CARACTERIZACIÓN DEL SIGNIFICADO DE MÚLTIPLO POR MAESTROS EN FORMACIÓN

Ángel López, Encarnación Castro y María C. Cañadas

Este trabajo forma parte de una investigación centrada en la divisibilidad en Z^+. Los sujetos participantes son maestros en formación. Uno de los objetivos de la investigación consiste en caracterizar los significados que muestran los maestros en formación sobre el concepto de múltiplo. Este artículo recoge los resultados obtenidos en relación con dicho objetivo. Analizamos las producciones escritas de 37 maestros en formación obtenidas en una sesión práctica de aula, diseñada y desarrollada en el contexto de un experimento de enseñanza. Realizamos la caracterización de los significados a través de los elementos del análisis didáctico: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Los maestros en formación mostraron mayoritariamente tres significados de múltiplo: producto, relación y dividendo en una división exacta.

Términos clave: Conocimiento matemático; Divisibilidad; Maestros en formación; Múltiplo

Characterizing the Meaning of Multiple by Pre-Service Elementary School Teachers

This paper is part of a wider study focused on divisibility. Participants were prospective elementary teachers. One of the aims of the research is to characterize the meanings of multiple shown by prospective teachers. In this paper, we present the results concerning this aim. We analyse the productions of 37 prospective elementary teachers collected in a practice session, designed and developed in the context of a teaching experiment. We characterize the meanings through the following elements of the didactic analysis: conceptual structure, representation systems and phenomenology. Prospective teachers showed mostly three meanings of multiple: product, relationship and dividend in an exact division.

Keywords: Divisibility; Mathematical knowledge; Multiple; Pre-service elementary school teachers

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2016). Caracterización del significado de múltiplo por maestros en formación. *PNA, 10*(2), 111-134.

Actualmente existe interés en Educación Matemática por indagar sobre temas relacionados con la teoría elemental de números. Algunas investigaciones sobre esta temática se orientan hacia la comprensión de conceptos particulares relacionados con la divisibilidad (Bodí, Valls y Llinares, 2007; Brown, Thomas y Tolias, 2002; Campbell, 2006; Feldman, 2012; López y Cañadas, 2013; López, Castro y Cañadas, 2013a, 2013b, en prensa; Zazkis y Campbell, 1996a, 1996b; Zazkis, Sinclair y Liljedahl, 2013). Otras investigaciones en este campo se orientan hacia el papel de la teoría elemental de números como contexto; para hacer exploraciones sobre el razonamiento matemático (Lavy, 2006; Liljedahl, 2006; Martin y Harel, 1989; Mason, 2006). La mayoría de estas investigaciones se han realizado con maestros en formación y sus autores insisten en la necesidad de continuar indagando sobre la teoría elemental de números, por la contribución que puede suponer para la forma de trabajar estas nociones en la formación de maestros y su repercusión posterior en su profesión como docentes de educación primaria.

Se han producido debates, discusiones y artículos sobre la incorporación de la teoría elemental de números en programas de formación de maestros. En ellos se pone de manifiesto el apoyo a dicha incorporación. A propósito del informe del National Council Teachers of Mathematics (NCTM, 1981), que trata de la preparación de los profesores de matemáticas, Ball (1988) cuestiona dos aspectos sobre la preparación que deben recibir los maestros en formación y profesores de matemáticas, y que no aparecen en dicho informe. Uno de ellos está referido a la formación de maestros de educación primaria sobre la teoría de números. Posteriormente, el NCTM (1989) sugiere incluir el estudio de la teoría elemental de números en el currículo de matemáticas porque, entre otras cosas, proporciona una comprensión profunda de las propiedades y las estructuras numéricas a los maestros.

En el caso español, la divisibilidad ha sido objeto de estudio en los diferentes programas de educación primaria y secundaria (Bodí, 2006; Sierra, González, García y González, 1989). Actualmente, en el currículo de educación primaria, en un bloque dedicado a números, está incluida la divisibilidad. En los contenidos de este bloque, aparecen términos tales como: múltiplos, divisores, números primos y compuestos, criterios de divisibilidad, obtención de los primeros múltiplos de un número dado y la obtención de todos los divisores de cualquier número menor que 100. En los estándares de aprendizaje evaluables del currículo de primaria destacamos: conoce y aplica los criterios de divisibilidad de 2, 3, 5, 9 y 10; construye series numéricas, ascendentes y descendentes, de cadencias 2, 10, 100 a partir de cualquier número y de cadencias 5, 25 y 50 a partir de múltiplos de 5, 25 y 50; identifica múltiplos y divisores, utilizando las tablas de multiplicar; calcula los primeros múltiplos de un número dado; calcula todos los divisores de cualquier número menor que 100 (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014). Partiendo de estas consideraciones curriculares, entendemos que los estudiantes para maestros han de adquirir formación que les permita trabajar las nociones relacionadas con la divisibilidad en el aula de educación primaria de manera provechosa. Se podría pensar que los maestros en formación conocen estos contenidos ya que los han estudiado en su formación anterior. Sin embargo, esto parece no ser así, si atendemos a la insatisfacción que suelen mostrar los formadores de maestros sobre el conocimiento matemático que muestran sus estudiantes. Se sugiere, por tanto, volver a los conceptos, recordarlos, reforzarlos y "mirarlos" con lentes de docente (Valverde y Castro, 2012).

En relación con la manera de trabajar dichos conceptos, el primero de los estándares propuestos por el NCTM (2000), sobre número y operaciones, destaca la importancia de comprender los números y sus diferentes formas de representarlos, así como la necesidad de establecer relaciones entre ellos. Esta recomendación está hecha para los programas de enseñanza de todas las etapas educativas. El informe de la *Conference Board of the Mathematical Sciences* (CBMS, 2001) incide sobre la misma recomendación. Posteriormente, en *Principles to Actions* (NCTM, 2014) se ratifican los principios y estándares, y se plantean algunas inquietudes relacionadas con actividades improductivas en las aulas, tales como, demasiada atención centrada en los procedimientos de aprendizaje sin ninguna conexión con el significado, la comprensión, o las aplicaciones que requieren estos procedimientos.

En los documentos citados se destaca que es importante que los conceptos asociados a la teoría de números y, por tanto, a la divisibilidad, sean comprendidos por los maestros en formación como una relación y no como una operación aritmética entre números. El significado asociado a la divisibilidad debe responder a la relación que se establece entre números y no quedarse solo en la idea de la acción de dividir o multiplicar dos números (López et al., 2013a).

Nuestro objetivo en este artículo es describir y caracterizar los significados de múltiplo que muestran un grupo de maestros en formación. Dicha caracterización permitirá planificar el trabajo a realizar sobre esta y otras nociones de la divisibilidad con los estudiantes que se forman para ser maestros.

Marco teórico

Nuestro trabajo se basa en el modelo de análisis didáctico (Gómez, 2002, 2007; Rico, 1992; Rico y Fernández-Cano, 2013). El análisis didáctico en matemáticas, tiene como propósito establecer los significados de los conceptos a través de diferentes organizadores del currículo y aprehender la intencionalidad educativa del discurso en matemáticas (Rico y Fernández-Cano, 2013). Siguiendo las ideas propuestas por Frege (1998) sobre el significado de un concepto desde el triángulo semántico, Rico y colaboradores hacen una aproximación a los significados de las matemáticas escolares. Esta aproximación de significado, en las matemáticas escolares, queda modelada por tres dimensiones, asociadas a los organizadores del currículo estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Gómez, 2007; Rico, 2012; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

En la figura 1 mostramos las cinco fases que estructuran el análisis didáctico: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de evaluación (Rico y Fernández-Cano, 2013); destacando los organizadores del currículo del análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Gómez, 2007). Igualmente exponemos el proceso que seguimos con cada uno de los tres organizadores del currículo.

Distinguimos en la estructura conceptual de la divisibilidad tanto elementos conceptuales como elementos procedimentales. Así por ejemplo, con el organizador estructura conceptual, identificamos la relación entre los conceptos y procedimientos asociados a la divisibilidad.

Con el organizador sistema de representación, identificamos los distintos sistemas de representación utilizados para comunicar las ideas matemáticas y las operaciones en un mismo sistema de representación y entre sistemas de representación. Con el organizador del currículo fenomenología, identificamos el modo de uso de los conceptos asociados a la divisibilidad.

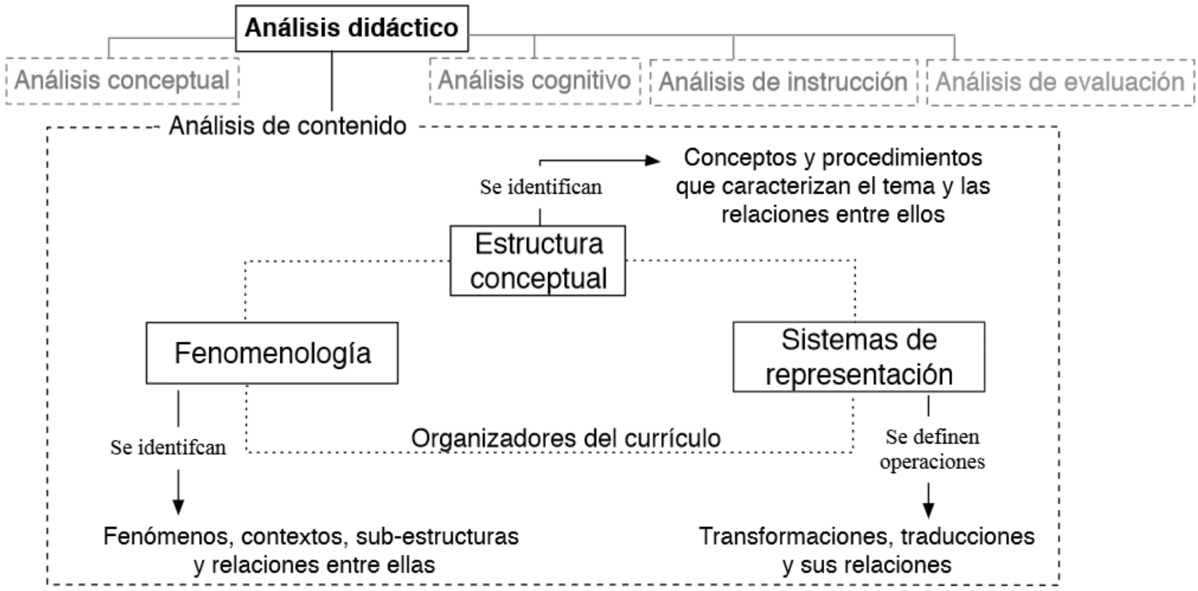

Figura 1. Análisis didáctico: análisis de contenido

Los tres organizadores del currículo que vertebran el análisis de contenido están estrechamente relacionados. Por ejemplo, cuando decidimos que un número dado es múltiplo de otro, no solo consideramos la estructura conceptual (el concepto en sí mismo), sino que también tenemos en cuenta la forma como se representa y los fenómenos asociados a un contexto y a una subestructura matemática determinada.

En la figura 2 mostramos un esquema de la estructura conceptual de la divisibilidad, así como las relaciones de orden que se generan a partir de su interpretación; producto del análisis de contenido realizado. Así por ejemplo, si leemos de izquierda a derecha $a|b$ (a divide a b) cuando a es divisor o factor de b. Si leemos de derecha a izquierda $b = \dot{a}$ (b es múltiplo de a) cuando b es múltiplo de a o cuando b es divisible por a.

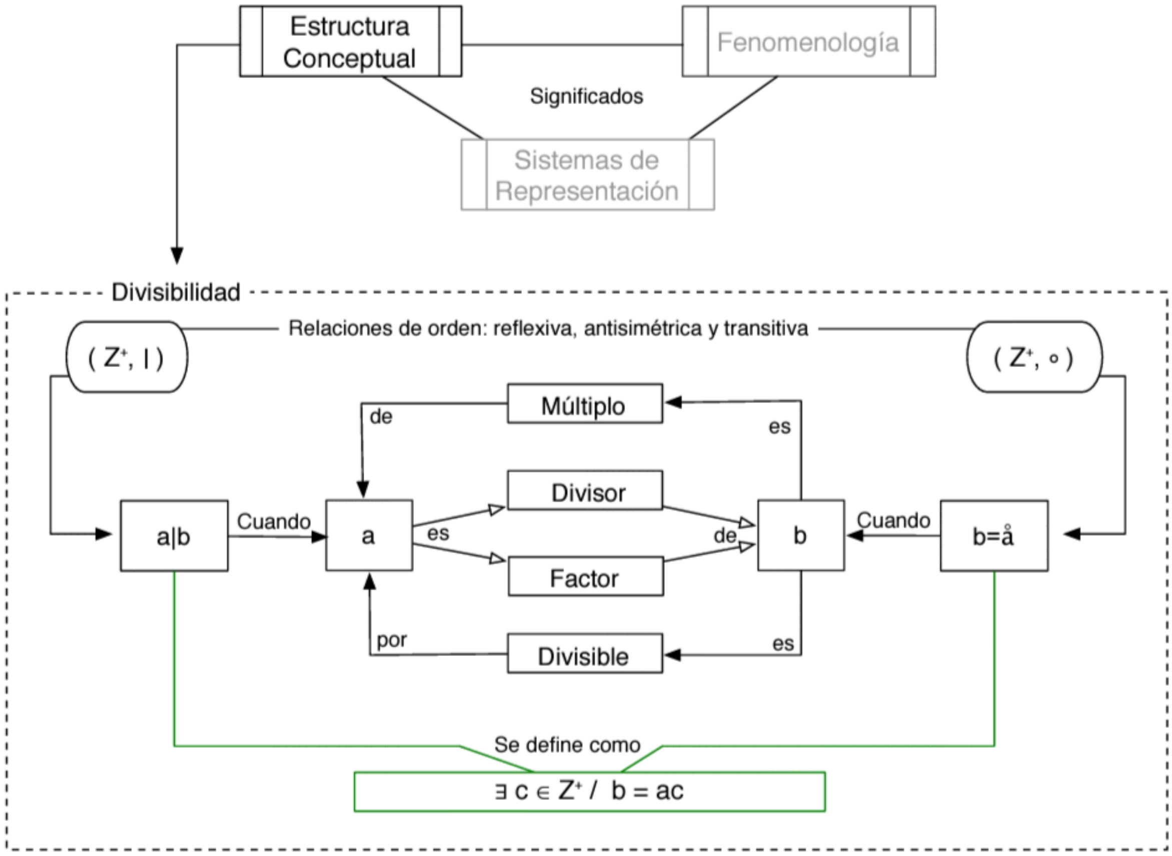

Figura 2. Esquema de la estructura conceptual de la divisibilidad

En lo que respecta a sistemas de representación, en la figura 3 presentamos de manera organizada, los sistemas de representación asociados a la divisibilidad, así como las operaciones que se pueden establecer entre un mismo sistema de representación y entre distintos sistemas de representación.

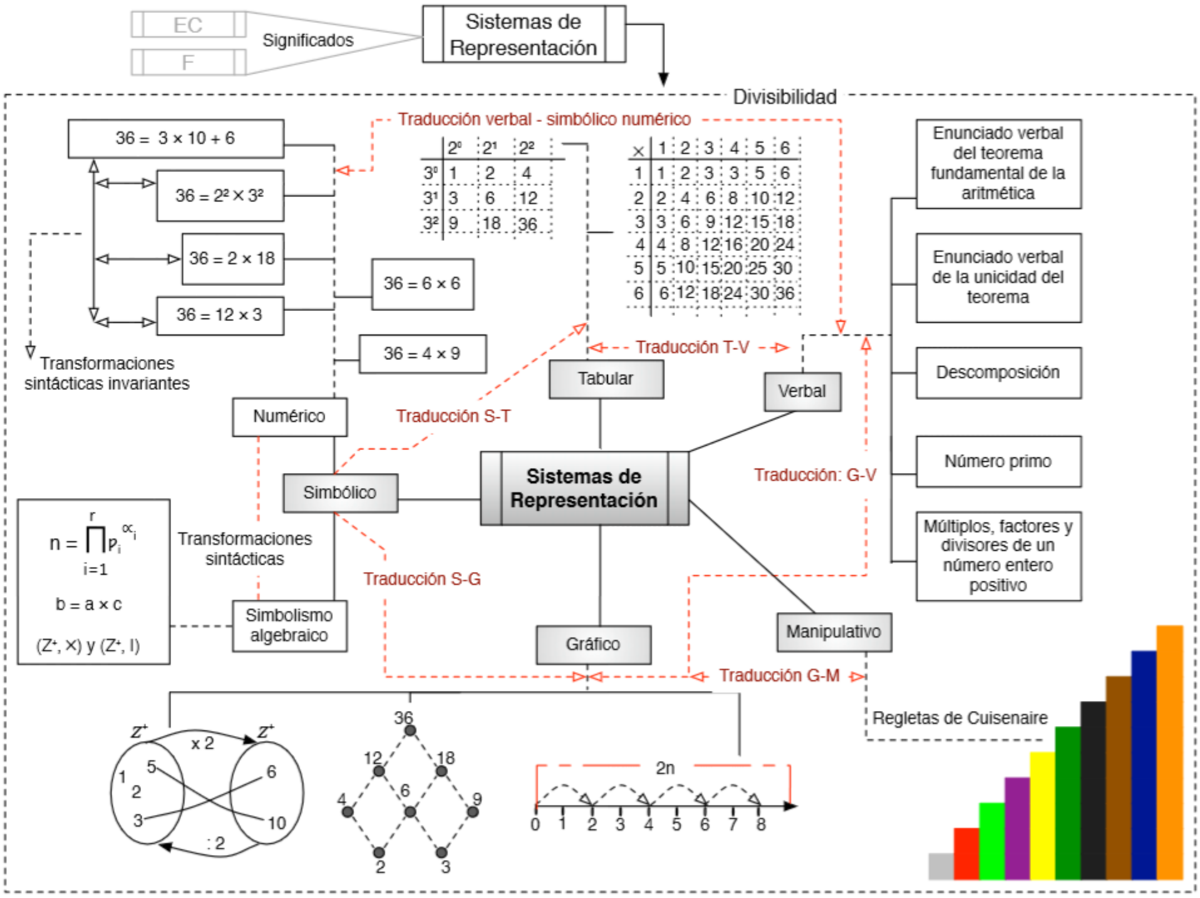

Figura 3. Sistemas de representación asociados a la divisibilidad

De las cuatro operaciones (o relaciones) entre sistemas de representación que se consideran (Gómez, 2007), distinguimos dos tipos: traducción y transformación. La traducción se da cuando un mismo objeto es expresado, equivalentemente, en diferentes sistemas de representación. La transformación se da cuando el cambio de expresión se produce dentro del mismo sistema de representación. La transformación puede ser invariante o variante (véase figura 4). La primera se caracteriza por escribir un objeto matemático en forma equivalente en el mismo sistema de representación. Por ejemplo, escribir el número 36 en su representación posicional de base diez en forma equivalente como productos de factores $36 = 2 \times 18$ o escribirlo como el producto de factores primos $36 = 2^2 \times 3^2$. La segunda (transformación sintáctica variante) se caracteriza por el cambio que se produce en el objeto representado. Por ejemplo, desde la descomposición canónica $2^2 \times 3^2$ multiplicar por 2 para obtener un múltiplo de $2^2 \times 3^2$, esto es $2 \times (2^2 \times 3^2) = 2^2 \times 3^2$.

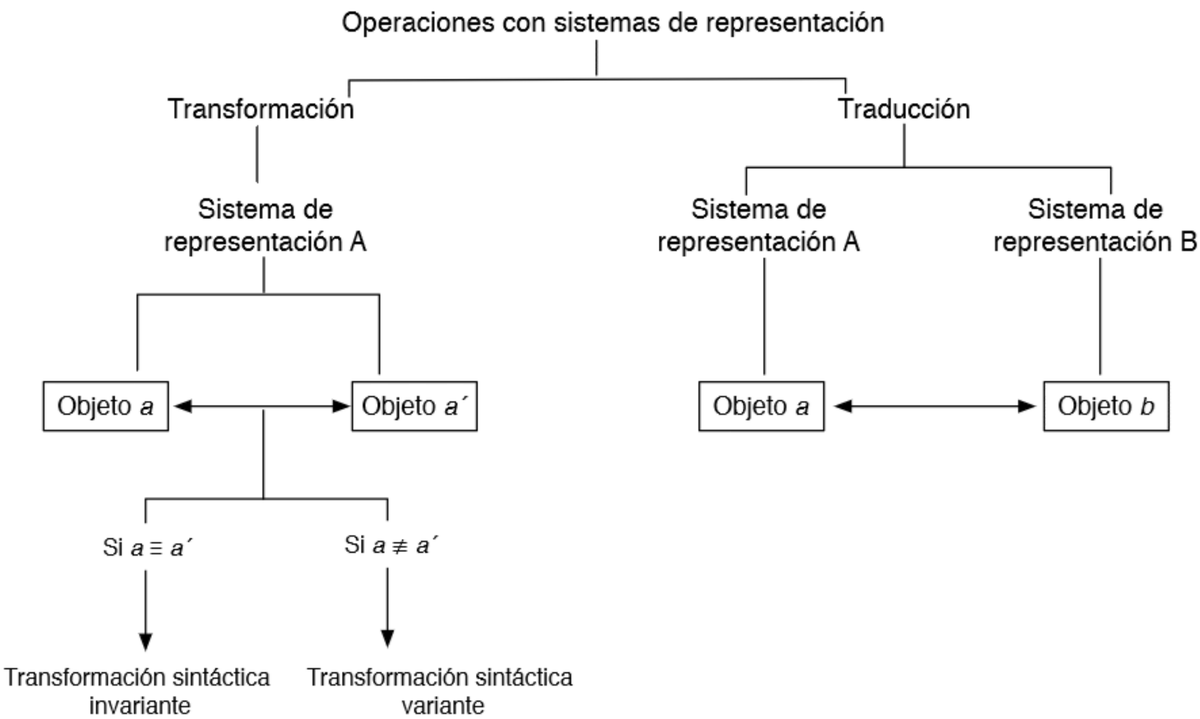

Figura 4. Operaciones con los sistemas de representación

En cuanto a la fenomenología, en la figura 5 mostramos los contextos asociados a la divisibilidad. Consideramos cuatro contextos: dos de tipo operacional (operaciones aritméticas y cardinal) y dos de tipo relacional (relación ser múltiplo y relación ser divisor). En el contexto operacional, los fenómenos, o modos de uso de los conceptos, están asociados a la acción de multiplicar o dividir dos números, a la descomposición de un número en factores, así como a determinar el número de factores o divisores de un número dado. En el contexto relacional los fenómenos, o modo de uso de los conceptos, están asociados al reconocimiento de la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo o divisor de otro.

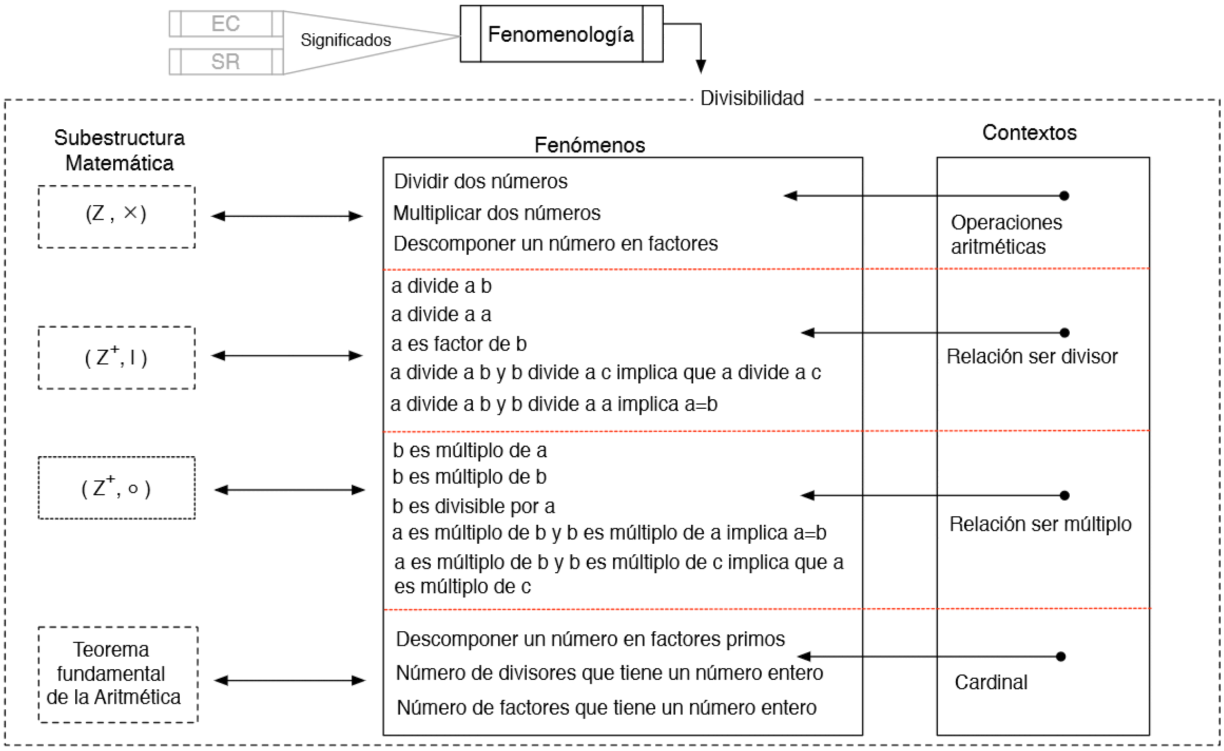

Figura 5. Fenomenología asociada a la divisibilidad

El estudio

Diseñamos, implementamos y analizamos un experimento de enseñanza, dentro del paradigma de investigación de diseño, en un contexto natural de formación de maestros. De las tres fases de que consta el experimento de enseñanza, preparación, implementación y análisis (Cobb y Gravemeijer, 2008; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), describimos en este artículo, solo una parte de cada una de dichas fases: la correspondiente a cinco cuestiones asociadas a la noción de múltiplo.

Sujetos, fuentes de información y diseño de las cuestiones

Los sujetos de estudio fueron 37 maestros en formación, tomados intencionalmente, del curso académico 2012-2013, alumnos de la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria del Grado de Educación Primaria en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Las fuentes de información fueron las producciones escritas individualmente sobre cinco cuestiones referidas a múltiplo (figura 6) y, de forma complementaria, las grabaciones de audio de las discusiones de grupo que realizaron durante la sesión, cuando resolvían las cuestiones.

Diseñamos cinco cuestiones tomando en consideración las relaciones asociadas a la estructura conceptual de la divisibilidad (véase figura 2), los sistemas de representación (véase figura 3) y la fenomenología (véase figura 5). Así por ejemplo, en las cuestiones 1, 2 y 3 los maestros en formación deben identificar relaciones verdaderas o falsas en el esquema presentado en la estructura conceptual de la divisibilidad (véase figura 6). La identificación o no de estas de estas relaciones nos da información, desde el punto de vista conceptual sobre la divisibilidad. Al responder a estas tres cuestiones podemos identificar, en las producciones escritas, si los maestros en formación establecen relaciones entre conceptos, entre procedimientos o ambas. Igualmente en las cuestiones 1, 2 y 3 se representan números en su descomposición canónica y también se representan otros números en su forma posicional de base diez. La representación del número (que es el múltiplo) en forma canónica nos permite identificar, en las producciones escritas, si los maestros en formación utilizan la descomposición de un número en factores primos, si utilizan la estructura multiplicativa $b = a \times c$ o si utilizan las operaciones aritméticas de multiplicación o división para responder a estas cuestiones. Identificamos si en las producciones escritas los maestros en formación asocian múltiplo a un contexto operacional; que queda determinado por las operaciones aritméticas de multiplicación o división de números, o a un contexto relacional en el cual hacen uso del teorema fundamental de la aritmética.

En la cuestión 4 los maestros en formación deben escribir múltiplos de un número dado. El número dado lo representamos en su descomposición canónica y no se dice nada sobre la representación que deben usar para escribir los múltiplos. El hecho de estar abierta la forma de escribir los múltiplos del número dado, nos permitió observar el tipo de representación utilizada en la estrategia que cada uno de ellos utilizó. Esa estrategia utilizada está asociada al contexto operacional o relacional.

La cuestión 5 es una pregunta abierta sobre la consideración de múltiplo que cada uno tiene. Con esta cuestión podemos comparar la consideración personal sobre múltiplo de un número con la estructura conceptual de la divisibilidad, sistema de representación y el modo de uso del concepto. En la figura 6 recogemos las cinco cuestiones que diseñamos.

Implementación

Implementamos el experimento de enseñanza en tres sesiones de aula. La metodología de trabajo fue diferente para cada una de ellas. En la primera sesión, los estudiantes realizaron trabajo teórico-práctico; en la segunda sesión, realizaron una práctica individual (aunque podían discutir las respuestas en pequeños grupos de tres o cuatro estudiantes); y, en la tercera sesión, se llevó a cabo una puesta en común en gran grupo. Nos centramos en la segunda sesión, en la cual los estudiantes, entre otras tareas, tenían que responder por escrito a cinco cuestiones relacionadas con la noción "ser múltiplo". Esta sesión fue grabada en audio. Recogimos y analizamos las producciones escritas sobre esas cinco cuestiones

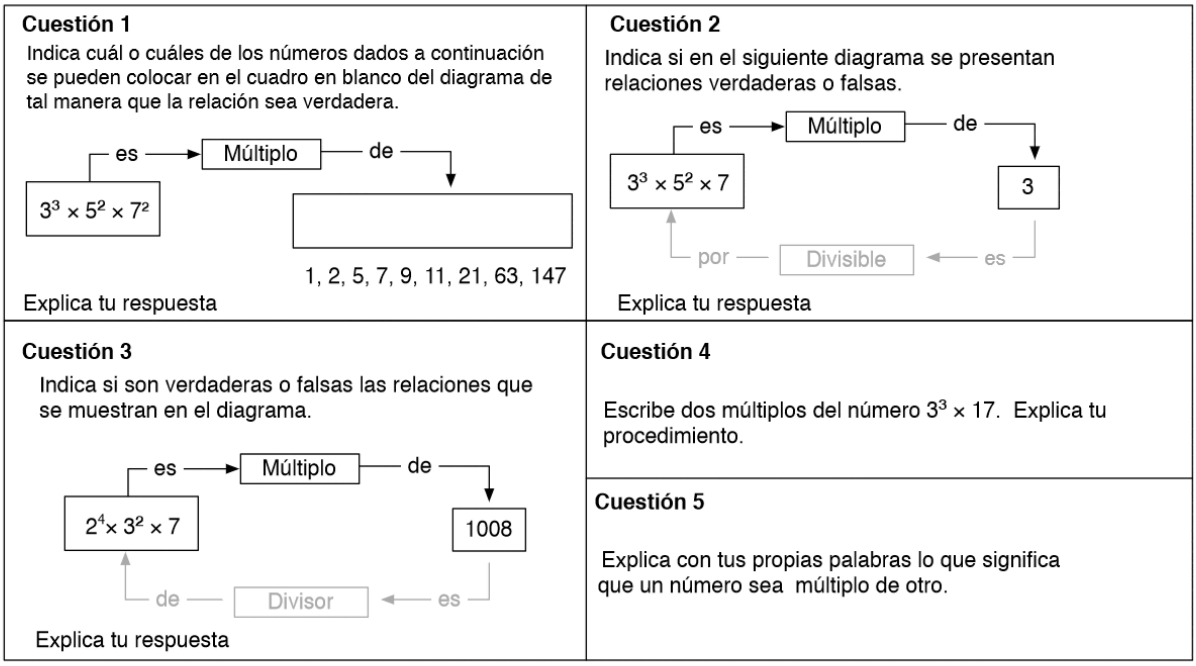

Figura 6. Cuestiones sobre múltiplo

Categorías de análisis y codificación de datos

Para definir las dimensiones, categorías, subcategorías y el proceso de codificación, utilizamos la técnica del análisis de contenido (Bardin, 1996; Cabrera, 2009; Krippendorff, 1990), la guía de teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990) y el análisis de contenido de la divisibilidad (véase figura 1). Algunas de las categorías que utilizamos provienen de la literatura, otras surgen del análisis de los datos de un estudio previo (López et al., 2013a, 2013b, en prensa) y otras del propio experimento de enseñanza.

Para la codificación de los datos, tenemos en cuenta dos dimensiones. En la primera, nos centramos en la conclusión o justificación dada en cada respuesta. De esta primera observación obtenemos las categorías múltiplo como producto (MP), múltiplo como relación (MR), múltiplo como dividendo en una división (MD) y múltiplo como factor (MF). En la segunda, nos centramos en el desarrollo de las respuestas de los estudiantes. En este caso consideramos como categorías los organizadores del currículo estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología.

La figura 7 recoge las categorías y subcategorías derivadas en las producciones de los estudiantes, así como las dos dimensiones (énfasis en el desarrollo de las respuestas y énfasis en la conclusión o justificación) que consideramos para la categorización de las respuestas. Codificamos, con estas categorías y subcategorías definidas, las producciones escritas de los maestros en formación sobre las cuestiones de múltiplo planteadas. Realizamos una triangulación entre los investigadores con el fin de verificar la claridad y coherencia de la codificación.

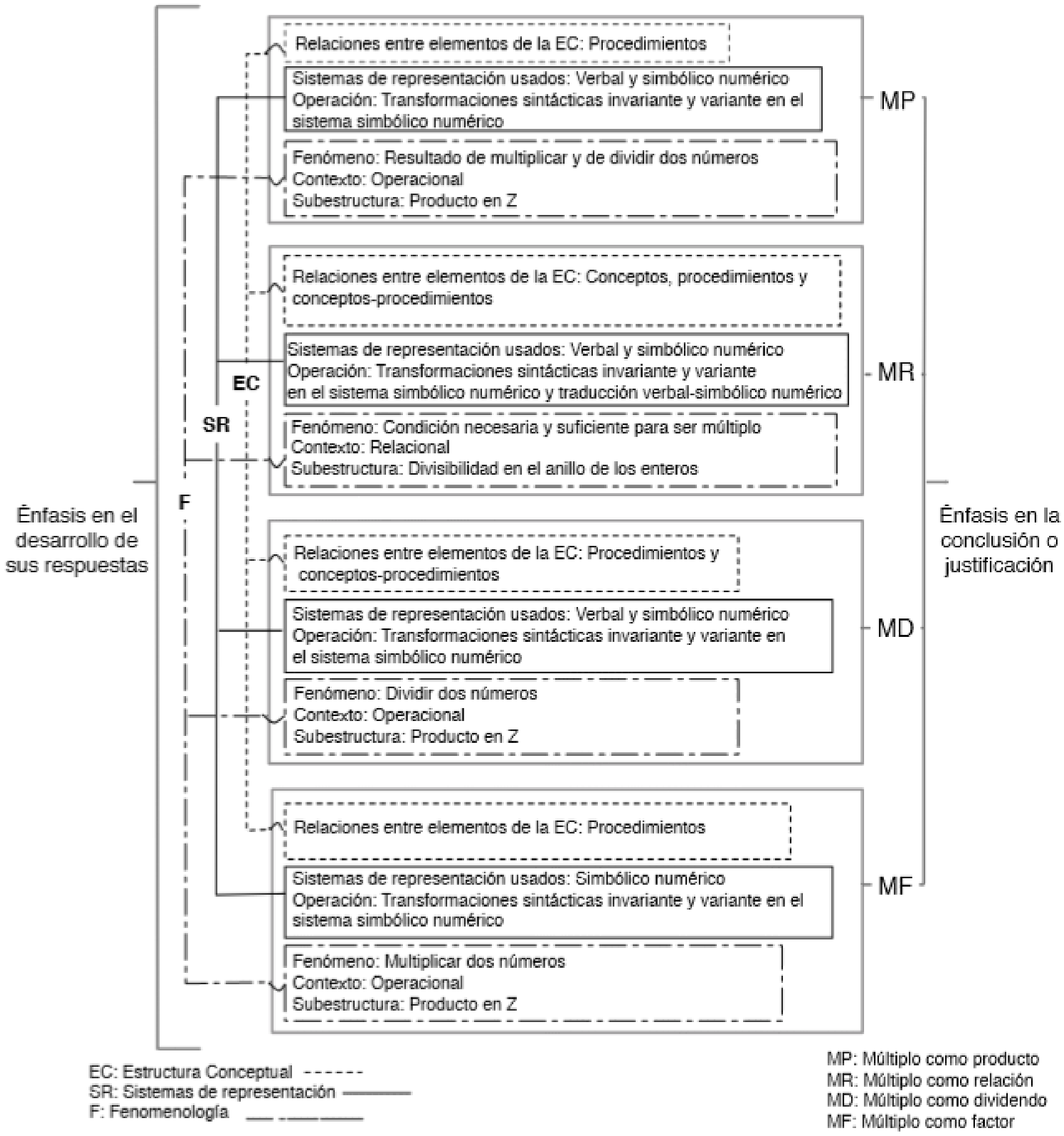

Figura 7. Dimensiones y categorías

Mostramos dos ejemplos de la codificación de una tarea desarrollada por dos maestros en formación y que llamaremos (E01) y (E02) (véase figura 8). Atendiendo a la primera dimensión que hemos definido (conclusión o justificación dada en la respuesta), observamos que E01 afirma en su respuesta que el número dado es múltiplo porque es el resultado de una multiplicación. La expresión "es el resultado de una multiplicación" la identificamos con la variable múltiplo como producto (MP). Atendiendo a la segunda dimensión (desarrollo de la respuesta dada), vemos que E01 establece relación solo entre los procedimientos asociados a las operaciones aritméticas que ha realizado. Hace transformaciones sintácticas invariantes en el sistema de representación simbólico numérico; cuando dado el número en su descomposición canónica, lo pasa a su equivalente en la representación posicional de base diez. El fenómeno o modo de uso del concepto es la multiplicación de dos números que está ubicado en un contexto estrictamente operacional y asociado a la subestructura matemática (Z,×). Con respecto a E02, atendiendo la primera dimensión, observamos que en su respuesta pone de manifiesto la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro (MR). Según el desarrollo de la respuesta de E02, observamos que establece relaciones entre los conceptos de múltiplo, factores y número natural. Igualmente establece relaciones entre los procedimientos para determinar cuándo un número es múltiplo de otro y establece relaciones entre conceptos-procedimientos cuando plantea el ejemplo. Hace transformaciones sintácticas invariantes en el sistema de representación simbólico numérico al utilizar la propia descomposición canónica del número para responder. El fenómeno o modo de uso del concepto es el propio de la definición de la relación "ser múltiplo" asociado a un contexto relacional y a la subestructura matemática de la divisibilidad en Z^+.

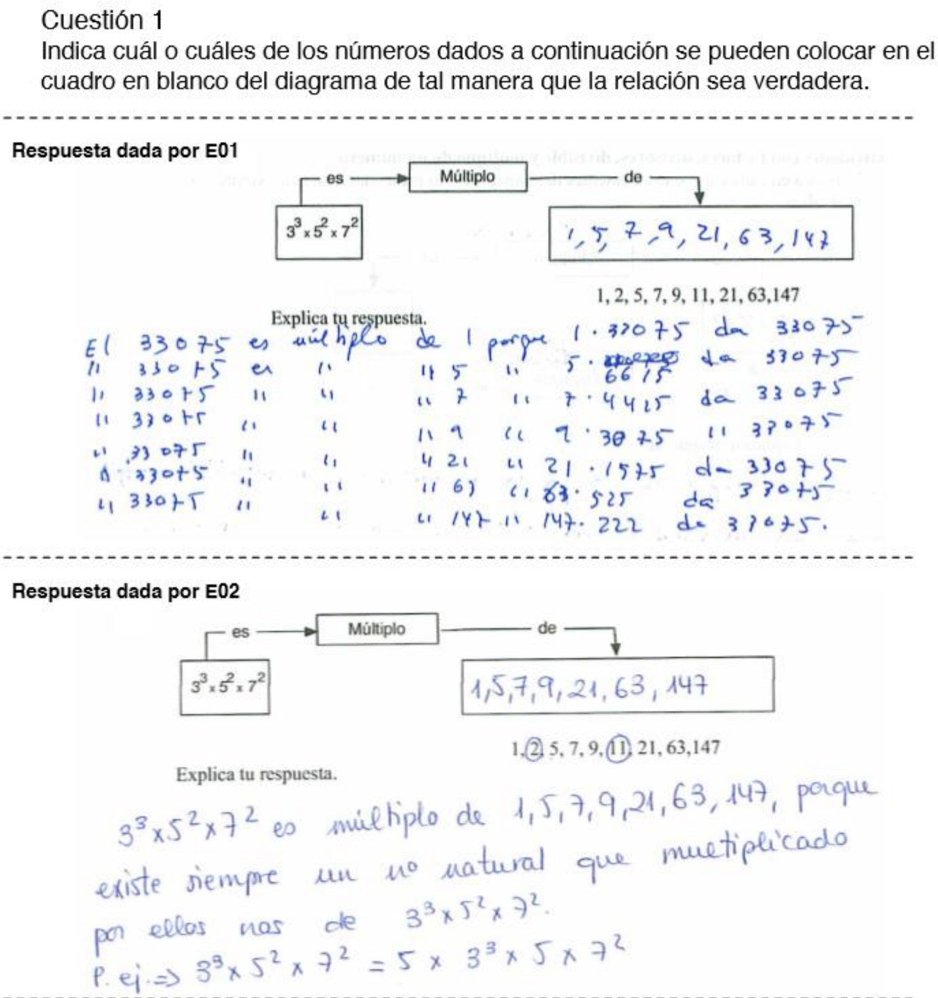

Figura 8. Respuesta dada por E01 y E02 a la cuestión 1 de la segunda sesión

Datos, organización y análisis

Obtuvimos 185 observaciones asociadas a las respuestas dadas por los maestros en formación (5 cuestiones por 37 maestros en formación). Con ellas construimos una base de datos en el programa FileMaker. Generamos una matriz que procesamos en el software estadístico SPSS para realizar los análisis requeridos. Consideramos dos tipos de análisis: un análisis de frecuencia y un análisis clúster. Realizamos el análisis de frecuencias atendiendo a la primera dimensión (según el énfasis en la justificación de la respuesta). Esto nos permitió cuantificar los porcentajes de las respuestas, sobre múltiplo como producto, múltiplo como dividendo en una división, múltiplo como relación y múltiplo como factor. Hicimos el análisis clúster, específicamente el análisis de conglomerados no jerárquicos, con el algoritmo de k medias, atendiendo a las dos dimensiones descritas anteriormente. El objetivo es agrupar a los estudiantes de manera que los conglomerados sean lo más homogéneos posible entre sí, en relación con la variable significado; y lo más heterogéneos posible entre ellos. A pesar de que el procedimiento para determinar conglomerados trata de formar grupos que difieran, hemos considerado el estadístico F del análisis de varianza (ANOVA), que proporciona información sobre la contribución de cada variable. El análisis clúster permitió ver, de forma global, los significados que muestran los maestros en formación sobre múltiplo, independientemente de las características particulares de cada una de las cuestiones. El número de conglomerados que seleccionamos para aplicar el algoritmo de k medias fue de 4, porque al observar las varianzas totales para 2, 3, 4 y 5 conglomerados se estabilizaron a partir de 4 conglomerados.

Resultados y discusión

Presentamos los resultados en dos partes. En la primera parte, exponemos el análisis de frecuencia; y, en la segunda, el análisis clúster.

Análisis de frecuencias

Identificamos en las cinco cuestiones planteadas la presencia de cuatro variables de interés para el estudio del significado de múltiplo: múltiplo como producto, múltiplo como factor, múltiplo como dividendo, múltiplo como relación. En la tabla 1 mostramos las frecuencias, expresadas en porcentajes, de cada una de dichas variables en las cinco cuestiones.

Se observa que la consideración de múltiplo como producto y el múltiplo como relación son las variables con mayor frecuencia en casi todos todas las cuestiones, excepto en la cuestión 4 cuya mayor frecuencia es por igual para la no respuesta y el múltiplo como factor. El múltiplo como factor alcanza una frecuencia baja en casi todas las cuestiones excepto en la cuestión 4. También es baja la frecuencia de aparición del múltiplo como dividendo en una división exacta.

Tabla 1
Presencia de la variables, en porcentajes, de las cinco cuestiones sobre múltiplo (n=37)

Variables	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 4	Cuestión 5
MP	54,05	35,14	40,54	21,62	45,95
MF	2,70	0,00	2,70	24,32	8,11
MD	13,51	16,22	13,51	5,41	5,41
MR	24,32	40,54	32,43	18,92	13,51
O	2,70	8,11	0,00	5,41	0,00
NR	2,70	0,00	10,81	24,32	27,03

Nota. MP = Múltiplo como producto; MF = múltiplo como factor; MD = múltiplo como dividendo en una división exacta; MR = múltiplo como relación ser múltiplo; O = otro; NR = no responde.

Análisis clúster

Hicimos la partición en cuatro conglomerados atendiendo a las variables indicadas anteriormente. Los conglomerados quedaron conformados de la siguiente manera: P1 con 13 estudiantes, P2 con 7, P3 con 11 y P4 con 6. Las variables con mayores valores para la F en la ANOVA son las que aportan mayor separación entre los conglomerados, contribuyendo de manera significativa en la formación de los mismos. Las variables que más contribuyen a la determinación de los conglomerados son: múltiplo como producto (MP) y múltiplo como relación (MR). En la tabla 2 mostramos las variables con sus respectivos valores de F.

Tabla 2
Datos de ANOVA

Variable	F
Múltiplo como producto (MP)	35,554
Múltiplo como relación (MR)	28,094
Múltiplo como factor (MF)	1,990
Múltiplo como dividendo (MD)	23,188
Otro (O)	1,297
No responde (NR)	23,683

Los centros finales de cada uno de los conglomerados, en relación con las variables que contribuyen al mismo, permiten ver lo que caracteriza a los conglomerados; lo que tienen en común. Cada conglomerado quedó representado por un vector que recoge los valores de la variable (MP, MR, MF, MD, O, NR).

Para el primer conglomerado, P1, formado por 13 estudiantes, el vector resultante como centro final es (3, 0, 0, 0, 0, 0). Este conglomerado tiene como característica distintiva, con respecto a los otros, la presencia de la variable múltiplo como producto o resultado de una multiplicación y la ausencia de las otras variables.

El conglomerado P2, que está constituido por 7 estudiantes. La presencia de la variable múltiplo como dividendo en una división exacta es la más común en este grupo. Sin embargo, también está la presencia de las variables múltiplo como producto, múltiplo como factor y la ausencia de la variable múltiplo como relación. El vector que representa a este conglomerado es (1, 0, 1, 2, 0, 1).

Para el tercer conglomerado P3, formado por 11 estudiantes, el vector resultante es (1, 3, 0, 0, 0, 0). La característica distintiva es la presencia mayoritaria de la variable múltiplo como una relación entre números, aunque también está la presencia, pero en menor proporción, de la variable múltiplo como producto. Otra característica distintiva de este conglomerado es la ausencia de las variables múltiplo como factor y múltiplo como dividendo en una división exacta.

El conglomerado P4, formado por 6 estudiantes, quedó representado por el vector (1, 1, 1, 0, 0, 3). Este grupo se caracteriza por no responder a todas las cuestiones planteadas, sin embargo, en las cuestiones que respondieron observamos la presencia de las variables múltiplo como producto, múltiplo como relación, múltiplo como factor y la ausencia de la variable múltiplo como dividendo en una división exacta. Mostramos en la figura 9 los centros finales de los conglomerados, así como, la presencia de las variables que contribuyen en la formación de cada uno de ellos.

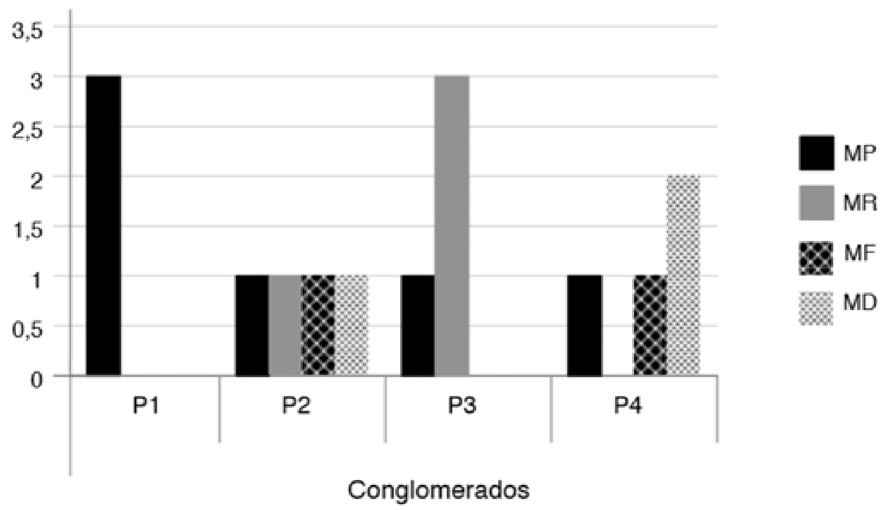

Figura 9. Centros finales de clúster y variables

Caracterizamos el significado de múltiplo observando y analizando, en cada uno de los conglomerados, los descriptores definidos en el análisis de contenido (figura 1) para cada organizador del currículo (estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología) en cada una de las producciones de los maestros en formación. En la tabla 3 mostramos las características de cada uno de los conglomerados con respecto al análisis de contenido.

Tabla 3
Características de los conglomerados en relación con la terna: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología

Clúster	Estructura conceptual			Sistemas de representación					Fenomenología						
									Fenómenos			Contexto		Sb.M	
	PP	CC	CP	V	T	SN	SA	G	M	D	R	Op	Re	OA	Di
P1	*			*		*			*			*		*	
P2	*		*	*		*			*	*		*		*	
P3	*	*	*	*		*	*				*		*		*
P4	*		*	*		*			*			*		*	

Nota. PP = relación entre procedimientos; CC = relación entre conceptos; CP = relación entre conceptos y procedimientos; V = verbal; T = tabular; SN = simbólico numérico, SA = simbolismo algebraico; G = Gráfico; M = multiplicar dos números; D = dividir dos números; R = que un número sea múltiplo de otro; Op = operacional; Re = relacional; Sb.M = subestructura matemática; OA = operaciones aritméticas; Di = relación de divisibilidad.

El conjunto de 13 estudiantes que conforman el conglomerado P1 se caracteriza por la presencia de la variable múltiplo como el resultado de una multiplicación, es decir, múltiplo como producto, mostraron relaciones entre procedimientos y no mostraron relaciones entre conceptos ni relaciones entre conceptos-procedimientos cuando respondieron a las cuestiones sobre múltiplo. A manera de ejemplo, podemos observar la respuesta dada por el estudiante E01 a la cuestión 1 (véase figura 8). En su respuesta, E01 realiza hasta tres procedimientos: calcula las potencias de un número, multiplica números y divide números. Asocia múltiplo a la respuesta de uno de los procedimientos que ha realizado; el resultado de la multiplicación.

Con respecto a los sistemas de representación este grupo utilizó mayoritariamente la combinación de dos sistemas de representación en sus respuestas: verbal y simbólico numérico. En el sistema de representación simbólico numérico mayoritariamente hicieron transformaciones sintácticas invariantes cuando reescribieron el número dado en representación canónica a un número escrito en la forma posicional de base diez (véase figura 8). Con respecto al modo de uso de los conceptos (fenomenología), identificamos el uso de la multiplicación de dos números para responder a las cuestiones sobre múltiplo (véase figura 8). La operación de multiplicación la identificamos en un contexto estrictamente operacional y asociado a la subestructura matemática $(Z,\times)$ (véase figura 5).

El conjunto de siete estudiantes que forman el conglomerado (P2), caracterizado con el vector (1, 0, 1, 2, 0, 1), mostró relaciones entre procedimientos, relaciones entre conceptos-procedimientos y no utilizaron relaciones entre conceptos. Con respecto a los sistemas de representación este grupo de maestros en formación utilizó dos sistemas de representación en sus respuestas: el sistema de representación verbal y el simbólico numérico. Las combinaciones entre los sistemas de representación se observó muy poco en sus respuestas. Sin embargo, en el sistema de representación simbólico numérico observamos que hacen transformaciones sintácticas cuando transforman un número dado en su representación canónica a otro equivalente escrito en la forma posicional de base diez. Otro aspecto a destacar es que algunos de los estudiantes del conglomerado P2 mostraron confusiones con respecto a la consideración de número, es decir, cuando el número está escrito en su representación posicional de base diez no tienen dificultades para considerarlo como número. Sin embargo, cuando el número está escrito en su representación canónica consideran que no es un número sino unas operaciones pendientes de resolver. En la figura 10 mostramos, a manera de ejemplo, la respuesta dada por un estudiante (E03) a la cuestión 3.

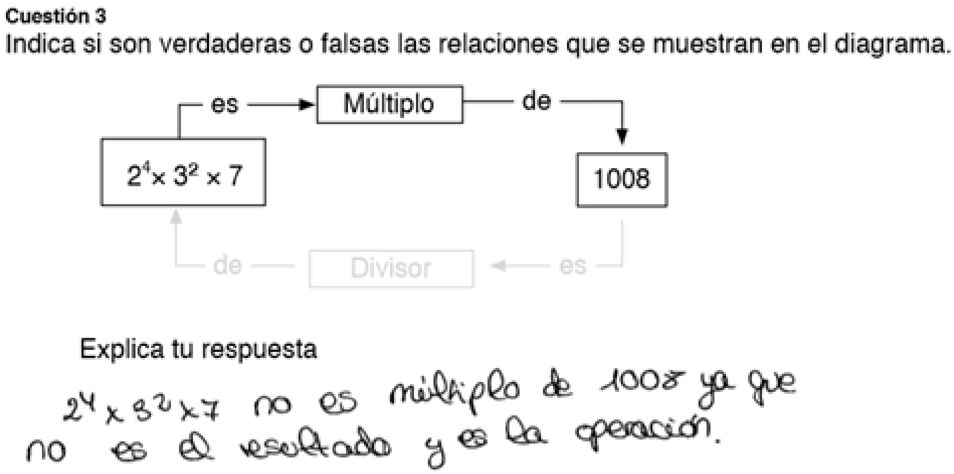

Figura 10. Respuesta dada por un estudiante (E3) a la cuestión 3

Los estudiantes del conglomerado P2 utilizaron dos operaciones aritméticas: la multiplicación y la división de números para responder. Sin embargo, la operación de división fue la utilizada para decidir sobre múltiplo. Este modo de uso del concepto de múltiplo (fenomenología) lo asociamos a un contexto operacional en la subestructura matemática (Z,×) (véase figura 5).

Los 11 estudiantes que componen el conglomerado P3, caracterizado por el vector (1, 3, 0, 0, 0, 0), establecieron relaciones entre conceptos, entre procedimientos y mayoritariamente mostraron la relación entre conceptos-procedimientos. Mostramos parte de la discusión de tres estudiantes sobre la cuestión 1.

1 *E16*: […] Múltiplo [...] vale podemos hacerlo por partes o podemos hacerlo en total.

2 *E17*: El 1 está [pausa] ¿no? [...]

3 *E16*: El 1 sí, porque cualquier número natural es múltiplo de la unidad.

4 *E17*: El 5 porque es factor del número dado al comienzo.

5 *E18*: ¡No!... [pausa]… porque hay un número que multiplicado por cinco da como resultado este que nos han dado… el número es tres elevado a tres por cinco por siete elevado a dos.

6 *E16*: El 7.

7 *E18*: Podemos decir que 7, 9, 21, 63 y 147 por la misma razón que lo es del 5 […] que existe el número […]

En esta discusión percibimos en las diferentes líneas, aspectos asociados al significado de múltiplo. En la línea 1, E16 contextualiza sobre la cuestión de múltiplo y hace una sugerencia de estrategia a seguir para la discusión, cuando afirma, que lo pueden hacer por partes o hacerlo en total. En la línea 2, E17 pone en evidencia una duda sobre la unidad, primero lo afirma y después de una pausa reflexiva, cuestiona su propia afirmación y la comparte con el resto de sus compañeros de grupo de discusión. En la línea 3, E16 utilizó un resultado de la divisibilidad (la propiedad de que todo número natural es múltiplo de la unidad) para afirmar contundentemente la inclusión de la unidad en la respuesta a la cuestión. También se pone de manifiesto la asociación entre los términos número natural, múltiplo y unidad. En la línea 4, E17 aprovecha la escritura del número en su descomposición canónica para establecer relación entre los conceptos de factor y múltiplo. La afirmación hecha por E17, para justificar la presencia del 5 en la respuesta, la podemos interpretar como que un número natural dado es múltiplo de sus factores, y, que se pueden establecer relaciones y afirmaciones más profundas a partir de esta afirmación. Por ejemplo, que "todo número entero es múltiplo de sus factores" o que la clase de todos los enteros factores-divisores del número $3^3 \times 5^2 \times 7^2$ contiene a la clase de todos los factores-divisores de 5. En la línea 5, E18 justifica utilizando la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro. Para determinar esos números hace uso de la descomposición canónica dada y de los productos de potencia de igual base. Posteriormente, en la línea 7, hace uso de razonamiento inductivo para terminar de responder a la cuestión. Con respecto a los sistemas de representación este conjunto de estudiantes hizo uso de dos sistemas de representación: verbal y simbólico (numérico y simbolismo algebraico). Adicionalmente, establecieron la mayor cantidad de combinaciones, traducciones y transformaciones entre los sistemas de representación utilizados. Establecieron relación entre el sistema de representación simbólico numérico, dado desde la representación de un número en su descomposición canónica, y el sistema de representación verbal. Utilizaron las combinaciones de sistema de representación simbólico numérico (en descomposición canónica y posicional de base diez) con el sistema de representación verbal. También establecieron traducciones entre los sistemas de representación simbólico (numérico y simbolismo algebraico) y verbal. Con respecto al modo de uso de los conceptos (fenomenología), identificamos mayoritariamente, en sus respuestas, la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro (véase figura 8 E02). El contexto utilizado para la condición de ser múltiplo es relacional y está asociado estrictamente con la subestructura matemática de divisibilidad en el anillo de los números enteros. En la figura 11 mostramos, a manera de ejemplo, la respuesta dada por un estudiante (E18) a la cuestión 2 sobre múltiplo. En su explicación, E18 menciona que la afirmación sobre múltiplo es verdadera y lo justifica indicando la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro. Determina la existencia del número desde la escritura en su descomposición canónica, es decir, no condiciona la respuesta sobre múltiplo a la realización de operaciones aritméticas con los números escritos en la forma posicional de base diez. Hace una transformación sintáctica variante cuando determina la existencia del número $3^2 \times 5^2 \times 7$. Identifica el número 3, que es un factor no explícito (López y Cañadas, 2013), en la descomposición canónica del número dado, y al identificarlo establece relaciones entre conceptos-procedimientos asociados a divisibilidad para decidir sobre múltiplo.

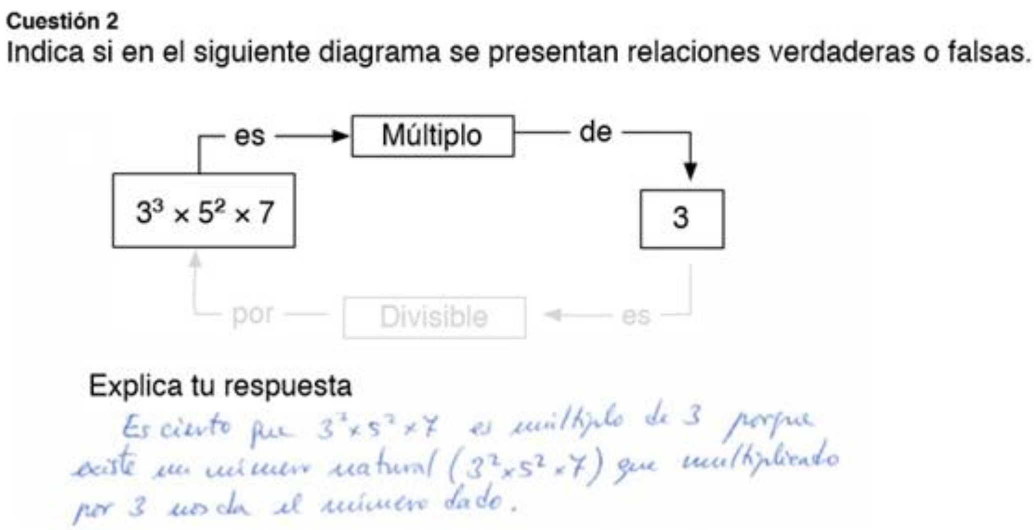

Figura 11. Respuesta dada por un estudiante (E18) a la cuestión 2

El conglomerado P4, formado por seis estudiantes y caracterizado por el vector (1, 1, 1, 0, 0, 3), en la estructura conceptual mostraron relaciones entre procedimientos y entre conceptos-procedimientos. Utilizaron dos sistemas de representación en sus producciones: verbal y simbólico numérico. En el sistema de representación simbólico numérico hicieron transformaciones sintácticas invariantes cuando reescribieron el número dado en representación canónica a un número escrito en la forma posicional de base diez. Con respecto al modo de uso de los conceptos (fenomenología), utilizaron la operación de multiplicación para responder a las cuestiones de múltiplo, el contexto presente en las producciones escritas de este conglomerado es operacional asociado a la subestructura matemática de operaciones aritméticas.

El análisis clúster nos permitió realizar las asignaciones de los estudiantes a un determinado conglomerado atendiendo a las dimensiones y categorías (véase figura 7). Cualitativamente podemos describir cada uno de los conglomerados desde los significados, esto es, desde la terna estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología. Podemos distinguir, desde la estructura conceptual, que un estudiante asignado al conglomerado P1 se caracteriza por mostrar solo relaciones entre procedimientos, mientras que un estudiante del conglomerado P2 se caracteriza por establecer también relaciones entre conceptos-procedimientos. Los estudiantes asignados al conglomerado P3, además de mostrar las relaciones de P1 y P2, mostraron relaciones entre conceptos. Con respecto a los sistemas de representación, los maestros en formación que conformaron el conglomerado P1 y P2 no mostraron diferencias, es decir, ambos conglomerados mostraron el uso del sistema de representación verbal y del simbólico numérico además realizaron la operación de transformación (sintáctica invariante y sintáctica variante). En tanto, que el conglomerado P3, además de usar el sistema de representación y la operación utilizada por P1 y P2, utilizó también el sistema de representación de simbolismo algebraico y la operación de traducción entre el sistema de representación verbal y simbólico (numérico y simbolismo algebraico). Con respecto a la fenomenología los conglomerados P1 y P2 utilizan el contexto operacional mientras que el conglomerado P3 utiliza el contexto relacional. El conglomerado P1 utilizó la operación de multiplicación mientras que el conglomerado P2 utilizó además la operación de división para decidir sobre el múltiplo y el conglomerado P3 no utiliza las operaciones aritméticas para decidir sobre múltiplo sino que utiliza la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro.

Conclusiones

Hemos logrado nuestro objetivo de describir y caracterizar los significados de múltiplo que muestran un grupo de maestros en formación. Para ello, nos hemos aproximado a una descripción de los significados, partiendo del proceso de codificación sobre las producciones escritas de las cinco cuestiones de múltiplo que complementamos con las grabaciones de audio. Hicimos la descripción de los significados desde la estructura general de categorías y subcategorías, atendiendo al desarrollo de las respuestas y a la justificación dada por los estudiantes (dimensiones). Analizamos los datos para cada una de las cinco cuestiones sobre múltiplo, recogimos los resultados y los describimos desde el análisis de las frecuencias (tabla 1).

Para la caracterización de los significados, hemos realizado el análisis de contenido de la divisibilidad. Las categorías y subcategorías, asociadas con los organizadores del currículo (véase figura 7) nos ha permitido determinar, mediante el análisis clúster, las características comunes de los maestros en formación en torno al significado de múltiplo. También hemos determinado las características distintivas de cada uno de ellos para describir y caracterizar internamente los cuatro conglomerados formados, desde el marco de los organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

Hemos obtenido los conglomerados a partir del análisis de contenido del análisis didáctico, en el sentido de poder describir, a partir de las respuestas de los maestros en formación, los elementos definidos en la terna: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología (véase tabla 3). En relación con el conglomerado P1, agrupado entorno a la presencia de la variable múltiplo como producto (MP), se caracterizó por mostrar relaciones solo entre procedimientos; al multiplicar números. Utilizaron el sistema de representación verbal y el sistema de representación simbólico numérico, así como, las dos operaciones definidas para los sistemas de representación (véase figura 4). Queremos destacar que el uso de la operación aritmética de multiplicación, con el objetivo de obtener un resultado, es muy marcado para este grupo. En ese sentido, el concepto de múltiplo lo asociaron al resultado de la operación de multiplicación. En relación con el conglomerado P3, agrupado por la presencia mayoritaria de la variable múltiplo como relación (MR), se caracterizó por mostrar relaciones entre los conceptos: múltiplo, factor, divisor, divisible, número natural, así como, de la propiedad reflexiva y antisimétrica de la relación de divisibilidad. Mostrando relaciones entre los procedimientos de las operaciones aritméticas y los conceptos de múltiplo, divisor, divisible, factor. Hacen uso de las dos operaciones definidas entre los sistemas de representación (véase figura 4). Otro aspecto a destacar, de este grupo de maestros en formación, es que la decisión sobre múltiplo no está sujeta a transformar el número de su forma canónica a su forma posicional de base diez, sino que sobre la escritura del número, dado en su representación canónica, relacionan los factores que componen el número con el concepto de múltiplo (véase figura 11). Cuando responden sobre múltiplo lo hacen desde la condición necesaria y suficiente para que un número sea múltiplo de otro. En ese sentido, el concepto de múltiplo lo asociaron a una relación entre números. El conglomerado P2, agrupado entorno a la variable múltiplo como dividendo (MD), se caracterizó por mostrar relaciones entre los procedimientos para multiplicar y para dividir dos números, así como, relaciones entre el concepto de múltiplo y las operaciones aritméticas de multiplicación y de división. Este grupo de maestros en formación utilizó la escritura del número en su representación posicional base diez para hacer las operaciones de multiplicación y división al decidir sobre múltiplo. Asociaron múltiplo con el resultado de una de las dos operaciones aritméticas que realizan; la división, identificando el múltiplo con el dividendo en la división exacta. La variable que define al conglomerado P4, vinculada con el hecho de no dar respuesta a las cuestiones formuladas, no nos proporciona información de interés en nuestra investigación. Sin embargo, podemos destacar que las pocas respuestas dadas por este grupo de 6 maestros en formación las pudimos ubicar en los conglomerados P1 y P3, según la variable de asociación: múltiplo como producto y múltiplo como relación respectivamente.

Constatamos que es posible distinguir tres significados diferenciados y asociados a la noción de múltiplo, esto es: el múltiplo definido como el resultado de una multiplicación de números (múltiplo como producto), el múltiplo definido como una relación de orden parcial (múltiplo como relación) y el múltiplo asociado al dividendo como consecuencia de una división exacta (múltiplo como dividendo). Nuestros resultados coinciden con los obtenidos en otras investigaciones (López et al., 2013b; Zazkis, 2000). Aunque la presencia de la variable múltiplo como relación no fue puesta de manifiesto en dichos estudios.

En función de los resultados obtenidos podemos establecer algunas posibles explicaciones o conjeturas, sobre todo, en relación con la aparición del significado de múltiplo como relación. Este significado no fue puesto de manifiesto en los estudios con maestros en formación (López et al., 2013b; Zazkis, 2000). En la primera sesión del experimento de enseñanza se discutió con ellos la divisibilidad con la estructura conceptual desarrollada desde el análisis didáctico (figura 2). Creemos que este hecho pudo influir en generar un tipo de acercamiento a la divisibilidad como una relación entre números y no como una operación aritmética. Los maestros en formación pueden llegar a desarrollar una comprensión profunda de los tópicos de la teoría de números (Feldman, 2012).

Referencias

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *8*(1), 40-48.

Bardin, L. (1986). *Análisis de contenido.* Madrid, España: Ediciones Akal.

Bodí, S. D. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/7757

Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo. En R. Gras, B. Orús y B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux apports théoriques à l'analyse statistique implicative et applications: 4èmes rencontres internationales d'analyse statistique implicative* (pp. 99-110). Castellón, España: Universitat Jaume I.

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S. R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 41-82). Westport, CT: Ablex.

Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases. *Pedagogía Universitaria*, *14*(3), 71-92.

Campbell, S. R. (2006). Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 19-40). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). (2001). *The mathematical education of teachers.* Providence, RI: American Mathematical Society.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, *13*(1), 3-21.

Feldman, Z. (2012). *Describing pre-service teachers' developing understanding of elementary number theory topics* (Tesis doctoral). Recuperado de ProQuest. (Orden No. 3529017)

Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid, España: Tecnos.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA 7*(3), 251-293.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Universidad de Granada.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós.

Lavy, I. (2006). Learning number theory concepts via geometrical interactive computerized setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 201-221). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Liljedahl, P. (2006). Learning elementary number theory trough a chain of discovery: Preservice teachers' encounter with pentominoes. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 141-172). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

López, A. y Cañadas M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática: homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada, España: Comares.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013a). Significados de las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" mostradas por maestros de educación primaria en formación. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 355-365). Bilbao, España: SEIEM.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013b). Utilización de la noción "ser múltiplo" por maestros de educación primaria en formación. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, *30*(85), 9-20.

López, A., Castro, E. y Cañadas M. C. (2015). La divisibilidad como conocimiento matemático-didáctico de los maestros en formación. En J. Segovia, E. Olmedo y D. Amber (Coords.), *Investigación en ciencias de la educación* (pp. 289-295). Granada, España: EIP.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 41-51.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (pp. 41-68). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo de Educación primaria. *BOE, 52*, 19349-19420.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

National Council of Teaching Mathematics. (1981). *Guidelines for the preparation of teachers of mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, VA: Autor.

Rico, L. (1992). *Proyecto docente*. Granada, España: Universidad de Granada.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, *58*, 7-23.

Sierra, M., González, M., García, A. y González, M. (1989). *Divisibilidad.* Madrid, España: Síntesis.

Valverde, G. y Castro, E. (2012). Prospective elementary school teachers' proportional reasoning. *PNA*, *7*(1), 1-19.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *4*, 210-238.

Zazkis, R. y Campbell, S. R. (1996a). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 540-563.

Zazkis, R. y Campbell, S. R. (1996b). Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 207-218.

Zazkis, R., Sinclair, N. y Liljedahl, P. (2013). *Lesson play in mathematics education: A tool for research and professional development*. New York, NY: Springer.

Ángel López
Universidad de Carabobo
anlopez@uc.edu.ve

Encarnación Castro
Universidad de Granada
encastro@ugr.es

María C. Cañadas
Universidad de Granada
mconsu@ugr.es