

---

**CONOCIMIENTO DE LOS MAESTROS EN  
FORMACIÓN SOBRE NÚMEROS Y  
OPERACIONES SEGÚN EL ESTUDIO  
TEDS-M**

---



TESIS DOCTORAL

Dña. Araceli Gutiérrez-Gutiérrez

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Granada, Junio 2015

Editorial: Universidad de Granada. Tesis Doctorales  
Autora: Araceli Gutiérrez Gutiérrez  
ISBN: 978-84-9125-181-1  
URI: <http://hdl.handle.net/10481/40443>

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

**CONOCIMIENTO DE LOS MAESTROS EN FORMACIÓN SOBRE  
NÚMEROS Y OPERACIONES SEGÚN EL ESTUDIO TEDS-M**

Informe final de tesis doctoral presentado por Dña. Araceli Gutiérrez-Gutiérrez en  
el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la  
Educación de la Universidad de Granada

Dña. Araceli Gutiérrez-Gutiérrez

Dr. Luis Rico Romero  
Director

Dr. Pedro Gómez Guzmán  
Director

Granada, Junio 2015



La doctoranda Araceli Gutiérrez Gutiérrez y los directores de la tesis los doctores Luis Rico Romero y Pedro Gómez Guzmán garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 17 de abril de 2015

Director/es de la Tesis

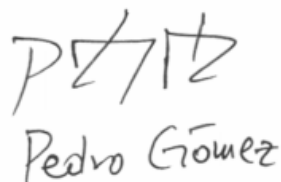
Fdo.:



Luis Rico

Doctorando

Fdo.:



Pedro Gómez



*A mi familia, por su continuo apoyo y buen humor con el que siempre me acompañan*





# AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi más sincero agradecimiento a mis directores de tesis, los doctores Luis Rico y Pedro Gómez, por su incansable trabajo durante estos años, en los que no han escatimado tiempo y esfuerzo para seguir con constancia semanal los avances del trabajo y mi formación investigadora. Esta memoria no refleja suficientemente la amplitud del trabajo realizado y las líneas de investigación que quedan abiertas.

De una manera especial quiero agradecer a Luis Rico la confianza depositada al orientarme a elegir la formación de futuros profesores en el marco del estudio de TEDS-M, como tema de investigación para el trabajo fin de máster, y más tarde por aceptar dirigirme la tesis. Ha sido un honor poder formarme directamente por uno de los principales investigadores pioneros en la Didáctica de la Matemática en España.

De la misma manera agradezco a Pedro Gómez su dedicación y orientación. Gracias al sentido práctico y exigente con el que me dirigió el trabajo fin de máster hemos podido concluir esta memoria como agrupación de publicaciones.

Mi agradecimiento a los profesores del Máster de Didáctica de la Matemática, en particular a María C. Cañadas y Marta Molina, por la calidad de la asignatura de *Métodos para la gestión y evaluación de la investigación* que tanto me ha ayudado en la publicación de los artículos. Y a Encarna Castro por la formación impartida en la asignatura de Pensamiento Numérico y Algebraico que motivó mi interés por la investigación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

No puedo dejar de agradecer a mi hermano Jesús el haberme animado a realizar el Máster de Didáctica de la Matemática y posteriormente la tesis. Sus consejos cargados de visión práctica y dominio de la actualidad de la investigación me han servido en estos años para no desanimarme y apuntar siempre alto.



# ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL

Esta tesis doctoral está estructurada de la siguiente forma. Tras contextualizar la investigación, presentamos la copia completa de los tres artículos que constituyen nuestra contribución a la investigación sobre la formación inicial de los futuros profesores de primaria españoles en el marco de la evaluación que realiza TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*). Por último, sintetizamos los principales resultados, las limitaciones encontradas y las líneas de investigación abiertas. El esquema es el siguiente.

- Capítulo 1. En este capítulo, describimos el contexto de la investigación, formulamos sus objetivos y describimos su desarrollo.
- Capítulo 2. En este capítulo presentamos el primer artículo (Artículo 1). En él caracterizamos el conocimiento matemático sobre números y operaciones manifestado por los futuros profesores de primaria españoles en el estudio TEDS-M.
- Capítulo 3. En este capítulo presentamos el segundo artículo (Artículo 2). En él caracterizamos el conocimiento didáctico sobre números y operaciones manifestado por los futuros profesores de primaria españoles en el estudio TEDS-M.
- Capítulo 4. En este capítulo presentamos el tercer artículo (Artículo 3). En él ubicamos el conocimiento didáctico sobre números y operaciones de los futuros profesores de primaria españoles en el contexto internacional.
- Capítulo 5. En este capítulo realizamos una síntesis de los resultados.
- Capítulo 6. En este capítulo sintetizamos la contribución de los resultados obtenidos trabajo, las limitaciones encontradas y las líneas de investigación abiertas.



# ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS.....	VIII
ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL .....	XI
ÍNDICE.....	XIII
ÍNDICE DE TABLAS.....	XVI
ÍNDICE DE FIGURAS .....	XVII
CAPÍTULO 1. PRELIMINARES .....	1
1.1 CONTEXTO Y PERTINENCIA DE LA INVESTIGACIÓN .....	1
1.2 ESTUDIO TEDS-M .....	3
1.2.1 Participación española .....	4
1.2.2 Subestudio III.....	6
1.3 FUENTES DOCUMENTALES DE ESTE TRABAJO .....	8
1.4 OBJETIVOS Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN .....	9
1.5 EL ANÁLISIS DIDÁCTICO .....	11
1.6 DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN .....	12
CAPÍTULO 2. ARTÍCULO 1.....	15
RESUMEN .....	15
2.1 INTRODUCCIÓN.....	16
2.1.1 Justificación del estudio.....	16
2.1.2 Participación española en el estudio TEDS-M .....	18
2.2 MARCO CONCEPTUAL .....	19
2.3 OBJETIVO Y MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN.....	21
2.3.1 Población y muestra.....	21
2.3.2 Fuentes de información.....	22
2.3.3 Procedimiento de análisis .....	24
2.3.4 Ejemplo de análisis de una pregunta.....	25

2.4 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS ESPAÑOLES PARA EL DOMINIO DE NÚMEROS .....	29
2.4.1 Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel básico.	29
2.4.2 Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel intermedio .....	30
2.4.3 Caracterización del conocimiento en el nivel avanzado .....	33
2.5. CONCLUSIONES .....	34
REFERENCIAS.....	36
CAPÍTULO 3. ARTÍCULO 2 .....	41
RESUMEN.....	41
3.1 INTRODUCCIÓN .....	42
3.2 LA PARTICIPACIÓN DE ESPAÑA EN TEDS-M.....	43
3.3 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN EL SUBDOMINIO DE NÚMEROS .....	44
3.4 EL CUESTIONARIO DE TEDS-M .....	45
3.5 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN .....	47
3.6 MÉTODO .....	48
3.6.1 Población y muestra .....	48
3.6.2 Fuentes de información .....	48
3.6.3 Descripción e interpretación del conocimiento didáctico .....	48
3.6.4 Ejemplo del análisis de una pregunta .....	49
3.7 RESULTADOS ESPAÑOLES PARA EL SUBDOMINIO DE NÚMEROS.....	55
3.7.1 Porcentajes de futuros profesores que contestaron correctamente a las preguntas.....	55
3.7.2 Interpretación de los resultados de las respuestas correctas.....	57
3.7.3 Porcentajes de futuros profesores que contestaron de forma parcialmente correcta o incorrecta .....	59
3.8 CONCLUSIONES .....	62
REFERENCIAS.....	63
CAPÍTULO 4. ARTÍCULO 3 .....	67
RESUMEN.....	67

4.1 INTRODUCCIÓN .....	68
4.1.1 El estudio TEDS-M.....	69
4.1.2 Elección del dominio conceptual números y operaciones .....	71
4.1.3 Conocimiento didáctico sobre números y operaciones.....	72
4.2 MÉTODO .....	73
4.2.1 Participantes .....	74
4.2.2 Fuentes de información.....	74
4.2.3 Procedimiento .....	75
4.3 RESULTADOS .....	83
4.3.1 Resultados españoles con respecto a los países de la OCDE.....	83
4.3.2 Resultados españoles con respecto a los países del grupo 2 .....	84
4.3.3 Resultados españoles con respecto al conjunto de países participantes.....	84
4.4 DISCUSIÓN.....	85
REFERENCIAS .....	88
ANEXO .....	93
CAPÍTULO 5. SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS.....	97
5.1 CONOCIMIENTO MATEMÁTICO .....	97
5.2 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO.....	98
5.3 COMPARACIÓN INTERNACIONAL DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO .....	98
CAPÍTULO 6. CONTRIBUCIÓN DEL TRABAJO .....	103
6.1 RELACIONES ENTRE LOS RESULTADOS.....	103
6.1.1 Resultados y puntos de anclaje establecidos por TEDS-M .....	103
6.1.2 Relación entre conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido .....	106
6.2 LIMITACIONES .....	109
6.3 ÁMBITO DE APLICACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS .....	112
PUBLICACIONES .....	117
REFERENCIAS.....	123

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1 Distribución de preguntas .....	8
Tabla 2.1. Preguntas para evaluar el conocimiento matemático sobre números .....	22
Tabla 2.2. Caracterización del conocimiento manifestado en la pregunta 1 .....	28
Tabla 2.3. Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel básico .....	29
Tabla 2.4. Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel intermedio .....	30
Tabla 2.5. Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel avanzado .....	34
Tabla 3.1. Preguntas de conocimiento didáctico en el subdominio de números .....	46
Tabla 3.2. Clasificación de las preguntas .....	47
Tabla 3.3. Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección .....	51
Tabla 3.4. Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles .....	54
Tabla 3.5. Resumen del análisis de las respuestas correctas .....	56
Tabla 3.6. Conocimiento parcial del contenido matemático escolar y didáctico del contenido .....	60
Tabla 4.1. Preguntas de conocimiento didáctico sobre números y operaciones .....	76
Tabla 4.2. Resumen comparativo de los resultados de España y países de la OCDE .....	82
Tabla 4.3. Resumen comparativo de los resultados de España y países del grupo 2 .....	82
Tabla 6.1. Relación entre las respuestas de los futuros profesores españoles .....	107
Tabla 6.2. Clasificación de las preguntas de conocimiento didáctico de TEDS-M .....	114



# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Número de números decimales entre dos números decimales .....	24
Figura 2.2. Pregunta sobre números racionales e irracionales .....	24
Figura 2.3. Pregunta sobre proporcionalidad directa .....	25
Figura 2.4. Resolución utilizando proporciones .....	26
Figura 2.5. Resolución mediante la regla de tres simple directa.....	26
Figura 3.1. Pregunta sobre proporcionalidad directa .....	50
Figura 4.1. Ítem sobre números decimales .....	77
Figura 4.2. Ejemplos de respuestas correctas del apartado (b) .....	78
Figura 4.3. Conocimiento didáctico del dominio de números y operaciones.....	93
Figura 4.4. Distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema.....	94
Figura 4.5. Reconocer el error en el que incurre un alumno.....	95
Figura 6.1. Ítem sobre proporcionalidad directa.....	107



## CAPÍTULO 1

# PRELIMINARES

**Resumen.** En este capítulo, presentamos el contexto en que se desarrolló la investigación y justificamos su pertinencia. Describimos brevemente el estudio TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) y la participación española en este estudio. Enumeramos los objetivos propuestos y sintetizamos las características del marco teórico del análisis didáctico desde el que abordamos nuestro trabajo de investigación. Por último, exponemos los pasos dados en el desarrollo del trabajo.

### 1.1 CONTEXTO Y PERTINENCIA DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se desarrolla en el contexto de la elaboración y publicación de análisis secundarios del estudio TEDS-M, el primer estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos conseguidos por los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria durante su preparación como profesores de matemáticas (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012). Por tanto, el punto de partida para la realización de este trabajo, es la publicación, tanto del informe internacional (Tatto et al., 2012), como del informe español (INEE, 2012) de TEDS-M.

Por diversas razones, España participó en este estudio solo para evaluar la formación inicial del profesorado de primaria como futuros profesores de matemáticas. El interés por realizar este estudio secundario se debe al hecho de que

los resultados españoles sobre el conocimiento matemático y didáctico que se presentaron en el informe internacional de TEDS-M (Tatto et al., 2012, p. 143) y en el informe nacional (INEE, 2012, p. 85) fueron globales. Los resultados de los conocimientos evaluados se limitaron a la media obtenida por los futuros profesores de primaria españoles en el conocimiento matemático (481) y didáctico del contenido (492), en relación con una media internacional de 500. Estos resultados se obtuvieron aplicando la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), que sitúa el nivel de rendimiento de los alumnos participantes en una escala basada en el nivel de dificultad que presentan las preguntas de la prueba. Estos resultados suscitaron el interés por caracterizar y describir con mayor detalle el conocimiento manifestado por los futuros profesores de primaria españoles y ubicarlo a nivel internacional. En esta línea, se encuentran también los estudios secundarios que comenzaron a publicarse sobre los conocimientos matemáticos y didácticos manifestados por los futuros profesores que participaron en TEDS-M. Estos estudios realizaron comparativas internacionales a partir de los resultados. Es el caso, por ejemplo, del estudio de Blömeke, Suhl y Döhrmann (2013), quienes buscaron relaciones entre los programas de formación y los ítems correctamente resueltos. Una revisión de los estudios secundarios publicados hasta 2014 se puede encontrar en los capítulos 2 y 4.

Por otra parte, en el momento en que se realizó el trabajo de campo del estudio TEDS-M, año 2008, las universidades españolas se encontraban en un proceso de revisión y diseño de los nuevos planes de estudio para la titulación del Grado de Maestro de Primaria, dentro del proceso de convergencia al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). El análisis de los resultados obtenidos proporciona información de interés sobre el conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático escolar en el que es necesario incidir en los nuevos programas de formación inicial de profesores (INEE, 2012). El conocimiento que el análisis de los resultados de TEDS-M proporciona tiene interés no solo desde el punto de vista teórico, sino que puede tener una clara aplicación práctica en el diseño y desarrollo de futuros programas de formación.

La pertinencia de realizar esta investigación queda recogida tanto en las conclusiones del informe internacional (Tatto et al., 2012, p. 208), como en el informe español (INEE, 2012, p. 128). En ambos se manifiesta la especial contribución de TEDS-M al estudio de la formación inicial del profesorado de matemáticas y cómo este ofrece sugerencias concretas para seguir trabajando en esta área. También ha puesto a disposición de la comunidad de investigación una terminología común, métodos de muestreo apropiados para evaluar la formación del profesorado, e instrumentos y técnicas de análisis que pueden ser adaptados y mejorados para su uso en posteriores estudios de formación del profesorado, ya sea en matemáticas u otras áreas del currículo. TEDS-M también proporciona una sólida base de estudio en los países que participaron, al contribuir a una nueva línea de investigación que permite que investigadores de todo el mundo puedan llevar a cabo análisis secundarios.

## 1.2 ESTUDIO TEDS-M

El estudio TEDS-M se llevó a cabo durante los años 2006-2010. Participaron 17 países: Alemania, Georgia, Polonia, Rusia, China-Taipéi, España, Estados Unidos, Filipinas, Singapur, Suiza, Botsuana, Chile, Noruega, Malasia, Tailandia, Canadá y Omán. Fue el primer estudio internacional comparativo a gran escala sobre los planes de formación inicial y sobre el conocimiento adquirido por los futuros profesores de matemáticas en educación primaria y secundaria obligatoria al acabar su formación inicial.

El estudio fue patrocinado por la IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) y surgió de la constatación de las diferencias y deficiencias en el rendimiento matemático de los escolares a partir de los resultados de distintos estudios nacionales e internacionales. En concreto, se comenzó a trabajar en el año 2002, a partir de los resultados del estudio internacional TIMSS (*Trends in Mathematics and Science Study*), en la edición de 1999. Se conjeturó que un factor importante para explicar esas diferencias consistiría en la

variedad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas en esos países y se trató de contrastar esa hipótesis (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008). Como hemos dicho, el trabajo de campo se realizó en el año 2008, pero la dificultad para realizar las comparaciones internacionales y redactar las conclusiones, a la luz de los resultados obtenidos por los distintos países con sus respectivos programas de formación, hizo que el informe internacional (Tatto et al., 2012) y los respectivos informes nacionales de los países participantes no se publicaran hasta el año 2012, como fue el caso del informe español (INEE, 2012).

TEDS-M tenía como objetivo la generación de conocimiento útil para las políticas de contratación y formación de una nueva generación de profesores capaces de enseñar eficaz y eficientemente las matemáticas escolares (Tatto et al., 2008). Para ello, el estudio se organizó en tres subestudios.

- El subestudio I tenía como objeto examinar políticas dirigidas a la formación del profesorado de matemáticas y su contexto social y cultural.
- El subestudio II tenía como objeto examinar el currículo de formación del profesorado de matemáticas.
- El subestudio III tenía como objeto examinar el nivel y profundidad del conocimiento matemático escolar y del conocimiento sobre su enseñanza alcanzado por los futuros profesores de primaria y secundaria al término de su programa de formación.

Nuestro trabajo se centra en el subestudio III que describiremos con detalle más adelante.

### **1.2.1 Participación española**

España participó en TEDS-M a través del Instituto de Evaluación. La Universidad de Granada participó en el estudio por medio del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* (FQM-193) del Plan Andaluz de Inves-

tigación (PAIDI), dentro del Proyecto de Excelencia de la Junta de Andalucía P07-FQM03244 –FEDS-M España” y del proyecto EDU2009-10454 del Ministerio de Ciencia e Innovación. El Dr. L. Rico fue designado como coordinador nacional de la investigación por el Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado. Tanto el Dr. Rico como el Dr. Gómez, miembros del equipo responsable de la investigación, contribuyeron a elaborar, redactar y editar el informe español (INEE, 2012, p. 131). La coordinación con las universidades y la gestión de los datos estuvo a cargo de la Secretaría General del Consejo de Coordinación Universitaria.

El propósito de la participación española fue analizar y describir la formación inicial en matemáticas del profesorado de educación primaria, compararla con la de otros países y establecer propuestas de trabajo y posibles líneas de actuación que contribuyeran a mejorar dicha formación (INEE, 2012).

Dada la diversidad de programas de formación, y para facilitar las comparaciones internacionales, el equipo de TEDS-M identificó rasgos distintivos para agrupar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de los países participantes. Estos rasgos fueron los siguientes: especialización, continuidad, duración y nivel escolar para el que capacitan. La muestra española formó parte del grupo 2, grupo del que también formaron parte China-Taipéi, Singapur, Suiza, Estados Unidos y Filipinas. Estos países coinciden en impartir programas generalistas y concurrentes de tres cursos de duración, que preparan a los futuros profesores para dar clase a alumnos de edades comprendidas entre los 6 y 12 años (INEE, 2012, p. 24).

Las características de la muestra del estudio TEDS-M y de la muestra española se encuentran descritas en el informe español (INEE, 2012, p. 13) y en cada uno de los artículos que constituyen este trabajo y que se presentan en los capítulos 2, 3 y 4.

### 1.2.2 Subestudio III

TEDS-M, siguiendo las ideas de Shulman (1987), consideró que el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas tiene dos componentes: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático. TEDS-M estableció su marco conceptual sobre esta premisa y diseñó un cuestionario con el que abordó el dominio de estos dos tipos de conocimientos por separado (Tatto et al., 2008).

TEDS-M evaluó el conocimiento matemático del futuro profesor entendido como el conocimiento de las matemáticas escolares que los futuros profesores han de enseñar, junto con otros contenidos matemáticos que se trabajen dos años más allá del nivel en que los futuros profesores van a enseñar, incluyendo también preguntas de matemáticas avanzadas (Tatto et al., 2008). Para diseñar y seleccionar las preguntas con las que evaluar el conocimiento matemático de los profesores en formación, TEDS-M se sirvió del marco conceptual elaborado para TIMSS 2007 (INEE, 2012).

TEDS-M consideró el conocimiento didáctico del contenido matemático del futuro profesor como aquel conocimiento que necesita el profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, es decir, sobre las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje (Tatto et al., 2008). No se consideró ningún marco conceptual para diseñar y seleccionar las preguntas con las que evaluar el conocimiento didáctico ni se fundamentó mediante algún marco conceptual previo; tan solo se utilizaron algunos dominios del conocimiento didáctico —currículo, planificación de la enseñanza y su aplicación— para la clasificación de las preguntas a partir de estudios anteriores y, en particular, del informe del MT21 (*Mathematics Teaching for the 21st Century Project*) (Schmidt et al., 2007). La mayoría de las preguntas fueron elaboradas expresamente para TEDS-M. También se utilizaron, con autorización, preguntas de evaluación de otros estudios como Learning Mathematics for Teaching Projects (Hill, Shilling y Ball, 2004) y MT21.



El equipo de investigación de TEDS-M diseñó un instrumento de recogida de información para el logro del objetivo propuesto en el subestudio III. Se elaboró un cuestionario dirigido a los futuros profesores de primaria de matemáticas, que constó de cuatro partes.

- La parte A, la más breve, recogió información sobre la formación preuniversitaria del futuro profesor, el nivel cultural familiar y su motivación para la docencia.
- La parte B se ocupó del programa de formación que, para enseñar matemáticas, habían recibido o estaban recibiendo los futuros profesores, y contempló la formación disciplinar, pedagógica y didáctica, así como su experiencia práctica.
- La Parte C evaluó los conocimientos matemáticos escolares y los conocimientos didácticos sobre dichos contenidos de los futuros profesores. Constituyó la prueba propiamente dicha y fue la parte con mayor tiempo asignado: 60 de los 90 minutos totales.
- La Parte D estuvo dedicada a recabar información sobre las creencias de los futuros profesores respecto a la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Nuestra investigación se centró en la Parte C del cuestionario. Indagamos acerca del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido matemático manifestado por los futuros profesores de primaria españoles participantes, a partir de la distinción que hace TEDS-M de esos dos tipos de conocimiento.

La parte C del cuestionario estuvo compuesta por 65 preguntas<sup>1</sup>, 22 de las cuales evaluaron el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares los futuros profesores de primaria y el resto evaluó su conocimiento matemático. En la tabla 1.1, presentamos el número de preguntas con las que se evaluó el conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores de primaria de matemáticas de acuerdo con la clasificación en subdominios de contenido matemático propuesta por TEDS-M.

Tabla 1.1 Distribución de preguntas

Subdominios de contenido	Conocimiento matemático	Conocimiento didáctico
Números y operaciones	10	8
Geometría y medida	13	5
Álgebra y funciones	16	4
Análisis de datos y azar	4	5
Total	43	22

En este trabajo, nos centramos en las preguntas que evalúan el conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores referidas al contenido matemático de números y operaciones.

### 1.3 FUENTES DOCUMENTALES DE ESTE TRABAJO

Las fuentes documentales que proporcionan la información requerida para la investigación que se presenta en esta memoria constan del marco teórico del estudio TEDS-M (Tatto et al., 2008) y de los informes que acreditan TEDS-M, singularmente el informe internacional (Tatto et al., 2012) y el informe español (INEE, 2012). Castro y Flores (2008) proporcionaron una descripción exhaustiva del plan de estudios para Maestro de Primaria en España en vigor en el momento en que se realizó el trabajo de campo del estudio TEDS-M. Este plan de estudios fue establecido por el Real Decreto 1440/1991 (MEC, 1991) que estuvo vigente desde el

---

<sup>1</sup> Aunque en un principio el cuestionario se componía de 70 preguntas (Senk, Tatto, Reckase, Rowley, Peck y Bankov, 2014, p.70) solo se utilizaron 65 para el análisis de los resultados.

año 1991 hasta el año 2010. Rico, Gómez y Cañadas (2014) caracterizan la preparación en matemáticas y su didáctica que recibieron los futuros profesores españoles durante su periodo de formación. E Ingvarson, Tatto y Peck (2013) describen y comparan las características más relevantes de los programas<sup>2</sup> de formación de los países participantes en el estudio TEDS-M. A la hora de ubicar los contenidos de las matemáticas escolares evaluados, nos remitimos al currículo español de primaria y secundaria (MEC, 2007; MECD, 2004).

## 1.4 OBJETIVOS Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de nuestro trabajo de investigación es describir y caracterizar el conocimiento que, sobre matemáticas escolares y sobre su enseñanza y aprendizaje, manifestaron en el estudio TEDS-M los estudiantes españoles de último curso de Magisterio que se formaron según el plan de estudios establecido por el Real Decreto 1440/1991 (MEC, 1991). En esta memoria, nos centramos en describir y caracterizar el conocimiento matemático y didáctico sobre números y operaciones de los futuros profesores de primaria españoles recogidos en TEDS-M y comparar esos logros con los del resto de países participantes en el estudio. Para lograr el objetivo general, organizamos la investigación mediante tres objetivos específicos que se materializaron en las tres publicaciones que se recogen en los capítulos 2, 3 y 4, respectivamente, y que constituyen el núcleo de nuestra contribución. Dichos objetivos específicos son los siguientes.

---

<sup>2</sup> TEDS-M utiliza el término programa para organizar la variedad de titulaciones y planes de estudios y poder realizar las comparaciones pertinentes entre ellos. Por programa entiende un curso de formación reglada que conduce a la obtención de un título. —En España, un programa sigue las directrices de un plan de estudios y consiste en la concreción que ofrece una facultad de educación para lograr el título” (INEE, 2012, p. 21).

### **Objetivo 1**

Caracterizar el conocimiento matemático en el subdominio de números y operaciones manifestado por los futuros profesores españoles de primaria en el estudio TEDS-M.

### **Objetivo 2**

Caracterizar el conocimiento sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares en el subdominio de números y operaciones manifestado por los futuros profesores españoles de primaria en el estudio TEDS-M.

### **Objetivo 3**

Relacionar y comparar a nivel internacional el conocimiento sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares en el subdominio de números y operaciones manifestado por los futuros profesores de primaria españoles en el estudio TEDS-M.

Para abordar estos tres objetivos, realizamos un análisis detallado y crítico del marco conceptual diseñado por TEDS-M para la evaluación del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su enseñanza y aprendizaje, así como de los cuestionarios, de las guías de corrección y de las respuestas de los futuros profesores. Abordamos este análisis a partir del modelo del análisis didáctico (Rico y Fernández-Cano, 2013) que describiremos brevemente a continuación.

En los capítulos 2 y 3 mostramos los procedimientos que seguimos para caracterizar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico sobre las matemáticas escolares, respectivamente. Estos procedimientos nos permitieron interpretar los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles sobre números y operaciones.

Por último, establecimos criterios de valoración de las respuestas de los futuros profesores a las preguntas sobre el conocimiento didáctico, con objeto de realizar las pertinentes comparaciones internacionales (Capítulo 4).

## 1.5 EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

En el marco teórico en que nos situamos, consideramos el análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) como método sistemático con el que abordamos nuestro trabajo de investigación acerca del conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares manifestado por los futuros maestros. Mediante el análisis didáctico, realizamos la descripción de las preguntas y el análisis de las respuestas del cuestionario con el que se evaluó el conocimiento didáctico de los maestros en formación en TEDS-M, relativas a diferentes facetas de su futura actividad docente en la enseñanza de las matemáticas.

El análisis didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de la Matemática que utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido, sigue un modelo cíclico y se estructura en cinco fases (Rico, 2013). Por lo que interesa a este estudio, y utilizando la terminología de TEDS-M, consideramos que el conocimiento del profesor de matemáticas está compuesto por el conocimiento matemático o conocimiento del contenido matemático (conocimiento sobre matemáticas escolares) y el conocimiento didáctico (conocimiento didáctico sobre las matemáticas escolares). Este segundo tipo de conocimiento se organiza según nuestro marco conceptual en cuatro subdominios:

- el conocimiento didáctico del contenido matemático escolar,
- el conocimiento sobre el aprendizaje matemático de los escolares,
- el conocimiento sobre la instrucción de los escolares en matemáticas y
- el conocimiento sobre la evaluación de los escolares en matemáticas.

Las categorías para llevar a cabo el análisis didáctico provienen de los organizadores del currículo, así como de las distintas componentes del sistema curricular (Rico, 1997). Mediante estas categorías, se estudian las particularidades del conocimiento sobre el contenido matemático escolar, sobre el aprendizaje matemático,

sobre la instrucción y sobre la evaluación en el cuestionario elaborado por TEDS-M, ya que estas categorías proporcionan criterios para estructurar los conocimientos sobre los contenidos, la cognición, la instrucción y la evaluación (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). La fundamentación curricular de las categorías del análisis didáctico acredita su empleo en esta nueva función a la hora de determinar y caracterizar el conocimiento didáctico del contenido de las matemáticas escolares evaluado en TEDS-M.

Desde nuestro marco del análisis didáctico, consideramos que es posible organizar las preguntas del cuestionario de TEDS-M de acuerdo con las dimensiones del currículo: hay preguntas que se refieren al conocimiento del contenido matemático, a los procesos de aprendizaje de los escolares sobre unos contenidos, a los procesos de enseñanza vinculados a ellos y a la evaluación de los logros alcanzados. Al mismo tiempo, es posible que haya preguntas que estén compartidas por dos dimensiones.

En este trabajo, el análisis didáctico establece un método de investigación, usual en Didáctica de la Matemática (Rico, 2013), que se aplica a la evaluación hecha a los futuros profesores de matemáticas de primaria. Utilizaremos el análisis didáctico como un método analítico, descriptivo e interpretativo. No obstante, veremos también cómo la información que proporciona determina carencias y limitaciones en el cuestionario. En este sentido, el método pasa a ser también una técnica normativa y prescriptiva a tener en cuenta para futuros estudios.

### 1.6 DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El inicio de esta investigación tuvo como punto de partida la realización del Trabajo Fin de Máster del Máster de Didáctica de la Matemática en el curso 2011-2012, bajo la dirección de los doctores Gómez y Rico. Al acotar el problema de investigación, elegimos las preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico sobre las matemáticas escolares, y en concreto, elegimos las referidas al subdominio de números y operaciones, por ser el contenido matemático con mayor peso,

tanto en el currículo español de Magisterio (Rico, Gómez y Cañadas, 2014), como en el de primaria (MEC, 2007).

En una primera aproximación, diseñamos un método para describir el conocimiento didáctico del contenido matemático manifestado por los futuros profesores españoles (Gutiérrez, Gómez y Rico, 2012*a* y *b*). La aplicación de este método al conjunto de preguntas que evaluaron el conocimiento didáctico en el subdominio de números nos permitió describir y caracterizar el conocimiento manifestado por los futuros profesores españoles de primaria en el estudio TEDS-M para este subdominio. Este era el objetivo propuesto para el trabajo fin de máster (Gutiérrez, 2012), cuyos resultados dieron lugar al artículo 2 que presentamos en el capítulo 3.

El análisis de las preguntas que evaluaron el conocimiento didáctico en el subdominio de números puso de manifiesto que, en determinadas ocasiones, algunos futuros profesores, disponiendo del conocimiento didáctico requerido, pudieron no responder correctamente algunas preguntas como consecuencia de carencias en su conocimiento matemático (Capítulo 3). Por ello, caracterizamos el conocimiento matemático sobre números y operaciones de los futuros profesores españoles. El resultado de esta caracterización se recoge en el artículo 1 que presentamos en el capítulo 2.

Por último, nos interesamos por ubicar a nivel internacional el conocimiento didáctico sobre números y operaciones de los profesores en formación españoles. En concreto, nos centramos en comparar los resultados españoles con los resultados de aquellos países participantes en TEDS-M cuyo programa de formación inicial es similar, así como con los resultados de los países de la OCDE que también participaron en TEDS-M y que habitualmente son considerados próximos a nuestro entorno socioeconómico y cultural —Noruega, Alemania, Chile y Polonia—. Diseñamos una metodología que presentamos en una comunicación en el Seminario de PNA y HEM en Málaga (Gutiérrez-Gutiérrez, Rico y Gómez, 2014). Los

resultados obtenidos en esta comparativa internacional dieron lugar al artículo 3 que presentamos en el capítulo 4.

Una síntesis del trabajo realizado y de los resultados alcanzados (Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014) se presentó en uno de los Simposios de la SEIEM como comunicación invitada dentro del Seminario “La investigación TEDS-M: Aportaciones a la formación inicial del maestro como futuro profesor de Matemáticas”.

Las publicaciones generadas y las contribuciones en congresos y seminarios, avalan la solidez de esta investigación que permiten presentar esta tesis como agrupación de publicaciones.



## CAPÍTULO 2

# ARTÍCULO 1.

**Referencia:** Gutiérrez-Gutiérrez, A. Gómez, P., Rico, L. (2014).

Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio (Aceptado). *Educación XXI*.

Disponible en: <http://bit.ly/1EaDuWc>

## RESUMEN

En este artículo caracterizamos el conocimiento matemático sobre números y operaciones que los futuros profesores de primaria españoles manifestaron en el estudio internacional TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*). A partir de los cuestionarios utilizados en ese estudio, establecemos los conocimientos que deben ponerse en juego para responder correctamente las preguntas que evalúan el dominio conceptual de números y aquellos otros que están implicados cuando se responde incorrectamente. Organizamos los resultados atendiendo al tipo de problema numérico planteado, al nivel curricular del contenido matemático implicado y al dominio cognitivo evaluado en cada pregunta. Encontramos que los futuros maestros mostraron tener un conocimiento suficiente de los contenidos previstos para primaria y los primeros cursos de secundaria con excepción del trabajo con los conceptos razón/proporción/porcentaje y la traducción de una resta de fracciones sencillas en problemas verbales. Los futuros maestros manifestaron un conocimiento insuficiente de los contenidos de matemáticas

avanzadas, aunque revelaron conocer la propiedad de la densidad del conjunto de los números racionales. Por la implicación que la formación inicial en Matemáticas de los maestros tiene en la alfabetización numérica de los estudiantes, estos resultados son de utilidad para el diseño de las asignaturas del Grado de Maestro de Primaria en España.

## 2.1 INTRODUCCIÓN

### 2.1.1 Justificación del estudio

Este trabajo es un estudio secundario elaborado a partir de los resultados de TEDS-M 2008 (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) en el que profundizamos en el conocimiento matemático que manifestaron los estudiantes de Magisterio españoles sobre el dominio de números y operaciones. Partimos de que evaluar el conocimiento de los maestros<sup>3</sup> en formación es importante por dos razones: primero, porque el conocimiento en matemáticas de los profesores influye en el de los estudiantes (Baumert et al., 2010; Hill, Rowan, y Ball, 2005); y segundo, porque el conocimiento que esos maestros han adquirido hasta su último año de formación puede servir como indicador del éxito que van a tener en su tarea educativa como profesores (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012).

El estudio internacional *Trends in Mathematics and Science Study* (TIMSS) en sucesivas aplicaciones, ha puesto de manifiesto las diferencias y deficiencias en el rendimiento matemático de los escolares de distintos países. Un factor importante que puede explicar esas diferencias tiene que ver con la variedad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas en esos países. Hasta el año 2008, existían datos sobre esta diversidad desde diferentes pers-

---

<sup>3</sup> Como es usual en España, utilizaremos el término maestro cuando nos refiramos a los profesores de primaria españoles.

pectivas (Britton, Paine, Pimmy Raizen, 2003; European Commission, 2008; OCDE, 2005; Tatto, Nielsen, Cummings, Kularatna y Dharmadasa, 1993), pero no se disponía de evidencias razonablemente completas y comparables de las diferencias existentes. TEDS-M trató de sistematizar e interpretar tales diferencias (Tatto et al., 2012).

El estudio TEDS-M responde al interés internacional por la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas de educación primaria y de los primeros cursos de educación secundaria obligatoria. Fue llevado a cabo por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, por sus siglas en inglés), pionera en la realización en este tipo de estudios desde los años 60. TEDS-M fue el primer estudio internacional comparativo que abordó la formación inicial de profesores de matemáticas y los resultados que se obtienen con esa formación.

El interés por la profundidad del conocimiento matemático y de su enseñanza que logran los maestros al final de su programa de formación, se ve avalado con la publicación del informe español por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) con los resultados del último estudio internacional TIMSS —2011—, en el que los alumnos de 4º de primaria españoles obtuvieron 482 puntos en matemáticas, por debajo de la media internacional fijada en 500 puntos (INEE, 2012a). Este resultado es similar al obtenido por los futuros maestros para conocimientos matemáticos (481) en el estudio TEDS-M —también con media internacional de 500 puntos— (INEE, 2012b). Los alumnos de 4º de primaria españoles obtuvieron en TIMSS resultados de 487 puntos en el bloque de números, 476 puntos en el de formas y mediciones geométricas y 479 puntos en el de representación de datos. Estos resultados suscitan la necesidad de indagar sus causas y tomar decisiones.

La elección del bloque de contenidos de números se debe a la importancia de la alfabetización numérica de los escolares, que se recoge en el currículo español de primaria del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2007) y a la presencia completa de este bloque de contenidos en el currículo común español de forma-

ción inicial de maestros (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). Puesto que “la función más interesante de la evaluación educativa reside en la posible mejora que se pueda producir en el objeto evaluado como consecuencia de las decisiones que dicha evaluación suscite” (Tourón, 2009, 127), en este estudio interpretamos la evaluación de los conocimientos matemáticos de los futuros maestros en el dominio de números desde la perspectiva de sus posibles implicaciones en la formación numérica de los alumnos de primaria.

### **2.1.2 Participación española en el estudio TEDS-M**

España participó en el estudio, junto con otros 17 países, para evaluar la formación inicial de los maestros en matemáticas y obtener una información que permitiera caracterizar el conocimiento matemático y didáctico con el que los futuros maestros terminaban sus estudios, estableciendo relaciones entre ese conocimiento y las características del plan de estudios en el que habían recibido su formación. La coordinación global del estudio TEDS-M en España correspondió a la Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional del Ministerio de Educación, a través del Instituto de Evaluación y la dirección de la investigación a la Universidad de Granada (INEE, 2012*b*).

Los futuros maestros que participaron seguían el programa de formación establecido por el Real Decreto 1440/1991 (MEC, 1991), previo al actual título de Grado. Con ese plan de estudios, en España se integraban plena y definitivamente los estudios de Magisterio en la Universidad (Román y Cano, 2008). La formación del maestro era generalista, tenía una duración de tres años y el profesorado español en formación recibía escasa preparación en matemáticas y su didáctica (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). En el momento en que España participó en el estudio TEDS-M, año 2008, las universidades españolas se encontraban en un proceso de revisión y diseño de los nuevos planes de estudio para la titulación del Grado de Maestro de Primaria, dentro del proceso de convergencia al Espacio Europeo de Educación Superior. Por ello, los resultados de este trabajo pueden ser de

utilidad en el proceso actual de diseño e implementación de las asignaturas del Grado de Maestro de Primaria.

## 2.2 MARCO CONCEPTUAL

Para plantear y seleccionar las preguntas sobre conocimiento matemático, TEDS-M se sirvió del marco conceptual elaborado para TIMSS 2007. Desde sus inicios, el esquema y los procedimientos del estudio TIMSS se consolidaron como válidos para evaluar el conocimiento matemático de los escolares (Garden et al, 2006; Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan, Arora, y Erberber, 2007). La solidez del marco viene avalada por el uso reiterado que se ha hecho del mismo, a nivel nacional e internacional, como es el caso de las pruebas de evaluación general del sistema educativo español llevadas a cabo por el INEE para educación primaria (2007) en el área de matemáticas (INEE, 2012c). Puesto que nuestra investigación se basa en los instrumentos de recogida de información (cuestionarios) y en los resultados obtenidos en TEDS-M, nos servimos en parte de los criterios de ese marco conceptual para evaluar el conocimiento matemático de los futuros maestros en el dominio de números.

Como se realiza en TIMSS, las preguntas elegidas para la evaluación del conocimiento matemático de los futuros profesores de primaria que participaron en TEDS-M, atienden a una dimensión conceptual y a una dimensión cognitiva. Para la dimensión conceptual del conocimiento matemático, se consideraron cuatro bloques de contenidos o dominios conceptuales: números y operaciones; geometría y medida; álgebra y funciones; y datos y azar. En cuanto a la dimensión cognitiva, TEDS-M clasificó las preguntas según tres dominios cognitivos: conocimiento, aplicación y razonamiento (INEE, 2012b).

En este estudio pretendemos precisar el conocimiento de los futuros maestros sobre el dominio de números. Por tanto, tuvimos en cuenta la clasificación de las preguntas realizadas por TEDS-M para este dominio y realizamos además un análisis de cada una de ellas, en el que abordamos las cuatro cuestiones siguientes.

- a) Identificamos el tipo de problema numérico que se planteaba, comprobando que se trataba de problemas matemáticos recogidos en la literatura de resolución de problemas.
- b) Establecimos los conocimientos y capacidades matemáticos necesarios para responderla correctamente, y conjeturamos acerca de aquellos conocimientos que podrían estar implicados cuando se responde incorrectamente. En este apartado comprobamos, al profundizar en los estudios existentes, si las dificultades que percibimos en la formación de los maestros son propias también de los escolares y si existían o no estudios de investigación acerca de las dificultades o errores en los que pueden incurrir los maestros en formación en dicho campo.
- c) Recogimos las implicaciones didácticas de la falta de conocimiento matemático sobre un tema —justificadas con base en la literatura—.
- d) Establecimos el nivel curricular de los contenidos matemáticos evaluados según la normativa vigente en España en el momento del estudio (MEC, 2007; MECD, 2004). Abordamos la caracterización de los niveles curriculares de los contenidos según los siguientes criterios.
  - *Básico*: este nivel incluye aquellos contenidos previstos en el currículo español de primaria.
  - *Intermedio*: este nivel incluye los contenidos previstos en los tres primeros cursos de secundaria.
  - *Avanzado*: este nivel incluye los contenidos previstos a partir del cuarto curso de secundaria.

Mediante esta clasificación de los contenidos matemáticos distinguimos aquellos contenidos que se presentan en el currículo de primaria de aquellos otros correspondientes a niveles superiores a los que el maestro en formación tendrá que enseñar en un futuro. De hecho, el cuestionario TEDS-M se elaboró con la intención de evaluar el conocimiento sobre los contenidos matemáticos que los futuros pro-

fesores van a enseñar, junto con otros contenidos matemáticos que se trabajen dos años más allá del nivel en que los futuros profesores van a enseñar, incluyendo también preguntas de matemáticas avanzadas (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008). Dada la diversidad de países participantes y, por tanto, la variedad de tipos de programas de formación inicial de profesores y de propuestas curriculares de primaria, hemos querido precisar para el caso español el nivel curricular del contenido al que se refiere cada una de las preguntas del cuestionario. Esta clasificación caracteriza los conocimientos matemáticos manifestados por los futuros maestros atendiendo a los niveles curriculares del contenido propuestos.

No incluimos en este apartado el marco conceptual que utilizamos para el análisis de cada una de las preguntas estudiadas. Dada la extensión que se necesita para el estudio de cada pregunta, nos limitamos a presentar más adelante un ejemplo del marco conceptual y del procedimiento de análisis de una de las preguntas. En la última parte del artículo resumimos e interpretamos los resultados obtenidos con base en el análisis de todas las preguntas del dominio de números.

## 2.3 OBJETIVO Y MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de este trabajo es caracterizar el conocimiento matemático manifestado en el estudio TEDS-M por los futuros maestros de primaria en el dominio de números. Se trata de una investigación de tipo descriptivo cuantitativo, a partir de datos procedentes del cuestionario del estudio internacional TEDS-M.

### 2.3.1 Población y muestra

El estudio TEDS-M definió un esquema de muestreo aleatorio, dependiente del tamaño que, en el caso de España, sirvió para seleccionar 50 instituciones de formación sobre un total de 73 que ofrecían formación inicial a futuros maestros de primaria. Dos de ellas declinaron la invitación a participar. Los procedimientos estadísticos del estudio TEDS-M establecían que la muestra aleatoria de maestros en formación debía incluir a 30 sujetos de cada institución —o a la población

completa si su tamaño era inferior a 30— que en el año 2008 se encontraran cursando su último año de formación; 1093 futuros maestros respondieron el cuestionario (INEE, 2012*b*).

### 2.3.2 Fuentes de información

Este estudio se basa en las respuestas de los futuros maestros al cuestionario de TEDS-M<sup>4</sup>. Este cuestionario constaba de 70 preguntas que evaluaban los conocimientos de los futuros profesores, de las cuales, dos tercios correspondían al conocimiento matemático y un tercio al conocimiento didáctico. El conocimiento matemático de los futuros profesores en el dominio de números se midió con base en 10 preguntas. En la tabla 2.1 identificamos las preguntas de este dominio en función del tipo de problema numérico, el dominio cognitivo asignado por TEDS-M y el nivel curricular del contenido al que se refieren, y las numeramos consecutivamente.

Tabla 2.1. Preguntas para evaluar el conocimiento matemático sobre números

Pregunta	Tipo de problema numérico	Dominio cognitivo	Nivel curricular
1	Proporcionalidad directa entre magnitudes	Aplicación	Intermedio
2	Cantidad de números decimales que hay entre dos números decimales	Conocimiento	Avanzado
3	Distinción entre números racionales e irracionales	Conocimiento	Avanzado
4	Identificación de las propiedades de las operaciones aritméticas que permiten justificar una identidad	Conocimiento	Intermedio
5	Representación gráfica de fracción como partes de un todo	Conocimiento	Básico
6	Traducción de una resta de fracciones en el enunciado de un problema verbal	Aplicación	Intermedio

---

<sup>4</sup> La base de datos internacional se encuentra en <http://rms.ica-dpc.org/>



7	Propiedades del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos números	Conocimiento	Avanzado
8	Relaciones de proporcionalidad entre dos cantidades de un todo	Razonamiento	Intermedio
9	Reconocimiento de razonamientos sobre proporción en términos de razón y porcentaje	Aplicación	Intermedio
10	Interpretación de los datos de una tabla en términos de razón y proporción	Conocimiento	Intermedio

Los responsables de TEDS-M liberaron los enunciados de las preguntas<sup>5</sup> 1, 2 y 3. Las preguntas 1, 2, 4 y 5 eran de respuesta múltiple —varias opciones de respuesta de las cuales solo una era correcta—. El resto de las preguntas eran de respuesta múltiple compleja —cada opción del problema era una nueva pregunta con dos opciones de respuesta—.

Mostramos a continuación dos ejemplos de problemas liberados del dominio conceptual de números.

— *Pregunta 2: Cantidad de números decimales que hay entre dos números decimales.*

La figura 2.1 muestra la pregunta 2. Es de respuesta múltiple y evalúa el conocimiento de los futuros maestros sobre los números decimales. Aunque la introducción de los números decimales, su ordenación y representación gráfica, así como la importancia de su uso en la vida cotidiana se encuentra en el bloque de números del tercer ciclo de primaria, consideramos que esta pregunta busca evaluar el conocimiento de los futuros maestros acerca de la densidad del conjunto de los números racionales y del concepto matemático de infinito, que son conocimientos propios del nivel avanzado.

---

<sup>5</sup> Se encuentran en <http://www.ugr.es/~tedsm/>

¿Cuántos números decimales hay entre 0,20 y 0,30?  
 Marque la opción que crea correcta.

A. 9  
 B. 10  
 C. 99  
 D. Un número infinito

Figura 2.1. Número de números decimales entre dos números decimales

— *Pregunta 3: Distinción entre números racionales e irracionales.*

La figura 2.2 muestra la pregunta 3. Es de nivel avanzado y de respuesta múltiple compleja. Evalúa el conocimiento de los futuros maestros sobre la distinción entre números racionales e irracionales. El contenido matemático de esta pregunta se contempla fundamentalmente a partir del cuarto curso de secundaria.

Indique para cada número si es racional o irracional. Marque con una X la opción correcta en cada fila

	Racional	Irracional
a) $\pi$		
b) 2		
c) $\sqrt{49}$		
d) $-\frac{3}{2}$		

Figura 2.2. Pregunta sobre números racionales e irracionales

### 2.3.3 Procedimiento de análisis

El método con el que abordamos el objetivo propuesto consta de los siguientes pasos:

- análisis de cada una de las preguntas que evalúan el conocimiento matemático en el dominio de números para determinar: el tipo de problema numérico que plantea, los conceptos matemáticos que se trabajan, y los

conocimientos y capacidades matemáticos implicados en sus respuestas correctas e incorrectas;

- ubicación en la literatura de las dificultades, tanto de los escolares como de los maestros en formación, detectadas para el tema tratado en la pregunta, así como la implicación en el conocimiento didáctico de la falta de conocimiento matemático;
- caracterización de cada pregunta en relación con el nivel curricular de su contenido matemático y el dominio cognitivo que se evalúa;
- interpretación de los resultados de los futuros maestros para cada pregunta con base en los puntos anteriores; y
- síntesis de la información para caracterizar e interpretar el conocimiento manifestado por los futuros maestros en el dominio de números.

Un análisis pormenorizado de las preguntas da lugar a descubrir carencias o limitaciones en el cuestionario. No obstante, en este estudio nos limitamos a estudiar los resultados que se obtuvieron con los instrumentos tal y como se aplicaron en el estudio TEDS-M.

#### 2.3.4 Ejemplo de análisis de una pregunta

Presentamos, como ejemplo del método, el análisis detallado de la pregunta 1 sobre proporcionalidad directa que aparece en la figura 2.3.

–Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?”

Marque la opción que crea correcta.

- A. 7,2
- B. 8,0
- C. 8,4
- D. 9,6

Figura 2.3. Pregunta sobre proporcionalidad directa

*Marco conceptual para el análisis de la pregunta*

La pregunta 1 propone un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes en un contexto de la vida cotidiana. Este contenido matemático se contempla en el primer curso de secundaria en el bloque de aritmética y álgebra como “Magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes. Aplicación a la resolución de problemas”. Este problema puede considerarse como un típico problema de regla de tres simple directa. En el problema aparecen números naturales y decimales sencillos; por tanto, se puede decir que las destrezas que los futuros profesores tendrían que poner en juego para contestar correctamente coinciden con algunos de los criterios de evaluación que se tienen en cuenta en este curso, como los siguientes.

1. Operar con números naturales y decimales y utilizarlos para resolver actividades relacionadas con la vida cotidiana.
2. Resolver problemas, eligiendo el tipo de cálculo adecuado y dar significado a las operaciones, métodos y resultados obtenidos, de acuerdo con el enunciado.
3. Emplear convenientemente la regla de tres simple directa para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

Esta pregunta es de respuesta múltiple. La solución correcta es la opción B, a la que se puede llegar, por ejemplo, realizando los cálculos que se muestran en las figuras 2.4 y 2.5.

<p style="text-align: center;"><i>Planteamiento proporcional:</i> <math>\frac{2,4}{a} = \frac{30}{100}</math></p> <p style="text-align: center;">y se resolvería <math>a = \frac{2,4 \times 100}{30} = 8 \text{ litros}</math></p>
--

Figura 2.4. Resolución utilizando proporciones

<i>Regla de tres simple directa</i>				
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%;">2,4 litros _____ 30 horas</td> <td rowspan="2" style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">}</td> </tr> <tr> <td style="width: 50%;">a _____ 100 horas</td> </tr> </table>	2,4 litros _____ 30 horas	}	a _____ 100 horas	y se resolvería $a = \frac{2,4 \times 100}{30} = 8 \text{ litros}$
2,4 litros _____ 30 horas	}			
a _____ 100 horas				

Figura 2.5. Resolución mediante la regla de tres simple directa

*Conocimientos puestos en juego en las respuestas correctas*

Para responder correctamente a esta pregunta, el futuro profesor debería tener el conocimiento matemático suficiente para reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes, donde hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres cantidades conocidas, así como saber qué operaciones son necesarias para resolverlo y realizarlas correctamente. Solo se valora el resultado concreto del problema; no se valoran los procedimientos llevados a cabo para lograr este resultado.

Puede haber otras vías mediante las cuales los futuros profesores hayan podido contestar correctamente, como puede ser el azar. No tendremos en cuenta esas causas para interpretar los resultados.

*Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas*

Con los datos disponibles, no podemos saber si los futuros profesores que contestaron de forma incorrecta manifestaron reconocer o no el problema como un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes. Pero sí podemos identificar, dependiendo de la opción de respuesta elegida, qué tipo de cálculos hicieron y con qué datos del problema trabajaron, comprobando que los cálculos realizados no coinciden con los necesarios para resolver el problema. En este caso las posibles soluciones propuestas no proceden de utilizar todos los datos proporcionados por el enunciado:

- en la opción A, 7,2 es el resultado de multiplicar 2,4 por 3;
- en la opción D, 9,6 es el resultado de multiplicar 2,4 por 4;
- y la opción C el resultado no procede de utilizar, aparentemente, ningún dato del enunciado.

Aunque hay estudios sobre razonamiento proporcional con maestros en formación sobre la resolución de problemas de proporcionalidad directa (ver, por ejemplo, Valverde y Castro, 2012) no hemos entrado en ello dado que, en este caso, solo se valora el resultado concreto del problema y no los procedimientos llevados a cabo para lograr el resultado en este problema.

*Interpretación del conocimiento manifestado por los futuros maestros*

En la tabla 2.2 presentamos la caracterización del conocimiento manifestado por los futuros maestros con base en el análisis anterior. En la primera columna, aparece el porcentaje de futuros maestros correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna, interpretamos estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros maestros pudieron poner en juego.

Tabla 2.2. Caracterización del conocimiento manifestado en la pregunta 1

---

%	Respuesta	Conocimientos
77,4%	Correcta (B)	Reconoció el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes y supo resolverlo Operó correctamente con números decimales sencillos
15,7%	Incorrectas (A y D)	No realizó los cálculos adecuados para resolver el problema Solo utilizó uno de los datos que ofrece el problema
6,9%	Incorrecta (C)	El resultado no procede de los datos dados por el problema

---

Los resultados de la tabla 2.2 indican que el 77,4% de los futuros maestros manifestó conocimiento matemático suficiente para reconocer el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes, lo resolvió e identificó la solución operando correctamente con números decimales; mientras que un 22,6% no supo resolverlo, ya sea porque no realizó los cálculos adecuados, no utilizó los datos proporcionados o el resultado no procede de esos datos. Este 22,6% tiene mayor posibilidad de no poder resolver cuestiones didácticas sobre proporcionalidad directa como se apunta en Gutiérrez, Gómez y Rico (2012).

## 2.4 INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS ESPAÑOLES PARA EL DOMINIO DE NÚMEROS

Presentamos a continuación los resultados que los futuros maestros obtuvieron en el estudio TEDS-M en el dominio de números junto con su interpretación. Lo hacemos atendiendo al nivel curricular de los contenidos matemáticos.

### 2.4.1 Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel básico

La información que presenta la tabla 2.3 caracteriza el conocimiento manifestado por los futuros maestros en la única pregunta cuyo contenido matemático corresponde al nivel básico. En el primer grupo de columnas, aparece el porcentaje de futuros maestros que contestaron de forma correcta o incorrecta. En el segundo grupo de columnas, identificamos el tipo de dominio cognitivo asignado por TEDS-M. Incluimos en la última columna una descripción de estos conocimientos a partir del análisis que hemos hecho de cada pregunta.

Tabla 2.3. Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel básico

Porcentaje		Dominio cognitivo			Descripción
Co	I	C	A	R	
Representación gráfica de fracción como partes de un todo					
76,3%		✓			Conocía la representación gráfica de fracción como partes de un todo
	23,7%	✓			No conocía la representación gráfica de fracción como partes de un todo

*Nota:* Co = porcentaje de respuestas correctas; I = porcentaje de respuestas incorrectas; C = conocimiento; A = aplicación; R = razonamiento.

Como vemos en la tabla 2.3, el 76,3% de los futuros maestros de la muestra manifestó conocer la representación gráfica de fracción como partes de un todo. Los números fraccionarios aparecen a partir del segundo ciclo de primaria para expresar partes de la unidad y relaciones entre cantidades en contextos reales. También

se contempla en este mismo ciclo su representación gráfica mediante gráficos simples o en la recta numérica y se profundiza en esto en el tercer ciclo.

### 2.4.2 Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel intermedio

De la misma forma que lo hemos hecho en la tabla 2.3, presentamos en la tabla 2.4 la caracterización del conocimiento manifestado por los futuros maestros en las 6 preguntas cuyo contenido matemático corresponde al nivel intermedio. Cada bloque de filas de resultados se refiere al tipo de problema numérico considerado. Se incluye la información de la tabla 2.2 por corresponder a contenidos del nivel intermedio.

Tabla 2.4. Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel intermedio

Porcentaje		Dominio cognitivo			Descripción
Co	I	C	A	R	
<b>Identificar las propiedades de las operaciones aritméticas que permiten justificar una identidad</b>					
29,1%		✓			Identificó las propiedades de las operaciones aritméticas que permiten justificar una identidad
	70,9%	✓			Identificó propiedades de las operaciones aritméticas que no justificaban la igualdad y que no se podían concluir a partir del problema
<b>Interpretación de los datos de una tabla en términos de razón y proporción</b>					
34,3%		✓			Fue capaz de identificar en todos los casos si distintas interpretaciones de una tabla eran precisas
	65,7%	✓			No fue capaz de identificar en todos los casos si distintas interpretaciones de una tabla eran precisas
<b>Proporcionalidad directa</b>					
77,4%			✓		Reconoció y supo resolver el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes Operó correctamente con números decimales sencillos
	15,7%		✓		No realizó los cálculos adecuados para resolver el problema Solo utilizó uno de los datos que ofrece el problema
	6,9%		✓		El resultado no procede de los datos dados por el problema
<b>Traducción verbal de una resta de fracciones sencillas</b>					
8,5%			✓		Supo identificar cuáles eran las traducciones verbales correctas de una resta de fracciones sencillas con distinto denominador



Porcentaje		Dominio cognitivo			Descripción
Co	I	C	A	R	
	91,5%		✓		No supo distinguir las traducciones verbales correctas de las incorrectas de una resta de fracciones sencillas con distinto denominador
Reconocer razonamientos sobre proporción en términos de razón y porcentaje					
	35,3%		✓		Distinguió los razonamientos correctos sobre proporción en términos de proporción y porcentaje
	64,6%		✓		No distinguió los razonamientos correctos sobre proporción en términos de proporción y porcentaje
Relaciones de proporcionalidad entre dos cantidades de un todo					
	19,4%			✓	Fue capaz de identificar como verdaderas o falsas afirmaciones sobre la variación de la proporción entre dos cantidades de un todo
	80,5%			✓	No fue capaz de identificar en todos los casos si eran verdaderas o falsas afirmaciones sobre la variación de la proporción entre dos cantidades de un todo

*Nota:* Co = porcentaje de respuestas correctas; I = porcentaje de respuestas incorrectas; C = conocimiento; A = aplicación; R = razonamiento.

Para la interpretación de la tabla 2.4 distinguiremos los resultados para cada uno de los dominios cognitivos.

#### *Conocimiento del contenido matemático*

Como se aprecia en la tabla 2.4, las preguntas que evalúan el conocimiento del contenido matemático trabajan las propiedades de las operaciones aritméticas y los conceptos de razón y proporción, estos últimos en relación con la lectura e interpretación de una tabla de valores.

Observamos que solo el 29,1% de los futuros maestros fue capaz de identificar las propiedades de las operaciones aritméticas que permitían justificar una identidad. Este tipo de conocimiento está contemplado en el primer curso de secundaria en el bloque de aritmética y álgebra donde se señala la importancia de la elaboración de estrategias de cálculo mental a partir de las propiedades de las operaciones numéricas.

En el segundo curso de secundaria, en el bloque de aritmética y álgebra, aparecen los porcentajes —cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales—, así como las razones y proporciones numéricas. Para el caso de la interpretación de

una tabla en términos de razón/proporción, solo un 34,3% de futuros maestros fue capaz de identificar en todos los casos cuándo distintas interpretaciones de la tabla eran precisas o no.

#### *Aplicación del contenido matemático*

Las preguntas que evalúan la aplicación del contenido matemático se refieren a los problemas de proporcionalidad directa, a la traducción de una resta de fracciones a problemas verbales de la vida cotidiana, y a problemas en los que se trabaja el concepto de proporción. Es decir, con estos tres problemas se evalúa la capacidad de los futuros maestros para aplicar sus conocimientos a problemas sencillos o rutinarios y los más habituales en la clase de matemáticas.

Como ya vimos, en el caso del problema de proporcionalidad directa, el 77,4% de los futuros maestros manifestó tener el conocimiento matemático suficiente para reconocer los problemas de proporcionalidad directa entre magnitudes, saber resolverlos e identificar la solución correcta de entre varias dadas.

Para el caso de la resta de fracciones sencillas con distinto denominador y su traducción verbal a problemas escolares en un contexto real, solo un 8,5% de los futuros maestros fue capaz de identificar, en todos los casos propuestos, qué traducciones verbales se corresponden con la resta de fracciones sencillas dadas. No consideramos que este contenido matemático sea propio de primaria al aparecer fracciones con distinto denominador.

Y por último un 35,3% distinguió los razonamientos correctos de los incorrectos sobre el concepto de proporción en términos de proporción y porcentaje.

#### *Razonamiento sobre el contenido matemático*

Solo hay una pregunta referida al dominio cognitivo de razonamiento en el dominio de números, en la que se trabaja el concepto de proporción. Como se aprecia en la tabla 2.4, solo el 19,4% de los futuros maestros fue capaz de identificar en todos los casos qué afirmaciones eran ciertas y cuáles falsas acerca de la variación de la proporción entre dos cantidades de un todo.

### 2.4.3 Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel avanzado

De la misma forma que lo hemos hecho en las tablas 2.3 y 2.4, presentamos en la tabla 2.5 la caracterización del conocimiento manifestado por los futuros maestros en las 3 preguntas cuyo contenido matemático corresponde al nivel avanzado.

Los números racionales, los irracionales y las propiedades del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo son contenidos matemáticos que consideramos de nivel avanzado. En este caso, las tres preguntas correspondientes a este nivel se refieren al dominio cognitivo de conocimiento.

Como se aprecia en la tabla 2.5, a pesar de tratarse de una pregunta de nivel avanzado, el 54% de los futuros maestros manifestó saber que entre dos números decimales hay un número infinito de números decimales. Con respecto al conjunto de los números reales, aunque se puede introducir en tercero de secundaria, es a partir de cuarto cuando se estudia el número irracional, la iniciación al número real y la clasificación de los distintos tipos de números según sus expresiones decimales. Para este contenido matemático, solo el 10% de los futuros maestros fue capaz de distinguir de una serie de números, los racionales de los irracionales en todos los casos. Para el caso de las propiedades del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo solo el 15,6% de futuros maestros supo distinguir en todas las ocasiones las afirmaciones ciertas de las falsas.

Tabla 2.5. Caracterización del conocimiento manifestado en el nivel avanzado

Porcentaje		Dominio cognitivo			Descripción
Co	I	C	A	R	
<b>Cantidad de números decimales entre dos números decimales</b>					
54%		✓			Sabía que entre dos números decimales hay infinitos números decimales
	46%	✓			Manifestó que entre dos números decimales hay un número finito de números decimales
<b>Distinción entre números racionales e irracionales</b>					
10%		✓			Distinguió, de una relación de números, los racionales de los irracionales
	90%	✓			No distinguió, de una relación de números, los números racionales de los irracionales en todas las ocasiones
<b>Reconocer la validez de propiedades del M.C.D. y m.c.m de números naturales</b>					
15,6%		✓			Reconoció que el m.c.m. de dos números primos es el producto de los dos números Reconoció que el M.C.D. de dos números es menor que ambos números o igual a uno de ellos. Reconoció que no siempre si se aumenta uno de los números el m.c.m. aumenta
	84,4%	✓			No reconoció como ciertas alguna de las tres propiedades anteriores

*Nota:* Co = porcentaje de respuestas correctas; I = porcentaje de respuestas incorrectas; C = conocimiento; A = aplicación; R = razonamiento; M.C.D. = máximo común divisor; m.c.m. = mínimo común múltiplo.

## 2.5. CONCLUSIONES

A raíz de los resultados españoles en matemáticas de TIMSS 2011, se han elaborado diversos estudios secundarios. En estos estudios se analiza, por ejemplo, la relación entre los resultados de los alumnos de primaria en matemáticas con determinados rasgos y características del maestro tales como su satisfacción profesional, su interacción con otros docentes o limitaciones para la enseñanza referida a sus percepciones respecto a los alumnos que presentan distintos problemas (Tourón, Lizasoán, Castro y Navarro, 2012). No obstante, sin dejar de tener en cuenta estas variables, la calidad de la enseñanza se ve favorecida por factores como la cualificación y la formación del profesorado (Pérez Yuste, 2005). Por

consiguiente, los resultados que presentamos en este artículo destacan la importancia del suficiente y necesario conocimiento matemático de los futuros maestros para lograr una buena alfabetización matemática de sus futuros alumnos.

Rico (2000) ya apuntaba una posible causa para los bajos resultados de los maestros en matemáticas, cuando señalaba que si se compara el programa de formación inicial español con otros programas de formación de maestros especialistas de otros países, los maestros generalistas de educación primaria en España reciben una formación sensiblemente inferior en áreas que luego van a tener que enseñar, como es el caso de las matemáticas. Este resultado ha sido corroborado por Rico, Gómez y Cañadas (2014).

Por otra parte, la importancia que se da a la alfabetización numérica en el currículo de primaria español, con la presencia de tres bloques de números en primaria, no concuerda con los bajos resultados de los escolares españoles en TIMSS 2011, que están por debajo de la media de la OCDE. Nuestra hipótesis, basada en la relación entre el rendimiento de los escolares y la formación de sus profesores (Baumert et al., 2010; Hill, Rowan, y Ball, 2005), es que estos bajos resultados están relacionados con la deficiente formación de los maestros tanto en conocimientos matemáticos como didácticos. De hecho, destacamos con este trabajo que la falta de conocimiento matemático suficiente en el dominio de números podría ser causa de que los futuros maestros no pudieran abordar ciertas cuestiones didácticas, como ya se adelantó al profundizar en las preguntas de conocimiento didáctico del mismo dominio (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez, Rico, 2014).

Los resultados de este estudio, en términos de los conocimientos matemáticos específicos que los futuros maestros manifestaron al responder a las preguntas del dominio de números en el cuestionario de TEDS-M, proporcionan información concreta que es de utilidad para los encargados del diseño e implementación de las asignaturas que abordan el conocimiento matemático de los futuros profesores en el Grado de Maestro de Primaria, que se encuentra en curso con motivo del proceso de convergencia al Espacio Europeo de Educación Superior.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto *Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación*, EDU2012-33030 del Ministerio de Economía y Competitividad (España).

## REFERENCIAS

- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180.
- Britton, E., Paine, L., Pimm, D. y Raizen, S. (2003). *Comprehensive teacher induction*. Boston, MA: Kluwer Academic Publisher.
- European Commission (2008). *Levels of Autonomy and Responsibilities of teachers in Europe*. Brussels: Eurydice.
- Garden, R., Lie, S., Robitaille, D. F., Angell, C., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P. y Arora, A. (2006). *TIMSS Advanced 2008 assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2012). Conocimientos manifestados por los futuros maestros de Magisterio sobre Didáctica de la Matemática en el estudio TEDS-M. Ejemplo del análisis de una pregunta. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM, 111-118.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación* 26(2), 265-297.

- Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2012a). *PIRLS - TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Volumen I: Informe español*. Madrid: Autor. Recuperado de: <http://bit.ly/1Aml7hY>
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2012b). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor. Recuperado de: <http://bit.ly/17gDhYe>
- Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2012c). *Educación Primaria 2007 Evaluación general del sistema educativo*. Madrid: Autor. Recuperado de: <http://bit.ly/1zouNG0>
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestros en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *BOE*, 244, 33004-33008. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, 173, 31487-31566. Madrid: Autor.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2004). Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE*, 35, 5712-5791. Madrid: Autor.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A., y Erberber, E. (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- OCDE (2005). *Teachers matter: Attracting, developing, and retaining effective teachers*. París: Autor.

- Pérez Juste, R. (2005). Calidad de la educación, calidad en la educación. Hacia su necesaria integración. *Educación XXI*, 8, 11-33.
- Rico, L. (2000). Formación y desempeño práctico en Educación Matemática de los profesores de primaria. *Suma*, 34, 45-51.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Román, J.M. y Cano R. (2008). La formación de maestros en España (1838-2008): necesidades sociales, competencias y planes de estudio. *Educación XXI*, 11(2), 73-101.
- Tatto, M. T., Nielsen, H. D., Cummings, W. C., Kularatna, N. G. y Dharmadasa, D. H. (1993). Comparing the effectiveness and costs of different approaches for educating primary school teachers in Sri Lanka. *Teaching and Teacher Education*, 9(1), 41-64.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study In Mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L. y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Recuperado de: <http://bit.ly/1vjgeqJ>
- Tourón, J., Lizasoain, L., Castro, M. y Navarro, E. (2012). Alumnos de alto, medio y bajo rendimiento en matemáticas en TIMSS. Estudio del impacto de algunos factores de contexto. En INEE (Ed.), *PIRLS - TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias*. Vo-



*lumen II: Informe español. Análisis secundario*, 186-227. Madrid: Autor. Recuperado de: <http://bit.ly/1Lephgu>

Tourón, J. (2009). El establecimiento de estándares de rendimiento en los sistemas educativos. *Estudios Sobre Educación*, 16, 127-146.

Valverde, G. y Castro, E. (2012). Prospective elementary school teachers' proportional reasoning. *PNA*, 7(1), 1-18.



## CAPÍTULO 3

# ARTÍCULO 2

**Referencia:** Gutiérrez-Gutiérrez, A. Gómez, P., Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación* 26(2), 265-297.

Disponible en: <http://bit.ly/1rvHuex>

(ID: 935110 DOI:10.1080/11356405.2014.935110)

## RESUMEN

Este artículo describe y caracteriza el conocimiento didáctico sobre matemáticas de los futuros profesores españoles de primaria, singularmente en el dominio de números. El estudio se lleva a cabo mediante un análisis de contenido de las preguntas del cuestionario del estudio TEDS-M sobre este tipo de conocimiento y la interpretación de las respuestas aportadas. Encontramos que los futuros profesores fueron capaces de reconocer las variables que afectaban a la dificultad de problemas aritméticos y de proporcionalidad, pero manifestaron dificultades para diagnosticar los errores en los que incurren los alumnos, representar gráficamente los conceptos y procedimientos matemáticos y reflexionar sobre el contenido de las matemáticas escolares y su aplicación a la enseñanza. Estos resultados serán de utilidad para el diseño de las asignaturas del nuevo Grado de Maestro de Primaria.

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo aborda el nivel y la profundidad del conocimiento matemático y de su enseñanza que logran los futuros profesores de primaria al final de su programa de formación. Se trata de uno de los temas de investigación de TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008). El artículo se centra en el estudio del conocimiento didáctico del contenido para el subdominio de números que los futuros profesores españoles de matemáticas manifestaron en dicho estudio. Describimos este conocimiento interpretando los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles de primaria en el estudio TEDS-M.

TEDS-M fue el primer estudio internacional comparativo que abordó el estudio de la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas y de los resultados que se obtienen con esa formación. El estudio TEDS-M considera que estudiar el conocimiento que tienen los futuros profesores es importante por dos razones. Primero, porque el conocimiento de las matemáticas de los profesores influye en el de los estudiantes (Baumert et al., 2010; Hill, Rowan, y Ball, 2005). Segundo, porque el conocimiento que esos futuros profesores han adquirido hasta su último año de formación puede servir como indicador del éxito que van a tener en su tarea educativa como profesores (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012).

Se han publicado algunos estudios secundarios sobre diferentes aspectos del estudio [*Journal of Teacher Education*, 62(2) y *ZDM*, 44(3)]; los equipos nacionales de algunos países han llevado a cabo trabajos parciales (p. ej., Blömeke, Kaiser, y Lehmann, 2010); y el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) ha publicado el informe español (INEE, 2012). Este trabajo forma parte de los estudios secundarios que se proponen en el informe internacional de TEDS-M (Tatto et al., 2012), al profundizar en el conocimiento de los futuros profesores a partir de los resultados de ese estudio internacional.

Estructuramos este informe de la siguiente forma. Expondremos los motivos por los que España participó en el estudio TEDS-M. A continuación, describiremos el cuestionario de TEDS-M y los aspectos específicos con los que vamos a caracterizar el conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares de los futuros profesores. Seguidamente ejemplificaremos el método con el que identificamos el conocimiento didáctico para el subdominio de números de los futuros profesores españoles en las preguntas del estudio TEDS-M. Concluiremos con el resumen de los resultados obtenidos para el conjunto de las preguntas del subdominio de números.

### 3.2 LA PARTICIPACIÓN DE ESPAÑA EN TEDS-M

España participó en TEDS-M para evaluar la formación inicial del profesorado de primaria, con objeto de tener una información empírica, recogida y analizada sistemáticamente que permitiera caracterizar y comprender el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico sobre matemáticas con el que los futuros profesores de primaria terminaban sus estudios universitarios, y establecer relaciones entre estos dos tipos de conocimiento y las características del plan de estudios en el que habían recibido su formación. Los resultados que obtuvieron los futuros profesores españoles estuvieron por debajo de la media internacional (500) tanto en conocimiento matemático, como en conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares. La puntuación media obtenida por los futuros profesores españoles en conocimiento didáctico fue de 492,2 y en conocimiento matemático fue de 481,3 (INEE, 2012).

La recogida de datos para el estudio TEDS-M tuvo lugar en el curso 2007-2008. En ese momento, los futuros profesores españoles que participaron en el estudio seguían el programa de formación establecido por el Real Decreto 1440/1991 (BOE nº 244 de 11 de octubre de 1991), anterior al actual título de Grado. Con ese plan de estudios, en España la formación del profesor de primaria era generalista, tenía una duración de tres cursos y el profesorado español en for-

mación recibía escasa preparación en matemáticas y su didáctica (Rico, Gómez y Cañadas, 2014).

Los resultados de este trabajo y la posterior aplicación de la metodología de interpretación de los resultados pueden ser de utilidad en el proceso actual para diseñar e implementar las asignaturas del Grado de Maestro de Primaria.

### 3.3 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN EL SUBDOMINIO DE NÚMEROS

El marco conceptual de TEDS-M, siguiendo las ideas de Shulman (1987), considera que el conocimiento necesario para enseñar matemáticas está compuesto por dos factores: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico de dicho contenido. TEDS-M se basó en el marco conceptual elaborado para TIMSS 2007 (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) para evaluar el conocimiento matemático de los futuros profesores. Determinó cuatro subdominios de contenidos matemáticos: números, geometría, álgebra y análisis de datos (Tatto et al., 2008).

El desarrollo del marco conceptual para el conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares fue informado por el estudio de viabilidad para TEDS-M (Schmidt y otros, 2007) y el trabajo de otros investigadores en el campo (Ball y Bass, 2000; Hill, Rowan, y Ball, 2005; Hill, Schilling, y Ball, 2004), así como por la aportación de grupos de expertos. TEDS-M estableció tres subdominios: conocimiento del currículo de matemáticas, conocimiento de la planificación y conocimiento de la implementación de la enseñanza. Aunque en un primer momento, en el marco conceptual que elaboró TEDS-M para el conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares, se fijaron los temas que caracterizaban a cada uno de los subdominios (Tatto et al., 2008, p. 39), en el informe internacional (Tatto et al., 2012, p. 131) estos temas se describen como ejemplos del subdominio correspondiente, manifestando así que estos temas no son los únicos posibles dentro de cada uno de los subdominios.

En nuestro estudio consideramos que la clasificación de las preguntas que hizo TEDS-M para el dominio del conocimiento didáctico del contenido — currículo, planificación e implementación— es demasiado amplia para describir el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores en el subdominio de números. Puesto que TEDS-M no presenta una estructura de categorías propia y completa que permita establecer el conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares que abordan las preguntas, hicimos una clasificación más precisa referida a las preguntas del subdominio de números, estableciendo el conocimiento didáctico concreto que se requiere para responder correctamente a cada una de ellas. Esta clasificación surge al tipificar el objeto de las preguntas analizadas. Las categorías que proponemos son las siguientes:

- Reconocer los errores en los que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado (RE).
- Distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema (DIF).
- Representar gráficamente los conceptos o los procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza (REP).
- Identificar los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos (CPM).

### 3.4 EL CUESTIONARIO DE TEDS-M

De las 70 preguntas del cuestionario de TEDS-M que evaluaban los conocimientos de los futuros profesores, 22 correspondían al conocimiento didáctico del contenido. El conocimiento en el subdominio de números se evaluó con base en 8 preguntas. TEDS-M liberó cuatro de ellas —los enunciados y guías de corrección se encuentran en <http://www.ugr.es/~tedsm/>—. Identificamos las preguntas de es-

te subdominio en función del contenido matemático específico al que se refieren y las numeramos consecutivamente. En la tabla 3.1, se indica el número de la pregunta —columna 1—, el contenido matemático al que se refiere —columna 2— y si está o no liberada —columna 3—.

Tabla 3.1. Preguntas de conocimiento didáctico en el subdominio de números

Número de pregunta	Tipo de contenido	Liberada
1	Problemas aritméticos	Sí
2	Proporcionalidad directa	Sí
3	Números decimales	Sí
4	Representación de números decimales	Sí
5	Ordenar fracciones	No
6	Significado gráfico de la división de fracciones	No
7	Operaciones con números mixtos	No
8	Algoritmos de la resta	No

En la tabla 3.2, presentamos la clasificación de las preguntas del subdominio de números de acuerdo con tres de los criterios establecidos por TEDS-M: tipo de respuesta —abierta, múltiple y múltiple compleja—, subdominio del conocimiento didáctico—currículo, planificación e implementación— y conocimiento didáctico concreto que evalúa cada pregunta. Para las preguntas de respuesta abierta, TEDS-M elaboró una guía de corrección con la que se clasificaron las distintas respuestas de los futuros profesores, distinguiendo entre respuestas correctas, respuestas parcialmente correctas, respuestas incorrectas y respuestas ilegibles o en blanco (Tatto et al., 2008).



Tabla 3.2. Clasificación de las preguntas

P	Respuesta			Subdominio			Conocimiento didáctico			
	Ab	M	MC	C	P	I	DIF	RE	REP	CPM
1	✓			✓			✓			
2	✓				✓		✓			
3	✓					✓		✓		
4	✓					✓			✓	
5		✓		✓						✓
6			✓		✓				✓	
7		✓				✓		✓		
8		✓				✓				✓
T	4	3	1	2	2	4	2	2	2	2

*Nota:* P = número de la pregunta; Ab = abierta; M = múltiple; MC = múltiple compleja; C = currículo; P = planificación; I = implementación; T = total.

### 3.5 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de este trabajo es describir y caracterizar el conocimiento didáctico del subdominio de números de los futuros profesores españoles de primaria a partir de los resultados del estudio TEDS-M.

Para lograr este objetivo general,

- establecimos los conocimientos matemáticos y los conocimientos didácticos necesarios para responder correctamente cada pregunta del subdominio;
- interpretamos los datos aportados por los futuros profesores españoles en términos de esos conocimientos necesarios;
  - y, con base en la información anterior,
- sintetizamos y elaboramos los resultados.

## 3.6 MÉTODO

Nuestra investigación es de tipo descriptivo, cuantitativa a partir de datos obtenidos a través de un cuestionario. El diseño del trabajo de campo fue el establecido para el estudio TEDS-M (Tatto et al., 2008). Ejemplificamos más adelante, con el análisis de una de las preguntas del cuestionario de TEDS-M, el método que hemos diseñado para describir y caracterizar el conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares de los futuros profesores.

### 3.6.1 Población y muestra

La población del estudio fueron los futuros profesores españoles que, en el curso 2007-2008, satisfacían dos condiciones: (a) estar matriculado en al menos 30 créditos y (b) terminar la carrera ese mismo curso, en caso de aprobar todas las asignaturas. El estudio TEDS-M definió un esquema de muestra aleatoria dependiente del tamaño. España participó con 48 instituciones cada una con un plan de estudios propio y 1093 futuros profesores (INEE, 2012).

### 3.6.2 Fuentes de información

Los datos proceden de la codificación de las respuestas al cuestionario de TEDS-M de estos 1093 futuros profesores. Contamos también con las guías de corrección que TEDS-M elaboró para las preguntas de respuesta abierta.

Un análisis pormenorizado de las preguntas da lugar a identificar carencias o limitaciones tanto en el cuestionario como en las guías de corrección. No obstante, en este trabajo nos limitamos a presentar la información que surge de los instrumentos y datos proporcionados por TEDS-M.

### 3.6.3 Descripción e interpretación del conocimiento didáctico

Realizamos la descripción e interpretación del conocimiento didáctico que los futuros profesores españoles manifestaron en el estudio TEDS-M en el subdominio de números en dos fases: primero establecimos los requerimientos de cada pre-

gunta y, después, resumimos y elaboramos los resultados obtenidos para las 8 preguntas.

Para establecer los requerimientos de cada pregunta realizamos los siguientes pasos.

1. Establecimos la estructura conceptual en la que se encuadra la pregunta y determinamos el conocimiento didáctico y, en su caso, el conocimiento matemático que necesitaría tener el futuro profesor para poder contestarla correctamente.
2. Analizamos las guías de corrección con el propósito de formular conjeturas sobre el conocimiento didáctico que los futuros profesores podrían poner en juego para contestar de manera incorrecta o parcialmente correcta a cada pregunta.
3. Interpretamos los resultados de los futuros profesores españoles para cada pregunta.

Para resumir e interpretar los datos obtenidos por los futuros profesores españoles de primaria realizamos dos valoraciones:

1. consideramos los porcentajes de respuestas correctas en cada una de las 8 preguntas y
2. consideramos los porcentajes de respuestas incorrectas y parcialmente correctas de las 8 preguntas.

#### **3.6.4 Ejemplo del análisis de una pregunta**

A continuación presentamos, como ejemplo del método, el análisis detallado de una de las preguntas. El análisis de las otras preguntas se puede consultar en Gutiérrez (2012). La figura 3.1 presenta la formulación de la pregunta sobre proporcionalidad directa.

–Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?”

Formule un problema diferente, del mismo tipo que el problema propuesto (los mismos procesos/operaciones) que sea MÁS FÁCIL de resolver para los alumnos de primaria.

Figura 3.1. Pregunta sobre proporcionalidad directa

Realizamos el análisis de la pregunta estableciendo inicialmente la estructura conceptual en que se encuadran los contenidos matemáticos involucrados en la pregunta, así como el tipo de conocimiento didáctico considerado. Analizamos la guía de corrección y mostramos los resultados de los futuros profesores españoles para esta pregunta. Por último interpretamos estos resultados con base en el análisis inicial.

#### *Estructura conceptual y tipo de contenido didáctico de la pregunta*

En esta pregunta se trabaja con la proporcionalidad directa entre magnitudes. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de planificación de la enseñanza, es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

En primer lugar, el futuro profesor debería saber qué procesos/operaciones son necesarios para resolver correctamente el problema propuesto y tener el conocimiento matemático suficiente para reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad en el que hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres cantidades conocidas, correspondientes a dos magnitudes directamente proporcionales. Este problema puede considerarse también como un típico problema de “regla de tres simple directa”.

En segundo lugar, para poder plantear un problema más fácil, el futuro profesor debería conocer las variables que afectan a la dificultad de este tipo de problemas. Nos basamos en las investigaciones que documentan la dificultad de los niños en reconocer la necesidad de utilizar un pensamiento multiplicativo que

permita abordar con éxito el razonamiento proporcional (Fernández, 2001) para identificar las siguientes variables que afectan a la dificultad de este tipo de problemas.

*Tipo de números.* La dificultad del problema depende del tipo de números implicados en el problema. En particular, se considera que los problemas que incluyen únicamente números enteros son más fáciles. El tamaño de los números también puede influir en la dificultad del problema.

*Relación entre las cantidades.* Son más fáciles aquellos problemas en los que la relación de proporcionalidad entre las magnitudes está vinculada a la mitad o al doble, así como aquellos problemas donde se puede hallar fácilmente el valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido.

*Contexto.* Se considera que los problemas cuyo contexto es cercano al entorno escolar o familiar son más fáciles.

*Conceptos adicionales que intervienen en el problema.* Este sería el caso de que, en el problema, aparezcan, por ejemplo, diferentes unidades de medida, lo que aumentaría la dificultad del problema.

#### *Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección*

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que resumimos en la tabla 3.3.

Tabla 3.3. Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

Correcta
Un problema diferente del mismo tipo (mismos procesos/operaciones) pero más fácil de resolver.
<i>Ejemplos</i>
Una máquina consume 3 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas?
Un coche consume 2,4 litros de combustible cada 50 km. ¿Cuántos litros de combustible consumirá el coche en 100 km?

Incorrecta

Un problema diferente del mismo tipo (mismos procesos/operaciones) pero más difícil de resolver.

*Ejemplos*

Una máquina consume 2 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas? (2 no es divisible por 3)

Un grifo gotea 2 litros de agua al día. ¿Cuántos ml gotea por segundo? (el conocimiento métrico y computacional requerido es significativamente más alto)

Otras incorrectas

Incluye soluciones tachadas, borradas, ilegibles, etc.

*Ejemplo*

Cuestiones que no sean significativas o que no tengan respuesta

En blanco

Nos basamos en el análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

*Conocimiento necesario para responder correctamente la pregunta*

Con la información que nos da la guía de corrección, comprobamos que se considera que un problema de proporcionalidad directa es más fácil si, por una parte, no aparecen números decimales, o, si aparecen, el problema se puede resolver gracias a que la relación entre las magnitudes está vinculada a una relación más sencilla, como mitad o doble; o por otra parte, se puede encontrar fácilmente el valor correspondiente a la unidad y, a partir de él, hallar el valor desconocido.

Podemos afirmar que los futuros profesores contestan correctamente a esta pregunta:

- cuando reconocen que se trata de un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes; y
- si son capaces de identificar las variables que afectan a la dificultad del problema y proponer uno más fácil.

No consideramos que en este problema haya otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente y no los tenemos en cuenta en nuestro análisis.

*Conocimiento puesto en juego en las respuestas incorrectas*

Se consideran incorrectos aquellos enunciados que, aun siendo de proporcionalidad directa entre magnitudes y con método de solución igual que el propuesto, sean más difíciles de resolver. En este caso los futuros profesores no habrían reconocido los elementos que afectan a la dificultad del problema.

*Conocimiento puesto en juego en las respuestas clasificadas como “otras incorrectas”*

Se consideran también problemas incorrectos, aunque se clasifican de forma distinta a los anteriores, aquellos problemas que no sean significativos porque no se trabaje el concepto de proporcionalidad directa entre magnitudes o bien que no tengan respuesta. A los futuros profesores cuyas respuestas se puedan clasificar dentro de esta categoría les falta conocimiento matemático para reconocer el problema propuesto como un problema de proporcionalidad directa y plantear a continuación otro similar.

También entran dentro de esta categoría las respuestas ilegibles, si bien, no hacemos conjeturas sobre los conocimientos de los futuros profesores que contestaron de esta forma.

*Conocimiento manifestado por los futuros profesores españoles*

En la tabla 3.4, presentamos resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior. En la primera columna de la tabla 3.4 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpretamos estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 3.4. Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

%	Respuesta	Conocimiento sobre el contenido matemático y sobre el contenido didáctico
59%	Correcta	Reconoció el problema de proporcionalidad directa Identificó las variables que afectan a su dificultad Planteó un problema más fácil
20,8 %	Incorrecta	Reconoció que el problema es de proporcionalidad directa No identificó las variables que afectan a su dificultad
11,4 %	Otras incorrectas o ilegibles	No reconoció que el problema es de proporcionalidad directa o, en el caso de las respuestas ilegibles, no es posible determinar qué conocimientos pusieron en juego
8,2 %	En blanco	
0,6 %	No llegó a abordar la pregunta	

*Interpretación de los resultados*

Los resultados de la tabla 3.4 indican que el 79,8% de los futuros profesores tenía conocimiento matemático suficiente para reconocer problemas de proporcionalidad directa entre magnitudes como el planteado en el enunciado. No obstante, de estos, solo un 59% tenía conocimiento didáctico suficiente para identificar las variables que afectan a la dificultad de este tipo de problemas y proponer problemas más fáciles y adecuados a los alumnos de primaria. Propusieron problemas en los que la relación entre las cantidades era doble o mitad, o bien plantearon problemas que se resolvían mediante la búsqueda del valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido. No recurrieron a la clásica regla de tres como procedimiento de resolución de problemas de proporcionalidad directa.



### 3.7 RESULTADOS ESPAÑOLES PARA EL SUBDOMINIO DE NÚMEROS

Presentamos los resultados que los futuros profesores españoles obtuvieron en el estudio TEDS-M en el subdominio de números desde las siguientes dos perspectivas.

- Presentando los porcentajes de futuros profesores que contestaron correctamente a las preguntas y, por tanto, describiendo el conocimiento matemático junto con el conocimiento didáctico que pusieron en juego con base en el análisis de contenido que hicimos de cada pregunta.
- Presentando los porcentajes de los futuros profesores que no contestaron de forma correcta, atendiendo al conocimiento parcial, tanto matemático como didáctico, que manifestaron y a los errores en los que pudieron incurrir con base en el análisis conceptual que hicimos de cada pregunta.

#### 3.7.1 Porcentajes de futuros profesores que contestaron correctamente a las preguntas

En la tabla 3.5 presentamos el resumen de los resultados de los futuros profesores españoles que respondieron correctamente las distintas preguntas. En la caracterización de los conocimientos que se ponen en juego, distinguimos entre el conocimiento del contenido matemático —columnas a la derecha de la tabla— y el conocimiento didáctico del contenido manifestado por los futuros profesores al responder de forma correcta —columnas a la izquierda—. El conocimiento didáctico del contenido se concreta en las cuatro categorías que establecimos en el marco conceptual. El conocimiento del contenido matemático se concreta atendiendo al porcentaje de futuros profesores que muestran conocimiento matemático suficiente para abordar cada pregunta y que se describe en la columna de la derecha. Los datos surgen del análisis de contenido que hicimos de cada pregunta y de los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles en el estudio.

Tabla 3.5. Resumen del análisis de las respuestas correctas

Conocimiento didáctico del contenido				Conocimiento del contenido matemático	
RE	DIF	REP	CPM	PC	Descripción
<b>1. Problemas aritméticos</b>					
80,4%					
<b>2. Proporcionalidad directa</b>					
59%					
79,8%					
Reconoció los problemas de proporcionalidad directa y supo resolverlos					
<b>3. Operaciones con números decimales</b>					
22,1%					
<b>4. Representación de números decimales</b>					
10,9%					
<b>5. Ordenar fracciones</b>					
43,1%					
33,3%					
Ordenó fracciones con igual numerador reduciendo a "común denominador"					
33,3%					
Comparó fracciones con igual numerador sin necesidad de reducir a "común denominador"					
<b>6. Significado gráfico de la división de fracciones</b>					
39%					
<b>7. Operaciones con números mixtos</b>					
12,6%					
12,6%					
Conocía los números mixtos y las operaciones con ellos					
<b>8. Algoritmos de la resta</b>					
30,6%					
95,5%					
Conocía la estructura del sistema de numeración decimal y su aplicación para la resta					
30,6%					
Dominio de la resta y sus propiedades					

Nota: PC = porcentaje.

### 3.7.2 Interpretación de los resultados de las respuestas correctas

Los resultados de la tabla 3.5 sugieren que los futuros profesores españoles de primaria que participaron en el estudio manifestaron diferentes niveles de conocimiento didáctico del contenido, dependiendo en gran medida del tipo específico de conocimiento matemático que pusieron en juego para poder contestar correctamente. En las preguntas 1, 3, 4 y 6 no se aprecian carencias específicas del mismo y por ello aparecen en blanco. A continuación, interpretamos la tabla 3.5 atendiendo a las categorías del marco conceptual.

#### *Distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema*

Un porcentaje importante de los futuros profesores españoles manifestó capacidad para distinguir los elementos que caracterizan la dificultad de los problemas. Esto se constata en los datos de las preguntas 1 y 2. El 80,4% de los futuros profesores españoles fue capaz de identificar las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación. Estos resultados complementan los obtenidos por Rosales, Orrantia, Vicente y Chamoso (2008) y sugieren que estos futuros profesores estaban en condiciones de elegir problemas aritméticos adecuados para alumnos de este curso y reconocer también posibles dificultades con las que estos alumnos podrían encontrarse al enfrentarse a un determinado problema aritmético.

#### *Reconocer los errores o las concepciones erróneas de los alumnos*

Según los datos de las preguntas 3 y 7 observamos que menos del 25% de los futuros profesores españoles fue capaz de reconocer errores en los que incurren los alumnos. En este caso el conocimiento didáctico utilizado es pobre y limitado. Para las operaciones con números mixtos, los resultados pueden deberse a un deficiente conocimiento matemático de los números mixtos y de las operaciones con ellos (solo un 12,6% de los futuros profesores fue capaz de reconocer el error operacional en el que incurre un alumno al restar dos números mixtos). Este no es necesariamente el caso de las operaciones con números decimales, donde solo un 22,1% reconoció el error en el que incurre el alumno. Matizaremos esta interpre-

tación en el siguiente apartado, cuando estudiemos las respuestas parcialmente correctas e incorrectas.

*Representar gráficamente los conceptos y procedimientos matemáticos para su enseñanza*

Los datos de las preguntas 4 y 6 muestran que hubo una proporción reducida de futuros profesores españoles capaz de utilizar representaciones concretas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Solo un 10,9% de ellos manifestó conocer alguna representación gráfica del producto de los números decimales para su aplicación en la enseñanza. Este 10,9% de futuros profesores (a) supo representar gráficamente los números decimales bien como sub-áreas de una región que se toma como unidad o bien como puntos sobre un segmento —la recta numérica—; (b) supo representar el producto de un número decimal por un entero; y (c) fue capaz de utilizar las representaciones concretas mencionadas en los apartados (b) y (c) para apoyar la enseñanza y el aprendizaje.

Por otro lado, el 39,2% de los futuros profesores españoles manifestó conocer: (a) los modelos de fracciones (continuos y discretos); (b) el significado de fracción como partes de un todo; y (c) el significado de la operación división de fracciones.

*Conocimiento del contenido matemático de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje*

Los resultados de las preguntas 5 y 7 muestran que para ordenar fracciones sencillas de igual numerador, el 33,3% de los futuros profesores españoles manifestó saber que, entre dos fracciones con igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador; mientras que el 43,1% de ellos no reconoció esta estrategia y usó la reducción a común denominador para resolver el problema.

Con respecto a los algoritmos de la resta, solo el 30,6% de los futuros profesores españoles tenía el suficiente conocimiento matemático y didáctico para establecer si una determinada estrategia tenía sentido, si siempre iba a funcionar y por

tanto, si podía ser generalizada, o, lo que es lo mismo, si una determinada estrategia era un algoritmo de la resta. No obstante, el 95,5% de futuros profesores manifestó dominar la estructura del sistema de numeración decimal y reconoció la equivalencia entre restar un número a otro y restar sucesivamente al primero la descomposición del segundo.

### **3.7.3 Porcentajes de futuros profesores que contestaron de forma parcialmente correcta o incorrecta**

La información que presentamos en la tabla 3.6 complementa la de la tabla 3.5 y caracteriza el conocimiento parcial de los futuros profesores españoles. El porcentaje de futuros profesores que contestaron de forma parcialmente correcta y de forma incorrecta aparece en la primera y segunda columnas, respectivamente. Incluimos dentro de las respuestas incorrectas las respuestas en blanco o ilegibles. Identificamos si el conocimiento parcial manifestado por los futuros profesores es didáctico o matemático en la tercera y cuarta columnas, respectivamente. Incluimos en la quinta columna una descripción de los conocimientos considerados, derivados del análisis de contenido que hicimos a cada pregunta.

La descripción del conocimiento parcial de los futuros profesores españoles es más fácil de realizar en las preguntas de respuesta abierta, puesto que estas preguntas permiten a los encuestados elaborar una respuesta, mostrando así la profundidad de su conocimiento de las matemáticas escolares y sobre su enseñanza.

Los datos de la tabla muestran que los futuros profesores españoles pusieron de manifiesto carencias importantes en su conocimiento didáctico sobre la representación de los números decimales y su aplicación en la enseñanza. De la misma forma es también alto el porcentaje de futuros profesores que no fue capaz de reconocer el error en el que incurre el alumno al operar con números decimales y el porcentaje de futuros profesores que contestó de forma ilegible o en blanco o no llegó a abordar esta pregunta. Sin embargo destaca el hecho de que solamente un 1,2% de los futuros profesores españoles respondió incorrectamente la pregunta sobre problemas aritméticos. La mayoría (15,5%) de aquellos futuros profesores

que respondió de manera parcialmente correcta a esta pregunta manifestó no reconocer la dificultad inherente de la multiplicación en ese tipo de problemas para los alumnos de primero de primaria, aunque sí reconoció la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido.

Con respecto al conocimiento matemático encontramos que hay tres temas del subdominio de números en los que los futuros profesores españoles manifiestan carencias: al operar con números mixtos; al reconocer algoritmos de la resta o propiedades de la sustracción que permiten determinar si una estrategia es un algoritmo o no; y al ordenar fracciones sencillas con igual numerador sin reducir a común denominador, o al reconocer que ciertas afirmaciones sobre las fracciones no se pueden generalizar.

Tabla 3.6. Conocimiento parcial del contenido matemático escolar y didáctico del contenido

Porcentajes		Con.		Descripción
P.C.	Inc.	D.	M.	
<b>1. Problemas aritméticos</b>				
15,5%		✓		No reconoció la dificultad de la multiplicación para primero de primaria
2,9%		✓		No reconoció la dificultad de los problemas de cambio disminuyendo con comienzo desconocido para primero de primaria
	1,2%	✓		No distinguió las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación
<b>2. Proporcionalidad directa</b>				
	20,8%	✓	✓	Reconoció los problema de proporcionalidad directa No identificó las variables que afectan a la dificultad de los problemas No planteó un problema más fácil
	11,4%		✓	No reconoció los problema de proporcionalidad directa o en el caso de las respuestas ilegibles, no es posible determinar qué conocimientos puso en juego
	8,8%			En blanco o no llegó a abordar la pregunta

Porcentajes		Con.	Descripción
P.C.	Inc.	D. M.	
<b>3. Operaciones con decimales</b>			
7%		✓	Reconoció solo parte del error en el que incurre el alumno
0,7%		✓	Expresó otro error didáctico frecuente en operaciones con decimales
35,5%		✓	No reconoció el error en el que incurre el alumno
34,7%			Ilegible, en blanco o no llegó a abordar la pregunta
<b>4. Representación de números decimales</b>			
17,4%		✓	Conocía la representación gráfica de un número decimal pero no la representación gráfica del producto de los números decimales y/o utilizó algún otro tipo de representación para explicarlo
6,8%		✓	No conocía la representación de los números decimales ni la representación gráfica del producto de los números decimales
65,3%			Ilegible, en blanco o no llegó a abordar la pregunta
<b>5. Ordenar fracciones</b>			
43,1%		✓	Ordenó fracciones de igual numerador haciendo común denominador
20,6%		✓	Consideró como ciertas propiedades de las fracciones que no se pueden generalizar
3%			En blanco o no llegó a abordar la pregunta
<b>6. Significado gráfico de la división de fracciones</b>			
60,8%		✓	No conocía el significado de la operación división de fracciones y/o no conocía los modelos de fracciones discretos o continuos
<b>7. Operaciones con números mixtos</b>			
74,7%		✓	No sabía operar con números mixtos
12,8%			En blanco o no llegó a abordar la pregunta
<b>8. Algoritmos de la resta</b>			
21,9%		✓	No reconoció los algoritmos de la resta que están basados en recorrer el camino de un número a otro.
19,8%		✓	No reconoció los algoritmos que utilizan la propiedad de sumar o restar el mismo número al minuendo y al sustraendo
23,2%		✓	No reconoció los algoritmo de la resta en el que se recorre el camino del sustraendo al minuendo
4,5%			En blanco o no llegó a abordar la pregunta

*Nota:* Con. = conocimiento; P.C. = parcialmente correctas; Inc. = incorrectas; D. = didáctico; M. = matemático

### 3.8 CONCLUSIONES

Dada la solidez del diseño muestral del estudio TEDS-M los resultados obtenidos nos permiten caracterizar el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores españoles que en 2008 se encontraban terminando su formación inicial de la siguiente manera. Estos estudiantes de Magisterio (a) eran capaces de reconocer las variables que afectan a la dificultad de los problemas aritméticos que se resuelven con una sola operación y de los problemas de proporcionalidad directa; (b) carecían del conocimiento matemático suficiente para operar con números mixtos, reconocer distintos algoritmos de la resta y ordenar fracciones con igual numerador sin calcular un denominador común, hecho que les impidió abordar cuestiones didácticas relacionadas con estos temas; y (c) manifestaban deficiencias importantes en su capacidad para diagnosticar los errores en los que incurren los alumnos —en operaciones con números mixtos y decimales—, para representar gráficamente los conceptos y procedimientos matemáticos como instrumento útil para su aplicación en la enseñanza y en el aprendizaje —en operaciones con números decimales y en el significado de la división de fracciones—, y para reflexionar sobre el contenido de las matemáticas escolares y su aplicación a la enseñanza —al ordenar fracciones y al analizar los algoritmos de la resta—.

Este trabajo, como estudio secundario de los resultados del estudio TEDS-M, contribuye a uno de sus objetivos: profundizar en los conocimientos de los futuros profesores en uno de sus tipos —el conocimiento didáctico— y en uno de sus subdominios —números—.

Al mismo tiempo, para este trabajo y a partir de la información disponible, hemos diseñado una estrategia con la que hemos caracterizado el conocimiento didáctico de los futuros profesores españoles para el subdominio de números y que es posible extender a otros subdominios—geometría, álgebra y análisis de datos— del estudio TEDS-M. De esta forma, será posible describir y caracterizar el conocimiento didáctico del contenido manifestado por los futuros profesores españoles.



Aunque este estudio se centra en el conocimiento didáctico del contenido matemático escolar manifestado por los futuros profesores españoles que seguían el programa de formación previo a la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior, sus resultados pueden ser de utilidad en el proceso de diseño e implementación de las nuevas asignaturas del grado de Maestro de Primaria. Este estudio destaca carencias en el conocimiento didáctico de dichos contenidos de los futuros profesores españoles, que es necesario corregir en los nuevos programas. Por ello, el conocimiento de estos datos y resultados, junto con su ampliación al conjunto de subdominios de conocimiento didáctico que propone TEDS-M, proporcionará información de interés sobre el conocimiento didáctico del contenido matemático escolar en que es necesario incidir en los nuevos programas.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto *Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación*, EDU2012-33030 del MEC. Sus resultados forman parte de la tesis doctoral titulada: *Estudio TEDS-M en España: evaluación de la formación inicial del profesorado de primaria en matemáticas*, que lleva a cabo A. Gutiérrez-Gutiérrez, bajo la dirección de los doctores L. Rico y P. Gómez.

#### REFERENCIAS

- Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). Westport: Ablex.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180.

- Blömeke, S., Kaiser, G. y Lehmann, R. (2010). *TEDS-M 2008*. Munich: Waxmann Verlag.
- Fernández, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.
- Gutiérrez, A. (2012). *Conocimiento didáctico sobre números y operaciones de los estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M*. Trabajo Fin de Máster no publicado, Universidad de Granada, España. Recuperado el 1 de julio de 2013, de:  
<http://funes.uniandes.edu.co/1921/>.
- INEE (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor.
- Hill, H., Schilling, S. y Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105(1), 11–30.
- Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Rosales, J., Orrantía, J., Vicente, S., y Chamoso, J. (2008). La resolución de problemas aritméticos en el aula. ¿Qué hacen los profesores cuando trabajan conjuntamente con sus alumnos? *Cultura y Educación*. 20(4), 423-439.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Schmidt, W., Tatto, M., Bankov, K., Blömeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., . . . Hsieh, F. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries*. East Lansing: Michigan State University.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study In Mathematics (TEDS-M)*:

*Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L. y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam, The Netherlands: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).



## CAPÍTULO 4

# ARTÍCULO 3.

**Referencia:** Gutiérrez-Gutiérrez, A., Rico, L., Gómez, P., (2015). Conocimiento didáctico sobre números y operaciones: una comparación internacional. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 13(1), 47-72

Disponible en: <http://bit.ly/1NGAxSi>

## RESUMEN

**Introducción.** En este trabajo presentamos los resultados de comparar el conocimiento didáctico sobre números y operaciones manifestado por los profesores de primaria españoles en formación en el estudio TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) con el conocimiento manifestado, tanto por los futuros profesores de los países de la OCDE que participaron en el estudio —Noruega, Alemania, Chile, España y Polonia—, como por los futuros profesores de los países participantes receptores de un programa de formación inicial similar al de España —China-Taipéi, Singapur, Estados Unidos, Filipinas y Suiza—.

**Método.** Para lograr el objetivo propuesto analizamos los datos y calculamos los parámetros con base en categorías que caracterizan el conocimiento didáctico requerido para responder correctamente las preguntas de este dominio conceptual y a partir de criterios de valoración de las respuestas de los futuros profesores.

**Resultados.** Encontramos que los futuros maestros presentan, en general, resultados inferiores al del resto de países de la OCDE y al de los países de su grupo de programa de formación. Los resultados españoles son inferiores en todos los as-

pectos considerados a los resultados de Noruega, Suiza y Singapur. Para la mayoría de las categorías, los resultados españoles son superiores a Filipinas y Chile y próximos a los de EE.UU.

**Discusión.** Si comparamos los resultados de los países de la OCDE que han participado en los dos estudios internacionales, TEDS-M y TIMSS 2011, —España, Polonia, Estados Unidos, Noruega, Alemania y Chile— podemos comprobar que se conserva la posición relativa de los países en el ranking de rendimientos tanto de profesores en formación como de alumnos de primaria cuando se evalúa su conocimiento matemático sobre números y operaciones. Los resultados españoles en TIMSS son solo superiores a Polonia y Chile e inferiores al resto. Los resultados obtenidos en este trabajo pueden ser de utilidad en el proceso actual de diseño de las asignaturas de Grado de Maestro de Primaria.

## 4.1 INTRODUCCIÓN

El interés por indagar acerca de la formación inicial en matemáticas de los profesores de primaria en España —maestros, como se les denomina habitualmente— cobra actualidad al producirse la publicación de los informes de evaluaciones internacionales y de los resultados españoles, junto con sus correspondientes estudios secundarios, como son los estudios sobre PISA 2012 (*Program for International Student Assessment*) (OCDE, 2013; INEE, 2013a; INEE, 2013b), sobre TIMSS 2011 (*Trends in Mathematics and Science Study*) (Martin, M.O. y Mullis, I.V.S., 2013; INEE, 2012a; INEE, 2012b) y TEDS-M 2008 (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012; INEE, 2012c; INEE, 2012d). Estos estudios coinciden y dan continuidad al interés de las administraciones educativas españolas manifestado en los últimos años con la reforma de los planes de formación inicial de maestros de educación Primaria (ANECA, 2005; MEC, 2007a). Los estudios mencionados muestran una atención sostenida hacia la evaluación educativa, lo que se ha llamado la *cultura evaluativa*, que implica conocer los puntos fuertes y débiles de la

formación matemática de los escolares y de la formación matemática y didáctica de sus profesores en España, así como su comparación con la de otros países.

El objetivo de este trabajo es describir y caracterizar el conocimiento didáctico sobre números y operaciones manifestado por los estudiantes de Magisterio en el estudio TEDS-M y compararlo con el manifestado por los futuros profesores de algunos de los otros países participantes en ese estudio. En concreto, nos centraremos en comparar los resultados españoles con los resultados de aquellos países participantes en TEDS-M que tienen un programa de formación inicial similar al de España, así como con los resultados de los países de la OCDE que también participaron en TEDS-M y que habitualmente son considerados próximos a nuestro entorno socioeconómico y cultural. Para ello, comenzaremos describiendo el estudio TEDS-M y la pertinencia de profundizar en los resultados internacionales del dominio conceptual de números y operaciones. A continuación, describiremos la caracterización y evaluación del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas escolares realizada por TEDS-M, con el propósito de describir y caracterizar los conocimientos manifestados por los futuros profesores en el dominio de números y operaciones. Presentaremos los resultados internacionales sobre el conocimiento didáctico y lo interpretaremos, realizando las oportunas comparaciones. Concluirémos mostrando la relevancia de los resultados obtenidos para el diseño actual de las asignaturas del Grado de Maestro de Primaria.

#### **4.1.1 El estudio TEDS-M**

El estudio TEDS-M se llevó a cabo durante los años 2006-2010 y participaron 17 países. La publicación del informe internacional tuvo lugar en el año 2012 (Tatto et al., 2012). Este estudio respondía al interés internacional por la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas de educación obligatoria tanto de primaria como de secundaria. Fue patrocinado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, por sus siglas en inglés) y se basaba en el supuesto de que un factor importante que puede explicar las diferencias en las capacidades, conocimientos y actitudes de los alumnos de primaria y

secundaria obligatoria manifestadas en estudios internacionales (como PISA o TIMSS) tiene que ver con la variedad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas (Tatto et al., 2012).

España participó en este estudio para, entre otros objetivos, evaluar la formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica y obtener información que permitiera caracterizar el conocimiento matemático y didáctico con el que los futuros maestros terminaban sus estudios. La coordinación global del estudio TEDS-M en España correspondió a la Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional del Ministerio de Educación a través del Instituto de Evaluación. La coordinación nacional de la investigación estuvo a cargo del profesor Luis Rico, de la Universidad de Granada (INEE, 2012c, p. 131).

Dada la diversidad de programas de formación, y para facilitar las comparaciones internacionales, el equipo de TEDS-M estableció rasgos distintivos con los que identificar los programas de formación inicial de profesores de primaria de los países participantes, dando como resultado una clasificación en cuatro grupos. España quedó incluida en el grupo 2, junto con China-Taipéi, Singapur, Suiza, Estados Unidos y Filipinas, países que coinciden en impartir programas generalistas y preparar a los futuros profesores para dar clase a alumnos de hasta 12 años (INEE, 2012c, p. 24).

Las implicaciones del estudio TEDS-M se manifiestan en los diversos estudios secundarios que se están realizando. Algunos de los aspectos relacionados con la formación inicial de profesores de primaria que abordan estos estudios son los siguientes: la relación entre las calificaciones obtenidas en el instituto y los resultados obtenidos en el estudio TEDS-M (Montalvo y Gorgels, 2013); la influencia de las universidades en los resultados de los futuros profesores, mediante un estudio comparativo entre España y Estados Unidos (Cebolla-Boado y Garrido-Medina, 2013); la situación del Prácticum en España en la formación del profesorado (Egido y López, 2013); las creencias de los futuros profesores acerca de la naturaleza de las matemáticas (Felbrich, Kaiser y Schmotz, 2012), etc. Tam-



bién, comienzan a publicarse estudios sobre los conocimientos matemáticos y didácticos manifestados en TEDS-M; estos estudios realizan comparativas internacionales a partir de los resultados. Es el caso, por ejemplo, del estudio de Blömeke, Suhl y Döhrmann (2013), quienes tratan de buscar relaciones entre programas de formación y las preguntas respondidas correctamente. En esta última línea de investigación se encuadra nuestro trabajo.

#### **4.1.2 Elección del dominio conceptual números y operaciones**

La elección del dominio conceptual de números y operaciones para este estudio está motivada por diversas razones. Por una parte, su elección se debe a la importancia de la alfabetización numérica a nivel internacional, que en la actualidad se aprecia en diversas investigaciones (p.ej., Hardy, 2014). Para el caso español, esta importancia se manifiesta en el currículo español de primaria, donde el bloque de contenidos de números y operaciones forma parte de los tres ciclos de primaria.

En la educación primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito (MEC, 2007*b*, p. 31555).

Los contenidos del bloque de números se contemplan, además, en todas las instituciones españolas de formación inicial de maestros, y sus apartados forman parte del currículo común de esas instituciones (Rico, Gómez y Cañadas, 2014).

Por otra parte, los resultados españoles sobre el conocimiento matemático y didáctico de las matemáticas escolares que presentó el informe internacional de TEDS-M (Tatto et al., 2012, p. 143), al igual que los que presenta el informe nacional (INEE, 2012*c*, p. 85), son globales. Estos resultados indican únicamente el resultado conjunto obtenido por los futuros profesores españoles en el conocimiento matemático (481) y didáctico del contenido (492) sobre una media inter-

nacional de 500. Estas razones y argumentos incrementan la necesidad de describir y caracterizar el conocimiento que tienen los futuros profesores de primaria españoles sobre números y su enseñanza, y ubicarlo a nivel internacional.

#### **4.1.3 Conocimiento didáctico sobre números y operaciones**

El estudio TEDS-M, siguiendo las ideas de Shulman (1987), consideró que el conocimiento matemático para la enseñanza tiene dos componentes —el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático— y diseñó un cuestionario que evaluaba por separado el dominio de los profesores en formación sobre ambos tipos de conocimientos. Al mismo tiempo, basándose en el marco conceptual de TIMSS 2007, TEDS-M organizó las preguntas según cuatro dominios conceptuales: números y operaciones, geometría y medida, álgebra y funciones, y datos y azar (Mullis, Martin, Ruddock, O’Sullivan, Arora, y Erberber, 2007).

El estudio TEDS-M evaluó el conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares de los futuros profesores de primaria con base en 22 preguntas que interrogan sobre cómo abordar diversas tareas y problemas matemáticos escolares. Algunas de las preguntas del cuestionario provenían de estudios como *Learning Mathematics for Teaching Projects* (Hill y Ball, 2004) y *Mathematics Teaching for the 21st Century Project* (Schmidt, Blömeke y Tatto, 2011). El resto de las preguntas fueron elaboradas por el equipo de TEDS-M.

Este estudio se centra en las 8 preguntas que evalúan el conocimiento didáctico del contenido matemático de números y operaciones. En trabajos previos, concluimos que “TEDS-M no presenta una estructura de categorías propia y completa que permita establecer el conocimiento didáctico del contenido matemático de cada pregunta” (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2014, p. 283), por lo que seleccionamos un conjunto de categorías con las que caracterizamos el conocimiento didáctico requerido para responder correctamente las preguntas de este dominio conceptual. Las categorías, que se presentan a continuación, surgen del análisis de

los enunciados de las preguntas y de sus guías de corrección y derivan de las establecidas en el método del análisis didáctico (Rico, 2013).

- Identificar y distinguir variables que afectan a la dificultad de un problema (DIF).
- Reconocer y describir los errores en los que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado (RE).
- Representar alternativamente conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza (REP).
- Reconocer aquellos conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos (CPM).

Las dos primeras categorías se refieren al conocimiento que el futuro profesor puede manifestar sobre limitaciones en el aprendizaje de los escolares —las dificultades relacionadas con el conocimiento matemático o los errores en que pueden incurrir al abordar tareas matemáticas—. Las otras dos categorías hacen referencia al conocimiento de un contenido matemático escolar y aluden a sus representaciones y a la estructura conceptual de ese contenido

## 4.2 MÉTODO

Como se ha dicho, el objetivo de este estudio es describir y caracterizar el conocimiento didáctico sobre números y operaciones manifestado por los futuros profesores de primaria españoles que participaron en el estudio TEDS-M y compararlo por una parte con el conocimiento manifestado por los futuros profesores de los países de la OCDE que intervinieron en el estudio —Noruega, Alemania, Chile y Polonia— y, por otra, con el manifestado por los futuros profesores de los países participantes pertenecientes al mismo grupo que España —China-Taipéi, Singapur, Estados Unidos, Filipinas y Suiza— denominado grupo 2. Se trata, por tanto,

de una investigación comparativa, a partir de los datos procedentes del cuestionario del estudio TEDS-M.

#### **4.2.1 Participantes**

El trabajo de campo siguió el diseño establecido por TEDS-M (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008). En cada país, se seleccionaron muestras representativas de las instituciones que ofrecían formación a la población diana de futuros profesores que se estaban preparando para enseñar matemáticas en primaria y que se encontraban en su último año de formación. Esta selección se hizo aplicando un muestreo con probabilidad proporcional al tamaño de la institución, definido tal tamaño en términos del número de estudiantes para profesor de primaria que cursaban último curso en el año 2008. En cada institución, se seleccionó una muestra aleatoria de 30 futuros profesores —o la población completa si su tamaño era inferior a 30—. Participaron un total de 483 instituciones con sus respectivos programas de formación y 13871 futuros profesores de primaria de matemáticas de dichas instituciones (Tatto et al., 2012).

La muestra de instituciones españolas estuvo compuesta por 50 de un total de 73 instituciones que ofrecían formación inicial a futuros maestros de primaria. Dos de ellas declinaron la invitación a participar. Un total de 1093 futuros maestros españoles, que seguían el programa de formación establecido por el Real Decreto 1440/1991 (MEC, 1991) anterior al actual título de Grado, respondieron el cuestionario (INEE, 2012c).

#### **4.2.2 Fuentes de información**

Este estudio se basa en la información proporcionada por el cuestionario de TEDS-M, las guías de corrección diseñadas para la corrección de las preguntas de respuesta abierta y las respuestas de los futuros profesores participantes a dicho cuestionario.

### 4.2.3 Procedimiento

Para lograr el objetivo propuesto, seguimos un procedimiento compuesto de tres pasos:

- selección, análisis y clasificación de las preguntas del dominio de números y operaciones;
- establecimiento de criterios de valoración de las respuestas de los futuros profesores y cálculo de parámetros;
- resumen de los datos en términos de medias y comparación de dichas medias.

Descripción de cada uno de los pasos:

#### *Selección, análisis y clasificación de las preguntas del dominio de números y operaciones*

En trabajos previos, presentamos el proceso de identificación, análisis y clasificación de las preguntas (Gutiérrez, 2012; Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, 2014). El resultado de ese proceso se muestra en la tabla 4.1 que incluye las 8 preguntas con las que se evaluó el conocimiento didáctico del contenido para números y operaciones en el estudio TEDS-M. En ella indicamos, para cada pregunta, su contenido matemático concreto, el conocimiento didáctico específico que se requiere para contestarla correctamente —identificado por las categorías establecidas— y el tipo de respuesta. Como es habitual en este tipo de estudios, las preguntas del cuestionario son de respuesta múltiple —en el caso del dominio de números y operaciones se proporcionaban en cada pregunta 4 opciones de respuesta de las cuales solo una era correcta—; de respuesta múltiple compuesta —cada opción de respuesta del problema (4) se presenta como un apartado con otras dos opciones de respuesta—; o de respuesta abierta. Para estas últimas, el estudio TEDS-M diseñó las guías de corrección correspondientes y su procedimiento de codificación.

Tabla 4.1. Preguntas de conocimiento didáctico sobre números y operaciones

Número de pregunta	Contenido matemático	Conocimiento didáctico	Tipo de Respuesta
1	Problemas aritméticos	DIF	Abierta
2	Proporcionalidad directa entre magnitudes	DIF	Abierta
3	Operaciones con números decimales	RE	Abierta
4	Representación de números decimales	REP	Abierta
5	Orden de fracciones	CPM	Múltiple
6	Interpretación gráfica de la división de fracciones	REP	Múltiple compuesta
7	Operaciones con números mixtos	RE	Múltiple
8	Algoritmos de la resta	CPM	Múltiple

Fuente: Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (2014, p. 284)

Mostramos a continuación, en la figura 4.1, un ejemplo de ítem liberado del cuestionario TEDS-M sobre el conocimiento didáctico de las operaciones con números decimales. Dicho ítem se compone de dos apartados que se clasifican y corrigen de forma independiente. Según la clasificación que hemos hecho de las preguntas, el apartado (a) lo identificamos como la pregunta 3 y el apartado (b) como la pregunta 4.

Sucintamente presentaremos a continuación los conocimientos que debían manifestar los futuros profesores para contestar correctamente cada uno de los apartados según las guías de corrección. Propondremos algunos ejemplos donde se muestre la presencia del conocimiento evaluado en la literatura de formación inicial de profesores, singularmente mediante algunos documentos españoles. Por último, sintetizaremos el conocimiento didáctico del contenido matemático evaluado mediante este ítem.

[Jeremy] se da cuenta de que cuando introduce  $0,2 \times 6$  en la calculadora el resultado es menor que 6, y que cuando introduce  $6 : 0,2$  tiene un resultado mayor que 6. Él está perplejo por esto, y le pide a su profesor ¡una nueva calculadora!

a) ¿Cuál es la concepción errónea más probable [de Jeremy]?

b) Haz una representación gráfica que el profesor podría usar como modelo para representar  $0,2 \times 6$  y ayudar a Jeremy a entender la respuesta a la pregunta 3.

Figura 4.1. Ítem sobre números decimales

El apartado (a) evalúa el conocimiento de los futuros profesores de primaria sobre las limitaciones en el aprendizaje de los escolares. La guía de corrección establece que, para contestarlo correctamente, basta que los futuros profesores, en sus respuestas, sugieran que la concepción errónea del alumno sea considerar que la multiplicación de números decimales siempre da un resultado mayor que los números propuestos, y que la división siempre da un resultado menor que el dividendo. La literatura sobre errores en los que incurren los escolares al operar con números decimales es amplia. Por ejemplo, Castro (2001) recoge la concepción errónea que se evalúa en este problema y que se refiere a que los niños consideren que “multiplicar es siempre aumentar y dividir es siempre disminuir. Esta concepción equivocada la mantienen los niños con números decimales positivos menores que la unidad” (p. 335).

El apartado (b) evalúa un aspecto del conocimiento didáctico de los futuros profesores sobre el contenido matemático. Se pide al futuro profesor que, de manera gráfica, represente el producto de  $0,2 \times 6$  de tal forma que el alumno pueda comprender el error conceptual sobre la multiplicación con números decimales en el que ha incurrido en el apartado anterior. Es decir, se evalúa el conocimiento del futuro profesor sobre la representación gráfica de los números decimales en gene-

ral y de la multiplicación de un número decimal entre 0 y 1 por un número natural en particular. La guía de corrección establece que para contestar correctamente a este apartado el futuro profesor debe saber que “Los números decimales proporcionan una ampliación del sistema decimal de numeración: con los números naturales se representan cantidades enteras; con los números decimales se expresan también las diferentes partes de la unidad” (Castro, 2001, p. 320). Mostramos en la figura 4.2 dos representaciones que se proponen como ejemplos de respuestas correctas tal y como aparecen en la guía de corrección. En estas guías de corrección no se contempla el uso implícito de la propiedad conmutativa del producto, cuando las representaciones mostradas corresponden al producto  $6 \times 0,2$  y no al producto  $0,2 \times 6$ .

En la primera de las figuras (Picture 1) el futuro profesor manifiesta reconocer la representación gráfica de los números decimales como sub-áreas de una región que se toma como unidad. En el caso del ejemplo, 0,2 se representa como  $2/10$ . En la segunda figura (Picture 2), el futuro profesor considera los decimales como puntos sobre la recta numérica. En ambas representaciones se identifica que  $0,2 \times 5$  corresponde a la unidad.

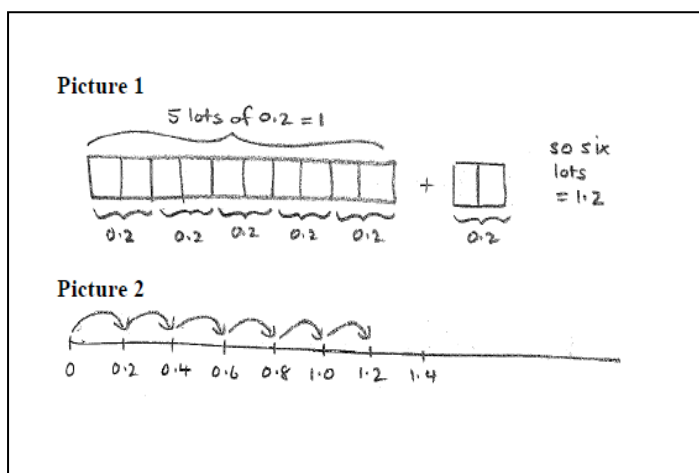


Figura 4.2. Ejemplos de respuestas correctas del apartado (b)

Fuente: Imagen original de la guía de corrección diseñada por TEDS-M



Ante esto, concluimos que para que un futuro profesor de primaria conteste correctamente el ítem propuesto en la figura 4.1 no le basta tener un conocimiento matemático de los números decimales y de las operaciones con ellos. Es además necesario que disponga de un conocimiento didáctico sobre la enseñanza de los números decimales, su representación gráfica, los errores más frecuentes en los que pueden incurrir los alumnos y la aplicación de las representaciones gráficas en la enseñanza. Los apartados (a) y (b) dan información del conocimiento didáctico de los futuros profesores sobre los números decimales, pero cada uno proporciona información sobre un aspecto concreto de ese conocimiento didáctico.

#### *Criterios de valoración de las respuestas de los futuros profesores*

Las respuestas de los participantes en el estudio fueron codificadas según la guía de puntuación desarrollada por TEDS-M (Tatto et al., 2008). El sistema de puntuación para cada pregunta de respuesta abierta es un código de dos dígitos. El primer dígito, un 2 o un 1, indica una respuesta correcta o parcialmente correcta respectivamente y también significa el valor con el que se califica la respuesta. Mientras que las respuestas incorrectas se identifican con un 7 como primer dígito. El segundo dígito se refiere a diferentes enfoques utilizados por los futuros profesores en sus respuestas.

En nuestro caso y de forma similar a como se hace en TEDS-M para calcular los resultados generales (Tatto et al., 2008, p. 42), valoramos las respuestas de los futuros profesores a cada pregunta atendiendo a los distintos tipos de respuesta.

- Si la pregunta es de respuesta múltiple asignamos el valor 1 si el futuro profesor contestó correctamente y 0 si contestó de forma incorrecta.
- Si la pregunta es de respuesta abierta asignamos el valor 1 si el futuro profesor contestó correctamente, 0 si contestó de forma incorrecta y 0,5 si contestó de forma parcialmente correcta. Consideramos en el último caso, a partir del análisis de las guías de corrección que realizaron Gutiérrez (2012) y Gutiérrez-Gutiérrez, Rico y Gómez (2014), que el conocimiento

manifestado en los distintos tipos de respuestas parcialmente correctas merece la misma puntuación.

- Si la pregunta es de respuesta múltiple compuesta asignamos el valor 1 si el futuro profesor contesta correctamente todas las opciones de respuesta, 0,5 si contesta correctamente todas menos una, y 0 para el resto de los casos. En Tatto et al. (2008, p. 76) se puede consultar un ejemplo del análisis de valoración para la corrección de una pregunta de este tipo.
- Las respuestas ilegibles, tachadas o en blanco se consideran valores perdidos.

#### *Resumen de los datos*

Los parámetros que utilizamos para realizar las comparaciones con respecto al conjunto de preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico de números y a cada una de las categorías del conocimiento didáctico establecidas, fueron los siguientes.

- La media y la desviación típica de cada uno de los países.
- La media y la desviación típica del total de países participantes en TEDS-M.
- La media y la desviación típica del conjunto de países participantes que forman parte de la OCDE.
- La media y la desviación típica del conjunto de países que forman parte del grupo 2.

Hacemos la presentación de estos parámetros mediante dos tablas. En la tabla 4.2 presentamos la media y la desviación típica de España —para el total de preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico de números y operaciones (CD), y para cada una de las categorías establecidas— con respecto a la media y la desviación típica del conjunto de países participantes y la media así como a la desviación

típica del conjunto de países pertenecientes a la OCDE —incluido España— que participaron en TEDS-M. En la tabla 4.3 presentamos la misma información española e internacional pero en este caso con respecto a la media y desviación típica de los países del grupo 2. En ambas señalamos los países que tienen resultados superiores e inferiores a España para el conjunto de preguntas consideradas y para cada una de las categorías del conocimiento didáctico establecidas. No hemos incluido en la tabla los países cuyas medias no son estadísticamente superiores o inferiores a la de España con un nivel de significación del 0,05 en cada caso considerado. En el caso de países con más de un programa de formación, identificamos el programa específico.

Presentamos en el anexo del documento, como ejemplo, las figuras 4.3, 4.4 y 4.5<sup>6</sup> en las que mostramos la media y la desviación típica de cada uno de los países participantes para el conjunto de preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico del dominio de números, así como para la categoría DIF y la categoría RE. En estas figuras, para cada país, se representa su correspondiente intervalo de confianza mediante un segmento dentro del cual se sitúa la puntuación media real con una confianza del 95 por ciento; la mayor o menor amplitud del intervalo depende del tamaño de la muestra y de la dispersión de los resultados. Y en cada una de las figuras se identifica, mediante una franja roja, la media internacional y una desviación típica alrededor de ella.

Estos y los demás resultados que aparecen en este trabajo deben leerse teniendo en cuenta las limitaciones de participación de Chile, Estados Unidos, Noruega, Rusia, Polonia y Suiza (INEE, 2012c, p. 136).

---

<sup>6</sup> Las dos figuras correspondientes a las categorías REP y CPM se pueden consultar en el anexo de la memoria.

Conocimiento didáctico. Una comparación internacional

Tabla 4.2. Resumen comparativo de los resultados de España y países de la OCDE

CAT	ESPAÑA		Internacional		PAÍSES DE LA OCDE			
	Me	E	Me	E	Me	E	Me Sup	Me Inf
CD	0,39	0,01	0,44	0,00	0,43	0,00	Noruega Suiza Alemania Polonia Esp	Polonia Gen
DIF	0,70	0,02	0,72	0,01	0,63	0,00	Noruega Suiza Alemania EE.UU. Polonia Gen	Polonia Esp
RE	0,23	0,02	0,31	0,01	0,37	0,01	Polonia Noruega Alemania Suiza	Chile
REP	0,24	0,02	0,30	0,01	0,31	0,01	Alemania Suiza Noruega Polonia EE.UU. Gen	Chile
CPM	0,33	0,01	0,36	0,01	0,35	0,01	Noruega+ Suiza Polonia Esp	Polonia Gen EE.UU. Gen Chile

Nota: CAT = categorías; Me: media; E: error típico; Inf = inferior; Sup = superior; Noruega+ = programa noruego con opción de matemáticas; Gen= programa generalista; Esp= programa especialista.

Tabla 4.3. Resumen comparativo de los resultados de España y países del grupo 2

CAT	ESPAÑA		INTERNACIONAL		GRUPO 2			
	Me	E	Me	E	Me	E	Me Sup	Me Inf
CD	0,39	0,01	0,44	0,00	0,44	0,01	China-Taipéi Singapur Suiza	Filipinas
DIF	0,70	0,02	0,72	0,01	0,69	0,01	Singapur EE.UU. Suiza	China-Taipéi Filipinas
RE	0,23	0,02	0,31	0,01	0,32	0,01	Singapur China-Taipéi Suiza	Filipinas
REP	0,24	0,02	0,30	0,01	0,33	0,01	China-Taipéi Singapur Suiza EE.UU.	Filipinas
CPM	0,33	0,01	0,36	0,01	0,39	0,01	China-Taipéi Suiza Singapur	EE.UU. Filipinas

Nota: CAT = categorías; Me: media; E: error típico; Inf = inferior; Sup = superior.

Pasamos a continuación a señalar los aspectos más sobresalientes que surgen de interpretar la información contenida en las tablas 4.2 y 4.3 y en figuras como las ejemplificadas en los anexos.

### 4.3 RESULTADOS

La información que nos proporcionan las tablas y figuras nos permite determinar los siguientes resultados.

#### 4.3.1 Resultados españoles con respecto a los países de la OCDE

La media española es superior a la media de los países de la OCDE solo para la categoría DIF. Para el resto de categorías es siempre inferior. España obtiene resultados inferiores a Noruega y Suiza en todos los aspectos considerados. Con respecto a Alemania, con sus dos programas, obtiene también resultados inferiores excepto para la categoría CPM. Polonia, con su programa especialista, presenta resultados superiores a los españoles para todas las categorías. La media polaca con el programa generalista es inferior a la española para el conjunto de preguntas que evaluaban el dominio de números excepto para la categoría CPM. Los resultados españoles son superiores a Chile para todas las categorías excepto para la categoría DIF y CD donde no hay diferencias significativas. El país cuyos resultados están más próximos a los españoles es EE.UU. con sus dos programas.

Los mejores resultados del grupo de países de la OCDE para el conjunto de preguntas del dominio de números los obtienen Noruega (ALU+) (0,59) y Alemania y Polonia (0,58). La diferencia de la media española con ellas es de 0,20 y 0,19 respectivamente. La diferencia de puntos entre los países de la OCDE con mayor y menor puntuación es 0,22 para el conjunto de preguntas del dominio de números y operaciones.

Destaca la escasa variabilidad de los resultados españoles para cada uno de los aspectos estudiados en este trabajo. Los países de la OCDE que presentan una gran dispersión en los resultados son los programas especialistas de Alemania y

EE.UU. y el generalista de Polonia. Esta variabilidad está relacionada con el tamaño de las muestras respectivas que oscilan entre 85 y 135 para los casos mencionados, mientras que la española está constituida por 1093 futuros profesores.

#### **4.3.2 Resultados españoles con respecto a los países del grupo 2**

La media española es inferior a la media de los países del grupo 2 excepto para la categoría DIF con la que no hay diferencia significativa. Los resultados españoles son inferiores en todos los aspectos considerados a los resultados de Suiza y Singapur. Destaca la media española en la categoría DIF que supera ampliamente la media de China-Taipéi, siendo en el resto de categorías siempre inferior. Los resultados españoles son superiores a Filipinas para todas las categorías. Con respecto a EE.UU., no hay diferencias significativas con excepción de la categoría CPM donde la media española supera a la estadounidense. Los resultados de los países del grupo 2 presentan, en general, una escasa variabilidad. Solo Singapur y Filipinas superan en escasas ocasiones la desviación típica de 0,02 mientras que la española es siempre menor o igual que dicho valor.

A nivel del conjunto de países del grupo 2, Singapur y Suiza son los países que obtienen los mejores resultados para todas las categorías. China-Taipéi también se encuentra entre ellos excepto para la categoría DIF. Para el conjunto de preguntas que componen el dominio de números y operaciones la máxima puntuación la obtiene China-Taipéi (0,55) y España se diferencia con ella en 0,16.

#### **4.3.3 Resultados españoles con respecto al conjunto de países participantes**

Para el conjunto de categorías, la media de los resultados españoles, siendo siempre inferior, está más próxima a la media internacional del conjunto de países participantes que a la media del grupo 2, con excepción de la categoría DIF donde España obtiene sus mejores resultados.

España obtiene los resultados más bajos para las categorías RE y REP, y lo mismo ocurre para el conjunto de países del grupo 2 y para el total de países participantes. Mientras que para los países de la OCDE los resultados más bajos los

obtienen en las categorías REP y CPM. El país que obtiene la media más alta es Singapur con su programa especialista, la diferencia con respecto a la media española es 0,21.

Dada la calidad de la muestra española, los resultados españoles presentan escasa variabilidad para el conjunto de aspectos considerados. No obstante países cuya muestra era inferior a 140, como es el caso de Alemania y EE.UU. con su programa especialista, o Botsuana, Suiza y Noruega (ALU+) con su programa generalista, presentan una gran variabilidad.

#### 4.4 DISCUSIÓN

Este trabajo contribuye a profundizar en el conocimiento didáctico de los futuros profesores españoles sobre números y operaciones con respecto al resto de países participantes en el estudio. Los resultados presentados identifican deficiencias en su formación que están en consonancia con el papel que tenía la Didáctica de la Matemática en los programas de formación inicial de maestros del periodo 1991-2010, donde España se situaba en las posiciones inferiores con respecto al resto de países, tanto a nivel global como con respecto a los de su grupo en cuanto a la proporción de temas estudiados de Didáctica de la Matemática (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). La comunidad de profesores y expertos de esta disciplina ya percibía que la formación era claramente insuficiente para ejercer como maestro y tener la responsabilidad de la formación matemática de los niños de Educación Primaria. Hay una contradicción profunda entre la importancia concedida a la competencia matemática de los ciudadanos y la formación de los profesionales encargados de la educación matemática en los decisivos primeros niveles escolares” (Rico, Sierra y Castro, 2002, p. 43).

El interés por el análisis de los resultados obtenidos por los futuros profesores españoles viene avalado por la calidad de la muestra española (INEE, 2012c, p. 17). No obstante a la hora de realizar comparaciones internacionales deben tenerse

en cuenta las limitaciones de participación de Chile, Estados Unidos, Noruega, Rusia, Polonia y Suiza (INEE, 2012c, p. 136).

España obtiene la media más baja (0,23) para la categoría de reconocer el error en el que incurre un alumno. Destacamos este hecho para la formación inicial de maestros, dado que la LOMCE prevé la detección precoz de dificultades en el aprendizaje como objetivo, dentro de la atención personalizada (MECD, 2013b). Al mismo tiempo señalamos que el conocimiento sobre errores evaluado en el cuestionario de TEDS-M se contempla en los manuales de formación de profesores de primaria españoles como el de Castro (2001). España obtiene también una media baja (0,24) para la categoría de representar alternativamente conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza, este dato también tiene interés pues “las representaciones juegan un papel fundamental en el pensamiento matemático, favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos y estimulan el desarrollo de un pensamiento flexible y versátil en la resolución de problemas” (Villegas, Castro y Gutiérrez, 2009, p. 280).

Hemos visto que el cuestionario de TEDS-M contiene preguntas en la que se constata que el conocimiento matemático que puede tener un futuro profesor no basta para reconocer los errores en los que puede incurrir un alumno o para conocer las representaciones gráficas en la enseñanza de un tema determinado. Este hecho destaca la necesidad de incidir no solo en el conocimiento matemático del maestro en formación sino también en el conocimiento de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares.

Por otra parte, si comparamos los resultados de los países de la OCDE que han participado en los dos estudios internacionales, TEDS-M y TIMSS 2011, — España, Polonia, Estados Unidos, Noruega, Alemania y Chile— podemos comprobar que se conserva la posición relativa de los países en el ranking de rendimientos tanto de profesores en formación como de alumnos de primaria cuando se evalúa su conocimiento matemático sobre números y operaciones. Los resultados



españoles en TIMSS son solo superiores a Polonia y Chile e inferiores a los del resto (INEE, 2013a, p. 62).

Aunque no formaba parte del objetivo de este trabajo, hemos encontrado que los mejores resultados se obtienen para todos los países, con diferencia, en aquellas preguntas que evaluaban acerca del conocimiento de los futuros profesores sobre las variables que afectan a la dificultad de los problemas. Como podemos comprobar en las tablas y figuras de los anexos, China-Taipéi, Noruega (ALU+), y los países con programas de formación de especialistas Alemania, Polonia y Singapur —con sus dos programas— presentan, con algunas excepciones, los mejores resultados en las cuatro categorías de conocimiento didáctico establecidas (también las mayores dispersiones). Al mismo tiempo si nos fijamos en las tablas 4.2 y 4.3 y en las gráficas de las figuras de los anexos encontramos que hay una gran variabilidad en los resultados en función no solo de los programas sino también del tipo de contenido matemático y de la categoría de conocimiento didáctico que se evalúa en las preguntas.

Las medidas que están tomando los diferentes países para mejorar la aptitud profesional de los profesores, como es el caso de Finlandia, Polonia o Singapur, ponen de manifiesto una preocupación compartida por ampliar y mejorar el nivel de estudios requerido para ser profesor. Éste debería ser el objetivo general de las reformas emprendidas en España: “mejorar la formación inicial que reciben nuestros profesores para responder a las nuevas demandas de una sociedad en cambio” (Esteve, 2006, p. 19). Aunque el estudio es parcial por razón del dominio considerado y de las categorías que se pueden identificar en las preguntas, las categorías estudiadas son transversales a todos los dominios (Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014). Por tanto, los resultados obtenidos en este trabajo pueden ser de utilidad en el proceso actual de diseño y puesta en práctica de las asignaturas de Grado de Maestro de Primaria.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido apoyado por el Proyecto de Excelencia de la Junta de Andalucía P07-FQM03244 “TEDS-M España” y parcialmente subvencionado por el proyecto EDU2009-10454 del Ministerio de Ciencia e Innovación. También se ha realizado en el marco del proyecto *Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación*, EDU2012-33030 del MEC. Los resultados de este trabajo forman parte de la tesis doctoral que lleva a cabo A. Gutiérrez-Gutiérrez, bajo la dirección de los doctores L. Rico y P. Gómez.

## REFERENCIAS

- ANECA (2005). *Libro blanco. Título de Grado en Magisterio (volumen 1 y 2)*. Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación, Madrid.
- Blömeke, S., Suhl, U. y Döhrmann, M. (2013). Assessing strengths and weaknesses of teacher knowledge in asia, eastern europe, and western countries: differential item functioning in TEDS-M. *International Journal of Science and Mathematics Education 11*(4), 795-817.
- Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la educación primaria* (pp. 315-345). Madrid: Síntesis.
- Cebolla-Boado, H. y Garrido-Medina, L. (2013). Los efectos de la educación universitaria en el conocimiento en matemáticas en España y en EE.UU.: evidencias del cuestionario TEDS-M. En INEE (Ed.), *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 41-59). Madrid: Autor.
- Egido, I. y López, E. (2013). Análisis del Prácticum en los estudios de Magisterio en España a partir de los datos de TEDS-M. En INEE (Ed.), *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 108-135). Madrid: Autor.
- Esteve, J. M. (2006). La profesión docente en Europa: perfil, tendencias y problemática. La formación inicial. *Revista de Educación, 340*, 19-86.

- Felbrich, A., Kaiser, G., y Schmotz, C. (2012). The cultural dimension of beliefs: An investigation of future primary teachers' epistemological beliefs concerning the nature of mathematics in 15 countries. *The International Journal on Mathematics Education*, 44(3), 355-366.
- Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 83-92). Salamanca: SEIEM.
- Gutiérrez, A. (2012). *Conocimiento didáctico sobre números y operaciones de los estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.  
Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/1921/>
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación*, 26(2), 265-297.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Rico, L., y Gómez, P. (2014). *Metodología para una comparación internacional del conocimiento didáctico evaluado en TEDS-M*. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañía, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 93-99). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.
- Hardy, I. (2014). A logic of appropriation: enacting national testing (NAPLAN) in Australia. *Journal of education policy*, 29(1), 1-18.
- Hill, H. y Ball, D. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal of Research in Mathematics Education*, 35, 330-351.

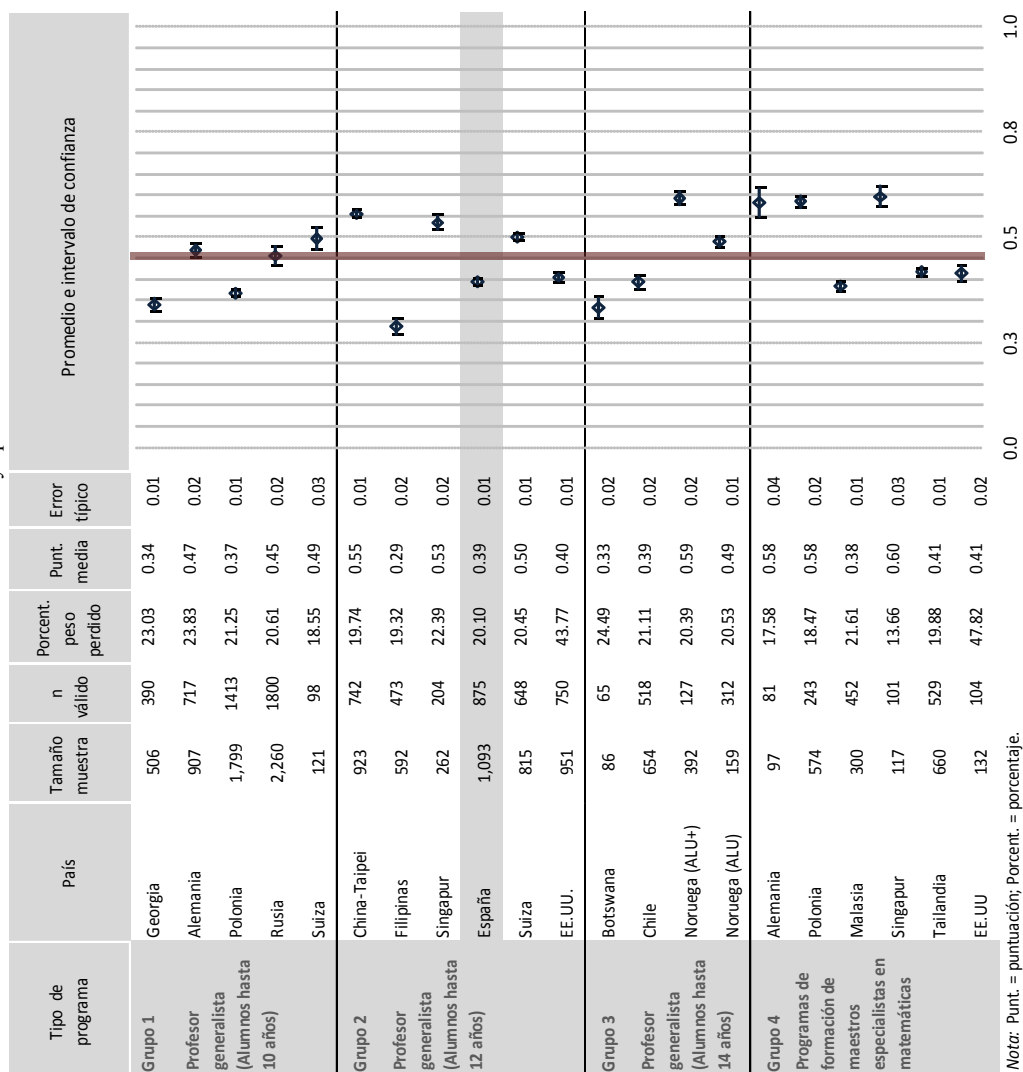
- INEE. (2012a). *PIRLS - TIMSS 2011 Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Volumen I: Informe español*. Madrid: Autor.
- (2012b). *PIRLS - TIMSS 2011 Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Volumen I y II: Informe español*. Madrid: Autor.
- (2012c). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor.
- (2012d). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español. Análisis secundario*. Madrid: Autor.
- (2013a). *PISA 2012: Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Volumen I: Resultados y contexto*. Madrid. Autor.
- (2013b). *PISA 2012: Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Volumen II: Análisis secundario*. Madrid. Autor.
- Martin, M.O. y Mullis, I.V.S. (2013). *TIMSS AND PIRLS 2011: Relationships among reading, mathematics, and science achievement at the fourth grade— Implications for early learning*. Martin, M.O. y Mullis, I.V.S. (Eds.). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestros en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *BOE*, 244, 33004-33008.
- (2007a). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *BOE*, 312, 53747-53750.
- (2007b). Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, 173, 31487-31566.

- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2013a). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Volumen I: Resultados y contexto*. Madrid: Autor.
- (2013b). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *BOE*, 295, 97858-97921.
- Montalvo, J. y Gorgels, S. (2013). Calidad del profesorado, calidad de la enseñanza y aprendizaje: resultados a partir del TEDS-M. En INEE (Ed.), *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español. Volumen II. Análisis secundario* (pp. 11-39). Madrid: Autor.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., Arora, A., y Erberber, E. (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- OCDE (2013). *PISA 2012 Results in Focus*. OECD Publishing.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión*, 33, 11-27.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de «Didáctica de la Matemática». *Revista de Educación*, 328, 35-58.
- Schmidt, W. H., Blömeke, S., y Tatto, M. T. (Eds.). (2011). *Teacher education matters: A study of middle school mathematics teacher preparation in six countries*. New York, NY: Teachers College Press.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study In Mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk S., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., Bankov, K., Rodriguez, M., & Reckase, M. (2012). *Policy, Practice and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Villegas, J. L., Castro, E. y Gutiérrez, J. (2009). Representaciones en Resolución de Problemas: Un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 279-308.

## ANEXO

FIGURA 4.3. Conocimiento didáctico del dominio de números y operaciones



**FIGURA 4.4.** Distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema

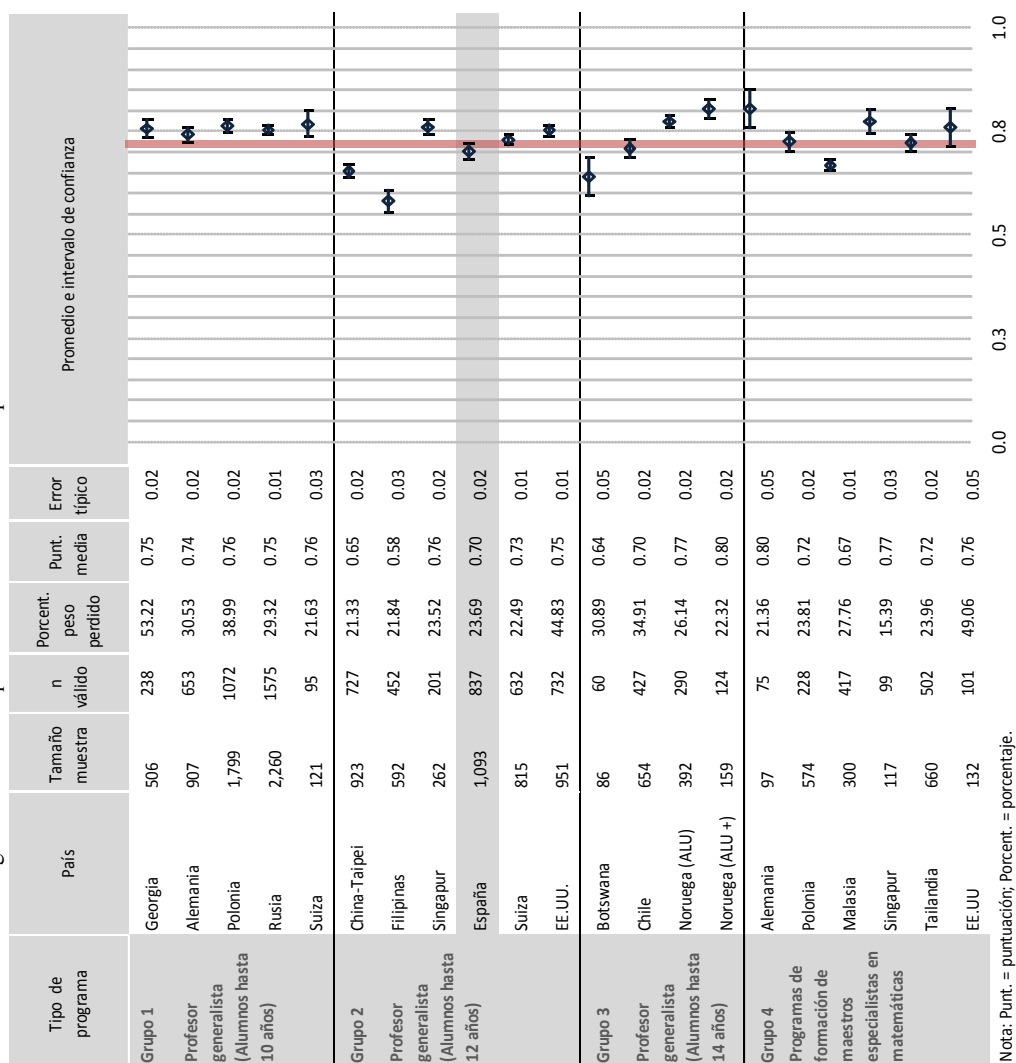
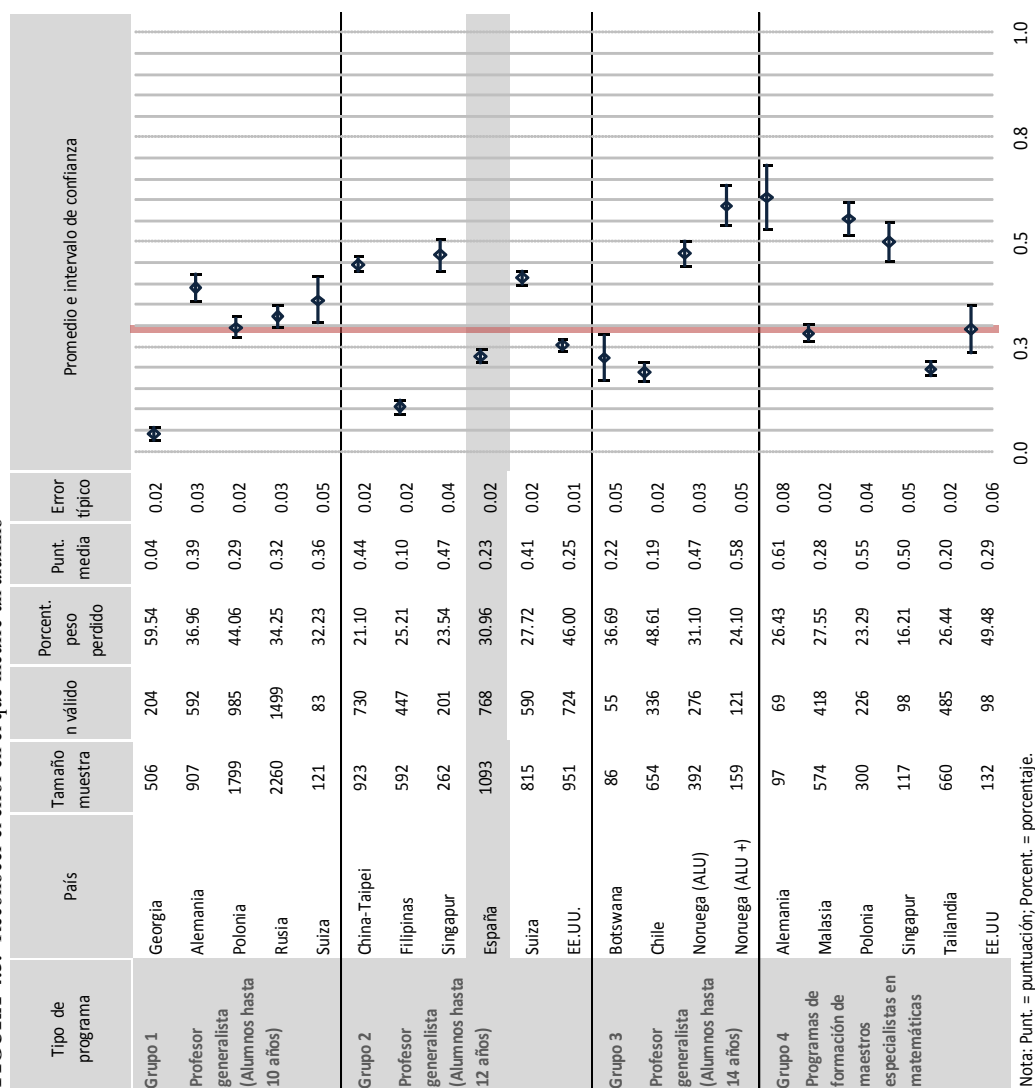




FIGURA 4.5. Reconocer el error en el que incurre un alumno



Nota: Punt. = puntuación; Porcent. = porcentaje.



## CAPÍTULO 5

# SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS

**Resumen:** En este capítulo, resumimos brevemente los resultados obtenidos en el trabajo de investigación y descritos con detalle en los artículos que se recogen en los capítulos 2, 3 y 4 respectivamente de esta memoria. Hacemos esta síntesis en términos de las fortalezas y debilidades del conocimiento de los futuros profesores de primaria españoles sobre números y operaciones, así como sobre su enseñanza y aprendizaje. Mostramos también los resultados obtenidos al realizar la comparación internacional de los resultados españoles para el conocimiento didáctico con los países de la OCDE que participaron en TEDS-M y los miembros de su grupo. Adicionalmente, presentamos la relación entre los resultados españoles y el conjunto de países participantes.

### 5.1 CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

El análisis de los datos mostró que el conocimiento de los contenidos de matemáticas primaria que los futuros profesores españoles manifestaron, corresponde al que tendrán que enseñar en un futuro: No obstante, se evidenciaron limitaciones relativas a contenidos escolares correspondientes al primer ciclo de secundaria, en particular aquellos requeridos para el trabajo con los conceptos razón/proporción/porcentaje y la redacción de problemas verbales a partir de operaciones con fracciones sencillas. También mostraron carencias en el conocimien-

to matemático sobre contenidos correspondientes al nivel avanzado de los futuros maestros españoles, si bien evidenciaron conocer algunas nociones avanzadas, como fue la propiedad de densidad para la relación de orden en el conjunto de los números racionales (Capítulo 2).

## 5.2 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

El análisis de los datos mostró que los futuros profesores españoles tenían el conocimiento didáctico del contenido matemático necesario para distinguir los elementos que afectan a la dificultad de los problemas escolares. Este conocimiento les capacita para ordenar problemas aritméticos según la dificultad que pueden tener para los escolares, así como para enunciar problemas más fáciles (que uno propuesto) que evalúen las mismas destrezas y conocimientos. No obstante, se apreciaron carencias importantes en su conocimiento didáctico que les impidieron reconocer los errores en los que incurren los alumnos al realizar tareas matemáticas, realizar representaciones gráficas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y reflexionar sobre el contenido de las matemáticas escolares y su aplicación a la enseñanza (Capítulo 3).

## 5.3 COMPARACIÓN INTERNACIONAL DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

Los resultados que presentamos a continuación ubican los datos correspondientes al conocimiento didáctico del contenido de los profesores de primaria españoles en formación en el contexto internacional. De la misma forma que hemos hecho en el Capítulo 4, consideramos la comparación, por una parte, con los países de la OCDE que también participaron en TEDS-M; por otra, con los países con programa de formación similar al español; y, por último, con el conjunto de países participantes. En todos los casos, hacemos las comparaciones con respecto a la caracterización en términos de categorías con las que hemos estructurado el cono-

cimiento didáctico del contenido evaluado para números y operaciones en el cuestionario del estudio TEDS-M. En este apartado realizamos una comparación más detallada de la comparativa de medias entre España y el resto de países para las categorías consideradas que la presentada en el capítulo 4. Estos resultados deben leerse teniendo en cuenta las limitaciones de participación de Chile, Estados Unidos, Noruega, Rusia, Polonia y Suiza (INEE, 2012c, p.136).

### **Resultados españoles con respecto a los países de la OCDE participantes**

La media española es inferior a la media de los países de la OCDE en todas las categorías consideradas, con una excepción: distinguir los elementos que afectan la dificultad de un problema. En este caso, la media española (0,70) fue superior a la media de los países de la OCDE (0,63).

La media española en conocimiento didáctico (0,39) es inferior a las medias del programa con opción de matemáticas (0,59) y sin opción de matemáticas (0,49) de Noruega, y del programa del grupo 1 (0,49) y del programa del grupo 2 (0,50) de Suiza. España presenta resultados que son inferiores a los resultados de estos cuatro programas en todas las categorías consideradas. La media española en conocimiento didáctico también es inferior a la media del programa generalista (0,47) y del programa especialista (0,58) de Alemania. Sin embargo, para la categoría que se refiere a identificar los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos, España obtiene una media de 0,33 que no presenta diferencias significativas con las medias de estos dos programas.

Con su programa generalista, Polonia obtuvo una media de 0,58 en conocimiento didáctico que es superior a la media española. La media en conocimiento didáctico del programa generalista polaco (0,37) no presenta diferencias significativas con la media española. En la categoría que se refiere a distinguir elementos que afectan la dificultad de un problema, la media del programa generalista polaco (0,76) es superior a la media española (0,70).

Respecto a Chile, no hay diferencias significativas con la media española en conocimiento didáctico. España obtiene una media superior a Chile en las categorías que se refieren a reconocer los errores en los que incurren los alumnos (España: 0,23; Chile: 0,19) y a representar los conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza (España: 0,24; Chile: 0,20). No hay diferencias significativas con las otras categorías consideradas.

El país cuyos resultados están más próximos a los españoles es EE.UU. con sus dos programas. La media de EE.UU. en conocimiento didáctico es 0,40 con su programa generalista y 0,41 con su programa especialista. Como EE.UU. con su programa generalista forma parte del grupo 2 realizaremos la comparativa con España en el siguiente apartado.

### **Resultados españoles con respecto a los países del grupo 2**

El análisis de los datos muestra que la media española en conocimiento didáctico (0,39) es inferior a la media de los países del grupo 2 (0,44). Los resultados españoles fueron inferiores en todas las categorías, excepto en la que se refiere a distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema. Para esta categoría, la media española no presentó diferencias significativas con la media de los países de este grupo.

La media española es inferior en todas las categorías consideradas a la media de Singapur y Suiza. Destaca el hecho de que la media española (0,70) supera la media de China-Taipéi (0,65) a la hora de distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema. En el resto de categorías consideradas la media española es siempre inferior a la de China-Taipéi. La media española es superior a la de Filipinas en todas las categorías consideradas.

EE.UU. obtiene una media (0,75) que es superior a la española (0,70) al identificar los elementos que afectan a la dificultad de un problema; y también obtiene una media ligeramente superior (EE.UU: 0,28; España: 0,24) al representar los conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza. Solo para la

categoría que se refiere a identificar los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos, la media española (0,33) supera a la estadounidense (0,29). No hay diferencias significativas en conocimiento didáctico entre los dos países.

### **Resultados españoles con respecto al conjunto de países participantes**

Aunque no constituía un objetivo específico de nuestra investigación, el trabajo con la base de datos internacional nos proporcionó también información sobre los resultados españoles con respecto al conjunto de países participantes. Sintetizamos a continuación algunos de los resultados obtenidos que se incluyen en el capítulo 4.

Para el conjunto de categorías consideradas, la media de los resultados españoles, siendo siempre inferior, está más próxima a la media internacional del conjunto de países participantes que a la media del grupo 2, excepto a la hora de distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema, para la que España obtiene sus mejores resultados, como ya hemos dicho. Para esta categoría la media española no tiene diferencia significativa con respecto a la media internacional.

España obtiene la media más baja cuando los futuros profesores tienen que reconocer los errores en los que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado (0,23) y a la hora de representar gráficamente los conceptos o los procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza (0,24). Lo mismo ocurre para el conjunto de países del grupo 2 (0,32 y 0,33 respectivamente) y para el total de países participantes (0,31 y 0,30 respectivamente). Sin embargo, los países de la OCDE obtienen los resultados más bajos cuando los futuros profesores tienen que representar gráficamente los conceptos o los procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza (0,31) e identificar los conceptos y procedimientos matemáticos invo-

## Síntesis de los resultados

---

lucrados en la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos (0,35).



## CAPÍTULO 6

# CONTRIBUCIÓN DEL TRABAJO Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

**Resumen.** En este capítulo, sintetizamos la contribución de los resultados obtenidos en este trabajo y su ámbito de aplicación. Recogemos, como aportación al diseño de futuros estudios, una revisión crítica de las limitaciones que hemos encontrado en el diseño del cuestionario y en las guías de corrección del estudio TEDS-M. Presentamos las líneas de investigación en las que nos encontramos trabajando y que nos proponemos desarrollar en un futuro.

### 6.1 RELACIONES ENTRE LOS RESULTADOS

En este apartado, describimos dos contribuciones del trabajo: analizamos la relación entre los puntos de anclaje de TEDS-M y los resultados que obtuvimos para el subdominio de números y operaciones, y reflexionamos sobre la relación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido, con motivo de esos resultados.

#### 6.1.1 Resultados y puntos de anclaje establecidos por TEDS-M

TEDS-M utilizó la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) para ubicar el nivel de rendimiento de los futuros profesores participantes en una escala basada en el nivel de dificultad que presentan los ítems de la prueba. Esta escala permitió conocer la

distribución de los resultados en distintos niveles de rendimiento a partir de unas determinadas marcas de nivel, denominadas “puntos de anclaje”, que se establecieron en función de los porcentajes de respuestas correctas que recibe cada pregunta (cuantos más futuros profesores respondían correctamente una pregunta, más sencilla se consideraba). De este modo, tanto las preguntas como los futuros profesores según su puntuación, quedaron distribuidos en los distintos niveles de rendimiento. A partir de las preguntas correspondientes a cada nivel, se describieron las capacidades que mostraban los futuros profesores con una puntuación igual o superior a cada punto de anclaje (INEE, 2012).

Consideramos que la caracterización que nosotros hemos hecho del conocimiento evaluado por TEDS-M en cada pregunta permite precisar con mayor detalle el conocimiento manifestado por los futuros profesores españoles, de modo que mejora el descrito por los puntos de anclaje establecidos por TEDS-M. Los niveles establecidos por TEDS-M mediante los puntos de anclaje no resultan apropiados para caracterizar la población de maestros españoles, según las capacidades y conocimientos descritos, ya que los maestros españoles satisfacen algunos de sus logros y limitaciones en números y operaciones pero no otros.

A continuación, describimos esta contribución para el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico sobre números y operaciones que los futuros profesores españoles manifestaron en sus respuestas.

### *Conocimiento matemático.*

España, con una puntuación de 481 quedó situada entre el primer y el segundo nivel de rendimiento de los tres establecidos para el conocimiento matemático a partir de los dos puntos de anclaje que se establecieron en TEDS-M (INEE, 2012, pp. 87-88). Se estableció que los futuros profesores ubicados en este nivel tendrían dificultades para entender que entre dos números decimales dados hay un número infinito de ellos. Sin embargo, hemos visto en el capítulo 2 cómo un alto porcentaje de futuros profesores españoles manifestaron conocer la densidad del conjunto de los números racionales. De igual forma, se estableció que los futuros

profesores ubicados en este nivel tendrían un conocimiento limitado sobre proporcionalidad. En el caso, de los futuros profesores españoles, es necesario matizar esta afirmación, dado que en nuestro trabajo, hemos comprobado cómo ellos resuelven adecuadamente, en un alto porcentaje, los problemas de proporcionalidad directa operando con números decimales. No obstante, también hemos observado que mostraron dificultades cuando trataron de trabajar con los conceptos de razón y proporción (Capítulo 2, apartado 2.4.2).

Podemos precisar que los futuros profesores españoles alcanzan un nivel aceptable en los conocimientos matemáticos sobre números y operaciones que han de enseñar en un futuro (Capítulo 2, apartado 2.4.1). Este resultado es coherente con el análisis del punto de anclaje que indica que los futuros profesores que se ubican en un segundo nivel tienen las siguientes capacidades: responder a preguntas que requieren cálculos básicos con números naturales; identificar propiedades de las operaciones con números naturales; y resolver problemas sencillos que incluyan fracciones simples.

#### *Conocimiento didáctico del contenido matemático*

España, con una puntuación de 492, quedó situada por debajo del único punto de anclaje que se estableció (INEE, 2012, p. 92). No obstante, cuando nos centramos en el bloque de números y operaciones, encontramos que un alto porcentaje de los futuros profesores españoles son capaces de identificar los elementos aritméticos que afectan a la dificultad de un problema que se resuelve con una sola operación (Capítulo 3, apartado 3.7.2), capacidad que se considera que tienen los maestros en formación de los países que se encuentran en el segundo nivel, por encima del punto de anclaje establecido. Como hemos visto en este tipo de preguntas, los maestros españoles superaron la media de los de otros países y obtuvieron mejores resultados globales (Capítulo 4, apartado 4.3).

### **6.1.2 Relación entre conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido**

El análisis que realizamos de las preguntas ha puesto de manifiesto la dificultad de establecer el conocimiento didáctico de un futuro maestro, independientemente de su conocimiento del contenido matemático (Gutiérrez, 2012; Capítulo 2). Si bien es posible distinguir entre el rendimiento para el contenido matemático y el rendimiento para el contenido didáctico matemático, los dos rendimientos están altamente correlacionados (Krauss et al., 2008; Schilling, Blunk, y Hill, 2007). Hemos constatado como limitación del estudio que, para responder correctamente a la mayoría de las preguntas analizadas sobre conocimiento didáctico del bloque de números y operaciones, se requiere tanto del conocimiento matemático como del conocimiento didáctico del contenido matemático. Por esta razón, nos hemos planteado la cuestión de si algunos futuros profesores, teniendo el conocimiento didáctico requerido, no pudieron responder correctamente algunas preguntas sobre conocimiento didáctico, como consecuencia de carencias específicas. O bien, si, en algunos casos, tener el conocimiento matemático del contenido escolar ha resultado suficiente para contestar las preguntas con las que se evaluó el conocimiento didáctico sobre el mismo contenido matemático. Consideramos a continuación un ejemplo de esta relación para el bloque de números y operaciones.

Las preguntas que aparecen en las figuras 2.3 y 3.1, fueron propuestas al ejemplificar la metodología seguida para caracterizar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido manifestados por los futuros profesores españoles en los capítulos 2 y 3 respectivamente. Estas preguntas forman parte, en el cuestionario TEDS-M, de un mismo ítem con dos apartados, evaluados por separado, que mostramos en la figura 6.1.

A) –Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?”

Marque la opción que crea correcta.

A.           7,2  
 B.           8,0  
 C.           8,4  
 D.           9,6

B) –Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?”

Formule un problema diferente, del mismo tipo que el problema propuesto (los mismos procesos/operaciones) que sea MÁS FÁCIL de resolver para los alumnos de primaria.

Figura 6.1. Ítem sobre proporcionalidad directa

Puesto que queremos estudiar la relación existente entre los conocimientos matemático y didáctico, analizamos conjuntamente los resultados de los futuros profesores españoles para estos dos apartados, en términos de los porcentajes de profesores que contestaron correctamente o incorrectamente los dos apartados, los porcentajes de los que contestaron correctamente el apartado que se refiere al conocimiento matemático e incorrectamente el apartado del conocimiento matemático y viceversa. Presentamos los resultados en la tabla 6.1.

Tabla 6.1. Relación entre las respuestas de los futuros profesores españoles

		Conocimiento didáctico	
		Correcta	Incorrecta
Conocimiento matemático	Correcta	52%	25,4%
	Incorrecta	13,4%	9,2%

Observamos en la tabla 6.1 cómo un mayor porcentaje de futuros profesores que contestaron correctamente el apartado que evaluó el conocimiento didáctico del contenido, contestaron de modo igualmente correcto el apartado que evaluó el conocimiento matemático del mismo contenido escolar. Al mismo tiempo, observamos que el conocimiento sobre un contenido matemático escolar no implica tener el conocimiento didáctico correspondiente a ese mismo contenido. También observamos que hay un porcentaje, pequeño pero apreciable, de profesores que disponiendo de conocimiento didáctico sobre un contenido carecen del correspondiente conocimiento del contenido matemático.

A partir de esta tabla de contingencia nos planteamos la hipótesis de si tiene incidencia contestar correcta o incorrectamente el apartado de conocimiento matemático para contestar correcta o incorrectamente el apartado de conocimiento didáctico. Trabajamos con la distribución Chi cuadrado ( $\chi^2$ ) al nivel de confianza del 95% (5% de nivel de significación) y obtenemos que no es equivalente, para esta pregunta, tener el conocimiento matemático que no tenerlo a la hora de contestar correcta o incorrectamente el apartado de conocimiento didáctico.

A partir de los resultados de esta pregunta, no podemos establecer conclusiones terminantes sobre la relación existente entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido, al menos en el bloque de números y operaciones. No obstante, estos datos estimulan a investigar sobre el interés relativo de evaluar ambos conocimientos por separado, así como a profundizar sobre qué tipo de preguntas serían interesantes diseñar para poder evaluar esa relación. Desde nuestro marco conceptual, consideramos que el conocimiento de un profesor para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, o conocimiento didáctico del contenido matemático como lo denomina TEDS-M, incluye, o presupone el conocimiento matemático del propio contenido. Destaca que en el cuestionario TEDS-M para evaluar el conocimiento didáctico del contenido, se dedique un alto porcentaje (31,8%) de preguntas a la reflexión sobre el contenido matemático, que hemos identificado con la categoría CPM, como podemos ver en la tabla 6.2 que

presentamos más adelante (Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014). Por ejemplo, en el subdominio de números, en la pregunta 5, TEDS-M plantea al futuro profesor que interprete cuál es la idea matemática que una profesora pretende trabajar con sus alumnos a los que propone tres parejas de fracciones sencillas con igual numerador para que los ordenen de menor a mayor. Y les propone cuatro opciones: dos de ellas son afirmaciones sobre fracciones que no siempre son ciertas para todas las fracciones y no hacen referencia a fracciones con igual numerador; una tercera manifiesta la idea de que es esencial reducir a común denominador antes de comparar fracciones diferentes; mientras que la última opción dice que cuando dos fracciones tienen el mismo numerador, entonces es necesario comparar los denominadores (Gutiérrez, 2012). En este caso, nosotros interpretamos que la pregunta requiere exclusivamente el conocimiento matemático de los futuros profesores aunque se sitúe al futuro profesor en una situación escolar hipotética.

## 6.2 LIMITACIONES

En esta memoria, nos hemos centrado en estudiar los resultados que se obtuvieron con las encuestas y pruebas para la recogida de información, según los instrumentos que se aplicaron en el estudio TEDS-M, focalizado en el bloque de números y operaciones. Para ello, caracterizamos el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido de los futuros profesores españoles de primaria según el marco teórico y el instrumento diseñado por TEDS-M para evaluar dicho bloque. El procedimiento que desarrollamos para el análisis de las preguntas del cuestionario permitió constatar carencias y limitaciones en la formulación de las preguntas, en las guías de corrección y en el marco conceptual del estudio TEDS-M (Gutiérrez 2012; Capítulo 3). Discutimos a continuación las limitaciones más relevantes, encontradas en el diseño del cuestionario y en las guías de corrección del estudio TEDS-M, como contribución a futuros estudios.

Como en cualquier evaluación, el cuestionario no pudo cubrir todo el espectro del conocimiento de las matemáticas escolares y sobre su enseñanza y aprendizaje

que los futuros profesores de primaria de matemáticas debieran alcanzar. No obstante, coincidimos con Döhrmann, Kaiser y Blömeke (2014) en destacar la falta de concreción en la definición del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico por parte de TEDS-M. Estos investigadores resaltan que el marco teórico y el desarrollo de la prueba se basaron en una concepción pragmática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, propia de los países anglosajones. Esto implicó, por ejemplo, que el cuestionario diera poca importancia a temas como la argumentación y la prueba, que son considerados relevantes en la didáctica europea.

En el capítulo 3, manifestamos que la principal dificultad que encontramos a la hora de interpretar los resultados fue describir el conocimiento didáctico de los futuros profesores a partir del marco teórico propuesto por TEDS-M. Esto nos llevó a realizar una clasificación de las preguntas del subdominio de números y operaciones a partir del conocimiento didáctico concreto requerido para responder correctamente a cada una de ellas, basándonos en el modelo del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

Por otra parte, el enunciado de las preguntas, y su relación directa con el conocimiento didáctico del contenido matemático que evalúa, plantearon también dificultades a la hora de interpretar los resultados según el marco teórico de TEDS-M. TEDS-M utiliza la diferencia temporal de los verbos que describen la acción del profesor para distinguir si una pregunta corresponde a la planificación de la enseñanza o a su implementación. Por ejemplo, encontramos preguntas que se enuncian de la siguiente forma: “¿qué idea matemática está queriendo mostrar un profesor al planificar una actividad...?”, o bien “¿cuál es la concepción matemática de los alumnos en las distintas respuestas a esta tarea?”. En realidad, las dos preguntas pueden requerir el mismo conocimiento por parte del futuro profesor, pero TEDS-M las ubica antes y después del proceso de enseñanza y las clasifica en diferentes categorías —planificación e implementación—, atendiendo a los verbos utilizados y a los tiempos verbales que aparecen en los enunciados (Gutié-



rez, 2012; Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014). Por ello, en nuestro trabajo, para evitar esta ambigüedad, clasificamos este tipo de preguntas en el apartado “econocimiento del contenido de las matemáticas escolares desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje”, sin distinguir si se refieren a la planificación o a la implementación (Capítulo 3).

Como en cualquier cuestionario, no es posible contrastar el conocimiento manifestado por los futuros profesores en las preguntas de respuesta múltiple o múltiple compleja, puesto que, en este tipo de preguntas, los futuros profesores no pueden expresar el conocimiento que ponen en juego para contestar una opción u otra de las planteadas. Puede haber otros motivos —como el azar— por el que los futuros profesores contesten correcta o incorrectamente. No obstante, tanto en TEDS-M como en esta investigación, no hemos tenido en cuenta esos motivos para el análisis de los resultados.

Con respecto a las guías de corrección, en algunos casos encontramos que contestar correctamente a una pregunta supone asumir un marco determinado sobre el aprendizaje al que no se hace referencia en el enunciado de la pregunta (Gutiérrez, Gómez y Rico, 2012*b*). En otros casos, las guías establecen, a través de ejemplos, la intencionalidad de cada pregunta con respecto al conocimiento que debe manifestar el futuro profesor, o evalúan un conocimiento que no se especifica en el enunciado de la pregunta (Gutiérrez, 2012). También, en algunos casos en los que se pide al futuro profesor que enuncie un problema de determinadas características, encontramos que se clasifican de la misma manera las respuestas ilegibles o tachadas, y las respuestas en las que se plantean problemas no significativos porque no se trabaja el concepto matemático en cuestión o bien porque no tengan respuesta. Esto implica que se pierda información sobre el conocimiento manifestado por los futuros profesores. En estos casos, no es posible determinar qué proporción de futuros profesores manifestaron falta de conocimiento matemático o mostraron falta de capacidad para enunciar un problema determinado.

El análisis crítico del cuestionario junto con las guías de corrección de TEDS-M proporcionan sugerencias para el diseño de futuros estudios sobre el conocimiento didáctico de profesores en formación que se puedan llevar a cabo. Estas sugerencias se podrían resumir en:

(a) importancia de enunciar las preguntas de forma que se obtenga la máxima información en las respuestas;

(b) guías de corrección que no incluyan como información requerida al futuro profesor consideraciones que no estén claras en el enunciado de la pregunta; y

(c) precisión en los enunciados y criterios para que las respuestas a las preguntas permitan evaluar qué conocimientos concretos, matemático o didáctico del contenido, se están poniendo en juego.

### 6.3 ÁMBITO DE APLICACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

Por una parte, los resultados obtenidos en este estudio, que se recogen en los capítulos 2 y 3, pueden orientar en el diseño de las asignaturas del nuevo plan de estudios del Grado de Maestro de Primaria, debido a que destacan fortalezas y debilidades en el conocimiento matemático y didáctico sobre números y operaciones de los futuros profesores españoles. El conocimiento de estos datos y resultados, junto con los correspondientes al resto de subdominios del contenido matemático escolar que propone TEDS-M —álgebra y funciones, geometría y medida, análisis de datos y azar—, proporcionarán información relevante para los nuevos programas sobre el conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático escolar, en la que es necesario incidir.

La caracterización que realizamos del conocimiento didáctico del contenido matemático evaluado (Capítulo 3) nos permitió comparar los resultados españoles en el subdominio de números y operaciones con los de los otros países participantes (Capítulo 4). La ampliación de la caracterización del conocimiento didáctico

del contenido evaluado al resto de los subdominios de contenido matemático nos permitirá ubicar en el contexto internacional las fortalezas y debilidades del conocimiento manifestado por los futuros profesores de primaria españoles, según el estudio TEDS-M.

Por otra parte, para la consecución de este trabajo hemos desarrollado, a partir del modelo del análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), un método que permite describir el conocimiento manifestado por los profesores de primaria en formación en el estudio TEDS-M. Para ello hemos diseñado un proceso de identificación, análisis y clasificación de las preguntas que evaluaron el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido que mostraron los profesores en formación, según los resultados del estudio TEDS-M (Capítulos 2 y 3). sostenemos que es posible establecer conjeturas acerca del conocimiento didáctico del contenido que los futuros profesores manifestaron en este estudio según el tipo de respuesta a cada una de las preguntas (Capítulo 3) y establecer así el conocimiento didáctico del contenido evaluado.

En esta memoria nos hemos centrado en el bloque de preguntas correspondientes al subdominio de números y operaciones y hemos comprobado que solo plantean preguntas que se refieren a la cognición y a la estructura conceptual (Capítulo 3). No obstante, desde la publicación de los artículos hemos ampliado el trabajo y progresado en el estudio del resto de subdominios de contenido matemático establecidos por TEDS-M, por lo cual hemos avanzado en una caracterización más completa del conocimiento didáctico del contenido evaluado. Este avance del marco del análisis didáctico se presentó en el XVIII Simposio de la SEIEM.

En la tabla 6.2 clasificamos las preguntas de TEDS-M sobre conocimiento didáctico del contenido, según el modelo del análisis didáctico.

Tabla 6.2. Clasificación de las preguntas de conocimiento didáctico de TEDS-M

Tema	Categoría	Nº
<b>Conceptual</b>		
Estructura conceptual	Reconocer/ identificar los conceptos, relación de conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza-aprendizaje de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos	7
Sistemas de representación	Modos de representar conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza	4
Fenomenología	No se evalúa en TEDS-M	
<b>Cognitivo</b>		
Expectativas de aprendizaje	No se evalúa en TEDS-M	
Limitaciones de aprendizaje	Identificar y distinguir las variables que afectan a la dificultad de un problema	3
	Reconocer la dificultad y/o describir el tipo de error en el que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado	3
Oportunidades de aprendizaje	No se evalúa en TEDS-M	
<b>Instrucción</b>		
Funciones y secuencias de tareas	Diseñar tareas o estrategias de enseñanza y aprendizaje que contribuyan al desarrollo de conceptos y procedimientos o a la superación de errores conceptuales por parte de los alumnos	1
	Justificar estrategias de enseñanza que contribuyan al aprendizaje de conocimientos y procedimientos	1
Materiales y recursos	No se evalúa en TEDS-M	
Gestión del aula	No se evalúa en TEDS-M	
<b>Evaluación</b>		
Criterios e instrumentos	Formular cuestiones que permitan evaluar conocimientos y destrezas determinadas	2
Rendimientos, resultados e interpretación	No se evalúa en TEDS-M	
Toma de decisiones	No se evalúa en TEDS-M	

Fuente: Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014, p. 106-107)

Esta caracterización permite comprobar un desequilibrio entre los aspectos evaluados y en el número de preguntas que se han planteado para cada uno de ellos. En este sentido, será muy conveniente diseñar un cuestionario que, con un número

equilibrado de preguntas, aborde de manera ponderada los distintos subdominios y temas que caracterizan el conocimiento didáctico de un futuro profesor de matemáticas.

Actualmente nos encontramos trabajando en el análisis de los resultados de los futuros profesores españoles para cada uno de los restantes subdominios conceptuales —geometría y medida, análisis de datos y azar, álgebra y funciones—. Este análisis permitirá caracterizar el conocimiento didáctico de estos contenidos que tienen los futuros profesores españoles, manifestado en TEDS-M según subdominios conceptuales y también de manera global.



# PUBLICACIONES

## ARTÍCULOS EN REVISTAS

**Gutiérrez-Gutiérrez, A.** Gómez, P., Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación* 26(2), 265-297.

Disponible en: <http://bit.ly/1rvHuex>

(ID: 935110 DOI:10.1080/11356405.2014.935110)

**Gutiérrez-Gutiérrez, A.**, Gómez, P. y Rico, L. Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. (Aceptado). *Educación XXI*.

Disponible en: <http://bit.ly/1EaDuWc>

**Gutiérrez-Gutiérrez, A.**, Rico, L. y Gómez, P. (2015). Conocimiento didáctico sobre números y operaciones: una comparación internacional. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 13(1), 47-72.

Disponible en: <http://bit.ly/1NGAxSi>

## CONTRIBUCIONES EN CONGRESOS Y SEMINARIOS

**Gutiérrez, A.**, Gómez, P. y Rico, L. *Conocimientos manifestados por los futuros maestros de Magisterio sobre Didáctica de la Matemática en el estudio TEDS-M. Ejemplo del análisis de una pregunta*. Seminario de Investigación de los Grupos de Pensamiento Numérico y Algebraico (de la Universidad de Grana-

da) e Historia de la Educación Matemática (de la Universidad de Valencia). Valencia, España, Marzo 2012.

**Gutiérrez, A.**, Gómez, P. y Rico, L. *Conocimiento en Didáctica de la Matemática de estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics)*. Investigación en Educación Matemática XVI. Baeza: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Septiembre 2012.

Publicado en la web del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE):

<http://www.educacion.gob.es/inee/Documentos-de-trabajo.html>

**Gutiérrez-Gutiérrez, A.**, Rico, L. y Gómez P. Caracterización del conocimiento didáctico sobre números y operaciones manifestado por los futuros maestros en TEDS-M. Metodología para una comparación internacional. Seminario de Investigación de los Grupos de Pensamiento Numérico y Algebraico (de la Universidad de Granada) e Historia de la Educación Matemática (de la Universidad de Valencia). Málaga, Febrero 2014.

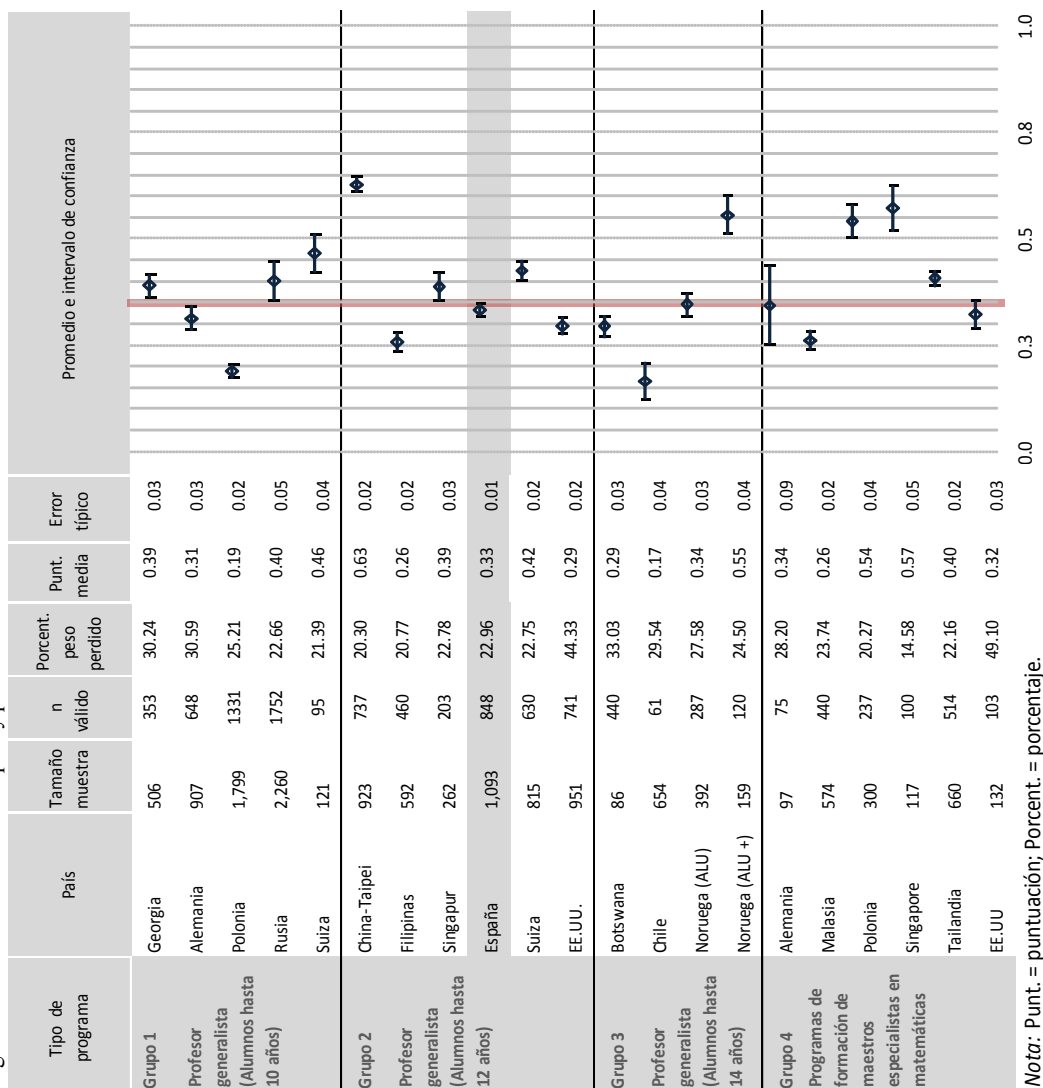
Gómez, P. y **Gutiérrez-Gutiérrez, A.** Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de Primaria. Resultados del estudio TEDS-M. Investigación en Educación Matemática XVIII. Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Septiembre 2014.



## ANEXO

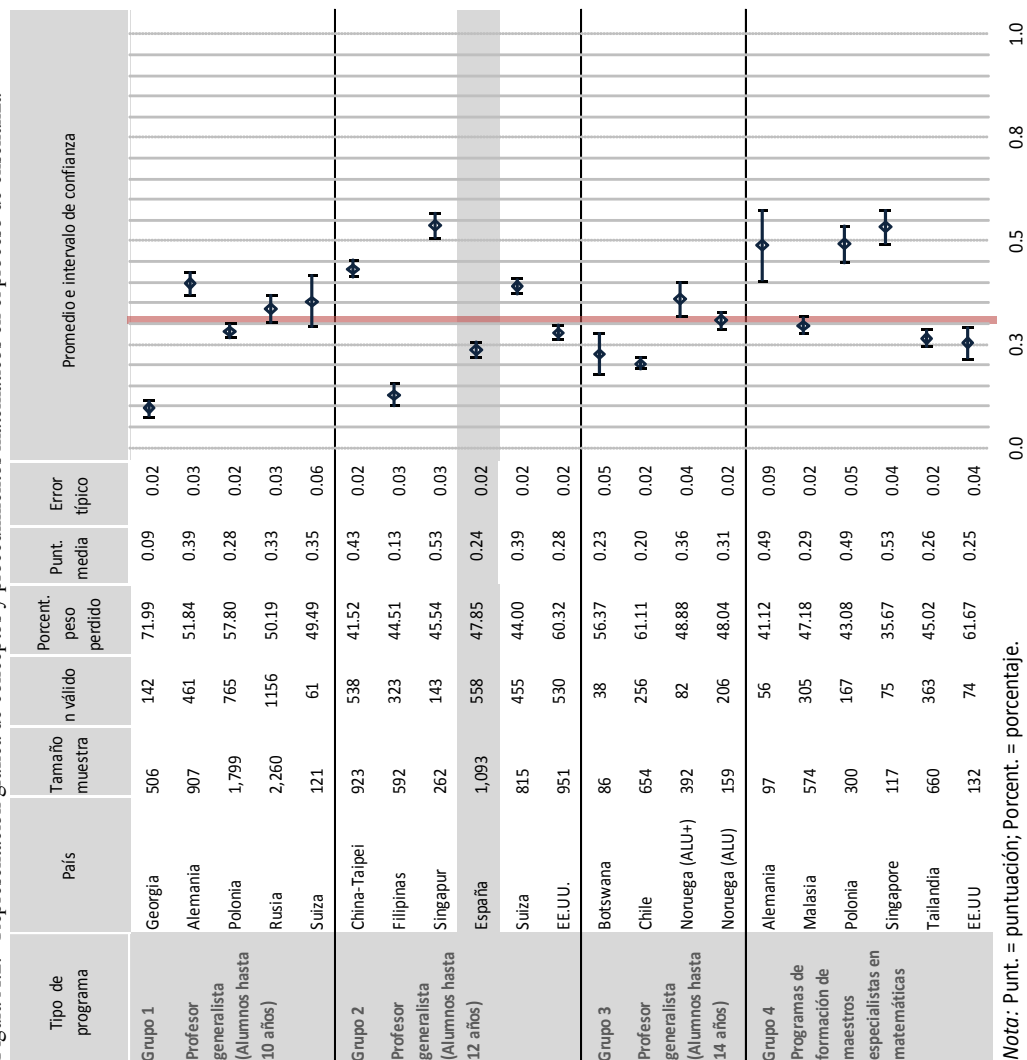
Incluimos en este anexo las figuras A1 y A2 que complementan la información contenida en los capítulos 4 y 5. De la misma forma que hemos hecho para las figuras 4.3, 4.4 y 4.5, mostramos en cada una de ellas la media y la desviación típica de cada uno de los países participantes para las categorías “reconocer los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos” y “presentar alternativamente conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza”.

Figura A.1. Reconocer los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza



Nota: Punt. = puntuación; Percent. = porcentaje.

Figura A.2. Representación gráfica de conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza



Nota: Punt. = puntuación; Porcent. = porcentaje.



# REFERENCIAS

- Blömeke, S., Suhl, U. y Döhrmann, M. (2013). Assessing strengths and weaknesses of teacher knowledge in Asia, Eastern Europe, and western countries: differential item functioning in TEDS-M. *International Journal of Science and Mathematics Education* 11(4), 795-817.
- Castro, E. y Flores, P. (2008). Spanish report on teacher education at the primary level. En J. Schwille, L Ingvarson y R. Holdgreve-Resendez (Eds.) *TEDS-M Encyclopedia. A guide to teacher education context, structure, and quality assurance in 17 countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)* (pp. 209-226). Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Döhrmann, M., Kaiser, G. y Blömeke, S. (2014). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. En S. Blömeke, F. J. Hsieh, G. Kaiser y W. H. Schmidt (Eds.), *International Perspectives on Teacher Knowledge, Beliefs and Opportunities to Learn* (pp. 431-456). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca: SEIEM.
- Gutiérrez, A. (2012). *Conocimiento didáctico sobre números y operaciones de los estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M*. Trabajo Fin de Máster no publicado, Universidad de Granada, España. Recuperado el 10 de enero de 2015 de: <http://funes.uniandes.edu.co/1921/>.

## REFERENCIAS

---

- Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2012a). Conocimientos manifestados por los futuros maestros de Magisterio sobre didáctica de la matemática en el estudio TEDS-M. Ejemplo del análisis de una pregunta. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 111-118). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.
- Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2012b). Conocimiento en Didáctica de la Matemática de estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 341 -351). Jaén: SEIEM.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Rico, L. y Gómez, P. (2014). Metodología para una comparación internacional del conocimiento didáctico evaluado en TEDS-M. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 93-99). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Málaga.
- Hill, H., Schilling, S. y Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105(1), 11–30.
- INEE (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor. Recuperado el 18 de abril de 2015 de: <http://bit.ly/17gDhYe>
- Ingvarson, L., Tatto, M. T. y Peck, R. (2013). *An analysis of teacher education context, Structure and Quality-Assurance. Arrangements in TEDS-M countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., y Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of

- secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology*, 100(3), 716–725.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestros en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *BOE*, 244, 33004-33008.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, 173, 31487-31566.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2004). Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE*, 35, 5712-5791.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión*, 33, 11-27.
- Rico, L. y Fernández-Cano (2013). Análisis didáctico y la metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada: Comares.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Granada, España: Comares.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Schilling, S., Blunk, M., y Hill, H. (2007). Test validation and the MKT measures: Generalizations and conclusions. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2–3), 118–127.

## REFERENCIAS

---

- Schmidt, W., Tatto, M., Bankov, K., Blomeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., et al. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries (MT21 report)*. East Lansing, MI: Michigan State University.
- Senk, S., Tatto, M.T., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R. y Bankov, K. (2014). Knowledge of Future Primary Teachers for Teaching Mathematics: An International Comparative Study. En Blömeke, S., Hsieh, F. J., Kaiser, G. y Schmidt, W.H. *International Perspectives on Teacher Knowledge, Beliefs and Opportunities to Learn. TEDS-M Results* (pp. 61-90). New York: Springer.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study In Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L. y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam, The Netherlands: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).