

MODELOS MATEMÁTICOS DE ARTESANÍAS DE TRENZADO

Una investigación en Etnomatemática

Veronica Albanese

Granada, 2015

Título:

MODELOS MATEMÁTICOS DE ARTESANÍAS DE TRENZADO.

Una investigación en Etnomatemática

Autora:

Veronica Albanese

1ª edición

ISBN: **978-84-608-2846-4**

Depósito Legal: **GR 13-19-2015**

Impreso en España

Editado por la Autora

Imprime:

Copistería Martín Urquiza

Avenida de Madrid 20, local 5

18012, Granada

Para citar: Albanese, V. (2015). *Modelos Matemáticos de Artesanías de Trenzado*. Una investigación en Etnomatemática. Granada: La Autora.

*All'artigiano della mia famiglia:
"ci sei rimasto nel cuore a tutti" (Papá Cesare, 22.02.2011)*

ÍNDICE

1. PLANTEAMIENTO	3
1.1. PRESENTACIÓN DEL ÁREA DE INTERÉS.....	3
1.2. OBJETO DE INVESTIGACIÓN.....	3
1.3. OBJETIVOS.....	4
1.4 MICROCULTURA Y LENGUAJE.....	5
1.5 ANTECEDENTES Y RELEVANCIA.....	5
2. FUNDAMENTOS	8
2.1 MEDIPSA.....	8
2.2. ANÁLISIS CONCEPTUAL: CULTURA.....	9
2.3. ETNOMATEMÁTICA Y LA FILOSOFÍA DE WITTGENSTEIN.....	11
2.4. COMPETENCIAS, CIUDADANÍA Y MULTICULTURALIDAD.....	12
3. METODOLOGÍA	19
3.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....	19
3.2 INSTRUMENTO METODOLÓGICO.....	19
3.3 OBSERVACIONES.....	26
4. ESTUDIO DE CASOS	27
4.1 ANÁLISIS MATEMÁTICO: ALGUNOS EJEMPLOS CON CUATRO Y OCHO HILOS.....	27
4.2 RECOPIACIÓN DE EJEMPLARES.....	32
5. CONCLUSIONES	40
5.1 FIABILIDAD Y VALIDEZ.....	40
5.2 APORTACIONES O RESULTADOS.....	41
5.3 LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO DE ESTA INVESTIGACIÓN.....	42
BIBLIOGRAFÍA	44
ANEXOS	47

1. PLANTEAMIENTO

1.1. Presentación del área de interés

El área de interés de este *Proyecto de Investigación* es Etnomatemáticas. La Etnomatemática es un paradigma holístico, contextualizado en un movimiento que aglutina teoría y práctica, en los campos: epistemológico, matemático, investigativo, educativo y social. Actúa y estudia la manera en que los grupos culturales elaboran, comprenden y utilizan conceptos, estructuras o significados, que el investigador considera como matemáticos, en el desarrollo de su cultura. Los grupos están constituidos por personas que actúan en el desempeño de sus profesiones, y en la vida cotidiana, lo que les mantiene como individuos y como grupo.

El contexto de este trabajo será el entorno social y educativo, relativo a la educación matemática. Las posibilidades investigadoras de este campo fueron declaradas por D'Ambrosio en el ICME 5 (International Congress on Mathematical Education) del 1984, él fue quien marcó el interés de las cuestiones sociales y culturales en la Educación Matemática.

En el contexto de este campo de investigación educativa y social, la presente investigación trata de relacionar la matemática con la artesanía, considerando ambas como productos culturales.

La idea es que el conocimiento matemático está ligado al contexto en el que se desarrolla, produce y transmite. La sociedad y la cultura, que constituyen el entorno natural del proceso de enseñanza y aprendizaje, son elementos fundamentales que interactúan en el complejo sistema de la educación. Eso motiva el interés por el desarrollo del tema de la educación por competencia que en este trabajo nos proponemos de profundizar.

En el ICME 11 de 2008 y en el ICEm4 (International Conference on Ethnomathematics) de 2010 se ha manifestado un gran desarrollo de este campo, que incluye un panorama muy amplio de estudios etnográficos, multiculturales, epistemológicos, sociales, educacionales y de formación de agentes educativos para la educación formal y no formal. Cabe destacar la relevancia que los aspectos multiculturales han adquirido en la sociedad europea y en la educación a nivel mundial.

1.2. Objeto de investigación

El propósito es plantear una cuestión de carácter social en relación con la ciencia: la valoración del conocimiento socio-cultural, implícito en la práctica diaria, que en general viene siendo desaprovechado por la ciencia. El contexto geográfico de la investigación es Argentina.

El campo técnico en que se sitúa la investigación es la artesanía, existiendo precedentes de investigación en este campo (Oliveras, 1996).

Entendemos como artesanía la labor de creación o decoración de manera predominante manual y artística, de objetos de alguna utilidad práctica en la sociedad.

El intento es encontrar artesanías que tengan suficiente potencial matemático para lograr algunas aplicaciones educativas a niveles básico y técnico-profesional, conectando así la ciencia con el desarrollo de la población en sus competencias laborales y de la vida diaria.

Más en detalle serán objeto de investigación las artesanías de trenzados, término con el que identificamos las artesanías de tejido en las cuales predomine una dimensión, o sea cuyos productos se indican como cordeles, trenzas, o fajas.

Las trenzas son productos de un tipo de tejidos simple que se realiza con las solas manos. Los cordeles son más complejos, en general involucran un mayor número de hilos, respecto a las trenzas y, para tejerlos, se utilizan aparatos suplementarios que permiten disponer y mantener los hilos separados en círculos o colocados sobre los lados de un cuadrado.

Las fajas se desarrollan en plano y se realizan con pequeños telares donde se posiciona la urdimbre y se anda tejiendo la trama entre los hilos pares e impares de la urdimbre, los *encajes* tejidos entrelazando hilos pueden considerarse tipos de cordeles o de fajas.

1.3. Objetivos

Los objetivos de la investigación son:

O.1 Describir artesanías de trenzados identificando los constructos matemáticos implícitos en ellas.

O.2 Crear un instrumento metodológico de análisis que se ajuste al interés del estudio y a la tipología específica del objeto estudiado.

La exigencia de formular el O.2 nace de la especificidad del producto a analizar. El propósito de la investigación es de realizar un estudio cualitativo de tipo interpretativo formal (O.1). A tal fin se presenta la necesidad de crear un instrumento metodológico de análisis que tenga en cuenta tanto el contexto cultural, como la forma propia del objeto, poniendo de manifiesto el contenido matemático. El objetivo a largo plazo será un sucesivo análisis de nuevos casos y el desarrollo de una aplicación en la educación, mediante la elaboración de actividades didácticas de aula.

Los objetivos específicos son:

O.1.1 Elegir algunas artesanías de trenzados y describir el desarrollo del trabajo artesanal desde el punto de vista etnográfico.

O.1.2 Identificar las matemáticas implícitas presentes en estas artesanías de trenzados.

O.1.3 Describir el producto -cordel, trenza, o faja- y el proceso de trenzar, desde el punto de vista matemático formal.

O.2.1 Crear un método para el análisis etnográfico de la artesanía.

O.2.2 Elaborar un procedimiento de análisis que, a través de la matemática formal, pueda modelizar el producto y el proceso.

En la caracterización de los objetivos específicos se considera la existencia de dos niveles de lenguajes matemáticos: el informal o implícito del contexto artesanal (O.1.2) y el formal o explícito del contexto escolar-académico (O.1.3).

Se destaca la intención del O.2.1 de reflejar los propósitos expresos en los O.1.1 y O.1.2, así como la intención del O.2.2 de desarrollar cuanto se ha declarado en el O.1.3. En el objetivo O.1.2 se quiere establecer una conexión o puente entre el objetivo O.1.1 de investigación etnográfica focalizada en el ámbito social de la microcultura artesanal, y el objetivo O.1.3 de modelización matemática propia de la microcultura académica.

Con este conjunto de objetivos lo que esperamos lograr es:

1. conocer la matemática implícita en las artesanías de trenzados y
2. elaborar para esto un método propio de análisis etnomatemático.

1.4 Microcultura y lenguaje

Entendemos como microcultura, una cultura restringida a un ámbito social o geográfico minoritario, no relativo a una región geográfica extensa, sino a un entorno socio-geográfico pequeño o bien referente a la cultura de un gremio, o profesión, delimitado, o a un grupo de edad (D'Ambrosio, 2008).

En el contexto de esta investigación se consideran dos microculturas: la microcultura artesanal, expresión del ámbito socio-profesional de la artesanía de trenzado, que se desarrolla en algunas regiones delimitadas de Argentina; la microcultura académica, expresión del ambiente socio-profesional constituidos por las Universidades, los investigadores y, en general, por lo que se indican como científicos de impronta occidental.

El intento es crear un puente lingüístico entre la expresión informal de la microcultura artesanal y el lenguaje de la microcultura académica, que indicamos como formal. La investigadora asume el rol de traductora y propone una reelaboración lingüística en términos académicos de lo que ella interpreta que ocurre en el proceso de realización del producto artesanal a nivel de la comprensión matemática por parte del artesano (Albertí, 2007).

1.5 Antecedentes y Relevancia

En las últimas dos décadas la pérdida de universalidad de las matemáticas y la consideración creciente del condicionamiento del contexto sociocultural en sus prácticas, ha dado impulso a una nueva área de investigación cuyos padres se pueden indicar en D'Ambrosio (2008) y Bishop (1999), que hablan respectivamente de Etnomatemáticas y Enculturación Matemática. Otras investigaciones en estas temáticas son, nombrándolas entre muchas, las de Ascher (1991), Gerdes (1988, 2001), Eglash (1997), Barton (2004).

Por otra parte se está desarrollando un creciente interés hacia la influencia de la cultura, y de las culturas, en la didáctica, en búsqueda de nuevas maneras de hacer matemáticas en las aulas (por ejemplo en Argentina: Santillán y Zachman, 2009; Sandella, 2004). Los países latinoamericanos son promotores de programas interculturales, como la Educación Intercultural Bilingüe (EIB), que nacen con el intento de responder a la demanda de diálogo y complementariedad entre la cultura de origen de la población indígena y las culturas occidentales procedentes de la migración, en nombre de una educación de la diversidad o educación inclusiva (Bolívar, 2004). En el próximo capítulo se desarrollan estos conceptos en profundidad.

Las prácticas matemáticas: contar, medir, localizar, explicar, diseñar, jugar, son herramientas indispensable para la idealización y producción de artesanías (D'Ambrosio, 2008).

En Argentina se encuentran varias formas de artesanías, pervivientes e históricas (Fiadone, 2003; Servetto et al., 1998); un ejemplo de artesanía de trenzado es el trenzado en cuero, cuyas raíces históricas se encuentran en la cultura gaucha criolla (Osornio, 1934; Flores, 1960; Fontana, 1988; Faudone, 2003; Grant, 1950).

Son antecedentes previos de la presente investigación etnográfica, el proyecto IDMAMIM financiado por el programa COMENIUS (Favilli, Oliveras y Cesar, 2003), y las investigaciones con microproyectos (Oliveras, 1996, 2005).

Por lo que concierne el estudio de las matemáticas en los tejidos, nombramos como antecedentes: el trabajo sobre la textura de las alfombras en la artesanía andaluza (Oliveras, 1996); la producción de cestería en el pueblo Ticuna (Da Costa, 2009); el estudio sobre la fabricación de manillas por las indígenas de la etnia Ticuna (Parra, 2003). Este último nos interesa de manera especial por la parte que se refiere a la modelización matemática de la trama del tejido. Parra analiza una elaboración de tejido que más adelante caracterizaremos como modalidad de tejido *anudados*. Él recoge 5 tipos de nudos y describe el diseño a través de algoritmos utilizando como lenguaje un pseudo-código de molde informático.

Subrayamos que no hemos encontrado investigaciones que traten el tema de los cordeles desde el punto de vista etnográfico y matemáticos.

Como antecedentes metodológicos nombramos el estudio de las pintaderas canarias (Bolaños, 2009) y nuevamente las investigaciones con microproyectos (Favilli, Oliveras y Cesar, 2003; Oliveras, 2005). Nuestro trabajo se desarrolla según una estructura parecida a la de las investigaciones apenas citadas en:

- la búsqueda de una metodología de análisis que se ajuste a un objeto de estudio específico;
- la definición de fases en dicha metodología, que aquí serán factores, herramientas conceptuales para realizar el análisis, tanto etnográfico como matemático;

- la elección del objeto que sea un *signo*, un elemento relevante, es decir característico de una microcultura.

A este propósito señalamos la Obra de los Ascher sobre los Quipu (Ascher y Ascher, 1981) por marcar la relevancia histórica que la creación de cuerdas ha tenido en las culturas andina precolombinas y por el interés, desde el punto de vista matemático, que este artefacto ha despertado, destacando por primera vez el potencial, precisamente matemático, que contiene. Observamos que los Quipu no entran en la definición de objeto de este trabajo por no tener una dimensión dominante: si bien son constituidos por cuerdas, su característica principal es la relación que une distintos tramos de cuerdas. Sin embargo queda abierta la posibilidad de tener en cuenta la incorporación de los Quipu en el trabajo posterior de aplicación educativa.

Indicamos también la relevancia que este estudio adquiere en la óptica de preservar signos importantes de la tradición artesanal. Hoy en día la preocupación de muchos (por ej. Fuentes, 2011) es que se va perdiendo la identidad cultural y la cercanía a los valores del pasado. Volveremos sobre este tema en el próximo capítulo.

Por fin introducimos otro concepto que iremos ampliando: el trabajo didáctico que pretendemos desarrollar sobre la base de este estudio etnomatemático tiene la ventaja de poder trabajar el tema de *competencias* en las aulas.

2. FUNDAMENTOS

2.1 MEDIPSA

Se considera como fundamento teórico el modelo MEDIPSA (Oliveras, 1996) aplicado en varias investigaciones dirigidas por Favilli y Oliveras (Favilli, Oliveras y Cesar, 2003; Oliveras, 2005; Favilli, 2007), desarrolladas en el Proyecto internacional de formación de Profesores (IDMAMIM), financiado en el marco COMENIUS.

El modelo MEDIPSA (Oliveras, 1996) -sigla correspondientes a Matemáticas, Epistemología, Didáctica, metodología de investigación Interpretativa, Psicología, Sociología y Antropología- es un conjunto multidisciplinar de teorías que tienen sus raíces en una misma concepción relativista y contextualizada de la realidad y de la naturaleza del conocimiento.

La Didáctica de las Matemáticas se considera desde una perspectiva social, más bien como enculturación lógico-matemática y se elige un enfoque fenomenológico y cualitativo. Los fines de la investigación son describir e interpretar una situación que se crea en un determinado escenario, mirando todos los aspectos y las interacciones en perspectiva holística. Este proceso implica entender una *sociedad dinámica, articulada por sujetos que interactúan en un medio*. Las conjeturas elaboradas se verifican y refinan cíclicamente con sucesivas recogidas de datos.

En el marco interpretativo se elige un enfoque teórico, es decir el fin último es dar una interpretación, comprender la vida social, además de describirla (prioridad, en cambio, del enfoque descriptivo). Dentro del estudio teórico se privilegia una perspectiva formal frente a una sustancial, porque la formal intenta explicar aspectos abstractos, constructos conceptuales, mientras la sustancial se focaliza en unas áreas directas, concreta.

En la base de esta perspectiva hay cuestiones epistémicas, sociológicas y antropológicas respectivamente sobre la naturaleza del conocimiento, la raíz del fenómeno educativo y sobre todo el *relativismo de lo real*. La realidad no es única, se construye socialmente a través de diversas realidades contextualizadas en las distintas culturas y con fragmentos de las otras. El ser humano no es separable de su estructura social. El conocimiento no puede ser extraído de su contexto sociocultural porque un objeto (en su sentido más extenso) es conocido, comprendido, realizado en función de la significación que el grupo cultural le atribuye socialmente. El lenguaje mismo y los símbolos son válidos en relación a las interacciones interna entre elementos del grupo.

Se consideran las aportaciones de la psicología, de la didáctica y de la matemática, de la antropología y de la epistemología o teoría del conocimiento, respectivamente:

1. El *enfoque de la cognición situada en contextos* (Greeno, 1998, 2003) con un concepto práctico y funcional del conocimiento; definiendo el *dominio conceptual* como entorno concreto, social o natural, el conocimiento se concreta en un sentido de orientación que permite al sujeto: generar y/o integrar su

modelo mental, aprender a utilizar el entorno, establecer relaciones entre situaciones. La interiorización de este sentido se realiza con la experiencia directa. El razonamiento está constituido por los dos siguientes procesos: construcción, manipulación de modelos mentales y reconocimiento de conceptos en el entorno. En el caso de la investigación esto se concreta en que los actores naturales pueden no tener representaciones conscientes o explícitas de los conceptos, pero las cosas del entorno pueden funcionar de un modo que es matemáticamente visto por el investigador.

2. Las *teorías interactivas constructivistas sociales*, que valoran las interacciones que existen en el sistema *comunidad*. Como el sujeto actúa interpretando la realidad, de manera subjetiva, con esquemas que vienen de la interacción social, el proceso de aprendizaje se realiza en el conjunto alumno-profesor-proceso social de construcción del conocimiento.
3. La *teoría de Sistemas* por sus aspectos mediacional (el foco en el medio) y transaccional (el foco en las relaciones). El conocimiento es parte de un sistema constituido por las relaciones entre los sujetos que comunican y el objeto de la comunicación. Esta estructura de relaciones internas al grupo es algo de lo que el conocimiento no se puede separar.
4. Se toma el punto de vista del *internacionalismo simbólico* que ve la realidad a través de los significados sociales que le dan las personas que la viven; significados que salen de la interpretación que las personas, que actuando e interactuando, elaboran significados y sentido. Por eso es tan esencial el rol de *la etnografía*, que implica *captar* las relaciones desde el punto de vista del escenario mismo en el que se establecen; acordando que por etnografía se entiende aquella ciencia que se ocupa de la “reconstrucción de la vida de un grupo social, en un periodo de tiempo, que representa fielmente las visiones y significados de los participantes” (Goetz & Le Compte, 1988).
5. Hoy en día, y aquí en particular, la *epistemología* considera el conocimiento posible, pero inseparable de sus productores y de su proceso de producción, contextualizado en la comunidad que lo genera y que, solo ella, puede evaluarlo. La epistemología de la matemática ha abandonado el dogmatismo lógico hacia el escepticismo pragmático que la ve como un lenguaje social. El concepto de verdad es relativo, hundido en la cultura; la validez depende del contexto.

2.2. Análisis conceptual: Cultura

Se realiza el análisis conceptual del término *Cultura*, según las pautas propuestas por Rico (2001). A partir de la definición de la enciclopedia Encarta, elegida porque incluye los diversos matices que contiene el término -y siguiendo su evolución epistemológica-, se analiza el uso que hacen diferentes autores y se declara cual es la interpretación a la que nos referimos en nuestra investigación.

CULTURA

La definición del término Cultura de la enciclopedia *Microsoft® Encarta® 2009.[DVD]*. © 1993-2008 Microsoft Corporation es:

cultura. (Del lat. *cultūra*). f. cultivo. || 2. Conjunto de conocimientos que permite a alguien desarrollar su juicio crítico. || 3. Conjunto de modos de vida y costumbres, conocimientos y grado de desarrollo artístico, científico, industrial, en una época, grupo social, etc. || 4. ant. Culto religioso. || ~ física. f. Conjunto de conocimientos sobre gimnasia y deportes, y práctica de ellos, encaminados al pleno desarrollo de las facultades corporales. || ~ popular. f. Conjunto de las manifestaciones en que se expresa la vida tradicional de un pueblo

Analizando estas definiciones desde el punto de vista histórico se reconoce el recorrido y el desarrollo del término. De su origen latino con significado de cultivo (1), el término empieza a abarcar significados más amplios cuando Cicerone acuña la expresión *cultura corpori et animi*, adquiriendo así las matices de formación -desarrollo personal- a través de prácticas corporales (física) y logrando conocimiento para un juicio crítico (2). En el Medievo, siendo la formación estrechamente ligada al ámbito religioso, se extiende a este sentido (4). De aquí a expresar tradiciones (no solo religiosas) del pueblo se llega al significado que se considera en esta investigación por el término cultura (3) y que reinscribimos utilizando las palabras del filósofo Tylor:

cultura es aquel todo complejo que incluye el conocimiento, las creencias, el arte, la moral, el derecho, las costumbres, y cualesquiera otros hábitos y capacidades que el hombre adquiere en cuanto miembro de la sociedad (Quintanilla (1985). Diccionario de filosofía contemporánea, Salamanca: Sígueme).

En el concepto de Cultura aquí se consideran tres aspectos que autores reconocidos caracterizan como:

1. Semiótico - cognitivo (lo que tiene que ver con símbolos, expresión, comunicación)

Geertz: una cultura es un “grupo ordenado de símbolos y significantes con los que la gente construye el sentido de los hechos de su vida” (citado en Oliveras, 1996).

2. Socio-político (organización del trabajo, distribución del poder, relaciones sociales)

Borba (1990): Cultura es, además de los significados compartidos, “lo que el hombre ha añadido al mundo, con el trabajo, la lucha creativa y recreativa”.

3. Tecnológico (artefacto-producto)

Oltra: su visión de cultura incluye “trabajos y producción creadoras, el fractal de las obras y técnicas creadas por el ser humanos” (Uña y Hernández, 2004).

Huxley (1955) expresa este concepto en su modelo atómico como tres distintas facetas de la noción de cultura: mentifacto, sociofacto y artefacto.

1. *Mentifactos* son los elementos centrales y más duraderos de una cultura: la lengua, lo mítico, las tradiciones artísticas y el folklore, similares. Básicamente, son elementos abstractos y mentales. Se relacionan con la

capacidad humana de pensar y formular ideas, y conforman los ideales y las imágenes por los que se miden otros aspectos culturales.

2. *Sociofactos* son aquellos aspectos de una cultura que se relacionan con vínculos entre individuos (estructuras familiares) y grupos (sistemas políticos, y educativos).
3. *Artefactos* son las manifestaciones materiales de la cultura. Son aquellos aspectos de la tecnología material de un grupo que permiten satisfacer sus necesidades básicas de alimento, cobijo, transportes y similares. Los sistemas de uso de suelo y la producción agrícola son artefactos culturales, como lo son las herramientas y el diseño particular del vestido.

2.3. Etnomatemática y la filosofía de Wittgenstein

Un aporte epistemológico muy actual es el proporcionado por Vilela (2010) que propone, reafirmando lo dicho por Oliveras (1996) asociar la filosofía de Wittgenstein y la Etnomatemática, en búsqueda de un punto de partida para una fundamentación teórica de las reflexiones etnomatemáticas.

Una base filosófica de la Etnomatemática debe incluir y explicar la presencia de diferentes sistemas matemáticos y la coexistencia de diferentes concepciones de racionalidad. El enfoque no metafísico de Wittgenstein, que considera la matemática como un conjunto de enunciados normativos en lugar de descriptivos, es una propuesta interesante en este sentido. Hemos dicho que la Etnomatemática estudia antropológicamente como la matemática es utilizada en prácticas específicas. Si se interpreta la matemática según la teoría de los juego del lenguaje de Wittgenstein, resulta que no es una descripción de la realidad, sino un sistemas de reglas y procedimientos. El conocimiento no es un producto, único, universal y eterno, sino más bien un proceso que se desarrolla en la práctica, que adquiere sentido en la utilización, en la situación. A propósito del lenguaje, Wittgenstein afirma que *la estructura del lenguaje estructura la realidad*, es el lenguaje el que organiza la experiencia y determina los significados, es la esencia de este sistema de símbolos con reglas el que plasma la realidad. Lo que existe depende de la manera en que se expresa, se interpreta y se entiende. Los significados nacen en el uso, según Wittgenstein.

Se pueden subrayar dos aspectos de la filosofía de Wittgenstein que se acercan a la Etnomatemática, uno es lo que se acaba de presentar, que el significado es inserto o incluido en las prácticas lingüísticas, ya que el lenguaje es parte del contexto en que se desarrolla. El otro consiste en el aspecto no metafísico del conocimiento, que considera los significados no fijos y determinados, sino contextualizados, condición indispensable para admitir la posibilidad de que existan varias prácticas matemáticas culturalmente diferentes (Vilela, 2010).

Aquí se tienen que profundizar los constructos de gramática y reglas para no caer, por un lado, en un relativismo arbitrario, o por el otro, en la pérdida de la pluralidad. La

práctica determina significados diferentes, pero estos se parecen porque la estructura del sistema lingüístico es dirigida por la gramática, por un conjunto de reglas que enseñan como las expresiones pueden ser utilizadas, comprendidas y manipuladas adentro de un contexto específico.

La gramática es una descripción normativa de como se ve -y se lee- el mundo; constituye la regla de significado que permite el uso compartido, no es la sustitución del poder normativo de la comunidad, pero es su expresión. La gramática es dinámica, en continua transformación, sin ser arbitraria; es un espejo de la realidad, es una experiencia cristalizada dictada por la práctica; detecta la regularidad de las formas de la vida más que regular la existencia de ellas.

Este concepto de reglas compartidas se inserta naturalmente en la noción de aprendizaje situado de Lave (citado en Oliveras, 1996). El aprendizaje es un proceso determinado por el medio que estructura la práctica en la situación específica; la teoría del aprendizaje situado no comparte la visión de unas formas de conocimiento que se elevan encima y afuera de la situación, no dan por obvio la transferencia de un ámbito a otro, porque interpretan el conocimiento como actuación *in locus*, que ocurre de modo singular en cada contexto.

En este sentido la propuesta de este trabajo se puede ver como el intento de traducir al lenguaje académico de la matemática formal las prácticas matemáticas que ocurren en el contexto de la actividad cotidiana, explicables por los sujetos que las llevan a cabo a través de un lenguaje informal constituido por un conjunto de varias formas de expresión orales, mezcladas con gestos y dibujos. Así que el rol de la investigadora es de interpretar prácticas que ella considera como matemáticas y trasladarlas al lenguaje formal.

2.4. Competencias, Ciudadanía y Multiculturalidad

El aporte de este trabajo al modelo MEDIPSA se inserta en la variable social (sociología) y educativa (didáctica). Consiste en integrar en el modelo el concepto de competencias básicas como herramienta conceptual con la cual la educación se plantea seguir el paso de los profundos cambios que se están realizando en la sociedad postmoderna. Mis observaciones versarán por un lado al análisis de estos cambios socio-económico y de la evolución del concepto de ciudadanía (componente sociológica) y, por otro lado, se proponen poner de manifiesto como la respuesta del sistema educativo, que se concreta en la educación por competencias (componente educativa), se inserta ágilmente en el enfoque teórico del modelo MEDIPSA.

a) Cambios socio-económicos

La sociedad actual está viviendo un momento de profundas transformaciones. Se están produciendo cambios en el sistema económico con fuertes repercusiones en el ámbito social. Los factores de cambios son principalmente la *revolución tecnológica* y la globalización (Tezanos, 2002). Esto se concreta en las rupturas de barreras virtuales y reales, con la posibilidad de comunicación de grandes cantidades de información y la libre circulación de bienes materiales. El dinamismo con el cual las empresas tienen que

responder a la rapidez de los cambios de las demandas del mercado económico implica una gran flexibilidad del mercado laboral que se refleja en la pérdida de estabilidad y seguridad de los puestos de trabajo. El trabajo se hace cada vez más cambiante; la globalización, que permite una siempre mayor circulación de bienes, necesita de las empresas una metamorfosis continua para que mantengan un alto nivel de competitividad.

La introducción del automatismo en muchas de las áreas relacionadas al sector productivo produce menor empleo y más concentración de la riqueza en las manos de los pocos que ocupan posiciones especializadas. El sector de los servicios, que absorbe ahora siempre más recursos del mercado laboral, necesita mano de obra menos especializadas, más flexible e *intercambiable*, o sea capaz de adaptarse rápidamente a cambiar de trabajo, que consigue menor sueldo y que vive en posición de constante precariedad laboral, por la inseguridad de poder mantener el propio trabajo.

Si la sociedad y la economía cambian, se requiere que cambien también las personas que viven en esa nueva realidad socio-económica. Entonces la reina de las exigencias del mercado laboral es la *flexibilidad* (Cancer, 2008). Esto se refleja en el tipo de formación que las personas necesitan. La flexibilidad que se requiere a nivel laboral se refleja en la manera de considerar el conocimiento. La sociedad de la información o del conocimiento está caracterizada por una nueva visión cuya raíz ideológica se puede identificar en la relatividad del saber. La tecnología proporciona una impresionante difusión de todo tipo de información - de conocimiento y de *desconocimiento* que requiere ser seleccionada, elaborada y reutilizada rápidamente; la multiculturalidad que va creciendo invita a la interacción entre grupos socialmente heterogéneos (Bolívar y Pereyra, 2006). El vértice de información que se crea con la celeridad de los avances de la investigación y la facilidad que la tecnología proporciona en la comunicación, necesitan de usuarios capaces de buscar, evaluar, seleccionar y absorber las novedades rápidamente.

A nivel político, el neoliberalismo, basado en la ideología del libre mercado, necesita una debilitación de las intervenciones y del control del estado-nación en los factores económicos y sociales. La ideología del neoliberalismo como *pensamiento único*, prevé que el control del estado vaya disminuyendo para dejar espacio a las iniciativas privadas en los ámbitos económicos pero también en los sociales. Esto provoca que desaparezca el estado del bienestar con todas sus políticas sociales y que aumente la desigualdad social.

Después de las guerras mundiales, el estado-nación, se había hecho garante y promotor de la sociedad del bienestar, expresión que indica una sociedad más comprensiva y vinculada con las necesidades sociales. Mientras, hoy en día, el estado-nación va perdiendo este rol activo e intervencionista en las políticas de protección social.

El poder del estado-nación se traslada a otras entidades; por un lado tenemos las entidades supranacionales (como la Unión Europea) que nacen y adquieren importancia política para promover le rupturas de las barreras, y una idea de ciudadanía mundial,

concepto incomprendido que se concreta en la comunidad como una falta de solidaridad, vinculada a la pérdida de un sentido de pertenencia a una identidad nacional. Por otro lado tenemos el fortalecimiento de las entidades locales símbolo de la atención a la autonomía individual, hija del neoliberalismo y de la privatización, que provocan particularismos y discriminación.

b) Ciudadanía, interculturalidad y exclusión social

Hoy en día, en este contexto en particular, el concepto de ciudadanía no va asociado a una identidad nacional o a un conjunto de rasgos culturales o biológicos, como podía ser en el siglo pasado XX, sino la ciudadanía se asocia a la idea de una comunidad, multicultural, que comparte un conjunto de derechos democráticos de participación y comunicación (Bolívar, 2004).

Con el movimiento de reivindicación de la diversidad adquiere importancia la libertad más que la igualdad; no se aspira a un mundo globalizado que anule la diversidad y provoque uniformidad entendida como homogeneidad, sino se mira a conseguir una convivencia en el respeto de la pluralidad cultural y de la singularidad de cada persona.

Se ha evolucionado de un concepto de la multiculturalidad como asimilación y después tolerancia de las diferencias, al pluralismo, que ha encarnado la reivindicación post moderna del reconocimiento de la diversidad cultural. Con la crisis de soberanía del estado-nación, la idea de integración como factor uniformador para formar una identidad colectiva se ha abandonado a favor de la reivindicación de la diversidad. El pluralismo no acentúa las diferencias sino fomenta el dialogo intercultural para la creación de una idea de ciudadanía intercultural, vista como igualdad de derechos y estatus. Se pierde la concepción de la ciudadanía integrada o integradora que corre el riesgo de ser homogeneizadora, y se adquiere un enfoque *integrativo-inclusivo*, que plasma una concepción de ciudadanía universal, cosmopolita entendida como comunidad de convivencia en el respeto de la diversidad.

Se habla de inclusión y exclusión social respecto a la participación en la vida social de la comunidad, bajo esta nueva noción de ciudadanía como comunidad que comparte un conjunto de derechos democrático, de participación y de comunicación en lugar de compartir un conjunto de costumbres pasadas. Un *excluido social* es una persona que no tiene los medios, económicos y culturales, para participar activamente en la vida de la comunidad. Para hacer de una persona un *incluido social* se les tiene que proporcionar los medios para que pueda insertarse. Estos medios son la posibilidad de conseguir un *buen* trabajo, así que disponga de recursos económicos y estabilidad, y las herramientas culturales y los valores que lo hagan elemento participativo, activo, crítico y solidario respecto a la vida social. En ambos casos una educación adecuada proporciona la clave de acceso para la inclusión.

En coherencia con lo planteado hasta ahora, entendemos como ciudadanía *la condición de formar parte de una sociedad* en términos de ser incluido en la comunidad

social. Identificamos como la base de la inclusión social estos dos aspectos: el aspecto laboral, y el aspecto puramente social.

El ciudadano es entonces una persona flexible y operativa (Ortega, 2007), que sabe gestionar flujos de informaciones de manera crítica y constructiva, capaz de moverse en la sociedad del conocimiento para aprender a lo largo de la vida (Bolívar, 2008); estas calidades lo harán apto para conseguir, y poder cambiar fácilmente de trabajo, siguiendo las exigencias del mercado.

Por otra parte el ciudadano es una persona que participa activamente a la vida social (Bolívar, 2008), que sigue una ética cívica solidaria y participativa, que interactúa con los miembros de su comunidad, y de las otras, según principios de cohesión y de reciprocidad moral (Ortega, 2007). Es una persona crítica y libre, que rechaza el individualismo y la intolerancia (Cancer, 2008), sin que esto comprometa su realización individual (Bolívar, 2008).

c) Educación y exclusión educativa

Hay dos concepciones antipodales, o totalmente opuestas, de la educación: la escuela como un negocio, que responde a la mentalidad mercantil del neoliberalismo, y la escuela como un derecho. En el primer caso, la escuela es uno de los bienes para comprar, cuya calidad depende de las posibilidades económicas del cliente; la educación reproduce así la sociedad y tiende a mantener las divisiones sociales. Aquí las escuelas adquieren autonomía, en nombre de la calidad, y el Estado va perdiendo su rol de asegurar igualdad formal en término de cohesión y equidad (Bolívar, 2004). La otra visión romántica o de la inclusión, ve la escuela como un derecho, tiende, al contrario, a integrar a la ciudadanía en unos principios y valores comunes, compatiblemente con el reconocimiento de las diferencias, con el ideal de una socialización integradora a la vez que preservadora de las identidades; tiende a hacer de todos unos incluidos sociales y llenar los vacíos de la desigualdad, se propone cambiar el orden social preestablecido (Escudero, 2009).

En la perspectiva de la inclusión se identifican dos pilares sobre los cuales se basa el cambio en la concepción de la educación (Tedesco, 2002): *aprender a convivir* y *aprender a aprender*. *aprender a convivir* significa que la escuela debe proporcionar los valores éticos para la convivencia en una sociedad que se hace cada día más compleja y multicultural, fomentar la cohesión social, el dialogo, el respeto hacia el diferente. *aprender a aprender* recoge el abandono de la idea de la educación como transmisión del conocimiento y la nueva necesidad de aprender cómo enfrentarse al enorme volumen de información disponible y en continua creación, de aprender a seleccionar, evaluar, asimilar y utilizar rápidamente las novedades, o sea de comprender y operar sobre el saber. Todo esto incluye la capacidad de una reconversión profesional continua que requiere un aprendizaje permanente a lo largo de toda la vida.

El rol de una escuela comprensiva que mire a la inclusión es proporcionar a todos ese conjunto de conocimientos, destrezas y valores compartidos por los ciudadanos, que son necesarios para la vida en sociedad. El interculturalismo, como política educativa y

social, se preocupa de conjugar la diversidad sociocultural y las diferencias individuales, mediante la formación en una socialización intercultural. “El currículo ha de ser rediseñado de manera que incluya también los saberes, conocimientos y valores, de la cultura originaria” (Bolívar, 2004).

Ahora el punto está en cómo articular el reconocimiento de las diferencias locales, de los grupos étnicos o indígenas con la necesaria inclusión social. Esta problemática está en el centro de la acción investigadora del ISGEM, International Study Group on Ethnomathematics (D’Ambrosio, 1985, 2008; Barton, 2004; Gerdes, 1988; Oliveras, 1996) y participamos del interés por aportar, en esta investigación, acciones concretas a su articulación y elementos teóricos a sus fundamentos.

El concepto de fracaso escolar se puede interpretar bajo esta perspectiva de inclusión y exclusión. De la sociología, la exclusión educativa toma prestado la idea que existan zonas de vulnerabilidad o de riesgo de exclusión (Jiménez y Luengo, 2010). El fracaso escolar, visto bajo este enfoque, es un fenómeno complejo, estructural y dinámico que se inserta en la zona de vulnerabilidad o riesgo hacia la exclusión educativa. El fracaso como proceso, y no como producto, se crea *en* la escuela, *por* la escuela y *de* la escuela (Escudero, 2009): en otras palabras, es el sistema educativo que determina los contenidos, generalmente indicados en las competencias básicas, y establece los criterios para evaluar si el alumnado los ha adquirido, el que juzga y dictamina el fracaso o el éxito. Sobre todo, la cuestión está en detectar situaciones de vulnerabilidad y tomar medidas que las resuelvan, sin que el hecho mismo de manifestar estas diferencias se vuelva razón de exclusión.

Las *buenas prácticas* pertenecen a estas medidas que se deben tomar para evitar la exclusión educativa. El término proviene del lenguaje del mercado, relacionado con el sector de la gestión de la calidad. En educación, *la buena práctica*, adquiere un matiz complejo que hace que sea de difícil definición, porque “en esencia, no es una entidad completamente hecha, sino una realidad activa y dinámicamente creada por quien y quienes la piensan y desarrollan” (Jiménez y Luengo, 2010). Los programas de diversificación curricular son ejemplo, aunque tardío, de buenas prácticas donde se realiza una enseñanza más concreta y dirigida a situaciones reales de la vida cotidiana. Sería necesario reflexionar sobre la utilidad de tomar medidas preventivas que anticipen eventuales etapas de vulnerabilidad a lo largo de todo el proceso educativo. En este sentido las acciones educativas fundadas en Etnomatemáticas, como, por ejemplo, los Microproyectos (Oliveras, 1996, 2005); los recursos y actividades escolares, y de formación de profesores basadas en las culturas africanas (Gerdes, 2001; Rosa y Orey, 2010), evitan la exclusión debida a la variable cultural y pueden calificarse de buenas prácticas.

d) El concepto amplio de competencia

La educación tiene que preparar para vivir en esta sociedad camaleónica. Las instituciones escolares deben formar personas capaces de insertarse con éxito en la realidad social y laboral, pero sin caer en el error de pensar que la educación se reduzca a estar al servicio de la economía, peligro contra el cual Cancer (2008) nos alerta.

Y es aquí que entra en juego el papel de las competencias. El concepto de competencia está íntimamente ligado al de flexibilidad. Una competencia, no es solo una habilidad, sino es la capacidad de afrontar situaciones nuevas más allá de lo ya aprendido (Monereo y Pozo, 2007). Una competencia abarca de manera amplia todo el saber (conocimiento), el saber hacer (habilidad), las actitudes y las capacidades de enlazar estas últimas para enfrentarse a los problemas de la vida real y para adaptarse a situaciones nuevas y complejas que se van creando (Bolívar, 2008; Rico, 2007; Lupiáñez, 2010). Volvimos a la idea que la educación sirve para insertarse con éxito en la sociedad, o sea evitar la exclusión social; esto implica que la educación proporcione los medios y las maneras necesarias para la adquisición de las competencias fundamentales que permitan conseguir un trabajo y convivir, ser parte activa y consciente de la comunidad.

Ya hemos indicado una competencia como un conjunto complejo de conocimientos, destrezas, actitudes y valores. La idea de las competencias es que sirvan, sean instrumento de una educación que mire a formar ciudadanos. Así el desarrollo de competencias se realiza a través de un aprendizaje funcional y contextualizado, pero característica fundamental de las competencias es la independencia del contexto, la transferibilidad a situaciones diferentes de las en que se ha adquirido (Bolívar, 2008).

Las competencias abarcan aspectos instrumentales: saber para actuar y emplear herramientas interactivamente; aspectos emocionales y afectivos de tipo individual: tener una racionalidad autónoma, actuar autónomamente y de manera responsable; aspectos emocionales y afectivos de tipo colectivo: tener sentido cívico y saber interactuar en grupos socialmente heterogéneos (Ortega, 2007; Bolívar y Pereyra, 2006, Bolívar, 2008).

Merece subrayarse el carácter trasversal de las competencias, que se pueden identificar por ámbito y no por materia, y el carácter integrativo, o sea que las competencias actúen en conjunto en la elaboración o encadenación de estrategias. El desarrollo de estrategias nos conduce además a reflexionar sobre la relevancia de la metacompetencia, o sea de la capacidad de leer el contexto y activar el conocimiento y las habilidades que se ajusten a la situación a afrontar (Bolívar y Pereyra, 2006; Bolívar 2008).

Un cuadro muy eficaz nos lo proporcionan Monereo y Pozo (2007) en su distinción de las cuatro macro competencias (no obstante en su visión se trata el concepto de ciudadanía de manera más restringida comparado al uso que hacemos aquí).

1. En el escenario educativo, competencias para gestionar el conocimiento y el aprendizaje: ser aprendiz permanente.
2. En el escenario profesional, competencias para el acceso al mundo laboral y al ejercicio profesional: ser una profesional eficaz.
3. En el escenario comunitario, competencias para la convivencia y las relaciones personales: ser un miembro de la comunidad participativo y solidario.

4. En el escenario personal, competencias para la autoestima y el ajuste personal: ser una persona feliz.

Consideramos las cuatro calidades relacionadas a las competencias apenas presentadas como una síntesis valiosa de lo que para nosotros incluye ser un *buen* ciudadano y de las competencias que la educación tiene que proporcionar para conseguir este objetivo.

e) Etnomatemáticas en este nuevo entorno sociocultural

En todo este contexto se inserta la Etnomatemática por su atención a la diversidad y por sus intentos de valorar cualquier cultura, sea minoritaria o mayoritaria.

La importancia de conocer al *Otro* es fundamental para la convivencia. Estudiar la manera de hacer matemáticas propia de un grupo social aporta conocimiento sobre la manera en que sus miembros se expresan y relacionan con la comunidad. Esto proporciona ocasiones de acercamiento, de contacto y de entendimiento del otro, que conllevan solidaridad y cohesión en el respeto de la diversidad (aprender a convivir).

Llevar al aula el saber que se desarrolla en la vida diaria, objeto de estudio de la etnomatemática, proporciona ocasiones de reflexionar sobre el viceversa, o sea cómo llevar a la vida cotidiana lo que se aprende en la escuela, que es un objetivo primario del aprendizaje por competencia.

La etnomatemática comparte con el *aprendizaje por competencia* también:

- el carácter social e interdisciplinar (trasversal), así como trabaja,
- la transferibilidad del saber entre contextos (generalización),
- el meta-aprendizaje (aprender a aprender),

que impulsan la flexibilidad para gestionar el conocimiento y el propio aprendizaje, teniendo ambas teorías como meta ser aprendiz permanente.

3. METODOLOGÍA

3.1 Diseño de la investigación

El diseño de investigación de este trabajo es de tipo *no experimental* porque no se interviene activamente, intencionalmente para modificar las situaciones observadas sino que se considera el entorno en su natural complejidad; es *transversal*, ya que los datos se consideran recogidos durante un mismo momento observatorio; y es *exploratorio*, ya que se trata de una primera aproximación mediante el estudio de casos. Tal diseño constituye un método adecuado para la idea pretendida de realizar una modelización de cierto *signo* del contexto de las artesanías en términos matemáticos formales.

Se elige una metodología etnográfica por su adecuación a los objetivos de la investigación y la ventaja que este tipo de método de investigación proporciona, o sea, la flexibilidad y apertura que le otorga su orientación naturalista y fenomenológica: la constante atención al contexto sociocultural que caracteriza la componente *etnográfica* de la investigación (Goetz y Le Compte, 1988).

3.2 Instrumento metodológico

El *instrumento metodológico* que se crea para este estudio interpretativo formal de artesanías de trenzado tiene en cuenta dos aspectos: el producto final de la labor artesanal -considerado en su complejidad global- y el proceso que se lleva a cabo para realizarlo. La idea es desarrollar un método para analizar desde el punto de vista etnográfico (producto) y después desde el punto de vista de la matemática formal (proceso). Esta herramienta metodológica que creamos está constituida entonces por un Método de análisis ETnográfico (MET) y por un modelo de análisis matemático o MOdalización Matemática (MOM). El conjunto de los dos nos proporciona el instrumento metodológico MOMET.

Ponemos de manifiesto que, por su especificidad, a una definición teórico-conceptual del *objeto de investigación*, se prefiere una descripción operativa, es decir una caracterización del mismo a través de *casos* o ejemplos paradigmáticos concretos que indicaremos como *ejemplares*. Una recopilación de cordeles y trenzas permitirá así delimitar el contexto artesanal referente y construir de manera inductiva y realística una descripción del objeto, que valga como definición ejecutiva para los fines del estudio.

Entonces, como unidad de análisis, se considera el *ejemplar* concreto y real. En futuras investigaciones se identificarán patrones y se establecerán relaciones entre ejemplares.

a) *MET: Método de análisis Etnográfico*

Así que empezamos describiendo los factores sobre los cuales se basa el estudio etnográfico para, posteriormente, individualizar dónde y cómo interviene la modelización matemática.

Vamos a identificar estos factores claves de la metodología del análisis etnográfico (MET):

1. Factor de CARACTERIZACIÓN.

Se refiere a la forma de definición o descripción del objeto de estudio:

- a. Proveniencia histórico geográfica del *ejemplar*;
- b. Breve descripción del *ejemplar*;
- c. Imagen del *ejemplar*;

2. Factor UTILIDAD.

Se indica:

- a. Para qué acción (en la construcción, en la industria, en la agricultura, con animales, etc.) y
- b. Donde (lugar geográfico o contexto macro, lugar social o contexto micro: la casa, el campo, el taller, etc.) cada *ejemplar* de cordel es utilizado.

3. Factor MATERIAL.

Se tratan varios aspectos de los materiales empleados:

- a. Se considera la *cualidad* natural del material (por ejemplo cuero, algodón, lana, etc.) o *naturaleza* del material; eventualmente materiales diferentes que se pueden emplear juntos en el mismo cordel;
- b. Se estudia cómo se realiza la *preparación* de los materiales, es decir si hay unos procesos previos para teñir, cortar o ablandar los materiales;
- c. Las *propiedades físicas* de los materiales, cuales resistencia, flexibilidad, peso, maleabilidad, dureza, color, etc.

4. Factor MODALIDAD DE TEJIDO.

Se analizan los tipos de tejido, o forma en que se mezclan las fibras:

- a. Se distingue entre los ejemplares que presentan nudos, *anudados* (Parra, 2003), y los que
- b. No presentan nudos, *trenzados*. En esta modalidad el trenzado tiene la peculiaridad de que, en cualquier punto, si se deja la extremidad sin atar, se va soltando;
- c. Una categoría emergente es la del *cortado e insertado*, o sea los ejemplares que presentan hilos que vienen cortados para que otros hilos puedan atravesarlos;
- d. Otra categoría emergente es la que llamamos *tejido*, o sea cuando, además de no haber nudos, se puede distinguir entre trama y urdimbre (por ejemplo en las fajas);
- e. Las *herramientas* que se manejan para el tejido (las solas manos, o el uso de aparatos suplementarios, véanse más adelante la *carta*, y las Fotos A.1 y A.2 en anexos). El uso de las manos -y a veces de los pies (en los telares)-, interviene esencialmente en la definición de las artesanías.

Para la modelización matemática que sigue, este último factor es esencial: de hecho de aquí en adelante, y para el siguiente factor *Diseño*, se van considerando solo los ejemplares cuya modalidad de tejido es el *trenzado*.

El uso de herramientas o aparatos puede presentarse en varias modalidades de las expuestas.

5. Factor DISEÑO.

Este es el factor que caracteriza *el proceso de trenzar*. Aquí se consideran:

- a. El *número de hilos*, donde por hilo se entiende el cabo, la unidad primordial que se va trenzando;
- b. El *número de colores*, si hay distintos, y *cuántos hilos* hay por color;
- c. La *forma* del artefacto que se va tejiendo, o sea la *visión global* (Bolaños, 2009) predominante (cuadrado, redondo, lineal, etc.);
- d. La *manera* de trenzar, la secuencia de acciones que se tienen que cumplir para llegar a realizar el trenzado, *el proceso dinámico*.
- e. La *trama* del trenzado, el producto desde el punto de vista estático.

Otros factores a considerar en un análisis completo, pero que por razones de tiempo no desarrollaremos en detalle para los ejemplares que trataremos en este trabajo, son:

6. Factor DIMENSIÓN.

Ya hemos identificado las artesanías de trenzado como las artesanías cuyo producto está caracterizado por su desarrollo en *una dimensión*, digamos la longitud (o largueza), que predomina sobre las otras dos. Se consideran entonces:

- a. La extensión según esta dimensión predominante.
- b. Relación de la extensión, con el grosor, el uso, el diseño de trenzado y el material.

Se consideran elementos relevantes por razones sociales:

7. Factor TIEMPO.

- a. Cuanto se tarda en trenzar una secuencia mínima, un artesano experto;
- b. El tiempo empleado en terminar un producto, o la durada del producto.

8. Factor ECONÓMICO.

- a. El coste del producto, neto y comercial (si hay precios establecidos o no).
- b. Quien le pone el precio de venta y sobre qué se realiza la estimación (consumo energético, materiales, tiempo empleado, producto deteriorado, etc.) y
- c. Cómo se estima (con anotaciones, considerando facturas de gastos realizados, utilizando calculadora, teniendo en cuenta solo las necesidades de dinero inmediatas).

b) MOM: Modelización Matemática

La conexión entre los aspectos etnográficos y matemáticos que estudiamos en esta sección se realiza a nivel del factor 5 (*Diseño*) y precisamente en el proceso activo de trenzar. Vamos a desarrollar una modelización teórica que traduzca, en el lenguaje de la matemática formal, el diseño del trenzado, y precisamente a partir de la manera activa de realizar la acción de trenzar.

Realizamos el análisis en dos momentos considerando primero el proceso según su desarrollo en *sección horizontal*, imaginando mirar la trenza o el cordel en construcción desde el punto de vista de la cola, es decir desde donde los hilos están a punto de ser trenzados.

Después observamos el recorrido de los hilos según la *sección vertical*, mirando el diseño en el producto ya terminado, según la dimensión longitudinal mayor.

Sección Horizontal - Modelización con grafos

El lenguaje de la matemática formal que utilizamos ahora en la modelización de la sección horizontal es el de la teoría de grafos.

Un grafo G es un par ordenado $G=(V, E)$ donde V es un conjunto de vértices o nodos, y E es un conjunto de arcos o aristas, que relacionan estos nodos. Se considera V finito y se llama orden de G al número de vértices de V , indicado $|V|$.

En la modelización que presentamos, los vértices o nudos representan las posiciones de los hilos a punto de ser trenzados, los indicaremos con letras minúsculas. Los arcos o aristas representan los movimientos de los hilos, respecto a la posición, que el artesano tiene que hacer cumplir a los hilos para crear la trama.

Estudiamos la secuencia mínima de movimientos que se van repitiendo y que caracterizan unívocamente el trenzado.

Distinguimos varias fases:

1. *Movimiento mínimo*: es el movimiento que involucra dos o más hilos que intercambian sus posiciones; el conjunto de hilos es el mínimo tal que cada hilo del conjunto, en su movimiento, vaya ocupando una posición dejada vacía por el movimiento de otro hilo del conjunto y, a su vez, deje una posición vacía que sea ocupada por otro hilo del conjunto. Se describe en el grafo a través de un circuito simple. Esta caracterizado por:
 - a. Cuantas y cuales posiciones se intercambian, o mejor dicho, los que se intercambian son los hilos que se encuentran en determinadas posiciones. Precisamos que, por razones de claridad y fluidez del discurso, de aquí en adelante con *posiciones* nos referimos a los hilos que se encuentran en las posiciones determinadas en el paso en cuestión;
 - b. Un sentido, horario o anti horario.
2. *Paso*: un paso del proceso de trenzar es el máximo conjunto de movimientos mínimos tal que cada vértice no pertenece a más de un movimiento. Un paso se

representa en un único grafo en el que aparecen eventualmente más circuitos no conectados. Está caracterizado por

- a. Números de movimientos mínimos que constituyen el paso;
 - b. Orden de los movimientos mínimos.
3. *Secuencia simple o compuesta*: si la secuencia mínima se describe con un solo paso, es suficiente un solo grafo para describirla (simple); si la secuencia incluye más de un paso, se necesita más de un grafo para describirla (compuesta).

Señalamos que todos los grafos de cada paso tienen la misma estructura (o esqueleto), o sea, en términos técnicos, el grafo *vacío* asociado, cuyo conjunto de aristas es nulo, es el mismo. Esto significa que, si a cada grafo de cada paso le *quitamos* las aristas, obtenemos siempre el mismo grafo vacío, que acá llamamos *grafo estructura*. El *grafo estructura* está determinado por el diseño. Los grafos estructuras que consideramos, son todo cuadrados, es decir los vértices o nudos se disponen sobre los lados de un cuadrado.

Observamos que en este estadio del análisis no nos interesan particularmente los colores de los hilos, pero cabe destacar que la disposición de los hilos, si son de distintos colores, en el momento de iniciar el trabajo, influye mucho sobre la apariencia final del cordel. Así que cuando vayamos a analizar ejemplares concretos constituidos con hilos de dos o más colores, daremos la *disposición inicial* de los hilos, según los colores, en el *grafo estructura*.

Para aclarar el concepto, hagamos un ejemplo con la *trenza simple de tres hilos*, la clásica trenza del pelo. Se trata de una secuencia compuesta, en particular está formada por dos pasos así que se necesitan dos grafos para describirla. Llamamos a las posiciones de los hilos con las letras minúsculas *a*, *b*, *c*. En este caso, los nudos los visualizamos así: *a* sobre el lado horizontal arriba del cuadrado, *b* sobre el lado vertical de la derecha y *c* sobre el lado vertical de la izquierda. Los dos pasos de la secuencia son, en el orden siguiente: el primero constituido por un circuito simple en sentido horario entre las posiciones *a* y *b*; el segundo constituido por un circuito simple en sentido anti horario entre las posiciones *a* y *c*.

La aclaración del punto (1.a.) significa que las letras *no se mueven*, es decir quedan asociadas a la posición, así que, en pasos sucesivos, siguen refiriéndose al mismo nudo del *grafo estructura* asociado al diseño.



Figura 3.1. Grafo de la trenza simple de tres hilos

Sección Vertical - Modelización combinatoria

Ahora vamos a utilizar el lenguaje de la combinatoria como lenguaje de la matemática formal para seguir modelizando el proceso de trenzar. Dado un conjunto finito de elementos, llamado V , una permutación es una correspondencia (o aplicación) biyectiva de V en sí mismo, $p: V \rightarrow V$, a veces indicada como reordenamiento. El conjunto de las permutaciones en V con la operación de composición forma un grupo, indicado S_V .

Se llama ciclo, y se indica $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la permutación que manda cíclicamente cada elemento en su sucesivo, es decir x_i en x_{i+1} hasta x_n en x_1 , mientras deja fijos los que no aparecen. Si el ciclo contiene solo dos elementos se llama transposición. Dos ciclos se dicen disjuntos si no comparten ningún elemento de V . Cada elemento del grupo de permutaciones se puede escribir como composición de ciclos disjuntos (la composición, si los ciclos son disjuntos, es simplemente una yuxtaposición). Así que para expresar las permutaciones vamos a utilizar la notación de composición de ciclos disjuntos.

Volvamos a las trenzas. Los grafos utilizados en la sección anterior nos permiten detectar de qué manera se realiza la acción de trenzar en función de una posición inicial de los hilos y de una secuencia de intercambios de estas posiciones. Esta misma secuencia se puede presentar a través de la combinatoria expresando los movimientos mínimos, es decir los circuitos, como ciclos del grupo de permutaciones S_V (donde V es el conjunto de nudos del grafo estructura) y describiendo los pasos con otros elementos del grupo de permutaciones que salen de la composición de estos ciclos.

Se observa que de esta manera no se incluye la información sobre la colocación de las posiciones, o sea el grafo estructura, y se puede perder la información sobre el sentido -horario o anti horario- del circuito que involucra solo dos posiciones.

En analogía a lo visto para la modelización con grafos, ahora se encuentra:

1. *Movimiento mínimo*: ya hemos visto que a cada circuito del grafo se asocia un ciclo, caracterizado por:

- a. Cuantas y cuales posiciones se cambian.
- b. El sentido.

Vamos aclarando que si el ciclo está compuesto por más de dos elementos, (x_1, x_2, \dots, x_n) , el sentido del circuito asociado es de x_1 a x_2, \dots , hasta x_n ; esto implica que el sentido queda unívocamente determinado por la escritura del ciclo, una vez noto el grafo estructura, o sea la ubicación de los vértices o nudos en el espacio, (el circuito queda horario o anti horario según como se diseñan los vértices en el grafo de base que he llamado grafo estructura).

Si el ciclo es una transposición, asumimos la siguiente convención: suponiendo que $x_1 < x_2$ (en el ordenamiento alfabético), un circuito entre x_1, x_2 horario será (x_1, x_2) ; un circuito x_1, x_2 anti horario será (x_2, x_1) .

2. *Paso*: se representa con un elemento del grupo S_V que resulta, eventualmente, de la composición de más de un ciclo. Se caracteriza por:

- a. Número de ciclos que lo constituyen.

- b. Se considera el orden en el que aparecen escritos los ciclos como el orden de ejecución de los movimientos.
3. *Secuencia simple o compuesta*: si la secuencia mínima se describe con un solo paso, es suficiente una sola permutación para describirla (simple); si la secuencia incluye más de un paso, se necesita más de una permutación (compuesta).

En el ejemplo analizado anteriormente de la trenza simple de tres hilos, el proceso se describe a través de una secuencia compuesta de dos permutaciones de $S_{\{a,b,c\}}$, cada una constituida por una sola transposición;

$$p_1 = (a, b),$$

$$p_2 = (c, a).$$

De aquí en adelante, utilizamos la notación p_i para los pasos o permutaciones, y σ_{ij} para los ciclos o movimientos mínimos de p_i , donde el primer índice indica el paso de pertenencia y el segundo el orden de los ciclos en la permutación que representa el paso. Cuando el paso p_i está constituido por un solo ciclo, indicamos el ciclo directamente con p_i . Se observa que, en este caso de la trenza simple, siendo p_2 una trasposición con cambio anti horarios, la letras están en orden (alfabético) decreciente.

Recordamos que en cada paso las letras siguen asociadas a las mismas posiciones, los que *se mueven* son los hilos.

Ahora ponemos de manifiesto las razones por las cuales este segundo análisis ha sido nombrado como *sección vertical*. Si numeramos los hilos, asignándoles los números naturales $1, 2, \dots, |V|$, es posible seguir el recorrido de los hilos en la trama de la trenza según la sección vertical. Para ejecutar el cambio de posiciones de los hilos que se realiza durante un paso, se aplica a los números la permutación que representa el paso. Vamos a explicar cómo: la permutación que caracteriza el paso es expresada en función de las letras que indican las posiciones, así que, en realidad, para describir un determinado paso se tiene que cruzar la permutación con la información sobre las posiciones en las cuales se encuentran los hilos justo antes de realizarlo. Se genera así una nueva permutación, esta vez en función de los números que indican los hilos, sustituyendo a cada letra el número del cabo que en ese momento ocupa la posición indicada por la letra.

Realizamos este procedimiento en una tabla. Las primeras $|V|$ columnas son las posiciones, así que en las primeras $|V|$ celdas de cada línea se ponen los números de los hilos que ocupan las correspondientes posiciones. La $|V|+1$ columna contiene la permutación que caracteriza el paso a aplicar a la configuración descrita en las anteriores columnas en términos de las posiciones. La última columna representa la permutación para aplicar a la configuración en función de los números de los hilos. La tabla termina cuando se consigue de vuelta la configuración inicial.

Sigue la tabla *T3.1* de la *trenza simple de 3 hilos*, que hemos llamado *del pelo*.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	p_1	Paso específico
1	2	3	$p_1 = (a, b)$	(1,2)
2	1	3	$p_2 = (c, a)$	(2,3)
3	1	2	$p_1 = (a, b)$	(3,1)
1	3	2	$p_2 = (c, a)$	(1,2)
2	3	1	$p_1 = (a, b)$	(2,3)
3	2	1	$p_2 = (c, a)$	(3,1)
1	2	3	-	-

Tabla T3.1. Recorrido de los hilos de la trenzas simple de tres hilos.

3.3 Observaciones

El artesano tiene que ser capaz en cada momento de reconocer en qué punto se encuentra; entonces registra este recorrido, si bien no conscientemente, lo hace en forma de *rutina*. Tampoco representa sus acciones en estos términos formales.

Se presenta de nuevo el problema de elegir cual debe ser la unidad de análisis en este trabajo fin de Máster, porque etnográficamente sería relevante *la artesanía*, y matemáticamente el *cordel-ejemplar*.

Tras una reflexión se llegó a la conclusión siguiente: se puede entender o definir el cordel *ejemplar* como representante de una clase de equivalencia y la clase de equivalencia es *tal tipo de trenzado*, en la que existen muchos cordeles, que posiblemente pertenecen a distintas *artesanías*, pero a efectos del trenzado, visto matemáticamente, son equivalentes. Tomamos uno como representante, para analizarlo y poder definir *la clase* en términos matemáticos, diciendo que todos los cordeles con esa modelización son equivalentes. Etnográficamente puede que no sean equivalentes para el uso social y/o el material. Por eso la unidad de análisis matemático es *el ejemplar*, que luego se generaliza al modelizarla, y se particulariza mediante los otros factores que no son su estructura matemática, y que son esenciales para *una artesanía*.

Una *artesanía* puede tener ejemplares no equivalentes, es decir con distintos tipos de trenzados.

Por ahora, entonces, hablamos solo de ejemplares concretos y de artesanía de trenzado en general, sin pretender distinguir entre diferentes artesanías.

4. ESTUDIO DE CASOS.

Hacemos una presentación y análisis de ejemplos paradigmáticos presentes en la literatura, en primer lugar, y de casos tomados en el proceso de investigación de campo, en segundo lugar, utilizando el método creado.

Antes de hacer una pequeña etnografía con recopilación de *ejemplares*, que nos ayudaran a definir las artesanías de trenzado que hemos encontrado durante nuestro primer acercamiento a un escenario del campo (Cafayate, Argentina, 2011), queremos ver cómo se desarrolla un análisis matemático, según la metodología definida en el capítulo anterior, aplicado a ejemplos tomados de documentación bibliográfica.

Entonces presentamos en primer lugar el análisis del proceso de producción de algunos *diseños* (Factor 5) de cordeles, basándonos en la recopilación de cordeles publicada por Richard Owen (1995) y posteriormente lo haremos para los hallazgos de campo, en los que ha jugado un papel crucial el Profesor Alberto Castagnolo de la Escuela de Manualidades de Cafayate, que ha colaborado como informante clave durante la estancia de campo.

4.1 Análisis Matemático: algunos ejemplos con cuatro y ocho hilos

Presentamos en este apartado cómo realizar la modelización matemático formal de algunos diseños, haciendo una reelaboración de los esquemas utilizados por Richard Owen, bajo la guía y las explicaciones del Profesor Castagnolo. El nombre que hemos elegido para cada diseño se refiere a la forma del grafo asociado. Ponemos de manifiesto que en este apartado de análisis matemático consideramos el diseño *independientemente* de un ejemplar específico de cordel, es decir la unidad de análisis es una clase de equivalencia de cordeles, caracterizados por ser producidos a través del mismo proceso de trenzar, entonces cuyos diseños coinciden.

a) La cruz simple de 4 hilos

La modelización del proceso de realización que llamamos la cruz simple de cuatro hilos consiste en una secuencia simple, o sea de un solo paso, que se representa con un solo grafo. El grafo estructura está constituido por cuatro nudos, correspondientes a los cuatro hilos, posicionados cada uno sobre un lado del cuadrado, que nombramos en sentido horario *a*, *b*, *c*, *d*. El paso está compuesto por dos movimientos mínimos, el primer movimiento mínimo a realizar es el intercambio, en sentido horario, de los hilos que ocupan las posiciones *a*, *c*. El segundo movimiento mínimo es el intercambio en sentido anti horario de los hilos que ocupan las posiciones *b*, *d*. En el grafo estos se visualizan como dos circuitos de dos que se disponen como una cruz -de aquí el nombre- (Figura 4.1).

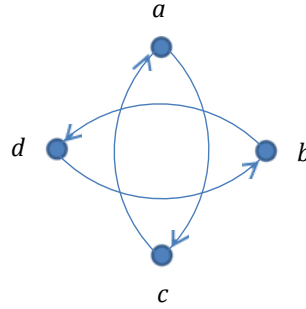


Figura 4.1. Grafo de la cruz simple de 4

En combinatoria el único paso que constituye la secuencia se representa con una permutación p_1 en $S_{\{a,b,c,d\}}$ compuesta por dos transposiciones $\sigma_{1,1} = (a, c)$ y $\sigma_{1,2} = (d, b)$. Observamos que $\sigma_{1,2}$, siendo en sentido anti horario, tiene las letras en orden alfabético decreciente.

Así que, de $p_1 = \sigma_{1,1} \sigma_{1,2}$, se obtiene

$$p_1 = (a, c) (d, b).$$

Ahora vamos a numerar los hilos de la configuración inicial de manera tal que el hilo posicionado en el nudo a sea el hilo 1, el del nudo b sea el hilo 2, etc. De aquí en adelante siempre utilizamos esta convención para numerar los hilos de la configuración inicial. Para seguir el recorrido de los hilos en la trama aplicamos a la configuración inicial la permutación que describe el paso. Así que la permutación en función de las letras, o sea de las posiciones, se reescribe en función de los números, o sea de los hilos (en la tabla T4.1 es la columna más a la derecha) y se aplica a la configuración inicial obteniendo una nueva configuración como se describe en la línea sucesiva de la tabla T4.1.

a	b	c	d	p_i	Paso específico
1	2	3	4	$p_1 = (a, c) (d, b)$	(1,3) (4,2)
3	4	1	2	$p_1 = (a, c) (d, b)$	(3,1) (2,4)
1	2	3	4	-	-

Tabla T4.1. Recorrido de los hilos de la cruz simple de 4.

Observamos que el número de secuencias realizadas para obtener la configuración inicial coincide con el orden de la única permutación que describe el paso que constituye la secuencia.

b) La cruz compuesta de 4 hilos

La cruz compuesta se realiza con una secuencia compuesta, constituida por cuatro pasos. El grafo estructura es el mismo que el de la cruz simple. Mostramos directamente los grafos que describen cada paso (Figura 4.2). El grafo del paso 1 está formado por dos circuitos de dos, el primero entre los nudos b, d en sentido anti horario y el segundo entre los nudos a, c en sentido horario. El grafo del paso 2 contiene dos

circuitos, los dos en sentido anti horario, uno entre los nudos a, b el otro entre los nudos b, c . El grafo del paso 3 es como el del paso 1 pero los dos circuitos se realizan en orden invertido, así que está formado por un primer circuito horario entre a, c y un segundo anti horario entre b, d . El grafo del paso 4 es lo mismo que el del paso 2, pero los dos circuitos son en sentido horario.

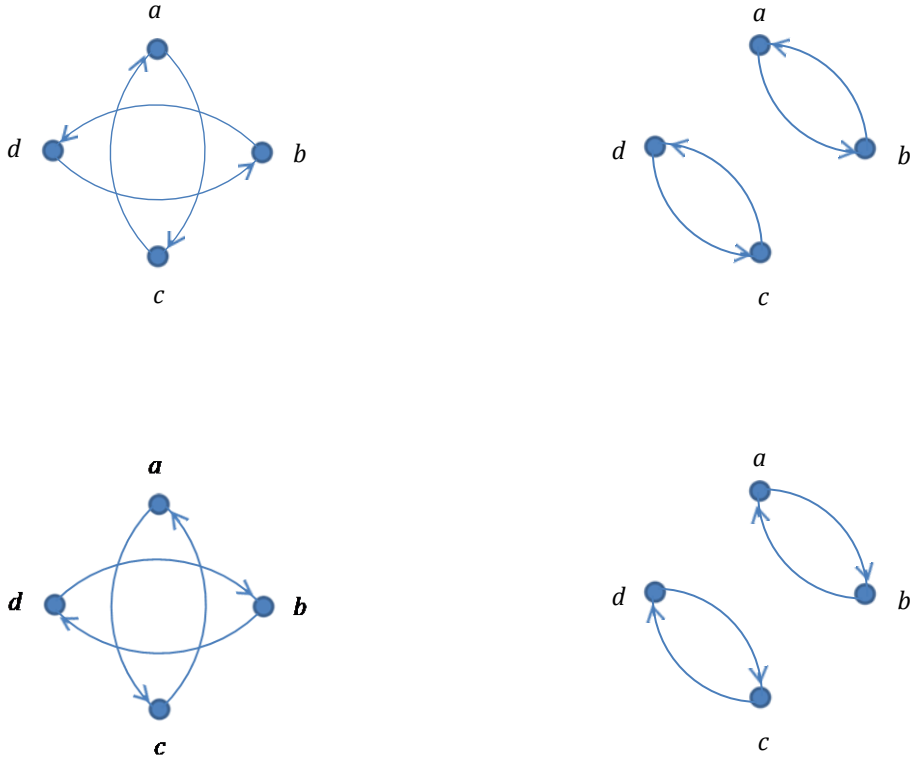


Figura 4.2. Grafo de la cruz compuesta de 4

En combinatoria esto se traduce en una secuencia de cuatro permutaciones de $S_{\{a,b,c,d\}}$. Cada permutación explica un paso y está compuesta por dos trasposiciones (para que la notación no se vuelva pesada, vamos a escribir directamente las permutaciones):

$$p_1 = (d, b) (a, c),$$

$$p_2 = (b, a) (d, c),$$

$$p_3 = (c, a) (b, d),$$

$$p_4 = (a, b) (c, d).$$

Ahora, numerados los hilos de la configuración inicial como se ha indicado antes, construimos la tabla T4.2 que muestra el recorrido de los hilos en la trama del cordel.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	p_i	Paso específico
1	2	3	4	$p_1 = (d, b) (a, c)$	(4,2) (1,3)
3	4	1	2	$p_2 = (b, a) (d, c)$	(4,3) (2,1)
4	3	2	1	$p_3 = (c, a) (b, d)$	(4,2) (3,1)
2	1	4	3	$p_4 = (a, b) (c, d)$	(2,1) (3,4)
1	2	3	4	-	-

Tabla T4.2. Recorrido de los hilos de la cruz compuesta de 4.

Observamos que en este caso la aplicación de la secuencia una sola vez hace que se obtenga nuevamente la configuración inicial. Y ponemos de manifiesto que los cuatro grafos de la secuencia compleja son dos a dos de la misma forma, aunque cambien los sentidos, y las permutaciones que describen los pasos estén constituidas por transposiciones, que son de orden dos.

c) La cruz de cuadrados de 8 hilos

La modelización del proceso de trenzar del diseño *cruz de cuadrados* es una secuencia simple. El grafo estructura consta de ocho nudos dispuestos dos por cada lado del cuadrado, que nombramos en sentido horario, partiendo del primero arriba a la izquierda *a, b, c, d, e, f, g, h*.

El único paso se representa con un grafo (Figura 4.3) que está formado por dos circuitos de cuatro nudos; el primer circuito en sentido horario involucra los nudos *a, b, e, f*; el segundo en sentido anti horario involucra los nudos *c, d, g, h*.

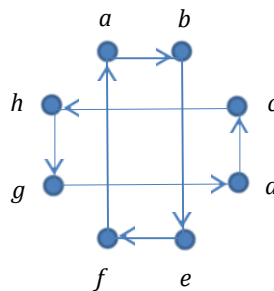


Figura 4.3. Grafo de la cruz de cuadrado de 8

En combinatoria, el paso está descrito por la permutación de $S_{\{a,b,c,d,c,d,e,f\}}$ que se constituye por yuxtaposición de los dos ciclos $\sigma_{1,1} = (a, b, e, f)$ y $\sigma_{1,2} = (h, g, d, c)$, es decir

$$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c),$$

Numerando los hilos en la configuración inicial como hemos convenido, realizamos la tabla T4.3, que describe el recorrido de los hilos en la trama.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	p_i	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(1,2,5,6) (8,7,4,3)
6	1	4	7	2	5	8	3	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(6,1,2,5) (3,8,7,4)
5	6	7	8	1	2	3	4	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(5,6,1,2)(4,3,8,7)
2	5	8	3	6	1	4	7	$p_1 = (a, b, e, f) (h, g, d, c)$	(2,5,6,1)(7,4,3,8)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Tabla T4.3. Recorrido de los hilos de la cruz de cuadrados de 8.

Observamos que con cuatro aplicaciones solo del paso de la secuencia se alcanza de vuelta la configuración inicial y apreciamos que cuatro es también el orden de la permutación, compuesta de dos ciclos de cuatro, que describe el paso.

d) La estrella de 8 hilos

El diseño de la estrella se modeliza con una secuencia simple. El grafo estructura es el mismo del diseño precedente. El paso se visualiza con un grafo (Figura 4.4) constituido por cuatro circuitos de dos. En el orden tenemos un circuito horario entre los nudos *b, f*; un circuito horario entre los nudos *d, h*; un circuito anti horario entre los nudos *a, e*; un circuito anti horario entre los nudos *c, g*.

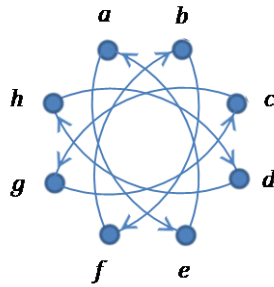


Figura 4.4. Grafo de la estrella de 8

En combinatoria encontramos una única permutación en $S_{\{a,b,c,d,c,d,e,f\}}$ correspondiente al único paso que queda de la yuxtaposición de las cuatro transposiciones:

$$p_1 = (b, f) (d, h) (e, a) (g, c).$$

Construimos entonces la tabla T4.4 que describe el recorrido de los hilos:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	p_i	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (b, f) (d, h) (e, a) (g, c)$	(2,6)(4,8)(5,1)(7,3)
5	6	7	8	1	2	3	4	$p_1 = (b, f) (d, h) (e, a) (g, c)$	(6,2)(8,4)(1,5)(3,7)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Tabla T4.4. Recorrido de los hilos de la estrella de 8.

Observamos que aquí también, en presencia de una secuencia simple, en el esquema tenemos justo un número de configuraciones igual al orden de la permutación que representa el único paso.

4.2 Recopilación de ejemplares.

Empecemos el análisis con dos de los primeros ejemplares encontrados en nuestra pequeña investigación de campo. Vamos ubicando geográficamente el hallazgo de los dos ejemplares que tienen el mismo origen geográfico.

(1.a) La ciudad de Cafayate se encuentra en la región de Salta, que está situada en el nor-este de Argentina. En esta región de cerros, valles y quebradas, la naturaleza todavía domina un escenario espectacular de luz y de rocas de miles de colores. La gente vive en pueblos chicos y la vida sigue los ritmos dictados por la naturaleza. La atención hacia la importancia histórico-cultural y económica de las artesanías tiene como resultado la presencia de una escuela de manualidades, donde contactamos con el Profesor Castagnolo, y visitamos un mercado artesanal, donde, en un banco de una anciana artesana, ubicamos el ejemplar 2 que llamaremos *soga*.

Ejemplar 1: Lápiz

Una alumna del Profesor Castagnolo nos proporcionó el ejemplar 1 (Foto A.3 en anexos). **(1.b)** Lo llamaremos *lápiz* porque el cordel se desarrolla alrededor de un corazón vacío donde la artesana ubicó un lápiz que resulta así forrado por el cordel. Notamos que la artesana del Lápiz, conociendo el libro de Owen (1995), era rápidamente capaz de indicar que tipo de diseño se podía utilizar para hacer lápices, porque caracterizado por un corazón vacío.

(2. Utilidad) Entonces el uso de este cordel es decorativo pero sobre un objeto de utilidad concreta como un lápiz.

(3.a Material) El material que se utiliza es lana de oveja. Los hilos se compran ya teñidos de distintos colores de un grosor de 2 milímetros de diámetro. **(3.b)** La preparación del hilo consiste en cortar un trozo que sea el doble de la largueza requerida para después *torcer* el hilo. Este proceso se realiza de la siguiente manera. Manteniendo el hilo extendido, se tuercen las dos extremidades en sentido contrario hasta que el hilo, apenas lo sueltas un poco, empieza a torcerse solo; después se juntan las dos extremidad y se deja que se tuerza sobre sí mismo. Así el hilo queda más grueso y más compacto.

(4. Modalidad) Este cordel viene producido en modalidad de trenzado con la utilización de un aparato suplementario que denominamos *carta*. La *carta* es un cuadrado de madera con un agujero en el centro, y unos pequeños cortes en los lados para mantener los hilos en las diversas posiciones.

Interesante desde el punto de vista etnográfico es observar que el Profesor Castagnolo llamaba a este aparato con el nombre *marudai*, pero leyendo el libro de Richard Owen (1995) con él, nos dimos cuenta que el *marudai* es la versión redonda y sin cortes en los lados, de la *carta*. Mientras el Profesor Castagnolo prefiere enseñar y utilizar la *carta* por la mayor facilidad de manejo (Fotos A.1 y A.2 en anexos).

(5. Diseño) El diseño del *Lápiz* lo llamamos *doble rombo*. El grafo estructura, siendo el cordel de ocho hilos, es el mismo de la cruz de cuadrados. La secuencia que modeliza el proceso de realización es simple y su único paso se ejemplifica por un grafo constituido por dos circuito de cuatro (Figura 4.5). El primer circuito, en sentido horario, involucra los nudos a, c, e, g ; el segundo circuito es anti horario e involucra los nudos b, d, f, h .

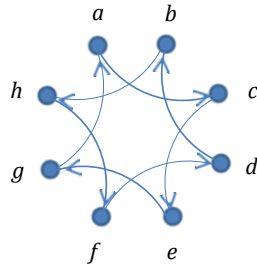


Figura 4.5 Grafo del diseño *doble rombo* del *Lápiz*

En combinatoria la secuencia que describe el paso está formada por una sola permutación en $S_{\{a,b,c,d,c,d,e,f\}}$ constituida por dos ciclos:

$$p_1 = (a, c, e, g) (b, h, f, d)$$

Numeramos ahora los hilos. Como los hilos son de dos colores, azul claro y azul oscuro, surge la necesidad de aclarar cuál es la configuración inicial de los colores. En este caso los hilos impares (1,3,5,7) que al principio ocupan las posiciones a, c, e, g , son de color azul claro, mientras los hilos pares (2,4,6,8) que al principio ocupan las posiciones b, d, f, h , son de color azul oscuro. Describimos entonces en la tabla T4.5 el recorrido de los hilos:

a	b	c	d	e	f	g	h	p_1	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (a, c, e, g) (b, h, f, d)$	(1,3,5,7) (8,6,4,2)
7	4	1	6	3	8	5	2	$p_2 = (a, c, e, g) (h, f, d, b)$	(6,1,2,5) (3,8,7,4)
5	6	7	8	1	2	3	4	$p_3 = (a, c, e, g) (h, f, d, b)$	(5,6,1,2)(4,3,8,7)
3	8	5	2	7	4	1	6	$p_4 = (a, c, e, g) (h, f, d, b)$	(2,5,6,1)(7,4,3,8)
1	2	3	4	5	6	7	8	-	-

Tabla T4.5. Recorrido de los hilos del *Lápiz*.

Observamos que, siendo la secuencia simple constituida por una permutación de orden cuatro, aplicando el paso cuatro veces volvimos a la configuración inicial.

Ejemplar 2: Soga

(1.b.) El ejemplar 2, la soga, tiene de largo unos 3 metros (el tipo común), tiene un grosor de 2 centímetros de diámetro, esta trenzado en hilos de lana de colores marrón y blanco (Foto A.4 en anexos).

(2. Utilidad) En la vida de campo el uso de cordeles está muy difundido o extendido en varias actividades, por ejemplo para la recolección de la leña o para atar animales. (2.a) En específico este tipo de cordel es particularmente adaptado para *manear*, es decir atar, juntando entre ellos, los pies delanteros de los animales (ovejas, llamas y caballos) para que no puedan escaparse muy lejos, no pudiendo ni correr ni saltar.

(3. Material) Una de las actividades de los pueblos indígenas de la región, todavía practicada hoy en día por la población que vive en los cerros, es la crianza de una especie ovina, la llama, originaria de las regiones andinas y pre andinas.

La *soga* en examen es precisamente de lana de llama, en particular de la lana que procede de la panza del animal. En esa zona del cuerpo el animal tiene *más pelo*, lo que hace que el cordel hecho de este material sea más resistente **(3.c)**. Los cordeles hechos en lana son preferibles a los de otros materiales porque su notable resistencia convive con la suavidad (son propiedades físicas importantes para su uso social) suficiente para no provocar heridas en la piel de los animales que vienen atados. **(3.b)**

La preparación de los hilos de lana, ya hilados (de un grosor medio de un par de milímetros), no prevé ningún proceso de tinte, razón por la cual los colores del cordel son marrón y blanco, o sea los colores naturales del manto de la llama. Pero sí necesitan un proceso de preparación que se dice *mismir*, parecido a lo de hilar, que consiste en torcer cada hilo, como para el ejemplar 1, pero con el ayuda de un palito, para que el hilo, torciéndose sobre sí mismo, tenga grosor doble y sea más compacto.

(4. Modalidad) Este cordel viene producido en modalidad de *trenzado*, así se le puede aplicar el análisis matemático anteriormente desarrollado. También este cordel se realiza utilizando como aparato suplementario la *carta*.

(5. Diseño) *Estrella de 16, o estrella de cuadrados, con inversión.*

El *grafo estructura* está constituido por dieciséis nudos, correspondientes a los dieciséis hilos, posicionados de cuatro en cuatro sobre los lados del cuadrado. Los nudos los nombramos en sentido horario desde el primero a la izquierda del lado superior del cuadrado por *a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l, m, n, o, p, q*.

La estrella de cuadrillos crea una espiral que se envuelve en el mismo sentido en el cual se realizan los cuadrados.

La secuencia que modeliza el proceso es compuesta (véanse los grafos en la Figura 4.6). El primer paso contiene cuatro circuitos de cuatro, todos en sentido horario cuya representación como permutación es:

$$p_1 = (a, b, j, k) (c, d, l, m) (e, f, n, o) (g, h, p, q).$$

Se repite este paso por cuatro veces. Después se realiza la inversión. La inversión se representa con una permutación formada por ocho trasposiciones de nudos consecutivos en sentido horario:

$$p_2 = (a, b) (c, d) (e, f) (g, h) (j, k) (l, m) (n, o) (p, q).$$

Ahora se realiza el trozo de espiral anti horario así que el paso está constituido por cuatro circuito de cuatro, como p_1 , pero en sentido anti horario:

$$p_3 = (k, j, b, a) (m, l, d, c) (o, n, f, e) (q, p, h, g).$$

Entonces se repite p_3 por cuatro veces. Finalmente se realiza la inversión contraria, cuya permutación está formada por ocho trasposiciones en sentido anti horario:

$$p_4 = (b, a) (d, c) (f, e) (h, g) (k, j) (m, l) (o, n) (q, p).$$

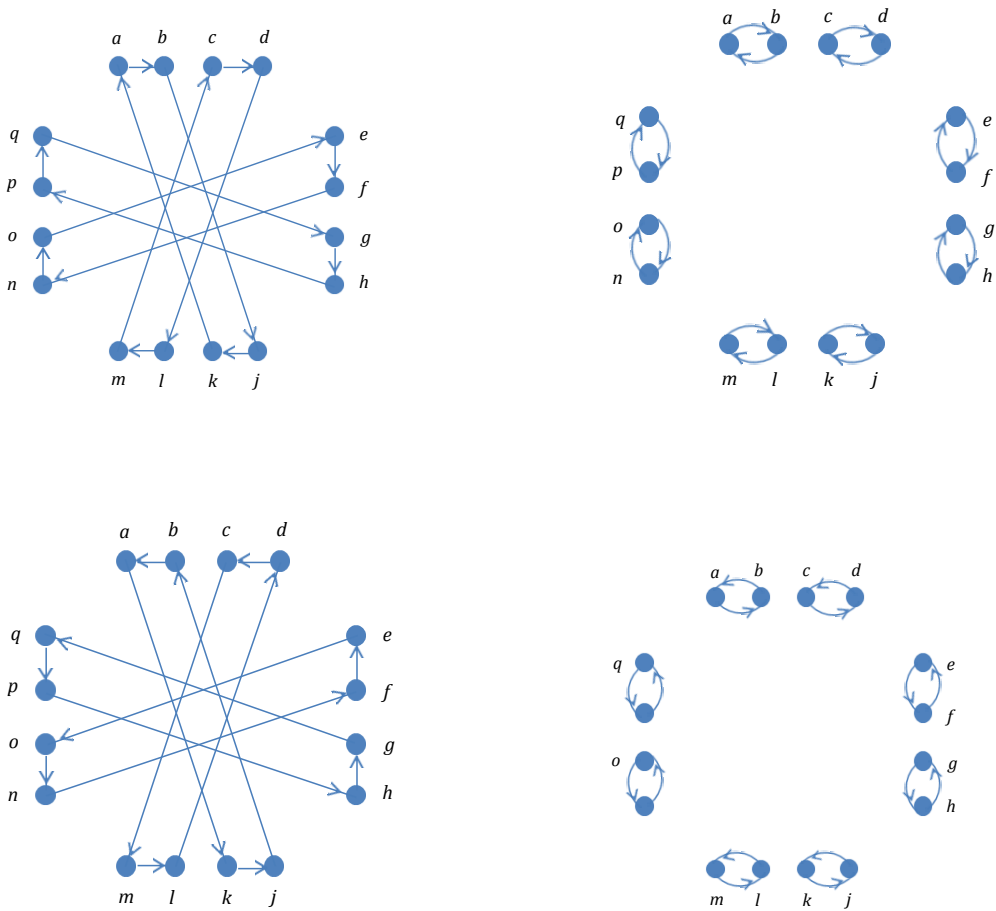


Figura 4.6 Grafo del diseño *estrella de cuadrado* de la Soga

Numeramos ahora los hilos. Como en el ejemplar del lápiz, surge la necesidad de determinar la configuración inicial de los colores que, repetimos, son dos, marrón y blanco. En este cordel los hilos 1,2,5,6,9,10,13,14, o sea, si se quieren expresar de forma matemática los que tienen el correspondiente número de forma $4n+1$, y $4n+2$, con $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, son de color marrón, mientras los hilos 3,4,7,8,11,12,15,16, o sea los de forma $4n+3$, y $4n+4$, con $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, son de color blanco. El recorrido de los hilos está descrito en la tabla T4.6.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>p_i</i>	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$p_1 = (a, b, j, k) (c, d, l, m) (e, f, n, o) (g, h, p, q)$	(1,2,9,10)(3,4,11,12)(5,6,13,14)(7,8,15,16)
10	1	12	3	14	5	16	7	2	9	4	11	6	13	8	15	$p_1 = (a, b, j, k) (c, d, l, m) (e, f, n, o) (g, h, p, q)$	(10,1,2,9)(12,3,4,11)(14,5,6,13)(16,7,8,15)
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (a, b, j, k) (c, d, l, m) (e, f, n, o) (g, h, p, q)$	(9,10,1,2)(11,12,3,4)(13,14,5,6)(15,16,7,8)
2	9	4	11	6	13	8	15	10	1	12	3	14	5	16	7	$p_1 = (a, b, j, k) (c, d, l, m) (e, f, n, o) (g, h, p, q)$	(2,9,10,1)(4,11,12,3)(6,13,14,5)(8,15,16,7)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$p_2 = (a, b) (c, d) (e, f) (g, h) (j, k) (l, m) (n, o) (p, q)$	(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,16)
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	$p_3 = (k, j, b, a) (m, l, d, c) (o, n, f, e) (q, p, h, g)$	(9,10,1,2)(11,12,3,4)(13,14,5,6)(15,16,7,8)
1	10	3	12	5	14	7	16	9	2	11	4	13	6	15	8	$p_3 = (k, j, b, a) (m, l, d, c) (o, n, f, e) (q, p, h, g)$	(2,9,10,1)(4,11,12,3)(6,13,14,5,6)(8,15,16,7)
10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7	$p_3 = (k, j, b, a) (m, l, d, c) (o, n, f, e) (q, p, h, g)$	(1,2,9,10)(3,4,11,12)(5,6,13,14)(7,8,15,16)
9	2	11	4	13	6	15	8	1	10	3	12	5	14	7	16	$p_3 = (k, j, b, a) (m, l, d, c) (o, n, f, e) (q, p, h, g)$	(10,1,2,9)(12,3,4,11)(14,5,6,13)(16,7,8,15)
2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	$p_4 = (b, a) (d, c) (f, e) (h, g) (k, j) (m, l) (o, n) (q, p)$	(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10)(11,12)(13,14)(15,16)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	-	-

Tabla T4.6. Recorrido de los hilos de la Soga.

Ejemplar 3: Látigo

Introducimos algunos detalles del entorno socio histórico de los *trabajos en cuero*.

(1.a) Las vacas y los caballos eran animales desconocidos a los pueblos originarios indígenas. Fueron los conquistadores europeos a traerlos en Argentina, introduciendo así el uso o la utilización del cuero. Los *gauchos*, a veces indicados como *criollos*, porque la mayoría eran hijos de inmigrantes europeos o a lo sumo mestizos, eran habitantes semi-nómadas de la Pampa o del llano argentino que se ocupaban de criar vacas en vaquerías, o sea áreas de campo reservadas al ganado sin vigilancias, zonas generalmente delimitadas por ríos. Los gauchos se movían principalmente a caballo. Hoy en día la palabra *gaucho* indica en general los hombres que trabajan en el campo, que se ocupan del ganado bovino y son muy hábiles a caballo.

Así que la labor artesanal en cuero tiene históricamente origen europeo, pero después en Argentina se fue abriendo en dirección de una marcada vena artística. La intención de los artesanos argentinos de decorar los objetos que iban fabricando, hizo que los productos en cuero se desarrollaron en un sentido ornamental. Una visita al Museo Criollo de los Corrales de Mataderos, un barrio popular en el sur de la ciudad de Buenos Aires, nos proporcionó una amplia muestra de cordeles en cuero con diferentes diseños.

El ejemplar que elegimos analizar es un látigo. Lo encontramos en un puesto de la feria de los domingos de Mataderos. **(1.b)** El cordel es largo un metro, y tiene grosor de un centímetro y medio de diámetro. Es del color natural del cuero crudo, o sea marrón clarito (Foto A.5 en anexos).

(2. Utilidad) El látigo, también dicho castigador, sirve para incitar el caballo a la corsa, como a instigar las vacas a juntarse en manada, dos acciones primordiales en la actividad del gaucho.

(3. Material) Como ya hemos observado el material de los hilos es el cuero **(3.a)**, o sea piel de vaca. **(3.b)** Para realizar el cordel se juntan, por una extremidad, dos tiras o cintas de cuero de dos centímetros de ancho y dos milímetros de espesor. Cada tira se corta longitudinalmente en cuatro *hilos* de medio centímetros de ancho. **(3.c)** Interesante observar que el cuero se trata con grasa de vaca para que el cuero no se seque, ni se moque (impermeabilidad), pero se endurece manteniéndose al mismo tiempo más elástico y más durable. La elección de este material debe su conveniencia precisamente a la resistencia que se junta con la flexibilidad y la durabilidad.

(4. Modalidad) Este cordel viene producido en modalidad de Trenzado. En particular en la parte del mango, de unos 40 centímetros de largo, es más gruesa y más dura porque tiene un corazón de cuero que rende el cordel más rígido; mientras en la parte final, la que golpea el animal, el cordel está vacío, así que resulta más flexible para que no lastime el animal. Sin aparato suplementare.

(5. Diseño) Llamamos el diseño del látigo, *Trenza redonda de dos a dos*, más adelante explicaremos el porqué de este nombre.

Observamos que, siendo todos los hilos del color del cuero, no hay que especificar la configuración inicial.

El grafo estructura es lo de los diseños de 8 hilos. El proceso de realización se modeliza por una secuencia compuesta por cuatro circuitos de tres que involucran, cada uno, tres vértices consecutivos (los que, en nuestra notación, tienen letras consecutivas en orden alfabético). Estos consisten, en orden, en un circuito horario entre los hilos de posición d, e, f ; un circuito anti horario que involucra los nudos d, c, b ; un circuito anti horario entre g, h, f y un circuito horario que involucra a, b, h .

En combinatoria se escriben las cuatro permutaciones de $S_{\{a,b,c,d,e,f,g,h\}}$:

$$p_1 = (d, e, f),$$

$$p_2 = (d, b, c),$$

$$p_3 = (h, f, g),$$

$$p_4 = (a, h, b).$$

Observamos que en p_1 , las primeras dos letras del ciclo son $d < e$ porque el circuito es horario; como en p_4 , hay $a < h$. Mientras p_2, p_3 , que son en sentido antihorario, tienen respectivamente $d > b$ y $h > f$.

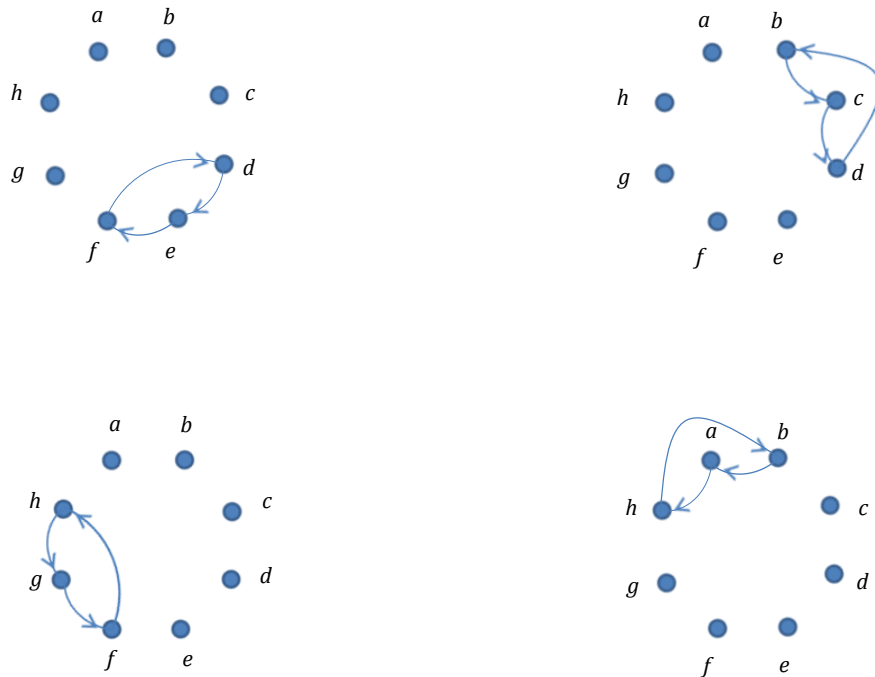


Figura 4.6. Grafo del diseño *trenza redonda de dos en dos* del *Látigo*

Si nos fijamos en la definición que hemos dado de paso, los circuitos p_2, p_3 que acabamos de describir, se pueden yuxtaponer en un único paso porque no comparten ningún vértice o nudo. Pero por razones de claridad preferimos en este caso dejarlos

separados dándoles el nombre de *semipasos*. Así que el proceso de realización se compone de un paso p_1 , dos semipasos p_2, p_3 , y un último paso p_4 .

Numerando ahora los hilos, describimos en la tabla T4.7 el recorrido de los hilos. En este caso no buscamos en la tabla cuando se consigue de vuelta la configuración inicial, pero vamos a destacar otra característica interesante.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	p_i	Paso específico
1	2	3	4	5	6	7	8	$p_1 = (d, e, f)$	(4,5,6)
1	2	3	6	4	5	7	8	$p_2 = (d, b, c)$	(6,2,3)
1	6	2	3	4	5	7	8	$p_3 = (h, f, g)$	(8,5,7)
1	6	2	3	4	8	5	7	$p_4 = (a, h, b)$	(1,7,6)
6	7	2	3	4	8	5	1	-	-

Tabla T4.7. Recorrido de los hilos de la Soga.

En este no vamos a completar la tabla hasta volver a la posición inicial. Lo que nos interesa observar es la fuerte afinidad con la trenza simple del pelo. En general la mayoría de los diseños de los cordeles de cuero que hemos encontrado en la muestra del museo de Mataderos tienen esta afinidad con la trenza del pelo. Todo el proceso se concreta en movimientos que involucran prácticamente los hilos externos, si pensamos la posición de los hilos, no de forma redonda como hicimos hasta ahora, sino lineal. El hilo externo (o sea que se encuentra a una extremidad) se mueve hacia el centro del grafo, pasando abajo y arriba (lo que determina el sentido) un cierto número de hilos. En la trenza simple, el movimiento se realiza pasando arriba al hilo cercano (uno) hacia el centro. En el caso específico de este látigo, en cambio, se pasa debajo de los dos cercano y después arriba de los siguientes dos. En nuestra modelización, los pasos, de dos a dos, modelizan el movimiento de un hilo externo, el primer paso (y el tercero) es el pasaje abajo de los dos cercano y el segundo (y el cuarto) es el pasaje arriba de los siguientes dos. Notamos así que en la tabla p_1, p_2 describen el pasaje del hilo 6 abajo del 4 y 6 y después arriba del 2 y 3; mientras p_3, p_4 describen el pasaje del hilo 7 abajo del 8 y 5 y después arriba del 1 y 6.

De esta semejanza con el proceso de la trenza nace el nombre del diseño (*trenza de dos a dos*), que no está relacionado a la forma geométrica del grafo como por los ejemplares anteriores, sino registra precisamente la analogía con la trenza y el número de hilos *abajo* y *arriba* como acabamos de explicar.

5. CONCLUSIONES

En este último capítulo se detallan una reflexiones finales sobre la investigación con respecto a su *fiabilidad y validez*, sus *aportaciones*, las *limitaciones* y algunas posibles *perspectivas de futuro* de esta investigación.

5.1 Fiabilidad y Validez

En una investigación cualitativa etnográfica se tienen que tener en cuenta las particularidades culturales y sociales de todos los participantes, investigador e informantes, y del entorno. Por ello se recomienda describir en detalle los análisis realizados, así como los elementos teóricos de partida que sustentan la interpretación. La validez y fiabilidad del proceso de una investigación cualitativa interpretativa tiene características diferentes a las de otras metodologías de investigación social y educativa (Cohen, Manion y Morrison, 2007; Martínez, 2007; Pérez-Serrano, 1994a, 1994b).

La fiabilidad de un trabajo de investigación es una medida de la replicabilidad de la misma por parte de otro/s investigador/es. En una investigación cualitativa etnográfica no hay la pretensión de una generalización universal de los hallazgos, en nuestro caso de la metodología elaborada (MOMET), y de lo encontrado en su aplicación a casos, porque se aspira a conocer lo que concierne una comunidad o un grupo específico (Martínez, 2007).

Aquí la metodología construida como parte fundamental de esta investigación, el MOMET, está elaborada pensando en su aplicabilidad al contexto específico de la artesanía elegida, el trenzado. Su detallada descripción, organizada en factores, quiere fundamentar su utilización y repetibilidad, siempre y cuando el entorno y todas las condiciones sean, por lo menos, parecidas. A este propósito notamos que la recolección de información se ha realizado a través de una *inmersión* en el campo, en dos escenarios: Cafayate (Salta) y Feria de Mataderos, en Buenos Aires, situados en dos regiones distintas de Argentina. Ésta ha consistido primero en una *observación no participante*, y después en una *observación participante* (se han tomado unas clases de fabricación de cordeles y fajas con el Profesor Castagnolo). La recogida de datos ha consistido en tomar videos y fotos, en conseguir los ejemplares *del escenario* analizados en el estudio de casos y en un diario de campo, realizados sobre la experiencia de la investigadora en las clases, a propósito de las observaciones del Profesor Castagnolo, y los encuentros con las artesanas en Cafayate y las visitas al Museo y a la feria de Mataderos en Buenos Aires.

La validez mide el ajuste de las conclusiones de la investigación con su objetivo. La validez de nuestro trabajo se basa en la consulta del Profesor Castagnolo como experto de los dos contextos culturales y también de los dos lenguajes, el informal del entorno artesanal y el formal del mundo matemático académico. El Profesor Castagnolo ha enseñado Física y Matemáticas por años en la Universidad de Salta; actualmente se dedica a trabajar la madera, construir telares e imparte un curso en la escuela de

Manualidades de Cafayate donde enseña a fabricar cordeles, utilizando como herramienta la *carta*, a fabricar fajas con *minitelares* y a tejer con telares grandes de 4 cuadros (o perchas), cuya urdimbre está constituida por 4 grupos de lizas. Otro criterio de validez de esta investigación consiste en la *triangulación* de las fuentes de información. Además de las enseñanzas del Profesor Castagnolo, nos han proporcionado preciosos conocimientos el material encontrado en libros de manualidades y de técnicas artesanales (Owen, 1995; Osornio, 1934; Faudone, 2003; Flores, 1960; Grant, 1950; de los Santos, 2004), y las visitas al Museo Criollo de los Corrales de Mataderos y a la feria de Mataderos, en Buenos Aires.

Cabe destacar que la *modelización matemática* es un reelaboración lingüística, en términos matemáticos, de conceptos que ya están en la mente del artesano pero que él no expresa en los términos del mundo científico sino en su propio lenguaje o jerga profesional, siendo el investigador el detector de tales formas de pensamiento artesanal y su *traductor* hacia los interesados en conocerlas desde la cultura científica. A este propósito cabe enfatizar la rapidez con la cual la artesana del Lápiz, alumna del Profesor Castagnolo, sabía reconocer los diseños que se podían utilizar para forrar algo porque están caracterizados por un núcleo o centro vacío, donde colocar el objeto de revestir.

5.2 Aportaciones o resultados

Las aportaciones de esta investigación se sitúan tanto a nivel teórico como a nivel práctico.

A nivel teórico los aportes consisten en:

- La *elaboración de una metodología* (MOMET) descrita en el Capítulo 3, que define y permite aplicar de forma integrada:
 - a) un modelo MET para el *estudio etnográfico* de artesanías de trenzados, definiendo *Factores* relevantes para su análisis y
 - b) un modelo MOM para la *elaboración de una modelización matemática* del proceso de fabricación de cordeles (Capítulo 3),

para hacer el estudio etnomatemático de los *signos culturales* objeto de estudio, es decir *los procesos y los productos* representativos de una microcultura (Oliveras, 2006); concretamente en este estudio la artesanal concerniente a ciertos tejidos característicos de culturas ancestrales y actuales situadas en el cono sur americano.

A nivel práctico la aportación se sitúa en:

- El *estudio de casos* realizado en el Capítulo 4, con dos tipos de casos:
 1. Casos de ejemplos tomados de autores relevantes: la recopilación de ejemplos de diseños tomados de la literatura, detectados en el proceso de estudio del estado de la cuestión, y la realización de su *modelización matemática*, siguiendo el método elaborado, y
 2. Casos emergentes de la investigación o casos propios: la *recopilación de los tres ejemplares* de cordeles logrados en el trabajo *de campo*, que hemos analizado desde los dos modelos que se unifican en la metodología creada

(MOMET), es decir según la *metodología etnográfica y la modelización matemática*.

Por lo que concierne a los objetivos planteados en el primer capítulo, cabe destacar que los O.2.1 y O.2.2 han sido alcanzados en el Capítulo 3, con la elaboración respectivamente de la metodología etnográfica y de la modelización matemática a través de los grafos, para el proceso de trenzar, y a través de las permutaciones, para el producto-cordel. Mientras los objetivos O.1.1, O.1.2 y O.1.3 han sido alcanzados en el Capítulo 4 con la realización del estudio de casos: de los ejemplos de diseños de autores relevantes y ejemplares concretos recopilados en la investigación de campo.

Destacamos, además, que los factores de la *metodología etnográfica* permiten realizar clases de equivalencia entre distintos ejemplares de cordeles (que son nuestras unidades de análisis). Estas clases de equivalencia nos ayudan a caracterizar las artesanías de trenzado, y como consecuencia a enriquecer nuestro panorama de estudio etnomatemático. Por ejemplo, considerando el factor *material*, podemos hablar de la artesanía de los cordeles de lana (el ejemplar 1, el lápiz, y el ejemplar 2, la soga) y la artesanía de los cordeles en cuero (el ejemplar 3, el látigo), lo que puede tener interés considerando la interdisciplinariedad a la que puede extenderse el análisis.

El factor diseño y la *modelización matemática*, también precisan clases de equivalencias entre cordeles que se realizan con el mismo proceso. Este puede generar inspiraciones importante a nivel de búsqueda de patrones, clasificaciones, transformaciones geométricas, isometrías, grafos y órdenes, en una futura aplicación en el aula, enriqueciendo nuestra perspectiva de aplicaciones curriculares de los hallazgos etnomatemáticos.

5.3 Limitaciones y perspectivas de futuro de esta investigación

Una limitación importante de los resultados de esta investigación consiste en que el método creado para la modelización matemática es aplicable solo a las trenzas o cordeles cuyo factor de modalidad de tejido es lo que llamamos *trenzados*. Quedan así excluidos del análisis todo tipo de cordeles cuya modalidad de tejido es el *anudado*, el *cortado e insertado* o el *tejido*. Otros investigadores están estudiando modelos para analizar estos productos en diferentes contextos geográficos y culturales (De Bengoechea, 2009, Gavarrete, 2009).

Una observación interesante a nivel etnográfico es la manera en que, como investigadores, tomamos conciencias de estas limitaciones durante el desarrollo de la investigación. A principio nos dimos cuenta que las fajas quedaban excluidas porque su proceso de realización queda más cerca al tejer con telares (tienen trama y urdimbre). Después constatamos de que el modelo desarrollado no se prestaba para ejemplares que contenían nudos, así que decidimos incluir, en nuestro método, el factor *modalidad de tejido*, ya que se ha manifestado como esencial. Al final encontramos ejemplares de *cortado e insertado* y tuvimos que añadir esta modalidad como emergente en el desarrollo de la investigación. Todo este devenir de lo que es posible y de sus modalidades y matices, así como de sus condiciones de frontera, son hallazgos de la

propia investigación etnográfica. La etnografía es un proceso vivo en el cual el investigador se inserta, guiando los procesos previstos para lograr los objetivos, pero también reconociendo los caminos, alternativos y a veces acumulativos, en los que se encuentran las evidencias del conocimiento, las caras del saber, que se nos muestran si somos capaces de reconocerlas, aceptarlas, e integrarlas.

Un primer desarrollo futuro de esta investigación consiste en intentar superar las limitaciones debidas a la modalidad del tejido, o sea estudiar variantes de la modelización matemática que se ajusten a los otros tipos de modalidad de tejido que no sean el *trenzado*, así como incrementar el catálogo de ejemplares de cordeles y proceder a su análisis. La determinación de modelización matemática ha sido todo un reto por la creatividad implicada para interpretar hechos culturales con elementos matemático formales.

También consideramos que una de las principales áreas de expansión de esta investigación es la relativa a la formación de profesores de matemáticas y el desarrollo curricular de los programas de matemáticas de las educaciones obligatoria y secundaria. El desarrollo contextualizado en la cultura local, es objetivo presente en las directrices curriculares de la mayoría de los países hoy día.

Algunas posibilidades consisten en elaborar una aplicación en el aula de los hallazgos aquí relatado, mediante problemas que utilicen la realización de cordeles como instrumento etnográfico, para elaborar estrategias y *desarrollar competencias relacionadas con las matemáticas*. Se podrían trabajar *competencias* transversales, acercando a los estudiantes a la realidad artesanal, revalorizando la importancia social y cognitiva de la actividad productiva manualidad, enculturarles en las matemáticas (Bishop, 1999), enseñándoles a reconocer objetos matemáticos en entornos diferentes a los escolares.

Finalmente quiero agradecer a los colaboradores en el trabajo de campo su valiosa aportación.

NOTA DE LA AUTORA

En este libro se describe la fase inicial, realizada en el año 2011, de una investigación más amplia que ha continuado en los años con la realización de una tesis doctoral y la publicación de diversos artículos en revistas científicas de Educación Matemática y Etnomatemática.

BIBLIOGRAFÍA

- Albertí, M. (2007). Interpretación matemática situada de una práctica artesanal. Tesis doctoral no publicada. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona.
- Ascher, M. & Ascher, R. (1981). *Code of the Quipu: a study in media, mathematics and culture*. Ann Arbor, MI: The University of Michigan Press.
- Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics, a multicultural view of mathematical idea*. California: Pacific Grove, Brooks & Colé.
- Barton, B. (2004). Mathematics and Mathematical Practices: Where to Draw the Line? *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 22-24.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona: Paidós.
- Bolaños, J. (2009). *Una visión etnomatemática de las pintaderas canarias*. Tesis de Máster no publicada. Universidad de Granada, España.
- Bolívar, A. (2004). Ciudadanía y escuela pública en el contexto de diversidad cultural. *Investigación*, 9(20), 15-38.
- Bolívar, A. (2008). Competencias básicas y ciudadanía. *Caleidoscopio*, 1, 4-32.
- Bolívar, A., & Pereyra, M. A. (2006). *El Proyecto DeSeCo sobre la definición y selección de competencias clave*. Málaga: Archidona.
- Borba, M. (1990). Ethnomathematics and Education. *For the Learning of Mathematics*, 10(1), 39-43.
- Cancer, P. (2008). Ciudadanía y competencias básicas. *Con-ciencia social: anuario de didáctica de la geografía, la historia y las ciencias sociales*, 12, 31-39.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. London: Routledge Falmer.
- Da Costa, L. M. (2009). *Los tejidos y las tramas matemáticas. El tejido ticuna como soporte para la enseñanza de las matemáticas*. Tesis de Maestría en estudios amazónicos. Amazonia: Universidad Nacional de Colombia.
- De Bengoechea, N. (2009). *Etnomatemáticas, métodos y objetos culturales*. Tesis de Máster no publicada. Universidad de Granada, España.
- De los Santos, A. M. (2004). *Artesanías con cuero*. Buenos Aires: Grulla.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática - Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. México: Limusa.
- Eglash, R. (1997). When Math Worlds Collide: Intention and Invention in Ethnomathematics. *Science, Technology, & Human Values*, 22(1), 79-97.
- Escudero, J. M. (2009). Fracaso escolar, exclusión educativa. De qué se excluye y cómo. *Profesorado, revista de currículo y formación de profesorado*, 13(3), 3-9.
- Escudero, J. M. (2008). Buenas prácticas ante el riesgo de exclusión en la ESO. *Cuadernos de Pedagogía*, (382), 52-55.

- Favilli, F., Oliveras, M. L., & Cesar, M. (2003). Bridging Mathematical Knowledge From Different Cultures: Proposals For An Intercultural And Interdisciplinary Curriculum. *Proceedings XXVII International Congress P.M.E. Honolulu, USA.*
- Favilli, F. (2007). Ethnomathematics and Mathematics Education, *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education, Discussion Group 15: Ethnomathematics. Pisa: Tipografia Editrice Pisana.*
- Faudone, H. (2003). *EL arte gaucho del cuero crudo.* Valencia: Editora Valencia.
- Fiadone, A. (2003). *El diseño indígena argentino.* Buenos Aires: la Marca editora.
- Flores, L. A. (1960). *El guasquero: trenzados criollos.* Buenos Aires: Cesarini Hermanos.
- Fontana, A. (1988). *La artesanía tradicional del cuero en la Mesopotamia Argentina.* Paraná (Argentina): Editorial Entre Ríos.
- Fuentes, C. C. (2011). Algunos Procedimientos y Estrategias Geométricas Utilizadas por un Grupo de Artesanos del Municipio de Guacamayas en Boyacá, Colombia. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 4(1), 55-67.*
- Gavarrete, M. (2009). *Matemáticas, Culturas y Formación de Profesores en Costa Rica.* (Tesis de Máster no publicada). Universidad de Granada, España.
- Gerdes, P. (1988). On culture, geometrical thinking and mathematics education. *Educational studies in mathematics, 19(2), 137-162.*
- Gerdes, P. (2001). Ethnomathematics as a new research field, illustrated by studies of mathematical ideas in African history. *Science and Cultural Diversity: Filing a gap in the history of sciences. Cuadernos de Quipu, 5, 11-36.*
- Goetz, J. P., & Le Compte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Ediciones Morata.
- Grant, B. (1950). *Leather braiding.* Cambridge, MD: Cornell Maritime Press.
- Greeno, J. G. (1998). The situativity of knowing, learning, and research. *American Psychologist, 53(1), 5-26.*
- Greeno, J. G. (2003). Situative research relevant to standards for school mathematics. *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics, 304-332.*
- Huxley, J. S. (1955). Guest editorial: Evolution, cultural and biological. *Yearbook of Anthropology, 2-25.*
- Jiménez, M. & Luengo, J. (2010). Buenas prácticas docentes ante los riesgos de exclusión educativa en la ESO. Proceedings from: *Congreso de Educación Comparada.* Valencia, España.
- Lupiáñez, J. L. (2010). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, Granada.
- Machì, A. (2007). *Gruppi: una introduzione a idee e metodi della teoria dei gruppi.* Milano, Italia: Springer-Verlag.
- Martínez, M. (2007). *La investigación cualitativa etnográfica en educación.* México: Trillas.
- Monereo, C., & Pozo, J. I. (2007). Competencias para (con) vivir con el siglo XXI. *Cuadernos de Pedagogía, 370, 12-18.*

- Oliveras, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.
- Oliveras, M. L. (2005). Microproyectos para la Educación Intercultural en Europa. *Revista UNO*, 38 (XI), 70-81.
- Oliveras, M. L. (2006). Etnomatemáticas. De la multiculturalidad al mestizaje. En: Giménez, J., Goñi J. M., & Guerrero S. *Matemáticas e interculturalidad* (117-149). Barcelona: Graó.
- Ortega, R. (2007). Competencias para la convivencia y las relaciones sociales. *Cuadernos de Pedagogía*, 370, 31-35.
- Osornio, M. (1934). *Trenzas gauchas*. Buenos Aires: Hemisferio Sur.
- Owen, R. (1995). *Braids: 250 patterns from Japan, Peru & beyond*. Loveland, Colorado: Interweave Press.
- Parra, A. (2003). *Acercamiento a la Etnomatemática*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Pérez-Serrano, G. (1994a). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes - I. Métodos*. Madrid: La Muralla.
- Pérez-Serrano, G. (1994b). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes - II. Técnicas y análisis de datos*. Madrid: La Muralla.
- Rico, L. (2001). Análisis conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En: *Iniciación a la investigación en educación matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rosa, M., & Orey, D. (2010). Ethnomodeling as a Pedagogical Tool for the Ethnomathematics Program. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3(2), 14-23.
- Sandella, O. (2004). La geometría en las danzas folklóricas argentinas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 801-806.
- Santillán, A., & Zachman, P. (2009). Una experiencia de capacitación en Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 2(1), 27-42.
- Servetto, L., Castilla, C., Navarro M., & Vaquero, A. (1998). *La artesanía en la zona andina argentina*. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Tedesco, J. C. (2011). Los pilares de la educación del futuro. En: *Debates de educación* (2003) Barcelona: Fundación Jaume Bofill; UOC.
- Tezanos, J. F. (2002). Desigualdad y exclusión social en las sociedades tecnológicas. *Revista del Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales*, 35, 35-53.
- Uña, O. & Hernández, A. (2004) *Diccionario de Sociología*. Madrid: ESIC
- Vilela, D. S. (2010). Discussing a philosophical background for the ethnomathematical program. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 345-358.

ANEXOS

La Carta.

Artefactos y ejemplares recogidos en el trabajo de campo realizado en Cafayate ciudad situada en la región de Salta, noreste de Argentina.



Foto A.1. La Carta

Aparato que denominamos la *carta*, es un cuadrado de madera con un agujero en el centro, y unos pequeños cortes en los lados para mantener los hilos en las diversas posiciones. El Profesor Castagnolo llamaba a este aparato con el nombre *marudai*.



Foto A.2. La carta montada sobre una mesita

Ejemplar 1: Lápiz



Foto A.3. Ejemplar el Lápiz

El cordel se desarrolla alrededor de un corazón vacío donde la artesana ubicó un lápiz. El diseño del *Lápiz* lo llamamos *doble rombo*. Este cordel viene producido en modalidad de trenzado con la utilización de la *carta*.

Ejemplar 2: Soga



Foto A.4. Ejemplar el Soga

Tiene de largo unos 3 metros, un grosor de 2 centímetros de diámetro, esta trenzado en hilos de lana de colores marrón y blanco.

El Diseño de la *soga* lo llamamos *Estrella de 16*, o *de cuadrados con inversión*, crea una espiral que se envuelve en el mismo sentido con el cual se realizan los cuadrados.

Ejemplar 3: Látigo



Foto A.5. Ejemplar el Látigo

Tiene de largo un metro, de grosor un centímetro y de diámetro medio centímetro. Es del color natural del cuero crudo, o sea marrón. Llamamos al diseño del *látigo*, *trenza redonda de dos a dos*.