Universidad de Granada
Departamento de Estadística e I.O

Modelización mediante Difusiones no homogéneas tipo Gompertz

Tesis Doctoral

María de la Cruz Melchor Ferrer

Granada, 2015

Editorial: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autora: María de la Cruz Melchor Ferrer
ISBN: 978-84-9125-214-6
URI: http://hdl.handle.net/10481/40667

El doctorando, María de la Cruz Melchor Ferrer, y el director de la tesis Ramón Gutiérrez Sánchez, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y, hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo se han respetado los derechos de otros autores a ser citados cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, a 10 de Junio de 2015.

Director de la Tesis	Doctorando
Fdo.: Ramón Gutiérrez Sánchez	Fdo.: María de la Cruz Melchor Ferrer

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de los Procesos Estocásticos se define generalmente como la parte dinámica de la Teoría de las Probabilidades, en la que se estudia un conjunto de variables aleatorias desde el punto de vista de su interdependencia y su comportamiento límite. Se observa un proceso estocástico siempre que se examina un proceso que se desarrolla en el tiempo, de manera controlada por las leyes probabilísticas. Si un científico tiene en cuenta la naturaleza probabilística de los fenómenos con los que trata, sin ninguna duda ha de hacer uso de la Teoría de los Procesos Estocásticos.

Son ejemplos de Procesos Estocásticos el recorrido de una partícula en movimiento browniano, el crecimiento de una población como una colonia de bacterias, el número fluctuante de partículas emitidas por una fuente radiactiva y la cantidad fluctuante de gasolina de suministros sucesivos de una refinería de petróleos. Los Procesos Estocásticos o aleatorios abundan en la naturaleza. Se presentan en Medicina, Biología, Física, Oceanografía, Economía y Psicología, por citar sólo unas pocas disciplinas científicas. Son de especial interés los trabajos de Bharucha-Reid [12], Baley [9], Takacs [125] y Gardiner [36].

1.1. Antecedentes del tema

1.1.1. Sobre los modelos determinísticos

Como es sabido, el estudio del crecimiento se aplicó en primer lugar a poblaciones humanas, aunque actualmente son muchas las ramas científicas que utilizan modelos de crecimiento para reflejar el comportamiento de diversos fenómenos. Los modelos más conocidos son el propuesto por Malthus [97], que supone un crecimiento de la población de tipo exponencial sin considerar ningún freno a su crecimiento, y el modelo de Verhulst [136], que modifica el modelo de Malthus al establecer una cota, surgiendo así el modelo logístico de población en el que se presupone que cualquier población tiende a un estado de equilibrio. Estos modelos determinísticos no son de fácil aplicación en poblaciones reales, ya que el volumen de una población humana depende de muchas variables de índole socioeconómica, ya sea por el cambio en los hábitos de fecundidad, por la mejora en las condiciones de vida relativas a la salud de los individuos, por la bondad en las condiciones económicas, sin olvidar la importancia del fenómeno migratorio. Es por ello que surge la necesidad de utilizar otros modelos para el ajuste del volumen poblacional, como son los procesos de difusión, ampliamente aplicados en la modelización del crecimiento. La inclusión de factores exógenos en dichos modelos es una gran ventaja, ya que permiten incluir en la tendencia variables que influyen en el crecimiento, lo cual permitirá una clara mejora en la modelización del fenómeno. Huete [83] estudió los procesos de difusión Lognormal y Gompertz como herramientas para la modelización y predicción del crecimiento poblacional, aplicando los modelos estocásticos a los datos observados de población en Andalucía, considerando además, la desagregación por sexo y por provincias. Resultó ser una novedosa forma de establecer o ajustar el crecimiento poblacional, ya que normalmente se utilizan modelos determinísticos de crecimiento dependientes de una tasa de crecimiento poblacional.

Volviendo al campo de las aplicaciones, se puede observar cómo las variables objeto de interés no son estáticas, sino dinámicas, en el sentido de que evolucionan según un índice (habitualmente el tiempo), mostrando un comportamiento de tipo exponencial (como, por ejemplo, el Producto Interior Bruto). Por esta razón, la obtención de modelos que expliquen este tipo de comportamiento ha sido objeto de amplio estudio. En este sentido, Malthus [97], propuso a finales del siglo XVIII un modelo determinístico de crecimiento para la población humana que corresponde a una curva de crecimiento de tipo exponencial. Se ha comprobado a lo largo de los dos siglos siguientes a Malthus que su teoría no es aplicable a poblaciones humanas, y que el modelo que se deriva de su teoría se puede aplicar, en general, al crecimiento de especies que se reproducen en un entorno donde no existen depredadores y hay exceso de alimentos.

El problema que se plantea a la hora de utilizar modelos determinísticos para modelizar cualquier fenómeno es la complejidad propia del fenómeno, implicando la especificación de múltiples factores que no siempre son conocidos o cuantificables. Este inconveniente se puede evitar mediante la utilización de modelos estocásticos como los procesos de nacimiento y muerte, o los procesos de difusión, los cuales han sido extensamente usados para la modelización y estudio de determinados fenómenos dinámicos en diversos campos de aplicación dentro del ámbito del crecimiento.

1.1.2. Sobre el proceso Lognormal

La distribución lognormal se define como la distribución de una variable cuyo logaritmo sigue una ley normal, por lo que, obviamente, es una variable positiva. Esta distribución ha sido ampliamente estudiada, sobre todo desde el punto de vista aplicado para ajustar datos reales, ya que hay muchas variables en el mundo real que son inherentemente positivas, tales como la cantidad de precipitaciones en meteorología, la edad media de la mujer al tener su primer hijo, variables en economía, etc.

Aunque los ejemplos de aplicación ya justifican la necesidad de estudiar esta distribución, también hay aportaciones, desde el punto de vista teórico, que confirman su importancia. Así, podemos citar la obtención de la ley por parte de Gibrat [38] mediante lo que él llamó la “ley de los efectos proporcionales”, o bien la obtención por parte de Kolmogorov [86], mediante la “ley de las particiones sucesivas”. Más tarde, Aitchison y Brown [2] publicaron en 1957 una monografía en la que aparece unificada toda la teoría hasta entonces existente sobre esta distribución, comenzado con la génesis de la ley y abordando los problemas de estimación puntual y por intervalo, terminando con una visión sobre campos de aplicación. Johnson y Kotz [84] en 1970 actualizan y amplían este estudio, al incluir el caso triparámetrico. Desde la publicación de esas dos monografías se ha producido un gran avance en lo que se refiere a la teoría sobre esta distribución, así como en el campo de las aplicaciones, lo cual fue advertido por Johnson y Kotz, en 1970, cuando afirmaron que “es muy probable que la distribución lognormal sea una de las distribuciones más ampliamente usadas en los trabajos estadísticos aplicados en los próximos años”. En esta línea, Crow y Shimizu [23] publican una nueva monografía en 1988 donde se vuelven a compendiar todos los conocimientos sobre la distribución, así como los avances obtenidos hasta esa fecha, destacando la estimación insesgada de ciertas funciones paramétricas, Shimizu e Iwase [120], los contrastes de hipótesis que permiten la construcción de intervalos de confianza exactos para ciertas combinaciones lineales de los parámetros, Land [90], la estimación mediante muestreo censurado, estimación bayesiana, así como la revisión de los campos de aplicación de la distribución.

Con respecto al estudio inferencial sobre la media de la distribución lognormal, hay que destacar los trabajos de Land [91], Angus [6] y [7], Zhou y Gao [140] y Lefante y Shah [93] sobre la obtención y comparación de intervalos de confianza aproximados y, más recientemente, el de Krishnamoorthy y Mathew [87] sobre intervalos de confianza generalizados. Estos trabajos surgen motivados por las dificultades computacionales que presenta el cálculo de los intervalos exactos de Land en la práctica.

La consideración de modelos aleatorios para modelizar fenómenos en los cuales estén implicadas variables aleatorias que evolucionan en el tiempo y que exhiban tendencias de tipo exponencial, así como el que la media de una distribución lognormal venga expresada de forma exponencial, nos hace pensar en la relación que esta distribución debe tener con las variables involucradas en tales modelos.

Este proceso ha sido estudiado en muy distintos campos científicos, como la ecología, pudiendo citar a Capocelli y Ricciardi [16], quienes lo estudian como modelo de crecimiento de poblaciones. Así, consideran la ecuación diferencial determinística del modelo malthusiano y la modifican reemplazando la tasa de crecimiento por la suma de un término constante y un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero, con densidad espectral σ^2 (ruido blanco). De esta forma se obtiene una ecuación diferencial estocástica cuya solución, bajo condiciones iniciales adecuadas, es un proceso de difusión cuyas distribuciones finito-dimensionales y transiciones siguen leyes lognormales, cuya función media es exponencial y que se conoce como proceso de difusión lognormal. No obstante, ésta no es la única forma de introducir dicho proceso. Por ejemplo, Ricciardi [114] parte de la discretización del modelo determinístico malthusiano y, aleatorizándolo, obtiene un modelo estocástico discreto de crecimiento de poblaciones cuyo límite, cuando el intervalo de tiempo entre las sucesivas generaciones se hace tender cero, es el proceso de difusión lognormal.

El proceso logarítmico normal encuentra en la economía uno de sus principales campos de aplicación (Tintner y Gómez [131], Tintner y Narayanan [132] y Tintner y Sengupta [133]), siendo de especial interés este proceso en predicción debido a su tendencia exponencial y a la facilidad que muestra a la hora de introducir factores exógenos que afecten a la tendencia. El uso de los procesos de difusión en éstos y otros campos de aplicación ha llevado consigo el desarrollo de diversos aspectos concernientes, sobre todo, a la inferencia.

Las aplicaciones del proceso de difusión lognormal en economía y marketing son también numerosas. Así, Cox y Ross [21] y Merton [105] han realizado importantes contribuciones en este sentido y atribuyen al proceso de difusión lognormal el papel de “workhorse” en la literatura sobre la opción de fijación de precios. Por ejemplo, el proceso aparece asociado al modelo de Black y Scholes [13]. Asimismo, ha sido extensamente utilizado en este ámbito por Tintner y Sengupta [133], quienes ponen de relieve su adecuación para la modelización en economía, así como el interés especial que despierta este proceso para realizar predicciones. Recientemente Basel y et al. [11] han estudiado la serie del Índice de Precios al Consumo (IPC) en Estados Unidos, obteniendo que el proceso de difusión lognormal es, frente a otro tipo de modelos como los autorregresivos, preferible a la hora de obtener mejores predicciones de forma sencilla. Cabe también destacar los estudios de

Marcus y Shaked [98], que confirman la importancia del modelo de difusión lognormal en el campo de la economía y las finanzas.

No obstante, hay que notar que en estos estudios, el proceso se considera homogéneo, es decir, sus momentos infinitesimales dependen sólo del espacio de estados, lo que significa que las posibles influencias existentes sobre la variable objeto de estudio son funciones de ella misma. Este hecho restringe el ámbito de aplicación, así como la posibilidad de introducir información ajena a la variable de interés, lo cual se pone de manifiesto en múltiples aplicaciones donde se observan desviaciones de los datos en estudio respecto de la tendencia del proceso homogéneo. Se consideran influencias ajenas (factores exógenos) a la variable modelizada por el proceso (variable endógena) y cuya evolución en el tiempo es conocida. De esta forma, la inclusión de estas funciones temporales en la media infinitesimal del proceso permite, por una parte, un mejor ajuste y, por otra, un control externo sobre el comportamiento de la variable regida por el proceso. El empleo de factores exógenos en el ámbito de los procesos de difusión fue propuesto por Tintner y Sengupta [133], aplicándolo a la descripción, predicción y análisis de políticas de crecimiento en materias económicas.

Una de las cuestiones de interés acerca del proceso de difusión lognormal con factores exógenos, que ha sido objeto de numerosos estudios en los últimos años, es la inferencia, cuestión que puede ser abordada empleando tanto muestreo continuo, Basawa y Rao [10] y Gutiérrez y et al. [47], considerando la difusión como solución de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas, como muestreo discreto de las trayectorias, basándose en la función de verosimilitud de la muestra construida a partir de la densidad de transición de la difusión. La inferencia por muestreo discreto fue tratada por Tintner y Gómez [131], abordando el caso unidimensional y con la introduccción de dos factores. La generalización, tanto a más factores como al caso de la difusión en su versión multivariante, tratando la estimación máximo-verosímil de los parámetros y contrastes de significación de los factores exógenos, ha sido considerada por Gutiérrez y et al. [45] y [65] y Torres [134]. Otras cuestiones de interés han sido el estudio teórico de la distribución de la tendencia y función de covarianza estimada del proceso en su versión univariante, tanto en el caso de la estimación máximo-verosímil como en el caso de la estimación insesgada de mínima varianza y su aplicación en el campo económico (Gutiérrez y et al. [75]). El interés por la estimación de estas funciones, así como por las funciones moda y de cuantiles, y sus versiones condicionadas, viene justificado por su utilidad en predicción, lo que ha conducido a la construcción de bandas de confianza exactas para las funciones media y moda Gutiérrez y et al. [47], extendiendo los trabajos de Land [90] y [92] en el ámbito de la distribución lognormal. No obstante, el empleo de este tipo de bandas implica, como ocurre en el caso de la distribución, el cálculo de valores críticos difíciles de obtener, por lo que se hace necesario profundizar en la obtención de procedimientos aproximados.

Por otra parte, es importante notar que para la estimación de los parámetros del modelo, así como de las funciones paramétricas citadas anteriormente, no es necesario disponer de la forma funcional exacta de los factores exógenos, sino que basta con disponer del valor de sus integrales entre dos instantes de tiempo consecutivos. Sin embargo, hay otras situaciones en las que sí es fundamental tener dicha forma funcional, como ocurre cuando se consideran problemas de tiempo de primer paso. Por lo tanto es necesario disponer de procedimientos que puedan permitir aproximar la forma de los factores exógenos para lo cual se debe disponer de algún tipo de información sobre ellos. Ese es el caso del ejemplo tratado por Gutiérrez y et al [73] , donde se considera el estudio del Producto Interior Bruto en España, tanto desde el punto de vista de la estimación del modelo como del cálculo de tiempos de primer paso por barreras constantes. La solución en dicho caso la proporciona la propia naturaleza de la variable, buscando posibles influencias externas entre las componentes de la Demanda Nacional y construyendo, a partir de ellas, funciones poligonales que constituirán los factores exógenos al proceso. Sin embargo, pueden presentarse situaciones en las que se sospeche que existen influencias externas a la variable endógena y no se disponga de ninguna información sobre ellas. Desde el punto de vista de las aplicaciones a datos reales, Gutiérrez y et al [73] consideraron problemas de descripción y predicción de distintas variables macroeconómicas como el Producto Interior Bruto en España, o estudios sobre la evolución de consumos energéticos (gasolinas, gas natural, etc.) en España, consiguiéndose buenas predicciones a corto y medio plazo de las variables consideradas, utilizando las tendencias estimadas de los procesos lognormales ajustados.

Los procesos de difusión Lognormal univariante y multivariante y sus extensiones no homogéneas obtenidas introduciendo factores exógenos, han sido estudiados y aplicados ampliamente en los últimos años. La investigación de estos modelos, desde los puntos de vista de las ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov y de las EDE de Itô han sido establecidas en Gutiérrez et al. [64], Gutiérrez, González y Torres [45] y Torres [134]. También han sido investigados distintos problemas de índoles probabilística y estadística. Por ejemplo, el problema de tiempo de primer paso por determinados tipos de barreras, fue abordado en Gutiérrez, Juan y Román [64], Gutiérrez, Román y Torres [73] y [72] y Gutiérrez et al. [65]. Y problemas relativos a la inferencia estadística (estimación y contrastes de hipótesis, bandas de confianza, etc.) son abordados, por ejemplo, por Gutiérrez, Román y Torres[75], y Rico [116].

El proceso lognormal es especialmente interesante en predicción, debido a su tendencia de tipo exponencial y a la facilidad de introducir en él factores exógenos que afecten a dicha tendencia, ya que se puede influir sobre las variables endógenas modelizadas por el proceso a través de variables exógenas elegidas de forma adecuada al problema considerado y al tipo de tratamiento matemático a realizar con posterioridad. En el caso de los procesos logarítmico normal con factores exógenos, la estimación ha sido estudiada por Molina [106], Hermoso [81] y por García, Gutiérrez y Hermoso [37]. Han obtenido los resultados, considerando los procesos de difusión como solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô y haciendo uso de muestreo continuo, obteniendo la estimación máximo-verosímil del vector asociado con los factores exógenos, y probando, bajo ciertas condiciones sobre dichos factores, su consistencia y normalidad asintótica.

Asimismo, la aplicación del método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros del proceso y los coeficientes que afectan a los factores exógenos, han ayudado a resaltar la importancia de este proceso.

Asimismo Hermoso [81], costruyó contrastes basados en la razón de verosimilitudes sobre los parámetros del coeficiente tendencia. Posteriormente, Gutiérrez, Angulo, Gónzalez y Pérez [44] trataron el problema de la estimación de los parámetros a partir de las ecuaciones de Kolmogorov. Concretamente, usando muestreo discreto, obtuvieron en el caso de dos factores exógenos la estimación de los parámetros del modelo por máxima verosimilitud, método ya iniciado por Tintner y Sengupta [133] y por Gutiérrez [43], extendiendo los resultados de Tintner y Sengupta y obteniendo expresiones para la estimación de la tendencia y la matriz de covarianzas del proceso. Fue Torres [134] quien generalizó los resultados anteriormente citados, basados en muestreo discreto, al caso de $q > 2$ factores exógenos, calculando además la matriz de información de Fisher y la Cota de Cramer-Rao.

Los trabajos mencionados hasta ahora, se refieren al estudio del proceso lognormal con dos parámetros. Posteriormente, Arabi [8] centra su estudio en el proceso lognormal multidimensional de tres parámetros con factores exógenos que afectan a su tendencia. Aborda el problema de la estimación de los parámetros utilizando el método de máxima verosimilitud local, determina la matriz de información de Fisher y estudia el problema de la resolución numérica de las ecuaciones de verosimilitud. Además, estudia los posibles contrastes de hipótesis sobre los parámetros del proceso, añadiendo el contraste de hipótesis sobre el tercer parámetro. Ramos [110] estudió también las difusiones lognormales triparamétricas multivariantes con factores exógenos. Posteriormente, El Merouani [29] ha aplicado los resultados obtenidos para el proceso de difusión lognormal, con y sin factores exógenos, a un conjunto de datos macroeconómicos de Marruecos. Con posterioridad, el caso multidimensional ha sido tratado por Tintner y Narayanan[132], aplicándolo al campo de la economía. Tintner y Gómez [131] iniciaron el estudio de este proceso desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo cual hizo posible el uso de métodos de la teoría de sistemas estocásticos.

En todos los estudios anteriores se ha partido del hecho de que los factores exógenos que afectan a cada variable endógena son los mismos. Por eso, el siguiente paso fue estudiar el proceso de difusión lognormal Multidimensional en el que para cada variable endógena se considera un conjunto distinto de factores exógenos. Tambíén se han estudiado el caso de campos aleatorios lognormales (Gutiérrez et al. [68]) o triparamétricos donde existe un parámetro umbral (Gutiérrez et al. [61]).

1.1.3. Sobre el proceso Gompertz

1.1.4. Sobre otros procesos de difusión

En los últimos años han logrado grandes avances en el estudio de los procesos de difusión, tanto en el caso del modelo lognormal y Gompertz como en otros modelos. En todos los casos además de avanzar de forma consistente en el desarrollo su inferencia probabilística y estadística, se han aplicado, con gran éxito, a la modelización de fenómenos de muy diferente índole. Por ejemplo, Gutiérrez et al. [50] aplicaron el proceso de Rayleigh al estudio de la esperanza de vida en Andalucia y España. Este mismo proceso fue usado por los mismo autores para estudiar la producción eléctrica en Marruecos [55]. En [60], Gutiérrez et al. modelizaron las emisiones de CO2 en España utilizando el Producto Interior Bruto como factor exógeno. El inverso del modelo CIR (Cox Ingersoll Ross) [54] se usó para modelizar las emisiones de CO2 teniendo en cuenta el transporte terrestre en España y el proceso de Gamma (Gutiérrez et al. [56]) para estudiar el stock de vehículos en España, variables muy influyentes en las emisiones de gases de efecto invernadero a la atmósfera. La potencia de este modelo se usó para estudiar en Gutiérrez et al. [62] el consumo de gas natural en España. Las emisiones de CO2 también fueron modelizadas en Gutiérrez et al. [58] mediante el proceso de Vasicek.

1.2. Organización de esta memoria de Tesis Doctoral y principales aportaciones

Esta tesis tiene como objetivo proponer y estudiar los procesos estocásticos de difusión Gompertz, homogéneos y no homogéneos, en sus aspectos probabilístico y estadístico. Y, también, pretende probar la capacidad que dichos procesos tienen para la modelización, ajuste y predicción de fenómenos estocásticos reales de muy distintos campos científicos (Economía, Energía, Demografía Estadística, Crecimiento de Poblaciones, Física Teórica, etc.). Se introduce y estudia un nuevo proceso de difusión Gompertz para modelizar fenómenos asociados a variables que muestran un comportamiento sigmoidal y acotado en el tiempo, con cota dependiente del valor inicial. Es una novedosa forma de establecer el crecimiento poblacional, ya que normalmente se utilizan los modelos determinísticos de crecimiento, dependientes de una tasa de crecimiento poblacional.

En general, la estimación de la tendencia en procesos de difusión ha sido muy estudiada en los últimos años, en particular, los modelos cuya tendencia depende linealmente de los parámetros. Esta situación ha sido estudiada para procesos homogéneos por Brown y Hewitt [10] en el caso unidimensional, mientras que el caso de difusiones multidimensionales ha sido abordado, entre otros, por Taraskin [98] y por Basawa y Rao [6]. Estos autores han hecho uso de muestro continuo, considerando una trayectoria del proceso hasta un tiempo de parada y, por medio de máxima verosimilitud, han obtenido los estimadores correspondientes, probando su consistencia y normalidad asintótica.

En la Bibliografía existen pocos casos de aplicación de procesos de difusión a datos reales experimentales, siendo lo usual utilizarlos para modelización teórica, por ejemplo, en Neurociencias. Gutiérrez-Sánchez. [58] aplica los modelos estudiados al análisis de la evolución y predicción en casos reales concretos de interés en diversos campos científicos: el estudio bivariante del “PIB y Precio de Vivienda nueva en España”. En estos ejemplos de aplicación se ajustan estadísticamente los procesos estudiados a los correspondientes datos reales, de modo que no son, solamente, nuevos casos de modelización teórica, sino que son también una muestra de cómo estos procesos constituyen una importante herramienta de modelización, alternativa y complementaria, a otros métodos de modelización, determinísticos o estadísticos (curvas de crecimiento, series cronológicas, métodos econométricos, etc.).

Los objetivos de esta Tesis se inscriben en los de la Línea de Investigación que, sobre Procesos Estocásticos de Difusión, se desarrolla en el Departamento de Estadística e I. O. de la Universidad de Granada desde 1987 (Grupo FQM-147 del Plan Andaluz de Investigación), y dichos objetivos están estrechamente relacionados con objetivos y resultados de los Proyectos Nacionales de Investigación PB94-1041, PB97-0855, BFM2000-0602, BFM2002-03636, MTM2005-09209, P06-FQM-2271, MTM2008-05785 y MTM2011-28962 desarrollados por miembros del mencionado Grupo.

A continuación resumiremos el contenido de cada Capítulo.

i) En el **Capítulo 1** se presenta una introducción que trata sobre los antecedentes del tema, a saber, los modelos determinísticos, el proceso Lognormal, el proceso Gompertz y otros nuevos procesos de difusión que se están desarrollando en estos últimos años. El capítulo continúa con la organización de la memoria, así como con el desarrollo de las futuras líneas de investigación.

ii) En el **Capítulo 2** se ofrece una revisión de algunos de los modelos de crecimiento utilizados para poblaciones humanas. Se comienza con una descripción de las curvas de crecimiento, para seguir con los modelos determinísticos asociados a ellas, contemplado los modelos en los que no se establece una cota al crecimiento (se presupone crecimiento ilimitado) y los modelos en los que sí hay una cota al crecimiento. Para terminar, se presentan las metodologías que han dado lugar a cada uno de los modelos estocásticos asociados a los anteriores modelos determinísticos, haciendo hincapié en las características del proceso Gompertz, materia fundamental de esta memoria. Así, se hace un breve recorrido por las curvas de crecimiento exponencial, logística y Gompertz, modelos determinísticos asociados, así como los modelos estocásticos correspondientes, de los que ampliaremos en los capítulos sucesivos los proceso Lognormal y Gompertz.

iii) En el **Capítulo 3** se introducen los Procesos de Difusión Gompertz Univariante Homogéneo y No Homogéneo a través de las ecuaciones de Kolmogorov y como solución de una ecuación diferencial estocástica (EDE). Se desarrolla la teoría probabilística y estadística asociada al mismo, obteniendo las probabilidades de transición, sus funciones momento y los estimadores de los parámetros del proceso.

iv) En el **Capítulo 4** se presentan diversos casos particulares del Proceso de Difusión Gompertz Univariante No Homogéno, todos ellos **aportaciones originales**. Al igual que en los capítulos anteriores, a través de las ecuaciones de Kolmogorov y como solución de una ecuación diferencial estocástica. Además, se desarrolla la teoría probabilística y estadística asociada al mismo, obteniendo las probabilidades de transición, sus funciones momento y los estimadores de los parámetros del proceso.

v) En el **Capítulo 5** se presenta el Proceso de Gompertz Multivariante Homogéneo, considerando muestreo discreto. Se introduce el proceso multivariante a través de las ecuaciones de Kolmogorov y como solución de una ecuación diferencial estocástica (EDE). A continuación se desarrolla la teoría probabilística y estadística asociada al mismo, obteniendo las probabilidades de transición, sus funciones momento y los estimadores de los parámetros del proceso.

1.3. Líneas futuras de investigación

Señalamos a continuación algunos problemas abiertos inmediatos de desarrollar y aplicar, en base a los resultados obtenidos en esta Tesis.

Como ya hemos comentado, en las últimas décadas, se ha avanzado en la modelización de crecimientos de células tumorales. Tradicionalmente, las funciones que describen este tipo de crecimiento se obtienen como solución de crecimientos determinísticos bajo hipótesis de crecimiento basadas en una ecuación en incrementos que bajo su paso al límite, generan una o varias ecuaciones diferenciales determinísticas, cuya solución, bajo determinadas condiciones, proporciona el tamaño de la población.

Estas curvas de crecimiento tienen un cierto número de parámetros que pueden tomar valores en determinados rangos o conjunto de números reales. La obtención de los valores adecuados de dichos parámetros para la modelización de un fenómeno concreto constituye el proceso de ajuste del modelo a dicho fenómeno. Este proceso de ajuste se basa en la observación del fenómeno considerado, bien en un intervalo continuo del tiempo o bien en instantes de tiempo en sujeto discreto. Uno de estos modelos bien conocidos y ampliamente utilizados en muchos campos científicos es el modelo de crecimiento de Gompertz (curva de Gompertz) que parte de otro tipo de crecimiento como el logístico o el exponencial, y que constituyen una amplia y variada familia de modelos válidos para la modelización de fenómenos de campos científicos de una variada índole (como hemos descrito anteriormente). Tomando como modelo determinístico de crecimiento un modelo Gompertz a su vez, sobre él se han investigado versiones estocásticas que originan el modelo Gompertz estocástico que se deriva de forma análoga al modelo determinístico pero basändose en la ecuación diferencial estocástica tipo Itô generada bajo hipótesis de crecimiento estocástico bien conocidas. Se considera que el modelo de Gompertz es el modelo que mejor se ajusta a ciertos tipos de tumores, como puede verse en Gutiérrez et al. [46]. Cacace et al. [15] consideraron un modelo matemático determinístico de Gompertz al que se le aplica una función terapéutica de tipo dicotómico; los autores introducen técnicas matemáticas en la discretización del modelo y describen algunos métodos basados en la observación, para estimar los parámetros desconocidos del modelo. En su trabajo consideran que el método usado es una alternativa prometedora a los métodos estadísticos tradicionales, como por ejemplo, los métodos de los mínimos-cuadrados.

También presentan una aplicación del método en el análisis del crecimiento de un tumor sólido y la estimación de los parámetros en la presencia de una quimioterapia. Entre las conclusiones proponen extender el caso a un modelo estocástico. D'Onofrio et al. [25] optaron por una extensión nueva, de tipo potencial, al modelo determinístico de Gompertz. Una extensión a la que llamaron "log-power-gompertz", la cual consideran una nueva generalización que completa de algún modo los escenarios alcanzados por los modelos Gompertz. En su trabajo estudian las propiedades cualitativas y analíticas del modelo considerado; entre dichas propiedades, está que se adapta fácilmente a la aplicación de una terapia constante en el tiempo. Para un ajuste de los parámetros utilizan el método MSE(log) sugerido por Marusic.

Por otro lado, las versiones estocásticas adaptan una metodología general que se basa en procesos de difusión. Estos modelos estocásticos, comparándolos con los modelos determinísticos correspondientes, aparte de que son más reales, hacen que sea posible proponer y resolver problemas de gran interés práctico. Sahoo et al. [126] desarrollaron un modelo estocástico análogo al de Gompertz, incorporando las fluctuaciones aleatorias causadas por efectos ambientales (exteriores). Dichas fluctuaciones se atribuyen a la aplicación de la terapia en el tratamiento anti-tumoral: Una hipótesis que incita a optar por una modelización estocástica en vez de una determinística, ya que la respuesta inmunológica es la propia reacción del sistema afectado. El objetivo de su trabajo ha sido analizar la distribución de probabilidad de la dinámica del tumor. Albano et al. [3] a su vez consideran el modelo de difusión de Gompertz sugerido por Gutiérrez et al. [**?**] al que le introducen en el término drift una función del tiempo (llamada terapia). Su trabajo consiste en evaluar las propiedades estadísticas del modelo obtenido y estudiar el efecto de la terapia en el tiempo de primer paso. Para ello consideran un caso donde la terapia aplicada es constante y otro donde es una logarítmica. Albano et al. [4] consideran la extensión presentada por d'Onofrio et al. [25] la cual es compatible con un modelo de doble compartimiento. Éste incorpora varios elementos clave en la dinámica del tumor, dando lugar a un proceso de difusión bidimensional, generalmente no homogéneo en el tiempo. Los autores enfocan un estudio inferencial de los parámetros, entre ellos la estimación de la función terapia considerada a priori en el drift del modelo. También discuten las características del proceso de difusión representando la población tumoral. Los mismos autores consideran un proceso de difusión tipo Gompertz con factores exógenos en el drift. Dicho proceso puede describir la dinámica de poblaciones en las cuales las tasas intrínsecas (tasa de crecimiento del tumor y la tasa del decaimiento del mismo) son funciones del tiempo. Para cuantificar el efecto de éstas funciones se hace la evaluación de una entropía relativa. También en este trabajo se estudia el problema del tiempo del primer paso mediante fronteras adecuadas. Finalmente muestran unos resultados simulados para captar esa dependencia del tiempo en los parámetros en cuestión y su aplicación al crecimiento tumoral.

Partiendo del modelo de Stepanova [124]para la respuesta inmunológica, el cual se considera como completo para la descripción de las características relevantes en el crecimiento tumoral bajo actividad inmunológica, De Vladar y González [26], establecen que el flujo de las células tumorales en un entorno inicial no puede suprimirse por cualquier flujo de células antitumorales (o los que se llaman inmunocomponentes). Con sólo la acción del sistema inmunológico no se puede conseguir una regresión completa del crecimiento del tumor. Por tanto un mecanismo externo, una terapia, es necesaria. En una presentación por un modelo de Gompertz determinístico, el efecto de un tratamiento externo retardado (por ejemplo una terapia del tipo logarítmico) sobreinfluye cualquier actividad de las células inmunológicas en el proceso de regresión del tumor; lo que significa una desconexión de las células antitumorales del sistema inmunológico. Por tanto según ellos, el esquema del efecto de un tratamiento aplicado al crecimiento de un tumor puede ser modelizado y evaluado con sólo la ecuación de Gompertz con una terapia (función externa del tiempo que destruye las células tumorales), presentando un modelo de Gompertz con doble terapia, una interna que explica la reacción del sistema en sí y otra externa aplicada desde fuera al mismo. Una reacción interna del tipo exponencial como función decreciente del tiempo es, por una parte, compatible en torno al punto silla, con las ecuaciones ligadas por Stepanova [124]; De Vladar y González [26] y Albano et al.[5]; y por otra, verifica las proposiciones respecto al desvanecimiento de la actividad inmunológica con el tiempo. El modelo estocástico resultante constituye un nuevo modelo de crecimiento tumoral que aúna las ventajas de ambos modelos. Gutiérrez et al. [**?**] y Gutiérrez-Sánchez et al. [79] han estudiado un modelo estocástico de Gompertz no homogéneo con dos factores exógenos, uno interno y otro externo.

En los campos científicos que tratan con el tema que tenemos de antemano, el crecimiento de las células tumorales, uno de los puntos más importantes sin duda ninguna es la consideración de la respuesta inmunológica. Hoy en día, la inmunoterapia se considera que es la estrategia más prometedora contra el cáncer, especialmente para algunos de los tipos más graves. El tema Çancer Immunotherapy"ha sido declarado el tema del año por los editores de Science [19] [107] y ha sido el tema central de discusión en muchos congresos internacionales sobre oncología (por ejemplo, en el 50 Congreso de la Sociedad Americana de Oncología Clínica, con la asistencia de más de 30.000 médicos celebrado en Chicago en el 2014). En este sentido, una de las áreas de investigación que despiertan más interés actual es el ensayo de nuevos fármacos que estimulan el organismo para combatir el cáncer.

1.3.1. Líneas futuras de investigación concretas

Las líneas futuras de investigación concretas serán:

Siguiendo la línea de los trabajos de Gutiérrez et al. [79]y Gutiérrez-Sánchez et al. [**?**] junto con las hipótesis respecto al modelo del sistema inmunológico considerado por los autores De Vladar y González [26] y Albano et al. [4] y anteriormente el modelo presentado por Stepanova [124], podemos plantear nuevos modelos estocásticos de Gompertz para el crecimiento tumoral. Bajo efectos terapéuticos, éstos reflejarán las distintas maneras con que la respuesta terapéutica interviene en el crecimiento tumoral. Dicho de otra forma, cómo actúa la terapia suministrada desde fuera del sistema afectado y cómo interactúa con la respuesta inmunlógica interna del mismo, específicamente, si consideramos la ecuación diferencial estocástica de Itô, para el crecimiento tumoral.

Planteamos los posibles, nuevos, modelos estocásticos de Gompertz como sigue: El modelo Interactivo Completo de Primer orden (MIIP). El modelo Interactivo incompleto de primer orden Tipo I (MIIPI). El modelo Interactivo incompleto de primer orden tipo II (MIIPII)

1. El modelo MIIP es una consecuencia directa de los trabajos anteriormente publicados, rige entre los principios jerárquicos de los criterios generales, en el desarrollo de los modelos estadísticos. En este caso nos referimos al modelo determinístico cuya ecuación diferencial es el drift de su versión estocástica y tiene como característica la consideración de (posible correlación) la colinealidad entre las ponderaciones ligadas a ambas terapias, la terapia externa, en este caso la logarítmica, y la respuesta inmunológica, en este caso la exponencial.

2. El modelo MIIPI es una generalización de los modelo considerados por De Vladar y González [26] y Albano et al.[4], y tiene la particularidad de describir a la respuesta inmunológica entorno al momento de la producción del tumor; y al mismo tiempo refleja el efecto de la terapia suministrada (la terapia externa), en dos sentidos, su efecto directo (efecto principal) y su efecto implica (interactivo, interacción con la respuesta inmunológica). Este modelo considera el resultado de De Vladar y González [5] respecto al crecimiento tumoral y el desvanecimiento de la respuesta inmunológica, en la presencia de una terapia externa como la logarítmica. Dicho resultado se basaba en el hecho de que las terapias aplicadas sólo actúan de un modo independiente y incorrelado.

3. El modelo MIIPII refleja solo el efecto implícito de la terapia aplicada, la logarítmica, en versión interactiva con el sistema inmunológico. Tiene como característica la descripción de la respuesta inmunológica entorno al tiempo inicial respecto a la variación tumoral.

Todos estos modelos tienen en común la consideración de la respuesta inmunológica y su posible interacción con la terapia externa suministrada (al paciente), sin embargo el modelo MIIPI tiene la ventaja de describir, en torno a la iniciación del tumor, modelo estocásticos de crecimiento tumoral con terapias externa constante, ya considerado por varios autores, con la ventaja de hacer presente el término ligado a la reacción inmunológica que no se ha considerado.

Capítulo 2

Modelos de crecimiento de poblaciones

El fenómeno del crecimiento es una característica ampliamente estudiada en diversos campos de aplicación. Su estudio se originó asociado al análisis de evolución de las poblaciones, y hoy día son múltiples los ámbitos en los que se considera, como la Biología, la Economía y la Ecología, provocando multitud de estudios dirigidos a explicar fenómenos de crecimiento mediante su modelización. Al ajustar un modelo matemático al crecimiento estudiado han surgido diversas representaciones, originando las curvas de crecimiento que representan al fenómeno estudiado. Existen diferentes opciones para clasificar estas curvas atendiendo a sus propiedades y centrarse en el valor límite o cota que alcanza la curva. Si nos limitamos a curvas crecientes, se pueden clasificar en **curvas de crecimiento no acotado** y **curvas de crecimiento acotado**.

De entre las curvas de crecimiento no acotado, la primera que surge es la exponencial, siendo además la más estudiada ya que se asocia al análisis de poblaciones humanas, siendo su característica más destacable la ausencia de cota.

Entre las curvas de crecimiento acotado las más destacadas son las de crecimiento logístico, en las que existe una cota independiente del valor inicial, siendo de forma sigmoidal, y las de crecimiento Gompertz, que cronológicamente son previas a la logística, y surgen asociadas al estudio de la ley de mortalidad humana, presentando un crecimiento acotado y de tipo sigmoidal, aunque con características propias que las diferencian de la logística. A lo largo de los años la curva Gompertz ha sufrido reescrituras para adaptarse al estudio de fenómenos en muy diversos campos. En cada reescritura se recoge alguna característica propia del fenómeno estudiado, como la dependencia o no de la cota alcanzada con respecto al valor inicial de partida.

Asociados a estas curvas de crecimiento existen **modelos determinísticos** que rigen el tipo de comportamiento que exhibe cada una de ellas.

Posteriormente se verán los **modelos estocásticos** asociados a los crecimientos antes mencionados y que, por tanto, pueden ser utilizados para modelizar fenómenos cuyo comportamiento (crecimiento) viene representado por tales curvas. Así, para modelizar situaciones regidas por variables de naturaleza continua que evolucionen continuamente en el tiempo y con tendencia exponencial, el proceso lognormal puede ser adecuado. Si, por el contrario, las series de datos asociados a las variables muestran un comportamiento de tipo sigmoidal acotado con cota independiente del valor inicial, se pueden usar los procesos logístico o Gompertz, según las particularidades propias que exhiban los datos, como la velocidad de crecimiento hasta el punto de inflexión.

Sin embargo, en la práctica pueden aparecer situaciones en las que el tipo de crecimiento acotado anterior muestre una dependencia de la cota respecto al valor inicial, en tal caso se podría pensar en el modelo introducido por Tan, ya que su curva asociada obedece a este comportamiento, aunque su campo de actuación no contemple variables de naturaleza continua. Esto justificaría el interés en obtener un modelo estocástico continuo y, en particular, un proceso de difusión que permita modelizar este tipo de situaciones.

2.1. Curvas de crecimiento

Las curvas de crecimiento surgen al intentar modelizar fenómenos de crecimiento, y van asociadas a modelos determinísticos de crecimiento. Se exponen a continuación, de forma breve, las características fundamentales de estas curvas, con especial énfasis en la curva Gompertz, ya que es la asociada al modelo que será objeto de estudio en esta Tesis.

2.1.1. Curva exponencial

La curva de crecimiento exponencial es la primera que surge en la historia, siendo además la más estudiada dentro de las curvas de crecimiento, ya que está asociada al análisis de poblaciones humanas. Una característica importante a destacar de esta curva es la ausencia de cota.

La expresión genérica de esta curva es

$$f(t) = ce^{rt}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

con c y r números reales, siendo r la razón de crecimiento (determina dentro de la curva la rapidez de crecimiento, es decir, cuanto mayor sea la razón, más rápido crece la curva). Dada la naturaleza de los fenómenos tratados mediante esta curva, se restringe su estudio en el tiempo a valores superiores a un instante inicial $t_0 \geqslant 0$, y con $c > 0$. Imponiendo que la curva toma el valor $x_0 = f(t_0) > 0$ en el instante inicial t_0, la expresión de la curva es

$$f(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}, \qquad t \geqslant t_0,$$

siendo una curva monótona (creciente si $r \geqslant 0$ y decreciente si $r \leqslant 0$), convexa y no acotada.

2.1.2. Curva logística

Seguimos con la curva logística, aunque cronológicamente fue la tercera en aparecer. Fué introducida en 1838 por Pierre Verhulst [136] como solución de un modelo determinístico propuesto por él. Está asociada al estudio de crecimiento de poblaciones, pero con ciertas limitaciones sobre la población, ya que su crecimiento no puede ser ilimitado, al menos considerando un periodo amplio. Dichas limitaciones se traducen en la existencia de una cota independiente del valor inicial, y una forma sigmoidal.

La expresión más utilizada de esta curva es

$$f(t) = \frac{k}{1+e^{a-rt}} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

con $k > 0$ y $r > 0$, siendo k el valor límite de la curva cuando t tiende a infinito, r el valor que determina la rapidez con que la curva crece hacia su cota, y verificándose que $f(t) \leq k, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Restringiéndonos a valores $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, y siendo $x_0 = f(t_0) > 0$, la expresión de la curva es

$$f(t) = \frac{k}{1+(k/x_0 - 1)e^{-r(t-t_0)}} \quad , \qquad t \geqslant t_0$$

con $r > 0$ y $k > x_0 > 0$. Esta curva es monótona, creciente, acotada y con un punto de inflexión. Es de destacar que el valor de la cota k es constante e independiente del valor x_0 en el instante inicial.

2.1.3. Curva Gompertz

La curva de crecimiento Gompertz surge asociada al estudio de la mortalidad humana, y presenta un crecimiento acotado y de tipo sigmoidal, pero con características propias que la diferencian de la logística. Debe su nombre al matemático Benjamín Gompertz. En junio de 1825 Gompertz [42] escribió al matemático Francis Baily ofreciéndole un artículo para la Real Sociedad de Matemáticos de Londres. Se trataba sobre la naturaleza de la expresión de la función de la ley de la mortalidad humana y sobre una forma de determinar el valor de lo que él denominaba “Life contingences” (imprevistos de la vida). En dicho artículo Gompertz introdujo la función

$$L_x = dg^{q^x},$$

con $\log g = \frac{mq^{-a}}{1-q^r}$, $q = p^{1/r}$, $m = \ln L_a - \ln L_{a+r}$, $d = \frac{L_a}{\epsilon}$ y $\ln \epsilon = \frac{m}{1-q^r}$, y siendo L_x el tamaño de la población en el instante x, a el instante inicial, r la unidad de salto considerada en el tiempo, y p la razón de la progresión geométrica que hay entre el número de personas vivas en el tiempo. Gompertz demostró que la tasa de mortalidad aumenta siguiendo una progresión geométrica. A esta ley de crecimiento se la denomina Ley de Mortalidad de Gompertz. Las curvas logística y Gompertz tienen un crecimiento similar, residiendo su principal diferencia en el porcentaje de crecimiento (en relación con la cota) cuando se alcanza el punto de inflexión.

A la hora de dar la expresión de la curva Gompertz nos encontramos con distintas opciones. Esto es debido a que históricamente se ha asignado ese nombre a una gran variedad de curvas, todas ellas dobles exponenciales, a pesar de que Gompertz introdujo su curva como una doble potencial. Cabe destacar las expresiones de la curva de Gompertz debidas a Winsor [138], Capocelli y Ricciardi [17], Skiadas y et al. [123] y Tan [128], y que vemos a continuación.

Expresión de la curva de Gompertz debida a Winsor

Winsor [138] reescribió la curva originaria de Gompertz, $L_x = dg^{q^x}$, transformándola en una doble exponencial. Para ello consideró

$$d = k \qquad g = e^{-e^a} \qquad q = e^{-b}.$$

La expresión genérica de la curva es, entonces,

$$f(t) = ke^{-e^{a-bt}}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

con k, b y t números reales positivos, siendo k el valor límite de la curva cuando t tiende a infinito, verificándose $f(t) \leq k, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Dada la naturaleza de los fenómenos tratados mediante esta curva, se restringe su estudio en el tiempo a valores superiores a un instante inicial $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Imponiendo que la curva toma el valor x_0 en el instante inicial t_0, $x_0 = f(t_0)$, con $k > x_0 > 0$ la expresión de la curva es

$$f(t) = k \exp\left\{\ln\left(\frac{x_0}{k}\right) e^{-b(t-t_0)}\right\}, \qquad t \geqslant t_0,$$

siendo una curva monótona (creciente si $r \geqslant 0$ y decreciente si $r \leqslant 0$), acotada, con un punto de inflexión donde pasa de ser convexa a cóncava, siendo, por tanto, una curva sigmoidal. Al igual que ocurre con la curva logística, la cota k es constante e independiente del valor inicial. Nótese que el parámetro b influye en la rapidez con que la curva alcanza la cota, lo que parece indicar cierta similitud entre este parámetro y el parámetro r de las curvas exponencial y logística.

Expresión de la curva de Gompertz debida a Capocelli y Ricciardi

En la literatura sobre el estudio de modelos de crecimiento han surgido otras expresiones de la curva Gompertz. Así, Capocelli y Ricciardi [17], usaron

$$f(t) = \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-t_0)}\right) + \ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)}\right\}, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

siendo $\beta > 0$ y $k = e^{\alpha/\beta} > x_0 > 0$. Esta expresión surge de la anterior haciendo $k = e^{\alpha/\beta}$ y $b = \beta$.

Esta curva es sigmoidal, con cota k independiente del valor inicial y presenta un punto de inflexión.

Expresión de la curva de Gompertz debida a Skiadas

Por otro lado, Skiadas [123] consideró la expresión

$$f(t) = \exp\left\{\ln x_0 e^{-\beta(t-t_0)}\right\}, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

siendo $\alpha > \beta > 0$ y $0 < x_0 < 1 = k$.

Vemos que es una particularización de la curva anterior propuesta por Capocelli y Ricciardi [17] en el caso $\alpha = 0$.

Expresión de la curva de Gompertz debida a Tan

Por último, Tan [128] consideró la expresión

$$f(t) = x_0 \exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-t_0)}\right)\right\}, \quad t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

siendo $\alpha > \beta > 0$ y $k > x_0 > 0$.

Esta curva es sigmoidal con un punto de inflexión, pero la principal diferencia de esta última expresión de la curva Gompertz con las anteriores y con la curva logística es que la cota $k = x_0 e^{\alpha/\beta}$ depende del valor inicial.

2.2. Modelos determinísticos de crecimiento

Las curvas de crecimiento están asociadas a una serie de modelos determinísticos. Por ello, una vez que se han estudiado las curvas, una revisión de los modelos asociados a ellas puede ayudarnos a la hora de interpretarlas, estudiarlas más profundamente y compararlas.

2.2.1. Modelo malthusiano

En primer lugar aparece el **modelo malthusiano**, asociado a la **curva exponencial** y propuesto por Thomas R. Malthus [97], como un modelo matemático para el crecimiento de poblaciones humanas. Según Malthus este crecimiento no es acotado (supone que la población aumenta ilimitadamente), lo cual justifica el uso de la curva exponencial carente de cota. En este modelo matemático se propone que el tamaño de la población para una generación depende del tamaño de la generación anterior de forma multiplicativa

$$x(t+1) - x(t) = rx(t)$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el instante t, y $r > 0$, factor Malthusiano, es el múltiplo que determina la tasa de crecimiento.

La solución de la ecuación de crecimiento Malthusiano, en forma diferencial,

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t),$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$, es la curva exponencial.

El modelo Malthusiano puede usarse para estudiar el crecimiento de una nueva especie que llega a un lugar donde hay una gran cantidad de comida, condiciones perfectas para la reproducción y no hay depredadores, o cuando se comienza un estudio de laboratorio bajo condiciones perfectas. Pero este modelo sólo es adecuado bajo condiciones perfectas, lo que McArthur y Wilson [102] llamaron el "equilibrio natural": *"La naturaleza tiene tendencia a equilibrar las cosas y alcanzar un equilibrio armónico. Si se dejara a la naturaleza sola existiría el equilibrio y las poblaciones permanecerían cerca de él"*. Esto motiva el estudio de los siguientes modelos determinísticos asociados a las curvas de crecimiento acotado.

2.2.2. Modelo logístico

El **modelo logístico**, asociado a la **curva logística**, fue propuesto por Pierre F. Verhulst [136] como una modificación del malthusiano, basado en la suposición de que el crecimiento de la población no sólo depende del tamaño de ésta, sino de la distancia de dicho tamaño a su límite superior. Por tanto, este modelo es adecuado para el ajuste de datos que muestren un crecimiento acotado cuya cota no dependa del valor en el instante inicial. Si denotamos por k al tamaño máximo de la población que un hábitat puede soportar, la población crecerá rápidamente si está muy por debajo de k, pero conforme se aproxima a k el crecimiento irá decayendo. Verhulst modificó la ecuación del modelo Malthusiano haciendo que el tamaño de la población fuera proporcional tanto a la población previa como al término $(k - x(t))/k$, proporcionando el modelo

$$x(t+1) - x(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right), \qquad r > 0,$$

que también se puede reescribir como

$$x(t+1) - x(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)^2, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

La solución de la ecuación logística en diferencias, en forma diferencial,

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right),$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$, es la curva logística.

Este modelo es adecuado para ajustar datos que muestren crecimiento acotado, y cuya cota no dependa del valor en el instante inicial, así como para mostrar los efectos de los mecanismos dependientes de la densidad en el crecimiento de la población. Sin embargo, su utilidad en las poblaciones reales es limitada debido a que las dinámicas de crecimiento de éstas son complejas y es difícil obtener un valor real para k en un hábitat dado.

Cabe destacar que autores como May [99], [100] y May y Oster [101] realizaron un estudio del modelo asociado a la curva exponencial y a la curva logística para describir el crecimiento de poblaciones, entre otros modelos. Feller [32], en 1939, realizó un profundo estudio de la ley de crecimiento logístico.

2.2.3. Modelo de crecimiento Gompertz

El proceso logístico presenta el inconveniente de no disponer de una solución exacta para las ecuaciones de difusión, lo cual condujo a Capocelli y Ricciardi [17] a la introducción de un nuevo proceso, el asociado a la **curva Gompertz**, que modeliza un tipo de comportamiento similar al logístico, y cuya cota puede depender del valor inicial, sin presentar el inconveniente anterior. Asociado a la curva Gompertz no existe un único modelo determinístico, ya que existe una gran variedad de curvas con dicho nombre y con la característica común de ser dobles exponenciales. Tan [128] introduce un proceso de nacimiento y muerte Gompertz mediante la condición de que su función media coincida con dicha curva, cuya cota sí depende del valor inicial. Cabe destacar el modelo asociado a la curva Gompertz estudiado por Winsor [138], ya que fue la primera expresión de la curva, así como la más ampliamente estudiada, presentado su modelo cierta similitud con el logístico.

El modelo determinístico asociado a la curva Gompertz que trató Winsor es

$$x(t+1) - x(t) = bx(t)(\ln k - \ln x(t)), \qquad b > 0,$$

que también se puede reescribir como

$$x(t+1) - x(t) = rx(t)\left(1 - \frac{\ln x(t)}{\ln k}\right)$$

con $r = b \ln k$.

Observando este modelo y el anterior asociado a la curva logística se aprecia una fuerte similitud, influyendo los parámetros r y b en la rapidez con que las curvas alcanzan su cota.

La solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = bx(t)(\ln k - \ln x(t)),$$

con condición inicial $x(t_0) = x_0$, es la curva Gompertz.

Debido al creciente interés en el uso de la curva de Gompertz como curva de crecimiento para el estudio de fenómenos en la Biología y en la Economía, en 1932 Charles P. Winsor [138] publicó un artículo donde realizó un estudio matemático de la curva de Gompertz como curva de crecimiento, indicando su utilidad y sus limitaciones en el campo de los seguros. Años más tarde, Laird[88] y [89], tras estudiar algunos tumores durante un periodo de tiempo amplio, concluyó que el modelo exponencial no era totalmente adecuado para la descripción del crecimiento de los mismos, y que el modelo exponencial modificado podría explicar mejor el crecimiento tumoral, por lo que propuso el modelo Gompertz. El modelo Gompertz también se usó para describir el crecimiento de fetos humanos (McCredie [103]), de peces (Silliman [119]) y de tumores experimentales (Simpson-Herren y Lloyd [121]).

El modelo determinístico asociado a la curva Gompertz tratada por Capocelli y Ricciardi puede obtenerse como caso particular del modelo asociado a la curva Gompertz de Winsor. Para ello, basta utilizar la reescritura de los parámetros ($k = e^{\alpha/\beta}, b = \beta$) en el modelo determinístico, obteniéndose $x(t+1) - x(t) = \beta x(t)\left(\frac{\alpha}{\beta} - \ln x(t)\right)$, con $\alpha > \beta > 0$.

Se puede encontrar un estudio de este modelo y del logístico, basado en sus ecuaciones diferenciales de primer orden, en Nobile et al. [109].

2.2.4. Otros modelos

En la introducción de esta memoria ya se citaron algunos otros modelos utilizados como los modelos de Rayleigh, cúbico, ICIR, Vasicek o Gamma entre otros que han sido utilizados para modelizar diferentes variables con o sin factores exógenos como son las emisiones de gases de efecto invernadero, el stock de vehículos, la producción de energía térmica o el consumo de gas natural. Aunque el objetivo de esta tesis no es el estudio de estos modelos, se presentan, a modo de resumen, las ecuaciones diferenciales de cada uno de ellos

- Proceso de Rayleigh:
$$dX_t = \left(\frac{a}{x_t} + bx_t\right) dt + \sigma dW_t$$
- Modelo cúbico:
$$dX_t = (ax_t^3 + bx_t)dt + cx_t^2 dW_t$$
- Modelo ICIR:
$$dX_t = \left(ax_t - bx_t^2\right) dt + \sigma x_t^{3/2}$$
- Modelo de Vasicek:
$$dX_t = (h(t) - \alpha X_t)\, dt + \sigma dW_t \text{ con } h(t) = \beta_0 + \sum \beta_i g(t)$$
- Modelo Gamma:
$$dX_t = \left(\frac{\alpha}{t} - \beta\right) x_t + \gamma x_t dW_t$$
- Potencia del Gamma:
$$X_t = x_t^{\tau} \quad \text{con} \quad x_t \text{ el modelo gamma}$$

con W_t el proceso de Wiener y $\sigma^2 > 0$ y el resto de parámetros reales.

2.3. Modelos estocásticos asociados a los crecimientos exponencial, logístico y Gompertz

El problema que se plantea a la hora de utilizar modelos determinísticos para modelizar un fenómeno de crecimiento es la complejidad propia del fenómeno, ya que su descripción cuantitativa puede requerir la especificación detallada de múltiples factores que no siempre son perfectamente conocidos o cuantificables. Este inconveniente se puede evitar mediante la utilización de **modelos estocásticos**, como los procesos de nacimiento y muerte o procesos de difusión, los cuales han sido ampliamente estudiados para la modelización y estudio de determinados fenómenos dinámicos en diversos campos de aplicación en el ámbito del crecimiento. Así, para modelizar situaciones regidas por variables de naturaleza continua que evolucionan continuamente en el tiempo y con tendencia exponencial, es adecuado el proceso lognormal. En el caso de que las series de datos asociados a las variables en estudio muestren un comportamiento de tipo sigmoidal acotado con cota independiente del valor inicial, pueden utilizarse los procesos logístico o Gompertz, según las particularidades de los datos (por ejemplo, la velocidad de crecimiento hasta el punto de inflexión). En el caso de que el crecimiento acotado muestre dependencia de la cota respecto del valor inicial, se podría usar el modelo de Tan, en el que su curva asociada obedece al comportamiento de varias trayectorias de datos partiendo cada una de ellas de un valor inicial distinto. Sin embargo, este modelo de Tan no contempla variables de naturaleza continua. Esto justifica el interés en obtener un modelo estocástico continuo y, en particular, un proceso de difusión que permita modelizar este tipo de situaciones.

Una forma habitual de obtener modelos estocásticos es introducir una fluctuación aleatoria en los modelos determinísticos. En el caso de los modelos de crecimiento se reemplaza la tasa de crecimiento por la suma de un término constante y un proceso Gaussiano delta-correlado, obteniéndose un modelo estocástico cuya solución, en ausencia de ruido, es la curva del modelo determinístico de partida. Este procedimiento es equivalente a la introducción de una función de regulación aleatoria en el modelo malthusiano. Un planteamiento alternativo consiste en buscar modelos estocásticos cuya función media coincida con la curva del modelo determinístico de partida.

Presentamos a continuación algunos modelos estocásticos asociados a las curvas de crecimiento y modelos determinísticos vistos antes.

2.3.1. Proceso de Difusión Lognormal

Asociado al modelo determinístico malthusiano surge el Proceso de Difusión Lognormal. Este proceso ha sido aplicado en campos científicos como la Ecología, la Economía o el Marketing. En Ecología, Capocelli y Ricciardi [16], [17] y Ricciardi [114], [115] lo estudian como modelo de crecimiento de poblaciones, incluyendo mecanismos de regulación aleatoria a partir del modelo de crecimiento malthusiano. En Economía, Cox y Ross [21] y Merton [104], [105] mostraron su importancia teórica y práctica, al igual que Marcus y Shaked [98]. Por otro lado, Tintner y Sengupta [133] lo han utilizado incluyendo el caso de factores exógenos y aplicándolo a la descripción, predicción y análisis de políticas de crecimiento en materias económicas, poniendo de relieve su interés al realizar predicciones debido a su tendencia exponencial.

Con respecto a la curva exponencial, aunque diversos autores como Lewontin y Cohen

[95] han estudiado procesos discretos, nos centramos en el proceso de difusión lognormal, asociado al modelo de crecimiento no acotado malthusiano, como el más representativo dentro de los modelos continuos.

Para obtener el proceso lognormal, Capocelli y Ricciardi desarrollaron una metodología partiendo de la ecuación diferencial determinística del modelo malthusiano

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t), \qquad r \geqslant 0$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el instante t, r es la tasa de crecimiento (o fertilidad) intrínseca y $x_0 = x(t_0)$ es el tamaño inicial de la población.

Después transformaron la ley determinística en un modelo estocástico, reemplazando la tasa de crecimiento r por $\alpha + \Lambda(t)$, donde α es una constante positiva y $\Lambda(t)$ es un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero, con densidad espectral (o ruido blanco) σ^2 y tal que

$$E[\Lambda(t)] = 0$$

$$Cov[\Lambda(t_1), \Lambda(t_2)] = E[\Lambda(t_1), \Lambda(t_2)] = \sigma^2\delta(t_2 - t_1).$$

Así, la ecuación diferencial determinística anterior queda de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} - \alpha x(t) = x(t)\Lambda(t),$$

o, como es habitual en la notación de ecuaciones diferenciales estocásticas,

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t),$$

donde $\sigma > 0$ y $W(t)$ representa el proceso Wiener estándar. Con esto se supone que el crecimiento exponencial se ve perturbado por factores de cambio que representan el efecto del ambiente en el crecimiento de la población.

La solución de esta ecuación es un proceso de difusión $\{X(t);\ t \geqslant t_0 \geqslant 0\}$ que toma valores en $\mathbb{R}^+$ y con momentos infinitesimales

$$a(x) = mx$$

$$b(x) = \sigma^2 x^2$$

siendo $m = \alpha$ o $m = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ según se haya considerado en la resolución de la ecuación, la integral estocástica de Itô o de Stratonovic, respectivamente.

Este modelo es apropiado para describir, por ejemplo, situaciones como las del crecimiento de bacterias en un entorno no restringido, teniendo cada individuo igual probabilidad de morir o reproducirse en cualquier instante.

La función de densidad de transición del proceso obtenido, $f(x, t \mid x_0, t_0)$, satisface la ecuación de Fokker-Planck (o adelantada)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(mxf) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 f), \qquad 0 < x < \infty$$

y la ecuación de Kolmogorov (o atrasada)

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + mx_0 \frac{f}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_0^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \qquad 0 < x_0 < \infty$$

con la condición inicial $\lim_{t \to t_0} f(x, t \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$, que determina de forma única la función de densidad del proceso. En ausencia de ruido, la ecuación de Fokker-Planck coincide con la curva solución del modelo determinístico de partida, o sea, la población crece según una curva exponencial.

En los últimos años se ha producido un importante avance en el estudio de este proceso, centrándose fundamentalmente en la inferencia, que ha sido tratada empleando tanto muestreo continuo, Basawa y Rao [10], como muestreo discreto. El caso de factores exógenos basado en muestreo discreto ha sido tratado por Tintner y Gómez [131] y generalizado al caso de la difusión en su versión multivariante, tratando la estimación máximo verosímil de los parámetros y contrastes de significación de los factores exógenos por Gutiérrez et al. [75] y [45]. Otras cuestiones de interés han sido el estudio de tiempos de primer paso (Gutiérrez et al. [65], [72] y [73]) así como el estudio teórico de la distribución de la tendencia y función de covarianza estimada del proceso (en su versión univariante), tanto en el caso de la estimación máximo verosímil como la estimación insesgada de mínima varianza (UMVUE) y su aplicación en el campo económico (Gutiérrez et al. [73]), así como la obtención de bandas de confianza para la tendencia.

Más recientemente se han estudiado métodos alternativos para la obtención del proceso lognormal con factores exógenos como caso particular de técnicas generales de obtención de procesos de difusión no homogéneos (Gutiérrez et al. [77]). Además, se ha estudiado el proceso lognormal con factores exógenos en el campo de la predicción (Gutiérrez et al. [70]) y se ha aplicado un caso particular de dicho proceso, en concreto el proceso de difusión lognormal con factores exógenos polinómicos, para la predicción en ausencia de información externa (Gutiérrez et al. [71]). Las últimas líneas de investigación avanzan por la modelización de fenómenos via procesos de difusión lognormales con un tercer parámetro (triparamétricos), donde este tercer parámetro ejerce de cota o de parámetro umbral (Gutiérrez et al. [61]).

2.3.2. Proceso de Difusión Logístico

El modelo estocástico asociado al modelo determinístico logístico es el Proceso de Difusión Logístico. Tiene utilidad a la hora de tratar con situaciones más realistas donde se tenga en cuenta la existencia de una serie de factores que regulan o restringen el crecimiento de la población. Dicha regulación puede ser debida a diversos factores como la limitación de comida o espacio disponible, la acumulación de productos tóxicos o el comportamiento territorial de los parientes (Crow y Kimura [22]). Este proceso ha sido estudiado en Biología, destacando los estudios de los problemas de crecimiento de poblaciones de Ricciardi [115] y Nobile et al. [109]. Además, Tan y Piantadosi [129] lo estudian como límite de un proceso de nacimiento y muerte no homogéno, y Giovanis y Skiadas [40] estudian una particularización del proceso de difusión lognormal mediante la teoría de reducción de ecuaciones diferenciales estocásticas, aplicando dicho modelo a datos de consumo de electricidad en Grecia y Estados Unidos.

Siguiendo a Capocelli y Ricciardi [17], si se conocen los mecanismos de regulación debidos a dichos factores, se puede escribir una ecuación de crecimiento que puede ser representada por la ecuación de Langevin

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t)[1 - \varphi(x(t), t)],$$

donde $\varphi(x(t), t)$ es la función de regulación que implica algunos cambios en la tasa de crecimiento con el tamaño de la población y con el tiempo.

Desde este punto de vista, el proceso logístico puede obtenerse considerando la función $\varphi(x, t)$ particular

$$\varphi(x, t) = \frac{\beta}{\alpha} - x\frac{1}{\alpha}\Lambda(t), \quad \alpha, \beta > 0$$

donde $\Lambda(t)$ es el ruido Gaussiano.

Se considera la ecuación determinística de crecimiento logístico

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x^2(t),$$

con α y β parámetros positivos, siendo $x(t)$ el tamaño de la población en el instante t, $x(t_0) = x_0$ el tamaño inicial de la población, α la tasa de crecimiento, y $k = \alpha/\beta > x_0$ el tamaño máximo que puede alcanzar la población.

Cambiando la tasa de crecimiento α por $\alpha + \Lambda(t)$, siendo $\Lambda(t)$ un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero y densidad espectral σ^2, obtenemos la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \alpha X(t)dt - \beta X^2(t)dt + \sigma X(t)dW(t).$$

La interpretación de este procedimiento es la consideración de poblaciones caracterizadas por el mismo número inicial de individuos, cuyo crecimiento está aleatoriamente alterado por la presencia de factores de cambio y que, a su vez, tienen una restricción o regulación en el crecimiento.

La solución de la ecuación anterior es un proceso de difusión que toma valores en $\mathbb{R}^+$, $\{X(t);\ t \geqslant t_0 \geqslant 0\}$, y con momentos infinitesimales

$$a(x) = mx - \beta x^2$$

$$b(x) = \sigma^2 x^2$$

siendo $m = \alpha$ o $m = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ según se haya considerado en la resolución de la ecuación, la integral estocástica de Itô o de Stratonovic, respectivamente.

La función de densidad de transición del proceso obtenido, $f(x, t \mid x_0, t_0)$, satisface la ecuación de Fokker-Planck (o adelantada)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((m - \beta x)xf) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 f), \qquad 0 < x < \infty$$

y la ecuación de Kolmogorov (o atrasada)

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + (m - \beta x_0)x_0\frac{f}{\partial x_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 x_0^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0, \qquad 0 < x_0 < \infty$$

con la condición inicial $\lim_{t \to t_0} f(x, t \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$, que determina de forma única la función de densidad del proceso.

En ausencia de ruido, la ecuación de Fokker-Planck coincide con la curva solución del modelo determinístico de partida, o sea, la población crece según una curva logística con valor asintótico $k = m/\beta$. Sin embargo, cuando la intensidad del ruido no se anula, no se conoce una solución exacta para las ecuaciones atrasada y adelantada, a pesar de los esfuerzos de diversos autores como Levins [94], motivados por la importancia de este modelo dentro del campo del crecimiento de poblaciones.

El problema de desconocer la solución exacta para las ecuaciones de difusión del proceso logístico impulsó a Capocelli y Ricciardi [17] a introducir un nuevo modelo para el crecimiento de poblaciones en entornos aleatorios cuyo interés reside en que, por un lado, el modelo retiene las principales características de las ecuaciones adelantada y atrasada en el sentido en que en ausencia de ruido se reduce a una ley de crecimiento muy similar a la ley logística y, por otro lado, en esta ocasión el modelo puede ser obtenido de forma exacta para valores arbitrarios de la intensidad de ruido σ^2. Este nuevo modelo estocástico es el que surgirá asociado al modelo determinístico de la curva Gompertz que introdujeron Capocelli y Ricciardi y que se estudiará en la siguiente sección.

2.3.3. Proceso de Difusión Gompertz

Con respecto a la curva Gompertz, objeto fundamental de nuestro estudio, no existe una única expresión de la misma, existiendo diversos modelos estocásticos asociados a ella, entre los que destacaremos el proceso Gompertz propuesto por Capocelli y Ricciardi y el proceso de nacimiento y muerte Gompertz, obtenido por Tan [128] en 1986 al imponer que la función media de dicho proceso sea la curva Gompertz considerada por él. Las curvas Gompertz consideradas por Capocelli y Ricciardi y Tan tienen propiedades y aplicaciones distintas.

Proceso propuesto por Capocelli y Ricciardi

Debido a la imposibilidad de obtener solución exacta para las ecuaciones de difusión del proceso logístico, Capocelli y Ricciardi introdujeron un nuevo modelo para el crecimiento de poblaciones en entornos aleatorios con características similares al crecimiento logístico y con la particularidad de su obtención de forma explícita. Así, partieron del proceso lognormal y modificaron su media infinitesimal, incluyendo un término proporcional a $x \log x$ y mantuvieron igual su varianza infinitesimal, obteniendo la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left((\alpha - \beta \; logx)xf\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 f), \qquad 0 < x < \infty$$

cuya solución, en ausencia de ruido, es

$$f(x, t|x_0, t_0) = \delta\left(x - \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + \log x_0 e^{-\beta(t-t_0)}\right)\right),$$

siendo la condición inicial $\text{lím}_{t \to t_0} f(x, t \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$, lo que implica

$$x(t) = \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-t_0)}) + \log x_0 e^{-\beta(t-t_0)}\right).$$

Es decir, el tamaño de la población está especificado de forma única en cualquier tiempo dado por la curva de crecimiento Gompertz introducida por Capocelli y Ricciardi, cuyo comportamiento es muy similar al de la curva logística. La principal diferencia entre ambos modelos es la sustitución en la media infinitesimal del término proporcional a x^2 por un término proporcional a $x \log x$, lo cual se traduce en un crecimiento más rápido para valores grandes de x.

Se puede escribir una ecuación de crecimiento que puede ser representada por la ecuación de Langevin

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t)[1 - \varphi(x(t), t)],$$

donde $\varphi(x(t), t)$ es la función de regulación que implica algunos cambios en la tasa de crecimiento con el tamaño de la población y con el tiempo.

Desde este punto de vista, el proceso Gompertz puede obtenerse considerando la función $\varphi(x, t)$ particular

$$\varphi(x, t) = \frac{\beta}{\alpha} \log x - \frac{1}{\alpha} \Lambda(t), \quad \alpha, \beta > 0$$

donde $\Lambda(t)$ es el ruido Gaussiano.

De forma equivalente, se puede considerar la ecuación determinística de crecimiento Gompertz

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t) \log x(t),$$

con α y β parámetros positivos, siendo $x(t)$ el tamaño de la población en el instante t, $x(t_0) = x_0$ el tamaño inicial de la población y α la tasa de crecimiento.

Cambiando la tasa de crecimiento α por $\alpha + \Lambda(t)$, siendo $\Lambda(t)$ un proceso Gaussiano delta-correlado de media cero y densidad espectral σ^2, obtenemos la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = (\alpha - \beta \log X(t))X(t)dt + \sigma X(t)dW(t).$$

La solución de la ecuación anterior es un proceso de difusión que toma valores en $\mathbb{R}^+$, $\{X(t);\ t \geqslant t_0 \geqslant 0\}$, y con momentos infinitesimales

$$a(x) = mx - \beta x \log x$$

$$b(x) = \sigma^2 x^2$$

siendo $m = \alpha$ o $m = \alpha + \frac{\sigma^2}{2}$ según se haya considerado en la resolución de la ecuación, la integral estocástica de Itô o de Stratonovic, respectivamente. A este proceso se le denomina proceso de difusión Gompertz (propuesto por Capocelli y Ricciardi).

Este proceso ha sido objeto de estudio por diversos autores, así Nafidi [108] obtuvo resultados sobre inferencia, extendiéndolos al caso multivariante y considerando una versión no homogénea a partir de la introducción de funciones dependientes del tiempo en los momentos infinitesimales del proceso. Gómez y Buendía [41] estudiaron la versión de Itô destacando que el proceso lognormal puede obtenerse como un caso particular del proceso Gompertz. Gutiérrez et al. ([57], [51] y [53]) propusieron métodos alternativos para la obtención de la versión no homogénea del proceso Gompertz introducido por Capocelli y Ricciardi, además de estudiar la inferencia en procesos Gompertz de tipo no homogéneo mediante muestreo discreto.

Proceso propuesto por Tan

Tan [128] justifica la introducción del proceso estocástico Gompertz de nacimiento y muerte como una extensión del modelo de crecimiento determinístico Gompertz, aumentando así el potencial de sus aplicaciones. Consideró un proceso no homogéneo de nacimiento y muerte con tasa de nacimiento $b(t)$ y tasa de muerte $d(t)$, siendo $b(t)$ y $d(t)$ funciones continuas no negativas, esto es, para $j = 0, 1, \ldots$

$$P[X(t + \Delta t) = j + 1 | X(t) = j] = jb(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P[X(t + \Delta t) = j - 1 | X(t) = j] = jd(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P[X(t + \Delta t) = j | X(t) = j] = 1 - j(b(t) + d(t))\Delta t + o(\Delta t),$$

donde

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

y definió el proceso de Gompertz de nacimiento y muerte como aquel que verifica

$$E[X(t)|X(t_0) = x_0] = x_0 \exp\left(\frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-t_0)})\right),$$

es decir, la función esperanza condicionada de $X(t)$, dado $X(t_0) = x_0$, es la curva Gompertz (según Tan) con parámetros α y β. Esta propiedad es interesante para fines predictivos, y no la cumple el proceso de Capocelli y Ricciardi. Además, Tan dio una condición necesaria y suficiente para que este hecho se verifique: El proceso estocástico definido anteriormente es un proceso estocástico Gompertz de nacimiento y muerte con tasa de nacimiento $b(t)$, tasa de muerte $d(t)$ y parámetros α y β, si y sólo si $\gamma(t) = b(t) - d(t)$ satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = -\beta\gamma(t), \qquad \gamma(t_0) = b(t_0) - d(t_0) = \alpha.$$

Como ya se comentó anteriormente, ésta es una de las posibilidades para obtener procesos de difusión asociados a modelos determinísticos. A diferencia de lo desarrollado para los modelos anteriores, cuyas soluciones de las ecuaciones de Fokker-Planck en ausencia de ruido son las curvas determinísticas correspondientes, ahora se busca un proceso cuya función media sea la curva. Esto tiene especial sentido si se buscan modelos estocásticos con fines predictivos, ya que la función media suele ser la función más utilizada a la hora de predecir. Las dos alternativas no son excluyentes, sino que parten de objetivos completamente distintos, pero no incompatibles. Esto hace pensar que la combinación de ambas opciones puede originar procesos estocásticos asociados a modelos determinísticos "mejores", y que permita encontrar procesos aleatorios con espacio de estados continuos (en particular difusiones) cuya función media coincida con una curva concreta.

Capítulo 3

Proceso Gompertz univariante homogéneo y no homogéneo

3.1. Proceso de difusión Gompertz univariante homogéneo

3.1.1. Definición del modelo

Sea $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión $\mathbb{R}$-valuado con función de densidad de transición fdt dada por:

$$P(y, t \mid x, s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

y con coeficientes de tendencia y de difusión de la forma:

$$a(x, t) = g(t)x - h(t)x \log(x) = \alpha x - \beta x \log(x)$$

$$b(x, t) = \sigma^2 x^2$$

con $\sigma > 0$, α y β parámetros constantes. El Proceso de difusión univariante homogéneo así definido se denomina proceso de difusión de Gompertz. Si $\beta = 0$, tenemos el Proceso de Difusión lognormal univariante homogéneo.

Las ecuaciones adelantada y atrasada de Kolmogorov verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido tienen la forma:

- Ecuación adelantada:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\{(\alpha y - \beta y \log(y))P\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma^2 y^2 P\}$$

- Ecuación atrasada:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\{\alpha x - \beta x \log(x)\}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

siendo $P = P(y, t \mid x, s)$, con la condición inicial $P(y, t \mid x, t) = \delta(y - x)$.

3.1.2. Densidad de transición

Para determinar la fdt del proceso, P, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi, que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t) = \lg X(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener. El proceso Gompertz antes definido verifica la condición necesaria y suficiente de este teorema con las funciones c_1 y c_2 dadas por:

$$c_1(t) = \frac{2}{\sigma}(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}) = \frac{2}{\sigma}k(t)$$

$$c_2(t) = -2\beta$$

y, por lo tanto, la transformación adecuada es:

$$\Psi(x,t) = \frac{\log(x)}{\sigma}e^{t\beta} - \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta\sigma}e^{t\beta}$$

$$\Phi(t) = \frac{e^{2t\beta}}{2\beta}$$

por lo que se puede obtener la fdt del proceso a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi junto con la transformación anterior.

A partir de las ecuaciones de Kolmogorov se obtiene, como solución, la densidad de transición condicionada:

$$P(y,t \mid x,s) =$$

$$\left\{\frac{2\pi\sigma^2}{2\beta}[1 - e^{-2\beta(t-s)}]\right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \exp\left\{ -\frac{\left[\log(y) - e^{-\beta(t-s)}\log(x) - \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})\right]^2}{2\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)})} \right\} =$$

$$\{(2\pi)v(s,t)\}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\log(y) - m(s,t)]^2}{v(s,t)}\right\},$$

siendo:

$$m(s,t) = e^{-\beta(t-s)}\log(x) + \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)})$$

$$v(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}).$$

Por lo tanto, la fdt del proceso Gompertz univariante $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ se corresponde con la densidad de una distribución lognormal univariante $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$.

3.1.3. Momentos del proceso

Como la variable aleatoria $X(t) \mid X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, entonces aplicando resultados conocidos de dicha distribución, podemos obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$E[X^r(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{rm(s,t) + \frac{r^2}{2}v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{r\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} + r\int_s^t k(u)e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta}du + \frac{r^2\sigma^2}{2}\int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta}du\right\} =$$

$$\exp\left\{re^{-\beta(t-s)}\log(x) + r\frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) + \frac{r^2\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} =$$

$$\exp\left\{re^{-\beta(t-s)}\log(x)\right\}\exp\left\{\frac{r\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\right\}\exp\left\{\frac{r\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\left[r\left(1 + e^{-\beta(t-s)}\right) - 2\right]\right\}.$$

Tendencia

El momento de primer orden, $r = 1$, tiene la expresión:

$$E[X(t) \mid X(s) = x] =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)}\log(x)\right\}\exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\right\}\exp\left\{\frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\left[\left(1 + e^{-\beta(t-s)}\right) - 2\right]\right\} =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)}\log(x)\right\}\exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)^2\right\} =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)}\log(x)\right\}\exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\right\}\exp\left\{+\frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{2\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Utilizando la expresión anterior, la función tendencia condicionada para una realización del proceso es:

$$E[X(t_i) \mid X(t_{i-1}) = x_{i-1}] =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t_i-t_{i-1})}\log(x_{i-1})\right\}\exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t_i-t_{i-1})}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-\beta(t_i-t_{i-1})}\right)^2\right\},$$

y, considerando que $P(X(0) = x_0) = 1$, la función tendencia condicionada es:

$$E[X(t) \mid X(0) = x_0] = E[X(t)] =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta t}\log(x_0)\right\}\exp\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)\right\}\exp\left\{+\frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)\right\}\exp\left\{-\frac{2\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)\right\}.$$

Varianza

La varianza condicionada del proceso se expresa de la forma:

$$Var[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{2m(s,t) + 2v(s,t)\right\} - \exp\left\{2m(s,t) + v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{2m(s,t) + v(s,t)\right\} \times \left(\exp\left\{v(s,t)\right\} - 1\right) =$$

$$\exp\left\{2e^{-\beta(t-s)}\log(x)\right\}\exp\left\{\frac{2\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\right\} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)^2\right\}\left(\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} - 1\right).$$

3.1.4. Estimación de los parámetros

A continuación se trata de estimar los parámetros del proceso Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto$(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$ y notamos

$$r_j = t_j - t_{j-1}, \qquad \gamma = \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \qquad \theta_j = e^{-\beta r_j}$$

con lo que la función de verosimilitud asociada vendrá dada por la siguiente expresión, en la que se utiliza la función de densidad de probabilidad del proceso Gompertz:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n \mid \gamma, \beta, \sigma^2) = P(x_0, t_0) \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j \mid x_{j-1}, t_{j-1}) =$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\left\{ 2\pi \left[\frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta r_j}\right) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[\log(x_j) - e^{-\beta r_j} \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta r_j}) \right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta r_j})} \right\} \right).$$

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función también maximizan su logaritmo, tomando logaritmos, se tiene:

$$\log(\mathbb{L}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right) + \sum_{j=1}^{n} \log(x_j^{-1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \log(1 - e^{-2\beta r_j}) -$$

$$-\frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - e^{-\beta r_j} \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta r_j}) \right]^2}{(1 - e^{-2\beta r_j})} =$$

$$= -\frac{n}{2} \lg(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \frac{n}{2} \log(2\beta) - \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \log(1 - \theta_j^2) -$$

$$-\frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]^2}{(1 - \theta_j^2)}.$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros γ, σ^2 y β, calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de ellos, e igualamos a cero.

Para el **parámetro $\boldsymbol{\gamma}$** tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \gamma} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}}{1 + \theta_j}$$

Igualando a cero dicha derivada parcial,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1})}{1+\theta_j} - \frac{\gamma}{\beta} \sum_{j=1}^{n} \frac{1-\theta_j}{1+\theta_j} = 0$$

con lo que se obtiene el estimador:

$$\hat{\gamma} = \hat{\beta} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1-\hat{\theta}_j}{1+\hat{\theta}_j} \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\log(x_j) - \hat{\theta}_j \log(x_{j-1})}{1+\hat{\theta}_j} \right).$$

Para el **parámetro $\boldsymbol{\sigma^2}$** seguiremos el mismo proceso:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]^2}{1-\theta_j^2}$$

con lo que:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]^2}{1-\theta_j^2} = 0$$

de manera que el estimador queda:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - \hat{\theta}_j \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}(1-\hat{\theta}_j)}{\hat{\beta}}\right]^2}{1-\hat{\theta}_j^2}$$

Para el **parámetro $\boldsymbol{\beta}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j^2 r_j}{1-\theta_j^2} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}}{1-\theta_j^2} \times \left[\theta_j r_j \log(x_{j-1}) - \gamma \left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1-\theta_j}{\beta^2} \right)\right] +$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \theta_j r_j \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]^2}{(1-\theta_j^2)^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]^2}{1-\theta_j^2}.$$

Denotando $B_j = \log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1-\theta_j)$, queda:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j^2 r_j}{1-\theta_j^2} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2}{1-\theta_j^2} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j\left[r_j\theta_j\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1-\theta_j}{\beta^2}\right)\right](1-\theta_j^2) - B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1-\theta_j^2)^2}.$$

Utilizando la expresión del estimador $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j^2 r_j}{1-\theta_j^2} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{n\sigma^2}{2\beta} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j\left[r_j\theta_j\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1-\theta_j}{\beta^2}\right)\right](1-\theta_j^2) - B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1-\theta_j^2)^2} =$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j^2 r_j}{1-\theta_j^2} - \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j\left[r_j\theta_j\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1-\theta_j}{\beta^2}\right)\right](1-\theta_j^2) - B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1-\theta_j^2)^2} =$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\theta_j^2 r_j}{1-\theta_j^2} - \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j r_j \theta_j \log(x_{j-1})}{1-\theta_j^2} +$$

$$+\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j\gamma(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1-\theta_j}{\beta^2})}{1-\theta_j^2} + \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1-\theta_j^2)^2}.$$

Igualando a cero en la expresión anterior y sustituyendo los estimadores de γ y σ^2, obtenemos una ecuación no lineal que puede ser resuelta por métodos numéricos. Cuando se hace tender $\hat{\beta}$ a cero en las expresiones de $\hat{\gamma}$ y de $\hat{\sigma}^2$, aparecen precisamente los estimadores de los parámetros del Proceso Lognormal Univariante

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{t_n - t_0}\sum_{j=1}^{n}(\log(x_j) - \log(x_{j-1}))$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{[\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - (t_j - t_{j-1})\hat{\gamma}]^2}{t_j - t_{j-1}}$$

Caso particular: intervalos de amplitud 1

Un caso particular, de gran interés en relación a su utilidad práctica, es aquel en el que las observaciones están hechas en intervalos igualmente espaciados y con $r_j = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, los incrementos entre cada uno de los instantes de tiempo en el que se realizan las observaciones son iguales a la unidad.

En este caso, aparece una expresión explícita para todos los estimadores de los parámetros, lo que conlleva la gran ventaja de que no hay que resolver ninguna ecuación lineal. Bajo esta consideración los estimadores antes calculados serían:

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\beta}}{n(1 - e^{-\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) \right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n(1 - e^{-2\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1 - e^{-\hat{\beta}}) \right)^2.$$

Nótese que $\theta_j = e^{-\beta}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$.

A fin de obtener la expresión del estimador del parámetro β, denotemos:

$$B_j = \log(x_j) - e^{-\beta} \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta})$$

La log-verosimilitud queda entonces:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n\theta^2}{1 - \theta^2} - \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1 - \theta^2)} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) + \frac{2\beta\gamma \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1-\theta}{\beta^2} \right)}{\sigma^2(1 - \theta^2)} \sum_{j=1}^{n} B_j + \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1 - \theta^2)^2} \sum_{j=1}^{n} B_j^2.$$

Puede comprobarse que $\sum_{j=1}^{n} B_j = 0$, por lo que utilizando la expresión anterior de

$\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n\theta^2}{1-\theta^2} - \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1-\theta^2)} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) +$$

$$\frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1-\theta^2)^2} \frac{n\sigma^2(1-\theta^2)}{2\beta} - \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1-\theta^2)} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) = 0.$$

Reemplazando B_j y θ por su valor, y utilizando la expresión anterior de $\hat{\gamma}$, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1-e^{-\hat{\beta}}) \right) \log(x_{j-1}) = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \sum_{j=1}^{n} \log^2(x_{j-1}) -$$

$$\frac{\hat{\beta}}{n\hat{\beta}(1-e^{-\hat{\beta}})}(1-e^{-\hat{\beta}}) \sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) \right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \sum_{j=1}^{n} \log^2(x_{j-1}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - \frac{1}{n} e^{-\hat{\beta}} \left(\sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \right)^2 .$$

Con todo lo anterior, se obtiene el estimador del parámetro β:

$$\hat{\beta} = \log \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - n \sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \log(x_j)}{\left(\sum_{j=1}^{n} \log(x_{j-1}) \right)^2 - n \sum_{j=1}^{n} \log^2(x_{j-1})} \right\} .$$

3.2. Proceso de difusión Gompertz univariante no homogéneo

El Proceso de Gompertz se puede mejorar introduciendo en él algunas variables externas que puedan ayudar a explicar su comportamiento, incluyendo en la tendencia del proceso univariante ciertos factores exógenos que afecten al comportamiento de la variable endógena. En principio estos factores serán funciones continuas que dependerán de ciertos parámetros. Consideraremos la inferencia mediante muestreo discreto.

Introduciremos el proceso no homogéneo, via sus ecuaciones de difusión, y se planteará la dificultad de la obtención de los estimadores de los parámetros.

3.2.1. Definición del modelo

Sea $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión $\mathbb{R}$-valuado con función de densidad de transición dada por:

$$P(y,t \mid x,s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

y con los momentos infinitesimales, coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$a(x,t) = g(t)x - h(t)x\log(x)$$

$$b(x,t) = \sigma^2 x^2$$

con g y h dos funciones continuas paramétricas, que dependen de cierto número de parámetros, y $\sigma > 0$ parámetro constante. El proceso de difusión así definido se denomina *Proceso de difusión Gompertz univariante no homogéneo* o con factores exógenos.

Si $g(t) = \alpha$ y $h(t) = \beta$, siendo α y β parámetros constantes, tenemos el proceso de difusión Gompertz univariante homogéneo visto antes. Si $h(t) = 0$, tenemos el proceso de difusión Lognormal univariante no homogéneo.

Las ecuaciones de difusión, adelantada y atrasada de Kolmogorov, verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido, tienen la forma:

- Ecuación adelantada:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{(g(t)y - h(t)y\log(y))P\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma^2 y^2 P\}$$

- Ecuación atrasada:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\{g(s)x - h(s)x\log(x)\}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

donde $P = P(y, t \mid x, s)$ es la función de densidad de transición, con la condición inicial $P(y, t \mid x, t) = \delta(y - x)$.

3.2.2. Densidad de transición

Tiene un gran interés estudiar las transformaciones de los procesos de difusión, via ecuaciones de Kolmogorov o via ecuaciones de Itô, con su cálculo estocástico asociado. Una de las transformaciones más interesantes de los procesos de difusión es la transformación al proceso de Wiener, aunque no es obvio que cualquier proceso de difusión se pueda transformar al proceso de Wiener, ni tampoco sea fácil encontrar, en su caso, las funciones adecuadas para realizar dicha transformación. El siguiente teorema de Ricciardi [114] nos da la condición necesaria y suficiente para que un proceso de difusión se pueda transformar al proceso de Wiener, y además proporciona las funciones que aseguran dicha transformación.

Para determinar la fdt del proceso, P, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi, que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t) = \log X(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener.

Teorema 1. *Sea un proceso de difusión unidimensional* $\{X(t);\ t_0 \leq t\}$*, en general no* *homogéneo, con función de densidad de transición (fdt)* $P(y,t \mid x,s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$*, definido en un intervalo* I*, y con momentos infinitesimales* $a(x,s)$ *y* $b(x,s)$*.*

Consideremos un proceso de Wiener $\{W(t');\ t'_o \leq t'\}$*, con fdt* $P'(y',t' \mid x',s')$*, definido en el intervalo* $I' = (-\infty, +\infty)$*. Y, utilizando la transformación que relaciona las ecuaciones de Kolmogorov de ambos procesos:*

$$\frac{\partial P}{\partial s} + a(x,s)\frac{\partial P}{\partial x} + b(x,s)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial P'}{\partial s'} + \frac{\partial^2 P'}{\partial x'^2} = 0$$

La condición necesaria y suficiente para que exista la transformación del proceso $\{X(t); t_0 \leq t\}$ *al proceso de Wiener* $\{W(t'); t'_o \leq t'\}$*, es que existan dos funciones* $c_1(t)$ *y* $c_2(t)$ *dadas por:*

$$c_1(t) = \frac{2}{\sigma}\left(g(t) - \frac{\sigma^2}{2}\right) = \frac{2}{\sigma}k(t)$$
$$c_2(t) = -2h(t)$$

tales que se verifica:

$$a(x,t) = \frac{1}{4}\frac{\partial b(x,t)}{\partial x} + \frac{b(x,t)^{\frac{1}{2}}}{2}\left\{c_1(t) + \int^x \frac{c_2(t)b(y,t) + \frac{\partial b(y,t)}{\partial t}}{b(y,t)^{\frac{3}{2}}}dy\right\}.$$

La transformación adecuada de esta difusión al Wiener viene dada en función de las funciones:

$$\Psi(x,t) =$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t c_2(\theta)d\theta\right\}\int^x [b(y,t)]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t c_1(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^{t} -2h(\theta)d\theta\right\}\int^{x}[\sigma^2y^2]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^{t}\frac{2}{\sigma}k(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^{s} -2h(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$e^{\int^{t}h(\theta)d\theta}\int^{x}\frac{dy}{\sigma y}-\frac{1}{\sigma}\int^{t}\left(g(s)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^{s}h(\theta)d\theta}ds = \frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^{t}h(\theta)d\theta}-\frac{1}{\sigma}\int^{t}\left(g(s)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^{s}h(\theta)d\theta}ds$$

y

$$\Phi(t) = \int^{t}\exp\left\{-\int^{s}c_2(\theta)d\theta\right\}ds = \int^{t}\exp\left\{-\int^{s}-2h(\theta)d\theta\right\}ds = \int^{t}e^{2\int^{s}h(\theta)d\theta}ds,$$

de manera que ambas funciones están relacionadas por la siguiente expresión:

$$P(y,t\mid x,s) = P'(y',t'\mid x',s')\frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y} = P'(\Psi(y,t),\Phi(t)\mid \Psi(x,s),\Phi(s))\frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y}.$$

Sabiendo que la función de densidad de un proceso de Wiener es la de una distribución Normal, tenemos que se puede obtener la función de densidad de transición (fdt) del proceso

$$P(y,t\mid x,s) = (2\pi[\Phi(t)-\Phi(s)])^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{[\Psi(y,t)-\Psi(x,s)]^2}{2[\Phi(t)-\Phi(s)]}\right\}\frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y}$$

a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi junto con la transformación anterior y teniendo en cuenta que:

$$\Phi(t)-\Phi(s) = \int^{t}e^{2\int^{u}h(\theta)d\theta}du - \int^{s}e^{2\int^{u}h(\theta)d\theta}du = \int_{s}^{t}e^{2\int^{u}h(\theta)d\theta}du$$

y

$$\Psi(y,t)-\Psi(x,s) =$$

$$\frac{\log(y)}{\sigma}e^{\int^{t}h(\theta)d\theta}-\frac{1}{\sigma}\int^{t}\left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^{u}h(\theta)d\theta}du-\frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^{s}h(\theta)d\theta}+\frac{1}{\sigma}\int^{s}\left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^{u}h(\theta)d\theta}du =$$

$$\frac{e^{\int^{t}h(\theta)d\theta}}{\sigma}\left(\log(y)-\log(x)e^{-\int_{s}^{t}h(\theta)d\theta}\right)-\frac{e^{\int^{t}h(\theta)d\theta}}{\sigma}\left(\int_{s}^{t}\left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\int^{t}h(\theta)d\theta}e^{\int^{u}h(\theta)d\theta}du\right) =$$

$$\frac{e^{\int^{t}h(\theta)d\theta}}{\sigma}\left(\log(y)-\log(x)e^{-\int_{s}^{t}h(\theta)d\theta}-\int_{s}^{t}\left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\int_{u}^{t}h(\theta)d\theta}du\right)$$

junto con que

$$\frac{\partial \Psi(y,t)}{\partial y} = \frac{1}{y\sigma} e^{\int^t h(\theta)d\theta},$$

de manera que

$$P(y,t \mid x,s) = (2\pi[\Phi(t)-\Phi(s)])^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{[\Psi(y,t)-\Psi(x,s)]^2}{2[\Phi(t)-\Phi(s)]}\right\} \frac{\partial \Psi(y,t)}{\partial y} =$$

$$\left(2\pi \int_s^t e^{2\int^u h(\theta)d\theta} du\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{y\sigma} e^{\int^t h(\theta)d\theta} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{\left[\frac{1}{\sigma} e^{\int^t h(\theta)d\theta}\left(\log(y)-\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} - \int_s^t \left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right)\right]^2}{2\int_s^t e^{2\int^u h(\theta)d\theta} du}\right\} =$$

$$\left(2\pi\sigma^2 \int_s^t e^{2\int^u h(\theta)d\theta} e^{-2\int^t h(\theta)d\theta} du\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{\left[\log(y)-\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} - \int_s^t \left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right]^2}{2\sigma^2 \int_s^t e^{2\int^u h(\theta)d\theta} e^{-2\int^t h(\theta)d\theta} du}\right\} =$$

$$\left(2\pi\sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{\left[\log(y)-\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} - \int_s^t \left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right]^2}{2\sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta} du}\right\}.$$

Por lo tanto, la fdt del proceso univariante $Y(t) = \log X(t)$ es la densidad de una distribución normal univariante $\mathcal{N}\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, siendo:

$$m(s,t) = \log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} + \int_s^t k(u) e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du = \log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} + \int_s^t \left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du$$

$$v(s,t) = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta} du$$

con lo que se deduce que la distribución de $X(t)$ es lognormal $\Lambda\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, con función de densidad de transición:

$$P(y,t|x,s) = (2\pi v(s,t))^{-\frac{1}{2}}\, y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\log(y)-m(s,t)]^2}{v(s,t)}\right\} =$$

$$\left(2\pi\sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right)^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y)-\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} - \int_s^t \left(g(u)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right]^2}{\sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta} du}\right\}.$$

3.2.3. Momentos del proceso

Como la variable aleatoria $X(t) \mid X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, entonces aplicando resultados conocidos de dicha distribución, podemos obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$E[X^r(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{rm(s,t) + \frac{r^2}{2} v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{r\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} + r\int_s^t k(u)e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du + \frac{r^2\sigma^2}{2}\int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right\}$$

siendo $k(u) = \left(g(u) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$

Tendencia

El momento de primer orden, $r = 1$, **tendencia condicionada**, tiene la expresión:

$$E[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)dz\theta} + \int_s^t k(u)e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta} du + \frac{\sigma^2}{2}\int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta} du\right\}.$$

Varianza

La **varianza condicionada** del proceso se expresa de la forma:

$$Var[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\{2m(s,t) + 2v(s,t)\} - \exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} =$$

$$\exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} \times (\exp\{v(s,t)\} - 1) =$$

$$\exp\left\{2\log(x)e^{-\int_s^t h(\theta)d\theta} + 2\int_s^t k(u)e^{-\int_u^t h(\theta)d\theta}du + \sigma^2\int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta}du\right\}\times$$

$$\left(\exp\left\{\sigma^2\int_s^t e^{-2\int_u^t h(\theta)d\theta}du\right\} - 1\right).$$

3.2.4. Estimación de los parámetros

A continuación se trata de estimar los parámetros del proceso Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto$(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

Si tenemos en cuenta que

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta)e^{-\int_\theta^{t_j} h(z)dz}d\theta = \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta)e^{-\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz}d\theta$$

notaremos por:

$$m_j = m(t_{j-1}, t_j) = \log(x_{j-1})e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta)e^{-\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz}d\theta$$

$$v_j = v(t_{j-1}, t_j) = \sigma^2\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz}d\theta.$$

La función de verosimilitud asociada al proceso vendrá dada por la siguiente expresión, en la que se utiliza la función de densidad de probabilidad del Proceso Gompertz:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = P(x_0, t_0) \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j \mid x_{j-1}, t_{j-1}) = \prod_{j=1}^{n} \{2\pi v_j\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times \exp\left\{ -\frac{[\log(x_j) - m_j]^2}{2v_j} \right\} =$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left\{ 2\pi\sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta \right\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times$$

$$\exp\left\{ -\frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1}) e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta) e^{-\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta\right]^2}{2\sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta} \right\}.$$

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función también maximizan su logaritmo, tomando logaritmos, se tiene:

$$\log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \log\left(2\sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta \right) -$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\log(x_j) - \log(x_{j-1}) e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta) e^{-\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta \right)^2}{\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta}.$$

Para poder maximizar esta función respecto a los parámetros desconocidos necesitamos conocer la forma de las funciones h y g, y esto no es siempre posible, ya que implicaría conocer la función que mejor se ajusta a los factores exógenos introducidos en el proceso y que, a su vez, tenga una integral que pueda ser resuelta. A pesar de la simplicidad de tomar como factores exógenos, por ejemplo, $h(t) = \left(\frac{\theta}{1+t}\right)_{\theta > -\frac{1}{2}}$ y $g(t) = \frac{\sigma^2}{2} + h(t)$, se obtienen ecuaciones que deben ser resueltas mediante métodos numéricos.

Por este motivo, **en los siguientes capítulos se plantea la posibilidad de realizar inferencia considerando casos particulares, en los que las funciones** h **y** g **sean de tal forma que sea posible trabajar analíticamente con la función de verosimilitud asociada,** siendo este el objetivo fundamental de esta tesis.

Capítulo 4

Casos particulares del proceso de difusión Gompertz univariante no homogéneo

4.1. Caso 1: $g(t) = \alpha - c(t)$ y $h(t) = \beta$

4.1.1. Definición del modelo

Sea $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión $\mathbb{R}$-valuado con función de densidad de transición (fdt) dada por:

$$P(y, t \mid x, s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

y con los momentos infinitesimales, coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$a(x, t) = g(t)x - h(t)x\log(x) = (\alpha - c(t))\, x - \beta x \log(x)$$

$$b(x, t) = \sigma^2 x^2$$

con α y β parámetros, $c(t)$ una función, y $\sigma > 0$ parámetro constante. Si $g(t) = \alpha$, siendo α parámetro constante, tenemos el *proceso de difusión Gompertz univariante homogéneo.*

Las ecuaciones de difusión, adelantada y atrasada de Kolmogorov, verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido tienen la forma:

- Ecuación adelantada:
$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\left(\alpha - c(t)\right) y - \beta y \log(y)\right) P\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma^2 y^2 P\}$$
- Ecuación atrasada:
$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\{\left(\alpha - c(s)\right) x - \beta x \log(x)\}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$
donde P es la función de densidad de transición.

4.1.2. Densidad de transición

Para determinar la fdt del proceso, P, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi, que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t) = \log X(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener. Las funciones buscadas para que se verifique la condición necesaria y suficiente de este teorema (existencia de las mismas) son c_1 y c_2 dadas por:

$$c_1(s) = \frac{2}{\sigma}k(s) = \frac{2}{\sigma}\left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right) = \frac{2}{\sigma}\left(\alpha - c(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$
$$c_2(s) = -2h(s) = -2\beta$$

y, por lo tanto, la transformación adecuada es:

$$\Psi(x,t) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t c_2(\theta)d\theta\right\}\int^x [b(t,y)]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t c_1(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t -2h(\theta)d\theta\right\}\int^x [\sigma^2 y^2]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t \frac{2}{\sigma}k(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$e^{\int^t h(\theta)d\theta}\int^x \frac{dy}{\sigma y} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds = \frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^t h(\theta)d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds =$$

$$\frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^t \beta d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(\alpha - c(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s \beta d\theta}ds$$

y

$$\Phi(t) = \int^t \exp\left\{-\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds = \int^t \exp\left\{-\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds =$$

$$\int^t e^{2\int^s h(\theta)d\theta}ds = \int^t e^{2\int^s \beta d\theta}ds,$$

por lo que se puede obtener la fdt del proceso a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi junto con la transformación anterior:

$$P(y,t \mid x,s) = (2\pi[\Phi(t) - \Phi(s)])^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{[\Psi(y,t) - \Psi(x,s)]^2}{2[\Phi(t) - \Phi(s)]}\right\}\frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y}.$$

Por lo tanto, la fdt del proceso Gompertz Univariante $Y(t)$ es la densidad de una distribución normal univariante $\mathcal{N}\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, siendo:

$$m(s,t) = \log(x)e^{-\int_s^t h(z)dz} + \int_s^t k(\theta)e^{-\int_\theta^t h(z)dz}d\theta =$$

$$\log(x)e^{-\int_s^t \beta dz} + \int_s^t \left(g(\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\int_\theta^t \beta dz}d\theta = \log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t \left(\alpha - c(\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t (\alpha - c(\theta))\,e^{-\beta(t-\theta)}d\theta - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) =$$

$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta,$$

siendo $\gamma = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$, y

$$v(s,t) = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta h(z)dz} d\theta = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta \beta dz} d\theta =$$

$$\sigma^2 \int_s^t e^{-2\beta(\theta - s)} \beta d\theta = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right).$$

A partir de lo anterior, tenemos que la distribución de $X(t)$ es lognormal $\Lambda\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, con función de densidad de transición:

$$P(y,t|x,s) = (2\pi v(s,t))^{-\frac{1}{2}}\, y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y) - m(s,t)\right]^2}{v(s,t)}\right\} =$$

$$\left(2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y) - \log(x)e^{-\beta(t-s)} - \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) + \int_s^t c(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta\right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)}\right\}.$$

4.1.3. Momentos del proceso

Como la variable aleatoria $X(t) \mid X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, aplicando resultados conocidos de dicha distribución, podemos obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$E[X^r(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{r.m(s,t) + \frac{r^2}{2}v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{r\log(x)e^{-\beta(t-s)} + r\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) - r\int_s^t c(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \right.$$

$$\left.\frac{r^2\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Tendencia

El momento de primer orden, $r = 1$, **tendencia condicionada**, tiene la expresión:

$$E[X(t) \mid X(s) = x] =$$
$$\exp\left\{\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Varianza

La **varianza condicionada** del proceso se expresa de la forma:

$$Var[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\{2m(s,t) + 2v(s,t)\} - \exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} =$$
$$\exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} \times (\exp\{v(s,t)\} - 1) =$$
$$\exp\left\{2\log(x)e^{-\beta(t-s)} + 2\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - 2\int_s^t c(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \right.$$
$$\left.\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} \times \left(\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} - 1\right).$$

4.1.4. Estimación de los parámetros

A continuación se trata de estimar los parámetros del Proceso Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

Si denotamos por $r_j = t_j - t_{j-1}$ tendremos:

$$m_j = \log(x_{j-1})e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta)e^{-\int_{\theta}^{t_j} h(z)dz}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta(t_j-t_{j-1})} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta(t_j-t_{j-1})}\right) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta r_j}) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta r_j}) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta$$

y

$$v_j = \sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz}d\theta = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t_j-t_{j-1})}\right) = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right),$$

con lo que la función de verosimilitud asociada al Proceso Gompertz será:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j \mid x_{j-1}, t_{j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi v_j)^{-\frac{1}{2}}\, x_j^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(x_j) - m_j\right]^2}{v_j}\right\} =$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta r_j}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right)}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función también maximizan su logaritmo, tomando logaritmos, se tiene:

$$\log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right) - \sum_{j=1}^{n}\log(x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right) -$$

$$\frac{\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]^2}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Llamando $\gamma=\alpha-\frac{\sigma^2}{2}$, notaremos por:

$$B_j=\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]=$$

$$\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]$$

y tenemos que

$$\log(\mathbb{L})(x_0,x_1,\ldots,x_n)=$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)-\sum_{j=1}^{n}\log(x_j)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1-e^{-2\beta r_j}\right)-\frac{\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros γ, σ^2 y β, calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de ellos, e igualamos a cero.

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\gamma}$** tenemos que:

$$\frac{\partial\log(\mathbb{L})}{\partial\gamma}=\frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j}{1+e^{-\beta r_j}}$$

Igualando a cero dicha derivada parcial

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j)-e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1+e^{-\beta r_j}}-\frac{\gamma}{\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-\beta r_j}}{1+e^{-\beta r_j}}=0$$

se obtiene el estimador:

$$\hat{\gamma}=\hat{\beta}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-\hat{\beta}r_j}}{1+e^{-\hat{\beta}r_j}}\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j)-e^{-\hat{\beta}r_j}\log(x_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c(\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta}{1+e^{-\hat{\beta}r_j}}\right).$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\sigma^2}$** seguiremos el mismo proceso:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}}$$

e igualando a cero

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}} = 0$$

el estimador queda:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\hat{\beta} r_j}}.$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\beta}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\left[r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2}\right) + C_j\right](1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2},$$

siendo

$$C_j = \left(\frac{\partial \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta}{\partial \beta}\right).$$

Utilizando la expresión del estimador $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{n\sigma^2}{2\beta} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\left[r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2}\right) + C_j\right](1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2} =$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1})}{1-e^{-2\beta r_j}} +$$

$$+\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\gamma(\frac{r_je^{-\beta r_j}}{\beta}-\frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2})}{1-e^{-2\beta r_j}}+\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2r_je^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2}-\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_jC_j}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Igualando a cero en la expresión anterior y sustituyendo los estimadores de γ y σ^2, obtenemos una ecuación no lineal que puede ser resuelta por métodos numéricos.

Caso particular: intervalos de amplitud 1

Un caso particular, de gran interés en relación a su utilidad práctica, es aquel en el que las observaciones están hechas en intervalos igualmente espaciados y con $r_j = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, los incrementos entre cada uno de los instantes de tiempo en el que se realizan las observaciones son iguales a la unidad.

En este caso, aparece una expresión explícita para todos los estimadores de los parámetros, lo que conlleva la gran ventaja de que no hay que resolver ninguna ecuación lineal. Bajo esta consideración los estimadores antes calculados serían:

$$\hat{\gamma}=\frac{\hat{\beta}}{n(1-e^{-\hat{\beta}})}\sum_{j=1}^{n}\left(\log(x_j)-e^{-\hat{\beta}}\log(x_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c(\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta\right)$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{2\hat{\beta}}{n(1-e^{-2\hat{\beta}})}\sum_{j=1}^{n}B_j^2.$$

La log-verosimilitud queda entonces:

$$\frac{\partial\log(\mathbb{L})}{\partial\beta}=-\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}}-\frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_j\log(x_{j-1})+$$

$$\frac{2\beta\gamma\left(\frac{e^{-\beta}}{\beta}-\frac{1-e^{-\beta}}{\beta^2}\right)}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_j+\frac{2\beta e^{-2\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2}\sum_{j=1}^{n}B_j^2-\frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_jC_j.$$

Puede comprobarse que $\sum_{j=1}^{n} B_j = 0$, por lo que utilizando la expresión anterior de $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = -\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) +$$

$$\frac{2\beta e^{-2\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2}\frac{n\sigma^2(1-e^{-2\beta})}{2\beta} - \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n} B_j C_j =$$

$$-\frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) - \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n} B_j C_j = 0.$$

Reemplazando B_j y C_j por su valor, y utilizando las expresiones anteriores de $\hat{\gamma}$ y $\hat{\sigma}^2$, podemos obtener el estimador del parámetro β, $\hat{\beta}$.

4.2. Caso 2: $g(t) = \alpha - c_1 \log(e + \xi_1 t)$ y $h(t) = \beta$

4.2.1. Definición del modelo

Sea $\{X(t);\ t_0 \le t \le T\}$ un proceso de difusión $\mathbb{R}$-valuado con función de densidad de transición (fdt) dada por:

$$P(y,t \mid x,s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

y con los momentos infinitesimales, coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$a(x,t) = g(t)x - h(t)x\log(x) = (\alpha - c_1 \log(e + \xi_1 t))\,x - \beta x \log(x)$$

$$b(x,t) = \sigma^2 x^2$$

con c_1, ξ_1, α y β parámetros y $\sigma > 0$ parámetro constante. Si $g(t) = \alpha$, siendo α parámetro constante, tenemos el proceso de difusión Gompertz univariante homogéneo.

Las ecuaciones de difusión, adelantada y atrasada de Kolmogorov, verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido tienen la forma:

- Ecuación adelantada:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\left(\alpha - c_1 \log(e + \xi_1 t)\right) y - \beta y \log(y)\right) P\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma^2 y^2 P\}$$

- Ecuación atrasada:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\{(\alpha - c_1 \log(e + \xi_1 s))\, x - \beta x \log(x)\}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

  donde P es la función de densidad de transición.

4.2.2. Densidad de transición

Para determinar la fdt del proceso, P, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi, que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t) = \log X(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener. Notando por $k(s) = g(s) - \frac{\sigma^2}{2}$, las funciones buscadas para que se verifique la condición necesaria y suficiente de este teorema (existencia de las mismas) son c_1 y c_2 dadas por:

$$c_1(s) = \frac{2}{\sigma}k(s) = \frac{2}{\sigma}\left(\alpha - c_1 \log(e + \xi_1 s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$c_2(s) = -2h(s) = -2\beta.$$

La transformación adecuada es:

$$\Psi(x,t) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t c_2(\theta)d\theta\right\}\int^x [b(y,t)]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t c_1(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t -2h(\theta)d\theta\right\}\int^x [\sigma^2 y^2]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t \frac{2}{\sigma}k(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$e^{\int^t h(\theta)d\theta}\int^x \frac{dy}{\sigma y} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds = \frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^t h(\theta)d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds =$$

$$\frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^t \beta d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(\alpha - c_1\log(e+\xi_1 s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s \beta d\theta}ds$$

y

$$\Phi(t) = \int^t \exp\left\{-\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds = \int^t \exp\left\{-\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds =$$

$$\int^t e^{2\int^s h(\theta)d\theta}ds = \int^t e^{2\int^s \beta d\theta}ds,$$

por lo que se puede obtener la fdt del proceso a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi junto con la transformación anterior:

$$P(y,t\mid x,s) = (2\pi[\Phi(t)-\Phi(s)])^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{[\Psi(y,t)-\Psi(x,s)]^2}{2[\Phi(t)-\Phi(s)]}\right\}\frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y}.$$

Por lo tanto, la fdt del proceso Gompertz univariante $Y(t)$ es la densidad de una distribución normal univariante $\mathcal{N}\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, siendo:

$$m(s,t) = \log(x)e^{-\int_s^t h(z)dz} + \int_s^t k(\theta)e^{-\int_\theta^t h(z)dz}d\theta =$$

$$\log(x)e^{-\int_s^t \beta dz} + \int_s^t \left(g(\theta)-\frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\int_\theta^t \beta dz}d\theta =$$

$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t \left(\alpha - c_1\log(e+\xi_1\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t \left(\alpha - c_1\log(e+\xi_1\theta)\right)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1-e^{-\beta(t-s)}) =$$

$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta,$$

siendo $\gamma = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$, y

$$v(s,t) = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta h(z)dz}d\theta = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta \beta dz}d\theta =$$

$$\sigma^2 \int_s^t e^{-2\beta(\theta-s)}\beta d\theta = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right).$$

A partir de lo anterior, tenemos que la distribución de $X(t)$ es lognormal $\Lambda\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, con función de densidad de transición:

$$P(y,t|x,s) = (2\pi v(s,t))^{-\frac{1}{2}}\, y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y) - m(s,t)\right]^2}{v(s,t)}\right\} =$$

$$\left(2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} y^{-1}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y) - \log(x)e^{-\beta(t-s)} - \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \int_s^t c_1\log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta\right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)}\right\}.$$

4.2.3. Momentos del proceso

Como la variable aleatoria $X(t) \mid X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, aplicando resultados conocidos de dicha distribución, podemos obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$E[X^r(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{r.m(s,t) + \frac{r^2}{2}v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{r\log(x)e^{-\beta(t-s)} + r\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - r\int_s^t c_1\log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \frac{r^2\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Tendencia

El momento de primer orden, $r = 1$, **tendencia condicionada**, tiene la expresión:

$$E[X(t) \mid X(s) = x] =$$

$$\exp\left\{\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \right.$$

$$\left. \frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Varianza

La **varianza condicionada** del proceso se expresa de la forma:

$$Var[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\{2m(s,t) + 2v(s,t)\} - \exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} =$$

$$\exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} \times (\exp\{v(s,t)\} - 1) =$$

$$\exp\left\{2\log(x)e^{-\beta(t-s)} + 2\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - 2\int_s^t c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \right.$$

$$\left. \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} \times \left(\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} - 1\right).$$

4.2.4. Estimación de los parámetros

A continuación se trata de estimar los parámetros del proceso Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto ($X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n$), realizado en los instantes ($t_0, t_1, \ldots, t_n$). Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

Si denotamos por $r_j = t_j - t_{j-1}$ tendremos:

$$m_j = \log(x_{j-1})e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta)e^{-\int_{\theta}^{t_j} h(z)dz}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta(t_j-t_{j-1})} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta(t_j-t_{j-1})}\right) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta r_j}) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta r_j}) - \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta$$

y

$$v_j = \sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz}d\theta = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t_j-t_{j-1})}\right) = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right),$$

con lo que la función de verosimilitud asociada al proceso Gompertz será:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j \mid x_{j-1}, t_{j-1}) =$$

$$\prod_{j=1}^{n} (2\pi v_j)^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\log(x_j) - m_j]^2}{v_j}\right\} =$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta r_j}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta r_j})}\right\}.$$

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función también maximizan su logaritmo, tomando logaritmos, se tiene:

$$\log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)-\sum_{j=1}^{n}\log(x_j)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1-e^{-2\beta r_j}\right)-$$

$$\frac{\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]^2}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Llamando $\gamma=\alpha-\frac{\sigma^2}{2}$, notaremos por:

$$B_j=\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]=$$

$$\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]$$

y tenemos que

$$\log(\mathbb{L})(x_0,x_1,\ldots,x_n)=$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)-\sum_{j=1}^{n}\log(x_j)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1-e^{-2\beta r_j}\right)-\frac{\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $c_1,\gamma,\ \sigma^2$ y β, calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de ellos, e igualamos a cero.

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\gamma}$** tenemos que:

$$\frac{\partial\log(\mathbb{L})}{\partial\gamma}=\frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j}{1+e^{-\beta r_j}}$$

Igualando a cero dicha derivada parcial

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j)-e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1+e^{-\beta r_j}}-\frac{\gamma}{\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-\beta r_j}}{1+e^{-\beta r_j}}=0$$

se obtiene el estimador:

$$\hat{\gamma}=\hat{\beta}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-\hat{\beta}r_j}}{1+e^{-\hat{\beta}r_j}}\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j)-e^{-\hat{\beta}r_j}\log(x_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta}{1+e^{-\hat{\beta}r_j}}\right).$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\sigma^2}$** seguiremos el mismo proceso:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}}$$

e igualando a cero

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}} = 0$$

el estimador queda:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\hat{\beta} r_j}}.$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\beta}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\left[r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2}\right) + C_j\right](1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2},$$

siendo

$$C_j = \left(\frac{\partial \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{\partial \beta}\right).$$

Utilizando la expresión del estimador $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{n\sigma^2}{2\beta} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\left[r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2}\right) + C_j\right](1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2} =$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1})}{1-e^{-2\beta r_j}} +$$

$$+\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\gamma(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2})}{1-e^{-2\beta r_j}} + \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2} - \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j C_j}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Igualando a cero en la expresión anterior y sustituyendo los estimadores de γ y σ^2, obtenemos una ecuación no lineal que puede ser resuelta por métodos numéricos.

- Para el **parámetro $\boldsymbol{c_1}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial c_1} = -\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

e igualando a cero tenemos

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\frac{\gamma}{\beta}(1-e^{-\beta r_j})\right]\int_{t_{j-1}}^{t_j}\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} =$$

$$-c_1\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

con lo que el estimador queda:

$$\hat{c_1} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\frac{\gamma}{\beta}(1-e^{-\beta r_j})\right]\int_{t_{j-1}}^{t_j}\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}}\times$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}}\right)^{-1}.$$

Caso particular: intervalos de amplitud 1

Un caso particular, de gran interés en relación a su utilidad práctica, es aquel en el que las observaciones están hechas en intervalos igualmente espaciados y con $r_j = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, los incrementos entre cada uno de los instantes de tiempo en el que se realizan las observaciones son iguales a la unidad.

En este caso, aparece una expresión explícita para todos los estimadores de los parámetros, lo que conlleva la gran ventaja de que no hay que resolver ninguna ecuación lineal. Bajo esta consideración los estimadores antes calculados serían:

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\beta}}{n(1-e^{-\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e+\xi_1\theta) e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)} d\theta \right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n(1-e^{-2\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^{n} B_j^2.$$

$$\hat{c_1} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta} - \frac{\gamma}{\beta}(1-e^{-\beta})\right] \int_{t_{j-1}}^{t_j} \log(e+\xi_1\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta}{1-e^{-2\beta}} \times$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \log(e+\xi_1\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta}} \right)^{-1}.$$

La log-verosimilitud queda entonces:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = -\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) +$$

$$\frac{2\beta\gamma\left(\frac{e^{-\beta}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta}}{\beta^2}\right)}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j + \frac{2\beta e^{-2\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2} \sum_{j=1}^{n} B_j^2 - \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j C_j.$$

Puede comprobarse que $\sum_{j=1}^{n} B_j = 0$, por lo que utilizando la expresión anterior de $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = -\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) +$$

$$\frac{2\beta e^{-2\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2} \frac{n\sigma^2(1-e^{-2\beta})}{2\beta} - \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j C_j =$$

$$-\frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) - \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n} B_j C_j = 0.$$

Reemplazando B_j y C_j por su valor, y utilizando las expresiones anteriores de $\hat{\gamma}$ y $\hat{\sigma}^2$, podemos obtener el estimador del parámetro β, $\hat{\beta}$.

4.3. Caso 3: $g(t) = \alpha - c_1 \log(e + \xi_1 t) - c_2 p(t)$ y $h(t) = \beta$

4.3.1. Definición del modelo

Sea $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión $\mathbb{R}$-valuado con función de densidad de transición (fdt) dada por:

$$P(y, t \mid x, s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

y con los momentos infinitesimales, coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$a(x,t) = g(t)x - h(t)x\log(x) = (\alpha - c_1 \log(e + \xi_1 t) - c_2 p(t))\, x - \beta x \log(x)$$

siendo $p(t) = at^2 + bt + c$ polinomio de grado 2, y

$$b(x,t) = \sigma^2 x^2$$

con α, β, c_1, c_2, parámetros, y $\sigma > 0$ parámetro constante. Si $g(t) = \alpha$, siendo α parámetro constante, tenemos el proceso de difusión Gompertz univariante homogéneo.

Las ecuaciones de difusión, adelantada y atrasada de Kolmogorov, verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido tienen la forma:

- Ecuación adelantada:
$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\Big(\alpha - c_1\log(e+\xi_1 t) - c_2 p(t)\Big)y - \beta y\log(y)\right)P\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma^2 y^2 P\}$$
- Ecuación atrasada:
$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\left\{\Big(\alpha - c_1\log(e+\xi_1 s) - c_2 p(s)\Big)x - \beta x\log(x)\right\}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

  donde P es la función de densidad de transición.

4.3.2. Densidad de transición

Para determinar la fdt del proceso, P, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi, que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t) = \log X(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener. Notando por $k(s) = g(s) - \frac{\sigma^2}{2}$, las funciones buscadas para que se verifique la condición necesaria y suficiente de este teorema (existencia de las mismas) son c_1 y c_2 dadas por:

$$c_1(s) = \frac{2}{\sigma}k(s) = \frac{2}{\sigma}\left(\alpha - c_1\log(e+\xi_1 s) - c_2 p(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$
$$c_2(s) = -2h(s) = -2\beta$$

La transformación adecuada es:

$$\Psi(x,t) =$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t c_2(\theta)d\theta\right\}\int^x [b(y,t)]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t c_1(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t -2h(\theta)d\theta\right\}\int^x [\sigma^2 y^2]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t \frac{2}{\sigma}k(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$
$$e^{\int^t h(\theta)d\theta}\int^x \frac{dy}{\sigma y} - \frac{1}{\sigma}\int^t\left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds =$$

$$\frac{\log(x)}{\sigma} e^{\int^t h(\theta)d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{\int^s h(\theta)d\theta} ds =$$
$$\frac{\log(x)}{\sigma} e^{\int^t \beta d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(\alpha - c_1\log(e+\xi_1 s) - c_2 p(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{\int^s \beta d\theta} ds$$

y

$$\Phi(t) = \int^t \exp\left\{-\int^s c_2(\theta)d\theta\right\} ds = \int^t \exp\left\{-\int^s -2h(\theta)d\theta\right\} ds =$$
$$\int^t e^{2\int^s h(\theta)d\theta} ds = \int^t e^{2\int^s \beta d\theta} ds,$$

por lo que se puede obtener la fdt del proceso a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi junto con la transformación anterior:

$$P(y,t \mid x,s) = (2\pi[\Phi(t)-\Phi(s)])^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{[\Psi(y,t)-\Psi(x,s)]^2}{2[\Phi(t)-\Phi(s)]}\right\} \frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y}.$$

Por lo tanto, la fdt del proceso Gompertz univariante $Y(t)$ es la densidad de una distribución normal univariante $\mathcal{N}(m(s,t),\ v(s,t))$, siendo:

$$m(s,t) = \log(x)e^{-\int_s^t h(z)dz} + \int_s^t k(\theta)e^{-\int_\theta^t h(z)dz} d\theta =$$
$$\log(x)e^{-\int_s^t \beta dz} + \int_s^t \left(g(\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\int_\theta^t \beta dz} d\theta =$$
$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t \left(\alpha - c_1\log(e+\xi_1\theta) - c_2 p(\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\beta(t-\theta)} d\theta =$$
$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t \left(\alpha - c_1\log(e+\xi_1\theta) - c_2 p(\theta)\right) e^{-\beta(t-\theta)} d\theta - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1-e^{-\beta(t-s)}) =$$
$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta - \int_s^t c_2 p(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta =$$
$$\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \frac{\gamma}{\beta}(1-e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta - \int_s^t c_2 p(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta,$$

siendo $\gamma = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$, y

$$v(s,t) = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta h(z)dz} d\theta = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta \beta dz} d\theta = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\beta(\theta-s)}\beta d\theta = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right).$$

A partir de lo anterior, tenemos que la distribución de $X(t)$ es lognormal $\Lambda\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, con función de densidad de transición:

$$P(y,t|x,s) = (2\pi v(s,t))^{-\frac{1}{2}}\, y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y) - m(s,t)\right]^2}{v(s,t)}\right\} =$$

$$\left(2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{B^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)}\right\},$$

siendo

$$B = \log(y) - \log(x)e^{-\beta(t-s)} - \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \int_s^t c_1 \log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \int_s^t c_2 p(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta.$$

4.3.3. Momentos del proceso

Como la variable aleatoria $X(t) \mid X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, aplicando resultados conocidos de dicha distribución, podemos obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$E[X^r(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{r.m(s,t) + \frac{r^2}{2}v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{r\log(x)e^{-\beta(t-s)} + r\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - r\int_s^t c_1\log(e + \xi_1\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta - \right.$$

$$\left. r\int_s^t c_2 p(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \frac{r^2\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Tendencia

El momento de primer orden, $r = 1$, **tendencia condicionada**, tiene la expresión:

$$E[X(t) \mid X(s) = x] =$$

$$\exp\left\{\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - \int_s^t c_1 \log(e + \xi_1 \theta) e^{-\beta(t-\theta)} d\theta - \right.$$

$$\left. \int_s^t c_2 p(\theta) e^{-\beta(t-\theta)} d\theta + \frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Varianza

La **varianza condicionada** del proceso se expresa de la forma:

$$Var[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\{2m(s,t) + 2v(s,t)\} - \exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} =$$

$$\exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} \times (\exp\{v(s,t)\} - 1) =$$

$$\exp\left\{2\log(x)e^{-\beta(t-s)} + 2\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) - 2\int_s^t c_1 \log(e + \xi_1 \theta) e^{-\beta(t-\theta)} d\theta - \right.$$

$$\left. -2\int_s^t c_2 p(\theta) e^{-\beta(t-\theta)} d\theta + \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} \times \left(\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} - 1\right).$$

4.3.4. Estimación de los parámetros

A continuación se trata de estimar los parámetros del proceso Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

Si denotamos por $r_j = t_j - t_{j-1}$ tendremos:

$$m_j = \log(x_{j-1}) e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta) e^{-\int_\theta^{t_j} h(z)dz} d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta(t_j-t_{j-1})}+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1-e^{-\beta(t_j-t_{j-1})}\right)-$$

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta-\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_2p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta=$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})-\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta-\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_2p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta=$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}+\frac{\gamma}{\beta}(1-e^{-\beta r_j})-\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta-\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_2p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta$$

y

$$v_j=\sigma^2\int_{t_{j-1}}^{t_j}e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta}h(z)dz}d\theta=\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta(t_j-t_{j-1})}\right)=\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta r_j}\right),$$

con lo que la función de verosimilitud asociada al proceso Gompertz será:

$$\mathbb{L}(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\prod_{j=1}^{n}P(x_j,t_j\mid x_{j-1},t_{j-1})=\prod_{j=1}^{n}(2\pi v_j)^{-\frac{1}{2}}\,x_j^{-1}\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\log(x_j)-m_j]^2}{v_j}\right\}=$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta r_j}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}x_j^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{B_j^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta r_j}\right)}\right\},$$

siendo

$$B_j=\log(x_j)-\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j}-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)(1-e^{-\beta r_j})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c_2p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta.$$

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función también maximizan su logaritmo, tomando logaritmos, se tiene:

$$\log(\mathbb{L})(x_0,x_1,\ldots,x_n)=$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)-\sum_{j=1}^{n}\log(x_j)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1-e^{-2\beta r_j}\right)-\frac{\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

con

$$\gamma=\alpha-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $c_1, c_{2,}\gamma,\ \sigma^2$ y β, calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de ellos, e igualamos a cero.

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\gamma}$** tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \gamma} = \frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j}{1+e^{-\beta r_j}}$$

  Igualando a cero dicha derivada parcial

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j)-e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta+\int_{t_{j-1}}^{t_j} c_2 p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1+e^{-\beta r_j}} =$$

$$\frac{\gamma}{\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-\beta r_j}}{1+e^{-\beta r_j}}$$

  se obtiene el estimador:

$$\hat{\gamma} = \hat{\beta}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-\hat{\beta} r_j}}{1+e^{-\hat{\beta} r_j}}\right)^{-1}\times$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j)-e^{-\hat{\beta} r_j}\log(x_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1\log(e+\xi_1\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta+\int_{t_{j-1}}^{t_j} c_2 p(\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta}{1+e^{-\hat{\beta} r_j}}\right).$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\sigma^2}$** seguiremos el mismo proceso:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}}$$

  e igualando a cero

$$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}} = 0$$

  el estimador queda:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1-e^{-2\hat{\beta} r_j}}.$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\beta}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j\left[r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2}\right) + C_j\right](1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2},$$

siendo

$$C_j = \left(\frac{\partial\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_2 p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)}{\partial\beta}\right).$$

Utilizando la expresión del estimador $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2}\frac{n\sigma^2}{2\beta} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j\left[r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1}) - \gamma\left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2}\right) + C_j\right](1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2} =$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j r_j e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1})}{1-e^{-2\beta r_j}} +$$

$$+\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j\gamma(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2})}{1-e^{-2\beta r_j}} + \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2} - \frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j C_j}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Igualando a cero en la expresión anterior y sustituyendo los estimadores de γ y σ^2, obtenemos una ecuación no lineal que puede ser resuelta por métodos numéricos.

- Para el **parámetro $\boldsymbol{c_1}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial c_1} = -\frac{2\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

e igualando a cero tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} = -c_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

siendo

$$A_j = \left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \frac{\gamma}{\beta}(1-e^{-\beta r_j}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_2 p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right]$$

con lo que el estimador queda:

$$\hat{c}_1 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}}\right)^{-1}.$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{c_2}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial c_1} = -\frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

e igualando a cero tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} = -c_2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

siendo

$$A_j = \log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \frac{\gamma}{\beta}(1-e^{-\beta r_j}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}$$

con lo que el estimador queda:

$$\hat{c}_2 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}}\right)^{-1}.$$

Caso particular: intervalos de amplitud 1

Un caso particular, de gran interés en relación a su utilidad práctica, es aquel en el que las observaciones están hechas en intervalos igualmente espaciados y con $r_j = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, los incrementos entre cada uno de los instantes de tiempo en el que se realizan las observaciones son iguales a la unidad.

En este caso, aparece una expresión explícita para todos los estimadores de los parámetros, lo que conlleva la gran ventaja de que no hay que resolver ninguna ecuación lineal. Bajo esta consideración los estimadores antes calculados serían:

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\beta}}{n(1-e^{-\hat{\beta}})}\times$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}}\log(x_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c_1 \log(e+\xi_1\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta + \int_{t_{j-1}}^{t_j} p(\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n(1-e^{-2\hat{\beta}})}\sum_{j=1}^{n} B_j^2$$

$$\hat{c}_1 = -\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta}} \times \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\log(e+\xi_1\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta}}\right)^{-1}$$

$$\hat{c}_2 = -\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1-e^{-2\beta}} \times \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}p(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta\right)^2}{1-e^{-2\beta}}\right)^{-1}.$$

La log-verosimilitud queda entonces:

$$\frac{\partial\log(\mathbb{L})}{\partial\beta} = -\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_j\log(x_{j-1})+$$

$$\frac{2\beta\gamma\left(\frac{e^{-\beta}}{\beta}-\frac{1-e^{-\beta}}{\beta^2}\right)}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_j+\frac{2\beta e^{-2\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2}\sum_{j=1}^{n}B_j^2-\frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_jC_j.$$

Puede comprobarse que $\sum_{j=1}^{n} B_j = 0$, por lo que utilizando la expresión anterior de $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial\beta} = -\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_j\log(x_{j-1})+$$

$$\frac{2\beta e^{-2\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2}\frac{n\sigma^2(1-e^{-2\beta})}{2\beta} - \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_jC_j =$$

$$-\frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_j\log(x_{j-1}) - \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})}\sum_{j=1}^{n}B_jC_j = 0.$$

Reemplazando B_j y C_j por su valor, y utilizando las expresiones anteriores de $\hat{\gamma}$ y $\hat{\sigma}^2$, podemos obtener el estimador del parámetro β, $\hat{\beta}$.

4.4. Caso 4: $g(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i g_i(t)$ y $h(t) = \beta$

4.4.1. Definición del modelo

Un caso importante en la práctica es el Proceso de Gompertz definido cuando las funciones $h(t)$ y $g(t)$ tienen la forma:

$$h(t) = \beta \qquad g(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i g_i(t)$$

donde las variables exógenas $g_i(t)$ son funciones continuas en $[t_0, T]$.

Sea $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión $\mathbb{R}$-valuado con función de densidad de transición (fdt) dada por:

$$P(y,t \mid x,s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

y con los momentos infinitesimales, coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$a(x,t) = g(t)x - h(t)x\log(x) = \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i(t)\right) x - \beta x \log(x)$$

$$b(x,t) = \sigma^2 x^2$$

con $\alpha_i, i = 0, \ldots, q$ y β parámetros, las variables exógenas $g_i(t), i = 1, \ldots, q$ funciones continuas en $[t_0, T]$, y $\sigma > 0$ parámetro constante, de forma que tendremos que estimar $q+3$ parámetros: $\beta, \sigma, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Si $g(t) = \alpha$, siendo α parámetro constante, tenemos el proceso de difusión Gompertz univariante homogéneo, y si $\beta = 0$ tenemos el proceso de difusión Lognormal univariante no homogéneo.

Las ecuaciones de difusión, adelantada y atrasada de Kolmogorov, verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido tienen la forma:

- Ecuación adelantada:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i(t)\right) y - \beta y \log(y)\right) P\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma^2 y^2 P\}$$

- Ecuación atrasada:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\left\{\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i(s)\right) x - \beta x \log(x)\right\} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

  donde P es la función de densidad de transición (fdt).

4.4.2. Densidad de transición

Para determinar la fdt del proceso, P, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi, que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t) = \log X(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener. Las funciones buscadas para que se verifique la condición necesaria y suficiente de este teorema (existencia de las mismas) son c_1 y c_2 dadas por:

$$c_1(s) = \frac{2}{\sigma}k(s) = \frac{2}{\sigma}\left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right) = \frac{2}{\sigma}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i g_i(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$c_2(s) = -2h(s) = -2\beta$$

y, por lo tanto, la transformación adecuada es:

$$\Psi(x,t) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t c_2(\theta)d\theta\right\}\int^x [b(y,t)]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t c_1(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t -2h(\theta)d\theta\right\}\int^x [\sigma^2 y^2]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t \frac{2}{\sigma}k(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$e^{\int^t h(\theta)d\theta}\int^x \frac{dy}{\sigma y} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds =$$

$$\frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^t h(\theta)d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds =$$

$$\frac{\log(x)}{\sigma}e^{\int^t \beta d\theta} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i g_i(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s \beta d\theta}ds$$

y

$$\Phi(t) = \int^t \exp\left\{-\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds = \int^t \exp\left\{-\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds =$$

$$\int^t e^{2\int^s h(\theta)d\theta}ds = \int^t e^{2\int^s \beta d\theta}ds,$$

por lo que se puede obtener la fdt del proceso a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi junto con la transformación anterior:

$$P(y,t \mid x,s) = (2\pi[\Phi(t)-\Phi(s)])^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{[\Psi(y,t)-\Psi(x,s)]^2}{2[\Phi(t)-\Phi(s)]}\right\} \frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y}.$$

Por lo tanto, la fdt del proceso Gompertz univariante $Y(t)$ es la densidad de una distribución normal univariante $\mathcal{N}\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, siendo:

$$\begin{gathered} m(s,t) = \log(x)e^{-\int_s^t h(z)dz} + \int_s^t k(\theta)e^{-\int_\theta^t h(z)dz}d\theta = \\ \log(x)e^{-\int_s^t \beta dz} + \int_s^t \left(g(\theta)-\frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\int_\theta^t \beta dz}d\theta = \\ \log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{-\beta(t-\theta)}d\theta = \\ \log(x)e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(\theta)\right) e^{-\beta(t-\theta)}d\theta - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1-e^{-\beta(t-s)}) = \\ \log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha_0}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1-e^{-\beta(t-s)}) + \sum_{i=1}^q \alpha_i \int_s^t g_i(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta = \\ \log(x)e^{-\beta(t-s)} + \frac{\gamma_0}{\beta}(1-e^{-\beta(t-s)}) + \sum_{i=1}^q \alpha_i \int_s^t g_i(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta, \end{gathered}$$

con $\gamma_0 = \alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}$, y

$$\begin{gathered} v(s,t) = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta h(z)dz}d\theta = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta \beta dz}d\theta = \\ \sigma^2 \int_s^t e^{-2\beta(\theta-s)}\beta d\theta = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta(t-s)}\right). \end{gathered}$$

A partir de lo anterior, tenemos que la distribución de $X(t)$ es lognormal $\Lambda\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, con función de densidad de transición:

$$P(y,t|x,s) = (2\pi v(s,t))^{-\frac{1}{2}}\, y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\log(y)-m(s,t)]^2}{v(s,t)}\right\} =$$

$$\left(2\pi\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta(t-s)}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} y^{-1}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y)-\log(x)e^{-\beta(t-s)}-\left(\frac{\alpha_0}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1-e^{-\beta(t-s)}\right)-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int_s^t g_i(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta\right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1-e^{-2\beta(t-s)}\right)}\right\}.$$

4.4.3. Momentos del proceso

Como la variable aleatoria $X(t) \mid X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, entonces aplicando resultados conocidos de dicha distribución, podemos obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$E[X^r(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{rm(s,t) + \frac{r^2}{2}v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{r\log(x)e^{-\beta(t-s)} + r\left(\frac{\alpha_0}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1-e^{-\beta(t-s)}\right) + r\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int_s^t g_i(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \frac{r^2\sigma^2}{4\beta}\left(1-e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Tendencia

El momento de primer orden, $r = 1$, **tendencia condicionada**, tiene la expresión:

$$E[X(t) \mid X(s) = x] =$$

$$\exp\left\{\log(x)e^{-\beta(t-s)} + \left(\frac{\alpha_0}{\beta}-\frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1-e^{-\beta(t-s)}\right) + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int_s^t g_i(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \frac{\sigma^2}{4\beta}\left(1-e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\}.$$

Varianza

La **varianza condicionada** del proceso se expresa de la forma:

$$Var[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\{2m(s,t) + 2v(s,t)\} - \exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} =$$

$$\exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} \times (\exp\{v(s,t)\} - 1) =$$

$$\exp\left\{2\log(x)e^{-\beta(t-s)} + 2\left(\frac{\alpha_0}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta(t-s)}) + 2\sum_{i=1}^{q}\alpha_i \int_s^t g_i(\theta)e^{-\beta(t-\theta)}d\theta + \right.$$

$$\left.\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} \times \left(\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} - 1\right).$$

4.4.4. Estimación de los parámetros

A continuación se trata de estimar los parámetros del proceso Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

Si denotamos por $r_j = t_j - t_{j-1}$ tendremos:

$$m_j = \log(x_{j-1})e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta)e^{-\int_\theta^{t_j} h(z)dz}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta(t_j - t_{j-1})} + \left(\frac{\alpha_0}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta(t_j - t_{j-1})}\right) + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} + \left(\frac{\alpha_0}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta r_j}) + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} + \frac{\gamma_0}{\beta}(1 - e^{-\beta r_j}) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\beta(t_j - \theta)} d\theta$$

y

$$v_j = \sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t_j - t_{j-1})}\right) = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right),$$

con lo que la función de verosimilitud asociada al proceso vendrá dada por la siguiente expresión, en la que se utiliza la función de densidad de probabilidad del Proceso Gompertz:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j \mid x_{j-1}, t_{j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi v_j)^{-\frac{1}{2}}\, x_j^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{[\log(x_j) - m_j]^2}{v_j} \right\} =$$

$$\prod_{j=1}^{n} \left\{ 2\pi \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right) \right\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times$$

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \left(\frac{\gamma_0}{\beta}\right)(1 - e^{-\beta r_j}) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta\right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta r_j})} \right\}.$$

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función también maximizan su logaritmo, tomando logaritmos, se tiene:

$$\log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right) - \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \log\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right) -$$

$$\frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \frac{\gamma_0}{\beta}(1 - e^{-\beta r_j}) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta\right]^2}{1 - e^{-2\beta r_j}}.$$

Llamando $\gamma_0 = \alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}$, notaremos por:

$$B_j = \left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \left(\frac{\alpha_0}{\beta} - \frac{\sigma^2}{2\beta}\right)(1 - e^{-\beta r_j}) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta\right] =$$

$$\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{-\beta r_j} - \left(\frac{\gamma_0}{\beta}\right)\left(1 - e^{-\beta r_j}\right) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\beta(t_j - \theta)} d\theta\right]$$

con lo que:

$$\log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right) - \sum_{j=1}^{n}\log(x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right) - \frac{\beta}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1 - e^{-2\beta r_j}}.$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, γ_0, σ^2 y β, calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de ellos, e igualamos a cero.

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\gamma_0}$** tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \gamma_0} = \frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j}{1 + e^{-\beta r_j}}$$

  Igualando a cero dicha derivada parcial, tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j) - e^{-\beta r_j}\log(x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)e^{-\beta(t_j-\theta)}d\theta}{1 + e^{-\beta r_j}} - \frac{\gamma_0}{\beta}\sum_{j=1}^{n}\frac{1 - e^{-\beta r_j}}{1 + e^{-\beta r_j}} = 0$$

  con lo que se obtiene el estimador:

$$\hat{\gamma_0} = \hat{\beta}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1 - e^{-\hat{\beta} r_j}}{1 + e^{-\hat{\beta} r_j}}\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j) - e^{-\hat{\beta} r_j}\log(x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)}d\theta}{1 + e^{-\hat{\beta} r_j}}\right).$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\sigma^2}$** seguiremos el mismo proceso:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1 - e^{-2\beta r_j}}$$

  e igualando a cero

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1 - e^{-2\beta r_j}} = 0$$

  el estimador queda:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{1 - e^{-2\hat{\beta} r_j}}.$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\beta}$**:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2}{1-e^{-2\beta r_j}} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \left[r_j e^{-\beta r_j} \log(x_{j-1}) - \gamma_0 \left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2} \right) - C_j \right] (1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2},$$

siendo

$$C_j = \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\beta(t_j - \theta)} d\theta}{\partial \beta} \right).$$

Utilizando la expresión del estimador $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^{n} \frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{n\sigma^2}{2\beta} -$$

$$\frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \left[r_j e^{-\beta r_j} \log(x_{j-1}) - \gamma_0 \left(\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2} \right) - C_j \right] (1-e^{-2\beta r_j}) - B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2} =$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{r_j e^{-2\beta r_j}}{1-e^{-2\beta r_j}} - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j r_j e^{-\beta r_j} \log(x_{j-1})}{1-e^{-2\beta r_j}} +$$

$$+\frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \gamma_0 (\frac{r_j e^{-\beta r_j}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta r_j}}{\beta^2})}{1-e^{-2\beta r_j}} + \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2 r_j e^{-2\beta r_j}}{(1-e^{-2\beta r_j})^2} + \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j C_j}{1-e^{-2\beta r_j}}.$$

Igualando a cero en la expresión anterior y sustituyendo los estimadores de γ_0 y σ^2, obtenemos una ecuación no lineal que puede ser resuelta por métodos numéricos.

- Para los **parámetros $\boldsymbol{\alpha_l}$**, $l = 1, \ldots, q$:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \alpha_l} = \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j - \theta)} d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

igualando a cero

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j - \theta)} d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} = 0$$

tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_l \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta \right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}},$$

siendo

$$B_j = \left[\log(x_j) - \log(x_{j-1}) e^{-\beta r_j} - \frac{\gamma_0}{\beta}(1-e^{-\beta r_j}) - \sum_{i=1, i\neq l}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta \right]$$

con lo que

$$\hat{\alpha}_l = \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta}{1-e^{-2\beta r_j}} \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta \right)^2}{1-e^{-2\beta r_j}} \right)^{-1}.$$

Caso particular: intervalos de amplitud 1

Un caso particular, de gran interés en relación a su utilidad práctica, es aquel en el que las observaciones están hechas en intervalos igualmente espaciados y con $r_j = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, los incrementos entre cada uno de los instantes de tiempo en el que se realizan las observaciones son iguales a la unidad.

En este caso, aparece una expresión explícita para todos los estimadores de los parámetros, lo que conlleva la gran ventaja de que no hay que resolver ninguna ecuación lineal. Bajo esta consideración los estimadores antes calculados serían:

$$\hat{\gamma_0} = \frac{\hat{\beta}}{n(1-e^{-\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) e^{-\hat{\beta}(t_j-\theta)} d\theta \right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n(1-e^{-2\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^{n} B_j^2.$$

$$\hat{\alpha}_l = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{B}_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta}{1-e^{-2\beta}} \times \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) e^{-\beta(t_j-\theta)} d\theta \right)^2}{1-e^{-2\beta}} \right)^{-1}.$$

Derivando la log-verosimilitud respecto de β tenemos:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = -\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) +$$

$$\frac{2\beta\gamma_0 \left(\frac{e^{-\beta}}{\beta} - \frac{1-e^{-\beta}}{\beta^2} \right)}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j + \frac{2\beta e^{-2\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2} \sum_{j=1}^{n} B_j^2 + \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j C_j.$$

Puede comprobarse que $\sum_{j=1}^{n} B_j = 0$, por lo que utilizando la expresión anterior de $\hat{\sigma}^2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} = -\frac{ne^{-2\beta}}{1-e^{-2\beta}} - \frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) +$$

$$\frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})^2} \frac{n\sigma^2(1-e^{-2\beta})}{2\beta} + \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j C_j =$$

$$-\frac{2\beta e^{-\beta}}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j \log(x_{j-1}) + \frac{2\beta}{\sigma^2(1-e^{-2\beta})} \sum_{j=1}^{n} B_j C_j = 0.$$

Reemplazando B_j y C_j por su valor, y utilizando la expresión anterior de $\hat{\gamma}_0$ y de $\hat{\sigma}^2$, podemos obtener el estimador del parámetro β, $\hat{\beta}$.

Consideremos un muestreo discreto del proceso considerando los instantes $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, por lo que tendremos las mediciones:

$$X(t_0) = x_0,\ X(t_1) = x_1, \ldots,\ X(t_n) = x_n$$

con la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$ y suponiendo que la amplitud de los intervalos es constante e igual a la unidad, $t_i - t_{i-1} = 1,\ \forall i = 1, \ldots, n$.

En tal muestreo discreto estimaremos los parámetros $\beta,\ \sigma,\ \alpha_i, i = 1, \ldots, q$, del modelo por el método de máxima verosimilitud. Con objeto de expresar esta verosimilitud de forma condensada, introduciremos las reparametrizaciones y vectores siguientes:

$\gamma_\beta = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta})$

$\nu_\beta = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta})$

$\mathbf{a} = \left(\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_q\right)'_{(q+1)\times 1}$

$v_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1}(\log(x_i) - e^{-\beta}\log(x_{i-1})), \quad i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{u}_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1}(\gamma_\beta, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_1(\xi)e^{-\beta(t_i-\xi)}d\xi, \ldots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_q(\xi)e^{-\beta(t_i-\xi)}d\xi)'_{(q+1)\times 1}$

$\mathbf{v}_\beta = (v_{1,\beta}, \ldots, v_{n,\beta})'_{n\times 1}$

$\mathbf{U}_\beta = (\mathbf{u}_{1,\beta}, \ldots, \mathbf{u}_{n,\beta})_{(q+1)\times n}$, matriz de rango $q+1$.

La función de verosimilitud que utilizaremos para realizar inferencia sobre los parámetros desconocidos es, considerando las reparametrizaciones anteriores:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n | \mathbf{a}, \beta, \sigma^2) = \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) =$$

$$(2\pi\sigma^2\nu_\beta^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})'(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})\right\}.$$

Diferenciando la log-verosimilitud respecto de $\mathbf{a}, \sigma^2$ y β, aparecen las ecuaciones:

$$\mathbf{U}_\beta\mathbf{v}_\beta = \mathbf{U}_\beta\mathbf{U}'_\beta\mathbf{a}$$

$$n\sigma^2 = (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a})'(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a})$$

$$\left(\nu_\beta^{-1} e^{-\beta} \mathbf{l}'_x - \mathbf{a}' \frac{\partial \mathbf{U}_\beta}{\partial \beta}\right) \left(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a}\right) = 0$$

siendo $\mathbf{l}'_x = (\log(x_1), \ldots, \log(x_n))'$ y $\frac{\partial \mathbf{U}_\beta}{\partial \beta}$ la matriz formada por las derivadas de los elementos de $\mathbf{U}_\beta$ respecto de β. De esta forma, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de $\mathbf{a}$ y de σ^2:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}_{\hat\beta} \mathbf{U}'_{\hat\beta})^{-1} \mathbf{U}_{\hat\beta} \mathbf{v}_{\hat\beta}$$

$$n\hat\sigma^2 = \mathbf{v}'_{\hat\beta} \mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat\beta} \mathbf{v}_{\hat\beta}$$

siendo:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat\beta} = \mathbf{I}_n - \mathbf{U}'_{\hat\beta} (\mathbf{U}_{\hat\beta} \mathbf{U}'_{\hat\beta})^{-1} \mathbf{U}_{\hat\beta}$$

matriz simétrica e idempotente.

El estimador de β se obtiene sustituyendo las expresiones de $\hat{\mathbf{a}}$ y $n\hat\sigma^2$ en la tercera ecuación de verosimilitud, quedando la siguiente expresión:

$$\left(\nu_\beta^{-1} e^{-\beta} \mathbf{l}'_x - \mathbf{v}_{\hat\beta} \mathbf{U}'_{\hat\beta} (\mathbf{U}_{\hat\beta} \mathbf{U}'_{\hat\beta})^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}_\beta}{\partial \beta}\right) \mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat\beta} \mathbf{v}_{\hat\beta}.$$

Debido a que en la ecuación anterior aparecen las funciones $g_j(t)$, no es posible una expresión explícita del estimador de β, ya que dichas funciones solamente pueden ser conocidas a partir de las observaciones discretas de las variables exógenas:

$$y_{i,j} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad j = 1, \ldots, q.$$

Por esta razón, normalmente se construyen los factores exógenos a partir de los valores observados de las variables a través de funciones poligonales:

$$g_i(t) = y_{i-1,j} + (y_{i,j} - y_{i-1,j})(t - t_{i-1})$$

por lo que si denotamos:

$$z_{ij}(\beta) = y_{i-1,j} + (y_{i,j} - y_{i-1,j})\frac{\beta - 1 + e^{-\beta}}{\beta(1-e^{-\beta})}$$

queda:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_j(\xi)e^{-\beta(t_i-\beta)}d\xi = \gamma_\beta z_{ij}(\beta).$$

4.5. Caso 5: $g(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(t)$ y $h(t) = 0$

4.5.1. Definición del modelo

Otro caso importante es el Proceso de Gompertz definido cuando las funciones $h(t)$ y $g(t)$ tienen la forma:

$$h(t) = 0 \qquad g(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i(t)$$

donde las variables exógenas $g_i(t)$ son funciones continuas en $[t_0, T]$.

Sea $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión $\mathbb{R}$-valuado con función de densidad de transición (fdt) dada por:

$$P(y,t \mid x,s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

y con los momentos infinitesimales, coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente:

$$a(x,t) = g(t)x - h(t)x\log(x) = \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i(t)\right) x$$
$$b(x,t) = \sigma^2 x^2$$

con $\alpha_i, i = 0, \ldots, q$ parámetros, las variables exógenas $g_i(t), i = 1, \ldots, q$, que representan las influencias externas del proceso, funciones continuas en $[t_0, T]$, y $\sigma > 0$ parámetro constante, de forma que tendremos que estimar $q+2$ parámetros: $\sigma, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$. El proceso así definido es el proceso de difusión Lognormal univariante no homogéneo. Además, si $g(t) = \alpha$, siendo α parámetro constante, tenemos el difusión Lognormal univariante homogéneo.

Las ecuaciones de difusión, adelantada y atrasada de Kolmogorov, verificadas por la fdt correspondiente al proceso así definido tienen la forma:

- Ecuación adelantada:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i(t)\right) yP\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{\sigma^2 y^2 P\}$$

- Ecuación atrasada:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\left\{\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i(s)\right) x\right\}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

  donde P es la función de densidad de transición (fdt).

4.5.2. Densidad de transición

Para determinar la fdt del proceso, P, vamos a aplicar el teorema de transformación de Ricciardi, que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t) = \log X(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener. Las funciones buscadas para que se verifique la condición necesaria y suficiente de este teorema (existencia de las mismas) son c_1 y c_2 dadas por:

$$c_1(s) = \frac{2}{\sigma}k(s) = \frac{2}{\sigma}\left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right) = \frac{2}{\sigma}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i g_i(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$c_2(s) = -2h(s) = 0$$

siendo la transformación adecuada:

$$\Psi(x,t) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t c_2(\theta)d\theta\right\}\int^x [b(y,t)]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t c_1(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^t -2h(\theta)d\theta\right\}\int^x [\sigma^2 y^2]^{-\frac{1}{2}}dy - \frac{1}{2}\left(\int^t \frac{2}{\sigma}k(s)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds\right) =$$

$$e^{\int^t h(\theta)d\theta}\int^x \frac{dy}{\sigma y} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(g(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{\int^s h(\theta)d\theta}ds =$$

$$\frac{\log(x)}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\int^t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(s) - \frac{\sigma^2}{2}\right)ds$$

y

$$\Phi(t) = \int^t \exp\left\{-\int^s c_2(\theta)d\theta\right\}ds =$$

$$\int^t \exp\left\{-\int^s -2h(\theta)d\theta\right\}ds = \int^t e^{2\int^s h(\theta)d\theta}ds = t$$

por lo que se puede obtener la fdt del proceso a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi junto con la transformación anterior:

$$P(y,t \mid x,s) = (2\pi[\Phi(t)-\Phi(s)])^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{[\Psi(y,t)-\Psi(x,s)]^2}{2[\Phi(t)-\Phi(s)]}\right\}\frac{\partial\Psi(y,t)}{\partial y}.$$

Por lo tanto, la fdt del proceso Gompertz univariante $Y(t)$ es la densidad de una distribución normal univariante $\mathcal{N}\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, siendo:

$$m(s,t) = \log(x)e^{-\int_s^t h(z)dz} + \int_s^t k(\theta)e^{-\int_\theta^t h(z)dz}d\theta =$$

$$\log(x) + \int_s^t \left(g(\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)d\theta = \log(x) + \int_s^t \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(\theta) - \frac{\sigma^2}{2}\right)d\theta =$$

$$\log(x) + \left(\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sum_{i=1}^q \alpha_i \int_s^t g_i(\theta)d\theta =$$

$$\log(x) + \gamma_0(t-s) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_s^t g_i(\theta)d\theta,$$

siendo $\gamma_0 = \alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}$, y

$$v(s,t) = \sigma^2 \int_s^t e^{-2\int_s^\theta h(z)dz} d\theta = \sigma^2(t-s).$$

A partir de lo anterior, tenemos que la distribución de $X(t)$ es lognormal $\Lambda\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, con función de densidad de transición:

$$P(y,t|x,s) = (2\pi v(s,t))^{-\frac{1}{2}}\, y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\log(y)-m(s,t)]^2}{v(s,t)}\right\} =$$

$$\left(2\pi\sigma^2(t-s)\right)^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(y)-\log(x)-\gamma_0(t-s)-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int_s^t g_i(\theta)d\theta\right]^2}{\sigma^2(t-s)}\right\}.$$

4.5.3. Momentos del proceso

Como la variable aleatoria $X(t) \mid X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda_1\left(m(s,t),\ v(s,t)\right)$, aplicando resultados conocidos de dicha distribución, podemos obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$E[X^r(t) \mid X(s) = x] = \exp\left\{rm(s,t) + \frac{r^2}{2}v(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{r\log(x) + r\gamma_0(t-s) + r\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int_s^t g_i(\theta)d\theta + \frac{r^2\sigma^2}{2}(t-s)\right\}.$$

Tendencia

El momento de primer orden, $r = 1$, **tendencia condicionada**, tiene la expresión:

$$E[X(t) \mid X(s) = x] =$$

$$\exp\left\{\log(x) + \gamma_0(t-s) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_s^t g_i(\theta)d\theta + \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right\}.$$

Varianza

La **varianza condicionada** del proceso se expresa de la forma:

$$Var[X(t) \mid X(s) = x] = \exp\{2m(s,t) + 2v(s,t)\} - \exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} =$$

$$\exp\{2m(s,t) + v(s,t)\} \times (\exp\{v(s,t)\} - 1) =$$

$$\exp\left\{2\log(x) + 2\gamma_0(t-s) + 2\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_s^t g_i(\theta)d\theta + \sigma^2(t-s)\right\} \times \left(\exp\left\{\sigma^2(t-s)\right\} - 1\right) =$$

$$\exp\left\{2\log(x) + 2\gamma_0(t-s) + 2\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_s^t g_i(\theta)d\theta + \sigma^2(t-s)\right\} \times \left(e^{\sigma^2(t-s)} - 1\right).$$

4.5.4. Estimación de los parámetros

A continuación se trata de estimar los parámetros del proceso Gompertz con factores exógenos por el método de máxima verosimilitud. Para determinar la función de verosimilitud condicionada, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

Si denotamos por $r_j = t_j - t_{j-1}$ tendremos:

$$m_j = \log(x_{j-1})e^{-\int_{t_{j-1}}^{t_j} h(z)dz} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} k(\theta)e^{-\int_{\theta}^{t_j} h(z)dz}d\theta =$$

$$\log(x_{j-1}) + \gamma_0(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)d\theta = \log(x_{j-1}) + \gamma_0 r_j + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)d\theta$$

y

$$v_j = \sigma^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-2\int_{t_{j-1}}^{\theta} h(z)dz} d\theta = \sigma^2(t_j - t_{j-1}) = \sigma^2 r_j,$$

con lo que la función de verosimilitud asociada al proceso vendrá dada por la siguiente expresión, en la que se utiliza la función de densidad de probabilidad del proceso Gompertz:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j \mid x_{j-1}, t_{j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (2\pi v_j)^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[\log(x_j) - m_j]^2}{v_j}\right\} =$$

$$\prod_{j=1}^{n}(2\pi\sigma^2 r_j)^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \gamma_0 r_j - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)d\theta\right]^2}{\sigma^2 r_j}\right\},$$

donde $\gamma_0 = \alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}$.

Teniendo en cuenta que los valores que maximizan dicha función también maximizan su logaritmo, tomando logaritmos, se tiene:

$$\log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \ldots, x_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\left(\sigma^2\right) - \sum_{j=1}^{n}\log(x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log(r_j) -$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \gamma_0 r_j - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)d\theta\right]^2}{r_j}.$$

Y notando por:

$$B_j = \left[\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \gamma_0 r_j - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)d\theta\right]$$

tenemos que:

$$\log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\left(\sigma^2\right) - \sum_{j=1}^{n}\log(x_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log(r_j) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j^2}{r_j}.$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \gamma_0,$ y σ^2 , calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de ellos, e igualamos a cero.

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\gamma_0}$** tenemos que:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \gamma_0} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} B_j$$

Igualando a cero dicha derivada parcial, tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) d\theta \right) - \gamma_0 \sum_{j=1}^{n} r_j = 0$$

con lo que se obtiene el estimador:

$$\hat{\gamma}_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) d\theta \right).$$

- Para el **parámetro $\boldsymbol{\sigma^2}$** seguiremos el mismo proceso:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2}{r_j}$$

e igualando a cero

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2}{r_j} = 0$$

el estimador queda

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j^2}{r_j}.$$

- Para los **parámetros $\boldsymbol{\alpha_l}$**, $l = 1, \ldots, q$:

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \alpha_l} = -\frac{1}{2\sigma^2} 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{r_j} \left(- \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta \right)$$

e igualando a cero

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{r_j} \left(- \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta \right) = 0$$

con lo que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta \right) (\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \gamma_0 r_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) d\theta \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \left(\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta \right) (\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \gamma_0 r_j) - \sum_{i=1, i \neq l}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) d\theta \right) =$$

$$\alpha_l \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta \right)^2$$

y el estimador queda

$$\hat{\alpha}_l = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \left(\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta \right) (\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \gamma_0 r_j) - \sum_{i=1, i \neq l}^{q} \alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta) d\theta \right) \times$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta) d\theta \right)^2 \right)^{-1}.$$

Caso particular: intervalos de amplitud 1

Un caso particular, de gran interés en relación a su utilidad práctica, es aquel en el que las observaciones están hechas en intervalos igualmente espaciados y con $r_j = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, es decir, los incrementos entre cada uno de los instantes de tiempo en el que se realizan las observaciones son iguales a la unidad.

En este caso, aparece una expresión explícita para todos los estimadores de los parámetros, lo que conlleva la gran ventaja de que no hay que resolver ninguna ecuación lineal.

Bajo esta consideración los estimadores antes calculados serían:

$$\hat{\gamma_0} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{q}\alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)d\theta\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B_j^2.$$

$$\hat{\alpha}_l = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta)d\theta\right)(\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - \gamma_0) - \sum_{i=1, i\neq l}^{q}\alpha_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} g_i(\theta)d\theta\right) \times$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_l(\theta)d\theta\right)^2\right)^{-1}.$$

Consideremos un muestreo discreto del proceso considerando los instantes $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, por lo que tendremos las mediciones:

$$X(t_0) = x_0,\ X(t_1) = x_1, \ldots,\ X(t_n) = x_n$$

con la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$ y suponiendo que la amplitud de los intervalos es constante e igual a la unidad, $t_i - t_{i-1} = 1,\ \forall i = 1, \ldots, n$.

En tal muestreo discreto estimaremos los parámetros $\beta,\ \sigma,\ \alpha_i, i = 1, \ldots, q$, del modelo por el método de máxima verosimilitud. Con objeto de expresar esta verosimilitud de forma condensada, introduciremos las reparametrizaciones y vectores siguientes:

$\gamma_\beta = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta})$

$\nu_\beta = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta})$

$\mathbf{a} = \left(\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_q\right)'_{(q+1)\times 1}$

$v_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1}(\log(x_i) - e^{-\beta}\log(x_{i-1})), \quad i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{u}_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1}(\gamma_\beta, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_1(\xi)e^{-\beta(t_i-\xi)}d\xi, \ldots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_q(\xi)e^{-\beta(t_i-\xi)}d\xi)'_{(q+1)\times 1}$

$\mathbf{v}_\beta = (v_{1,\beta}, \ldots, v_{n,\beta})'_{n\times 1}$

$\mathbf{U}_\beta = (\mathbf{u}_{1,\beta}, \ldots, \mathbf{u}_{n,\beta})_{(q+1)\times n}$, matriz de rango $q+1$.

La función de verosimilitud que utilizaremos para realizar inferencia sobre los parámetros desconocidos es, considerando las reparametrizaciones anteriores:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n|\mathbf{a}, \beta, \sigma^2) = \prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j|x_{j-1}, t_{j-1}) =$$

$$(2\pi\sigma^2\nu_\beta^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})'(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})\right\}.$$

Diferenciando la log-verosimilitud respecto de $\mathbf{a}, \sigma^2$ y β, aparecen las ecuaciones:

$$\mathbf{U}_\beta\mathbf{v}_\beta = \mathbf{U}_\beta\mathbf{U}'_\beta\mathbf{a}$$

$$n\sigma^2 = (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})'(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a})$$

$$\left(\nu_\beta^{-1}e^{-\beta}\mathbf{l}'_x - \mathbf{a}'\frac{\partial\mathbf{U}_\beta}{\partial\beta}\right)\left(\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta\mathbf{a}\right) = 0$$

siendo $\mathbf{l}'_x = (\log(x_1), \ldots, \log(x_n)'$ y $\frac{\partial\mathbf{U}_\beta}{\partial\beta}$ la matriz formada por las derivadas de los elementos de $\mathbf{U}_\beta$ respecto de β. De esta forma, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de $\mathbf{a}$ y de σ^2:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}_{\hat\beta}\mathbf{U}'_{\hat\beta})^{-1}\mathbf{U}_{\hat\beta}\mathbf{v}_{\hat\beta}$$

$$n\hat\sigma^2 = \mathbf{v}'_{\hat\beta}\mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat\beta}\mathbf{v}_{\hat\beta}$$

siendo:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat\beta} = \mathbf{I}_n - \mathbf{U}'_{\hat\beta}(\mathbf{U}_{\hat\beta}\mathbf{U}'_{\hat\beta})^{-1}\mathbf{U}_{\hat\beta}$$

matriz simétrica e idempotente.

El estimador de β se obtiene sustituyendo las expresiones de $\hat{\mathbf{a}}$ y $n\hat{\sigma}^2$ en la tercera ecuación de verosimilitud, quedando la siguiente expresión:

$$\left(\nu_{\beta}^{-1} e^{-\beta}\mathbf{l}'_x - \mathbf{v}_{\hat{\beta}}\mathbf{U}'_{\hat{\beta}}(\mathbf{U}_{\hat{\beta}}\mathbf{U}'_{\hat{\beta}})^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}_{\beta}}{\partial \beta}\right)\mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat{\beta}}\mathbf{v}_{\hat{\beta}}.$$

Debido a que en la ecuación anterior aparecen las funciones $g_j(t)$, no es posible una expresión explícita del estimador de β, ya que dichas funciones solamente pueden ser conocidas a partir de las observaciones discretas de las variables exógenas:

$$y_{i,j} \qquad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, q.$$

Por esta razón, normalmente se construyen los factores exógenos a partir de los valores observados de las variables a través de funciones poligonales:

$$g_i(t) = y_{i-1,j} + (y_{i,j} - y_{i-1,j})(t - t_{i-1})$$

por lo que si denotamos:

$$z_{ij}(\beta) = y_{i-1,j} + (y_{i,j} - y_{i-1,j})\frac{\beta - 1 + e^{-\beta}}{\beta(1 - e^{-\beta})}$$

queda:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_j(\xi)e^{-\beta(t_i-\beta)}d\xi = \gamma_{\beta} z_{ij}(\beta).$$

4.6. Caso 6: $g(t) = \alpha_1 log(e + \xi_1 t) + \alpha_2 log(e + \xi_2 t) + \alpha_0$ y $h(t) = \beta$

4.6.1. Definición del modelo

Consideraremos un modelo estocástico Gompertz con dos funciones terapia logarítmicas, siendo el objetivo estimar los parámetros de interés del proceso (coeficientes de tendencia y de difusión).

Sea $\{X(t),\ t \in [0,T];\ T \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso estocástico Gompertz univariante no homogéneo con la ecuación diferencial estocástica (SDE) de Itô:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sqrt{b(t, X(t))}dw_t, \quad t \geq 0,$$

siendo w_t el proceso Wiener. El coeficiente de tendencia $a(t, X(t))$ y el coeficiente de difusión $b(t, X(t))$ tienen la siguiente forma:

$$a(t, X(t)) = g(t)X(t) - \beta X(t)\text{log(x)}\ X(t)$$

con

$$g(t) = \alpha_1\text{log(x)}(e + \xi_1 t) + \alpha_2\text{log(x)}(e + \xi_2 t) + \alpha_0$$

y

$$b(t, X(t)) = \sigma^2 X^2(t),$$

donde $\alpha_i \geq 0,\ i = 0, 1, 2,\quad \xi_i > 0,\ i = 1, 2,\quad \beta > 0$ y $\sigma > 0$.

4.6.2. Densidad de transición

Las soluciones, usando la fórmula de Itô, vienen dadas por

$$X(t) \mid X(s) = \exp\Big\{e^{-\beta(t-s)} \log\ X(s) + \int_s^t (g(\tau) - \frac{\sigma^2}{2})e^{-\beta(t-\tau)}d\tau + \sigma \int_s^t e^{-\beta(t-\tau)}dw_\tau\Big\}.$$

La variable aleatoria

$$\int_s^t e^{-\beta(t-\tau)}dw_\tau$$

sigue una distribución Normal $N(0, \int_s^t e^{-2\beta(t-\tau)}d\tau)$ ([74]), con lo que la variable condicionada $X(t) \mid X(s) = x_s$ es una lognormal $\Lambda_1(\mu(s,t,x_s), \sigma^2 v^2(s,t))$, donde

$$\mu(s,t,x_s) = e^{-2\beta(t-s)} log\ x_s - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}) + \int_s^t g(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau$$

$$v^2(s,t) = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}).$$

Por lo tanto, la función de densidad de transición viene dada por

$$P(y,t \mid x,s) = (2\pi\sigma^2 v^2(s,t))^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \exp\left\{ -\frac{(\log\ y - \mu(s,t,x_s))^2}{2\sigma^2 v^2(s,t)} \right\}.$$

4.6.3. Momentos del proceso

Una vez que se ha obtenido la función de densidad condicionada, los momentos del proceso, y por tanto la función tendencia condicionada, se obtienen directamente.

Tendencia

El momento condicional de orden $r = 1$ viene dado por

$$E[X(t) \mid X(s) = x_s] = \exp\left\{\mu(s,t,x_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 v^2(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)} \log\ x_s + \frac{\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \int_s^t g(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau\right\}.$$

Por lo tanto, si consideramos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$, obtenemos la tendencia no condicionada

$$E[X(t) \mid X(0) = x_0] = \exp\left\{e^{-\beta t} \log\ x_0 + \frac{\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-2\beta t}) - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \int_0^t g(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau\right\}.$$

4.6.4. Estimación de los parámetros

En lo que sigue, consideraremos que los parámetros ξ_1 y ξ_2 son conocidos. Para estimar los parámetros $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta,$ y σ^2 del modelo, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$ realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

La función de verosimilitud asociada al proceso vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n; a, \beta, \sigma) = \prod_{j=1}^{n} P(X(t_j) = x_j \mid X(t_{j-1}) = x_{j-1}),$$

que podemos escribir, usando las reparametrizaciones usadas anteriormente, como

$$\mathbb{L}(v_0, v_1, \ldots, v_n; a, \beta, \sigma) = \left\{2\pi\sigma^2 v^2(s,t)\right\}^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(V_\beta - U'_\beta a)'(V_\beta - U'_\beta a)\right\}$$

donde

$$a = (\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \alpha_2)'_{3\times 1},$$

$$V_\beta = (v_1, v_2, \ldots, v_n)'_{n\times 1},$$

$$U_\beta = (u_{1\beta}, u_{2\beta}, \ldots, u_{n\beta})'_{3\times n},$$

con

$$u_{i\beta} = \frac{1}{\nu_\beta}\left(\gamma_\beta, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \log(e+\xi_1 t)e^{-\beta(t_i-t)}dt, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \log(e+\xi_2 t)e^{-\beta(t_i-t)}dt\right)'_{3\times 1}$$

y

$$v_i = \frac{1}{\nu_\beta}(\log\ x_i - e^{-\beta}\log\ x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde

$$\nu_\beta = \frac{1-e^{-2\beta}}{2\beta},$$

$$\gamma_\beta = \frac{1-e^{-\beta}}{\beta}.$$

Derivando el logaritmo de la función de verosimilitud $\mathbb{L}(v_0, v_1, \ldots, v_n; a, \beta, \sigma)$ respecto de los tres parámetros, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2}U_\beta\left(V_\beta - U'_\beta a\right),\\
\frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial \beta} &= \left(\nu_\beta^{-1}1_x e^{-\beta} - a'\frac{\partial U_\beta}{\partial \beta}\right)\left(V_\beta - U'_\beta a\right),\\
\frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\left(V_\beta - U'_\beta a\right)'\left(V_\beta - U'_\beta a\right),
\end{aligned}$$

donde

$$1_x = (\log\ x_1, \log\ x_2, \ldots, \log\ x_n)'.$$

Por lo tanto, los estimadores por máxima verosimilitud se pueden obtener igualando las derivadas anteriores a cero, con lo que obtenemos el siguiente *Sistema Normal Principal*:

$$\begin{cases} U_\beta V_\beta = U_\beta U'_\beta a \\ \left(\frac{1}{\nu_\beta} e^{-\beta} 1'_x - a' \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta}\right)\left(V_\beta - U'_\beta a\right) = 0 \\ n\sigma^2 = (V_\beta - U'_\beta a)'(V_\beta - U'_\beta a) \end{cases}$$

La segunda de las ecuaciones puede ser reescrita como

$$\left(e^{-\beta} 1'_x - \widetilde{V}_\beta U_\beta (U_\beta U'_\beta)^{-1} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta}\right) H_{u,\beta} \widetilde{V}_\beta = 0,$$

donde

$$\widetilde{V}_\beta = (log\ x_i - e^{-\beta} \log\ x_{i-1})_{i=1,\ldots,n}$$

y

$$H_{u,\beta} = I_n - U'_\beta (U_\beta U'_\beta)^{-1} U_\beta,$$

con la propiedad de idempotencia

$$H^2_{u,\beta} = H_{u,\beta}.$$

Como las ecuaciones anteriores contienen "$(g_i(t) = \log(e + \xi_i t))_i$", con el fin de estimar el parámetro β, sólo se han hecho aproximaciones basadas en observaciones discretas de las variables exógenas.

4.6.5. Metodología Computacional

Desarrollamos ahora una aproximación computacional para calcular los estimadores del modelo propuesto. Esta metodología no requiere la solución numérica del *Sistema*

Normal Principal (las tres ecuaciones dadas en la sección anterior) que, como se comentó anteriormente, presenta considerables dificultades que surgen de la dependencia implícita de las funciones terapia del modelo.

La metodología computacional seguida presenta los siguientes pasos:

1. Comenzamos por la segunda ecuación del *Sistema Normal Principal* de máxima verosimilitud y, por medio de cálculos adicionales y de resultados generales de optimización funcional, obtenemos un estimador del parámetro β, a partir de una expresión explícita de la solución en β, que es válida para todos los valores del parámetro a.

2. Una vez obtenido el estimador de β, $\hat{\beta}$, consideramos la primera ecuación del *Sistema Normal Principal*, y obtenemos el estimador de máxima verosimilitud de a, $\hat{a}$.

3. Una vez concocidos $\hat{\beta}$ y $\hat{a}$, podemos obtener el estimador de σ^2, usando la tercera ecuación del*Sistema Normal Principal*. Y de la solución para $\hat{a}$ y $\hat{\sigma}^2$, podemos obtener los estimadores individuales para el resto de los parámetros.

Para una posible expresión explícita del estimador de β, podemos tomar diferentes enfoques, como una alternativa para la ecuación

$$\left(e^{-\beta}1'_x - \widetilde{V}_\beta U_\beta (U_\beta U'_\beta)^{-1}\frac{\partial U_\beta}{\partial \beta}\right) H_{u,\beta}\widetilde{V}_\beta = 0.$$

Consideremos P_u como el proyector definido por la matriz $H_{u,\beta}$, y sus espacios respectivos para ser el núcleo $M(U_\beta)$ de P_u y la imagen $Im(P_u)$. Una de las propiedades vectoriales de estos espacios es que $M(U_\beta)$ se genera por las columnas de la matriz U_β y que el espacio principal (que en este caso es $\mathbb{R}^n$) es la suma directa de los dos. En otras palabras, $\mathbb{R}^n = M(U_\beta) \bigoplus Im(P_u)$.

Por lo tanto, podemos escribir $\widetilde{V}_\beta$, que representa la solución de la ecuación anterior, en la forma

$$\widetilde{V}_\beta = V_1 + V_2; \quad \text{con} \;\; V_1 \in M(U_\beta) \;\; \text{y} \;\; V_2 \in Im(P_u)$$

y deducir que la ecuación

$$\left(e^{-\beta} 1'_x - \widetilde{V}_\beta U_\beta (U_\beta U'_\beta)^{-1} \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} \right) H_{u,\beta} \widetilde{V}_\beta = 0,$$

es equivalente al sistema

$$\begin{cases} e^{-\beta} 1'_x V_2 - \lambda' \frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} V_2 = 0 \\ V_1 = \lambda' U_\beta; \quad \lambda \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

En consecuencia, si V_2^* es solución de este sistema, entonces una solución del sistema anterior será

$$\widetilde{V}^*_\beta = V_1 + V_2^*; \quad \text{para} \;\; V_1 \in M(U_\beta).$$

Además de las características de los espacios $M(U_\beta)$ y $Im(P_{U_\beta})$, tenemos que $U_\beta V_2 = 0$, con lo que el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{cases} e^{-\beta} 1'_x V_2 - \lambda' U_\beta \frac{\partial V_2}{\partial \beta} = 0 \\ V_1 = \lambda' U_\beta; \quad \lambda \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Si además reemplazamos $\lambda' U_\beta$ por $(\widetilde{V}_\beta - V_2)$ obtenemos una ecuación diferencial del tipo

$$V(\beta)' dV(\beta) + a'(\beta) V(\beta) = b(\beta),$$

donde

$$\begin{array}{rcll} V(\beta) & = & V_1 = \widetilde{V}_\beta - V_2; & n \times 1, \\ a(\beta) & = & e^{-\beta} 1_x + \dfrac{\partial \widetilde{V}_\beta}{\partial \beta}; & n \times 1, \\ b(\beta) & = & e^{-\beta} 1'_x \widetilde{V}_\beta; & 1 \times 1. \end{array}$$

Aparentemente, la resolución de la principal ecuación del sistema normal se reduce a la ecuación diferencial

$$V(\beta)' dV(\beta) + a'(\beta)V(\beta) = b(\beta).$$

Se puede ver además que la norma del vector $V(\beta)$ se minimiza (Teorema de la Proyección Ortogonal), con lo que el término $V'dV$ es nulo. Así esta ecuación se reduce a la siguiente ecuación en β

$$a'(\beta)V(\beta) = b(\beta).$$

Nótese que la dependencia de β via V es desconocida. Para este tipo de problemas, son posibles varias aproximaciones basadas en la resolución numérica (método secante, método de Newton, método de bisección, ver [31]). En esta última ecuación $V(.)$ es una función desconocida de β, lo que complica la tarea. Una posible alternativa sería utilizar la propiedad mencionada anteriormente de la proyección ortogonal, y encontrar una solución minimizando la norma del vector $V(\beta)$.

Minimización de la norma del vector $V(\beta)$

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F}_\beta = \{V \in \mathbb{R}^n \ / \ a'(\beta)V = b(\beta)\}$$

según la norma Euclídea en $\mathbb{R}^n$. Procederemos como sigue:

1. Buscaremos el ínfimo del conjunto normado $\mathcal{F}_\beta$, para cualquier valor de β, en el siguiente sentido: Un elemento V^* de $\mathcal{F}_\beta$ se dice ínfimo si $\|V^*\| \leq \|V\|$ para cualquier V en $\mathcal{F}_\beta$.

2. Minimizaremos el ínfimo encontrado con respecto al valor de β.

Por lo tanto, según la condición necesaria de primer orden (ver el teorema 10.3, de la página 300 de [96]) tenemos que si V^* es un ínfimo de $\mathcal{F}_\beta$, entonces existe un escalar λ tal que

$$\nabla\|V^*\| - \lambda a'(\beta)(\beta) = 0$$

donde $\nabla\|V^*\|$ representa el gradiente, con respecto de V, de la norma en el vector V^*. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{V^*}{\|V^*\|} - \lambda a'(\beta) = 0$$

de lo cual

$$\lambda a'(\beta) = \frac{V^*}{\|V^*\|}.$$

Reemplazando V^* por $\lambda a'(\beta)\|V^*\|$ en la ecuación $a'(\beta)V(\beta) = b(\beta)$ obtendremos la expresión del parámetro λ. De hecho, tenemos

$$\lambda\|V^*\|a'(\beta)a(\beta) = b(\beta),$$

lo que significa que

$$\lambda = \frac{b(\beta)}{\|a(\beta)\|^2\|V^*\|}$$

y así tendremos

$$\|V^*\| = \frac{|b(\beta)|}{\|a(\beta)\|}.$$

Se puede concluir que el principal problema se reduce al de minimizar el cociente $\frac{|b(\beta|}{\|a(\beta)\|}$. En primer lugar demostraremos que

$$\frac{\|b(\beta^*)\|}{\|a(\beta^*)\|} = \|V(\beta^*)\| = \min_{\beta} \|V(\beta)\|$$

donde β^* es el valor óptimo con el que se soluciona el problema. En primer lugar, determinaremos β^* y entonces consideraremos el problema de optimización

$$P_1 : \quad \min_{z}\{Z'V(\beta^*)/Z \in M(U_\beta),\ a(\beta^*)'Z = b(\beta^*)\}.$$

De las propiedades del proyector $H_{u,\beta}$, una solución óptima será

$$Z^* = V(\beta^*),$$

lo cual significa que

$$Z^{*'} V(\beta^*) = \|V(\beta^*)\|^2.$$

Si consideramos el problema dual de P_1 definido en [13] por

$$D_1 : \quad \max_{y}\{yb(\beta^*)/y \in R,\ a(\beta^*)y \leq V(\beta^*)\},$$

se obtiene la solución por medio de restricciones de igualdad, debido a que el problema es convexo (Teorema 3, página 181, de [96]). La interpretación de " $\leq$ " es la desigualdad de los componentes, tomados uno a uno, mientras que $\frac{\partial V_{\beta^*}}{\partial \beta}$ se refiere al valor en β^* de $\frac{\partial V_\beta}{\partial \beta}$, o sea, $\frac{\partial V_\beta}{\partial \beta}|_{\beta=\beta^*}$. Por lo tanto, si y^* es una solución óptima a este problema dual, entonces

$$a(\beta^*)y^* = V(\beta^*),$$

con

$$|y^*| = \frac{\|V(\beta^*)\|^2}{\|a(\beta^*)\|},$$

que significa que

$$a(\beta^*)\frac{\|V(\beta^*)\|^2}{b(\beta^*)} = \pm V(\beta^*),$$

y por lo tanto

$$\frac{|b(\beta^*)|}{\|a(\beta^*)\|} = \|V(\beta^*)\|.$$

Finalmente, deduciremos que el valor de β que minimiza el cociente $\frac{|b(\beta^*)|}{\|a(\beta^*)\|}$ también minimiza la norma $\|V(\beta)\|$, y esto, a su vez, es igual a

$$\frac{|e^{-\beta^*}1'_x\tilde{V}_{\beta^*}|}{\left\|\left(e^{-\beta^*}1'_x + \frac{\partial\tilde{V}_{\beta^*}}{\partial\beta}\right)\right\|} = \frac{|\sum_{i=1}^n log^2 x_i - e^{-\beta^*}\sum_{i=1}^n log\ x_i log\ x_{i-1}|}{\left(\sum_{i=1}^n (log\ x_i + log\ x_{i-1})^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

En consecuencia, tenemos

$$\beta^* = log\left[\frac{\sum_{i=1}^n log\ x_i log\ x_{i-1}}{\sum_{i=1}^n log^2 x_i}\right].$$

Estimación de $(\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \alpha_2)$

Para hacer esto, utilizaremos las funciones poligonales

$$g_j(t) = g_j(t_{i-1}) + (g_j(t_i) - g_j(t_{i-1}))(t - t_{i-1})$$

como una aproximación lineal de la función "$g_j(t) = log(e+\xi_j t)$" en el intervalo "$[t_{i-1}, t_i]$" con una amplitud de "1". Por lo tanto, escribiendo

$$Z_{ij(\beta^*)} = g_j(t_{i-1}) + (g_j(t_i) - g_j(t_{i-1}))\frac{\beta^* - 1 + e^{-\beta^*}}{\beta^*(1 - e^{-\beta^*})}; \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

obtendremos

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_j(\xi)e^{-\beta^*(t_i-\xi)}d\xi = \nu_{\beta^*} Z_{ij}(\beta^*).$$

De la primera ecuación $U_\beta V_\beta = U_\beta U'_\beta a$ del sistema normal principal, concluimos que

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*} & u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*} \\ u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} & u'_{2\beta^*}u_{3\beta^*} \\ u'_{3\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{3\beta^*}u_{2\beta^*} & u'_{3\beta^*}u_{3\beta^*} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u'_{1\beta^*}V_{\beta^*} \\ u'_{2\beta^*}V_{\beta^*} \\ u'_{3\beta^*}V_{\beta^*} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*} & u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*} \\ u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} & u'_{2\beta^*}u_{3\beta^*} \\ u'_{3\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{3\beta^*}u_{2\beta^*} & u'_{3\beta^*}u_{3\beta^*} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}C_{11} + u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}C_{12} + u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*}C_{13}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

y donde

$$\begin{aligned}
C_{11} &= +u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{3\beta^*}u_{3\beta^*} - u'_{3\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{3\beta^*}, \\
C_{12} &= -u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{3\beta^*}u_{3\beta^*} + u'_{3\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{3\beta^*}, \\
C_{13} &= +u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{3\beta^*}u_{2\beta^*} - u'_{3\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*}, \\
C_{21} &= -u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{3\beta^*}u_{3\beta^*} + u'_{3\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*}, \\
C_{22} &= +u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{3\beta^*}u_{3\beta^*} - u'_{3\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*}, \\
C_{23} &= -u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{3\beta^*}u_{2\beta^*} + u'_{3\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}, \\
C_{31} &= +u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{3\beta^*} - u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*}, \\
C_{32} &= -u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{3\beta^*} + u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*}, \\
C_{33} &= +u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} - u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, los estimadores son:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} &= \frac{\sum_{j=1}^{3} C_{j1} u'_{j\beta^*} V_{\beta^*}}{u'_{1\beta^*} u_{1\beta^*} C_{11} + u'_{1\beta^*} u_{2\beta^*} C_{12} + u'_{1\beta^*} u_{3\beta^*} C_{13}},\\
\hat{\alpha}_1 &= \frac{\sum_{j=1}^{3} C_{j2} u'_{j\beta^*} V_{\beta^*}}{u'_{1\beta^*} u_{1\beta^*} C_{11} + u'_{1\beta^*} u_{2\beta^*} C_{12} + u'_{1\beta^*} u_{3\beta^*} C_{13}},\\
\hat{\alpha}_2 &= \frac{\sum_{j=1}^{3} C_{j3} u'_{j\beta^*} V_{\beta^*}}{u'_{1\beta^*} u_{1\beta^*} C_{11} + u'_{1\beta^*} u_{2\beta^*} C_{12} + u'_{1\beta^*} u_{3\beta^*} C_{13}}.
\end{aligned}
$$

En este caso, la función Z_{ij} es

$$
Z_{ij}(\beta^*) = log(e + \xi_j t_{i-1}) + \left(\log(e + \xi_j t_i) - log(e + \xi_j t_{i-1})\right) \frac{\beta^* - 1 + e^{-\beta^*}}{\beta^*(1 - e^{-\beta^*})}.
$$

4.6.6. Caso especial de una única función terapia

Ahora consideramos el caso particular del modelo anterior, en el que sólo existe una función terapia logarítmica. Por lo tanto, la función $g(t)$ sólo tiene los parámetros α_0 y α_1 y la tendencia tiene los parámetros α_0, α_1, β y ξ_1. Consideramos este caso particular por dos razones: se ha abordado en artículos previos y existen programas de cálculo y estudios de simulaciones para su análisis y aplicación. Aquí ofreceremos expresiones completas de los estimadores presentados anteriormente, en términos del proceso muestral considerando el muestreo discreto $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Por lo tanto, hemos preparado las expresiones que se calculan en estudios posteriores, a fin de comparar los estimadores obtenidos del estudio computacional teórico con los valores obtenidos para estos parámetros usando una resolución numérica directa del *Sistema Normal Principal* visto antes.

Consideremos el caso en que la tendencia del proceso depende de una única función terapia, como se describe a continuación:

$$a(t, X(t)) = (\alpha_0 + \alpha_1 \log(e + \xi_1 t))X(t) - \beta X(t) \log\ X(t)$$

$$b(t, X(t)) = \sigma^2 X^2(t).$$

Entonces, la función $g(.)$ en el proceso $X(t) \mid X(s)$ será

$$g(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \log(e + \xi_1 t).$$

Además, el momento condicional de orden $r = 1$ será

$$E[X(t) \mid X(s) = x_s] = \exp\left\{\mu(s,t,x_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 v^2(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)} \log\ x_s + \frac{\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \int_s^t g(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau\right\} =$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)} \log\ x_s + \frac{\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-2\beta(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \int_s^t (\alpha_0 + \alpha_1 \log(e + \xi_1 \tau)) e^{-\beta(t-\tau)} d\tau\right\}.$$

Por lo tanto, para un ξ_1 conocido, el problema se reduce a estimar α_0, α_1, β y σ. Para hacer esto, consideremos

$$V_\beta = (v_1, v_2, \ldots, v_n)'_{n\times 1}, \quad a = (\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1)'_{2\times 1}, \quad \nu_\beta = \frac{1 - e^{-2\beta}}{2\beta},$$

$$U_\beta = (u_{1\beta}, u_{2\beta}, \ldots, u_{n\beta}), \quad , \quad \gamma_\beta = \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta},$$

con

$$u_{i\beta} = \frac{1}{\nu_\beta}\left(\gamma_\beta,\ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \log(e + \xi_1 t) e^{-\beta(t_i - t)} dt\right)'_{2\times 1}$$

$$v_i = \frac{1}{\nu_\beta}(\log\ x_i - e^{-\beta} \log\ x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

De las tres igualdades del *Sistema Normal Principal*, obtenemos las soluciones como

$$\beta^* = log\left(\frac{\sum_{i=1}^n \log\ x_i \log\ x_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \log^2\ x_i}\right),$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*} \\ u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u'_{1\beta^*}V_{\beta^*} \\ u'_{2\beta^*}V_{\beta^*} \end{pmatrix}$$

donde tenemos

$$\begin{pmatrix} u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*} \\ u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*} & u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\frac{1}{u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} - u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}} \begin{pmatrix} u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} & -u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*} \\ -u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*} & u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*} \end{pmatrix}$$

y

$$V_{\beta^*} =$$

$$\frac{2\left[\log(\sum_{i=1}^n \log\ x_i \log\ x_{i-1}) - \log(\sum_{i=1}^n \log^2\ x_i)\right]}{1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^n \log\ x_i^2}{\sum_{i=1}^n \log\ x_i \log\ x_{i-1}}\right)^2} \left(\log\ x_j - \frac{\sum_{i=1}^n \log\ x_i}{\sum_{i=1}^n \log\ x_i^2 \log\ x_{i-1}} \log\ x_j\right)_{j=1,\ldots,n}.$$

En consecuencia, los estimadores de α_0, α_1 y σ se obtienen usando las siguientes igualdades

$$\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \frac{\sum_{j=1}^2 C_{j1}u_{j\beta^*}V_{\beta^*}}{u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} - u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^3 C_{j2}u_{j\beta^*}V_{\beta^*}}{u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} - u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}},$$

donde

$$C_{11} = u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*}, \quad C_{21} = -u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}, \quad C_{12} = -u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}, \quad C_{22} = u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*},$$

con

$$u_{1\beta^*} = (\gamma_{\beta^*}, \ldots, \gamma_{\beta^*})'_{1\times n},$$

$$u_{2\beta^*} = \frac{1}{\nu_{\beta^*}}\left(\int_{t_0}^{t_1} \log(e+\xi_1 t)e^{-\beta^*(t_1-t)}dt, \ldots, \int_{t_{n-1}}^{t_n} \log(e+\xi_1 t)e^{-\beta^*(t_n-t)}dt\right)'$$

y

$$
\begin{aligned}
u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*} &= \frac{n(1-e^{-\beta^*})^2}{\beta^{*2}\nu_{\beta^*}^2},\\
u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*} &= \frac{1}{\nu_{\beta^*}}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{\beta^*}Z_{i1}(\beta^*),\\
u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*} &= \frac{1}{\nu_{\beta^*}}\sum_{i=1}^{n}Z_{i1}(\beta^*),
\end{aligned}
$$

en los que

$$
\nu_{\beta^*} = \frac{1}{2\left[\log(\sum_{i=1}^{n}\log\ x_i\log\ x_{i-1})-\log(\sum_{i=1}^{n}\log^2\ x_i)\right]}\left[1-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\log^2\ x_i}{\sum_{i=1}^{n}\log\ x_i\log\ x_{i-1}}\right)^2\right],
$$

$$
\gamma_{\beta^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\log\ x_i\log\ x_{i-1}-\sum_{i=1}^{n}\log^2\ x_i}{\sum_{i=1}^{n}\log\ x_i\log\ x_{i-1}\left(\log(\sum_{i=1}^{n}\log\ x_i\log\ x_{i-1})-\log(\sum_{i=1}^{n}\log^2\ x_i)\right)},
$$

$$
Z_{i1} = \log(e+\xi_1 t_{i-1})+\left(\log(e+\xi_1 t_i)-\log(e+\xi_1 t_{i-1})\right)\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\log\ x_i\log\ x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\log\ x_i\log\ x_{i-1}-\sum_{i=1}^{n}\log^2\ x_i)}\right].
$$

4.6.7. Conclusiones

Obteniendo una expresión explícita para el parámetro $\hat{\beta}$, el factor de desaceleración del tumor, se podrán estudiar sus propiedades estadísticas, así como las de los otros parámetros, en especial la tasa de crecimiento intrínseco del tumor $\hat{\alpha}_0$. Obtener los resultados explícitos de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros del modelo, y en especial para los coeficientes peso α_0, α_1 y α_2 de los factores logarítmicos exógenos que definen la función $g(t)$ en el coeficiente tendencia, es de fundamental importancia para establecer futuras hipótesis que nos permitan rechazar hipótesis nulas del tipo $\alpha_i = 0$ frente a alternativas del tipo $\alpha_i \neq 0$, que es equivalente a contrastar la influencia significativa del la i-ésima componente exógena (i-ésima función terapia). Para ello, se precisan datos sobre la distribución del muestreo de estos estimadores, de ahí la importancia del análisis computacional realizado antes. Este tipo de análisis estadístico no es posible si los estimadores se obtienen sólo mediante métodos numéricos (resolución por el sistema de ecuaciones normales).

También queda abierta la posibilidad de suponer funciones $g(t)$ que no sean simplemente una combinación lineal de funciones terapia logarítmicas, sino que tengan términos mixtos que dependan de más de una función terapia (el efecto multiplicativo de las terapias).

4.7. Caso 7: $g(t) = \alpha_1 \mathbf{log}(e + \xi_1 t) + \alpha_2 e^{-\theta t} + \alpha_0$ y $h(t) = \beta$

4.7.1. Definición del modelo

Consideramos un modelo estocástico Gompertz no homogéneo con una mezcla de funciones terapia logarítmica y exponencial, con el objetivo de estimar los parámetros de interés en los coeficientes de tendencia y de difusión, respectivamente.

Sea $\{X(t),\ t \in [0,T];\ T \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso estocástico Gompertz univariante no homogéneo con el siguiente modelo dinámico:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sqrt{b(t, X(t))}dw_t, \quad t \geq 0,$$

siendo w_t el proceso Wiener. El coeficiente de tendencia $a(t, X(t))$ y el coeficiente de difusión $b(t, X(t))$ tienen la siguiente forma:

$$a(t, X(t)) = g(t)X(t) - \beta X(t)\log\, X(t)$$

con

$$g(t) = \alpha_1 \log(e + \xi_1 t) + \alpha_2 e^{-\theta t} + \alpha_0$$

y

$$b(t, X(t)) = \sigma^2 X^2(t),$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \quad \theta \geq 0, \quad \beta > 0,\ \xi_1 > 0$ y $\sigma > 0$.

4.7.2. Densidad de transición

Las soluciones, usando la fórmula de Itô, vienen dadas por

$$X(t) \mid X(s) = \exp\Big\{e^{-\beta(t-s)}\log\, X(s) + \int_s^t \left(g(\tau) - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau + \sigma \int_s^t e^{-\beta(t-\tau)}dw_\tau\Big\}.$$

La variable aleatoria

$$\int_s^t e^{-\beta(t-\tau)}dw_\tau$$

sigue una distribución Normal $N(0, \int_s^t e^{-2\beta(t-\tau)}d\tau)$ (Gardiner [3]), con lo que la variable condicionada $X(t) \mid X(s) = x_s$ es una lognormal $\Lambda_1(\mu(s, t, x_s),\ \sigma^2 v^2(s, t))$, donde

$$\mu(s, t, x_s) = e^{-\beta(t-s)}\log\, x_s - \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) + \frac{\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta}(1 - e^{-\beta(t-s)}) -$$

$$\frac{\alpha_2}{\theta-\beta}\left[e^{-(\theta-\beta)t}-e^{-(\theta-\beta)s}\right]+\alpha_1\int_s^t \log(e+\xi_1\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau$$

$$v^2(s,t)=\frac{1}{2\beta}(1-e^{-2\beta(t-s)}).$$

Por lo tanto, la función de densidad de transición viene dada por

$$P(y,t\mid x,s)=(2\pi\sigma^2v^2(s,t))^{-\frac{1}{2}}y^{-1}\ \exp\left\{-\frac{(\log\ y-\mu(s,t,x_s))^2}{2\sigma^2v^2(s,t)}\right\}.$$

Una vez que se ha obtenido la función de densidad condicionada, los momentos del proceso y, por tanto, la función tendencia condicionada, se obtienen directamente.

El momento condicional de orden $r=1$ viene dado por

$$E[X(t)\mid X(s)=x_s]=\exp\left\{\mu(s,t,x_s)+\frac{1}{2}\sigma^2v^2(s,t)\right\}=$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)}\log\ x_s+\frac{\sigma^2}{4\beta}(1-e^{-2\beta(t-s)})-\frac{\sigma^2}{2\beta}(1-e^{-\beta(t-s)})+\int_s^t g(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau\right\}=$$

$$\exp\left\{e^{-\beta(t-s)}\log\ x_s+\frac{\sigma^2}{4\beta}(1-e^{-2\beta(t-s)})+\frac{\alpha_0}{\beta}(1-e^{-\beta(t-s)})\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{\alpha_2}{\theta-\beta}\left[e^{-(\theta-\beta)t}-e^{-(\theta-\beta)s}\right]+\alpha_1\int_s^t\log(e+\xi_1\tau)d\tau e^{-\beta(t-\tau)}d\tau\right\}.$$

Por lo tanto, si consideramos la condición inicial $P(X(t_0)=x_0)=1$, obtenemos la tendencia no condicionada

$$E[X(t)\mid X(0)=x_0]=\exp\left\{e^{-\beta t}\log x_0+\frac{\sigma^2}{4\beta}(1-e^{-\beta t})-\frac{\sigma^2}{2\beta}(1-e^{-\beta t})+\int_0^t g(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau\right\}=$$

$$\exp\left\{e^{-\beta t}\log x_0+\frac{\sigma^2}{4\beta}(1-e^{-2\beta t})+\frac{\alpha_0-\frac{\sigma^2}{2}}{\beta}(1-e^{-\beta t})-\frac{\alpha_2}{\theta-\beta}e^{-(\theta-\beta)t}+\alpha_1\int_0^t\log(e+\xi_1\tau)e^{-\beta(t-\tau)}d\tau\right\}.$$

4.7.3. Estimación de los parámetros

En lo que sigue, consideraremos que el parámetro ξ_1 es conocido. Para estimar los parámetros $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta,\ \theta,\ y\ \sigma^2$ del modelo, realizamos observaciones discretas del proceso, considerando el muestreo discreto $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, realizado en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$. Además, suponemos la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$.

La función de verosimilitud asociada al proceso vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n; a, \beta, \theta, \sigma) = \prod_{j=1}^{n} P(X(t_j) = x_j \mid X(t_{j-1}) = x_{j-1}),$$

que podemos escribir, usando las reparametrizaciones usadas anteriormente, como

$$\mathbb{L}(v_0, v_1, \ldots, v_n; a, \beta, \theta, \sigma) = \left\{2\pi\sigma^2 v^2(s,t)\right\}^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(V_\beta - U'_\beta(\theta)a\right)'\left(V_\beta - U'_\beta(\theta)a\right)\right\}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= (\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \alpha_2)'_{3\times1}, \\ V_\beta &= (v_1, v_2, \ldots, v_n)'_{n\times1}, \\ U_\beta(\theta) &= (u_{1\beta}(\theta), u_{2\beta}(\theta), \ldots, u_{n\beta}(\theta))'_{3\times n}, \end{aligned}$$

con

$$u_{i\beta}(\theta) = \frac{1}{\nu_\beta}\left(\gamma_\beta, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \log(e + \xi_1 t) e^{-\beta(t_i - t)} dt, \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta t} e^{-\beta(t_i - t)} dt\right)'_{3\times1}$$

con

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\theta t} e^{-\beta(t_i - t)} dt = \frac{e^{-\beta t_i}}{\beta - \theta}\left(e^{-t_i(\theta - \beta)} - e^{-t_{i-1}(\theta-\beta)}\right)$$

y

$$v_i = \frac{1}{\nu_\beta}(\log x_i - e^{-\beta} \log x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

donde

$$\nu_\beta = \frac{1-e^{-2\beta}}{2\beta},$$

$$\gamma_\beta = \frac{1-e^{-\beta}}{\beta}.$$

Derivando el logaritmo de la función de verosimilitud $\mathbb{L}(v_0, v_1, \ldots, v_n; a, \beta, \theta, \sigma)$ respecto de los cuatros parámetros, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2} U_\beta(\theta) \left(V_\beta - U'_\beta(\theta) a \right) \\
\frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial \beta} &= \left(\nu_\beta^{-1} 1_x e^{-\beta} - a' \frac{\partial U_\beta(\theta)}{\partial \beta} \right) \left(V_\beta - U'_\beta(\theta) a \right) \\
\frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \left(V_\beta - U'_\beta(\theta) a \right)' \left(V_\beta - U'_\beta(\theta) a \right) \\
\frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial \theta} &= \frac{1}{\sigma^2} \left(V_\beta - U'_\beta(\theta) a \right)' \frac{\partial U'_\beta(\theta)}{\partial \theta} a
\end{aligned}$$

donde

$$1_x = (\log x_1, \log x_2, \ldots, \log x_n)'.$$

Por lo tanto, los estimadores por máxima verosimilitud se pueden obtener igualando las derivadas anteriores a cero, con lo que obtenemos el siguiente *Sistema Normal Principal*:

$$\begin{cases}
U_\beta(\theta) V_\beta = U_\beta(\theta) U'_\beta(\theta) a \\
\left(\frac{1}{\nu_\beta} e^{-\beta} 1'_x - a' \frac{\partial U_\beta(\theta)}{\partial \beta} \right) (V_\beta - U'_\beta(\theta) a) = 0 \\
(V_\beta - U'_\beta(\theta) a)' (V_\beta - U'_\beta(\theta) a) = n\sigma^2 \\
\frac{1}{\sigma^2} (V_\beta - U'_\beta(\theta) a)' \frac{\partial U'_\beta(\theta)}{\partial \theta} a = 0
\end{cases}$$

4.7.4. Metodología Computacional

Desarrollamos ahora una aproximación computacional para calcular los estimadores del modelo propuesto, siguiendo la metodología computacional desarrollada por Moummou et al. [111]. Su enfoque no requiere la solución numérica directa del *Sistema Normal Principal* que, como se comentó anteriormente, presenta considerables dificultades que surgen de la dependencia implícita de las funciones terapia del modelo.

La metodología computacional seguida presenta los siguientes pasos:

1. Se comienza por la **segunda ecuación** del *Sistema Normal Principal* de máxima verosimilitud y, por medio de cálculos adicionales y de resultados generales de optimización funcional, se obtiene un estimador del parámetro $\boldsymbol{\beta}$, a partir de una expresión explícita de la solución en $\boldsymbol{\beta}$, que es válida para todos los valores del parámetro $\mathbf{a}$.

2. Una vez obtenido el estimador de $\boldsymbol{\beta}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, se considera la **cuarta ecuación** del *Sistema Normal Principal* y se obtiene el estimador de máxima verosimilitud de $\boldsymbol{\theta}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

3. Una vez concocidos $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, se obtiene el estimador de $\mathbf{a}$, usando la **primera ecuación** del *Sistema Normal Principal*. Para estimar $\boldsymbol{\sigma}$ se desarrolla la **tercera ecuación**. Y de la solución para $\hat{\boldsymbol{a}}$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{2}}$, se obtienen los **estimadores individuales para el resto de los parámetros.**

Primer paso computacional: estimador del parámetro β

Para estimar el parámetro β, consideraremos una serie de herramientas matemáticas necesarias para solucionar la segunda ecuación del *Sistema Normal Principal*, que puede ser reescrita como

$$\left(e^{-\beta}1'_x - \widetilde{V}_\beta U_\beta(\theta)\left(U_\beta(\theta)U'_\beta(\theta)\right)^{-1}\frac{\partial U_\beta(\theta)}{\partial\beta}\right)H_{u,\beta}\widetilde{V}_\beta = 0,$$

donde

$$\widetilde{V}_\beta = (\log\, x_i - e^{-\beta}\log\, x_{i-1})_{i=1,\ldots,n}$$

y

$$H_{u,\beta} = I_n - U'_\beta(\beta)\left(U_\beta(\beta)U'_\beta(\beta)\right)^{-1}U_\beta(\beta),$$

con la propiedad de idempotencia

$$H^2_{u,\beta} = H_{u,\beta},$$

y siendo su norma (la norma Frobenius) igual a

$$Tr(H'_{u,\beta}H_{u,\beta}) = 0.$$

La expresión $\left(U_\beta(\theta)U'_\beta(\theta)\right)^{-1}$ describe la inversa generalizada de la matriz entre paréntesis. Por lo tanto, podemos definir un proyector ortogonal, P_{U_β}, definido por la matriz $H_{u,\beta}$, y sus espacios respectivos para ser el núcleo $M(U_\beta)$ de P_{U_β} y la imagen $Im(P_{U_\beta})$. Una de las propiedades vectoriales de estos espacios es que $M(U_\beta)$ se genera por las columnas de la matriz U_β y que el espacio principal (que en este caso es $\mathbb{R}^n$) es la suma directa de los dos. En otras palabras, $\mathbb{R}^n = M(U_\beta)\bigoplus Im(P_{U_\beta})$. Por lo tanto, podemos escribir $\widetilde{V}_{\beta^*}$ en la forma

$$\widetilde{V}_{\beta^*} = V_2 + V_1; \quad \text{con} \;\; V_1 \in M(U_\beta) \;\; \text{y} \;\; V_2 \in Im(P_u)$$

y deducir que la ecuación, cuya solución es $\widetilde{V}_{\beta^*}$,

$$\left(e^{-\beta}1'_x - \widetilde{V}_\beta U_\beta(\theta)(U_\beta(\theta)U'_\beta(\theta))^{-1}\frac{\partial U_\beta(\theta)}{\partial\beta}\right)H_{u,\beta}\widetilde{V}_\beta = 0,$$

es equivalente al sistema

$$\begin{cases} e^{-\beta}1'_x V_2 - \lambda'\frac{\partial U_\beta}{\partial\beta}V_2 = 0 \\ V_1 = \lambda' U_\beta; \quad \lambda \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

En consecuencia, si V_2^* es solución de este sistema, entonces una solución del sistema anterior será

$$\widetilde{V}_\beta^* = V_1 + V_2^*; \quad \text{para } \; V_1 \in M(U_\beta).$$

Además de las características de los espacios $M(U_\beta)$ y $Im(P_{U_\beta})$, tenemos que $U_\beta V_2 = 0$, con lo que el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{cases} e^{-\beta}1'_x V_2 - \lambda' U_\beta\frac{\partial V_2}{\partial\beta} = 0 \\ V_1 = \lambda' U_\beta; \quad \lambda \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Si además reemplazamos $\lambda' U_\beta$ por $(\widetilde{V}_\beta - V_2)$ obtenemos (ver Moummou et al. [111]) una ecuación diferencial del tipo $V(\beta)'dV(\beta) + a'(\beta)V(\beta) = b(\beta)$, ecuación en β, donde

$$\begin{array}{rcll} V(\beta) & = & \widetilde{V}_\beta - V_2; & n\times 1, \\ a(\beta) & = & e^{-\beta}1_x + \dfrac{\partial\widetilde{V}_\beta}{\partial\beta}; & n\times 1, \\ b(\beta) & = & e^{-\beta}1'_x\widetilde{V}_\beta; & 1\times 1. \end{array}$$

Aparentemente, la resolución de la principal ecuación del sistema normal se reduce a la ecuación diferencial

$$V(\beta)'dV(\beta) + a'(\beta)V(\beta) = b(\beta).$$

Se puede ver además que la norma del vector $V(\beta)$ se minimiza (Teorema de la Proyección Ortogonal), con lo que el término $V'dV$ es nulo. Así esta ecuación se reduce a la siguiente ecuación en β

$$a'(\beta)V(\beta) = b(\beta).$$

Nótese que la dependencia de β via V es desconocida. Para este tipo de problemas, son posibles varias aproximaciones basadas en resolución numérica (método secante, método de Newton, método de bisección, ver Epperson [31]). En esta última ecuación $V(.)$ es una función desconocida de β, lo que complica la tarea. Una posible alternativa sería utilizar la propiedad mencionada anteriormente de la proyección ortogonal, y encontrar una solución minimizando la norma del vector $V(\beta)$.

Según Moummou et al. [111], y remitiéndonos al apartado anterior **Minimización de la norma del vector** $V(\beta)$, la solución se alcanza en el punto

$$\beta^* = \log\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \log\, x_i \log\, x_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} \log^2 x_i}\right].$$

Debido a la gran importancia en este estudio, el desarrollo de los pasos anteriores, con el objeto de la estimación de los parámetros $a = (\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \alpha_2)$ y σ^2, se tratará a continuación.

Segundo paso computacional: estimador del parámetro θ

Una vez resuelta la segunda ecuación

$$\left(\frac{1}{\nu_\beta} e^{-\beta} 1'_x - a' \frac{\partial U_\beta(\theta)}{\partial \beta}\right)\left(V_\beta - U'_\beta(\theta) a\right) = 0,$$

consideraremos la cuarta ecuación del *Sistema Normal Principal*

$$\frac{1}{\sigma^2}(V_\beta - U'_\beta(\theta)a)'\frac{\partial U'_\beta(\theta)}{\partial\theta}a = 0,$$

vinculada al parámetro θ. Notemos que

$$(V_\beta - U'_\beta(\theta)a) = H_{u,\beta}(\theta)V_\beta.$$

Por lo tanto, la ecuación en cuestión se puede escribir como

$$H_{u,\beta}(\theta)V_\beta\frac{\partial U'_\beta(\theta)}{\partial\theta}a = 0.$$

El cociente $\frac{\partial U'_\beta(\theta)}{\partial\theta}$ representa la matriz de orden $3\times n$, definida como

$$\frac{\partial U'_\beta(\theta)}{\partial\theta} = \left(\frac{\partial u'_{i\beta}(\theta)}{\partial\theta}\right)_{i=1,\ldots,n}$$

donde

$$\frac{\partial u'_{i\beta}(\theta)}{\partial\theta} = \left(0, 0, \frac{e^{-\beta t_i}}{(\beta-\theta)^2}\left\{e^{(\beta-\theta)t_i}[1-(\beta-\theta)t_i] - e^{(\beta-\theta)t_{i-1}}[1-(\beta-\theta)t_{i+1}]\right\}\right).$$

En el punto $\hat{\beta} = \beta^*$, que es la solución óptima del problema de optimización planteado en el apartado anterior, tenemos que $V_{\beta^*} = V_1^*$, donde V_1 es la proyección de V_β en el espacio $Im(P_{U_\beta})$, imagen de la aplicación definida por la matriz $H_{u,\beta}$ (Moummou et al. [111]). Es decir,

$$H_{u,\beta^*}V_{\beta^*} = V_1^*.$$

Por lo tanto, la cuarta ecuación del *Sistema Normal Principal* se reduce a

$$V_{\beta^*}\frac{\partial U'_{\beta^*}(\theta)}{\partial\theta}a = 0$$

por lo que la ecuación que tenemos que solucionar es

$$\alpha_2\left(\log x_i - e^{-\beta^* t}\log x_{i-1}\right)'_{i=1,\ldots,n}\left(\frac{\partial u^3_{i\beta^*}(\theta)}{\partial\theta}\right)_{i=1,\ldots,n} = 0$$

donde $\left(u^3_{i\beta^*}(\theta)\right)_{i=1,\ldots,n}$ es la tercera columna de la matriz $U_{\beta^*}(\theta)$. Finalmente, tenemos la siguiente ecuación en θ

$$\sum_i e^{-\beta^* t}\left(\log x_i - e^{-\beta^*}\log x_{i-1}\right)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\partial}{\partial\theta}\, e^{(\beta-\theta)t}dt = 0.$$

Desarrollando la integral en la ecuación anterior obtenemos

$$\sum_i \frac{e^{-\beta^* t}}{(\beta^*-\theta)^2}\left(\log x_i - e^{-\beta^*}\log x_{i-1}\right)f_i(\theta) = 0$$

con

$$f_i(\theta) = \left\{e^{(\beta^*-\theta)t_i}[1-(\beta^*-\theta)t_i] - e^{(\beta^*-\theta)t_{i-1}}[1-(\beta^*-\theta)t_{i-1}]\right\}.$$

La ecuación en θ es del tipo

$$F(\theta) = 0,$$

donde $F(.)$ es una fucnión continua y linealmente asintótica en $\mathbb{R}^+$. Consideremos las funciones definidas por las siguientes integrales

$$F_i(\theta) = \int_{t_i-1}^{t_i} te^{(\beta-\theta)t}dt\ ; \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

funciones continuas en $\mathbb{R}^+$. Ahora consideremos la sucesión de funciones medibles $(h_n)_n$ en $L^1(\mathbb{R}^+)$ definidas como

$$h_n(t) = te^{(\beta-\theta_n)t}$$

donde $(\theta_n)_n$ es una sucesión convergente a β y $L^1(\mathbb{R}^+)$ representa el conjunto de las funciones que se pueden integrar en $\mathbb{R}^+$. Según el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\lim_n \int_{t_{i-1}}^{t_i} h_n(\theta)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lim_n h_n(\theta)dt.$$

Habiendo demostrado la continuidad en el punto $\theta = \beta$, también se ha demostrado la continuidad de las funciones $F_i(.)$ en el conjunto $\mathbb{R}^+$. Por lo tanto, la función $F(.)$, a su vez, es continua en $\mathbb{R}^+$. Por otra parte, tenemos

$$\lim_{\theta \sim \infty} \left| \frac{F(\theta)}{\theta} \right| = 0.$$

Por lo tanto, a la ecuación

$$\sum_i \frac{e^{-\beta^* t}}{(\beta^* - \theta)^2} \left(\log\, x_i - e^{-\beta^*} \log\, x_{i-1} \right) f_i(\theta) = 0$$

se le puede aplicar el resultado, en la versión general, dada por el Teorema 2.3. propuesto por Feckan [6], según el cual existe una solución. Tras haber demostrado la existencia de una solución, es decir, la existencia del estimador de θ, entonces se puede calcular mediante resolución numérica de la ecuación.

Tercer paso computacional: estimadores de los parámetros $a = (\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \alpha_2)$ y σ. Efecto Terapia

Como se observó anteriormente, el paso final en la estimación del parámetro β nos lleva a la primera ecuación del *Sistema Normal Principal*, para estimar a. El hecho de que V_{β^*} pertenezca al espacio $Im(P_{U_\beta})$ significa que

$$U_{\beta^*}(\theta) V_{\beta^*} = 0.$$

Por lo tanto, en lugar de la primera ecuación del *Sistema Normal Principal*,

$$U_\beta(\theta) V_\beta = U_\beta(\theta) U'_\beta(\theta) a,$$

tendremos la siguiente ecuación

$$U_{\beta^*}(\theta) U'_{\beta^*}(\theta) \hat{a} = 0.$$

Nótese que la matriz $U_{\beta^*}(\theta)$ es de orden $n \times 3$ y que a es un vector 3×1. Por lo tanto, la estimación de los parámetros α_0, α_1 y α_2 depende del rango de la matriz en el lado izquierdo de la ecuación anterior.

Consideremos a continuación dos casos

Caso 1: La matriz $U_{\beta^*}(\theta)$ tiene rango completo.

En este caso, la matriz $U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)$ no es singular, con lo que la ecuación

$$U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)\hat{a} = 0$$

tiene como única solución $\hat{a} = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha_0} &= \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \\ \hat{\alpha_1} &= 0 \\ \hat{\alpha_2} &= 0 \end{aligned}$$

Para estimar el término de la difusión, σ, desarrollaremos la tercera ecuación del *Sistema Normal Principal*,

$$n\sigma^2 = (V_\beta - U'_\beta(\theta)a)'(V_\beta - U'_\beta(\theta)a).$$

Por cálculo directo, y teniendo en cuenta las propiedades del vector V_{β^*}, obtenemos la siguiente ecuación

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} V'_{\beta^*} V_{\beta^*}.$$

Caso 2: La matriz $U_{\beta^*}(\theta)$ tiene rango incompleto.

En este caso, la matriz $U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)$ es singular, lo que significa que las soluciones de la ecuación en cuestión presentan colinealidad. Entonces, para solucionar la ecuación

$$U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)\hat{a} = 0$$

necesitaremos sólo resolver el siguiente sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} u'_{1\beta^*}u_{1\beta^*}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) & + \quad u'_{1\beta^*}u_{2\beta^*}\hat{\alpha}_1 & + u'_{1\beta^*}u_{3\beta^*}\hat{\alpha}_2 & = & 0 \\ \frac{1}{n}u'_{2\beta^*}u_{1\beta^*}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + & u'_{2\beta^*}u_{2\beta^*}\hat{\alpha}_1 & + u'_{2\beta^*}u_{3\beta^*}\hat{\alpha}_2 & = & 0 \\ u'_{3\beta^*}u_{1\beta^*}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) & + \hat{\alpha}_2 u'_{3\beta^*}u_{2\beta^*}\hat{\alpha}_1 & + u'_{3\beta^*}u_{3\beta^*}\hat{\alpha}_2 & = & 0 \end{cases}$$

Varios métodos, tanto directos como iterativos, se pueden aplicar para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas, pero todos ellos tienen por objeto triangular y/o diagonalizar la matriz del sistema en cuestión; en el presente caso, ésta es la matriz $U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)$. Una de las técnicas más comunmente aplicadas en este contexto es la de la factorización “QR”, o simplemente triangulación ortogonal. El sistema de ecuaciones en cuestión, o sea, la ecuación

$$U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)\hat{a} = 0,$$

puede ser escrita de la siguiente manera

$$U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)a = QRa = 0$$

donde Q es una matriz ortogonal y R es una matriz triangular superior. Esta factorización se puede lograr mediante la aplicación del método Gram-Smith, el método de reflección de Householder o el método de rotación de Givens. La ecuación anterior es equivalente a

$$Ra = 0$$

y tenemos que $\|U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)\| = \|Q\|\|R\|$ donde $\|.\|$ es el determinante de la matriz. Entonces, obtenemos $\|R\| = 0$ y, por lo tanto, el rango de R es incompleto, y es igual al de $U_{\beta^*}(\theta)U'_{\beta^*}(\theta)$.

Esto significa que

$$\min_i |r_{ii}| = 0,$$

donde $r_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3$, describe los elementos de la matriz R. Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad r_{22}\hat{\alpha}_1 + r_{23}\hat{\alpha}_2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r_{33}\hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, según el rango de la matriz R, consideremos diferentes casos y veremos a qué se queda reducido el sistema anterior.

Caso a: El Rango de $\boldsymbol{R}$ es 2

Este caso plantea las siguientes posibilidades

1. Si $r_{33} = 0, \quad r_{22} \neq 0, \quad r_{11} \neq 0,$ el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad r_{22}\hat{\alpha}_1 + r_{23}\hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases}$$

   En este caso, si $r_{33} = 0$ y $r_{23} = 0$, tenemos la ecuación

$$r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0, \text{ya que } \hat{\alpha}_1 = 0.$$

2. Si $r_{33} \neq 0, \quad r_{22} = 0, \quad r_{11} \neq 0,$ el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases}$$

   Aquí la ecuación resultante es $r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 = 0$ debido a que $\hat{\alpha}_2 = 0$.

3. Si $r_{33} \neq 0, \quad r_{22} \neq 0, \quad r_{11} = 0,$ el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} (\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) \text{ no se puede estimar} \\ \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases}$$

Aquí el parámetro $\hat{\alpha}_0$ se puede obtener del modelo con ninguna terapia, y sólo después de haber sido estimado $\hat{\alpha}_0$ se pueden aplicar las terapias. Por lo tanto, los efectos son irrelevantes.

Caso b: El Rango de R es 1

Este caso surge cuando dos de los $r_{ii}, \ \ i = 1, 2, 3$ son nulos. Veamos los casos posibles.

1. Si $r_{33} = 0, \quad r_{22} = 0, \quad r_{11} \neq 0,$ el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0 \\ \hfill r_{23}\hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases}$$

En este caso, si $r_{23} \neq 0$ tenemos la ecuación

$$r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 = 0,$$

ya que $\hat{\alpha}_2 = 0$. En otro caso, los $\hat{\alpha}_i, \ i = 1, 2, 3,$ presentan colinealidad según la ecuación

$$r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0.$$

2. Si $r_{33} \neq 0, \quad r_{22} = 0, \quad r_{11} = 0,$ el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} r_{12}\hat{\alpha}_1 = 0 \\ \quad \hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases}$$

Esto significa que si $r_{12} \neq 0$, tenemos que $\hat{\alpha}_1 = 0$, ya que en otro caso no se puede estimar $\hat{\alpha}_1$.

3. Si $r_{33} = 0, \quad r_{22} \neq 0, \quad r_{11} = 0,$ el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} r_{12}\hat{\alpha}_1 + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0 \\ r_{22}\hat{\alpha}_1 + r_{23}\hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases}$$

Así que aquí tenemos que

$$\hat{\alpha}_1 = -\frac{r_{23}}{r_{22}}\hat{\alpha}_2 \quad \text{y que} \quad \frac{r_{12}}{r_{22}} - r_{13} = 0.$$

Nota Las siguientes ecuaciones presentan colinealidad entre los coeficientes de las terapias aplicadas (factores exógenos) y el término σ de la difusión, cuando estos coeficientes son significativos.

La ecuación

$$r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 = 0$$

presenta colinealidad cuando la terapia significativa es logarítmica.

La ecuación

$$r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0$$

presenta colinealidad cuando la terapia significativa es exponencial.

La ecuación

$$r_{11}(\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}) + r_{12}\hat{\alpha}_1 + r_{13}\hat{\alpha}_2 = 0$$

presenta colinealidad cuando ambas terapias son significativas.

4.7.5. Función tendencia estimada

La función tendencia sin restricciones del modelo comprende el instrumento básico para la utilización del modelo para describir algunos fenómenos específicos del crecimiento tumoral afectados por las dos terapias, que a su vez son modelizadas por las funciones terapia interna (exponencial negativa) y externa (logarítmica). Habiendo obtenido los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros señalados por la metodología computacional descritos previamente, el paso final necesario en la estimación de la función tendencia, teniendo en cuenta el teorema de invarianza de Zhena [139], es expresarla como sigue:

$$E[X(t) \mid X(0) = x_0] = \exp\left\{ e^{-\beta^* t} \log x_0 + \frac{\hat{\sigma}^2}{4\beta^*}(1 - e^{-2\beta^* t}) + \int_0^t g(\tau) e^{-\beta^*(t-\tau)} d\tau \right\} =$$

$$\exp\left\{ e^{-\beta^* t} \log x_0 + \frac{\hat{\sigma}^2}{4\beta^*}(1 - e^{-2\beta^* t}) + \frac{\hat{\alpha}_0 - \frac{\hat{\sigma}^2}{2}}{\beta^*}(1 - e^{-\beta^* t}) - \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\theta} - \beta^*} e^{-(\hat{\theta} - \beta^*)t} + \hat{\alpha}_1 \int_0^t \log(e + \xi_1 \tau) e^{-\beta^*(t-\tau)} d\tau \right\}.$$

Sobre la base de esta función tendencia estimada, como una función del tiempo, podemos obtener predicciones para valores futuros de tendencia y, en un paso posterior, construir una inferencia estadística asintótica (bandas de confianza) para los valores estimados, y así desarrollar una metodología similar a la descrita anteriormente desarrollada por Gutiérrez et al. [56] para otro modelo de difusión.

4.7.6. Conclusiones finales y problemas abiertos

El objetivo principal de este estudio es proponer un modelo que integre el crecimiento estocástico de una población de células tumorales y el efecto sobre este crecimiento de dos terapias, una de ellas produciendo un efecto inmunológico interno, y la otra con efectos externos (terapia, en el estricto sentido de la palabra) que sea controlable desde fuera de la población celular.

Desde un punto de vista técnico, esta integración población-terapia se estructura como un modelo de crecimiento en el cual la variación infinitesimal del tamaño poblacional (dX_t), o sea, el crecimiento poblacional durante un intervalo de tiempo $\triangle t$, con $\triangle t \to 0$, viene dada por la ecuación diferencial estocástica de Itô. Un aspecto de particular interés en este estudio es que sigue un modelo tal que la solución de la anterior ecuación es una difusión del tipo Gompertz, que define una curva de crecimiento poblacional bien conocida y que se aplica para modelizar crecimiento poblacional.

Además, este estudio, mediante la ecuación

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sqrt{b(t, X(t))}dw_t, \quad t \geq 0,$$

siendo w_t el proceso Wiener, sigue una difusión Gompertz cuya tendencia está afectada por dos funciones del tiempo (las terapias endógena y exógena) que, técnicamente, hacen que la difusión sea una solución de la ecuación diferencial de Itô; en otras palabras, por una parte, es una distribución no homogénea, y por otra parte, mantiene el coeficiente de difusión (el coeficiente del término Browniano $W(t)$ en la ecuación) independiente del tiempo. La consecuencia de utilizar esta modelización es que la función tendencia, la herramienta fundamental que modeliza el "crecimiento medio" a lo largo del tiempo, $E[X_t]$, ya sea condicionado o no condicionado, depende de las funciones terapia interna y externa, y está integrada en una función característica del tiempo asociada con el crecimiento Gompertz.

Esta función (tendencia) global es la que se ha estimado en la estimación previa de los parámetros abordados en el modelo. Sin embargo, en el proceso de la estimación de estos parámetros, estimamos todos los parámetros estructurales excepto el "interno" del factor terapia externa. Por lo tanto, la estimación final de la tendencia (o sea, la función tendencia estimada, ETF) depende del valor del parámetro ξ_1 ligado al factor o terapia externa. Por tanto, de ello se desprende que es de gran interés en nuestro análisis del modelo y, especialmente a la hora del ajuste estadístico a los datos reales observados, analizar (o simular, si procediera) el comportamiento que las variaciones en el parámetro ξ_1 de la terapia externa producirá sobre el tamaño medio de la población $E[X_t]$ en un instante de tiempo t. Esta variación en torno a ξ_1 definiría una estrategia terapéutica que haría posible controlar el tamaño poblacional en términos de la forma explícita del factor exógeno logarítmico en cuestión.

Otra consideración final tiene que ver con la estimación de los parámetros del modelo. Tal y como se mostró antes, la estimación (o ajuste estadístico de los parámetros) es tratada en este estudio usando el método de máxima verosimilitud, bien conocido en la inferencia estadística en los procesos de difusión estocásticos (Prakasa-Rao [113]). Una meta importante del presente estudio a este respecto es la de establecer la correspondiente metodología computacional, a la vez que se evita en la medida de lo posible considerar la solución del *Sistema Normal Principal* construyendo, en efecto, soluciones explícitas para los parámetros básicos (por ejemplo, el β asociado con el efecto de terapia interna).

Existe una manera alternativa de estimar los parámetros, que buscaría la solución numérica a las ecuaciones obtenidas por el método de máxima verosimilud, usando métodos computacionales o, incluso, analizando el modelo usando métodos de simulación, por ejemplo, simulaciones basadas en esquemas discretos relacionados con la ecuación SDE de Itô (siguiendo el método Platen-Kloeden [85]). Recientemente, Román et al. [117] consideraron un modelo Gompertz, que puede obtenerse como un caso particular del estudiado aquí, considerando en lugar de un modelo Gompertz un modelo exponencial de Stepanova [124]. Diversos aspectos relacionados con este modelo en particular han sido analizados por estos autores, como ruta alternativa al enfoque de la inferencia estadística, encaminado a lograr un ajuste estadístico para el proceso y sus funciones del tiempo (principalmente, las funciones tendencia y varianza).

De las consideraciones expuestas, se puede concluir que la principal contribución técnica de esta memoria es proporcionar una metodología de cálculo estadístico-computacional para ajustar estadísticamente el modelo propuesto a ciertas situaciones reales de crecimiento poblacional estocástico. Otro resultado importante es la discusión y el análisis procedente de la relación estructural entre la difusión estocástica básica del modelo y las funciones terapéuticas modelizadas por los dos factores exógenos considerados. Este debate y las conclusiones extraídas de él se pueden resumir, como conclusión final, de la siguiente forma:

Los efectos de la terapia aplicada en un modelo estocástico Gompertz, o bien no son importantes (significativos) o presentan algún tipo de correlación en su conjunto, especialmente con el término difusión del proceso estocástico. Esta correlación se manifiesta a través de la colinealidad entre sus coeficientes y el de la difusión. Esta conclusión se ajusta a la hipótesis propuesta por Sahoo et al. [126], con respecto a las fluctuaciones aleatorias en el modelo estocástico Gompertz. En otras palabras, la aleatoriedad de las observaciones se debe a ciertos efectos externos (en general, que podrían derivarse no sólo de factores externos, sino también de ciertos factores internos). En el caso que examinamos, estas fluctuaciones se atribuyen a las terapias aplicadas. El hecho de que estas terapias no sean significativas puede dar lugar a una difusión no significativa. Este efecto inducido está asociado con los elementos $U_{\beta^*}(\theta)$ de la matriz, que dependen de las observaciones x_t, que dependen a su vez de los tratamientos (terapias) aplicados.

Capítulo 5

Proceso Gompertz multivariante homogéneo

5.1. Definición del modelo

Introduciremos el *proceso de difusión Gompertz multivariante homogéneo* a través de las ecuaciones adelantada y atrasada de Kolmogorov.

Sea $\{X(t);\ t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión definido en $(0, +\infty)^k$, con trayectorias continuas casi seguro y con probabilidad de transición:

$$P(y, t \mid x, s) = P[X(t) = y \mid X(s) = x]$$

siendo:

$$X(t) = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})'$$

$$X(s) = (X_{s_1}, \ldots, X_{s_k})'$$

y x, y vectores k-dimensionales.

Si los momentos infinitesimales del proceso son:

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 - \beta_1 x_1 \log(x_1) \\ \alpha_2 x_2 - \beta_2 x_2 \log(x_2) \\ \vdots \\ \alpha_k x_k - \beta_k x_k \log(x_k) \end{pmatrix}$$

y

$$B(x,t) = (b_{ij} x_i x_j)_{1 \leq i,j \leq k}$$

siendo $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ una matriz simétrica definida positiva con elementos $b_{ii} > 0$, tenemos el *proceso de difusión Gompertz multivariante homogéneo*, sin factores exógenos.

Si notamos:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)'$$

$$\alpha x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_k x_k)'$$

$$x \log(x) = (x_1 \log(x_1), x_2 \log(x_2), \ldots, x_k \log(x_k))'$$

entonces se puede expresar la tendencia del proceso en función de los vectores anteriores como:

$$A(x,t) = \alpha x + H x \log(x)$$

siendo H la matriz diagonal e inversible:

$$H = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\beta_k \end{pmatrix}_{k \times k}$$

Bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad de la distribución de probabilidad de transición $P(y,t \mid x,s)$, este proceso queda caracterizado por las ecuaciones de difusión de Kolmogorov:

- Ecuación adelantada:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial((\alpha_i y_i - \beta_i y_i \log(y_i))P)}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} b_{ij}\frac{\partial^2(y_i y_j P)}{\partial y_i \partial y_j}$$

- Ecuación atrasada:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\sum_{i=1}^{k}(\alpha i x_i - \beta_i x_i \log(x_i))\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}$$

siendo $P = P(y, t \mid x, s)$, con la condición inicial $P(y, t \mid x, t) = \delta(y - x)$.

5.2. Densidad de transición

A partir de las ecuaciones adelantada y atrasada se obtiene la siguiente solución, que es la densidad de transición condicionada:

$$P(y, t \mid x, s) = \left\{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \mid \Phi(s, t) \mid^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{k} y_i\right\}^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}Q\right\},$$

donde Q es la forma cuadrática:

$$Q = (\log(y) - m(s, t))'\Phi^{-1}(s, t)(\log(y) - m(s, t))$$

siendo $m(s, t)$ el vector:

$$m(s, t) = e^{H(t-s)}\log(x) - \left(I - e^{H(t-s)}\right)H^{-1}\gamma$$

y $\Phi(s, t)$ la matriz:

$$\Phi(s, t) = \int_0^{t-s} e^{\theta H} B e^{\theta H} d\theta$$

con $\gamma = \alpha - \frac{1}{2}\text{diag}(B)$.

Además, como la matriz H es diagonal, se pueden poner los elementos de la matriz Φ de la forma:

$$\Phi_{ij}(s,t) = b_{ij}\frac{1 - e^{-(\beta_i+\beta_j)(t-s)}}{\beta_i + \beta_j} = b_{ij}\frac{1 - \theta_i\theta_j}{\beta_i + \beta_j}$$

siendo $\theta_i = e^{-\beta_i(t-s)}$.

Según lo anterior, la distribución de transición condicionada es lognormal:

$$X(t) \mid X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k(m(s,t);\ \Phi(s,t))$$

5.3. Momentos del proceso

Ya que

$$X(t) \mid X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k(m(s,t);\ \Phi(s,t))$$

tenemos que la variable aleatoria $Z(t) = \log(X(t) \mid X(s) = x_s)$ sigue una distribución normal:

$$Z(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}_k(m(s,t);\ \Phi(s,t)),$$

por lo que si denotamos por $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$, la función generatriz de momentos será:

$$E\left[e^{\mu' Z(t)}\right] = \exp\left\{\mu' m(s,t) + \frac{1}{2}\mu'\Phi(s,t)\mu\right\}$$

Tendencia

Utilizando la expresión de $E\left[e^{\mu' Z(t)}\right]$ se pueden determinar los momentos no centrados de cualquier orden r, tomando $\mu' = (0, \ldots, 0, \overset{i}{r}, 0, \ldots, 0)$.

Obtengamos, en primer lugar, la esperanza de la variable $X_i(t)$selecionando $\mu' = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0)$:

$$E\left[e^{\mu' Z(t)}\right] = E\left[X_i(t) \mid X_i(s) = x_{is}\right] = \exp\left\{m_i(s,t) + \frac{1}{2}\Phi_{ii}(s,t)\right\} =$$

$$\exp\left\{\theta_i \log(x_{is}) + (1-\theta_i)\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{b_{ii}}{4\beta_i}(1-\theta_i)^2\right\} = x_{is}^{\theta_i}\exp\left\{(1-\theta_i)\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{b_{ii}}{4\beta_i}(1-\theta_i)^2\right\},$$

por lo que:

$$E[X_i(t)] = x_{is}^{\theta_i}\exp\left\{(1-\theta_i)\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}\exp\left\{-\frac{b_{ii}}{4\beta_i}(1-\theta_i)^2\right\}.$$

Varianza y covarianza

A continuación obtendremos la covarianza entre las variables $X_i(t)$ y $X_j(t)$, tomando $\mu' = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0,\overset{j}{1},0,,\ldots,0)$ en la expresión de $E\left[e^{\mu' Z(t)}\right]$, con lo que la esperanza condicionada conjunta es:

$$E\left[e^{\mu' Z(t)}\right] = E\left[X_i(t)X_j(t) \mid X(s) = x_s\right] =$$

$$\exp\left\{m_i(s,t) + m_j(s,t) + \frac{1}{2}(\Phi_{ii}(s,t) + \Phi_{jj}(s,t) + 2\Phi_{ij}(s,t))\right\} =$$

$$x_{is}^{\theta_i}x_{js}^{\theta_j}\exp\left\{(1-\theta_i)\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}\exp\left\{(1-\theta_j)\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{b_{ii}}{4\beta_i}(1-\theta_i)^2\right\}\exp\left\{-\frac{b_{jj}}{4\beta_j}(1-\theta_j)^2\right\}\exp\left\{b_{ij}\frac{1-\theta_i\theta_j}{\beta_i+\beta_j}\right\},$$

por lo que la covarianza entre la i-ésima y j-ésima ($i,j = 1,2,\ldots,k$) componentes del proceso es:

$$Cov\left[X_i(t)X_j(t) \mid X(s)\right] = x_{is}^{\theta_i}x_{js}^{\theta_j}\exp\left\{(1-\theta_i)\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\}\exp\left\{(1-\theta_j)\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{b_{ii}}{4\beta_i}(1-\theta_i)^2\right\}\exp\left\{-\frac{b_{jj}}{4\beta_j}(1-\theta_j)^2\right\}\left(\exp\left\{b_{ij}\frac{1-\theta_i\theta_j}{\beta_i+\beta_j}\right\} - 1\right),$$

y, por tanto, la varianza de la i-ésima componente es:

$$Var\left[X_i(t) \mid X(s)\right] = x_{is}^{2\theta_i} \exp\left\{2(1-\theta_i)\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right\} \exp\left\{-\frac{b_{ii}}{2\beta_i}(1-\theta_i)^2\right\} \left(\exp\left\{b_{ii}\frac{1-\theta_i^2}{2\beta_i}\right\}-1\right).$$

5.4. Estimación de los parámetros

Consideremos un muestreo discreto del proceso, en los instantes $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$, $(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n)$, siendo $X(t_j) = (X_1(t_j), \ldots, X_k(t_j))$ vector k-dimensional, de forma que para simplificar la notación escribimos $X(j) = (X_1(j), \ldots, X_k(j))$ y $x_{t_j} = x_j$.

La distribución condicionada

$$X(t)|X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k\left(m(s,t);\ \Phi(s,t)\right),$$

por lo que la función de verosimilitud, a través de la cual estimaremos los parámetros tomando como condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$, es:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \ldots, x_n|\gamma, H, B) = P(x_0, t_0)\prod_{j=1}^{n} P(x_j, t_j|x_{j-1}, t_{j-1}) =$$

$$(2\pi)^{-\frac{nk}{2}}\prod_{j=1}^{n}\left(|\Phi_j|^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{k} x_{ij}^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}Q_j\right\}\right),$$

donde la forma cuadrática Q_j y la matriz Φ_j tienen la forma:

$$Q_j = m_j'\Phi_j^{-1}m_j$$

donde

$$m_j = \log(x_j) - \log(x_{j-1})e^{r_jH} - (I - e^{r_jH})H^{-1}\gamma$$

$$\Phi_j = \int_0^{r_j} e^{\theta H}Be^{\theta H}d\theta$$

siendo $r_j = t_j - t_{j-1}$.

Si consideramos el cambio:

$$\Gamma_j = e^{r_j H}$$

$$v_j = \log(x_j) - \log(x_{j-1})\Gamma_j - (I - \Gamma_j)H^{-1}\gamma$$

la función de verosimilitud queda:

$$\mathbb{L}(v_1, \ldots, v_n|\gamma, H, B) = (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} \prod_{j=1}^{n} \left(|\Phi_j|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} v_j' \Phi_j^{-1} v_j \right\} \right),$$

y la log-verosimilitud:

$$\log\ \mathbb{L}(v_1, \ldots, v_n|\gamma, H, B) = -\frac{nk}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\log(\Phi_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j'\Phi_j^{-1}v_j.$$

Diferenciando la expresión anterior:

$$d\ \log\ \mathbb{L} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} tr\{\Phi_j^{-1}d\Phi_j\} - \sum_{j=1}^{n} tr\{v_j'\Phi_j^{-1}dv_j\} - \sum_{j=1}^{n} tr\{v_j'\Phi_j^{-1}(d\Phi_j)\Phi_j^{-1}v_j\} =$$

$$\frac{1}{2} tr\left\{ \sum_{j=1}^{n} \Phi_j^{-1}(v_j v_j' - \Phi_j)\Phi_j^{-1} d\Phi_j \right\} - tr\left\{ \sum_{j=1}^{n} v_j'\Phi_j^{-1}dv_j \right\}.$$

Para obtener la diferencial anterior se usan las propiedades del álgebra matricial. Definamos en primer lugar las matrices:

$$M_j = \Phi_j^{-1}(v_j v_j' - \Phi_j)\Phi_j^{-1}$$

$$N_j = \int_0^{r_j} u e^{uH} B e^{uH} du.$$

Calculemos en primer lugar $d\Phi_j$:

$$d\Phi_j = \int_0^{r_j} (dH) u e^{uH} B e^{uH} du + \int_0^{r_j} u e^{uH} B (dH) e^{uH} du + \int_0^{r_j} e^{uH}(dB) e^{uH} du =$$

$$(dH)\int_0^{r_j} ue^{uH}Be^{uH}du + \int_0^{r_j} ue^{uH}Be^{uH}du(dH) + \int_0^{r_j} e^{uH}(dB)e^{uH}du =$$

$$(dH)N_j + N_j(dH) + \int_0^{r_j} e^{uH}(dB)e^{uH}du.$$

El primer término de $d\ \log\ \mathbb{L}$ queda:

$$\frac{1}{2}tr\left\{\sum_{j=1}^{n}\Phi_j^{-1}(v_jv_j'-\Phi_j)\Phi_j^{-1}d\Phi_j\right\} = \frac{1}{2}tr\left\{\sum_{j=1}^{n}M_jd\Phi_j\right\} =$$

$$\frac{1}{2}tr\left\{\sum_{j=1}^{n}M_j(dH)N_j + M_jN_j(dH)\right\} + \frac{1}{2}tr\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j} M_je^{uH}(dB)e^{uH}du\right\} =$$

$$tr\left\{\sum_{j=1}^{n}M_jN_j(dH)\right\} + \frac{1}{2}tr\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j} e^{uH}M_je^{uH}du(dB)\right\},$$

y el segundo término:

$$tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}dv_j\right\} = tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}[-r_j(dH)\Gamma_j(\log(x_{j-1})+H^{-1}\gamma) - \right.$$

$$\left.(I-\Gamma_j)H^{-1}(dH)H^{-1}\gamma + (I-\Gamma_j)H^{-1}(d\gamma)]\right\} =$$

$$-tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}[r_j(dH)\Gamma_j(\log(x_{j-1})+H^{-1}\gamma) + (I-\Gamma_j)H^{-1}(dH)H^{-1}\gamma]\right\} +$$

$$tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}(d\gamma)\right\} =$$

$$-tr\left\{\sum_{j=1}^{n}r_j(\log(x_{j-1})+H^{-1}\gamma)v_j'\Phi_j^{-1}\Gamma_j(dH) + \gamma v_j'\Phi_j^{-1}H^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}(dH)\right\} +$$

$$tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}(d\gamma)\right\} =$$

$$-tr\left\{\sum_{j=1}^{n}[r_j(\log(x_{j-1})+H^{-1}\gamma)v_j'\Phi_j^{-1}\Gamma_j+\gamma v_j'\Phi_j^{-1}H^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}](dH)\right\}+$$

$$tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}(d\gamma)\right\}.$$

Uniendo ambos términos, la expresión de $d\ \log\ \mathbb{L}$ es:

$$d\ \log\ \mathbb{L}=tr\left\{\sum_{j=1}^{n}[M_jN_j-r_j(\log(x_{j-1})+H^{-1}\gamma)v_j'\Phi_j^{-1}\Gamma_j+\right.$$

$$\left.\gamma v_j'\Phi_j^{-1}H^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}](dH)\right\}+\frac{1}{2}tr\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j}e^{uH}M_je^{uH}du(dB)\right\}+$$

$$tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}(d\gamma)\right\}.$$

Para solucionar el problema de estimar la matriz H, usaremos el que H es diagonal, ya que se reduce a la estimación del vector formado por su diagonal.

Si tomamos:

$$H=\sum_{l=1}^{k}E_l\mathcal{B}e_l'$$

siendo:

$$\mathcal{B}_{(k\times 1)}=diag(H)=(-\beta_1,\ldots,-\beta_k)'$$

$$E_{l(k\times k)}\begin{cases}E_{l(ij)}=1 & \forall i,j=l\\ E_{l(ij)}=0 & \forall i,j\neq l\end{cases}$$

$$e'_{l(1\times k)}=(0,\ldots,0,\overset{l}{1},0,\ldots,0)$$

tenemos que:

$$dH=\sum_{l=1}^{k}E_l(d\mathcal{B})e_l',$$

con lo que la expresión obtenida para $d\ \log\ \mathbb{L}$ queda:

$$d\ \log\ \mathbb{L} = tr\Bigg\{\sum_{j=1}^{n}[M_jN_j - r_j(\log(x_{j-1}) + H^{-1}\gamma)v_j'\Phi_j^{-1}\Gamma_j +$$

$$\gamma v_j'\Phi_j^{-1}H^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}]\left(\sum_{l=1}^{k}E_l(d\mathcal{B})e_l'\right)\Bigg\}+$$

$$\frac{1}{2}tr\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j}e^{uH}M_je^{uH}du(dB)\right\} + tr\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}(d\gamma)\right\} =$$

$$\sum_{l=1}^{k}Vec\Bigg\{\Bigg(\sum_{j=1}^{n}[M_jN_j - r_j(\log(x_{j-1}) + H^{-1}\gamma)v_j'\Phi_j^{-1}\Gamma_j +$$

$$\gamma v_j'\Phi_j^{-1}H^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}]E_le_l\Bigg)'\Bigg\}'dVec(\mathcal{B})+$$

$$\frac{1}{2}Vec\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j}e^{uH}M_je^{uH}du\right\}'(dVec(B)) + Vec\left\{\sum_{j=1}^{n}v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}\right\}'dVec(\gamma).$$

Si igualamos a cero, se obtienen las ecuaciones de verosimilitud:

$$0 = \sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j}e^{u\widehat{H}}\widehat{M_j}e^{u\widehat{H}}du$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n}v_j'\widehat{\Phi}_j^{-1}(I-\widehat{\Gamma}_j)\widehat{H}^{-1}$$

$$0 = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\{\widehat{M_j}\widehat{N}_j - r_j\widehat{\Gamma}_j\widehat{\Phi}_j^{-1}v_j(\log(x_{j-1}) + \widehat{H}^{-1}\widehat{\gamma})' +$$

$$\widehat{H}^{-1}\widehat{\Phi}_j^{-1}(I-\widehat{\Gamma}_j)\widehat{H}^{-1}v_j\widehat{\gamma}'\}E_le_l =$$

$$\sum_{l=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{n}\{\widehat{M_j}\widehat{N}_j - r_j\widehat{\Gamma}_j\widehat{\Phi}_j^{-1}v_j(\log(x_{j-1}) + \widehat{H}^{-1}\widehat{\gamma})'\right\}E_le_l \Longrightarrow$$

$$D = \sum_{l=1}^{k} DE_l e_l,$$

habiendo notado

$$D = \sum_{j=1}^{n} (\widehat{M_j}\widehat{N}_j - r_j \widehat{\Gamma}_j \widehat{\Phi}_j^{-1} v_j (\log(x_{j-1}) + \widehat{H}^{-1}\widehat{\gamma})'$$

o, lo que es lo mismo:

$$D_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

En definitiva, se obtiene un sistema de k ecuaciones no lineales, con k incógnitas $\widehat{\beta}_1, \ldots, \widehat{\beta}_k$, que debe resolverse usando procedimientos numéricos:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_j} e^{u\widehat{H}} \widehat{M_j} e^{u\widehat{H}} du = 0 \\ \\ \sum_{j=1}^{n} v_j' \widehat{\Phi}_j^{-1} (I - \widehat{\Gamma}_j) \widehat{H}^{-1} = 0 \\ \\ D_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

Caso particular:

Consideremos el caso en que la matriz $H_{k\times k}$ diagonal, formada por los elementos $-\beta_i,\ i = 1, \ldots, k$, y la matriz $B_{k\times k}$ de elementos b_{ij} conmutan, es decir:

$$b_{ij}(\beta_i - \beta_j) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Para que lo anterior se verifique, ha de cumplirse que:

$$b_{ij} = 0 \quad \text{ó} \quad \beta_i = \beta_j, \quad \forall i \neq j.$$

El primer caso no tiene interés práctico, ya que la matriz B sería diagonal, por lo que no consideraríamos las covarianzas entre las distintas componentes.

A continuación, centramos nuestro estudio en el caso de que

$$\beta_i = \beta_j, \quad \forall i \neq j.$$

Como la matriz H es diagonal, en la que todos sus elementos son iguales, dicha matriz se puede expresar de la forma $H = -\beta I$, por lo que la estimación de los k elementos de la matriz H se reduce a la estimación de un sólo parámetro β.

Si tenemos en cuenta todo lo anterior, tendremos que la expresión de $d \ \log \ \mathbb{L}$ es:

$$d \ \log \ \mathbb{L} =$$

$$-d(\beta)tr\left\{ \sum_{j=1}^{n}[M_jN_j - r_j(\log(x_{j-1}) + H^{-1}\gamma)v_j'\Phi_j^{-1}\Gamma_j + \gamma v_j'\Phi_j^{-1}H^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}] \right\}+$$

$$\frac{1}{2}tr\left\{ \sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j} e^{uH}M_je^{uH}du(dB) \right\} + tr\left\{ \sum_{j=1}^{n} v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}(d\gamma) \right\} =$$

$$-d(\beta)tr\left\{ \sum_{j=1}^{n}[M_jN_j - r_j(\log(x_{j-1}) + H^{-1}\gamma)v_j'\Phi_j^{-1}\Gamma_j + \gamma v_j'\Phi_j^{-1}H^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1}] \right\}+$$

$$\frac{1}{2}Vec\left\{ \sum_{j=1}^{n}\int_0^{r_j} e^{uH}M_je^{uH}du \right\}' dVec(B) + Vec\left\{ \sum_{j=1}^{n} v_j'\Phi_j^{-1}(I-\Gamma_j)H^{-1} \right\}' dVec(\gamma).$$

Igualando a cero la anterior diferencial, se obtienen las ecuaciones de verosimilitud siguientes:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\left(1+e^{-r_j\widehat{\beta}}\right)^{-1} v_j = 0 \\ 2\widehat{\beta}\widehat{B}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}\right)^{-1} v_jv_j'\right)\widehat{B}^{-1} - n\widehat{B}^{-1} = 0 \\ tr\{D\} = 0 \end{cases}$$

siendo:

$$D = 2\widehat{\beta}\widehat{B}^{-1}\sum_{j=1}^{n} r_j e^{-2r_j\widehat{\beta}}\left(1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}\right)^2 v_j v_j' -$$

$$2\widehat{\beta}\widehat{B}^{-1}\sum_{j=1}^{n} r_j e^{-r_j\widehat{\beta}}\left(1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}\right)^{-1} v_j\left(\log(x_{j-1})-\frac{\gamma}{\widehat{\beta}}\right)' +$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j e^{-2r_j\widehat{\beta}}\left(1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}\right)^{-1} I.$$

De las dos primeras ecuaciones de verosimilitud se extraen los estimadores $\widehat{\gamma}$ y $\widehat{B}$, que vienen expresados en función de $\widehat{\beta}$:

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\beta}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1-e^{-r_j\widehat{\beta}}}{1+e^{-r_j\widehat{\beta}}}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\log(x_j)-e^{-r_j\widehat{\beta}}\log(x_{j-1})}{1+e^{-r_j\widehat{\beta}}}$$

$$\widehat{B} = \frac{2\widehat{\beta}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}\right)^{-1} v_j v_j',$$

quedando la tercera ecuación, de la que extraemos el estimador $\widehat{\beta}$, una vez resuelta mediante métodos numéricos:

$$\frac{k}{2\widehat{\beta}}\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2r_j\widehat{\beta}}}{1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-r_\alpha\widehat{\beta}}}{1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}}\; tr\left\{\widehat{B}^{-1}v_j\left(\log(x_{j-1})-\frac{\gamma}{\widehat{\beta}}\right)'\right\} +$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j e^{-2r_j\widehat{\beta}}}{\left(1-e^{-2r_j\widehat{\beta}}\right)^2}\; tr\left\{\widehat{B}^{-1}v_j v_j'\right\}.$$

Bibliografía

[1] Agudelo-Gómez D. A., Cerón-Muñoz M.F., Restrepo L.F.(2007). Modelización de funciones de crecimiento aplicadas a la producción animal. *Rev. Col. Cien. Pec.,* 20: 157-173.

[2] Aitchison, J. and Brown, J. A. C. (1957). The lognormal Distribution. *Cambridge University Press.*

[3] Albano, G., Giorno, V., Román-Román, P. y Torres-Ruiz, F. (2012). On the therapy effect for a stochastic growth Gompertz type model, Mathematical Biosciences. 235, 148-160.

[4] Albano, G., Giorno, V., Román-Román, P. y Torres-Ruiz, F., (2012). Inference on stochastic two compartment model in tumor growth, Computacional Statistics and Data Analysis, 56, 1723-1736.

[5] Albano, G, Giorno, V. y Saturno, C. (2007). A prey-predator model for immune response and drug resistance in tumor growth, Lecture Notes in Computational Sciences. 4739, 171-178.

[6] Angus, J. E. (1988). Inferences on the lognormal mean for complete samples. *Communications in Statistics: Simulation and Computacion,* 17: 1307-1331.

[7] Angus, J. E. (1994). Bootstrap one-sided intervals for the lognormal mean. *The Statistician,* 43(3): 395-401.

[8] Arabi, A. (1994). Procesos Estocásticos Lognormales Triparamétricos. *Tesis Doctoral, Universidad de Granada.*

[9] Baley, N. T. J. (1964). Elements of Stochastic Process with applications to the Natural Sciences. *Willey and Sons, New York.*

[10] Basawa, I. V. and Rao, B. L. S. (1980). Statistical Inference for Stochastics Processes. *Academic Press.*

[11] Basel, M. A-E., Ahmad, S. A. A-R. and Wafaa, M. S. (2004). Modelling the CPI using a lognormal diffusion process and implications on forecasting inflation. *IMAA Journal of Management Mathematics,* 15: 39-51.

[12] Bharucha-Reid, A. T. (1960). Elements of Markov Process and Applications. *Mc Graw-Hill, New York.*

[13] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy,* 81: 637-654.

[14] Brown, B. M. and Hewitt, J. I. (1975). Asymptotic likelihood theory for diffusion processes. *J. Appl. Prob.,* 12(12): 228-238.

[15] Cacace, F., Cusimano, V. , Di Paula, L. y Germani, A. (2011). Observer-based technique for the identification and analysis of a vascular tumor growth, Mathematical Biosciences 234, 147-153.

[16] Capocelli, R. M. and Ricciardi, L. M. (1974). A diffusion model for population growth in random environment. *Theoretical Population Biology,* 5: 28-41.

[17] Capocelli, R. M. and Ricciardi, L. M. (1974). Growth with regulation in random environment. *Kybernetic,* 15: 147-157.

[18] Clifford, P. and Wei, G. (1993). The equivalence of the Cox process with squared radial Ornstein-Uhlembeck intensity and the death process in a simple population model. *Annals of Applied Probability,* 3 (3): 863-873.

[19] Couzin-Frankel, J. (2013). Cancer Immunotherapy Science, 20 Diciembre 2013: 1432-1433.

[20] Cox, D. R. (1955). Some statistical methods connected with series of events (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc. Ser B,* 27: 129-164.

[21] Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastics processes. *Journal of Financial Economy,* 3: 145-166.

[22] Crow, J. F. and Kimura, M. (1970). *An introduction to population genetics theory.* Harper Row, New York.

[23] Crow, E. L. and Shimizu, K. (1988). Lognormal distributions: Theory and Applications. *Marcel Dekker.*

[24] Davidov, D. and Linetsky, V. (2001). Pricing and hedging path-dependent options under CEV processes. *Management Sciences,* 47(7): 949-965.

[25] D'Onofrio, A., Fasano, A. y Monechi, B. (2011). A generalization of Gompertz law compatible with the Gyllenberg-Webb theory for tumor growth, Mathematical Biosciences, 230,45-54.

[26] De Vladar, H.P. y González J.A. (2004). Dynamic response of cancer under the influence of immunological activity and therapy, Journal of Theorical Biology, 227, 335-348.

[27] Dunn, J. E. and Gipson, P. S. (1977). Analysis of Radio Telemetry Data in studies of Home Range. *Biometrics,* 33: 85-101.

[28] Dunn, J. E. and Brisbin, I. L. (1985). Characterizations of multivariate Ornstein-Uhlenbeck diffusion process in the context of home range analysis. *Statistical Theory and Data Analysis. Matusita K. ed.,* 181-205. North-Holland.

[29] El Merouani, M. (1995). Difusiones con factores exógenos. Aspectos computacionales y aplicaciones económicas. *Tesis Doctoral, Universidad de Granada.*

[30] El Kettani Moummou, Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez, R. (2012). A stochastic Gompertz model with logarithmic therapy functions: Parameters estimation. *Applied Mathematics and Computation 219,* 3729-3739.

[31] Epperson, F.J. (2007). An Introduction to Numerical Methods and Analysis. *Revised ed., John Wiley and Sons, NJ.*

[32] Feller, W. (1939). On the logistic law of growth and its empirical verifications in biology. *Acta Biotheoretical,* 5:51-66.

[33] Ferrante, L., Bompade, S., Possanti, L. and Leone, L. (2000). Parameter estimation in a Gompertzian stochastic model for tumor growth. *Biometrics,* 56: 1076-1081.

[34] Frank, T. D. (2002). Multivariate Markov processes for stochastic systems with delays: Application to the stochastic Gompertz model with delays. *Phisical Review E,* 66: 1-8.

[35] Franses, P. H. (2002). Testing for residual autocorrelation in growth curve models. *Technological Forecasting and Social Change,* 69: 195-204.

[36] Gardiner, C. W. (1990). Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and natural sciences, 2nd edition. Berlin, Germany. *Springer Verlag.*

[37] García, J., Gutiérrez J., R. y Hermoso C., A. (1986). Estimación del coeficiente tendencia de un proceso de Ornstein-Uhlembeck con factores exógenos. *Cuadernos de Estadística,* 10: 13-19.

[38] Gibrat, R. (1930). Une loi des répartitions économiques: l'effet proportionnel. *Bull. Statis. Gén. Fr.,* 19: 469.

[39] Giorno, V., Nobile, A. G., Ricciardi, L. M. and Sacerdote, L. (1986). Some remarks on the Rayleigh process. *Journal of Applied Probability,* 23: 398-408.

[40] Giovanis, A. N. and Skiadas, C. H. (1999). A stochastic logistic innovation diffusion model studying the electricity consumption in Greece and the United States. *Technological Forecasting and Social Change*, 61:235-246.

[41] Gómez, J. y Buendía, F. (2001). Una generalización de los procesos estocásticos lognormal y de Gompertz como procesos de Itô. *Qüestió*, 25(3):392-414.

[42] Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new mode of determining the value of Life Contingencies. *Philosofical Transaction of the Royal Society*, 115:513-585.

[43] Gutiérrez Jáimez, R. (1981). Inferencia en los procesos de difusión logarítmico-normales multidimensionales con factores exógenos. *Cuadernos de Estadística,* 6: 6-15.

[44] Gutiérrez, R., Angulo I., J. M., Gónzalez, A. and Pérez, R. (1991). Inference in lognormal multidimensional diffusion process with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models and Data Analysis,* 7(4): 293-316.

[45] Gutiérrez, R., Gónzalez, A. and Torres, F. (1997). Estimation in multivariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Applied Statistics,* 46(1): 140-146.

[46] Gutiérrez, R. Gutiérrez-Sanchez, R y Moummou, E.K. (2012). A stochastic Gompertz model with logarithmic therapy functions: Parameter estimation, Applied Mathematics and Computation, 219, 3729-3739.

[47] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez, R. and Nafidi, A. (2003). Inference in the stochastic Gompertz diffusion model with continuos sampling. Edited by Univ. Zaragoza, *Proceedings of the VIII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística.* Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, 31:347-353.

[48] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2005). Forecasting total natural gas consumption in Spain by using the stochastic Gompertz innovation diffusion model. *Applied Energy,* 80(2): 115-124.

[49] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2005). Inference in Gompertz type nonhomogeneous stochastics systems by means of discrete sampling. *Cybernetics and Systems*36:203-2016.

[50] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2006). The stochastics Rayleigh diffusion model: Statistical inference and computational aspects. Applications to modelling of real cases. *Applied Mathematics and Computation*, 175: 628-644

[51] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2006). Electricity consumption in Morocco: Stochastic Gompertz exogenous factors diffusion analysis. *Applied Energy*, 83: 1139-1151.

[52] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2008). A bivaraite stochstics Gompertz diffusion modelo: statistical aspects and application to the joint modelling of the Gross Domestics Product and CO2 emissions in Spain. *Environmetrics*, 19:643-658.

[53] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2008). Trend analysis using nonhomegeneous stochastics diffusion process. Emissions of CO2; Kyoto protocol in Spain. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessmental*, 22:57-66.

[54] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2008). Emissions of greenhouse gases attributable to the activities of the land transport: modelling and analysis usisng I-CIR stochstics diffusion. The case of Spain. *Environmetrics*, 19:137-161.

[55] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2008). Trend analysis and computational statistical estimation in a stochstics Rayleigh model: simulation and appplication. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77: 209-217.

[56] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2009). The trend of the total stock of the private car-petrol in Spain: Stochastics modelling using a new gamma diffusion process. *Applied Energy*, 86: 18-24

[57] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. and Nafidi, A. (2009). Modelling and forecasting vehicle stocks using the trends of stochastics Gompertz diffusions models: the case of Spain. *Applied Stochastics Models in Business and Industry*, 25:385-405.

[58] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. Nafidi, A., and Pascual, A. (2012) Detection, modelling and estimation of non-linear trends by using a non-homogeneous Vasicek stochastics diffusion. Application to CO2 emissions in Morocco. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessmental*, 26:533-543.

[59] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. Nafidi, A., and Ramos, E. (2006). A new stochastic Gompertz diffusion process with treshold parameter: Computational aspects and applications. *Applied Mathematics and Computation*, 183:738-747.

[60] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. Nafidi, A., and Ramos, E. (2007). A diffusion model with cubic drift: statistical and computational aspects ans applications to modelling of the global CO2 emissions in Spain. *Environmetrics*, 18:55-69.

[61] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. Nafidi, A., and Ramos, E. (2009). Three-parameter stochstics lognormal diffusion model: statistical computation and simulation annealing. Application to real cases. *Journal of Statistical Computaiona and Simultaion*, 79: 25-38

[62] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. Nafidi, A., and Ramos, E. (2012). A τ-power stochastic gamma diffusion process: computational statistical inference and simulation aspects. A real example. *Applied Mathematical and Computation* 219:1576-1588

[63] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez., R. Nafidi, A., and Ramos, E. (2014). A bivariate stochastic gamma diffusions model: statistical inference and application to the joint modelling of the gross domestics product and CO2 emissions in Spain. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessmental*, 28:1125-1134.

[64] Gutiérrez, R., Juan, A. and Román, P. (1991). Construction of first-passage-time densities for a diffusion process which is not necessarily time-homogeneous. *Journal of Applied Probability,* 28(4): 903-909.

[65] Gutiérrez, R., Ricciardi, L., Román, P. and Torres, F. (1997). First-passage-time densities for time-non-homogeneous diffusion process. *Journal of Applied Probability,* 34:623-631.

[66] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P., Romero, D. and Torres, F. (2003). Lognormal diffusion process with polynomial exogenous factors. *Bulletin of the International Statistical Institute 54th Session. Contributes papers,* 60(2):324-325.

[67] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P., Romero, D. , Serrano, J.J. and Torres, F. (2006). Approximating the nonhomogeneuos lognormal diffusion process via polynomial exogenous factors. *Cybernetics and Systems* 37, 293-309.

[68] Gutiérrez, R., Roldan, C., Gutiérrez-Sánchez, R., Angulo, J.M. (2005). Estimation and prediction of a 2D lognormal diffusion random field. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessmental*, 19:258-265.

[69] Gutiérrez, R., Roldan, C., Gutiérrez-Sánchez, R., Angulo, J.M. (2010). The effect of the nested grid sampling on the parameter estimation of a spatial Gompertz diffusion. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 24:539-546.

[70] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P. and Torres, F. (2007) Approximate and generalized confidence bands for the mean and mode functions of the lognormal diffusion process. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51; 4038-4058

[71] Gutiérrez, R., Rico, N., Román, P., Romero, D., Serrano, J.J. and Torres, F. (2006) Approximate the nonhomogeneous lognormal diffusion process via polynomial exogenous facotros.*Cybernetics and Systems*, 37:293-309.

[72] Gutiérrez, R., Román, P. and Torres, F. (1995). A note on the Volterra integral equation for the first-passage-time density. *Journal of Applied Probability,* 32: 635-648.

[73] Gutiérrez, R., Román, P. and Torres, F. (1999). Inference and first-passage-times for the lognormal diffusion process with exogenus factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models in Business and Industry,* 15(4): 325-332.

[74] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D., Serrano,J. y Torres, F. (2007). A new Gompertz-type diffusion process with application to random growth, Mathematical Biosciences, 208, 147-165.

[75] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D. and Torres, F. (2001). Inference on some parametrics functions in the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Test,* 10(2): 357-373.

[76] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D. and Torres R., F. (2003). Forecasting for the univariate lognormal process with exogenous factors. *Cybernetics and Systems: An International Journal,* 34: 709-724.

[77] Gutiérrez, R., Román, P., Romero, D. and Torres, F. (2003). Applications of the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors in forecasting. *Cybernetics Systems,* 34(8):709-724.

[78] Gutiérrez-Sánchez., R. (2005). Difusiones estocásticas no homogéneas lognormales y Gompertz: proceso de Rayleigh. Aplicaciones. *Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[79] Gutiérrez-Sanchez, R, Moummou, E.K., Melchor, M.C. y Ramos-Ábalos, E. (2014). A stochastic Gompertz model highlighting internal and external therapy function for tumour growth. Applied Mathematics and Computation, 246 1-11.

[80] Gutiérrez-Sánchez., R., Nafidi, A., Pascual, A., Ramos-Ábalos, E. (2011) Three parameter gamma-type growth curve, using a stochastic gamma diffusion model: computational aspects and simulation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82; 234-243.

[81] Hermoso, A. (1984). Test de hipótesis sobre el coeficiente tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico-normal con factores exógenos. *Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[82] Helmink SK, Shanks RD, Leighton EA.(2000). Breed and sex differences in growth curves for two breeds of dog guides *J. Anim. Sci.,* 78: 27-32.

[83] Huete-Morales, M. D. (2006). El modelo estocástico de Gompertz. Modelización de datos sociodemográficos. *Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[84] Johnson, N. L. and Kotz, S. (1970). Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions 1. *Houghton Mifflin Company.*

[85] Kloeden, P., Platen, E. (1992). The numerical solution of stochastic differential equations. *Springer, Berlin.*

[86] Kolmogorov, A. N. (1941). Über das logarithmisch Normale Verteilungsgesetz der Dimensionen der Teilcchen bei Zerstückelung. *C. R. Acad. Sci. (Doklady),* XXXI: 99-101.

[87] Krishnamoorthy, K. and Mathew, T. (2003). Inferences on the means of lognormal distributions using generalizes p-values and generalized confidence intervals. *Journal of Statistical Planning and Inference,* 115(2003): 103-121.

[88] Laird, A. K. (1965). Dynamic of tumour growth: comparison of growth rates and extrapolation of growth curve to one cell. *British Journal of Cancer,* 19:278-291.

[89] Laird, A. K. (1969). Dynamic of growth in tumors and in normal organisms. *National Cancer Institute Monographs,* 30:15-28.

[90] Land, C. E. (1971). Confidence intervals for lineal functions of the normal mean and variance. *Annals of Mathematics Statistics,* 42(4): 1187-1205.

[91] Land, C. E. (1972). An evaluation of approximate confidence intervals estimation methods for lognormal means. *Technometrics,* 14(1): 145-158.

[92] Land, C. E. (1988). Hypothesis tests and interval estimates. *Lognormal distributions, theory and applications,* 87-112, E. L. Crow and K. Shimizu, (Eds.) New York: Marcel Dekker.

[93] Lefante, J. J. Jr. and Shah, A. K. (2002). Robustness properties of lognormal confidence intervals for lognormal and gamma distributed data. *Communications in Statistics, Theory and Methods,* 31(11): 1939-1957.

[94] Levins, R. (1969). The effect of random variations of different types on population growth. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 62:1061-1065.

[95] Lewontin, R. C. and Cohen, D. (1969). On population growth in randomly varying environment. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 62:1056-1060.

[96] Luenberger, D.G. (2005). Linear and Nonlinear Programming. *Second ed., Springer, New York*.

[97] Malthus, T. R. (1926). First essay on population (1978). *Macmillan,* London.

[98] Marcus, A. and Shaked, I. (1984). The relationship between accounting measures and prospective probabilities of insolvency: an application to the banking industry. *Financial Review,* 19: 67-83.

[99] May, R. M. (1974). Biological population with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles and chaos. *Science,* 186:645-647.

[100] May, R. M. (1979). Bifurcations and dynamics complexity in ecological sistems.*Annals of the New York Academy of Science,* 316:517-529.

[101] May, R. M. and Oster, F. G. (1976). Bifurcations and dynamics complexity in simple ecological models. *The American Naturalist,* 110:573-599.

[102] McArthur, R. H. and Wilson, E. O. (1967). The theory of island biogeography. *Prindceton University Press*, New Jersey.

[103] McCredie, J. A. et al. (1965). The rate of tumor growth in animals. *Growth,* 29:331-347.

[104] Merton, R. C. (1973). Theory of rational options pricing. *Bell J. Econom. Management Sci.,* 4: 141-183.

[105] Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economy,* 3: 125-144.

[106] Molina, M. (1984). Estimación del coeficiente tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico normal con factores exógenos. *Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[107] Mulcahy, M. (2013). Cancer Immunology Named Breakthrough of the Year", MEDSCAPE Medical News Oncology.

[108] Nafidi, A. (1997). Difusiones lognormales con factores exógenos en tendencia y coeficiente de difusión.*Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[109] Nobile, A. G., Ricciardi, L.M. and Sacerdote, L. (1982). On Gompertz growth model and related difference equations. *Bilological Cibernetics,* 42:221-229.

[110] Nobile, A. G., Ricciardi, L. M. (1980). Growth and extinction in random environment. *Appl. Inform. Control Syst.,* 455-465.

[111] El Kettani Moummou, Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez, R. (2012). A stochastic Gompertz model with logarithmic therapy functions: Parameters estimation. *Applied Mathematics and Computation 219,* 3729-3739.

[112] Ramos A., E. M. (2005). Difusiones lognormales triparamétricas multivariantes con factores exógenos. *Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[113] Prakasa-Rao, B.S.L. (1999). Statistical Inference for diffusion type process. *Arnold ed. New York, London and Oxford University Press.*

[114] Ricciardi, L. M. (1977). Difussion Processes and Related Topics in Biology. *Lectures notes in Biomathematics,* 14. Springer-Verlag.

[115] Ricciardi, L. M. (1979). On a conjecture concerning population growth in random environment. *Biological Cybernetics,* 32:95-99.

[116] Rico C., N. (2005). Aportaciones al estudio del proceso de difusión lognormal: Bandas de confianza aproximadas y generalizadas. Estudio del caso polinómico. *Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[117] Román-Román, P., Romero, D., Rubio, M.A., Torres-Ruiz, F. (2012). Estimating the parameters of a Gompertz-type diffusion process by means of simulated annealing. *Applied Mathematics and Computation 218,* 5121-5131.

[118] Romero M., D. (2005). Aportaciones al estudio de modelos estocásticos asociados a curvas de crecimiento: un nuevo proceso de difusión tipo Gompertz. *Tesis Doctoral, Univ. Granada.*

[119] Silliman, R. P. (1969). Comparison between Gompertz and von Bertalanffy curves for expressing growth in weight of fishes. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada,* 26:161-165.

[120] Shimizu, K. and Iwase, K. (1981). Uniformly minimum variance unbiaded estimation in lognormal and related distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 10: 1127-1147.

[121] Simpson-Herren, L. and Lloyd, H. H. (1970). Kinetic parameters and growth curves for experimental tumor systems. *Cancer Chemotherapy Reports Part 1,* 54.

[122] Skiadas, C. H. and Giovanis, A. N. (1997). A stochastic Bass innovation diffusion model for studying the growth of electricity consumption in Greece. *Appl. Stoch. Models Data Annal,* 13: 85-101.

[123] Skiadas, C. H., Giovanis, A. N. and Dimoticalis, I. (1994). Investigation of stochastic differential models: the Gompertzian case. *Selected topics on stochastic modelling.* World Scientific.

[124] Stepanova, N. (1980). Course of the immune reaction during the development of a malignant tumor. *Biophysics 24,* 917-923.

[125] Takacs, L. (1960). Stochastic Processes. Problems and Solutions. *Methuen, London.*

[126] Sahoo, S., Sahoo, A., Shearer, S.F.C. (2010). Dynamics of Gompertzian tumour growth under environmental fluctuations. *Physica A 389,* 1197-1207.

[127] Stewart, J.(2008). Cálculo de una variable. Tascendentes tempranas. *Ed. México DF: Cengage Learning, 6ª Ed.,* p. 270-347.

[128] Tan, W. Y. (1986). A stochastic Gompertz birth-death process. *Statistical and Probability Letters,* 4: 25-28.

[129] Tan, W. Y. and Piantadosi, S. (1991). On stochastic growth processes with application to stochastic logistic growth. *Statistica Sinica,* 1:527-540.

[130] Taraskin, A. F. (1974). On the asymptotic of vector-valued stochastic integrals and estimates of a multidimensional diffusion process. *Theory Prob. Math. Stat.,* 2: 209-224.

[131] Tintner, G. and Gómez, G. L. (1979). The application of the diffusion processes in problems of developmental economic planning. *Trabajos de Estadística,* 30(2): 33-55.

[132] Tintner, G. and Narayanan, R. (1966). A multidimensional stochastic process for the explanation of economic development. *Metrika,* 11: 85-90.

[133] Tintner, G. and Sengupta, J. K. (1972). Stochastic Economics. Academic Press.

[134] Torres, F. (1993). Aportaciones al estudio de difusiones estocásticas no homogéneas. *Ph.D. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.*

[135] Troynikov, V. S. and Gorfine, H. K. (1998). Alternative approach for establishing legal minimum lengths for abalone based on stochastic growth models for length increment data.*Journal of Shellfish Research,* 17: 827-831.

[136] Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population pursuit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique,* 10:113-121.

[137] Vergara, D, Cerón-Muñoz, M, Ramírez Toro, E. and Agudelo Gómez, D (2009). Growth curves and Genetic Parameters in Colombian Buffaloes (Bubalus Bubalis Artiodactyla, Bovidae). *Rev. Colom. Cien. Pecu. ,* 22: 178-188.

[138] Winsor, C. P. (1932). The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 18:1-8.

[139] Zhena, P.W. (1966). Invariance of maximum likelihood estimators. *Annals of Mathematical Statistics 37,* 755.

[140] Zhou, X. H. and Gao, S. (1977). Confidence intervals for the lognormal mean. *Statistics in Medicine,* 16: 783-790.

Resumen de la tesis

La Teoría de los Procesos Estocásticos se define generalmente como la parte dinámica de la Teoría de las Probabilidades, en la que se estudia un conjunto de variables aleatorias desde el punto de vista de su interdependencia y su comportamiento límite. Se observa un proceso estocástico siempre que se examina un proceso que se desarrolla en el tiempo, de manera controlada por las leyes probabilísticas. Si un científico tiene en cuenta la naturaleza probabilística de los fenómenos con los que trata, sin ninguna duda ha de hacer uso de la Teoría de los Procesos Estocásticos.

Son ejemplos de Procesos Estocásticos el recorrido de una partícula en movimiento browniano, el crecimiento de una población como una colonia de bacterias, el número fluctuante de partículas emitidas por una fuente radiactiva y la cantidad fluctuante de gasolina de suministros sucesivos de una refinería de petróleos. Los Procesos Estocásticos o aleatorios abundan en la naturaleza. Se presentan en Medicina, Biología, Física, Oceanografía, Economía y Psicología, por citar sólo unas pocas disciplinas científicas.

el estudio del crecimiento se aplicó en primer lugar a poblaciones humanas, aunque actualmente son muchas las ramas científicas que utilizan modelos de crecimiento para reflejar el comportamiento de diversos fenómenos. Los modelos más conocidos son el

propuesto por Malthus, que supone un crecimiento de la población de tipo exponencial sin considerar ningún freno a su crecimiento, y el modelo de Verhulst, que modifica el modelo de Malthus al establecer una cota, surgiendo así el modelo logístico de población en el que se presupone que cualquier población tiende a un estado de equilibrio. Estos modelos determinísticos no son de fácil aplicación en poblaciones reales, ya que el volumen de una población humana depende de muchas variables de índole socioeconómica, ya sea por el cambio en los hábitos de fecundidad, por la mejora en las condiciones de vida relativas a la salud de los individuos, por la bondad en las condiciones económicas, sin olvidar la importancia del fenómeno migratorio. Es por ello que surge la necesidad de utilizar otros modelos para el ajuste del volumen poblacional, como son los procesos de difusión, ampliamente aplicados en la modelización del crecimiento. La inclusión de factores exógenos en dichos modelos es una gran ventaja, ya que permiten incluir en la tendencia variables que influyen en el crecimiento, lo cual permitirá una clara mejora en la modelización del fenómeno.

Volviendo al campo de las aplicaciones, se puede observar cómo las variables objeto de interés no son estáticas, sino dinámicas, en el sentido de que evolucionan según un índice (habitualmente el tiempo), mostrando un comportamiento de tipo exponencial (como, por ejemplo, el Producto Interior Bruto). Por esta razón, la obtención de modelos que expliquen este tipo de comportamiento ha sido objeto de amplio estudio. En este sentido, Malthus propuso a finales del siglo XVIII un modelo determinístico de crecimiento para la población humana que corresponde a una curva de crecimiento de tipo exponencial. Se ha comprobado a lo largo de los dos siglos siguientes a Malthus que su teoría no es aplicable a poblaciones humanas, y que el modelo que se deriva de su teoría se puede aplicar, en general, al crecimiento de especies que se reproducen en un entorno donde no existen depredadores y hay exceso de alimentos.

El problema que se plantea a la hora de utilizar modelos determinísticos para modelizar cualquier fenómeno es la complejidad propia del fenómeno, implicando la especificación de múltiples factores que no siempre son conocidos o cuantificables. Este inconveniente se puede evitar mediante la utilización de modelos estocásticos como los procesos de nacimiento y muerte, o los procesos de difusión, los cuales han sido extensamente usados para la modelización y estudio de determinados fenómenos dinámicos en diversos campos de aplicación dentro del ámbito del crecimiento.

En las últimas décadas se han desarrollado modelos determinísticos de difusión ("S-shaped curved") que han sido aplicados con éxito para el ajuste de fenómenos de crecimiento en muchos campos científicos y en particular al estudio de la difusión de innovaciones técnicas o de nuevos productos comerciales. Por ejemplo, modelos de crecimiento determinísticos tales como el Logístico, Bass, Richard o Gompertz, entre otros, están basados sobre hipótesis de crecimiento que, en principio, son válidas para modelizar la evolución de ciertos fenómenos reales. En particular, el modelo de crecimiento Gompertz, ha sido aplicado con éxito para describir el crecimiento de poblaciones animales o celulares, así como para estudiar niveles de stocks de productos manufacturados. Estos modelos determinísticos han sido extendidos a sus respectivas versiones estocásticas que recogen las respectivas hipótesis de crecimiento en términos aleatorios.

En particular, un proceso estocástico de Gompertz ha sido estudiado como modelo teórico y aplicado al crecimiento celular tumoral utilizando muestreo continuo. Otros procesos de tipo Gompertz también han sido introducidos, por ejemplo, el modelo de Tan, construido a partir de un proceso de nacimiento y muerte, y aplicado a datos reales. En referencia al proceso de Gompertz introducido por Ricciardi y aplicado también por Capocelli y Ricciardi, cabe indicar que se trata de un proceso Gompertz homogéneo y univariante y que su utilización es fundamentalmente a nivel de modelización teórica, no realizándose inferencia estadística alguna. Lo mismo cabe decir de las recientes aplicaciones del proceso Gompertz aplicado a la Física Teórica, en la teoría de sistemas estocásticos con retraso.

El estudio del proceso Gompertz no homogéneo, según la definición de Ricciardi, fue abordado inicialmente por Nafidi mediante la consideración de variables exógenas en el proceso. Una aplicación real ha sido realizada por Gutiérrez et al., modelizando el consumo de electricidad en Marruecos. También se ha considerado la inferencia de tipo continuo sobre el proceso Gompertz, por Gutiérrez, Gutiérrez Sánchez y Nafidi, metodología que ha sido utilizada con éxito en la modelización y análisis del consumo de gas natural en España, línea de trabajo dedicada al estudio de problemas de inferencia estadística basada en muestro discreto. Además, Romero estudió un nuevo proceso de difusión tipo Gompertz para modelizar fenómenos asociados a variables que muestran un comportamiento sigmoidal y acotado en el tiempo, con cota dependiente del valor inicial. En los últimos años, se ha estudiado la inferencia en el proceso Gompertz no homogéneo con muestreo discreto en Gutiérrez et al., que aplicaron con éxito este proceso para modelizar el comportamiento del consumo de electricidad en Marruecos con tres factores exógenos de tipo macroeconómico ([51]) y compararon el proceso de Gompertz y el lognormal a la hora de estimar el stock de vehículos en España en el caso homogéneo. El mismo proceso de Gompertz se ha extendido al caso de campos aleatorios. Otra línea de investigación es el proceso Gompertz triparamétrico, aplicado para la modelización del salario en España por Gutiérrez et al.

Por lo tanto, el modelo estocástico Gompertz necesita ser completado en dos aspectos, uno obtener versiones no homogéneas del mismo, y otro, construir una inferencia estadística basada en muestreo discreto en el tiempo.

En los últimos años han logrado grandes avances en el estudio de los procesos de difusión, tanto en el caso del modelo lognormal y Gompertz como en otros modelos. En todos los casos además de avanzar de forma consistente en el desarrollo su inferencia probabilística y estadística, se han aplicado, con gran éxito, a la modelización de fenómenos de muy diferente índole. Por ejemplo, Gutiérrez et al. aplicaron el proceso de Rayleigh al estudio de la esperanza de vida en Andalucia y España. Este mismo proceso fue usado por los mismo autores para estudiar la producción eléctrica en Marruecos. Gutiérrez et al. modelizaron las emisiones de CO2 en España utilizando el Producto Interior Bruto como factor exógeno. El inverso del modelo CIR (Cox Ingersoll Ross) se usó para modelizar las emisiones de CO2 teniendo en cuenta el transporte terrestre en España y el proceso de Gamma (Gutiérrez et al.) para estudiar el stock de vehículos en España, variables muy influyentes en las emisiones de gases de efecto invernadero a la atmósfera. La potencia de este modelo se usó para que Gutiérrez et al. estudiaran el consumo de gas natural en España. Las emisiones de CO2 también fueron modelizadas en Gutiérrez et al. mediante el proceso de Vasicek.

Esta tesis tiene como objetivo proponer y estudiar los procesos estocásticos de difusión Gompertz, homogéneos y no homogéneos, en sus aspectos probabilístico y estadístico. Y, también, pretende probar la capacidad que dichos procesos tienen para la modelización, ajuste y predicción de fenómenos estocásticos reales de muy distintos campos científicos (Economía, Energía, Demografía Estadística, Crecimiento de Poblaciones, Física Teórica, etc.). Se introduce y estudia un nuevo proceso de difusión Gompertz para modelizar fenómenos asociados a variables que muestran un comportamiento sigmoidal y acotado en el tiempo, con cota dependiente del valor inicial. Es una novedosa forma de establecer el crecimiento poblacional, ya que normalmente se utilizan los modelos determinísticos de crecimiento, dependientes de una tasa de crecimiento poblacional.

En general, la estimación de la tendencia en procesos de difusión ha sido muy estudiada en los últimos años, en particular, los modelos cuya tendencia depende linealmente de los parámetros. Esta situación ha sido estudiada para procesos homogéneos por Brown y Hewitt en el caso unidimensional, mientras que el caso de difusiones multidimensionales ha sido abordado, entre otros, por Taraskin y por Basawa y Rao. Estos autores han hecho uso de muestro continuo, considerando una trayectoria del proceso hasta un tiempo de parada y, por medio de máxima verosimilitud, han obtenido los estimadores correspondientes, probando su consistencia y normalidad asintótica.

En la Bibliografía existen pocos casos de aplicación de procesos de difusión a datos reales experimentales, siendo lo usual utilizarlos para modelización teórica, por ejemplo, en Neurociencias. Gutiérrez-Sánchez aplica los modelos estudiados al análisis de la evolución y predicción en casos reales concretos de interés en diversos campos científicos: el estudio bivariante del "PIB y Precio de Vivienda nueva en España". En estos ejemplos de aplicación se ajustan estadísticamente los procesos estudiados a los correspondientes datos reales, de modo que no son, solamente, nuevos casos de modelización teórica, sino que son también una muestra de cómo estos procesos constituyen una importante herramienta de modelización, alternativa y complementaria, a otros métodos de modelización, determinísticos o estadísticos (curvas de crecimiento, series cronológicas, métodos econométricos, etc.).

Los objetivos de esta Tesis se inscriben en los de la Línea de Investigación que, sobre Procesos Estocásticos de Difusión, se desarrolla en el Departamento de Estadística e I. O. de la Universidad de Granada desde 1987 (Grupo FQM-147 del Plan Andaluz de Investigación), y dichos objetivos están estrechamente relacionados con objetivos y resultados de los Proyectos Nacionales de Investigación PB94-1041, PB97-0855, BFM2000-0602, BFM2002-03636, MTM2005-09209, P06-FQM-2271, MTM2008-05785 y MTM2011-28962 desarrollados por miembros del mencionado Grupo.