S}_\epsilon(q)$ al borde de $D_\epsilon(q)$. Tomamos un punto $q_1 \in \mathbb{S}_\epsilon(q)$ de manera que satisfaga

$$d_N(p, q_1) = d_N(p, \mathbb{S}_\epsilon(q)) = \pi - \epsilon < \pi = \min \left\{ \max \left\{ d_N(p, \widehat{\partial C}), d_N(q, \widehat{\partial C}) \right\} + r, \pi \right\},$$

entonces por el lema 1.4.1 existe un arco geodésico minimizante γ_1 de p a q_1 y totalmente contenido en $S \setminus \partial S$.

Si llamamos γ_0 al único radio de $D_\epsilon(q)$ que une q con q_1 , podemos definir una nueva curva γ como la curva parametrizada por el arco resultante de yuxtaponer las curvas γ_0 y γ_1 , esto es

$$\gamma(t) := \gamma_0 * \gamma_1 = \begin{cases} \gamma_1(t) & , 0 \leq t \leq \pi - \epsilon \\ \gamma_0(\pi - t) & , \pi - \epsilon \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Así definida, la curva γ cumple la igualdad

$$\text{long}_N(\gamma) = \text{long}_N(\gamma_0) + \text{long}_N(\gamma_1) = \pi,$$

por lo que γ es una curva minimizante y es, por tanto, la única que va de p a q pasando por q_1 .

Sea m el punto medio de γ . Para cualquier valor $0 < t < \pi/2$ consideramos los puntos p_t y q_t de γ que verifican

$$d_N(p, p_t) = d_N(q, q_t) = t,$$

esto es que $N(p_t)$ y $N(q_t)$ son puntos simétricos de $N(\gamma)$ respecto de $N(m)$.

En adelante asumimos que $N(m) = (0, -1, 0)$, $N(p) = (-1, 0, 0)$, $N(q) = (1, 0, 0)$ y γ es llevado uno a uno en el correspondiente arco geodésico de \mathbb{S}^2 contenido en el plano $\{z = 0\}$. Elegimos también $\epsilon_t > 0$ con $\epsilon_t < \min\{t, r, \pi/2\}$ de manera que $D_{\epsilon_t}(p)$ y $D_{\epsilon_t}(q)$ son discos totalmente geodésicos.

Bajo estas condiciones y por la afirmación 1.4.1, podemos decir que existe un subconjunto convexo \mathcal{H}_t de $S \setminus \partial S$ que es llevado por N uno a uno en el convexo $N(\mathcal{H})$ de la esfera.

Si recordamos cómo fue construido el conjunto \mathcal{H}_t en la demostración del lema 1.4.1, es claro que si $t_0 \leq t_1$, entonces $\mathcal{H}_{t_1} \subseteq \mathcal{H}_{t_0}$. Podemos asegurar entonces que el conjunto $N(\mathcal{H}_t)$ tiende a rellenar todo el hemisferio $\{y < 0\}$ de la esfera a medida que el parámetro t va decreciendo hasta desaparecer, es decir

$$\lim_{t \rightarrow 0} N(\mathcal{H}_t) = D_{\pi/2}(N(m)) = \mathbb{S}^2 \cap \{y < 0\}$$

y N lleva el disco $D_{\pi/2}(m)$ de $S \setminus \partial S$ uno a uno en el disco $D_{\pi/2}(N(m))$ de \mathbb{S}^2 .

Llegados a este punto podemos tomar un número real $0 < \epsilon_1 < \min\{\pi/2, r\}$ tal que el disco $D_{2\epsilon_1}(p)$ es totalmente geodésico, y también se pueden considerar dos puntos distintos p_1 y p_2 de $D_{2\epsilon_1}(p)$ a distancia ϵ_1 de p los cuales son llevados por N a la esfera en sendos puntos pertenecientes al arco geodésico en el plano $\{y = 0\}$, de manera que $N(p_1)$ se encuentra en el semiespacio $\{z > 0\}$ y $N(p_2)$ en el semiespacio $\{z < 0\}$, ver figura 1.7.

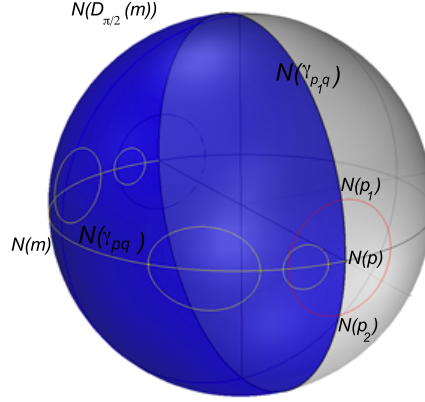


Figura 1.7: Probando el Lema 1.4.2.

Por la elección de p_i se tiene que $\pi - \epsilon_1 \leq d_N(p_i, q)$ para $i = 1, 2$. Además, como N es isometría global de $D_{\pi/2}(m)$ en el hemisferio de \mathbb{S}^2 donde $\{y < 0\}$, existen dos sucesiones de curvas $\{\Gamma_n^i\}$ que unen q con p_i , $i = 1, 2$, cuyos puntos interiores están contenidos en $D_{\pi/2}(m)$ y tales que $long_N(\Gamma_n^i) \rightarrow \pi - \epsilon_1$. Luego

$$d_N(p_i, q) = \pi - \epsilon_1 < \pi = \min \left\{ \max \left\{ d_N(p_i, \widehat{\partial C}), d_N(q, \widehat{\partial C}) \right\} + r, \pi \right\}, \quad i = 1, 2,$$

y podemos aplicar el lema 1.4.1 para asegurar la existencia de dos arcos geodésicos minimizantes en $S \setminus \partial S$, que denotamos γ_{p_1q} y γ_{p_2q} , los cuales van de p_1 a q y de p_2 a q respectivamente.

Pero teniendo en cuenta que en \mathbb{S}^2 existe una única geodésica de p_i a q con longitud $\pi - \epsilon_1$, $i = 1, 2$, entonces $N(\gamma_{p_1q})$ está en la parte del conjunto $\{y = 0\}$ que se encuentra situada en el hemisferio norte de \mathbb{S}^2 y $N(\gamma_{p_2q})$ está en la parte de $\{y = 0\}$ localizada en el hemisferio sur, es decir que ambas curvas están en el círculo máximo resultado de la intersección de la esfera con el plano OXZ .

Se define para cada $i = 1, 2$, el conjunto

$$A_i := \left\{ x \in \gamma_{p_iq} / d_N(x, m) = \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Es claro que A_i es, por definición, un subconjunto cerrado de γ_{p_iq} . Ahora vamos a ver que también es un subconjunto abierto de γ_{p_iq} .

En efecto, si fijamos $i = 1$ (el otro caso es idéntico) se tiene que $p_1 \in A_1$ y $D_{\epsilon_1} \cap \gamma_{p_1q}$ es un entorno abierto de p_1 en la topología relativa de γ_{p_1q} . Como N es un difeomorfismo local y es, además, uno a uno en γ_{p_1q} , entonces N es difeomorfismo global en toda la curva. Cada punto $x \in \mathbb{N}(\gamma_{p_1q})$ distinto de $N(p_1)$ tiene un entorno

abierto en la curva de puntos de $N(\gamma_{p_1q})$, luego también en γ_{p_1q} . En otras palabras, no hay puntos de $\partial\tilde{S}$ a distancia $\pi/2$ de m , la clausura topológica $\overline{D}_{\pi/2}(m)$ de $D_{\pi/2}(m)$ está en $S \setminus \partial S$ y N es uno a uno en $\overline{D}_{\pi/2}(m)$, es decir que lleva dicha clausura en el hemisferio cerrado $\{y \leq 0\}$ de la esfera.

Como el disco cerrado $\overline{D}_{\pi/2}(m)$ es compacto, se puede expandir una cierta longitud suficientemente pequeña para no llegar a tocar el borde compacto de la superficie, es decir que existe $\epsilon_2 > 0$ tal que $\overline{D}_{\pi/2+\epsilon_2}(m)$ es un disco totalmente geodésico y N lo lleva uno a uno en su conjunto imagen $N(\overline{D}_{\pi/2+\epsilon_2}(m))$. Sin embargo, $q \in \widehat{\partial C}$ es un punto interior de $\overline{D}_{\pi/2+\epsilon_2}(m)$, y como se dijo al principio de la sección, $N(\widehat{\partial C})$ es un conjunto finito de curvas cerradas y regulares de \mathbb{S}^2 , por tanto $N(\widehat{\partial C})$ ha de salir del conjunto $N(\overline{D}_{\pi/2+\epsilon_2}(m))$ cortándolo de manera transversal, lo que implica la existencia de puntos de $N(\widehat{\partial C})$ a distancia de $N(p)$ menor que π y eso contradice la hipótesis de que $\pi = d_N(p, \widehat{\partial C})$. \square

1.5. Topología y comportamiento de los finales.

A lo largo de esta última sección se seguirán usando las mismas notaciones y terminologías de las secciones anteriores. En primer lugar veremos que bajo las hipótesis anteriores, toda superficie completa de \mathbb{R}^3 con borde compacto tiene curvatura total finita.

Teorema 1.5.1. *Sea S una superficie con borde compacto ∂S y $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^2 -inmersión completa con curvatura de Gauss $K < 0$. Si el valor recíproco de la curvatura de Ψ tiene variación con estimación lineal, entonces*

$$\int_S |K| dA < \infty,$$

esto es, la inmersión tiene curvatura total finita. En particular, S es parabólica y tiene topología finita.

Demostración. El primer paso es probar que el área de $\Psi(S)$ es finita respecto de la métrica inducida por N .

Si se toma cualquier punto $p \in S \setminus C$, por el lema 1.4.2, la distancia de p al conjunto $\widehat{\partial C}$ es menor que π y, por el lema 1.4.1, existe un arco geodésico minimizante γ_p que une p con $\widehat{\partial C}$. Es decir, que cada punto de $S \setminus C$ se encuentra, a lo sumo, a distancia π del compacto C .

Para cada punto $p \in S \setminus C$ existe un único $q \in \widehat{\partial}C$ de manera que $d_N(p, q) = d_N(p, \widehat{\partial}C) < \pi$. Alrededor de cada q se puede parametrizar la curva $\widehat{\partial}C$ por $\alpha(s)$, siendo s el parámetro arco, y si llamamos J al giro de ángulo $\pi/2$ en el plano tangente, entonces $J(\alpha'(s))$ es el vector normal unitario.

Consideramos alrededor de cada punto $p \in S \setminus C$ la siguiente parametrización

$$X(t, s) := \exp_{\alpha(s)}(tJ(\alpha'(s))), \quad 0 \leq t < \pi, \quad s \in I,$$

donde I es un intervalo de la recta real. La elección de esta parametrización en particular de $S \setminus C$ queda justificada por los lemas 1.4.1 y 1.4.2. Desde un punto de vista geométrico, observamos que al lanzar un rayo geodésico desde cada punto q de $\widehat{\partial}C$ hasta su máxima longitud, que no llega a ser π , realmente estamos haciendo un barrido exhaustivo de todos los puntos de S que no están en el interior de C . Tiene pues sentido la siguiente fórmula para el cálculo del área de $\Psi(S)$ respecto de III

$$A_N(\Psi(S)) = A_N(\Psi(C)) + \int_0^{\text{long}_N(\widehat{\partial}C)} \text{long}_N(\gamma_q) dA_{III}, \quad (1.5.1)$$

donde A_N denota el área para la tercera forma fundamental, long_N la longitud y γ_q es un rayo geodésico que empieza en el punto $q \in \widehat{\partial}C$ y se prolonga en su máxima extensión.

En términos de t y s , la tercera forma fundamental se puede escribir

$$III = E_{III} dt^2 + 2F_{III} dt ds + G_{III} ds^2,$$

y como $X_t(t_0, s_0) = \gamma'(t_0)$ y la curva γ está parametrizada por el arco, se tiene que

$$E_{III} = III(X_t, X_t) = III(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1. \quad (1.5.2)$$

Además, $X(0, s) = \exp_{\alpha(s)}(0) = \alpha(s)$, por lo tanto

$$F_{III}(0, s) = III(X_s(0, s), X_t(0, s)) = III(\alpha'(s), J(\alpha'(s))) = 0. \quad (1.5.3)$$

Se puede usar, en este tipo de coordenadas, el conocido lema de Gauss (ver [15]), el cual afirma que si $F_{III}(0, s) = 0$ en todo s , entonces $F_{III} \equiv 0$.

Por (1.5.2) y (1.5.3) se tiene que $\sqrt{G_{III}}$ es el elemento de área de la inmersión N . La fórmula de la curvatura de Gauss nos dice que

$$K(N(S)) = -\frac{(\sqrt{G_{III}})_{tt}}{\sqrt{G_{III}}},$$

y, además, $K(N(S)) \equiv 1$. Entonces, el elemento de área de N cumple la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$(\sqrt{G_{III}})_{tt} + \sqrt{G_{III}} = 1,$$

cuyas soluciones se pueden obtener de manera explícita como

$$\sqrt{G_{III}}(t, s) = A(s) \cos(t) + B(s) \sin(t), \quad \forall t, s. \quad (1.5.4)$$

Al estar α parametrizada por el arco, de las condiciones iniciales podemos obtener que

$$A(s) = G_{III}(0, s) = III(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 1. \quad (1.5.5)$$

Si sustituímos (1.5.5) en (1.5.4) nos queda

$$\sqrt{G_{III}}(t, s) = \cos(t) + B(s) \sin(t), \quad \forall t, s. \quad (1.5.6)$$

Derivando (1.5.6) respecto de t y evaluando en $t = 0$ nos queda $(\sqrt{G_{III}})_t(0, s) = B(s)$. Por la fórmula de la curvatura geodésica tenemos que

$$k_g^\alpha(s) = \frac{(\sqrt{G_{III}})_t}{\sqrt{G_{III}}}\Big|_{t=0} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Usando (1.5.5) en la igualdad anterior resulta que $B(s)$ es la curvatura geodésica de $N(\widehat{\partial}C)$. Sustituimos en (1.5.6) y nos queda

$$\sqrt{G_{III}}(t, s) = \cos(t) + k_g^\alpha(s) \sin(t), \quad \forall t, s. \quad (1.5.7)$$

Por otro lado, la curvatura geodésica está acotada por ser α un conjunto compacto, por tanto existe una constante $M > 0$ de manera que $|\sqrt{G_{III}}(t, s)| \leq M$. Se tiene entonces que los elementos de área de III y de I están relacionados por la desigualdad

$$dA_{III} = \left| \sqrt{G_{III}}(t, s) \right| dA_I \leq M dA_I. \quad (1.5.8)$$

Usando (1.5.8) en (1.5.1) se tiene que

$$A_N(\Psi(S)) \leq A_N(\Psi(C)) + \pi M \text{long}_N(\widehat{\partial}C) < \infty,$$

es decir, que el área de $\Psi(S)$ es finita para la métrica inducida por la aplicación de Gauss dado que los conjuntos C y $\widehat{\partial}C$ son compactos.

Por la igualdad (1.2.1) se tiene que

$$\int_S |K| dA_I = \int_S dA_{III} = A_N(\Psi(S)) < \infty,$$

lo que significa que la superficie tiene curvatura total finita como queríamos probar.

En particular, la parte negativa de la integral de la curvatura es finita. Por el teorema 1.2.3 de Hüber, se tiene que S tiene topología finita y es de tipo parabólico. \square

Si partimos de una superficie completa Σ , C^2 -inmersa en \mathbb{R}^3 y sin borde de modo que en el exterior de una región compacta C , la curvatura de Gauss K es negativa y el valor recíproco de la curvatura tiene variación con estimación lineal, entonces se puede trabajar fuera de dicho compacto usando el teorema 1.5.1 en el nuevo contexto de superficie con borde compacto. Hay que tener en cuenta que, por compacidad, se tiene

$$\int_C |K| dA < +\infty.$$

Sin necesidad pues de alterar el razonamiento final de la demostración anterior, se tiene de nuevo curvatura total finita en Σ y, además, por el teorema 1.2.3 de Hüber se cumplen las mismas propiedades topológicas en la superficie. Tendríamos por tanto probado el siguiente:

Corolario 1.5.1. *Sea $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una C^2 -inmersión completa con curvatura de Gauss negativa fuera de un conjunto compacto $C \subset \Sigma$. Si el valor recíproco de la curvatura de Ψ tiene variación con estimación lineal fuera de C , entonces*

$$\int_{\Sigma} |K| dA < \infty,$$

esto es, la inmersión tiene curvatura total finita. En particular, Σ es parabólica y tiene topología finita.

El teorema 1.5.1 y el corolario 1.5.1 nos enseñan propiedades topológicas interesantes del tipo de superficies que estamos tratando en el primer capítulo de esta memoria. Nos dicen que son parabólicas, con lo cual hay una cantidad finita de finales y cada final es conformemente un disco punteado. La pregunta que cabe plantearse llegados a este punto es la siguiente: ¿cómo es el comportamiento asintótico de la superficie en los finales?. Es conveniente aclarar algunos conceptos y presentar algunas herramientas que nos serán de utilidad para poder dar respuesta a estas cuestiones.

Definición 1.5.1. Sea Σ una superficie C^2 -diferenciable e inmersa en \mathbb{R}^3 . Se dice que tiene la propiedad de la envolvente convexa si dado cualquier dominio D de Σ de manera que su imagen por la inmersión es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^3 , se cumple que dicho conjunto imagen está totalmente contenido en la envolvente convexa de su borde.

R. Osserman demuestra en [53] una caracterización geométrica de las variedades que satisfacen la propiedad de la envolvente convexa. En el caso particular que nos ocupa se puede decir que una superficie C^2 -diferenciable Σ , inmersa en el euclídeo tridimensional, tiene dicha propiedad si y solo si su curvatura de Gauss es no positiva en todo punto.

Consideremos un final M de la superficie, C^2 -inmerso isométricamente en el euclídeo y que cumpla

$$\int_M K^+ dA < \infty.$$

Se llama curva zonal de M a cada curva α homotópica al borde del final y consideramos

$$m = \inf\{\text{long}(\alpha) : \alpha \text{ es curva zonal de } M\}.$$

Si cada sucesión de curvas zonales $\{\alpha_i\}$ de M cuyas longitudes tienden a m es divergente en el final M , entonces el teorema de Burago, ver [11], nos dice que M ha de ser un conjunto no acotado de \mathbb{R}^3 .

Usaremos todo esto para probar que los finales de Σ son asintóticos a una semirrecta, cuando se cumplen las hipótesis del teorema de Efimov fuera de un conjunto compacto.

Teorema 1.5.2. *Sea $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie completa C^2 -inmersa y con curvatura de Gauss $K \leq -\epsilon < 0$ fuera de un subconjunto compacto $C \subseteq \Sigma$. Entonces Σ tiene topología finita, Ψ es propiamente inmersa y tiene área finita para la métrica inducida. Además, cualquier final de la superficie es asintótico a una semirrecta de \mathbb{R}^3 .*

Demostración. Por la observación ??, $\Sigma \setminus C$ pertenece a la familia de superficies cuyo valor recíproco de la curvatura tiene variación con estimación lineal. Podemos entonces aplicar el corolario 1.5.1, con lo que Σ tiene curvatura total finita y, en consecuencia, su área es finita para la métrica inducida. Es decir que si A_I denota el área para la métrica inducida, entonces

$$A_I(\Psi(\Sigma)) = \int_{\Sigma} dA_I \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Sigma} |K| < \infty$$

y en particular, el área de sus finales también es finita. Quedaría tan solo probar que cada final es propiamente inmerso y asintótico a una semirrecta.

El corolario 1.5.1 nos dice también que Σ es parabólica. Consideramos un final de la superficie que suponemos parametrizado por el conjunto

$$E = \{p \in \mathbb{R}^2 : 0 < |p| \leq 1\},$$

y con curvatura negativa en todos sus puntos.

Como el área del final es finita, existe entonces una sucesión estrictamente decreciente de radios $\{\epsilon_n\}$ tal que $\epsilon_n \rightarrow 0$, de manera que las curvas

$$\Gamma_n := \Psi(\{p \in \mathbb{R}^2 : |p| = \epsilon_n\})$$

verifican que

$$\text{long}_I(\Gamma_n) \rightarrow 0, \quad (1.5.9)$$

donde $\text{long}_I(\cdot)$ denota la longitud para la métrica inducida.

Las preimágenes de las curvas Γ_n pueden visualizarse en el conjunto E como círculos concéntricos de radio ϵ_n , con centro en el origen y que tienden a replegarse en el mismo a medida que aumenta el valor de n . Para que las curvas Γ_n cumplan (1.5.9) es fundamental que el área del final sea finita.

Para $n < m$ se definen los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^m &:= \Psi(\{p \in \mathbb{R}^2 / \epsilon_m \leq |p| \leq \epsilon_n\}), \\ \mathcal{A}_n^\infty &:= \Psi(\{p \in \mathbb{R}^2 / 0 < |p| \leq \epsilon_n\}). \end{aligned}$$

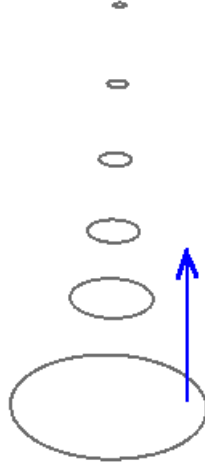
Denotamos por $\text{conv}(\cdot)$ a la envolvente convexa de un conjunto de \mathbb{R}^3 . Como asumimos que el final tiene curvatura negativa en todos sus puntos, podemos aplicar el teorema de Osserman y se tiene que

$$\mathcal{A}_n^m \subseteq \text{conv}(\Gamma_n \cup \Gamma_m) = \text{conv}(\text{conv}(\Gamma_n) \cup \text{conv}(\Gamma_m)). \quad (1.5.10)$$

Por el teorema de Burago el final no está acotado, por lo que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ tampoco lo está. Esto junto con (1.5.9), pasando a subsucesión si fuera necesario, nos permite suponer que las sucesivas curvas Γ_n cumplen la desigualdad

$$\max\{|p| : p \in \Gamma_n\} < \min\{|p| : p \in \Gamma_{n+1}\}, \text{ con } \{\min\{|p| : p \in \Gamma_n\}\} \rightarrow \infty, \quad (1.5.11)$$

es decir, que podemos visualizar las curvas Γ_n como una sucesión de aros disjuntos dos a dos y que tienden a infinito, ver figura 1.8.

Figura 1.8: Sucesión de curvas Γ_n en el final M .

Ahora, para cada valor n se pueden tomar un par de puntos, uno en la base $q_n \in \text{conv}(\Gamma_1)$, y otro punto $p_n \in \text{conv}(\Gamma_{n+1})$. Así elegidos, por (1.5.11) se tiene que $q_n \neq p_n$ para cada n y por compacidad, la sucesión de vectores unitarios

$$\frac{p_n - q_n}{|p_n - q_n|}$$

ha de tener una subsucesión convergente. Pasando a una subsucesión si fuera necesario podemos suponer que existe un vector unitario $v_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\left\{ \frac{p_n - q_n}{|p_n - q_n|} \right\} \rightarrow v_0.$$

Para ver que v_0 es independiente de la elección de q_n observamos que

$$\frac{p_n}{|p_n|} = \frac{p_n - q_n}{|p_n - q_n|} \frac{|p_n - q_n|}{|p_n|} + \frac{q_n}{|p_n|} \rightarrow v_0,$$

ya que, por estar $\text{conv}(\Gamma_1)$ acotada y por (1.5.11) se tiene

$$\frac{q_n}{|p_n|} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{|p_n - q_n|}{|p_n|} \rightarrow 1.$$

Si para cada n elegimos un punto $p'_n \in \text{conv}(\Gamma_{n+1})$, entonces se cumple que la sucesión

$$\frac{p'_n}{|p'_n|} = \frac{p'_n - p_n}{|p'_n - p_n|} + \frac{p_n}{|p_n|} \frac{|p_n|}{|p'_n|} \rightarrow v_0,$$

porque por (1.5.9)

$$\frac{(p'_n - p_n)}{|p'_n|} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{|p_n|}{|p'_n|} \rightarrow 1,$$

lo que demuestra que v_0 tampoco depende de la elección de p_n .

Definimos los cilindros sólidos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &:= \{q + tv_0 / q \in \text{conv}(\Gamma_1), t \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{R}_1^+ &:= \{q + tv_0 / q \in \text{conv}(\Gamma_1), t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $\mathcal{A}_1^\infty \not\subseteq \mathcal{R}_1^+$, entonces por (1.5.10) existe un entero positivo $n_0 > 1$ y un punto $x_0 \in \text{conv}(\Gamma_{n_0})$ tal que $x_0 \notin \mathcal{R}_1^+$. Luego el conjunto compacto

$$\widehat{C} := \left\{ \frac{x_0 - q}{|x_0 - q|} \in \mathbb{S}^2 / q \in \text{conv}(\Gamma_1) \right\}$$

no contiene al vector v_0 . De no ser así existirían $t_0 \in \mathbb{R}^+$ y $q_0 \in \text{conv}(\Gamma_1)$ tales que $x_0 = q_0 + t_0 |x_0 - q_0| \in \mathcal{R}_1^+$.

Observamos que, por la propia definición, los conjuntos \mathcal{A}_n^m tienen las siguientes propiedades para todos los $n < m$, con m suficientemente grande o $m = \infty$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1}^m &\subseteq \mathcal{A}_n^m, \\ \mathcal{A}_n^m &\subseteq \mathcal{A}_n^{m+1}. \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Como $x_0 \in \text{conv}(\Gamma_{n_0})$ y $n_0 > 1$, entonces para cada $n > n_0$ se tiene que

$$x_0 \in \text{conv}(\text{conv}(\Gamma_1) \cup \text{conv}(\Gamma_{n+1})),$$

es decir, que existen dos puntos $q_n \in \text{conv}(\Gamma_1)$ y $p_n \in \text{conv}(\Gamma_{n+1})$ tales que $x_0 = (1 - t_n)q_n + t_n p_n$ para algún $t_n \in [0, 1]$, o equivalentemente, $x_0 - q_n = t_n(p_n - q_n)$. En este caso

$$\frac{x_0 - q_n}{|x_0 - q_n|} = \frac{p_n - q_n}{|p_n - q_n|}.$$

La igualdad anterior nos dice que $(p_n - q_n)/|p_n - q_n| \in \widehat{C}$ para todo $n > n_0$. Por otro lado

$$\frac{p_n - q_n}{|p_n - q_n|} \rightarrow v_0$$

por la independencia de v_0 respecto a la elección de las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$, entonces v_0 ha de pertenecer al compacto \widehat{C} y eso es una contradicción, lo que demuestra

que $\mathcal{A}_1^\infty \subseteq \mathcal{R}_1^+$.

Como consecuencia de este hecho, (1.5.10) y (1.5.11), el final es propiamente inmerso. Una vez visto que $\mathcal{A}_1^\infty \subseteq \mathcal{R}_1^+$, si definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_n &:= \{q + tv_0/q \in \text{conv}(\Gamma_n), t \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{R}_n^+ &:= \{q + tv_0/q \in \text{conv}(\Gamma_n), t \geq 0\},\end{aligned}$$

se puede demostrar haciendo un razonamiento idéntico, que para cada $n \geq 2$, \mathcal{A}_n^∞ está contenido en un cierto cilindro R_n^+ que tiene por base el conjunto $\text{conv}(\Gamma_n)$ y contiene a toda la superficie a partir de $\text{conv}(\Gamma_n)$.

Por (1.5.12) se tiene que $\mathcal{A}_n^\infty \subseteq \mathcal{A}_1^\infty \subseteq \mathcal{R}_1^+$ y \mathcal{A}_n^∞ está propiamente inmerso en \mathbb{R}^3 , entonces R_n^+ también está contenido en \mathcal{R}_1^+ . Además, dichos cilindros no se pueden cortar. Los ejes de ambos semicilindros han de ser paralelos, lo que tan solo nos deja una posibilidad, que $R_n^+ = \mathcal{R}_n^+$, y por lo tanto

$$\mathcal{A}_n^\infty \subseteq \mathcal{R}_n^\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Por (1.5.9) se tiene que $\text{diam}(\text{conv}(\Gamma_{n+1}))$ tiende a cero para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $\text{diam}(\cdot)$ denota el diámetro de un conjunto de \mathbb{R}^3 , esto es el máximo de las distancias entre puntos de dicho conjunto.

Como los cilindros \mathcal{R}_n son convexos y $\mathcal{R}_{n+1} \subseteq \mathcal{R}_n$, se deduce del hecho anterior que

$$\mathcal{R} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n,$$

es una recta de \mathbb{R}^3 y el final es asintótico a dicha recta, quedando probado el teorema. \square

Observamos que, si nos quedamos en el contexto del teorema 1.5.2, aún podemos dar un poco más de información en virtud de los resultados de Hüber. Analizando dicho contexto observamos que nos encontramos en las hipótesis de [35, Teorema 12], con lo cual, no solo se puede afirmar que existe la integral de la curvatura de Σ , como asegura el corolario 1.5.1, sino que su valor es exactamente

$$\mathcal{C} = 2\pi\chi(\Sigma),$$

donde χ representa la característica de Euler de la superficie.

Capítulo 2

Superficies completas con curvatura no positiva en espacios modelo.

2.1. Introducción.

A pesar de los progresos en el entendimiento de las superficies de curvatura negativa inmersas en el espacio euclídeo tridimensional, todavía hoy quedan sin respuesta algunas importantes cuestiones relacionadas con el teorema de Hilbert, ver [34]. Entre los problemas abiertos relacionados con el teorema anterior, destaca por su interés el establecido por John Milnor en 1966, ver [43]:

CONJETURA DE J. MILNOR. *Sea Σ una superficie completa sin puntos umbilicales, C^2 -inmersa en \mathbb{R}^3 y tal que*

$$k_1^2 + k_2^2 \geq c > 0, \tag{2.1.1}$$

donde k_i , $i = 1, 2$. son las curvaturas principales de la inmersión y c es cierta constante. Entonces se satisface alguna de las siguientes posibilidades:

1. K cambia de signo,
2. $K \equiv 0$,

donde K denota la curvatura de la inmersión.

Aunque inicialmente, la relación entre la conjetura de Milnor y nuestro estudio sobre superficies inmersas con curvatura de Gauss no positiva del capítulo anterior

podría no parecer clara, es posible dar una interpretación geométrica de dicha conjetura en términos de la curvatura media H y de la curvatura de Gauss K que resulta muy conveniente para entender bien dicha cuestión.

La hipótesis sobre las curvaturas principales en la conjetura de Milnor, en términos de la curvatura de Gauss y de la curvatura media, equivale a la existencia de un entorno del origen en el plano HK que no toca al diagrama de curvaturas de la superficie, es decir, a la imagen de la superficie en dicho plano.

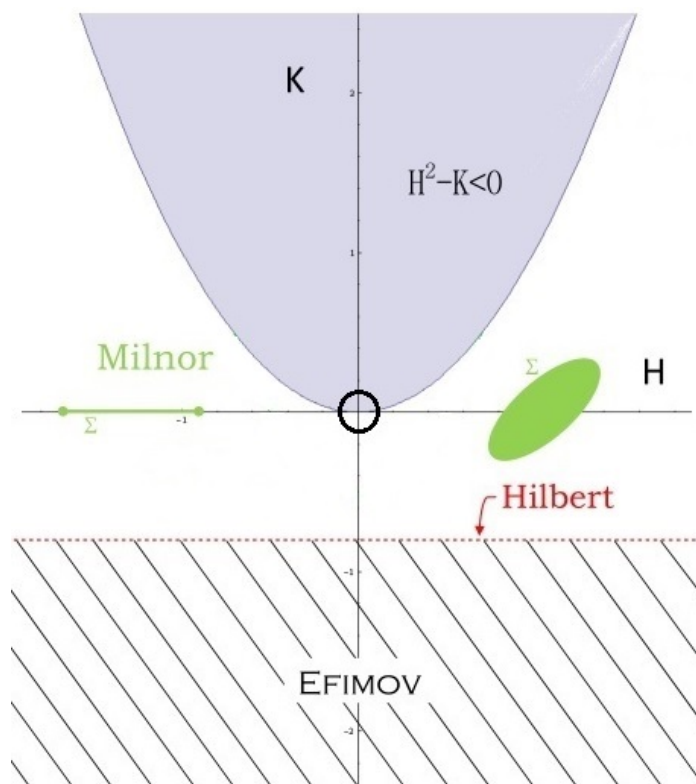


Figura 2.1: La conjetura de Milnor extendería al teorema de Efimov.

Gráficamente, el diagrama de curvaturas de cualquier superficie ha de caer, como es bien sabido, en la región $H^2 \geq K$, ver figura 2.1. Por ejemplo, las superficies con H constante tienen por diagrama de curvaturas una semirrecta vertical y las superficies con K constante corresponden con rectas horizontales fuera de la región $H^2 - K < 0$.

En la figura 2.1 es fácil visualizar los siguientes resultados sobre superficies completas inmersas en \mathbb{R}^3 :

1. Según el teorema de Hilbert, su diagrama de curvaturas no puede estar contenido en una línea paralela al eje de abcisas que esté situada en el semiplano $K < 0$.
2. Según el teorema de Efimov, su diagrama de curvaturas no puede estar, además, totalmente contenido en el semiplano inferior a dicha línea horizontal por debajo del eje de abcisas.

La conjetura de Milnor para $K \leq 0$ afirma que no existe ninguna superficie completa en \mathbb{R}^3 con diagrama de curvaturas en el semiplano $K \leq 0$ que excluya un entorno del origen, salvo que la superficie sea un cilindro llano generalizado. Lo que dice la conjetura de Milnor en el caso $K \geq 0$, es que cualquier superficie completa, inmersa en \mathbb{R}^3 , no llana y que excluya un entorno del origen tiene puntos umbilicales.

Muchos resultados clásicos de la teoría de superficies de \mathbb{R}^3 son consecuencia de la ecuación de Codazzi, la cual sigue siendo cierta en los otros espacios modelo tridimensionales \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 . Este es el caso, por ejemplo, del teorema de Hopf de clasificación de esferas con curvatura media constante, o también del teorema de Liebmann sobre superficies con curvatura constante positiva. Por lo tanto, no resulta sorprendente que diferentes resultados de la teoría de superficies inmersas en \mathbb{R}^3 puedan ser probados en el contexto abstracto de los pares de Codazzi, esto es, un par (I, II) de formas cuadráticas reales definidas sobre una superficie, donde I es una métrica riemanniana y ambas satisfacen, desde un punto de vista abstracto, las ecuaciones de Mainardi-Codazzi de la teoría clásica de superficies.

Los pares de Codazzi aparecen de manera natural en la teoría de subvariedades, ya que la primera y la segunda forma fundamental de cualquier superficie inmersa en un espacio modelo tridimensional es un par de Codazzi. Las definiciones y los elementos básicos sobre pares de Codazzi serán explicados con detalle en la segunda sección de este capítulo.

En la sección tercera probamos una versión débil del teorema clásico de Smyth y Xavier para \mathbb{R}^3 de 1987, ver [60], el cual afirma lo siguiente:

Sea Σ una superficie completa de \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss no positiva. Si el cuadrado de una de sus curvaturas principales está acotada inferiormente por una constante positiva, entonces la superficie es un cilindro generalizado.

Este teorema supone una solución parcial de la conjetura de Milnor en \mathbb{R}^3 anteriormente descrita, en el caso de tener curvatura $K \leq 0$. Ellos lo demuestran usando

resultados que son propios del espacio euclídeo, como el teorema de Sacksteder (1960), ver [58], y el teorema de Pogorelov (1956), ver [55] (el teorema de Pogorelov fue extendido a hipersuperficies completas y llanas por Hartman y Nirenberg en 1959 en su artículo [30]). Nuestra demostración es completamente diferente porque está basada en el teorema 1.2.3 de Hüber y se lleva a cabo para pares de Codazzi. Esto tiene la ventaja de que puede ser usada en otros espacios ambiente y para superficies abstractas.

En particular demostramos que, si consideramos un par de Codazzi (I, II) sobre una superficie abstracta Σ cuyas funciones curvaturas principales estén estrictamente separadas y tal que I es completa y tiene curvatura no positiva, entonces, o bien la métrica I es llana, o bien Σ es homeomorfa a un plano y tiene curvatura total finita. Además, bajo las hipótesis anteriores fuera de un subconjunto compacto C de la superficie, probamos que $\Sigma \setminus \text{int}(C)$ es de tipo parabólico y que Σ tiene topología finita. Concluimos la sección demostrando que cualquier final inmerso en \mathbb{R}^3 , completo y de curvatura de Gauss no positiva no idénticamente nula, tiene área finita si una de sus funciones curvatura principal k_i cumple la desigualdad $k_i^2 \geq \epsilon^2 > 0$, para cierta constante positiva ϵ .

Así pues, dedicamos la cuarta sección a aplicar nuestros resultados a superficies completas inmersas en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y en la esfera \mathbb{S}^3 . En particular, demostramos algunos resultados tipo Efimov, como que no existen inmersiones completas en \mathbb{H}^3 si $K \leq -1$ y una de las funciones curvatura principal está separada de cero. Además, toda inmersión completa que cumpla las condiciones anteriores fuera de un compacto tiene área finita, es parabólica y homeomorfa a una compacta menos una cantidad finita de puntos. Lo mismo ocurre en la esfera \mathbb{S}^3 si K es menor o igual que una constante negativa. También demostramos algunos resultados tipo Milnor, como por ejemplo que no existen inmersiones completas en el hiperbólico con curvaturas principales estrictamente separadas y con curvatura acotada superiormente por una constante negativa. Por último, probaremos que el ínfimo del valor absoluto de la función curvatura media es cero para inmersiones completas en \mathbb{H}^3 y en \mathbb{S}^3 con curvaturas $K \leq -1$ y $K \leq \text{cons} < 0$ respectivamente.

2.2. Preliminares.

Asumimos que Σ es una superficie orientada, de otro modo trabajaríamos con el correspondiente recubridor de dos hojas orientable. Además, consideraremos diferenciabilidad de orden C^∞ .

Definición 2.2.1. Un par fundamental en Σ es un par de formas cuadráticas reales (I, II) definidas sobre la superficie de manera que I es una métrica riemanniana.

Dado $p \in \Sigma$ se define el endomorfismo de Weingarten $A_p : T_p\Sigma \mapsto T_p\Sigma$ como el único que cumple la igualdad

$$II(v, w) = I(A_p(v), w), \quad \forall v, w \in T_p\Sigma. \quad (2.2.1)$$

También se define la curvatura media H , la curvatura extrínseca K y las curvaturas principales k_1 y k_2 como la mitad de la traza, el determinante y los autovalores de A respectivamente. Observamos que, en general, no hay una conexión entre la curvatura extrínseca del par fundamental (I, II) y la curvatura de Gauss $K(I)$ de la métrica riemanniana I .

Claramente, cualquier par fundamental verifica que $H^2 - K \geq 0$ y que $H^2 = K$ si y solo si $k_1 = k_2$.

Se define la tercera forma fundamental III asociada al par (I, II) como

$$III(X, Y) = I(AX, AY), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (2.2.2)$$

Definición 2.2.2. Se dice que las curvaturas principales k_1 y k_2 del par fundamental (I, II) de Σ están estrictamente separadas si existen números reales c_1 y c_2 tales que en Σ se cumple la desigualdad

$$k_1 \leq c_1 < c_2 \leq k_2. \quad (2.2.3)$$

Consideremos Σ una superficie orientable, (I, II) un par fundamental sobre Σ y (u, v) parámetros locales sobre la superficie. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ II &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Dichos parámetros (u, v) se dicen doblemente ortogonales para el par fundamental (I, II) si $F \equiv f \equiv 0$. Es elemental observar que este tipo de coordenadas existen en un entorno de un punto no umbilical de Σ , o bien en el interior del conjunto de sus puntos umbilicales. El conjunto de puntos donde existen parámetros doblemente ortogonales es por tanto denso en la superficie. De esta manera, muchas propiedades obtenidas usando este tipo de coordenadas serán válidas en todos los puntos de la superficie cuando dicha propiedad sea susceptible de ser extendida por continuidad.

Usando este tipo de parámetros (u, v) , las ecuaciones (2.2.4) se expresan como

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + Gdv^2, \\ II &= edu^2 + gdv^2. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

El conjunto $\{\partial_u, \partial_v\}$ constituye una base ortogonal de direcciones principales del plano tangente a la superficie en cada punto, entonces

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{e}{E}, \\ k_2 &= \frac{g}{G}, \end{aligned}$$

con lo cual podemos reescribir II como

$$II = k_1 Edu^2 + k_2 Gdv^2. \quad (2.2.6)$$

A partir de (2.2.5) y (2.2.6), la tercera forma fundamental del par se puede expresar como sigue

$$III = k_1^2 Edu^2 + k_2^2 Gdv^2. \quad (2.2.7)$$

Definición 2.2.3. Sea (I, II) un par fundamental sobre Σ . Se dice que (I, II) es un par de Codazzi si se cumplen las ecuaciones de Mainardi-Codazzi de \mathbb{R}^3 , esto es

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = 0, \quad (2.2.8)$$

para cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de I .

2.3. La ecuación de Codazzi y curvatura no positiva.

En general, si una superficie inmersa en un espacio modelo n -dimensional (semi-riemanniano) tiene un campo de vectores normal unitario paralelo ξ , entonces la primera y la segunda forma fundamental asociada a ξ constituye un par de Codazzi. Muchos otros ejemplos de pares de Codazzi aparecen en [3, 2, 10, 39, 40, 51] y en muchos de los artículos que cada uno cita en ellos. Aunque aplicaremos nuestros resultados sobre pares de Codazzi a superficies en un espacio modelo tridimensional, dichos resultados podrían ser también aplicados en contextos diferentes.

Comenzaremos esta sección probando un resultado abstracto de pares de Codazzi, que es un caso particular de un resultado más general demostrado en 1975 por T. Klotz-Milnor en [42].

Proposición 2.3.1. Sea (I, II) un par de Codazzi sobre una superficie Σ y III su tercera forma fundamental asociada. Sea además $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $ak_1 \neq 1$ y $ak_2 \neq 1$. Consideramos la forma cuadrática

$$\Lambda_a := I - 2aII + a^2III,$$

entonces Λ_a es métrica riemanniana sobre la superficie y su curvatura se calcula como

$$K(\Lambda_a) = \frac{K(I)}{(1 - ak_1)(1 - ak_2)} \quad (2.3.1)$$

Demostración. Fijamos un punto $p_0 \in \Sigma$ y consideramos una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_{p_0}\Sigma$ que diagonaliza al endomorfismo de Weingarten del par (I, II) . Entonces

$$\Lambda_a(e_i, e_j) = (1 - ak_i)^2 \delta_{ij}, \quad (2.3.2)$$

lo que prueba que la forma cuadrática Λ_a es definida positiva y por tanto métrica riemanniana sobre la superficie.

Dados parámetros doblemente ortogonales (u, v) sobre Σ , de (2.3.2) obtenemos que

$$\Lambda_a = (1 - ak_1)^2 Edu^2 + (1 - ak_2)^2 Gdv^2, \quad (2.3.3)$$

es decir que

$$\begin{aligned} E_a &= (1 - ak_1)^2 E, \\ F_a &= 0, \\ G_a &= (1 - ak_2)^2 G, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

son los coeficientes de la primera forma fundamental de la forma cuadrática Λ_a .

Usando la ecuación de Gauss para la curvatura en parámetros ortogonales, ver [14], se tiene

$$K(\Lambda_a) = -\frac{1}{2\sqrt{E_a G_a}} \left(\left(\frac{(E_a)_v}{\sqrt{E_a G_a}} \right)_v + \left(\frac{(G_a)_u}{\sqrt{E_a G_a}} \right)_u \right).$$

Sustituimos (2.3.4) en la fórmula anterior y nos queda

$$K(\Lambda_a) = -\frac{1}{2(1 - ak_1)(1 - ak_2)\sqrt{EG}} \cdot \left[\left(\frac{-2a(k_1)_v E + (1 - ak_1 E_v)}{(1 - ak_2)\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{-2a(k_2)_u G + (1 - ak_2 G_u)}{(1 - ak_1)\sqrt{EG}} \right)_u \right]$$

Usando las ecuaciones de Codazzi en la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}
 K(\Lambda_a) &= -\frac{1}{2(1-ak_1)(1-ak_2)\sqrt{EG}} \cdot \\
 &\quad \left[\left(\frac{-2a\frac{k_2-k_1}{2}\frac{E_v}{E}E + (1-ak_1E_v)}{(1-ak_2)\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{-2a\frac{k_1-k_2}{2}\frac{G_u}{G}G + (1-ak_2G_u)}{(1-ak_1)\sqrt{EG}} \right)_u \right] \\
 &= \frac{1}{(1-ak_1)(1-ak_2)} \left[-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \right] \\
 &= \frac{K(I)}{(1-ak_1)(1-ak_2)}.
 \end{aligned}$$

Acabamos de probar la validez de la fórmula para parámetros doblemente ortogonales. Observamos en la sección anterior que el conjunto de los puntos con parámetros doblemente ortogonales es denso en Σ , por tanto la fórmula es válida en todos los puntos de la superficie por continuidad. \square

El objetivo principal de esta sección es demostrar el siguiente resultado para pares de Codazzi.

Teorema 2.3.1. *Sea (I, II) un par de Codazzi sobre Σ con curvaturas principales estrictamente separadas. Si (Σ, I) es una superficie completa con curvatura de Gauss $K(I) \leq 0$, entonces solo se da una de las siguientes posibilidades:*

- I es llana y Σ es homeomorfa a un plano, a un cilindro, o a un toro.
- I no es llana, Σ es homeomorfa a un plano y

$$\int_{\Sigma} |K(I)| dA_I \leq 2\pi. \tag{2.3.5}$$

Demostración. De la condición (2.2.3), es posible elegir $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que

$$k_1 \leq c_1 < \frac{1}{a} < c_2 \leq k_2,$$

y si tomamos $c_0 := \min\{|1-ac_i| : i = 1, 2\}$, entonces $(1-ak_i)^2 \geq c_0^2$, $i = 1, 2$. Consideramos entonces Λ_a definida como en la proposición 2.3.1, que es métrica riemanniana sobre Σ .

De (2.3.3) se tiene que $\Lambda_a \geq c_0^2 I$, lo que implica que Λ_a es completa por serlo I . Por otro lado, de (2.3.1) se deduce que $K(\Lambda_a) \geq 0$. Tenemos por lo tanto que (Σ, Λ_a) es una superficie riemanniana completa de curvatura no negativa.

Llegados a este punto se pueden distinguir dos casos:

CASO I: $K(\Lambda_a) \equiv 0$.

En este caso, de (2.3.1) también se tiene que I es una métrica llana. Por lo tanto, si denotamos por $\bar{\Sigma}$ el recubridor universal de Σ , por el teorema de Cartan se puede asegurar que $(\bar{\Sigma}, I)$ es isométrico al plano \mathbb{R}^2 . La superficie Σ es por tanto homeomorfa al cociente \mathbb{R}^2/Γ , donde Γ es el grupo discreto de isometrías que actúan propiamente sobre \mathbb{R}^2 , y los únicos casos posibles que son orientables son un plano, un cilindro o un toro llano.

CASO II: $K(\Lambda_a)$ no es idénticamente nula.

En este caso consideramos la estructura conforme inducida por Λ_a sobre la superficie. Como hemos visto que $K_{\Lambda_a} \geq 0$, la parte negativa de la curvatura es cero. Usando el teorema 1.2.4 de Hüber sobre (Σ, Λ_a) , se puede afirmar que Σ es conformemente un plano o una esfera. Si Σ fuese compacta, por el teorema de Gauss-Bonnet, (2.3.3) y (2.3.1) se tiene que

$$4\pi = \int_{\Sigma} K(\Lambda_a) dA_{\Lambda_a} = - \int_{\Sigma} K(I) dA_I = -4\pi,$$

lo cual es una contradicción.

Como Σ no es compacto, entonces debe ser homeomorfo a un plano. Por el teorema 1.2.3 de Hüber, (2.3.3) y (2.3.1) se tiene que

$$\int_{\Sigma} |K(I)| dA_I = \int_{\Sigma} K(\Lambda_a) dA_{\Lambda_a} \leq 2\pi,$$

lo que concluye la prueba. □

Desde 1987 se sabe que toda inmersión isométrica completa en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss no positiva y con una de sus curvaturas principales lejos de cero ha de ser un cilindro generalizado. Este resultado fue demostrado por B. Smyth y F. Xavier en [60].

La prueba de este resultado consiste en considerar una cierta traslación paralela Σ_a , a una distancia adecuada $a > 0$ de la superficie Σ en la dirección del normal, de manera que resulta ser una inmersión con métrica inducida Λ_a completa y con curvatura de Gauss no negativa. En este punto se pueden discernir dos posibilidades:

1. La paralela es llana, con lo que la métrica inducida sobre Σ también lo es por la Proposición 2.3.1 y se trata de un cilindro generalizado por el teorema de Pogorelov, ver [54].
2. La paralela no es llana y por el teorema de Sacksteder, ver [58], Σ_a está embebida y su imagen es, por completitud, el borde de un cuerpo convexo de \mathbb{R}^3 . En primer lugar, la paralela no puede ser compacta, porque de otro modo también lo sería la superficie de partida. En este caso se tendría que Σ sería una superficie compacta de curvatura menor o igual que cero, lo cual es imposible. Si Σ_a no es compacta, es fácil ver que la superficie Σ , que se encuentra a distancia $|a|$ tiene un punto con curvatura positiva, lo que contradice que $K(I) \leq 0$.

En el contexto de las C^2 -inmersiones isométricas en el espacio euclídeo tridimensional, el par formado por la primera y la segunda forma fundamental de la inmersión es de Codazzi. En este contexto, las condiciones del teorema 2.3.1 son equivalentes a las del teorema de Smyth-Xavier, dado que el hecho de tener curvaturas principales estrictamente separadas y que una de ellas esté acotada inferiormente por una constante positiva es lo mismo cuando $K \leq 0$. Sin embargo, en otros ambientes, la métrica I podría no ser llana y, en ese caso, el teorema 2.3.1 proporciona información sobre la integral de la curvatura de la superficie, con lo cual se puede decir que el teorema de Smyth-Xavier, ver [60], es una versión fuerte del teorema 2.3.1.

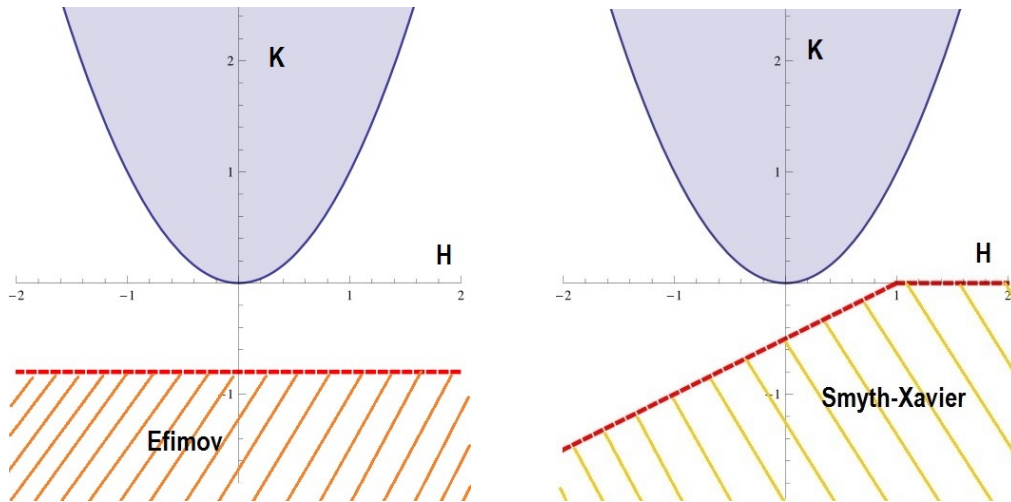


Figura 2.2: Efimov vs. Smyth-Xavier.

En la figura 2.2 se puede observar que los teoremas de Efimov y de Smyth-Xavier no están relacionados. El teorema de Efimov afecta a superficies cuyo diagrama de curvaturas se queda contenido en el semiplano $K \leq \text{const} < 0$, mientras que el teorema

de Smyth-Xavier afecta a superficies cuyo diagrama de curvaturas queda contenido en la intersección del semiplano correspondiente a una recta inclinada en el plano HK que no contiene al origen y la región $K \leq 0$.

De la prueba del teorema 2.3.1 observamos que, si la superficie tuviera borde compacto, también se podría aplicar el teorema 1.2.3 de Hüber para obtener que (Σ, I) tiene curvatura total finita. Lo vemos en el siguiente resultado:

Teorema 2.3.2. *Sea Σ una superficie y $C \subset \Sigma$ un subconjunto compacto. Supongamos que (I, II) es un par de Codazzi sobre $\Sigma \setminus \text{int}(C)$ cuyas curvaturas principales están estrictamente separadas. Si I es una métrica completa con curvatura de Gauss no positiva sobre $\Sigma \setminus \text{int}(C)$, entonces $(\Sigma \setminus C, I)$ tiene curvatura total finita. En particular, $\Sigma \setminus \text{int}(C)$ es de tipo parabólico y Σ tiene topología finita.*

Demostración. Razonando como en el teorema 2.3.1 podemos llegar a que $(\Sigma \setminus \text{int}(C), \Lambda_a)$ es completa y que $K(\Lambda_a) \geq 0$. Usando ahora el teorema 1.2.3 de Hüber, (2.3.1) y (2.3.3) se tiene que

$$\int_{\Sigma \setminus \text{int}(C)} |K(I)| dA_I = \int_{\Sigma \setminus \text{int}(C)} K(\Lambda_a) dA_{\Lambda_a} < \infty,$$

que $\Sigma \setminus \text{int}(C)$ es de tipo parabólico y que tiene topología finita. \square

El siguiente resultado es una aplicación directa del teorema 2.3.2 a inmersiones completas de \mathbb{R}^3 con curvatura no positiva.

Corolario 2.3.1. *Sea Σ una superficie homeomorfa a $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ y $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión completa con curvatura no positiva y no idénticamente nula. Si existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $k_i^2 \geq \text{const} > 0$, entonces el área de $\Psi(\Sigma)$ es finita.*

Una diferencia fundamental entre el corolario anterior y el teorema 1.5.2 probado en la sección 1.5 del capítulo 1 de esta memoria, es que en el corolario no se pide como condición que la curvatura esté uniformemente separada de cero en un entorno de infinito, tan solo que una de las curvaturas principales sí lo esté. Aunque la conclusión respecto a la finitud del área es la misma, no se puede asegurar que el comportamiento asintótico del final también sea el mismo. Por ejemplo, una esfera con una cantidad finita de finales de curvatura negativa en las condiciones del corolario 2.3.1 tiene área finita. Sin embargo, si dichos finales están en las condiciones del teorema 1.5.2, además se puede asegurar que son propiamente inmersos y asintóticos a semirrectas de \mathbb{R}^3 , ver figura 2.3.

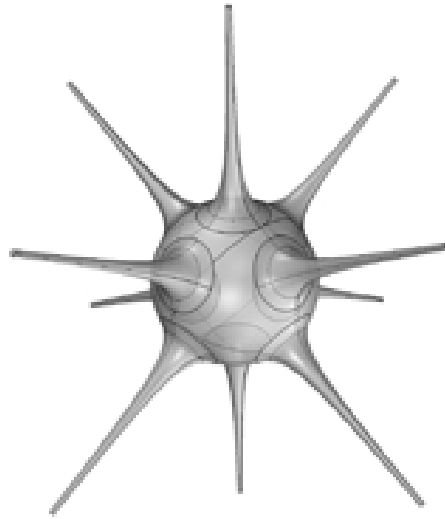


Figura 2.3: Superficie completa con finales de curvatura negativa.

2.4. Superficies completas con $K \leq 0$ en \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 .

Los teoremas para pares de Codazzi de la sección anterior sirven para obtener interesantes resultados tipo Efimov y tipo Milnor en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , de curvatura seccional constante -1 , y en la esfera tridimensional \mathbb{S}^3 , de curvatura seccional constante 1 .

Para empezar veremos algunas consecuencias del teorema 2.3.1. En primer lugar se puede probar que:

Corolario 2.4.1. *Sea $\Psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss $K \leq -1$ y tal que una de sus funciones curvatura principal k_i cumple*

$$k_i^2 \geq \epsilon^2 > 0,$$

para algún valor $\epsilon > 0$. Entonces Ψ no es completa.

Demostración. Por la fórmula de Gauss de la inmersión se tiene que

$$k_1 k_2 = K + 1 \leq 0.$$

Luego, salvo cambios en la orientación, podemos asumir que $0 < \epsilon \leq k_2$ y que las curvaturas principales de Ψ cumplen $k_1 \leq 0 < \epsilon \leq k_2$. Como ya observamos anteriormente, el par (I, II) formado por la primera y segunda forma fundamental de Ψ es un par de Codazzi.

Si suponemos que I es completa, por el teorema 2.3.1 se tiene que Σ es homeomorfa al plano y tiene curvatura total finita. Usando la hipótesis sobre la curvatura, podemos dar una estimación del área

$$A(\Sigma) \leq \int_{\Sigma} |K| dA_I \leq 2\pi,$$

lo que contradice el hecho de que toda superficie riemanniana simplemente conexa, completa y con curvatura de Gauss no positiva tiene área infinita. \square

Imponiendo la separación estricta de las curvaturas principales en la inmersión y razonando como en el corolario anterior, se puede probar el siguiente resultado tipo Efimov sobre \mathbb{H}^3 como consecuencia directa del teorema 2.3.1.

Corolario 2.4.2. *No existen superficies completas inmersas en \mathbb{H}^3 con curvatura de Gauss $K \leq -\epsilon < 0$, para alguna constante $\epsilon > 0$, y con curvaturas principales estrictamente separadas.*

Demostración. Si asumimos que la métrica inducida por la inmersión I es completa, aplicando el teorema 2.3.1 se tiene que Σ es homeomorfa al plano y tiene curvatura total finita. Usando la hipótesis sobre la curvatura se tiene que

$$A(\Sigma) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Sigma} |K| dA_I \leq \frac{2\pi}{\epsilon},$$

lo cual es una contradicción, ya que Σ es una superficie de Hadamard. \square

Es posible dar un resultado análogo al corolario 2.4.1 para la esfera \mathbb{S}^3 , ajustando la hipótesis para la curvatura de la inmersión y con un razonamiento similar al de los corolarios anteriores.

Corolario 2.4.3. *Sea $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ una inmersión con curvatura de Gauss $K \leq \text{const} < 0$ y tal que una de sus funciones curvatura principal k_i cumple*

$$k_i^2 \geq \epsilon^2 > 0,$$

para algún valor $\epsilon > 0$. Entonces Ψ no es completa.

Demostración. Como antes, podemos asumir que $0 < \epsilon \leq k_2$. Entonces, usando la ecuación de Gauss de la inmersión se tiene que

$$k_1 k_2 = K - 1 < -1$$

y las curvaturas principales de Ψ cumplen la desigualdad $k_1 < 0 < \epsilon \leq k_2$. El resultado se sigue aplicando el teorema 2.3.1 y llegamos a contradicción haciendo un razonamiento análogo al del corolario 2.4.1. \square

Observamos que, cambiando la hipótesis $K \leq \text{const} < 0$ por $K \leq 0$ e imponiendo que $\int_{\Sigma} |K| dA_I > 2\pi$ en el corolario 2.4.3, se puede llegar a la misma conclusión.

Si restringimos las condiciones del corolario 2.4.1 al exterior de un subconjunto compacto de la superficie, usando el teorema 2.3.2 se puede probar que:

Corolario 2.4.4. *Sea $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ una inmersión completa y $C \subset \Sigma$ un subconjunto compacto. Supongamos que en $\Sigma \setminus C$ la curvatura de Gauss de Ψ es tal que $K \leq -1$ y que una de sus funciones curvatura principal k_i cumple*

$$k_i^2 \geq \epsilon^2 > 0,$$

para alguna constante positiva ϵ . Entonces Ψ tiene área finita, Σ es parabólica y tiene topología finita.

Demostración. Haciendo el mismo razonamiento sobre las curvaturas principales que en el corolario 2.4.1, se deduce que están estrictamente separadas y que el cero es una de las constantes de separación. Como C es compacto, su área y la curvatura total en C son finitas. Usando este hecho, aplicando el teorema 2.3.2 a $\Sigma \setminus C$ y usando la hipótesis sobre la curvatura en $\Sigma \setminus C$ se puede dar una estimación del área total de la superficie

$$A(\Sigma) = A(\Sigma \setminus C) + A(C) \leq \int_{\Sigma \setminus C} |K| dA_I + \int_C |K| dA_I < \infty,$$

quedando probado que es finita. Por el teorema 1.2.3 de Hüber se puede concluir que la superficie es parabólica y tiene topología finita. \square

Naturalmente, haciendo un ajuste sobre la curvatura de Gauss de la inmersión como en el corolario 2.4.2, se puede obtener un resultado sobre \mathbb{S}^3 que es análogo al corolario 2.4.4.

Corolario 2.4.5. *Sea $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ una inmersión completa y $C \subset \Sigma$ un subconjunto compacto. Supongamos que en $\Sigma \setminus C$ la curvatura de Gauss K de Ψ está acotada superiormente por una constante negativa y que una de sus funciones curvatura principal k_i cumple*

$$k_i^2 \geq \epsilon^2 > 0,$$

para alguna constante positiva ϵ . Entonces Ψ tiene área finita, Σ es de tipo parabólico y tiene topología finita.

Demostración. Haciendo el mismo razonamiento sobre las curvaturas principales que en el corolario 2.4.2, se deduce que están estrictamente separadas y que el cero es una de las constantes de separación. El resultado se sigue aplicando el teorema 2.3.2 a $\Sigma \setminus C$ y haciendo un razonamiento análogo al del corolario 2.4.4. \square

Corolario 2.4.6. *Toda inmersión completa en \mathbb{H}^3 (resp. en \mathbb{S}^3) con curvatura de Gauss $K \leq -1$ (resp. $K \leq \text{const} < 0$) cumple que*

$$\inf_{p \in \Sigma} \{|H(p)|\} = 0.$$

Demostración. Supongamos que existe un valor $\epsilon > 0$ y un punto $p_0 \in \Sigma$ tal que

$$\inf_{p \in \Sigma} \{|H(p)|\} = H(p_0) = \epsilon.$$

Como $k_1 k_2 = K + 1 \leq 0$ (resp. $k_1 k_2 = K - 1 < -1$), salvo cambios en la orientación podemos suponer que $H(p) \geq \epsilon$, para cualquier punto p de la superficie. Eso implica que

$$k_1 \leq 0 < H(p_0) = \epsilon \leq k_2,$$

lo que entra en contradicción con el corolario 2.4.1 (resp. corolario 2.4.3). \square

Como la teoría de pares de Codazzi aparece también en el estudio de superficies inmersas en espacios ambiente distintos de los espacios modelo, usando los teoremas 2.3.1 y 2.3.2 se pueden demostrar resultados tipo Efimov y tipo Milnor análogos a los vistos en esta sección pero en diferentes contextos.

Por ejemplo, se pueden dar resultados de este tipo para superficies espaciales en el espacio lorentziano tridimensional \mathbb{L}^3 , también para superficies espaciales inmersas en los espacios tridimensionales DeSitter y Anti-DeSitter de radio 1, representados como \mathbb{S}_1^3 y \mathbb{H}_1^3 respectivamente, y para superficies inmersas en un espacio de dimensión n (semi-riemanniano) con campo de vectores normal ξ unitario y paralelo.

Además, se pueden usar los corolarios 2.4.4 y 2.4.5 para probar sendos resultados análogos al corolario 2.3.1 en \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 . Es decir, se puede concluir que cualquier final inmerso y completo en \mathbb{H}^3 (resp. en \mathbb{S}^3) tiene área finita y curvatura total finita si la curvatura de Gauss de la inmersión cumple que $K \leq -1$ (resp. $K \leq \text{const} < 0$) y una de sus funciones curvatura principal k_i está uniformemente alejada de cero.

Capítulo 3

Grafos enteros con curvatura no positiva en espacios producto.

3.1. Introducción.

Como ya se decía en el capítulo primero de esta memoria, a finales de los años 60, el propio Efimov generalizó su resultado a un conjunto más amplio que el de las inmersiones completas con curvatura acotada superiormente por una constante negativa. Demostró que su teorema seguía siendo cierto en el contexto de las inmersiones completas de curvatura menor o igual que cero, las cuales cumplen que el valor recíproco de su curvatura tiene variación con estimación lineal, ver [17]. Desde entonces, algunos matemáticos han dirigido sus esfuerzos en ir un poco más allá, tratando de dar extensiones del teorema de Efimov lo más análogas posibles en distintas dimensiones o en distintos ambientes. Es conocido el trabajo publicado en 1987 por Smyth y Xavier, ver [60], donde ofrecen resultados tipo Efimov para hipersuperficies completas con curvatura de Ricci negativa en dimensión alta. Más recientemente, el matemático de origen francés J. M. Schlenker publicó un trabajo en el año 2001, ver [59], en el cual demostró un teorema análogo al clásico teorema de Efimov para C^3 -inmersiones isométricas en el espacio hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 , en la esfera tridimensional \mathbb{S}^3 y el espacio lorentziano de índice 2 Anti-De Sitter \mathbb{H}_1^3 , con hipótesis adicionales sobre el módulo del gradiente de la curvatura de Gauss. En este sentido, no se sabe mucho acerca del comportamiento de la curvatura extrínseca de una superficie completa en espacios producto del tipo $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, ver [2, 20].

Los resultados presentes en este capítulo se distribuyen en dos secciones, en las cuales se hará un estudio completo acerca de inmersiones isométricas de grafos verticales enteros en espacios producto del tipo $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{M}^2 es una superficie

riemanniana con un polo en uno de sus puntos, es decir, un punto tal que la aplicación exponencial en dicho punto es un difeomorfismo del correspondiente plano tangente en \mathbb{M}^2 .

En la sección segunda de este capítulo probaremos que no existen grafos verticales con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ si la curvatura de \mathbb{M}^2 , que denotamos por $K_{\mathbb{M}}$, es no negativa. En nuestros argumentos adaptamos las ideas de Heinz en [32] a nuestro contexto de espacios producto. Heinz demostró que no existen este tipo de grafos enteros cuando el espacio ambiente es \mathbb{R}^3 .

Además, como consecuencia de un resultado de J.A. Gálvez y V. Lozano, ver [23], obtendremos que, si \mathbb{M}^2 es una superficie riemanniana con $K_{\mathbb{M}} \geq 0$ y con un polo, entonces todo grafo entero vertical Σ en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ cumple

$$\inf_{\Sigma} |K_{ext}| = 0,$$

donde K_{ext} denota la curvatura extrínseca de Σ .

Visto lo anterior, la pregunta que surge de manera natural es si podrían verse superficies, bajo las hipótesis de Efimov, que estén isométricamente inmersas en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ cuando $K_{\mathbb{M}} < 0$. En la última sección de este capítulo cerraremos este tema respondiendo positivamente a esta pregunta, ya que construiremos ejemplos de superficies completas con curvatura extrínseca constante y negativa inmersas en ciertos espacios producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Podemos concluir entonces que el teorema de Efimov no es cierto en este contexto, siempre que la curvatura de Gauss de la base \mathbb{M} sea negativa.

3.2. Grafos con curvatura extrínseca negativa.

Sea \mathbb{M}^2 una superficie riemanniana y sean (r, θ) coordenadas geodésicas polares alrededor de un punto $p_0 \in \mathbb{M}^2$, las cuales están bien definidas para $r < R$, para un cierto valor $R > 0$. Llamamos $K_{\mathbb{M}}$ a la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 .

La métrica inducida viene dada por la expresión

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2.$$

Consideremos $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ dotado con la métrica producto y Σ un grafo vertical entero isométricamente inmerso en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Consideremos una parametrización Ψ alrededor del punto p_0 , tomando coordenadas geodésicas polares sobre el disco geodésico

$B(p_0, R)$, centrado en p_0 y de radio R . Localmente se escribe

$$\psi(r, \theta) = \left(\exp_{p_0}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), z(r, \theta) \right),$$

que identificaremos con $(r, \theta, z(r, \theta))$ con el único fin de simplificar la notación.

Denotamos por $\{\partial_r, \partial_\theta\}$ y $\{\overline{\partial}_r, \overline{\partial}_\theta\}$ las derivadas parciales respecto a r y θ en \mathbb{M}^2 y Σ respectivamente, es decir, $\partial_r \equiv \partial/\partial r$ y $\partial_\theta \equiv \partial/\partial \theta$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_r &= \partial_r + z_r \partial_t \\ \overline{\partial}_\theta &= \partial_\theta + z_\theta \partial_t, \end{aligned}$$

con lo que la métrica inducida sobre Σ viene dada por

$$ds^2 = (1 + z_r^2) dr^2 + 2z_r z_\theta dr d\theta + (G + z_\theta^2) d\theta^2$$

y su segunda forma fundamental se escribe

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\overline{\partial}_r} \overline{\partial}_r, N \rangle &= \frac{z_{rr}}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \\ \langle \nabla_{\overline{\partial}_\theta} \overline{\partial}_r, N \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \left(-\frac{z_\theta G_r}{2G} + z_{r\theta} \right) \\ \langle \nabla_{\overline{\partial}_\theta} \overline{\partial}_\theta, N \rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \left(\frac{z_r G_r}{2} - \frac{z_\theta G_\theta}{2} + z_{\theta\theta} \right), \end{aligned}$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ y

$$N = \frac{-1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \left(z_r \partial_r + \frac{z_\theta}{G} \partial_\theta - \partial_t \right)$$

es el vector normal unitario exterior del grafo.

Lema 3.2.1. *En las condiciones anteriores se cumple la igualdad*

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{G} \right)_r d \left(\left(z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta \right) + d \left(z_r d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) - \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} dz_r \right) \\ &= 2\sqrt{G} \left(1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right)^2 K_{ext} (dr \wedge d\theta), \end{aligned}$$

donde K_{ext} denota la curvatura extrínseca de Σ .

Demostración. Consideramos (r, θ) coordenadas polares alrededor de un punto de la variedad \mathbb{M} . Como ya hemos visto antes, los coeficientes de la primera y de la segunda forma fundamental de la inmersión se escriben

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= 1 + z_r^2 \\
\tilde{F} &= z_r z_\theta \\
\tilde{G} &= G + z_\theta^2 \\
\tilde{e} &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} z_{rr} \\
\tilde{f} &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \left(-\frac{z_\theta G_r}{2G} + z_{r\theta} \right) \\
\tilde{g} &= \frac{1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \left(\frac{z_r G_r}{2} - \frac{z_\theta G_\theta}{2G} + z_{\theta\theta} \right)
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Usando (3.2.1) se tiene por un lado que

$$\begin{aligned}
&\left(1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) = \left[z_{rr} \left(\frac{z_r G_r}{2} - \frac{z_\theta G_\theta}{2G} + z_{\theta\theta} \right) - \left(z_{r\theta} - \frac{z_\theta G_r}{2G} \right)^2 \right] \\
&= \left(\left[\frac{z_r z_{rr} G_r}{2} + \frac{z_\theta z_{r\theta} G_r}{G} - \frac{z_\theta^2 G_r^2}{4G^2} - \frac{z_\theta z_{rr} G_\theta}{2G} \right] + [z_{rr} z_{\theta\theta} - z_{r\theta}^2] \right).
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{G} \right)_r d \left(z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} d\theta \right) + d \left(z_r d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) - \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} dz_r \right) \\
&= \left(\sqrt{G} \right)_r \left[2z_r d(z_r) \wedge d\theta + 2 \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) \wedge d\theta \right] + 2dz_r \wedge d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) \\
&= 2 \left[\left(\sqrt{G} \right)_r \left(z_r z_{rr} + \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right)_r \right) + z_{rr} \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right)_\theta - z_{r\theta} \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right)_r \right] dr \wedge d\theta \\
&= \frac{2}{\sqrt{G}} \left(\left[\frac{z_r z_{rr} G_r}{2} + \frac{z_\theta z_{r\theta} G_r}{G} - \frac{z_\theta^2 G_r^2}{4G^2} - \frac{z_\theta z_{rr} G_\theta}{2G} \right] + [z_{rr} z_{\theta\theta} - z_{r\theta}^2] \right) dr \wedge d\theta.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Sustituyendo (3.2.2) en (3.2.3) y teniendo en cuenta que por (3.2.1) se verifica que

$$\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2 = K_{ext} \left(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 \right) = K_{ext} G \left(1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right),$$

se tiene entonces la igualdad que queríamos demostrar. \square

Consideremos la siguiente función definida como

$$f(r) = \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + \frac{z_\theta^2}{G} \right), \quad r > 0,$$

donde B_r denota la bola abierta de centro el origen de \mathbb{R}^2 y de radio r , tal que $r < R$. Identificaremos \mathbb{R}^2 con el plano tangente $T_{p_0}\mathbb{M}^2$ de \mathbb{M}^2 en p_0 de la manera usual.

A lo largo de esta sección trabajaremos con funciones del tipo $\int_{B_r} h(\rho, \theta) d(\rho, \theta)$, donde $h(\rho, \theta)$ está bien definida en $B_r \setminus \{(0, 0)\}$. Sin embargo, todas estas funciones $h(\rho, \theta)$ pueden ser extendidas con continuidad al origen, como ocurre con la función $f(r)$ definida anteriormente. Esto se debe a que

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \sqrt{G}(p) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow p_0} \left(\sqrt{G} \right)_\rho (p) = 1,$$

ver [14], y a que las funciones $|z_\theta/\sqrt{G}|$ y $|z_\rho|$ están acotadas en un entorno del origen.

Lema 3.2.2. *Bajo estas condiciones se tiene que*

$$|B_r| \leq f(r) \leq \sqrt{|B_r|} \left(\int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

donde $|B_r|$ denota el área del disco geodésico $B(p_0, r)$ en \mathbb{M}^2 .

Demostración. Como $z_\theta^2/G \geq 0$ y \sqrt{G} es el elemento de área de la métrica inducida sobre \mathbb{M}^2 , la primera desigualdad es clara. Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\begin{aligned} f(r) &\leq \left(\int_{B_r} \sqrt{G} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{|B_r|} \left(\int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.3. *Bajo las hipótesis anteriores se verifica la igualdad*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z_\theta^2}{\sqrt{G}} \right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G} \right)_r z_r^2 d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G} \\ &\quad - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right)^2 K_{ext}. \end{aligned}$$

Demostración. Integrando ambas partes de la igualdad del lema 3.2.1 en B_r se puede escribir

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right)^2 K_{ext} \\
&= \int_{B_r} \left[\left(\sqrt{G} \right)_\rho d \left(\left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta \right) + d \left(z_\rho d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) - \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} dz_\rho \right) \right] \\
&= \int_{B_r} \left(\left(\sqrt{G} \right)_\rho - 1 \right) d \left(\left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta \right) \\
&+ \int_{B_r} \left[d \left(\left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta \right) + d \left(z_\rho d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) - \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} dz_\rho \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Usando el teorema de Green e integración por partes en el primer sumando del lado derecho de la igualdad anterior, y además teniendo en cuenta que

$$K_{\mathbb{M}} = \frac{-\left(\sqrt{G}\right)_{rr}}{\sqrt{G}},$$

ver [14], se tiene que

$$\begin{aligned}
& \int_{B_r} \left(\left(\sqrt{G} \right)_\rho - 1 \right) d \left(\left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta \right) \\
&= \int_{B_r} d \left(\left(\left(\sqrt{G} \right)_\rho - 1 \right) \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta \right) - \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d \left(\left(\left(\sqrt{G} \right)_\rho - 1 \right) d\theta \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\left(\sqrt{G} \right)_r - 1 \right) \left(z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta - \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) \left(\left(\sqrt{G} \right)_{\rho\rho} \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G} \right)_r z_r^2 d\theta - \int_0^{2\pi} z_r^2 d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\left(\sqrt{G} \right)_r - 1 \right) \frac{z_\theta^2}{G} d\theta \\
&+ \int_{B_r} \left(z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Usando de nuevo el teorema de Green, esta vez en el segundo sumando del lado derecho de la igualdad (3.2.4) se obtiene que

$$\begin{aligned}
& \int_{B_r} \left[d \left(\left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta \right) + d \left(z_\rho d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) - \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} dz_\rho \right) \right] \\
&= \int_0^{2\pi} \left(z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left(z_r d \left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}} \right) - \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} dz_r \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G} + \frac{z_r z_{\theta\theta}}{\sqrt{G}} - \frac{z_r z_\theta G_\theta}{2G\sqrt{G}} - \frac{z_\theta z_{r\theta}}{\sqrt{G}} \right) d\theta.
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Observamos que se verifica

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{z_r z_{\theta\theta}}{\sqrt{G}} - \frac{z_r z_{\theta} G_{\theta}}{2G\sqrt{G}} + \frac{z_{\theta} z_{r\theta}}{\sqrt{G}} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{z_r z_{\theta}}{\sqrt{G}} \right) d\theta = 0, \quad (3.2.7)$$

y que también se cumple la siguiente igualdad

$$2 \int_0^{2\pi} \frac{z_{\theta} z_{r\theta}}{\sqrt{G}} d\theta = \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \frac{z_{\theta}^2}{\sqrt{G}} d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G} \right)_r \frac{z_{\theta}^2}{G} d\theta. \quad (3.2.8)$$

Uniendo (3.2.6), (3.2.7) y (3.2.8) se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{B_r} \left[d \left(\left(z_{\rho}^2 + \frac{z_{\theta}^2}{G} \right) d\theta \right) + d \left(z_{\rho} d \left(\frac{z_{\theta}}{\sqrt{G}} \right) - \frac{z_{\theta}}{\sqrt{G}} dz_{\rho} \right) \right] \\ &= \int_0^{2\pi} z_r^2 d\theta + \int_0^{2\pi} \left(1 - \left(\sqrt{G} \right)_r \right) \frac{z_{\theta}^2}{G} d\theta - \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \frac{z_{\theta}^2}{\sqrt{G}} d\theta. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Para acabar, basta sustituir (3.2.5) y (3.2.9) en (3.2.4) y el resultado se sigue haciendo las correspondientes operaciones. \square

Recordamos que un punto $p_0 \in \mathbb{M}^2$ se dice que es un polo de \mathbb{M}^2 si la aplicación exponencial $exp_{p_0} : T_{p_0}\mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{M}^2$ es un difeomorfismo. En tal caso, la variedad \mathbb{M}^2 es completa.

Observación 3.2.1. Sea \mathbb{M}^2 una superficie riemanniana con un polo en el punto p_0 . Observamos que, en estas condiciones, si la curvatura $K_{\mathbb{M}}$ es no negativa, entonces $\left(\sqrt{G} \right)_r$ es una función no negativa. En efecto, como

$$\left(\sqrt{G} \right)_{rr} = -K_{\mathbb{M}} \sqrt{G} \leq 0,$$

se tiene que \sqrt{G} es cóncava como función de r . Fijado un valor θ_0 arbitrario, si existiera un número $r_0 > 0$ tal que $\left(\sqrt{G} \right)_r (r_0, \theta_0) < 0$ entonces, de la concavidad de $\sqrt{G}(\cdot, \theta_0)$ se tendría que $\sqrt{G}(r, \theta_0) = 0$ para algún $r > r_0$, lo cual es una contradicción.

Llegados a este punto nos encontramos en condiciones de establecer el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.1. *Sea \mathbb{M}^2 una superficie riemanniana con un polo en un punto p_0 . Si la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 es no negativa, entonces no existe ningún grafo vertical entero Σ isométricamente inmerso en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ que tenga curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa.*

Demostración. Asumimos que existe una constante positiva α tal que $K_{ext} \leq -\alpha < 0$ y comprobaremos cómo esto nos conduce a una contradicción.

Si derivamos la función f dos veces, por el Lema 3.2.3 se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} f''(r) &= \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \sqrt{G} \left(1 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r d\theta + \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} \frac{z_\theta^2}{\sqrt{G}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r (1 + z_r^2) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G} \\ &\quad - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}. \end{aligned}$$

Como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$ por hipótesis y $\left(\sqrt{G}\right)_r \geq 0$ como vimos en la observación 3.2.1, entonces

$$\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r (1 + z_r^2) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G} \geq 0.$$

Usando que $K_{ext} \leq -\alpha$ para alguna constante $\alpha > 0$, por el lema 3.2.2 se tiene que

$$f''(r) \geq -2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext} \geq 2\alpha \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2.$$

De la desigualdad anterior es claro que

$$\frac{d}{d\rho} (f'(\rho)^2) = 2f'(\rho)f''(\rho) \geq 2f'(\rho) \frac{2\alpha}{|B_\rho|} f(\rho)^2 \geq f'(\rho) \frac{4\alpha}{|B_r|} f(\rho)^2 = \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho} (f(\rho)^3).$$

Integrando por partes ambos lados de la desigualdad anterior se cumple

$$\int_\epsilon^r \frac{d}{d\rho} (f'(\rho)^2) \geq \int_\epsilon^r \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho} (f(\rho)^3),$$

donde $0 < \epsilon < r$. Luego,

$$f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} (f(r)^3 - f(\epsilon)^3) + f'(\epsilon)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} (f(r)^3 - f(\epsilon)^3).$$

De la definición de la función auxiliar f , es claro que $f(r)$ tiende a cero cuando el radio r decrece hasta desaparecer. Por lo tanto, si se toman límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en la desigualdad anterior se tiene que

$$f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} f(r)^3$$

y por eso

$$-\frac{d}{dr} \left(f(r)^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} f(r)^{-\frac{3}{2}} f'(r) \geq \frac{1}{2} f(r)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{4\alpha}{3|B_r|}} f(r)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha}{3|B_r|}}. \quad (3.2.10)$$

Consideramos ahora R_1 y R_2 sendos números reales tales que $0 < R_1 < R_2$. Por un lado, si integramos el lado izquierdo la desigualdad anterior en el intervalo $[R_1, R_2]$ se tiene que

$$\int_{R_1}^{R_2} -\frac{d}{dr} \left(f(r)^{-\frac{1}{2}} \right) dr = -f(R_2)^{-\frac{1}{2}} + f(R_1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.2.11)$$

Por otro lado y como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, usando el teorema de comparación de volúmenes vemos que el área de la bola geodésica de centro p_0 y radio r en \mathbb{M}^2 está acotada superiormente por el área de la bola euclídea de centro el origen y el mismo radio, es decir, que se cumple la desigualdad

$$|B_r| \leq \pi r^2. \quad (3.2.12)$$

Integrando ambos lados de la desigualdad (3.2.10), por (3.2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} -\frac{d}{dr} \left(f(r)^{-\frac{1}{2}} \right) dr &\geq \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{\frac{\alpha}{3|B_r|}} dr = \sqrt{\frac{\alpha}{3}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\sqrt{|B_r|}} dr \\ &\geq \sqrt{\frac{\alpha}{3}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r\sqrt{\pi}} dr = \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right). \end{aligned}$$

Usando ahora el lema 3.2.2 y la igualdad (3.2.11) en la desigualdad anterior

$$|B_{R_1}|^{-\frac{1}{2}} \geq f(R_1)^{-\frac{1}{2}} \geq f(R_1)^{-\frac{1}{2}} - f(R_2)^{-\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right),$$

con lo cual

$$\sqrt{\frac{3\pi}{\alpha}} |B_{R_1}|^{-\frac{1}{2}} \geq \log \left(\frac{R_2}{R_1} \right),$$

es decir, que podríamos acotar superiormente el valor R_2 en términos del área de la bola geodésica de centro p_0 y radio R_1 , α y R_1 , esto es

$$R_2 \leq R_1 \exp \left(\sqrt{\frac{3\pi}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{|B_{R_1}|}} \right)$$

para todo $0 < R_1 < R_2$, siendo R_2 un valor real arbitrario, lo cual es una contradicción. \square

En otras palabras, podemos decir que el clásico teorema de Efimov se verifica para grafos verticales enteros isométricamente inmersos en el espacio producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ cuando la curvatura de la base es no negativa, es decir, cuando $K_{\mathbb{M}} \geq 0$.

Observamos que si \mathbb{M}^2 fuera compacto, entonces, cualquier grafo vertical entero Σ inmerso en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ tendría al menos un punto con curvatura extrínseca no negativa. Esto ocurriría en aquellos puntos donde la función altura alcanzase extremos locales.

Finalmente, como consecuencia del teorema 3.2.1 y de [23, Theorem 1] se verifica el siguiente:

Corolario 3.2.1. *Sea \mathbb{M}^2 una superficie riemanniana con un polo y curvatura de Gauss no negativa. Si Σ es un grafo vertical entero en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca K_{ext} entonces*

$$\inf_{\Sigma} |K_{ext}| = 0.$$

3.3. Superficies completas con curvatura extrínseca constante y negativa.

En esta sección veremos que no se cumple el teorema de Efimov en el espacio producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ cuando $K_{\mathbb{M}} < 0$. Construiremos ejemplos de superficies de rotación completas, con curvatura extrínseca constante estrictamente negativa e inmersas en una cierta variedad producto del tipo descrito antes.

Consideramos por \mathbb{M}^2 el plano \mathbb{R}^2 con la métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = d\rho^2 + G(\rho)d\theta^2,$$

la cual está bien definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donde (ρ, θ) son las coordenadas polares usuales de \mathbb{R}^2 y la función $G(\rho)$ será definida más adelante. Sea Σ una superficie de rotación en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por

$$\Psi(r, \theta) = \left(k(r) \cos(\theta), k(r) \sin(\theta), z(r) \right) \equiv \left(k(r), \theta, z(r) \right)$$

donde $k(r) > 0$ y $z(r)$ son funciones C^∞ -diferenciables y r denota el parámetro longitud de arco de la curva $\beta(r) = \Psi(r, 0)$. Se puede comprobar fácilmente que en estas condiciones se verifica la igualdad

$$k'(r)^2 + z'(r)^2 = 1. \tag{3.3.1}$$

Denotamos por $\{\overline{\partial}_r, \overline{\partial}_\theta\}$ a una base del tangente a Σ y por $\{\partial_\rho, \partial_t\}$ a una base del tangente de \mathbb{M}^2 . Se cumple

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_r(r, \theta) &= k'(r)\partial_\rho(k(r), \theta) + z'(r)\partial_t(k(r), \theta) \\ \overline{\partial}_\theta(r, \theta) &= \partial_\theta(k(r), \theta).\end{aligned}$$

Así pues, de la igualdad (3.3.1), la métrica inducida sobre nuestra superficie viene dada por

$$ds^2 = dr^2 + G(k(r))d\theta^2,$$

y su segunda forma fundamental tiene la expresión

$$II(r, \theta) = \left(-k''(r)z'(r) + k'(r)z''(r) \right) dr^2 + \left(\frac{z'(r)G_\rho(k(r))}{2} \right) d\theta^2.$$

Las curvaturas principales de Σ se pueden obtener mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -k''(r)z'(r) + k'(r)z''(r) \\ \lambda_2 &= z'(r)\frac{G_\rho(k(r))}{2G(k(r))},\end{aligned}$$

y por tanto la curvatura extrínseca de la superficie es

$$K_{ext} = -\frac{G_\rho(k(r))}{2G(k(r))} z'(r)(k''(r)z'(r) - k'(r)z''(r)). \quad (3.3.2)$$

Derivando la igualdad (3.3.1) se tiene

$$k'(r)k''(r) + z'(r)z''(r) = 0,$$

así que si usamos lo anterior en la igualdad (3.3.2), ésta se convierte en una EDO de segundo orden para k

$$k''(r) = -\frac{2G(k(r))}{G_\rho(k(r))} K_{ext}. \quad (3.3.3)$$

Llegados a este punto, consideramos, por ejemplo, la función $G(\rho) = \rho^4 e^{\rho^4}$ e imponemos que la curvatura extrínseca de Σ valga constantemente -1 .

Bajo estas condiciones, la EDO (3.3.3) se transforma en una nueva ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para k

$$k''(r) = \frac{k(r)}{2(1 + k(r)^4)}, \quad (3.3.4)$$

de la cual podemos asegurar que existe solución.

Sea $k(r)$ una solución de la EDO (3.3.4) que verifica las condiciones iniciales $k(0) = k_0 > 0$, $k'(0) = 0$, donde k_0 es un valor positivo, el cual será determinado más adelante.

Es bien sabido que la solución $k(r)$ del problema de valores iniciales anterior es única en un entorno del origen. Veamos que, de hecho, la solución $k(r)$ está bien definida para cualquier $r \in \mathbb{R}$.

En primer lugar observamos que, de la unicidad del problema de valores iniciales anterior, se tiene que k es una función simétrica de r , esto es, $k(r) = k(-r)$, ya que se puede comprobar que $k(-r)$ también es solución de la ecuación (3.3.4) y satisface las mismas condiciones iniciales. Por lo tanto, para estudiar el comportamiento de $k(r)$ solo trabajaremos con valores $r \geq 0$.

De la ecuación (3.3.4) se deriva la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dr} (k'(r))^2 = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \arctan (k(r)^2) \right),$$

la cual, integrando ambas partes, se convierte en

$$k'(r)^2 = c_0 + \frac{1}{2} \arctan (k(r)^2). \quad (3.3.5)$$

Dado que la función arcotangente es acotada, existe una constante $c_1 > 0$ de manera que $|k'(r)| \leq c_1$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Esto significa que la función $k(r)$ está globalmente definida como queríamos demostrar.

Como $k(0) = k_0 > 0$ y $k'(0) = 0$, si tomamos un valor $k_0 > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $c_0 \in (\frac{\pi}{4} - 1, 0)$. Luego, de (3.3.5), la función k tiene un crecimiento sublineal, es decir que $|k'(r)| < 1$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$.

Volviendo de nuevo a la igualdad (3.3.1) podemos en este punto asegurar que la función $z(r)$ es también una función diferenciable y globalmente definida en todo \mathbb{R} .

Veremos a continuación que $k(r) \geq k(0) = k_0 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$. En tal caso, Σ sería una superficie regular, debido al hecho de que la curva generatriz $\beta(r) = \Psi(r, 0)$ no tocaría en ningún punto al eje de rotación. Con tal propósito, observemos en primer lugar que $k(r) > 0$, para cualquier valor $r > 0$.

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un primer valor $\epsilon > 0$ tal que $k(\epsilon) = 0$. Como $k(r)$ es una función positiva en el intervalo $[0, \epsilon)$, de la ecuación (3.3.4) se obtiene que $k(r)$ es una función convexa en dicho intervalo. Además, $k'(0) = 0$, luego la función k sería creciente en el intervalo $[0, \epsilon)$, con lo cual

$$k(\epsilon) = \lim_{r \rightarrow \epsilon} k(r) \geq k(0) = k_0 > 0,$$

lo que es una contradicción.

Juntando toda la información que hemos obtenido del comportamiento de k , podemos afirmar que en estas condiciones, por (3.3.4), la función $k(r)$ es globalmente convexa en \mathbb{R} y $k'(0) = 0$, entonces $k(r) \geq k(0) = k_0 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, con lo que k es estrictamente creciente en todo \mathbb{R} . Por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow \pm\infty} k(r) = +\infty.$$

En particular, Σ está propiamente inmersa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Nuestra métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no está bien definida en el origen de \mathbb{R}^2 . Como $k(r) \geq k_0 > 0$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$, podemos modificar adecuadamente la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, por ejemplo para $0 \leq \rho < \frac{k_0}{2}$, y por un procedimiento estándar se consigue una métrica completa en \mathbb{M}^2 que está bien definida en el origen y de manera que Σ conserva la misma métrica inducida por nuestra $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de partida. Además, Σ está propiamente inmersa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, entonces Σ es una superficie completa con curvatura extrínseca constante y negativa como queríamos.

Capítulo 4

Sobre el problema generalizado de Weyl para métricas llanas en el espacio hiperbólico tridimensional.

4.1. Introducción.

El matemático alemán Hermann Weyl planteó en 1916 un problema acerca de la realización de métricas en \mathbb{R}^3 . El problema consistía en encontrar una respuesta a la siguiente pregunta: ¿puede una variedad riemanniana de dimensión dos, de curvatura positiva y homeomorfa a una esfera estar isométricamente embebida en el espacio euclídeo tridimensional? La respuesta a este problema fue obtenida por H. Lewy en 1938, ver [46], bajo hipótesis de analiticidad. Pero una solución general y extensiones de este problema para espacios de curvatura constante K_0 se siguen de los teoremas de realización de métricas de Alexandrov, ver [5, Capítulo XII], y de los resultados de Pogorelov [54, Capítulo V]:

- * Alexandrov (1948): Una métrica de curvatura mayor o igual que K_0 (en el sentido de Alexandrov) sobre una variedad homeomorfa a una esfera, es realizable por una superficie convexa cerrada en un espacio de curvatura constante K_0 .
- * Pogorelov (1958): Una superficie convexa con métrica regular en un espacio de curvatura constante K_0 es regular.

En el caso del espacio \mathbb{H}^3 , de curvatura constante -1 , existen superficies convexas que son homeomorfas a cualquier dominio de la esfera con métrica completa de curvatura mayor o igual que -1 . Con el fin de dar una caracterización de la métrica de tales superficies, Alexandrov probó

ALEXANDROV (1948): *Una métrica completa de curvatura mayor o igual que -1 sobre un dominio arbitrario de la esfera es realizable por una superficie convexa y completa en \mathbb{H}^3 .*

En el caso particular de métricas llanas isométricamente inmersas en \mathbb{H}^3 , un resultado clásico debido a los matemáticos rusos Yuri A. Volkov y S. M. Vladimirova, ver [62], establece que los únicos ejemplos regulares y completos de superficies llanas en el espacio hiperbólico son horosferas y cilindros hiperbólicos, ver figura 4.1. Excluyendo dichas superficies, toda superficie llana y completa en \mathbb{H}^3 tiene singularidades.

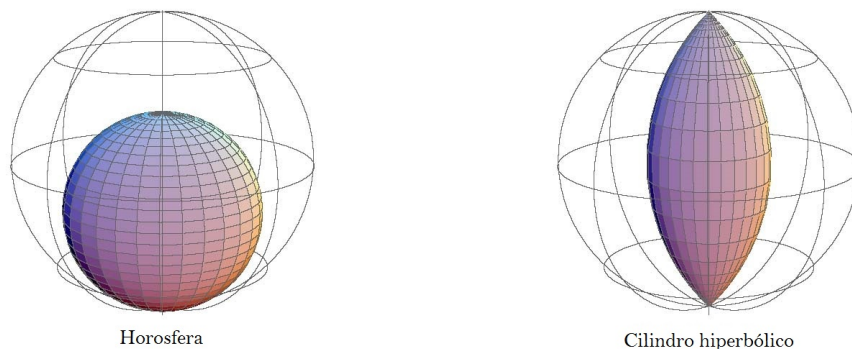


Figura 4.1: Superficies regulares, completas y llanas de \mathbb{H}^3 vistas en el modelo de la bola unidad.

Es bien sabido que cualquiera de estas superficies, salvo entornos de puntos umbilicales, está caracterizada por una función armónica en términos de su primera y segunda forma fundamental. Además, tales superficies, cuya segunda forma fundamental está localmente relacionada con la clásica ecuación de Monge-Ampère de hessiano uno

$$\text{Det}(\nabla^2 f) = 1,$$

tiene una fórmula de representación tipo Weierstrass obtenida por J.A. Gálvez, A. Martínez y F. Milán en [24]. Recientes trabajos acerca del problema de Cauchy para ciertas ecuaciones de tipo Monge-Ampère, ver [1, 4, 28], han motivado el estudio de superficies llanas con singularidades y cómo la naturaleza de dichas singularidades determina la geometría global de la superficie, ver [12, 24, 28, 44, 45, 56].

Aunque el conjunto de puntos singulares en una superficie llana de \mathbb{H}^3 es, generalmente, una colección de curvas, existe un tipo particular de singularidades que

también podría aparecer: las singularidades aisladas alrededor de las cuales la superficie es regular y está embebida. Las superficies llanas, completas y con singularidades aisladas son de especial interés, ya que constituyen los ejemplos de mayor regularidad. Hasta ahora, los únicos embebimientos llanos, completos y con singularidades de este tipo que se conocen son los de tipo rotacional, con una singularidad aislada y un final, y los ejemplos descritos en [12], con dos singularidades y un final, ver figura 4.3. Ambos son ejemplos de superficies llanas con un número finito de singularidades aisladas.

Por otro lado, la clase de las métricas llanas, conformes y con singularidades de tipo cónico sobre una superficie de Riemann ha sido ampliamente estudiado, por ejemplo en [38] y en [61]. Es natural, por lo tanto, el estudio del problema del embebimiento isométrico, conocido como el problema de Weyl generalizado, de tales métricas llanas con singularidades cónicas en \mathbb{H}^3 .

El capítulo está organizado de la siguiente manera:

La sección 4.2 comienza con la noción de superficie llana, completa, embebida en \mathbb{H}^3 y con una cantidad finita de singularidades. Probaremos que todas estas superficies son de tipo finito, es decir, que son homeomorfas a superficies compactas menos una cantidad finita de puntos. También daremos información completa acerca del tipo conforme y del comportamiento asintótico en cada singularidad y en cada final.

La sección 4.3 está dedicada al problema generalizado de Weyl, o de realización de métricas llanas, completas e isométricamente embebidas en \mathbb{H}^3 .

4.2. Superficies llanas completas en \mathbb{H}^3 con singularidades aisladas.

Esta sección trata acerca del estudio de superficies completas con métrica llana, embebidas en el espacio hiperbólico y con una cantidad finita de singularidades aisladas. A lo largo de la misma vamos a obtener información precisa relativa a su topología, al tipo conforme de finales y singularidades y al comportamiento asintótico de la métrica de nuevo en cada final y en cada singularidad.

Sea \mathbb{L}^4 el espacio de Minkowski de dimensión 4, sobre el que consideramos coordenadas usuales (x_0, x_1, x_2, x_3) y el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dado por la forma cuadrática $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. El modelo del hiperboloide del espacio hiperbólico tridimensional \mathbb{H}^3 , es la variedad riemanniana tridimensional simplemente conexa, con curvatura

seccional constante -1 , la cual está realizada por el hiperboloide

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, x \rangle = -1, \langle x, e \rangle < 0\},$$

con la métrica inducida por \mathbb{L}^4 , donde $e = (1, 0, 0, 0)$.

Llamamos \mathbb{N}^3 al cono de luz positivo, esto es,

$$\mathbb{N}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, x \rangle = 0, \langle x, e \rangle < 0\}.$$

Si tomamos la semirrecta $L(v)$ generada por v para todo $v \in \mathbb{N}^3$, entonces la frontera ideal \mathbb{S}_∞^2 de \mathbb{H}^3 puede ser considerado como el cociente de \mathbb{N}^3 bajo esta acción. Luego, la métrica inducida puede estar bien definida salvo un factor y \mathbb{S}_∞^2 hereda una estructura conforme natural como el cociente $\mathbb{N}^3/\mathbb{R}^+$.

El espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 podría ser realizado como

$$\mathbb{R}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, e \rangle = 0\},$$

con la métrica inducida por \mathbb{L}^4 . El modelo de Klein-Beltrami del espacio hiperbólico tridimensional viene dado por la bola unidad abierta \mathbb{B}^3 del euclideo tridimensional, vía el difeomorfismo

$$\mathfrak{K} : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{B}^3, \quad \mathfrak{K}(x) := -\frac{x + \langle x, e \rangle e}{\langle x, e \rangle}. \quad (4.2.1)$$

A modo ilustrativo, la figura 4.2 nos muestra cómo se construye el disco de Klein-Beltrami, el cual representa al plano hiperbólico \mathbb{H}^2 como la bola unidad bidimensional \mathbb{B}^2 , vía el difeomorfismo \mathfrak{K} definido como en (4.2.1).

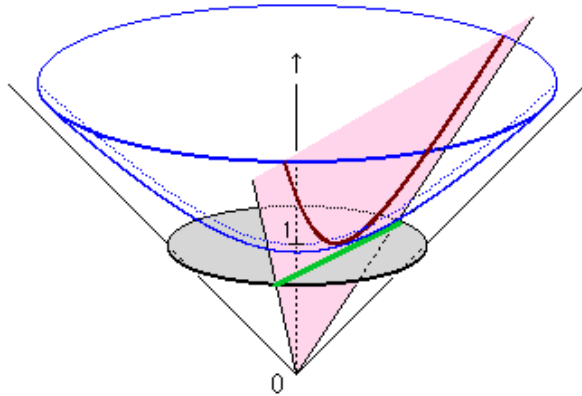


Figura 4.2: El disco de Klein-Beltrami.

Geoméricamente, $\mathfrak{K} = \pi \circ \mathcal{P}_e$, donde $\pi : \mathbb{L}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, es la proyección vertical usual $\pi(x) = x + \langle x, e \rangle e$ y $\mathcal{P}_e : \mathbb{H}^3 \rightarrow \Pi_e$ es la proyección central del origen en el hiperplano $\Pi_e = \{x \in \mathbb{L}^4 : \langle x, e \rangle = -1\}$. Además, \mathfrak{K} se extiende de manera diferenciable a la frontera ideal \mathbb{S}_∞^2 , la cual se puede llevar de manera sobreyectiva al borde de la esfera.

Como las geodésicas del modelo del hiperboloide son intersecciones con planos que contienen al origen, éstas se pueden ver como líneas rectas en \mathbb{B}^3 , esto es, \mathfrak{K} es una aplicación geodésica y por lo tanto conserva la convexidad, ver figura 4.2.

Definición 4.2.1. Sea Σ una superficie diferenciable sin borde, $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ una aplicación continua y $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \Sigma$ un conjunto finito de puntos. Se dice que ψ es una inmersión llana, completa y con singularidades aisladas p_1, \dots, p_n , si ψ es una inmersión llana en $\Sigma \setminus \mathcal{P}$, ψ no es C^1 en los puntos p_1, \dots, p_n , y toda curva divergente en Σ tiene longitud infinita para la métrica (singular) inducida.

La figura 4.3 muestra sendos ejemplos de superficies llanas, completas y embebidas en el modelo de Klein-Beltrami de \mathbb{H}^3 , el primero con un final y una singularidad aislada y el segundo con un final y dos singularidades aisladas. Estos ejemplos se pueden ver ampliamente descritos en [12].

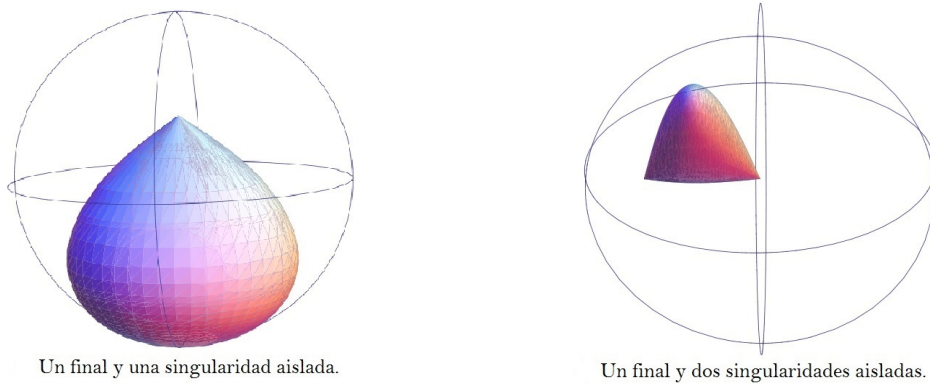


Figura 4.3: Ejemplos de inmersiones llanas de \mathbb{H}^3 con un final y con singularidades aisladas.

4.2.1. Sobre la topología.

El siguiente resultado nos proporciona información completa acerca de la topología de este tipo de superficies:

Proposición 4.2.1. *Sea $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ un embebimiento llano, completo y con singularidades aisladas $p_1, \dots, p_n \in \Sigma$. Entonces, existe una superficie de Riemann compacta $\bar{\Sigma}$ homeomorfa a una esfera y un conjunto finito de puntos $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ tal que Σ es homeomorfo a $\bar{\Sigma} \setminus \mathcal{E}$. Es decir, que la superficie Σ tiene topología finita. A los puntos e_1, \dots, e_m los llamamos los finales de Ψ .*

Demostración. Sea $\mathcal{K} \subset \Sigma$ un disco cerrado que contiene al conjunto $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ en su interior $\text{int}(\mathcal{K})$. Por el teorema 1.2.3 de Hüber, $\Sigma \setminus \text{int}(\mathcal{K})$ es conformemente una superficie de Riemann compacta con borde compacto menos un conjunto finito de puntos. Luego, salvo homeomorfismos, Σ es una superficie de Riemann compacta $\bar{\Sigma}$ menos un conjunto finito de puntos $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Sólo quedaría probar que $\bar{\Sigma}$ es homeomorfo a una esfera. Para ver esto, consideraremos el modelo de Klein-Beltrami de \mathbb{H}^3 , en donde los puntos están representados por puntos de la bola unidad \mathbb{B}^3 bajo la aplicación \mathfrak{K} dada en (4.2.1).

Sin embargo, \mathfrak{K} es una aplicación geodésica y preserva la convexidad. En particular, como las superficies llanas en \mathbb{H}^3 tienen curvatura extrínseca constante igual a 1, pueden ser llevadas de manera sobreyectiva en superficies localmente convexas en $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$. Además, la frontera ideal \mathbb{S}_∞^2 de \mathbb{H}^3 es llevado, vía la aplicación \mathfrak{K} , a la esfera unidad \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . En este momento cabría hacer algunas observaciones:

Observación 4.2.1. Como ψ es un embebimiento, cada final ha de ser regular y asintótico a uno de tipo rotacional, ver [12, 24, 65]. Por lo tanto, ψ se puede extender de manera continua a cada final como un punto en $\mathbb{S}^2 \equiv \partial\mathbb{B}^3$.

Observación 4.2.2. De [28, Theorem 13], alrededor de cualquier singularidad aislada $\psi(\mathfrak{K}(p_i))$, $i = 1, \dots, n$, la superficie es un grafo convexo sobre un plano que pasa a través de la singularidad.

De las observaciones anteriores, $\mathfrak{K} \circ \psi$ puede ser extendida con continuidad a $\bar{\Sigma}$ como una inmersión $\varphi : \bar{\Sigma} \longrightarrow \bar{\mathbb{B}}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Como $\bar{\Sigma}$ es compacto y localmente existe un plano soporte en $\varphi(p)$ para cualquier punto $p \in \bar{\Sigma}$, se tiene de [31] que $\bar{\Sigma}$ es una esfera y que $\varphi(\bar{\Sigma})$ es globalmente convexa en \mathbb{R}^3 . \square

4.2.2. Propiedades métricas.

Nuestro próximo paso consiste en el estudio de las propiedades de la métrica alrededor de cada una de las singularidades y de cada final.

M. Troyanov probó en [61, Prop. 1], que el disco punteado

$$\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\},$$

dotado con la métrica $ds^2 = |z|^{2\beta} |dz|^2$ es isométrico V_θ , esto es, al cono estándar de ángulo completo θ . Los números $k = 2\pi - \theta$, $\beta = \theta/2\pi - 1$ denotan a la curvatura del cono en el vértice y al residuo respectivamente, y junto con el ángulo θ son medidas de la abertura del cono V_θ .

La proposición 2 de [61] nos muestra que, si $\beta > -1$, entonces \mathbb{D}^* es conformemente un entorno del vértice del cono V_θ , de lo que podemos dar una expresión en coordenadas locales de un entorno de una singularidad cónica aislada del siguiente modo

$$ds^2 = |z|^{2\beta} |dz|^2, \quad 0 < |z| \leq 1, \quad \beta > -1. \quad (4.2.2)$$

Nos fijamos ahora en el final de V_θ . Parametrizamos un entorno alrededor suyo en coordenadas locales tomando el exterior de un disco centrado en el vértice. Si pasamos al modelo de la bola unidad de $\bar{\mathbb{C}}$, intuimos que los entornos reducidos del ∞ no han de ser muy diferentes de los entornos reducidos del cero en coordenadas locales.

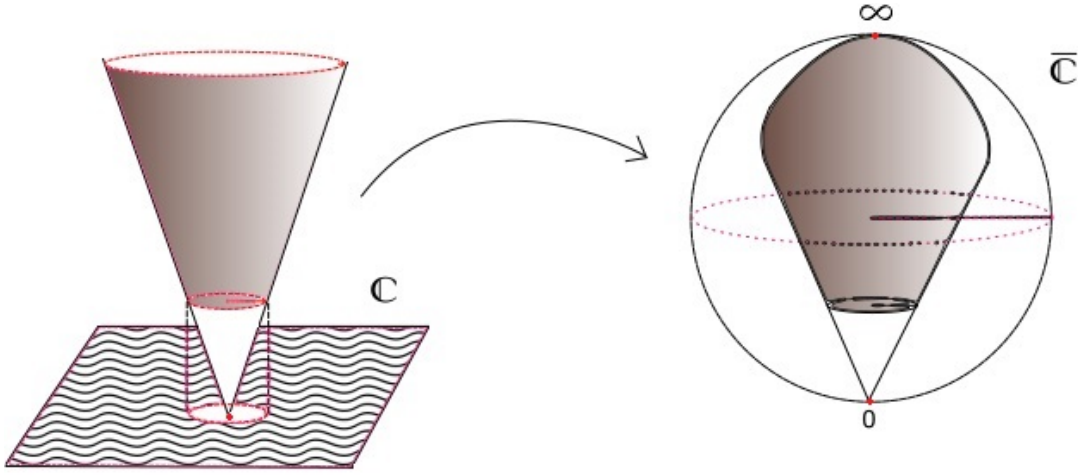


Figura 4.4: Paso al modelo de la bola unidad.

Por tanto, invirtiendo la bola unidad por medio del cambio de variable $w = 1/z$, se tiene que $dz = -w^{-2}dw$. Si sustituimos lo anterior en (4.2.2) nos queda lo siguiente

$$ds^2 = |w|^{-2\beta} |-w^{-2}dw|^2 = |w|^{-2(\beta+2)} |dw|^2,$$

y como $\beta > -1$, entonces $\alpha = -(\beta + 2) < -1$, con lo cual

$$ds^2 = |w|^{2\alpha} |dw|^2, \quad 0 < |w| \leq 1, \quad \alpha < -1. \quad (4.2.3)$$

A la vista de las dos situaciones descritas anteriormente, la pregunta que surge llegados a este punto es la siguiente: ¿qué ocurre en el caso $\alpha = -1$?

Consideramos el disco punteado \mathbb{D}^* dotado con la métrica $ds^2 = |z|^2 |dz|^2$. Sea

$$c : [0, \infty] \longrightarrow (\mathbb{D}^*, ds^2) / c(t) \equiv z(t),$$

una curva en \mathbb{D}^* , la cual podemos suponer decreciente sin pérdida de generalidad, que comienza en un punto $c_0 \in \mathbb{D}^*$ arbitrario y que tiende al origen del disco si $t \rightarrow \infty$, ver figura 4.5. Partiendo de un valor t_0 cualquiera se tiene que:

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|c'(t)\| dt = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{|z'(t)|}{|z(t)|} dt \geq \left| \int_{t_0}^{+\infty} \frac{z'(t)}{z(t)} dt \right| = |\log(+\infty) - \log(t_0)| = +\infty,$$

lo que nos dice que ds^2 es completa en \mathbb{D}^* si $\alpha = -1$.

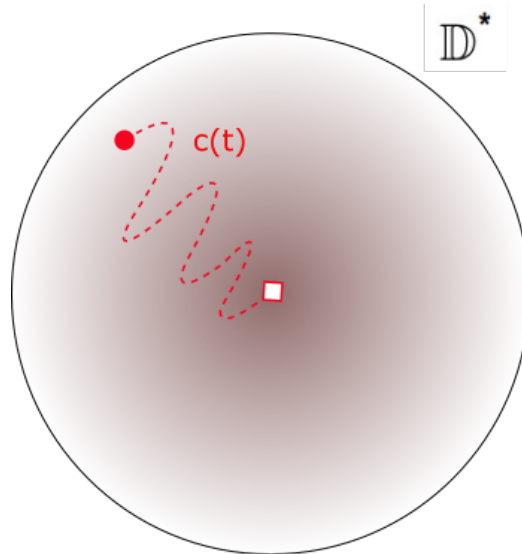


Figura 4.5: La longitud de curvas que tienden al origen de \mathbb{D}^* es infinita.

Por otro lado, consideremos la parametrización Φ del cilindro circular recto C de \mathbb{R}^3 dada por

$$\Phi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v).$$

Es inmediato ver que la métrica sobre C es la métrica llana de \mathbb{R}^2 , luego Φ es isometría local.

Si ahora tomamos coordenadas complejas en \mathbb{R}^2 , $w = u + iv$, entonces la aplicación $w \rightarrow z = e^{iw}$ es conforme de $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ en \mathbb{D}^* y además

$$g_C = du^2 + dv^2 = |dw|^2 = |z|^{-2} |dz|^2,$$

con lo que ya tendríamos respuesta para la pregunta anterior. En resumen, si dotamos a \mathbb{D}^* con la métrica $ds^2 = |z|^{2\alpha} |dz|^2$ tenemos que

1. Si $\alpha > -1$, entonces (\mathbb{D}^*, ds^2) es isométrico a la singularidad aislada de un cono en su vértice.
2. Si $\alpha = -1$, entonces (\mathbb{D}^*, ds^2) es isométrico a cualquiera de los dos finales de un cilindro circular recto de \mathbb{R}^3 centrado en el origen. Basta tomar el cambio de variable $z = e^{iw}$ para tener un final de C , o bien $z = e^{-iw}$ para tener el otro.
3. Si $\alpha < -1$, entonces (\mathbb{D}^*, ds^2) es isométrico al final de un cono con vértice en el origen.

Proposición 4.2.2. *Sea D un disco topológico y $p \in D$ un punto interior suyo. Si g es una métrica llana diferenciable sobre $D \setminus \{p\}$ cuya función distancia asociada puede ser extendida por continuidad a todo el disco D , entonces $D \setminus \{p\}$ es conformemente equivalente a un disco punteado y la métrica g puede ser expresada localmente alrededor de p como*

$$g = |z|^{2\beta} |dz|^2 \quad (0 < |z| \leq 1),$$

donde $\beta > -1$. Es decir, p es una singularidad de tipo cónico con ángulo total $\theta = 2\pi(\beta + 1)$.

Demostración. Se puede suponer que D es un disco cerrado con p un punto interior. Sea $R > 0$ la distancia de p al borde ∂D y $p_0 \in D$ un punto tal que la distancia de p_0 a p es $0 < R_0 < R/2$. Usando la aplicación exponencial en el punto p_0 , es un razonamiento estándar ver que existe un arco continuo $\gamma : [0, R_0] \rightarrow D$ de manera que $\gamma|_{[0, R_0)}$ es un arco geodésico diferenciable con $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma(R_0) = p$.

Sea $\Omega = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}(w) < r\}$ para un cierto $r > 0$ y $\Pi : \Omega \rightarrow D \setminus \{p\}$ una aplicación recubridora tal que $\Pi(it) = \gamma(R_0 - t)$, $\Pi(w + 2\pi) = \Pi(w)$ para cualquier $w \in \Omega$ y Π puede ser extendido por continuidad a todo \mathbb{R} como $\Pi(\mathbb{R}) = \{p\}$.

Consideramos Ω dotado con la métrica llana $\Pi^*(g)$, entonces como Ω es simplemente conexo, por el teorema de Cartan, existe una isometría local $\iota : (\Omega, \Pi^*(g)) \rightarrow (\mathbb{C}, g_0)$, donde g_0 denota la métrica euclídea usual en \mathbb{C} . Además, existe una isometría que preserva la orientación $\zeta : (\mathbb{C}, g_0) \rightarrow (\mathbb{C}, g_0)$ tal que $\iota(w + 2\pi) = \zeta(\iota(w))$ ya que la aplicación $w \rightarrow w + 2\pi$ es una isometría para $(\Omega, \Pi^*(g))$.

La prueba se sigue de la siguiente afirmación: ι puede ser extendida por continuidad a todo \mathbb{R} de manera que $\iota(\mathbb{R})$ es una constante $c_0 \in \mathbb{C}$.

Supongamos en primer lugar que la afirmación es cierta. Como ζ es una isometría que preserva la orientación y c_0 es un punto fijo, ya que $c_0 = \iota(2\pi) = \zeta(\iota(0)) = \zeta(c_0)$, entonces ζ ha de ser la identidad o una rotación con respecto a c_0 .

Así que, achicando el dominio $\Omega^* = \{w \in \Omega : 0 \leq \operatorname{Re}(w) \leq 2\pi\}$ si fuera necesario, se tiene que su imagen por la aplicación ι es un sector circular S_θ con vértice en el punto c_0 , para un cierto ángulo $\theta \neq 0$.

Observamos que la aplicación Π es una isometría de Ω^* bajo la identificación de los puntos it con los $it + 2\pi$, para $t \in \mathbb{R}$, en el conjunto $D \setminus \{p\}$. Luego, usando la isometría local ι , la aplicación conforme $z \rightarrow c_0 + \frac{2\pi}{\theta} z^{\theta/(2\pi)}$, de un entorno punteado del origen en S_θ , nos proporciona un parámetro conforme sobre un entorno punteado de p de manera que la métrica induce se escribe como

$$g = |z|^{\frac{\theta}{\pi}-2} |dz|^2.$$

Visto esto, probemos la afirmación previa. Como γ es una geodésica, $\Pi(it) = \gamma(R_0 - t) = \Pi(it + 2\pi)$, y Π, ι son isometrías locales, se tiene que $\iota(it)$ y $\iota(it + 2\pi)$ son segmentos en \mathbb{C} de longitud finita, con finales en c_0 y c_1 , respectivamente.

Consideremos una sucesión de puntos $\{w_n\}$ contenidos en Ω^* tales que $\{Im(w_n)\} \rightarrow 0$. De la continuidad de Π se tiene que $\{\Pi(w_n)\} \rightarrow p$, es decir, que la distancia de $\Pi(w_n)$ al punto p , $d_g(\Pi(w_n), p)$, tiende a 0.

Como $\gamma(R_0) = p$ y d_g es una función continua en el conjunto D , es claro que la distancia de $\Pi(w_n)$ a $\gamma_{[0, R_0]}$ es menor que $2d_g(\Pi(w_n), p)$, y por lo tanto existe una curva diferenciable en $D \setminus \{p\}$ que une el punto $\Pi(w_n)$ con un punto de la geodésica $\gamma_{[0, R_0]}$ cuya longitud es menor que $2d_g(\Pi(w_n), p)$. Entonces, existe una curva diferenciable en Ω^* que une w_n y la geodésica $\Gamma = \{it : t \in]0, R_0]\}$ o la geodésica $\Gamma + 2\pi$. Por lo tanto, una subsucesión $\{w_m\}$ de $\{w_n\}$ cumple que la distancia de w_m a Γ o a $\Gamma + 2\pi$ es menor que $2d_g(\Pi(w_m), p)$, y así se tiene que $\{\iota(w_m)\}$ tiende a c_0 o a c_1 .

Finalmente, veamos que $c_0 = c_1$. Observamos que $\bar{\Omega}_\varepsilon = \{w \in \Omega \cup \mathbb{R} : d_g(\Pi(w), p) < \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$, es un entorno de \mathbb{R} en $\Omega \cup \mathbb{R}$. Luego, para cualquier entero positivo n se puede elegir una curva en $\bar{\Omega}_{R_0/n} \cap \Omega^*$ que una $iR_0/(2n)$ y $iR_0/(2n) + 2\pi$. Sea w_n un punto de la curva anterior de manera que su distancia a $iR_0/(2n)$ and $iR_0/(2n) + 2\pi$ sean iguales. Como $w_n \in \bar{\Omega}_{R_0/n} \cap \Omega^*$, antes se probó que existe una subsucesión $\{w_m\}$ tal que $\{\iota(w_m)\}$ tiende a c_0 o bien a c_1 . Sin embargo, w_m equidista de $iR_0/(2n)$ y de $iR_0/(2n) + 2\pi$, luego $c_0 = c_1$.

Es por eso que, como $\iota(w + 2\pi) = \zeta(\iota(w))$ obtenemos que, si $\{w_n\}$ es una subsucesión en Ω que converge a un número real, entonces $\{\iota(w_n)\}$ converge a c_0 como queríamos probar. \square

Hemos obtenido que toda singularidad aislada ha de ser cónica. Sin embargo, Ale-

xandrov probó en [5] que para un embebimiento, el ángulo total de una singularidad cónica cumple $\theta \in]0, 2\pi[$. Luego, como consecuencia, se obtiene el siguiente:

Corolario 4.2.1. *Sea $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ un embebimiento llano y completo con un número finito de singularidades aisladas p_1, \dots, p_n . Entonces, alrededor de cada p_i , $i = 1, \dots, n$, la superficie es conforme a un disco punteado y, en un entorno de la singularidad, la métrica puede ser expresada como*

$$|z|^{2\beta_i} |dz|^2 \quad (0 < |z| \leq 1),$$

donde $0 > \beta_i > -1$, es decir, p_i es una singularidad cónica con ángulo total $\theta_i \in]0, 2\pi[$, $i = 1, \dots, n$. Al valor β_i lo llamamos orden de la correspondiente singularidad cónica p_i , $i = 1, \dots, n$.

Gracias a [52, Lemma 9.2] y a [36, Satz 1], se puede deducir el siguiente resultado, que concierne al comportamiento asintótico de la métrica en cada uno de los finales:

Proposición 4.2.3. *Sea $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ un embebimiento llano y completo con un número finito de singularidades aisladas y finales e_1, \dots, e_m . Entonces, alrededor de cada uno de los e_j , $j = 1, \dots, m$, la superficie es conformemente un disco punteado y, en un entorno de cada final, la métrica puede ser escrita como*

$$|z|^{2\alpha_j} |dz|^2 \quad (0 < |z| \leq 1),$$

donde $\alpha_j \leq -1$. El valor α_j se llama el orden del final e_j , $j = 1, \dots, m$ correspondiente.

4.2.3. Una fórmula tipo Gauss-Bonnet y algunas consecuencias.

En la sección anterior hemos obtenido el tipo conforme de un embebimiento completo y llano. Adaptando las ideas de [38, Theorem 2.8] y usando los resultados de [21], se puede obtener la siguiente fórmula de tipo Gauss-Bonnet:

Proposición 4.2.4 (Gauss-Bonnet). *Sea $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ un embebimiento llano y completo con un número finito de singularidades aisladas p_1, \dots, p_m y finales e_1, \dots, e_m con órdenes β_1, \dots, β_n y $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ respectivamente. Entonces $\Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ es conformemente una esfera menos $n + m$ puntos y se satisface la siguiente relación,*

$$\sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{j=1}^m \alpha_j = -2.$$

Demostración. Haremos la prueba en el caso en que Σ tenga una única singularidad aislada (resp. un único final). Denotaremos a dicho punto por p y por β a su orden.

Dividimos la superficie Σ en dos piezas Σ_1 y Σ_2 , donde el par $(\Sigma_2 \setminus \{p\}, g)$ (resp. el par (Σ_2, g)) es isométrico a

$$(\mathbb{D}^*, |z|^{2\beta} |dz|^2)$$

por el corolario 4.2.1 (resp. por la proposición 4.2.3). Para cada $r \in]0, 1[$, consideramos el conjunto $A_r = \{r < |z| < 1\}$ contenido en Σ_2 , ver figura 4.6.

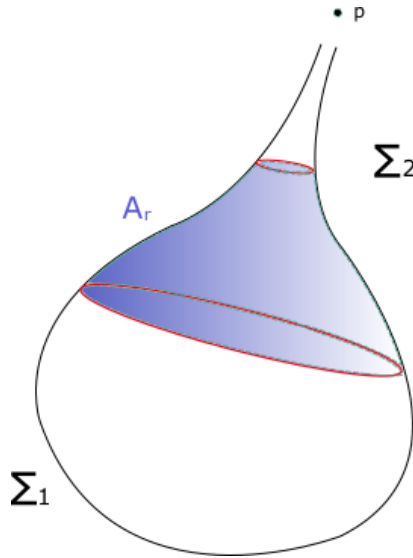


Figura 4.6: A_r tiende a cubrir todo Σ_2 cuando $r \rightarrow 0$.

Como A_r es un anillo y Σ_1 no es más que la superficie Σ a la que se le ha extraído un disco, por la fórmula de Gauss-Bonnet para superficies compactas con borde y la proposición 4.2.1 se tiene que

$$0 = \chi(A_r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma_1} k_g ds - \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} k_g ds,$$

$$1 = \chi(\Sigma_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma_1} k_g ds,$$

con lo cual

$$1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} k_g ds, \quad (4.2.4)$$

donde k_g denota la curvatura geodésica. Un cálculo en $|z| = r$ nos dice que

$$k_g ds = \frac{1}{r} |dz| + \beta \frac{\partial}{\partial r} \log(r) |dz| = \frac{1}{r} (1 + \beta) |dz|.$$

Si sustituimos lo anterior en (4.2.4), nos queda la igualdad $2 + \beta = 0$, como queríamos probar. La fórmula general para una cantidad finita de finales y singularidades aisladas se obtiene a partir de los resultados de Robert Finn en [21]. \square

Algunas consecuencias inmediatas de esta fórmula son las siguientes:

Corolario 4.2.2. *Bajo las hipótesis de la proposición 4.2.4, el orden α de cada final verifica que $-2 \leq \alpha \leq -1$.*

Como una inmersión llana y completa sin singularidades ha de ser un cilindro hiperbólico o una horosfera, se tiene pues que:

Corolario 4.2.3. *Sea $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ un embebimiento llano y completo con un número finito de singularidades aisladas. Entonces, $\psi(\Sigma)$ es un cilindro hiperbólico o ψ tiene, a lo sumo, un final.*

Observamos que, si Σ es una superficie compacta, entonces el número de singularidades aisladas al menos es tres. Este hecho se puede deducir de la proposición 4.2.4, aunque ya era conocido por la clasificación intrínseca de las métricas llanas en la esfera con singularidades cónicas, ver [61].

4.3. Clasificación intrínseca de esferas euclídeas completas y con picos.

La clasificación intrínseca de las métricas llanas y completas con un número finito de singularidades de tipo cónico sobre una superficie Σ se sigue de varios trabajos de Alfred Hüber, ver [35, 36, 37], R. Finn [21], M. Troyanov [61], y D. Hulin-M. Troyanov [38].

De hecho, gracias al trabajo de M. Troyanov y A. Hüber, estas superficies tienen una compactificación natural. Sea (Σ, g) una superficie riemanniana completa en el euclídeo con un conjunto finito $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de singularidades de tipo cónico. Entonces $(\Sigma \setminus \mathcal{S}, g)$ es isométrico a la parte regular de una superficie riemanniana compacta $(\bar{\Sigma}, \bar{g})$ con una cantidad finita de puntos singulares $p_1, \dots, p_{n+m} \in \bar{\Sigma}$. Además, cada punto singular admite un entorno isométrico al disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dotado con la métrica

$$ds^2 := |z|^{2\beta_i} |dz|^2,$$

donde $\beta_i > -1$ si $i = 1, \dots, n$ y $\beta_i \leq -1$ si $i = n+1, \dots, n+m$.

Con el fin de unificar esta nomenclatura, diremos que p_i es una singularidad euclídea de \bar{g} de orden β_i , $i = 1, \dots, n+m$. Además, de los resultados de [21], se ha de cumplir la siguiente fórmula de tipo Gauss-Bonnet:

$$\chi(\bar{\Sigma}) + \sum_{i=1}^{n+m} \beta_i = 0, \quad (4.3.1)$$

donde $\chi(\bar{\Sigma})$ denota la característica de Euler de $\bar{\Sigma}$.

Recordamos que, como vimos en la sección 4.2.2, en un entorno de una singularidad euclídea de orden β se tiene la misma geometría que alrededor de:

1. El vértice de un cono estándar euclídeo de ángulo total $2\pi(\beta + 1)$, si $\beta > -1$.
2. El final de un cono estándar euclídeo de ángulo total $-2\pi(\beta + 1)$, si $\beta < -1$.
3. El final de un cilindro estándar euclídeo si $\beta = -1$.

La condición (4.3.1) también es suficiente para la existencia de métricas llanas con un número finito de puntos singulares euclídeos. De hecho, de [61, Section 5] y de [38, Theorem 7.1], se obtiene el siguiente resultado de clasificación:

Proposición 4.3.1 (Trojanov, Hulin). *Sea $\bar{\Sigma}$ una superficie compacta, $p_1, \dots, p_{n+m} \in \bar{\Sigma}$, $\beta_1, \dots, \beta_{n+m} \in \mathbb{R}$, $\beta_i > -1$ si $i = 1, \dots, n$ y $\beta_i \leq -1$ si $i = n+1, \dots, n+m$. Supongamos que*

$$\chi(\bar{\Sigma}) + \sum_{i=1}^{n+m} \beta_i = 0,$$

entonces, para cada estructura conforme sobre $\bar{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_{n+m}\}$ existe una métrica llana con puntos singulares euclídeos p_1, \dots, p_{n+m} de órdenes correspondientes $\beta_1, \dots, \beta_{n+m}$. Tal métrica es única, salvo homotecias.

El problema es determinar si estas métricas llanas y completas con singularidades de tipo cónico pueden ser isométricamente realizadas en algún espacio ambiente. En esta sección veremos cómo resolver este problema cuando $\bar{\Sigma}$ es una esfera.

Empezamos con la siguiente definición:

Definición 4.3.1. Una esfera euclídea completa Σ con m finales en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 es el borde de un conjunto convexo de \mathbb{H}^3 con m finales tales que, con respecto a su geometría intrínseca, es regular en todos sus puntos salvo en un conjunto finito de puntos $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \Sigma$, es completa y tiene curvatura nula.

De las proposiciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3, una esfera euclídea completa con m finales también es un embebimiento llano en \mathbb{H}^3 :

$$\psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+m}\} \longrightarrow \mathbb{H}^3$$

con una cantidad finita de singularidades de tipo cónico en el conjunto de puntos $\{p_1, \dots, p_n\}$ y con finales en $\{p_{n+1}, \dots, p_{n+m}\}$.

Usando, además, la proposición 4.2.4 y sus consecuencias, recordamos que se cumple la siguiente afirmación:

- (A) Las singularidades de una esfera euclídea completa y con finales en \mathbb{H}^3 son de tipo cónico, con ángulo total en el intervalo $]0, 2\pi[$.
- (B) Toda esfera euclídea con picos y sin finales es compacta y tiene, al menos, tres singularidades.
- (C) Toda esfera euclídea con finales, completa y no compacta tiene solo un final.
- (D) Una esfera euclídea completa, con singularidades y con dos finales en \mathbb{H}^3 ha de ser un cilindro hiperbólico.

En el caso de una única singularidad, existen esferas euclídeas completas con singularidades y finales, ver figura 4.3(a). Además, usando el principio de reflexión de Alexandrov, se puede deducir que cualquier esfera euclídea completa con finales y con una única singularidad ha de ser de tipo rotacional. En efecto, existe exactamente una familia 1-paramétrica de esferas de rotación, euclídeas, completas, con finales y singularidades.

También existen ejemplos de esferas euclídeas completas con finales y con exactamente dos singularidades, ver figura 4.3(b). Un resultado de clasificación para esta familia de superficies puede verse en [12].

En el siguiente resultado probamos la existencia de esferas euclídeas completas con singularidades y finales si el número de singularidades aisladas es mayor que 2.

Teorema 4.3.1 (Caso compacto). *Sea \mathcal{C} una estructura conforme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, $n \geq 3$, y β_1, \dots, β_n números reales que cumplen $0 > \beta_i > -1$, $i = 1, \dots, n$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una esfera euclídea en \mathbb{H}^3 con n singularidades de tipo cónico de ángulo total $2\pi(\beta_1 + 1), \dots, 2\pi(\beta_n + 1)$ respectivamente, y tal que \mathcal{C} es la estructura conforme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ para su métrica intrínseca, es que se cumpla la igualdad*

$$2 + \sum_{i=1}^n \beta_i = 0. \tag{4.3.2}$$

Demostración. De la proposición 4.3.1 y de los comentarios al principio de esta sección, (4.3.2) es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una métrica llana sobre \mathbb{S}^2 con singularidades cónicas de órdenes β_1, \dots, β_n en los puntos p_1, \dots, p_n , respectivamente.

Además, las proposiciones 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 nos dicen que la métrica intrínseca de cualquier esfera euclídea con singularidades es isométrica a una de las métricas llanas de Troyanov con singularidades cónicas en la esfera. Así pues, para acabar la demostración del teorema basta probar que todas estas métricas pueden ser isométricamente embebidas en \mathbb{H}^3 como esfera euclídeas con singularidades.

Para ver esto, usamos en primer lugar la siguiente solución al problema generalizado de Weyl para embebimientos, debida a Alexandrov:

Una métrica de curvatura mayor o igual que -1 , en el sentido de Alexandrov, sobre una variedad bidimensional homeomorfa a una esfera es realizable por una superficie convexa cerrada en \mathbb{H}^3 . Recíprocamente, una superficie convexa y compacta en \mathbb{H}^3 es una variedad bidimensional con curvatura mayor o igual que -1 con respecto a su geometría intrínseca.

En resumen, si tomamos una métrica llana g en \mathbb{S}^2 con singularidades cónicas p_1, \dots, p_n , cuyos ángulos totales se encuentran todos en el intervalo $]0, 2\pi[$, entonces existe una superficie compacta y convexa Σ en \mathbb{H}^3 , con algunas singularidades, la cual es isométrica a (\mathbb{S}^2, g) . Sin embargo, la métrica g es regular en todos sus puntos salvo en p_1, \dots, p_n . Por el teorema de regularidad de Pogorelov, ver [54, Chapter V], se tiene que la superficie Σ es convexa y regular excepto en n puntos $q_1, \dots, q_n \in \Sigma$. Es claro que, en la parte regular de Σ , la geometría intrínseca es llana y que Σ es una esfera euclídea con finales en \mathbb{H}^3 , lo que finaliza la prueba del teorema. \square

Teorema 4.3.2 (No compacto). *Sea \mathcal{C} una estructura conforme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$, $n \geq 1$, y $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ números reales que verifican $0 > \beta_i > -1$, $i = 1, \dots, n$ y $-2 < \beta_{n+1} \leq -1$. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una esfera euclídea completa en \mathbb{H}^3 , con n singularidades cónicas de ángulo total $2\pi(\beta_1 + 1), \dots, 2\pi(\beta_n + 1)$, respectivamente, un final de orden β_{n+1} y tal que \mathcal{C} es la estructura conforme de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ para su métrica intrínseca, es que*

$$2 + \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 0. \quad (4.3.3)$$

La prueba para el caso no compacto es análoga a la del teorema 4.3.1, usando la siguiente versión, aún más general, de la solución al problema generalizado de Weyl para embebimientos probada también por Alexandrov, ver [5, Chapter XII] para más detalles:

Una métrica completa de curvatura ≥ -1 , en el sentido de Alexandrov, sobre un dominio arbitrario de una esfera es realizable por una superficie completa, convexa y cerrada en \mathbb{H}^3 . Recíprocamente, una superficie completa y convexa en \mathbb{H}^3 es una variedad bidimensional de curvatura ≥ -1 con respecto a su métrica intrínseca.

Capítulo 5

Abstract and conclusions.

In 1827, C. F. Gauss published his book «Disquisitiones generales circa superficies curvas», see [16], precursor to Differential Geometry, in which important concepts such as spherical Gauss map, Gaussian curvature, total curvature were introduced and also the basic equations allowing its interpretation and study. This curvature idea did not take time to be considered as the most natural invariant associated to a surface and its study has guided the Differential Geometry development from many points of view.

When the curvature is non-negative, previous investigations allowed very early the knowledge of fundamental questions of its extrinsic geometry as well as its intrinsic geometry. For instance, nowadays it is known that:

- * A complete surface of non-negative curvature in \mathbb{R}^3 is either the boundary of a convex body or a generalized cylinder in \mathbb{R}^3 .
- * Every metric of positive curvature on a sphere is uniquely realized as a metric on a convex surface in \mathbb{R}^3 , up to isometries of the ambient space.

The main problems of the theory of non-positive curved surfaces are analogue to those from the convex case and, basically, they are determined by the investigation of its intrinsic and extrinsic geometry. However, in this field, in contrast to convex surfaces, results remain, in some aspects, far away to be totally solved. The fundamental purpose of this memory is to study the global geometric behaviour of non-positive curved surfaces and the problem about realization of metrics of non-positive curvature.

From a historic point of view, the study of surfaces of non-positive curved surfaces has been linked to the development of non-Euclidean Geometry. In the decade from 1830 to 1840, Minding, see [47, 48], found certain helicoidal surfaces of constant

negative curvature which were later investigated by Dini in 1865, see [13]. Minding achieved to integrate by quadrature the differential equation for the meridian of a surface of revolution of constant negative curvature. He essentially demonstrated that this kind of surfaces is divided into three types, two of them often known as Minding Bobbing and Minding Top, see Figure 5.1, and a third one such that, up to a similarity, consists of a unique surface: the pseudosphere generated by the tractrix, see Figure 5.2, which was later studied in detail by Beltrami in his paper in 1872, see [9].

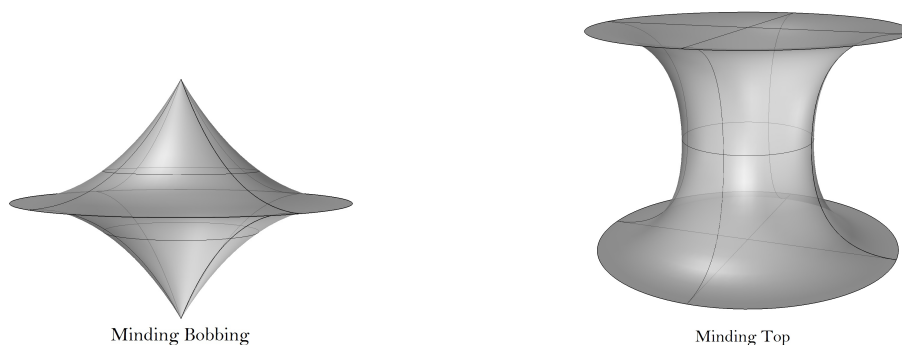


Figura 5.1: Minding's examples of surfaces of constant negative curvature.

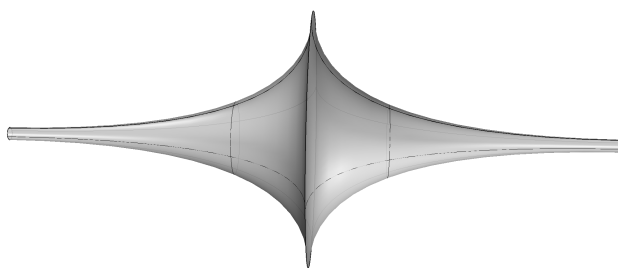


Figura 5.2: The pseudosphere.

Minding also found in 1840 that there exists some relations between edges and angles of geodesic triangles into surfaces of constant negative curvature, similar to those in spherical trigonometry. The fact that these formulae were equivalent to the trigonometrical relations in the hyperbolic plane, also called Lobachevskii's plane, went

unnoticed to mathematicians from that period and some historians thought, that Minding was not really interested in connecting his area of study to non-Euclidean Geometry, but his works were linked to Lobachevskii's ones just by accident. In this connection consult Norden (1956, see [49]) and Galchenkova, Lumiste, Ozhigova and Pogrebysski (1970, see [22]).

In 1868, more than a quarter of a century after the passing of Lobachevskii, Beltrami, see [8], by using Minding's results, proved that surfaces with negative constant curvature into the Euclidean 3-space locally have the same geometry as the hyperbolic plane. Obviously, among other things, Beltrami had already perceived the global difficulties of the problem and the matter of interpreting the whole hyperbolic plane as a surface of constant negative curvature in \mathbb{R}^3 remained still unsolved.

Hilbert was in 1901, the first one who dealt with the problem of realization of the hyperbolic plane into \mathbb{R}^3 and who proved his classic theorem one year later, see [34, 33]:

HILBERT'S THEOREM: *The hyperbolic plane cannot be isometrically immersed into \mathbb{R}^3 .*

In other words, if we realize that every simply connected complete surface of constant negative curvature is isometric to a hyperbolic plane, it is not possible to extend a regular surface of constant negative curvature without the appearance of singularities.

Hilbert's work attracted the attention of a lot of mathematicians, who researched in this direction and achieved interesting results about it. The next step in this sense, conjectured by Cohn Vossen, would be to extend this result to surfaces of non-constant negative curvature, bounded from above by a negative constant. The final solution to this problem, known as the Hilbert-Cohn Vossen problem, was found by Efimov in 1964, see [18, 41]:

EFIMOV'S THEOREM: *There are no complete C^2 -immersed surfaces in \mathbb{R}^3 of curvature bounded from above by a negative constant.*

Over the next few years, Efimov himself extended his result in two different directions: the first one was to weaken the conditions about curvature, that is, surfaces on which the reciprocal value of the curvature K has variation with a linear estimate are now considered, see [17], that is to say

$$\left| \frac{1}{\sqrt{-K(p)}} - \frac{1}{\sqrt{-K(q)}} \right| \leq \epsilon_1 d(p, q) + \epsilon_2, \quad ,$$

for every two points p and q of the surface. The second direction was to allow a certain boundary on the surface, but assuming that curvature is negative and constant,

see [19]. In this direction, Vorobéva extended Efimov's result when the boundary is a geodesic with certain additional conditions about its normal curvature, see [63] (for further information consult [6] and [11]). Another Efimov-type results in higher dimensions can be found in [60] as well.

Despite of Efimov's results, another important different questions suggested by Hilbert's Theorem remain still unsolved. The conjecture established by John Milnor in 1966 highlights for its interest, see [43]:

MILNOR'S CONJECTURE. Let Σ be a complete surface with no umbilical points, C^2 -immersed in \mathbb{R}^3 and such that the sum of the squares of the principal curvatures of Σ is bounded from below by a positive constant. Then, either Σ is a flat surface or its curvature necessarily changes sign.

For instance, in the case of a non-flat complete surface with non-positive Gaussian curvature, Milnor's Conjecture would imply the existence of points on which both principal curvatures simultaneously tend to zero. If Milnor's Conjecture were true, it would generalize Efimov's Theorem, which assures only the existence of points on which the product of both principal curvatures tends to zero.

It is worth mentioning, at this respect, the following partial solution to Milnor's Conjecture obtained by Smyth and Xavier in 1987, see [60]:

SMYTH-XAVIER'S THEOREM: If one principal curvature of a complete surface of \mathbb{R}^3 , with non-positive Gaussian curvature, is far from zero, then the surface is a generalized cylinder.

In particular, generalized cylinders are the only complete surfaces immersed in \mathbb{R}^3 with non-positive Gauss curvature and with mean curvature uniformly bounded far from zero.

In this line, it is worth mentioning that, in spite of knowing some partial results as the obtained one by Schlenker, the study of a result analogous one to Efimov's theorem in non-Euclidean spaces of constant curvature is, until today, an unsolved problem. All these observations have motivated to pose the following goals in this memory:

- (A) To study, from a topological and geometric point of view, complete surfaces of \mathbb{R}^3 whose Gaussian curvature is less than a negative constant out of a compact set.
- (B) To obtain Efimov and Milnor type results in non-Euclidean ambient spaces.

- (C) To study the problem of realization of flat metrics with conical singularities on a sphere in \mathbb{H}^3 .

So, we will extend all along the chapter 1 those results obtained by Efimov in [18, 17] to complete surfaces of \mathbb{R}^3 with curvature bounded from above by a negative constant out of a compact set. We start by doing a reminder of the principal geometric objects associated to an immersion and its Gauss map. The third fundamental form III , that is to say, the induced metric by Gauss map whenever it is a local diffeomorphism, turns out to be a fundamental tool in the whole study before the proof of the main result of this chapter.

Efimov proved in [17] that if a complete immersed surface S in \mathbb{R}^3 of negative curvature satisfies that the reciprocal value of curvature has variation with linear estimate, then a certain property of convexity at infinite associated with the spherical image of the above mentioned surface holds, that is at points of the metric completion of (S, III) . We observe that the above mentioned property of convexity holds not only under completeness conditions, but it also holds if we assume completeness out of a compact set. From this fact, we are able to prove that there exists a compact subset $C \subseteq S$ such that any point out of C can be joined to the boundary of C by means of a minimizing geodesic curve of length less than π for the distance associated to the third fundamental form.

By using the previous study on the spherical image of S and some Hüber's classic results, we can prove the next theorem:

If S is a surface with compact boundary ∂S and $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a complete C^2 -immersion with Gauss curvature $K < 0$ such that the reciprocal value of curvature has variation with linear estimate, then the immersion has finite total curvature. In particular, S is parabolic and has finite topology, that is, S is homeomorphic to a compact surface with a finite set of points removed.

As a consequence, we will see that the previous result still holds if we consider a complete C^2 -immersion in \mathbb{R}^3 of a surface without boundary that satisfies the assumptions of the theorem out of a compact subset. With this, under the conditions on the curvature of the main theorem of this section, we have been able to obtain global topologic information of the immersion. If we change the above mentioned hypotheses on K to those of Efimov's classic theorem, we can obtain not only global topologic information, but also we can give information concerning the asymptotic behavior of ends:

Let $\Psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a complete C^2 -immersed surface with Gauss curvature $K \leq -\epsilon < 0$ out of a compact subset $C \subseteq \Sigma$. Then Σ has finite

topology, Ψ is properly immersed and has finite area for the induced metric. Moreover, each end of the surface is asymptotic to a half-line of \mathbb{R}^3 .

We observe that, under the previous hypotheses and using a Hüber's classic theorem, it is possible to give precise information of the value of the total curvature of the immersion: it is possible not only to estimate that it is bounded, but its value is exactly $2\pi\chi(\Sigma)$, where χ denotes the Euler's characteristic.

Many classic results from surface theory of \mathbb{R}^3 are a consequence of Codazzi's equation, which still holds in other different three-dimensional spaces of constant curvature, like for example \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 . It does not turn out so surprising that different results from the theory of immersed surfaces in \mathbb{R}^3 could be proved in the abstract context of Codazzi's pairs. For this reason Codazzi's pairs appear in a natural way in the theory of submanifolds, since the first and second fundamental forms of any immersed surface in space form are Codazzi's pairs.

Chapter 2 is devoted to obtain Milnor and Efimov type results on complete, immersed surfaces in non-Euclidean space forms. In these terms we make use of the theory of Codazzi's pairs: pairs (I, II) of quadratic real forms defined on a surface, where I is a Riemannian metric that satisfies Mainardi-Codazzi's equations of the classic theory of surfaces from an abstract point of view.

The main result of this chapter is the next theorem on Codazzi's pairs:

Let (I, II) be a Codazzi's pair on a surface Σ with strictly separated principal curvatures k_1, k_2 , that is,

$$k_1 \leq c_1 < c_2 \leq k_2,$$

for certain constants c_1, c_2 . If (Σ, I) is a complete surface with Gauss curvature $K(I) \leq 0$, then

- * Neither I is a flat metric and Σ is homeomorphic to a plane, a cylinder or a torus;*
- * Or I is not a flat metric, Σ is homeomorphic to a plane and its total curvature is less than or equal to 2π .*

We will prove a similar theorem when the previous conditions hold out of compact subset of the surface.

In the context of the immersions in \mathbb{R}^3 , the main result of this chapter is a weak version of Smyth-Xavier's classic theorem of 1987. Changing to the context of immersions in \mathbb{H}^3 and in \mathbb{S}^3 , we will prove as a consequence of our previous results that there do not exist complete immersions in \mathbb{H}^3 (resp. \mathbb{S}^3) with curvature $K \leq -1$ (resp. $K \leq c_0 < 0$) as long as one of its principal curvatures is separated from zero.

Among other consequences we will also prove that, under the previous conditions on curvatures, the ends of an immersed surface in a space form have finite area for the induced metric.

Based on Bernstein's and Efimov's works, the German mathematician E. Heinz gave in 1955 a partial solution to the Hilbert-Cohn Vossen problem, see [32]. Heinz proved that there do not exist entire (complete) immersed graphs in \mathbb{R}^3 with Gauss curvature bounded from above by a negative constant.

Adapting Heinz's ideas to the context of product spaces, we dedicate the third chapter of this memory to the study of vertical immersed graphs in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, assuming that the base, \mathbb{M}^2 , is a Riemannian surface with a pole in one of its points, that is, it has a point such that the exponential map at the above mentioned point is a diffeomorphism of the corresponding tangent plane into the whole \mathbb{M}^2 .

Let \mathbb{M}^2 be a Riemannian surface with a pole at one point p_0 . If the Gauss curvature of \mathbb{M}^2 is non-negative, then there does not exist any vertical entire graph Σ in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ with extrinsic curvature bounded from above by a negative constant.

From the previous result it is possible to conclude that Efimov's classic theorem holds for entire vertical graphs immersed in product spaces $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ with a pole in the base and with $K_{\mathbb{M}} \geq 0$. At this point, it is natural to wonder if Efimov's classic theorem also holds for entire graphs in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ but with strictly negative curvature in the base. We prove that this is not possible since we are able to construct examples of rotational immersed surfaces in the product space $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ with negative extrinsic constant curvature, being $\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^2$ endowed with a metric of strictly negative curvature.

Chapter four is devoted to the study of complete surfaces endowed with a flat metric, embedded in the hyperbolic three-space and with a finite set of isolated singularities. First we will obtain results with information related to its topology, to its conformal type and to the asymptotic behavior of its ends and its isolated singularities. Secondly we will attack the problem of the realization of flat, complete and embedded metrics in \mathbb{H}^3 with a set of isolated singularities, known as Weyl's generalized problem, basing our conclusions on our obtained results and on Alexandrov's works about realization and on Pogorelov's works about regularity.

We will prove that any complete flat surface Σ embedded in \mathbb{H}^3 with isolated singularities is homeomorphic to a sphere with a finite set of points removed. We will see that any end is conformal to a punctured disc and it is of conical type, that is to say, that it has the geometry of the end of a cone or a flat cylinder of \mathbb{R}^3 (with conical order $\beta \in (-2, -1]$). Moreover, we will prove that any isolated singularity from the

surface is conformally a punctured disc and, therefore, there exists an environment of the mentioned singularity which is isometric to a neighbourhood of the vertex of a flat cone of \mathbb{R}^3 (with conical total angle $2\pi\beta$, with $-1 < \beta < 0$).

From results of Hulin and Troyanov [38] and Finn [21], one obtains that a Gauss-Bonnet type formula holds on the surface Σ , which will give us a connection between the conical angles of the ends and the conical angles of the isolated singularities. This takes us to the fact that Σ have at most two ends. In addition, if Σ has two ends then it has to be a hyperbolic cylinder without singularities.

To finish this chapter, we attack the problem of realization and embedding of abstract flat metrics with the previous obtained characteristics. For this, using the previous results and both Alexandrov's existence and Pogorelov's regularity results, we will prove that:

NON-COMPACT CASE: Let \mathcal{C} be a conformal structure on $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$, $n \geq 1$, and $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ real numbers satisfying $0 > \beta_i > -1$, $i = 1, \dots, n$ and $-2 < \beta_{n+1} \leq -1$. A necessary and sufficient condition for existence of a complete Euclidean sphere embedded in \mathbb{H}^3 , with n conical singularities of total angle $2\pi(\beta_1 + 1), \dots, 2\pi(\beta_n + 1)$, respectively, one end of order β_{n+1} and such that \mathcal{C} is the conformal structure of $\mathbb{S}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ for its intrinsic metric, is that $2 + \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 0$.

With respect to uniqueness, we do not give an answer in this memory, so this point remains open to be treated on future research works. The compact case is indentic to the non-compact case, but for n singular points with $n \geq 3$.

Bibliografía

- [1] ALEDO, J.A.; CHAVES, R.M.; GÁLVEZ, J.A., The Cauchy problem for improper affine spheres and the Hessian one equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359, (2007), 4183-4208.
- [2] ALEDO, J.A.; ESPINAR, J.M.; GÁLVEZ, J.A., Complete surfaces of constant curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 29 (2007), 347-363.
- [3] ALEDO, J.A.; ESPINAR, J.M.; GÁLVEZ, J.A., The Codazzi equation for surfaces, *Advances in Mathematics*, 224 (2010), 2511-2530.
- [4] ALEDO, J.A.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F., The affine Cauchy problem, *J. Math. Ann. Appl.*, 351 (1), (2009), 70-83.
- [5] ALEXANDROV, A.D., Selected Works Part II: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces, *Chapman and Hall*, Book, (2006).
- [6] AMINOV, Y.A., Problems of imbeddings: geometric and topological aspects (in Russian), *Itogi Nauki Teh., Ser. Probl. Geom.*, 13 (1982) 111-156.
- [7] AMSLER, M.H. Des surfaces à courbure negative constante dans l'espace à trois dimensions et de leur singularities, *Math. Ann.*, 130, (1955), 234-256.
- [8] BELTRAMI, E. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giorn. di Mat., Napoli*, 6, (1868) 285-315.
- [9] BELTRAMI, E. Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche, *Giorn. di Mat., Napoli*, 10, (1872), 147-159.
- [10] BIVENS, I.; BOURGUIGNON, J. P.; DERDZINSKI, A.; FERUS, D.; KOWALSKI, O.; KLOTZ-MILNOR, T.; OLIKER, V.; SIMON, U.; STRÜBING, W; VOSS, K., Discussion on Codazzi-Tensors, *Lectures Notes in Math.*, vol. 838, Springer, Berlin, New York, (1981), 229-237.

- [11] BURAGO, D.Y., Unboundedness in Euclidean space of a horn with a finite positive part of the curvature, *Mat. Zametki*, 36(2) (1984), 229-237.
- [12] CORRO, A.V.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F., Complete flat surfaces with two isolated singularities in hyperbolic 3-space, *J. Math. Anal. Appl.*, 366, (2010), 582-592.
- [13] DINI, V., Sulle superficie nelle quali la somma due raggi di curvature principale è costante, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 7, (1865), 5-18.
- [14] DO CARMO, M.P., Geometría diferencial de curvas y superficies, *Alianza Universidad Textos*, Book, (1990).
- [15] DO CARMO, M.P., Riemannian Geometry, *Birkhäuser Boston*, Book, (1992).
- [16] DOMBROWSKI, P., 150 years after Gauss'«Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas», *Astérisque 62, Soc. Mat. France, Paris*, (1979).
- [17] EFIMOV, N.V., Differential Criteria for Homeomorphism of Certain Mappings with Applications to the Theory of Surfaces, *Mat. Sbornik*, Tom.76 (118), No.4 (1968), 475-488.
- [18] EFIMOV, N.V., Generation of Singularities of Surfaces on Negative Curvature (Russian), *Mat. Sbornik*, 64 (1964), 286-320.
- [19] EFIMOV, N.V., Nonimmersibility of the Lobachevskii half-plane *Moscow Univ. Math. Bull.*, 30 (1975) 139-142.
- [20] ESPINAR, J.M.; GÁLVEZ, J.A.; ROSENBERG, H., Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces, *Comment. Math. Helv.* **84** (2009) 351-386
- [21] FINN, R., On a class of conformal metrics, with application to differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, 40, (1965), 1-30.
- [22] GALCHENKOVA, R.I.; LUMISTE YU.G.; OZHIGOVA, E.P.; POGREBYSSKIJ, I.B., Ferdinand Minding, *Nauka, Leningrad (Russian)*, (1970).
- [23] GÁLVEZ, J.A.; LOZANO, V., Existence of barriers for surfaces with prescribed curvatures in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *preprint*
- [24] GÁLVEZ, J.A.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F., Flat surfaces in the hyperbolic 3-space, *Math. Ann.*, 316, (2000), 419-435.

- [25] GÁLVEZ, J.A.; MARTÍNEZ, A.; TERUEL, J.L., Complete surfaces with ends of non positive curvature, *Advances in Mathematics*, 281, (2015), 1202-1215.
- [26] GÁLVEZ, J.A.; MARTÍNEZ, A.; TERUEL, J.L., Complete surfaces with non-positive extrinsic curvature in \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 , *J. Math. Anal. Appl.*, 430, (2015), 1058-1064.
- [27] GÁLVEZ, J.A.; MARTÍNEZ, A.; TERUEL, J.L., On the generalized Weyl problem for flat metrics in the hyperbolic 3-space, *J. Math. Anal. Appl.*, 410, (2014), 144-150.
- [28] GÁLVEZ, J.A.; MIRA, P., Embedded isolated singularities of flat surfaces in hyperbolic 3-space, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 24, (2) (2005), 239-260.
- [29] GÁLVEZ, J.A.; TERUEL, J.L., Complete surfaces with negative extrinsic curvature in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *J. Math. Anal. Appl.*, 423, (2015), 538-546.
- [30] HARTMAN, P.; NIRENBERG, L. On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, *American Journal of Mathematics*, vol. 81, No 4, (1959), 901-920.
- [31] HEIJENOORT, J.V., On locally convex manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, 5, (1952), 223-242.
- [32] HEINZ, E., Über Flächen mit eindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind, *Math. Ann.* **129** (1955) 451-454
- [33] HILBERT, D., Grundlagen der Geometrie, *Teubner*, Leipzig, (1922).
- [34] HILBERT, D., Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2 (1901), 87-99.
- [35] HÜBER, A., On subharmonics functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, 32 (1957), 13-72.
- [36] HÜBER, A., Vollständige konforme metriken und isolierte singularitäten subharmonischer funktionen, *Comment. Math. Helv.*, 41, (1966), 105-136.
- [37] HÜBER, A., Zum potentialtheoretischen aspekt der Alexandrowschen flächentheorie, *Comment. Math. Helv.*, 34, (1960), 99-126.

- [38] HULIN, D.; TROYANOV, M., Prescribing curvature on open surfaces, *Math. Ann.*, 293, (1992), 277-315.
- [39] KLOTZ, T., Abstract Weingarten surfaces, *J. Differential Geom.*, 15 (1980), 365-380.
- [40] KLOTZ, T., Codazzi pairs on surfaces, *Global differential geometry and global analysis*, Proc. Colloq., Berlin 1979, Lect. Notes Math., 838, (1981), 263-274.
- [41] KLOTZ, T., Efimov's Theorem about Complete Immersed Surfaces of Negative Curvature, *Advances in Math.*, 8 (1972), 474-543.
- [42] KLOTZ, T., The curvature of $\alpha I + \beta II + \gamma III$ on a surface in a 3-manifold of constant curvature, *Michigan Math. J.*, 22 (1975), 247-255.
- [43] KLOTZ, T.; OSSERMAN, R., Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 41 (1966-67), 313-318.
- [44] KOKUBU, M.; ROSSMAN, W.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K., Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. Math.*, 221, (2) (2005), 303-351.
- [45] KOKUBU, M.; UMEHARA, M.; YAMADA, K., Flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. Math.*, 216, (2004), 149-175.
- [46] LEWY, H., On the existence of a closed convex surface realising a given Riemannian metric, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 24, (1938), 104-106.
- [47] MINDING, F., Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von un veränderlichen Krümmungsmasse, *J. Reine Angew. Math.*, 19, (1839), 370-387.
- [48] MINDING, F., Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien und Krümmen Flächen, *J. Reine Angew. Math.*, 20, (1840), 323-327.
- [49] NORDEN, A.P., On the foundations of geometry. In: Classic Works on Lobachevskii Geometry and the Development of its ideas, *GITTL, Moscow (Russian)*, (1956).
- [50] O'NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry, *Academic Press*, Book, (1983).
- [51] OLIKER, V.; SIMON, U., Codazzi tensors and equations of Monge-Ampère type on compact manifolds of constant sectional curvature, *J. Reine Angew. Math.*, 342 (1983), 35-65.

- [52] OSSERMAN, R., A survey of minimal surfaces, *Dover Publications, New York, Book*, (1986).
- [53] OSSERMAN, R., The convex hull property of immersed manifolds, *J. Diff. Geom.*, 6 (1971), 267-271.
- [54] POGORELOV, A.V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Translations of Mathematical Monographs, vol. 35, *American Mathematical Society, Book*, (1973).
- [55] POGORELOV, A.V., On continuous mappings of bounded variation and An extension of Gauss'theorem on the spherical representation of surfaces of bounded exterior curvature, *Doklady Akademii Nauk*, vol. III, (1956), 757-759 y 945-947.
- [56] ROITMAN, P., Flat surfaces in the hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics, *Tohoku Math. J. (2)*, 59, (1) (2007), 21-37.
- [57] SA EARP, R.; TOUBIANA, E., Classification des surfaces de type Delaunay, *American Journal of Mathematics*, vol. 121, No 3, (1999), 671-700.
- [58] SACKSTEDER, R. On hypersurfaces with nonnegative sectional curvatures, *American Journal of Mathematics*, vol. 82, No 3, (1960), 609-630.
- [59] SCHLENKER, J.M., Surfaces à courbure extrinsèque négative dans l'espace hyperbolique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001) 79-130
- [60] SMYTH, B.; XAVIER, F., Efimov's theorem in dimension greater than two, *Invent. Math.*, 90 (1987), no. 3, 443-450.
- [61] TROYANOV, M., Les surfaces euclidiennes à singularités coniques, *Enseign. Math.*, 32, (1986), 79-94.
- [62] VOLKOV, Y.A.; VLADIMIROVA, S.M., Isometric immersions of the Euclidean plane in Lobachevskii space, *Math. Notes*, vol. 10, issue 3, (1971), 619-622.
- [63] VOROBÉVA, L.I., Estimate of the upper bound on the Gaussian curvature of certain surfaces with boundary, *Math. Notes*, 20 (1976) 621-624.
- [64] WEYL, H., Über die Bestimmung geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement, *Gesammelte Abhandlungen, Band 1, Springer-Verlag, Berlin-New York* (1968), 614-644
- [65] YU, Z., Surfaces of constant mean curvature one in the hyperbolic three-space with irregular ends, *Tohoku Math. J.*, 53, (2001), 305-318.