UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES Y FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

Elena Castro Rodríguez

Granada, 2015

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autora: Elena Castro Rodríguez
ISBN: 978-84-9125-147-7
URI: http://hdl.handle.net/10481/40316

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES Y FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Doctor Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y del Doctor Pedro Gómez Guzmán del Departamento de Matemática de la Universidad de los Andes que presenta Elena Castro Rodríguez para optar al grado de Doctora en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Elena Castro Rodríguez

V°B° de los Directores

Fdo.: Luis Rico Romero Fdo.: Pedro Gómez Guzmán

El doctorando Elena Castro Rodríguez y los directores de la tesis Luis Rico y Pedro Gómez, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 14 de Mayo de 2015

Director/es de la Tesis — Doctorando

Fdo.: Luis Rico

Fdo.: Elena Castro Rodríguez

Fdo.: Pedro Gómez

El trabajo que se presenta en este documento pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctora dentro del programa de doctorado “Didáctica de la Matemática” impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Este trabajo se ha realizado en el Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, y con el apoyo del proyecto de investigación “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una manera u otra, han contribuido en este trabajo.

A mis directores de tesis Luis Rico y Pedro Gómez, por todo lo aprendido a lo largo de este proceso, y por el tiempo y dedicación otorgados estos cinco años.

A los miembros del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada por apoyarme en el desarrollo de este trabajo.

A la doctora Demetra Pitta-Pantazi (Universidad de Chipre), por acogerme en su universidad y prestarme su apoyo y atención.

A mis padres por todo su apoyo y ánimo durante todo el proceso.

A los estudiantes universitarios que participaron en esta investigación, gracias por su colaboración.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Presentación

La investigación que presentamos en este documento se centra en el conocimiento del contenido y en el conocimiento didáctico del contenido que un grupo de estudiantes universitarios del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada manifestaron acerca de la noción escolar de fracción basada en la relación parte-todo. El estudio se realizó bajo la perspectiva teórica del análisis didáctico desarrollado en los trabajos del grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 2003; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

El análisis didáctico es un procedimiento organizado en cinco análisis: análisis conceptual, análisis del contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo. En cada uno de ellos, se identifican datos relevantes, a partir de los cuales se completa un ciclo y se da paso al siguiente. La necesidad de un diseño metodológico para las distintas fases del estudio que realizamos, coherente con sus objetivos, llevó a seleccionar el análisis didáctico como método para este proceso. En particular, en este trabajo utilizamos los cuatro primeros análisis del análisis didáctico en distintas fases de la investigación. A continuación, describimos brevemente las fases desarrolladas a lo largo de la investigación.

En primer lugar, llevamos a cabo un análisis conceptual de la relación parte-todo. Este primer paso fue necesario para profundizar en dicha relación y conseguir precisión y dominio en su uso en las fracciones. En este estudio teórico, identificamos significados de esta relación con el propósito de fundamentarla y de establecer sus distintas interpretaciones, incluidas las escolares. La relación parte-todo desempeña funciones diferentes en diversas disciplinas, incluida la propia matemática, entre las que destacamos las de interés para nuestro trabajo en Didáctica de la Matemática. Esta parte del estudio es una reflexión teórica que se ajusta a características y condiciones del análisis conceptual (Rico, 2000; Rico, 2013a y b).

En segundo lugar, presentamos el estudio empírico en tres fases. En la primera fase, nos centramos en las tres componentes del análisis del contenido (estructura conceptual, sistemas de representación y contextos y modos de uso). Estas componentes forman un triángulo semántico, una terna mediante la que se establece el significado de un concepto. Diseñamos un cuestionario para establecer el conocimiento del contenido de los maestros en formación en base a la estructura conceptual, los sistemas de representación y los contextos y modos de uso de la relación parte-todo como interpretación de las fracciones. A partir del análisis de los datos, identificamos y caracterizamos distintos significados atribuidos a dicho concepto por los maestros en formación participantes en el estudio.

En la segunda fase, pusimos nuestra atención en algunos aspectos del conocimiento didáctico del contenido. Nos centramos en la planificación inicial para la instrucción acerca de las fracciones a partir de la relación parte-todo. Para ello, diseñamos un instrumento que incluyen una serie de viñetas con las que se puede ilustrar la relación parte-todo. A partir de esas imágenes, los maestros en formación debieron redactar una explicación para introducir a los escolares de primaria en el concepto de fracción. Mediante algunas de las componentes del análisis de instrucción, interpretamos el conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones que los maestros en formación inicial manifestaron en sus respuestas.

En la tercera y última fase, concluimos este estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido con un estudio de casos. Nos centramos en el diseño de tareas escolares, planteamiento de expectativas y detección de limitaciones en el aprendizaje, como componentes del análisis cognitivo. A partir de las respuestas previas obtenidas en la segunda fase sobre la planificación de la instrucción de fracciones, profundizamos en el análisis de su aprendizaje. La información se obtuvo a través de una entrevista que constó de una serie de preguntas relativas al aprendizaje de los escolares.

Presentamos el esquema de este proceso en la figura 0.1.

- FASE 0 — Análisis conceptual de la relación parte todo → Capítulo 5: Reflexión teórica sobre la relación parte-todo para profundizar y precisar el objeto de estudio.
- FASE 1 — Análisis del conocimiento del contenido → Capítulo 6: Estudio del conocimiento del contenido de la relación parte-todo a partir de las tres componentes del análisis del contenido.
- FASE 2 — Análisis del conocimiento didáctico. Planificación de la instrucción → Capítulo 7: Estudio del conocimiento didáctico del contenido centrado en la planificación de la enseñanza inicial del concepto de fracción. Para su análisis nos basamos en las componentes del análisis de instrucción.
- FASE 3 — Análisis del conocimiento didáctico. Aspectos del aprendizaje → Capítulo 8: Estudio del conocimiento didáctico del contenido centrado en diseño de una nueva tarea, planteamiento de objetivos y detección de limitaciones como componentes del análisis cognitivo.

Figura 0.1. Organización de las fases del estudio

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN EL QUE SE SITÚA NUESTRA INVESTIGACIÓN

Esta investigación fue desarrollada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, inscrito en el Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía. Este Grupo de Investigación se constituyó en 1988, al comenzar el Plan Andaluz de Investigación (PAI), en el que se incluye como línea prioritaria en matemáticas a la Didáctica de la Matemática.

Este grupo desarrolla investigaciones centradas en distintas líneas de trabajo entre las que se encuentran pensamiento numérico y formación de profesores, en las que se enmarca esta investigación.

La línea de Pensamiento Numérico surge de aquellos trabajos en los que la prioridad de estudio se establece sobre los contenidos matemáticos, particularmente sobre las estructuras numéricas, las estructuras algebraicas, los procesos infinitos y el cálculo y el análisis matemático.

Por su lado, las investigaciones realizadas en la línea de formación de profesores prestan atención a la formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria, se ocupan de la caracterización profesional del profesor de matemáticas en ejercicio, y sus promotores han hecho importantes esfuerzos de innovación para establecer y supervisar los programas de formación de maestros dentro de los títulos de grado maestros (de primaria e infantil) creados recientemente. Los procesos de convergencia europea y el papel que se le concede al aprendizaje por competencias están dando lugar a nuevas investigaciones que examinan el papel de las competencias profesionales de los maestros y los procesos formativos relacionados con ellas.

La amplia experiencia profesional de los integrantes del grupo en formación de profesores de matemáticas ha llevado a promover y participar en investigaciones sobre las líneas prioritarias del área relacionadas con el desarrollo y conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Así, la participación de los miembros del grupo en el estudio Teacher Education Study in Mathematics (TEDS-M), patrocinado por la International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), ha impulsado el interés sobre estudios comparativos relativos a la formación inicial de profesores de matemáticas.

En vista de las consideraciones previas, y dado que nuestro interés radica en estudiar el conocimiento sobre la relación parte-todo, en el ámbito de la formación de maestros, nuestro estudio se enmarca simultáneamente en estas dos líneas de investigación.

ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

El informe de la tesis se estructura en 9 capítulos, seguido del listado de las referencias bibliográficas y los anexos. A continuación, describimos el contenido de cada uno de los capítulos.

Capítulo 1. Este capítulo contiene el planteamiento del problema de investigación. En primer lugar, justificamos el problema a tratar y lo ubicamos dentro del área Didáctica de la Matemática como un estudio característico del grupo de investigación Pensamiento Numérico. Después, definimos las preguntas y los objetivos que nos proponemos abordar.

Capítulo 2. Presentamos una síntesis de las investigaciones previas relacionadas con las fracciones y la relación parte-todo dentro del ámbito de la matemática escolar, y hacemos énfasis en aquellas que se han realizado en contextos de formación inicial de profesores de educación primaria.

Capítulo 3. Abordamos los dos referentes teóricos que fundamentan el desarrollo de nuestra investigación: la noción de conocimiento profesional en el contexto de la formación de maestros de Educación Primaria y la noción de análisis didáctico de las matemáticas escolares.

En primer lugar describimos algunos de los marcos teóricos relativos al conocimiento profesional del maestro de matemáticas.

En segundo lugar, describimos el análisis didáctico y cada una de las dimensiones que lo forman.

Capítulo 4. Explicitamos los aspectos metodológicos para cada una de las fases del estudio.

Capítulo 5. Realizamos el análisis conceptual de la noción la relación parte-todo.

Capítulo 6. Recogemos los resultados de la primera fase de la parte empírica de la investigación. Esta fase se refiere al conocimiento matemático escolar de la relación parte-todo. Nos basamos en las tres componentes (estructura conceptual, sistemas de representación y contextos y modos de uso) del análisis del contenido de las matemáticas escolares.

Capítulo 7. En este capítulo y el siguiente nos centramos en el conocimiento didáctico de los maestros en formación. Particularmente, en este capítulo presentamos un estudio centrado en el conocimiento que manifiestan al realizar una planificación inicial de las fracciones en base a la relación parte-todo. Para el análisis de las producciones nos basamos en las componentes del análisis de instrucción.

Capítulo 8. La tercera fase empírica la tesis es el objeto de este capítulo. Contempla un estudio sobre el conocimiento del aprendizaje de las fracciones como relación parte-todo a partir de las componentes del análisis cognitivo.

Capítulo 9. Por último, presentamos las conclusiones que se derivan del desarrollo de esta investigación. Iniciamos su exposición atendiendo a la consecución de los objetivos de la investigación, propuestos en el capítulo 1 y describimos paralelamente las principales aportaciones de este trabajo. Seguidamente, reflexionamos y aportamos algunas conclusiones relativas al análisis didáctico. Finalmente, presentamos las limitaciones de este estudio y recogemos las líneas abiertas que constituyen perspectivas de continuación de la investigación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este capítulo contiene el planteamiento general del problema que abordamos como trabajo de tesis. En el primer apartado, justificamos el problema y contextualizamos la pertinencia del estudio dentro del marco de la investigación en Didáctica de la Matemática, y lo situamos en los trabajos del grupo de Investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (http://fqm193.ugr.es/). En el segundo apartado, justificamos la elección de las fracciones como contenido matemático específico del estudio y su particularización en la relación parte-todo, en la que centramos este trabajo. En el tercer apartado, desglosamos las preguntas de investigación que queremos abordar y, por último, partiendo de ellas, enunciamos los objetivos de esta tesis.

1.1. LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

La línea de formación de profesores se ha convertido en un área de investigación primordial en educación (Sánchez, 2011). Dentro de este campo, se ha analizado la naturaleza del conocimiento profesional desde una perspectiva del profesor en general (Shulman, 1986; Grossman, 1990), y desde la perspectiva específica del profesor de matemáticas (Bromme, 1994; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ponte y Chapman, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Estos trabajos consideran que el conocimiento profesional del profesor tiene diversas dimensiones. La mayoría de los autores hacen una distinción entre el conocimiento del contenido (que se refiere a los contenidos de la matemática como disciplina escolar) y el conocimiento pedagógico o didáctico del contenido (entendido como aquel conocimiento que el profesor pone en juego para la enseñanza de las matemáticas).

Dado que el campo que abarcan estos dos tipos de conocimiento es muy general, ha sido necesario desarrollar teorías locales en las áreas de conocimiento que traten de forma más operativa el conocimiento del profesor y su forma de desarrollarlo. Uno de los primeros intentos teóricos por abordar de forma operativa el conocimiento que debe adquirir del profesor de matemáticas durante su formación inicial se ha realizado dentro del Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico* (http://fqm193.ugr.es/), de la Universidad de Granada. El primer paso en la delimitación de este enfoque teórico consistió en fijar unos "elementos organizadores que permitan a los profesores en formación buscar y organizar la información para que ellos posteriormente, puedan realizar el desarrollo curricular de cada tópico" (Rico, 1992, p. 355). Algunos de estos elementos podrían ser componentes del conocimiento del profesor. Para ello, se definieron y conceptualizaron en términos de organizadores del currículo (Rico, 1997). Posteriores trabajos del grupo de investigación perfilaron la noción de organizador del currículo de matemáticas (Rico, 1992, 1997; Segovia y Rico, 2001), definidos como "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (Rico, 1997, p. 45). En un primer momento (Rico, 1992), los siete organizadores considerados fueron (a) ubicación y tratamiento de los contenidos del tema en el diseño curricular del Ministerio y Comunidad Autónoma Andaluza, (b) conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes, (c) fenomenología de los conocimientos, (d) modelos, representaciones, materiales y recursos, (e) errores y dificultades, (f) desarrollo histórico del tópico y (f) bibliografía de referencia. Posteriormente, y manteniendo la misma intencionalidad y uso, los organizadores se han ido perfilando y reacomodándose en nuevas teorías armonizadoras de las ideas generales subyacentes.

La propuesta teórica de los organizadores del currículo supuso, en su momento, una ruptura con la forma de abordar la organización de los contenidos de los programas de didáctica de la matemática en la formación inicial de los profesores de matemáticas. Aportaron elementos de conocimiento para el desarrollo competente de unidades didácticas, frente a la mera elaboración de programaciones "de caja negra" que estaban bien enmarcadas desde el punto de vista general (objetivos, contenidos, actividades, metodología y evaluación), pero vacías y desprovistas de criterios para su concreción en las áreas de conocimiento específicas como la de matemáticas. A este proceso de trabajo didáctico del alumno en el que construye unidades didácticas auxiliándose de los elementos organizadores, Rico (1992) lo designa como *análisis didáctico*. Para facilitar esta labor, bajo el enfoque teórico de los organizadores, se desarrollaron materiales curriculares y libros de texto que organizan el contenido necesario para un profesor de matemáticas de las etapas educativas de Primaria y Secundaria.

Posteriormente, los organizadores del currículo se sistematizaron en distintos niveles o componentes dando lugar a la conceptualización del análisis didáctico como nivel de reflexión curricular (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). Dentro del área de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, el análisis didáctico se ha conceptualizado como una técnica o secuencia estructurada para organizar y guiar el diseño de unidades didácticas en las matemáticas escolares, proporcionando criterios para estructurar los contenidos, la cognición, la instrucción y la evaluación de un tema específico. En esta línea, las investigaciones de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009) se ocuparon de evaluar el análisis didáctico como parte de un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria de la Universidad de Granada basado en el diseño de unidades didácticas. En estos trabajos, el análisis didáctico se conceptualiza como un proceso ideal para diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Pero con la práctica, el análisis didáctico ha adquirido nuevas funcionalidades, y se conciben sus potencialidades cómo metodología de investigación en el campo de la Didáctica de la Matemática (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

1.1.1. El análisis didáctico como metodología de investigación

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico compuesto por cinco análisis: análisis conceptual, análisis del contenido matemático escolar, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo (Rico y Fernández-Cano, 2013). Esta conceptualización del análisis didáctico y sus componentes han sido utilizados en el área de Didáctica de la Matemática con diversas funciones (Rico, 2012; Rico y Fernández-Cano, 2013), entre las que destacan las siguientes.

- Dentro del ámbito curricular, el análisis didáctico se ha empleado como nivel de reflexión sobre la estructura del currículo de matemáticas, necesario para su estudio y el trabajo sobre el mismo.
- Dentro del ámbito profesional, el modelo se ha utilizado como estrategia de formación de profesorado.
- Dentro del ámbito investigador, el análisis didáctico se puede usar como metodología de investigación de orientación cuantitativa o cualitativa en

una primera instancia, y como evaluación de la evaluación, en una segunda instancia.

En el ámbito investigador donde nos situamos, "la función metodológica del análisis didáctico en Educación Matemática es tradición antigua que mantiene vigor y pujanza a lo largo de los años" (Rico, 2013b, p. 57). Cada una de las cinco fases del análisis didáctico, como procedimiento metodológico, se corresponde con un proceso de análisis y síntesis que identifica datos relevantes, a partir de los cuales cierra un ciclo y da paso a la fase siguiente. Cada una de ellas destaca unos focos del conocimiento relativo a un tema de las matemáticas escolares.

- El análisis conceptual es una reflexión previa que permite profundizar y caracterizar el concepto que se quiere investigar.
- El análisis del contenido matemático escolar establece y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema de matemáticas a través de la estructura conceptual, sistemas de representación y contextos o modos de uso.
- El análisis cognitivo trata de organizar "el para qué y hasta donde aprender determinados conocimientos sobre un tópico" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p.17) a través de expectativas de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y el diseño de tareas.
- El análisis de instrucción es relativo a cómo y cuándo se lleva a cabo la enseñanza. Entre los diversos aspectos que implica se encuentran la selección de contenidos a tratar, las tareas o su secuenciación.
- El análisis de actuación o evaluativo valora todo el proceso anterior con el propósito de mejorarlo.

Las fases del análisis didáctico han sido utilizadas en una variedad de investigaciones en Educación Matemática como herramientas para analizar textos (Picado, 2012), propuestas educativas (Caraballo, 2014), diseñar de experimentos en el aula (Valverde, 2012) o recopilación de información sobre el contenido a investigar (Rojas, 2014).

Sin embargo, no todas las fases del análisis didáctico han recibido la misma atención dentro del área de investigación. El análisis de contenido de las matemáticas escolares ha obtenido especial relevancia como herramienta metodológica en varios estudios para identificar la diversidad de significados del conocimiento de las matemáticas escolares (Fernández-Plaza, 2015; Martín-Fernández, 2013; Ortiz, 2002; Vílchez, 2014).

En nuestro trabajo de investigación, vamos más allá del estudio del conocimiento de las matemáticas escolares mediante el análisis del contenido, y profundizamos en el estudio del conocimiento didáctico de dichos contenidos a través del resto de fases del análisis didáctico. Dado que estas fases del análisis didáctico se han desarrollado pensando en la formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria, se nos plantea el interrogante de cómo puede funcionar en el estudio del conocimiento profesional de los maestros de primaria en formación inicial. Así, puesto que las fases y el análisis didáctico no han sido utilizados para estudiar el conocimiento de los profesores de Educación Primaria en su etapa inicial de formación, en esta investigación pretendemos poner de manifiesto su potencialidad al utilizarlo para abordar el conocimiento de los estudiantes universitarios del grado de Educación Primaria. Esta aplicación del análisis didáctico requiere su concreción sobre alguno de los contenidos matemáticos curriculares para poder desarrollarlo y mostrar sus potencialidades. Para ello, seleccionamos un contenido con gran tradición dentro de la investigación en Educación Matemática y que presenta múltiples dificultades para los maestros en formación inicial: las fracciones.

1.2. ÁREA PROBLEMÁTICA: EL CASO DE LAS FRACCIONES

El maestro ocupa un papel central en el proceso de enseñanza y aprendizaje por lo que es importante profundizar en su conocimiento profesional y en cómo él lo pone en práctica (Santos y Ponte, 2002). El conocimiento de los profesores en formación se ha convertido en foco de investigación en las últimas décadas (Ponte y Chapman, 2008). El interés de su estudio radica, entre otros, en la información que puede aportar para la toma de decisiones en la formación inicial de profesores y la posterior mejora de su práctica en el aula de matemáticas. Parte de estas investigaciones se centran en contenidos curriculares específicos, como es el caso de las fracciones, por ser uno de los tópicos que los profesores necesitan conocer para realizar su trabajo con los escolares (D'Ambrosio y Mendonca-Campos, 1992), y un concepto problemático para los profesores en formación inicial (Ball, 1990; Cramer, Postal y del Mas, 2002; Newton, 2008; Tatto et al., 2012; Tichá y Hospesova, 2013). Unas de las principales razones de esta problemática es el significado reducido que los futuros maestros poseen de conceptos básicos (Ponte y Chapman, 2008), como la relación parte-todo, concepto esencial en aritmética y fundamento de las fracciones (Behr et al, 1983, 1993; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe y Olive, 1990, 1993; Streffland, 1991).

En el área de la formación inicial de profesores, gran parte de los estudios sobre fracciones se centran en la capacidad de este colectivo para resolver diversas tareas o problemas sobre fracciones (Behr et al., 1997; Cramer y Lesh, 1998; Lacampagne et al., 1988; Newton, 2008; Tirosh, 2000) o en el conocimiento didáctico relativo a las operaciones con fracciones (Borko et al 1992; Charalambous, Hill y Ball, 2011; Fuller, 1996; Klein y Tirosh, 1997; Isiksal y Cakiroglu, 2011; Li y Kulm, 2008). Sin embargo, no hemos encontrado evidencias de estudios que aborden en profundidad el aspecto conceptual, especialmente en lo que se refiere a la relación parte-todo como aspecto clave y fundamental del significado de las fracciones. Nuestro trabajo busca contribuir a esta línea de interés, al profundizar en el conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico de la relación parte-todo que manifiesta un grupo de estudiantes universitarios del grado de Educación Primaria.

Seleccionamos el tópico de las fracciones por ser un contenido de carácter problemático para los maestros en formación inicial (Ball, 1990; Gairin, 2001; Newton, 2008; Simon, 1993). Particularmente, nos centramos en aspectos que configuran el fenómeno relativo a la relación parte-todo, por ser este el fundamento y primer acercamiento a las fracciones (Behr et al, 1983, 1993; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe y Olive, 1990, 1993; Streffland, 1991), y porque, a pesar de que los profesores manifiestan una comprensión casi exclusiva de la fracción como relación parte-todo (Domoney, 2001; Lo y Grant, 2012), carecen de una comprensión clara de dicha noción (Lacampagne, Post, Harel, y Behr, 1988; Newton, 2008).

1.2.1. La relación parte-todo

El desarrollo del sentido numérico se produce desde la más temprana escolaridad y se cimenta sobre el conocimiento informal que tienen los niños acerca de las cantidades del mundo físico y sus relaciones. Este conocimiento se desarrolla en principio mediante actividades con materiales manipulativos y, con ellos, adquieren una forma de pensar que Resnick (1990) denomina razonamiento protocuantitativo, dado que es un razonamiento sin números. Partiendo de esta idea, se han realizado un buen número de investigaciones que consideran la hipótesis de que, en la base del sentido numérico, se encuentran tres tipos de esquemas protocuantitativos: el de aumento-disminución, el esquema parte-todo y el esquema de comparación (Resnick, 1990), a partir de los cuales se sugiere que se construyen los conocimientos aritméticos de los niños.

El esquema parte-todo, desde un punto de vista cognitivo, o la relación parte-todo, desde un punto de vista de la fundamentación lógica de la matemática que da sustento a su tratamiento educativo, se encuentra presente en la comprensión del número y las operaciones, así como en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Su dominio es uno de los logros que han de alcanzar los niños a lo largo de su escolaridad, ya que una sólida formación en la misma facilita el trabajo posterior con el valor de posición, los conceptos numéricos y la resolución de problemas verbales. En la matemática escolar, encontramos la relación parte-todo en el estudio de las estructuras aritméticas, tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa, con diferente significado. La relación parte-todo es el origen para entender dichas estructuras, ya que da lugar a acciones por las cuales se presenta la estructura aditiva (agregar, reunir, segregar, separar) y multiplicativa (reiterar o hacer partes iguales).

En la estructura multiplicativa, encontramos un caso especial donde la relación parte-todo adquiere especial relevancia: las fracciones. Las fracciones surgen en una relación multiplicativa parte-todo como el modo de expresar la relación entre una parte y el todo del que procede. De este modo, los niños comienzan el aprendizaje de las fracciones en términos de las partes que componen un todo. En general, las investigaciones centradas en este campo (Freudenthal, 1983; Kieren, 1993; Nesher, 1985; Steffe y Olive, 2010) coinciden en identificar que el concepto de fracción emerge de la aplicación de unos esquemas o mecanismos intuitivos, en particular el proceso de partición en cantidades continuas o contextos discretos, y destacan la identificación de la unidad o todo. El concepto de totalidad como algo que se descompone, recompone y convierte ha sido el fundamento de la relación parte todo y un factor que da lugar y unifica los subconstructos de los números racionales (Kieren, 1976).

1.3. PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

La revisión de las investigaciones realizadas sobre el tema ha hecho ver que, si bien se ha reflexionado bastante sobre el esquema parte-todo en relación con el papel que desempeña en la resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva, no se ha resaltado tanto su importancia para el pensamiento multiplicativo, y menos aún se ha profundizado en esta noción desde el punto de vista del conocimiento del profesor. Esta constatación nos llevó a plantearnos tres preguntas en nuestro estudio centradas en el conocimiento profesional de los maestros en formación inicial sobre la relación parte-todo. Específicamente, abordamos las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el fundamento y cuáles son las posibles interpretaciones que sustentan la relación parte-todo en distintas disciplinas y, particularmente, en las matemáticas escolares?
2. ¿Qué significados de la relación parte-todo expresan el conocimiento sobre fracciones de los maestros en formación inicial y cómo se describen en términos de la estructura conceptual, las representaciones y los contextos y modos de uso de dicha relación?
3. ¿Qué conocimiento didáctico sobre la enseñanza de la relación parte-todo manifiestan los maestros en formación cuando planifican una propuesta sobre la enseñanza del concepto de fracción?
4. ¿Qué conocimiento didáctico sobre el aprendizaje escolar manifiestan los maestros en formación cuando diseñan tareas, enuncian expectativas y detectan limitaciones de aprendizaje sobre el concepto de fracción basado en la relación parte-todo?

Así mismo, y en conjunción con las preguntas anteriores, vemos la necesidad de imbricarlas con el procedimiento metodológico que siguen los profesores en formación inicial desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática, concretado en este caso en el análisis didáctico. Con ello, pretendemos que los resultados que obtengamos tengan validez ecológica, puesto que son obtenidos durante el periodo de formación inicial de los profesores y a través de la metodología didáctica con la que se desarrolla su programa de formación en Didáctica de la Matemática.

Las preguntas anteriores dan lugar a los objetivos generales de nuestra investigación.

1.3.1. Objetivos Generales

De la primera pregunta planteada en el apartado anterior surge el primero de los objetivos generales de este trabajo. Desde el punto de vista epistemológico, la relación parte-todo es una relación fundamental en matemáticas (Castro-Rodríguez, Castro y Torralbo, 2013) y, desde el punto de vista cognitivo, lo es en el primer acercamiento a las estructuras aritméticas básicas (Castro-Rodríguez y Castro, 2013). Pese a esta importancia, como relación básica en los fundamentos de las matemáticas y como estructura mental organizadora de conocimientos matemáticos básicos, la relación parte-todo no ha sido ponderada suficientemente en los marcos teóricos con los que se abordan las investigaciones en Educación Matemática. Por ello, con nuestro primer objetivo, buscamos profundizar en la relación parte-todo, al llevar a cabo una reflexión teórica de esta relación a través del análisis conceptual.

OG1. Profundizar en los usos e interpretaciones de la relación parte-todo a través de su análisis conceptual para determinar con precisión el alcance del concepto objeto de estudio.

La segunda pregunta que nos planteamos nos remite a las apropiaciones de conceptos y nociones que han hecho suyas los estudiantes de magisterio durante su etapa educativa y nos introduce en la parte empírica del trabajo. Con ella, buscamos obtener información sobre el conocimiento de los profesores en formación relativa a los significados de la relación parte-todo que podrían poner en juego durante en una hipotética actuación como maestros en activo. Esto nos remite al análisis didáctico y se concreta en el siguiente objetivo.

OG2. Identificar, describir y analizar el conocimiento matemático escolar sobre fracciones que manifiesta un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria basado en la relación parte-todo, en términos de su estructura conceptual, sus sistemas de representación y los contextos y usos.

En la tercera pregunta, profundizamos en el conocimiento didáctico de los maestros en formación inicial sobre la relación parte-todo y focalizamos nuestra atención en la enseñanza. Este interés da lugar al tercer objetivo.

OG3. Identificar, describir y analizar el conocimiento didáctico que expresa un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria sobre cómo planificar la enseñanza de las fracciones basada en la relación parte-todo.

En la cuarta y última pregunta, continuamos profundizando en el conocimiento didáctico sobre la relación parte-todo. En esta ocasión, centramos nuestra atención en el aprendizaje de esta relación que concretamos en el último objetivo.

OG4. Identificar, describir y analizar el conocimiento didáctico que manifiesta un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria sobre el aprendizaje escolar de las fracciones basado en la relación parte-todo.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE ANTECEDENTES

En la revisión que realizamos sobre investigaciones elaboradas en las últimas décadas, se revela que la investigación en formación de profesores reciente ha dirigido su atención hacia la cognición del profesor. En particular, como campo de investigación busca describir, clasificar e interpretar el conocimiento del profesor, sus procesos cognitivos y la praxis didáctica. Ponte y Chapman (2006) clasificaron estos estudios sobre formación de profesores en cuatro categorías: conocimiento matemático que tienen los profesores, conocimiento que los profesores tienen sobre la enseñanza de las matemáticas, creencias y concepciones de los profesores, y conocimiento práctico de los profesores. Dentro de la primera categoría, se ha realizado un gran número de investigaciones sobre formación de profesores, que se han centrado, directa o indirectamente, en las dificultades o deficiencias que los profesores presentan en conceptos o procesos matemáticos que deberían conocer y dominar por ser parte de su futuro conocimiento profesional (Behr, Khoury, Harel, Post, Lesh, 1997; Fuller, 1996; Tirosh, 2000; Valverde, 2012). Los temas matemáticos a los que hacen referencia estos estudios son variados y, entre los que obtienen una mayor atención, se encuentran la geometría, la estructura aditiva y multiplicativa, las fracciones y la resolución de problemas.

Dado que nuestro interés está en la relación parte-todo multiplicativa como noción central del concepto de fracción, en este capítulo realizamos una síntesis de investigaciones previas relacionadas con las fracciones —realizadas en contextos de formación de profesores (apartados 1 y 2)— y resumimos los proyectos de investigación y trabajos más relevantes sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y números racionales (apartado 3).

Dado que la literatura sobre este tema es muy extensa, realizamos la revisión bibliográfica en dos etapas. Primero, efectuamos una consulta en las bases de datos ERIC y MATHDI (ZDM) utilizando como descriptores combinaciones de los términos: fracción, número racional, significados, relación parte-todo, formación de profesores y conocimiento profesional. Realizamos la segunda etapa de la revisión bibliográfica a partir de principales revistas de educación matemática internacionales: Journal for Research in Mathematics Education (desde 1984), Recherches en Didactiques des Mathématiques (desde 1990), Educational Studies in Mathematics (desde 1988), Arithmetic Teacher (desde 1986), Mathematics Teacher (desde 1986), Teaching Children Mathematics (completa) y Mathematics Teaching in the Middle School. También revisamos las revistas españolas Epsilon, Suma, Uno y Enseñanza de las Ciencias para el periodo comprendido desde el inicio de su publicación hasta 2014. Además, realizamos una búsqueda completa dentro de las actas del congreso PME (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education). Dada la especificidad de este estudio, entre todos los trabajos identificados con esos descriptores, seleccionamos aquellas investigaciones más significativas para nuestros objetivos.

Estas investigaciones permitieron marcar las cuestiones centrales que caracterizaron el estado de la cuestión en la que se situó nuestra investigación. Nuestro interés por estudiar el conocimiento de los maestros en formación sobre la relación parte-todo implicó que nuestro estudio se enmarcara simultáneamente en dos líneas de investigación: la línea de Pensamiento Numérico y Algebraico y la línea de Formación de Profesores.

Con base en las consideraciones expuestas, estructuramos el capítulo en cuatro secciones.

La primera de ellas recoge aquellas investigaciones centradas en el conocimiento escolar sobre fracciones de los maestros en formación. Esta revisión la estructuramos en cuatro apartados:

1. Investigaciones sobre el conocimiento de la estructura conceptual de las fracciones.
2. Investigaciones sobre el conocimiento de las representaciones de las fracciones.
3. Investigaciones sobre el conocimiento de los contextos y modos de uso de las fracciones.
4. Síntesis de la revisión sobre las investigaciones relativas al conocimiento de las fracciones.

La segunda sección corresponde a una revisión de investigaciones centradas en el conocimiento didáctico de las fracciones de los maestros en formación, junto con una síntesis de tal revisión.

En la tercera sección presentamos algunos de los proyectos e investigaciones relevantes en el área de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y una síntesis de los resultados y aportes de tales trabajos.

Por último, en la cuarta sección exponemos las conclusiones de la revisión de antecedentes realizada.

2.1. INVESTIGACIONES CENTRADAS EN EL CONOCIMIENTO ESCOLAR SOBRE FRACCIONES

Los estudios más frecuentes sobre el conocimiento del profesor de matemáticas se centran en el conocimiento matemático escolar. Especialmente, el estudio del conocimiento de los profesores en formación sobre las fracciones ha sido un tema que ha recibido atención en las investigaciones de educación matemática en las últimas décadas (Valverde, 2012). A pesar de que estos estudios han proporcionado una mejor comprensión del conocimiento profesional sobre fracciones, es necesario seguir profundizando, ya que proporcionan información útil para los programas de formación de profesores (Osana y Royea, 2011; Park, Güçler y McCrory, 2013).

Dado que abordamos parte de este estudio a partir de las dimensiones del análisis del contenido de las matemáticas escolares (estructura conceptual, representaciones y contextos y modos de uso), en esta sección, revisaremos la literatura con base en dichas componentes. Esta primera revisión de la literatura se basa en los estudios existentes del conocimiento sobre fracciones realizados principalmente con maestros en formación y que se centraron en algunas de las tres componentes del triángulo semántico (Lo y Grant, 2012; Pinto y Tall, 1996; Tichá y Hŏspesová, 2013; Toluk-Ucar, 2009; Wright, 2008).

2.1.1. Investigaciones sobre el conocimiento de la estructura conceptual de las fracciones

El estudio del conocimiento relativo al concepto de fracción y su estructura matemática, tanto de profesores en formación como en activo, ha sido un tema recurrente de investigación que no ha perdido interés con el paso del tiempo (Lo y Grant, 2012; Lubinski, Fox y Thomason, 1998; Park, Güçler y McCrory, 2013;

Pinto y Tall, 1996). Dado que los focos de investigación son variados, reseñaremos algunos de los resultados más importantes.

Uno de los temas relativos a la estructura conceptual es la definición del concepto de fracción. Domoney (2001) mostró que los maestros en formación inicial que participaron en su estudio definieron este concepto a través de una imagen visual de la relación parte-todo y no consideraron la fracción como un número en sí mismo. Sin embargo, otros estudios muestran que cuando el concepto a definir fue el de número racional, los sujetos lo conceptualizaron como el cociente de dos números enteros, donde las fracciones representan el "mundo real" de los números racionales (Pinto y Tall, 1996).

Otras investigaciones indagaron, a través de diversos ítems y tareas, sobre el conocimiento de los futuros maestros en diversos aspectos conceptuales y procedimentales de las fracciones, entre los que se encontraron elementos clave de su estructura matemática como la unidad, la relación parte-todo o las operaciones (Cramer y Lesh, 1988; Lo y Grant, 2012; Newton, 2008).

El trabajo realizado por Lo y Grant (2012) se centró en la compresión de los maestros en formación inicial sobre componentes clave de las fracciones como el todo, la parte, las operaciones y la resolución de problemas. Los sujetos fueron agrupados según sus calificaciones en asignaturas del área de matemáticas denominados como grupo bajo, medio y alto. Los resultados del grupo bajo mostraron una conceptualización extremadamente limitada del concepto de fracción, al considerar a/b como "a partes de b partes". Estos estudiantes fueron capaces de resolver tareas sencillas sobre iterar fracciones unitarias, pero no pudieron resolver tareas que requiriesen particiones de la unidad. El grupo medio conceptualizó a/b como "a partes de 1/b, donde 1/b se obtuvo al dividir el todo en b partes iguales". Además, estos maestros en formación fueron capaces de usar el proceso de partición para crear una nueva unidad e iterar fracciones unitarias y no unitarias de forma numérica y geométrica. Finalmente, respecto al grupo alto, los autores sólo destacan que no todos los sujetos del grupo alto tuvieron una sólida comprensión del concepto de fracción. Algunos de ellos se basaron en el método de ensayo y error para resolver las tareas.

Cramer y Lesh (1988) evaluaron el conocimiento sobre fracciones de futuros maestros de educación primaria a través de 45 ítems, algunos de ellos sobre el concepto de unidad o de relación parte-todo. En general, los estudiantes obtuvieron menos éxito del esperado por los investigadores. Establecieron que un 20% de los sujetos no mostraron conocimiento matemático suficiente para enseñar fracciones.

El trabajo de Newton (2008) trató parcialmente el conocimiento de la estructura conceptual de las fracciones. Este estudio evaluó el conocimiento sobre las cuatro operaciones con fracciones de un grupo de 99 estudiantes universitarios de Educación Primaria al comienzo y al finalizar el curso académico. Para proporcionar una comprensión más completa de este conocimiento, examinaron también conceptos elementales como la relación parte-todo. En los resultados, destacaron errores en que los sujetos incurrieron al iniciar y al finalizar del curso académico. Mientras que, al comienzo del curso, sus errores consistieron en concepciones erróneas sobre la unidad o sobre la relación parte-todo, al finalizarlo, mostraron errores de habilidad en el cálculo de operaciones, la búsqueda de fracciones equivalentes y la expresión de un número mixto.

Los resultados anteriores fueron similares cuando los participantes eran profesores de primaria en ejercicio. El estudio realizado por Lacampagne, Post, Harel y Behr (1988) mostró que los maestros carecían de una comprensión clara de los conceptos de parte-todo y partición. Concretamente, dado un modelo de una relación parte-todo, tuvieron dificultad para representar la unidad. Fueron capaces de generar un modelo de área, pero tuvieron problemas en identificar fracciones en conjuntos de objetos discretos. En este sentido, encontraron que los errores de los maestros sobre las fracciones fueron similares a los de los niños de primaria (Post, Harel, Behr y Lesh, 1988).

2.1.2. Investigaciones sobre el conocimiento de las representaciones de las fracciones

Diversas investigaciones proporcionan evidencias sobre cómo el uso en la enseñanza de las representaciones puede facilitar el aprendizaje y la construcción de significado de los conceptos matemáticos (Kurt y Cakiroglu, 2009; Llinares, Sánchez y García, 1994). Este interés ha producido multitud de estudios asociados a las representaciones de las fracciones (Dreher, Kuntze, Winkel, 2014; Pitta-Pantazi, Gray y Christou, 2004), entre los que encontramos investigaciones centradas en el conocimiento del contenido de los maestros en formación sobre las fracciones (Cluff, 2005; Gairin, 1998; Khoury y Zazkis, 1994; Llinares, Sánchez y García, 1994; Toluk-Ucar, 2009; Wright, 2008). Algunos de sus resultados muestran que los futuros maestros representan las fracciones a través de un trozo de tarta, decimales, porcentajes y cajas divididas en partes iguales y coloreadas (Cluff, 2005). A través de un estudio de casos, Wright (2008) analizó las representaciones que produjeron ocho maestros en formación cuando elaboraron mapas conceptuales sobre el concepto de fracción. En estos mapas conceptuales, tres de los participantes no realizaron ninguna representación, dos de los sujetos incluyeron representaciones simbólicas y tres utilizaron representaciones gráficas. Las representaciones gráficas incluidas fueron modelos de área en los tres casos y modelos de conjunto en dos de los casos.

Algunos de los estudios sobre representaciones con fracciones van más allá del concepto de fracción y se centran en cómo los maestros representan las operaciones con fracciones (Toluk-Uçar, 2009; Borko et al., 1992). Tales estudios muestran que los futuros maestros son capaces de proporcionar representaciones gráficas para la multiplicación de fracciones, pero tienen dificultades en desarrollar representaciones para su división (Borko et al, 1992). Además, en estas representaciones usan exclusivamente modelos de área, y solo ocasionalmente utilizan otros modelos (Toluk-Uçar, 2009).

El estudio de Gairín (1998) se centró en dos sistemas de representación de los números racionales positivos, el fraccionario y el decimal. Él realizó y evaluó una propuesta didáctica que pretendió (a) incrementar la comprensión de los futuros maestros sobre los números racionales positivos mediante el fortalecimiento de las conexiones entre ambos tipos de representaciones, y (b) potenciar la reflexión, desde su posición de aprendices, sobre un proceso de enseñanza-aprendizaje cuyas herramientas conceptuales son las de la comprensión, modelo y sistema de representación. El autor concluyó que, cuanto mayor fue la comprensión de los modelos presentados en su propuesta didáctica por parte de los futuros maestros, más eficaces se mostraron en la detección y diagnóstico de los errores de los escolares y en la producción de razonamientos sustentados en el mundo real. Los estudiantes para maestro que mostraron una débil comprensión del modelo llegaron a aceptar como correctas respuestas erróneas de los escolares y usaron un lenguaje mayormente simbólico en las explicaciones que ofrecieron a los escolares.

Llinares, Sánchez y García (1994) analizaron las relaciones existentes entre el tipo de tarea presentada, el modo de representación gráfica empleado y la magnitud de la fracción a través de un cuestionario de elección múltiple planteado a maestros en formación inicial. En algunas de las tareas plantearon reconstruir el todo a partir de una parte (a través de una representación gráfica de área o una representación discreta), presentaron el todo y pidieron identificar una fracción. En sus resultados, destacaron la poca influencia que, sobre el porcentaje de éxito, tuvo el modo de representación gráfica utilizado, frente a las otras dos variables consideradas: tipo de tarea y magnitud de la fracción. Los ítems con menor porcentaje de éxito fueron aquellos que incluyeron fracciones mayores que la unidad. Los autores concluyeron que la utilización de la representación gráfica en los ítems sólo influyó en fracciones menores que uno.

2.1.3. Investigaciones sobre el conocimiento de los contextos y modos de uso de las fracciones

El tema de los distintos modos de uso e interpretaciones de las fracciones ha recibido atención por los investigadores y educadores en las últimas décadas (Behr et al., 1983; Carpenter, Fennema y Romberg, 1993; Figueras, 1988; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976; Ohlsson, 1988; Streefland, 1978; Vergnaud, 1983).

En relación con los maestros en formación inicial, los estudios muestran que los estudiantes para maestro asignan a la fracción un sentido casi exclusivo como relación parte-todo. Además, este sentido se asocia con un modelo físico (Gairin, 1998; Wright, 2008).

Gairín (2003) se centró en el tópico de fracciones para desarrollar y evaluar una experiencia de aula que completó con un estudio de casos exploratorio mediante la técnica de entrevistas. Una de las preguntas realizadas a los futuros maestros fue "Escribe todo lo que entiendes cuando ves el símbolo 5/7". Como resultado, el 59% de los estudiantes hicieron una lectura de los símbolos (fracción, número racional, o cinco séptimos), mientras que el 32% de ellos respondió como relación parte-todo (parte tomada de una tarta, de una barra de helado, ...) y el 9% de las respuestas fueron erróneas. Ninguna de las respuestas mencionó los significados de medida, operador o razón.

Estos resultados son similares a los obtenidos por Wright (2008), quien concluyó que la relación parte-todo fue la interpretación más común manifestada por los maestros en formación inicial. Los participantes estaban menos familiarizados con otras interpretaciones de las fracciones, como la de operador, cociente o razón, siendo esta última la que les presentó mayor dificultad cuando se les pidió que describiesen las concepciones erróneas de escolares y que realizasen representaciones.

En cuanto a las conexiones entre las fracciones y el mundo real, la mayoría de los maestros en formación utilizaron situaciones estereotipadas y una variedad limitada de interpretaciones cuando se les planteó inventar problemas sobre fracciones (Tichá y Hŏspesová, 2013). Aunque se usen números simples, la mayoría de los sujetos fallaron al inventar problemas que modelaran operaciones con fracciones, mostrando sus carencias en la comprensión de dichas operaciones (Osana y Royea, 2011; Philippou y Christou, 1994).

2.1.4. Síntesis de la revisión sobre las investigaciones relativas al conocimiento escolar de las fracciones

En este apartado, presentamos los principales hallazgos sobre el conocimiento de profesores en formación presentes en las investigaciones anteriores. Para ello, en primer lugar, organizamos en la tabla 2.1 los estudios revisados, según el año, el tema tratado y el nivel de formación. Posteriormente, resumimos algunos de sus resultados.

Tabla 2.1. Estudios relativos al conocimiento escolar de los profesores sobre fracciones

Año	Autores	Tema	Nivel
1988	Lacampagne, Post, Harel y Behr	Resolución de tareas sobre aspectos conceptuales y procedimentales de los números racionales	PE
1988	Post, Harel, Behr, y Lesh	Resolución de tareas sobre aspectos conceptuales y procedimentales de los números racionales	PE
1988	Cramer y Lesh	Resolución de tareas sobre fracciones	PFI
1994	Khoury y Zazkis	Conversión de fracciones a diferentes bases	PFI
1994	Llinares, Sánchez y García	Resolución de ítems de fracciones que involucran varias representaciones gráficas y magnitudes.	PFI
1995	Philippou y Christou	Habilidades para conectar situaciones de la vida real con representaciones simbólicas de las fracciones	PFI
1996	Fuller	Conocimiento y creencias sobre enseñanza de operaciones con números enteros, operaciones con fracciones y geometría	PE

1996	Pinto y Tall	Definición de número racional e irracional	PFI
1997	Behr, Khoury, Harel, Post y Lesh	Resolución de tareas de fracción como operador	PFI
1999	Gairín	Representaciones fraccionaria y decimal	PFI
2000	Tirosh	División de fracciones	PFI
2001	Domoney	Concepto de fracción y representación mental	PFI
2005	Cluff	Representaciones de la multiplicación y división de fracciones	PFI
2008	Newton	Ítem sobre fracciones y operaciones con fracciones	PFI
2009	Toluk-Ucar	Invención de problemas y representaciones sobre operaciones con fracciones	PFI
2008	Wright	Mapas conceptuales de fracción	PFI
2011	Osana y Royea	Invención de problemas de operaciones con fracciones	PFI
2012	Lo y Grant	Resolución de tareas sobre fracciones	PFI
2013	Tichá y Hŏspesová	Invención problemas fracciones	PFI

Nota: PFI= profesores en formación inicial; PE=profesores en ejercicio

Como se observa en la tabla, el estudio del conocimiento de los profesores en formación y en ejercicio en relación con las fracciones ha sido un tema recurrente desde finales de los 80 hasta la actualidad. Los primeros estudios trataron la habilidad de este colectivo para resolver tareas o problemas sobre diversos temas: operaciones con fracciones, equivalencia de fracciones, paso de fracción a decimal, etc. A mediados de los noventa, cambió esta tendencia: los estudios se volvieron más específicos, y se centraron y profundizaron en aspectos concretos de las fracciones o números racionales.

Como síntesis de los resultados de estos estudios, encontramos que los profesores en formación:

- Manifestaron una limitada comprensión conceptual de las fracciones (Osana y Royea, 2011).

- Mostraron un significado casi exclusivo de la fracción como relación parte-todo (Domoney, 2001; Lo y Grant, 2012). Además, este significado se asoció a un modelo físico (Gairin, 1999; Wright, 2008). No obstante, los estudios demostraron que los sujetos carecen de una comprensión clara de los conceptos de relación parte-todo y partición (Lacampagne, Post, Harel y Behr, 1988; Newton, 2008).
- Su conocimiento sobre los números racionales tendió a estar limitados al uso de reglas (Cramer y Lesh, 1988; Li y Kulm, 2008; Newton, 2008).
- Presentaron mayores dificultades en las tareas con fracciones mayores que la unidad (Llinares, Sánchez y García, 1994), en tareas que exigieron la identificación de la unidad; y en identificar fracciones en conjuntos de objetos discretos (Post, Harel, Behr, y Lesh, 1988).
- Las dificultades procedimentales se observaron para las cuatro operaciones con fracciones (Newton, 2008; Tirosh, 2000) y, por lo general, no fueron capaces de justificar adecuadamente los pasos de sus algoritmos (Tirosh, Fischbein, Graeber, y Wilson, 1998).
- Con respecto a la resolución de problemas, repitieron procedimientos que ya conocían para aplicarlos en la resolución de nuevos problemas de fracciones, pero también buscaron aprender procedimientos que podrían aplicarse repetidamente de un problema a otro (Osana y Royea, 2011).
- Representaron las fracciones con modelos de área casi exclusivamente, y sólo ocasionalmente utilizaron otros modelos (Cluff, 2005; Toluk-Uçar, 2009; Wright, 2008). Fueron capaces de proporcionar representaciones gráficas para la multiplicación de fracciones, pero tuvieron dificultades en desarrollar representaciones para la división de fracciones (Borko et al., 1992).

2.2. INVESTIGACIONES CENTRADAS EN EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LAS FRACCIONES DE LOS MAESTROS EN FORMACIÓN

El conocimiento didáctico del contenido, como parte del conocimiento profesional de los maestros en formación, ha sido estudiado para contenidos curriculares específicos. Sobre este tema, las investigaciones se han focalizado en el conocimiento didáctico de las fracciones (D'Ambrosio y Mendoca, 1992; Fuller, 1996), en las operaciones con fracciones (Borko et al., 1992; Charalambous, Hill y Ball, 2011; Isiksal y Cakiroglu, 2011; Klein y Tirosh, 1997; Li y Kulm, 2008) y en la equivalencia de fracciones (Chick, 2003; Marks, 1990). Todos ellos resaltan las carencias relativas al conocimiento sobre fracciones de los maestros en formación y, por consiguiente, sus implicaciones para su enseñanza. A continuación, recogemos una síntesis de las aportaciones y cuestiones más destacadas de algunos de estos estudios que consideramos referentes de nuestra investigación y que han tenido amplia difusión en revistas y otras publicaciones de impacto.

D'Ambrosio y Mendonca (1992) centraron su investigación en las concepciones de cinco profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. El estudió llevó a los participantes a cuestionar prácticas de clase y secuencias de instrucción típicas como las que se presentan en los libros de texto. Los autores concluyeron que los cambios en las concepciones fueron difíciles de observar y analizar. A pesar de ello, algunas de las concepciones que surgieron al comienzo del estudio y que se modificaron fueron que el modelo de área es eficaz para introducir las fracciones y la no necesidad de especificar a los escolares la igualdad del tamaño de las partes en la relación parte-todo.

Con respecto a la equivalencia de fracciones, Chick (2003) pidió a profesores en formación de primaria y secundaria que realizaran por escrito una explicación sobre la equivalencia entre 3/8 y 37,5%. Los resultados mostraron que el grupo de maestros de primaria en formación presentó una mayor gama de modelos gráficos mientras que, el grupo de secundaria, más estrategias computacionales como realizar las divisiones 3:8 y 37,5:100.

El estudio de Marks (1990) también se centró en la equivalencia de fracciones, al analizar las creencias de profesores en ejercicio sobre este tema. Algunas de las cuestiones planteadas a los participantes fueron relativas a los errores de los escolares o a los aspectos más fáciles y difíciles del tema. Los sujetos consideraron que representar fracciones equivalentes en áreas o conjuntos es fácil para los escolares, y que algunos de los errores consistieron en confundir 100% con 100 y que multiplicar por cero numerador y denominador proporciona una fracción equivalente.

Entre los estudios sobre el conocimiento didáctico relativo a las fracciones, encontramos que uno de los temas que más atención recibió fueron las operaciones con fracciones, en especial la multiplicación y división (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Isiksal y Cakiroglu, 2011; Klein y Tirosh, 1997; Li y Kulm, 2008).

Klein y Tirosh (1997) evaluaron el conocimiento didáctico sobre la multiplicación y división de fracciones de dos colectivos: profesores en formación y en ejercicio. Para ello plantearon una serie de problemas con el fin de que los sujetos propusieran posibles errores de escolares y argumentaran sus causas. Los errores más comunes fueron intercambiar una operación por otra y cambiar el papel del dividendo por el del divisor. A pesar de que los profesores en ejercicio estaban más familiarizados con los errores de los escolares que los profesores en formación, ambos grupos encontraron dificultades al proponer sus posibles causas, que se englobaron en conocimiento intuitivo (la multiplicación aumenta y la división disminuye), errores algorítmicos, la naturaleza de las fracciones y razones externas (falta de comprensión lectora).

Isiksal y Cakiroglu (2011) exploraron las concepciones y conceptos erróneos de los profesores en formación sobre la multiplicación de fracciones en relación con los escolares. Los sujetos mostraron muchas de las dificultades que presentan usualmente los estudiantes de primaria, derivadas de la falta de conocimiento formal y la memorización de los algoritmos sin sentido. Además, los participantes sugirieron una diversidad de estrategias que podrían utilizarse para superar conceptos erróneos o dificultades de los escolares. Estas estrategias se agruparon en tres categorías: estrategias basadas en métodos de enseñanza, las estrategias basadas en el conocimiento formal de las fracciones y estrategias basadas en constructos cognitivos.

La investigación de Li y Kulm (2008) se centró en la división de fracciones y propuso a un grupo de profesores de secundaria en formación un enunciado de un problema y algunas tareas como (a) escribir una expresión que resolviera el problema, (b) escribir posibles errores de los escolares al resolver problemas, (c) describir las posibles fuentes de los errores, y (d) sugerir explicaciones para los siguientes resultados a los escolares 2/3:2 =1/3 y 2/3:1/6=4. En la tarea (b), la mayoría de los sujetos respondió con errores en la realización del algoritmo. Aproximadamente el 26% de los participantes utilizaron representaciones gráficas (como rectángulos y círculos) para el apartado (d), y el 22% usó el argumento "doy la vuelta a los números y los multiplico". No obstante, ninguno de estos profesores en formación trató de explicar por qué se puede dar la vuelta y multiplicar.

Charalambous, Hill y Ball (2011) se centraron en los cambios producidos en las explicaciones sobre la división de fracciones de un grupo de maestros en formación antes y después de un curso de matemáticas. El estudio puso de manifiesto las limitaciones de las explicaciones de los sujetos a su entrada en el curso y cómo mejoraron tras su realización. Unas de las mejoras que destacaron en el estudio fue que, en un primer momento, los participantes ofrecieron representaciones sólo para ilustrar la tarea una vez que ésta estaba finalizada. A lo largo del curso, se dieron cuenta del apoyo que podía suponer el uso de múltiples representaciones para razonar la tarea y resolverla.

Fuller (1996) caracterizó y comparó el conocimiento pedagógico del contenido de maestros noveles y maestros con experiencia en tres contenidos matemáticos: operaciones con números enteros, suma de fracciones y geometría. Las preguntas se centraron en las decisiones relativas a la instrucción en cuanto a situaciones específicas del aula, con el fin de extraer información sobre sus conocimientos y creencias. Los resultados referentes al tema de fracciones indicaron que los profesores principiantes y los profesores experimentados presentan un conocimiento basado fundamentalmente en los algoritmos de las fracciones.

2.2.1. Síntesis de la revisión sobre las investigaciones relativas al conocimiento didáctico de las fracciones

Al igual que en el caso de las investigaciones relativas al conocimiento matemático escolar, sintetizamos los resultados sobre el conocimiento didáctico de las fracciones presentes en los estudios revisados y descritos en el apartado anterior. Organizamos en la tabla 2.2 estos estudios según el año, el tema tratado y el nivel de formación y resumimos algunos de los resultados encontrados.

Tabla 2.2. Estudios relativos al conocimiento didáctico de las fracciones

Año	Autores	Tema	Nivel*
1990	Marks	Equivalencia de fracciones	PE
1992	Borko et al.	División de fracciones	PFI
1992	D'Ambrosio y Mendonca	Fracciones	PF
1996	Fuller	Suma de fracciones	PE
1997	Klein y Tirosh	Problemas de multiplicación y división de fracciones	PFI y PE
2003	Chick	Equivalencia de fracciones	PFI
2008	Li y Kulm	División de fracciones	PFI
2011	Charalambous, Hill y Ball	División de fracciones	PFI
2011	Isiksal y Cakiroglu	Enseñanza multiplicación de fracciones	PFI

Tabla 2.2. Estudios relativos al conocimiento didáctico de las fracciones

Año	Autores	Tema	Nivel*

* PFI= profesores en formación inicial; PE=profesores en ejercicio

Los estudios sobre el conocimiento didáctico relativo a las fracciones comenzaron a desarrollarse en los noventa y continúan en la actualidad (tabla 2), aunque en menor número que los estudios sobre el conocimiento del contenido (tabla 1).

De la lectura de los estudios descritos en el apartado anterior y esquematizados en la tabla 2, destacamos a continuación los principales resultados sobre el conocimiento didáctico de los profesores en formación.

- Respecto a la enseñanza de las fracciones, este colectivo consideró que el modelo de área es eficaz y que no es necesario especificar la igualdad del tamaño de las partes en la relación parte-todo (D'Ambrosio y Mendonca, 1992).
- Los sujetos no ofrecieron explicaciones satisfactorias para justificar cómo se resuelve un problema o una tarea sobre fracciones a los escolares (Borko et al., 1992; Chick, 2003; Li y Kulm, 2008) y, en dichas explicaciones, ilustraron el enunciado una vez que la tarea estuvo resuelta (Charalambous, Hill y Ball, 2011).
- Los sujetos no fueron capaces de explicar las posibles causas de los errores sobre fracciones en que incurrieron los escolares (Klein y Tirosh, 1997; Li y Kulm, 2008).
- Los sujetos no mostraron suficiente conocimiento del contenido para enseñar fracciones (Cramer y Lesh, 1988) ya que manifestaron muchas de las dificultades que presentan los propios estudiantes de primaria (Isiksal y Cakiroglu, 2011)

2.3. PROYECTOS E INVESTIGACIONES RELEVANTES EN EL ÁREA DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

Las fracciones y los números racionales se encuentran entre los conceptos más complejos que se abordan en los primeros años escolares. Desde las primeras nociones (mitad, tercio y cuarto) hasta el conjunto Q de los números racionales, hay una gran cantidad de conceptos y estructuras que los escolares deben construir de forma gradual (Kieren, 1980; Llinares, 2003; Llinares y Sánchez, 1997; Rojas, 2014). Esta problemática ha hecho que gran número de investigadores hayan centrado su atención en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje a un nivel inicial de los números racionales y las fracciones (Pitkethly y Hunting, 1996). En este apartado, presentamos algunas de las investigaciones y proyectos que más repercusión han tenido dentro del área.

Uno de los proyectos de investigación que más aportes ha realizado a este campo es "The rational number Project". El desarrollo de este proyecto está a cargo el equipo formado por Merlyn J. Behr, Kathleen Cramer, Guershon Harel, Richard Lesh y Thomas Post. Entre sus publicaciones, se encuentran una colección de libros, comunicaciones en congresos y artículos, realizados desde 1979 hasta la actualidad y centrados en el aprendizaje de los estudiantes y la mejora docente de los números racionales. Sus autores abogan por la enseñanza de las fracciones mediante un modelo que enfatiza las múltiples representaciones y las conexiones entre ellas, y se basan en los trabajos de Jerome Bruner y Zoltan Dienes. Algunos de sus trabajos y resultados han sido destacados en los anteriores apartados (Behr et al, 1997; Cramer y Lesh, 1988; Lacampagne et al, 1988; Post, Harel, Behr, y Lesh, 1988).

Otro proyecto de investigación, iniciado en 1990, que ha producido gran cantidad de investigaciones en el campo de los números racionales es el liderado por Steffe y Olive (1990, 1993). Este proyecto se centró en la construcción del concepto de fracción y tuvo como objetivo identificar cómo los niños modifican sus esquemas de conteo de los números enteros para generar nuevos esquemas sobre fracciones. Con ayuda de recursos informáticos, los escolares modelaron y resolvieron problemas que involucraban unidades discretas, cantidades lineales y regiones rectangulares las cuales podían ser divididas de varias maneras. De los resultados, se obtuvieron dos esquemas: un esquema iterativo y un esquema de medida. El primer caso surgió del esquema de conteo ya existente, de manera que se constituyó como fracción unitaria una parte de una unidad continua pero dividida en partes iguales. De esta forma, los niños establecieron su propio esquema iterando fracciones unitarias. El segundo caso, el esquema de medida, surgió de la unificación del razonamiento cuantitativo. El esquema de secuencia numérica fue modificado para formar una secuencia de números conectados, que sirvió de fundamento para este esquema. Además, estos autores, en lugar de considerar que el conocimiento de los números enteros interfiere en el aprendizaje de las fracciones, mostraron cómo estos conceptos y operaciones pueden usarse para la construcción del conocimiento sobre las fracciones.

Además de proyectos de investigación, varios experimentos de enseñanza en los que se inician a escolares de primaria en las fracciones han sido desarrollados por especialistas en educación matemática. Entre ellos, destacan los desarrollados por Ball (1993), Kieren, Mason y Pirie (1992) y Streffland (1991).

El experimento de Ball (1993) se centró en el desarrollo de conceptos iniciales de las fracciones para responder a la cuestión ¿qué representaciones y contextos ayudan a construir eficazmente una comprensión de las fracciones? Ball usó el contexto de reparto de galletas para aumentar la comprensión de sus estudiantes en el tema y ampliar las conexiones entre conceptos. Las galletas circulares demostraron ser demasiado difíciles para ser repartidas cuando el número de galletas que se reparte no puede ser dividido entre el número de personas de forma entera. Sin embargo, las galletas rectangulares generaron oportunidades de descubrimiento de patrones y conjeturas. La investigación mostró que alrededor de la mitad de los participantes tuvo errores significativos, como llamar a cualquier parte de un todo “un medio” o aplicar estrategias de los números enteros a las fracciones. Además, los niños presentaron un conocimiento principalmente visual de las fracciones.

Kieren, Mason y Pirie (1992) llevaron a cabo un experimento en el que introdujeron a los niños en la papiroflexia para desarrollar ideas como las de división o partición. Sus resultados se centraron en las habilidades adquiridas, como el uso de un nuevo lenguaje o nuevos razonamientos como los de parte-todo y correspondencia. La mayoría de los niños captaron el carácter multiplicativo del tamaño de las partes y la relación entre el número de pliegues y el número de partes obtenidas. De la investigación, se concluyó que el énfasis en la unidad y el proceso de partición son centrales para el desarrollo del concepto de fracción (Kieren, 1993).

El objetivo del experimento de enseñanza de Streefland (1991, 1993) fue desarrollar un programa sobre fracciones en Educación Primaria y producir una teoría de enseñanza y aprendizaje de las fracciones que sirviera como ejemplo de teoría realista en Educación Matemática. En su trabajo, Streffland (1991) identificó patrones de aprendizaje sobre los conceptos básicos de los números racionales y proporcionó numerosos ejemplos de enseñanza para la construcción intuitiva del concepto de fracción basados en el principio de que la realidad debe servir como un recurso para las matemáticas. En particular, el experimento presentó actividades de partición y reparto, centradas en “la familia fracturada”. La familia comía diariamente en un restaurante donde tortillas, tartas, pizzas, café o limonada eran divididas, cocinadas y repartidas. Los dilemas que se les planteaban a la familia fueron resueltos de manera constructivista, haciendo hincapié en las conexiones y relaciones entre conceptos. Además, Streffland (1991) identificó un tipo de errores que denominó “IN-distractors”, asociados al conocimiento de los niños sobre los números enteros. Estos errores no se hicieron tan evidentes cuando las actividades incluyeron contextos concretos y familiares. Sin embargo, a pesar de los constantes esfuerzos por superarlos, estos errores constituyeron un fenómeno persistente e inevitable.

Otra investigación relevante en el campo de la enseñanza inicial de las fracciones fue desarrollada por Mack (1990, 1993). La autora estudió el conocimiento informal de niños de tercero, cuarto y sexto de primaria durante un proceso de enseñanza inicial de las fracciones. Mack (1990) definió el conocimiento informal como

> *el conocimiento aplicado a la vida real construido por un individuo, que puede ser correcto o incorrecto y puede ser elaborado por el estudiante en respuesta a los problemas planteados en contextos de situaciones cotidianas o familiares para él o ella.* (p. 17)

Sus resultados mostraron que los niños comenzaron el tratamiento de las fracciones en términos de partes, relacionando cada parte con un número entero y no con una fracción, y refiriéndose a las fracciones en términos del número de piezas más que el tamaño de la fracción. Las respuestas de los estudiantes sugirieron que los niños intentaron utilizar el conocimiento informal sobre fracciones para construir sus propios algoritmos. Estos algoritmos inventados, basados en el esquema de partición, fueron a menudo algoritmos alternativos a los que tradicionalmente se enseñan en las escuelas. Además, la investigación mostró que, al comienzo no había una conexión entre el conocimiento informal de los conceptos de fracción y el conocimiento de los símbolos de las fracciones, pero, con la instrucción adecuada, los estudiantes fueron capaces de conectar ambos conocimientos, otorgarles significado y superar la interferencia del conocimiento memorístico.

Como conclusiones para la enseñanza, Mack sugirió retrasar la introducción de las representaciones simbólicas para desarrollar antes un conocimiento informal, y argumentó que no es necesario para una enseñanza inicial concentrarse en el desarrollo de una concepción amplia del número racional.

Una alternativa viable puede ser el desarrollo de una enseñanza basada en la partición y posteriormente ampliar a otros conceptos una vez que los estudiantes puedan relacionar los símbolos y procedimientos matemáticos con su conocimiento informal y puedan reflexionar sobre dichas relaciones. (p 30)

2.3.1. Síntesis de la revisión sobre proyectos e investigaciones relevantes en el área de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones

A continuación, organizamos los anteriores proyectos de investigación y estudios según el año de inicio y el tema tratado (tabla 3) y presentamos sus principales hallazgos relativos a la enseñanza y aprendizaje inicial de las fracciones.

Tabla 2.3. Proyectos e investigaciones relevantes en el área de la enseñanza y aprendizaje de los números racionales y las fracciones

Año de inicio	Autores	Tema
1979	Behr, Cramer, Harel, Lesh y Post	Proyecto de investigación sobre la enseñanza de las fracciones enfatizando las representaciones y sus conexiones
1990	Steffe y Olive	Proyecto de investigación sobre la construcción del concepto de fracción a partir de esquemas mentales
1990	Mack	Estudio del conocimiento de los escolares al iniciarse en las fracciones a través de la resolución de problemas.
1991	Streefland	Experimento de enseñanza sobre fracciones basado en la realidad.
1992	Kieren, Mason y Pirie	Experimento de enseñanza centrado en la unidad y partición
1993	Ball	Experimento de enseñanza sobre representaciones y contextos para construir eficazmente una comprensión de las fracciones

Como muestra la tabla 2.3, las principales investigaciones relativas al campo de la enseñanza y aprendizaje inicial de las fracciones comenzaron a desarrollarse a comienzos de la década de los 90. El objetivo común de estos estudios fue ayudar a los niños a construir de forma significativa los conceptos de fracción y número racional y mejorar su comprensión basándose en conceptos más básicos como el de unidad, el esquema de partición, la relación parte-todo, la iteración de la unidad o el reparto (Behr et al, 1983, 1993; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe y Olive, 1990, 1993; Streffland, 1991). Algunos de sus resultados más significativos fueron los siguientes.

- Los niños aplicaron estrategias de los números enteros a las fracciones (Ball, 1990) lo que interfirió en el aprendizaje de las fracciones y les llevó a incurrir en errores muy persistentes (Streffland, 1991). Sin embargo, Steffe y Olive (1990, 1993) consideraron que los esquemas de los números enteros pueden usarse para la construcción de nuevos esquemas sobre fracciones.
- Los niños presentaron un conocimiento principalmente visual de las fracciones (Ball, 1993).
- Las diversas representaciones y sus conexiones ayudaron al aprendizaje de las fracciones (Ball, 1993; Behr et al, 1983).
- El aprendizaje mejoró con actividades que incluían contextos concretos y familiares (Mack, 1990, 1993; Streefland, 1991, 1993).

2.4. CONCLUSIONES DE LA REVISIÓN DE ANTECEDENTES

La revisión que realizamos de la bibliografía sobre fracciones y formación inicial de profesores pone de manifiesto que el conocimiento de los profesores en formación sobre las fracciones es un tema que ha sido y continúa siendo percibido como problemático y sobre el cual quedan aspectos importantes en los que es necesario indagar (Ball, 1990; Cramer, Post y del Mas, 2002; Newton, 2008; Tichá y Hospesova, 2013). Se han investigado diversos aspectos como la división de fracciones, la invención de problemas o la relación entre el conocimiento conceptual y el procedimental, pero otros aspectos han sido apenas tratados. Concretamente, no encontramos evidencias de que se haya profundizado en el conocimiento sobre el contenido matemático escolar relativo al concepto de relación parte-todo, en el conocimiento sobre su aprendizaje y en el conocimiento sobre su enseñanza que deben lograr los maestros durante su periodo de formación inicial.

Este estudio tiene como objetivo proporcionar evidencias y datos bien fundados sobre esas cuestiones. Nos interesamos en dicha temática por varias razones. En primer lugar, las investigaciones previas sugieren una falta de comprensión de los conceptos básicos de las fracciones por parte de los maestros en formación inicial (Ball, 1990; Tatto et al, 2012; Tirosh, 2000) y muestran que los escolares se ven afectados por esta falta de comprensión conceptual (Farrugia, 2007).

En segundo lugar, la enseñanza de las fracciones se debe iniciar mediante conceptos básicos como el esquema de partición y la relación parte-todo (Behr et al, 1983, 1993; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe y Olive, 1990, 1993; Streffland, 1991). A pesar de que los profesores manifiestan una comprensión casi exclusiva de la fracción como relación parte-todo (Domoney, 2001; Lo and

Grant, 2012), carecen de una comprensión clara de dicho significado (Lacampagne, Post, Harel y Behr, 1988; Newton, 2008).

Por último, los cursos de formación y sus responsables han de ser conscientes de las concepciones básicas que poseen los futuros profesores para poder mejorarlas y profundizar en ellas (Osana y Royea, 2011; Park et al., 2013). En este sentido, entendemos que nuestro estudio proporciona información útil para que los instructores puedan tomar decisiones en la práctica.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

El estudio que realizamos se enmarca dentro de los estudios sobre conocimiento del profesor. Lo abordamos desde la perspectiva teórica del análisis didáctico tal como se concibe y desarrolla en el Grupo de Investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (http://fqm193.ugr.es/). Profundizamos en el conocimiento de futuros maestros sobre el contenido matemático escolar relativo al concepto de fracción y su significado; en el conocimiento que sobre su aprendizaje y sobre su enseñanza deben lograr; y en el que, de hecho, logran durante su periodo de formación inicial, particularmente sobre la relación parte-todo. En este capítulo, describimos y hacemos explícitos estos conceptos teóricos y los desarrollamos en tres apartados, que organizan este capítulo y sirven de base al estudio realizado. En esos apartados, describimos y sintetizamos nuestra interpretación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, del análisis didáctico de un tópico o estructura, del significado de un concepto matemático y finalmente de su aplicación a la relación parte-todo.

En primer lugar, presentamos las bases teóricas de la investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, y valoramos y resumimos los modelos teóricos que hemos considerado para nuestro estudio.

En segundo lugar, centramos la atención en el análisis didáctico que se fundamenta en los trabajos desarrollados por el grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 2003; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), donde introducimos cada uno de los análisis que componen el ciclo del análisis didáctico.

En el último apartado de este capítulo, nos centramos en la noción de significado y en los distintos triángulos semánticos desarrollados para el estudio del significado de los contenidos matemáticos escolares. Destacamos la terna semántica (estructura conceptual-sistemas de representación-contextos o modos de uso), que sustenta la noción de análisis del contenido de las matemáticas escolares, el cual ejemplificamos para la relación parte-todo multiplicativa.

3.1. EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL FUTURO MAESTRO DE PRIMARIA EN EL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Una idea muy arraigada en la sociedad es que los estudiantes no progresan adecuadamente en matemáticas en parte porque los profesores no están haciendo bien su labor (Walshaw, 2012), debido a que carecen de la competencia profesional para realizar una enseñanza de manera efectiva.

La competencia profesional de los profesores involucra conocimientos y capacidades relativas a la práctica lectiva en el salón de clase y en otros papeles profesionales, tales como la tutoría de los alumnos, su evaluación, la participación en actividades y proyectos de la escuela, la interacción con otros miembros de la comunidad y el trabajo en asociaciones profesionales (Climent y Carrillo, 2002). De estos aspectos, Walshaw (2012) señala que "un elemento de la infraestructura básica de una enseñanza efectiva de la matemática es el conocimiento del profesor" (p. 182). Para Fennema y Franke (1992), no hay duda de que lo que un profesor conoce tiene una influencia importante en lo que hace en clase y en último término en lo que aprende el estudiante.

La importancia e influencia que tiene el conocimiento profesional del profesor sobre el rendimiento escolar de los estudiantes se subraya en el estudio TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement (Rico, Gómez y Cañadas, 2014). Sin embargo, no hay acuerdo unánime sobre un marco teórico para describir el conocimiento necesario para enseñar matemáticas (Petrou y Goulding, 2011; Tirosh y Even, 2007).

Estudios previos ponen de manifiesto que, en un principio, cuando se pensaba sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, se consideraba que constaba de una sola dimensión, la matemática. Como señala Cooney (1999), la concepción inicial que se tiene del conocimiento del profesor es la relativa a su conocimiento matemático. Para Cooney, los estudios de Beegle (1968) y Eisenberg (1977) pusieron de manifiesto que, para ser un buen profesor de matemáticas, se necesitaba algo más que ser un matemático competente. Los trabajos de Shulman (1986, 1987) dieron fortaleza a esta idea y han sido el origen de multitud de investigaciones. Aunque su perspectiva es general, el análisis y la descripción que hace Shulman de la naturaleza compleja del conocimiento profesional del profesor ha sido adaptada al conocimiento del profesor de matemáticas (Bromme, 1994; Fennema y Franke, 1992; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ponte y Chapman, 2008; Rowland, 2005, 2007; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Todos ellos asumen y consideran que el conocimiento profesional del profesor tiene diversas dimensiones.

Lo que no ha estado claro para los investigadores es qué conocimiento crítico y necesario debe poseer un profesor para que los estudiantes aprendan. No obstante, los investigadores sí están de acuerdo en que ese conocimiento no es único, no es monolítico y que es difícil determinar y aislar sus partes. Un buen número de trabajos previos hacen una distinción entre el conocimiento del contenido, basado en la matemática como disciplina escolar, y el conocimiento pedagógico o didáctico del contenido, entendido como aquel conocimiento que el profesor pone en juego para la enseñanza de las matemáticas. Estos tipos de conocimiento han sido foco de atención de la investigación en las últimas décadas (Carreño, Rojas, Montes y Flores, 2012; Hill, 2010). El interés de su estudio radica, entre otros, en la información que pueden aportar para la toma de decisiones en la formación inicial de profesores y la posterior mejora de la práctica en el aula de matemáticas.

3.1.1. La aportación de Shulman y trabajos derivados

Referente básico y primigenio entre los distintos estudios centrados en el estudio del conocimiento profesional del profesor, el trabajo de Shulman (1986, 1987) destaca como uno de los precursores en la categorización de este conocimiento. Shulman enfatizó la necesidad de que en la enseñanza no basta con un conocimiento de la materia para tener éxito como profesor. Por ello, propuso siete dominios que describen el conocimiento del profesor. Entre estos dominios incluyó la noción de conocimiento didáctico del contenido (pedagogical content knowledge) que definió como:

> *...las más poderosas formas de representación..., analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, o sea, las formas de representar y formular la materia para hacerla comprensible a otros... además la comprensión de qué hace que el aprendizaje de un tópico específico sea fácil o difícil.* (Shulman, 1986, p. 9)

Además del conocimiento didáctico del contenido, Shulman (1987) incluyó los siguientes dominios para la caracterización del conocimiento del profesor.

- Conocimiento didáctico (pedagógico) general, con especial referencia a los principios generales y las estrategias de gestión del aula y de la organización que parecen trascender el tema
- Conocimiento del currículo, con especial comprensión de los materiales y programas que sirven como "herramientas de trabajo" para los profesores
- Conocimiento didáctico (pedagógico) del contenido, una amalgama especial de contenido y didáctica (pedagogía) que se encuentra sólo en los profesores, su propia forma especial de comprensión profesional
- Conocimiento de los aprendices y sus características
- Conocimiento de contextos educativos, que van desde el funcionamiento del grupo o la clase, la gestión y la financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas
- Conocimiento de los fines, propósitos y valores educativos, y sus fundamentos históricos y filosóficos

Shulman considera estas categorías de conocimiento como conocimientos mínimos del profesor para una enseñanza de calidad. Pero, entre ellas, resalta el conocimiento didáctico del contenido:

> *porque identifica el distintivo cuerpo de conocimiento para la enseñanza. Representa una mezcla de contenido y didáctica para comprender cómo se organizan, representan y adaptan temas específicos, problemas o cuestiones a los diversos intereses y habilidades de los estudiantes y presentados para la instrucción*. (Shulman, 1987, p. 8)

En la propuesta inicial de Shulman (1986, 1987) y posteriormente sus colaboradores (Grossman, Wilson y Shulman, 1989), no se enfatizan las relaciones entre las diferentes tipos del conocimiento, que aparecen en su exposición teórica como componentes aisladas. Ante esta carencia, Fennema y Franke (1992) afirman que el conocimiento de la enseñanza tiene una naturaleza dinámica e interactiva y que está referido al contexto de la clase. Estos autores incluyen como componentes del conocimiento del profesor: el conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico, conocimiento de la cognición de los estudiantes y las creencias del profesor, todo ello en una relación como se aprecia en la figura 3.1. El triángulo del centro indica que el conocimiento y las creencias de los profesores están situados en un contexto.

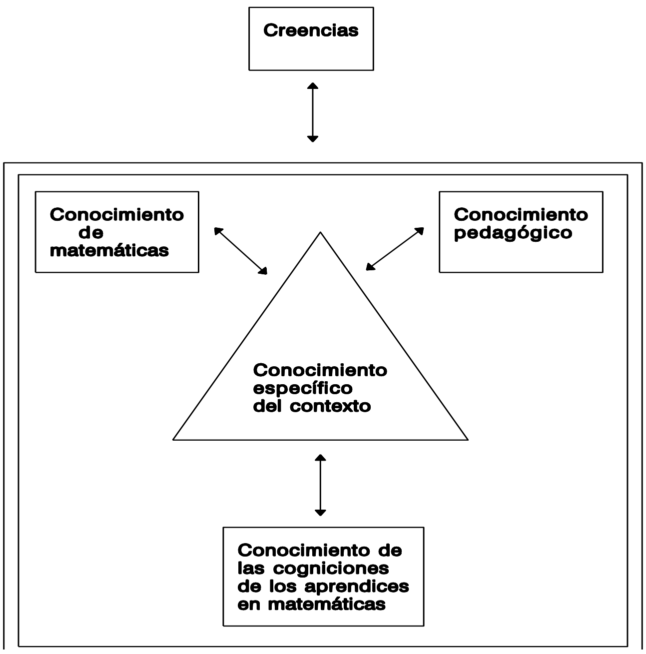


Figura 3.1. Conocimiento del profesor: Desarrollo en contexto (Fennema y Franke, 1992)

Las propuestas de Shulman (1986, 1987) y la de Fenema y Franke (1992) tienen en común la idea de que conocer cómo piensan y aprende los estudiantes es crucial para llevar a cabo una enseñanza efectiva.

Posteriormente, Bromme (1994), a partir de la propuesta de Shulman (1986), desarrolló cinco componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

- Conocimiento de la matemática como disciplina, que deriva de la formación científica o académica.
- Conocimiento de las matemáticas escolares, incluyendo el conocimiento sobre las matemáticas en el ámbito escolar como los algoritmos de resolución de ecuaciones, algoritmo de la regla de tres, etc.)
- Conocimiento de la filosofía de las matemáticas escolares, referido a la actitud hacia las matemáticas o las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Conocimiento pedagógico general, relativo a la organización escolar, técnicas de manejo de grupos, técnicas para imponer disciplina o técnicas de comunicación entre otros.
- Conocimiento didáctico del contenido, incluido el conocimiento sobre materiales didácticos, manejo de calculadoras y programas informáticos, formas de representar los conceptos, etc.

Un modelo de conocimiento destacado en la literatura es el desarrollado por Rowland y colaboradores (Rowland, 2005, 2007; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005). Estos autores elaboran un marco teórico denominado *Knowledge Quartet* que surgió del estudio del conocimiento de profesores en formación inicial manifestado tanto en la planificación como en la puesta en práctica de clases de matemáticas. Estos autores afirman que, a diferencia de la distinción de Shulman entre subject matter knowledge y pedagogical knowledge, su modelo identifica situaciones en las que tal conocimiento se percibe en la práctica de la enseñanza.

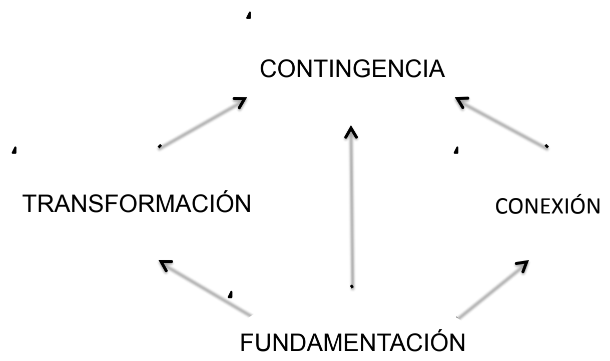


Figura 3.2. Modelo de conocimiento Knowledge Quartet (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005)

Este modelo de conocimiento se compone de cuatro dimensiones (fundamentación, transformación, conexión y contingencia) que categorizan los modos de uso del conocimiento, con especial referencia a la materia que se enseña y el conocimiento relacionado con la matemática a los que recurren los maestros al enseñar.

- Fundamentación, constituida por el conocimiento matemático y las creencias sobre el conocimiento matemático y la educación matemática que el profesor ha adquirido durante su formación académica.
- Transformación, basada en la categoría “pedagogical content knowledge” definida por Shulman (1986), se centra en la capacidad del maestro para transformar su propio conocimiento en métodos que pueden ayudar a los escolares en el proceso del aprendizaje. Como, por ejemplo, seleccionar de un cierto tópico representaciones adecuadas que ayuden a los alumnos en la adquisición del concepto.
- Conexión, es el conocimiento relativo a las decisiones del profesor sobre el contenido matemático en la planificación de la enseñanza
- Contingencia es el conocimiento que se manifiesta en clase ante situaciones inesperadas que no han sido planificadas previamente.

Otro trabajo, con gran repercusión en Educación Matemática, es el que desarrolla por el grupo de investigación liderado por Deborah Ball. Al igual que Bromme, la perspectiva que adoptan Ball y colaboradores (Hill, Ball, y Schilling, 2008) se basa en el trabajo de Shulman (1986) para caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas y sostiene que este conocimiento presenta dos dimensiones, el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico o didáctico del contenido, ambas subdivididas en otros subtipos.

Tabla 3.1. Conocimiento matemático para enseñar (Ball, Thames y Phelps, 2008)

Conocimiento del contenido (Subject Matter Knowledge)		Conocimiento pedagógico o didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge)	
Conocimiento común del contenido Common content knowledge (CCK)	Conocimiento especializado del contenido Specialized content knowledge (SCK)	Conocimiento del contenido y los estudiantes Knowledge of content and students (KCS)	Conocimiento del currículum Knowledge of curriculum
Conocimiento en el horizonte matemático. (Knowledge at the mathematical horizon)		Conocimiento del contenido y la enseñanza Knowledge of content and teaching (KCT)	

Desde esta perspectiva, proponen las siguientes componentes relativas al conocimiento del contenido.

- Conocimiento común del contenido, como el conocimiento matemático que muchos adultos cultos tienen y posiblemente usan en una variedad de situaciones.
- Conocimiento especializado del contenido, como el conocimiento de las matemáticas usado específicamente en la enseñanza, que permite a los profesores participar en tareas de enseñanza, incluyendo formas de representar las ideas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, aplicar modelos y comprender métodos de resolución de problemas.

- Conocimiento en el horizonte matemático, referido al conocimiento del profesor en relación con los contenidos matemáticos previos y futuros, presentes en el currículo de matemáticas.

Con respecto al conocimiento didáctico del contenido, proponen otras tres componentes.

- Conocimiento del contenido y los estudiantes, definido como el conocimiento del contenido vinculado con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un contenido particular.
- Conocimiento del contenido y la enseñanza, para abordar la enseñanza de modo tal que esta permita a los estudiantes superar errores y concepciones inadecuadas, conocimiento que también implica cuestiones relacionadas con la selección de tareas, técnicas de gestión de clase y materiales o recursos para el tratamiento de cierto contenido.
- Conocimiento del currículum, referido al conocimiento sobre qué contenidos deben aprender los estudiantes y la orientación que deben tomar esos contenidos en el aprendizaje, incluyendo los materiales curriculares de los que hace uso el profesor y el conocimiento de los contenidos y planes de estudios.

Según sus autores, una de las aportaciones más relevantes de este modelo es la inclusión del conocimiento especializado del contenido como parte del dominio matemático. Este conocimiento sólo le es útil o necesario al profesor de matemáticas, a diferencia del conocimiento común del contenido que cualquier ciudadano instruido en matemáticas pudiera tener (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Posteriomente, diversos autores (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Carrillo, Contreras y Flores, 2013) detectan en el modelo de Ball y sus colaboradores dificultades al aplicarlo en casos reales de clases de matemáticas, particularmente en la delimitación del conocimiento especializado. Estos especialistas consideran que el conocimiento especializado no se encuentra sólo en el dominio matemático, si no que también se relaciona con aspectos del conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo que esta especialización debe referirse al conocimiento profesional en su conjunto, más que a una parcela del conocimiento matemático. Así, Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) redefinieron los subdominios de conocimiento, y desarrollaron el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Este modelo presenta una clasificación exhaustiva centrada, de forma especial, en el conocimiento matemático del profesor respecto de la enseñanza de las matemáticas. Además, reinterpretaron el conocimiento didáctico del contenido en el que incluyeron otros tipos de conocimiento del profesor como se refleja en la figura 3.3.

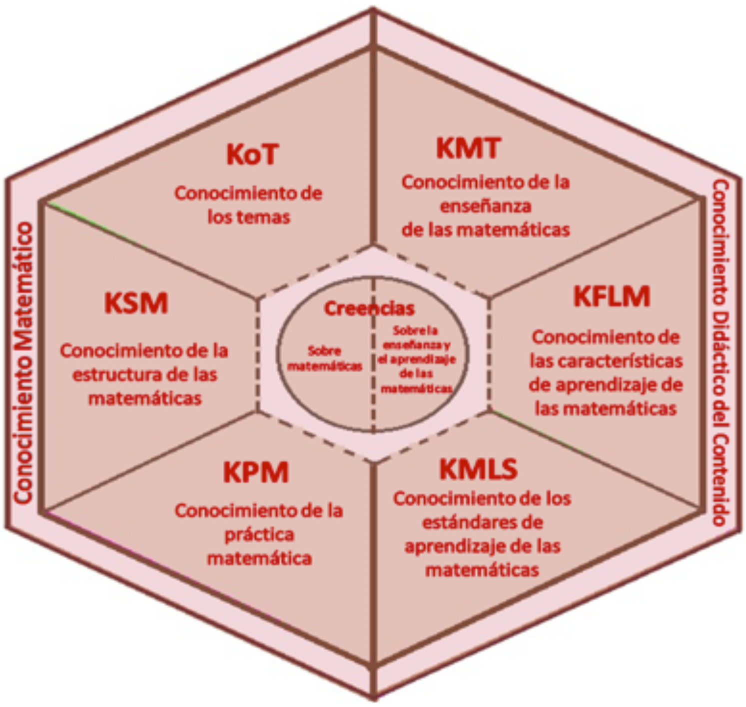


Figura 3.3. Modelo del conocimiento propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013)

En relación con el conocimiento del contenido matemático, este modelo propone una separación de los subdominios basada en las diferentes formas de conocer la matemática disciplinar, escolar y didáctica.

- el conocimiento de los temas, que incluye el conocimiento de la matemática como disciplina, así como la matemática escolar, sus conceptos y procedimientos con sus correspondientes fundamentos;
- el conocimiento de la estructura de las matemáticas, relativo a la estructura de la materia, que engloba el conocimiento de las principales ideas y de las estructuras de la disciplina; y
- el conocimiento de las prácticas matemáticas que atañe al conocimiento del modo de proceder en matemáticas.

En el dominio del conocimiento didáctico del contenido, los autores identifican tres subdominios de conocimiento en el que el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo que no contemplan conocimientos pedagógicos generales en contextos de actividades matemáticas.

- el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, para conocer el modo de pensar del alumno respecto de las tareas matemáticas;
- el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, que permite elegir una determinada representación, material, ejemplo o tareas para el aprendizaje de un concepto o un procedimiento matemático; y
- el conocimiento de los estándares de aprendizaje que comprende los contenidos, materiales y recursos propuestos en las normativas curriculares de los niveles de enseñanza.

Por último, en este modelo, encontramos las concepciones y creencias que el profesor tiene acerca de la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje. Las concepciones y creencias se encuentran representadas en el centro del modelo, para mostrar que interaccionan con todos los subdominios de conocimiento.

Dejando aparte el conocimiento de la matemática como disciplina, Ponte (2012) propone un modelo que, a diferencia de los anteriores, se centra fundamentalmente en el conocimiento profesional ligado a la práctica de la enseñanza de las matemáticas, al que designa como conocimiento didáctico. Este conocimiento didáctico incluye el uso de los materiales en el aula, las formas de evaluación más empleados, la gestión del currículo o el conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes. En su modelo, distingue cuatro dominios de conocimiento ligados al conocimiento didáctico: el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento del currículo, el conocimiento del estudiante y sus procesos de aprendizaje, y el conocimiento de los procesos de trabajo en el salón de aprendizaje (Ponte, 2012; Ponte y Oliveira, 2002).

Tras esta revisión, enmarcamos este estudio en dos tipos de conocimiento de los estudiantes universitarios del Grado de Educación Primaria dentro del dominio de la relación parte-todo de las fracciones: el conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico del contenido. Entendemos el conocimiento del contenido matemático escolar como "el dominio de los significados matemáticos básicos de un contenido, necesarios para su trabajo profesional" (Rico, 2015, p. 31); y el conocimiento didáctico del contenido como "aquellos conocimientos teóricos, técnicos y prácticos, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, que son propios para la formación de un maestro" (Rico, 2015, p. 32). Dado que el campo que abarcan estos dos tipos de conocimiento es muy amplio, consideramos útil el modelo del análisis didáctico ya que nos proporciona una clasificación analítica en la que se concretan ciertos aspectos del conocimiento del profesor a través de sus dimensiones centradas en el ámbito de la matemática escolar y su enseñanza y aprendizaje.

3.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO

La noción de análisis didáctico se ha empleado en el área de Didáctica de la Matemática con diferentes sentidos (Rico y Fernández-Cano, 2013). En los trabajos del grupo de investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, se ha desarrollado la noción de análisis didáctico de las matemáticas escolares como una técnica o secuencia estructurada para organizar y guiar el diseño de unidades didácticas en las matemáticas escolares, proporcionando criterios para estructurar los contenidos, el conocimiento sobre cognición, el conocimiento sobre instrucción y sobre evaluación de un tema específico. Las investigaciones de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009) se centraron en desarrollar y evaluar el análisis didáctico como parte de un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria de la Universidad de Granada basado en el diseño de unidades didácticas. En esta línea, el análisis didáctico se conceptualiza como un proceso para "fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación, puesta en práctica y evaluación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, según establece la comunidad educativa y tiene lugar en el medio escolar" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 13).

Con la práctica, a través de diversos estudios e investigaciones en Didáctica de la Matemática (Caraballo, 2014; Fernández-Plaza, 2015; Rojas, 2014; Valverde, 2012), el análisis didáctico ha ampliado sus funciones más allá de la planificación y diseño de unidades didácticas (Rico y Fernández-Cano, 2013).

- En el ámbito curricular, como nivel de reflexión sobre la estructura del currículo de matemáticas, necesario para su estudio y el trabajo sobre el mismo.
- En el ámbito profesional, como estrategia de formación de profesorado.
- En el ámbito investigador, el análisis didáctico puede usarse como metodología de investigación de orientación cuantitativa o cualitativa en una primera instancia, y como meta-evaluación en una segunda instancia.

Dentro de cada una de estas funciones, el análisis didáctico se conceptualiza como un procedimiento cíclico compuesto por cinco etapas, a cada una de las cuales corresponde un tipo de análisis: análisis conceptual, análisis del contenido matemático escolar, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo. Cada una de ellas consiste en un proceso de análisis y síntesis, que identifica datos relevantes, a partir de los cuales cierra un ciclo y da paso a la siguiente fase del análisis didáctico (figura 3.4).

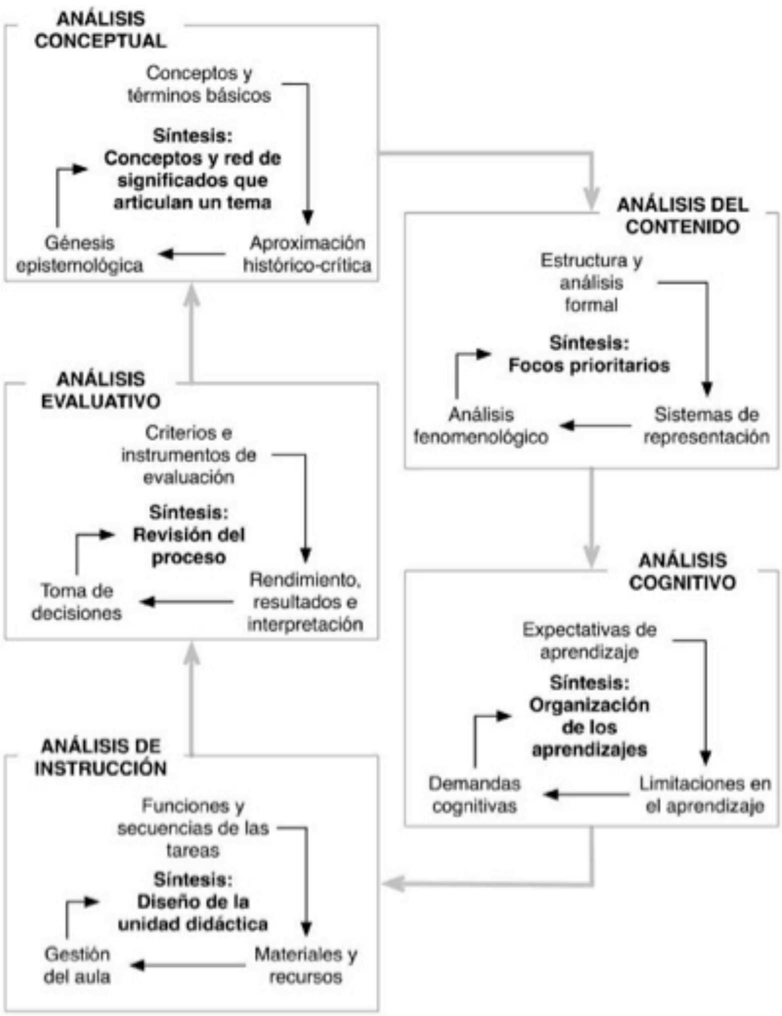


Figura 3.4. Estructura del análisis didáctico (Rico, 2013, p. 22)

A continuación, describimos cada uno de los cinco análisis que conforman el análisis didáctico, según Rico y Fernández-Cano (2013).

3.2.1. Análisis conceptual

Muchos de los conceptos implicados en educación presentan pluralidad de significados en el lenguaje. Al iniciar una investigación o intentar profundizar sobre un tema en este área, es imprescindible analizar los conceptos centrales que lo constituyen para obtener un conocimiento amplio del tema, así como precisar y delimitar los conceptos que se van a tratar. El primero de los análisis, el análisis conceptual, aborda esta problemática ya que propone determinar los conceptos con precisión.

El análisis conceptual es un método no empírico que tiene el fin de controlar la complejidad semántica fundamentando y clarificando términos y conceptos. "Es un método para trabajar y profundizar sobre los conceptos, una técnica de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su uso" (Rico, 2013a, p. 16). Según Rico y Fernández-Cano (2013) el análisis conceptual

> *permite una reflexión previa sobre la cuestión que se quiere investigar, determinando y caracterizando aquellos puntos clave que delimitan el problema en estudio y las ideas, conceptos y teorías sobre los que se quiere abordar su resolución. Trata de eliminar las inconsistencias derivadas de la falta de precisión de significado de los conceptos utilizados*. (p. 8)

El análisis conceptual opera en diversas disciplinas tales como educación, filosofía, epistemología o historia de la ciencia, a través de las técnicas del método del ejemplo/ contraejemplo, lenguaje evocativo y uso de analogías, y reflexión de estructuración e interpretación de la red noseológica (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Como primer paso de esta investigación, en el capítulo 5 de este trabajo, llevamos a cabo un análisis conceptual de la noción central del estudio, la relación parte-todo, y profundizamos en su fundamento y las diversas funciones que desempeña en distintas disciplinas, incluida la propia matemática.

3.2.2. Análisis del contenido de las matemáticas escolares

El análisis del contenido junto con el análisis conceptual "responden a una concepción reductiva o disgregadora, en la que se establece qué conocimientos se consideran" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 16). Mediante el análisis del contenido de las matemáticas escolares, se seleccionan y organizan los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático. El significado de un concepto matemático se aborda a través de tres componentes que articulan este análisis: sistemas de representación, estructura conceptual y contextos y modos de uso. Estas componentes, que ponen de manifiesto la multiplicidad de significados que es posible atribuir a los conceptos de las matemáticas escolares, se derivan de la noción de organizador curricular (Rico, 1997) y de la noción de significado establecida para los conceptos matemáticos escolares. En el apartado "Significado de un concepto de la matemática escolar", que incluimos en el último apartado de este capítulo, se recoge una descripción detallada de estas tres componentes, y se ejemplifican a través de la relación parte-todo en las fracciones, noción central de este trabajo.

3.2.3. Análisis de cognitivo

El análisis cognitivo trata de organizar el para qué y hasta donde aprender determinados conocimientos sobre un tópico (Rico y Fernández-Cano, 2013, p.17). A partir de la información obtenida en el análisis conceptual y de contenido previos, en el análisis cognitivo se describe "cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez, 2007, p. 56). Lupiáñez (2009) desarrolla en profundidad el análisis cognitivo. Su investigación se centra en las capacidades de profesores de secundaria en formación inicial para planificar unidades didácticas para un tema de las matemáticas escolares, en especial al diseñar expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje, las tres componentes fundamentales del análisis cognitivo.

Las expectativas de aprendizaje se definen como aquellas "capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores, actitudes que, según diferentes instancias del currículo se esperan que logren, adquieran desarrollen y utilicen los escolares" (Lupiáñez, 2013, p. 90). Las expectativas de aprendizaje delimitan y organizan lo que el docente espera que los escolares aprendan, según diferentes niveles como los objetivos específicos y competencias.

Las limitaciones de aprendizaje se refieren a los posibles errores en que pueden incurrir los escolares durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas y a las dificultades que pueden originar estos errores. Socas (1997) sostiene que las dificultades de aprendizaje en matemáticas tienen naturaleza distinta y que por tanto su estudio se puede abordar desde diferentes perspectivas. Ese estudio organiza las dificultades de aprendizaje en cinco tipos según su naturaleza

- Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. Estas dificultades son relativas a la propia naturaleza de los conceptos matemáticos, como las formas de representar esos conceptos y las relaciones que se establecen entre esas representaciones, el propio lenguaje que se usa en las matemáticas o su relación con el lenguaje natural.
- Asociadas a los procesos propios de la actividad matemática. Estas dificultades de carácter procedimental, tienen que ver con el desarrollo de explicaciones, argumentos y demostraciones, así como la

resolución de tareas, la ejecución de una estrategia o la modelización.

- Asociadas a los procesos de enseñanza. Algunas dificultades que presentan los escolares pueden estar provocadas por el tipo de enseñanza que han recibido, ya sea debido al profesor, los libros de texto, la institución escolar y el currículo de matemáticas. Por ejemplo, un fallo común en la enseñanza es enfatizar una comprensión parcial del problema, al utilizar palabras clave del enunciado para identificar la operación que lo resuelve, en lugar de motivar una comprensión global del problema.
- Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Las demandas que conllevan las operaciones matemáticas, junto con su carácter fuertemente jerárquico, que hace depender lo desconocido de lo previamente conocido, su exigencia de una práctica continuada o la necesidad de cierta comprensión y memorización, provocan que surjan dificultades cognitivas. Así, por ejemplo, niños que hayan sido escolarizados más tarde de lo normal, presentan unas carencias de carácter cognitivo, como puede ser la comprensión lectora o la capacidad de análisis y síntesis de los datos.
- Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas: dificultades relativas a la ansiedad o emociones negativas que producen la materia a los escolares.

Rico (1995) desarrolló la noción de error desde un punto de vista epistemológico y justificó la importancia del error como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo, se introducen distintas clasificaciones de los errores, como la de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), que proponen seis categorías.

- Datos mal utilizados: errores producidos por alguna discordancia entre los datos aportados y el tratamiento que le ha dado el alumno
- Interpretación incorrecta del lenguaje: errores debidos a una traducción incorrecta entre el lenguaje matemático a otro lenguaje distinto.
- Inferencias no validadas lógicamente: errores causados por razonamientos falsos.
- Teoremas o definiciones deformados: errores producidos por deformaciones de principios, reglas o definiciones.
- Falta de la verificación de la solución: errores debidos el resultado final no es la solución de la pregunta planteada a pesar de que el proceso seguido para su resolución es correcto.
- Errores técnicos: errores de cálculo, de manipulación de símbolos algebraicos o de ejecución de algoritmos entre otros.

En las oportunidades de aprendizaje que el profesor brinda sus escolares, destacan el diseño y selección de las tareas, elementos centrales en el análisis de instrucción. Empleamos el término oportunidad de aprendizaje en el sentido de Lupiáñez (2013), en el que las tareas matemáticas, como demandas cognitivas que movilizan conocimiento, son el principal vehículo para que los escolares alcancen las oportunidades de aprendizaje.

3.2.4. Análisis de instrucción

Para responder a la cuestión sobre cómo y cuándo se lleva a cabo la enseñanza, se presenta el análisis de instrucción. Con base en las informaciones procedentes de los análisis previos, es posible establecer los criterios que permitan analizar y seleccionar las actividades o tareas que realizarán los escolares en el aula, así como los contenidos a tratar, que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2007). El análisis de instrucción también recoge aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recursos, la secuenciación y organización de la enseñanza. Entre las distintas componentes que presenta este proceso, Marín (2013) destaca tres, relativas a las tareas escolares: adecuación de tareas, análisis de la complejidad y selección y organización de tareas.

- La adecuación de las tareas escolares implica analizar tareas presentes en libros de textos u otros documentos y modificarlas o diseñar otras nuevas si es necesario para que se adecúen a la planificación de contenidos y expectativas de aprendizaje. Para ello, se revisan los contenidos, representaciones y contextos o modos de uso presentes en la tarea, y la demanda cognitiva desde la perspectiva de los objetivos implicados en la tarea y las competencias que puede activar.
- Análisis de la complejidad de las tareas, en el sentido de la dificultad que el resolutor puede experimentar durante la realización. Marín (2013) propone 3 niveles teóricos de complejidad tomados de PISA 2003: reproducción, conexión y reflexión.
- Selección y organización de tareas escolares, en el que se detalla la sesión de clase y el instrumento de evaluación. En la planificación de una sesión de enseñanza, además de seleccionar los contenidos y tareas que se consideran relevantes para la instrucción, el profesor también ha de organizar esa información y establecer una organización e integración de los contenidos y tareas a tratar.

3.2.5. Análisis de actuación o evaluativo

El quinto y último análisis, el análisis de actuación o evaluativo, cierra el ciclo del análisis didáctico y constituye el inicio del siguiente. Este análisis "utiliza la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar en el nuevo ciclo" (Gómez, 2007, p. 93-94). Así, este análisis no tiene como objetivo asignar una calificación a los estudiantes, si no valorar en qué medida se ha logrado lo que se pretendía, contrastar los aspectos planificados con lo que sucedió con el propósito de mejorar la planificación y, en efecto, la práctica docente. Entre los distintos aspectos sobre los que el profesor puede reflexionar sobre el proceso del análisis didáctico se encuentran, según Lupiáñez (2013), valorar la selección y organización de contenidos; determinar en qué medida los escolares alcanzaron los objetivos específicos que se habían planificado; determinar si las tareas cumplieron la función por la que fueron seleccionadas o diseñadas; y valorar la conveniencia de los materiales, recursos y métodos de evaluación.

3.2.6. Uso del análisis didáctico en el estudio

La necesidad de un proceso sistemático para la planificación y análisis en las distintas fases del estudio, nos llevó a seleccionar el análisis didáctico como un método para realizar dicha función. En particular, en este trabajo se ha utilizado el ciclo del análisis didáctico para llevar a cabo las siguientes actuaciones.

Al iniciar una investigación o intentar profundizar sobre un tema en este área, es imprescindible analizar los conceptos centrales que lo constituyen para obtener un conocimiento amplio del tema, así como precisar y delimitar los conceptos que se van a tratar. Con el primer análisis del análisis didáctico, el análisis conceptual, abordamos esta problemática. Así, al comenzar esta investigación, nos valemos de este análisis para profundizar en los conceptos claves que constituyen la relación parte-todo, así como las diversas funciones e interpretaciones que desempeña en distintas disciplinas, incluida la propia matemática. El capítulo 4 recoge esta reflexión teórica que se ajusta a características y condiciones del análisis conceptual (Rico, 2000, 2013a y b).

Dado que el modelo del análisis didáctico incluye tres tipos de conocimientos (conocimiento sobre el contenido matemático escolar, conocimiento sobre el aprendizaje o cognitivo, y conocimiento sobre la enseñanza o de instrucción), diseñamos las fases de recogida de información en el estudio empírico, considerando estos tres tipos de conocimientos, cuyo estudio se abordará respectivamente mediante el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

En la primera fase del estudio empírico, nos centramos en el estudio del conocimiento del contenido de los maestros en formación inicial. En esta ocasión, nos basamos en el segundo tipo de análisis del análisis didáctico, el análisis del contenido de las matemáticas escolares. La interpretación de sus tres componentes (estructura conceptual, sistemas de representación y contextos o modos de uso) como variables fundamentó el diseño y construcción del cuestionario con el cual nos propusimos evaluar el alcance de los significados manifestados por los profesores en formación inicial. El análisis de los datos y los resultados obtenidos se encuentran recogidos en el capítulo 6 de este trabajo.

La segunda y tercera fase del estudio empírico se centran en el conocimiento didáctico del contenido de las matemáticas escolares, particularmente en algunos aspectos del conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las relación parte-todo como fundamento de las fracciones.

La segunda fase del estudio empírico está centrada en el conocimiento de la enseñanza manifestado al redactar un material para la instrucción inicial acerca de las fracciones a partir de la relación parte-todo. El análisis de instrucción proporciona respuesta a la cuestión sobre cómo llevan a cabo esta enseñanza de las fracciones un grupo de maestros en formación inicial. En la segunda fase nos basamos en algunas componentes del análisis de instrucción para el tratamiento de los datos así como su interpretación. El análisis e interpretación de los datos se encuentran en el capítulo 7 de este trabajo.

La tercera y última fase del estudio empírico, se centra en el conocimiento sobre el aprendizaje escolar de la relación parte-todo. Dado que el análisis cognitivo nos permite organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico, nos valemos de sus componentes (diseño de tareas, expectativas y limitaciones del aprendizaje) como marco para diseñar los instrumentos de recogida de los datos y el análisis de las producciones.

3.3. SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

La noción de significado utilizada en este trabajo se desarrolla ampliamente en Romero (1997), Rico (2005) y Gómez (2007). En estos trabajos, se postula que, en las matemáticas escolares, los conceptos adquieren una variedad de significados más allá del significado simbólico que tradicionalmente se enseña. Dado que el interés por el significado de los conceptos matemáticos está centrado en las matemáticas escolares, en este apartado, describimos distintos triángulos semánticos que han sido desarrollados previamente para el estudio del significado de los contenidos matemáticos escolares, haciendo especial énfasis en el triángulo epistemológico de Steinbring (1997, 2006). A continuación, describimos nuestro triángulo semántico y sus componentes y, finalmente, lo ejemplificamos con la relación parte-todo.

3.3.1. Triángulo semántico en educación matemática

Como herramientas para analizar el significado de los contenidos matemáticos, se han desarrollado diversos triángulos semánticos en Educación Matemática, como muestran varios casos. Así, Radford (2003) identifica y trabaja con la terna interpretación–concreción–generalización; Sáenz-Ludlow (2006) considera la terna matemáticas–aprendiz–signos; Vergnaud (1983) desarrolla su terna con las nociones de referente–invariantes–representaciones; mientras que Steinbring (1997, 2006) lo hace mediante los conceptos de signo/símbolo–objeto/contexto–concepto.

El triángulo semántico que se presenta y con el que se trabaja en este capítulo es similar al triángulo epistemológico de Steinbring. Esta conceptualización ha sido usada para investigar el conocimiento de los maestros en formación en conceptos como el de probabilidad (Ojeda, 1999) o el de función (Elia y Spirou, 2006) y la comprensión de los escolares sobre simetría (Rønning, 2011), sobre fracciones (Rønning, 2012) o sobre multiplicación y división de número naturales (Farrugia, 2007).

Según la perspectiva de Steinbring, "3" es un signo/símbolo que se refiere a la cantidad de un conjunto de pelotas, independientemente de su color y forma. El objeto/contexto de referencia es una situación de la vida real o un dibujo como el de tres manzanas, y el concepto es el "concepto elemental de número".

Entre las diversas funciones de este marco teórico, Steinbring otorga especial relevancia a la adquisición del significado de los conceptos matemáticos. En este proceso, una importante característica es el balance entre todas las componentes del triángulo y sus relaciones. Estas relaciones son enfatizadas por Steinbring debido a que el establecimiento interactivo de tales relaciones genera significado para dicho concepto. En especial, Steinbring (1989, 1997) destaca el caso de la relación entre los signos/símbolos y los contextos de referencia. Cuando una situación relativamente familiar (el contexto de referencia) se pone en relación con un sistema de signos desconocido, el nuevo sistema de signos se puede dotar parcialmente de significado. Por ejemplo, al introducir a los escolares en la aritmética, objetos e imágenes de la vida real se utilizan como contextos. Los niños ponen estas imágenes familiares en relación con un sistema de signos nuevo y desconocido: los símbolos de los números. De esta manera, el sistema de signos se dota parcialmente de significado.

Otra característica importante del triángulo destacada por Steinbring es la "intercambiabilidad" de las posiciones de signo/símbolo y contexto de referencia. Esto ocurre cuando un sistema de signos que ya es familiar para el individuo actúa como un contexto de referencia ante un nuevo sistema de signos. Así, en el anterior ejemplo, cuando los símbolos de los números se convierten en familiares para los niños, pueden actuar como contexto de referencia en un nuevo proceso en que el diagrama de la recta numérica es el sistema de signos desconocido.

3.3.2. Triángulo semántico: estructura conceptual, sistemas de representación y contextos y modos de uso

Siguiendo la sugerencia de Steinbring (2006) de que una secuencia de triángulos puede ilustrar el desarrollo de las interpretaciones de un escolar, en este trabajo utilizamos este tipo de instrumento de análisis para estudiar el significado que los maestros en formación atribuyen a la relación parte-todo. Para ello, desarrollamos un triángulo semántico cuyas componentes son la estructura conceptual, los sistemas de representación y los contextos y modos de uso.

3.3.2.1 Estructura conceptual

El término estructura se usa en varias disciplinas, como la arquitectura, la lógica o la gramática, con distintas acepciones que hacen referencia a un todo ordenado. Según Krings, Baumgartner y Wild, (1979), el término estructura "es especialmente relevante en dos casos: primero cuando se trata de un conjunto de relaciones que puede describirse por relatores, o bien de propiedades de tal conjunto; segundo, cuando el orden en cuestión viene dados por reglas de conexión de piezas constructivas en un todo complejo" (p. 57).

En matemáticas, el término estructura, generalmente, se refiere a un conjunto con una colección finita de operaciones y relaciones definidas dentro del conjunto. Por ejemplo, la estructura de los números naturales es un conjunto, con una operación aditiva y otra multiplicativa, sus propiedades y la relación de orden. En este trabajo, el término estructura conceptual tiene un sentido más amplio, en el que se incluyen los conceptos, procedimientos y relaciones entre conceptos que involucra un tópico matemático, atendiendo a la estructura matemática de la que forman parte, así como a la que configuran tales conceptos y procedimientos (Feferman, 1989; Romero, 1997; Rico, Castro y Romero, 2000; Gómez, 2007).

3.3.2.2 Sistemas de representación

Kaput (1987) sostiene que toda discusión sobre la representación debe distinguir entre dos entidades: el mundo que representan y el mundo representado. Una representación de una idea es algo que hace presente el concepto pensado.

> *Para pensar y comunicar ideas matemáticas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. ... Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas. (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66)*

En términos generales, usamos el término representación (externa) para referirnos a las materializaciones físicas, configuraciones observables tales como símbolos escritos, diagramas, dibujos, lenguaje hablado o imágenes informatizadas (Goldin y Kaput, 1996). Siguiendo la definición de Kaput (1992), consideramos un sistema de representación como un sistema de reglas para: (a) identificar o crear signos, (b) operar sobre ellos y con ellos y (c) determinar relaciones entre ellos.

En la reflexión realizada sobre las representaciones de las estructuras numéricas, Hiebert y Carpenter (1992) afirman que el conocimiento matemático sólo es alcanzable por representaciones externas por lo que estas tienen un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. Esta característica convierte el estudio de las representaciones en una herramienta esencial para los investigadores en educación matemática ya que aportan diferentes modos en que las personas procesan conceptos y estructuras matemáticas (Kaput, 1987).

Las representaciones son expresiones del significado (Morgan y Kynigos, 2014). También los modos en que se manipulan las representaciones otorgan significado al concepto. En nuestro triángulo semántico, las representaciones se consideran como herramientas en los procesos de producción de significado. En la enseñanza de las matemáticas, hay sistemas de símbolos, palabras, diagramas, notación algebraica, etc., que se utilizan de manera convencional. Estas formas de representación usan diferentes modos de comunicación y tienen diferente potencial en el proceso de creación de significado. Cada sistema de representación, junto con sus propias reglas, propone una descripción diferente del concepto matemático, que al mismo tiempo enfatiza y establece algunas propiedades importantes, o hace otras propiedades más difícil de entender (Figueras, Filloy y Valdemoros, 1986; Rico, Castro y Romero, 1996).

3.3.2.3. Contextos y modos de uso

La tercera componente del triángulo semántico está relacionada con las matemáticas y sus modos de uso. Freudenthal (1983) destacó que los conceptos y estructuras matemáticas están vinculados con fenómenos y contextos específicos. Nuestra componente "contextos y modos de uso" se refiere a aquellos fenómenos, situaciones o modos de uso que dan sentido al concepto matemático. Los conceptos adquieren significado desde tales fenómenos o cuestiones que provienen del mundo físico, social y cultural (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

En las matemáticas escolares, los fenómenos se presentan según diferentes contextos, a través de distintas situaciones o bien mediante cuestiones o problemas. La consecución del significado de un concepto requiere que los escolares se enfrenten a una diversidad de situaciones y problemas que se puedan abordar mediante tal concepto.

Así mismo, y para no ser reiterativo en el empleo del término fenómeno, se utilizan términos similares. Por ejemplo, el término *contexto numérico* para los números naturales y operaciones (Castro, Rico y Castro, 1987). En consonancia, los *contextos o usos* para el número natural son fenómenos asociados al número natural, que contribuyen a la constitución de significado del número. En el caso de las fracciones, trabajar diferentes contextos permite una comprensión más profunda, ya que los conceptos sólo tienen sentido cuando se aplican a determinados contextos (Brocardo, 2010).

Nuestra tercer componente es más amplia que la componente objeto/contexto del triángulo de Steinbring. Por ejemplo, de acuerdo con la perspectiva de Steinbring, el objeto/contexto del número 3 es una situación de la vida real o una imagen del mismo. Siguiendo con el ejemplo de los números naturales, nuestra tercer componente, los contextos y modos de uso, implica los diferentes usos sociales, prácticos y culturales del concepto (cardinal, medida, ordinal, y nominal) que dan sentido a los números en las situaciones de la vida real.

3.3.3 El uso del triángulo semántico

En el proceso de estudiar la adquisición de significado en las matemáticas escolares, ponemos nuestra atención en la interacción entre los tres componentes durante y después del proceso. Este enfoque permite lograr dos metas. En primer lugar, muestra al triángulo semántico como una herramienta para el análisis del conocimiento sobre el contenido de los temas de matemáticas escolares. Así se describen y establecen los diferentes significados de un tema en términos de su estructura conceptual, sus sistemas de representación y los contextos y modos de uso. Ejemplificamos esta primera idea con el concepto de relación parte-todo multiplicativa en el siguiente apartado.

3.3.4. Significado de la relación multiplicativa parte-todo

3.3.4.1. Estructura conceptual de la relación parte-todo multiplicativa

Cuando una totalidad, simbolizada por T, se fragmenta o divide en n partes P_i disjuntas, con $1 \leq i \leq n$, con $T = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, cada una de dichas partes P_i presenta una relación con el todo $R(P_i,T)$.

En el proceso de fragmentación de un todo, sus partes P_i pueden ser iguales: $P_i = P_j, \forall i, j$. A cada una de esas partes iguales la designamos por P. En este caso, la relación entre una de las n partes iguales P de un todo T se convierte en una relación multiplicativa, que conocemos en aritmética escolar como relación parte-todo. En este caso, podemos representar aritméticamente la relación multiplicativa entre una parte y el todo por $T = n \times P$. Esta conceptualización de la relación parte-todo implica cuatro componentes fundamentales.

- El todo (T) o cantidad que tomamos como referencia, de la que se parte. En el caso de las matemáticas escolares consideramos fundamental distinguir si el todo se presenta mediante una o varias figuras geométricas, objetos o a través de una cantidad de alguna magnitud.
- La relación ($R(P,T)=1/n$) expresa la relación entre una de las partes iguales P y el todo T o cantidad en que se divide; usualmente se simboliza la relación mediante la fracción 1/n. En el caso en el que el todo se presente como una figura o cantidad, la relación expresa numéricamente la medida de cada una de las n partes iguales, P, con respecto del todo T que es tomado como medida de la parte obtenida.
- La parte (P) cuya relación con el todo T viene dada por una unidad fraccionaria 1/n, se denomina *parte enésima de T*.

- Por último, estas tres componentes dan lugar a un cuarto elemento presente en la estructura, el complementario C de la parte ($T = P \cup C$).

Estas componentes dan lugar a dos relaciones. Primero, la relación entre una de las n partes iguales de un todo: $P = \frac{1}{n}T$, en la que $\frac{1}{n}$ expresa la relación entre cada una de las partes y el todo: $R(P,T) = \frac{1}{n}$.

Segundo, la relación inversa multiplicativa $T = n \times P$, en la que n indica la relación entre el todo y cada una de las partes iguales: $R(T,P) = n$.

3.3.4.2. Sistemas de representación en la relación multiplicativa parte-todo

En Matemáticas, los conceptos se hacen presentes mediante algún modo de representación que permite mostrar adecuadamente, con cierta precisión y simplicidad, el concepto y algunas de sus propiedades, así como las posibles operaciones y transformaciones a las que puede someterse posteriormente (Rico, 2009). En este sentido, las representaciones ocupan un papel importante en la relación parte-todo pues concretan sus elementos, propios para representar las nociones características de esta relación.

Cada concepto se puede representar de diferentes maneras. Igualmente, existen diversos sistemas de representación para la relación parte-todo, como son los sistemas de representación simbólico, verbal o gráfico.

Sistemas de representación simbólico

Dentro de esta modalidad de representación consideramos varios sistemas de representación.

- Los símbolos como a/b, utilizados en el campo del Álgebra.
- Los símbolos presentes en otras culturas.

- Las representaciones numéricas de las fracciones como son la notación usual ½, la notación decimal 0.5, los porcentajes 50% o el sistema sexagesimal 12:15:30.
- Algunas expresiones simbólicas de la relación parte todo son:

$R(P,T)=1/n \quad T=nP \quad P=(1/n)T \quad C = (1-1/n)T \quad (1-1/n)^{-1}(C)=T$

Sistema de representación verbal

Vinculado al sistema de representación numérico, está el verbal, en el que las reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de la relación parte-todo. El español impone normas y reglas para expresar esta relación. Como destacamos anteriormente, las fracciones y en concreto la relación parte-todo se expresa lingüísticamente con dos numerales, un cardinal en función adjetiva que designa el numerador del quebrado: un, dos, ocho, y un numeral ordinal en función sustantiva, que designa el denominador: quinto, sexto, décimo (RAE, 2014).

Sistemas de representación gráfico

Dentro de esta modalidad de sistema de representación, consideramos tres tipos fundamentales de sistemas de representación gráficos: continuo-área, continuo-lineal y discontinuo-discreto. Estas tres clases de relaciones entre las partes y el todo se desarrollan simultáneamente, donde en cada caso el todo, constituido por una o varias figuras finitas, es relativo a la situación.

Sistemas de representación continuo

Las figuras geométricas elementales (segmento, rectángulo, círculo) se utilizan para representar cantidades de la magnitud longitud y de la magnitud superficie. Estas representaciones hacen abstracción de las características físicas del todo y las muestran como homogéneas y dotadas de propiedades de simetría que permiten su fragmentación o división mediante construcciones geométricas sencillas. A pesar de la existencia de otros sistemas de representación como la magnitud volumen, en este apartado sólo consideramos dos sistemas de representación básicos pero fundamentales para las matemáticas escolares: magnitud área o superficie y magnitud lineal o longitud.

Magnitud área o superficie. Rectángulo, círculo y cuadrado, junto con el resto de los polígonos regulares de uso menos frecuente, son representaciones convencionales de una cantidad de superficie, una de cuyas características es que esa totalidad resulta divisible en partes iguales mediante técnicas geométricas elementales. La figura convencional para esta representación es el círculo, pues presenta infinitos ejes de simetría con los que realizar su división en partes iguales. En el caso de otros polígonos o figuras planas, la dificultad de realizar la división en partes iguales aumenta, según disminuye la regularidad de la figura, llegando a la imposibilidad de realizar el fraccionamiento.

Figura 3.5. Representación de superficie

Magnitud lineal o longitud. Igualmente, un segmento es una representación convencional de una cantidad de longitud que resulta divisible en partes iguales mediante técnicas geométricas sencillas bien de simetría o bien de proporcionalidad.

Figura 3.6. Representación lineal

Sistema de representación discreto

Junto con los objetos continuos, los conjuntos de elementos abstractos como puntos o marcas se utilizan para representar cantidades de una magnitud discontinua y discreta (bolas, fichas, caramelos o cualquier otro tipo de objetos indivisibles). En estas representaciones, la técnica necesaria para obtener partes iguales es distinta a la utilizada con figuras continuas, pues se realiza agrupando sus elementos en subconjuntos de igual número de componentes. En este caso, ya no son necesarias las propiedades de simetría para su fragmentación, sino la igualdad convencional entre los elementos que forman el conjunto, además de la identificación y separación de cada uno de ellos respecto al resto de elementos que forman el todo.

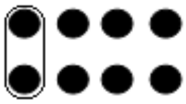


Figura 3.7. Representación discreta

En este caso, el esquema de la relación parte-todo es distinto ya que, al dividir el conjunto en partes iguales, los subconjuntos resultantes pueden estar formados por varios objetos, en contraposición a los objetos continuos en que las partes están formadas por trozos simples. La figura muestra un ejemplo de división de un todo con 8 elementos en 4 partes iguales.

La limitación que tienen estas representaciones reside en la estructura del todo pues, al no estar formado por elementos divisibles, es necesario que el número de unidades simples del todo sea divisible entre el número de partes para conseguir que las partes sean iguales, es decir, partes formadas por el mismo número de elementos. En caso contrario, algunos repartos no se pueden realizar. Por ejemplo un conjunto formado por 7 elementos no se puede repartir gráficamente en 5 partes iguales constituidas por el mismo tipo de elementos simples.

3.3.4.3. Contextos y modos de uso de la relación parte-todo

Basándonos en que los conceptos adquieren significado desde fenómenos o situaciones que provienen del mundo físico, social y cultural (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014), nuestra componente “contextos y modos de uso” se refiere a aquellos fenómenos o situaciones que dan sentido al concepto matemático.

Por ejemplo, en la estructura aditiva encontramos numerosos estudios centrados en su componente semántica. Muchos de ellos coinciden en adoptar una clasificación común de los tipos de problemas de adición y substracción: cambio, combinación y comparación (Carpenter y Moser, 1983). Dicha naturaleza semántica se establece por la acción que caracteriza la relación y que da sentido a esta estructura. Una acción de cambio, comparación o combinación caracteriza los contextos y modos de uso de la relación aditiva entre dos cantidades.

En el caso de las estructuras multiplicativas, para dotar de sentido y expresar un uso de la relación a través de un enunciado o situación concreta, es necesario algún objeto que determine el todo y alguna acción sobre esa totalidad que dé lugar a su división en partes iguales.

"Un todo es un nuevo término único, distinto de cada una de sus partes y de todas ellas: es unidad, no pluralidad, y se relaciona con sus partes, pero tiene un ser distinto del de ellas" (Russell, 1902, §133-141). Usualmente, en las matemáticas escolares se utilizan totalidades sencillas como una cantidad de superficie o de longitud, para el caso continuo, o bien colecciones de elementos para el caso discreto (Freudenthal, 1983, p. 140).

Con respecto a los contextos y modos de uso básicos, hay multitud de verbos de acción que dan sentido a una relación multiplicativa parte-todo. En el caso de las matemáticas escolares, encontramos igualmente contextos y modos de uso básicos como fraccionar, repartir o medir. En los tres casos, está presente un todo, una parte y una acción que los vincula. Su estructura común la constituye la estructura conceptual, es decir la relación multiplicativa entre las partes que se consideran y el todo que se ha dividido en partes. Estos contextos y modos de uso son nociones centrales en la enseñanza y aprendizaje del número racional, pues otorgan sentido a través de una dimensión de su significado.

- Fraccionar. Este uso resalta el hecho de la partición o división equitativa, física o verbal de un objeto. Fraccionar expresa actuar directamente sobre un todo o totalidad para dar lugar a partes iguales. Se ejemplifica mediante una cantidad, continua o discreta, que se divide en partes iguales P también continuas o discretas. En relación con las fracciones, Freudenthal señaló: "En las fracciones se presentan de forma concreta cuando una totalidad es dividida, cortada, rebanada, rota, coloreada en partes iguales, o si se experimenta, imagina, pensado como tal." (Freudenthal, 1983, pp. 140).

- Repartir. En este caso, se da por ya dividida la totalidad y destaca que las partes se distribuyen equitativamente, así ocurre al distribuir una cantidad a (caramelos, barras, tartas…) en b partes iguales (personas, conjuntos,…).
- Medir. Este uso plantea la medida de una cantidad P cuando se toma como unidad el todo T del que forma parte. La fracción expresa cuántas veces la parte contiene al todo. Aborda el problema de expresar un objeto o parte P mediante una unidad de medida mayor T (de la que forma parte).

Como veremos en el capítulo 5, el triángulo es también una herramienta útil para analizar e interpretar el significado del conocimiento matemático expresado por distintos estudiantes y permite diferenciar sus niveles de comprensión. Por ejemplo, caracterizaremos las producciones escritas de los estudiantes en cuanto a los componentes del triángulo y a sus relaciones. Esta segunda idea servirá para identificar parte del conocimiento del contenido especializado que un grupo de profesores en formación asigna a estos tres componentes del contenido de las fracciones para la relación parte-todo multiplicativa.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

Nuestra investigación está estructurada en un estudio teórico (fase 0) y un estudio empírico (fases 1, 2 y 3). Para el estudio teórico, nos basamos en la herramienta metodológica del análisis conceptual. Seleccionamos el análisis conceptual para profundizar en la relación parte-todo al iniciar la investigación ya que "es un método no empírico para trabajar y profundizar sobre los conceptos, una técnica de escrutinio para conseguir precisión y dominio en su uso" (Rico, 2013a, p. 16).

El estudio empírico tiene la estructura de un diseño combinado, en el que realizamos tres fases secuenciales de recogida y análisis de datos. Los resultados de cada fase aportan conocimiento parcial del problema y, considerados en su conjunto, enriquecen y complementan la información obtenida en cada uno por separado. Este estudio empírico está centrado en el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico de los futuros maestros de Educación Primaria relativo a las fracciones, interpretadas como relación parte-todo multiplicativa. Para elucidar estos conocimientos en los maestros en formación inicial consideramos de utilidad el análisis didáctico y sus dimensiones como herramienta metodológica. Los tres primeros análisis del análisis didáctico (análisis de contenido de las matemáticas escolares, análisis cognitivo y análisis de instrucción) se centran en aspectos distintos del conocimiento del profesor que se imparten en cursos distintos en el programa de formación inicial de maestros en la Universidad de Granada, por lo que su estudio lo diseñamos en tres fases basadas en cada uno de los análisis.

En este capítulo, presentamos de forma pormenorizada el enfoque metodológico utilizado en el estudio empírico. Para ello, dado que el estudio empírico comprendió tres fases, este capítulo contempla tres apartados que describen las características metodológicas de cada una de la fases: los sujetos, el programa de formación de los futuros maestros, los instrumentos utilizados, el procedimiento seguido para la recogida de información y el procedimiento seguido en el análisis de los datos. En la tabla 4.1, presentamos un resumen del esquema metodológico general.

Tabla 4.1. Esquema general de la metodología

	Primera fase	Segunda fase	Tercera fase
Centrado en	Conocimiento del contenido	Conocimiento didáctico	Conocimiento didáctico
Ciclo del análisis didáctico empleado	Análisis del contenido	Análisis de instrucción	Análisis cognitivo
Sujetos	358 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria.	82 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria.	11 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria.
Contexto	Asignatura “Bases matemáticas para la Educación Primaria” (1er curso)	Asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria” (2º curso)	Asignatura “Diseño y desarrollo del currículum en Educación Primaria” (3er curso)
Materiales	Cuestionario 1 (de trabajo individual)	Cuestionario 2 (de trabajo individual) junto con ilustraciones en formato de pegatinas	Cuestionario 3 (de trabajo individual) y grabadora de audio

Desde un punto de vista metodológico, situamos este trabajo en el campo de la metodología descriptiva, debido a nuestro interés por describir e interpretar fenómenos (Colás y Buendía, 1998) y elaborar un modelo descriptivo y explicativo del conocimiento puesto de manifiesto por los futuros maestros en relación con la noción de fracción ligada a la relación parte-todo.

4.1. CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DE LA PRIMERA FASE

En la primera fase del estudio empírico, indagamos sobre el conocimiento del contenido de los maestros en formación inicial. Para ello, nos basamos en el análisis del contenido de las matemáticas escolares para explorar, desde un punto de vista empírico, qué dominio conceptual sobre la estructura conceptual, representaciones y contextos y modos de uso de la relación parte-todo multiplicativa tienen los maestros en formación al comienzo de sus estudios universitarios.

En esta fase, utilizamos un cuestionario con ítems de respuesta abierta como instrumento para la recogida de datos. Se trata de un estudio de carácter descriptivo, realizado durante el curso académico 2009-2010.

Una característica destacada de esta fase del estudio es el empleo de un enfoque inductivo en el análisis de las respuestas, con el que tratamos de describir, analizar y organizar las diferentes ideas y nociones implícitas en relación con el tema de estudio que los participantes aportaron en respuesta a las preguntas planteadas. El diseño sigue, en líneas generales, el esquema propuesto por McMillan y Schumacher (2005). En la tabla 4.2, presentamos el esquema metodológico de esta fase.

Tabla 4.2. Esquema de la metodología de la primera fase de la investigación

Tipo de estudio	Estudio empírico
Ciclo del análisis didáctico empleado	Análisis del contenido de las matemáticas escolares
Sujetos	358 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria.
Contexto	Asignatura “Bases matemáticas para la Educación Primaria” (1^{er} curso)
Materiales	Cuestionario 1 de trabajo individual

4.1.1 Sujetos de la primera fase

Los participantes de la primera fase del estudio fueron 358 estudiantes del grado en Maestro en Educación Primaria, matriculados en la asignatura “Bases matemáticas para la Educación Primaria” y pertenecientes a dos centros de la Universidad de Granada: la Facultad de Ciencias de la Educación y la escuela universitaria La Inmaculada. Del total de sujetos, 225 pertenecían a la Facultad de Ciencias de la Educación y se encontraban repartidos en cuatro grupos con distintos profesores; los 133 restantes pertenecían a la escuela universitaria La Inmaculada y se encontraban repartidos en dos grupos, cada uno con distinto profesor. Estos sujetos constituyeron una muestra intencional elegida por su disponibilidad.

Dado que los participantes eran estudiantes matriculados en el primer curso del grado de Educación Primaria y no habían recibido instrucción sobre el tema, se pueden considerar como una muestra de adultos cultos (Adjiage y Pluvinage, 2007).

4.1.2. Contexto de la primera fase

Los estudios de grado de Maestro en Educación Primaria proporcionan la titulación académica legalmente necesaria para ser docente en los colegios de primaria españoles. En el primer curso de dicha titulación en la Universidad de Granada, se encuentra la asignatura de tipo obligatorio “Bases matemáticas para la Educación Primaria” con 9 créditos ECTS. Esta asignatura está centrada en el estudio del contenido de las matemáticas escolares. La guía docente de la asignatura del curso 2012-2013 afirma que esta se centra en “el estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos, sus formas de representación y modelización, fenomenología y aspectos históricos de los mismos, utilizando materiales y recursos”. Los contenidos de la asignatura se organizan en siete temas:

(a) el número natural (sistemas de numeración),

(b) aritmética,

(c) números racionales,

(d) figuras geométricas,

(e) transformaciones geométricas planas y orientación espacial,

(f) magnitudes y su medida, y

(g) introducción a la probabilidad y estadística.

Además, se incluyen los siguientes contenidos transversales: el sentido numérico, la resolución de problemas, el uso de las nuevas tecnologías en matemáticas, y la dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas.

Dentro del tema de los números racionales, se incluye el estudio de diversas interpretaciones y representaciones de los números racionales, las operaciones y equivalencia de fracciones y materiales y recursos para la enseñanza de las fracciones.

Con respecto a la metodología, la asignatura presenta clases teórico-expositivas y clases prácticas de trabajo en grupo. En las clases teóricas el profesor es el encargado de presentar, orientar y sintetizar los temas del programa. En estas sesiones, se entrega a los alumnos unas guías de trabajo, hojas de actividades para cada tema y lecturas de textos recomendados en la bibliografía. En las clases prácticas, bajo la supervisión del profesor, los estudiantes trabajan en grupos, utilizan materiales manipulativos o software educativos y recursos de Internet, y resuelven cuadernos o guiones de prácticas que proporcionan instrucciones y actividades.

4.1.3. Instrumento de recogida de la información de la primera fase

El instrumento de recogida de datos utilizado en la primera fase del estudio fue un cuestionario de respuesta abierta elaborado expresamente para este estudio (cuestionario 1). Las cuestiones fueron formuladas con el objetivo de poner de manifiesto la estructura conceptual, los sistemas de representación y los contextos o modos de uso que los maestros en formación inicial tienen en relación con el tema objeto de estudio. Para construirlo, nos enfrentamos a las tareas de selección del contenido y los significados de las fracciones que pretendemos abordar con él. Finalmente, las preguntas responden a la siguiente estructura.

- En la pregunta 1, sobre la estructura conceptual de la relación parte-todo, indagamos sobre la forma de una cuestión relativa a fraccionar y pedimos que se explique verbalmente qué se entiende por fraccionar: "¿Qué es fraccionar? Explica verbalmente que entiendes por fraccionar".

  El objetivo de esta pregunta fue que los sujetos pusieran de manifiesto su conocimiento sobre los componentes de esta estructura conceptual, en particular, los elementos y componentes básicos de la relación parte-todo, así como sus relaciones. A pesar de que otros estudios presentan ítem similares: "What is the basic definition of fraction for you? (¿cuál es la definición básica de fracción para ti?)" (Park, Güçler y McCrory, 2012), "Can you define a rational number? (¿puedes definir número racional)" (Pinto y Tall, 1996), nosotros nos centramos en la acción de fraccionar para obtener información adicional focalizada en la acción y no en el objeto fracción o número racional. No propusimos "la definición" de fracción como objeto de reflexión, simplemente requerimos una descripción funcional de la misma a cada participante.

- En la pregunta 2, sobre sistemas de representación, se pide realizar una ilustración que represente qué es fraccionar: "Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar"

  Con esta pregunta pretendemos que los sujetos representen a través de modelos visuales la acción descrita en la pregunta anterior, es decir una relación parte-todo. Ítem similares han sido usados en estudios previos: "What kind of picture would you draw to show this operation (2/3)×(7/4)? (¿Qué tipo de ilustración dibujarías para mostrar esta operación?) (Cluff, 2005), "Draw a pictoral representation of the statement: (3/4)-(1/2)=?; (1/3)+(1/3)=?; (2/3)/(1/2)=?; (3/3)×(1/3)=?" (Dibuja una representación para cada operación) (Toluk-Uçar, 2009).

- La pregunta 3 centrada en el sentido de esta noción de fracción, se refiere a la descripción de situaciones y modos de uso a partir de 3 ilustraciones relativas a una relación parte-todo: "Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones:"

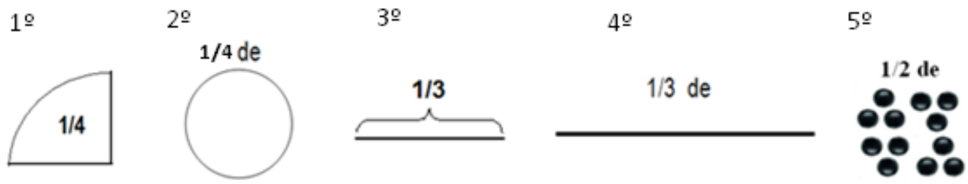


Figura 4.1. Ilustraciones presentes en la pregunta 3

Este ítem proporciona 5 ilustraciones: dos modelos de área, dos modelos lineales y un modelo discreto. Cada ilustración está asociada a una fracción unitaria y simple, medio, tercio y cuarto, que son familiares a los participantes. Además, el uso de diversas fracciones extiende el campo de situaciones que los participantes pueden inventar y previene la saturación por repetición de la misma fracción.

Cada una de las cinco ilustraciones de la figura 4.1 difiere de las otras cuatro en algún aspecto: el tipo de magnitud utilizada (superficie, longitud, objetos discretos) o, dentro de la misma magnitud, en los dos elementos de la estructura conceptual de la relación parte-todo que se presentan (el todo, la parte o la relación). Para el caso de modelos discretos sólo se propone una ilustración (quinta ilustración), la que elicita calcular una parte a partir del todo porque consideramos que en objetos discretos, la parte junto con la relación y el todo junto con el todo, son dos ilustraciones demasiado similares.

El cuestionario 1, que contiene estas preguntas y que aparece en el anexo A, está compuesto por cuatro hojas, atendiendo al siguiente esquema.

- Datos de identificación de la institución que realiza el estudio, presentación del objetivo del mismo, solicitud de ayuda y agradecimientos al encuestado.
- Datos estadísticos de identificación: sexo, edad, titulación y centro al que pertenece el encuestado.
- Las tres cuestiones descritas anteriormente, como ítems de respuesta abierta.

4.1.4. Procedimiento de la recogida de datos de la primera fase

Para detectar posibles errores en el instrumento, realizamos una prueba piloto con 15, estudiantes dos semanas antes de la prueba final. Dado que esta prueba fue clara y los estudiantes no tuvieron ninguna duda, no hicimos modificaciones en el modo de aplicación ni en los ítems del cuestionario aplicado.

Con respecto a la forma de aplicación y a las condiciones para su administración, aplicamos el cuestionario 1 en el horario y en el aula asignados a la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria. Los participantes ya habían estudiado con anterioridad en la asignatura el tema de números racionales. El tiempo para su realización fue libre (no hubo tope máximo) pero en ningún caso resultó inferior a 20 minutos, ni superior a una hora. El profesor y uno de los investigadores se encontraban en el aula. La aplicación fue individualizada a excepción de un caso en el que el sujeto entrevistado era ciego, por lo que necesitó la ayuda de un compañero para su realización. Cada participante recibió un cuadernillo.

El cuestionario 1 se aplicó durante el mes de marzo del 2010, y el total de estudiantes que lo realizaron fue de 358. Consideramos que el número de respuestas obtenidas fue suficiente para su posterior análisis.

4.1.5. Análisis de los datos de la primera fase

Sometimos los datos recogidos con el cuestionario 1 a un análisis de carácter cualitativo. Este análisis de datos se llevó a cabo mediante un proceso inductivo en el que identificamos una serie de temas en función de los cuales realizamos una organización de los datos en categorías y una identificación de modelos (relaciones) entre categorías (McMillan y Schumacher, 2005). Este esquema general se encuentra reflejado en la figura 4.2.

Las categorías y los modelos surgen en nuestro análisis a partir de los datos mediante un proceso sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación compuesto por cinco etapas que describiremos con detalle a continuación.

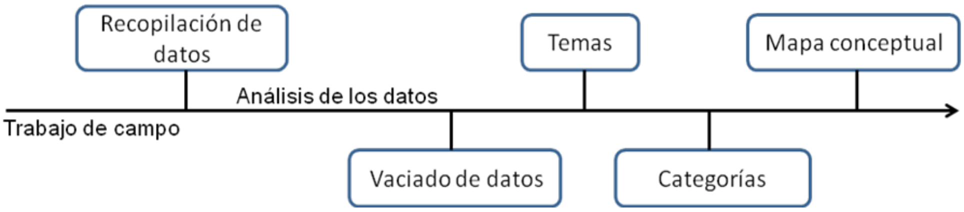


Figura 4.2. Organigrama de la estructura global del proceso seguido en el análisis de los datos

En una primera etapa, cada una de las respuestas fueron copiadas literalmente en una tabla con dos columnas. En la primera columna, introdujimos el código de identificación del cuestionario y en la segunda el enunciado o ilustración. Si dos o más respuestas coincidían literalmente, exceptuando sinónimos u orden en la expresión, las contabilizamos en una misma casilla como respuestas iguales. En el caso de las respuestas sobre representaciones, procedimos de igual manera salvo en el tratamiento de la respuesta. Eliminamos los textos que acompañaban a los dibujos y realizamos una representación icónica y simplificada de cada una de las ilustraciones, de manera que debían coincidir en estructura, forma y figura para poder contabilizarlas como iguales.

Una vez finalizado el vaciado, y para poder interpretar los datos, es necesario organizarlos. Las fuentes utilizadas para clasificarlos y sistematizarlos fueron las siguientes.

- Marco teórico sobre fracciones.
- Las propias respuestas dadas por los estudiantes.

Nuestro objetivo en las sucesivas etapas del análisis es el desarrollo de un sistema mediante un grupo de ideas, conceptos y términos clave que permitan organizar las respuestas obtenidas en cada pregunta.

En una segunda etapa, escogemos un grupo de datos y los revisamos para obtener una visión del conjunto. A medida que vamos leyendo, es claro determinar que muchos de los enunciados son variantes de una misma idea. Detectamos así unos conceptos prioritarios o temas que rigen casi la totalidad de las respuestas obtenidas. De esta manera, organizamos los datos según los temas que contengan una "porción de significado". Estos temas o unidades de significado representan un conjunto de datos mediante una idea común a todos ellos.

Posteriormente, en la tercera etapa del análisis, perfeccionamos nuestro sistema de organización al desarrollar los temas como categorías. Convertir estos temas en categorías con subcategorías obliga a pensar de forma más abstracta. Entre los dos tipos de categorías utilizadas por los investigadores en el análisis cualitativo —categorías etic (representan las perspectivas del exterior de la situación, los conceptos del investigador y las explicaciones científicas) y categorías emic (representan perspectivas del interior, como términos, acciones y explicaciones que son distintas del lugar o de la gente)— utilizamos estas últimas. Nuestro propósito es representar la situación desde la perspectiva de los futuros maestros. Es por ello que estas categorías son las idóneas para nuestro trabajo. Haciendo una revisión de las respuestas agrupadas en cada tema, se observan distintos niveles según el grado de precisión del enunciado. Al atender al significado del enunciado completo, establecimos que, según el grado de especificación de la respuesta y la complejidad de la acción descrita, se forman unos matices comunes que dan lugar a las categorías y subcategorías. Estas tienen que representar de la forma más precisa posible el significado de todas las respuestas a las que contiene.

En la cuarta etapa, elaboramos una estructura conceptual que permita ubicar cualquier respuesta en una de las categorías establecidas. Esta clasificación, con base en el contenido y la semántica de las respuestas, debe poner de manifiesto los diferentes conceptos que aparecen en las repuestas, así como las relaciones, en caso de que existan entre ellos.

El establecimiento de las categorías y subcategorías se llevó inicialmente a cabo con dos tercios de las respuestas obtenidas. Una vez enunciadas las categorías, el tercio de respuestas restante permitió perfilar y validar por saturación la adecuación del sistema establecido. Con el fin de obtener una mayor fiabilidad en la observación, el proceso de obtención del sistema de categorías fue realizado de forma independiente por tres investigadores. Al finalizar su proceso, las tablas e información obtenida fueron comparadas y revisadas hasta que no hubo ninguna diferencia entre ellas.

4.2. CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DE LA SEGUNDA FASE

En la segunda fase empírica de la investigación, indagamos en ciertos aspectos del conocimiento didáctico del contenido. Particularmente, nos centramos en la planificación de la enseñanza que manifiestan los futuros maestros en formación, cuando redactan una explicación para introducir el concepto de fracción a los escolares.

El estudio que realizamos en esta fase es de carácter exploratorio-descriptivo. Lo realizamos durante el curso académico 2011-2012 y utilizamos una ficha de trabajo como instrumento para la recogida de datos. Nos basamos en algunas de las componentes del análisis de instrucción y empleamos un enfoque inductivo para obtener categorías de respuestas. La tabla 4.3 presenta un esquema de la metodología seguida en esta segunda fase.

Tabla 4.3. Esquema de la metodología de la segunda fase de la investigación

Tipo de estudio	Estudio empírico
Ciclo del análisis didáctico utilizado	Análisis de instrucción

Tabla 4.3. Esquema de la metodología de la segunda fase de la investigación

Sujetos	82 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria.
Contexto	Asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria” (2º curso)
Materiales	Cuestionario 2 de trabajo individual e ilustraciones en formato de pegatinas

4.2.1. Sujetos de la segunda fase

Los sujetos participantes de la segunda fase del estudio fueron 82 maestros en formación inicial que cursaban la asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria” en la escuela universitaria La Inmaculada perteneciente a la Universidad de Granada durante el curso académico 2011-2012. Los participantes se encontraban distribuidos en tres grupos distintos de dicha asignatura. En todos los casos el profesor responsable de la docencia era uno de los investigadores. Estos sujetos constituyeron una muestra intencional elegida por su disponibilidad.

4.2.2. Contexto de la segunda fase

La asignatura de tipo obligatorio “Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria”, con 6 créditos ECTS, se encuentra en el segundo semestre del segundo curso del grado de Maestro en Educación Primaria. Esta asignatura está centrada en la enseñanza y aprendizaje de los distintos núcleos temáticos de las matemáticas escolares: aritmética, geometría, medida, estadística y probabilidad. Se concreta en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades) y didácticos (tareas y actividades, materiales y recursos), referidos al sentido numérico, el sentido de la medida, el sentido espacial y el sentido estocástico.

La guía docente de la asignatura del curso 2012-2013 organiza los contenidos de la asignatura en los siguientes cuatro temas.

1. Matemáticas, cultura y sociedad. La importancia social y cultural de las matemáticas. Las matemáticas en el sistema educativo. Fines de la educación matemática. La resolución de problemas matemáticos.
2. Sentido matemático. Sentido numérico. Sentido de la medida. Sentido espacial y geométrico. Sentido estocástico. Características y componentes.
3. Aprendizaje de las matemáticas (aritmética, medida, geometría y estocástica). Expectativas de aprendizaje, etapas de aprendizaje, errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en matemáticas.
4. La enseñanza de las matemáticas (aritmética, medida, geometría y estocástica).

La metodología incluye de clases teórico expositivas y clases prácticas de trabajo en grupo que se complementan con tutorías en pequeños grupos e individualizadas. En las clases teóricas, el profesor es el encargado de presentar, orientar y sintetizar los temas del programa. En las sesiones prácticas, bajo la supervisión del profesor, los alumnos trabajan en grupos guiones de trabajo junto con lecturas de textos recomendadas en la bibliografía.

4.2.3. Instrumentos de recogida de la información de la segunda fase

El instrumento de recolección de información que utilizamos en esta fase del estudio consta de una ficha (cuestionario 2) y dos series de imágenes (serie A y serie B), a modo de tarjetas. Las imágenes muestran objetos que son usuales en la introducción inicial de las fracciones.

En la serie de tarjetas A, incluimos ilustraciones de objetos que ejemplifican distintas magnitudes (longitud-cuerda, superficie-pizza, volumen-naranja) que dan lugar a las fracciones unitarias ½, 1/3 y 1/4. Las ilustraciones de la serie de tarjetas B contienen sólo un objeto de una magnitud, que da lugar a la fracción no unitaria ¾.

Ambas series están formadas por tres tarjetas distintas, que denominaremos A1, A2, A3 y B1, B2, B3. Cada una de las ilustraciones presentes en las tarjetas muestran diferentes elementos básicos de una relación parte-todo multiplicativa: el todo o totalidad (T), las partes (P), y la relación entre una de las partes y el todo P = 1/n T. Las primeras ilustraciones de las tarjetas A1 y B1, muestran los objetos enteros, que representan, en cada caso, el todo del que se parte.

Figura 4.3. Tarjetas A1 y B1

En las tarjetas A2 y B2 se incluyen los objetos iniciales divididos en partes iguales.

Figura 4.4. Tarjetas A2 y B2

Por último, en las ilustraciones de las tarjetas A3 y B3 se muestra la relación de una de esas partes con el todo del que procede.

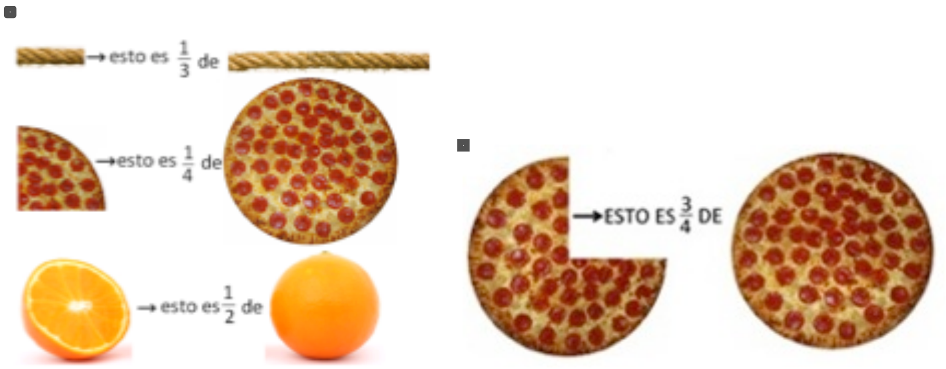


Figura 4.5. Tarjetas A3 y B3

Además de estas tarjetas, se proporcionó a los participantes una ficha de trabajo que incluía las instrucciones para que, de manera individual, realizaran la tarea. Esta ficha, que se adjunta en el anexo B1, además de contener un registro inicial para la identificación de cada sujeto, incluye el siguiente enunciado de la tarea propuesta.

> *Las tres tarjetas que aparecen a continuación pueden usarse para ilustrar el concepto de fracción. Se desea elaborar un material para iniciar a los alumnos de primaria en las fracciones. Establece el orden en que las tarjetas deben aparecer y redacta el texto que debe ir antes y después de cada tarjeta (como si fuese un libro de texto para primaria).*

Subrayamos la idea de que el grupo de escolares de primaria al que va dirigido el material es un grupo hipotético. No lo condicionamos a una edad y un nivel determinados; sólo se subraya la idea de que la actividad consiste en una introducción o iniciación al concepto de fracción.

Las ilustraciones fueron impresas como pegatinas para que pudiesen ser manejadas e insertadas libremente a criterio del estudiante durante el proceso de elaboración de la narración. La finalidad de la tarea es inducir a los sujetos a una situación docente, en al que se simulan las imágenes de un libro de texto escolar o de una ficha de trabajo. Para ello, dimos las ilustraciones de ese supuesto libro o ficha, y pedimos a los maestros que las ordenaran y que escribieran un texto que acompañara y explicara cada imagen.

4.2.4. Procedimiento de la recogida de datos de la segunda fase

Para detectar y solventar posibles errores de interpretación y para que los maestros en formación se familiarizasen con la actividad, se realizó una prueba piloto, dos semanas antes, en la que los sujetos debían realizar una tarea similar sobre el concepto de multiplicación. Las ilustraciones sobre el concepto de multiplicación proporcionadas a modo de pegatinas y la ficha para realizar tal tarea se encuentran en el anexo B.3 y B.4. La prueba piloto mostró que la actividad era clara, por lo que el procedimiento seguido y el tipo de material proporcionado para el la actividad final fue similar al utilizado en el ensayo.

En el mes de mayo de 2012, durante el desarrollo de una sesión de clase, se entregó a cada uno de los sujetos una ficha y una de las series de tarjetas. Del total de 82 sujetos, a 41 de ellos se les entregó la serie A y a los restantes 41 la tipo B. Una vez distribuido todo el material, se les explicó cómo realizar la actividad y se respondió a las dudas que surgieron. Todos los estudiantes habían finalizado la actividad en un tiempo máximo de media hora.

4.2.5. Análisis de los datos de la segunda fase

En el análisis de los datos, utilizamos técnicas cualitativas, cuyo objetivo es organizar y caracterizar las producciones a través del sistema de categorías. El proceso seguido fue muy similar al seguido en la primera fase, por lo que en este caso lo presentamos de manera resumida.

En primer lugar, dos tercios de las respuestas fueron revisadas y escaneadas.

A continuación, para codificar y categorizar las respuestas, nos basamos en las componentes del análisis de instrucción (selección de contenidos, modos de introducir los contenidos, secuenciación de los contenidos y función de las ilustraciones). Estas componentes generales se concretan a través de nuestro marco conceptual en subcategorías más específicas.

En tercer lugar, tras una primera revisión de las respuestas, fue necesario ampliar las subcategorías, pues, de los datos, surgieron otras nuevas no contempladas. A continuación, para validar nuestras categorías y subcategorías se codificaron el tercio restante de respuestas.

El proceso de obtención del sistema de categorías fue realizado de forma independiente por tres investigadores. Al finalizar el proceso de categorización de los datos, las tablas y la información que cada uno obtuvo fueron comparadas y revisadas hasta que no hubo ninguna diferencia entre ellas.

4.3. CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DE LA TERCERA FASE

En esta tercera y última fase de la investigación, continuamos indagando en el conocimiento didáctico del contenido de los maestros en formación cuando responden a preguntas relativas al uso de determinados contextos en la enseñanza de las fracciones, al diseño de una tarea, al planteamiento de expectativas de aprendizaje y a la detección de posibles limitaciones de los escolares en el tema de fracciones.

Abordamos esta fase de la investigación como un estudio de casos, ya que, en esta ocasión, no buscamos la cantidad ni la estandarización de los datos, sino profundizar en la información (Stake, 2010) relativa al conocimiento didáctico de los maestros en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Para la recolección de datos, realizamos entrevistas a 11 sujetos en las que se emplearon varios instrumentos de recogidas de datos: grabaciones en audio de las entrevistas realizadas y tres fichas de trabajo. En la tabla 4.4, presentamos el esquema metodológico de esta fase.

Tabla 4.4. Esquema de la metodología de la tercera fase de la investigación

Tipo de estudio	Estudio de casos
Ciclo del análisis didáctico utilizada	Análisis cognitivo
Sujetos	11 estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria.
Contexto	Asignatura “Diseño y desarrollo del currículum en Educación Primaria” (3er curso)
Materiales	Grabadora de audio y cuestionario 3 de trabajo individual

4.3.1. Sujetos de la tercera fase

Los participantes de este estudio fueron 11 maestros en formación inicial que cursaban los estudios universitarios del Grado en Educación Primaria durante el curso académico 2012-2013 en la Universidad de Granada. Los sujetos eran estudiantes del tercer año de dicha titulación, matriculados en la asignatura Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en Educación Primaria y fueron seleccionados entre los 82 estudiantes de la segunda fase por manifestar variedad de contextos al realizar una narración sobre cómo introducir a los escolares en el concepto de fracción a través de la relación parte-todo.

Los textos redactados permitieron determinar y describir el conocimiento didáctico puesto en juego por esos estudiantes para maestro, entre los que se encuentra su capacidad para identificar y elegir contextos apropiados con los que introducir el concepto de fracción desde la relación parte-todo. El criterio para seleccionar a los sujetos en esta parte del estudio surgió del análisis de la variable contexto. Para ello, revisamos las producciones y elegimos a 11 sujetos, dado que sus narraciones presentaban contextos o modos de uso distintos (anexo C.4). Ejemplos de tales contextos se presentan en los distintos apartados de las figuras 4.6 y 4.7. En la tabla 4.5, indicamos los contextos que correspondieron a los sujetos.

Tabla 4.5. Muestra de sujetos seleccionados

Sujetos	Contexto
Sujeto 1	Dividir
Sujeto 2	Dividir y reconstruir la unidad
Sujeto 3	Dividir y reconstruir la unidad
Sujeto 4	Dividir
Sujeto 5	Dividir
Sujeto 6	Dividir y reconstruir la unidad
Sujeto 7	Dividir
Sujeto 8	Dividir
Sujeto 9	Reparto
Sujeto 10	Hallar la parte complementaria
Sujeto 11	Hallar la parte complementaria

Como se observa en la tabla 4.5, muchas de las narraciones de los sujetos corresponden con el contexto de dividir. Esto es debido a que las ilustraciones usadas para la narración (figuras 4.3, 4.4 y 4.5) inducían a este sentido y la mayoría de los participantes lo manifestaron en sus narraciones, por lo que no fue posible encontrar mayor variedad de contextos. De los 11 sujetos, seleccionamos al azar dos de ellos para la realización de un ensayo previo, por lo que fueron suprimidos de la muestra final.

4.3.2. Contexto del estudio de la tercera fase

La encuesta se desarrolló en el contexto de la asignatura “Diseño y desarrollo del currículum de matemáticas en Educación Primaria” del grado de Educación Primaria. Esta es una asignatura obligatoria con 7 créditos ECTS, que se impar-te en el segundo semestre del tercer curso, orientada al estudio del currículo de Matemáticas de Educación Primaria y al diseño e implementación de unidades didácticas de Matemáticas para esta etapa.

Los contenidos de la asignatura se organizan en los siguientes cinco temas teóricos.

(1) Currículo de matemáticas. Estructura y elementos. Normativas curriculares nacional y autonómica. Otras propuestas curriculares para la enseñanza de las matemáticas escolares.

(2) Gestión de la clase. Los libros de texto. Diseño, selección y secuenciación de tareas.

(3) La evaluación en matemáticas.

(4) Planificación de la enseñanza de las matemáticas de Educación Primaria.

(5) Aspectos afectivos y atención a la diversidad en la enseñanza de las matemáticas escolares.

La guía docente de la asignatura incluye una descripción de la metodología de los créditos prácticos y teóricos. En las clases de teoría, el profesor es el encargado de presentar, orientar y sintetizar los temas y guiar las reflexiones de los estudiantes. En las clases prácticas, los estudiantes, en grupos usualmente de 4 miembros, realizan una serie de prácticas relacionadas con los temas teóricos. Las últimas semanas de clase se dedican al diseño y planificación de una unidad didáctica sobre un tema matemático concreto.

4.3.3. Técnica de recogida de datos e instrumento de la tercera fase

Realizamos la recogida de datos mediante entrevistas personales individualizadas con cada uno de los participantes. La entrevista consta de dos partes. En la primera, el entrevistador utiliza dos fichas con actividades escritas que propone a los participantes. En la segunda parte, el entrevistador dispone de un guión estructurado con las cuestiones que le plantea a los mismos sujetos participantes en la parte primera. Describimos la entrevista a continuación, que sintetizamos por pasos en la tabla 4.6.

Tabla 4.6. Estructura de las dos partes de la entrevista

Primera parte	Paso 1:	Valoración de 5 enunciados de la magnitud superficie
	Paso 2:	Elección y justificación del enunciado (de área) más adecuado para la enseñanza.
	Paso 3:	Valoración de 5 enunciados de la magnitud longitud
	Paso 4:	Elección y justificación del enunciado (de longitud) más adecuado para la enseñanza.
Segunda parte	Paso 5:	Respuestas sobre diseño de tareas, expectativas de aprendizaje y limitaciones

Primera parte de la entrevista: valoración de contextos

En la primera parte de la entrevista, se abordó la evaluación de los contextos de la relación parte-todo a través de cuatro pasos.

Paso 1

La primera parte de la entrevista comenzó presentando el entrevistador a cada sujeto una ficha que contiene una actividad (véase figura 4.6) encaminada a que cada sujeto valore por escrito enunciados sobre la relación parte-todo como inadecuados, poco adecuados, adecuados o muy adecuados.

1. Cinco compañeros han respondido a la siguiente actividad mediante estos enunciados. Léelos con atención y valóralos según te parezcan respuestas más o menos adecuadas a la pregunta.

ACTIVIDAD 3. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugiera la siguiente ilustración:

- Alumno 1. Tenemos ¼ de una tarta, pero para hacer una tarta completa necesitamos más trozos que sean iguales. ¿Cuántos trozos necesitaremos?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 2. Tenemos una tarta, y María se come ¼ de ella. ¿Qué cantidad de tarta queda aún?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 3. Mamá ha hecho una tarta por mi cumpleaños y la ha dividido en 4 partes iguales, Papá que come mucho se ha comido una parte. ¿Cuánto se ha comido de la tarta?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 4. Si María se ha comido 25 gr. de una tarta que pesa 100 gr., ¿qué fracción de tarta se ha comido?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 5. Mamá preparó 1 tarta para mi cumpleaños. Como éramos 4 en la fiesta ¿a cuánto tocábamos cada uno?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

Figura 4.6. Tarea planteada en el primer paso de la entrevista

Paso 2

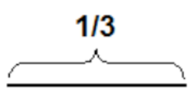
Tras responder por escrito la primera tarea planteada en la ficha, en un segundo paso de la entrevista, se continúa valorando los enunciados presentados, pero en este caso, oralmente. Para ello, se pidió a los sujetos que eligieran el enunciado más adecuado y el menos adecuado para la enseñanza del concepto de fracción, así como los argumentos que sustentan su elección. Las preguntas realizadas fueron las siguientes.

- Imagina que estás en el aula, para iniciar a tus alumnos en la enseñanza del concepto de fracción, ¿cuál o cuáles de los enunciados anteriores utilizarías como ejemplo de la fracción 1/4?
- ¿Por qué consideras adecuado ese enunciado como ejemplo para introducir las fracciones en clase?
- ¿Cuál de estos enunciados crees que es el más inadecuado?
- ¿Por qué lo consideras el más inadecuado?

Paso 3 y 4

El tercer y cuarto paso consistieron en repetir el mismo proceso de los dos primeros pasos pero con cinco enunciados que presentaban magnitud longitud en vez de área, presentados a través de la siguiente tarea.

ACTIVIDAD 4. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugiera la siguiente ilustración:



- Alumno 1. Una carrera está compuesta por 3 tramos, cada uno de la misma longitud. Los corredores ya han recorrido la tercera parte de la carrera. ¿Cuántas partes quedan por recorrer?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 2. Estoy participando en una carrera y ya he recorrido 1/3 de ella. ¿Cuánto queda para llegar a la meta?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 3. El camino desde el colegio a casa se puede dividir en 3 partes iguales. Si he caminado una de las partes del camino, ¿cuánto he recorrido?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 4. Para ir al supermercado tardamos 15 minutos andando y llevamos 5 minutos. Representa en fracción cuanto hemos realizado del trayecto.

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 5. En una carrera de relevos el recorrido se reparte entre 3 corredores, ¿cuánto tendrá que recorrer cada corredor?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

Figura 4.7. Tarea planteada en el tercer paso

Los 10 ejemplos de enunciados que están incluidos en las dos actividades (cinco para la magnitud área y cinco para la longitud) fueron seleccionados de los análisis de la primera fase del estudio (capítulo 6) en el que otro grupo de maestros en formación inicial inventaron enunciados basados en la relación parte todo. Del análisis de tales enunciados surgieron las cinco categorías de contextos de la relación parte-todo que presentamos (reconstruir la unidad, hallar la parte complementaria, hallar la parte, hallar la parte usando una unidad de medida y repartir).

Segunda parte de la entrevista: diseño de tareas, planteamiento de expectativas y detección de limitaciones

Dado que este estudio se centra en el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje, iniciamos esta parte de la entrevista introduciendo a los sujetos en una situación de enseñanza-aprendizaje. Para ello, se entregó a cada sujeto la narración que ellos mismos habían realizado anteriormente durante la segunda fase del estudio sobre cómo iniciar a los escolares en el concepto de fracción. El análisis y resultados de dichas producciones se encuentran en el capítulo 7. Una de las variables analizadas en dichas narraciones fue el contexto o modo de uso que presentaban, como reparto o división (ejemplos de tales contextos se presentan en las tablas 2 y 3). Los sujetos seleccionados en el presente estudio surgieron del análisis de dicha variable. Para ello, revisamos las producciones y elegimos aquellos sujetos cuyas narraciones presentaban contextos o modos de uso variados.

A partir de la narración entregada, planteamos las siguientes preguntas relativas a algunas de las componentes del análisis cognitivo (diseño de tareas, planteamiento de expectativas y detección de limitaciones, ver tabla 4.7).

Tabla 4.7. Preguntas de la entrevistas sobre las componentes del análisis cognitivo

Componente	Pregunta
Diseño y selección de tareas	Para finalizar la explicación de tu narración sobre cómo introducir las fracciones a los escolares, propón alguna tarea, actividad o problema.
Expectativas de aprendizaje	Al poner en práctica tu secuencia en clase con tus alumnos, ¿qué crees que aprenderán?
Limitaciones	(Errores) ¿En qué se pueden equivocar?
	(Dificultades) ¿Por qué crees que se pueden equivocar?

4.3.4. Procedimiento de la recogida de datos de la tercera fase

Las entrevistas se realizaron en el mes de mayo de 2013, de manera individual, en una habitación aislada, para que el sonido de la grabación de audio fuese óptimo.

La investigadora, que tomó el papel de entrevistadora, era la docente de la asignatura “Diseño y desarrollo del currículum de matemáticas en Educación Primaria” que se encontraban cursando los sujetos. Esto permitió establecer con los sujetos una relación de confianza y obtener su colaboración.

Antes de comenzar la grabación, cada sujeto fue informado del motivo de la entrevista y se le advirtió de la grabación en audio. Se les garantizó su anonimato y se les comunicó que las grabaciones serían escuchadas únicamente por los investigadores.

El entrevistador se situó frente al sujeto, separados por una mesa de trabajo. El entrevistador dispuso de un guión con los temas y preguntas a tratar a lo largo de la entrevista. Aunque el orden de las preguntas siempre fue el mismo en todos los casos, el modo de formular las preguntas se dejó a libre decisión del entrevistador. Es decir, el entrevistador planteó la conversación en los términos que estimó convenientes, dio aclaraciones, pidió al sujeto explicaciones cuando alguna respuesta no era clara y profundizó en aquellos temas cuando le pareció necesario. En el caso de que el sujeto no cumpliera con las expectativas de la indagación, el entrevistador tenía libertad para insistir en la pregunta o en su reelaboración.

Para detectar posibles errores en el instrumento, se realizó una prueba piloto con tres de los sujetos seleccionados, tres semanas antes de comenzar las entrevistas definitivas. Los dos primeros sujetos respondieron una versión inicial de la entrevista que fue ampliada para la entrevista piloto que se realizó al tercer sujeto. Se estableció que las tareas y preguntas de esta nueva versión de la entrevista eran claras, por lo que no se hicieron más modificaciones.

4.3.5. Análisis de los datos

Las entrevistas fueron grabadas en audio y posteriormente transcritas para su análisis. El análisis de la primera parte de la entrevista se estructuró tomando en consideración que las respuestas escritas y orales sobre las valoraciones de los enunciados para cada magnitud se realizaron de manera independiente. Para ello, primero se realizó un análisis de las respuestas por escrito a la tarea presentada en la ficha con contextos de magnitud superficie (paso 1). Estos resultados se completaron con las respuestas a las preguntas sobre la elección y justificación del enunciado más y menos adecuado para la enseñanza del concepto de fracción (paso 2). Posteriormente, se realizó el mismo proceso pero con las respuestas a las preguntas sobre los enunciados de magnitud longitud (pasos 3 y 4).

En el análisis de la segunda parte de la entrevista, realizamos un análisis cualitativo de las respuestas a cada una de las preguntas planteadas sobre diseño de tareas, expectativas de aprendizaje y limitaciones. Para ello, nos basamos en las variables desarrolladas en el trabajo de Lupiañez (2008) donde se analizaron objetivos, limitaciones y tareas planteadas por profesores de secundaria en formación inicial cuando diseñan una unidad didáctica de un tema de las matemáticas escolares.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

El desarrollo del sentido numérico se produce desde la más temprana escolaridad y se cimenta sobre el conocimiento informal que tienen los niños sobre las cantidades del mundo físico y sus relaciones. Este conocimiento se desarrolla en principio mediante actividades con materiales manipulativos y, con ellos, adquieren una forma de pensar que Resnick (1990) denomina razonamiento protocuantitativo, dado que es un razonamiento sin números. Resnick distingue formas de razonamiento básicas a las que denomina esquemas protocuantitativos. Partiendo de esta idea, se han realizado un buen número de investigaciones que consideran la hipótesis de que en la base del sentido numérico se encuentran tres tipos de esquemas protocuantitativos —el de aumento-disminución, el esquema parte-todo y el esquema de comparación (Resnick, 1990)— a partir de los cuales sugiere que se construyen los conocimientos aritméticos de los niños. Los investigadores han centrado su atención en el sentido numérico y su relación con diversas actividades de carácter matemático relativas a estos tres tipos de esquemas, así como sus implicaciones para la resolución de problemas. Los esquemas protocuantitativos los entienden como conocimiento informal de cantidades en el mundo físico.

Las teorías cognitivas han postulado que los esquemas son mecanismos mentales útiles para organizar la información que nos llega del entorno y juegan un papel fundamental en el pensamiento y en la resolución de problemas (Mayer, 1985). Un ejemplo es el esquema parte-todo, que se encuentra presente en la comprensión del número y las operaciones, así como en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

En este apartado, nos ceñimos al esquema parte-todo, realizamos una reflexión teórica sobre su naturaleza y sus distintas interpretaciones como parte esencial del pensamiento en aritmética.

5.1. LA RELACIÓN PARTE-TODO Y LA MEREOLOGÍA

La naturaleza de la relación parte-todo es problemática. Una teoría formal de dicha relación la proporciona la mereología como el estudio de las relaciones entre una parte y el todo del que procede. La mereología fue objeto de atención en los inicios de la filosofía y su estudio ha sido y continúa siendo un tema recurrente a lo largo de la historia. Entre los que trataron el tópico de las partes y el todo estuvieron los filósofos de la antigua Grecia, los presocráticos. Posteriormente, Platón, Aristóteles y los Escolásticos abordaron cuestiones fundamentales que aún hoy son importantes, como la caracterización del "todo" y las "partes", o las relaciones entre ellos.

En los inicios del siglo veinte, Husserl (1985) se ocupó de los conceptos de "parte" y "todo" en su Tercera Investigación Lógica. El objetivo de los autores mencionados fue analizar la relación parte-todo, omnipresente en nuestros conceptos y prácticas lingüísticas. La moderna mereología comenzó con Lesniewski (1929), quien construyó el primer sistema formal de mereología fundamentado en la relación "ser parte de". Hay que destacar también los trabajos posteriores de Tarski (1940) y los de Leonard y Goodman (1940). La mereología surgió contemporáneamente y con igual espíritu que la lógica moderna. Uno de sus objetivos fue proveer una fundamentación de la matemática mediante un desarrollo estricto de la relación parte-todo. Cercana a la concepción de Frege, la mereología constituyó una teoría referida a las propiedades de entidades reales.

Los problemas que se plantearon en torno a esta teoría afectaron a diversos campos científicos. Algunas disciplinas elaboraron acercamientos informales, naturales o psicológicos al estudio de la relación (Brown, 1976; Tversky y Hemenway, 1984), mientras que otros acercamientos fueron estrictamente lingüísticos (Bordron, 1991; Cruse, 1986; Lyons, 1978). Hay aproximaciones computacionales que se centraron en la percepción visual (Biederman, 1987; Hoffman y Richards, 1984), mientras que otras fueron específicamente antropológicas (Anderson, 1978).

Peraita y Malrieu (1998) revisaron los problemas surgidos de estas aproximaciones y los acercamientos que permitieron el tratamiento de la relación parte-todo. Estas autoras señalaron que

> *Un acercamiento de cada uno de ellos es diferente, así como sus objetivos y finalidades, pero un análisis minucioso de los mismos pone de manifiesto una problemática recurrente a lo largo de esos diferentes acercamientos que, cuando menos, indica la relevancia de dicha relación tanto desde un punto de vista teórico o de investigación básica como aplicado.* (p. 112)

5.2. TODO, PARTE Y RELACIÓN

La caracterización formal de la relación parte-todo no es simple, pues, en el lenguaje cotidiano, los términos todo y parte presentan diversos significados, no todos ellos de interés para este trabajo. En primer lugar, consideramos como "todo" aquella cantidad que tomamos como dato de partida y "parte" a cada una de las cantidades P_i en que un todo puede romperse o fragmentarse real o metafóricamente, pudiendo afirmar que algo puede ser considerado parte de una totalidad si es o ha sido poseído por dicha entidad. En matemáticas, no se entiende un todo sin partes, ni una parte sin todo "no se llamará a ninguna cosa 'todo' a no ser que tenga partes" (Russell, 1973, p. 504). Es importante comprender la diferencia entre un todo y sus partes. Un todo es una entidad distinta de cada una de sus partes y de todas ellas. Se relaciona con ellas, pero tiene una entidad distinta a ellas.

Cuando un todo, simbolizado por T, se fragmenta o divide en n partes P_i, con $1 \leq i \leq n$, podemos afirmar que el todo es la unión de sus n partes, $T = \bigcup_{i=1}^{n} Pi$. Cada una de esas partes P_i presenta una determinada relación con el todo: $R(P_i,T)$.

5.3. CLASIFICACIÓN DE LAS RELACIONES PARTE-TODO

Las teorías mereológicas han realizado diversas clasificaciones de las relaciones parte-todo desde distintas perspectivas. Nos centramos en la realizada por Gerstl y Pribbenow (1995) que cubre varios dominios ontológicos y que está realizada desde un punto de vista constructivo, es decir, cada relación representa una manera diferente de realizar la partición del todo. Para ello utiliza dos criterios alternativos: (a) el todo posee a priori una estructura de partes, y (b) las partes se construyen de manera temporal mediante la aplicación de un criterio externo al todo.

En el primer tipo de relaciones parte-todo, el todo posee una estructura a priori y las partes están integradas en esa estructura. Por ejemplo, una casa tiene una estructura previa de habitaciones, un cuadrilátero está constituido por cuatro lados, un libro está constituido por capítulos. Gerstl y Pribbenow (1995) distinguen tres tipos de relaciones parte-todo de acuerdo con la estructura previa de partes que posee el todo: elemento-colección, cantidad-masa y componente-complejo. Interpretamos el caso elemento-colección como la relación que existe entre los elementos y el todo en los conjuntos discretos. Para nosotros, el segundo caso abarca la relación que se establece entre cantidades y un todo continuo. Mientras que en los casos anteriores el todo, ya sea continuo o discreto, es de carácter homogéneo, en el tercer caso componente-complejo el todo es heterogéneo y se relaciona con cada una de sus partes mediante un criterio distinto, dando lugar a relaciones distintas. Como ejemplo, un departamento de una empresa es un todo complejo pues está compuesto por partes distintas entre sí: director, secretario, personal fijo, becarios… Cada una de estas partes mantiene una relación diferente con el departamento. Resumimos estas ideas en el esquema de la figura 5.1.

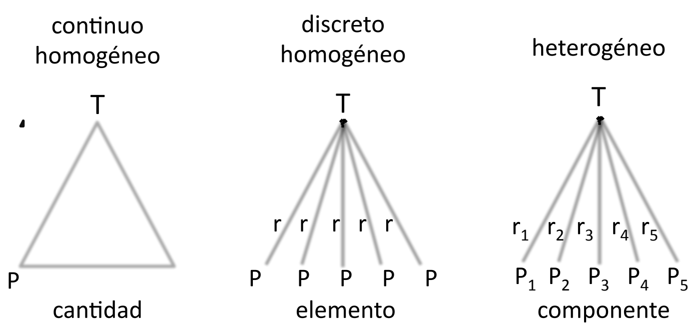


Figura 5.1. Tipos de relaciones cuyos todos presentan estructura de partes

El segundo tipo de relaciones parte-todo surge de tener en cuenta criterios que se utilizan en un momento dado para establecer una división del todo en partes de manera temporal. El criterio puede ser interno al todo o bien externo. Si un todo está pintado de distintos colores, se puede utilizar el criterio del color para establecer las partes. El criterio está ya en el todo pero no forma parte de su estructura. Cuando decimos, mitad superior del rectángulo, la parte de atrás del coche, o este coche tiene tres volúmenes, estamos aplicando criterios externos espaciales para establecer las partes: en los dos primeros casos, un criterio de posición espacial, y, en el tercero, volumétrico.

5.4. LA RELACIÓN PARTE-TODO EN ARITMÉTICA

La relación entre la parte y el todo ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas (Bell, 2004). Una de las primeras apariciones de esta relación se encuentra en los principios fundamentales sobre los que se desarrollan los Elementos de Euclides, concretamente en el apartado "nociones comunes". La quinta noción común afirma que "el todo es mayor que la parte". Esta noción común sería rechazada posteriormente por George Cantor en su teoría de los cardinales, y sería sólo válida para los cardinales finitos, que es sobre la que están construidos los números naturales.

Si desde el punto de vista psicológico se habla del esquema parte-todo, desde un punto de vista lógico tiene importancia la relación parte-todo y su estrecha conexión con la relación de inclusión. La relación de inclusión forma parte de la teoría de conjuntos, aunque la relación esencial en la teoría de conjuntos es la relación "ser elemento de". La relación parte-todo y, por ende, la relación de inclusión son objeto de atención de las teorías merológicas, que tratan de clarificarla. Los análisis mereológicos pueden ser útiles para conocer mejor los tipos de conocimientos informales. Si la relación parte-todo es uno de los conocimientos informales sobre los que se construye el sentido numérico, conocer su naturaleza y las clases de relaciones parte-todo puede permitir un buen control sobre ese proceso previo en el que se fundamenta la construcción de significados aritméticos.

En la matemática escolar, encontramos la relación parte-todo en el estudio de las estructuras aritméticas, tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa, con diferente significado. La relación parte todo es el origen para entender dichas estructuras, ya que da lugar a acciones por las cuales se presenta la estructura aditiva (agregar, reunir, segregar, separar) y multiplicativa (reiterar o hacer partes iguales).

La relación parte-todo conlleva considerar que un número natural está constituido por dos o más partes. El dominio de tal idea es uno de los mayores logros de los niños en sus primeros años de escolaridad. Una sólida formación en la misma facilita el trabajo posterior con el valor de posición, los conceptos numéricos y la resolución de problemas verbales. Al igual que con otras relaciones numéricas, los estudiantes utilizan la subitización y el conteo como estrategias para formar sus ideas sobre la relación parte-todo, que conformarán su esquema parte-todo.

Según Piaget (1975), el niño construye el concepto de número a través de la integración de dos tipos de relaciones: el orden y la inclusión jerárquica. Ésta última es un caso de relación parte todo.

La inclusión jerárquica de los números consiste en incluir mentalmente el “uno” en “dos”, el “dos” en “tres”, etc. Es decir el “uno” es parte del “dos” como totalidad, el “dos” es parte del “tres”, etc. (figura 5.2).

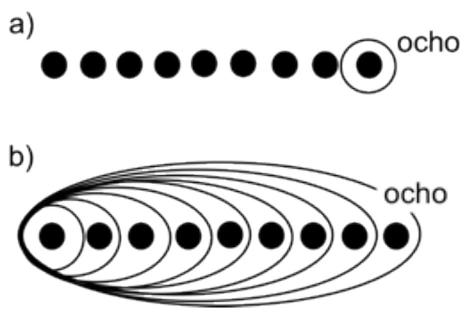


Figura 5.2. El término ocho utilizado (a) sólo para referirse al último elemento y (b) a todo el grupo de objetos

Mediante tareas de inclusión de clases, Piaget puso de manifiesto las dificultades que el dominio de esta relación entraña para los niños. Los niños pueden dividir mentalmente un todo en partes, pero el todo deja de existir en el momento en el que ha sido dividido, pudiendo pensar en las partes, pero no en el todo y las partes a la vez. Para comparar el todo con una parte, el niño ha de hacer dos acciones opuestas de forma simultánea: dividir el todo en partes y reconstruir el todo. Esta habilidad no sé consigue hasta la edad de 7 u 8 años. Cuando el niño establece este tipo de relaciones parte-todo, su pensamiento se hace móvil y, como resultado, construye la estructura lógico-matemática del número.

5.4.1. La relación parte-todo aditiva

En aritmética, la relación parte-todo aditiva tiene lugar o se establece entre dos cantidades de una misma magnitud, pero con la condición de que la cantidad que hace de parte esté incluida en la cantidad que actúa como el todo. Como consecuencia de ello, de manera implícita, se está considerando otra parte que es complementaria de la dada con respecto al todo. Esta relación se puede representar en distintos niveles de generalidad y con distintos tipos de diagramas (diagramas de Venn, diagramas lineales, de red, etc.). Todas ellas representan en forma simbólica la relación aditiva P+P = T (véase figura 3).

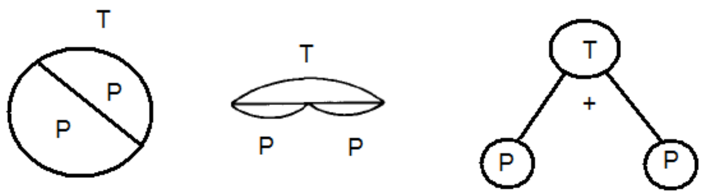


Figura 5.3. Distintos diagramas de la relación parte todo aditiva

En aritmética, el conocimiento de la relación parte-todo constituye la base para comprender y resolver tareas como completar expresiones numéricas (p. ej., 5 + __= 9 o __− 3 = 7) y resolver problemas de estructura aditiva de combinación parte-todo (véase tabla 5.1), en los que dos partes se combinan para formar un todo o hay que hallar una parte cuando se conoce el todo y la otra parte.

Tabla 5.1. Problemas parte-todo

1. José tiene 5 manzanas verdes y 4 rojas. ¿Cuántas tiene en total?
2. José tiene 9 manzanas de las que 4 son rojas. ¿Cuántas son verdes?

La relación parte-todo aditiva no se reduce a considerar el caso en el que un todo se divide en dos partes complementarias, también un todo puede estar compuesto por tres o más partes. La idea de que la unión de las partes es el todo es una de las ideas básicas de la relación parte-todo. Si un todo se descompone en tres partes, $T = P_1+P_2+P_3$ la reconstrucción del todo se puede hacer de dos maneras: $(P_1+P_2)+P_3$ o bien $P_1+(P_2+P_3)$, lo que en el lenguaje de Resnick (1992) es un conocimiento protocuantitativo previo de la propiedad asociativa de la suma de números naturales.

5.4.2. La relación parte-todo multiplicativa

El caso más general de la relación aditiva es considerar un todo dividido en n partes ($T = \sum_{1\leq i\leq n} P_i$), lo que nos lleva al caso especial de que todas las partes sean iguales. Una relación parte-todo es multiplicativa cuando las n partes P_i en que se divide el todo son cantidades iguales, es decir, $P_i = P_j, \forall i, j$. En este caso, notamos cada parte como P y tenemos que $T = \sum_{1\leq i\leq n} P_i = n\,P$. A las situaciones en las que se da esta relación las denominamos de grupos repetidos y constituye un conocimiento que sirve de base para la introducción de la multiplicación de números naturales como suma repetida.

En una relación parte-todo multiplicativa distinguimos dos relaciones numéricas: una directa R(T, P) en la que se trata de obtener el todo como composición de partes iguales, y su inversa R(P,T), en la que a partir de un todo debemos descomponerlo en partes iguales. Esta relación inversa es fructífera desde un punto de vista matemático, dando lugar a los conceptos de división partitiva y de división cuotitiva, por un lado, y de fracción, por otro.

Expresamos la relación directa como $T = nP$, con P parte unitaria, donde n expresa la relación entre el todo y cualquiera de sus partes unitarias: $R(T,P) = n$. Por ejemplo, cuando decimos "La altura del edificio es 7 veces la altura de cada piso".

Cuando consideramos la relación inversa $P = \frac{1}{n}T$, entonces la fracción $\frac{1}{n}$ expresa la relación entre cada parte P y el todo T: $R(P,T) = \frac{1}{n}$. Esta relación entre P y T se expresa diciendo que P es parte enésima unitaria de T. "La altura de cada piso es la séptima parte de la altura del edificio".

5.5. LA RELACIÓN PARTE-TODO EN LAS FRACCIONES

Al igual que la substracción para la estructura aditiva, en la estructura multiplicativa encontramos un caso especial en el que la relación parte-todo adquiere especial relevancia: las fracciones. Las fracciones surgen, en una relación multiplicativa parte-todo, como el modo de expresar la relación entre una parte y el todo del que procede. De este modo, los niños comienzan el aprendizaje de las fracciones en términos de las partes que componen un todo (Brocardo, 2010).

En general, las investigaciones centradas en este campo (Freudenthal, 1983; Kieren, 1993; Nersher, 1985; Steffe y Olive, 2010) coinciden en identificar que el concepto de fracción emerge de la aplicación de unos esquemas o mecanismos intuitivos, en particular el proceso de partición en cantidades continuas o contextos discretos, y destacan la identificación de la unidad o todo. El concepto de totalidad como algo que se descompone, recompone y convierte ha sido el fundamento de la relación parte todo y, como veremos a continuación, un factor que da lugar y unifica a los subconstructos de los números racionales.

5.5.1. La relación parte-todo y los subconstructos de los números racionales

Tras realizar una revisión de la relación multiplicativa parte-todo en el contexto de la aritmética escolar, encontramos distintas reflexiones realizadas por expertos (Berh et al.,1983; Carpenter, Fennema y Romberg, 1993; Figueras, 1988; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976; Streefland, 1978). Kieren utiliza el término *subconstructo* para referirse a distintas interpretaciones de los números racionales. Inicialmente, Kieren identificó cuatro subconstructos de los números racionales (razón, operador, cociente y medida) y considera que la relación parte-todo es su raíz u origen.

Posteriormente, Behr et al. (1983) desarrollan la idea de Kieren, añaden un quinto subconstructo, el de parte-todo, y proponen un modelo que relaciona las distintas interpretaciones de los números racionales. En este modelo, la relación parte-todo, junto con el proceso de partición, se considera fundamental para el desarrollo de los restantes subconstructos. Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) ponen a prueba empíricamente el modelo de Behr et al. (1983) y reafirman que el subconstructo parte-todo y el proceso de partición constituyen una base para el desarrollo de los restantes subconstructos de los números racionales.

Un tercer análisis sobre la semántica de los números racionales fue realizado por Freudenthal (1983) que consideró cuatro significados fundamentales para la fracción: parte-todo, cociente, comparación y fracción-magnitud.

Posteriormente, Nersher (1985) presentó otra clasificación en la que distingue entre los siguientes conceptos: la fracción como una relación parte-todo, el número racional como resultado de una división, el número racional como razón o comparación multiplicativa entre dos cantidades, el número racional como un operador y el número racional como probabilidad.

5.6. CONEXIONES PREALGEBRAICAS

Se sabe poco sobre el efecto que tienen los conocimientos y las habilidades aritméticas de los estudiantes sobre el aprendizaje inicial del álgebra. Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) discuten el tipo de pensamiento que los estudiantes desarrollan en programas aritméticos tradicionales a diferencia del que se requiere para el estudio del álgebra. Los programas de aritmética ponen su foco de atención en el cálculo y no favorecen el aspecto relacional de las operaciones. Linsell, Savell, Johnston, Bell, McAuslan y Bell (2007) recogen estas ideas para dar recomendaciones sobre la conexión entre la aritmética y el aprendizaje inicial del álgebra. Destaca la importancia que le otorgan a los aspectos relacionales de la aritmética en el aprendizaje del álgebra y, entre la variedad de interpretaciones que los escolares atribuyen al signo igual (Molina, Castro, Castro, 2009), subraya como ejemplo la idea que adquieren los niños del signo igual como un cálculo a realizar cuando trabajan con expresiones como 5+7=___, en vez de concebirlo como una relación de igualdad o de equivalencia. Para facilitar el paso de la aritmética al álgebra, los escolares deben realizar actividades de uno y otro tipo para no quedarse anclados en la interpretación del signo igual como indicador de cálculo. Íntimamente ligado a esto está el considerar las ecuaciones como un proceso en lugar de un objeto que hay que transformar. Cuando los escolares se enfrentan por primera vez con ecuaciones del tipo $2\times4+3=x$, pueden pensar que una ecuación es un proceso aritmético que hay que llevar a cabo. Extrapolan esta idea a otro tipo de ecuaciones, como $4x + 8 = 20$, e intentan resolverla mediante un proceso aritmético de ensayo y error para hallar x.

Si bien los escolares pueden resolver ecuaciones del tipo x+4=9 mediante estrategias aritméticas de ensayo y error, propuestas curriculares como la New Zealand Number Framework (Ministry of Education, 2003) subrayan que esto puede resultar más fácil para los escolares que apliquen ideas de la relación parte-todo. Así mismo, en esta propuesta se recomienda que, para resolver ecuaciones del tipo 3x=12, se utilicen ideas ligadas a la relación multiplicativa parte-todo. Linsell, Savell, Johnston, Bell, McAuslan y Bell (2007) aseguran que sólo los estudiantes que han dominado las relaciones parte-todo de carácter multiplicativo son capaces de resolver ecuaciones siguiendo el proceso formal de invertir las operaciones.

Cuando se llevan a la práctica escolar, estas ideas se concretan mediante modelos lineales que reflejan una abstracción progresiva desde una representación de las cantidades lo más cercana a la realidad, hasta una representación lo más próxima a la representación simbólica algebraica. Por ejemplo, en el caso de la relación parte-todo aditiva, para realizar la transición desde la aritmética al álgebra, se utilizan modelos de parte+parte=todo para conectar expresiones como 3+2=5 a través de los siguientes pasos:

Paso 1. Se reflejan en el modelo las cantidades y de forma figurativa las unidades físicas que se utilizan.

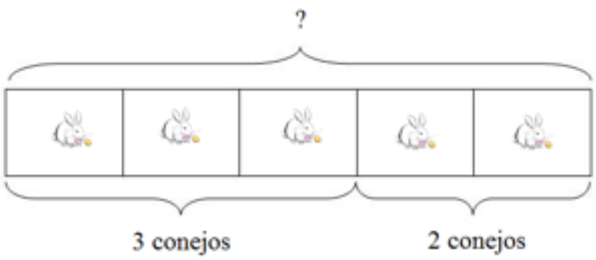


Figura 5.4. Paso 1

Paso 2. Se eliminan las unidades figurativas, pero se conservan las unidades lineales que constituyen el total

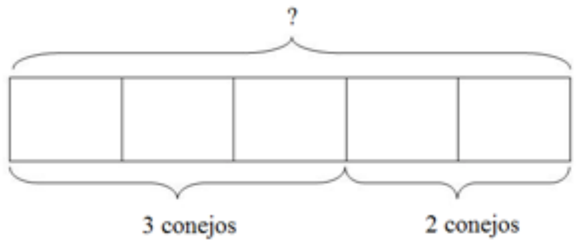


Figura 5.5. Paso 2

Paso 3. Se suprimen la división de las cantidades en unidades, destacando en el modelo las partes de forma global

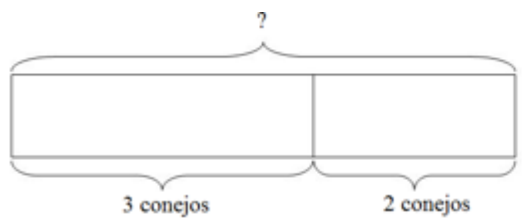


Figura 5.6. Paso 3

Paso 4. Se abstraen la naturaleza de las cantidades

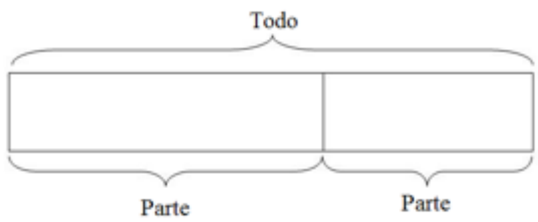


Figura 5.6. Paso 4

Con esta serie de pasos se quiere realizar el tránsito de la expresión 3+2=5 a otra de forma más abstracta parte+parte=todo.

5.7. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

El análisis conceptual realizado es una indagación teórica, previa al estudio empírico, necesaria para esclarecer y profundizar en el tópico en el que centramos este estudio la relación parte-todo. A través de este estudio teórico clarificamos la complejidad del tópico dentro de diversas disciplinas y especialmente, en las matemáticas escolares. La indagación realizada ha mostrado la relevancia de la relación parte-todo desde un punto de vista de la fundamentación lógica de la matemática, la comprensión del número y las operaciones, así como en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

CAPÍTULO 6

ESTUDIO EMPÍRICO FASE 1. CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

El estudio empírico que realizamos en la investigación se ha abordado en tres fases que conllevan tres procesos de recogida de datos y de análisis independientes. Cada una de estas fases se expone en capítulos distintos porque constituyen unidades de estudio y análisis diferenciadas.

En este capítulo, abordamos el análisis de las respuestas a las tres preguntas del cuestionario 1 planteado en la primera fase de nuestra investigación. La metodología de este análisis se describe en el capítulo 4 de esta memoria.

La primera fase del estudio empírico se realizó para profundizar sobre el conocimiento del contenido de los maestros en formación de primaria en el dominio de las fracciones, en particular de la relación parte-todo. En esta ocasión nos ocupamos de la segunda componente del análisis didáctico, el análisis del contenido de las matemáticas escolares. Fueron las tres dimensiones o componentes del significado de un concepto matemático escolar (estructura conceptual, sistemas de representación y contextos o modos de uso) las que dirigieron el diseño y construcción del cuestionario 1. Mediante el cuestionario nos propusimos identificar el alcance de los significados manifestados por los profesores en formación.

En esta fase, nos proponemos, en primer lugar, identificar los conceptos y las ideas manifestadas por los participantes acerca de cada dimensión; en segundo lugar, caracterizar los diferentes niveles de conocimiento proporcionado por los sujetos. Presentamos nuestras interpretaciones sobre el conocimiento de los profesores en formación sobre este tópico en cuatro secciones. Las tres primeras corresponden a las tres preguntas del cuestionario. La cuarta corresponde a las tipologías de significado encontradas. Construimos estas tipologías, que se analizan en las tres primeras secciones, con base en el conocimiento de la estructura conceptual, los sistemas de representación, y los contextos y modos de uso. Finalmente, en el último apartado presentamos un balance de los resultados obtenidos en esta primera fase del estudio empírico.

6.1. Pregunta 1. Estructura conceptual

En la pregunta 1, relativa a la estructura conceptual de la relación parte-todo, se pidió a los participantes explicar por escrito y oralmente qué se entiende por fraccionar.

Organizamos las respuestas a la pregunta 1 de acuerdo con la presencia o ausencia de las acciones, hechos y datos fundamentales de la relación parte-todo: el verbo, que expresa la acción o intención de fraccionar un objeto en sus partes; el todo que es fraccionado; las partes en las que el todo es fraccionado; y la igualdad de las partes. Mostramos en la tabla 6.1 la progresión de los niveles de precisión o categorías establecidos, con base en la complejidad de las respuestas según la mayor o menor presencia de estas acciones, hechos y datos.

Tabla 6.1. Porcentaje de respuestas según niveles para la pregunta 1

Niveles		Porcentaje N= 358
(1)	Uno o varios verbos de acción	5.2%
(2)	Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a un todo	10.2%
(3)	Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a las partes	3.7%
(4)	Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a un todo y a las partes	33.8%
(5)	Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a las partes iguales	6.4%
(6)	Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a un todo y a las partes iguales	36.1%
(7)	Otros	5.6%

Los seis niveles encontrados describen diferentes grados de precisión que los estudiantes utilizan para expresar la relación estructural de las fracciones. El primer nivel se caracteriza por incluir sólo uno o más verbos de acción. Estos verbos son dividir, distribuir, partir y sus combinaciones posibles. Este tipo de respuesta tiene un significado impreciso, en el que “fraccionar” se presenta sólo como una acción usando uno o más verbos.

El segundo nivel de precisión se establece a partir de las posibles combinaciones de estos tres verbos, así como la totalidad sobre la que se aplica esta acción. Dos respuestas que pertenecen a este nivel son “distribuir una cantidad” o “dividir un todo”.

El tercer nivel es el menos frecuente en las respuestas de los sujetos. Este nivel se compone de las posibles combinaciones de los tres verbos con referencia a las partes o el resultado de la acción de romper en partes. Tanto en este caso, como en el anterior, el significado de la relación es impreciso, ya que las respuestas no reflejan todos los datos que establecen la relación. Suponemos que este nivel expresa mayor precisión que el anterior, dado que la idea de la totalidad está implícita en la acción de crear partes. Un ejemplo de respuesta para este nivel es "partir o dividir en partes".

El cuarto nivel está formado por tres datos: verbo de acción, la totalidad y las partes. Este nivel es el segundo más frecuente en las respuestas de los profesores en formación. Incluye respuestas tales como "dividir una cantidad en partes" o "dividir o repartir un todo en partes".

El quinto nivel se identifica por un verbo de acción que hace referencia a las partes iguales. En este caso, la acción de fraccionar se considera equitativa, ya que los sujetos especifican la naturaleza de las partes. En contraste con el nivel anterior, éste no menciona el todo o totalidad de la que provienen las partes, aunque se considera implícito en la respuesta.

Finalmente, la respuesta que expresa la idea más completa y a su vez la más frecuente, está formada por un verbo de acción que hace referencia a un todo que se divide en partes iguales. Este nivel representa el significado más preciso, con respuestas tales como "dividir o distribuir un todo en partes iguales".

La figura 6.1 muestra una relación jerárquica entre los niveles de precisión.

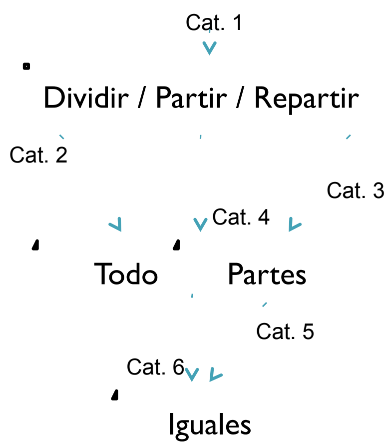


Figura 6.1. Relaciones entre los niveles de precisión de las respuestas a la pregunta 1

El verbo que expresa la acción de romper en partes, es el elemento que se mantiene constante en las seis categorías. Ya hemos mencionado que estos verbos pueden aparecer solos o por parejas (dividir y partir, dividir y repartir, partir y repartir). Entre las respuestas, "dividir" es el verbo que se usa con mayor frecuencia (82,6%). Los datos muestran que "fraccionar" es una idea asociada principalmente a la acción, física o mental, de dividir un todo en partes iguales. Este verbo proporciona la referencia clave para el concepto intuitivo de fraccionar.

Aunque las concepciones de los participantes se basan en la relación parte-todo multiplicativa, los resultados muestran que algunos de los participantes (15,5%) no mencionan el todo como un componente fundamental en sus definiciones. Además, alrededor de la mitad de los participantes no consideraron las partes iguales en el proceso de fraccionar.

6. 2. PREGUNTA 2.SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

La pregunta 2 del cuestionario, relativa a los sistemas de representación, pide a los estudiantes: "Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar".

En este caso, clasificamos las respuestas según el tipo de magnitud que los participantes utilizaron en su ilustración: continua, discreta o mixta (compuesta de una representación discreta y una representación continua). En la tabla 6.2, recogemos las frecuencias (expresadas en porcentajes) de las distintas categorías en las respuestas de los participantes.

Tabla 6.2. Porcentaje de respuestas según magnitud

Categorías	Porcentaje N=358
Continuo – lineal	0.5%

Continuo – área	98%
Discreto	1%
Continuo y discreto	0.5%
Total	100%

Las representaciones de área están presentes en el 98% de las respuestas a través de figuras de círculos y cuadriláteros, que se utilizaron aproximadamente con la misma frecuencia en todas las respuestas. Solo el 1% de las respuestas presentó otras figuras (véase tabla 6.3).

Tabla 6.3. Porcentaje de los tipos de superficies

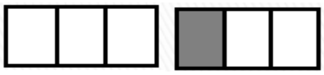
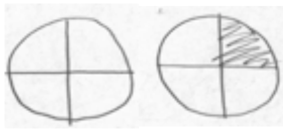
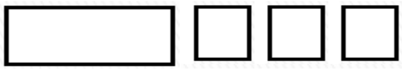
	Porcentaje N=350
Círculos	49%
Cuadriláteros	44%
Círculos y cuadriláteros	6%
Otros	1%

Dado el alto porcentaje de frecuencia de la categoría continuo-área, desarrollamos para esta categoría un sistema de clasificación en subcategorías de acuerdo con el tipo y el número de figuras divididas y divididas y coloreadas. En la tabla 6.4, mostramos las subcategorías de este sistema y un ejemplo para cada una. Organizamos estas subcategorías en dos niveles, según el número de figuras presentes en las respuestas.

El primer nivel corresponde a una situación estática. Se compone de una sola figura: un círculo o un cuadrilátero que pueden parecer divididos en partes iguales (subcategoría 1), o divididos con una parte coloreada (subcategoría 2). Este nivel es el más común en las respuestas de los participantes.

El segundo nivel consiste en una representación dinámica, ya que se compone de secuencias de dos figuras que muestran diferentes pasos para la acción de fraccionar: el todo y el todo dividido en partes (subcategoría 3), el todo dividido y el todo dividido con una parte sombreada (subcategoría 4), y el todo y las partes separadas (subcategoría 5).

Tabla 6.4. Frecuencia de las subcategorías para las respuestas de la pregunta 2

Subcategoría para las respuestas tipo área	Ejemplo	Porcentaje N=358
(1) 		18.2%
(2) 		49.4%
(3) 		11.6%
(4) 		6.7%
(5) 		6.3%
Otros		5.8%

Como se observa en las respuestas, aproximadamente un 24,5% de los sujetos vinculan la acción de “fraccionar” con secuencias de figuras de magnitud superficie. Es importante señalar que casi la totalidad de los participantes utilizaron sólo ilustraciones de círculos o cuadriláteros. Al igual que en la primera pregunta, hay respuestas menos elaboradas y respuestas más completas que contienen un mayor número de datos o imágenes.

6.3. PREGUNTA 3. CONTEXTOS Y MODOS DE USO

Planteamos la tercera pregunta con la intención de que nos proporcione información sobre los contextos y modos de uso que los sujetos asocian con ilustraciones relativas a la relación parte-todo. En ella se les presenta a los sujetos cinco modelos gráficos de la relación parte-todo y se les solicita que inventen situaciones asociadas a los mismos. Concretamente la cuestión está planteada en los siguientes términos (figura 6.2):

> *Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones.*

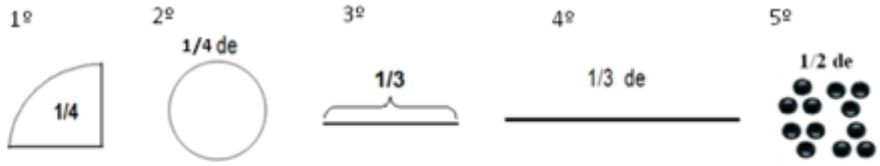


Figura 6.2. Ilustraciones dadas en la pregunta 3

Cada una de las cinco ilustraciones de la figura 6.2 difiere de las otras cuatro en algún aspecto: en el tipo de magnitud utilizada (superficie, longitud, objetos discretos), o bien, dentro de ellas (salvo en los objetos discretos), si en la relación parte-todo que representan se desconoce el todo o una parte y se sugiere su cálculo a partir de la otra cantidad conocida (respectivamente una parte o el todo). En la quinta ilustración, correspondiente a objetos discretos, solo se propone una ilustración, que elicita calcular una parte a partir del todo. Las dos primeras ilustraciones están basadas en el área, las dos siguientes en la longitud y la quinta utiliza objetos discretos. A pesar de esta sistematicidad en la elección de las ilustraciones, no estamos interesados en comparar el efecto de estas variables, solo quisimos proponer ilustraciones variadas incentiven y hagan surgir ideas en los sujetos para que las exterioricen verbalmente.

Si bien la variabilidad de estímulos tiene la ventaja que señalamos, tiene también la desventaja de que los participantes pueden malinterpretar, de acuerdo con nuestras expectativas, alguno de los ítems gráficos propuestos. Estuvimos atentos a esta circunstancia y la controlamos. Por ello, antes de exponer la categorización de las respuestas como producto del análisis que realizamos, debemos señalar que el total de participantes ofrecieron problemas de operar (división o estructura aditiva) para la quinta ilustración de esta tarea (tabla 6.5). Estos contextos no surgen de las otras ilustraciones (a excepción de casos aislados).

Tabla 6.5. Ejemplos de problemas propuestos para la quinta ilustración

Operador	"Tengo una docena de huevos y quiero sólo la mitad, ¿cuántos huevos cojo?"
	"Tengo 12 canicas y le doy a mi hermana la mitad, ¿con cuántas me quedo yo?"
	"Si tenemos 12 bolas ¿Cuánto corresponde ½ de éstas?"
	"Calcula ½ de 12"
División	"Tenemos una docena de lacasitos y hay que repartirlos entre dos hermanas ¿Cuánto le toca a cada uno?"
	"Juan y yo nos hemos repartido estos 12 caramelos entre los dos. ¿Qué cantidad de caramelos obtuvimos cada uno?"
	"Pedro y Juan siempre juegan a las canicas en el patio pero todas se les han mezclado, en total hay 12 canicas y cada uno de ellos tenía el mismo número de canicas que el otro ¿a cuántas canicas tocan?"
Estructura aditiva	"Si tengo 12 bolitas y mi hermana me quita 2 y mi prima 6. ¿Cuántas bolitas quedan?"
	"Ana y María están jugando a las canicas al principio Ana tenía 8 canicas y María 4. Si al acabar María tiene el total de canicas ¿cuántas canicas tiene ahora?"
	"Tengo 12 canicas y me quitan 6"

Dado que estos contextos no tuvieron sentido fraccionario, excluimos todas las respuestas a la ilustración cinco y sólo analizamos y categorizamos las respuestas a las cuatro primeras ilustraciones, que son aquellas claramente relacionadas con el concepto de relación multiplicativa parte-todo dentro de las fracciones.

En las respuestas de los participantes a esta pregunta, identificamos cinco contextos o modos de uso de la relación parte-todo. Estos contextos, que exponemos a continuación, no son exhaustivos, pues en algunos casos se combinan varios de ellos en la misma respuesta.

1.Hallar una parte

Un enunciado pertenece a este contexto o modo de uso cuando la acción que da lugar a una parte proviene de dividir un todo en partes iguales. Estas características fueron reconocidas cualitativamente porque en las respuestas se menciona dicha acción que puede ser descrita a través de verbos sinónimos, tales como fragmentar, partir, romper, etc.. En todos los casos se menciona el conjunto o el todo, el número de partes, la igualdad de las partes y la acción de seleccionar una de las partes. Un ejemplo de un enunciado proporcionado por uno de los participantes a la ilustración 2 de área, que corresponde a esta categoría es el siguiente.

> "En una fiesta de cumpleaños hay una tarta que se divide en 4 trozos. Juan se ha comido un trozo, ¿qué fracción representa la cantidad que se ha comido Juan".

2. Repartir

En este caso, los descriptores básicos de este contexto son un verbo sinónimo de repartir entre varias personas: distribuir, dar, entregar, etc.; el todo o conjunto que se reparte; y el número de sujetos a los que se les distribuyen las porciones. Estas condiciones necesarias constituyen los criterios básicos para considerar que un enunciado presenta este contexto, siempre que se cumplan las condiciones de equitatividad y exhaustividad. Un ejemplo de un enunciado planteado como respuesta a la ilustración 2 es el siguiente.

> "Mamá hizo un pastel para mi cumpleaños. Como somos 4 en la fiesta, ¿cuánto nos toca a cada uno?"

3. Hallar la parte complementaria

En este contexto o modo de uso, la acción se origina en una parte que es expresada como una fracción. La pregunta requiere identificar la parte complementaria usando términos cuantitativos que relacionan la parte complementaria con el todo (¿Cuánto es? ¿Cuánto hay? ¿Por cuánto tiempo es?) o una expresión equivalente (¿Qué cantidad...? ¿Qué proporción...? ¿Qué fracción...?). Dos ejemplos de respuestas esta categoría correspondiente con las ilustraciones 1 y 3 respectivamente son los siguientes.

> "María se comió un cuarto de una torta. ¿Cuánta torta queda?"
>
> "Estoy participando en una carrera y ya he recorrido 1/3, ¿cuánto queda para llegar a la meta?"

4. Reconstruir la unidad

Este contexto es muy similar al caso anterior, pero difiere en que el todo está dividido a priori, y la cuestión se refiere a la otra parte, la parte complementaria. El proceso utilizado para resolver el problema es contar, no comparar. Dos ejemplos de respuestas planteados para las ilustraciones 4 y 1 respectivamente son los siguientes.

> "Una carrera tiene 3 tramos, cada una de la misma longitud. El atleta ha corrido el primer tercio de la carrera. ¿Cuántas partes quedan?"
>
> "Mamá me ha hecho una tarta por mi cumpleaños y la he dividido en 4 partes iguales. Papá que come mucho se ha comido ¼ de la tarta. ¿Cuánta tarta queda?"

5. Hallar la fracción de la parte usando una unidad de medida auxiliar (ej. gramos, minutos…)

El caso de magnitudes continuas puede implicar otras características implícitas que no están presentes en cantidades discretas. La parte y el todo se dan como cantidades de la misma magnitud (peso, tiempo, volumen, superficie, anchura, etc.) y su relación se expresa como una relación entre cantidades de esta magnitud. Dos ejemplos de este contexto planteados para las ilustraciones 2 y 4 respectivamente son los siguientes.

"Si Juan se ha comido 25 g de un pastel que pesa 100 g, ¿qué fracción del pastel ha comido María?"

"Tardamos 15 minutos para ir al supermercado a pie y hemos caminado 5 minutos. Representa con una fracción la distancia que hemos caminado".

En la tabla 6.6, presentamos los porcentajes de respuestas para cada uno de los contextos anteriores. En ella, podemos observar que hay un contexto mayoritario (47%) que corresponde a "dividir el todo y tomar una parte", seguido por el de "repartir todas las partes de un todo" que también tiene una frecuencia relativamente alta (29%). Los otros tres contextos son minoritarios: entre los tres suman el 24%. Los dos primeros contextos reflejan una forma de pensamiento directo, que va ligada al fraccionar a partir de un todo, mientras que los tres contextos minoritarios reflejan en cierto modo una interpretación espuria de la ilustración.

Tabla 6.6. Porcentaje de los contextos expresados en las respuestas a la pregunta 3

Contextos y modos de uso		Porcentaje N=358
(1)	Hallar la parte	47%
(2)	Repartir	25%
(3)	Hallar la parte complementaria	8%
(4)	Reconstruir la unidad	9%
(5)	Hallar la parte usando una unidad de medida	7%
	Otros	4%

6. Otros contextos

Como se muestra en la tabla 6.6, un 4% de las respuestas no se corresponden con los cinco contextos identificados y descritos en los apartados anteriores. Dado que la pregunta 2 del cuestionario consiste en realizar una representación y la pregunta 3 aporta información gráfica, es razonable que, cuando se pide a los participantes enunciar una situación o problema, respondan con una tarea relativa a representar. Casi la totalidad de las respuestas que se agruparon en la categoría de "otros" son tareas sobre representaciones en las que no hay un contexto o modo de uso explícito. Presentamos ejemplos de este tipo de respuesta en la tabla 6.7.

Tabla 6.7. Ejemplos de respuestas relativas a realizar representaciones

"Representa ¼ del círculo."
"Elige una porción del círculo fraccionado en 4 partes."
"Divide el círculo en 4 partes iguales."
"Dibuja como representarías ¼ en la circunferencia."
"Representa gráficamente 1/3 de la siguiente recta."
"Representa en la línea 1/3."

6.4. TIPOLOGÍAS DE SIGNIFICADO

En los tres apartados anteriores, hemos desgranado de forma minuciosa las producciones de los sujetos en cada una de las tres componentes que conforman la interpretación parte-todo de las fracciones. Nuestro enfoque contempla que el significado de un concepto se ajusta a una terna conformada por las tres dimensiones analizadas, que denominamos triángulo semántico. En este apartado, exponemos las tipologías de significado encontradas para el concepto "fraccionar" según los resultados obtenidos en los tres apartados anteriores pero considerados de forma conjunta. Para ello, agrupamos las categorías y subcategorías de respuestas de las preguntas del cuestionario.

La tabla 6.8 muestra cómo agrupamos las categorías de respuestas establecidas para la primera pregunta. El primer grupo considera las categorías 1 y 2, dado que no se refieren a las partes. El segundo grupo considera las categorías 3 y 4 que mencionan las partes, pero no su igualdad. El tercer grupo considera las categorías 5 y 6 que mencionan la igualdad de las partes.

Tabla 6.8. Agrupamiento de las categorías de respuestas para la primera pregunta

Categorías	Grupo
(1) Uno o varios verbos de acción (2) Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a un todo	(1) acción
(3) Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a las partes (4) Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a un todo y a las partes	(2) acción en partes
(5) Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a las partes iguales (6) Uno o varios verbos de acción que hacen referencia a un todo y a las partes iguales	(3) acción en partes iguales

Para la segunda pregunta, relativa a los sistemas de representación, consideramos dos grupos. El primer grupo se compone de las categorías que contienen una sola figura que corresponde a una situación estática.

El segundo grupo se compone de las categorías de representaciones dinámicas, compuestas de una secuencia de dos figuras que muestran los diferentes pasos para la acción de fraccionar.

Tabla 6.9. Agrupamiento de las categorías de respuestas para la segunda pregunta

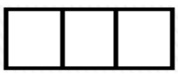
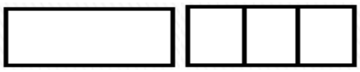
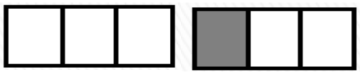
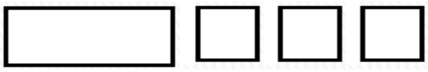
Categorías	Grupos
(1)  (2) 	(1) representación estática

Tabla 6.9. Agrupamiento de las categorías de respuestas para la segunda pregunta

Categorías	Grupos
(3) 	
(4) 	(2) representación dinámica
(5) 	

Para la tercera pregunta, sobre contextos y modos de uso, consideramos tres grupos. El primer grupo corresponde al contexto en el que el todo se divide. El segundo grupo es el contexto de reparto. El último grupo corresponde a los contextos 3, 4 y 5, en los que ninguna acción actúa sobre el todo.

Tabla 6.10. Agrupamiento de las categorías de respuestas para la tercera pregunta

Categorías	Grupos
(1) Hallar la parte	(1) Dividir
(2) Repartir	(2) Repartir
(3) Hallar la parte complementaria	
(4) Reconstruir la unidad	(3) Encontrar
(5) Hallar la parte usando una unidad de medida	

A partir de los grupos formados, construimos una tabla de contingencia (véase tabla 6.11) que incluye las tres componentes o dimensiones (estructura conceptual, sistemas de representación, y contextos y modos de uso) con el fin de analizar conjuntamente e identificar las tipologías de significado expresado por los participantes. El número total de casillas en dicha tabla es 18 (3x2x3), por lo que muchas casillas tienen un porcentaje bajo.

Tabla 6.11. Tabla de contingencia de las tres componentes

Sistemas de representación			Contextos: Dividir	Repartir	Encontrar
Dinámico	Estructura conceptual	acción	0	0,9%	0
		acción en partes	0,9%	0	2,1%
		acción en partes iguales	1,2%	21,6%	0,9%
Estático	Estructura conceptual	acción	11%	0	5,1%
		acción en partes	0,9%	5,4%	14,2%
		acción en partes iguales	34%	1,2%	0,6%

Seleccionamos las cuatro casillas con los porcentajes más altos y las representamos gráficamente en la figura 6.3. Con los esquemas de esta figura ilustramos la forma en que un gran porcentaje de los participantes respondieron a las tres preguntas. Para desarrollar esta representación gráfica, agrupamos las respuestas y empleamos el triángulo como una herramienta para visualizar y expresar el significado proporcionado.

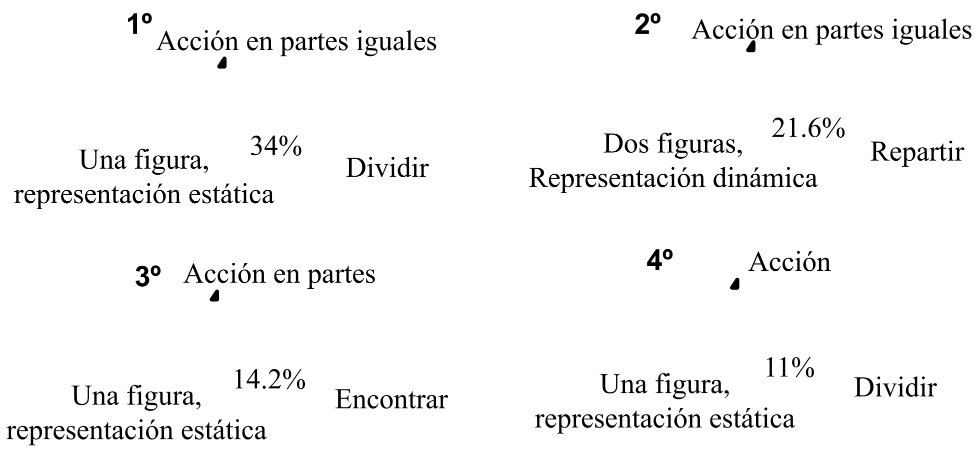


Figura 6.3. Tipologías de significado para el concepto “fraccionar”

Cada vértice de los triángulos de la figura 6.3 representa una componente de nuestro triángulo semántico (estructura conceptual en el vértice superior, sistemas de representación en el vértice izquierdo, y contextos y modos de uso en el vértice derecho), de manera que cada tipología de significado se representa gráficamente. Cuando las tres componentes se analizan juntas, aparecen conexiones entre ellas como se refleja en la figura.

En el significado que muestra el primer triángulo (acción en partes iguales - una figura - dividir), los participantes enfatizan la acción de *dividir equitativamente*, en partes iguales, con el fin de obtener una parte. Esta acción se interpreta como una acción estática, al igual que su ilustración compuesta de una única figura.

En el segundo triángulo (acción en partes iguales - dos figuras - repartir), los participantes expresan una acción dinámica de *reparto equitativo* entre n personas. En la primera etapa del reparto, es necesario dividir el todo en partes iguales, que está representado por la primera figura. En la segunda etapa, estas piezas se reparten entre los individuos. La parte que recibe una persona está representada por la segunda figura.

En el tercer triángulo (acción en partes - una figura - encontrar), los participantes expresan una acción estática representada mediante una figura. En la estructura conceptual, no se mencionan las partes iguales, porque el propósito es determinar la fracción de una parte o de la parte complementaria en relación con el todo. El significado lo indica la acción de *encontrar una parte*.

Finalmente, en el último triángulo (acción - una figura - dividir), el énfasis se encuentra en la acción de dividir un todo sin tener en cuenta a las partes. Su significado muestra la acción simple de *repartir* o *fraccionar*.

Mediante el proceso descrito, identificamos cuatro formas prioritarias de significar en las producciones de los estudiantes de magisterio del grado de primaria que agrupan a la mayoría de los de estudiantes (90,8%). Debemos resaltar que esos significados tienen una componente representacional fundamentalmente estática, con un predominio del contexto de dividir y una estructura conceptual en la que predomina la acción de dividir en partes iguales. Si observamos por parejas de componentes, la tabla 6.11 refleja que el sistema de representación estático se asocia con el contexto dividir y que el sistema de representación dinámico se asocia con el contexto de repartir. Por otro lado, el contexto de encontrar la parte complementaria está asociado con la estructura conceptual de acción en partes con un 14,2% de las respuestas.

6.5. BALANCE DE LOS RESULTADOS DE LA PRIMERA FASE

Como se observa en este capítulo, los estudiantes de magisterio están familiarizados con la interpretación parte-todo de las fracciones, pero gran parte de ellos dan explicaciones que contienen sólo algunos de los datos que componen la estructura conceptual: el todo, las partes, la igualdad de las partes y la relación de una de las partes con el todo. Se considera que estos conceptos son fundamentales para el desarrollo del conocimiento sobre fracciones en niños (Kieren, 1993). Sólo un pequeño porcentaje de los participantes tiene en cuenta todos estos elementos en su descripción textual. Cabe pues plantearse la necesidad de que en los cursos de formación inicial de maestros se trabaje (o se incida más) sobre la explicitación de todos los elementos y relaciones que intervienen en la estructura conceptual correspondiente a la interpretación parte-todo de las fracciones, de manera que estos futuros profesores sean conscientes de tales elementos y relaciones. La carencia de información necesaria en la relación parte-todo para establecer una estructura conceptual completa de las fracciones, conlleva dificultades posteriores al tratar de encontrar significado a algunos conceptos asociados con fracciones, como es el caso de la interpretación de la multiplicación de fracciones como fracción de fracción.

Estos resultados difieren en algunos aspectos a los obtenidos en estudios anteriores (Lo y Grant, 2012; Domoney, 2001). El mayor contraste con nuestros resultados fue que los participantes de los estudios anteriores no incluyeron la igualdad de las partes en sus respuestas. Esta diferencia puede deberse al hecho de que nuestra pregunta fue sobre la acción de "fraccionar" en vez de "fracción".

Los resultados de la segunda pregunta, centrada en los sistemas de representación, muestran que los participantes representaron el concepto usando círculos o cuadriláteros divididos en partes iguales, pero no consideraron otros modelos, como representaciones discretas o lineales. El hecho de que la gran mayoría de los participantes en el estudio se incline por representar la relación parte-todo de las fracciones mediante áreas de figuras geométricas expresa su escaso margen de maniobra interpretativa. Esta forma de ilustrar está muy arraigada en ellos, por lo que sería conveniente que en su formación inicial trabajaran otras formas de representación (lineal, discreta) y sus ventajas e inconvenientes frente a la que han consideran como primordial: la de área. Hay que tener en cuenta que, si bien la representación mediante área es muy visual e intuitiva, conforme se avanza en el estudio de la matemática la representación continuo-lineal sobre una recta adquiere mayor preponderancia.

A diferencia de otros estudios (Cluff, 2005; Wright, 2008), nuestros participantes no respondieron con representaciones simbólicas o numéricas de fracciones, como decimales o porcentajes. La acción de fraccionar promueve secuencias de figuras, que no se producen cuando se representa el concepto de fracción. Es importante señalar que la mayoría de los participantes utilizaron sólo ilustraciones de figuras de área (como círculos y cuadriláteros) cuando se les pidió que construyeran una figura con la que representar la acción de fraccionar. Este resultado puede ser debido al énfasis en este tipo de representación en la práctica escolar (Kurt y Cakiroglu, 2009). Otros estudios (Gairín, 2001) sugieren que el conocimiento de las fracciones como relación parte-todo complica el uso de representaciones diferentes de los modelos de área.

En cuanto a los resultados sobre los contextos y modos de uso, las situaciones o problemas inventados por los sujetos contienen una pluralidad de contextos asociados a la relación parte-todo. Hallar la parte, repartir y hallar la parte complementaria fueron los contextos más comunes presentes en las respuestas. De manera similar a los resultados obtenidos por Wright (2008), estos contextos no incluyeron interpretaciones como la razón y tasa, que se consideran fundamentales por diversos especialistas en Educación Matemática (Berh et al., 1997). El análisis de los contextos pone de manifiesto el hecho sorprendente e inesperado de que los participantes asocien los contextos constituidos por objetos discretos con la estructura aditiva y los continuos (área y longitud) con las fracciones. Más que por su naturaleza epistemológica, pensamos que esta dualidad implícita en los alumnos (discreto-aditivo, continuo-fraccionario) es producto de las prácticas educativas vividas por los estudiantes de magisterio en sus clases previas de matemáticas. Esta fijación, producto de sus estudios previos, debería ser puesta de manifiesto durante su formación inicial como maestros, con el propósito de que sean conscientes de esta limitación de su pensamiento.

El análisis de los contextos también nos permitió observar la preferencia de los estudiantes por emplear un pensamiento directo frente a un pensamiento inverso, aún en el caso de ilustraciones que favorecían la aparición de este último. Sería conveniente que los estudiantes de magisterio tuviesen prácticas en las que trabajasen la reconstrucción de un todo a partir de una parte fraccionaria.

Según el esquema del modelo teórico desarrollado por Behr et al. (1983), se infiere que las interpretaciones de las fracciones, medida y cociente-reparto, se organizan de acuerdo con la relación parte-todo. Con base en los resultados obtenidos, consideramos que la estructura de estas dos interpretaciones está basada en una totalidad dividida en partes iguales. Por ejemplo, el problema de medida implica un objeto o una parte cuya medida es menor que la unidad de medida considerada (el todo). Para ello, hay que relacionar la parte con el todo y determinar con qué frecuencia dicha parte está contenida en el todo. Las categorías de contextos identificados a partir de los resultados sobre contextos y modos uso se corresponden con esta interpretación. Por ejemplo, en las categorías hallar la parte complementaria y hallar la parte usando una unidad de medida, la fracción representa la medida de la parte en relación con todo, independiente de conteo.

También es importante resaltar el hecho de que detectamos cuatro tipos de significados que los sujetos otorgan al concepto de fracción. Pensamos que el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas debe incluir este conocimiento de las distintas formas de significado que los sujetos otorgan a los conceptos matemáticos. Las cuatro tipologías de significado detectadas pueden ser útiles como marco de reflexión y discusión en grupo de los estudiantes de magisterio sobre el significado de la acción de fraccionar, como proceso y actividad que conlleva el aprendizaje de las fracciones.

Además de la información obtenida sobre los maestros en formación inicial, consideramos el cuestionario utilizado en esta primera fase como un aporte de la investigación. A través de una serie de preguntas sencillas, nos acercamos a los significados de la relación parte-todo considerados por los sujetos cuando comenzaron los estudios universitarios de Grado de Educación Primaria.

Capítulo 7

Estudio empírico fase 2. Conocimiento didáctico. Planificación inicial de la instrucción

En este capítulo, recogemos los resultados y abordamos el análisis de las respuestas a la actividad planteada a los participantes en la segunda fase del estudio empírico. Realizamos esta segunda fase para indagar en el conocimiento didáctico que sobre planificación de la enseñanza manifestaron los futuros maestros en formación, cuando se les pidió que redactasen una explicación para introducir el concepto de fracción a los escolares, a partir de unas imágenes que se les proporcionó. Como se describe en la metodología de esta fase, que presentamos en el capítulo 4, empleamos algunas de las componentes del análisis de instrucción del modelo de análisis didáctico para analizar las producciones de los participantes en su condición de estudiantes universitarios del grado de Educación Primaria.

Nuestro propósito en este capítulo es, en primer lugar, utilizar las componentes del análisis de instrucción para analizar las respuestas dadas por estos estudiantes; en segundo lugar, identificar las ideas utilizadas para expresar su conocimiento acerca de la planificación de la instrucción; y, en tercer lugar, caracterizar los diferentes niveles del conocimiento manifestado por los sujetos en cada componente. Para ello, consideramos necesario comenzar el capítulo con una descripción de la naturaleza de los datos que empleamos en los siguientes apartados.

Mostramos los resultados sobre el conocimiento de la enseñanza que los participantes manifestaron en sus respuestas en cuatro secciones correspondientes a las componentes del análisis de instrucción que empleamos en el análisis de los datos: contenidos utilizados, modalidades en la introducción de los contenidos, representaciones elegidas y secuenciación de los contenidos.

7.1. NATURALEZA DE LOS DATOS RECOGIDOS

El tipo de datos que recogimos son un aspecto característico propio y diferenciador con respecto a otros estudios que tiene esta fase de la investigación. Las producciones de los sujetos son textos originales de carácter personal que acompañan a las tres ilustraciones que proporcionamos a cada uno de los participantes. Son respuestas a una tarea de carácter abierto con la única limitación del orden y de la solicitud de un texto explique el contenido de cada tarjeta. En la recogida de datos de esta fase, obtuvimos un total 82 respuestas de maestros en formación inicial. En la 7.1, presentamos un ejemplo de una respuesta.

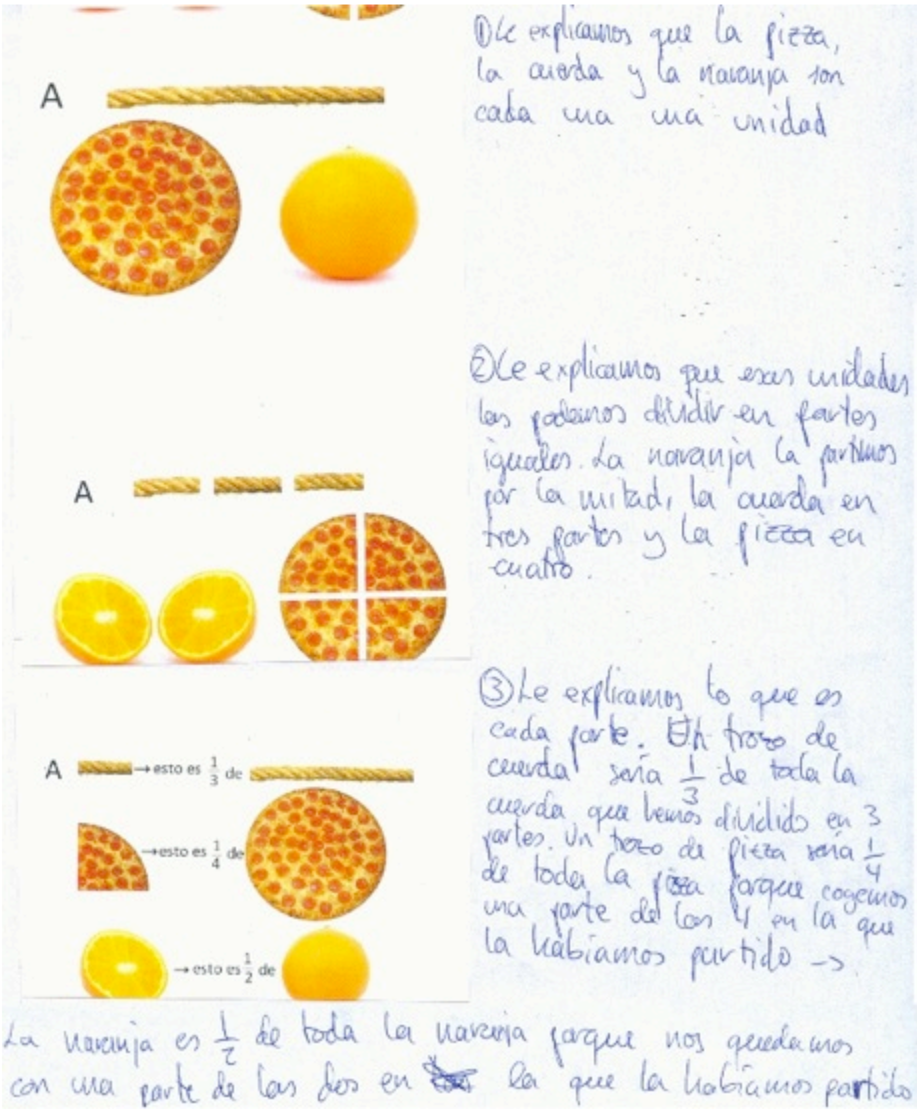


Figura 7.1. Ejemplo de respuesta dada por un estudiante

En la respuesta incluida en la figura 7.1, se puede apreciar el orden temporal en el que este participante presenta las figuras y el texto que a cada una de ellas acompaña y que contiene explicaciones que considera relevantes durante el proceso de instrucción a los escolares de educación primaria. Todo ello en su conjunto constituye un dato para nuestro análisis. Es un dato de carácter complejo en el que hay que interpretar las respuestas de los sujetos.

Para el análisis de los datos utilizamos técnicas cualitativas, cuyo objetivo es organizar y caracterizar las producciones a través del sistema de categorías.

Para codificar y categorizar las respuestas, nos basamos en componentes del análisis de instrucción: contenidos utilizados, modalidades en la introducción de los contenidos, uso representaciones y secuenciación de los contenidos. Estas componentes generales se concretan a través de nuestro marco conceptual en subcategorías más específicas. Además, tras una primera revisión de todas las respuestas, fue necesario ampliar las subcategorías, pues, de los datos, surgieron otras nuevas no contempladas. La tabla 7.1, contiene un ejemplo de codificación para la respuesta del participante recogida en la figura 7.1.

Tabla 7.1. Ejemplo de codificación de los datos

Categorías del análisis de instrucción utilizadas	Datos en la respuesta
Selección de contenidos	E. conceptual: Todo (pizza, cuerda, naranja); unidad; partes iguales; parte; $P = \frac{1}{n}T$
	Representación: Verbal (mitad) y numérica
	Contexto: hallar la parte
Modos de introducción los contenidos	Instrumental
Uso de representaciones	Ilustrativa
Secuenciación de los contenidos	Modo 1

7.2. DATOS SOBRE LA ENSEÑANZA

El análisis de instrucción aborda las decisiones del docente (o docente en formación inicial) relacionadas con la actividad de enseñanza, como la selección y el diseño de tareas o la organización de sesiones de clase. Dado que estudiamos cómo los maestros en formación realizan una introducción del concepto de fracción a un grupo de escolares, nos centramos en un elemento fundamental del análisis de instrucción: la explicación del profesor. Centrándonos en este elemento, aplicamos algunas de las componentes del análisis de instrucción a las producciones que realizaron los profesores en formación inicial participantes en el estudio: contenidos utilizados, modalidades en la introducción de los contenidos, uso representaciones y secuenciación de los contenidos.

A partir de los datos obtenidos, recogemos en este apartado los aspectos relativos a la explicación propuesta. Diferenciamos los datos obtenidos en cuatro apartados distintos: selección de los contenidos, los modos en que los participantes introducen los contenidos seleccionados, el uso de las representaciones y la secuenciación de esos contenidos.

7.2.1. Contenidos utilizados

En una instrucción inicial sobre el concepto parte-todo de fracción, no es posible movilizar todos los elementos del contenido del tema. Por ello, al realizar una introducción, los sujetos de nuestro estudio seleccionan algunos elementos del contenido e ideas conocidas que parecen adecuadas para guiar el aprendizaje del concepto por los escolares. Empleamos la categoría contenidos utilizados para describir y establecer los diferentes contenidos que los participantes seleccionaron para la instrucción como objeto de enseñanza y aprendizaje y que el futuro maestro consideró relevantes a efectos de su planificación para la instrucción.

Nuestro enfoque teórico, tal como se describe en el apartado significados de un concepto en la matemática escolar del tercer capítulo, articula el contenido según tres componentes: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los contextos o modos de uso. Dentro de cada una de las componentes que articula el contenido, codificamos los conocimientos manifestados en las propuestas según cada una de las categorías establecidas en la fase anterior del estudio para el análisis de los datos. Estas categorías nos permiten identificar, analizar e interpretar las producciones realizadas por los maestros en formación en términos de aquellos aspectos del concepto que seleccionan para realizar una introducción al concepto de fracción.

Datos sobre la estructura conceptual

En nuestro análisis, identificamos conceptos y procedimientos, distintos de los ya presentes en las ilustraciones, que los sujetos incluyeron en sus respuestas como conocimiento adicional. Algunos de esos conceptos no se presentaron en el marco teórico como elementos fundamentales de la estructura conceptual (todo, partes, parte y relación), por lo que se añadieron como nuevos valores en esta categoría (tabla 14). Los términos *todo*, *partes* y *relación*, se incluyeron en la totalidad de respuestas. Por el contrario, el término *parte* no se incluyó en 15 casos. En la tabla 7.2, recogemos aquellos elementos adicionales, conceptos o procedimientos, que introducen los sujetos en sus respuestas para introducir el concepto de fracción.

Tabla 7.2. Conceptos y procedimientos añadidos en las respuestas

Concepto o procedimiento	Ejemplo de respuesta	Frecuencia N=82
Concepto de numerador y denominador	"…en una fracción, el número o parte que cogemos del total se denomina numerador y el número en que dividimos el total y que se posiciona debajo es el denominador"	28
Concepto de fracción entera	"…como la cuerda la hemos dividido en 3 partes, la parte entera y completa sería $\frac{3}{3}$, ya que 3 dividido entre 3 es 1 que es la parte entera…"	14
Concepto de unidad	"para la explicación de las fracciones, hemos cogido tres objetos: pizza, naranja y una cuerda. Estos objetos representan la unidad, es decir 1"	12
Suma o resta de fracciones	"cada trozo equivale a $\frac{1}{3}$ y tenemos 3 trozos, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$=cuerda completa"; "nos comemos una porción $\frac{1}{4}$, al restarle $\frac{1}{4}$ a los $\frac{4}{4}$ nos quedan $\frac{3}{4}$"	8

Como se aprecia en la tabla 7.2, el conocimiento adicional más común consiste en identificar el significado del numerador y denominador con los elementos de la estructura conceptual en un proceso de división en partes de un objeto o en un proceso de reparto (28 casos). Otros dos contenidos que se incluyen con un porcentaje similar en las respuestas son el concepto de fracción entera y su relación con el todo dividido en partes (14 casos), y el concepto de unidad y su identificación con el todo u objeto inicial (12 casos). Por último, en algunas respuestas se introducen otros aspectos procedimentales como la suma y resta de fracciones, aunque, en ningún caso, se incluye el algoritmo de estas operaciones.

Datos sobre contextos o modos de uso

Si bien las ilustraciones inducen un proceso de división en partes, los sujetos introdujeron en sus respuestas otros contextos distintos como repartir o reconstruir la unidad dada una fracción. En este caso, las respuestas no incluyen contextos distintos a los considerados en el marco conceptual, por lo que no se ampliaron los valores para esta categoría. En la tabla 7.3, recogemos los contextos que identificamos en las respuestas.

Tabla 7.3. Contextos presentes en las respuestas

	Frecuencia N= 82
1. Hallar la parte	31
2. Hallar el complementario	16
3. Hallar la parte y hallar el complementario	16
4. Hallar la parte y repartir	8
5. Reconstruir la unidad	6
6. Repartir	5

Como se observa en la tabla 7.3, los contextos se presentan singularmente en las respuestas (como en el ejemplo de la figura 7.1) o bien combinan los contextos de hallar la parte y reparto. Ejemplificamos a continuación algunos de estos contextos.

Ejemplo 1. (Sobre el contexto número 1 de la tabla 7.3, hallar la parte)

La piza, la cuerda y la naranja son cada una unidad…. Las podemos dividir en partes iguales…. Explicamos qué es cada parte… un trozo de la pizza sería ¼ de toda la pizza porque cogemos una parte de las 4 que habíamos partido.

Ejemplo 2. (Sobre el contexto número 4 de la tabla 7.3, hallar la parte y repartir)

La pizza está entera…como estamos 4 amigos la repartiremos entre todos, un trozo para cada uno. Como somos buenos amigos, los trozos serán iguales para todos….Si la pizza la partimos en 4….la unidad es la pizza, las porciones las partes en las que dividimos…

Ejemplo 3. (Sobre el contexto número 5 de la tabla 7.3, reconstruir la unidad)

Los fragmentos se corresponden a 1 pizza dividida en 4 trozos. Se llega a representar de la siguiente forma: al sumar las 4 porciones se representa de la siguiente forma 4/4. Con lo cual se obtendría la siguiente forma: (imagen del todo).

Datos sobre representaciones

Puesto que la tarea propuesta a los sujetos contiene ilustraciones con elementos gráficos y numéricos, solamente en 5 casos se incluyeron representaciones gráficas o simbólicas ($\frac{a}{b}$) distintas de las dadas en las ilustraciones: una simbólica, tres gráficas, y una simbólica y gráfica simultáneamente. En las figuras 7.2 y 7.3, presentamos ejemplos de este tipo de respuestas.

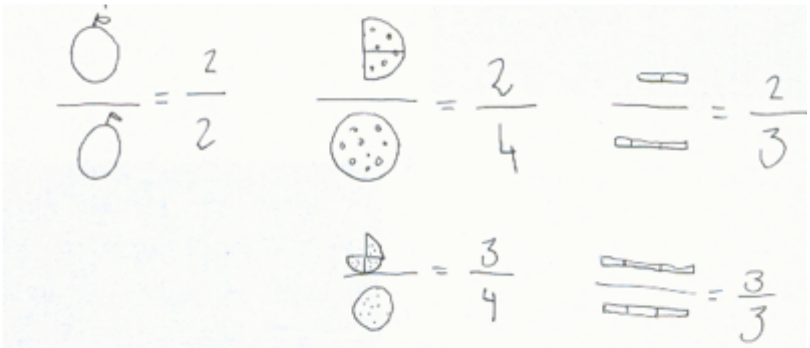


Figura 7.2. Ejemplo de representación gráficas presentes en respuestas

Figura 7.3. Ejemplo de representación gráficas presentes en respuestas

Estas nuevas representaciones surgieron para plantear nuevos ejemplos, o reforzar la explicación de los ya presentes en las ilustraciones propuestas. No se detectaron representaciones más abstractas de las mismas nociones que mostraran o abordaran el concepto de estudio.

7.2.2. Datos sobre las modalidades en la introducción de los contenidos

La segunda componente aborda los modos en que los participantes introducen en su explicación los contenidos seleccionados. Durante su redacción, los participantes, además de seleccionar aquellas componentes del concepto que conocen y consideran más adecuadas, utilizaron diferentes modos de presentar los contenidos. A través de un análisis cualitativo de los datos, identificamos tres modos distintos: modo instrumental, modo funcional y modo descriptivo.

En la tabla 7.4, presentamos la frecuencia de las respuestas para estos tres enfoques.

Tabla 7.4. Enfoques para las oportunidades de aprendizaje

	Frecuencia N=82
Enfoque instrumental	58
Enfoque descriptivo	14
Enfoque funcional	10

En el *modo instrumental*, la redacción no incluye situaciones ni problemas contextualizados que puedan ayudar en la comprensión de los contenidos. Solo se destacan aspectos técnicos del concepto que se introduce. Este modo fue predominante en las respuestas (58 casos). Presentamos un ejemplo de respuesta para este estilo en la figura 7.4.

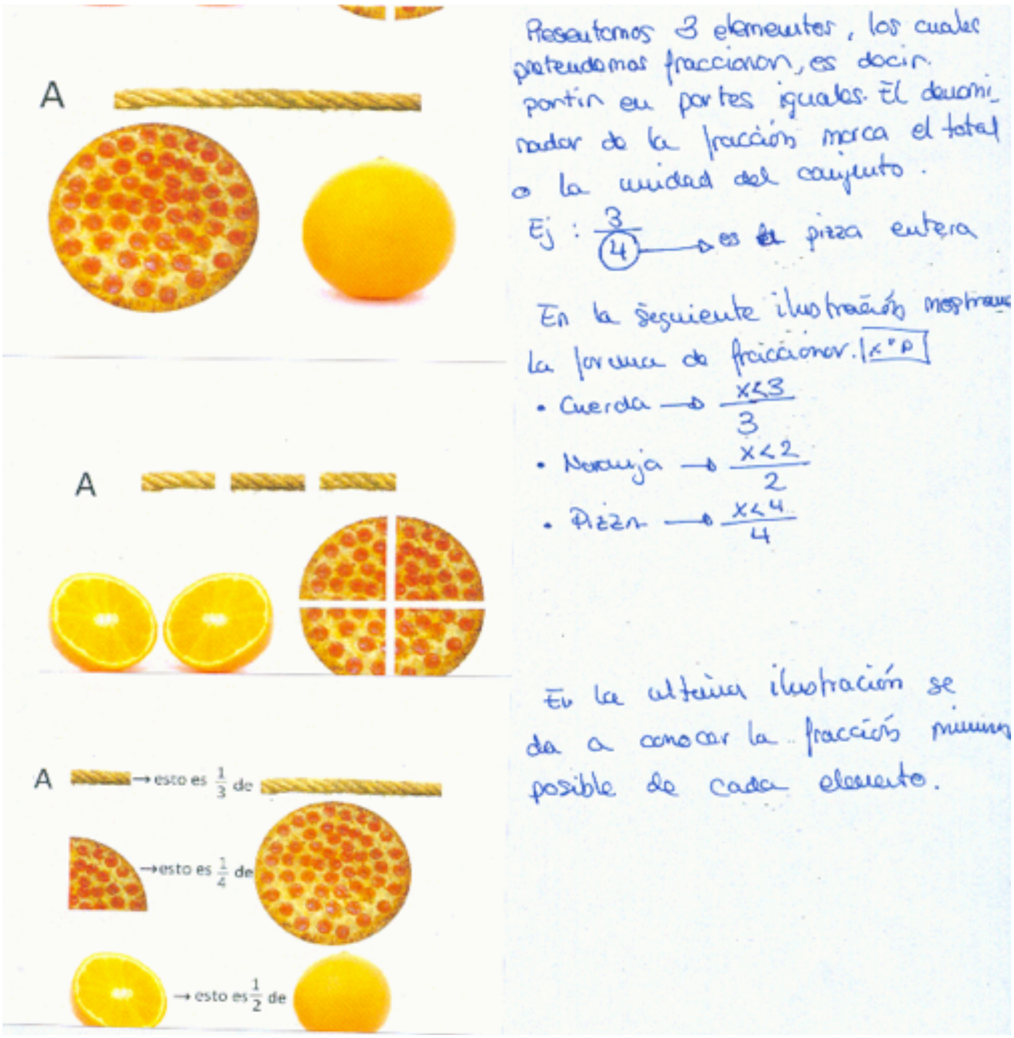


Figura 7.4. Ejemplo de enfoque instrumental

El *modo funcional* tiene una presencia escasa en las respuestas (10 casos). En este caso, el contenido se aborda a través de situaciones contextualizadas que presentan al escolar demandas cognitivas elaboradas, en su mayoría a través de la resolución de problemas. En la siguiente respuesta podemos verlo reflejado.

> *(Tarjeta A1) Una familia de 4 personas, quiere repartirse una pizza pero no sabe cómo.*

(Tarjeta A2) Como son 4 personas, dividen en 4 partes quedando así $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ *todo sumando da* $\frac{1}{4}$.

(Tarjeta A3) Cada uno pues, se come $\frac{1}{4}$ *de pizza. El hijo se ha comido ya ¼ de pizza así que quedan* $\frac{3}{4}$ *de pizza.*

Por último, en el *modo descriptivo*, al igual que en el caso anterior, se introducen los contenidos a través de un texto que modeliza una situación real pero no se incluye ninguna demanda cognitiva. En el modo descriptivo tiene una presencia similar al caso anterior (14 casos). Una respuesta que se corresponde con este estilo es la siguiente.

Hoy vamos a aprender lo que es una fracción, nos basamos en un ejemplo sencillo para ello.

(Tarjeta A1) Como vemos en la figura 1 la pizza está entera, si queremos comerla deberíamos de partirla. Como estamos 4 amigos deberíamos de partirla, un trozo para cada uno.

(Tarjeta A2) Como somos buenos amigos los trozos serán iguales para todos. Partiremos nuestra pizza y nos quedará como en la figura 2. Si tuviéramos que decir a cuánto nos ha tocado cada uno y cuánto al resto ¿cómo lo haremos?

(Tarjeta A3) ¡Exacto! Con fracciones. Si la pizza la partimos en 4 trozos y nos quedamos con un trozo lo que les toca a los demás es ¾ como aparece en la figura 3. Una fracción es una parte de la unidad. La unidad es la pizza, las porciones las partes en las que dividimos, y lo que nos corresponde (nuestra porción) es una fracción.

Al cruzar esta categoría para el análisis de la explicación con la categoría contexto para el contenido, observamos que, en los modos descriptivo y funcional, la mayoría de los participantes utilizaron el contexto de reparto, mientras que, en el enfoque instrumental, lo hicieron mediante el contexto de hallar la parte.

7.2.3. Uso de representaciones

La tercera componente, uso de representaciones, considera la función que tienen las ilustraciones dadas en la tarea dentro del texto que inventan los estudiantes para introducir las fracciones. Puesto que la tarea propuesta obligaba a los participantes a utilizar unas determinadas ilustraciones, cada uno de los participantes le otorgó una función determinada dentro de su narración. A partir de las respuestas de los sujetos y mediante un proceso de refinamiento progresivo, establecimos tres tipos de funcionalidad específica para las representaciones: ilustrativa, explicativa o aclarativa.

El primer tipo de uso agrupa aquellas respuestas en las que las imágenes sólo tienen una *función ilustrativa*: se usan únicamente para acompañar al texto. La explicación contenida en el texto es lo suficientemente completa para que sea comprensible, incluso si se suprimen las imágenes. Esta forma de utilizar las representaciones se presentó en 35 de las respuestas producidas por los participantes. El ejemplo de respuesta dado en la figura 7.5 se encuentra dentro de esta categoría.

Figura 7.5. Ejemplo de respuesta con función ilustrativa

En el segundo uso, las imágenes tienen una *función explicativa*. Son respuestas escuetas, con escaso texto que no presenta ningún aspecto matemático; simplemente son expresiones introductorias o frases que enlazan unas imágenes con otras. La serie de imágenes hace la explicación por lo que, si estas se suprimen, el texto deja de tener sentido, ya que por sí solo no explica ningún contenido.

Esta segunda categoría obtiene menor frecuencia (11 casos). El texto en estas respuestas consta de expresiones introductorias o frases que enlazan unas imágenes con otras, por lo cual la explicación recae en las imágenes. Presentamos un ejemplo de respuesta para este valor de la categoría en las figuras 7.6 y 7.7.

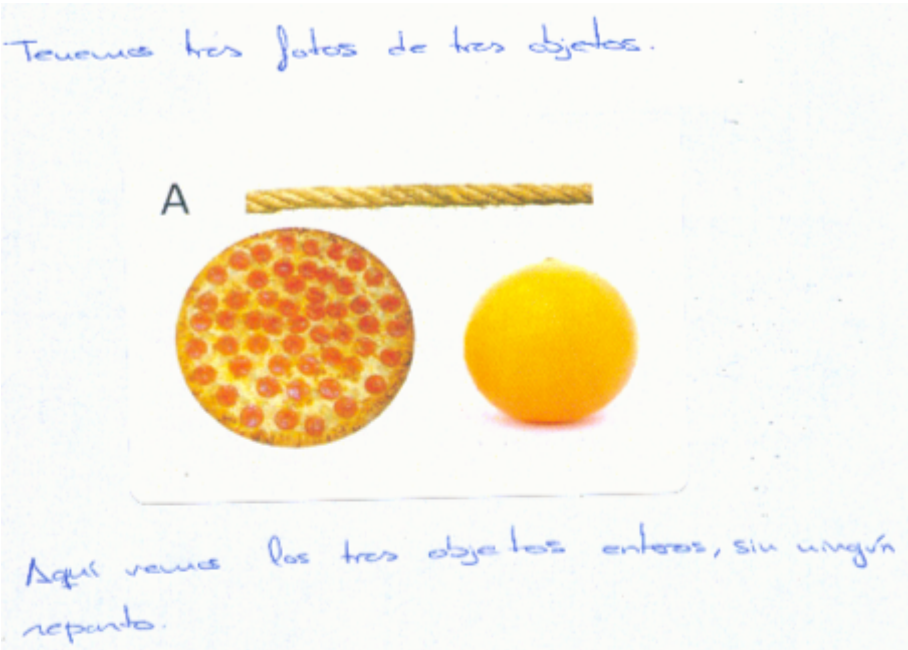


Figura 7.6. Ejemplo de ilustración con función explicativa

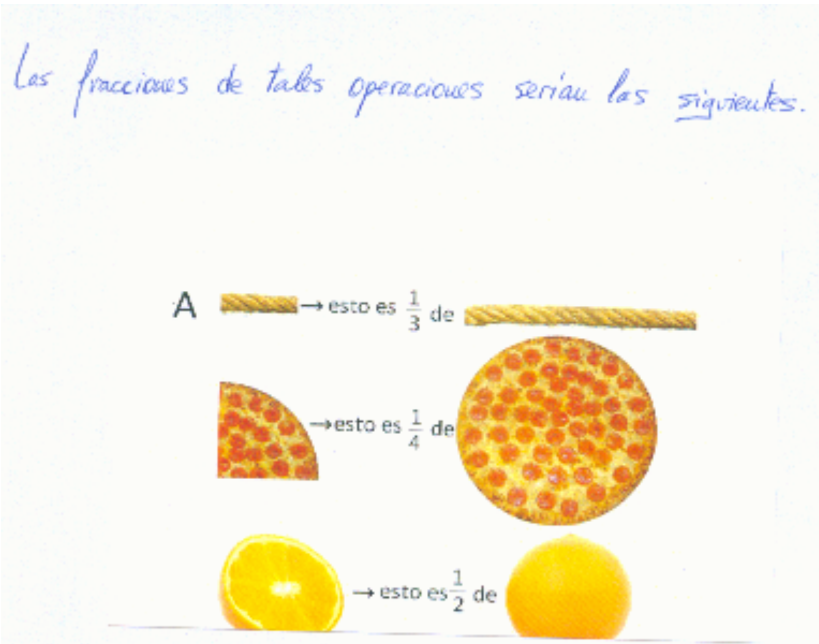


Figura 7.7. Ejemplo de ilustración con función explicativa

El último de los tipos de usos se encuentra en una situación intermedia a las dos anteriores. Las imágenes tienen una *función aclarativa*: forman parte de la explicación y la mejoran. El texto presenta información matemática pero por sí solo no tiene sentido ni forma la explicación completa. La particularidad de este uso es que la combinación de texto e imágenes constituyen la explicación, en la que las ilustraciones ejemplifican, dan más detalles, aclaran o muestran nuevos contenidos.

La función aclarativa, está presente en 36 producciones. En estas respuestas, la explicación amplía y mejora la información dada por las imágenes, de manera que el texto ejemplifica, da más detalles, aclara o muestra nuevos contenidos. Presentamos en la figura 7.7 un fragmento de respuesta, que pertenece a este caso.

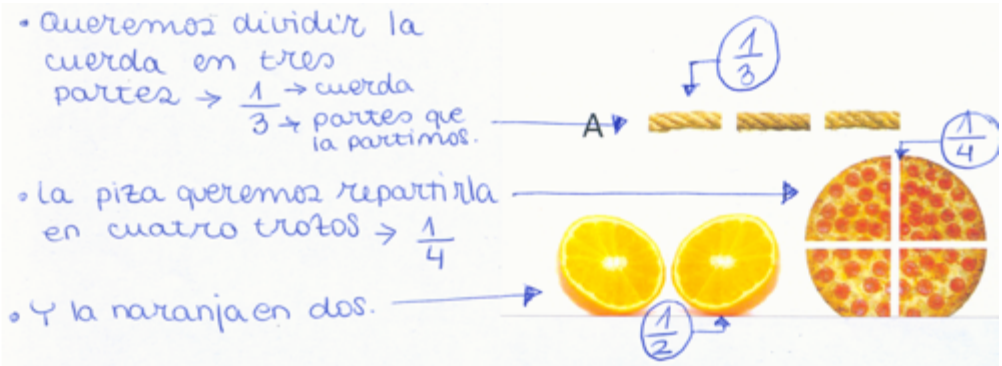


Figura 7.8. Ejemplo de ilustración con función aclarativa

En este ejemplo, las imágenes y el texto se compaginan y forman parte de la explicación, y se relacionan con ella a través de flechas.

7.2.4. Secuenciación de los contenidos

La secuenciación de los contenidos que se van a trabajar es otra de las decisiones que el profesor ha de abordar al planificar una secuencia de enseñanza. Igualmente nuestros participantes, durante el proceso de elaboración de sus narraciones, además de seleccionar aquellos datos y relaciones del concepto que les parecen más adecuadas para iniciar y guiar el aprendizaje de los escolares en la fracción.

Esta cuarta y última de las componentes del análisis de instrucción que vamos a tratar atañe a la capacidades que se pone en juego al organizar esos contenidos y establecer una secuencia temporal a la hora de introducirlos en las respuestas. Para analizar esta capacidad, desglosamos estos contenidos con el fin de establecer los modos más usuales de organizarlos (tabla 7.5).

Tabla 7.5. Modos de organizar los contenidos en las respuestas

Orden	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Frecuencia N=82
Modo 1	Todo	Partes	Parte	Relación			32
Modo 2	Todo	Partes	Fracción entera	Parte	Relación		16
Modo 3	Todo	Unidad	Partes	Parte	Relación	Numerador y denominador	9
Modo 4	Todo	Partes	Relación				8
Otros							17

El primer modo incluye sólo los elementos básicos de la estructura conceptual en el orden en el que aparecen en las pegatinas: el todo que se divide en partes, la selección de una de las partes, y la relación entre una o varias de las partes y el todo.

El segundo modo añade el símbolo de fracción entera (4/4) tras la división de las partes y antes de introducir la relación entre una o varias partes y el todo. Estos casos inciden en que las cuatro partes se corresponden con la fracción 4/4 como aparecen en la siguiente respuesta.

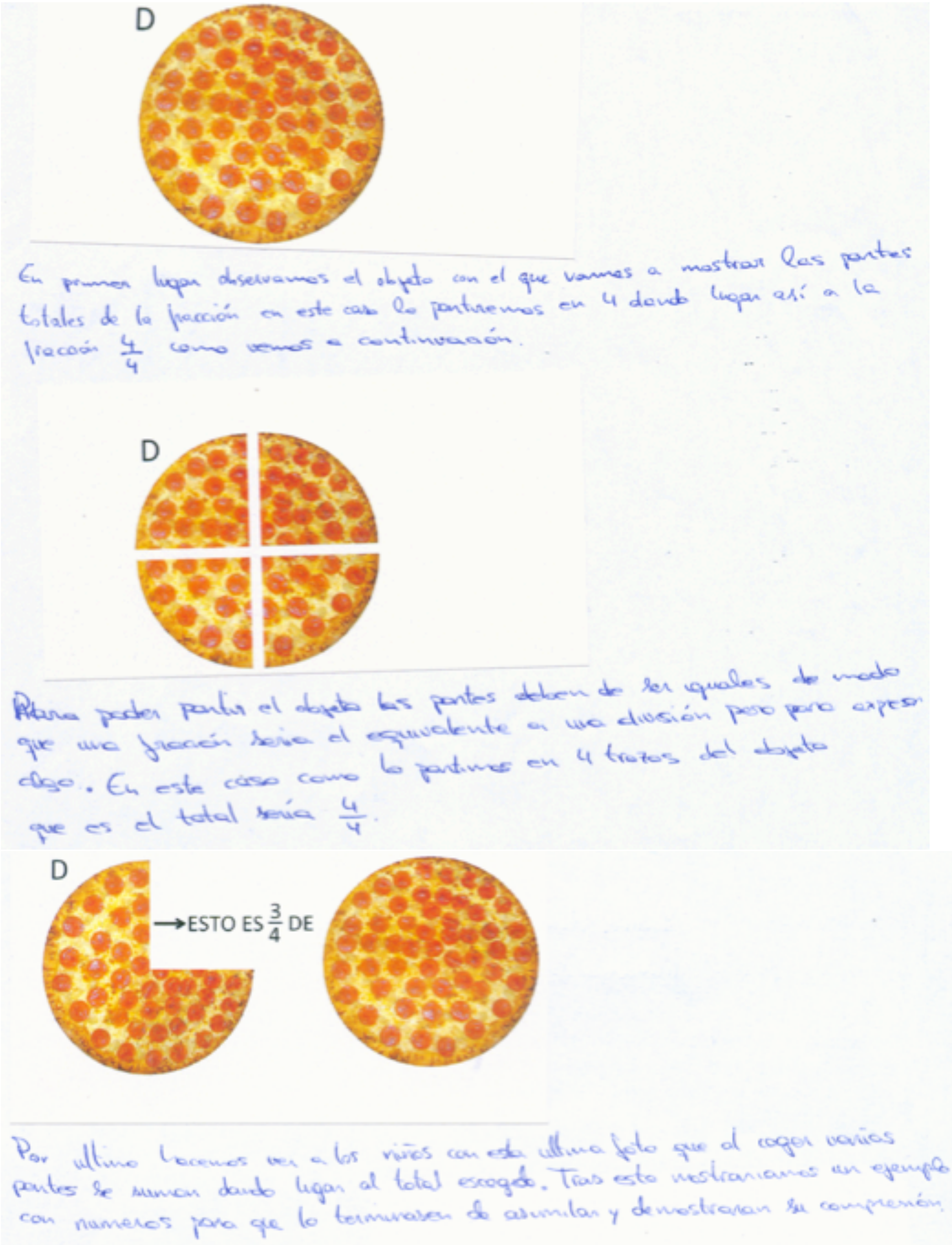


Figura 7.9. Ejemplo de respuesta donde se introduce el concepto de numerador y denominador

Como se observa en los anteriores ejemplos, cabe destacar que los sujetos introducen el símbolo de la fracción entera 4/4, antes de la fracción unitaria.

El tercer modo amplía el primero para añadir qué es el numerador y el denominador tras introducir la relación entre una de las partes y el todo, como muestra el fragmento de respuesta de la figura 7.10.

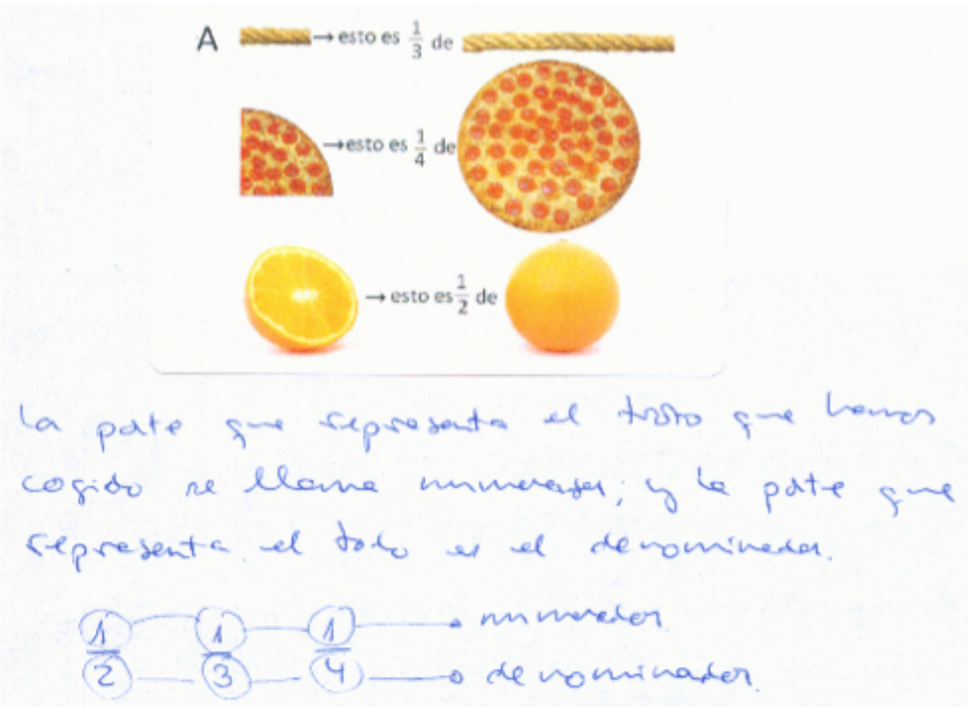


Figura 7.10. Ejemplo de respuesta donde se introduce el concepto de numerador y denominador

El cuarto modo más usual de introducir los contenidos prescinde de la parte, para introducir el símbolo de la relación (¼ o ¾) tras hablar de las partes, como mostramos en el ejemplo siguiente.

> *Tenemos una cuerda, una pizza y una naranja. Hemos partido la cuerda en 3 partes iguales, la naranja en 2 partes iguales y la pizza en cuatro partes iguales. La representamos en forma de fracción ½, 1/3, ¼.*

Este último modo corresponde mayormente a respuestas escuetas donde no hay explicación de las imágenes.

7.3. BALANCE DE LOS RESULTADOS

En esta segunda fase caracterizamos ciertos aspectos el conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva del análisis de instrucción, que un grupo de maestros en formación presentó cuando abordó una explicación para introducir el concepto de fracción. Para ello, nos basamos en cuatro componentes: contenidos utilizados, modalidades en la introducción de los contenidos, uso de representaciones y secuenciación de los contenidos.

De la información recogida destacamos que, sin ninguna dificultad, los sujetos fueron capaces de ponerse en el papel de docentes y manifestar su conocimiento didáctico del contenido a través de sus respuestas. Además, manifestaron un conocimiento didáctico del contenido coherente en sus explicaciones, en el que se destaca la diversidad de modos en que los sujetos reconstruyen, adecúan o reestructuran el contenido para hacerlo comprensible a los escolares. No obstante, a pesar de que los sujetos reconocieron los elementos básicos de las fracciones y los pusieron de manifiesto en sus explicaciones junto con otros contenidos, consideramos que una carencia a destacar en este conocimiento es la limitada planificación de la secuenciación de los contenidos atendiendo a un orden lógico. Por ejemplo, encontramos que en un 16% de las respuestas se añade el símbolo de fracción entera (4/4) antes de introducir la fracción unitaria como relación entre una parte y el todo.

En relación con las componentes modalidades en la instrucción de los contenidos y uso de representaciones, encontramos distintas categorías de respuestas que resumimos a continuación.

En la primera de ellas, modos de introducir los contenidos, encontramos 3 perfiles: el primero, en el que los participantes no incluyen situaciones ni problemas contextualizados que puedan ayudar en la comprensión de los contenidos (modo instrumental); el segundo, en el que se aborda el contenido a través de situaciones contextualizadas y se presentan demandas cognitivas al escolar, usualmente a través de la resolución de problemas (modo funcional); y, el tercero, en el que, al igual que en el caso anterior, se introducen los contenidos a través de un texto que modeliza una situación real, pero no se incluye ninguna demanda cognitiva (modo descriptivo).

En la segunda de las componentes, uso de representaciones, también encontramos tres perfiles de respuestas. En sus explicaciones sobre cómo introducir las fracciones a los escolares, los participantes otorgan distintos usos a las ilustraciones dadas en la tarea. En el primer uso (ilustrativo) las imágenes dadas únicamente acompañan al texto: la explicación contenida en el texto es lo suficientemente completa para que sea comprensible, incluso si se suprimen las imágenes. En el segundo uso (explicativo), la serie de imágenes hace la explicación por lo que, si estas se suprimen, el texto deja de tener sentido, ya que por sí solo no explica ningún contenido. Estas son respuestas escuetas, con escaso texto que no presenta ningún aspecto matemático; simplemente son expresiones introductorias o frases que enlazan unas imágenes con otras. Por último, en el tercer uso (aclarativo), las imágenes forman parte de la explicación y la mejoran. El texto presenta información matemática pero por sí sólo no tiene sentido ni forma la explicación completa. La particularidad de este uso es que la combinación de texto e imágenes constituyen la explicación, en la que las ilustraciones ejemplifican, dan más detalles, aclaran o muestran nuevos contenidos.

CAPÍTULO 8

ESTUDIO EMPÍRICO FASE 3. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO. ASPECTOS DEL APRENDIZAJE

La tercera y última fase de nuestra tesis, que se basa en las componentes del análisis cognitivo, es un estudio de casos en el entrevistamos a futuros nueve maestros. Realizamos esta fase para profundizar en el conocimiento de los maestros en formación inicial sobre la enseñanza y especialmente sobre su conocimiento del aprendizaje de las fracciones dentro de la relación parte-todo. En el capítulo 4, presentamos la metodología que utilizamos para este estudio.

Una vez que, en los dos capítulos anteriores, profundizamos en el conocimiento del contenido de los futuros maestros (primera fase) y en el conocimiento didáctico sobre la enseñanza (segunda fase), consideramos dos motivos para ampliar el estudio de casos con algunos aspectos relativos a la planificación del aprendizaje escolar.

El primero de ellos contempla los sentidos utilizados en el diseño de tareas. En el estudio sobre los significados que manifestaron los participantes, la mayor diversidad y riqueza de respuestas se presentó en los contextos y modos de uso. Por tal motivo, consideramos conveniente profundizar en los sentidos como parte del conocimiento didáctico necesario para las tareas escolares.

El segundo motivo es relativo al conocimiento didáctico sobre el aprendizaje escolar, que no se consideró en la segunda fase. A través del instrumento aplicado en la segunda fase, los participantes manifestaron aspectos del conocimiento didáctico sobre la enseñanza de la relación parte-todo, pero no relativos a su aprendizaje. Por ello, para completar esta información, decidimos profundizar en este tipo de conocimiento a través de entrevistas que permitieran incidir en dichos aspectos ausentes en el anterior abordaje. Entre los distintos aspectos del conocimiento sobre el aprendizaje, nos centramos en las dimensiones del análisis cognitivo (diseño de tareas, expectativas y limitaciones del aprendizaje), dado que son aspectos fundamentales en la planificación de la enseñanza (Lupiáñez, 2008). La tercera dimensión del análisis didáctico, el análisis de cognitivo, nos permite organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico. Nos valemos de sus dimensiones como herramientas para la recogida de los datos y el análisis de las producciones.

Realizamos el estudio de casos con una entrevista estructurada en dos partes. La primera parte, centrada en los contextos de la relación parte-todo, sirvió para profundizar en aspectos relativos a la enseñanza de tales contextos, y además permitió que los alumnos se familiarizaran y reflexionaran sobre el contenido a tratar en la segunda parte de la entrevista: la relación parte-todo de las fracciones. Para ello, durante la entrevista utilizamos dos fichas con enunciados de tareas (véase anexo C.1), que seleccionamos entre las diversas tareas que los participantes proporcionaron en la primera fase del estudio.

Una vez los participantes se familiarizaron y reflexionaron sobre la relación parte-todo, en la segunda parte de la entrevista, se procedió a reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Describimos los pasos en los que se estructuró la entrevista en la tabla 8.1.

Tabla 8.1. Estructura de las dos partes de la entrevista

Primera parte	Paso 1:	Valoración de 5 enunciados de la magnitud superficie
	Paso 2:	Elección y justificación del enunciado (de área) más adecuado para la enseñanza.
	Paso 3:	Valoración de 5 enunciados de la magnitud longitud
	Paso 4:	Elección y justificación del enunciado (de longitud) más adecuado para la enseñanza.
Segunda parte	Paso 5:	Respuestas sobre diseño de tareas, expectativas de aprendizaje y limitaciones

Los siguientes apartados se centran en los análisis de las respuestas de los nueve maestros en formación inicial seleccionados para la realización de las entrevistas. Los resultados se presentan en dos apartados independientes, el primero sobre las valoraciones de los contextos de la relación parte-todo y el segundo sobre el diseño de tareas, planteamiento de expectativas de aprendizaje y detección de limitaciones de aprendizaje.

8.1. ESTUDIO DEL CONTENIDO: VALORACIÓN DE CONTEXTOS DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

La primera parte de la entrevista aborda la evaluación de cinco contextos de la relación parte-todo a través de cinco enunciados correspondientes a la magnitud superficie y otros cinco enunciados correspondientes a la magnitud longitud (véase anexo C.1), con el fin de identificar aquellos contextos que son más y menos valorados por parte de los maestros en formación inicial. Dado que estas valoraciones se realizaron de manera independiente para cada una de las magnitudes, presentamos, en primer lugar, los resultados de las valoraciones sobre la magnitud superficie y, en segundo lugar, los resultados de las valoraciones para la magnitud longitud. Finalmente, destacamos los resultados de manera global y comparamos las valoraciones de los contextos entre las dos magnitudes.

Los cinco contextos incluidos en las fichas, y que han sido valorados por los participantes, surgen de los resultados de la primera fase (véase capítulo 6). Describimos estos contextos a continuación.

1. Ru=reconstruir la unidad

En este contexto, el todo está dividido a priori y la cuestión se refiere a la parte complementaria. El proceso utilizado para resolver el problema es contar, no comparar. Los siguientes son dos ejemplos de este contexto.

> *Tenemos ¼ de una tarta, pero para hacer una tarta completa necesitamos más trozos que sean iguales. ¿Cuántos trozos necesitaremos?*
>
> *Una carrera está compuesta por 3 tramos, cada uno de la misma longitud. Los corredores ya han recorrido la tercera parte de la carrera. ¿Cuántas partes quedan por recorrer?*

2. Hc=hallar la parte complementaria

En este contexto, la acción se origina en una parte que se expresa como una fracción. La pregunta requiere identificar la parte complementaria usando términos cuantitativos que relacionan la parte complementaria con el todo. A diferencia del contexto anterior, el todo no está dividido a priori. Los siguientes dos enunciados son ejemplos que encontramos en las respuestas de este contexto.

> *Tenemos una tarta, y María se come ¼ de ella. ¿Qué cantidad de tarta queda aún?*
>
> *Estoy participando en una carrera y ya he recorrido 1/3 de ella. ¿Cuánto queda para llegar a la meta?*

3. Hp=hallar la parte

Un enunciado pertenece a este contexto cuando la acción que da lugar a una parte proviene de dividir un todo en partes iguales. En todos los casos se menciona el conjunto o el todo, el número de partes, la igualdad de las partes y la acción de seleccionar una de las partes. Los siguientes dos enunciados corresponden a esta categoría.

> *Mamá ha hecho una tarta por mi cumpleaños y la ha dividido en 4 partes iguales, Papá que come mucho se ha comido una parte. ¿Cuánto se ha comido de la tarta?*
>
> *El camino de casa al colegio a casa se puede dividir en 3 partes iguales. Si he caminado una de las partes del camino, ¿cuánto he recorrido?*

4. Um=hallar la parte usando una unidad de medida

En este contexto, la parte y el todo se dan como cantidades de la misma magnitud (peso, tiempo, volumen, superficie, etc.), y su relación se expresa como una relación entre cantidades de esta magnitud. Los siguientes son dos ejemplos de este contexto.

> *Si María se ha comido 25 g. de una tarta que pesa 100 g., ¿qué fracción de tarta se ha comido?*
>
> *Para ir al supermercado tardamos 15 minutos andando y llevamos 5 minutos. Representa en fracción cuánto hemos realizado del trayecto.*

5. Rep=repartir

En este caso, los descriptores básicos de este contexto son un verbo sinónimo de repartir entre varias personas (distribuir, dar, entregar, etc.), el todo o conjunto que se reparte y el número de sujetos a los que se les distribuyen las porciones. Los siguientes dos enunciados son ejemplos de este contexto.

Mamá preparó 1 tarta para mi cumpleaños. Como éramos 4 en la fiesta ¿a cuánto tocábamos cada uno?

En una carrera de relevos el recorrido se reparte entre 3 corredores, ¿cuánto tendrá que recorrer cada corredor?

8.1.1. Valoración de contextos con magnitud superficie

A los participantes en la entrevista, se les presentó por escrito, en primer lugar, una ficha para que valoraran los contextos de la magnitud superficie que se incluían en ella (véase anexo C.1). Los participantes podían valorar los contextos como muy adecuado, adecuado, poco adecuado o inadecuado. En la tabla 8.2, recogemos los datos obtenidos en este primer paso de la entrevista. En ella se presentan las valoraciones de cada sujeto otorgadas a cada enunciado. Codificamos las respuestas de "muy adecuado" a través de la letra A, "adecuado" a través de la letra B y, dado que la mayoría de los sujetos no considera ningún enunciado como "inadecuado", agrupamos los valores "poco adecuado" e "inadecuado" en uno sólo, a través de la letra C. Recordamos que no incluimos las respuestas de los sujetos S1 y S2 ya con ellos se realizó la prueba piloto de la entrevista.

Tabla 8.2. Valoraciones otorgadas a los cinco contextos de la magnitud superficie en el paso 1

	Ru	Hc	Hp	Um	Rep
S3	B	A	B	B	A
S4	B	A	B	A	B
S5	C	B	B	B	A
S6	C	A	C	A	A
S7	B	A	C	B	B
S8	B	A	A	A	A
S9	C	B	B	B	B

Tabla 8.2. Valoraciones otorgadas a los cinco contextos de la magnitud superficie en el paso 1

	Ru	Hc	Hp	Um	Rep
S10	B	A	B	B	C
S11	A	A	B	C	B
Total	N(A)=1 N(B)=5 N(C)=3	N(A)=7 N(B)=2 N(C)=0	N(A)=1 N(B)=6 N(C)=2	N(A)=3 N(B)=5 N(C)=1	N(A)=4 N(B)=4 N(C)=1

Ru=reconstruir la unidad; Hc=hallar la parte complementaria; Hp=hallar la parte; Um=hallar la parte usando una unidad de medida; Rep=repartir; S=sujeto

En los datos recogidos (véase tabla 8.2) se detectan preferencias de los participante por algunos contextos dentro de la magnitud superficie, como Hc, frente a otros con valoraciones más bajas, como Ru. Un posible orden de preferencia de mayor a menor preferencia que surge de estos datos es Hc, Rep, Um, Hp y Ru. Con el fin de profundizar en los motivos de estas valoraciones, recurrimos a las respuestas de las preguntas del paso 2 de la entrevista sobre por qué tales contextos son mejores o peores para introducir las fracciones a los escolares.

Con respecto al contexto mejor valorado (Hc), los argumentos dados por los sujetos para dar mejor valoración al sentido Hallar el complementario, destacan su sencillez y aprecian que dicho contexto permite realizar una representación con la ventaja de que los escolares puedan visualizarlo.

Porque podría dibujar la tarta y quitar el trocito, llevarlo así para un lado y se vería más fácil.

Sería el más sencillo, porque utiliza a una persona que se come un cuarto, utiliza la fracción para esa personas y tiene que calcular el resto de tarta.

El contexto mejor valorado en el segundo lugar en el caso de la magnitud superficie es el de Rep. Según los participantes, este contexto es un ejercicio clásico para la enseñanza de las fracciones.

> *el hecho de repartir una tarta es más fácil de ver, es un ejercicio tipo*
>
> *la seño que yo tenía lo usaba para explicar las fracciones y se lo explicaba igual que éste, con una tarta la partía en 4, entonces es el básico con el que se explican las fracciones en el colegio*

Los contextos Hp y Um se encuentran en una posición intermedia respecto a las valoraciones otorgadas. En el caso del contexto Um, en el que se introducen los gramos como unidad de medida auxiliar, algunos sujetos destacan que la presencia de los gramos supone un apoyo concreto para explicar las fracciones.

> *Depende de si han dado o no los gramos. Si los han dado el cuarto. Porque tengo algo para decir que eso es un cuarto, los gramos, tengo algo…. concreto para enseñarle a los niños estos gramos son un cuarto. En los otros sólo habla de fracciones y nada más, sin tener apoyo material. La cuatro, es directa, no lía tanto con que el Padre se come una parte y esas cosa e introduce los gramos y poniendo los números… así es más completo.*

La mayoría de los sujetos proponen el contexto de Ru como el contexto peor valorado en magnitud superficie, debido a que es estructuralmente diferente y presenta la fracción de manera directa, mientras que, en los otros contextos, la fracción se forma a posteriori (por ejemplo, al dividir una tarta en partes).

> *Es diferente lo que te da y lo que te pide pues los datos son fracciones y la incógnita es un número natural.*

8.1.2. Valoraciones de contextos con magnitud longitud

Una vez finalizada la valoración de los contextos asociados a la magnitud superficie, procedimos en la entrevista a valorar los contextos de longitud. Esto constituye el tercer paso de la entrevista y, al igual que en el caso anterior, recogemos en la tabla 8.3 los datos resumidos en este tercer paso. En ella se presentan las valoraciones otorgadas a los distintos usos de la longitud como “muy adecuado”, a través de la letra A, “adecuado”, a través de la letra B y “poco adecuado” o “inadecuado”, a través de la letra C. Estos datos se complementan con las respuestas a las preguntas del paso 4 de la entrevista sobre los motivos por los que unos contextos son mejores o peores para introducir las fracciones a los escolares.

Tabla 8.3. Valoraciones otorgadas a los cinco contextos de la magnitud longitud en el paso 3

	Ru	Hc	Hp	Um	Rep
S3	B	A	A	B	B
S4	C	B	B	B	C
S5	C	C	A	B	B
S6	A	A	B	A	C
S7	B	A	B	B	B
S8	B	B	A	A	B
S9	B	B	A	A	B
S10	A	B	B	C	B
S11	B	B	A	B	B
Total	N(A)=2 N(B)=5 N(C)=2	N(A)=3 N(B)=5 N(C)=1	N(A)=5 N(B)=4 N(C)=0	N(A)=3 N(B)=5 N(C)=1	N(A)=0 N(B)=7 N(C)=2

Ru=reconstruir la unidad; Hc=hallar la parte complementaria; Hp=hallar la parte; Um=hallar la parte usando una unidad de medida; Rep=repartir

Para los enunciados con la magnitud longitud, un posible orden de preferencia de mayor a menor preferencia que surge de estos datos es Hp, Hc, Um, Ru y Rep. Los participantes otorgan las mejores valoraciones al contexto de Hp. Los motivos dados relativos a la enseñanza de las fracciones hacen referencia a la facilidad que tiene para representarlo.

> *Como bien dice el camino del colegio a casa se puede dividir en 3 partes iguales, es mucho más fácil introducirlo con un camino y dibujar un camino.*

En el caso contrario, se observa que el contexto peor valorado en la magnitud longitud fue el de Rep por ser más complejo: *"es el más lioso"*.

En una posición intermedia en la escala de valoraciones, se encuentran los contextos de Hc y Ru. En el caso de Hc, los argumentos a favor de este contexto para la enseñanza se centran en la posibilidad de realizar fácilmente una representación para que los escolares lo visualicen.

> *Creo que es clara de entender… porque no sé para explicarlo y hacer un dibujo es un pelín más fácil de que la vean.*

8.1.3. Comparación de las valoraciones dadas a los sentidos para ambas magnitudes

Los apartados anteriores muestran los resultados de manera independiente para cada una de las magnitudes. En este apartado, presentamos los resultados de manera conjunta para las magnitudes superficie y longitud y realizamos una comparación entre ambas magnitudes.

La tabla 8.4 agrupa los datos de las tablas 8.2 y 8.3 y presenta las valoraciones otorgadas en general para cada contexto. En esta tabla contabilizamos el número de valoraciones totales otorgadas a cada contexto en ambas magnitudes, como "muy adecuado", a través de la letra A, "adecuado", a través de la letra B y "poco adecuado" o "inadecuado", a través de la letra C.

Tabla 8.4. Valoraciones globales otorgadas a los cinco contextos en ambas magnitudes

	Ru	Hc	Hp	Um	Rep
Total	N(A)=3 N(B)=10 N(C)=5	N(A)=10 N(B)=7 N(C)=1	N(A)=6 N(B)=10 N(C)=2	N(A)=6 N(B)=10 N(C)=2	N(A)=4 N(B)=11 N(C)=3

Ru=reconstruir la unidad; Hc=hallar la parte complementaria; Hp=hallar la parte; Um=hallar la parte usando una unidad de medida; Rep=repartir

Globalmente, el contexto mejor valorado es Hc, seguido por Um y Hp que obtiene valoraciones similares. Los contextos peor valorados son Rep y Ru. Sorprende que hallar la parte complementaria (Hc) sea mejor valorada que la de hallar una parte (Hp), pero este hecho depende de las magnitudes: no se da por igual en superficie y longitud. Parece razonable que los participantes valoren de forma similar los dos contextos referidos a hallar una parte (Hp y Um). El contexto de repartir Rep, que está muy ligado a la división de enteros, empieza aquí a perder protagonismo a favor de contextos de partes (Hc y Um). También parece lógico que el contexto menos valorado sea el de reconstruir la unidad, puesto que requiere una relación inversa a la de formar una parte a partir del todo, que suele ser el proceso de introducir las fracciones en el ámbito escolar.

Um es un contexto que destaca por la disparidad de opiniones que provoca en ambas magnitudes. En algunos casos, es considerado el más idóneo para la enseñanza, dado que la relación de la magnitud tiempo con recorrido realizado es un ejemplo cercano a los escolares que sirve de apoyo en la enseñanza. Sin embargo, otros participantes consideran que la presencia de la unidad de medida auxiliar puede añadir complejidad al enunciado, si los escolares no han trabajado con dichas magnitudes.

No me gusta la relación que hace entre el tiempo y los segmentos, o sea meter en 15 minutos, llevamos 5 minutos, no me parece adecuado la relación de minutos con 1/3, porque no es exacto, el niño se puede liar más si le dices 5, 5 y 5 minutos. No me gusta la relación entre minutos y fracciones.

Teniendo en cuenta las dos magnitudes, un posible orden de preferencia de mayor a menor preferencia que surge de estos datos es Hc, Hp=Um, Rep y Ru. No obstante, como se aprecia en los apartados anteriores sobre los análisis realizados de manera independiente para las valoraciones otorgadas a los contextos en la magnitud superficie y en la longitud, en muchos de los casos las puntuaciones no coinciden en ambas magnitudes.

Si comparamos las valoraciones obtenidas por ambas magnitudes para los distintos contextos (véase tabla 8.5) observamos que el contexto Um tiene valoraciones iguales en los dos casos. No ocurre lo mismo con el contexto Hp, pues es el mejor valorado en la magnitud longitud y uno de los peores valorados en la magnitud superficie. Por el contrario, Rep es el contexto peor valorado en la magnitud longitud y uno de los mejores valorados en superficie. Los contextos Hc y Ru tienen valoraciones similares pero opuestas en ambas magnitudes.

En conjunto, las valoraciones negativas (poco adecuada o inadecuado), para los contextos son escasas. Ru es el único contexto con 3 valoraciones negativas para la superficie. Hc es el contexto mejor valorado, también para la magnitud superficie.

Si consideramos las valoraciones asignadas por los profesores entrevistados y ordenamos los contextos según este criterio, obtenemos los datos que presentamos en la tabla 8.5.

Tabla 8.5. Ordenación de los contextos según las valoraciones recibidas

Magnitudes	Orden de los contextos según valoración				
Superficie	Hc >	Rep >	Um >	Hp >	Ru
Longitud	Hp >	Hc =	Um >	Ru >	Rep

El símbolo > hace referencia a que un contexto obtuvo mejores valoraciones que el siguiente.

El símbolo = hace referencia a que esos dos contextos obtuvieron valoraciones iguales .

Interpretamos este orden entre los contextos como un indicador de la complejidad que los distintos contextos con los que pueden introducir las fracciones mediante la relación parte-todo tiene para los participantes. También lo interpretamos como indicadores actitudinales de la valoración subjetiva asignada por los estudiantes encuestados a unos modos de uso determinados, que utilizaremos en lo que sigue.

8.2. ESTUDIO DEL APRENDIZAJE DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

Una vez que los participantes reflexionaron sobre el contenido y se ubicaron como docentes en una situación de enseñanza del concepto de fracción basado en la relación parte-todo, procedimos al estudio del conocimiento que tenían sobre la cognición de dicha relación. En este estudio, nos centramos en tres de esas componentes: el diseño de tareas, el enunciado de expectativas de aprendizaje y la identificación de las limitaciones para el aprendizaje.

Realizamos las interpretaciones a partir de las respuestas, tal y como las expresaron los estudiantes de magisterio que participaron en las entrevistas. Como mencionamos en el apartado anterior, tampoco incluimos los resultados de los dos primeros sujetos puesto que su trabajo sirvió como ensayo, a modo de prueba piloto. Este ensayo inicial proporcionó información para modificar posteriormente las preguntas iniciales y mejorar la entrevista que hicimos a los restantes sujetos. Presentamos los resultados, organizados según las tres componentes mencionadas.

8.2.1. Diseño de tareas

Después de introducir a los participantes en el contenido de la relación parte-todo con la valoración de contextos, ubicamos a los participantes en una situación de enseñanza y aprendizaje. Para ello, en este segunda parte de la entrevista, centrada en el estudio el diseño de tareas, expectativas y limitaciones de aprendizaje, entregamos a cada sujeto participante en la entrevista la narración (véase anexo C.4), la que ellos mismos habían realizado anteriormente durante la segunda fase del estudio sobre cómo iniciar a los escolares en el concepto de fracción. Analizamos estas narraciones en el capítulo 7 de este trabajo.

En primer lugar, nos centramos en el diseño de tareas pidiéndoles a los sujetos que realizasen la siguiente actividad.

> *Para finalizar la explicación de tu narración sobre cómo introducir las fracciones a los escolares, propón alguna tarea, actividad o problema.*

Recogemos las respuestas de los sujetos en la tabla 8.6.

Tabla 8.6. Respuestas dadas por los sujetos sobre diseño de tareas

Sujeto	Respuestas
S3	Realizaremos una actividad basada en el reparto. Vamos de camino al Parque de las Ciencias y hemos tirado por un camino recto para llegar antes. Cuando hemos llegado al primer semáforo que nos encontramos, llevamos recorrido 1/3 del camino. ¿Cuántos nos queda para llegar si ya no hay ningún semáforo más?
S4	Si tenemos una tarta partida en 4 trozos y yo me he comido ¾ ¿cuántos trozos quedan? Exprésalo en forma de fracción.

Tabla 8.6. Respuestas dadas por los sujetos sobre diseño de tareas

Sujeto	Respuestas
S5	Tenemos una cuerda demasiado grande. Queremos dividir esa cuerda para 3 personas de forma que cada uno tenga un trozo, los trozos tienes que ser del mismo tamaño ¿qué parte de la cuerda me corresponderá tener?
S6	Si Carlos tiene un pastel y quiere repartírselo a sus 6 amigos por igual, representa en forma de fracción cómo lo harías.
S7	A marta de la ha olvidado el bocadillo para el recreo, pero su amigo Daniel decide compartirlo con ella. Si Daniel ha dividido su bocadillo en 3 trozos y se ha comido 2 ¿qué parte del bocadillo se ha comido Marta?
S8	Carolina ha hecho una tarta de chocolate por mi cumpleaños, si somos 6 y la dividimos en 6 partes iguales y yo me como la primera ¿cuántos trozos de tarta quedan? Dibújalos.
S9	Tenemos una cinta de colores que hemos comprado entre 3 amigos ¿qué parte le correspondería a cada a amigo?
S10	Mi madre parte el bizcocho en 3 partes iguales. Si mi hermano se come dos tercios del bizcocho ¿cuánto queda para comerme yo?
S11	María tiene un su casa una barra de pan dividida en tres trozos. Si coge 1/3 de la barra partida en trozos, ¿cuántos quedan para su hermana y su madre?

Todos los sujetos fueron capaces de proponer de manera natural algún tipo de tarea de aprendizaje. Las tareas que diseñaron fueron en todos los casos enunciados de problemas, es decir, la descripción de una relación parte-todo seguida de un interrogante en que se pregunta por un dato desconocido. En general, estas respuestas se pueden considerar apropiadas de acuerdo con el tema de iniciación a las fracciones, a excepción del enunciado planteado por el sujeto S8, quien propuso el enunciado de un problema de estructura aditiva de cambio.

Atendemos a dos variables para analizar las tareas planteadas por los participantes: magnitud y contexto.

La primera variable, magnitud, toma los valores superficie o longitud.

La segunda variable, contexto, hace referencia al contexto que presenta la tarea planteada y toma uno de los cinco valores considerados: (a) reconstruir la unidad (Ru), (b) hallar el complementario (Hc), (c) hallar la parte (Hp), (d) hallar la parte usando una unidad de medida auxiliar (Um), y (e) repartir (Rep).

En la tabla 8.7, recogemos, según las dos variables descritas, el balance de las tareas que los participantes enunciaron. Además, en la última columna, introducimos el contexto que habían valorado como más adecuado para la enseñanza, según la magnitud superficie o longitud considerada.

Tabla 8.7. Análisis de las tareas planteadas

Sujeto	Magnitud	Contexto de la tarea	Contexto mejor valorado
S3	Longitud	(b) Hallar el complementario	(c) Hallar la parte
S4	Superficie	(a) Reconstruir la unidad	(d) Hallar la parte usando una unidad de medida
S5	Longitud	(e) Reparto	(e) Reparto
S6	Superficie	(e) Reparto	(b) Hallar el complementario
S7	Superficie	(a) Reconstruir la unidad	(b) Hallar el complementario
S8	Superficie	Aditivo de cambio	(c) Hallar la parte
S9	Longitud	(e) Reparto	(b) Hallar el complementario
S10	Superficie	(a) Reconstruir la unidad	(b) Hallar el complementario
S11	Superficie	(a) Reconstruir la unidad	(b) Hallar el complementario

En los enunciados, encontramos magnitudes continuas de tipo lineal (distancia o longitud, 3 casos) o de área-volumen (tarta o bocadillo, 6 casos). Con excepción del enunciado de estructura aditiva, el resto se corresponden con tres de los contextos presentados en la primera parte de la entrevista: Rep (3 casos), Hc (1 caso) y Ru (4 casos).

Como se observa en las dos última columnas de la tabla 8.7, a excepción del sujeto S5, los contextos escogidos por los participantes para presentar las tareas enunciadas no coinciden con los que previamente consideraron más adecuados para la enseñanza. A pesar de que encontraron diferencias entre estos contextos, los resultados muestran que los sujetos no enunciaron una tarea de acuerdo con los contextos valorados por ellos mismos como mejores para la enseñanza (véase tabla 8.7). Estas contradicciones, detectadas en 8 de los 9 casos, muestran falta de coherencia entre su valoración del contexto más adecuado para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y su elección en la práctica.

8.2.2. Expectativas de aprendizaje

Utilizamos la narración que cada uno de los participantes había realizado en la segunda fase del estudio correspondiente al análisis de instrucción para indagar sobre las expectativas de aprendizaje. Para estudiar las expectativas de aprendizaje a partir de la narración que se les entregó, pedimos a los participantes en la entrevista que contestaran a la siguiente pregunta.

> *Al poner en práctica tu secuencia en clase con tus alumnos, ¿qué crees que aprenderán?*

Con la descripción de las expectativas de aprendizaje, los sujetos expresaron una serie de conocimientos, capacidades o actitudes que esperan que los escolares alcancen, dominen y apliquen con la narración que realizaron en la segunda fase del estudio. Todos los entrevistados manifestaron algún tipo de expectativa, las cuales recogemos en la tabla 8.8.

Tabla 8.8. Respuestas de los sujetos a la pregunta sobre expectativas de aprendizaje

Sujeto	Respuestas sobre expectativas
S3	Aprender a diferenciar las partes que tenemos o cogemos, de un total.
	Aprender a repartir un camino en 3 trozos.
S4	Aprender las fracciones.
S5	Aprender las fracciones a partir de la división en partes iguales de una cuerda.
S6	Saber representar (no resolver) un enunciado de fracciones.
S7	Aprender a desenvolverse con las fracciones que se utilizan en la vida cotidiana, a utilizarlas en la vida cotidiana y aprender su utilidad, aunque no lo expresen de forma escrita.
S8	Aprendan a dividir de una forma exacta y creativa. Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc.

Tabla 8.8. Respuestas de los sujetos a la pregunta sobre expectativas de aprendizaje

Sujeto	Respuestas sobre expectativas
S9	Que comprendan primeramente las fracciones, y que sea un lenguaje sencillo y de la vida real, que les sea a ellos útil.
S10	Dividir un objeto en partes iguales.
	Que la suma de las partes representa la totalidad del principio.
S11	Ser capaces de dominar las operaciones con las fracciones, en este caso el dominio de las restas.

Para el análisis de las respuestas utilizamos dos variables: capacidad cognitiva y tipo de contenido (Lupiáñez, 2008). La primera variable, capacidad cognitiva, hace referencia al grado de precisión al enunciar la capacidad que se espera que adquiera el escolar y que puede ser relativa a la realización de acciones o a la manifestación de conductas. Dimos tres valores a dicha variable: imprecisa o genérica, definida y elaborada. Codificamos la expectativa como imprecisa, cuando el enunciado planteado no menciona expresamente una capacidad (por ser un enunciado meramente matemático) o es demasiado genérica. Si el enunciado de la expectativa recoge una capacidad cognitiva mediante un tipo de acción singular, codificamos esta respuesta como definida, mientras que si involucra más de una de una capacidad, la codificamos como elaborada.

La segunda variable, tipo de contenido, distingue el campo conceptual del procedimental. Así, en los enunciado de las expectativas, distinguimos tres valores en esta variable: aquellos que se refieren a aspectos conceptuales en la componente del contenido matemático, aquellos que se refieren a aspectos procedimentales, o bien aquellos otros que se refieren a ambos aspectos. Cabe destacar que no encontramos ninguna expectativa cuyo enunciado se refiera al campo actitudinal.

En la tabla 8.9, recogemos el análisis de las expectativas planteadas por los participantes en torno a estas dos variables en las dos primeras columnas, y, en la tercera columna, indicamos el conocimiento al que hacen referencia tales expectativas.

Tabla 8.9. Análisis de las expectativas de aprendizaje

Sujeto	Capacidad cognitiva	Tipo de contenido
S3	Elaborada	Ambos
S4	Genérica	Conceptual
S5	Específica	Conceptual
S6	Específica	Procedimental
S7	Específica	Conceptual
S8	Elaborada	Ambos
S9	Específica	Conceptual
S10	Elaborada	Procedimental
S11	Específica	Procedimental

La mayoría de los sujetos no encontraron excesivas dificultades para enunciar expectativas de aprendizaje asociadas a su narración. Con respecto a la primera variable, capacidad cognitiva, el sujeto S4 fue el único que formuló una expectativa genérica: "aprender las fracciones". Tres de los sujetos (S3, S8 y S10) plantearon expectativas elaboradas, cuya expresión incluye dos capacidades situadas en enunciados independientes: "Aprender a diferenciar las partes que tenemos o cogemos, de un total. Aprender a repartir un camino en 3 trozos.". El resto de sujetos planteó expectativas específicas que expresaban una única capacidad cognitiva.

En la variable tipo de contenido, se observan expectativas relativas a conocimientos conceptuales ("Comprender la partición de las cosas, tiempo, objetos, comida, etc.") y procedimentales ("Dividir un objeto en partes iguales"). En la tabla anterior, no se observa predominio de alguno de los dos tipos de contenidos en las respuestas de los participantes. Solo los dos participantes S3 y S8, que plantearon expectativas de tipo elaborado, consideran ambos tipos de conocimientos (conceptual y procedimental) en sus respuestas.

Con respecto a los conocimiento a los que hacen referencia las expectativas, seis de los casos se corresponden con conocimientos basados en la relación parte-todo que además se relacionan con los contextos planteados: "dividir un objeto" (S5, S8 y S10), "repartir" (S3), "diferenciar las partes del todo" (S3) y "reconocer que la suma de todas las partes corresponde con el todo" (S10). Algunas de estas expectativas, como "reconocer que la suma de todas las partes corresponde con el todo" y "repartir", se relacionan directamente, con los contextos de Ru y Rep, mientras que "dividir un objeto" o "diferenciar las partes del todo" son más generales y encajan con cualquiera de los contextos.

Solamente el sujeto S11 manifestó una expectativa ajena al tema de iniciación a las fracciones, que hacía referencia a las operaciones, particularmente, la sustracción de fracciones.

8.2.3. Limitaciones de aprendizaje

En este apartado, incluimos el análisis de las respuestas de los participantes a la última pregunta de la entrevista referente a las limitaciones de aprendizaje. En ella, los participantes reflexionaron acerca de los errores en que pueden incurrir los escolares al realizar su tarea y las dificultades que pueden originar estos errores.

Recogemos en la tabla 8.10 las respuestas dadas a la pregunta sobre errores y a la pregunta sobre dificultades.

Tabla 8.10. Respuestas dadas por los sujetos sobre limitaciones

Sujeto	Respuestas sobre errores	Respuestas sobre dificultades
S3	Confundirse a la hora de saber qué lugar ocupa cada dato en la resta.	Repartir el camino. Dividir el camino en tres partes iguales y tener que coger alguna.

S4	Que no sepan resolverlo o si lo resuelven pondrían algo al azar.	Porque es complejo, si yo tengo 4 trozos, en vez de ver 4 puedo verlo como 4/4 aunque sé que el resultado sea 1 que representa el total. Entonces puedo decir tengo 4 trozos y me he comido ¾, 4 menos ¾ y pondrá algo al azar. Porque hay que enseñarles si tenemos una tarta en 4 trozos que eso representa el total que es igual a 4/4. Entonces el alumno si no sabe eso pondrá 4 - 3/4 llevándole a cometer un error.
S5	Al dividir una unidad entre tres ya que tres es un número impar.	Porque los números impares siempre crean más problemas que lo pares, los números pares los niños los ven mucho mejor. Dividir una unidad entre un número par lo asocian mejor que si lo tienes que dividir entre números impares. Porque si tú divides 4 entre 2 sabes que te dan partes iguales… pero 1 entre 3 da cero como algo y el cero como algo puede que no lo manejen. Los niños tienen más facilidad para dividir una unidad entre un número que sea par que entre un número que sea impar.
S6	Al sumar, que sumasen también los denominadores por lo que dirían que saldría 6/36.	Por despiste porque si el profesor se lo ha explicado… muchas veces están centrado en el resultado de arriba y lo de abajo se te va, a mí me ha pasado muchas vece. Se preocupan más por sumar los numeradores que luego hacen la misma operación con los denominadores.
S7	Fallo en la comprensión. En lugar de dividir el bocadillo en tres partes iguales se dividiese en dos, ya que hay dos niños a los que repartir	Porque haya un fallo de comprensión en la lectura.
S8	Dividir en partes iguales y que realmente no vean bien lo que cogen o dan.	A lo mejor de la regla de las medidas… ahí veo que hay mucha dejadez, que tu le digas divide una tarta en 3 partes iguales, y que cada uno la divida como quiera, no, hay una forma correcta de dividirla para después que haya una solución correcta, entonces Porque no hagan una división exacta de la tarta y la dividan como ellos crean. Falta de utilizar las medidas, reglas.

S9	La correspondencia de gráficamente los tres trozos, a que a cada uno le corresponda un tercio. En dividir en tres partes iguales no le costaría. Sería la correspondencia gráfica a la numérica	Porque no es tan gráfico si no es más… de razonamiento, y tienen que verdaderamente comprender las fracciones, si no comprenden las fracciones no podrán hacer la equivalencia entre lo gráfico y lo numérico.
S10	En la colocación de las fracciones a la hora de restar.	Al ver fracciones, al ver un número encima de otro no se piensa que son restas normales, pueden pensar que esto (2/3) es mayor que esto (3/3). Al ver las fracciones pueden confundir los números y pensar que da igual el orden de colocación.
S11	Los alumnos podría tener dificultad a la hora de plantear el problema sin las fracciones y realizarlo con ellas, quizás también podrían tener problemas con la operación y equivocarse con numerador y denominador.	Porque no he especificado cómo tendrían que hacerlo, yo he puesto que tengo tres trozos y pueden directamente quitarle dos y se ha acabado, no plantear que tengo 3 de 3 y si le quito uno tener 2/3 Porque puede ser que no lleguen a comprender del todo el enunciado y realizar la operación simple sin obtener el resultado por medio de las fracciones

Analizamos, en primera instancia, las respuestas sobre limitaciones, recogidas en la tabla 8.10, según la variable limitación. A través de esta variable examinamos si el enunciado planteado, tanto a la pregunta sobre errores como a la pregunta sobre dificultades, se tipifica como un error, como una dificultad, como un obstáculo, como una ausencia de conocimiento o bien no es una limitación.

Dependiendo del valor de la variable limitación, analizamos posteriormente la respuesta según la variable tipo de dificultad o tipo de error.

La variable tipo de dificultad, de acuerdo con las categorías acotadas por Socas (1997), toma los valores (a) asociada a la complejidad de los objetos matemáticos, (b) asociada a los procesos propios de la actividad matemática, (c) asociada a los procesos de enseñanza, (d) asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, (e) asociada a actitudes afectivas y (f) emocionales hacia las matemáticas.

Basamos los valores de la variable tipo de error en las categorías definidas por Movshovitz- Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Esta variable toma los valores (a) datos mal utilizados, (b) interpretación incorrecta del lenguaje, (c) inferencias no validas lógicamente, (d) teoremas o definiciones deformados, (e) falta de las verificación de la solución, (f) errores técnicos, y (g) no es un error.

En la tabla 8.11, recogemos el análisis de las respuestas a las preguntas sobre limitaciones en el aprendizaje según las variables definidas anteriormente.

Tabla 8.11. Análisis de las limitaciones planteadas

Sujeto	Limitación	Tipo de error	Tipo de dificultad
S3	Error y dificultad	Datos mal utilizados	Procesos propios de la actividad matemática
S4	Ausencia de conocimiento		
S5	Dificultad		Complejidad objetos matemáticos
S6	Error	Error técnico	
S7	Error y dificultad	Datos mal utilizados	Procesos de desarrollo cognitivo
S8	Error y dificultad	Teoremas o definiciones deformados	Procesos propios de la actividad matemática
S9	Dificultad		Complejidad objetos matemáticos
S10	Error	Error técnico	
S11	Dificultad		Procesos propios de la actividad matemática y a los procesos de enseñanza

Como se observa en la tabla 8.11, los participantes encontraron limitaciones y carecieron de fluidez en el momento de precisar el enunciado de posibles errores en los que pueden incurrir los escolares en las tareas que plantearon y en vincular justificadamente tales errores a las dificultades que eventualmente los pudieran originar. Algunos participantes no llegaron a formular errores y dificultades, mientras que otros formularon dificultades muy genéricas o se limitaron a repetir la misma respuesta dada a la pregunta sobre errores: no identificaron error o dificultad alguna relativa a los tipos de situaciones previamente valorados en la entrevista, ni tampoco hicieron referencia a la magnitud con que trabajaban. También destacamos que ningún sujeto hizo referencia en sus respuesta a obstáculos en la enseñanza.

Respecto a los errores planteados, los participantes hicieron referencia a errores técnicos o datos mal planteados y recurrieron a posibles fallos en los algoritmos de suma y resta de fracciones, a pesar de que en ninguna tarea era necesaria la realización de tales operaciones para su resolución. Otro error dado, en relación a definiciones deformadas del concepto de fracción, fue la desigualdad de las partes al dividir el todo, y, en relación con datos mal utilizados, dividir el todo en un número incorrecto de partes.

Las respuestas dadas sobre dificultades se centran en los procesos propios de la actividad matemática, particularmente en los procesos de división y reparto, los procesos de desarrollo cognitivo con problema en la comprensión lectora, los procesos de enseñanza debido a que el profesor no específica bien cómo resolver la tarea, y a la dificultad de los objetos matemáticos por la relación entre las representaciones gráfica y numérica de las fracciones.

El sujeto S4 destaca en las respuestas, ya que fue el único que respondió a las preguntas sobre limitaciones con ausencia de conocimiento: “que no sepa resolverlo o si lo resuelven pondría algo al azar”.

8.3. BALANCE DE LOS RESULTADOS

Como balance de los resultados de la primera parte de la entrevista, sobre las valoraciones de los contextos de la relación parte-todo, observamos que el contexto mejor valorado es Hc, seguido por Um; el peor valorado es Ru; mientras que los contextos Hp y Rp se encuentran valorados de modo dispar según cual magnitud se considere. Repartir un objeto (Rp) de dos dimensiones se valora como más adecuado que repartir un objeto de un sola dimensión. Por el contrario, Hp parece mas sencillo con objetos longitudinales que con aquellos de dos dimensiones. El apoyo mediante una unidad de medida auxiliar (Um) también recibe una valoración aceptable. Este es un caso que destaca sobre el resto, ya que presenta opiniones dispares tanto cuando se consideran distintas magnitudes como en el caso de una misma magnitud. Es decir, hay grupos de sujetos que lo consideran el menos adecuado para la enseñanza por incluir conceptos nuevos (unidades de medida), mientras que otros sujetos opinan que estos conceptos adicionales son una ayuda en la enseñanza. Estas opiniones contrapuestas se acentúan entre las distintas magnitudes; de ahí la importancia de la complementariedad de técnicas de recogida de datos, fichas y entrevistas, para un abordaje más profundo en la obtención de las valoraciones de los sujetos.

Los resultados de esta primera parte de la entrevista, en la que los participantes valoran cinco contextos simultáneamente para la magnitud superficie y longitud, lleva a la conclusión de que los cinco contextos no han sido igualmente valorados por los participantes y que la valoración otorgada a los contextos depende de la magnitud, de tal manera que contextos que están muy bien valorados para una magnitud pueden estar mal valorados para otra. Las razones que dan los participantes para determinar su mejor o peor valoración a los contextos tienen que ver con la posibilidad de realizar una representación visual, bien que la identifiquen con una actividad típica escolar, bien que sea o no un contenido ya trabajado por el escolar, o bien que sea una actividad de tipo inverso con respecto a las actividades usuales para introducir las fracciones. Esta última razón es de carácter lógico-matemático y la asocian al contexto que consideran menos apropiado o al que han valorado menos. Las razones ligadas al desarrollo curricular de los contenidos ocupan la franja intermedia de valoración de contextos. Las razones que aportan los participantes en la entrevista para valorar muy positivamente un contexto son de naturaleza cognitiva y se refieren a las posibilidades de visualización que tienen con respecto al aprendizaje del concepto.

Entre los resultados obtenidos sobre diseño de tareas en la segunda parte de la entrevista, destacamos que los participantes identifican "tarea" con "enunciado de problema" ya que proponen en todos los casos enunciados de problemas cuando se les pide plantear de manera espontánea una tarea sobre fracciones. Los contextos presentes en tales enunciados son variados. Ain embargo, estos contextos no coinciden con los que valoran como más adecuados para la enseñanza de las fracciones. Como detectamos en las respuestas sobre el diseño de tareas durante la entrevista, los participantes no disponen de un conocimiento bien diferenciado entre los distintos contextos de la interpretación parte-todo de las fracciones. Ello conlleva a que, en función de la demanda cognitiva de la tarea que les proponemos, seleccionen un contexto u otro. Diseñar una tarea para los escolares no es fácil para estos maestros en formación por lo que dedican su atención a enunciar la tarea, descuidando la adecuación del contexto. Consideramos que estas contradicciones muestran, además, falta de conexión entre el conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje y su puesta en práctica.

Otro de los aspectos estudiados, el diseño de expectativas de aprendizaje, es por lo general acertado, ya que la mayoría de los sujetos son capaces de enunciar objetivos específicos al tema. Estas expectativas hacen referencia a contenidos procedimentales y conceptuales, y a aspectos como dividir diferentes tipos de objetos y la utilidad de las fracciones. Consideramos así que estas capacidades se encuentran desarrolladas por este grupo de profesores en formación inicial. Al respecto, subrayamos que en su segundo curso de formación universitaria estos estudiantes cursaron una asignatura de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la que se trataron estos aspectos.

En otra perspectiva, se encuentra el estudio de las limitaciones de aprendizaje. A pesar de que los sujetos fueron capaces de ejemplificar de manera espontánea tareas adecuadas para el aprendizaje de las fracciones redactadas en forma de problemas, ellos tuvieron dificultades para encontrar posibles errores en los que pueden incurrir los escolares en tales tareas y en vincular justificadamente tales errores a dificultades que puedan originarlos. De los 11 sujetos, solo 5 de ellos plantearon errores, que se refieren a errores técnicos sobre fallos en los algoritmos en la suma y resta de fracciones.

En consecuencia, ésta es una capacidad escasamente desarrollada por los sujetos durante su formación. Sería pertinente que quienes han de elaborar los programas para formación de maestros y los profesores responsables de su puesta en práctica tuvieran en cuenta este aspecto como capacidad profesional a incentivar y desarrollar por los futuros profesores.

Finalmente, en el conjunto datos obtenidos en las entrevistas, identificamos dos tendencias en el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción manifestado por los sujetos participantes en el estudio.

La primera de ellas es una tendencia procedimental o técnica (S6, S10 y S11) en la que el conocimiento manifestado hace hincapié en llevar a cabo procedimientos, procesos o modos de actuación. Esta tendencia agrupa particularmente a los participantes que plantearon expectativas de tipo procedimental como "dividir un objeto en partes iguales" o "dominar las operaciones con fracciones" y que, con respecto a las limitaciones, identificaron errores técnicos o dificultades asociadas a los procesos propios de la actividad matemática, principalmente relativas a las operaciones con fracciones como "al sumar fracciones, sumar los denominadores", "en la colocación de las fracciones a la hora de restar". En las tareas, dos de estos tres participantes plantearon problemas con el contexto de Ru, y en las valoraciones a los contextos, estos sujetos otorgaron puntuaciones bajas a los contextos Rep y Um en ambas magnitudes.

En la segunda de las tendencias, la conceptual (S5, S7 y S9), el conocimiento sobre el aprendizaje manifestado pone el énfasis en la comprensión funcional de las fracciones y sus relaciones. Esta tendencia está ejemplificada por los sujetos que enunciaron expectativas de tipo aplicado o conceptual como "aprender la utilidad de las fracciones" o "aprender las fracciones a partir de la división de una cuerda" y dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticas y al desarrollo cognitivo del alumno. Además, al contrario de lo que ocurre en la tendencia procedimental, dos de estos sujetos enunciaron tareas con el contexto de Rep y valoraron de forma negativa el contexto Ru en las dos magnitudes.

Por último, cabe destacar el caso del sujeto S4, por presentar respuestas distantes a las dos tendencias anteriores. Su expectativa planteada ("aprender fracciones") y su limitación relativa a ausencia de conocimiento)"que no sepa resolverlo") nos muestran un conocimiento sobre el aprendizaje de las fracciones de tipo generalista y superficial.

CAPÍTULO 9

CONCLUSIONES

El trabajo de investigación que realizamos se centró en el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido que, sobre el concepto de fracción basado en relación parte-todo, manifiestan los estudiantes universitarios del Grado de Educación Primaria. La necesidad de un proceso sistemático para el diseño de la investigación, el análisis de sus datos y la interpretación de sus resultados nos llevó a seleccionar el método del análisis didáctico como una herramienta potente para realizar dichas funciones. La primera de sus dimensiones, el análisis conceptual, permitió realizar una reflexión teórica previa al estudio empírico con la que profundizamos en los conceptos claves que constituyen la relación parte-todo, así como las diversas interpretaciones a las que responde en distintas disciplinas, incluida la propia matemática. Posteriormente, para estudiar el conocimiento profesional de un grupo de estudiantes universitarios del grado de Educación Primaria nos basamos en las dimensiones del análisis didáctico (análisis del contenido de las matemáticas escolares, análisis cognitivo y análisis de instrucción) y sus componentes como sistema de categorías a través de los cuales estudiar los conocimientos de contenido y didáctico que manifestaron estos estudiantes de magisterio. Con este marco, organizamos los datos empíricos obtenidos en nuestro trabajo de campo y los interpretamos.

En este capítulo final, presentamos las conclusiones que se derivan del desarrollo de esta investigación. Iniciamos su exposición atendiendo a la consecución de los objetivos propuestos en el planteamiento del problema (capítulo 1) y describimos simultáneamente sus principales aportaciones. Seguidamente, reflexionamos y aportamos algunas conclusiones relativas al método utilizado. Finalmente, presentamos las limitaciones de este estudio y recogemos las líneas abiertas que constituyen perspectivas de continuación de esta investigación.

9.1. RECAPITULACIÓN DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación fue un estudio con fundamentación teórica y desarrollo empírico en el que abordamos algunas cuestiones sobre el conocimiento de los maestros en formación inicial, en relación con un contenido específico: la relación parte-todo como estructura básica que cimenta las fracciones.

Como expusimos en el capítulo 1, articulamos nuestro problema de investigación en cuatro preguntas. Llegamos al enunciado de estas preguntas después de estudiar el conocimiento profesional de los futuros maestros de primaria relativo a una estructura matemática relevante como es la de fracción, particularmente su surgimiento desde la relación parte-todo. A continuación, enunciamos las cuatro cuestiones.

1. ¿Cuál es el fundamento y cuáles son las posibles interpretaciones que sustentan la relación parte-todo en distintas disciplinas y, particularmente, en las matemáticas escolares?

2. ¿Qué significados de la relación parte-todo expresan el conocimiento sobre fracciones de los maestros en formación inicial y cómo se describen en términos de la estructura conceptual, las representaciones y los contextos y modos de uso de dicha relación?
3. ¿Qué conocimiento didáctico sobre la enseñanza de la relación parte-todo manifiestan los maestros en formación cuando planifican una propuesta sobre la enseñanza del concepto de fracción?
4. ¿Qué conocimiento didáctico sobre el aprendizaje escolar manifiestan los maestros en formación cuando diseñan tareas, enuncian expectativas y detectan limitaciones de aprendizaje sobre el concepto de fracción basado en la relación parte-todo?

En consecuencia, nos propusimos los siguientes tres objetivos generales en nuestra investigación.

OG1. Profundizar en los usos e interpretaciones de la relación parte-todo a través de su análisis conceptual para determinar con precisión el alcance del concepto objeto de estudio.

OG2. Identificar, describir y analizar el conocimiento matemático escolar sobre fracciones que manifiesta un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria basado en la relación parte-todo, en términos de su estructura conceptual, sus sistemas de representación y los contextos y usos.

OG3. Identificar, describir y analizar el conocimiento didáctico que expresa un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria sobre cómo planificar la enseñanza de las fracciones basada en la relación parte-todo.

OG4. Identificar, describir y analizar el conocimiento didáctico que manifiestan un grupo de estudiantes del grado de Educación Primaria sobre el aprendizaje escolar de las fracciones basado en la relación parte-todo.

Abordamos el tratamiento del primer objetivo general a través de un estudio teórico que presentamos en el capítulo 5. En ese capítulo, profundizamos en la noción central del trabajo, la relación parte-todo, a través del análisis conceptual, como primer componente del análisis didáctico.

Abordamos el segundo, tercer y cuarto objetivo a través de un estudio empírico que nos posibilitó estudiar ambos tipos de conocimiento: el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido de los participantes. Presentamos este estudio empírico en los capítulos 6, 7 y 8 de esta memoria.

En el capítulo 6, contemplamos el segundo objetivo general de la investigación, centrado en el estudio del conocimiento matemático escolar del concepto de fracción como relación parte-todo, basado en las tres dimensiones (estructura conceptual, sistemas de representación y contextos y modos de uso) del análisis del contenido de las matemáticas escolares.

Los capítulos 7 y 8 están centrados en el conocimiento didáctico de los maestros en formación. Particularmente, en el capítulo 7, abordamos el tercer objetivo a partir de un estudio sobre el conocimiento de la enseñanza de las fracciones basado en la relación parte-todo que se fundamenta en el análisis de instrucción.

Finalmente, abordamos el cuarto objetivo en el capítulo 8 de esta memoria. Este capítulo contempla un estudio sobre el conocimiento didáctico, centrado fundamentalmente en el aprendizaje de las fracciones a partir de las componentes del análisis cognitivo: diseño de tareas, expectativas y limitaciones de aprendizaje.

9.2. CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL PRIMER OBJETIVO

Abordamos el primer objetivo general a través de un estudio teórico, que presentamos en el capítulo 5. Consideramos necesario realizarlo para esclarecer y profundizar en el tópico en el que centramos este estudio: la relación parte-todo como fundamento de las fracciones.

El análisis conceptual de la relación parte-todo es una indagación teórica, previa al estudio empírico. Esta herramienta nos permitió clarificar la complejidad del tópico dentro de diversas disciplinas y, particularmente, en las matemáticas escolares. Consideramos que este estudio teórico, en el que organizamos las nociones básicas de la relación parte-todo y describimos su naturaleza y sus diversas interpretaciones, constituye un aporte original e importante de la investigación.

La indagación que realizamos mostró la relevancia de la relación parte-todo como objeto que forma parte de los fundamentos de la matemática y de gran parte de sus conceptos. Desde los inicios de la filosofía en la antigua Grecia, el estudio de la relación parte-todo ha sido y continúa siendo un tema recurrente a lo largo de la historia. La mereología, como estudio de las relaciones entre la parte y el todo, proporciona una teoría formal de esa relación. Los problemas que se plantean en torno a esta teoría afectan a diversos campos científicos, como la antropología, informática, la lingüística y particularmente en las matemáticas, donde la relación parte-todo ha jugado un papel fundamental en su desarrollo (Bell, 2004).

Dentro de las matemáticas escolares, la relación parte-todo es uno de los pilares a partir del cual construimos conocimientos aritméticos (Resnick, 1990) y damos sentido a un buen número de objetos matemáticos. La relación parte-todo conlleva considerar que los números naturales están constituidos por dos o más partes y su dominio es uno de los mayores logros a alcanzar con los niños en sus primeros años de escolaridad.

La relación parte todo da sustento a las estructuras aditiva y multiplicativa, ya que describe los fenómenos básicos para cuya interpretación se originan la estructura aditiva (agregar, reunir, segregar, separar) y la estructura multiplicativa (reiterar o hacer partes iguales).

Diversos investigadores han considerado esta relación como base del conocimiento de las fracciones y, por consiguiente, de los números racionales (Behr et at. 1983; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976). Las fracciones surgen en una relación multiplicativa parte-todo como el modo de expresar la relación entre una parte y el todo del que procede. De este modo, los niños comienzan el aprendizaje de las fracciones en términos de las partes que componen un todo (Freudenthal, 1983; Kieren, 1993; Nersher, 1985; Steffe y Olive, 2010). Nuestros resultados inciden y coinciden con estas líneas de reflexión sobre los fundamentos de la aritmética escolar y de la relación parte-todo multiplicativa.

9.3 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL SEGUNDO OBJETIVO

Abordamos el segundo objetivo en la primera fase del estudio empírico (capítulo 6) en el que recogimos una extensa cantidad de información acerca del conocimiento de los estudiantes universitarios del grado en Educación Primaria sobre los contenidos matemáticos asociados a la estructura conceptual, sistemas de representación y contextos del concepto de fracción como relación parte-todo. Este análisis del conocimiento del contenido, incluido en el capítulo 6, tiene implicaciones prácticas en la formación inicial de maestros de primaria.

Como hemos podido observar y documentar, los estudiantes de magisterio estaban familiarizados con la interpretación parte-todo de las fracciones, pero gran parte de ellos dieron explicaciones que contienen sólo algunos de los elementos que componen la estructura conceptual (el todo, las partes, la igualdad de las partes y la relación de una de las partes con el todo), conceptos considerados fundamentales para el desarrollo del conocimiento sobre fracciones en niños (Kieren, 1993). Solo un pequeño número de participantes tuvieron en cuenta todos estos elementos en una descripción textual sobre la relación. Cabe pues plantearse la necesidad de que en los cursos de formación inicial de maestros se trabaje e incida en la explicitación de todos los conceptos y razonamientos que intervienen en la estructura conceptual correspondiente a la interpretación parte-todo de las fracciones, de manera que estos futuros profesores sean conscientes de sus elementos y relaciones. Una estructura conceptual incompleta de la relación parte-todo conlleva dificultades posteriores a su empleo para dotar de significado a otros conceptos asociados con fracciones, como es el caso de la interpretación de la multiplicación de fracciones como fracción de fracción.

Estos resultados difieren en algunos aspectos a los obtenidos en estudios anteriores (Lo y Grant, 2012; Domoney, 2001). El estudio de Lo y Grant (2012) reveló que los maestros en formación conceptualizaron a/b como "a partes pertenecientes a b partes" o "a veces 1/b, donde 1/b se obtiene al dividir el todo en b partes iguales". En el estudio de Lo y Grant (2012), los participantes asociaron una parte con la fracción, pero no consideraron la fracción como la relación cuantitativa de la parte con respecto del total. El mayor contraste de nuestros datos con estos autores con fue debido a que los participantes de estudios anteriores no incluyeron la igualdad de las partes en sus respuestas. El origen de esta diferencia puede estar en el hecho de que nuestra pregunta se hizo sobre la acción de "fraccionar" y no sobre el término "fracción".

Los resultados de la segunda pregunta, centrada en los sistemas de representación, mostraron que los participantes usaron círculos o cuadriláteros divididos en partes iguales para representar el concepto, pero no consideraron otras representaciones, como las discretas o lineales. El hecho de que la gran mayoría de los participantes en el estudio se inclinara por representar la relación parte-todo de las fracciones mediante áreas de figuras geométricas muestra la escasa variedad de signos y símbolos utilizados. Esta forma de ilustrar parece muy arraigada en los estudiantes para maestro. Sería muy conveniente que durante la formación inicial reflexionaran sobre otras formas de representación (lineal y discreta) y sobre sus ventajas e inconvenientes frente a la que consideraron como primordial: la de área. Hay que tener en cuenta que, si bien la representación mediante una figura plana es directa, visual e intuitiva, conforme se avanza en el estudio de la matemática, la representación continuo-lineal toma predominio y se afianza con el estudio de la recta numérica.

En cuanto a los resultados sobre los contextos y modos de uso, las situaciones o problemas inventados por los sujetos hicieron emerger una pluralidad de contextos asociados a la relación parte-todo. Los contextos más comunes presentes en las respuestas fueron (a) hallar la parte, (b) reparto, y (c) hallar la parte complementaria. De manera similar a los resultados obtenidos por Wright (2008), estos contextos no incluyeron interpretaciones como la razón y la tasa, que se consideran fundamentales por diversos especialistas en educación matemática (Berh et al., 1997). El análisis de los contextos puso de manifiesto el hecho sorprendente e inesperado de que los participantes asociaron los contextos constituidos por objetos discretos con la estructura aditiva y los continuos (área y longitud) con las fracciones. Más que por su naturaleza, pensamos que esta dualidad implícita en los alumnos (discreto-aditivo, continuo-fraccionario) es producto de las experiencias y prácticas educativas vividas por los estudiantes de magisterio como estudiantes en su formación previa en matemáticas. Esta vinculación debería desvelarse durante la formación inicial de los maestro con intención de que sean conscientes de esta restricción de su pensamiento.

El análisis de los contextos también permitió observar la preferencia de los estudiantes por un pensamiento directo en el cual, a partir de un todo, se obtienen sus partes, frente a un pensamiento inverso que reconstruye el todo desde las partes, aún en el caso de ilustraciones que parecían favorecer la aparición de este último. Es conveniente que los estudiantes de magisterio realicen prácticas en las que trabajen con la reconstrucción de un todo desde una de sus partes fraccionarias.

A partir del esquema del modelo teórico desarrollado por Behr et al. (1983), se infiere que las interpretaciones medida y cociente-reparto de las fracciones se organizan de acuerdo con la relación parte-todo. Con base en los resultados obtenidos, consideramos que la estructura básica de estas dos interpretaciones procede de una totalidad dividida en partes iguales. Por ejemplo, el problema de medida implica un objeto o una parte cuya cantidad es menor que la unidad de medida considerada (el todo). Para ello, hay que relacionar la parte con el todo y determinar con qué frecuencia dicha parte está contenida en el todo. Las categorías de contextos identificados a partir de los resultados sobre contextos y modos de uso se corresponden con esta interpretación. Por ejemplo, en las categorías hallar la parte complementaria y hallar la parte usando una unidad de medida, la fracción representa la medida de la parte en relación con el todo, independiente del conteo.

Destacamos el haber detectado e identificado cuatro tipologías de respuestas en función del significado que los sujetos otorgan al concepto de fraccionar. Pensamos que el profesor de matemáticas debe incluir en su conocimiento didáctico los distintos significados que los estudiantes pueden asigna a los conceptos matemáticos. Los cuatro tipos de significado detectados serán útiles como marco de reflexión y discusión en grupo para los estudiantes de magisterio sobre el significado de la acción de fraccionar, y para la actividad que conlleva el aprendizaje de las fracciones.

Además, consideramos el cuestionario utilizado en esta primera fase como un aporte de la investigación. A través de una serie de preguntas sencillas nos acercamos a los significados de la relación parte-todo considerados por los sujetos al comenzar los estudios universitarios del Grado de Educación Primaria.

En relación con el análisis del contenido de las matemáticas escolares, consideramos que este análisis proporciona una oportunidad para mejorar la comprensión del conocimiento de los profesores en formación sobre ciertos aspectos y para explorar las relaciones establecidas, o su ausencia, entre sus elementos. Los resultados muestran que los sujetos que participaron en este estudio al inicio de sus estudios universitarios consideraron diferentes significados para el concepto de fraccionar con base en la relación parte-todo multiplicativa y mostraron diferentes niveles de dominio en el uso de esta relación.

Una serie de implicaciones para los programas de formación de profesores de Educación Primaria surgen de estos resultados. La limitada comprensión en alguna de las tres componentes del significado del concepto de fracción muestra la necesidad de profundizar en esos aspectos ya que son fundamentales para su enseñanza y aprendizaje. Sostenemos que una comprensión más profunda de estos aspectos proporcionará un camino para mejorar el conocimiento de los estudiantes universitarios para maestros de Primaria. Como parte de la formación docente, los cursos de didáctica de la matemática deben trabajar con aspectos básicos de los contenidos de las matemáticas escolares, como es el caso de las fracciones, considerando diferentes aproximaciones, además de la relación parte-todo.

9.4. CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL TERCER OBJETIVO

Abordamos el tercer objetivo de la investigación a través de una segunda fase empírica del estudio, que describimos en el capítulo 7. En esta fase, caracterizamos ciertos componentes del conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva del análisis de instrucción, que un grupo de maestros en formación manifestó cuando se les propuso elaborar una explicación con la cual introducir el concepto de fracción en un aula de primaria.

De la información que recogimos, destacamos que, sin ninguna dificultad, los sujetos asumieron el papel de docentes y expresaron su conocimiento didáctico del contenido a través de sus respuestas. Además, manifestaron un conocimiento didáctico del contenido coherente en sus explicaciones, en las que destacó la diversidad de modos en que los participantes reconstruyeron, adecuaron o reestructuraron el contenido para hacerlo comprensible a los escolares. No obstante destacaron carencias en la planificación de la secuenciación de los contenidos atendiendo a un orden lógico. Por ejemplo, encontramos que en un 16% de las respuestas se añadió el símbolo de fracción entera (4/4) antes de introducir la fracción unitaria como relación entre una parte y el todo.

Las categorías de respuestas encontradas en las explicaciones para las componentes relativas a los modos de introducir los contenidos y el uso de representaciones las consideramos como un aporte de esta investigación. Estas categorías muestran distintos perfiles de los participantes en cada una de esas componentes.

En la primera de ellas, modos de introducir los contenidos, encontramos 3 perfiles. El primero corresponde a aquellos participantes que no incluyeron situaciones ni problemas contextualizados que pudieran ayudar en la comprensión de los contenidos (modo instrumental). El segundo perfil corresponde a aquellos estudiantes de magisterio que abordaron el contenido a través de situaciones contextualizadas y presentaron demandas cognitivas al escolar, en su mayor parte a través de la resolución de problemas (modo funcional). El tercer perfil, al igual que en el caso anterior, introdujo los contenidos a través de un texto que modelaba una situación real pero no incluyó demandas cognitivas (modo descriptivo).

En la segunda de las componentes, uso de representaciones, también encontramos tres perfiles de respuestas. En sus explicaciones sobre cómo introducir las fracciones a los escolares, los participantes otorgaron distintos usos a las ilustraciones dadas en la tarea. Un primer uso (ilustrativo) incluye las imágenes dadas únicamente como acompañamiento al texto. Así, la explicación redactada era suficientemente completa para que fuera comprensible, incluso si se suprimieran las imágenes. Un segundo uso (explicativo), la serie de imágenes forman parte de la explicación por lo cual, si éstas se suprimieran, el texto dejaría de tener sentido, ya que por sí sólo no tiene validez explicativa. Estas son respuestas escuetas, con escaso texto que no presentan ningún dato matemático; simplemente aportan expresiones introductorias o frases que enlazan unas imágenes con otras. Por último, en un tercer uso (aclarativo), las imágenes forman parte de la explicación y la mejoraron. Los textos presentan información matemática pero, por sí solos, no aportan sentido ni dan forma completa a la explicación. La particularidad de este uso es que las combinaciones de texto e imágenes constituyen las explicaciones, que las ilustraciones ejemplifican, dan más detalles, aclaran o muestran nuevos contenidos.

Un logro de este fase del estudio empírico radicó en que, a través de un instrumento aparentemente sencillo, nos aproximamos a este tipo de conocimiento salvando las dificultades de otros estudios (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Li y Kulm, 2008), en los que las carencias en el conocimiento del contenido sobre fracciones incidió en sus resultados. Nuestro modo de formular la actividad y el uso de ilustraciones a través de tarjetas, dio lugar a una mayor riqueza de respuestas y resultados. Además, el contexto de la asignatura hizo que la dinámica de trabajo estuviese orientada hacia la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

9.5. CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL CUARTO OBJETIVO

Abordamos el cuarto objetivo de este trabajo en la tercera y última fase del estudio empírico. Con base en las componentes del análisis cognitivo, la tercera fase consistió en un estudio de casos en el que se profundizó en algunos aspectos que caracterizan el conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del concepto de fracción como relación parte-todo.

Nuestra manera de abordar esta fase, al hacer reflexionar a los participantes sobre la relación parte-todo a través de los contextos considerados y expresados por ellos mismos, dio paso al estudio del conocimiento de las componentes del análisis cognitivo. Este estudio hizo posible elucidar aspectos básicos del conocimiento didáctico de manera natural para los participantes. Particularmente, en esta fase nos centramos en dos aspectos. El primero de ellos se focalizó en los contextos o modos de uso escogidos por los participantes para iniciar la enseñanza del concepto de fracción. El segundo foco se centró en el diseño de tareas, el enunciado de expectativas de aprendizaje y la identificación de las limitaciones sobre el concepto de fracción, dado el papel fundamental que juegan estas componentes en la planificación de la enseñanza (Lupiáñez, 2008). En ambos casos, obtuvimos información relevante sobre el conocimiento didáctico de los participantes.

Como balance de los resultados sobre las valoraciones de los contextos de la relación parte-todo, constatamos que el contexto mejor valorado fue hallar la parte complementaria (Hp), seguido por hallar la parte usando una unidad de medida (Um); el peor valorado fue reconstruir la unidad (Ru), mientras que los contextos hallar la parte (Hp) y repartir (Rp) fueron valorados de modo dispar según qué magnitud se considerase. Repartir un objeto de dos dimensiones se valora como más adecuado que repartir un objeto de un sola dimensión. Por el contrario, hallar la parte parece más sencillo con objetos longitudinales que con objetos de dos dimensiones. El apoyo mediante una unidad de medida auxiliar (Um) también recibió valoración aceptable. Este es un caso que destaca sobre el resto, ya que presenta opiniones dispares tanto cuando se consideran distintas magnitudes, como en el caso de una misma magnitud. Es decir, hay grupos de sujetos que lo consideran el menos adecuado para la enseñanza por incluir conceptos nuevos (unidades de medida), mientras que otros sujetos opinaron que estos conceptos adicionales son una ayuda en la enseñanza. Estas opiniones contrapuestas se acentuaron entre las distintas magnitudes; de ahí la importancia de la complementariedad de técnicas de recogida de datos, fichas y entrevistas, para un abordaje más profundo en la obtención de las valoraciones de los sujetos.

La primera parte de la entrevista, en la que los participantes valoraron cinco sentidos simultáneamente para las magnitudes superficie y longitud, llevó a observar que los cinco contextos no fueron igualmente valorados por los participantes, y que la valoración otorgada dependió de la magnitud, de tal manera que contextos muy bien valorados para una de estas magnitudes pueden estar mal valorados para otra. Las razones que dieron los participantes para determinar su mejor o peor valoración a los contextos tuvo que ver con la posibilidad de realizar una representación visual, que reconocieran con actividad típica escolar, que consistiera o no en un contenido ya trabajado por el escolar, o bien que fuera una actividad de argumentación inversa con respecto a las actividades usuales para introducir las fracciones. Esta última razón, de carácter lógico-matemático, la asociaron al contexto que valoraron como menos apropiado o al que dieron menor valoración. Las razones ligadas al desarrollo curricular de los contenidos ocupó una franja intermedia de valoración de los distintos sentidos. Las razones que aportaron los participantes en la entrevista para valorar muy positivamente un contexto son justificaciones psicológicas, referidas a las posibilidades de visualización de los participantes respecto al aprendizaje del concepto.

Entre los resultados obtenidos sobre diseño de tareas en la segunda parte de la entrevista, destacamos que:

- los participantes propusieron en todos los casos enunciados de problemas cuando se les pidió plantear de manera espontánea una tarea sobre fracciones.
- los contextos presentes en tales enunciados fueron variados;
- los contextos no coincidieron con los que valorados previamente como más adecuados para la enseñanza de las fracciones.

Hemos detectado en las respuestas sobre el diseño de tareas durante las entrevistas, que los participantes no diferencian entre los distintos contextos de la interpretación parte-todo de las fracciones. En función de la demanda cognitiva de la tarea que proponemos, seleccionan un contexto u otro. Diseñar una tarea escolar no es fácil para los estudiantes de magisterio, por lo que emplean sus recursos en redactar la tarea, descuidando si el contexto es o no el más adecuado. Consideramos que estas contradicciones muestran una falta de conexión entre el conocimiento sobre la enseñanza, el aprendizaje y su puesta en práctica.

Otro aspecto estudiado, el enunciado de las expectativas sobre el aprendizaje escolar es, por lo general, acertado; la mayoría de los sujetos fueron capaces de enunciar objetivos específicos al tema. Estas expectativas hicieron referencia a contenidos procedimentales y conceptuales, a aspectos como dividir diferentes tipos de objetos y a la utilidad de las fracciones. Estas capacidades se reconocen en las tareas realizadas por este grupo de profesores en formación inicial.

En el estudio de las limitaciones de aprendizaje los sujetos fueron capaces de ejemplificar de manera espontánea tareas adecuadas para el aprendizaje de las fracciones redactadas en forma de problemas. No obstante mostraron escasa o nula capacidad para identificar posibles errores en los que pudieran incurrir los escolares con tales tareas y en vincular justificadamente los errores con dificultades que pudieran originarlos. De los 11 sujetos, sólo 5 identificaron errores, recurriendo principalmente a errores técnicos referidos a fallos en los algoritmos en la suma y resta de fracciones.

Los estudiantes de magisterio participantes en el estudio no han desarrollado esta capacidad durante su formación. Sería pertinente que los responsables de los programas para formación de maestros incentivasen este aspecto en el desarrollo de la competencia profesional de los futuros profesores.

Finalmente, de manera global, en las respuestas analizadas identificamos dos tendencias en el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción manifestado por los sujetos participantes en el estudio.

La primera es una tendencia procedimental o técnica en la que el conocimiento manifestado hace hincapié en llevar a cabo procedimientos, procesos o modos de actuación. Particularmente, esta tendencia agrupa a los participantes que plantearon expectativas de tipo procedimental como “dividir un objeto en partes iguales" o "dominar las operaciones con fracciones" y que con respecto a las limitaciones, identificaron errores técnicos o dificultades asociadas a los procesos propios de la actividad matemática, principalmente relativas a las operaciones con fracciones.

En la segunda de las tendencias, la conceptual, el conocimiento sobre el aprendizaje manifestado pone el énfasis en la comprensión funcional de las fracciones y sus relaciones. Esta tendencia está ejemplificada por aquellos sujetos que enunciaron expectativas de tipo aplicado o conceptual como "aprender la utilidad de las fracciones" o "aprender las fracciones a partir de la división de una cuerda" y dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y al desarrollo cognitivo del alumno.

9.6. CONCLUSIONES SOBRE EL MÉTODO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Nuestro trabajo se encuentra imbricado en el método del análisis didáctico desarrollado dentro del Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico* (http://fqm193.ugr.es/), de la Universidad de Granada. El análisis didáctico, como un procedimiento sistemático, nos guió en el proceso de análisis durante la planificación, organización de datos y obtención de resultados en las distintas fases de la investigación. Así, en este trabajo se muestra el análisis didáctico como una metodología útil para evidenciar y describir el conocimiento del maestro en formación inicial sobre un tema concreto de las matemáticas escolares.

El análisis didáctico y sus componentes han sido utilizados en una variedad de investigaciones en Educación Matemática con distintas funciones (Picado, 2012; Caraballo, 2014; Valverde, 2012; Rojas, 2014). Sin embargo, no todas las componentes han recibido la misma atención dentro del ámbito de la investigación en educación matemática. El análisis del contenido de las matemáticas escolares ha obtenido especial relevancia como herramienta metodológica en varios estudios para identificar la diversidad de significados del conocimiento de las matemáticas escolares (Fernández-Plaza, 2015; Martín-Fernández, 2013; Ortiz, 2002; Vílchez, 2014).

Un logro de esta investigación es la utilización de las componentes del análisis didáctico para el estudio del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico de los maestros en formación inicial. En este trabajo avanzamos sobre el estudio del conocimiento de las matemáticas escolares mediante el análisis del contenido, ya que profundizamos en su estudio a través del resto de componentes del análisis didáctico. Así, contribuimos a poner de manifiesto su potencialidad como herramienta para abordar el conocimiento de los estudiantes universitarios del grado de Educación Primaria.

Particularmente, destacamos la utilidad dentro de este trabajo de cada una de las componentes del análisis didáctico utilizadas: análisis conceptual, análisis del contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo.

La utilidad del análisis conceptual en Educación Matemática ya se puso de manifiesto en temas como la noción de modelo (Rico, 2001), número negativo (Maz, 2005) o representación (Rico, 2009). Con el desarrollo del análisis conceptual de la relación parte-todo como parte fundamental de este trabajo, recogida en el capítulo 5, contribuimos a mostrar su utilidad al inicio de una investigación en Educación Matemática.

Dado que el modelo del análisis didáctico incluye los tres tipos de conocimientos con los que trabajamos (conocimiento sobre el contenido matemático escolar, conocimiento sobre el aprendizaje o cognitivo, y conocimiento sobre la enseñanza o de instrucción), el análisis didáctico nos permitió planificar las distintas fases del estudio empírico con base en los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, que dieron lugar el diseño de tres fases en el estudio empírico.

En la primera fase del trabajo empírico, centrada en el estudio del conocimiento del contenido de los maestros en formación inicial, el análisis del contenido de las matemáticas escolares y sus tres dimensiones, basadas en el triángulo semántico (estructura conceptual, sistemas de representación y contextos o modos de uso), fundamentaron el diseño y construcción del cuestionario, con el que valoramos el alcance de los significados manifestados por los profesores en formación inicial. Recogemos el análisis de los datos y los resultados obtenidos en el capítulo 6 de este trabajo, el que presentamos el triángulo semántico y sus componentes como una herramienta eficaz para estudiar el conocimiento del contenido matemático escolar de los maestros en formación inicial.

La segunda fase del estudio empírico está centrada en el conocimiento sobre la enseñanza de la relación parte-todo. En esta fase, el análisis de instrucción nos permitió responder a la cuestión sobre cómo llevan a cabo la enseñanza de la relación parte-todo los maestros en formación inicial. La obtención y tratamiento de los datos, así como su interpretación mediante diversas herramientas, están basadas en el análisis de instrucción. Un logro de esta fase radica en que nos pudimos aproximar a este tipo de conocimiento fácilmente y de manera natural con maestros en formación inicial. Nuestro modo de formular la actividad y el uso de ilustraciones a través de tarjetas, dio lugar a una mayor riqueza de respuestas y resultados. El análisis e interpretación de los datos se encuentran en el capítulo 7 de este trabajo.

En la tercera fase del estudio empírico, centrada en el estudio del conocimiento sobre el aprendizaje, el análisis cognitivo permitió organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico. Sus dimensiones (diseño de tareas, expectativas y limitaciones del aprendizaje) fundamentaron el diseño y construcción de la entrevista y el análisis de las producciones.

El trabajo muestra que el análisis didáctico ofrece un marco metodológico que permite profundizar en distintos aspectos del conocimiento del maestro en formación inicial sobre un tema concreto de las matemáticas escolares.

9.7. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Realizamos la investigación que presentamos en este trabajo de tesis con rigor y minuciosidad. Nos guiamos por un análisis profundo y exhaustivo de los datos recogidos, lo que le confiere un alto grado de validez a las interpretaciones y a las conclusiones que producimos. No obstante, hay aspectos que limitaron el estudio. En este apartado, exponemos algunas de las limitaciones que, de manera general, se presentaron en el transcurso de esta investigación y, particularmente, señalamos limitaciones surgidas en cada una de las fases del estudio empírico.

En cada una de las fases, la muestra de sujetos seleccionada fue intencional. Participaron voluntariamente estudiantes universitarios del grado de Maestro de Educación Primaria, de la Facultad de Ciencias de la Educación y la Escuela Universitaria de Magisterio la Inmaculada, ambos centros pertenecientes a la Universidad de Granada. Abordamos nuestro trabajo desde un paradigma interpretativo, sin generalizar a otros contextos que no sean similares al que ofrece el marco de formación de estudiantes del grado de magisterio. Nuestros resultados están pues limitados a este colectivo singular de sujetos, cuyas peculiaridades llevan a afirmar que sus resultados no podrían generalizarse sin más a los estudiantes universitarios que se forman en el grado de matemáticas y que aspiran a formarse como profesores de matemáticas. Una réplica de este estudio con estudiantes del grado de matemáticas tendría interés y proporcionaría datos relevantes.

El que los sujetos de la primera fase no fueron los mismos que los sujetos de la segunda y tercera fase puede considerarse como otra limitación. Por supuesto, los sujetos responden a las exigencias mínimas comunes de ser estudiantes universitarios que cursan estudios para el grado de maestro, lo que garantiza la validez de las consideraciones realizadas, pero el hecho de ser un estudio en cierto modo transversal tiene ciertas limitaciones interpretativas. De haber sido los mismos sujetos quienes hubieran participado en los distintos estudios durante sus años de permanencia nos habría permitido abordar con mayor validez análisis globales que contemplasen los distintos componentes del conocimiento del profesor que analizamos y su interrelación.

En relación con las herramientas de recogida de datos, los instrumentos desarrollados a lo largo de las fases del estudio empírico se centran en la relación parte-todo, sin considerar otras interpretaciones de las fracciones. Nuestros instrumentos contienen ítems que aparentemente pueden parecer simples ya que su intencionalidad es profundizar en el fundamento de las fracciones a través de la relación parte-todo. El énfasis de las tareas del cuestionario 1, aplicado en la primera fase, sobre la acción de fraccionar podría limitar la variedad de respuestas. Sin embargo, seleccionamos estas preguntas intencionadamente para centrarnos en los significados básicos de la relación parte-todo. De la misma manera, los instrumentos que desarrollamos en la segunda y tercera fases y nuestra interpretación se centraron en la enseñanza y aprendizaje de la introducción de las fracciones a partir de la relación parte-todo, ya que no pretendimos abarcar otros aspectos de las fracciones.

Dado que este trabajo se centra en el estudio del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido de los profesores en formación inicial, nos basamos en el método del análisis didáctico y sus cuatro primeras componentes, sin incluir la quinta y última de las componentes, el análisis de actuación o evaluativo. Obtuvimos los datos fueron durante el desarrollo de las clases de las asignaturas del grado de Educación Primaria del área de Didáctica de la Matemática. A pesar de que el análisis de actuación o evaluativo puede proporcionar información útil sobre el conocimiento profesional, no lo incluimos en este trabajo ya que, para llevar a cabo dicho análisis, es necesaria la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para mejorar la planificación y la práctica docente. Nuestros participantes no han puesto en práctica su trabajo planificación, por lo que no ha sido posible que valoren en qué medida se logran sus expectativas sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

9.8. LÍNEAS ABIERTAS

A partir del desarrollo de este trabajo, sus limitaciones y las restricciones que nos hemos auto-impuesto surgen una serie de actuaciones futuras, cuyo tratamiento consideramos adecuadas para futuras líneas de investigación. Especialmente, subrayamos las siguientes.

- Diseñar e implementar acciones de actuaciones concretas y puntuales en la formación de los estudiantes del grado de magisterio, derivadas del estudio que realizamos, y acomodarlas al sistema de formación que siguen estos estudiantes. Con ello pretendemos enriquecer el conocimiento didáctico del contenido de las matemáticas escolares que poseen los estudiantes de forma parcializada y a veces incompleta.
- Nuestro estudio se ciñó a la relación parte-todo como una de las interpretaciones que le dan significado a las fracciones, pero nos limitamos a interpretar esta relación en la fase de introducción del concepto de fracción. Las implicaciones que tiene la relación parte-todo en otras fases de aprendizaje de las fracciones, como puede ser la equivalencia de fracciones, las operaciones con fracciones o el orden, es una cuestión que dejamos cómo problema a investigar.
- En la línea del análisis didáctico dentro del ámbito de la investigación, consideramos que es necesario continuar desarrollando la utilidad del análisis didáctico para el estudio del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico en torno a sus cinco componentes:

análisis conceptual, análisis del contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación o evaluativo, tanto en el ámbito de formación de profesores de secundaria, como de primaria. Especialmente, el análisis actuación o evaluativo ha sido la componente que menos atención ha recibido dentro del ámbito de la investigación en educación matemática. Indagar nuevas posibilidades o variantes de aplicación del análisis didáctico como metodología de investigación es una perspectiva de futuro de naturaleza metodológica que es importante abordar. Tal como se ha aplicado en este estudio, el análisis didáctico muestra un camino a seguir en las investigaciones con otros conceptos matemáticos, pero no es descartable su uso en nuevos contextos tales como el Prácticum en la formación de profesores.

- Trabajar con otro colectivos constituye una posible línea de actuación. Los profesores de matemáticas de educación secundaria se enfrentan, o tienen entre sus funciones como docentes, la enseñanza de las fracciones. Por ello, una opción de futuro es replicar este estudio con los estudiantes universitarios del grado de Matemáticas. Otro tipo de sujetos con los que se debería replicar este estudio son los estudiantes del grado de maestro de la especialidad de infantil. En este nivel de estudios, se subraya la relación parte-todo como un concepto pre-numérico que debe formar parte del conocimiento didáctico del profesor. Puesto que en este nivel se dan las bases para los primeros conceptos numéricos, deberíamos tener una previsión lo más precisa posible del conocimiento que los estudiantes universitarios del grado de infantil tienen de la relación parte-todo.

- Este trabajo se centra en la relación parte-todo como fundamento de las fracciones. A pesar de ser un concepto básico de la aritmética escolar, encontramos ausencias en el conocimiento manifestado por los sujetos. Indagar en estudios longitudinales la interrelación de los distintos tipos de conocimiento de los estudiantes del grado de magisterio aportaría un retrato más integrado del que hemos obtenido en nuestra investigación.

- Como ya señalamos en el apartado sobre las limitaciones del estudio, el estudio de casos desarrollado en la tercera fase nos permitió profundizar en ciertos aspectos del conocimiento didáctico de los participantes y además nos proporcionó evidencias de la existencia de perfiles (conceptual y procedimental) en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Consideramos necesario continuar profundizando en estos perfiles tanto en el tópico de fracción como en otros tópicos de las matemáticas escolares.
- En relación con el estudio del conocimiento didáctico, resaltamos que un logro de este trabajo fue el diseño de instrumentos apropiados para su estudio dentro del área de las fracciones. Debido a la dificultades del diseño y elección de instrumentos adecuados para el estudio del conocimiento didáctico del contenido (D'Ambrosio y Mendoça, 1992; Domoney, 2001; Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014; Marks, 1990), consideramos que los instrumentos que diseñamos en esta investigación constituyen una base inicial sobre la cual construir un nuevos instrumentos para el estudio del conocimiento didáctico centrado en otras nociones matemáticas.

REFERENCIAS

A

Adjiage, R. y Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 65*(2), 149-175.

Anderson, E. S. (1978). Lexical universals of body part terminology. En C. H. Ferguson, J. H. Greenberg y E. A. Moravscik (Eds.), *Universals of human language* (pp. 335-368). Stanford: Stanford University Press.

B

Ball, D. (1990). Preservice elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144.

Ball, D. (1993). Halves, pieces and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. En T. P. Carpenter, E. Fennema and T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 157-195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Beegle, E. (1968). Curriculum research in mathematics. En H. Klausmeier y G. O'Hern (red.), *Research and Development toward the Improvement of Education* (44-48). Madisom, WI: Dembar Educational Research Services.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis - Emphasis on the Operator Construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1997). Conceptual Units Analysis of Preservice Elementary School Teachers' Strategies on a Rational Number as Operator Task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 48-69.

Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational number concept. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York: Academy Press.

Bell, J. L. (2004). Whole and part in mathematics. *Axiomathes, 14*, 285-294.

Biederman, I. (1987). Recognition by components: a theory of human image understanding. *Psychological Review, 94*(2), 115-147.

Bordron, J. F. (1991). Les objets en parties (esquisse d'ontologie matérielle). *Langages, 25*(103), 51-65.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D. y Agard, P. (1992). Learning to Teach Hard Mathematics: Do Novice Teachers and Their Instructors Give up Too Easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 194-222.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, *Educação e Matemática, 109*, 15-23.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knoweledge. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech: Klu

Brown, C. H. (1976). General principles of human anatomical partonomy and speculations on the growth of partonomic nomenclature. *American Ethnologist, 3*, 224-250.

C

Caraballo, R. (2014). Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas. Una experiencia con profesores. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. Á. y Flores, P. (2013). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (2976-2984). Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME*. Turkey.

Carrillo, J., Contreras, L. C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigacion en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada: Comares.

Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Eds.) (1993). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes* (pp. 7-44). New York: Academic Press.

Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Rev. Pensamiento Educativo, 39*(2), 119-135.

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno: Revista de Didáctica de las Matematicas*, 54, 31-40.

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2013). La relación parte-todo. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigacion en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. (pp. 85-92). Granada: Comares.

Castro-Rodríguez, E., Castro, E. y Torralbo, M. (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 141-160). Granada: Comares.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una didáctica escolar*. Madrid: Síntesis.

Castro-Rodríguez, E., Rico, L. y Gómez, P. (2013, July). *Meanings of fractions as demonstrated by future primary teachers in the initial phase of teacher education*. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12), Seoul, Korea.

Castro-Rodríguez, E., Rico. L. y Gómez, P. (2014). Planificación de la enseñanza del concepto de fracción por maestros en formación. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (p. 11-25). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Castro-Rodríguez, E., Rico. L. y Gómez, P. (2015). La enseñanza inicial del concepto de fracción por maestros en formación. *Contextos Educativos*, *18,* 9-23.

Charalambous, C. Y., Hill, H. C. y Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 441-463.

Charalambous, C. Y. y Pitta-Pantazzi, D. (2007). Drawing on theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Chick, H. L. (2003, Noviembre-Diciembre). *Pre-service teachers' explanations of two mathematical concepts.* Documento presentado en Annual Conference of the Australian Association for Research in Education, Auckland, New Zealand.

Climent, N. y Carrillo, J. (2002). Developing and researching profesional knowledge with primary teachers. En J. Novotná (Ed), *European Research in Mathematics Education II, Proceedings of the CERME 2*, 269-280. Praga: Charles University.

Cluff, J. J. (2005). Fraction multiplication and division image change in preservice elementary teachers. Unpublished dissertation, Brigham Young University.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7th ed.). London, UK: Routledge Falmer.

Colás, M. P. y Buendía, L. (1998). *Investigación Educativa*. Sevilla: Alfar.

Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 163-187

Cramer, K. y Lesh, R. (1988). Rationalnumberknowledge of preserviceelementaryeducationteachers. En M. Behr (Ed.), Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education (pp. 425-431). DeKalb, Il.: PME

Cramer, K., Post, T. R. y del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourthand fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 111-144.

Cruse, D. A. (1986). *Lexical semantics.* Cambridge: Cambridge University Press.

D

D'Ambrosio, B. S. y Mendonca-Campos, T. N. (1992). Pre-service teachers' representations of children's understanding of mathematical concepts: Conflicts and conflict resolution. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 213-230.

Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. En J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* Vol. 21, num. 3 (pp. 13-18). Southampton: BSRLM.

Dreher, A., Kuntze, S. y Winkel, K. (2014). Empirical study of a competence structure model regarding conversions of representations - the case of fractions. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 525-432). Vancouver, Canada: PME.

E

Eisenberg, T. (1977). Begle revisited: Teacher knowledge and student achievement in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*, 216-222.

Elia, I. y Spirou, E. (2006). How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *TMME, 3*(2), 256-272.

F

Farrugia, M. T. (2007). The use of a semiotic model to interpret meanings for *multiplication* and *division.* En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth CERME* (pp. 1200-1209). Larnaca: CERME.

Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York, NY: MacMillan.

Fernandez-Plaza, J. A. (2015). Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Feferman (1989). *The number systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.

Figueras, O. (1988). Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales. Unpublished dissertation, Cinvestav, Mexico.

Figueras, O., Filloy, E. y Valdemoros, M. (1986). Some Considerations on the Graphic Re- presentation of Fractions. En G. Lappan (Ed.), *Proceedings oJ the VIlI PME-NA*, East Lan sing, Michigan.

Fuller, (1996, Octubre). *Elementary Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Mathematics.* Documento presentado en Mid-Western Educational Research Association Conference, Chicago, Ilinois.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.

G

Gairín, J. M. (1998). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. Tesis Doctoral: Universidad de Zaragoza. España.

Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos, 4*, 137-159.

Gairín, J. M. (2003). Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. *Contextos educativos, 6-7*, 235-260.

Gerstl, P. y Pribbenow, S. (1995). Midwinters, end games, and bodyparts: a classification of part-whole relations. *International Journal of Human-Computer Studies, 43*(5-6), 865-889.

Goldin, G. A. y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Golding y B. Greer (Eds.), *Theories in mathematical learning* (pp. 397-430). Hillsdale: Erlbaum.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados de estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 99-114). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Grossman, P. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. New York: Teachers College Press.

Grossman, P.L., Wilson, S. M. y Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M.C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 23-36). New York: Pergamon.

H

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371- 406.

Hill. H.C. (2010). The nature and predictors of elementary teachers' Mathematical Knowledge for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 513-545.

Hoffman, D. D. y Richards, W. A. (1984). Parts of recognition. *Cognition, 18,* 65-96.

Husserl, E. (1900-1901/1985). *Investigaciones lógicas*. Madrid: Alianza.

I

Isiksal, M. y Cakiroglu, E. (2011) The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 213-230.

K

Kaput, J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale: LEA.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan Publishing.

Khoury, H. y Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations. *Educational Studies in Mathematics, 27*(2), 191-204.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. En T. E. Kieran (Ed.), *Recent Research on Number earning* (pp. 125-149). Columbus, Ohio: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. E. (1993, January). *The Learning of Fractions: Maturing in a Fraction*. Paper presented at the Conference Fraction Learning and Instruction, University of Georgia.

Kieren, T., Mason, R. and Pirie, S. (1992, June). *The Growth of Mathematical Understanding in a Constructivist Environment,* paper presented at the CSSE Meeting, P.E.I. Charlottetown.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Klein, R. y Tirosh, D. (1997). Teachers' pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers. En H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference* (pp. 144-152). Lathi: Finland.

Krings, H., Baumgartner, H. y Wild, C. (1979). *Conceptos fundamentales de filosofía*. Barcelona: Herder.

Kurt, G. y Cakiroglu, E. (2009). Middle grade students' performances in translating among representations of fractions: A Turkish perspective. *Learning and Individual Differences, 19*, 404-410.

L

Lacampagne, C., Post, T., Harel, G. y Behr, M. (1988). A model for the development of leadership and the assessment of mathematical and pedagogical knowledge of middle school teachers. En M. Behr, C. Lacampagne y M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the Ninth Annual conference of PME-NA* (pp. 418-425). DeKalb, IL: PME.

Lesniewski, S. (1927-1931/1992). On the foundations of mathematics. En S. J. Surma, J. T. Srzednicki, D. I. Barnett y V. F. Rickey (Eds.), *Collected Works*. Dordrecht: Kluwer.

Leonard, H. y Goodman, N. (1940). The calculus of individuals and its uses. *Journal of Symbolic Logic, 5*, 45-55.

Li, Y. y Kulm, G. (2008) Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction división. *ZDM, 40*, 833-843.

Linsell, C., Savell, J., Johnston, N., Bell, M., McAuslan, E. y Bell, J. (2007). *Early algebraic thinking: links to numeracy*. Wellington, New Zealand: Teaching and Learning Research Initiative.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 187-219). España: Pearson Prentice Hall.

Llinares, S., Sánchez, V. y García, M. (1994). Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación, 304*, 199-226.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

Lo, J. y Grant, T. (2012). Preservice elementary teachers' conceptions of fractional units. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th PME* (Vol. 3, pp. 169-176). Taipei: PME.

Lubinski, C. A., Fox, T. y Thomason, R. (1998); Learning to Make Sense of Division of Fractions: One K-8 Preservice Teachers Perspective. *School Science and Mathematics, 98*(5), 247-259.

Lupiáñez, J.L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico. La planificación desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 81-102). Granada: Comares.

Lyons, J. (1978). *Eléments de sémantique* (Durand, J., Trans.). París: Larousse.

M

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. En T. P. Carpenter, E. Fennema and T. A. Romberg (eds.), *RationalNumbers: An Integration of Research,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 85-106.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción. Instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 103-120). Granada: Comares.

Marks, R. (1990) Pedagogical Content Knowledge: From a Mathematical Case to a Modified Conception. *Journal of Teacher Education, 41*(3), 3-11.

Martín-Fernández, E. (2013). Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Estudio exploratorio. Trabajo fin de master. Universidad de Granada.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. (2014). Concepciones del seno y coseno puestas de manifiesto por estudiantes de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM.

Mayer, R.E. (1985). Mathematical ability. En R.J. Sternberg (ed.), *Human Abilities: An Information Processing Approach* (pp. 127–150). New York: Freeman.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España los siglos XVII y XIX.* Granada, España: Universidad de Granada.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2006). *Research in Education: A Conceptual Introduction*. New York: Longman.

Ministry of Education. (2003). *The number framework*. Wellington, New Zealand: Autor.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary student´s understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 341-368.

Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O. e Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 3-14.

Morgan, C. y Kynigos, C. (2014). Digital artefacts as representations: forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics, 85*(3), 357-379.

N

Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal, 45*(4), 1080-1110.

Nesher, P. (1985). *An outline for a tutorial on rational numbers*. (Unpublished manuscript)

O

Ojeda, A. M. (1999). Training and practice of teachers of probability: An epistemological stance. L. Bills (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (vol. 19, num. 2, pp. 55-60). St Martins, Lancaster: BSRLM.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 51-92). USA: NCTM & LEA.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación.* Universidad de Granada.

Osana, H. P. y Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *Journal of Mathematical Behavior, 30*, 333-352.

P

Park, J., Güçler, B. y McCrory, R. (2013). Teaching preservice teachers about fractions: Historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 455-479.

Philippou, G. y Christou, C. (1994). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference* (Vol. 4, pp. 33-40). Lisbon, Portugal: PME.

Peraita, H. y Malrieu, (1998). La relevancia de las "partes" en el sistema léxico-conceptual. Revisión de la relación conceptual "parte-todo" y "parte-de" en la actual psicología cognitiva y en la semántica léxica. *Estudios de Psicología*, *19*(2), 111-128.

Peterson, P. L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational Researcher, 17*(5), 5-14

Petrou, M. y Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. En T. Rowland, K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching Mathematics* (pp. 9-25). Londres: Springer.

Piaget, J. (1975). Introducción a la Epistemología Genética. El pensamiento matemático. Buenos Aires: Paidós.

Picado, M. E. (2012). El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892). Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Pinto, M. y Tall, D. (1996). Student teachers' conceptions of the rational number. En L. Puig y Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th PME* (Vol. 4, pp. 139-146). Valencia: PME.

Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 5-38.

Pitta-Pantazi, D., Gray, E. y Christou, C. (2004). Elementary school students' mental representations of fractions. En Høines, M.J y Fuglestad, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference* (Vol. 4, pp. 41-48). Bergen : PME.

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 223-261). New York: Routledge.

Ponte, J. P. y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação, 11*(2), 145- 163.

Post, T., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1988). Intermediate teachers knowledge of rational number concepts. En Fennema, et al. (Eds.), *Papers from First Wisconsin Symposium for Research on Teaching and Learning Mathematics* (pp. 194-219). Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.

R

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to learners' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Real Academia Española (2014). *Diccionario de la lengua española* (23 edición.). Madrid.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Resnick, L. B. (1990). Instruction and the cultivation of thinking. En N. J. Entwistle (Ed.), *Handbook of educational ideas and practices* (pp. 694-707). London: Routledge.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds), *Analysis de arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Rico, L. (1992). *Proyecto docente*. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1992). Evaluación del sistema educativo español: El caso de las matemáticas. *SUMA*, *10*, 15-24.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una Empresa Docente.

Rico, L. (Coord.) (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 179-194). Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (2003). El método del análisis didáctico. *UNION, 33*, 11-27.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 39-63.

Rico, L. (2013a). El método del análisis didáctico. *UNION, 33*, 11-27.

Rico, L. (2013b). Antecedentes del análisis didáctico en Educación Matemática. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 23-57). Granada: Comares.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid: Pirámide.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th PME* (Vol. 1, pp. 87-102). Valencia: PME.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En A. Beltrán y otros (Eds.). *Intervención Psicopedagógica y Currículum Escolar. Psicología.* (pp.153-182). Madrid: Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Antecedentes del análisis didáctico en Educación Matemática. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 23-57). Granada: Comares.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. (2014). Formación Inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación, 363*, 35-59.

Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Romero, I. (1997). La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción. Granada: Comares.

Rønning, F. (2012) Making sense of fractions in different contexts. En C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (vol. 32, num. 3, pp. 161-166). London: BSRLM.

Rowland, T. (2005). The Knowledge Quartet: A tool for developing mathematics teaching. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 69-81). Nicosia, Chipre: Cyprus Mathematical Society.

Rowland, T. (2007). Developing knowledge for teaching: A theoretical loop. En S. Close, D. Corcoran y T. Dooley (Eds.), *Proceedings of the 2nd National*

Conference on Research in Mathematics Education (pp. 14-27). Dublin, Irlanda: St. Patrick' College.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T. y Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching*. Londres: Springer.

Russell, B. (1903/1982). *Los Principios de la matemática*. Madrid: Espasa.

S

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Learning mathematics: Increasing the value of initial mathematical wealth. *Relime, 9*(1), pp. 225-245.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Santos, L. y Ponte, J. P. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante, 11*(2), 29-54.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Shulman, L. (1986). Those who understand, knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 5-25.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori.

Stake, R. E. (2010). Investigación Cualitativa: El estudio de cómo funcionan las cosas. New York: The Guilford Press

Steffe, L. P. (1993). Children's Mathematical Learning in Computer Microworlds. *Paper presented at the International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic*, University of Georgia, Athens, GA.

Steffe, L. P. (1999). *Individual constructive activity: an experimental analysis. Cybernetics and Human Knowing, 6*(1), 17-31.

Steffe, L. P. y Olive, J. (1990). Constructing fractions in computer microworlds. En G. Booker, P. Cobb y T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME* (pp. 59-66). Mexico: CONACYT.

Steffe, L. P. y Olive, J. (1993, January). *Children's construction of the rational numbers of arithmetic.* Paper presented at the International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic. University of Georgia, Athens.

Steffe L. P. y Olive J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 24-33.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics, 32*(1), 49-92.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 133-162.

Streefland, L. (1978). Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. *Educational Studies in Mathematics, 9*, 51-73.

Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

T

Tarski, A. (1940). On the calculus of relations. *The Journal of Symbolic Logic, 6,* 73-89.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley G., Peck, R., Bankov K., et al. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries (TEDS-M)*. Amsterdam: IEA.

Tichá, M. y Hŏspesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 133-143.

Tirosh, D. (2000). Enhancing preservice teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Tirosh, D. y Even, R. (January, 2007). *Teachers' Knowledge of Students' mathematical learning: An Examination of a commonly held assumption*. Seminar Series on Mathematical Knowledge in Teaching (First seminar). Cambridge, UK.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O. y Wilson, J. W. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers*. Versión digital recuperada el 26/03/2008 de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Tversky, B. y Hemenway, K. (1984). Objects, Parts and Categories. *Journal of Experimental Psychology: General 113*(2), 169-197.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers' understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *25*, 166-175.

V

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de Educación Primaria.* Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Didactical Phenomenology (Freudenthal). En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 174-176). Heidelberg: Springer.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). New York: Academy Press.

Vilchez, M. (2014). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O. respecto al concepto de numéro entero. Estudio exploratorio.* Trabajo fin de master. Universidad de Granada.

W

Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(3), 181-185.

Wright, K. B. (2008). *Assessing ec-4 preservice teachers' mathematics knowledge for teaching fractions concepts.* Unpublished dissertation, University of Texas.

EXECUTIVE SUMMARY

Meanings of fractions in school mathematics and initial teacher training

The research we present here focuses on the content knowledge and pedagogical content knowledge demonstrated by a group of university students in the undergraduate degree program in Primary Education at the University of Granada, knowledge concerning school students' notion of fraction based on the part-whole relation. The need to design a methodology for the different phases of the study consistent with its objectives led us to choose didactic analysis as the method for this process. Specifically, this study uses the first four stages of didactic analysis in different phases of the investigation. The following briefly describes the phases through which we develop this analysis.

First, we perform a conceptual analysis of the part-whole relationship. The first step required developing understanding of this relationship in greater depth and achieving precision and mastery in its use in fractions. Our theoretical study identified the meaning of this relationship in order to ground it and to establish different interpretations of it, including those of school students. The part-whole relation plays different roles in different disciplines, including mathematics itself. Among these, we highlight the role of interest for our study in mathematics education.

Second, we present the empirical study in three phases. In the first phase, we surveyed pre-service teachers using a questionnaire on the basic concepts of fractions. The questionnaire was designed to determine the teachers' knowledge of the conceptual structure, systems of representation, and contexts and ways of using fractions. From analysis of the data, we identified and characterized dif-

ferent meanings attributed to this concept by the pre-service teachers participating in the study.

The second phase focused on certain aspects of the pedagogical content knowledge. We focused on initial planning for the teaching of fractions based on the part-whole relationship. To do this, we designed an instrument composed of a series of vignettes to illustrate the part-whole relation. From these images, each one of the pre-service teachers wrote an appropriate narrative to initiate primary school students to the concept of fractions. Using some components from analysis of the instruction, we interpreted the knowledge about teaching fractions demonstrated by these pre-service teachers in their responses.

The third and final phase concludes the study of pedagogical content knowledge. Here, we focused on designing tasks for school students, proposing expectations, and detecting limitations in learning as components of their pedagogical content knowledge. From the responses obtained on teaching fractions, we developed a deeper cognitive analysis of how fractions are learned. The information was obtained through an interview involving a series of questions related to students' learning.

Figure 1 presents the outline of this process.

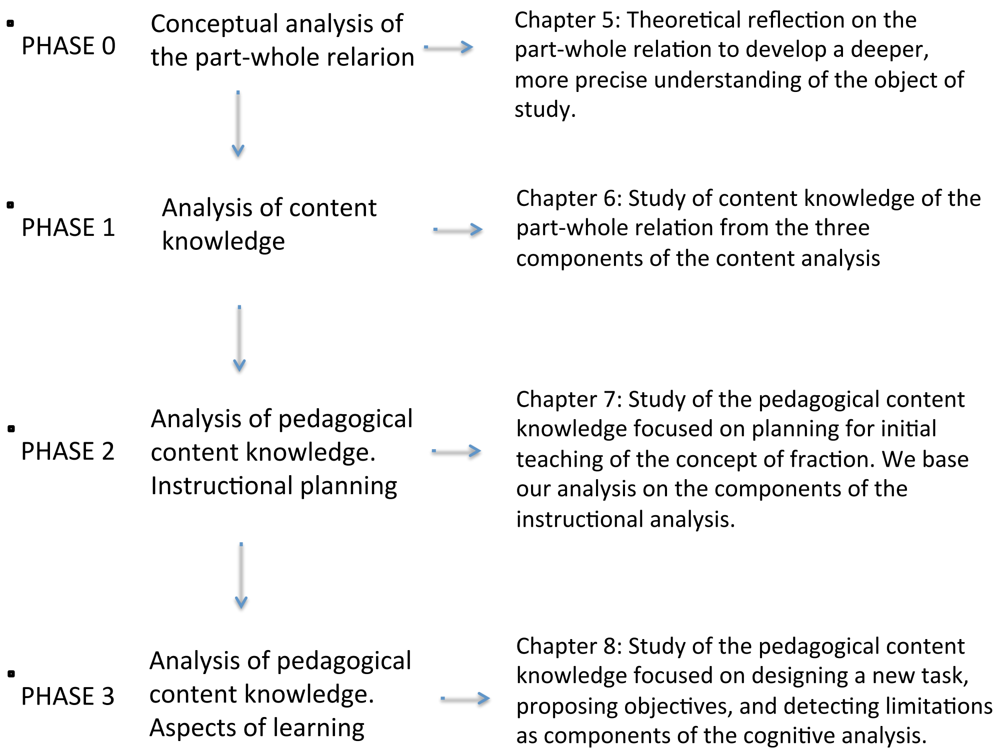


Figure 1. Organization of phases of the study

GENERAL OBJECTIVES

Our first goal is to develop deeper knowledge of the part-whole relation by performing a theoretical reflection through conceptual analysis.

OG1. Develop deeper understanding of the part-whole relationship through its conceptual analysis to determine the precise extent of the concept under study.

Second, we turn to the appropriations of the concept of fraction and notions of it held by the university students in Education during their training. This step initiates the empirical part of the study. Here, we attempt to define the university students' content knowledge of fractions as related to the meanings they attributed based on the part-whole relationship. This question leads us to the content analysis and the specification of the next objective.

OG2. To identify, describe, and analyze the primary school mathematical knowledge of fractions demonstrated by a group of students in the undergraduate degree program for Primary Education, based on the part-whole relationship—in terms of its conceptual structure, systems of representation, and contexts and uses.

Third, we deepen our understanding of the pedagogical knowledge of the pre-service teachers in initial training based on the part-whole relationship and focus our attention on teaching. This inquiry gives rise to the third objective.

OG3. To identify, describe, and analyze the pedagogical knowledge expressed by a group of students in the undergraduate degree program in Primary Education, on how to plan the teaching of fractions based on the part-whole relation.

Finally, we focus on the learning of this relation, as specified in the last objective.

OG4. To identify, describe, and analyze the pedagogical knowledge demonstrated by a group of students in the undergraduate degree program in Primary Education on school students' learning of fractions based on the part-whole relationship.

THEORETICAL FRAMEWORK

Professional knowledge held by the pre-service primary school teacher in the area of mathematics pedagogy

The line of inquiry on teacher training has become a crucial area of research on education (Sánchez, 2011). Most authors distinguish between content knowledge and pedagogical content knowledge. We locate this study within the framework of two types of knowledge. We use the term school mathematical content knowledge to mean "the area of basic mathematical meanings of a content needed for teachers' professional work" (Rico, 2015, p. 31); and pedagogical content knowledge to mean "theoretical, technical, and practical knowledge of the teaching and learning of school mathematics that form part of the teacher's training" (Rico, 2015, p. 32). Since the field these two types of knowledge spans is very broad, we believe the method of didactic analysis is useful, as it provides an analytical approach to specifying certain aspects of the teacher's knowledge through its dimensions that focus on the area of school mathematics and the teaching and learning of them.

Didactic analysis

Didactic analysis is conceptualized as a cyclical procedure composed of five components: conceptual analysis, analysis of school mathematics content, cognitive analysis, instructional analysis, and evaluative analysis Each of these analyses involves a process of analysis and synthesis that identifies the relevant data, closing one cycle and leading to the next phase of didactic analysis (Figure 2).

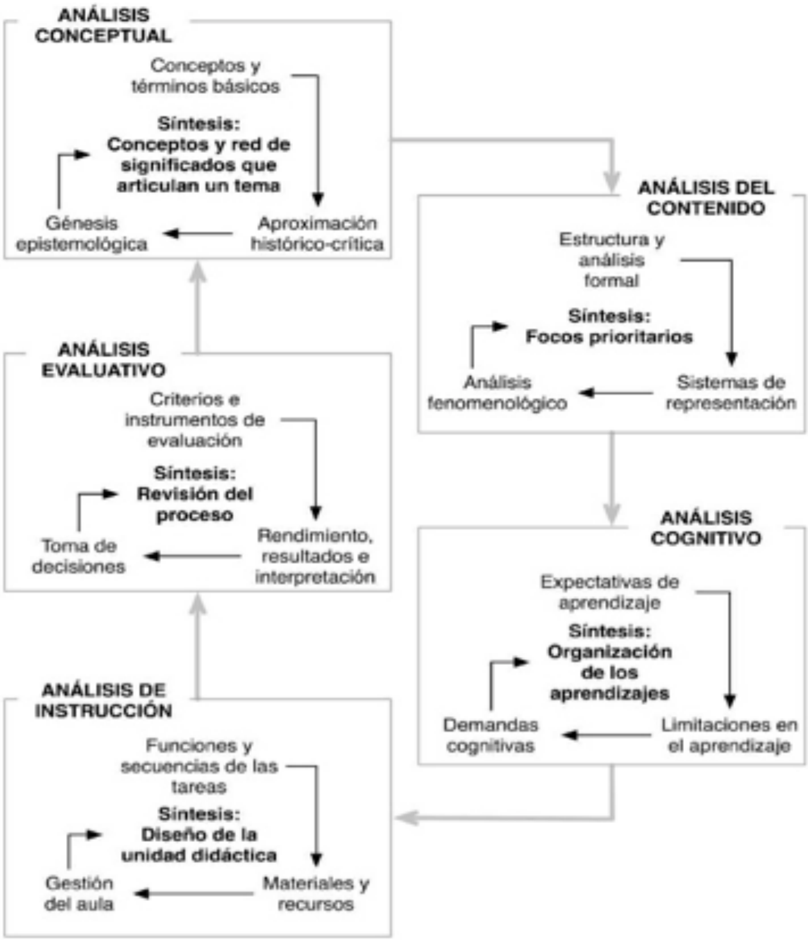


Figure 2. Structure of didactic analysis (Rico, 2013, p. 22)

We now describe each of the five phases that compose didactic analysis, following Rico and Fernández-Cano (2013).

Conceptual analysis

In initiating the investigation, or attempting to develop deeper understanding of a topic in this area, it is crucial to analyze the main concepts that constitute the topic, both to obtain broad knowledge of it and to delimit and define the concepts to be analyzed precisely. The first analysis, the conceptual analysis, tackles this problem, since it is a nonempirical method whose goal is to control semantic complexity by grounding and clarifying terms and concepts. “It is a method to develop and deepen understanding of concepts, a technique for scrutinizing them to obtain precision and mastery when using them" (Rico, p. 16, 2013).

Content analysis of school mathematics

By analyzing the content of school mathematics, we choose and organize the meanings of the concepts and procedures for a mathematical topic. Establishing the meaning of a school mathematics concept is tackled using three components, which structure the analysis.

Conceptual structure. The conceptual structure includes concepts, properties, propositions, and relationships between concepts that derive from a specific mathematical content (Gómez, 2007). We include the following basic components in the structure of the part-whole concept of fraction: (a) the whole that we take as a starting point, (b) each of the n equal parts into which the whole is divided, (c) the relation between each of the equal parts and the whole, and (d) the complementary part.

Representations. The concepts are shown by different kinds of written symbols, figures, images, or spoken language, and each constitutes a representation (external) of the concept in question (Hiebert and Carpenter, 1992). Fractions, as part-whole relation, can be represented in multiple ways: verbal, graphic, numerical, or symbolic representations. Each representation highlights certain aspects and renders others opaque (Figueras, Filloy and Valdemoros, 1986).

Contexts and modes of use. The third component is related to mathematics and its modes of use. Freudenthal (1983) indicates that mathematical concepts and structures are linked to specific phenomena and contexts. Our component "contexts and modes of use" refers to phenomena, situations, or modes of use that provide context for the mathematical concept. Concepts acquire meaning from these phenomena or from questions that arise from the physical, social, and cultural world (Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Working on different contexts enables deeper understanding of fractions, since the concepts only have sense when applied to specific contexts (Brocardo, 2010).

Cognitive analysis

Cognitive analysis attempts to organize the why and wherefore of learning specific knowledge about a topic (Rico and Fernández-Cano, 2013, p. 17). Cognitive analysis describes "how students can progress in constructing their knowledge of mathematical structure when given tasks that will comprise the teaching and learning activities" (Gómez, 2007, p. 56). Lupiáñez (2009) develops the three basic components of cognitive analysis in depth: learning expectations, detection of limitations in learning, and design and selection of tasks.

Instructional analysis

Instructional analysis addresses the teaching decisions related to instructional activity. Since we are studying how the pre-service teachers introduce the concept of fraction to a group of school students, we focus on a basic component of the instructional analysis: the teacher's explanation. Within this component, we identify four categories for analyzing the answers: content used, modalities for introducing the contents, representations chosen, and sequencing of the content.

Evaluative analysis

The fifth and last analysis, the evaluative analysis, closes the cycle of didactic analysis and constitutes the beginning of the next cycle. This analysis does not seek to assign the students a grade, but rather to evaluate the extent to which the goal sought was achieved, to contrast the aspects planned with what happened in order to improve planning and thus teaching practice. Since our participants do not put their planning into practice teaching fractions, we do not include this analysis in our study.

METHODOLOGY

Our study is composed of a theoretical and an empirical study (see Figure 1). The structure of the empirical study combines three sequential phases of data collection and analysis. The results of each phase contribute partial knowledge to the problem. Taken as a whole, they enrich and complement the information obtained in each phase separately.

Characteristics of the theoretical study. Phase 0

We use conceptual analysis as the methodological tool grounding the theoretical study.

Characteristics of the empirical study. Phase 1

In the first phase of the empirical study, we explore the content knowledge of the pre-service teachers in initial training. To do this, we ground our work in content analysis of school mathematics to explore the pre-service teachers' mastery of conceptual structure, representations, and contexts and modes of use for fractions according to the part-whole relation that the pre-service teachers have at the beginning of their university studies. Table 1 shows the methodological outline of this first phase of the research.

Table 1. Outline of methodology for the first phase of the research

Type of study	Empirical study
Component of didactic analysis used	Content analysis of school mathematics
Subjects	358 students from the undergraduate degree program in Primary Education
Context	Subject "Mathematical foundations for Education" (1^{st} year)
Materials	Questionnaire 1, individual response

In this phase, we used a questionnaire with open response items as the data collection instrument. The questions were formulated to show the conceptual structure, representation systems, and contexts and modes of use that the pre-service teachers in initial training know and use.

Question 1: “What is ‘to fraction’? Explain verbally what you understand by ‘to fraction.’ ”

Question 2: “Make a drawing that shows what fractioning is.”

Question 3: “Invent statements or describe different situations suggested by each of the following illustrations:”

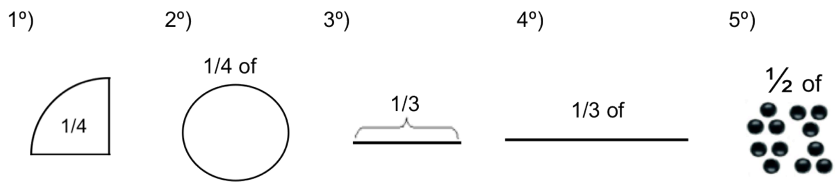


Figure 3. Illustrations included in Question 3

Characteristics of the empirical study. Phase 2

In the second empirical phase of the research, we explore the pedagogical content knowledge of instructional planning for teaching that the pre-service teachers in training demonstrated when they wrote an explanation of how to introduce the concept of fraction to the students. Table 2 outlines the methodology followed in the second phase.

Table 2. Outline of methodology for the second phase of the research

Type of study	Empirical study
Component of didactic analysis used	Instructional analysis
Subjects	82 students from the undergraduate degree program in Primary Education
Context	Subject “Teaching and learning of Mathematics in Primary Ed.” (2nd year)
Materials	Questionnaire 2 on individual work and illustrations in the form of stickers

The information collection instrument used in this phase of the study consisted of a worksheet (Questionnaire 2) and two series of vignettes (series A and series B) in the form of cards; the images show objects commonly used when beginning to introduce fractions.

Series A of the cards includes illustrations of objects exemplifying different magnitudes (length-rope, surface area-pizza, volume-orange) that give rise to the unitary fractions ½, 1/3, and 1/4. The illustrations in Series B of the cards contain only an object of a magnitude, which gives rise to the non-unitary fraction ¾. Each illustration on the cards shows different basic elements of a multiplicative part-whole relation: the whole or totality, the parts, and the relation between one of the parts and the whole.

Figure 4. Cards A1 and B1

Figure 5. Cards A2 and B2

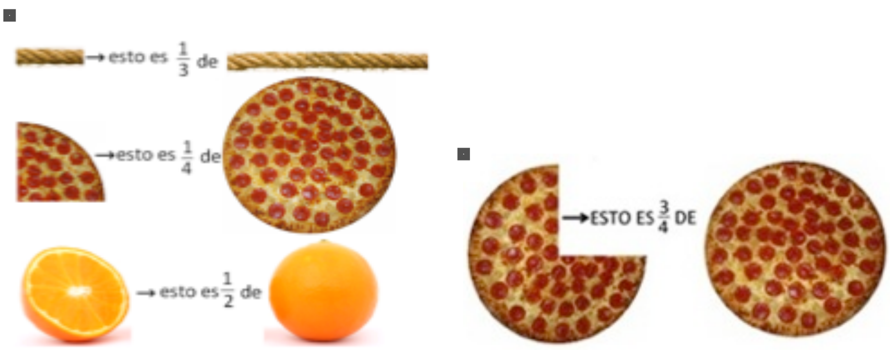


Figure 6. Cards A3 and B3

In addition to these cards, we gave the participants a worksheet with the instructions so that they could perform the task individually.

> *The following three cards can be used to illustrate the concept of fraction. We wish to develop material to introduce primary school students to fractions. Establish the order in which the cards should appear and write the text that should go before and after each card (as if it were a primary school textbook).*

The illustrations were printed on (adhesive) stickers so that they could be manipulated and inserted freely, as the student chose in developing his/her narrative.

Characteristics of the empirical study. Phase 3

In this third and final phase of the research, we continue to investigate the pedagogical content knowledge of pre-service teachers when they answer the questions on the use of specific contexts in teaching fractions, designing a new task, proposing learning expectations, and detecting possible limitations for the students on the topic of fractions. Table 3 outlines the methodology of this phase.

Table 3. Outline of methodology for third phase of the research

Type of study	Case study
Component of didactic analysis used	Cognitive analysis
Subjects	11 students from the undergraduate degree program in Primary Education
Context	Subject "Curriculum design and development in Primary Ed." (3rd year)
Materials	Audio recorder and Questionnaire 3 on individual work

We tackle this phase of the research as a case study. To gather the data, we interviewed 11 subjects, using various data collection instruments: audio recordings of the interviews performed and three worksheets. The first two subjects performed an initial test of the interview. Each interview was organized into two parts, the steps of which are summarized in Table 4.

Table 4. Structure of the two parts of the interview

First part	Step 1:	Evaluation of 5 statements on surface area
	Step 2:	Choice and justification of the best statement (on area) for teaching
	Step 3:	Evaluation of 5 statements on length
	Step 4:	Choice and justification of the best statement (on length) for teaching
Second part	Step 5:	Answers on design of tasks, learning expectations, and limitations in learning

First part of the interview: evaluation of contexts

The first part of the interview tackles evaluation of the contexts of the part-whole relation in four steps.

Step 1. In this step, we asked each subject to evaluate in writing different sentences on the part-whole relation. We presented a situation with a graphic representation of a fraction and a list of statements.

1. Cinco compañeros han respondido a la siguiente actividad mediante estos enunciados. Léelos con atención y valóralos según te parezcan respuestas más o menos adecuadas a la pregunta.

ACTIVIDAD 3. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugiera la siguiente ilustración:

- Alumno 1. Tenemos ¼ de una tarta, pero para hacer una tarta completa necesitamos más trozos que sean iguales. ¿Cuántos trozos necesitaremos?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 2. Tenemos una tarta, y María se come ¼ de ella. ¿Qué cantidad de tarta queda aún?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 3. Mamá ha hecho una tarta por mi cumpleaños y la ha dividido en 4 partes iguales, Papá que come mucho se ha comido una parte. ¿Cuánto se ha comido de la tarta?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 4. Si María se ha comido 25 gr. de una tarta que pesa 100 gr., ¿qué fracción de tarta se ha comido?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 5. Mamá preparó 1 tarta para mi cumpleaños. Como éramos 4 en la fiesta ¿a cuánto tocábamos cada uno?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

Figure 7. Task proposed in the first step of the interview

Step 2. This step of the interview continues evaluation of the previous statements, now orally. The following questions were posed.

- Imagine you are in class to begin teaching your students the concept of fraction. Which (one or more) of the previous statements would you use as an example of the fraction 1/4?
- Why do you consider that statement as a good example for introducing fractions in class?
- Which of these statements do you consider as the least appropriate?
- Why do you consider it as the least appropriate?

Steps 3 and 4. Steps 3 and 4 repeated the same process as in the two previous steps using the five statements on length instead of on surface area, as proposed in the following task.

ACTIVIDAD 4. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugiera la siguiente ilustración:

1/3

- Alumno 1. Una carrera está compuesta por 3 tramos, cada uno de la misma longitud. Los corredores ya han recorrido la tercera parte de la carrera. ¿Cuántas partes quedan por recorrer?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 2. Estoy participando en una carrera y ya he recorrido 1/3 de ella. ¿Cuánto queda para llegar a la meta?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 3. El camino desde el colegio a casa se puede dividir en 3 partes iguales. Si he caminado una de las partes del camino, ¿cuánto he recorrido?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 4. Para ir al supermercado tardamos 15 minutos andando y llevamos 5 minutos. Representa en fracción cuanto hemos realizado del trayecto.

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 5. En una carrera de relevos el recorrido se reparte entre 3 corredores, ¿cuánto tendrá que recorrer cada corredor?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

Figure 8. Task proposed in the third step

The 10 examples of statements included in the two activities (five for surface area in Figure 7 and five for length in Figure 8) were chosen from the answers collected for the third question in the first phase of the study. Analysis of these responses produces five categories of contexts for the part-whole relation that we worked on, as shown in the results section of this report.

Second part of the interview: design of tasks, proposal of expectations, and detection of limitations

In this case, each subject handed in the narrative he/she had written in the second phase of the study on how to introduce students to the concept of fraction. From this narrative, we asked each of the authors the following questions about the different components of the cognitive analysis (design of tasks, proposal of expectations, and detection of limits), using the following script.

- (Task design) To conclude the explanation of your narrative on how to introduce fractions to the students, propose a task, activity, or problem.
- (Expectations) When you put your sequence into practice in class with your students, what do you think they will learn?
- (Errors) What mistakes might they make?
- (Difficulties) Why do you think they may make mistakes?

DISCUSSION OF DATA AND RESULTS

PHASE 0. CONCEPTUAL ANALYSIS OF THE PART-WHOLE RELATION

A good number of studies have taken as a hypothesis that three kinds of proto-quantitative schemas form the base of numerical sense—increase-decrease, part-whole, and compare (Resnick, 1992)—from which it is proposed that the children construct their arithmetical knowledge.

From a cognitive point of view, the part-whole schema—or part-whole relation, from the logical foundation of mathematics that supports its treatment in education—is present in the comprehension of number and operations, as well as in arithmetic and algebraic problem solving. In school mathematics, we find the part-whole relation in the study of arithmetical structures, both additive and multiplicative, with different meaning.

Multiplicative structure constitutes a special case in which the part-whole relation takes on special relevance: fractions. Fractions emerge in a multiplicative part-whole relation as the way of expressing the relation between a part and the whole from which it comes. Children thus begin learning fractions in terms of the parts that compose a whole (Behr et al, 1983; Brocardo, 2010; Kieren, 1993; Mack, 1990; Steffe and Olive, 1990; Streefland, 1991). In general, studies that focus on this field (Freudenthal, 1986; Kieren, 1993; Nesher, 1985) agree that the concept of fraction emerges from applying certain schemas or intuitive mechanisms, particularly the process of partitioning into continuous quantities or discrete contexts. Such studies stress identification of the unit or whole. The concept of totality as something that is decomposed, recomposed, and converted has been the foundation of the part-whole relation and a factor that gives rise to and unifies the subconstructs of the rational numbers (Kieren, 1976).

PHASE 1. ANALYSIS OF CONTENT KNOWLEDGE

The first phase of the empirical study focused on content knowledge of the area of fractions, in particular of the part-whole relation (see Figure 1). In this case, we base analysis on the three dimensions of content analysis in school mathematics as a second component of the didactic analysis, since these dimensions enable evaluation of the extent of the meanings demonstrated by the teachers in initial training.

Question 1. Conceptual structure

We organize the answers to Question 1: "What is 'to fraction'"? Explain verbally what you understand by 'to fraction'" according to the presence or absence of the fundamental components of the part-whole relation: the verb, which expresses the action or intention to fraction an object into its parts; the whole that is fractioned; the parts into which the whole is fractioned; and the equality of the parts. Table 5 shows the progression of the levels of precision or categories established, based on the complexity of the answers according to the greater or lesser presence of these elements.

Table 5. Percentage of answers according to levels for Question 1

Levels		Percentage N= 358
(1)	One or several action verbs	5.2%
(2)	One or several action verbs that refer to a whole	10.2%
(3)	One or several action verbs that refer to the parts	3.7%
(4)	One or several action verbs that refer to a whole and the parts	33.8%
(5)	One or several action verbs that refer to the equal parts	6.4%
(6)	One or several action verbs that refer to a whole and the equal parts	36.1%
(7)	Other	5.6%

Figure 9 shows the relation between the levels of precision.

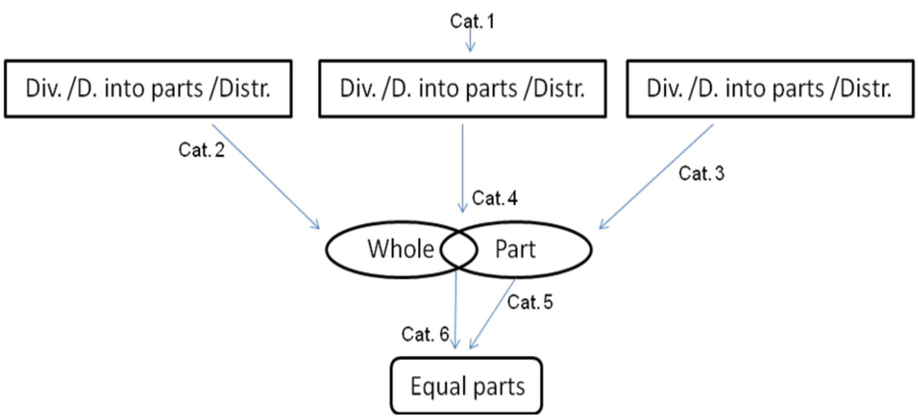


Figure 9. Relations between the levels of precision for answers to Question 1

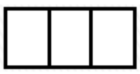
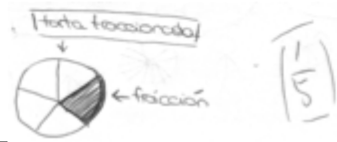
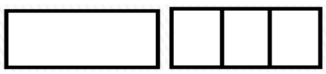
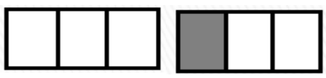
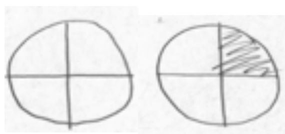
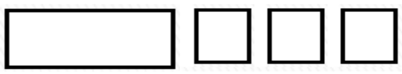
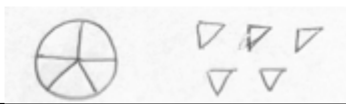
The verb expressing the action of breaking into parts is the constant element in the six categories. These verbs can appear alone or in pairs (divide and partition, divide and distribute, partition and distribute). “To divide” is the verb most frequently used in the answers (82.6%). The data obtained thus show that “to fraction” is an idea associated mainly with the action of dividing a whole into equal parts. This verb provides the key reference for the intuitive concept of fractioning.

Question 2. Representation systems

In this case, the answers to Question 2, “Make a drawing that shows what to fraction is,” are classified according to the type of magnitude the participants used in their illustration: continuous, discrete, or mixed (composed of a discrete and a continuous representation). Representations of area were employed in 98% of the answers, through figures of circles and quadrilaterals used with approximately the same frequency. Only 1% of the answers showed other figures.

Given the high percentage of frequency of the category continuum-area, we classified this category into subcategories according to the type and number of figures divided, and divided and colored. Table 6 shows the subcategories of this system and an example for each.

Table 6. Frequency of the subcategories for answers to Question 2

Subcategory for area-type answers	Example	Percentage N=358
(1) 		18.2%
(2) 		49.4%
(3) 		11.6%
(4) 		6.7%
(5) 		6.3%
Other		5.8%

Question 3. Contexts and modes of use

In the participants' answers to Question 3 (Figure 2, p. 9), we identify five contexts or modes of use for the part-whole relation. As we will explain next, these contexts are not exhaustive; some cases combine several in the same answer.

1. Find a part (47%). The action that gives rise to a part comes from dividing a whole into equal parts. All cases mention the set or the whole, the number of parts, the equality of the parts, and the action of choosing one of the parts.

2. Distribute (25%). The basic descriptors of this context are a verb synonymous with "to distribute" among several people, the whole or set that is shared out, and the number of subjects to which the portions are distributed, as well as the conditions of the equality and exhaustiveness of the parts.

3. Find the complementary part (8%). The action originates in a part expressed as a fraction. The question requires identification of the complementary part using quantitative terms that relate the complementary part to the whole (How much is it? How much is there?) or an equivalent expression (What amount...? What fraction...?).

4. Reconstruct the unit (9%). The whole is divided a priori, and the question refers to the complementary part. The process used to solve the problem is counting, not comparing.

5. Find the fraction of the part using an auxiliary unit of measure (e.g., grams, minutes, etc.) (7%). The part and the whole are given as quantities of the same magnitude (weight, time, surface area, etc.), and their relation is expressed as a relation between quantities of this magnitude.

Examples of these contexts are presented in Figures 7 and 8.

Types of meaning

Our perspective views the meaning of a concept as fitted to a topic composed of the three aspects analyzed, which we call the semantic triangle. In this section, we express the four critical types of meaning found for the concept “to fraction,” according to the results obtained in the three previous sections, now considered together. To do this, we classify the categories and subcategories of responses to identify the types of meaning expressed by the participants.

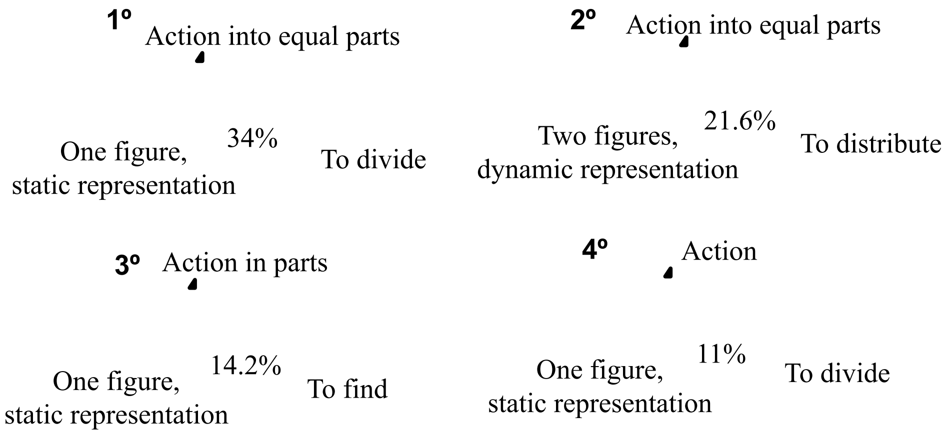


Figure 10. Types of meaning for the concept “to fraction”

In the first triangle (action in equal parts – a figure – to divide), the participants stress the action of dividing into equal parts in order to obtain one part. This action is interpreted as a static action, just as its illustration is composed of a single figure.

In the second triangle (action in equal parts – two figures – to distribute), the participants express a dynamic action of equitable distribute between n persons. In the first stage of sharing out, one must divide the whole into equal parts, as represented in the first figure. In the second, these pieces are given to the individuals, that is, the part each person receives is represented by the second figure.

In the third triangle (action in parts – a figure – to find), the participants express a static action represented by a figure. The conceptual structure does not mention the equal parts because the purpose is to determine the fraction of a part or of the complementary part relative to the whole.

Finally, the last triangle, (action – a figure – to divide) emphasizes the action of dividing a whole without taking the parts into account. Over 80% of the answers provided by the 358 participants are included in these four types.

PHASE 2. STUDY OF PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE. PLANNING OF INITIAL INSTRUCTION

The second empirical phase of the investigation was performed to investigate the pedagogical content knowledge possessed by the pre-service teachers in training. They demonstrated this knowledge when asked to write an explanation of how to introduce the concept of fraction to students using some images provided (Figure 4, Figure 5, and Figure 6, p. 10). We obtained a total of 82 responses. Since the instructional analysis focused on issues linked to teaching practice, we used some of the variables from its categories to analyze these productions: contents used, modalities for introducing the contents, representations chosen, and sequencing of the contents.

Contents used

We codified the knowledge of the concept of fraction demonstrated in the subjects' responses according to each of the categories established in the previous phase of the study: conceptual structure, systems of representation, and contexts used.

Data on conceptual structure

We identified concepts and procedures different from those already present in the illustrations, which the subjects included in their responses as additional knowledge (numerator and denominator in 28 cases, whole fraction in 14 cases, unit in 12 cases, addition or subtraction of fractions in 8 cases). Since some of these concepts were not presented in the theoretical framework as fundamental elements of the conceptual structure (whole, parts, part, and relation), they were added as new values in this category. All responses included the terms *whole*, *parts*, and *relation*, but the term *part* was not included in 15 cases.

Data on contexts or modes of use

Although the illustrations induce a context of division into parts, the subjects introduced other contexts in their responses, both individually and combined: to find the part (31 cases), to find the complement (16 cases), to find the part and to find the complement (16 cases), to find the part and to distribute (8 cases), to reconstruct the unit (6 cases), and to distribute (5 cases).

Data on representations

Since the task given the subjects contained illustrations with graphic and numerical elements, only 5 cases included graphic or symbolic representations ($\frac{a}{b}$) different from those given in the illustrations: one symbolic, three graphic, and one both symbolic and graphic.

Modalities for introduction of the contents

In writing, the participants not only chose the components of the concept that they knew and considered the most appropriate but also used different modes of narrating the contents, which we call instrumental, functional, and descriptive.

The *instrumental* mode of narration predominates in the responses (58 cases). The writing does not include either situations or problems that are contextualized, which could help with understanding of the content, but stresses only technical aspects of the concept being introduced.

The *functional* mode of narration has only a slight presence in the responses (10 cases). In this case, the content is tackled through contextualized situations, and the student is given developed cognitive demands, the majority through problem solving.

The *descriptive* mode of narration has a presence similar to that of the previous case (14 cases). The contents are introduced through a text that models a real situation but does not include any cognitive demand.

In crossing this category to analyze the explanation with the category context, we observed that most participants used a context of distribute in the descriptive and functional modes, and the context of finding the part for the instrumental focus.

Use of representations

Since the task proposed required the participants to use some illustrations, each participant assigned illustration a specific function within his or her narrative. The functions detected are illustrative, explanatory, or clarifying. The first, or *illustrative*, function (35 cases) is that in which the images illustrate the explanation, that is, accompany the text but do not add or complement the image with new information. The second role—in which the images have an *explanatory* function—occurs with lower frequency (11 cases). The text in these responses consists of introductory expressions or phrases that link some images to others, such that the explanation relies on the images. The last value for this category is the *clarifying* function (36 cases). In these answers, the explanation expands and improves on the information given by the images, such that the text exemplifies, gives more details, clarifies, or shows new contents.

Sequencing of the contents

Another planning capability put into play consists of organizing these components and establishing a time sequence for introducing them in the answers. To analyze this capability, we break down these contents to establish the most common ways of organizing them (Table 7).

Table 7. Modes of organizing the contents in the responses

Order	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	Frequency N=82
Mode 1	Whole	Parts	Part	Relation			32
Mode 2	Whole	Parts	Whole fraction	Part	Relation		16
Mode 3	Whole	Unit	Parts	Part	Relation	Numerator and denominator	9
Mode 4	Whole	Parts	Relation				8
Other							17

The first mode includes only the basic elements of the conceptual structure in the order in which they appear in the vignettes: the whole that is divided into parts, choice of one of the parts, and relation between one or several of the parts and the whole. The second mode adds the symbol of the whole fraction (4/4) after division of the parts and before introducing the relation between one or several parts and the whole. These cases influence the result that the four parts correspond to the fraction 4/4. The third mode expands the first to add which is the numerator and which the denominator after introducing the relation between one part and the whole. The fourth most common mode of introducing the contents dispenses with the part to introduce the symbol of the relation (¼ or ¾) after mentioning the parts. This last mode corresponds primarily to brief answers that do not explain the images.

PHASE 3. STUDY OF PEDAGOGICAL KNOWLEDGE. ASPECTS OF LEARNING

The third phase of the investigation, which focuses on the pedagogical content knowledge, seeks to deepen understanding of the contexts and modes of use the university students demonstrate and of the pedagogical knowledge of school student learning, issues not considered in the second phase. To do this, we performed a case study through a structured interview in two parts. The first part focused on the contexts of the part-whole relation and permitted the participants to familiarize themselves with and reflect on fractions based on the part-whole relation. The second part, organized through the categories of cognitive analysis, was oriented to deliberation on task design, statement of expectations, and identification of limitations in the learning of this relation.

Evaluation of the contexts of the part-whole relation

The first part of the interview addressed evaluation of five contexts for the part-whole relation through five statements corresponding to the magnitude of surface area and five more for the magnitude of length (see Figures 7 and 8). This procedure enables us to identify the contexts that the pre-service teachers value more and those they value less. Evaluations were performed independently for each magnitude. First, we present the results of the evaluations for surface area and second those for length. Finally, we show the overall results and compare the values assigned to the two magnitudes.

Evaluation of contexts for the magnitude surface area

We first gave the interview participants a worksheet to evaluate the contexts for surface area described on them (Figure 7). We find that the context *To find the complement* received the highest evaluation. The pre-service teachers stressed its simplicity and appreciated the advantage of this context for enabling them to make a representation that the students can visualize.

The context with the second highest evaluation was *distribute*. According to the participants, this context is a classic exercise in teaching fractions: "the act of sharing out a cake is easier to see, it is a typical exercise."

The context with the lowest evaluation was that of surface area. Most subjects proposed the context *Reconstruct the unit*, since it is structurally different and presents the fraction directly, in contrast to the other contexts, in which the fraction is formed a posteriori, as for example in the case of dividing a cake into parts: "What you get and what you ask for are different since the data are fractioned and the unknown is a natural number."

Evaluation of contexts for the magnitude length

After evaluating the contexts with surface area, we proceeded in the interview to evaluate the contexts with length. For this magnitude, the participants assigned the highest values to the context *To find the part*. The reasons given for its use in teaching fractions refers to ease of representation: "To explain it and make a drawing is just a little easier for the children to see." The context with the lowest evaluation for length was that have *distribute*, as it is more complex: "It is more confusing."

The context *Unit of measure* merits attention for the disparity of opinions it causes for both magnitudes. Some participants considered it as the best for teaching because the relation of the magnitude time to distance traveled is an example familiar to the students, which helps in instruction. Other participants believed, however, that the presence of the auxiliary unit of measure could add complexity to the statement when the students had not worked with these magnitudes.

Comparison of evaluations given to the contexts for both magnitudes

If we consider the values assigned and order the contexts according to this criterion, we obtain the data presented in Table 8.

Table 8. Ordering of the contexts according to evaluations received

Magnitudes	Order of contexts according to evaluation				
Surface	Fc >	Ds >	Um >	Fp >	Ru
Length	Fp >	Fc =	Um >	Ru >	Ds

The symbol > indicates that a context obtained better values than the following one.
The symbol = indicates that the two contexts obtained the same value.

In comparing the evaluations for the two magnitudes obtained for the different contexts, we see that the context *Unit of measure* has the same evaluation in both cases. This does not occur, however, with the context *To find the part*, which receives the best evaluation for length and one of the worst for surface areas. *Distribute*, in contrast, is the context that receives the lowest evaluation for length and one of the best for surface. The contexts *To find the complement* and *To reconstruct the unit* have similar but opposing evaluations in both magnitudes.

Learning of the part-whole relation

Once the participants reflected and took positions as teachers in a situation of teaching the concept of fraction based on the part-whole relation, we studied the knowledge they demonstrated of student learning of the concept. We performed this study by focusing on three components of this knowledge: task design, statement of learning expectations, and identification of limitations for learning.

Task design

All of the subjects were able quite naturally to propose some kind of learning task. The tasks they designed were all word problems, which are generally considered appropriate for beginning fractions. We analyze the tasks proposed by the participants, attending to two variables: magnitude and context. The first variable, magnitude, takes the values of surface area or length. The second, context, refers to the context of the task proposed and takes one of the five values considered above: (1) to reconstruct the unit (Ru), (2) to find the complement (Fc), (3) to find the part (Fp), (4) to find the part using an auxiliary unit of measure (Um), and (5) to distribute (Dt).

In the statements, we find continuous, linear-type magnitudes (distance or length, 3 cases) or magnitudes for area-volume (cake or sandwich, 6 cases). With the exception of one statement on additive structure, the statements correspond to three of the contexts presented in the first part of the interview: Ds (3 cases), Fc (1 case), and Ru (4 cases).

With the exception of S5, the contexts that participants chose to present the tasks articulated were not the same as those previously considered best for teaching. If participants found differences between these contexts, the results show that 8 of the 9 subjects did not state a task that coincided with the contexts that the pre-service teachers themselves evaluated as best for teaching.

Learning expectations

In describing the learning expectations, the subjects expressed a series of knowledge, capabilities, and attitudes that they expected students to achieve, master, and apply through the narrative they wrote in the second phase of the study.

To analyze the responses, we used two variables: *cognitive capability* and *type of content* (Lupiáñez, 2008). The first variable, cognitive capability indicates the degree of precision in articulating the statement on the capability that the student is expected to acquire and that may be related to performing actions or showing behaviors. We gave this variable three values: *imprecise, definite*, and *developed*. We coded the expectation as imprecise when the statement proposed did not mention a capability explicitly (giving merely mathematical statement) or when it was too general. If the statement of the expectation included a cognitive capability through a single type of action, it was coded as definite. A statement involving more than one capability was coded as developed.

The second variable, type of content, distinguishes the conceptual field from the procedural field and from others that refer to both aspects.

Most of the subjects did not have great difficulty stating learning expectations associated with their narrative. For the first variable, cognitive capability, only subject S4 formulated a general expectation, “to learn fractions.” Three of the subjects (S3, S8, and S10) proposed developed expectations, which included two capabilities in independent statements: "To divide an object into equal parts. That the sum of the parts represents the whole of the principle." The other subjects proposed specific expectations that expressed a single cognitive capability.

For the variable type of content, we examined expectations related to conceptual knowledge, such as "To understand the partitioning of things, time, objects, food, etc.," and procedural knowledge, "To divide an object into equal parts." Neither of these types of content predominates in the participants' responses. Only participants S3 and S8, who proposed developed expectations, considered both types of knowledge, conceptual and procedural, in their responses.

As to the knowledge referred to in the statements of expectations, six cases corresponded to knowledge based on the part-whole relation and were related to the contexts proposed.

Limitations in learning

The responses on limitations were first analyzed according to the variable *limitation*. Through this variable, we examined whether the statement proposed, for both the question on errors and the question on difficulties, is typified as an error, a difficulty, an obstacle, or an absence of knowledge. Depending on the value of the variable limitation, we analyzed the response for the variable type of difficulty (if the response given was a difficulty) or type of error (if the response given was an error).

The participants showed lack of ideas and were imprecise in identifying and stating possible errors that the school students could commit in the tasks they (the participants) had proposed. The participants were also unable to justify the link between these errors and the difficulties that might have led to them. Some participants were not able to formulate errors and difficulties, and others formulated very general difficulties or merely repeated the same response given for the question on errors. They did not identify any error or difficulty related to the types of situation previously evaluated in the interview, nor did they refer to the magnitude worked on. It is also striking that none of the subjects' responses referred to obstacles in instruction.

As to the type of error identified, the participants referred to technical errors or misuse of the data, suggesting possible errors in the algorithms of adding and subtracting fractions, even though none of the tasks required performing these operations to resolve it. Another error identified, related to distorted definitions of the concept of fraction, was the inequality of the parts when dividing the whole and, related to misuse of data, dividing the whole into an incorrect number of parts.

The responses given for the difficulties focused on the processes inherent in the mathematical activity, particularly in the processes of dividing and distribute, processes of cognitive development with problems of reading comprehension, instructional processes because the teacher did not specify correctly how to solve the problem, and difficulty of the mathematical objects due to the relation between the graphic and numerical representations of fractions.

Is it striking that S4 was the only subject who answered the questions on limitations with absence of knowledge, "he/she doesn't know how to solve it or, if they solve it, they just guess."

CONCLUSIONS

We now present the conclusions derived from performing this study, focusing on achievement of the objectives proposed while also describing the study's main contributions. The following contributes some conclusions on the method of didactic analysis.

Conclusions on the first objective

The first general objective was addressed through a theoretical study needed to clarify and develop deeper understanding of the topic on which we focus in this study: the part-whole relation as the foundation of fractions. We believe this theoretical study, on which the basic notions of the concept of fraction grounded in the part-whole relation are organized and which describes their nature and various interpretations of them, constitutes an important original contribution of the research.

Conclusions on the second objective

The second objective was tackled in the first phase of the empirical study, in which we gathered an extensive quantity of information about the subjects' knowledge associated with the conceptual structure, representation systems, and contexts of the concept of fraction based on the part-whole relation.

The 358 participating students were familiar with the part-whole grounding of fractions, but most gave partial explanations that contained only some components of this conceptual structure (the whole, the parts, equality of the parts, and the relation of one of the parts to the whole), concepts considered fundamental in developing children's knowledge of fractions (Kieren, 1993). An incomplete conceptual structure of the part-whole relation leads to subsequent difficulties in assigning meaning to other concepts associated with fractions, such as interpreting the multiplication of fractions as the fraction of a fraction.

The results of the second question, which focused on representation systems, showed that the participants expressed the concept using circles or quadrilaterals divided into equal parts but hardly considered other representations, such as discrete or linear systems. The fact that the great majority of the participants in the study were inclined to represent fractions through areas of geometric figures expresses the lack of variety in the signs and symbols used. In contrast to other studies (Cluff, 2005; Wright, 2008), the participants in our study did not respond with symbolic or numerical representations of fractions such as decimals or percentages. The action of fractioning promotes sequences of figures, which does not occur when one simply represents the concept of fraction.

As to the results on contexts and modes of use, the situations or problems the subjects invented led to a plurality of contexts associated with the part-whole relationship. These contexts did not include interpretations such as ratio and rate, which are considered as fundamental. The analysis showed the surprising and unexpected fact that the participants associated the contexts involving discrete objects with the additive structure and those involving continuous ones (area and length) with fractions. We believe that the students' implicit dualism (discrete-additive, continuous-fractional) is due less to this nature and more to the educational experiences and practices of their prior training as math students.

We highlight that we have identified four types of response based on the partial meaning the subjects assigned to the concept of fraction. The four types of meaning detected can be useful as a framework for reflection and group discussion among the Education students on the meaning of the action of fractioning, as process and activity involved in the learning of fractions.

One series of implications for the training programs for Primary Education teachers emerges from these results. Limited comprehension in any of the three components of the meaning of the concept of fraction shows the need to insist on these issues as fundamental for teaching and learning. As part of teacher training, the content of mathematics courses should develop basic aspects of school mathematics content, as in the case of fractions, by considering different approaches in addition to that of the part-whole relationship. In this way, the pre-service teachers will broaden their conceptions of the meaning of fractions and overcome their limitations.

Conclusions on the third objective

The third research objective was addressed in the second phase of the empirical study. From the information gathered, we emphasize that the 82 subjects surveyed had no difficulty assuming the role of teachers and showing their pedagogical content knowledge in their responses. They also showed coherent pedagogical content knowledge in their explanations. Although the subjects recognized the basic facts of fractions and showed these in their explanations, as well as the other contents, we believe their knowledge is lacking and shows limitations when it comes to planning the sequencing of the content in a logical order.

We believe that the response categories found in the explanations for ways of introducing content and use of representations are one contribution of this research. These categories show different profiles of the participants in each of these components.

Conclusions on the fourth objective

The fourth objective of this study was addressed in the third and last phase of the empirical study through interviews with 9 subjects who had participated in the previous phase.

The first part of the interview, in which the participants evaluated five contexts simultaneously for the magnitudes of surface area and length, led us to conclude that the participants did not evaluate the five contexts equally, and that the magnitude considered conditioned the evaluation of each context.

Among the results obtained on task design in the second part of the interview, we would stress that the participants in all cases proposed statements of problems when asked to propose a task on fractions spontaneously. The contexts present in these statements were varied. They were not, however, the same as those evaluated as the best for teaching fractions. We can thus see that the participants choose one context or another depending on the cognitive demand of the task we proposed. Designing a task for school students is not simple for the university students in Education; when they pay attention to inventing tasks, they forget to consider choice of the best context. Inventing tasks and choosing contents emerge as teaching capabilities that are difficult to coordinate on the first try.

Another issue studied, the statement of expectations for student learning, is generally accurate. Most of the subjects were able to state objectives specific to the topic.

The study of limitations in learning is found in another perspective. The subjects did not demonstrate capability to find possible errors that school students could incur in their tasks. Nor did they connect the errors justifiably to the difficulties that could cause them. Participants in the study therefore did not develop this capability in the course of their training. It is important for those in charge of the educational programs for training teachers to take this issue into account and provide incentives for developing this capability as part of pre-service teachers' professional competence.

Finally, in the responses analyzed as a whole, we identify two styles and tendencies that the subjects participating in the study expressed about knowledge of teaching and learning the concept of fraction.

The first of these is a tendency or style we classify as procedural or technical, in that the knowledge shown stresses the procedures, processes, or modes of acting. This tendency particularly classifies the participants who proposed expectations of the procedural type, such as "to divide an object into equal parts" or "to master operations with fractions," and who for limitations identified technical errors or difficulties associated with the processes inherent in the mathematical activity, primarily those related to operations with fractions, such as "in adding fractions, adding the denominators."

The second tendency, which we term conceptual, stresses knowledge of learning that emphasizes functional comprehension of fractions and their relationships. This tendency was shown in the subjects who stated applied or conceptual expectations, such as "to learn the utility of fractions" or "to learn fractions from dividing a rope" and difficulties associated with the complexity of the mathematical objects and of the student's cognitive development.

Conclusions on the method of didactic analysis

Didactic analysis as a systematic procedure guided us during the analytical process of planning, organization, categorization, and analysis of the data, as well as of obtaining the results in the different phases of the research. This study has thus shown didactic analysis to be a useful method for providing evidence of and describing the knowledge that the pre-service teacher in initial training possesses about a specific topic of school mathematics.

We believe that one achievement of this research is the use of the components of didactic analysis to study the content knowledge and pedagogical knowledge that pre-service teachers have of a basic concept in the mathematics curriculum. This research has shown the potential of university students in the undergraduate Primary Education degree program to tackle academic and professional, and mathematical and pedagogical training together.

References

Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. and Silver, E. A. (1983). Rational number concept. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York: Academy Press.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, *Educação e Matemática, 109*, 15-23.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In Biehler, R., Scholz, R., Sträber, R. and Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. and Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. In B. Ubuz, Ç. Haser and M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME*. Turkey.

Castro-Rodríguez, E. and Castro, E. (2013a). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. In L. Rico, J. L. Lupiáñez and M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 141-160). Granada, Spain: Comares, S. L.

Castro-Rodríguez, E. and Castro, E. (2013b). La relación parte-todo. In L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina and I. Segovia (Eds.), *Investigación* *en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 85-92). Granada, Spain: Editorial Comares.

Cluff, J. J. (2005). Fraction multiplication and division image change in pre-service elementary teachers. Unpublished dissertation, Brigham Young University.

Figueras, O., Filloy, E. and Valdemoros, M. (1986). Some considerations on the graphic re- presentation of fractions. In G. Lappan (Ed.), *Proceedings of the 8th PME-NA*, East Lansing, Michigan.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Unpublished dissertation, Universidad de Granada, Spain.

Grossman, P. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. New York: Teachers College Press.

Hiebert, J. and Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hill, H. C., Ball, D. L. and Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. E. (1993, January). The learning of fractions: maturing in a fraction. Paper presented at the Conference Fraction Learning and Instruction, University of Georgia.

Lupiáñez, J. L. (2009) Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Unpublished dissertation, Universidad de Granada, Spain.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32.

Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O. and Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 3-14.

Nesher, P. (1985). *An outline for a tutorial on rational numbers*. (Unpublished manuscript)

Ponte, J. P. and Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 223-261). New York: Routledge.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R.

Putnam and R. A. Hattrup (Eds), Analysis de arithmetic for mathematics teaching (pp. 373-429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN, 33*, 11-27.

Rico, L. and Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. In L. Rico, J. L. Lupiáñez and M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada, Spain: Comares, S.L.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. In P. Flores and L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21-40). Madrid, Spain: Pirámide.

Rowland, T., Huckstep, P. and Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. In L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Ice - Horsori.

Steffe, L. P. and Olive, J. (1990). Constructing fractions in computer microworlds. In G. Booker, P. Cobb, and T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME* (pp. 59-66). Mexico: CONACYT.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Didactical Phenomenology (Freudenthal). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 174-176). Heidelberg: Springer.

Wright, K. B. (2008). Assessing ec-4 preservice teachers' mathematics knowledge for teaching fractions concepts. Unpublished dissertation, University of Texas.

CONCLUSIONS

Our research project focused on the content knowledge and pedagogical content knowledge of part-whole relationships demonstrated by university students in the undergraduate degree program in Primary Education. The need for a systematic process for design of the research, analysis of the study data, and interpretation of the results led us to choose didactic analysis as a powerful tool for performing these functions. The first dimension of this tool, conceptual analysis, enabled us to perform a theoretical reflection prior to the empirical study in order to develop deeper understanding of the key concepts that constitute the part-whole relationship, as well as the different interpretations of this relation in different disciplines, including that of mathematics itself. We grounded our study of the professional knowledge of a group of university students in the undergraduate degree program in Primary Education in the dimensions of didactic analysis (content analysis of school mathematics, cognitive analysis, and instructional analysis) and its components as a system of categories through which to study the content knowledge and pedagogical knowledge demonstrated by these Education students. We used this framework to organize the empirical data obtained in our fieldwork and then interpret them.

In this final chapter, we present the conclusions derived from our investigation. We begin by discussing our achievement of the objectives proposed when approaching the problem (Chapter 1) and describing their main contributions. We then reflect on the results and draw some conclusions about the method used. Finally, we present the study's limitations and summarize the open research lines that suggest ways to continue this research.

9.1. Summary of the research objectives

Our investigation was a study grounded theoretically and developed empirically, in which we tackled questions about the knowledge that pre-service teachers possess about a specific content at the initial stage of their training: the part-whole relation as a basic structure underlying fractions.

As presented in Chapter 1, we structured our research problem in four questions. We articulated these questions after studying the professional knowledge of the pre-service primary school teachers concerning an important mathematical structure, the fraction—particularly how the fraction emerges from the part-whole relation. We then formulated four questions.

1. What are the foundation and possible interpretations underlying the part-whole relation in different disciplines, particularly school mathematics?
2. What meanings of the part-whole relation are expressed in the teachers' knowledge of fractions during their initial training, and how are these meanings described in terms of conceptual structure, representations, and the contexts and modes of use of this relation?
3. What pedagogical knowledge of teaching the part-whole relation do the pre-service teachers demonstrate when they plan a proposal for teaching the concept of fraction?
4. What pedagogical knowledge of student learning do the pre-service teachers demonstrate when they design tasks, formulate expectations, and detect limitations in the learning of the concept of fraction based on the part-whole relation?

As a result, we proposed the following three general research objectives.

OG1. To develop a deeper understanding of the uses and interpretations of the part-whole relation through conceptual analysis of it in order to determine precisely the extent of the concept to be studied.

OG2. To identify, describe, and analyze the knowledge of school mathematics concerning fractions demonstrated by a group of students in the undergraduate degree program in Primary Education, based on the part-whole relation in terms of its conceptual structure, systems of representation, and the contexts and uses.

OG3. To identify, describe, and analyze the pedagogical knowledge of school mathematics expressed by a group of students in the undergraduate degree program in Primary Education on how to plan the teaching of fractions based on the part-whole relation.

OG4. To identify, describe, and analyze the pedagogical knowledge of school mathematics demonstrated by a group of students in the undergraduate degree program in Primary Education on primary school students' learning of fractions based on the part-whole relation

We tackled analysis of the first general objective through a theoretical study presented in Chapter 5. This chapter developed deeper understanding of the central notion of the study, the part-whole relation, through conceptual analysis as first component of didactic analysis.

We tackled the second, third, and fourth objectives through an empirical study that enabled us to analyze both types of knowledge: the content knowledge and pedagogical content knowledge of the participants. We presented this empirical study in Chapters 6, 7, and 8 of this report.

Chapter 6 addressed the second general research objective, which focused on the study of knowledge of the part-whole relation in primary school mathematics, based on the three dimensions (conceptual structure, systems of representation, and contexts and modes of use) of the content analysis of school mathematics.

Chapters 7 and 8 focused on the pre-service teachers' pedagogical knowledge. Specifically, Chapter 7 addressed the third objective from a study of knowledge of the teaching of fractions based on the part-whole relation grounded in instructional analysis.

Finally, we addressed the fourth objective in Chapter 8 of this summary. This chapter studied pedagogical knowledge that focuses fundamentally on the learning of fractions from the components of the cognitive analysis: task design, expectations, and limitations in learning.

9.2. Conclusions related to the first objective

We tackled the first general objective through a theoretical study presented in Chapter 5. We believe this study was necessary to clarify and deepen understanding of the topic on which our study focuses: the part-whole relation as the foundation of fractions.

The conceptual analysis of the part-whole relation is a theoretical exploration that precedes the empirical study. This tool enables us to clarify the complexity of the topic in various disciplines, particularly that of school mathematics. We believe that this theoretical study, in which we organize the basic notions of the part-whole relation and describe its nature and various interpretations of it, constitutes an important and original contribution of the research.

The exploration performed showed the relevance of the part-whole relation as an object that forms part of the foundations of mathematics and a large portion of its concepts. Since the beginnings of philosophy in ancient Greece, the part-whole relation has been a continuous, recurrent topic of investigation. Mereology, the study of relationships between part and whole, provides a formal theory of this relation. The problems posed in relation to this theory affect various scholarly fields, such as anthropology, computer science, linguistics, and particularly mathematics, where the part-whole relation has played a crucial role in the field's development (Bell, 2004).

In school mathematics, the part-whole relation is one of the main pillars supporting the construction of arithmetical knowledge (Resnick, 1990) and giving meaning to a considerable number of mathematical objects. The part-whole relation involves the idea that the natural numbers are constituted of two or more parts, and mastering this relation is one of the greatest milestones to reach with children in their first years of schooling.

The part-whole relation supports the additive and multiplicative structures, as it describes the basic phenomena whose interpretation led to development of the additive structure (to aggregate, gather, segregate, separate) and multiplicative structure (to reiterate or make equal parts).

Various researchers have considered this relation as the basis of knowledge of fractions and thus of rational numbers (Behr et al., 1983; Freudenthal, 1984; Kieren, 1976). Fractions arise from a multiplicative part-whole relation as the way of expressing the relation between a part and the whole from which it derives. Children therefore begin learning fractions in terms of the parts that compose a whole (Freudenthal, 1983; Kieren, 1993; Nersher, 1985; Steffe, 1999). Our results influence and concur with these lines of reflection on the foundations of school arithmetic and on the multiplicative part-whole relation.

9.3 CONCLUSIONS RELATED TO THE SECOND OBJECTIVE

We tackled the second objective in the first phase of the empirical study (Chapter 6), in which we gathered a large quantity of information about the knowledge students in the university undergraduate degree program in Primary Education have of the mathematics content associated with conceptual structure, representation systems, and contexts of the part-whole relation. This analysis of content knowledge included in Chapter 6 has practical implications for the initial training of primary school teachers.

As we have observed and documented, the Education students were familiar with the part-whole interpretation of fractions, but most of them gave explanations that contained only some of the elements composing that conceptual structure (the whole, the parts, equality of the parts, and the relation of one of the parts to the whole), concepts considered fundamental to the development of knowledge of fractions in children (Kieren, 1993). Only a small number of participants took all of these elements into account in a textual description of the relation. We should thus consider the need for the initial training courses for teachers to work on making explicit all of the concepts and reasoning involved in the conceptual structure for the part-whole interpretation of fractions, so that these pre-service teachers are aware of its elements and relations. An incomplete conceptual structure of the part-whole relation leads to subsequent difficulties in using this relation to give meaning to other concepts associated with fractions, such as interpretation of the multiplication of fractions and fraction of a fraction.

These results differ in some respects from those obtained in prior studies (Lo and Grant, 2012; Domoney, 2001). The study by Lo and Grant (2012) showed that pre-service teachers conceptualized a/b as “a parts belonging to b parts” or “a times 1/b, where 1/b is obtained by dividing the whole into b equal parts.” In the same study, the participants associated a part with the fraction but did not consider the fraction as the quantitative relation of the part with respect to the whole. The greatest contrast between these authors’ data and ours stems from the fact that the participants in previous studies did not include equality of the parts in their responses. This difference may occur because our question was about the action “to fraction” and not about the term “fraction.”

The results of the second question, which focuses on representation systems, showed that the participants used circles and quadrilaterals divided into equal parts to represent the concept but did not consider other representations, such as discrete or linear representations. The fact that the great majority of the study participants tended to represent the part-whole relation of fractions using areas of geometric figures shows the lack of variety in signs and symbols used. This way of illustrating fractions seems to be strongly rooted in the Education students. It is highly advisable to have them reflect on other forms of representation (linear and discrete) during their initial training, as well as on the advantages and disadvantages of how these forms relate to that considered as fundamental, area. It is important to realize that, although the representation using a plane figure is direct, visual, and intuitive, a continuous-linear representation gains predominance as the study of mathematics advances and is strengthened by the study of the number line.

The results on contexts and modes of use show that the situations or problems invented by the subjects involved a plurality of contexts associated with the part-whole relation. The most common contexts present in the responses were (a) to find the part, (b) to distribute, and (c) to find the complementary part. As in the results obtained by Wright (2008), these contexts did not include interpretations such as ratio and rate, considered fundamental by various specialists in mathematics education (Berh et al., 1997). Analysis of the contexts showed the surprising and unexpected result that the participants associated contexts that use discrete objects with the additive structure and those using continuous structure (area and length) with fractions. We believe that this duality implicit in the students' thinking (discrete-additive, continuous-fractional) is the product less of the nature of the contexts than of the educational experience and practices that the Education students had in their previous education as math students. The pre-service teachers should be made aware of this link during their initial training so that they recognize this limitation in their thinking.

Analyzing the contexts also enabled us to observe the students' preference for direct thinking, in which the parts are obtained from a whole, rather than an inverse thinking that reconstructs the whole from its parts, even in the case of illustrations that seem to encourage the appearance of the latter. It is advisable for the Education students to practice exercises in which they work on the reconstruction of a whole from one of its fractional parts.

From the outline of the theoretical model developed by Behr et al. (1983), we can infer that the interpretations of measurement and quotient-distribute of fractions are organized according to the part-whole relation. Based on the results obtained, we believe that the basic structure of these two interpretations proceeds from a whole divided into equal parts. For example, the problem of measurement implies an object or part whose quantity is less than the unit of measure considered (the whole). One must therefore relate the part to the whole and determine the frequency with which this part is contained in the whole. The categories of contexts identified from the results on contexts and modes of use correspond to this interpretation. For example, in the categories "to find the complementary part" and "to find the part using a unit of measure," the fraction represents the measure of the part related to the whole, independently of counting the parts.

We wish to emphasize that we found and identified four types of answer based on the meaning that the subjects assign to the concept of fractioning. We believe that the mathematics teacher should include the different meanings that students can assign to mathematics concepts in their pedagogical knowledge. The four types of meaning detected will be useful as a framework for reflection and group discussion among the Education students on the meaning of the action of fractioning, and for the activity that leads to the learning of fractions.

Further, we believe that the questionnaire used in this first phase constitutes a research contribution. Using a series of simple questions, we approach the meanings of the part-whole relation considered by the subjects at the beginning of their university studies in the undergraduate program in Primary Education.

We believe that the content analysis of school mathematics provides an opportunity to improve understanding of the pre-service teachers' knowledge of certain issues and to explore the relationships, or absence of them, established among their elements. The results show that the subjects who participated in this study at the beginning of their university education considered different meanings for the concept of fractioning based on the multiplicative part-whole relation and demonstrated different levels of mastery in using this relation.

A series of implications for the training programs for teachers in Primary Education emerge from these results. The limited understanding of some of the three components of the meaning of the concept of fraction shows the need to develop deeper understanding of these issues, since they are fundamental for teaching and learning of them. We hold that deeper understanding of these issues provides a way to improve the knowledge of university students in Primary Education. As part of these students' pedagogical training, courses in mathematics pedagogy should work on basic aspects of the content of school mathematics, such as fractions, considering different approaches in addition to the part-whole relation.

9.4. CONCLUSIONS RELATED TO THE THIRD OBJECTIVE

We tackled the third research objective through a second empirical phase of the study, which we describe in Chapter 7. In this phase, we use the perspective of instructional analysis to characterize certain certain components of the pedagogical content knowledge, that a group of pre-service teachers demonstrated when asked to develop an explanation to use in introducing the concept of fraction in the primary school classroom.

From the information gathered, we stress that the subjects had no difficulty assuming the role of teachers and expressed their pedagogical content knowledge in their responses. Further, the subjects demonstrated pedagogical content knowledge consistent with their explanations, which emphasized the diverse ways in which the participants reconstructed, adapted, or restructured the content to make it comprehensible to the students. Nevertheless, they showed striking deficiencies in planning the sequencing of the contents in a logical order. For example, we found that 16% of the responses added the symbol of the whole fraction (4/4) before introducing the unitary fraction as the relation between a part and the whole.

The response categories found in the explanations of the components relative to the ways of introducing the contents and the use of representations constitute a contribution of this research. These categories show different profiles of the participants in each of these components.

In the first component, ways of introducing the contents, we find three profiles. The first corresponds to participants who did not include either situations or contextualized problems that could aid in comprehension of the contents (instrumental mode). The second profile corresponds to Education students who tackled the content through contextualized situations and presented the student with cognitive demands, primarily through problem solving (functional mode). The third profile, like the second, introduced the contents through a text that modeled a real situation but did not include cognitive demands (descriptive mode).

In the second of the components, use of representations, we also found three profiles of response. In their explanations of how to introduce fractions to the students, the participants assigned different uses to the illustrations provided in the task. The first use (illustrative) included images given only to accompany the text. The written explanation thus was sufficiently complete to be comprehensible, even if the images were eliminated. In the second use (explanatory), the series of images formed part of the explanation, such that, if eliminated, the text would not make sense, since the text alone did not have explanatory validity. These are insufficient answers, with minimal text that shows no mathematical data; the responses merely give introductory expressions or phrases that link some images to others. Finally, in the third use (clarifying), the images form part of the explanation and improve it. The texts present mathematical information but do not by themselves contribute sense to or complete the explanation. What distinguishes this third use is that the combinations of text and images constitute the explanations, that is, that the illustrations exemplify, give more details, clarify, or demonstrate new contents.

One achievement of this phase of the empirical study stems from the fact that we approach this kind of knowledge through an apparently simple instrument. This approach enables us to avoid the difficulties encountered in other studies (Charalambous, Hill and Ball, 2011; Li and Kulm, 2008), in which lack of content knowledge of fractions influences the results. Our formulation of the activity and the use of illustrations through cards gave rise to greater richness of responses and results. Further, the context of the course oriented the work dynamic to the teaching and learning of Mathematics.

9.5. CONCLUSIONS RELATED TO THE FOURTH OBJECTIVE

We tackled the fourth objective of this study in the third and final phase of the empirical study. Based on the components of the cognitive analysis, the third phase consisted of a case study that developed some aspects characterizing the teacher's knowledge of the learning of the part-whole relation in further depth.

We tackled this phase by asking the participants to reflect on the part-whole relation through the contexts that they had considered and expressed themselves. This approach allowed us to study the knowledge of the components of the cognitive analysis, making it possible to elucidate basic aspects of the pedagogical knowledge in a way that was natural to the participants. This phase centered on two issues in particular. The first was the contexts or modes of use that the participants chose to begin teaching the concept of fraction; and the second, task design, the statement of learning expectations, and identification of the limitations concerning the concept of fraction, given the fundamental role that these components play in planning instruction (Lupiáñez, 2008). In both cases, we obtained information relevant to the participants' pedagogical knowledge.

By evaluating the results for evaluations of the contexts of the part-whole relation, we confirm that the context with the highest score was finding the complementary part (Fp), followed by finding the part using a unit of measure (Um); the worst score was reconstructing the unit (Ru), while the contexts of finding the part (Fp) and distribute (Ds) received quite disparate scores depending on the magnitude considered. Distribute a two-dimensional object ranked better than distribute an object of only one dimension. In contrast, finding the part seems simpler for objects with length only than for objects with two dimensions. Support using an auxiliary unit of measure (Um) also received acceptable score. The latter case is distinctive in that it shows disparate opinions when both different magnitudes and the same magnitudes are used. That is, some groups of subjects consider it less useful to include new concepts (units of measure) in teaching, while other subjects view these additional concepts as helpful in teaching. Because these opposing opinions are accentuated among the different magnitudes, complementary techniques for data collection, worksheets, and interviews are important to ensure deeper treatment in obtaining the subjects' evaluations.

From the first part of the interview, in which the participants evaluated the five senses simultaneously for the magnitudes of surface area and length, we observe that the participants did not score the five contexts equally, and that the score assigned depended on the magnitude; contexts given a high evaluation for one of these magnitudes could receive a low evaluation for another. The reasons the participants gave for their higher or lower evaluations of the contexts involved the possibility of making a visual representation, which they recognized as a typical school activity. This representation might or might not consist of a content the student had already worked on, or it could be an activity of inverse argumentation relative to the activities commonly used to introduce fractions. The students associated this last reason, which is logical-mathematical in character, with the context that they evaluated as least appropriate, the context they gave the lowest score. The reasons linked to the curricular development of the contents scored in a middle range for evaluation of the different senses. The reasons the participants gave in the interview for evaluating a context very positively are psychological justifications that referred to the participants' possibilities of visualization in learning the concept.

Among the results obtained for task design in the second part of the interview, we would highlight that:

- in all cases, the participants proposed word problems when asked to propose a task on fractions spontaneously.
- the contexts in these problems were varied;
- the contexts did not agree with the evaluations previously considered most appropriate for the teaching of fractions.

In the answers on task design during the interviews, we found that the participants did not differentiate between the different contexts for part-whole interpretation of fractions. They chose one context or another depending on the cognitive demand of the tasks we proposed. Designing a task for primary school students is not easy for the Education students, and they therefore use their resources to draft the task without taking into account whether the context is the most appropriate. We believe that these contradictions show a disconnect between knowledge about teaching and learning, and putting the latter into practice.

The results on another issue studied, the statement of student learning expectations, are generally accurate. Most subjects were able to state specific objectives for the theme. These expectations referred to the procedural and conceptual contents, to aspects such as dividing different types of objects and the utility of fractions. These capabilities are recognized in the tasks performed by this group of teachers in the initial stages of training.

In the study of the limitations in learning, the subjects were able spontaneously to give examples of tasks appropriate for the learning of fractions written in the form of problems. They showed little or no ability, however, to identify the possible errors that students could commit in these tasks and to link the errors justifiably to difficulties that could cause them. Of the 11 subjects, only 5 identified errors, referring mainly to technical errors that indicate mistakes in the algorithms in adding and subtracting fractions.

The Education students participating in the study did not develop this capability during their training. The individuals in charge of the training programs for teachers should motivate achievement of this aspect of developing professional competence in pre-service teachers.

Finally, overall, the responses analyzed enable us to identify two tendencies in the knowledge of teaching and learning the concept of fraction as demonstrated by the subjects participating in the study.

The first is a procedural or technical tendency in which the knowledge manifested stresses carrying out procedures, processes, or ways of acting. In particular, this tendency classified the participants who proposed procedural expectations, such as "dividing an object into equal parts" or "mastering operations with fractions" and who, when identifying limitations, identified technical errors or difficulties associated with the processes inherent in the mathematical activity, primarily difficulties related to operations with fractions.

In the second tendency, the conceptual, the knowledge of learning demonstrated stresses the functional understanding of fractions and their relationships.

This tendency is exemplified by subjects who stated applied or conceptual expectations, such as "to learn the utility of fractions" or "to learn fractions from the division of a rope," and difficulties associated with the complexity of mathematical objects and the student's cognitive development .

9.5. CONCLUSIONS ON THE METHOD OF DIDACTIC ANALYSIS

Our study involves the method of didactic analysis developed in the Research Group "Didactics of Mathematics, Numerical Thinking" (*Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico* [http://fqm193.ugr.es/]), at the Universidad de Granada. Didactic analysis, as a systematic procedure, guided us in the process of analysis during the planning, organization of data, and obtaining of results in the different phases of the investigation. This study thus shows that didactic analysis is a useful methodology for providing evidence for and describing the knowledge that the teacher in initial training possesses about a specific topic in school mathematics.

Didactic analysis and its components have been used in a variety of Mathematics Education studies with different functions (Picado, 2012; Caraballo, 2014; Valverde, 2012; Rojas, 2014). Not all components have, however, received the same attention in the field of mathematics education research. Content analysis of school mathematics has achieved special relevance as a methodological tool in various studies to identify the diversity of meanings of knowledge of school mathematics (Fernández-Plaza, 2011; Martín-Fernández, 2012; Ortiz, 2002; Vílchez, 2014).

One achievement of this research is the use of the components of didactic analysis to study the content knowledge and pedagogical content knowledge possessed by teachers in the initial stages of training. Our study advances understanding of the knowledge of school mathematics through content analysis, since we develop a deeper understanding through analysis using the other components of didactic analysis. We thus contribute to showing the potential of didactic analysis as a tool for addressing the knowledge possessed by university students in the undergraduate degree program in Primary Education.

In this study, we specifically highlight the utility of each component of didactic analysis used: conceptual analysis, content analysis, instructional analysis, and cognitive analysis.

The utility of conceptual analysis in Mathematics Education has already been shown in topics such as the notion of model (Rico, 2001), negative number (Maz, 2005) and representation (Rico, 2009). By developing conceptual analysis of the part-whole relation as a fundamental part of this study, included in Chapter 5, we contribute to showing its utility when initiating a research study in Mathematics Education.

Since the model of didactic analysis includes the three types of knowledge with which we work (knowledge of school mathematics content; knowledge of learning, or cognitive knowledge; and knowledge of teaching, or instructional knowledge), didactic analysis permits us to plan the different phases of the empirical study based on the content, cognitive, and instructional analyses, which give rise to the design of the three phases in the empirical study.

In the first phase of the empirical study, which focused on the content knowledge of teachers in initial training, content analysis of school mathematics and its three dimensions based on the semantic triangle (conceptual structure, systems of representation, and contexts or modes of use) provided the foundation for design and construction of the questionnaire used to evaluate the scope of the meanings demonstrated by the teachers in initial training. We include the data analysis and results obtained in Chapter 6 of this study, where we present the semantic triangle and its components as an effective tool for studying the content knowledge of school mathematics held by teachers in initial training.

The second phase of the empirical study focused on the knowledge of teaching the part-whole relation. In this phase, the instructional analysis enabled us to answer the question about how the teachers in initial training develop their teaching of the part-whole relation. Instructional analysis formed the basis for obtaining and analyzing the data, as well as for interpreting them using various tools. One achievement of this phase derives from our ability to approach this kind of knowledge easily and naturally with the teachers in initial training. Our formulation of the activity and use of illustrations on cards gave rise to greater richness in the responses and results. The analysis and interpretation of the data are found in Chapter 7 of this study.

In the third phase of the empirical study, which focused on analyzing the knowledge of learning, cognitive analysis permitted us to organize the why and wherefore of learning specific knowledge about a topic. The dimensions of this phase (task design, expectations, and limitations in learning) grounded the design and construction of the interview and analysis of the productions.

The study shows that didactic analysis provides a methodological framework that enables the development of deeper understanding of different aspects of knowledge held by the teacher in initial training concerning a specific topic in school mathematics.

9.6. LIMITATIONS OF THE RESEARCH

We performed the study presented in this thesis with rigor and precision. We were guided by an exhaustive in-depth analysis of the data collected, which gives the interpretations and conclusions produced a high degree of validity. There are, however, issues that limit the study. In this section, we present some of the general limitations that emerged in the course of this study, especially limitations that arose in each phase of the empirical study.

In each phase, the sample of subjects chosen was intentional. The volunteer participants were university students in the undergraduate degree in Primary Education at the Faculty of Education and the School of Education *Escuela Universitaria de Magisterio la Inmaculada*, centers belonging to the University of Granada. We tackled our study from an interpretive paradigm, without generalizing to other contexts that differ from the framework of the training of undergraduate students in Education. Our results are thus limited to this particular group of subjects, whose specific characteristics confirm that the results could not be generalized automatically to the university students pursuing the undergraduate degree program in Mathematics and who aspire to training as math teachers. It would be interesting to replicate this study with students from the undergraduate degree program in Mathematics, who would provide useful data.

It is also a limitation that the subjects in the first phase were not the same as those in the second and third phases. The students of course fulfilled the minimal common requirements of being university students pursuing studies in the undergraduate degree program in Education, guaranteeing the validity of the analyses. However, the somewhat cross-sectional nature of our study produces some interpretive limitations. Having the same subjects participate in the different studies during their years in the program would have granted greater validity to the global analyses considered in the different components of knowledge of the teacher that we analyze and their interrelation.

As to the data collection tools, the instruments developed throughout the phases of the empirical study focus on the part-whole relation, without considering other interpretations of fractions. Our instruments contain items that can seem simple, since their purpose is to develop deeper knowledge of the foundation of fractions through the part-whole relation. The emphasis on the tasks in Questionnaire 1, applied in the first phase, on the action of fractioning, could limit the variety of the responses. We chose these questions intentionally, however, to focus on basic meanings of the part-whole relation. Likewise, the instruments developed in the second and third phases and our interpretation focused on the teaching and learning of the introduction of fractions from the part-whole relation, since we do not tackle other aspects of fractions.

Since this study focuses on analyzing content knowledge and pedagogical content knowledge of the teachers in initial training, we based our work on the method of didactic analysis and its first four components, without including the fifth and final component, evaluative analysis. We obtained the data from courses underway in the undergraduate degree program in Primary Education in the area of Mathematics Pedagogy. Although action evaluation can provide useful information about professional knowledge, we did not include it in this study, since, to perform this analysis, we would need information from the putting into practice of the teaching and learning activities to improve the planning and teaching practice. Since our participants did not put their planning work into practice, we could not evaluate the extent to which they achieved their expectations about the teaching and learning of fractions.

9.7. FUTURE LINES OF RESEARCH

The development of this study, its limitations, and the constraints we imposed on it gives rise to a series of future actions whose analysis we believe to be appropriate for future lines of research. We highlight the following.

- To design and implement specific, individual, timely actions in the training of the undergraduate Education students that derive from our study, and to integrate these into the education system in which the students are studying. In this way, we seek to enrich the pedagogical content knowledge of school mathematics that the students possess in a merely partial and sometimes incomplete way.

- Our study adheres to the part-whole relation as one of the interpretations that give meaning to fractions, but we limit ourselves to interpreting this relation in the phase of introducing the concept of fraction. We leave the implications of the part-whole relation in other phases of the learning of fractions—such as the equivalence of fractions, operations with fractions, or their order—as a question for further investigation.

- Along the lines of didactic analysis in this field of research, we believe it is necessary to continue developing the utility of didactic analysis for studying content knowledge and pedagogical content knowledge through its five components: conceptual analysis, content analysis, cognitive analysis, instructional analysis, and action evaluation in training secondary. Action evaluation is the component that has received the least attention in the area of research in mathematics education. It is important to explore new possibilities or variants for applying didactic analysis as a research methodology. As applied in this study, didactic analysis opens a path for research on other mathematics concepts, but we cannot dismiss its use in new contexts for training teachers, for example, internships.

- Working with other groups of subjects constitutes a possible line of action. Mathematics teachers in secondary education also face the teaching of fractions as one of their functions as teachers. Future research could replicate this study with university students in the undergraduate degree program in Mathematics. This study should also be replicated with students in the undergraduate degree program in Education specializing in early childhood education. At this level of study, the part-whole relation is a pre-numerical concept that should form part of the teacher's pedagogical knowledge. Since the foundations for the first numerical concepts are laid at this initial stage, we should have the most precise foresight possible regarding the knowledge that university students in the degree for childhood education have of the part-whole relation.

- This study focuses on the part-whole relation as the basis of fractions. Although fractions are a basic concept of school arithmetic, we have found gaps in the knowledge demonstrated by the subjects. Exploring the interrelation between the different types of knowledge possessed by the students in the undergraduate Education program through cross-sectional studies would give a fuller portrait than the view we have obtained in our research.
- As indicated in the section on the study's limitations, the case studies performed in the third phase permitted us to develop certain aspects of the participants' didactic knowledge and to provide evidence that there are profiles (conceptual and procedural) in the teaching and learning of fractions. We believe it is necessary to develop deeper knowledge of these profiles, both in the topic of fraction and in other topics of school mathematics.
- As to the study of pedagogical knowledge, one achievement of our study is the design of instruments appropriate for studying this knowledge in the area of fractions. Due to the difficulties involved in designing and choosing appropriate instruments for the study of pedagogical content knowledge (D'Ambrosio and Mendoça, 1992; Domoney, 2001; Gómez and Gutiérrez-Gutiérrez, 2014; Marks, 1990), we believe that the instruments designed in this research constitute a preliminary foundation on which to build new instruments for the study of pedagogical knowledge that focuses on these mathematical notions.

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexos A

Cuestionario

El grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información acerca de ciertos aspectos de interés relacionados con las fracciones.

No es un examen sobre fracciones. Es una encuesta que estudia los usos cotidianos de las fracciones y los repartos.

Se ruega que lo contestes de forma individual, con creatividad e interés.

Muchas gracias de antemano.

Sexo: ☐ 1 Hombre ☐ 2 Mujer **Edad:** ☐☐

Titulación: ______________________

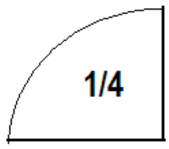
Facultad: ______________________

ACTIVIDAD 1. ¿Qué es fraccionar?

Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar.

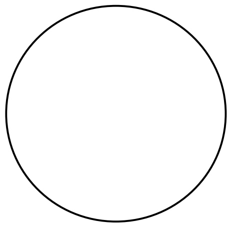
Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar.

ACTIVIDAD 2. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones:



1/3 de

¼ de



1/2 de

$$\overbrace{\rule{4cm}{0.4pt}}^{1/3}$$

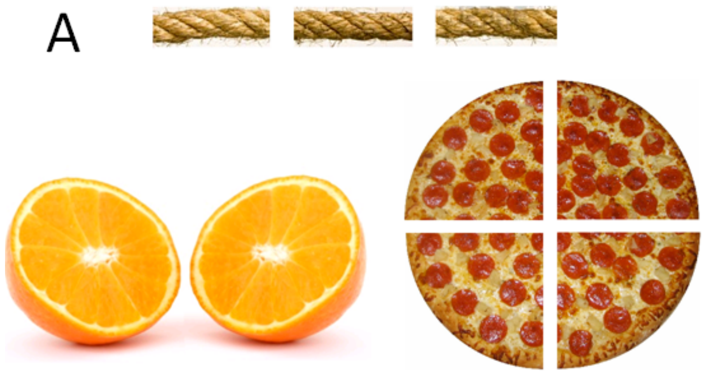
ANEXOS B

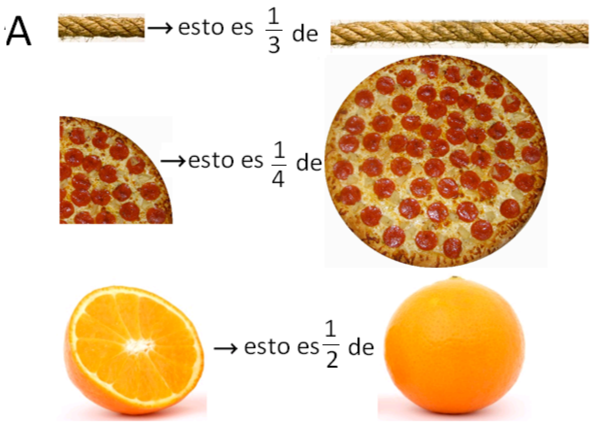
Nombre y Apellidos: ____

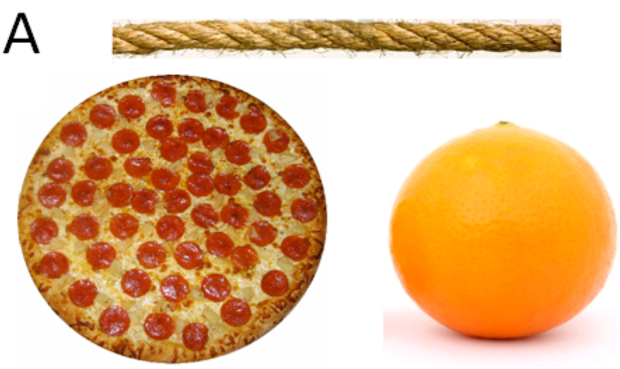
Curso y grupo: ____

Actividad: Las cuatro tarjetas que aparecen a continuación pueden usarse para ilustrar el concepto de fracción. Se desea elaborar un material para iniciar a los alumnos de primaria en las fracciones. Establece el orden en que las tarjetas deben aparecer y redacta el texto que debe ir antes y después de cada tarjeta (como si fuese un libro de texto para primaria).

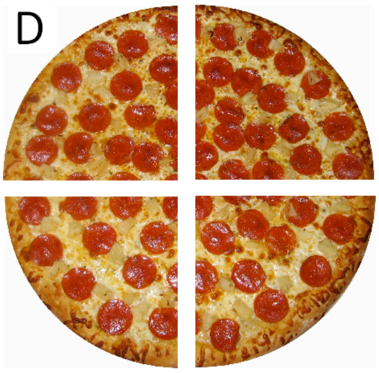
Anexo B2

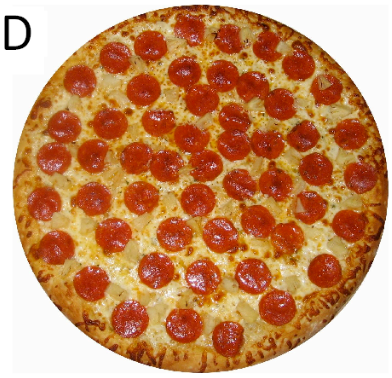


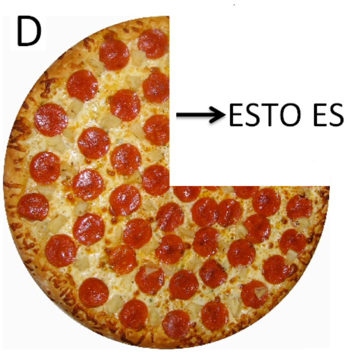




Anexo B2



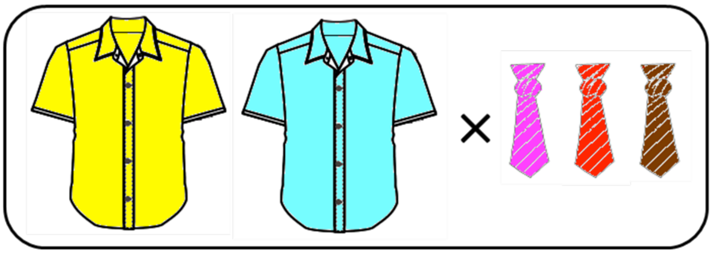


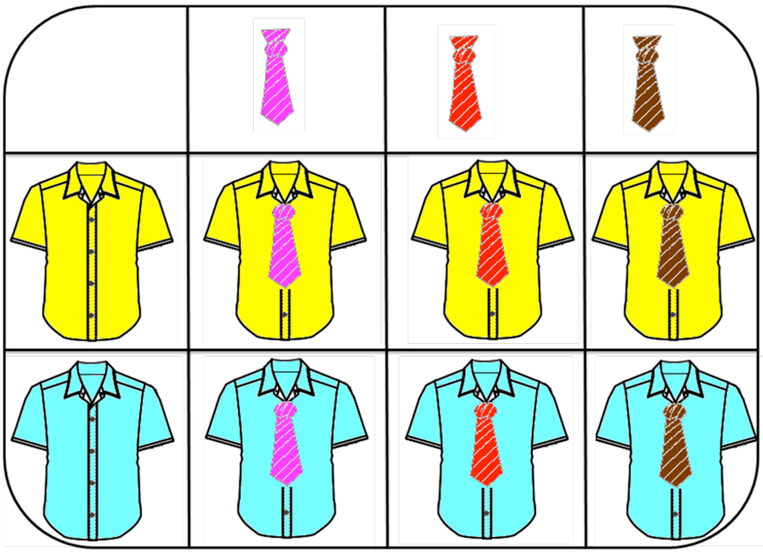


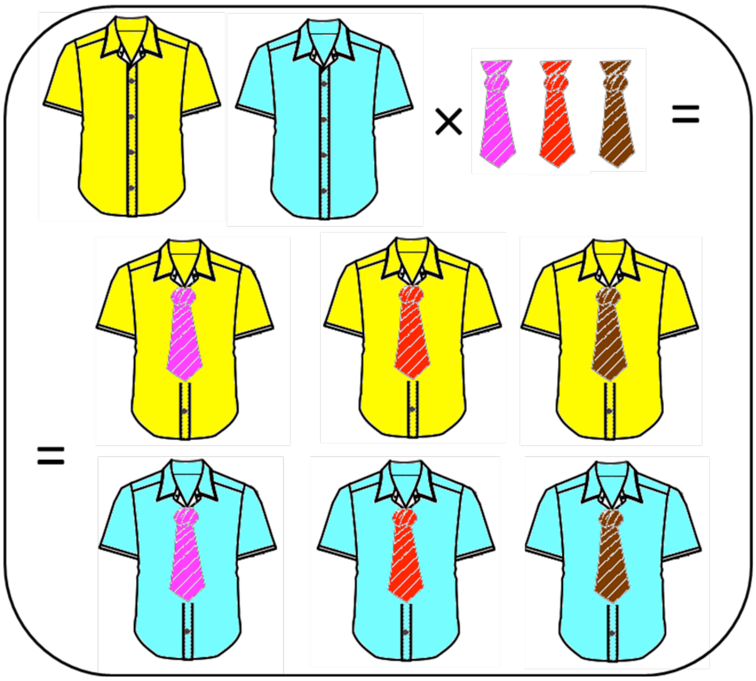
→ESTO ES $\frac{3}{4}$ DE

Nombre y Apellidos: ____
Curso y grupo: ____
Actividad: Las cuatro tarjetas que aparecen a continuación pueden usarse para ilustrar el concepto de multiplicación mediante producto cartesiano. Se desea elaborar un material para iniciar a los alumnos de primaria en la multiplicación. Establece el orden en que las tarjetas deben aparecer y redacta el texto debe ir antes y después de cada tarjeta.

Anexo B4







$$\boxed{2 \times 3 = 6}$$

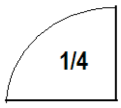
ANEXOS C

Anexo C1

Nombre y apellidos: ____

1. Cinco compañeros han respondido a la siguiente actividad mediante estos enunciados. Léelos con atención y valóralos según te parezcan respuestas más o menos adecuadas a la pregunta.

ACTIVIDAD 3. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugiera la siguiente ilustración:



- Alumno 1. Tenemos ¼ de una tarta, pero para hacer una tarta completa necesitamos más trozos que sean iguales. ¿Cuántos trozos necesitaremos?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 2. Tenemos una tarta, y María se come ¼ de ella. ¿Qué cantidad de tarta queda aún?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 3. Mamá ha hecho una tarta por mi cumpleaños y la ha dividido en 4 partes iguales, Papá que come mucho se ha comido una parte. ¿Cuánto se ha comido de la tarta?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 4. Si María se ha comido 25 gr. de una tarta que pesa 100 gr., ¿qué fracción de tarta se ha comido?

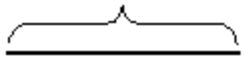
  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 5. Mamá preparó 1 tarta para mi cumpleaños. Como éramos 4 en la fiesta ¿a cuánto tocábamos cada uno?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

ACTIVIDAD 4. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugiera la siguiente ilustración:

1/3



- Alumno 1. Una carrera está compuesta por 3 tramos, cada uno de la misma longitud. Los corredores ya han recorrido la tercera parte de la carrera. ¿Cuántas partes quedan por recorrer?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 2. Estoy participando en una carrera y ya he recorrido 1/3 de ella. ¿Cuánto queda para llegar a la meta?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 3. El camino desde el colegio a casa se puede dividir en 3 partes iguales. Si he caminado una de las partes del camino, ¿cuánto he recorrido?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 4. Para ir al supermercado tardamos 15 minutos andando y llevamos 5 minutos. Representa en fracción cuanto hemos realizado del trayecto.

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

- Alumno 5. En una carrera de relevos el recorrido se reparte entre 3 corredores, ¿cuánto tendrá que recorrer cada corredor?

  Inadecuada☐ Poco adecuada☐ Adecuada☐ Muy adecuada☐ Ns/NC☐

Al poner en práctica tu secuencia en clase con tus alumnos…

1. ¿Qué esperas que aprendan?

2. Imagina una forma en que un alumno realizaría correctamente la tarea que planteas y descríbela.

3. En esta tarea, ¿cómo se pueden equivocar los alumnos?

4. ¿Por qué crees que se pueden equivocar?

ANEXO C.2

GUIÓN DEL ENTREVISTADOR

La entrevista se encuentra estructurada por pasos como muestra la tabla 1.

Tabla 1. Estructura de las dos partes de la entrevista

Primera Parte				Segunda parte
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5
Valoración de 5 enunciados de la magnitud superficie	Elección y justificación del enunciado (de área) más adecuado para la enseñanza.	Valoración de 5 enunciados de la magnitud longitud	Elección y justificación del enunciado (de longitud) más adecuado para la enseñanza.	Respuestas sobre diseño de tareas, expectativas de aprendizaje y limitaciones

Material necesario

Grabadora, ficha para el alumno, block para anotar comentarios, tarea realizada por el alumno en la segunda fase de la investigación.

PRESENTACIÓN Y PREGUNTAS INTRODUCTORIAS

Esta parte introductoria se realiza como una primera toma de contacto con el entrevistado para crear un clima de confianza.

Entrevistador:	(Presentación) A continuación vamos a hablar sobre matemáticas porque queremos recoger información acerca de ciertos aspectos. Tus respuestas serán tratadas de forma anónima, estas preguntas no forman parte de tu evaluación en la asignatura por lo que puedes responder con total libertad y sinceridad. (Preguntas introductoria) En primer lugar, describe brevemente tu experiencia como estudiante de matemáticas en primaria y secundaria.
Sujeto:	…
Entrevistador:	¿Qué notas obtuviste?
Sujeto:	…
Entrevistador:	¿Te resultan difíciles las matemáticas?
Sujeto:	Sí/no
Entrevistador:	Y durante la carrera ¿qué notas has obtenido en las asignaturas de matemáticas?
Sujeto:	…
Entrevistador:	Con respecto al tema de las fracciones, ¿te resulta difícil?
Sujeto:	Sí/no
Entrevistador:	En tu periodo de prácticas en el colegio, ¿has explicado las fracciones?
Sujeto:	Sí/no
Entrevistador:	(En caso afirmativo) ¿te sentiste seguro, con confianza al explicarlo?
Sujeto:	Sí/no

PRIMERA PARTE: VALORACIÓN DE CONTEXTOS

La primera parte de la entrevista consta de cuatro pasos. En ella se aborda la valoración de los contextos de la relación parte-todo a través de 10 ejemplos de enunciados, cinco para la magnitud superficie y cinco para la longitud. Los 10 ejemplos seleccionados se utilizaron para elaborar las fichas que se presentan en las figuras 1 y 2. Los 10 ejemplos son respuestas diferentes, proporcionadas por estudiantes del grado de Educación Primaria.

Paso 1

Se presenta a cada sujeto una ficha con distintos enunciados sobre la relación parte-todo relativa a la magnitud longitud (ver figura 1). La actividad consiste en que el sujeto entrevistado valore cada enunciado como inadecuado, poco adecuado, adecuado o muy adecuado, con la opción no sé, no contesta como quinta posibilidad de respuesta. En el caso de seleccionar esta última opción se sugerirá al sujeto que explique por qué no ha sabido valorar el correspondiente enunciado.

Las respuestas a los distintos enunciados son independientes, pudiendo valorar distintas cuestiones con el mismo juicio.

Entrevistador:	(Se entrega la ficha al sujeto) Cinco alumnos han respondido a la siguiente pregunta mediante estos enunciados. Léelos con atención y valóralos según te parezcan respuestas más o menos adecuadas a la pregunta. (Esta pregunta se realiza en la ficha)
Sujeto:	…

Paso 2

Dado que en la ficha presentada en el primer paso no se puede discernir entre cual es el enunciado que cada participante considera para la enseñanza mejor y peor de entre los cinco presentados, ni los motivos de ello, consideramos relevante añadir preguntas en la entrevista para profundizar en las valoraciones, pero en este caso verbalmente. Por ello, en un segundo paso de la entrevista se pide a los sujetos que elijan el enunciado más adecuado y el menos adecuado para la enseñanza del concepto de fracción, y argumenten su elección a través de las preguntas siguientes.

Entrevistador:	Imagina que estás en el aula, para iniciar a tus alumnos en la enseñanza del concepto de fracción, ¿cuál o cuáles de los enunciados anteriores utilizarías como ejemplo de la fracción 1/4?
Sujeto:	Enunciado x, y,…/ ninguno
Entrevistador:	(Si son varios) ¿Cuál usarías primero?
Sujeto:	Enunciado x
Entrevistador:	¿Por qué consideras adecuado ese enunciado como ejemplo para introducir las fracciones en clase?
Sujeto:	…
Entrevistador:	¿Cuál de estos enunciados crees que es el más inadecuado?
Sujeto:	Enunciado x
Entrevistador:	¿Por qué lo consideras el más inadecuado?
Sujeto:	…

Paso 3

En los pasos 3 y 4 se repite el mismo proceso de los pasos 1 y 2 para los enunciados con magnitud superficie.

Entrevistador:	(Se da la vuelta a la ficha) Al igual que en el caso anterior, otros cinco alumnos han respondido a esta pregunta mediante estos enunciados. Léelos con atención y valóralos según te parezcan respuestas más o menos adecuadas a la pregunta. (Esta pregunta se realiza en la ficha)
Sujeto:	…

Paso 4

Entrevistador:	Imagina que estás en el aula, para iniciar a tus alumnos en la enseñanza del concepto de fracción, ¿cuál o cuáles de los enunciados anteriores utilizarías

	como ejemplo de la fracción 1/4?
Sujeto:	Enunciado x, y,…/ ninguno
Entrevistador:	(Si son varios) ¿Cuál usarías primero?
Sujeto:	Enunciado x
Entrevistador:	¿Por qué consideras adecuado ese enunciado como ejemplo para introducir las fracciones en clase?
Sujeto:	…
Entrevistador:	¿Cuál de estos enunciados crees que es el más inadecuado?
Sujeto:	Enunciado x
Entrevistador:	¿Por qué lo consideras el más inadecuado?
Sujeto:	…

SEGUNDA PARTE: ANÁLISIS COGNITIVO

Este estudio se centra en el conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de los maestros en formación, por ello la segunda parte de la entrevista introduce a esos estudiantes en una situación de enseñanza-aprendizaje relativa a las fracciones. Para esto se entregó a cada sujeto la narración como reactivo que ellos mismos habían realizado en el estudio previo de la segunda fase sobre cómo iniciar a los escolares en el concepto de fracción.

Con la entrega de la narración previamente elaborada, planteamos nuevas preguntas, relativas a tres de las componentes del análisis cognitivo: diseño de tareas, objetivos y limitaciones

Quinto paso

Entrevistador:	(El entrevistador entrega al sujeto su narración) Lee la narración que realizaste el curso pasado de las pegatinas que presentaba el concepto de fracción. ¿Con cuál de los enunciados de la pregunta anterior la identificas?
Sujeto:	Enunciado x, ninguno.
Entrevistador:	(Si lo identifica con un enunciado que no corresponde a su narración). ¿Por qué lo identificas con ese enunciado? ¿Qué similitudes encuentras?
Sujeto:	…

Entrevistador:	(Diseño de tareas) Para finalizar la explicación de tu narración sobre cómo introducir las fracciones a los escolares, propón alguna tarea, actividad o problema.
Sujeto:	…
Entrevistador:	(Sobre los objetivos) Al poner en práctica tu secuencia en clase con tus alumnos, ¿qué crees que aprenderán?
Sujeto:	…
Entrevistador:	(Errores) ¿En qué se pueden equivocar?
Sujeto:	…
Entrevistador:	(Dificultades) ¿Por qué crees que se pueden equivocar?
Sujeto:	…
Entrevistador:	(Al finalizar) Ya han acabado las preguntas, ¿te gustaría comentar algo que no hayas dicho anteriormente?
Sujeto:	Sí/no …
Entrevistador:	Muchas gracias por tu colaboración.