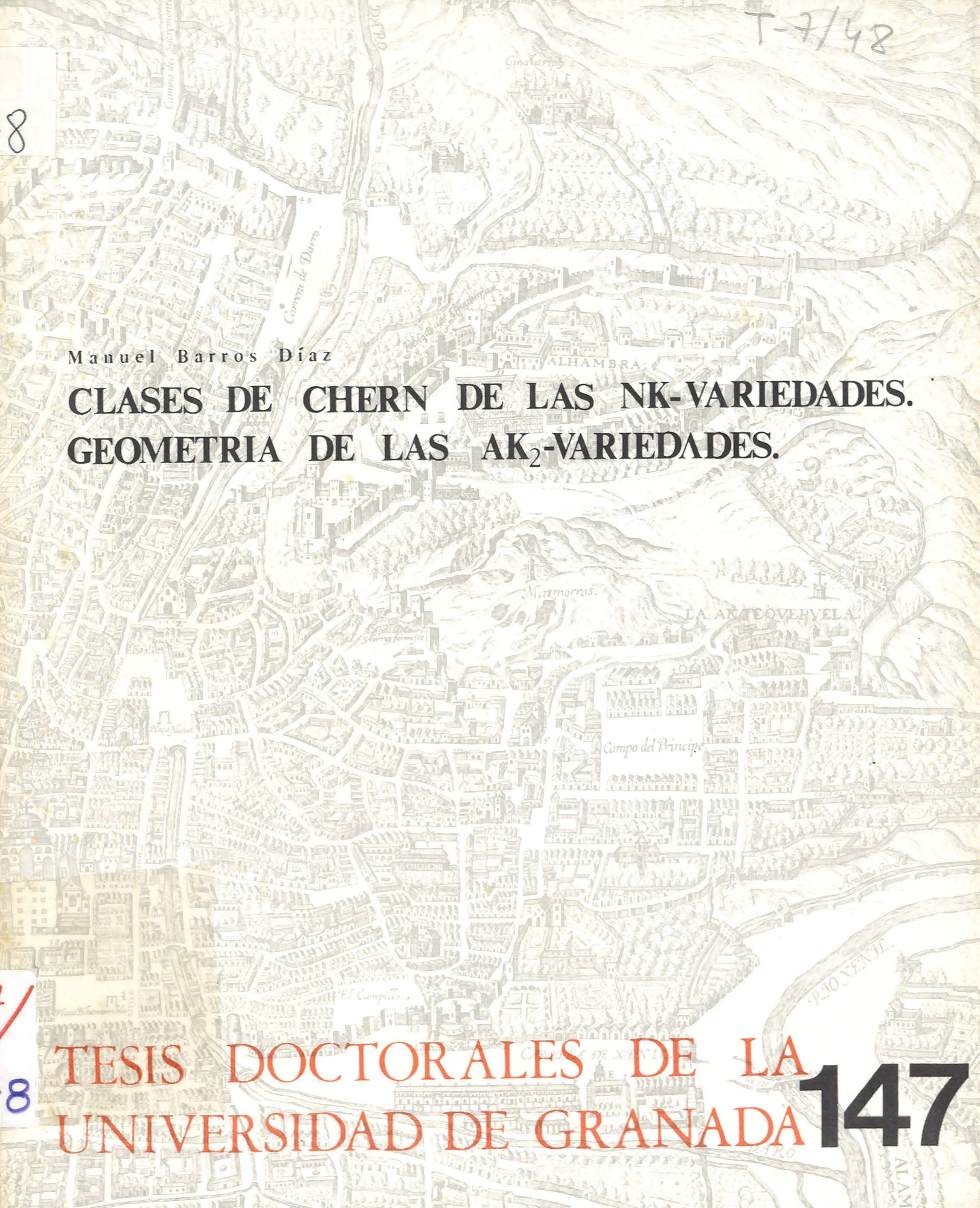

Manuel Barros Díaz

CLASES DE CHERN DE LAS NK-VARIEDADES. GEOMETRIA DE LAS AK_2-VARIEDADES.

TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA 147

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

CLASES DE CHERN DE LAS NK-VARIEDADES GEOMETRIA DE LAS AK_2-VARIEDADES

MANUEL BARROS DIAZ

Tesis doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1977

Tesis doctoral, dirigida por el Prof. Dr. A. Martínez Naveira, catedrático de Geometría Diferencial de la Universidad de Valencia. Fue leida el día 14 de diciembre de 1976, ante el tribunal formado por los Dres.: Vidal Abascal; Esteban Carrasco; Echarte Reula; Martínez Naveira; Rodríguez López. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

CLASES DE CHERN DE LAS NK-VARIEDADES

GEOMETRIA DE LAS AK_2-VARIEDADES

por

Manuel Barros Díaz

Memoria realizada en los Departamentos de Geometría y Topología de las Facultades de Ciencias de Granada y Valencia bajo la dirección del Prof. A. M. Naveira, Catedrático de Geometría Diferencial de la Universidad de Valencia, para obtener el grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

GRANADA, NOVIEMBRE DE 1976

A mi madre y a la memoria de mi padre

INTRODUCCION

Sea M una variedad casi-hermítica (AH-variedad); esto es, una variedad casi-compleja con un producto interior $<,>$ J-invariante. Se representará por ∇ la única conexión riemanniana compatible con $<,>$ y por R su tensor curvatura. En esta memoria se trabajará con las siguientes familias de variedades casi-hermíticas: K, NK, AK, QK, H y SK.

$$K : \quad (\nabla_X J)Y = 0$$

$$NK : \quad (\nabla_X J)X = 0$$

$$AK : \quad dF = 0$$

$$QK : \quad (\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$$

$$H : \quad (\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)JY = 0$$

$$SK : \quad \sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{E_i} J)E_i + (\nabla_{JE_i} J)JE_i\} = 0$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$; donde $\mathfrak{X}(M)$ representa el álgebra de campos de vectores sobre M; F la 2-forma de Kaehler definida por:

$$F(X,Y) = <JX,Y>$$

y $\{E_i, JE_i\}$, $1 \leq i \leq n$, una referencia local ortonormal.

Un instrumento fundamental para comprender la geometría de estas familias de variedades casi-hermíticas es su operador cur vatura riemanniana. Para cada una de dichas familias (excepto SK) existe una identidad curvatura {13}.

Se representará por L_i la familia de variedades casi-hermíticas cuyo operador curvatura riemanniano verifica la condición (i):

$$(1) : \quad R_{WXYZ} = R_{WXJYJZ}$$

$$(2) : \quad R_{WXYZ} = R_{WXJYJZ} + R_{WJXJYZ} + R_{WJXYJZ}$$

$$(3) : \quad R_{WXYZ} = R_{JWJXJYJZ}$$

Se prueba fácilmente que (1) implica (2) y (2) implica (3). Entonces $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3$. Asímismo {13}

$$K = NK_1 \subset NK_2 = NK_3 = NK \subset QK_2$$

y

$$K = AK_1 \subseteq AK_2 \subset QK_2 .$$

Todos los objetos geométricos utilizados en esta memoria se consideran de clase C^∞.

Es bien sabido que en Geometría Diferencial uno de los problemas más interesantes es el de poder deducir propiedades topológicas de las variedades a partir de propiedades diferenciales locales. En {14}, A. Gray, a partir del signo de las curvaturas seccional riemanniana K y biseccional holomorfa B deduce propiedades sobre algunas clases y algunos números de Chern de las K--variedades. Puesto que las NK-variedades forman la familia de AH-variedades más semejantes a las kaehlerianas en sus propiedades geométricas y topológicas; {11}, {15}; parecía interesante plantearse el problema de estudiar la influencia del signo de las curvaturas K y B sobre sus clases de Chern. Dicho problema se resuelve para algunas clases en el Capítulo I, siendo necesario acotar inferiormente la curvatura seccional K y la bisecccional holomorfa B cuando estas son no negativas. Los métodos utilizados no parecen dar información sobre las clases y números de Chern, cuando dichas curvaturas no negativas son inferiores a dichas cotas.

Los resultados que se consideran más importantes se encuentran en el §5, en los lemas 2), 4), los teoremas 1), 6), 8), en los corolarios 5), 7), 9) y en el §6, en los teoremas 4), 6) y corolarios 5) y 7).

Es bien sabido, {9}, que S^6 admite una estructura de NK-variedad. Otro ejemplo de variedad casi-hermítica 6-dimensional no difeomorfa a S^6, que admite una estructura de NK-variedad es el espacio homogéneo reductivo $M = U(3) / U(1)xU(1)xU(1)$, donde U representa el grupo unitario.

En el Capítulo II, se estudian algunas propiedades geométricas y topológicas de dicha variedad y se comprueban algunos teoremas del Capítulo I. Se comienza estudiando las distintas estructuras casi-complejas invariantes que es posible definir y se encuentran además de la NK, citada anteriormente, tres hermíticas y ninguna kaehleriana. Se prueba que todas estas estructuras son SK_2 (§3).

Para una AH-variedad M, en un punto $m \varepsilon M$, es posible definir los subespacios del espacio tangente $K_d(m)$ y $K_d^*(m)$ por

$$K_d(m) = \{\ X\varepsilon T_m(M)\ /\ (\nabla_X J)Y = 0 \text{ para todo } Y\varepsilon T_m(M)\ \}$$

$$K_d^*(m) = \{\ X\varepsilon T_m(M)\ /\ (\nabla_Y J)X = 0 \text{ para todo } Y\varepsilon T_m(M)\ \}$$

Así, se tienen definidas dos distribuciones. En el §4, se studian ambas, así como su integrabilidad. En el §5 se analizan l tipo y algunas formas holomorfas bigraduadas de M, {11}. Se rueba que la NK-estructura es de tipo constante 1/2 y Einstein. omo una consecuencia topológica, cabe señalar que para dicha structura, $H^{p,0}(M) = H^{0,p}(M) = 0$ para todo p. Finalmente, en l §7, se dá un ejemplo de subvariedad llana para la estructura e NK.

En {11} y {15}, A. Gray, estudia la Geometría Diferencial la Topología de las NK-variedades. Puesto que dicha familia stá estrictamente contenida en las QK_2, parece natural extender icho estudio a esta familia, más general. Sin embargo los cálulos se convierten inmediatamente en formidables y a veces se ierde el aspecto geométrico. Puesto que las AK_2-variedades tam ien están incluidas en las QK_2 y las AK_2 y NK son familias no omparables, se consideró interesante estudiar la Geometría Dierencial de las AK_2-variedades y cuando ello era posible de las K_2. Este estudio fué hecho en los Capítulos III y IV.

En el Capítulo III, §2, se comienzan estudiando las identiades curvatura para las AK_2 y QK_2-variedades. Merece especial tención la proposición III.2.6: *Si M es una AK_2-variedad, enton es*

$$R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = \frac{1}{2} \langle K(W,X), K(Z,Y) \rangle$$

donde, $K(W,X) = (\nabla_W J)X - (\nabla_X J)W$.

Expresión, que recuerda formalmente la correspondiente para las NK-variedades {9}.

Una fórmula de gran importancia por sus aplicaciones posteriores es la (2.23) que nos permite expresar de una manera simple el tensor $(\nabla^2 J)$, como suma de términos del tipo $<(\nabla J),(\nabla J)>$. En las QK_2, no es posible encontrar una expresión de dicho tipo. En el §3, se estudian las curvaturas de Ricci, así como las propiedades analíticas del operador $(R-R^*)$, el cual desempeñará un papel fundamental en la teoría de descomposición (§2 del Capítulo IV).

Una conexión particularmente interesante en las AH-variedades (en particular en las AK_2-variedades) es la conexión de Hermite D {11}. Representando por S, su operador curvatura, en el §4, se relacionan S y R y entre otras propiedades se estudian las identidades de Bianchi para S (corolario III.4.2 y teorema III.4.11).

En el Capítulo IV, §1, se define la distribución $\bar{K}_d$ como

$$\bar{K}_d(m) = \{ X \varepsilon T_m(M) \;/\; K(X,Y) = 0 \text{ para todo } Y \varepsilon T_m(M) \}$$

para todo $m \varepsilon M$. En el teorema IV.1.1 se prueba como dicha distribución, es integrable en las QK_2-variedades y como las hojas resultan ser subvariedades kaehlerianas. Se prueba así mismo que si M es una AK_2-variedad, $\bar{K}_d = K^*_d$ y $K^*_d \quad K_d$.

Este último resultado, resuelve para esta familia de variedades un problema propuesto por el Prof. A. Gray al Prof. A.M. Naveira.

En el §2, se comienza dando la definición de AK_2-variedad estricta: *Se dice que M es una AK_2-variedad estricta, si para todo $m \in M$ y $X \in T_m(M)$ con $X \neq 0$,*

$$(\nabla_X J) - (\nabla J)X \neq 0.$$

Utilizando las expresiones obtenidas en el §3 del Capítulo III, para el operador R-R*, se prueba la integrabilidad de la distribución Ker (R-R*) y como las hojas resultan así mismo subvariedades kaehlerianas. Según (3.12), 2), la hipótesis que el operador R-R* es paralelo, resulta bastante razonable. Después de probar diversos lemas auxiliares bajo la hipótesis anterior, y teniendo en cuenta el teorema de descomponibilidad de De Rham, se prueba como toda AK_2-variedad es el producto de una K-variedad por otra AK_2-estricta.

Deseo hacer constar mi más sincero agradecimiento al Director de esta memoria, Prof. A.M. Naveira, por su gran estímulo y ejemplo; sin sus seminarios y enseñanzas, no habría sido posible la realización de la misma.

A los profesores, A. Gray de la Universidad de Maryland y L. Vanhecke de la Universidad de Lovaina, por sus interesantes discusiones y consejos, sobre los resultados de esta memoria.

Al Prof. L. Esteban Carrasco, Director del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada.

No quisiera olvidar a mis amigos y compañeros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, ni a mis compañeros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia, en particular al Prof. A. Ramirez por su gran ayuda en la elaboración de esta memoria.

Tengo que agradecer a la Srta. Amparo Giménez su paciencia y buen hacer en la escritura de esta memoria.

Finalmente, esta memoria fué realizada con la ayuda de una beca de Formación del Personal Investigador del Ministerio de Educación y Ciencia.

CAPITULO I

CURVATURA Y NUMEROS DE CHERN DE LAS NK-VARIEDADES.

§1.- *Preliminares.*

Si M es una variedad de Riemann con métrica $<\ ,\ >$ y operador curvatura de R, se utilizará el convenio de

$$R_{WXYZ} = <(\nabla_{[W,X]} - [\nabla_W,\nabla_X])Y,Z>$$

donde W,X,Y,Z, son campos de vectores arbitrarios sobre M.

Se representará por R_{ijkl} las componentes con respecto a una base ortonormal del espacio tangente M_m en un punto $m\varepsilon M$. Además se representará por $K_{ij} = R_{ijij}$ $(i\neq j)$ las curvaturas seccionales correspondiente a dicha base ortonormal. Si w,x,y,z, son vectores que pertenecen a M_m, R_{wxyz} representa el valor del tensor curvatura para estos vectores.

Se representarán por Ω_{ij} las formas curvatura riemanianas las cuales están definidas por

$$\Omega_{ij}(x,y) = R_{ijxy}$$

Se considera ahora que M es una variedad casi hermitica 2n-dimensional, con una estructura casi compleja J. Una J-base de M_m para cada $m\in M$ es de la forma (e_i,Je_i) $1\leq i\leq n$. Es bien sabido que el operador curvatura de una NK-variedad verifica {11}

$$R_{WXYZ} = R_{WXJYJZ} + <(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z>$$

$$R_{WXYZ} = R_{JWJXJYJZ} \tag{1.1}$$

En {22} se define

$$\lambda(W,X,Y,Z) = R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ}$$

un tensor cuatro veces covariante que en el caso de las variedades Kaehlerianas es trivial. Para una NK-variedad, este tensor verifica las siguientes propiedades

(1) $\lambda(W,X,Y,Z) = -\lambda(X,W,Y,Z) = -\lambda(W,X,Z,Y) = \lambda(Y,Z,W,X)$.

(2) $\lambda(W,X,Y,Z) = \lambda(JW,JX,JY,JZ)$.

(3) $\lambda(W,X,JY,JZ) = -\lambda(W,X,Y,Z) = \lambda(JW,JX,Y,Z)$.

(4) $\lambda(W,JX,Y,JZ) = \lambda(W,JX,JY,Z) = \lambda(JW,X,Y,JZ) = $
$= \lambda(W,X,Y,Z)$.

(5) $\lambda(JW,X,Y,Z) = \lambda(W,JX,Y,Z) = -\lambda(W,X,JY,Z) =$
$= -\lambda(W,X,Y,JZ)$.

En {11} A. Gray define sobre una variedad casi hermítica M, con estructura casi compleja J y conexión de Riemann ∇, una conexión D por

$$D_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J\nabla_X JY)$$

para todo X, $Y \varepsilon \chi(M)$, la cual hace J y < , > paralelos.

Representando por S al operador curvatura de la conexión D, entonces las 2-formas curvatura asociadas a S se representarán por θ_{ij} y están dadas por

$$\theta_{ij}(x,y) = S_{ijxy}$$

Observación 1

La expresión de la conexión hermítica D corresponde en la familia de las NK-variedades a la segunda conexión {17} (p.143).

De {11} se deduce fácilmente que

$$S_{WXYZ} = R_{WXYZ} - \frac{1}{2}\lambda(W,X,Y,Z) + \frac{1}{4}\lambda(W,Y,X,Z) - \frac{1}{4}\lambda(W,Z,X,Y) \quad (1.2)$$

Se define

$$\tau(W,X,Y,Z) = S_{WXYZ} - R_{WXYZ}$$

para todo $W,X,Y,Z \varepsilon \chi(M)$

Y τ es nuevamente un tensor cuatro veces covariante.

LEMA I.1.1.

El tensor τ *verifica*

(1) $\tau(W,X,Y,Z) = -\tau(X,W,Y,Z) = -\tau(W,X,Z,Y) =$
$= \tau(Y,Z,W,X)$

(2) $\tau(JW,JX,JY,JZ) = \tau(W,X,Y,Z)$

(3) $\tau(W,X,Y,JY) = \frac{1}{2}\lambda(W,Y,X,JY)$

(4) $\tau(W,X,Y,Z) - \tau(W,X,JY,JZ) = -\lambda(W,X,Y,Z)$

(5) $\tau(W,X,Y,Z) - \tau(W,X,JY,JZ) = \tau(W,JX,JY,Z) +$
$+ \tau(W,JX,Y,JZ)$.

Demostración.-

(1), (2) y (3) son inmediatas, se probarán (4) y (5).

$$\tau(W,X,Y,Z) = -\frac{1}{2}\lambda(W,X,Y,Z) + \frac{1}{4}\lambda(W,Y,X,Z) - \frac{1}{4}\lambda(W,Z,X,Y)$$

$$\tau(W,X,JY,JZ) = -\frac{1}{2}\lambda(W,X,JY,JZ) + \frac{1}{4}\lambda(W,JY,X,JZ) - \frac{1}{4}\lambda(W,JZ,X,JY) =$$
$$= \frac{1}{2}\lambda(W,X,Y,Z) + \frac{1}{4}\lambda(W,Y,X,Z) - \frac{1}{4}\lambda(W,Z,X,Y)$$

Restando se obtiene (4).

Para demostrar (5) se tiene

$$\tau(W,X,Y,Z) - \tau(W,X,JY,JZ) = -\lambda(W,X,Y,Z)$$

$$\tau(W,JX,JY,Z) + \tau(W,JX,Y,JZ) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda(W,JX,JY,Z) - \frac{1}{2}\lambda(W,JX,Y,JZ) + \frac{1}{4}\lambda(W,JY,JX,Z) +$$

$$+ \frac{1}{4}\lambda(W,Y,JX,JZ) - \frac{1}{4}\lambda(W,Z,JX,JY) - \frac{1}{4}\lambda(W,JZ,JX,Y) =$$

$$= -\lambda(W,JX,JY,Z) + \frac{1}{4}\lambda(W,Y,X,Z) - \frac{1}{4}\lambda(W,Y,X,Z) +$$

$$+ \frac{1}{4}\lambda(W,Z,X,Y) - \frac{1}{4}\lambda(W,Z,X,Y) = -\lambda(W,X,Y,Z).$$

Utilizando la formula (1.2) se obtiene la relación entre Ω_{ij} y θ_{ij} en función de τ. En efecto, puesto que

$$S_{ijxy} = R_{ijxy} + \tau(i,j,x,y)$$

para $x,y \varepsilon M_m$, se tiene

$$\theta_{ij}(x,y) = \Omega_{ij}(x,y) + \tau(i,j,x,y) \tag{1.3}$$

ó abreviadamente $\theta_{ij} = \Omega_{ij} + \tau_{ij}$

Observación 2.-

Frecuentemente, por comodidad de notación se representará

$$\lambda(e_i,e_j,x,y) = \lambda(i,j,x,y)$$

se utilizará así mismo el mismo convenio para tensores análogos.

§2.- *Primera clase de Chern de las NK-variedades.*

Es bien conocido un teorema de Chern que afirma que si (Ω_{ij}) es la matriz de las dos formas curvatura complejas de una variedad kaehleriana, M entonces

$$\det(\delta_{ij} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega_{ij})$$

es la suma de formas diferenciales que representan, via el teorema de De Rham, las clases de Chern de M.

En {11}, A. Gray ha demostrado los resultados siguientes:

TEOREMA.-

Sea M una variedad casi-hermítica, compacta, con conexión rimaniana ∇ *y operador curvatura* R_{XY} $(X,Y\varepsilon\chi(M))$ *y sea S el campo tensorial de tipo (0,4) definido por*

$$S_{WXYZ} = \frac{1}{2} R_{WXYZ} + \frac{1}{2} R_{WXJYJZ} + \frac{1}{4}<(\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z> - \frac{1}{4}<(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y>$$

$W,X,Y,Z\varepsilon\chi(M)\otimes\mathbb{C}$. *Sea* $(E_i, E_i^* = JE_i)$ $1\leq i\leq n$ *una referencia local sobre M y*

$$\Xi_{ij}(X,Y) = S_{XYE_iE_j} - \sqrt{-1}\, S_{XYE_iE_j^*}$$

$X,Y\varepsilon\chi(M)\otimes\mathbb{C}$.

Entonces $\det(\delta_{ij} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\Xi_{ij})$ *está definida globalmente y utilizando el teorema de De Rham, representa la clase total de Chern de M.*

En la demostración del teorema, se construye la conexión D, anteriormente citada, y se representa por S su operador curvatura.

COROLARIO a).-

Si M es una NK-variedad, compacta entonces la clase total de Chern está dada por

$$\det(\delta_{ij} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\Xi_{ij})$$

donde $\Xi_{ij}(X,Y) = \theta_{ij}(X,Y) - \sqrt{-1}\theta_{ij^*}(X,Y)$

y θ_{ij} *son las dos formas curvatura asociadas a S, donde*

$$S_{WXYZ} = R_{WXYZ} + \tau(W,X,Y,Z)$$

$W,X,Y,Z \in \chi(M)\otimes\mathbb{C}$.

Es interesante también observar que en el caso que M sea una variedad kaehleriana, se tiene el resultado de Chern citado anteriormente.

COROLARIO b).-

Si M es una NK-variedad compacta, entonces la primera clase de Chern $\gamma_1(M)$ está dada por

$$\gamma_1(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\{R_{XYE_iE_i^*} - \frac{1}{2}<(\nabla_X J)E_i, J(\nabla_Y J)E_i>\} \qquad (2.1)$$

Así mismo en {11} se demuestra que la curvatura biseccional holomorfa B_{XY} y la curvatura Ricci ρ_{XY} de una NK-variedad M están dadas por

$$B_{XY} = K_{XY} + K_{XJY} - 2\|(\nabla_X J)Y\|^2$$

$$\rho_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\{R_{XJYE_iJE_i} + 2<(\nabla_X J)E_i, (\nabla_Y J)E_i>\} \qquad (2.2)$$

donde $X,Y \in \chi(M)$, $\|X\| = \|Y\| = 1$, $<X,Y> = 0$ y (E_i, JE_i) es una referencia de campos sobre un abierto de M.

§3.- Segunda clase de Chern de las NK-variedades.

Utilizando la expresión del determinante, la cual dá la clase total de Chern, para la segunda clase se obtiene

$$\gamma_2(W,X,Y,Z) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^2 \sum_{1\leq i<j\leq n}\{\Xi_{ii}\wedge\Xi_{jj} - \Xi_{ij}\wedge\Xi_{ji}\}(W,X,Y,Z) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{i<j} \{(-\sqrt{-1}\,\theta_{ii*})\wedge(-\sqrt{-1}\theta_{jj*}) -$$

$$- (\theta_{ij} - \sqrt{-1}\,\theta_{ij*})\wedge(\theta_{ji} - \sqrt{-1}\,\theta_{ji*})\}(W,X,Y,Z) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{i<j} \{-\theta_{ii*}\wedge\theta_{jj*} + \theta_{ij}^2 +$$

$$+ \sqrt{-1}\,\theta_{ij}\wedge\theta_{ji*} + \sqrt{-1}\theta_{ij*}\wedge\theta_{ji} + \theta_{ij*}\wedge\theta_{ji*}\}(W,X,Y,Z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i<j} \{\theta_{ii*}\wedge\theta_{jj*} - \theta_{ij}^2 - \theta_{ij*}\wedge\theta_{ji*} -$$

$$- \sqrt{-1}(\theta_{ij}\wedge\theta_{ji*} + \theta_{ij*}\wedge\theta_{ji})\}(W,X,Y,Z)$$

para todo $W,X,Y,Z\varepsilon\mathfrak{X}(M)\otimes\mathbb{C}$.

LEMA I.3.1.

Sea M una NK-variedad con 2-forma curvatura, asociadas a S,θ_{ij}, *entonces*

$$\theta_{ij}\wedge\theta_{ji*} + \theta_{ij*}\wedge\theta_{ji} = 0 \qquad (3.1)$$

Demostración.-

$$\theta_{ij}\wedge\theta_{ji*} + \theta_{ij*}\wedge\theta_{ji} = \theta_{ij}\wedge(\theta_{ji*} - \theta_{ij*})$$

para todo $W,X\varepsilon\mathfrak{X}(M)\otimes\mathbb{C}$, por (1.3) se tiene

$$\theta_{ji*}(W,X) = \Omega_{ji*}(W,X) + \tau_{ji*}(W,X) =$$

$$= \Omega_{ji*}(W,X) - \frac{1}{2}\lambda(W,X,j,i*) +$$

$$+ \frac{1}{4}\lambda(W,j,X,i*) - \frac{1}{4}\lambda(W,i*,X,j)$$

analogamente,

$$- \theta_{ij*}(W,X) = -\Omega_{ij*}(W,X) - \tau_{ij*}(W,X) =$$

$$= -\Omega_{ij^*}(W,X) + \frac{1}{2}\lambda(W,X,i,j^*) - \frac{1}{4}\lambda(W,i,X,j^*) +$$

$$+ \frac{1}{4}\lambda(W,j^*,X,i)$$

sumando

$$\theta_{ji^*}(W,X) - \theta_{ij^*}(W,X) = R_{WXji^*} - R_{WXij^*} - \lambda(W,X,j,i^*)$$

por (1.1) se sigue el lema.

De la misma forma se prueba que $\theta_{ji^*} = \theta_{ij^*}$

así $\theta_{ij^*}\wedge\theta_{ji^*} = \theta^2_{ij^*}$, de donde, se tiene demostrada la siguiente

PROPOSICION I.3.2.

La segunda clase de Chern de una NK-variedad compacta está dada por

$$\gamma_2(W,X,Y,Z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{i<j}\{\theta_{ii^*}\wedge\theta_{jj^*} - \theta^2_{ij} - \theta^2_{ij^*}\}(W,X,Y,Z) \qquad (3.1)$$

Utilizando (1.3) la segunda clase de Chern se puede escribir en función de τ como

$$4\pi^2\gamma_2(W,X,Y,Z) =$$

$$= \sum_{i<j}\{(\Omega_{ii^*} + \tau_{ii^*})\wedge(\Omega_{jj^*} + \tau_{jj^*}) -$$

$$- (\Omega_{ij} + \tau_{ij})^2 - (\Omega_{ij^*} + \tau_{ij^*})^2\}(W,X,Y,Z).$$

Se sabe, {23}, que dada la matriz $\Omega = (\Omega_{ij})$ se obtiene su Pfaffiano de orden cuatro como la raíz cuadrada de su determinante, el cuál resulta ser

$$\Omega_{12} \wedge \Omega_{34} - \Omega_{13} \wedge \Omega_{24} + \Omega_{14} \wedge \Omega_{23}$$

Analogamente, para la matriz $\theta = (\theta_{ij})$, su Pfaffiano de orden cuatro sería

$$\theta_{i_1 i_2 i_3 i_4} =$$

$$= \theta_{12} \wedge \theta_{34} - \theta_{13} \wedge \theta_{24} + \theta_{14} \wedge \theta_{23}$$

de donde la expresión (3.1) se puede escribir de una manera equivalente

$$4\pi^2 \gamma_2(W,X,Y,Z) = \sum_{i<j} \theta_{ii^*jj^*}(W,X,Y,Z)$$

de una manera más general se puede considerar así mismo el Pfaffiano de orden 2k $\theta_{i_1 \ldots i_{2k}}$, de la matríz $\theta = (\theta_{ij})$, $1 \leq i,j \leq 2k$, entonces

$$\theta_{i_1 \ldots i_{2k}} = \frac{1}{2^k\, k!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{2k}} \varepsilon(\rho)\, \theta_{i_{\rho(1)} i_{\rho(2)}} \wedge \ldots \wedge$$

$$\ldots \wedge \theta_{i_{\rho(2k-1)} i_{\rho(2k)}} =$$

$$= \Sigma' \varepsilon(\rho)\, \theta_{i_{\rho(1)} i_{\rho(2)}} \wedge \ldots \wedge \theta_{i_{\rho(2k-1)} i_{\rho(2k)}}$$

donde Σ' está extendida a las $\rho \in \mathfrak{S}_{2k}$ que verifican

$$\rho(1) = 1$$

$$\rho(3) < \rho(4); \ldots; \rho(2k-1) < \rho(2k)$$

$$\rho(1) < \rho(3) < \ldots < \rho(2k-1)$$

y donde $\mathfrak{S}_{2k}$ representa el grupo simétrico de grado 2k, con lo que

$$\theta_{i_1\ldots i_{2k}} = \sum_{p=2}^{2k} (-1)^p \, \theta_{i_1 i_p} \wedge \theta_{i_2\ldots\hat{i}_p\ldots i_{2k}}.$$

§4.- *K-ésima clase de Chern de una NK-variedad*

Se sabe que $\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (\sqrt{-1})^{k^2} \det(A-\sqrt{-1}B)$ donde A y B son kxk matrices cuyos elementos pertenecen a un anillo conmutativo sobre los números complejos tales que ${}^tA = -A$ y ${}^tB = B$.

LEMA I.4.1

Sea M una NK-variedad, compacta entonces la k-ésima clase de Chern está dada por

$$(2\pi)^k \gamma_k = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \Big(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \Omega^{2k-2r} \wedge \tau^{2r}\Big)_{i_1 i_1^* \ldots i_k i_k^*}$$

donde $\Omega^{2k-2r} = \Omega \underbrace{\wedge \ldots\ldots \wedge}_{k-r} \Omega$ *y* $\tau^{2r} = \tau \underbrace{\wedge \ldots\ldots \wedge}_{r} \tau$

Demostración

Puesto que

$$(2\pi)^k \gamma_k = (\sqrt{-1})^k \sum_{i_1<\ldots<i_k} \det \begin{pmatrix} \Xi_{i_1 i_1} \ldots\ldots \Xi_{i_1 i_k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Xi_{i_k i_1} \ldots\ldots \Xi_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

considerando $A = (\theta_{i_p i_q})$ y $B = (\theta_{i_p i_q^*})$ que evidentemente verifican ${}^tA = -A$, ${}^tB = B$ se tiene

$$(2\pi)^k \gamma_k = (\sqrt{-1})^{k-k^2} \sum_{i_1<\dots<i_k} \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} (\theta_{i_p i_q}) & (\theta_{i_p i_q^*}) \\ (-\theta_{i_p i_q^*}) & (\theta_{i_p i_q}) \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} \sum_{i_1<\dots<i_k} \theta_{i_1\dots i_k i_1^*\dots i_k^*} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} \theta_{i_1 i_1^* \dots i_k i_k^*}$$

siendo $\theta^{2k} = (\Omega^2 + \tau^2)^k$ se tiene

$$(2\pi)^k \gamma_k = \sum_{i_1<\dots<i_k} (\Omega^2 + \tau^2)^k_{i_1 i_1^* \dots i_k i_k^*} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k} \left(\sum_{r=o}^{k} \binom{k}{r} \Omega^{2k-2r} \wedge \tau^{2r} \right)_{i_1 i_1^* \dots i_k i_k^*}$$

En {24} se define el 2k-ésimo operador curvatura de una variedad rimaniana por

$$R^{2k}_{i_1\dots i_{2k} j_1 \dots j_{2k}} = \Omega_{i_1\dots i_{2k}}(j_1,\dots,j_{2k})$$

y se demuestra que este operador satisface la primera identidad de Bianchi generalizada. En {10} se prueba que dicho operador curvatura también verifica la segunda identidad de Bianchi generalizada.

A diferencia de lo que sucede en las variedades kaehlerianas, para las NK-variedades

$$R^{2k}_{i_1\dots i_{2k} j_1^* \dots j_{2k}^*} \neq R^{2k}_{i_1\dots i_{2k} j_1 \dots j_{2k}}.$$

La curvatura seccional rimaniana de orden superior está definida por

$$K_{i_1 \dots i_{2k}} = R^{2k}_{i_1 \dots i_{2k} i_1 \dots i_{2k}}$$

Para las NK-variedades se tienen las generalizaciones siguientes. De (1.2) se tiene:

$$S_{WXY^*Z^*} = S_{W^*X^*YZ} = S_{W^*X^*Y^*Z^*} = S_{WXYZ}$$

Definiendo

$$S^{2k}_{i_1 \dots i_{2k} j_1 \dots j_{2k}} = \theta_{i_1 \dots i_{2k}}(j_1, \dots, j_{2k})$$

se tiene

$$S^{2k}_{i_1 \dots i_{2k} j_1^* \dots j_{2k}^*} = S^{2k}_{i_1 \dots i_{2k} j_1 \dots j_{2k}}$$

Aunque S no verifica las identidades de Bianchi, en {15} se prueban las siguientes expresiones

$$\mathfrak{S}_{XYZ} S_{WXYZ} = - \mathfrak{S}_{XYZ} <(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z> \qquad (4.1)$$

$$\mathfrak{S}_{VWX} (\nabla_V S)_{WXYZ} = - \frac{1}{2} <J(\nabla_Y J)Z, \mathfrak{S}_{VWX} (\nabla_V J)(\nabla_W J)X> \qquad (4.2)$$

Ahora, en función del operador S^{2k}, se puede reformular el lema 4.1 de la forma siguiente

LEMA I.4.2.

Si M es una NK-variedad, entonces

$$(2\pi)^k \gamma_k(i_1, \dots, i_{2k}) = \sum_{j_1 < \dots < j_{2k}} S^{2k}_{j_1 j_1^* \dots j_k j_k^* i_1 \dots i_{2k}}$$

COROLARIO I.4.3.

Si M es una NK-variedad, entonces

$$\gamma_k(i_1,\ldots,i_{2k}) = \gamma_k(i_1^*,\ldots,i_{2k}^*)$$

§5.- *Caracterización de algunas formas de Chern sobre las secciones holomorfas*

Es bien sabido que para una variedad casi hermítica, dado un punto $m\varepsilon M$, el tangente M_m y una J-base local $\{i_1..i_n i_1^*..i_n^*\}$ entonces una sección holomorfa de M en el punto m, es un subespacio H de M_m engendrado por una base de la forma $\{i_1 i_1^*\ldots$ $\ldots i_k i_k^*\}$ con $1\underline{<}k\underline{<}n$ (es decir, H es cerrado para J).

Se representará por CHERN (M) el anillo de las formas que son combinaciones lineales constantes de las potencias de las formas de Chern $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$.. y también de las dos formas de Kaehler F sobre M. Los números de Chern usuales son los elementos del subanillo engendrado por $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$.

TEOREMA I.5.1.

Sea M una NK-variedad, entonces:

a) si la primera clase de Chern $\gamma_1(M)$ es no negativa sobre las secciones holomorfas, entonces γ_1^k es no negativa sobre las 2k-dimensionales secciones holomorfas.

b) si M posee tensor de Ricci ρ no positivo, entonces $(-1)^k \gamma_1^k$ es no negativa sobre las 2k-dimensionales secciones holomorfas y estrictamente positivas para las NK-variedades no kaehlerianas.

Demostración.-

Por (2.2)

$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \{<R_{XJYE_i}, JE_i> + 2<(\nabla_X J)E_i, (\nabla_Y J)E_i>\}$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ siendo $\{E_1,..,E_n,JE_1,..,JE_n\}$ una base en $m \in M$.

Por (2.1)

$$2\pi\gamma_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \{<R_{XY}E_i, JE_i> - \frac{1}{2}<(\nabla_X J)E_i, J(\nabla_Y J)E_i>\}$$

de donde

$$\rho(X,Y) - 2\pi\gamma_1(X,JY) = \sum_{i=1}^{n} \{R_{XJYE_iJE_i} - R_{XJYE_iJE_i} +$$

$$+ 2<(\nabla_X J)E_i, (\nabla_Y J)E_i> - \frac{1}{2}<(\nabla_X J)E_i, J(\nabla_{JY} J)E_i>\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{2} <(\nabla_X J)E_i, (\nabla_Y J)E_i> \qquad (5.1)$$

Se ve que γ_1 es invariante por J. En efecto de la expresión de γ_1 y utilizando la tercera condición de curvatura, se tiene

$$\gamma_1(X,Y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \{R_{XYE_iJE_i} - \frac{1}{2}<(\nabla_X J)E_i, J(\nabla_Y J)E_i>\}$$

$$\gamma_1(JX,JY) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \{R_{JXJYE_iJE_i} - \frac{1}{2}<(\nabla_{JX} J)E_i, J(\nabla_{JY} J)E_i>\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \{R_{XYE_iJE_i} - \frac{1}{2}<(\nabla_X J)E_i, J(\nabla_Y J)E_i>\}$$

de donde $\gamma_1(X,Y) = \gamma_1(JX,JY)$.

Así mismo, de la antisimetría de γ_1, $\gamma_1(X,JY) = \gamma_1(Y,JX)$.

Se define ahora $\hat{\gamma}_1(X,Y) = \gamma_1(X,JY)$ entonces, $\hat{\gamma}_1(Y,X) =$ $= \gamma_1(Y,JX)$ de donde teniendo en cuenta las anteriores propiedades

$$\hat{\gamma}_1(X,Y) = \hat{\gamma}_1(Y,X).$$

Además, $\hat{\gamma}_1(JX,JY) = - \gamma_1(JX,Y) = \gamma_1(X,JY) = \hat{\gamma}_1(X,Y)$ así, $\hat{\gamma}_1$ es una forma bilineal, simétrica e invariante por J.

Se considera la base $\{1,1^*,\ldots,n,n^*\}$ que diagonaliza a $\hat{\gamma}_1$, de modo que respecto a ella las componentes no nulas son:

$$\begin{array}{l} \hat{\gamma}_1(1,1) = \gamma_1(1,1^*) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\gamma}_1(k,k) = \gamma_1(k,k^*) \\[1em] \hat{\gamma}_1(1^*,1^*) = \gamma_1(1,1^*) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\gamma}_1(k^*,k^*) = \gamma_1(k,k^*) \end{array}$$

de donde

$$\gamma_1^k(1,1^*,\ldots,k,k^*) = k!\ \gamma_1(1,1^*)\ldots\gamma_1(k,k^*) \qquad (5.2)$$

así, se sigue la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte se toma en (5.1) $Y = X$

$$2\pi\gamma_1(X,JX) = \rho(X,X) - \frac{5}{2} \sum_{i=1}^{n} ||(\nabla_X J)E_i||^2$$

entonces bajo las hipótesis de b), se tiene que $\Upsilon_1(X,JX)\leq 0$ para todo $X\varepsilon \mathfrak{X}(M)$ y $\Upsilon_1(X,JX)<0$ en las NK-variedades no kaehlerianas; así, teniendo en cuenta (5.2) se sigue la segunda parte del teorema.

LEMA I.5.2.

Sea M una NK-variedad, con curvatura seccional no negativa (no positiva), entonces R^4 es no negativa sobre las secciones holomorfas.

Demostración.-

Por definición se tiene

$$R^4_{ii^*jj^*kk^*ll^*} = \Omega_{ii^*jj^*}(k,k^*,l,l^*) =$$

$$= (\Omega_{ii^*} \wedge \Omega_{jj^*} - \Omega_{ij} \wedge \Omega_{i^*j^*} +$$

$$+ \Omega_{ij^*} \wedge \Omega_{i^*j})(k,k^*,l,l^*)$$

para cualquier ocho dimensional sección holomorfa $(i,i^*,j,j^*,k,k^*,l,l^*)$.

De {10} se tiene

a) $(\Omega_{ii^*} \wedge \Omega_{jj^*})(k,k^*,l,l^*) =$

$$= \Omega_{ii^*}(k,k^*)\ \Omega_{jj^*}(l,l^*) - \Omega_{ii^*}(k,l)\ \Omega_{jj^*}(k^*,l^*) +$$

$$+ \Omega_{ii^*}(k,l^*)\ \Omega_{jj^*}(k^*,l) + \Omega_{ii^*}(k^*,l)\ \Omega_{jj^*}(k,l^*) -$$

$$- \Omega_{ii^*}(k^*,l^*)\ \Omega_{jj^*}(k,l) + \Omega_{ii^*}(l,l^*)\ \Omega_{jj^*}(k,k^*) =$$

$$= R_{ii^*kk^*}R_{jj^*ll^*} - R_{ii^*kl}R_{jj^*k^*l^*} +$$

$$+ R_{ii^*kl^*}R_{jj^*k^*l} + R_{ii^*k^*l}R_{jj^*kl^*} -$$

$$- R_{ii^*k^*l^*}R_{jj^*kl} + R_{ii^*ll^*}R_{jj^*kk^*}.$$

b) $-(\Omega_{ij} \wedge \Omega_{i^*j^*})(k,k^*,l,l^*) =$

$$= - R_{ijkk^*}R_{i^*j^*ll^*} + R^2_{ijkl} + R^2_{ijkl^*} +$$

$$+ R^2_{ijk^*l} + R^2_{ijk^*l^*} - R_{ijll^*}R_{i^*j^*kk^*}.$$

c) $(\Omega_{ij^*} \wedge \Omega_{i^*j})(k,k^*,l,l^*) =$

$$= R_{ij^*kk^*}R_{i^*jll^*} + R^2_{ij^*kl} + R^2_{ij^*kl^*} +$$

$$+ R^2_{i^*jkl} + R_{ij^*ll^*}R_{i^*jkk^*} + R^2_{ij^*k^*l}$$

Sumando y teniendo en cuenta la tercera condición de curvatura se tiene

$$R^4_{ii^*jj^*kk^*ll^*} = R_{ii^*kk^*}R_{jj^*ll^*} + R_{ii^*ll^*}R_{jj^*kk^*} +$$

$$+ \{R^2_{ijkl} + R^2_{ijk^*l^*} + R^2_{ijkl^*} + R^2_{ijk^*l} +$$

$$+ R^2_{ij^*kl} + R^2_{i^*jkl} + R^2_{ij^*kl^*} + R^2_{ij^*k^*l}\} -$$

$$- 2\{R_{ii^*kl}R_{jj^*kl} + R_{ii^*kl^*}R_{jj^*kl^*} +$$

$$+ R_{ijkk^*}R_{ijll^*} + R_{ij^*kk^*}R_{ij^*ll^*}\} \qquad (5.2)$$

Evidentemente, los términos que aparecen en (5.2) no dependen individualmente de ningún vector sino de los espacios

$\mathfrak{U} = \langle k,k^*,l,l^*\rangle$ y $V = \langle i,i^*,j,j^*\rangle$

así se es libre, de tomar estos vectores de la forma más conveniente.

Se definen las formas bilineales y simétricas Φ sobre $\mathfrak{U}$ y Ψ sobre V de la forma siguiente

$$\Phi(W,X) = \sum_{p=1}^{4} \{R_{We_pXe_p} - \langle(\nabla_W J)e_p,(\nabla_X J)e_p\rangle\}$$

$$\Psi(Y,Z) = \sum_{p=1}^{4} \{R_{Yf_pZf_p} - \langle(\nabla_Y J)f_p,(\nabla_Z J)f_p\rangle\}$$

para todo $W,X\varepsilon U$, y para todo $Y,Z\varepsilon V$ donde $\{e_p\}$ ($\{f_p\}$), es una base de V(U).

Es fácil ver que Φ y Ψ son simétricas e invariantes por J. Teniendo en cuenta que $\{e_p\}$ y $\{f_p\}$ son J-bases

$$\Phi(W,X) = \Phi(X,W)$$

$$\Phi(JW,JX) = \Phi(W,X)$$

$$\Psi(Y,Z) = \Psi(Z,Y)$$

$$\Psi(JY,JZ) = \Psi(Y,Z)$$

Se considera que $\{k,k^*,l,l^*\}$ es la base de U que diagonaliza Φ, así mismo que $\{i,i^*,j,j^*\}$ es la base de V que diagonaliza Ψ.

Utilizando estas dos bases en las expresiones de Φ y Ψ, y la primera identidad de Bianchi se tiene

$$0 = \Phi(k,l) = R_{kili} + R_{ki^*li^*} + R_{kjlj} + R_{kj^*lj^*} -$$

$$- <(\nabla_k J)i,(\nabla_l J)i> - <(\nabla_k J)i^*,(\nabla_l J)i^*> -$$

$$- <(\nabla_k J)j,(\nabla_l J)j> - <(\nabla_k J)j^*,(\nabla_l J)j^*> =$$

$$= R_{kili} + R_{ki^*li^*} + R_{kjlj} + R_{kj^*lj^*} -$$

$$- 2<(\nabla_k J)i,(\nabla_l J)i> - 2<(\nabla_k J)j,(\nabla_l J)j>$$

por (1.1)

$$= R_{kil^*i^*} + R_{ki^*il^*} + R_{kjl^*j^*} + R_{kj^*jl^*} =$$

$$= - R_{kl^*i^*i} - R_{kl^*j^*j}$$

de donde, elevando al cuadrado

$$- 2 R_{ii^*kl^*}R_{jj^*kl^*} = R^2_{ii^*kl^*} + R^2_{jj^*kl^*} \geq 0$$

Análogamente de

$0 = \Phi(k,l^*)$ se tiene $- 2R_{ii^*kl}R_{jj^*kl} \geq 0$

$0 = \Psi(i,j)$ se tiene $- 2R_{ij^*kk^*}R_{ij^*ll^*} \geq 0$

y de $0 = \Psi(i,j^*)$ se tiene $- 2R_{ijkk^*}R_{ijll^*} \geq 0$.

Para demostrar el lema, teniendo en cuenta la expresión (5.2) y lo anteriormente demostrado, es suficiente probar que los dos primeros sumandos son no negativos, cualquiera que sea el signo de la curvatura seccional.

Se estudian todos los posibles casos, teniendo en cuenta el hecho fundamental de la elección de la base.

1) Si la curvatura seccional K es no positiva, teniendo en cuenta la expresión que relaciona la curvatura seccional y biseccional holomorfa en las NK-variedades

$$B_{XY} = K_{XY} + K_{XJY} - 2\|(\nabla_X J)Y\|^2$$

se tiene

$$R_{ii^*kk^*} = K_{ik} + K_{ik^*} - 2\|(\nabla_i J)k\|^2$$

$$R_{jj^*ll^*} = K_{jl} + K_{jl^*} - 2\|(\nabla_j J)l\|^2$$

ambos términos serían no positivos y su producto, no negativo. Para el otro sumando se procede de manera análoga.

2) Se considera que la curvatura seccional es estrictamente positiva.

a) Puede suceder que tanto Φ como Ψ sean definidas positivas o negativas, en este caso por la anterior elección de la base se tiene

$$\Phi(k,k) = \Phi(l,l) = \Psi(i,i) = \Psi(j,j) = 1$$

o bien

$$\Phi(k,k) = \Phi(l,l) = \Psi(i,i) = \Psi(j,j) = -1$$

Teniendo en cuenta que

$$\Phi(k,k) + \Phi(l,l) = \Psi(i,i) + \Psi(j,j)$$

ya que

$$\Phi(k,k) = K_{ik} + K_{ik^*} - 2\|(\nabla_i J)k\|^2 + $$
$$+ K_{jk} + K_{jk^*} - 2\|(\nabla_j J)k\|^2$$

$$\Phi(l,l) = K_{il} + K_{il^*} - 2\|(\nabla_i J)l\|^2 + $$
$$+ K_{jl} + K_{jl^*} - 2\|(\nabla_j J)l\|^2$$

$$\Psi(i,i) = K_{ik} + K_{ik^*} - 2\|(\nabla_i J)k\|^2 + $$
$$+ K_{il} + K_{il^*} - 2\|(\nabla_i J)l\|^2$$

$$\Psi(j,j) = K_{jk} + K_{jk^*} - 2\|(\nabla_j J)k\|^2 +$$

$$+ K_{jl} + K_{jl^*} - 2\|(\nabla_j J)l\|^2$$

o bien , de un modo simplificado

$$\Phi(k,k) = A + B$$

$$\Phi(l,l) = C + D$$

$$\Psi(i,i) = A + C$$

$$\Psi(j,j) = B + D$$

entonces $\Phi(k,k) - \Psi(i,i) = 0 = B - C$, de donde $B.C \geq 0$

De $\Phi(k,k) - \Psi(j,j) = 0 = A - D$, se tiene $A.D \geq 0$

Así, se sigue el resultado.

b) Para el caso en que Φ y Ψ no sean definidas positivas, ni negativas de:

$$\Phi(k,k) + \Phi(l,l) = \Psi(i,i) + \Psi(j,j)$$

se sigue que pueden ocurrir dos subcasos:

b,1) $\Phi(k,k) = A + B = 1$

$\Phi(l,l) = C + D = -1$

$\Psi(i,i) = A + C = -1$

$\Psi(j,j) = B + D = 1$

b,2) $\Phi(k,k) = A + B = 1$

$\Phi(l,l) = C + D = -1$

$\Psi(i,i) = A + C = 1$

$\Psi(j,j) = B + D = -1$

Se analizará el primer caso, puesto que el segundo es análogo

$$\Phi(k,k) - \Psi(j,j) = 0 = A - D \text{ de donde } A = D \text{ y } A.D \geq 0$$

$$\Psi(j,j) - \Psi(i,i) = 2 = B - C \text{ de donde } B = C + 2$$

$$\Psi(i,i) = -1 = A + C \text{ de donde } A = -1 - C$$

$$A.D = A^2 = 1 + 2C + C^2 \text{ y } B.C = C^2 + 2C$$

Así $A.D = 1 + B.C$ y $A.D > B.C$ de donde $A.D + B.C \geq 0$ lo cual termina la demostración.

COROLARIO I.5.3.

Sea M una NK-variedad compacta, con curvatura bisecccional holómorfa no negativa (no positiva), entonces R^4 es no negativa sobre las ocho dimensionales secciones holomorfas.

La demostración es inmediata a partir del lema anterior, teniendo en cuenta la fórmula (5.2)

Observación 3.-

Con la hipótesis del corolario I.5.3 las bases $\{k,k^*,l,l^*\}$ y $\{i,i^*,j,j^*\}$ es suficiente tomarlas de manera que diagonalicen respectivamente a Ψ y Φ.

LEMA I.5.4.

Sea M una NK-variedad compacta con curvatura seccional no negativa (no positiva), entonces S^4 es no negativa sobre las ocho dimensionales secciones holomorfas.

Demostración.-

Para cualquier ocho dimensional sección holomorfa $\{i,i^*, j,j^*,k,k^*,l,l^*\}$, se tiene

$$S^4_{ii^*jj^*kk^*ll^*} = \theta_{ii^*jj^*}(k,k^*,l,l^*) =$$

$$= \{\theta_{ii^*} \wedge \theta_{jj^*} - \theta^2_{ij} - \theta^2_{ij^*}\}(k,k^*,l,l^*)$$

Obsérvese, que se utilizó el hecho que $S_{WXY^*Z^*} = S_{WXYZ}$.

Por un desarrollo análogo al del lema I.5.2, se tiene:

$$\begin{aligned} S^4_{ii^*jj^*kk^*ll^*} &= S_{ii^*kk^*}S_{jj^*ll^*} + S_{ii^*ll^*}S_{jj^*kk^*} + \\ &+ 2\{S^2_{ijkl} + S^2_{ijkl^*} + S^2_{ij^*kl} + S^2_{ij^*kl^*}\} - \\ &- 2\{S_{ii^*kl}S_{jj^*kl} + S_{ii^*kl^*}S_{jj^*kl^*} + \\ &+ S_{ijkk^*}S_{ijll^*} + S_{ij^*kk^*}S_{ij^*ll^*}\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

De (1.2)

$$\begin{aligned} S_{ijij} &= R_{ijij} - \frac{1}{2} <(\nabla_i J)j,(\nabla_i J)j> - \\ &- \frac{1}{4} <(\nabla_i J)j,(\nabla_j J)i> \end{aligned}$$

de donde

$$S_{ijij} = R_{ijij} - \frac{1}{4} <(\nabla_i J)j,(\nabla_i J)j> \tag{5.4}$$

De (4.1)

$$\begin{aligned} S_{ii^*kk^*} &= -S_{ik^*i^*k} - S_{ikk^*i^*} - \\ &- <(\nabla_i J)k^*,(\nabla_{i^*} J)k> - \\ &- <(\nabla_i J)k,(\nabla_{k^*} J)i^*> \end{aligned}$$

de donde

$$S_{ii^*kk^*} = S_{ikik} + S_{ik^*ik^*} - 2\|(\nabla_i J)k\|^2 \qquad (5.5)$$

Evidentemente (5.3) no depende individualmente de ningún vector, únicamente de los subespacios

$$V = \{i,i^*,j,j^*\} \text{ y } U = \{k,k^*,l,l^*\}$$

Se define las formas bilineales y simétricas

$$\Phi(W,X) = \sum_{p=1}^{4} \{S_{We_pXe_p} - \langle(\nabla_W J)e_p,(\nabla_X J)e_p\rangle\}$$

$$\Psi(Y,Z) = \sum_{p=1}^{4} \{S_{Yf_pZf_p} - \langle(\nabla_Y J)f_p,(\nabla_Z J)f_p\rangle\}$$

Para todo $W,X\varepsilon U$ y para todo $Y,Z\varepsilon V$, donde $\{e_p\}(\{f_p\})$ es una base de $V(U)$.

Evidentemente ambas formas son invariantes por J. Se eligen las bases de la siguiente forma $\{k,k^*,l,l^*\}$ es la base de U que reduce a Φ a su forma canónica y $\{i,i^*,j,j^*\}$ la base de V que reduce a Ψ a su forma canónica. De esta forma se hace una discusión análoga a la del lema I.5.2.

Se ve primeramente que los dos primeros sumandos son no negativos; en efecto

1) Si la curvatura seccional K es no positiva por (5.4) se tiene que $S_{ijij}\leq 0$ para todo i,j y por (5.5) $S_{ii^*jj^*}\leq 0$ para todo i,j así, los dos primeros sumandos son no negativos ya que son productos de dos curvaturas biseccionales de S.

2) Se considera ahora el caso para el que la curvatura seccional K es estrictamente positiva

$$\Phi(k,k) = S_{ikik} + S_{ik^*ik^*} - 2\|(\nabla_i J)k\|^2 +$$

$$+ S_{jkjk} + S_{jk^*jk^*} - 2\|(\nabla_j J)k\|^2$$

$$\Phi(l,l) = S_{ilil} + S_{il^*il^*} - 2\|(\nabla_i J)l\|^2 +$$

$$+ S_{jljl} + S_{jl^*jl^*} - 2\|(\nabla_j J)l\|^2$$

$$\Psi(i,i) = S_{ikik} + S_{ik^*ik^*} - 2\|(\nabla_i J)k\|^2 +$$

$$+ S_{ilil} + S_{il^*il^*} - 2\|(\nabla_i J)l\|^2$$

$$\Psi(j,j) = S_{jkjk} + S_{jk^*jk^*} - 2\|(\nabla_j J)k\|^2 +$$

$$+ S_{jljl} + S_{jl^*jl^*} - 2\|(\nabla_j J)l\|^2$$

o también

$$\Phi(k,k) = A' + B'$$

$$\Phi(l,l) = C' + D'$$

$$\Psi(i,i) = A' + C'$$

$$\Psi(j,j) = B' + D'$$

ahora se tiene

$$\Phi(k,k) + \Phi(l,l) = \Psi(i,i) + \Psi(j,j)$$

a) Si Φ y Ψ son definidas positivas o negativas

$\Phi(k,k) - \Psi(i,i) = 0 = B' - C'$ de donde $B' = C'$ y $B'.C' \geq 0$

$\Phi(k,k) - \Psi(j,j) = 0 = A' - D'$ de donde $A' = D'$ y $A'.D' \geq 0$.

b) Si Φ y Ψ no son definidas positivas ni negativas pueden suceder dos casos

$$\text{b,1)}\quad \Phi(k,k) = 1$$
$$\Phi(l,l) = -1$$
$$\Psi(i,i) = +1$$
$$\Psi(j,j) = -1$$

$$\text{b,2)}\quad \Phi(k,k) = 1$$
$$\Phi(l,l) = -1$$
$$\Psi(i,i) = -1$$
$$\Psi(j,j) = 1$$

Se analiza el segundo caso

$$\Phi(k,k) - \Psi(j,j) = 0 = A' - D' \text{ de donde } A'.D' \geq 0$$

$$\Psi(j,j) - \Psi(i,i) = 2 = B' - C' \text{ de donde } B' = C' + 2$$

$$\Psi(i,i) = -1 = A' + C' \quad A' = -1 - C'$$

$$(A')^2 = 1 + 2C' + C'^2 \quad B'.C' = 2C' + C'^2.$$

Siendo $(A')^2 \geq B'.C'$ se sigue que los dos primeros sumandos son no negativos.

Para probar que los últimos cuatro sumandos de (5.3) son no negativos se utilizan las diagonalizaciones de Φ y Ψ. Así,

$$0 = \Phi(k,l) = S_{kili} + S_{ki*li*} + S_{kjlj} + S_{kj*lj*} -$$
$$- 2<(\nabla_k J)i,(\nabla_l J)i> - 2<(\nabla_k J)j,(\nabla_l J)j>$$

Utilizando de nuevo la invariancia de S por dos J se tiene:

$$0 = S_{kil^*i^*} + S_{ki^*il^*} - 2 <(\nabla_k J)i, (\nabla_l J)i> +$$

$$+ S_{kjl^*j^*} + S_{kj^*jl^*} - 2 <(\nabla_k J)j, (\nabla_l J)j>$$

Por (4.1)

$$0 = S_{kl^*ii^*} + S_{kl^*jj^*}$$

y

$$- 2 S_{ii^*kl^*} S_{jj^*kl^*} = S^2_{ii^*kl^*} + S^2_{jj^*kl^*}$$

De $\Phi(k,l^*) = 0$; $\Psi(i,j) = 0$ y $\Psi(j,j) = 0$ por un razonamiento análogo se deduce que los otros tres sumandos son no negativos y así se sigue el resultado.

COROLARIO I.5.5.

Sea M una NK-variedad entonces:

a) Si la curvatura biseccional holomorfa es no positiva, entonces S^4 es no negativa sobre las ocho dimensionales secciones holomorfas. En particular S^4 es estrictamente positiva, si M es una NK-variedad no kaehleriana.

b) Si para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene $R_{XJXYJY} \geq \frac{1}{2} \|(\nabla_X J)Y\|^2$, entonces S^4 es no negativa sobre las ocho dimensionales secciones holomorfas.

La demostración es inmediata a partir de (5.3) y de (1.2) haciendo W = X, X = JX, Y = Y y Z = JY.

$$S_{XJXYJY} = R_{XJXYJY} + \frac{1}{4} <(\nabla_X J)Y, (\nabla_{JX} J)JY> -$$

$$- \frac{1}{4} <(\nabla_X J)JY, (\nabla_{JX} J)Y>$$

entonces

$$S_{XJXYJY} = R_{XJXYJY} - \frac{1}{2} ||(\nabla_X J)Y||^2$$

TEOREMA I.5.6.

Sea M una NK-variedad con curvatura seccional no negativa (no positiva), entonces la segunda clase de Chern $\gamma_2(M)$ es no negativa sobre las secciones holomorfas.

La demostración es inmediata a partir de los lemas I.4.2 y I.5.4.

COROLARIO I.5.7.

Sea M una NK-variedad entonces:

a) Si su curvatura biseccional holomorfa es no positiva, la segunda clase de Chern $\gamma_2(M)$ es no negativa sobre las secciones holomorfas. En particular, es estrictamente positiva para las NK-variedades no kaehlerianas.

b) Si la curvatura biseccional holomorfa verifica $B_{XY} \geq \frac{1}{2} ||(\nabla_X J)Y||^2$ para todo $X, Y \in X(M)$, entonces $\gamma_2(M)$ es no negativa sobre las secciones holomorfas.

La demostración es inmediata a partir del lema I.4.2 y del corolario I.5.5.

TEOREMA I.5.8.

Sea M una NK-variedad con curvatura seccional no negativa (no positiva). Entonces $\gamma_2^2(M)$ es no negativa sobre las ocho dimensionales secciones holomorfas.

Demostración.-

Sea U una ocho dimensional sección holomorfa. Se define $J: \Lambda^2(U) \longrightarrow \Lambda^2(U)$ por $J(x \wedge y) = x^* \wedge y^*$ y, evidentemente, $J^2 = 1$.

Sobre $\Lambda^2(U)$ se define $L(\xi,\eta) = \gamma_2(\xi,J\eta)$ para todo $\xi,\eta\varepsilon\Lambda^2(U)$ y, por la naturaleza de γ_2, L es una forma bilineal y simétrica.

Se considera

$$S = \{w \wedge x / w,x\varepsilon U \quad \|w\| = \|x\| = 1 \quad y \quad \langle w,x\rangle = 0\}$$

y se define $f: S \longrightarrow R$ por

$$f(w \wedge x) = -L(w \wedge x, w \wedge x) = -\gamma_2(w \wedge x, w^* \wedge x^*) =$$

$$= \gamma_2(w,w^*,x,x^*).$$

Siendo S compacto y f continua, f alcanza un máximo sobre S que supondremos es sobre $y \wedge z\varepsilon S$ entonces $\langle y,z\rangle = 0$. (y,z) se pueden considerar como parte de una base ortonormal de U, z^* pertenecerá también a dicha base y en consecuencia $\langle y,z^*\rangle = 0$.

LEMA {4}.

Sean x_i, x_j, x_k parte de una base ortonormal de M_m. Se considera que la sección (x_i,x_j) es un punto crítico para la función K, curvatura seccional, restringida a la sub-variedad de funciones $\{(x_i, x_j\cos\alpha + x_k \operatorname{sen}\alpha)\}$, entonces las componentes de *la curvatura de la forma R_{ijik} son cero.*

Siendo $y \wedge z$ un máximo de f, se construye la función $f(\alpha) = f(y \wedge (\cos \alpha z + \operatorname{sen} \alpha u))$. Teniendo un punto crítico para $\alpha = 0$ $f'(\alpha) /_{\alpha = 0} = 0$.

$$f(\alpha) = - L(y \wedge (\cos \alpha z + \operatorname{sen} \alpha u); y \wedge (\cos \alpha z + \operatorname{sen} \alpha u)) =$$

$$= - \cos^2 \alpha L(y \wedge z, y \wedge z) - \operatorname{sen}^2 \alpha L(y \wedge u, y \wedge u) -$$

$$- \operatorname{sen} 2\alpha L(y \wedge z, y \wedge u).$$

$$f'(\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \, L(y \wedge z, y \wedge z) -$$

$$- 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \, L(y \wedge u, y \wedge u) -$$

$$- 2 \cos 2\alpha \, L(y \wedge z, y \wedge u)$$

$$f'(\alpha) /_{\alpha=0} = -2L(y \wedge z, y \wedge u) = 0$$

de donde $L(y \wedge z, y \wedge u) = 0$ es decir $\gamma_2(y,z,y^*,u^*) = 0$ donde u es tal que $\langle u,y\rangle = 0$ $\langle u,z\rangle = 0$.

Cambiando la orientación del plano determinado por (y,z), también se tiene $\gamma_2(z,y,z^*,u^*) = 0$.

Teniendo en cuenta que f depende solamente del espacio cuatro dimensional engendrado por $\{y,y^*,z,z^*\}$, así se es libre de elegir la sección holomorfa más conveniente. Tomando en la base de U $y = 1$, $z = 2$, los términos de la forma $\gamma_2(1,1^*,2,u) = 0$ para todo u ortogonal a 1 y 2.

Por el mismo motivo $\gamma_2(2,2^*,1,u) = 0$. Se elige ahora $3,3^*$, con lo que se completaría la base.

Se toma 3 de manera que la sección $3 \wedge 1$ sea máximo para f en las secciones de la forma $3 \wedge (1 \cos \alpha + v \operatorname{sen} \alpha)$ con v ortogonal a 3 y 1.

Así $f(\alpha) = f(3 \wedge 1 \cos \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha)$ y $\gamma_2(3,3^*,1,v) = 0$ $\gamma_2(1,1^*,3,v) = 0$.

Elegida la base, la expresión de γ_2^2 respecto a ella es:

$$\begin{aligned}
&\gamma_2^2(1,1^*,2,2^*,3,3^*,4,4^*) = \\
&= 2\,\gamma_2(1,1^*,4,4^*)\,\gamma_2(2,2^*,3,3^*) + \\
&+ 2\,\gamma_2(1,2,3,4)\,\gamma_2(1^*,2^*,3^*,4^*) - \\
&- 2\,\gamma_2(1,2,3,4^*)\,\gamma_2(1^*,2^*,3^*,4) - \\
&- 2\,\gamma_2(1,2,3^*,4)\,\gamma_2(1^*,2^*,3,4^*) + \\
&+ 2\,\gamma_2(1,2,3^*,4^*)\,\gamma_2(1^*,2^*,3,4) - \\
&- 2\,\gamma_2(1,2^*,3,4)\,\gamma_2(1^*,2,3^*,4^*) + \\
&+ 2\,\gamma_2(1,2^*,3,4^*)\,\gamma_2(1^*,2,3^*,4) + \\
&+ 2\,\gamma_2(1,2^*,3^*,4)\,\gamma_2(1^*,2,3,4^*) - \\
&- 2\,\gamma_2(1^*,2,3,4)\,\gamma_2(1,2^*,3^*,4^*) \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

Por el corolario I.4.3 los sumandos de (5.4) son todos cuadrados salvo el primero que es no negativo por el teorema I.5.6. De donde se sigue el resultado.

COROLARIO I.5.9.

Sea M una NK-variedad compacta con curvatura biseccional holomorfa no positiva ($R_{XJXYJY} \geq \frac{1}{2} \|(\nabla_X J)Y\|^2$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$) entonces γ_2^2 es no negativa sobre las ocho dimensionales secciones holomorfas. En particular si $B_{XY} \leq 0$ entonces γ_2^2 es estrictamente positiva sobre las NK-variedades no kaehlerianas.

Demostración.-

Utilizando el razonamiento del teorema I.5.8, se obtiene la expresión (5.4). Por el corolario I.4.3, los sumandos de esta expresión son todos cuadrados salvo el primero que es no negativo por el corolario I.5.7.

§6.- *Algunos números de Chern de las NK-variedades.*

En esta sección se representará por $F(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la dos-forma de Kaehler de la variedad casi compleja M.

TEOREMA I.6.1.

Sea M una NK-variedad

a) Si la curvatura seccional verifica $K_{XY} \geq \frac{5}{4} \|(\nabla_X J)Y\|^2$, entonces se verifica:

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k})(1, 1^*, \ldots, n, n^*) \geq 0$$

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-2} \wedge \gamma_2)(1, 1^*, \ldots, n, n^*) \geq 0$$

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-4} \wedge \gamma_2^2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

b) Si la curvatura seccional K_{XY} es no positiva entonces

$$(-1)^{n-k}(F^k \wedge \gamma_1^{n-k})(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(-1)^{n-k}(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(-1)^{n-k}(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-4} \wedge \gamma_2^2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

Demostración.-

Se representará por $\{1,1^*,\ldots,n,n^*\}$ la base que diagonaliza $\hat{\gamma}_1(X,Y)$ así

$$(\gamma_1^{n-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) =$$

$$= \sum_{i<j} \gamma_2(i,i^*,j,j^*) \cdot \gamma_1(1,1^*) \cdot \ldots \cdot \gamma_1(i,i^*) \ldots$$

$$\ldots \gamma_1(j,j^*) \ldots \gamma_1(n,n^*) \qquad (7.1)$$

Teniendo en cuenta que en las NK-variedades

$$\gamma_1(X,JX) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \{R_{XJXE_iJE_i} - \frac{1}{2} \|(\nabla_X J)Y\|^2\}$$

Por el teorema I.5.6 $\gamma_2(i,i^*,j,j^*)$ es no negativo y por la expresión de $\gamma_1(X,JX)$, teniendo en cuenta la hipótesis del teorema y (6.1) se sigue que

$$(\gamma_1{}^{n-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

Más generalmente

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

Si $i \neq j$ entonces $F(i,j) = 0$; $F(i,i) = 0$ y $F(i,i^*) = 1$.

COROLARIO I.6.2.

Sea M una NK-variedad

a) Si la curvatura biseccional holomorfa verifica $B_{XY} \geq \frac{1}{2} \|(\nabla_X J)Y\|^2$ *entonces*

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k})(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-4} \wedge \gamma_2^2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

b) Si la curvatura biseccional holomorfa es no positiva entonces

$$(-1)^{n-k}(F^k \wedge \gamma_1^{n-k})(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(-1)^{n-k}(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(-1)^{n-k}(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-4} \wedge \gamma_2^2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

En particular, estas expresiones son estrictamente positivas si M es una NK-variedad no kaehleriana.

La demostración es análoga a la del teorema I.6.1.

LEMA I.6.3.{14}.

Sea $\gamma \in$ CHERN (M) una forma de grado 2n, se considera que para cualquier $m \in M$ existe una base holomorfa de M_m tal que $\gamma(1,1^*,\ldots,n,n^*)$ es no negativa (no positiva). Entonces el número de Chern $\{\gamma\}(M)$ es no negativo (no positivo)

TEOREMA I.6.4.

Sea M una NK-variedad compacta de dimensión real 2n. Si la curvatura seccional verifica:

$$K_{XY} \geq \frac{5}{4} \|(\nabla_X J)Y\|^2$$

entonces los números de Chern $c_1^n(M)$, $c_1^{n-2}c_2(M)$ y $c_1^{n-4}c_2^2(M)$ son no negativos. De una manera más general los números de Chern generalizados

$$\{F\}^k \; c_1^{n-k-2\ell} \; c_2^{\ell}(M)$$

son no negativos para $\ell = 1,2$.

Demostración.-

Es inmediata ya que con las hipótesis consideradas, se tiene

$$\gamma_1^n(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(\gamma_1^{n-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(\gamma_1^{n-4} \wedge \gamma_2^2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

Por el lema I.6.3, integrando estas formas, los números

$$c_1^n(M) = \int_M \gamma_1^n(1,1^*,\ldots,n,n^*)\omega$$

$$c_1^{n-2}c_2(M) = \int_M (\gamma_1^{n-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*)\omega$$

$$c_1^{n-4}c_2^2(M) = \int_M (\gamma_1^{n-4} \wedge \gamma_2^2)(1,1^*,\ldots,n,n^*)\omega$$

son no negativos, de donde se sigue la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte, se utiliza un razonamiento análogo. Por la primera parte del teorema I.6.1 se tiene que

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k})(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-2} \wedge \gamma_2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

$$(F^k \wedge \gamma_1^{n-k-4} \wedge \gamma_2^2)(1,1^*,\ldots,n,n^*) \geq 0$$

La segunda parte se sigue ahora del lema I.6.3.

COROLARIO I.6.5.

Sea M una NK-variedad compacta de dimensión real 2n. Si la curvatura biseccional holomorfa verifica

$$B_{XY} \geq \frac{1}{2} \|(\nabla_X J)Y\|^2$$

entonces, los números de Chern $c_1^n(M)$, $c_1^{n-2}c_2(M)$ *y* $c_1^{n-4}c_2^2(M)$ *son no negativas.*

De una manera más general, los números de Chern generalizados

$$\{F\}^k\, c_1^{n-k-2\ell}\, c_2^{\ell}$$

son no negativos para $\ell = 1,2$.

La demostración del corolario y de los resultados siguientes son análogas a las del teorema I.6.4.

TEOREMA I.6.6.

Sea M una NK-variedad compacta de dimensión real 2n. Si la curvatura seccional es no positiva, entonces los números de Chern $(-1)^n c_1^n(M)$, $(-1)^n c_1^{n-2} c_2(M)$ y $(-1)^n c_1^{n-4} c_2^2(M)$ son no negativos. De una manera más general, los números de Chern generalizados

$$(-1)^n \{F\}^k c_1^{n-k-2\ell} c_2^{\ell} (M)$$

son no negativos para $\ell = 1,2$. En particular, ellos son estrictamente positivos para las NK-variedades no kaehlerianas.

COROLARIO I.6.7.

Sea M una NK-variedad compacta de dimensión real 2n. Si la curvatura biseccional holomorfa es no positiva, entonces los números de Chern

$$(-1)^n c_1^n(M) \ , \ (-1)^n c_1^{n-2} c_2(M) \ y \ (-1)^n c_1^{n-4} c_2^2(M)$$

son no negativos. De una manera más general, los números de Chern generalizados

$$(-1)^n \{F\}^k c_1^{n-k-2\ell} c_2^{\ell} (M)$$

son no negativos para $\ell = 1,2$. En particular ellos son estrictamente positivos para las NK-variedades no kaehlerianas.

CAPITULO II

ESTUDIO DEL ESPACIO HOMOGENEO REDUCTIVO $M = \dfrac{U(3)}{U(1)\times U(1)\times U(1)}$

§1.- *Preliminares.*

Sea U(n) el grupo unitario de orden n. Entonces M = G/K, donde G = U(3) y K = U(1)x U(1)x U(1), es un espacio homogéneo reductivo. Si g y k son respectivamente las álgebras de Lie de G y K, se tiene

$$g = \{ A \;/\; A + {}^t\bar{A} = 0\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} it_1 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & it_2 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & it_3 \end{pmatrix} \;/\; a_{ij}\varepsilon\mathbb{C},\; t_i\varepsilon R\right\}$$

$$k = \left\{ \begin{pmatrix} it_1 & 0 & 0 \\ 0 & it_2 & 0 \\ 0 & 0 & it_3 \end{pmatrix} \;/\; t_i\varepsilon R\right\}$$

Se sabe que el espacio tangente a M en un punto es

$$m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} \;/\; a_{ij}\varepsilon\mathbb{C}\right\}$$

La única métrica rimmaniana bi-invariante sobre U(n) está dada por {20}.

$$\langle A,B\rangle = \text{Re traza } (A.B^*) = \text{Re} \sum_{i,j} A_{ij}\bar{B}_{ij}$$

para todo $A,B\varepsilon g$ donde B^* representa la traspuesta de la conjugada de B.

Entonces m puede ser definida de la siguiente forma

$$m = \{ A\varepsilon g \ / \ \langle A,B\rangle = 0 \text{ para todo } B\varepsilon k\}$$

Se tiene que $g = m \oplus k$, donde $\oplus$ indica la suma directa ortogonal.

Notando por

$$m_{12} = \{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ -\bar{a}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} / \ a_{12}\varepsilon \mathbf{C}\}$$

y definiendo de una manera análoga m_{13} y m_{23} se tiene

$$= m_{12} \oplus m_{13} \oplus m_{23}.$$

PROPOSICION II.1.1.

(1) $[k,m_{ij}] \subseteq m_{ij}$

(2) $[m_{12},m_{13}] \subseteq m_{23}$

$[m_{12},m_{23}] \subseteq m_{13}$

$[m_{13},m_{23}] \subseteq m_{12}$

(3) $[m_{ij}, m_{ij}] \subseteq k$

La demostración es inmediata teniendo en cuenta la definición del producto corchete de matrices.

Representando por

$$(a_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -\bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} it_1 & 0 & 0 \\ 0 & it_2 & 0 \\ 0 & 0 & it_3 \end{pmatrix}$$

se puede escribir

$$[(t_1, t_2, t_3), (a_{pq})] = (i(t_p - t_q) a_{pq})$$

la conexión de Riemann está dada por

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X,Y]_m$$

para todo $X, Y \varepsilon m$. Así mismo se demuestra que {12}

$$<R(X,Y)Y,X> = \frac{1}{4} <[X,Y]_m, [X,Y]_m> +$$

$$+ <[X,Y]_k, [X,Y]_k> \qquad (1.1)$$

para todo $X, Y \varepsilon m$. Donde $<;>$ indica al mismo tiempo la métrica inducida sobre m y k.

Además,

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4} [X,[Y,Z]_m]_m - \frac{1}{4} [Y,[X,Z]_m]_m -$$

$$- \frac{1}{2} [[X,Y]_m, Z]_m - [[X,Y]_k, Z]$$

para todo $X, Y, Z \varepsilon m$. De donde, múltiplicando escalarmente por $W \varepsilon m$

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle =$$

$$\frac{1}{4}\langle W,[X,[Y,Z]_m]_m\rangle - \frac{1}{4}\langle W,[Y,[X,Z]_m]_m\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\langle W,[[X,Y]_m,Z]_m\rangle - \langle W,[[X,Y]_k,Z]\rangle =$$

$$= -\frac{1}{4}\langle [X,W]_m,[Y,Z]_m\rangle + \frac{1}{4}\langle [Y,W]_m,[X,Z]_m\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\langle [Z,W]_m,[X,Y]_m\rangle - \langle W,[[X,Y]_k,Z]\rangle \qquad (1.2)$$

§2.- *Estructuras casi-complejas sobre* M.

Se definen las aplicaciones lineales $J_{pq}: m_{pq} \longrightarrow m_{pq}$ por $J_{pq}(a_{pq}) = (ia_{pq})$. Evidentemente, $J_{pq}^2 = -1$, además

$$[(t_1,t_2,t_3),J_{pq}(a_{pq})] = J_{pq}[(t_1,t_2,t_3),(a_{pq})]$$

En efecto

$$[(t_1,t_2,t_3),J_{pq}(a_{pq})] = (i(t_p - t_q)ia_{pq}) =$$

$$= J_{pq}(i(t_p - t_q)a_{pq}) = J_{pq}[(t_1,t_2,t_3),(a_{pq})].$$

Además $J = \alpha_{12}J_{12} + \alpha_{13}J_{13} + \alpha_{23}J_{23}$ es una estructura casi-compleja sí y solamente sí $\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij}$, donde $\varepsilon_{ij}^2 = 1$.

Además todas estas estructuras son casi hermíticas. En efecto:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad JX = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12}ia_{12} & \varepsilon_{13}ia_{13} \\ \varepsilon_{12}i\bar{a}_{12} & 0 & \varepsilon_{23}ia_{23} \\ \varepsilon_{13}i\bar{a}_{13} & \varepsilon_{23}i\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -\bar{b}_{12} & 0 & b_{23} \\ -\bar{b}_{13} & -\bar{b}_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad JY = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} i b_{12} & \varepsilon_{13} i b_{13} \\ \varepsilon_{12} i \bar{b}_{12} & 0 & \varepsilon_{23} i b_{23} \\ \varepsilon_{13} i \bar{b}_{13} & \varepsilon_{23} i \bar{b}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y^* = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12} & -b_{13} \\ \bar{b}_{12} & 0 & -b_{23} \\ \bar{b}_{13} & b_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad (JY)^* = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_{12} i b_{12} & -\varepsilon_{13} i b_{13} \\ -\varepsilon_{12} i \bar{b}_{12} & 0 & -\varepsilon_{23} i b_{23} \\ -\varepsilon_{13} i \bar{b}_{13} & -\varepsilon_{23} i \bar{b}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle X,Y\rangle = \langle JX,JY\rangle = a_{12}\bar{b}_{12} + \bar{a}_{12}b_{12} + a_{13}\bar{b}_{13} + \\ + \bar{a}_{13}b_{13} + a_{23}\bar{b}_{23} + \bar{a}_{23}b_{23}.$$

Al conjunto de estas estructuras casi-hermíticas se le representará por $\mathcal{J} = \{J(\varepsilon_{ij})\}$.

§3.- *Estudio de las estructuras casi-hermíticas.*

TEOREMA II.3.1.

$\mathcal{J}$ no contiene estructuras kaehlerianas.

Demostración.-

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left([X,JY]_m - J[X,Y]_m\right)$$

M es kaehleriana sí y sólo sí para todo $X,Y \in m$ se verifica

$$[X,JY]_m = J[X,Y]_m$$

tomando

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{13} & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -\bar{b}_{12} & 0 & b_{23} \\ -\bar{b}_{13} & -\bar{b}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|X,JY|_m = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} \varepsilon_{23} i a_{13}\bar{b}_{23} + \\ +\varepsilon_{13} i \bar{a}_{23} b_{13} \end{matrix} & \begin{matrix} -\varepsilon_{12} i a_{23} b_{12} + \\ +\varepsilon_{23} i a_{12} b_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \varepsilon_{23} i \bar{a}_{13} b_{23} + \\ +\varepsilon_{13} i a_{23} \bar{b}_{13} \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} -\varepsilon_{13} i \bar{a}_{12} b_{13} - \\ -\varepsilon_{12} i a_{13} \bar{b}_{12} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\varepsilon_{12} i \bar{a}_{23} \bar{b}_{13} + \\ +\varepsilon_{23} i \bar{a}_{12} \bar{b}_{23} \end{matrix} & \begin{matrix} -\varepsilon_{13} i a_{12} \bar{b}_{13} - \\ -\varepsilon_{12} i \bar{a}_{13} b_{12} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J|X,Y|_m = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} -\varepsilon_{12} i a_{13}\bar{b}_{23} + \\ +\varepsilon_{12} i \bar{a}_{23} b_{12} \end{matrix} & \begin{matrix} \varepsilon_{13} i a_{12} b_{23} - \\ -\varepsilon_{13} i a_{23} b_{12} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\varepsilon_{12} i \bar{a}_{13} b_{23} + \\ +\varepsilon_{12} i a_{23} \bar{b}_{13} \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} -\varepsilon_{23} i \bar{a}_{12} b_{13} + \\ +\varepsilon_{23} i a_{13} \bar{b}_{12} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \varepsilon_{13} i \bar{a}_{12} \bar{b}_{23} - \\ -\varepsilon_{13} i \bar{a}_{23} \bar{b}_{12} \end{matrix} & \begin{matrix} -\varepsilon_{23} i a_{12} \bar{b}_{13} + \\ +\varepsilon_{23} i \bar{a}_{13} b_{12} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí, M sería kaehleriana sí y sólo sí

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{23} \;,\; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{12} \;,\; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} \;,\; \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23}$$

lo cual demuestra el teorema.

TEOREMA II.3.2.

Las estructuras J(-;+;-) y J(+;-;+) son nearly-kaehlerianas.

Demostración.-

$$(\nabla_X J)X = \nabla_X JX - J\nabla_X X = [X,JX]_m - J[X,X]_m$$

así M será nearly-kaehleriana sí y solamente sí para todo $X\varepsilon m$

$[X,JX]_m = 0$

es decir

$$i(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{13})a_{13}\bar{a}_{23} = 0$$

$$i(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{12})a_{23}a_{12} = 0$$

$$i(-\varepsilon_{13} - \varepsilon_{12})\bar{a}_{12}a_{13} = 0$$

Puesto que estas ecuaciones se han de verificar para todo a_{ij}

$$\varepsilon_{23} = -\varepsilon_{13} \;,\; \varepsilon_{23} = \varepsilon_{12} \;,\; \varepsilon_{13} = -\varepsilon_{12}$$

de donde se sigue el teorema.

TEOREMA II.3.3.

Los elementos de J que no son nearly-kaehlerianas son herméticas.

Demostración.-

M será hermítica sí y sólo sí

$$\nabla_X JY - J\nabla_X Y + \nabla_{JX} Y + J\nabla_{JX} JY = 0$$

o equivalentemente

$$[X,JY]_m - J[X,Y]_m + [JX,Y]_m + J[JX,JY]_m = 0$$

tomando

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad JX = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} i a_{12} & \varepsilon_{13} i a_{13} \\ \varepsilon_{12} i \bar{a}_{12} & 0 & \varepsilon_{23} i a_{23} \\ \varepsilon_{13} i \bar{a}_{13} & \varepsilon_{23} i \bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -\bar{b}_{12} & 0 & b_{23} \\ -\bar{b}_{13} & -\bar{b}_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad JY = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} i b_{12} & \varepsilon_{13} i b_{13} \\ \varepsilon_{12} i \bar{b}_{12} & 0 & \varepsilon_{23} i b_{23} \\ \varepsilon_{13} i \bar{b}_{13} & \varepsilon_{23} i \bar{b}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando, $[X,JY]_m = (c_{ij})$, $J[X,Y]_m = (d_{ij})$, $[JX,Y]_m = (e_{ij})$, $[JX,JY]_m = (f_{ij})$ y $J[JX,JY]_m = (g_{ij})$

Con esta notación M será hermítica sí y sólo sí para todo $i,j \varepsilon \{1,2,3\}$ $i \neq j$

$$c_{ij} - d_{ij} + e_{ij} + g_{ij} = 0$$

de donde

$$e_{12} = -\varepsilon_{13} i a_{13} \bar{b}_{23} - \varepsilon_{23} i \bar{a}_{23} b_{13}$$

$$e_{13} = \varepsilon_{12} i a_{12} b_{23} - \varepsilon_{23} i a_{23} b_{12}$$

$$e_{23} = \varepsilon_{12} i \bar{a}_{12} b_{13} + \varepsilon_{13} i a_{13} \bar{b}_{12}$$

análogamente,

$$f_{12} = - \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}a_{13}\bar{b}_{23} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\bar{a}_{23}b_{13}$$

$$f_{13} = - \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}a_{12}b_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{23}a_{23}b_{12}$$

$$f_{23} = - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\bar{a}_{12}b_{13} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}a_{13}\bar{b}_{12}$$

$$g_{12} = - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\ ia_{13}\bar{b}_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\ i\bar{a}_{23}b_{13}$$

$$g_{13} = - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\ ia_{12}b_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\ ia_{23}b_{12}$$

$$g_{23} = - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\ i\bar{a}_{12}b_{13} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}\ ia_{13}\bar{b}_{12}$$

Por las expresiones de c_{ij} y d_{ij} del teorema II.3.1

$$\varepsilon_{23} + \varepsilon_{12} - \varepsilon_{13} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{13} - \varepsilon_{12} - \varepsilon_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} = 0$$

$$-\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} - \varepsilon_{23} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13} + \varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} = 0$$

así, se obtienen seis ecuaciones repetidas, que evidentemente las verifican todos los elementos de J excepto la estructura nearly-kaehleriana.

TEOREMA II.3.4.

Todos los elementos de J pertenecen a AH_2.

Demostración.-

Es suficiente demostrar que los elementos pertenecen a AH_3, {13} y para ello es suficiente que la curvatura seccional sea J-invariante, es decir que

$$<R(X,Y)Y,X> = <R(JX,JY)JY,JX>$$

para todo $X, Y\varepsilon m$ y para todo $J\varepsilon J$. En efecto:

$$X = X_{12} + X_{13} + X_{23}$$

$$Y = Y_{12} + Y_{13} + Y_{23}$$

así,

$$[X,Y]_k = \sum_{i<j} [X_{ij},Y_{ij}]$$

$$[X,Y]_m = [X_{12},Y_{13}] + [X_{12},Y_{23}] + [X_{13},Y_{12}] +$$

$$+ [X_{13},Y_{23}] + [X_{23},Y_{12}] + [X_{23},Y_{13}]$$

pues $[X,Y]_m = 0$ si $X,Y\varepsilon m_{ij}$ y $[X,Y]_k = 0$ si X e Y no pertenecen a la misma componente ortogonal.

Ahora, el teorema es inmediato utilizando la formula (1.1) En efecto

$$JX = JX_{12} + JX_{13} + JX_{23}$$

$$JY = JY_{12} + JY_{13} + JY_{23}$$

Es suficiente demostrar que

$$<[X,Y]_m,[X,Y]_m> = <[JX,JY]_m,[JX,JY]_m>$$

y

$$<[X,Y]_k,[X,Y]_k> = <[JX,JY]_k,[JX,JY]_k>$$

Pero

$$<[X,Y]_m,[X,Y]_m> = <[X_{12},Y_{13}],[X_{12},Y_{13}]> +$$

$$+\ 2\langle [X_{12},Y_{13}],[X_{13},Y_{12}]\rangle\ +$$

$$+\ \langle [X_{13},Y_{12}],[X_{13},Y_{12}]\rangle\ +$$

$$+\ \langle [X_{12},Y_{23}],[X_{12},Y_{23}]\rangle\ +$$

$$+\ 2\langle [X_{12},Y_{23}],[X_{23},Y_{12}]\rangle\ +$$

$$+\ \langle [X_{23},Y_{12}],[X_{23},Y_{12}]\rangle\ +$$

$$+\ \langle [X_{13},X_{23}],[X_{12},X_{23}]\rangle\ +$$

$$+\ 2\langle [X_{13},X_{23}],[X_{23},Y_{13}]\rangle\ +$$

$$+\ \langle [X_{23},Y_{13}]\ ,[X_{23},Y_{13}]\rangle .$$

Procediendo de manera análoga para $\langle [JX,JY]_m,[JX,JY]_m\rangle$ se prueba de manera inmediata que se verifica la igualdad.

Así, si

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -\bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{c} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_{12} = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ -\bar{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle [X_{12},Y_{13}],[X_{13},Y_{12}]\rangle =$$

$$=\text{Traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{a}b \\ 0 & a\bar{b} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c\bar{d} \\ 0 & \bar{c}d & 0 \end{pmatrix} =$$

$= - \bar{a}b\bar{c}d - a\bar{b}c\bar{d}.$

$$JX_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12}ia & 0 \\ \varepsilon_{12}i\bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando análogamente, JX_{13}, JY_{12} y JY_{13}, se tiene

$$<[JX_{12},JY_{13}],[JX_{13},JY_{12}]> =$$

$$= \text{Traza}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\bar{a}b \\ 0 & \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}a\bar{b} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}c\bar{d} \\ 0 & \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\bar{c}d & 0 \end{pmatrix} =$$

$= -\bar{a}b\bar{c}d - a\bar{b}c\bar{d}.$

De manera análoga se procede para los otros sumandos y para la segunda igualdad.

TEOREMA II.3.5.

Las estructuras $J(\varepsilon_{ij})$ son SK_2.

Demostración.-

Se considera la base ortonormal de m $\{E_1,E_2,E_3,JE_1,JE_2,JE_3\}$

$$E_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad JE_1 = E_1^* = i\varepsilon_{12}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad JE_2 = E_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2}i\varepsilon_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad JE_3 = E_3^* = \frac{\sqrt{2}}{2}i\varepsilon_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla_{E_1} J)E_1 = \nabla_{E_1} JE_1 - J\nabla_{E_1} E_1 = [E_1, JE_1]_m - J[E_1, E_1]_m = 0$$

Análogamente,

$$(\nabla_{E_i} J)E_i = (\nabla_{E_i^*} J)E_i^* = 0 \quad \text{para } i = 1,2,3$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{3} \{<(\nabla_{E_i} J)E_i, X> + <(\nabla_{JE_i} J)JE_i, X>\} = 0$$

para todo $X\varepsilon \mathfrak{X}(M)$ ó equivalentemente $\delta F = 0$.

§4.- *Distribución de Kaehler.*

Se considera la distribución de Kaehler, definida en {11} del siguiente modo:

Si M es una variedad casi-hermítica para todo $p\varepsilon M$ se define

$$K_d(p) = \{ X\varepsilon T_p(M) \;/\; (\nabla_X J)Y = 0 \text{ para todo } Y\varepsilon T_p(M) \}$$

En {11} se prueba que si M es una variedad nearly-kaehleriana, entonces la distribución

$$p \longrightarrow K(p)$$

es integrable, sobre cualquier subconjunto abierto de M donde dim K(p) sea constante. Además las subvariedades integrales son kaehlerianas.

Este teorema es generalizado en {13} para una QK-variedad verificando la segunda identidad de curvatura y para una variedad casi-hermítica verificando la primera identidad de curvatura; en particular para las H_1.

TEOREMA II.4.1.

Sea M = U(3) / U(1)x U(1)x U(1), entonces en cualquier punto p de M

(1) $K_d = \{0\}$ *para* $J(\pm;+;+)$ *y* $J(+;-;+)$

(2) $K_d = m_{13} \oplus m_{23}$ *para* $J(+;+;-)$

(3) $K_d = m_{12} \oplus m_{13}$ *para* $J(-;+;+)$

(4) K_d *no es integrable en los casos (2) y (3).*

Demostración.-

$$\text{Si } M = \frac{U(3)}{U(1)\text{x } U(1)\text{x } U(1)}$$

se tiene que para todo $X,Y\varepsilon m$

$$(\nabla_X J)Y = [X,JY]_m - J[X,Y]_m$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -\bar{b}_{12} & 0 & b_{23} \\ -\bar{b}_{13} & -\bar{b}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando, las expresiones de $[X,JY]_m$ y $J[X,Y]_m$ del teorema II.3.1 y teniendo en cuenta que $(\nabla_X J)Y = 0$ para todo $Y\varepsilon m$ si y sólo sí $[X,JY]_m = J[X,Y]_m$ para todo $Y\varepsilon m$ entonces

(1) Si $J = J_{12} + J_{13} + J_{23}$

$$ia_{13}\bar{b}_{23} + i\bar{a}_{23}b_{13} = -ia_{13}\bar{b}_{23} + i\bar{a}_{23}b_{13}$$

$$-ia_{23}b_{12} + ia_{12}b_{23} = ia_{12}b_{23} - ia_{23}b_{12}$$

$$-i\bar{a}_{12}b_{13} - ia_{13}\bar{b}_{12} = -i\bar{a}_{12}b_{13} + ia_{13}\bar{b}_{12}$$

Puesto que estas ecuaciones deben verificarse para todo b_{ij}

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

de donde $X = 0$ y $K_d = \{0\}$.

Si $J = -J_{12} + J_{13} - J_{23}$

$$-ia_{13}\bar{b}_{23} + i\bar{a}_{23}b_{13} = ia_{13}\bar{b}_{23} - i\bar{a}_{23}b_{13}$$

$$ia_{23}b_{12} - ia_{12}b_{23} = ia_{12}b_{23} - ia_{23}b_{12}$$

$$-i\bar{a}_{12}b_{13} + ia_{13}\bar{b}_{12} = i\bar{a}_{12}b_{13} - ia_{13}\bar{b}_{12}$$

y, de un modo análogo al anterior,

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

de donde, $X = 0$ y $K_d = \{0\}$.

(2) Si $J = J_{12} + J_{13} - J_{23}$

$$-ia_{13}\bar{b}_{23} + i\bar{a}_{23}b_{13} = -ia_{13}\bar{b}_{23} + i\bar{a}_{23}b_{13}$$

$$-ia_{23}b_{12} - ia_{12}b_{23} = ia_{12}b_{23} - ia_{23}b_{12}$$

$$-i\bar{a}_{12}b_{13} - ia_{13}\bar{b}_{12} = i\bar{a}_{12}b_{13} - ia_{13}\bar{b}_{12}$$

y de un modo análogo al anterior $a_{12} = 0$ con lo que se tiene $X \varepsilon\ m_{13} \oplus m_{23}$ y $K_d = m_{13} \oplus m_{23}$.

(3) Si $J = J_{12} - J_{13} - J_{23}$

$$-ia_{13}\bar{b}_{23} - i\bar{a}_{23}b_{13} = -ia_{13}\bar{b}_{23} + i\bar{a}_{23}b_{13}$$

$$-ia_{23}b_{12} - ia_{12}b_{23} = -ia_{12}b_{23} + ia_{23}b_{12}$$

$$i\bar{a}_{12}b_{13} - ia_{13}\bar{b}_{12} = i\bar{a}_{12}b_{13} - ia_{13}\bar{b}_{12}$$

Procediendo de una manera análoga se deduce que $a_{23} = 0$ así, $X \varepsilon\ m_{12} \oplus m_{13}$ y $K_d = m_{12} \oplus m_{13}$

(4) Se deduce inmediatamente de (2) y (3), teniendo en cuenta que

$$[m_{13}, m_{23}] \subseteq m_{12} \text{ y } [m_{12}, m_{13}] \subseteq m_{23}.$$

Puesto que la distribución de Kaehler es siempre integrable sobre todo abierto donde dim $K_d(p)$ es constante para las variedades AH_1,{13}, se obtienen aquí ejemplos que demuestran que esta propiedad no es válida para las variedades H_2 y SK_2. Además se dan dos ejemplos donde la distribución es trivial.

Se considera ahora la distribución $p \longrightarrow K_d^*(p)$ sobre M definida por

$$K_d^*(p) = \{X \varepsilon T_p(M) \ / \ (\nabla_Y J)X = 0 \text{ para todo } Y \varepsilon T_p(M)\}$$

TEOREMA II.4.2.

Sea $M = U(3) / U(1) \times U(1) \times U(1)$

(1) $K_d^* = \{0\}$ para $J(+;+;+)$ y $J(+;-;+)$

(2) $K_d^* = m_{12}$ para $J(+;+;-)$

(3) $K_d^* = m_{23}$ para $J(-;+;+)$

(4) La distribución es integrable en todos los casos.

La demostración es análoga a la anterior, obteniendose las mismas ecuaciones, y considerando los a_{ij} arbitrarios se deducen ahora los valores de los b_{ij}.

§5.- Tipo y formas holomorfas sobre M.

En lo que sigue se considera la variedad nearly-kaehleriana M donde J es igual a $J(-;+;-)$.

Definiciones.-

Sea M una variedad casi-hermítica; se dice que posee tipo constante en $p\varepsilon M$ si para todo $X\varepsilon T_p(M)$ se tiene que

$$\|(\nabla_X J)Y\| = \|(\nabla_X J)Z\|$$

siempre que $<X,Y> = <JX,Y> = <X,Z> = <JX,Z> = 0$ y $\|Y\| = \|Z\|$. Si esto ocurre para todo $p\varepsilon M$, se dice que M tiene tipo constante puntualmente.

Finalmente si M tiene tipo constante puntualmente y para todo $X,Y\varepsilon \mathcal{X}(M)$ con $<X,Y> = <JX,Y> = 0$ la función $\|(\nabla_X J)Y\|$ es constante siempre que $\|X\| = \|Y\| = 1$, entonces se dice que M tiene tipo constante globalmente,{11}.

Así mismo en {11} se prueba que si M es una variedad nearly-kaehleriana entonces M tiene tipo constante puntualmente sí y sólo sí existe $\alpha\varepsilon\mathcal{F}(M)$ tal que

$$\|(\nabla_W J)X\|^2 = \alpha\{\|W\|^2\|X\|^2 - <W,X>^2 - <W,JX>^2\}$$

para todo $W,X\varepsilon\mathcal{X}(M)$. Además, M tiene tipo constante globalmente sí y sólo sí la anterior relación se verifica como una función constante α.

Observación 1.-

Este resultado ha sido generalizado para las QK_2-variedades por L. Vanhecke,{27}.

PROPOSICION II.5.1.

La variedad nearly-kaehleriana M con J(-;+;-) posee tipo constante $\alpha = \frac{1}{2}$.

Demostración.-

En efecto, para todo $X, Y \in m$ se tiene

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -\bar{d} & 0 & f \\ -\bar{e} & -\bar{f} & 0 \end{pmatrix}$$

calculando

$$(\nabla_X J)Y = [X,JY]_m - J[X,Y]_m =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -ib\bar{f}+ie\bar{c}; & -iaf+icd \\ -i\bar{b}f+i\bar{e}c & 0 & -ie\bar{a}+ib\bar{d} \\ -i\bar{a}\bar{f}+i\bar{c}\bar{d}; & -i\bar{e}a+i\bar{b}d & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$||(\nabla_X J)Y||^2 = 2\{|-b\bar{f} + e\bar{c}|^2 + |-af + cd|^2 + |-e\bar{a} + b\bar{d}|^2\}$$

análogamente

$$\langle X,X\rangle = 2\{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2\}$$

$$\langle Y,Y\rangle = 2\{|d|^2 + |e|^2 + |f|^2\}$$

$$\langle X,Y\rangle = a\bar{d} + \bar{a}d + b\bar{e} + \bar{b}e + c\bar{f} + \bar{c}f$$

$$\langle X,JY\rangle = ia\bar{d} - i\bar{a}d + i\bar{b}e - ib\bar{e} + ic\bar{f} - i\bar{c}f$$

entonces se comprueba fácilmente que

$$||(\nabla_X J)Y||^2 = \frac{1}{2}\{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2 - \langle X,JY\rangle^2\}$$

de donde se sigue el resultado.

Es bien sabido que para una variedad casi-compleja M de dimensión real 2n, el tensor de Ricci viene dado por

$$S(X,Y) = \langle RX,Y\rangle = \sum_{i=1}^{2n} R_{XE_i YE_i}$$

para todo $X,Y\varepsilon\mathfrak{X}(M)$ donde $\{E_1,\ldots,E_{2n}\}$ es una J-base local de campos.

En {15}, A. Gray demuestra que toda NK-variedad de dimensión 6, no kaehleriana posee tipo constante y además es Einstein, verificandose que $R = 5\alpha I$ donde α es el tipo de la variedad.

Así, $\dfrac{U(3)}{U(1)\times U(1)\times U(1)}$ con la estructura de NK-variedad $J(-;+;-)$ es Einstein y verifica $R = \frac{5}{2} I$ de donde para todo $X\varepsilon m$ se tiene que

$$S(X,X) = \frac{5}{2}\langle X,X\rangle \tag{5.1}$$

TEOREMA {6}.-

Sea M una NK-variedad, compacta de tipo constante puntualmente, cuya curvatura de Ricci S verifica

$$S(X,X) > \frac{1}{2}(p-1)\|(\nabla_X J)Y\|^2$$

para $X,Y\varepsilon M_m$ con $\|X\| = \|Y\| = 1$ y $\langle X,Y\rangle = \langle JX,Y\rangle = 0$ para todo $m\varepsilon M$. Entonces

$$H^{p,0}(M) = H^{0,p}(M) = 0$$

para $p > 0$.

Si se considera $M = \dfrac{U(3)}{U(1)\times U(1)\times U(1)}$ con la estructura de NK-variedad, utilizando (5.1), es evidente que se verifica

$$S(X,Y) > \frac{1}{2}\,(p-1)\,\|(\nabla_X J)Y\|^2$$

para todo $p > 0$. Se deduce así el siguiente resultado.

TEOREMA II.5.2.

$$H^{p,0}(M) = H^{0,p}(M) = 0$$

para todo $p > 0$ donde $M = U(3)\,/\,U(1)\times U(1)\times U(1)$ con la estructura de NK-variedad.

§6.- *Números de Chern.*

Se considera la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3, E_1^*, E_2^*, E_3^*\}$ que se representará por $\{1,2,3,1^*,2^*,3^*\}$.

Respecto a ella se calculan las componentes de la curvatura seccional. Teniendo en cuenta la fórmula (1.1) se tiene

$$K_{11^*} = R_{11^*11^*} = <[1,1^*],[1,1^*]> =$$

$$= \text{Traza}\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

De un modo análogo se ve que $K_{22^*} = K_{33^*} = 2$. Además

$$K_{12} = R_{1212} = \frac{1}{4} <[1,2],[1,2]> = \frac{1}{8}$$

y, del mismo modo $K_{13} = K_{23} = K_{12*} = K_{13*} = K_{23*} = \frac{1}{8}$

Por la fórmula (3.2) del Capítulo I se tiene

$$B_{12} = K_{12} + K_{12*} - 2\ \|(\nabla_1 J)2\|^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - 1 = -\frac{3}{4}$$

Análogamente

$$B_{13} = B_{23} = B_{12*} = B_{13*} = B_{23*} = -\frac{3}{4}.$$

Se calcula ahora respecto a esta base $\hat{\gamma}_1(X,Y) = \gamma_1(X,JY)$. Para que quede perfectamente determinado y teniendo en cuenta las propiedades de bilinealidad, simetría e invariancia por J de $\hat{\gamma}_1$ basta calcular

$$\hat{\gamma}_1(1,1)\ ,\ \hat{\gamma}_1(2,2)\ ,\ \hat{\gamma}_1(3,3)$$

$$\hat{\gamma}_1(1,2)\ ,\ \hat{\gamma}_1(1,3)\ ,\ \hat{\gamma}_1(2,3)$$

$$\hat{\gamma}_1(1,2^*)\ ,\ \hat{\gamma}_1(1,3^*)\ ,\ \hat{\gamma}_1(2,3^*)$$

Por la fórmula (3.1) del Capítulo I se tiene

$$\hat{\gamma}_1(1,2) = \gamma_1(1,2^*) = R_{12*11*} + R_{12*22*} + R_{12*33*} -$$
$$- \frac{1}{2}<(\nabla_1 J)1,(\nabla_2 J)1> - \frac{1}{2}<(\nabla_1 J)2,(\nabla_2 J)2> - \frac{1}{2}<(\nabla_1 J)3,(\nabla_2 J)3>$$

Utilizando la fórmula (1.2) y la proposición II.1.1 se ve fácilmente que

$$R_{12*11*} = R_{12*22*} = R_{12*33*} = 0$$

Así mismo con la proposición II.1.1 y el hecho de ser M una NK-variedad, se prueba que los otros tres sumandos que aparecen en la expresión de $\hat{\gamma}_1(1,2)$ son nulos.

De un modo análogo se demuestra que

$$\hat{\gamma}_1(1,3) = \hat{\gamma}_1(2,3) = \hat{\gamma}_1(1,2^*) = \hat{\gamma}_1(1,3^*) = \hat{\gamma}_1(2,3^*) = 0$$

con lo que, en principio, respecto a la base considerada la forma bilineal $\hat{\gamma}_1$ queda diagonalizada.

Se ve inmediatamente, que

$$\hat{\gamma}_1(1,1) = \hat{\gamma}_1(2,2) = \hat{\gamma}_1(3,3) = 0$$

en efecto

$$\hat{\gamma}_1(1,1) = \gamma_1(1,1^*) = R_{11^*11^*} + R_{11^*22^*} + R_{11^*33^*} -$$

$$- \frac{1}{2}<(\nabla_1 J)1,(\nabla_1 J)1> - \frac{1}{2}<(\nabla_1 J)2,(\nabla_1 J)2> - \frac{1}{2}<(\nabla_1 J)3,(\nabla_1 J)3> =$$

$$= 2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones para las componentes de las curvaturas seccional y biseccional calculadas anteriormente.

De un modo análogo se prueba que $\hat{\gamma}_1(2,2) = \hat{\gamma}_1(3,3) = 0$; así, γ_1 es nula.

Utilizando la fórmula (6.2) del Capítulo I se obtiene que γ_1^3 y γ_1^2 son nulas sobre las secciones holomorfas. Además los números de Chern $c_1^3(M) = c_1 c_2(M) = 0$.

Por último utilizando el teorema 6.6 del Capítulo I se tie ne que $\gamma_2(M)$ es no negativa sobre las secciones holomorfas.

Nota.-

El hecho de ser $\gamma_1 = 0$ para la NK-variedad que se está considerando está de acuerdo con un teorema de {15}, donde se prueba para cualquier NK-variedad seis dimensional no kaehleriana.

§7.- *Ejemplo de una subvariedad llana sobre* $\{M,(-;+;-)\}$.

A partir de la fórmula (1.1) tomando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad JA = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12}ia & \varepsilon_{13}ib \\ \varepsilon_{12}i\bar{a} & 0 & \varepsilon_{23}ic \\ \varepsilon_{13}i\bar{b} & \varepsilon_{23}i\bar{c} & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\frac{R_{AJAAJA}}{\langle A,A\rangle^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13})^2 a\bar{a}b\bar{b} + (\varepsilon_{23}-\varepsilon_{12})^2 a\bar{a}c\bar{c} + (\varepsilon_{13}+\varepsilon_{23})^2 b\bar{b}c\bar{c}}{(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})^2}\right\} +$$

$$+ \left\{\frac{(\varepsilon_{12}a\bar{a}+\varepsilon_{13}b\bar{b})^2 + (-\varepsilon_{12}a\bar{a}+\varepsilon_{23}c\bar{c})^2 + (\varepsilon_{13}b\bar{b}+\varepsilon_{23}c\bar{c})^2}{(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})^2}\right\}$$

Si, en particular, se considera la J-estructura de NK-variedad $(-;+;-)$

$$\frac{R_{AJAAJA}}{\langle A,A\rangle^2} = \frac{(-a\bar{a}+b\bar{b})^2 + (a\bar{a}-c\bar{c})^2 + (b\bar{b}-c\bar{c})^2}{(a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c})^2} \tag{7.1}$$

Sobre M, se define ahora la siguiente distribución

$$\text{Si } e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon m$$

para todo pεM se define

$$H(p) = \mathrm{Ker}(\nabla_e J) = \{A\varepsilon m \;/\; (\nabla_e J)A = 0\}$$

PROPOSICION II.7.1.

(1) *Si* $J = (+;+;+)$ *entonces* $H(p) = m_{13}$

(2) *Si* $J = (+;-;+)$ *entonces* $H(p) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & \bar{a} \\ -\bar{a} & 0 & a \\ -a & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} \;/\; a\varepsilon C\right\}$

(3) *Si* $J = (+;+;-)$ *entonces* $H(p) = m_{12}$

(4) *Si* $J = (-;+;+)$ *entonces* $H(p) = m_{23}$

Demostración.-

Para la demostración se considera

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $(\nabla_e J)A = [e,JA]_m - J[e,A]_m$ así, $(\nabla_e J)A$ es cero sí y sólo sí $[e,JA]_m = J[e,A]_m$

y ello es equivalente a

$$(\varepsilon_{23} + \varepsilon_{12})\bar{c} + (\varepsilon_{13} - \varepsilon_{12})b = 0$$

$$(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13})c + (\varepsilon_{13} - \varepsilon_{12})a = 0$$

$$(\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13})b - (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23})\bar{a} = 0$$

De donde se sigue el resultado.

COROLARIO II.7.2.

La distribución $p \longrightarrow H(p)$ es integrable en los cuatro casos considerados anteriormente. Las subvariedades integrales son kaehlerianas. Además en el caso particular de $J = (+;-;+)$ las subvariedades integrales son llanas.

Demostración.-

La primera parte es inmediata. La segunda, se sigue del hecho de ser las subvariedades integrales de dimensión dos y J-invariantes. La tercera parte se sigue de la proposición II.7.1 y de la fórmula (7.1).

CAPITULO III

GEOMETRIA DE LAS AK_2-VARIEDADES

§1.- *Preliminares.*

Se recuerdan las definiciones de las familias AK-variedades y QK-variedades.

Definiciones.-

a) Una variedad casi-hermítica M es una AK-variedad si

$dF = 0$ ó equivalentemente $\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} <(\nabla_X J)Y,Z> = 0$

para todo $X,Y,Z \varepsilon \mathfrak{X}(M)$ y donde F es la 2-forma de Kaehler.

b) Una variedad casi-hermítica M es una QK-variedad si

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0 \tag{1.1}$$

para todo $X,Y \varepsilon \mathfrak{X}(M)$

c) Una AH-variedad es AH_i si su operador curvatura riemaniano verifica la condición (i) de curvatura.

Para una clase dada L de variedades casi-hermíticas, sea L_i la sub-clase para la cual, su operador curvatura satisface la condición (i). Se muestra fácilmente,{15}

$$K = NK_1 \subset NK_2 = NK_3 = NK \subset QK_2$$

y

$$K = AK_1 \subseteq AK_2 \subset QK_2$$

así, las clases NK y AK_2 no son comparables.

Observación 1.-

Es un problema abierto encontrar un ejemplo de AK_2-variedad, que no sea AK_1-variedad.

Es bien sabido, que toda AH-variedad verifica

$$(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y \qquad (1.2)$$

Fundamentalmente, en este capítulo, se trabajará con las familias AK_2 y QK_2.

§2.- *Identidades curvatura para las AK_2-variedades.*

PROPOSICION III.2.1.

Una QK_2-variedad, verifica en su operador curvatura la relación

$$R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = \frac{1}{2} <(\nabla_{K(W,X)}J)Y,Z> \qquad (2.1)$$

donde $K(W,X) = (\nabla_W J)X - (\nabla_X J)W.$

La demostración es inmediata utilizando {15}.

PROPOSICION III.2.2.

El tensor $K(X,Y)$ de una QK-variedad verifica

$(1)\ K(X,Y) = -K(Y,X)$

$(2)\ K(JX,JY) = -K(X,Y)$

(3) $K(JX,Y) = -JK(X,Y) = K(X,JY)$

(4) $(\nabla_V K)(X,Y) = (\nabla^2_{VX} J)Y - (\nabla^2_{VY} J)X$

(5) $(\nabla_W K)(JX,JY) = -(\nabla_W K)(X,Y) - K((\nabla_W J)X,JY) -$

$- K(JX,(\nabla_W J)Y)$

(6) $(\nabla_W K)(JX,Y) = -J(\nabla_W K)(X,Y) - (\nabla_W J)K(X,Y) -$

$- K((\nabla_W J)X,Y)$ (2.2)

Demostración.-

Las cuatro primeras relaciones son inmediatas. Para probar (5) se deriva en (2).

$$(\nabla_W K)(JX,JY) + K(J\nabla_W X,JY) + K(JX,J\nabla_W Y) +$$

$$+ K((\nabla_W J)X,JY) + K(JX,(\nabla_W J)Y) =$$

$$= - (\nabla_W K)(X,Y) - K(\nabla_W X,Y) - K(X,\nabla_W Y)$$

Utilizando nuevamente (2)

$$(\nabla_W K)(JX,JY) = -(\nabla_W K)(X,Y) - K((\nabla_W J)X,JY) - K(JX,(\nabla_W J)Y) \quad (2.3)$$

Para probar (6) se deriva en (3)

$$(\nabla_W K)(JX,Y) + K(J\nabla_W X,Y) + K(JX,\nabla_W Y) + K((\nabla_W J)X,Y) =$$

$$= - (\nabla_W J)K(X,Y) - J(\nabla_W K)(X,Y) - JK(\nabla_W X,Y) - JK(X,\nabla_W Y)$$

Utilizando (3) se sigue el resultado.

Si F es la 2-forma de Kaehler, se definen $\nabla F, \nabla^2 F$ y $(R_{WX}F)$ por

$$\nabla F(X,Y,Z) = XF(Y,Z) - F(\nabla_X Y,Z) - F(Y,\nabla_X Z)$$

$$\nabla^2 F(W,X,Y,Z) = W\nabla F(X,Y,Z) - \nabla F(\nabla_W X,Y,Z) -$$

$$- \nabla F(X,\nabla_W Y,Z) - \nabla F(X,Y,\nabla_W Z)$$

y

$$(R_{WX}F)(Y,Z) = -F(R_{WX}Y,Z) - F(Y,R_{WX}Z)$$

para todo $W,X,Y,Z\varepsilon\mathcal{X}(M)$.

Se prueba, {9}, que

$$(R_{WX}F)(Y,Z) = -(\nabla^2 F)(W,X,Y,Z) + (\nabla^2 F)(X,W,Y,Z)$$

y

$$||(\nabla_X J)Y||^2 =-(\nabla^2 F)(X,X,Y,JY).$$

COROLARIO III.2.3.

$$(\nabla F)(X,Y,Z) = <(\nabla_X J)Y,Z>$$

$$(\nabla^2 F)(W,X,Y,Z) = <(\nabla^2_{WX} J)Y,Z> \tag{2.4}$$

Demostración.-

Identificando $(\nabla F)(X,Y,Z) = (\nabla_X F)(Y,Z)$ y derivando la fórmula de definición de F, se sigue la primera parte del corolario.

Para demostrar la segunda parte, se deriva en la primera, e identificando $(\nabla_W(\nabla F))(X,Y,Z) = (\nabla^2 F)(W,X,Y,Z)$ se tiene

$$(\nabla_W(\nabla F))(X,Y,Z) + (\nabla F)(\nabla_W X,Y,Z) +$$

$$+ (\nabla F)(X,\nabla_W Y,Z) + (\nabla F)(X,Y,\nabla_W Z) =$$

$$= <(\nabla^2_{WX}J)Y,Z> + <(\nabla_{\nabla_W X}J)Y,Z> +$$

$$+ <(\nabla_X J)\nabla_W Y,Z> + <(\nabla_X J)Y,\nabla_W Z>$$

de donde se sigue la segunda parte del corolario

Observación 2.-

Se identifica también $(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = <(\nabla^2_{WX}J)Y,Z>$

Recordando que toda variedad casi-hermítica verifica

$$\text{(i)} \quad (\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) - (\nabla^2 J)(X,W,Y,Z) = -R_{WXJYZ} - R_{WXYJZ}$$

$$\text{(ii)} \quad (\nabla^2 J)(W,X,Z,Z) = 0 \tag{2.5}$$

toda QK_2-variedad verifica

$$(\nabla^2 J)(X,W,Y,JZ) - (\nabla^2 J)(W,X,Y,JZ) +$$

$$+ (\nabla^2 J)(JX,W,Y,Z) - (\nabla^2 J)(W,JX,Y,Z) = 0 \tag{2.6}$$

PROPOSICION III.2.4.

Sea M una QK_2-variedad, entonces

$$1) \quad (\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) + (\nabla^2 J)(W,JX,JY,Z) =$$

$$= -<(\nabla_{(\nabla_W J)X}J)JY,Z> - <(\nabla_{JX}J)(\nabla_W J)Y,Z>$$

2) $(\nabla^2 J)(W,X,Y,JY) = -<(\nabla_X J)Y,(\nabla_W J)Y>$

3) $(\nabla^2 J)(W,X,JY,JZ) + (\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = - <(\nabla_W J)Y,J(\nabla_X J)Z> -$

$$- <(\nabla_X J)Y,J(\nabla_W J)Z> \qquad (2.7)$$

Observación 3.-

a) La fórmula 1) es verificada para cualquier QK-variedad.

b) La fórmula 3), formalmente, es idéntica a la correspondiente para las NK-variedades {15}.

Demostración de la proposición.-

Siendo M una QK-variedad

$$(\nabla F)(X,Y,Z) + (\nabla F)(JX,JY,Z) = 0$$

Derivando

$$\begin{aligned}(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) + (\nabla^2 J)(W,JX,JY,Z) &= \\ &= W(\nabla J)(X,Y,Z) + W(\nabla J)(JX,JY,Z) - \\ &- (\nabla J)(\nabla_W X,Y,Z) - (\nabla J)(J\nabla_W X,JY,Z) - \\ &- (\nabla J)(X,\nabla_W Y,Z) - (\nabla J)(JX,J\nabla_W Y,Z) - \\ &- (\nabla J)(X,Y,\nabla_W Z) - (\nabla J)(JX,JY,\nabla_W Z) - \\ &- (\nabla J)((\nabla_W J)X,JY,Z) - (\nabla J)(JX,(\nabla_W J)Y,Z).\end{aligned}$$

Así se sigue 1). Haciendo en (2.6) Z = Y, los dos últimos términos son nulos por (2.5). Así, se tiene

$$(\nabla^2 J)(X,W,Y,JY) - (\nabla^2 J)(W,X,Y,JY) = 0 \qquad (2.8)$$

Como, {9} $- (\nabla^2 J)(X,X,Y,JY) = <(\nabla_X J)Y,(\nabla_X J)Y>$

tomando X + Y por X, se tiene

$$2<(\nabla_X J)Y,(\nabla_W J)Y> = -(\nabla^2 J)(X,W,Y,JY) - (\nabla^2 J)(W,X,Y,JY) \qquad (2.9)$$

Sumando (2.8) y (2.9) se sigue el resultado.

Para probar 3) se toma en 2) Y + Z por Y y se obtiene

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,JZ) + (\nabla^2 J)(W,X,Z,JY) = -<(\nabla_X J)Y,(\nabla_W J)Z> - <(\nabla_X J)Z,(\nabla_W J)Y>$$

Tomando ahora JY por Y

$$(\nabla^2 J)(W,X,JY,JZ) + (\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = -<(\nabla_X J)Y,J(\nabla_W J)Z> - <J(\nabla_X J)Z,(\nabla_W J)Y>$$

lo que demuestra la proposición.

Multiplicando escalarmente por Z en 4) de (2.2), se tiene

$$<(\nabla_W K)(X,Y),Z> = (\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) - (\nabla^2 J)(W,Y,X,Z) \qquad (2.10)$$

PROPOSICION III.2.5.

Si M es una AK_2-variedad, entonces

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = \frac{1}{2}\{<(\nabla_Y K)(Z,W),X> + <(\nabla_Y K)(Z,X),W> - <(\nabla_W K)(Y,X),Z> - <(\nabla_X K)(Y,W),Z>\} +$$

$$+ \frac{1}{4}\{<JK(W,X),K(Y,Z)> + <JK(W,Y),K(X,Z)> +$$

$$+ <JK(W,Z),K(Y,X)>\} \qquad (2.11)$$

Demostración.-

Utilizando sucesivamente 2) de (2.7), (2.10), 3) de (2.7), (2.1) y (2.5) se tiene

$$- <(\nabla_X J)Y,(\nabla_W J)Y> = (\nabla^2 J)(W,X,Y,JY) =$$

$$= (\nabla^2 J)(W,Y,X,JY) + <(\nabla_W K)(X,Y),JY> =$$

$$= - (\nabla^2 J)(W,Y,JY,X) + <(\nabla_W K)(X,Y),JY> =$$

$$= - (\nabla^2 J)(W,Y,Y,JX) - <(\nabla_W J)Y,(\nabla_Y J)X> -$$

$$- <(\nabla_Y J)Y,(\nabla_W J)X> + <(\nabla_W K)(X,Y),JY> =$$

$$= - (\nabla^2 J)(Y,W,Y,JX) - \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,Y)} J)Y,X> - <(\nabla_W J)Y,(\nabla_Y J)X> -$$

$$- <(\nabla_Y J)Y,(\nabla_W J)X> + <(\nabla_W K)(X,Y),JY> =$$

$$= - (\nabla^2 J)(Y,Y,W,JX) - <(\nabla_Y K)(W,Y),JX> + <(\nabla_W K)(X,Y),JY> -$$

$$- \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,Y)} J)Y,X> - <(\nabla_W J)Y,(\nabla_Y J)X> - <(\nabla_Y J)Y,(\nabla_W J)X>$$

de donde

$$(\nabla^2 J)(Y,Y,W,JX) = <(\nabla_W K)(X,Y),JY> - <(\nabla_Y K)(W,Y),JX> -$$

$$- \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,Y)} J)Y,X> - <(\nabla_W J)Y,(\nabla_Y J)X> -$$

$$- <(\nabla_Y J)Y,(\nabla_W J)X> + <(\nabla_X J)Y,(\nabla_W J)Y> \qquad (2.12)$$

Tomando ahora en (2.12) Y + Z por Y

$$(\nabla^2 J)(Y,Z,W,JX) + (\nabla^2 J)(Z,Y,W,JX) =$$

$$= <(\nabla_W K)(X,Y),JZ> + <(\nabla_W K)(X,Z),JY> - <(\nabla_Y K)(W,Z),JX> -$$

$$- <(\nabla_Z K)(W,Y),JX> - \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,Y)} J)Z,X> - \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,Z)} J)Y,X> -$$

$$- <(\nabla_W J)Y,(\nabla_Z J)X> - <(\nabla_W J)Z,(\nabla_Y J)X> - <(\nabla_Y J)Z,(\nabla_W J)X> -$$

$$- <(\nabla_Z J)Y,(\nabla_W J)X> + <(\nabla_X J)Y,(\nabla_W J)Z> + <(\nabla_X J)Z,(\nabla_W J)Y> \qquad (2.13)$$

Puesto que

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) - (\nabla^2 J)(X,W,Y,Z) = -\frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,X)} J)JY,Z> \qquad (2.14)$$

de (2.13) se sigue

$$2(\nabla^2 J)(Y,Z,W,X) = <(\nabla_W K)(X,Y),JZ> + <(\nabla_W K)(X,Z),JY> -$$

$$- <(\nabla_Y K)(W,Z),JX> - <(\nabla_Z K)(W,Y),JX> - \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,Y)} J)Z,X> -$$

$$- \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,Z)} J)Y,X> - <(\nabla_W J)Y,(\nabla_Z J)X> - <(\nabla_W J)Z,(\nabla_Y J)X> -$$

$$- <(\nabla_Y J)Z,(\nabla_W J)X> - <(\nabla_Z J)Y,(\nabla_W J)X> + <(\nabla_X J)Y,(\nabla_W J)Z> +$$

$$+ <(\nabla_X J)Z,(\nabla_W J)Y> + \frac{1}{2}<(\nabla_{K(Y,Z)} J)W,X>.$$

Cambiando Y por W, Z por X, W por Y y JX por Z se obtiene

$$2(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = <(\nabla_Y K)(Z,W),X> + <(\nabla_Y J)K(Z,W),JX> +$$

$$+ <K((\nabla_Y J)Z,W),JX> + <(\nabla_Y K)(Z,X),W> + <(\nabla_Y J)K(Z,X),JW> +$$

$$+ \langle K((\nabla_Y J)Z,X),JW\rangle - \langle(\nabla_W K)(Y,X),Z\rangle - \langle(\nabla_X K)(Y,W),Z\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\langle(\nabla_{K(Y,W)}J)X,JZ\rangle + \frac{1}{2}\langle(\nabla_{K(Y,X)}J)W,JZ\rangle + \langle(\nabla_Y J)W,(\nabla_X J)JZ\rangle +$$

$$+ \langle(\nabla_Y J)X,(\nabla_W J)JZ\rangle + \langle(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)JZ\rangle + \langle(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)JZ\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_Z J)W,(\nabla_Y J)X\rangle + \langle J(\nabla_Z J)X,(\nabla_Y J)W\rangle - \frac{1}{2}\langle(\nabla_{K(W,X)}J)Y,JZ\rangle \quad (2.15)$$

Observese que (2.15) se verifica para una QK_2-variedad. En particular, si M es una AK_2-variedad,

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = \frac{1}{2}\langle(\nabla_Y K)(Z,W),X\rangle + \frac{1}{2}\langle(\nabla_Y K)(Z,X),W\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\langle(\nabla_W K)(Y,X),Z\rangle - \frac{1}{2}\langle(\nabla_X K)(Y,W),Z\rangle + \frac{1}{4}\{\langle J(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z\rangle -$$

$$- \langle J(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z\rangle - \langle J(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y\rangle + \langle J(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z\rangle - \langle J(\nabla_Y J)W,(\nabla_X J)Z\rangle - \langle J(\nabla_W J)Y,(\nabla_Z J)X\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_Y J)W,(\nabla_Z J)X\rangle - \langle J(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y\rangle + \langle J(\nabla_Z J)W,(\nabla_X J)Y\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_W J)Z,(\nabla_Y J)X\rangle - \langle J(\nabla_Z J)W,(\nabla_Y J)X\rangle\}$$

Utilizando la fórmula de definición de K, esta última expresión puede escribirse

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = \frac{1}{2}\{\langle(\nabla_Y K)(Z,W),X\rangle + \langle(\nabla_Y K)(Z,X),W\rangle -$$

$$- \langle(\nabla_W K)(Y,X),Z\rangle - \langle(\nabla_X K)(Y,W),Z\rangle\} +$$

$$+ \frac{1}{4}\{\langle JK(W,X),K(Y,Z)\rangle + \langle JK(W,Y),K(X,Z)\rangle +$$

$$+ \langle JK(W,Z),K(Y,X)\rangle\} \quad (2.16)$$

PROPOSICION III.2.6.

Si M es una AK_2-variedad entonces para todo $W,X,Y,Z\varepsilon X(M)$,

$$R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = \frac{1}{2}<K(W,X),K(Z,Y)> \qquad (2.17)$$

Demostración.-

Según (2.1)

$$R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = \frac{1}{2}<(\nabla_{K(W,X)}J)Y,Z>$$

siendo M una AK_2-variedad,

$$R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = -\frac{1}{2}<(\nabla_Z J)K(W,X),Y> - \frac{1}{2}<(\nabla_Y J)Z,K(W,X)> =$$

$$= \frac{1}{2}<(\nabla_Z J)Y,K(W,X)> - \frac{1}{2}<(\nabla_Y J)Z,K(W,X)>$$

En {13} se prueba que el tensor de Nijenhuis de una QK-variedad es

$$N(X,Y) = 2JK(X,Y) \qquad (2.18)$$

PROPOSICION III.2.7.

Sea M una QK_2-variedad. Entonces para todo $W,X,Y,Z\varepsilon X(M)$ se tiene .

$$2(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = <(\nabla_W K)(X,Y),Z> +$$

$$+ <(\nabla_W K)(Z,X),Y> + <(\nabla_W K)(Z,Y),X> \qquad (2.19)$$

Demostración.-

Según {8},

$$2(\nabla F)(X,Y,Z) - 2(\nabla F)(JX,JY,Z) =$$

$$= \langle N(X,JY),Z\rangle - \langle N(X,Z),JY\rangle - \langle N(JY,Z),X\rangle$$

con la ayuda de (2.18) esta expresión puede escribirse

$$(\nabla F)(X,Y,Z) - (\nabla F)(JX,JY,Z) =$$

$$= \langle JK(X,JY),Z\rangle - \langle JK(X,Z),JY\rangle - \langle JK(JY,Z),X\rangle =$$

$$= \langle K(X,Y),Z\rangle + \langle K(Z,X),Y\rangle + \langle K(Z,Y),X\rangle$$

Derivando

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) - (\nabla^2 J)(W,JX,JY,Z) -$$

$$- (\nabla F)((\nabla_W J)X,JY,Z) - (\nabla F)(JX,(\nabla_W J)Y,Z) =$$

$$= \langle(\nabla_W K)(X,Y),Z\rangle + \langle(\nabla_W K)(Z,X),Y\rangle + \langle(\nabla_W K)(Z,Y),X\rangle$$

Haciendo ahora la suma de esta expresión con (2.7), 1)

$$2(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) =$$

$$= \langle(\nabla_W K)(Z,X),Y\rangle + \langle(\nabla_W K)(Z,Y),X\rangle + \langle(\nabla_W K)(X,Y),Z\rangle +$$

$$+ \langle(\nabla_{(\nabla_W J)X} J)JY,Z\rangle + \langle(\nabla_{JX} J)(\nabla_W J)Y,Z\rangle -$$

$$- \langle(\nabla_{(\nabla_W J)X} J)JY,Z\rangle - \langle(\nabla_{JX} J)(\nabla_W J)Y,Z\rangle$$

PROPOSICION III.2.8.

Sea M una AK-variedad, entonces para todo $W,X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} (\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = 0 \qquad (2.20)$$

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) - (\nabla^2 J)(W,Y,X,Z) =$$

$$= W(\nabla F)(X,Y,Z) + W(\nabla F)(Y,Z,X) -$$

$$- (\nabla F)(\nabla_W X,Y,Z) + (\nabla F)(Y,Z,\nabla_W X) -$$

$$- (\nabla F)(X,\nabla_W Y,Z) + (\nabla F)(\nabla_W Y,Z,X) -$$

$$- (\nabla F)(X,Y,\nabla_W Z) + (\nabla F)(Y,\nabla_W Z,X) =$$

$$= - W((\nabla F)(Z,X,Y)) + (\nabla F)(Z,\nabla_W X,Y) +$$

$$+ (\nabla F)(Z,X,\nabla_W Y) + (\nabla F)(\nabla_W Z,X,Y) =$$

$$= - (\nabla^2 J)(W,Z,X,Y)$$

PROPOSICION III.2.9.

Sea M una AK_2-variedad, entonces para todo $W,X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = \langle(\nabla_W K)(Z,Y),X\rangle \qquad (2.21)$$

Demostración.-

Utilizando (2.19) y (2.20)

$$\langle(\nabla_W K)(X,Y),Z\rangle + \langle(\nabla_W K)(Z,X),Y\rangle + \langle(\nabla_W K)(Z,Y),X\rangle +$$

$$+ \langle(\nabla_W K)(Z,X),Y\rangle + \langle(\nabla_W K)(Y,Z),X\rangle + \langle(\nabla_W K)(Y,X),Z\rangle +$$

$$+ \langle(\nabla_W K)(Y,Z),X\rangle + \langle(\nabla_W K)(X,Y),Z\rangle + \langle(\nabla_W K)(X,Y),Z\rangle = 0$$

Es decir

$$<(\nabla_W K)(Z,X),Y> + <(\nabla_W K)(Y,Z),X> + <(\nabla_W K)(X,Y),Z> = 0$$

El resultado se sigue ahora de (2.19).

COROLARIO III.2.10.

Con las mismas hipotesis de la proposición III.2.9 se verifica.

$$<(\nabla_X K)(Z,Y),W> = <(\nabla_W K)(Z,Y),X> + \frac{1}{2}<K(W,X),JK(Z,Y)> \qquad (2.22)$$

Demostración.-

Cambiando (2.21) W por X y restando

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) - (\nabla^2 J)(X,W,Y,Z) = <(\nabla_W K)(Z,Y),X> -$$

$$- <(\nabla_X K)(Z,Y),W>$$

Utilizando (2.5) y (2.17) se sigue el resultado.

TEOREMA III.2.10.

Sea M una AK_2-variedad. Entonces para todo $W,X,Y,Z \varepsilon X(M)$

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = -\frac{1}{2}\{<J(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> - <J(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> -$$

$$- <J(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + <J(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y>\} \quad (2.23)$$

Demostración.-

Se conoce el valor particular de $(\nabla^2 J)(W,X,Y,JY)$ (2.7), 2). Así se escribirá $(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z)$ como una combinación lineal con coeficientes constantes de todas las maneras posibles con produc tos de la forma $<J(\nabla.J)\cdot,(\nabla.J)\cdot>$ y $<(\nabla.J)\cdot,(\nabla.J)\cdot>$

En general, se podrá escribir

$$
\begin{aligned}
(\nabla^2 J)(W,X,Y,JZ) = {} & a_1<(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> + a_2<(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> + \\
& + a_3<(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + a_4<(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> + \\
& + a_5<(\nabla_Y J)X,(\nabla_W J)Z> + a_6<(\nabla_Y J)W,(\nabla_X J)Z> + \\
& + a_7<(\nabla_Z J)Y,(\nabla_W J)X> + a_8<(\nabla_Z J)X,(\nabla_W J)Y> + \\
& + a_9<(\nabla_Z J)W,(\nabla_X J)Y> + a_{10}<(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y> + \\
& + a_{11}<(\nabla_Y J)X,(\nabla_Z J)W> + a_{12}<(\nabla_Y J)W,(\nabla_Z J)X> + \\
& + b_1<J(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> + b_2<J(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> + \\
& + b_3<J(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + b_4<J(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> + \\
& + b_5<J(\nabla_Y J)X,(\nabla_W J)Z> + b_6<J(\nabla_Y J)W,(\nabla_X J)Z> + \\
& + b_7<J(\nabla_Z J)Y,(\nabla_W J)X> + b_8<J(\nabla_Z J)X,(\nabla_W J)Y> + \\
& + b_9<J(\nabla_Z J)W,(\nabla_X J)Y> + b_{10}<J(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y> + \\
& + b_{11}<J(\nabla_Y J)X,(\nabla_Z J)W> + b_{12}<J(\nabla_Y J)W,(\nabla_Z J)X> \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Puesto que (2.24) debe verificar (2.7), 2),

$$a_1 + a_2 = -1 \ , \ a_3 + a_7 = 0 \ , \ a_4 + a_{10} = 0$$

$$a_5 + a_8 = 0 \ , \ a_6 + a_9 = 0 \ , \ a_{11} + a_{12} = 0$$

$$b_1 + b_2 = 0 \ , \ b_3 - b_7 = 0 \ , \ b_4 + b_{10} = 0$$

$$b_5 + b_8 = 0 \ , \ b_6 + b_9 = 0 \ , \ b_{11} - b_{12} = 0$$

Así, (2.24) puede escribirse

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 J)(W,X,Y,JZ) = {} & a_1 < (\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y > - (1+a_1) < (\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z > + \\
& + a_3\{ < (\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z > - < (\nabla_Z J)Y, (\nabla_W J)X > \} + \\
& + a_4\{ < (\nabla_X J)W, (\nabla_Y J)Z > - < (\nabla_X J)W, (\nabla_Z J)Y > \} + \\
& + a_5\{ < (\nabla_Y J)X, (\nabla_W J)Z > - < (\nabla_Z J)X, (\nabla_W J)Y > \} + \\
& + a_6\{ < (\nabla_Y J)W, (\nabla_X J)Z > - < (\nabla_Z J)W, (\nabla_X J)Y > \} + \\
& + a_{11}\{ < (\nabla_Y J)X, (\nabla_Z J)W > - < (\nabla_Y J)W, (\nabla_Z J)X > \} + \\
& + b_1\{ < J(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y > - < J(\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z > \} + \\
& + b_3\{ < J(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z > + < J(\nabla_Z J)Y, (\nabla_W J)X > \} + \\
& + b_4\{ < J(\nabla_X J)W, (\nabla_Y J)Z > - < J(\nabla_X J)W, (\nabla_Z J)Y > \} + \\
& + b_5\{ < J(\nabla_Y J)X, (\nabla_W J)Z > - < J(\nabla_Z J)X, (\nabla_W J)Y > \} + \\
& + b_6\{ < J(\nabla_Y J)W, (\nabla_X J)Z > - < J(\nabla_Z J)W, (\nabla_X J)Y > \} + \\
& + b_{11}\{ < J(\nabla_Y J)X, (\nabla_Z J)W > + < J(\nabla_Y J)W, (\nabla_Z J)X > \} \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Puesto que $(\nabla^2 J)$ es antisimétrico en los dos últimos argumentos, tomando en (2.25) JZ por Y se tiene

$$a_1 = -\frac{1}{2} \ , \ a_2 = -\frac{1}{2} \ , \ a_5 = a_6 = a_{11} = 0$$

$$b_1 = b_6 = b_{11} = 0 .$$

De donde, (2.25) se puede escribir

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,JZ) = -\frac{1}{2}<(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> - \frac{1}{2}<(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> +$$
$$+ a_3\{<(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> - <(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y>\} +$$
$$+ a_4\{<(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> - <(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y>\} +$$
$$+ b_3\{<J(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + <J(\nabla_Z J)Y,(\nabla_W J)X>\} -$$
$$- b_4\{<J(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y> - <J(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z>\} -$$
$$- b_5\{<J(\nabla_Z J)X,(\nabla_W J)Y> - <J(\nabla_Y J)X,(\nabla_W J)Z>\} \quad (2.26)$$

Por (2.4), 1) y (2.17)

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,JZ) - (\nabla^2 J)(X,W,Y,JZ) =$$
$$= \frac{1}{2}<(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y> - \frac{1}{2}<(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y> -$$
$$- \frac{1}{2}<(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + \frac{1}{2}<(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> \quad (2.27)$$

Combinando (2.26) con (2.27)

$$a_3\{<(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> - <(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y> -$$
$$- <(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> + <(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y>\} +$$
$$+ a_4\{<(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> - <(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y> -$$
$$- <(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + <(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y>\} +$$
$$+ (b_3-b_4)\{<J(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + <J(\nabla_Z J)Y,(\nabla_W J)X> -$$

$$- <J(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> - <J(\nabla_Z J)Y,(\nabla_X J)W>\} +$$

$$+ b_5\{<J(\nabla_Y J)X,(\nabla_W J)Z> - <J(\nabla_Z J)X,(\nabla_W J)Y> -$$

$$- <J(\nabla_Y J)W,(\nabla_X J)Z> + <J(\nabla_Z J)W,(\nabla_X J)Y>\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{<(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y> - <(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y> -$$

$$- <(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + <(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z>\}$$

Identificando coeficientes

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{2}, \quad b_3 = b_4, \quad b_5 = 0$$

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = -\frac{1}{2}\{<J(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> - <J(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z>\} +$$

$$+ a_3\{<J(\nabla_W J)X,(\nabla_Z J)Y> - <J(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z>\} +$$

$$+ (a_3+\frac{1}{2})\{<J(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y> - <J(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z>\} +$$

$$+ b_3\{<(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> - <(\nabla_Z J)Y,(\nabla_W J)X> +$$

$$+ <(\nabla_X J)W,(\nabla_Y J)Z> - <(\nabla_X J)W,(\nabla_Z J)Y>\} \quad (2.28)$$

fórmula que se obtiene tomando en (2.26) $-JZ$ por Z.

Haciendo la permutación cíclica sobre X,Y,Z en (2.28), sumando, identificando los coeficientes correspondientes y teniendo en cuenta que $(\nabla^2 J)$ debe verificar (2.20), se sigue

$$a_3 = -\frac{1}{2}, \quad b_3 = 0$$

de donde se sigue el resultado

Observación 4.-

a) Es inmediato probar que la expresión (2.23) verifica las condiciones 1) y 2) de (2.7).

b) La solución que se ha construido para $(\nabla^2 J)$ no es necesariamente única, pero satisface todas las condiciones que es preciso imponerle a partir de la estructura de AK y de las propiedades de la curvatura.

c) Siguiendo un razonamiento análogo al de la demostración del teorema III.2.11, se prueba que el tensor $(\nabla^2 J)$ en las QK_2-variedades no es posible expresarlo como combinación lineal con coeficientes constantes de términos de la forma

$$<J(\nabla.J)\cdot,(\nabla.J)\cdot>;\quad <(\nabla.J)\cdot,(\nabla.J)\cdot>;\quad <J(\nabla_{(\nabla.J)\cdot}J)\cdot,(\nabla.J)\cdot> \text{ y}$$

$$<(\nabla_{(\nabla.J)\cdot}J)\cdot,(\nabla.J)\cdot>$$

COROLARIO III.2.12.

Sea M una AK_2-variedad. Entonces para todo $W,Y,Z\varepsilon X(M)$

$$(\nabla^2 J)(W,W,Y,Z) = - <J(\nabla_W J)Z,(\nabla_W J)Y> + \frac{1}{2}<J(\nabla_W J)W,K(Y,Z)> \quad (2.29)$$

Para la demostración basta tomar en (2.23) W por X.

PROPOSICION III.2.13.

Para las AK_2-variedades no es posible expresar el tensor $(\nabla^2 J)$ como combinación lineal con coeficientes constantes de tensores del tipo λ

donde $\lambda(W,X,Y,Z) = R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ}$

para todo $W,X,Y,Z\varepsilon X(M)$.

Demostración.-

Si se pudiese encontrar una tal combinación, $(\nabla^2 J)$ sería combinación lineal de términos del tipo $\lambda(\cdot,\cdot,\cdot,J\cdot)$ pero jamás del tipo $\lambda(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$. Entonces por (2.17), existirían coeficientes $a,b,c\varepsilon\mathbf{R}$ tales que el sistema

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) = a\langle JK(W,X),K(Y,Z)\rangle +$$
$$+ b\langle JK(W,Z),K(X,Y)\rangle +$$
$$+ c\langle JK(W,Y),K(Z,X)\rangle$$

fuera compatible. Identificando coeficientes se sigue la incompatibilidad.

PROPOSICION III.2.14.

Sea M una AK_2*-variedad. Entonces para todo* $V,W,X,Y,Z\varepsilon X(M)$,

$$(\nabla_V R)_{WXYZ} + (\nabla_V R)_{JWJXJYJZ} = (\nabla_V R)_{WXJYJZ} + (\nabla_V R)_{JWJXYZ} \qquad (2.30)$$

Demostración.-

Derivando en (2.17)

$$(\nabla_V R)_{WXYZ} - (\nabla_V R)_{WXJYJZ} - R_{WX(\nabla_V J)YJZ} - R_{WXJY(\nabla_V J)Z} =$$
$$= \frac{1}{2}\langle(\nabla_V K)(W,X),K(Z,Y)\rangle + \frac{1}{2}\langle K(W,X),(\nabla_V K)(Z,Y)\rangle \qquad (2.31)$$

Cambiando en (2.31) W,X,Y,Z por JW,JX,JY,JZ respectivamente

$$(\nabla_V R)_{JWJXJYJZ} - (\nabla_V R)_{JWJXYZ} + R_{JWJX(\nabla_V J)JYZ} + R_{JWJXY(\nabla_V J)JZ} =$$

$$= \frac{1}{2}\langle (\nabla_V K)(JW,JX), K(JZ,JY)\rangle + \frac{1}{2}\langle K(JW,JX), (\nabla_V K)(JZ,JZ)\rangle \tag{2.32}$$

Sumando (2.31) y (2.32) y utilizando (2.2), 5)

$$(\nabla_V R)_{WXYZ} + (\nabla_V R)_{JWJXJYJZ} = (\nabla_V R)_{WXJYJZ} + (\nabla_V R)_{JWJXYZ} +$$

$$+ \langle (\nabla_V K)(W,X), K(Z,Y)\rangle + \langle K(W,X), (\nabla_V K)(Z,Y)\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\{\langle K((\nabla_V J)W,JX), K(Z,Y)\rangle + \langle K(JW,(\nabla_V J)X), K(Z,Y)\rangle +$$

$$+ \langle K((\nabla_V J)Z,JY), K(W,X)\rangle + \langle K(JZ,(\nabla_V J)Y), K(W,X)\rangle\} \tag{2.33}$$

Por (2.21) y (2.23),

$$\langle (\nabla_V K)(W,X), K(Z,Y)\rangle = (\nabla^2 J)(V, K(Z,Y), X, W) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\langle J(\nabla_V J)X, (\nabla_{K(Z,Y)}J)W\rangle - \langle J(\nabla_V J)W, (\nabla_{K(Z,Y)}J)X\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_V J)K(Z,Y), (\nabla_X J)W\rangle - \langle J(\nabla_V J)K(Z,Y), (\nabla_W J)X\rangle\} \tag{2.34}$$

y

$$\langle (\nabla_V K)(Z,Y), K(W,X)\rangle = (\nabla^2 J)(V, K(W,X), Y, Z) =$$

$$= \frac{1}{2}\{\langle J(\nabla_V J)Y, (\nabla_{K(W,X)}J)Z\rangle - \langle J(\nabla_V J)Z, (\nabla_{K(W,X)}J)Y\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_V J)K(W,X), (\nabla_Y J)Z\rangle - \langle J(\nabla_V J)K(W,X), (\nabla_Z J)Y\rangle\} \tag{2.35}$$

Utilizando la definición de K, se sigue que los últimos cuatro términos del segundo miembro en (2.33) pueden escribirse

$$\frac{1}{2}\{<(\nabla_{(\nabla_V J)W}J)JX - (\nabla_{JX}J)(\nabla_V J)W, K(Z,Y)> -$$

$$- <(\nabla_{(\nabla_V J)X}J)JW + (\nabla_{JW}J)(\nabla_V J)X, K(Z,Y)> +$$

$$+ <(\nabla_{(\nabla_V J)Z}J)JY - (\nabla_{JY}J)(\nabla_V J)Z, K(W,X)> -$$

$$- <(\nabla_{(\nabla_V J)Y}J)JZ + (\nabla_{JZ}J)(\nabla_V J)Y, K(W,X)>\}$$

Puesto que M es una AK-variedad

$$- \frac{1}{2}<(\nabla_V J)X, J(\nabla_{K(Z,Y)}J)W> = - \frac{1}{2}<K(Z,Y), (\nabla_{JW}J)(\nabla_V J)X> +$$

$$+ \frac{1}{2}<K(Z,Y), (\nabla_{(\nabla_V J)X}J)JW>$$

y procediendo de la misma manera sobre los términos

$- \frac{1}{2}<J(\nabla_V J)W, (\nabla_{K(Z,Y)}J)X>$; $- \frac{1}{2}<J(\nabla_V J)Z, (\nabla_{K(W,X)}J)Y>$ y

$<J(\nabla_V J)Y, (\nabla_{K(W,X)}J)Z>$, (2.33) puede escribirse

$$(\nabla_V R)_{WXYZ} + (\nabla_V R)_{JWJXJYJZ} = (\nabla_V R)_{WXJYJZ} + (\nabla_V R)_{JWJXYZ} +$$

$$+ \frac{1}{2}\{<J(\nabla_V J)K(Z,Y), (\nabla_X J)W> - <J(\nabla_V J)K(Z,Y), (\nabla_W J)X> +$$

$$+ <J(\nabla_V J)K(W,X), (\nabla_Y J)Z> - <J(\nabla_V J)K(W,X), (\nabla_Z J)Y>\} =$$

$$= (\nabla_V R)_{WXJYJZ} + (\nabla_V R)_{JWJXYZ} +$$

$$+ \frac{1}{2}\{<J(\nabla_V J)K(Z,Y), K(X,W)> + <J(\nabla_V J)K(W,X), K(Y,Z)>\}$$

§3.- *Curvaturas de Ricci en las AK_2-variedades*

Para las variedades casi-hermíticas, existen dos contracciones útiles del tensor curvatura. Sea $\{E_1,\dots,E_{2n}\}$ una referencia local. Se definen las transformaciones lineales R y R* por

$$1)\ \langle RX,Y\rangle = \sum_{i=1}^{2n} R_{XE_iYE_i}$$

$$2)\ \langle R^*X,Y\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} R_{XJYE_iJE_i} \qquad (3.1)$$

para todo $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

Obsérvese que $\langle RX,Y\rangle$ es la curvatura de Ricci ordinaria de M, se define R* como la * curvatura de Ricci.

PROPOSICION III.3.1.

Sea M una AH_3-variedad entonces

1) $R\cdot J = J.R$

2) $R^*.J = J.R^*$

Demostración.-

$$\langle RJX,Y\rangle = \sum_{i=1}^{2n} R_{JXE_iYE_i} = \sum_{i=1}^{n}(R_{JXE_iYE_i} + R_{JXJE_iYJE_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(R_{JXE_iYE_i} - R_{XE_iJYE_i})$$

por otra parte

$$\langle JRX,Y\rangle = -\langle RX,JY\rangle = -\sum_{i=1}^{2n} R_{XE_iJYE_i} =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} (R_{XE_iJYE_i} + R_{XJE_iJYJE_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-R_{XE_iJYE_i} + R_{JXE_iYE_i})$$

De manera análoga, se demuestra 2).

PROPOSICION III.3.2.

Sea M una QK_2-variedad. Entonces para todo $X, Y \varepsilon X(M)$,

$$\langle (R-R^*)X, Y\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \langle (\nabla_{K(X,E_i)} J)Y, E_i\rangle \qquad (3.3)$$

Demostración.-

Se sabe que

$$\langle RX, Y\rangle = \sum_{i=1}^{2n} R_{XE_iYE_i}$$

$$\langle R^*X, Y\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} R_{XJYE_iJE_i} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} (-R_{XJE_iJYE_i} + R_{XE_iJYJE_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} R_{XE_iJYJE_i}$$

La proposición se sigue ahora de manera inmediata.

COROLARIO III.3.3.

Con las mismas hipótesis de la proposición III.3.2. Si M es una AK_2-variedad, se tiene

$$<(R-R^*)X,Y> = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} <K(X,E_i),K(E_i,Y)> \tag{3.4}$$

La demostración es inmediata a partir de (2.17) y (3.3).

La curvatura de Ricci y la * curvatura de Ricci, permiten definir dos 2-formas del tipo (1,1) las cuales se representarán por

1) $\alpha(X,Y) = <RJX,Y> = \sum_{i=1}^{2n} R_{JXE_iYE_i}$

2) $\beta(X,Y) = <R^*JX,Y> = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} R_{JYE_iJE_i} = \sum_{i=1}^{2n} R_{XE_iYJE_i}$

PROPOSICION III.3.4.

Sea M una AK_2-variedad, si $Y\varepsilon X(M)$ entonces

$$\sum_{i=1}^{2n} (\nabla^2_{E_iE_i} J)Y = 2(R-R^*)JY + \sum_{i=1}^{n} \{(J(\nabla_{E_i} J)(\nabla_{E_i} J)Y + J(\nabla_{K(Y,E_i)}J)E_i\} \tag{3.6}$$

Demostración.-

Por (2.23)

$$\sum_{i=1}^{2n} <(\nabla^2_{E_iE_i} J)Y,Z> = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \{-<J(\nabla_{E_i} J)Z,(\nabla_{E_i} J)Y> + <J(\nabla_{E_i} J)Y,(\nabla_{E_i} J)Z> + <J(\nabla_{E_i} J)E_i,(\nabla_Y J)Z> - <J(\nabla_{E_i} J)E_i,(\nabla_Z J)Y>\}$$

Utilizando el hecho que $\{E_i\}$ es una J-base, los dos últimos términos son nulos. Así,

$$\sum_{i=1}^{2n} <(\nabla^2_{E_i E_i} J)Y,Z> = \sum_{i=1}^{2n} <J(\nabla_{E_i} J)Y,(\nabla_{E_i} J)Z> =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} <J(\nabla_{E_i} J)Y,(\nabla_{E_i} J)Z> \qquad (3.7)$$

Por (3.4)

$$<(R-R^*)JY,Z> = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \{<(\nabla_{JY}J)E_i,(\nabla_{E_i} J)Z> -$$

$$- <(\nabla_{JY}J)E_i,(\nabla_Z J)E_i> +$$

$$+ <(\nabla_{E_i} J)JY,(\nabla_Z J)E_i> -$$

$$- <(\nabla_{E_i} J)JY,(\nabla_{E_i} J)Z>\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \{-<J(\nabla_Y J)E_i,(\nabla_{E_i} J)Z> +$$

$$+ <JK(Y,E_i),(\nabla_Z J)E_i> +$$

$$+ <J(\nabla_{E_i} J)Y,(\nabla_{E_i} J)Z>\} \qquad (3.8)$$

Combinando (3.7) con (3.8)

$$<(R-R^*)JY,Z> = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} <(\nabla^2_{E_i E_i} J)Y,Z> -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \{<J(\nabla_{E_i} J)(\nabla_Y J)E_i,Z> -$$

$$- \langle JK(Y,E_i),(\nabla_Z J)E_i\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \langle (\nabla^2_{E_iE_i} J)Y,Z\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \{\langle J(\nabla_{E_i} J)(\nabla_Y J)E_i,Z\rangle +$$

$$+ \langle Z,(\nabla_{E_i} J)JK(Y,E_i)\rangle +$$

$$+ \langle E_i,(\nabla_{JK(Y,E_i)} J)Z\rangle\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} \langle (\nabla^2_{E_iE_i} J)Y,Z\rangle -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \langle J(\nabla_{E_i} J)(\nabla_Y J)E_i,Z\rangle -$$

$$- \langle J(\nabla_{E_i} J)(\nabla_Y J)E_i,Z\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_{E_i} J)(\nabla_{E_i} J)Y,Z\rangle +$$

$$+ \langle J(\nabla_{K(Y,E_i)} J)E_i,Z\rangle\}$$

PROPOSICION III.3.5.

Sea M una AK_2-variedad. Entonces para todo $W,X,Y\in\mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla^2_{WX} J)Y = \frac{1}{2} J\{(\nabla_W J)(\nabla_X J)Y + (\nabla_X J)(\nabla_W J)Y +$$

$$+ (\nabla_{(\nabla_W J)X} J)Y\} \qquad (3.9)$$

Demostración.-

Por (2.23), para todo $Z\varepsilon\mathfrak{X}(M)$,

$$<(\nabla^2_{WX}J)Y,Z> = \frac{1}{2}\{<J(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> - <J(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> +$$

$$+ <J(\nabla_W J)X,(\nabla_Y J)Z> + <(\nabla_Y J)J(\nabla_W J)X,Z> +$$

$$+ <(\nabla_{J(\nabla_W J)X}J)Z,Y>\}$$

de donde se sigue el resultado.

COROLARIO III.3.6.

Con las hipótesis de la proposición III.3.5, si $\{E_i\}$ es una referencia local, para todo $Y\varepsilon\mathfrak{X}(M)$,

$$\sum_{i=1}^{2n}(\nabla^2_{E_iE_i}J)Y = 2\sum_{i=1}^{n}J(\nabla_{E_i}J)(\nabla_{E_i}J)Y \tag{3.10}$$

La demostración es inmediata a partir de (3.9) y utilizando el hecho de que $\{E_i\}$ es una J-base.

PROPOSICION III.3.7.

Sea M una AK_2-variedad. Entonces para todo $X\varepsilon\mathfrak{X}(M)$,

$$(R-R^*)X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{K(E_i,X)}J)E_i \tag{3.11}$$

La demostración se sigue de (3.4).

TEOREMA III.3.8.

Sea M una AK_2-variedad, entonces para todo $X,Y,U\in\mathfrak{X}(M)$,

$$1)\quad 2<\nabla_U(R-R^*)X,Y> = <(R-R^*)X,(\nabla_{JU}J)Y> + <(R-R^*)Y,(\nabla_{JU}J)X>$$

$$2)\quad \nabla_U(R-R^*)X + \nabla_{JU}(R-R^*)JX = 0 \qquad (3.12)$$

Demostración.-

Tomando en (3.3) Y por X

$$2<(R-R^*)X,X> = \sum_{i=1}^{2n} <(\nabla_{K(X,E_i)}J)X,E_i>$$

Operando

$$2<(R-R^*)X,X> = -\sum_{i=1}^{2n}\{<(\nabla_{E_i}J)K(X,E_i),X> + <(\nabla_X J)E_i,K(X,E_i)>\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}\{<(\nabla_{E_i}J)X,K(X,E_i)> - <(\nabla_X J)E_i,K(X,E_i)>\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} <K(E_i,X),K(X,E_i)>$$

de donde

$$2<(R-R^*)X,X> = -\sum_{i=1}^{2n} ||K(X,E_i)||^2 \qquad (3.13)$$

Derivando ahora en (3.13),

$$<\nabla_U(R-R^*)X,X> = -\sum_{i=1}^{2n} <(\nabla_U K)(X,E_i),K(X,E_i)>$$

Por (2.21),

$$<\nabla_U(R-R^*)X,X> = \sum_{i=1}^{2n} (\nabla^2 J)(U,K(X,E_i),X,E_i)$$

y por (2.23)

$$\begin{aligned}2<\nabla_U(R-R^*)X,X> = \sum_{i=1}^{2n} \{&<J(\nabla_U J)X,(\nabla_{K(X,E_i)}J)E_i> -\\ &- <J(\nabla_U J)E_i,(\nabla_{K(X,E_i)}J)X> +\\ &+ <J(\nabla_U J)K(X,E_i),(\nabla_X J)E_i> -\\ &- <J(\nabla_U J)K(X,E_i),(\nabla_{E_i}J)X>\} =\\ = \sum_{i=1}^{2n} \{&<J(\nabla_U J)X,(\nabla_{K(X,E_i)}J)E_i> -\\ &- <J(\nabla_U J)E_i,(\nabla_{K(X,E_i)}J)X>\}\end{aligned}$$

Es preciso ver que

$$-\sum_{i=1}^{2n} <J(\nabla_U J)E_i,(\nabla_{K(X,E_i)}J)X> = 0$$

en efecto

$$-\sum_{i=1}^{2n} <J(\nabla_U J)E_i,(\nabla_{K(X,E_i)}J)X> =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2n} <(\nabla_{K(X,E_i)}J)(\nabla_{JU}J)E_i,X> =$$

$$= - \sum_{i=1}^{2n} <K(X,E_i),E_k><(\nabla_{E_k} J)(\nabla_{JU}J)E_i,X>$$

Pero

$$<K(X,E_i),E_k> = <(\nabla_X J)E_i,E_k> - <(\nabla_{E_i} J)X,E_k> =$$

$$= - <(\nabla_{E_k} J)X,E_i> - <(\nabla_{E_i} J)E_k,X> -$$

$$- <(\nabla_{E_i} J)X,E_k> = <(\nabla_{E_k} J)E_i,X>$$

y al sumar en la J-base, dicha expresión es nula. Así,

$$2<\nabla_U(R-R^*)X,X> = \sum_{i=1}^{2n} <(\nabla_{K(X,E_i)}J)(\nabla_{JU}J)X,E_i>$$

y por (3.3)

$$<\nabla_U(R-R^*)X,X> = <(R-R^*)X,(\nabla_{JU}J)X>$$

Tomando ahora X + Y por X, se sigue 1).

Sustituyendo en 1) JU por U y JX por X,

$$2<\nabla_{JU}(R-R^*)JX,Y> = - <(R-R^*)JX,(\nabla_U J)Y> -$$

$$- <(R-R^*)Y,(\nabla_U J)JX>$$

Sumando con 1) se sigue 2).

§4.- *Tensor curvatura característico en las AK_2-variedades.*

Una conexión particularmente interesante en las AH-variedades está definida por

$$D_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J\nabla_X JY)$$

para todo $X,Y \varepsilon \mathfrak{X}(M)$. Se prueba fácilmente que $(D_X J)Y = 0$. Sean

$$S_{WX} = D_{[W,X]} - [D_W, D_X] \quad y \quad S_{WXYZ} = \langle S_{WX}Y, Z\rangle$$

Según {13},

$$\begin{aligned} S_{WXYZ} &= \frac{1}{2} R_{WXYZ} + \frac{1}{2} R_{WXJYJZ} + \\ &+ \frac{1}{4}\langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle - \\ &- \frac{1}{4}\langle(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y\rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para todo $W,X,Y,Z \varepsilon \mathfrak{X}(M)$.

Siendo M una QK_2-variedad, por (2.1), (4.1) puede escribirse

$$\begin{aligned} S_{WXYZ} &= R_{WXYZ} - \frac{1}{4}\{\langle(\nabla_{K(W,X)} J)Y, Z\rangle - \\ &- \langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle + \langle(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y\rangle\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

y cuando M es una AK_2-variedad, (4.2) puede escribirse

$$\begin{aligned} S_{WXYZ} &= R_{WXYZ} - \frac{1}{4}\{\langle K(W,X), K(Z,Y)\rangle - \\ &- \langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle + \langle(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y\rangle\} \end{aligned}$$

LEMA III.4.1.

Sea M una QK_2-variedad. Entonces para todo $W,X,Y,Z \varepsilon \mathfrak{X}(M)$,

1) $S_{WXYZ} = - S_{XWYZ} = - S_{WXZY} = S_{YZWX}$

2) $S_{WXYZ} = S_{WXJYJZ} = S_{JWJXYZ} = S_{JWJXJYJZ}$

3)
$$\underset{W,X,Y}{\mathfrak{S}} S_{WXYZ} = - \frac{1}{4} \underset{W,X,Y}{\mathfrak{S}} \{<(\nabla_{K(W,X)}J)Y,Z> + $$
$$+ <K(W,X),(\nabla_Y J)Z>\} \qquad (4.4)$$

Demostración.-

(4.4), 1) es inmediata a partir de la definición de S. (4.4), 2) se sigue del hecho que R es un tensor J-invariante. Para probar (4.4), 3) se permuta cíclicamente en (4.2), obteniéndose.

$$\underset{W,X,Y}{\mathfrak{S}} S_{WXYZ} = - \frac{1}{4}\{<(\nabla_{K(W,X)}J)Y,Z> + <(\nabla_{K(Y,W)}J)X,Z> +$$
$$+ <(\nabla_{K(X,Y)}J)W,Z> - <(\nabla_X J)Z,K(W,Y)> -$$
$$- <(\nabla_W J)Z,K(Y,X)> - <(\nabla_Y J)Z,K(X,W)>\}$$

(4.4), 3) se sigue ahora de manera inmediata.

COROLARIO III.4.2.

Sea M una AK_2-variedad. Para todo $W,X,Y,Z \varepsilon \mathfrak{X}(M)$,

$$\underset{W,X,Y}{\mathfrak{S}} S_{WXYZ} = - \frac{1}{4} \underset{W,X,Y}{\mathfrak{S}} <K(W,X),(\nabla_Z J)Y> \qquad (4.5)$$

La demostración es inmediata a partir de (4.4) y del hecho que es una AK_2-variedad.

PROPOSICION III.4.3.

Sea M una AK_2-variedad. Entonces para todo $W,X,Y,Z\varepsilon\mathfrak{X}(M)$,

$$S_{WXYZ} = \frac{1}{4}\cdot\{3R_{WXYZ} + 2R_{WXJYJZ} + R_{WYJZJX} + R_{WZJXJY}\} +$$

$$+ \frac{1}{4}\{<(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> - <(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> -$$

$$- \frac{1}{2}<K(W,Y),K(X,Z)> - \frac{1}{2}<K(W,Z),K(Y,X)>\} \qquad (4.6)$$

Demostración.-

Por (2.17),

$$\frac{1}{4}\{3R_{WXYZ} + 2R_{WXJYJZ} + R_{WYJZJX} + R_{WZJXJY}\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{3R_{WXYZ} + R_{WXYZ} + R_{WXYZ} + R_{WYZX} + R_{WZXY} - <K(W,X),K(Z,Y)> -$$

$$- \frac{1}{2}<K(W,Y),K(X,Z)> - \frac{1}{2}<K(W,X),K(Y,X)>\} =$$

$$= R_{WXYZ} - \frac{1}{4}\{<K(W,X),K(Z,Y)> +$$

$$+ \frac{1}{2}<K(W,Y),K(X,Z)> + \frac{1}{2}<K(W,Z),K(Y,X)>\} =$$

$$= S_{WXYZ} - \frac{1}{4}\{<(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> - <(\nabla_W J)Z,(\nabla_X J)Y> +$$

$$+ \frac{1}{2}<K(W,Y),K(X,Z)> + \frac{1}{2}<K(W,Z),K(Y,X)>\}$$

PROPOSICION III.4.4.

Sea M una AK_2-variedad. $\{E_i\}$ una referencia local de campos. Entonces para todo $W,X\varepsilon\mathfrak{X}(M)$,

$$1)\quad \sum_{i=1}^{2n} S_{WE_iXE_i} = \frac{1}{2}\{<RW,X> + <R^*W,X> - \sum_{i=1}^{n} <(\nabla_W J)E_i, (\nabla_{E_i} J)X>\}$$

$$2)\quad \sum_{i=1}^{2n} S_{WE_iXE_i} = \frac{1}{4}\{3<RW,X> + <R^*W,X> - 2\sum_{i=1}^{n} (<(\nabla_W J)E_i, (\nabla_{E_i} J)X> - <K(W,E_i),K(E_i,X)>)\} \qquad (4.7)$$

Demostración.-

Por (4.3)

$$\sum_{i=1}^{2n} S_{WE_iXE_i} = \sum_{i=1}^{2n} R_{WE_iXE_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\{<(\nabla_W J)E_i,(\nabla_{E_i} J)X> + <K(W,E_i),K(E_i,X)>\}$$

Por (3.1),

$$<RW,X> + <R^*W,X> = \sum_{i=1}^{2n}\{R_{WE_iXE_i} + \frac{1}{2} R_{WJXE_iJE_i}\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}\{R_{WE_iXE_i} + \frac{1}{2}(R_{WE_iJXJE_i} - R_{WJE_iJXE_i})\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}(R_{WE_iXE_i} + R_{WE_iJXJE_i})$$

Por (2.17)

$$<RW,X> + <R^*W,X> = \sum_{i=1}^{2n}(2R_{WE_iXE_i} - \frac{1}{2}<K(W,E_i),K(E_i,X)>)$$

de donde se sigue (4.7), 2).

PROPOSICION III.4.5.

Sea M una AK_2-variedad, $\{E_i\}$ una referencia local de campos. Entonces para todo $W,X\in X(M)$,

$$\sum_{i=1}^{2n} S_{WJXE_iJE_i} = \frac{1}{2}(5<R^*W,X> - <RW,X> + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{<K(W,E_i),K(E_i,X)> - <(\nabla_W J)E_i,(\nabla_X J)E_i>\} \tag{4.8}$$

Demostración.-

Según (4.3)

$$\sum_{i=1}^{2n} S_{WJXE_iJE_i} = \sum_{i=1}^{2n} R_{WJXE_iJE_i} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n}\{<K(W,JX),K(JE_i,E_i)> - <(\nabla_W J)E_i,(\nabla_{JX}J)JE_i> + <(\nabla_W J)JE_i,(\nabla_{JX}J)E_i>\} =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{2n} R_{WE_iJXJE_i} - \sum_{i=1}^{n} <(\nabla_W J)E_i,(\nabla_X J)E_i> \tag{4.9}$$

Utilizando (3.1),

$$5<R^*W,X> - <RW,X> = \sum_{i=1}^{2n}(\frac{5}{2}R_{WJXE_iJE_i} - R_{WE_iXE_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}(5R_{WE_iJXJE_i} - R_{WE_iXE_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}(4R_{WE_iJXJE_i} - \frac{1}{2}<K(W,E_i),K(E_i,X)>) \tag{4.10}$$

El resultado se sigue de (4.9) y (4.10).

TEOREMA III.4.6.

Sea M una AK_2-variedad. Entonces para todo $W,V,X,Y,Z\varepsilon\mathfrak{X}(M)$,

$$\underset{V,W,X}{\mathfrak{S}} (\nabla_V S)_{WXYZ} = \frac{1}{8} \underset{V,W,X}{\mathfrak{S}} \{<JK(V,W),(\nabla_{K(Z,Y)}J)X>\} \qquad (4.11)$$

Demostración.-

Derivando respecto a V en (4.3), combinando con (2.21) y teniendo en cuenta la definición de K,

$$\begin{aligned}(\nabla_V S)_{WXYZ} = (\nabla_V R)_{WXYZ} &- \frac{1}{4}\{<(\nabla_V K)(W,X),K(Z,Y)> + \\ &+ <K(W,X),(\nabla_V K)(Z,Y)> - \\ &- <(\nabla^2_{VW}J)Y,(\nabla_X J)Z> - \\ &- <(\nabla^2_{VX}J)Z,(\nabla_W J)Y> + \\ &+ <(\nabla^2_{VW}J)Z,(\nabla_X J)Y> + \\ &+ <(\nabla^2_{VX}J)Y,(\nabla_W J)Z>\} = \\ = (\nabla_V R)_{WXYZ} &- \frac{1}{4}\{(\nabla^2 J)(V,(\nabla_Z J)Y,X,W) - \\ &- (\nabla^2 J)(V,(\nabla_Y J)Z,X,W) + \\ &+ (\nabla^2 J)(V,(\nabla_W J)X,Y,Z) -\end{aligned}$$

$$- (\nabla^2 J)(V,(\nabla_X J)W,Y,Z) -$$

$$- (\nabla^2 J)(V,X,Z,(\nabla_W J)Y) -$$

$$- (\nabla^2 J)(V,W,Y,(\nabla_X J)Z) +$$

$$+ (\nabla^2 J)(V,W,Z,(\nabla_X J)Y) +$$

$$+ (\nabla^2 J)(V,X,Y,(\nabla_W J)Z)\}$$

Teniendo en cuenta (2.23),

$$(\nabla_V S)_{WXYZ} = (\nabla_V R)_{WXYZ} +$$

$$+ \frac{1}{8}\{<J(\nabla_V J)W,(\nabla_{(\nabla_Z J)Y}J)X> - <J(\nabla_V J)X,(\nabla_{(\nabla_Z J)Y}J)W> -$$

$$- <J(\nabla_V J)W,(\nabla_{(\nabla_Y J)Z}J)X> + <J(\nabla_V J)X,(\nabla_{(\nabla_Y J)Z}J)W> +$$

$$+ <J(\nabla_V J)Z,(\nabla_{(\nabla_W J)X}J)Y> - <J(\nabla_V J)Y,(\nabla_{(\nabla_W J)X}J)Z> -$$

$$- <J(\nabla_V J)Z,(\nabla_{(\nabla_X J)W}J)Y> + <J(\nabla_V J)Y,(\nabla_{(\nabla_X J)W}J)Z> +$$

$$+ <J(\nabla_V J)Y,(\nabla_W J)(\nabla_X J)Z> - <J(\nabla_V J)Z,(\nabla_W J)(\nabla_X J)Y> +$$

$$+ <J(\nabla_V J)W,(\nabla_Y J)(\nabla_X J)Z> - <J(\nabla_V J)W,(\nabla_{(\nabla_X J)Z}J)Y> -$$

$$- <J(\nabla_V J)W,(\nabla_Z J)(\nabla_X J)Y> + <J(\nabla_V J)W,(\nabla_{(\nabla_X J)Y}J)Z> +$$

$$+ <J(\nabla_V J)Z,(\nabla_X J)(\nabla_W J)Y> - <J(\nabla_V J)Y,(\nabla_X J)(\nabla_W J)Z> +$$

$$+ <J(\nabla_V J)X,(\nabla_Z J)(\nabla_W J)Y> - <J(\nabla_V J)X,(\nabla_{(\nabla_W J)Y} J)Z> -$$

$$- <J(\nabla_V J)X,(\nabla_Y J)(\nabla_W J)Z> + <J(\nabla_V J)X,(\nabla_{(\nabla_W J)Z} J)Y>\} \quad (4.12).$$

Haciendo la permutación cíclica en (4.12) sobre V,W,X, teniendo en cuenta que $<(\nabla J)\cdot,*> = -<(\nabla J)*,\cdot>$ y la segunda identidad de Bianchi para la conexión métrica, se deduce

$$8 \underset{V,W,X}{\mathfrak{S}} (\nabla_V S)_{WXYZ} = \underset{V,W,X}{\mathfrak{S}} \{<JK(V,W),(\nabla_{K(Z,Y)} J)X> +$$

$$+ <J(\nabla_X J)Z,(\nabla_{K(V,W)} J)Y> - <J(\nabla_X J)Y,(\nabla_{K(V,W)} J)Z> -$$

$$- <JK(V,W),((\nabla_{(\nabla_X J)Z} J)Y + (\nabla_Z J)(\nabla_X J)Y -$$

$$- (\nabla_{(\nabla_X J)Y} J)Z - (\nabla_Y J)(\nabla_X J)Z)>\}$$

Teniendo en cuenta que M es una AK-variedad, se sigue (4.11).

COROLARIO III.4.7.

Con las mismas hipótesis del teorema III.4.6,

$$\underset{V,W,X}{\mathfrak{S}} (\nabla_V S)_{WXYJY} = 0 \qquad (4.13)$$

Para la demostración, basta tomar en (4.11) JY por Z.

COROLARIO III.4.8.

Con las mismas hipótesis del teorema III.4.6,

$$(\nabla_V S)_{WXYZ} + (\nabla_V S)_{JWJXJYJZ} =$$

$$= (\nabla_V R)_{WXYZ} + (\nabla_V R)_{JWJXJYJZ} \qquad (4.14)$$

Para su demostración, basta tomar en (4.12) JW,JX,JY,JZ por W, X,Y,Z respectivamente, y combinar con (4.12).

Observación 5.-

Las expresiones (4.13) y (4.14) son formalmente idénticas a las obtenidas por A. Gray para las NK-variedades {15}.

CAPITULO IV

DESCOMPOSICION DE LAS AK_2-VARIEDADES

§1.- *Teoremas de Integrabilidad en las AK_2-variedades*

Se definen las distribuciones K_d, K_d^* y $\bar{K}_d$ sobre una variedad casi-hermítica M. Para todo $p \in M$, se definen los subespacios $K_d(p)$, $K_d^*(p)$ y $\bar{K}_d(p)$ del siguiente modo

$$K_d(p) = \{ X \in T_p(M) \ / \ (\nabla_X J)Y = 0 \text{ para todo } Y \in T_p(M) \}$$

$$K_d^*(p) = \{ X \in T_p(M) \ / \ (\nabla_Y J)X = 0 \text{ para todo } Y \in T_p(M) \}$$

$$\bar{K}_d(p) = \{ X \in T_p(M) \ / \ K(X,Y) = 0 \text{ para todo } Y \in T_p(M) \}$$

Es sabido que la distribución $p \longrightarrow K_d(p)$ se conoce con el nombre de distribución de Kaehler.

TEOREMA IV.1.1.

Sea M una QK_2-variedad, entonces la distribución $\bar{K}_d(p)$ es integrable, sobre cualquier abierto donde dim $\bar{K}_d(p)$ sea constante. Además todas las subvariedades integrales son kaehlerianas.

Demostración.-

Para todo $W, X \in \bar{K}_d$

$$(\nabla_W J)Y = (\nabla_Y J)W \tag{1.1}$$

$$(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X \tag{1.2}$$

Se deriva (1.1) respecto a X y (1.2) respecto a W.

$$(\nabla^2_{XW} J)Y + (\nabla_{\nabla_X W} J)Y + (\nabla_W J)\nabla_X Y =$$

$$= (\nabla^2_{XY} J)W + (\nabla_{\nabla_X Y} J)W + (\nabla_Y J)\nabla_X W \tag{1.3}$$

$$(\nabla^2_{WX} J)Y + (\nabla_{\nabla_W X} J)Y + (\nabla_X J)\nabla_W Y =$$

$$= (\nabla^2_{WY} J)X + (\nabla_{\nabla_W Y} J)X + (\nabla_Y J)\nabla_W X \tag{1.4}$$

Restando de (1.4), (1.3)

$$(\nabla_{[W,X]} J)Y + (\nabla^2_{WX} J)Y - (\nabla^2_{XW} J)Y =$$

$$= (\nabla_Y J)[W,X] + (\nabla^2_{WY} J)X - (\nabla^2_{XY} J)W \tag{1.5}$$

Por (2.5), (i) y (2.1) del Capítulo III

$$(\nabla^2 J)(W,X,Y,Z) - (\nabla^2 J)(X,W,Y,Z) = 0$$

para todo Z. Análogamente

$$(\nabla^2 J)(W,Y,X,Z) = (\nabla^2 J)(Y,W,X,Z)$$

y

$$(\nabla^2 J)(X,Y,W,Z) = (\nabla^2 J)(Y,X,W,Z)$$

para todo Z. Además,

$$(\nabla^2_{YW}J)X - (\nabla^2_{YX}J)W = (\nabla_Y K)(W,X) =$$

$$= \nabla_Y(K(W,X)) - K(\nabla_Y W,X) - K(W,\nabla_Y X) = 0$$

Entonces de (1.5) se sigue la primera parte del teorema. Para la segunda se considera $W,X\varepsilon\bar{K}_d$ y entonces para todo Y, es fácil demostrar que

$$<(\nabla_W J)X,Y> = 0$$

LEMA IV.1.2.

Sea M una AK-variedad, entonces para todo $W,X\varepsilon\bar{K}_d$

$$<(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> = 0 \qquad (1.6)$$

para todo $Y,Z\varepsilon X(M)$.

Demostración.-

Por ser $W,X\varepsilon\bar{K}_d$

$$(\nabla_W J)Y = (\nabla_Y J)W$$

y

$$(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X$$

para todo $Y\varepsilon X(M)$.

Así, teniendo en cuenta que M es una AK-variedad, se tiene

$$<(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> =$$

$$= - <(\nabla_{(\nabla_X J)Z}J)W,Y> - <(\nabla_Y J)(\nabla_X J)Z,W> =$$

$$= - <(\nabla_W J)(\nabla_X J)Z,Y> - <(\nabla_Y J)(\nabla_X J)Z,W> =$$

$$= <(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z> + <(\nabla_W J)Y,(\nabla_X J)Z>$$

de donde se sigue el resultado.

COROLARIO IV.1.3.

Sea M una AK-variedad, entonces $\bar{K}_d \subset K_d$

La demostración se sigue inmediatamente de la fórmula (1.6) haciendo $X = W$ y $Z = Y$.

PROPOSICION IV.1.4.

Sea M una AK-variedad, entonces $\bar{K}_d = K_d^*$

Demostración.-

Es fácil ver en primer lugar que $\bar{K}_d = K_d \cap K_d^*$; en efecto, si $X \varepsilon K_d \cap K_d^*$, es inmediato que $X \varepsilon \bar{K}_d$. Reciprocamente, si $X \varepsilon \bar{K}_d$, por el corolario IV.1.3, $X \varepsilon K_d$ y por tanto $X \varepsilon K_d^*$.

Así, ahora es suficiente demostrar que $K_d^* \subset K_d$

Si $X \varepsilon K_d^*$ $<(\nabla_Y J)X,Z> = 0$ para todo $Y,Z \varepsilon X(M)$. Pero por ser M una AK-variedad

$$<(\nabla_Z J)X,Y> + <(\nabla_X J)Y,Z> = 0$$

de donde $<(\nabla_X J)Y,Z> = 0$ y se sigue el resultado.

§2.- *Descomposición de una AK_2-variedad.*

Sea M una AK_2-variedad. Se dice que es una AK_2-variedad estricta si para todo $m\varepsilon M$ y para todo $X\varepsilon M_m$ con $X \neq 0$, se tiene

$$(\nabla_X J) - (\nabla J)X \neq 0$$

El proposito de este epígrafe, es el de descomponer toda AK_2-variedad, como producto de una K-variedad y una AK_2-variedad estricta.

TEOREMA IV.2.1.

Sea M una AK_2-variedad y $m\in M$. Se representarán por $S_1(m),\dots$ $\dots,S_s(m)$ los subespacios propios de $R-R^*$, correspondientes a los auto-vectores no nulos de $R-R^*$ y por $H(m)$ el núcleo de $R-R^*$.

Entonces $H(m)$ coincide con $\bar{K}_d(m)$. La distribución $H(m)$ es integrable sobre cualquier abierto de M, donde dim $H(m)$ sea constante. Las subvariedades integrales son kaehlerianas. Además, el tangente M_m a M en m se puede descomponer $M_m = H(m) \oplus S_1(m) \oplus \dots$ $\dots \oplus S_s(m)$.

Demostración.-

La primera parte del teorema, se sigue inmediatamente de la fórmula (3.4) del Capítulo III tomando $Y = X$.

La segunda y tercera, se siguen de la primera y del teorema IV.1.1.

La última parte, es un hecho bien conocido del álgebra lineal.

Se considera ahora que M es una AK_2-variedad simplemente conexa. Sea $M = M^0 \times M^1 \times \ldots \times M^l$ la descomposición de De Rham de M, donde M^0 representa un espacio euclídeo y $M^1, \ldots, M^l$ son variedades riemanianas irreducibles.

Partiendo de dicha descomposición se construye una nueva $M = M^k \times M^s$, donde M^k representa el producto de todos los factores M^i con la propiedad $(\nabla_X J) - (\nabla J)X = 0$ para todos los $X \in \mathfrak{X}(M^i)$.

Entonces M^s es el producto de los restantes factores.

Se hace la hipótesis adicional (*): "$R-R^*$ es paralelo sobre M". Puesto que las AK_2-variedades verifican

$$(\nabla_U (R-R^*))X + (\nabla_{JU}(R-R^*))JX = 0$$

para todo $U, X \in \mathfrak{X}(M)$, (*) es bastante razonable.

LEMA IV.2.2.

Sobre cada factor M^i de la descomposición de De Rham de M, existe una constante λ_i tal que $(R-R^*)X = \lambda_i X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M^i)$.

Demostración.-

El grupo de holonomía de M actua irreduciblemente sobre cada espacio tangente M_p^i. Por ser la imagen de un homomorfismo de grupos, es un subgrupo normal y conmuta con R-R*. Así,

$$R-R^* = \lambda_i(p)I: M_p^i \longrightarrow M_p^i$$

al ser R-R*, paralelo y por el lema de Schur se sigue que λ_i es constante, de donde se sigue el resultado.

LEMA IV.2.3.

$M^i \subset M^k$ si y solamente si $\lambda_i = 0$.

Demostración.-

Si $M^i \subset M^k$, entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M^i)$ $(\nabla_X J) - (\nabla J)X = 0$ y por la fórmula (3.11) del Capítulo III se sigue que $(R-R^*)X = 0$.

Recíprocamente, si $(R-R^*)X = 0$, entonces por la fórmula (3.13) del Capítulo III, se sigue que $K(X,E_j) = 0$ y $M^i \subset M^k$.

LEMA IV.2.4.

Sea $m \in M^k$. Entonces $M_m^k = H(m)$.

Demostración.-

Sea $X = \sum_{i=0}^{l} X_i$, donde X_i es la componente de X en M_m^i.

Si $X \in M_m^k$, entonces

$$(\nabla_X J) - (\nabla J)X = \sum_{M^i \subset M^k} \{(\nabla_{X_i} J) - (\nabla J)X_i\} = 0$$

de donde $X \varepsilon H(m)$.

Recíprocamente, si $X \varepsilon H(m)$, se tiene

$$0 = (R-R^*)X = \sum_{M^i \subset M^s} \lambda_i X_i$$

y por la independencia lineal $\lambda_i = 0$ para $M^i \subset M^s$.

LEMA IV.2.5.

M^k y $M^i \subset M^k$ son subvariedades kaehlerianas de M y M^s es una AK-subvariedad estricta.

Demostración.-

Es inmediato, que tanto M^k, $M^i \subset M^k$ y M^s son subvariedades casi-complejas de M, ya que $(R-R^*).J = J.(R-R^*)$ (Proposición III.3.1).

Entonces todas ellas son automáticamente AK-variedades; en particular M^k y $M^i \subset M^k$ son kaehlerianas.

Que M^s es estricta se sigue del lema IV.2.3.

BIBLIOGRAFIA

{1}.- BARROS M.- NAVEIRA A.M.- VANHECKE L.

Courbures et nombres de Chern, des NK-variétés. (Pendiente de publicación).

{2}.- BARROS M.- NAVEIRA A.M.

Géométrie des AK_2-variétés. (Pendiente de publicación).

{3}.- BARROS M.- NAVEIRA A.M.- RAMIREZ A.

Sobre las estructuras casi-hermíticas de un espacio homogéneo reductivo. (Pendiente de publicación).

{4}.- BISHOP R.L.- GOLBERG S.I.

Some implications of the generalized Gauss-Bonnet theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 112, (1964), 508-535.

{5}.- CHERN S.S.

Complex manifolds without potential theory. *Van Nostrand. Mathematical studies, 1967.*

{6}.- FERNANDEZ M.L.

Estructura y propiedades de las G_1-variedades. *Publ. Dept. Geom. y Top. nº 39. Univ. Santiago de Compostela 1976.*

{7}.- GRAY A.

Minimal varieties and almost Hermitian sub-manifolds. Mich. Math. J. 12, (1965), 273-287.

{8}.- GRAY A.

Some examples of almost Hermitian manifolds. J. of Math. 10, (1966), 353-366.

{9}.- -------

Almost complex sub-manifolds of the six-sphere. Proc. Amer. Math. Soc. 20, (1969), 277-279.

{10}.- -------

Some relations between curvature and characteristic classes. Math. Ann. 184, (1970), 257-267.

{11}.- -------

Nearly Kahler manifolds. J. of Diff. Geometry 4, (1970), 283-309.

{12}.- -------

Rimanian manifolds with goedesic symetries of order 3. J. of Diff. Geometry 7, (1972), 343-369.

{13}.- -------

Curvature Identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds. (Pendiente de publicación).

{14}.- -------

Chern numbers and curvature. (Pendiente de publicación).

{15}.- -------

The structure of Nearly-Kahler manifolds. (Pendiente de publicación).

{16}.- GRAY A.- VANHECKE L.

Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature. (Pendiente de publicación).

{17}.- KOBAYASHI S.- NOMIZU K.

Foundations of Differential Geometry I, II. *Wiley--Interscience, New York, (1963), (1969).*

{18}.- HERVELLA L.- NAVEIRA A.M.

Quasi-Kahler manifolds. (Pendiente de publicación).

{19}.- HERVELLA L.- VIDAL E.

Nouvelles géométries pseudo-Kahleriennes. C.R. Acad. Sc. Paris 283, (1976) 115-118.

{20}.- MILNOR J.W.

Lectures on Morse theory. *Ann. Math. nº 51, Princeton Univ. Press, (1963).*

{21}.- MILNOR J.W.- STASCHEFF J.D.

Characteristic classes. *Ann. of Math. Studies, nº 76 Princeton Univ. Press, New Jersey, (1974).*

{22}.- NAVEIRA A.M.- VANHECKE L.

Two problems for almost Hermitian manifolds. (Pendiente de publicación).

{23}.- SPIVAK M.

Differential Geometry. Vol II, *Brandeis University (1970).*

{24}.- THORPE J.A.

Sectional curvature and characteristic classes. Ann. of Math. 80, (1964), 429-443.

{25}.- THORPE J.A.

Some remarks on the Gauss-Bonnet integral. J. of Math. and Mech. 18, (1969), 779-786.

{26}.- VANHECKE L.

Almost Hermitian manifolds. (Pendiente de publicación).

{27}.- ----------

Some theorems for quasi and nearly Kahler manifolds. Dedicated to Professor Enrico Bompiani. (85 th birthday). (Pendiente de publicación).

{28}.- VIDAL E.- HERVELLA L.

News pseudo-Kahlerian geometries. Coment. Math. Helv. (A aparecer).

{29}.- WARNER F.W.

Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups. *Scott Foresman and Company (1971).*

{30}.- WOLF J.A.

Spaces of constant curvature. *Mc. Graw-Hill, New York (1967).*

{31}.- WOLF J.A.- GRAY A.

Homogenous spaces defined by Lie group automorphismes. I, II. J. Diff. Geometry, 2, (1968), 115-159.

INDICE DE MATERIAS

CAPITULO III

GEOMETRIA DE LAS AK_2-VARIEDADES

CAPITULO IV

DESCOMPOSICION DE LAS AK_2-VARIEDADES