Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

INVARIANTES DE BAER EN UNA CATEGORIA DE KUROSH

JOSE LUIS BUESO MONTERO

Departamento de Algebra y Fundamentos
UNIVERSIDAD DE GRANADA - 1980

JOSE LUIS BUESO MONTERO

INVARIANTES DE BAER EN UNA CATEGORIA DE KUROSH.

Departamento de Algebra y Fundamentos.
Universidad de Granada. 1980.

Memoria realizada para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, realizada bajo la dirección del Profesor A.R-Grandjean L-Valcarcel, Catedrático de Algebra y Director del Departamento de Algebra y Fundamentos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

INDICE

CAPITULO 4. SERIES V-CENTRALES.

CAPITULO 5. EXTENSIONES V-CENTRALES.

INTRODUCCION

Históricamente podemos considerar como punto de partida de la "Teoría de Invariantes de Baer" [1] el descubrimiento por Hopf en "Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe" publicado en Comment. Math.Helv.14 (257-309) 1942, de que si $K \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ es una presentación libre de un grupo G, entonces los grupos $[F,F]/[F,K]$ y $[F,F]\cap K/[F,K]$ son independientes de la presentación. Hopf demuestra que $[F,F]\cap K/[F,K] = H_2(G,Z)$.

En 1963, Fröhlich [13] formula la teoría en algebras asociativas sobre anillos conmutativos. Define al mismo tiempo los invariantes relativos considerando pares de variedades de algebras.

Los invariantes de Baer han sido obtenidos utilizando la técnica de funtores derivados por Fröhlich [12] y MacDonald [41]. El trabajo de Fröhlich ha sido generalizado a una categoria de Hofmann por Lecouturier [33].

En el año 1975, Modi en su Tesis Doctoral, "Simplicial Methods and the Homology of Groups" sobre una categoria de Rinehart obtiene los invariantes de Baer en el caso de grupos.

Furtado, en su Tesis Doctoral [14], define los invariantes en Ω-grupos, siguiendo la linea de Fröhlich [13], y obtiene como caso particular los de MacDonald, sin utilizar la teoría de funtores derivados.

R-Grandjean y Franco en [50], introducen un funtor con valores en Ω-grupos que generaliza el segundo funtor de homología varietal de Stammbach [53].

El objetivo de esta memoria es definir los invariantes de Baer en una categoria, relacionar los introducidos por los diversos autores, y aplicarlos al estudio de series y extensiones en variedades.

La memoria consta de cinco capítulos. Hemos planteado el trabajo en una categoría de Kurosh [30], categoría que incluye todas las estructuras donde han sido estudiados los invariantes. En el primer capítulo se dan una serie de resultados necesarios para el desarrollo del tema. Se demuestran únicamente aquellos que no aparecen en la literartura.

Introducimos en el capítulo segundo un funtor V_1 que llamaremos marginador, a partir del cual se puede obtener el V-centro, que generaliza el concepto de subgrupo marginal de Hall [19]. En (2.1.19) se demuestra que si se toma la variedad de objetos abelianos entonces el funtor V_1 da el conmutador de Livsic-Calenko-Sulgeifer [36]. Este resultado permite generalizar el concepto de morfismo central, tanto de Huq [24], como de Livsic-Sulgeifer-Calenko [36], para una variedad arbitraria. En 2.2 se dan los invariantes de Baer absolutos, utilizando las propiedades del funtor marginador, y se termina el capítulo obteniendo una sucesión exacta decinco términos a partir de una sucesión exacta corta.

El tercer capítulo se dedica a los invariantes de Baer relativos y al estudio de las relaciones existentes entre ellos.En 3.3 siguiendo la línea de [50] se define un funtor que generaliza al segundo funtor de homología varietal y a partir del cual se obtiene en 3.4 una sucesión exacta de cinco términos para dos variedades.Este invariante relativo es el que se utilizará en el resto de la memoria.

En el capítulo cuatro se da el concepto de V-centro (que en el caso de tomar la variedad de objetos abelianos se obtiene el centro de Huq [25]) lo que permite definir las series V-centrales y la V-nilpotencia.Quiero destacar que el resultado fundamental de Stallings [52] , y las generalizaciones dadas por Stammbach [53] y [54] para una variedad arbitraria de grupos, por Tarazona [58] para una variedad de algebras de Lie, por Furtado [14] , [15] y [17] para una variedad de Ω-grupos,y por R-Grandjean y Franco [50] para dos variedades de Ω-grupos, son casos particulares de 4.2 Teorema de series V-centrales.

En el último capítulo se examina la relación entre las extensiones en una variedad $\underline{\underline{V}}$ y las extensiones V-centrales. Si C $\varepsilon \underline{\underline{V}}$, entonces se demuestra en 5.1 que si A es un objeto de la variedad, la clase de las extensiones de C por A en la variedad se convierte en un subconjunto de la clase de las extensiones V-centrales. Se obtiene que si el invariante $\Delta V(A)$ es cero entonces los dos conjuntos coinciden. Utilizando la sucesión de cinco términos de 2.3 y 3.4 se definen extensiones "stem" , "stem cover" y "marginales", estudiandose sus propiedades, en particular en el caso de objetos V-perfectos.

Los resultados de este último capítulo han sido obtenidos partiendo fundamentalmente de los trabajos de Fröhlich [13], Lue [37], [38] y [39] sobre algebras asociativas, Stammbach [53] [54] y [55], Leedham-Green [33] y [34] y Johnson [26] sobre grupos, Knopmacher [27] y [28] y Tarazona [58] sobre algebras no asociativas.

Se termina dando una bibliografía con los libros y trabajos más importantes sobre el tema, bien desde el punto de vista histórico o bien para el desarrollo de esta memoria.

La notación y técnica es la de [45].

Quiero expresar finalmente mi agradecimiento al Prof. R-Grandjean por su orientación y ayuda para la realización de esta memoria, al manifestar éste lo hago extensivo a todos los Pofesores del Departamento de Algebra y Fundamentos de la Universidad de Granada.

1. CATEGORIAS DE KUROSH.

1.1. LEMAS CLASICOS.

(1.1.1) Una categoria de Kurosh es una categoria que verifica los siguientes axiomas:

A.1. Existe objeto cero.

A.2. Todo morfismo admite una factorización:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "f^{I}"] & \\ \bullet \arrow[ur, twoheadrightarrow, "f^{ck}"] \arrow[rr, "f"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

A.3. Para toda familia de objetos existe producto y coproducto.

A.4. Los subobjetos y los cocientes conormales forman un conjunto.

A.5. Sea $m:A'\rightarrowtail A$ un monomorfismo y $e:A\twoheadrightarrow B$ un epimorfismo conormal, entonces:

i) Si m es normal entonces $(em)^{I}$ es normal.

ii) Si $(em)^{I}$ es normal y $e^{k} < m$, entonces m es normal.

(1.1.2) De estos axiomas se deducen las siguientes consecuencias:

i) Los subobjetos de todo objeto forman un reticulo completo.([30] 12.6, p.33).

ii) Todo morfismo tiene nucleo.([6] p.47).

iii) Los subobjetos normales de todo objeto forman un retículo completo. ([57] p.183).

iv) Todo morfismo tiene conucleo. ([24] p.365).

v) El morfismo canónico $x: A*B \longrightarrow A\times B$ es un epimorfismo conormal.([24]p.367).

vi) Si $f = vu$ es un monomorfismo normal y v un monomorfismo entonces u es un monomorfismo normal.([30] 8.3,p.20).

Si $f = vu$ es un epimorfismo conormal y u un epimorfismo entonces v es un epimorfismo conormal.([30] 8.3, p.21).

El producto de dos epimorfismos conormales es epimorfismo conormal.([56] 2.2,p.158).

vii) Existen cuadrados cartesianos.([43] 17.3,p.27).

(1.1.3) Una sucesión vu de dos morfismos

$$\cdot \xrightarrow{u} \cdot \xrightarrow{v} \cdot$$

se llama exacta, si $u^{l} = v^{k}$.

Si u es normal y v conormal la sucesión exacta vu se dice exacta corta.En este caso, $u=v^{k}$ y $v=u^{c}$.

(1.1.4) $v0$ exacta si y solo si v es un monomorfismo.

$0u$ exacta si y solo si u es un epimorfismo conormal.

$0u0$ exacta si y solo si $u=l$.

(1.1.5) Una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{u_{i+1}} \cdot \xrightarrow{u_i} \cdot \xrightarrow{u_{i-1}} \cdots$$

se llama exacta si para todo i, $u_i u_{i+1}$ es exacta y se llacerosucesión si para todo i, $u_i u_{i+1} = 0$.

(1.1.6) En un cuadrado conmutativo $f_1 g_1 = f_2 g_2$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, two heads, "g_1^{ck}"] \arrow[d, two heads, "g_2^{ck}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \cdot \arrow[r, tail, "g_1^{I}"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \cdot \arrow[d, two heads, "f_1^{ck}"] \\
\cdot \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail, "g_2^{I}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & \cdot \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & \cdot \arrow[d, tail, "f_1^{I}"] \\
\cdot \arrow[r, two heads, "f_2^{ck}"'] & \cdot \arrow[r, tail, "f_2^{I}"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

las paralelas medias tienen como punto medio, el punto medio de la diagonal. El cuadrado I es el cuadrado conormal, IV el cuadrado mónico, II y III los cuadrados mixtos. ([45](1.1.8) p.16).

(1.1.7) Un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, dashed] & \cdot \arrow[d, "f_1"] \\
\cdot \arrow[r, tail, "f_2"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

puede completarse a un cuadrado cartesiano si y solo si

$g_1=(f_2^c f_1)^k$.([43] 13.2,p.15).

(1.1.8) Sea $f_1 g_1=f_2 g_2$ un cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare", very near start] & \cdot \arrow[d, "f_1"] \\ \cdot \arrow[r, "f_2"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

i)Si f_2 es normal entonces lo es g_1.

ii)Si además f_1 es conormal entonces lo es g_2.

([47] p.231).

(1.1.9) Existe cuadrado cartesiano de dos epimorfismos conormales con el mismo dominio.([9] (1.1.11),p.11).

(1.1.10) LEMA DE LA CRUZ.

Sean u y v dos subobjetos normales de un objeto. La cruz construida con ellos

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, tail, "u"] & \\ \cdot \arrow[r, tail, "v"] & \cdot \arrow[r, two heads, "v^c"] \arrow[d, two heads, "u^c"] & \cdot \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

puede encerrarse en un cuadrado de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, tail, "(v^c u)^k"] \arrow[d, tail, "(u^c v)^k"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \cdot \arrow[r, two heads, "(v^c u)^{ck}"] \arrow[d, tail, "u"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \cdot \arrow[d, tail, "(v^c u)^{kc}"] \\ \cdot \arrow[r, tail, "v"] \arrow[d, two heads, "(u^c v)^{ck}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & \cdot \arrow[r, two heads, "v^c"] \arrow[d, two heads, "u^c"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & \cdot \arrow[d, two heads, "(v^c u)^c"] \\ \cdot \arrow[r, tail, "(u^c v)^{kc}"'] & \cdot \arrow[r, two heads, "(u^c v)^c"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

El cuadrado I es el cartesiano de u y v.El IV es el co-cartesiano de u^c y v^c.El II y III las factorizaciones de $v^c u$ y $u^c v$ respectivamente.

El vértice inferior izquierdo del cuadrado de la cruz se llama homologia de u y v.
([46] 1.2,p.16).

(1.1.11) Dado un epimorfismo conormal $A \twoheadrightarrow B$,existe una correspondencia biyectiva entre los subobjetos de A que contienen al nucleo de f y los subobjetos de B.Además conserva el orden en los dos sentidos.Los subobjetos normales corresponden a subobjetos normales.
([9] (1.1.14),p.12).

(1.1.12) Si en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r, dashed] & \bullet \arrow[r, dashed] & \bullet
\end{tikzcd}$$

las columnas y la primera y segunda filas son exactas entonces la tercera fila también es exacta.

Dividiendo los cuadrados por sus paralelas medias y aplicando (1.1.10),se sigue el resultado.

(1.1.13) Si en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & \bullet &
\end{tikzcd}$$

las columnas y la segunda y tercera filas son exactas entonces la primera fila también es exacta.

(1.1.14) Sean A_1 y A_2 dos subobjetos normales de A, tales que $A_2 < A_1$. Entonces:

$$\frac{A/A_2}{A_1/A_2} = A/A_1$$

Es una consecuencia inmediata de (1.1.10).

(1.1.15) Sean A_1 y A_2 subobjetos de A, A_1 subobjeto normal de A. Entonces:

$$\frac{A_1 \cup A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A_1 \cap A_2}$$

([9] (1.2.5), p.20).

(1.1.16) Sean U y V dos subobjetos de un objeto y sean U' y V' subobjetos normales de U y V respectivamente.

Entonces:

$$U' \cup (U \cap V') \text{ es normal en } U' \cup (U \cap V)$$

y $$(U' \cap V) \cup V' \text{ es normal en } (U \cap V) \cup V'$$

y los objetos cocientes son isomorfos.

([9] (1.2.10),p.25).

(1.1.17) Sean U,VyW subobjetos de un objeto,U subobjeto normal de V.Se verifica:

$$V \cap (U \cup W) = (V \cap U) \cup W$$

([9] (1.2.11),p.26).

(1.1.18) En el diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail, "u"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \bullet \arrow[r, two heads, "v"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \bullet \arrow[d, "f_3"] \\
\bullet \arrow[r, tail, "u'"'] & \bullet \arrow[r, two heads, "v'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

se verifica:

i) Existe f_1 si y solo si existe f_3.

ii) I es cartesiano si y solo si f_3 es mónica.

iii) II es cocartesiano si y solo si f_1 es épica.

iv) f_1 y f_3 mónicas $\Longrightarrow$ f_2 mónica.

v) f_1 y f_3 épicas conormales $\Longrightarrow$ f_2 épica conormal.

vi) f_1 y f_3 isomorfismos $\Longrightarrow$ f_2 isomorfismo.

vii) f_3 mónica (f_1 épica) y f_2 isomorfismo $\Longrightarrow$ f_1 isomorfismo (f_3 isomorfismo).

viii) f_3 mónica y f_2 mónica normal $\Longrightarrow$ f_1 mónica normal

ix) f_1 isomorfismo y f_2 mónica (normal) $\Longrightarrow$ f_3 mónica (normal).

([9] (1.1.15), p.13).

(1.1.19) LEMA DE LOS CUATRO.

En el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdot \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_2"] & \cdot \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f_3"] & \cdot \arrow[d, "f_4"] \\
\cdot \arrow[r, "u'"'] & \cdot \arrow[r, "v'"'] & \cdot \arrow[r, "w'"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

con las filas exactas, se verifica:

i) f_2 mónica $\Longrightarrow$ f_3 mónica

ii) f_3 épica conormal $\Longrightarrow$ f_2 épica conormal.

Demostración: i) Se dividen los tres cuadrados por sus paralelas medias:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "u^{ck}"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \cdot \arrow[r, "u^{I}=v^{k}"] \arrow[d, "h_1"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \cdot \arrow[r, "v^{ck}"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & \cdot \arrow[r, "v^{I}=w^{k}"] \arrow[d, "h_2"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & \cdot \arrow[r, "w^{ck}"] \arrow[d, "f_3"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & \cdot \arrow[r, "w^{I}"] \arrow[d, "h_3"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & \cdot \arrow[d, "f_4"] \\
\cdot \arrow[r, "u'^{ck}"'] & \cdot \arrow[r, "u'^{I}=v'^{k}"'] & \cdot \arrow[r, "v'^{ck}"'] & \cdot \arrow[r, "v'^{I}=w'^{k}"'] & \cdot \arrow[r, "w'^{ck}"'] & \cdot \arrow[r, "w'^{I}"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, f_4 mónica $\Longrightarrow$ h_3 mónica. Además f_1 épica conormal $\Longrightarrow$ h_1 épica conormal y f_2 mónica $\Longrightarrow$ h_1 mónica luego h_1 es un isomorfismo. Ahora bien, por (1.1.18)ix) h_2 es mónica y así por (1.1.18)iv) f_3 es mónica.

ii) En el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "u^{ck}"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & \cdot \arrow[r, "u^{I}=v^{k}"] \arrow[d, "h_1"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \cdot \arrow[r, "v^{ck}"] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{III}"] & \cdot \arrow[r, "v^{I}=w^{k}"] \arrow[d, "h_2"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{IV}"] & \cdot \arrow[r, "w^{ck}"] \arrow[d, "f_3"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{V}"] & \cdot \arrow[r, "w^{I}"] \arrow[d, "h_3"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{VI}"] & \cdot \arrow[d, "f_4"] \\
\cdot \arrow[r, "u'^{ck}"'] & \cdot \arrow[r, "u'^{I}=v'^{k}"'] & \cdot \arrow[r, "v'^{ck}"'] & \cdot \arrow[r, "v'^{I}=w'^{k}"'] & \cdot \arrow[r, "w'^{ck}"'] & \cdot \arrow[r, "w'^{I}"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

f_4 mónica $\Longrightarrow h_3$ mónica y f_3 épica conormal $\Longrightarrow h_3$ épica conormal, luego h_3 es un isomorfismo. Por (1.1.18)ii) el cuadrado IV es cartesiano, luego por (1.1.8) h_2 es épica conormal. Además f_1 épica conormal $\Longrightarrow h_1$ épica conormal por (1.1.2)vii). Ahora por (1.1.18)v) f_2 es épica conormal.

(1.1.20) LEMA DE LOS CINCO.

En el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_1"'] & \cdot \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_2"'] & \cdot \arrow[r, "w"] \arrow[d, "f_3"'] & \cdot \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f_4"'] & \cdot \arrow[d, "f_5"] \\ \cdot \arrow[r, "u'"'] & \cdot \arrow[r, "v'"'] & \cdot \arrow[r, "w'"'] & \cdot \arrow[r, "t'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

con las filas exactas, se verifca:

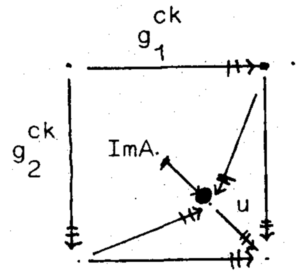
i) Si f_1, f_2, f_4, f_5 son isomorfismos entonces f_3 es isomorfismo.

ii) Si f_1 es épica conormal y f_2, f_4 mónicas $\Longrightarrow f_3$ mónica.

iii) Si f_5 es mónica y f_2, f_4 épicas conormales $\Longrightarrow$ f_3 épica conormal.

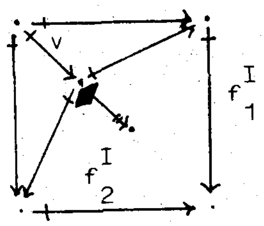
La demostración es inmediata a partir de (1.1.19).

(1.1.21) Sea el cuadrado conmutativo A: $f_1 g_1 = f_2 g_2$ Consideremos el cuadrado conormal I, (1.1.6), construimos el cuadrado cocartesiano de g_1^{ck} y g_2^{ck} (1.1.9) obteniendo un morfismo conormal u (1.1.2)vi).



El dominio del nucleo de u es por definición el nucleo del cuadrado A (KerA).

Consideremos ahora, el cuadrado mónico IV, (1.1.6), entonces el cuadrado cartesiano de f_1^{I} y f_2^{I} (1.1.2)vii) nos da un monomorfismo v:



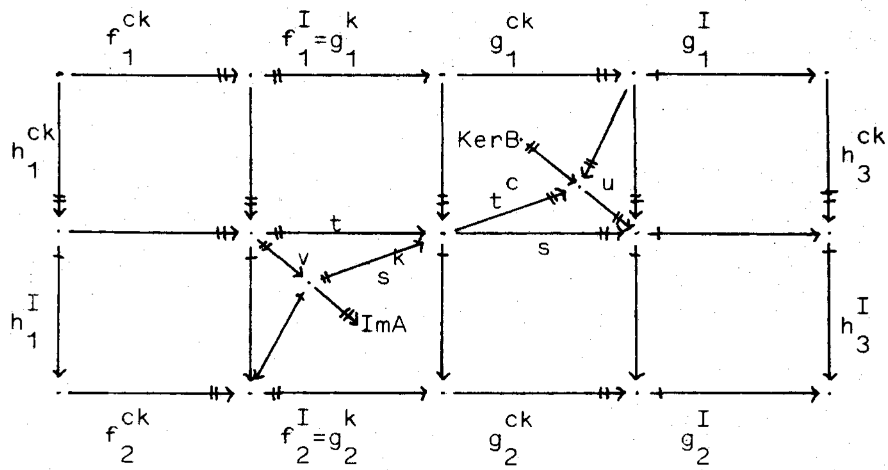
El rango del conucleo de v es por definición la imagen del cuadrado A (ImA).

(1.1.22) En un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & \cdot \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "h_2"'] & \cdot \arrow[d, "h_3"'] \\ \cdot \arrow[r, "f_2"'] & \cdot \arrow[r, "g_2"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

con filas exactas, se verifica ImA = KerB.

En efecto, dividiendo los cuadrados por sus paralelas medias obtenemos:



con $t=(h_2^{ck}\ g_1^k)^I = (h_2^{ck}\ g_1^k)^{kc}$ por A.5.i) y

$s=(g_2^{ck}\ h_2^I)^{ck}$. Así, $st(h_2^{ck}\ g_1^k)^{ck}=(h_3^{ck}\ g_1^I)^{ck}\ g_1^{ck}\ g_1^k = 0$

$\Longrightarrow$ $st = 0$.

Teniendo en cuenta (1.1.10) obtenemos que la homología de la cero sucesión $\cdot \xrightarrow{t} \cdot \xrightarrow{s} \cdot$ es

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Ker}B$$

(1.1.23) LEMA DEL KER-COKER.

Dado el diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_2"] & \cdot \arrow[d, "h_3"] \\
\cdot \arrow[r, "f'"'] & \cdot \arrow[r, "g'"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

existe un morfismo de conexión $d:\mathrm{Ker}\ h_3 \longrightarrow \mathrm{Coker}\ h_1$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

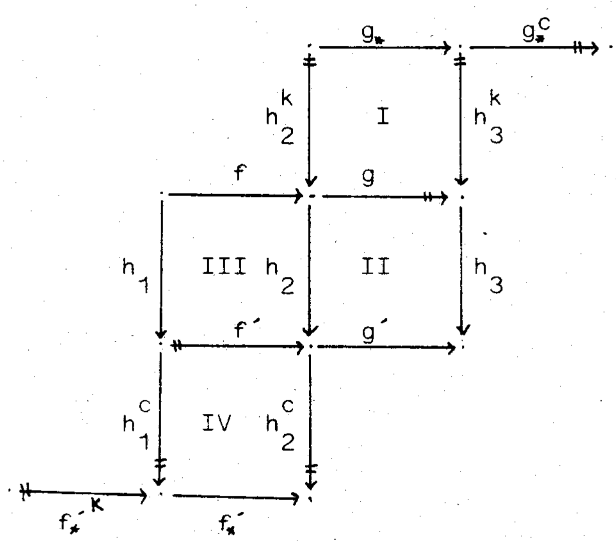
$$\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{f_*} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{g_*} \operatorname{Ker} h_3 \xrightarrow{d} \operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{f'_*} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{g'_*} \operatorname{Coker} h_3$$

Además, si f es un monomorfismo, también lo es f_* y si g' es un epimorfismo conormal, también lo es g'_*.

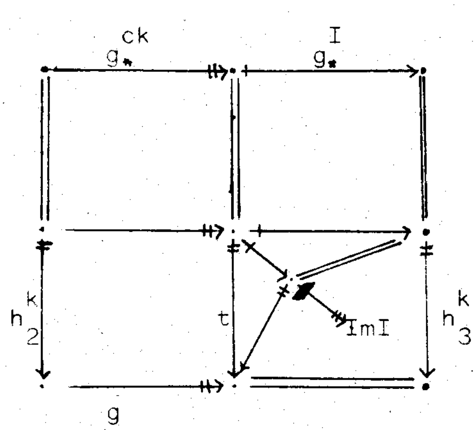
Demostración: Por (1.1.13) y (1.1.12) las sucesiones $\operatorname{Ker} h_1 \xrightarrow{f_*} \operatorname{Ker} h_2 \xrightarrow{g_*} \operatorname{Ker} h_3$ y $\operatorname{Coker} h_1 \xrightarrow{f'_*} \operatorname{Coker} h_2 \xrightarrow{g'_*} \operatorname{Coker} h_3$ son exactas.

EXISTENCIA DEL MORFISMO DE CONEXION:

Consideremos el siguiente diagrama con filas y columnas exactas:

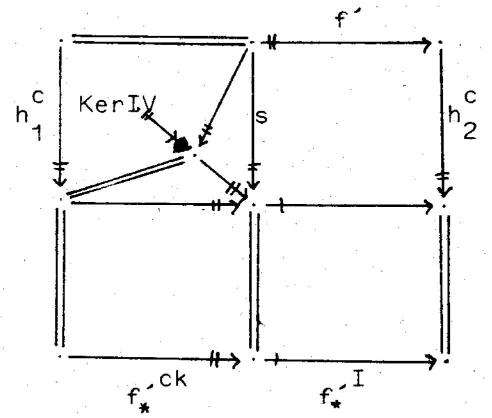


Si dividimos el cuadrado I por sus paralelas medias, obtenemos el siguiente diagrama:



Por el axioma A.5.i) t es normal y por (1.1.2) vi) g_*^{I} es normal. Además $R(g_*^c) = \mathrm{Im}\ \mathrm{I}$.

Análogamente, si dividimos el cuadrado IV por sus paralelas medias, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:



Por (1.1.2) vi) s es conormal. Además, $D(f_*'^k) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{IV}$. Así mediante una aplicación reiterada de (1.1.22) obtenemos:

$$R(g_*^c) = \mathrm{Im}\ \mathrm{I} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{II} = \mathrm{Im}\ \mathrm{III} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{IV} = D(f_*'^k)$$

y por tanto un morfismo

$$d : \mathrm{Ker}\ h_3 \xrightarrow{g_*^c} R(g^c) = D(f'^k) \xrightarrow{f_*'^k} \mathrm{Coker}\ h_1$$

EXACTITUD EN Ker h_3:

$d^k = g_*^{kc} = g_*^{I}$ ya que g_*^{I} es normal

EXACTITUD EN Coker h_1:

$f_*'^k = d^{I}$ por construcción.

1.2. MORFISMOS CENTRALES, CONMUTADOR Y CENTRO.

(1.2.1) Dos morfismos $f_i : A_i \longrightarrow A$ $(i=1,2)$ se dicen que conmutan, si existe un morfismo $f_1 \cdot f_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "u_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & A_1 \times A_2 \arrow[d, dashed, "f_1 \cdot f_2"] & A_2 \arrow[l, tail, "u_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Existe, a lo sumo, uno de tales morfismos.

(1.2.2) Un morfismo $f : B \longrightarrow A$ se dice central si 1_A conmuta con f.

En este caso denotaremos $f \cdot 1_A$ por ∇_f, que es un epimorfismo. Diremos también que ∇_f es el morfismo que hace central a f.

(1.2.3) Si 1_A es central, diremos que A es un objeto abeliano y entonces el morfismo que hace central a 1_A es el codiagonal de A.

(1.2.4) Un morfismo $f : B \longrightarrow A$ es central si y solo si conmuta con todo morfismo de rango A. ([24] (3.1.2), p. 369).

(1.2.5) Si $f:B \longrightarrow A$ es central y $g:C \longrightarrow B$ es un morfismo cualquiera, entonces $fg:C \longrightarrow A$ es central. [24] (3.1.2),p.369).

(1.2.6) Si el compuesto de dos morfismos $g:C \twoheadrightarrow B$ y $f:B \longrightarrow A$ es central, siendo g un epimorfismo conormal entonces f es también central.([24] (3.1.4),p.369).

(1.2.7) El morfismo nulo $0_{A,B}$ es central.([24] (3.1.7), p.371).

(1.2.8) Si gf es central y g es un monomorfismo, entonces f es central. ([24] (3.1.8),p.372).

(1.2.9) Si $h_i:B_i \longrightarrow A_i$ $(i \in I)$ es central, entonces también lo es $\Pi h_i: \Pi B_i \longrightarrow \Pi A_i$.([24](3.1.9),p.374).

(1.2.10) Si $m:B \rightarrowtail A$ es un monomorfismo central, entonces es normal. ([24] (3.1.10),p.374).

(1.2.11) Si $f:B \longrightarrow A$ es un morfismo central y $g:A \twoheadrightarrow C$ un epimorfismo conormal, entonces gf es central.([24] (3.1.11),p.374).

(1.2.12) Si m es un monomorfismo central y e un epimorfismo conormal, entonces $(em)^{I}$ es central.([24] (3.1.11) p.374).

(1.2.13) Los subobjetos centrales, forman un reticulo.
([24] (3.1.13),p.376).

(1.2.14) Sean $m_i : A_i \rightarrowtail A$ dos subobjetos de un objeto A,

$$A_1 \underset{q_1}{\overset{v_1}{\rightleftarrows}} A_1 * A_2 \underset{q_2}{\overset{v_2}{\leftrightarrows}} A_2 \qquad\qquad A_1 \underset{u_1}{\overset{p_1}{\leftrightarrows}} A_1 \times A_2 \underset{u_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} A_2$$

los diagramas coproducto y producto de A_1 y A_2, $x = \langle u_1, u_2 \rangle = \{ q_1, q_2 \} : A_1 * A_2 \twoheadrightarrow A_1 \times A_2$ el morfismo canónico, con nucleo $r: \mathrm{Ker}\, x \rightarrowtail A_1 * A_2$. Si $m = \langle m_1, m_2 \rangle : A_1 * A_2 \longrightarrow A$, entonces $(mr)^I$ es llamado el conmutador de m_1, m_2 y es denotado $[m_1, m_2]$.

En particular $D((mr)^I) := [A_1, A_2]$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ x \arrow[rr, two heads, "(mr)^{ck}"] \arrow[dd, tail, "r"'] & & {[A_1,A_2]} \arrow[dl, dashed, "m'"'] \arrow[dd, tail, "(mr)^I = [m_1,m_2]"] \\
& A_1 \cup A_2 \arrow[dr, "m^I"] & \\
A_1 * A_2 \arrow[ur, two heads, "m^{ck}"] \arrow[rr, "m"] \arrow[d, two heads, "x"'] & & A \\
A_1 \times A_2 & &
\end{tikzcd}$$

([36] (4.1),p.47).

(1.2.15) $[A_1, A_2]$ es un subobjeto normal de $A_1 \cup A_2$.

En efecto, ya que $(mr)^I < m^I$, existe $m' : [A_1, A_2] \rightarrowtail A_1 \cup A_2$ y por el axioma A.5.i) m' es normal.

(1.2.16) Sean $m_i : A_i \rightarrowtail A$ dos monomorfismos en $\underline{\underline{C}}$. Entonces $[m_1, m_2] = 0$ si y solo si m_1 y m_2 conmutan.

Demostración: $\Longrightarrow$) Si $[m_1, m_2] = 0$ entonces $mr = 0$ y ya que $x = r^c$, existe un morfismo $h : A_1 \times A_2 \longrightarrow A$ tal que $m = h\ x$. Entonces $m_i = mv_i = hxv_i = hu_i$ luego $h = m_1 \bullet m_2$.

$\Longleftarrow$) Si m_1 y m_2 conmutan, entonces existe $m_1 \bullet m_2$ tal que $m_i = (m_1 \bullet m_2)u_i$. Así

$mv_i = m_i = (m_1 \bullet m_2)u_i = (m_1 \bullet m_2)xv_i$ implica $m = (m_1 \bullet m_2)x$

Por tanto $mr = (m_1 \bullet m_2)xr = 0$ y así $(mr)^I = [m_1, m_2] = 0$.

(1.2.17) Sean $m_i : A_i \rightarrowtail A$ $i = 1,2,3,4$ subobjetos de A. Si $A_1 < A_3, A_2 < A_4$ entonces $[A_1, A_2] < [A_3, A_4]$. ([36] (4.6), p.48).

(1.2.18) El conmutador $[1_A, 1_A] : [A, A] \rightarrowtail A$, es llamado el derivado del objeto A.

Por (1.2.15) el derivado de un objeto A es un subobjeto normal del objeto A. ([36] (4.7), p.48).

(1.2.19) Sean $m_i : A_i \rightarrowtail A$, $i = 1,2$ subobjetos de A, entonces $[A_1, A_2] < [A, A]$. ([36] (4.8), p.49).

(1.2.20) Sean $m_i : A_i \rightarrowtail A$, $i = 1,2$ subobjetos de A y $f : A \twoheadrightarrow B$ un epimorfismo conormal. Entonces $f([A_1, A_2]) = [f(A_1), f(A_2)]$. Además, $[f(A_1), f(A_2)] = 0$ si y solo si $[A_1, A_2] < \mathrm{Kerf}$. ([36] (4.9), p.49).

(1.2.21) Sea $f:A \twoheadrightarrow B$ un epimorfismo conormal. Entonces, $[B,B]=0$ si y solo si $[A,A]<\operatorname{Ker} f$. En particular

$$[A/[A,A], A/[A,A]]=0$$

([36] (4.11), p.49).

(1.2.22) Sea $m:B \rightarrowtail A$ un subobjeto de A,

$$[B,A] := D([m,1_A])$$

Por (1.2.15), $[B,A]$ es un suobjeto normal de A.

([36] (4.16), p.50).

(1.2.23) Si $m:B \rightarrowtail A$ es un subobjeto de A, entonces es normal si y solo si $[B,A]<B$. ([36] (4.16)y(4.29), p. 50 y 55).

(1.2.24) Un subobjeto $m:B \rightarrowtail A$ es central si y solo si $[B,A]=0$.

Un objeto A es abeliano si y solo si $[A,A]=0$

La comprobación es inmediata a partir de la defición y de (1.2.16).

(1.2.25) Supondremos ahora que nuestra categoria $\underline{\underline{C}}$, verifica además el siguiente axioma:

A.6. La unión de una familia arbitraria de subobjetos centrales es central.

(1.2.26) El centro de un objeto es definido como la unión de todos sus suobjetos centrales.([25] p.209).

(1.2.27) Para dos objetos A y B de $\underline{\underline{C}}$, definimos una suma parcial en el conjunto de morfirmos Hom(B,A) de la siguiente manera: Si $f_1, f_2 : B \longrightarrow A$ son dos morfismos que conmutan,

$$f_1 + f_2 = (f_1 \bullet f_2)\,\Delta_B$$

donde Δ_B es el diagonal de B, dado por $\Delta_B = \{1,1\} : B \quad B\times B$.

En particular, si $g: B \nrightarrow A$ es central y por tanto conmuta con cualquier otro morfismo $f: B \longrightarrow A$, tenemos la ley de adición:

$$f+g = (f \bullet g)\,\Delta = \nabla_g (f\times 1) = \nabla_g \{1,1\}$$

donde ∇_g es el morfismo que hace central a g. ([24] (3.2), p.376).

(1.2.28) Si $a: C \nrightarrow A$ es un morfismo central, mientras que ah, f son dos morfismos de B en A, ah+f está siempre definido.

En efecto, sea $a: C \nrightarrow A$ un morfismo central, y $h: B \longrightarrow C$ un morfismo cualquiera, entonces por (1.2.5) $ha: B \longrightarrow A$ es central y por (1.2.27) ah+f está siempre definido.

(1.2.29) Sea $F: \underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}'$ un funtor, que preserva preserva productos, entre dos categorias de Kurosh, entonces si $f_1, f_2 : B \longrightarrow A$ conmutan, también $F(f_1), F(f_2)$ conmutan.

En efecto, si f_1 y f_2 conmutan entonces existe un morfismo $f_1 \bullet f_2$ tal que $(f_1 \bullet f_2)u_i = f_i$. Ya que F es un funtor preservando productos tenemos que $u_{F(A)}=F(u_1)$ y $u_{F(B)}=F(u_2)$ y por tanto

$$F(f_i)=F((f_1\cdot f_2)u_i)=F(f_1\cdot f_2)F(u_i)=F(f_1\cdot f_2)u'_i$$

donde $u'_1=u_{F(A)}$ y $u'_2=u_{F(B)}$ y así $F(f_1\cdot f_2)=F(f_1)\cdot F(f_2)$.

1.3. VARIEDADES.

(1.3.1) Sea $\underline{\underline{C}}$ una categoria de Kurosh. Observese que si $\underline{\underline{X}}$ es una clase de objetos de $\underline{\underline{C}}$, puede ser considerada como una subcategoria plena de $\underline{\underline{C}}$. En consecuencia se tiene un funtor inclusión $E:\underline{\underline{X}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$.

Supondremos que $\underline{\underline{X}}$ es no vacía.

(1.3.2) Se llama variedad de la categoria $\underline{\underline{C}}$ a una clase $\underline{\underline{V}}$ de objetos de $\underline{\underline{C}}$ verificando:

V.1. $\underline{\underline{V}}$ es cerrada para subobjetos.

V.2. $\underline{\underline{V}}$ es cerrada para cocientes conormales.

V.3. V es cerrada para productos.

(1.3.3) Sea $\underline{\underline{X}}$ una clase de objetos de $\underline{\underline{C}}$ y A un objeto de $\underline{\underline{C}}$. Se llama $\underline{\underline{X}}$-réplica de A a un morfismo universal de A al funtor $E:\underline{\underline{X}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ ([42] p. 55).

Esto es, a un objeto $RA \in \underline{\underline{X}}$ junto con un morfismo

$$A \xrightarrow{\pi_A} RA \in \underline{\underline{X}}$$

con la propiedad universal inicial:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[dr, "\alpha"'] & RA \in \underline{\underline{X}} \arrow[d, "\exists ! \beta"] \\ & B \end{tikzcd}$$

tal que $\beta \pi_A = \alpha$.

Se dirá que $\underline{\underline{X}}$ es reflexiva si todo objeto $A \varepsilon \underline{\underline{C}}$ posee $\underline{\underline{X}}$-réplica. En lenguage funtorial esto se expresa diciendo que el funtor $E:\underline{\underline{X}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ admite adjunto a la izquierda $R:\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{X}}$. ([42] p.78-81).

(1.3.4) Toda variedad es una clase reflexiva. ([51] p.71).

(1.3.5) Si $\underline{\underline{V}}$ es una variedad en $\underline{\underline{C}}$, $A \longrightarrow RA$ es un cociente conormal. ([51] p.71).

(1.3.6) Si $\underline{\underline{V}}$ es una variedad, para cada objeto A se tiene una sucesión exacta corta:

$$VA \rightarrowtail A \twoheadrightarrow RA$$

([51] p.73).

(1.3.7) Sea $\underline{\underline{V}}$ una variedad en $\underline{\underline{C}}$. Existe una sucesión exacta corta funtorial:

$$V \rightarrowtail 1_{\underline{\underline{C}}} \twoheadrightarrow R$$

donde V es un subfuntor normal de la identidad en la categoria $\underline{\underline{C}}$ y R es un funtor cociente conormal de la identidad en $\underline{\underline{C}}$. ([51] p.73).

(1.3.8) Si $\underline{\underline{V}}$ es una variedad y tenemos $A \xrightarrow{\alpha} B$ morfismo en $\underline{\underline{V}}$, entonces α es monomorfismo (monomorfismo normal, epimorfismo conormal) en $\underline{\underline{V}}$ si y solo si lo es en $\underline{\underline{C}}$. ([51] p.74).

(1.3.9) Una variedad $\underline{\underline{V}}$ de una categoria de Kurosh es, a su vez una categoria de Kurosh. Una variedad $\underline{\underline{W}}$ de una variedad $\underline{\underline{V}}$ de $\underline{\underline{C}}$ es una variedad de $\underline{\underline{C}}$. ([36] (3.13), p.41).

(1.3.10) Un objeto P de la categoria $\underline{\underline{C}}$ se dice que es proyectivo en $\underline{\underline{C}}$ si dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ A \arrow[r, "e"'] & B \end{tikzcd}$$

en $\underline{\underline{C}}$ con e epimorfismo conormal existe g tal que eg=f.

(1.3.11) Sea $F:\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{D}}$ y $F \dashv G$. Si G conserva epimorfismos conormales entonces F conserva proyectivos. ([22] (10.2), p.82).

(1.3.12) Sea $\underline{\underline{V}}$ una variedad en $\underline{\underline{C}}$. Entonces si RP es una $\underline{\underline{V}}$-réplica de un objeto proyectivo P, el objeto RP es proyectivo en $\underline{\underline{V}}$.

En efecto, ya que el funtor inclusión $E:\underline{\underline{V}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ conserva epimorfismos conormales y $R \dashv E$, entonces por (1.3.11) R conserva proyectivos.

(1.3.13) Sea $\underline{\underline{C}}$ una categoria de Kurosh, provista de un funtor de olvido a conjuntos $U:\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{Set}}$ y sea $F \dashv U$ Entonces para cada conjunto X, F(X) se denomina objeto libre sobre X (relativo a U).

(1.3.14) Si el funtor de olvido $U:\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{Set}}$ transforma epimorfismos conormales en aplicaciones sobre, entonces cada objeto libre en $\underline{\underline{C}}$ es proyectivo.([22] (10.3), p.82).

(1.3.15) Se llama funtor variedad en la categoria $\underline{\underline{C}}$, a un funtor $V:\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ verificando:

F.V.1. V es un subfuntor normal de $1_{\underline{\underline{C}}}$

F.V.2. V conserva epimorfismos conormales. Trivialmente, conserva monomorfismos.

(1.3.16) Un funtor variedad V induce canónicamente una variedad $\underline{\underline{V}}$ en la forma:

$$\underline{\underline{V}} = \{A \varepsilon \underline{\underline{C}} \mid VA=0\}$$

([51] p.80).

(1.3.17) El funtor V asociado a una variedad $\underline{\underline{V}}$ de $\underline{\underline{C}}$ es un funtor variedad.([51] p.79).

(1.3.18) Las correspondencias entre las variedades y funtores variedad descritas anteriormente son inversas. ([51] p.81).

(1.3.19) Sea R un cociente conormal de $1_{\underline{\underline{C}}}$. Entonces son equivalentes:

(1.3.20) La intersección de dos variedades de $\underline{\underline{C}}$ es una variedad de $\underline{\underline{C}}$. Si R_1 y R_2 son los funtores correspondientes a las variedades $\underline{\underline{V}}_1$ y $\underline{\underline{V}}_2$, entonces el funtor correspondiente a la variedad $V_1 \cap V_2$ es R_2R_1. En particular R_2R_1 y R_1R_2 son naturalmente isomorfos y exactos a la derecha. ([51] p.83).

(1.3.21) La clase de los objetos abelianos es una variedad cuyo funtor variedad es $[-,-]$.
([51] p.89).

2. INVARIANTES DE BAER ABSOLUTOS.

2.1. EL FUNTOR MARGINADOR.

(2.1.1) Se designará por $\underline{\underline{C}}_p$ a la categoria cuyos objetos son los monomorfismos normales $a:A_1 \longrightarrow A_0$ de $\underline{\underline{C}}$ y que serán denotados $(A_1|A_0)$ y cuyos morfismos son pares de morfismos $(f_1|f_0)$ de $\underline{\underline{C}}$ tales que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, tail, "a"'] & B_1 \arrow[d, tail, "b"] \\ A_0 \arrow[r, "f_0"'] & B_0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(2.1.2) $\underline{\underline{C}}p$ es una categoria de Kurosh.

En efecto, el objeto cero es el morfismo 1_0. Además todo morfismo $(f_1|f_0)$ se factoriza en la forma:

$$(f_1|f_0) = (f_1^I|f_2^I)(f_1^{ck}|f_2^{ck})$$

Para toda familia $(a_i)_{i\in I}$ de objetos de $\underline{\underline{C}}_p$ existe producto y coproducto, viniendo estos dados por $\prod a_i$ y $\coprod a_i$ respectivamente.

El axioma A.4. es inmediato. El axioma A.5 es consecuencia inmediata de que $(f_1|f_0)^k = (f_1^k|f_0^k)$ y de que un morfismo $(f_1|f_0)$ es normal si y solo si f_1 y f_0 son normales en $\underline{\underline{C}}$ y $bf_1=f_0a$ es cartesiano en $\underline{\underline{C}}$.

(2.1.3) Los morfismos centrales forman una variedad $\underline{\underline{V}}_c$ en la categoria $\underline{\underline{C}}_p$.

En efecto:

V.1. $\underline{\underline{V}}_c$ es cerrada para subobjetos.

Supongamos que a $\underline{\underline{V}}_c$ y que b es un subobjeto de a. Por (1.2.5) $a f_1 = f_0 b$ es central y por (1.2.8) b $\underline{\underline{V}}_c$.

V.2. $\underline{\underline{V}}_c$ es cerrada para cocientes conormales.

Supongamos que b $\underline{\underline{V}}_c$ y que a es un cociente conormal de b. Por (1.2.11) $f_0 b = b f_1$ es central y por (1.2.6) a $\underline{\underline{V}}_c$.

V.3. $\underline{\underline{V}}_c$ es cerrada para productos.

Es inmediato a partir de (1.2.9).

(2.1.4) El funtor variedad V_c asociado a la variedad $\underline{\underline{V}}_c$ de morfismos centrales viene definido por

$$V_c(a) = [a,1]$$

En efecto, por (1.2.24) sabemos que el morfismo a es central si y solo si $[a,1] = 0$.

(2.1.5) Si $(f_1|f_0):(A_1|A_0) \longrightarrow (B_1|B_0)$ es un morfismo en $\underline{\underline{C}}_p$, entonces el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
{[A_1,A_0]} \arrow[r] \arrow[d] & {[A_0,A_0]} \arrow[d] \\
{[B_1,B_0]} \arrow[r] & {[B_0,B_0]}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En efecto, en el cubo de la figura:

$$
\begin{tikzcd}
& {[A_1, A_0]} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & {[A_0, A_0]} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
{[B_1, B_0]} \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd] & & {[B_0, B_0]} & \\
& A_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl] & & A_0 \arrow[dl] \\
B_0 \arrow[rr, equal] & & B_0 \arrow[from=uu, crossing over] &
\end{tikzcd}
$$

la cara inferior es conmutativa trivialmente, las caras laterales por la funtorialidad de V_c y así por ([43] II, 1.1.dual, p.43) la cara superior es conmutativa.

(2.1.6) Cada morfismo $(f_1|f_0)$ en $\underline{\underline{C}}_p$ induce de forma natural un morfismo $f:A_0/A_1 \longrightarrow B_0/B_1$ en $\underline{\underline{C}}$:

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f_1"'] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] \arrow[d, "f_0"'] & A_0/A_1 \arrow[d, dashed, "f"] \\
B_1 \arrow[r, "b"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "b^c"'] & B_0/B_1
\end{tikzcd}
$$

(2.1.7) El par $(A_1|A_0)$ se dice que es una presentación de un objeto A en $\underline{\underline{C}}$ si $A = A_0/A_1$. La presentación será llamada proyectiva si A_0 es proyectivo.

(2.1.8) El dominio D y el rango R son funtores de $\underline{\underline{C}}_p$ a $\underline{\underline{C}}$:

$$D(A_1|A_0) = A_1 \qquad R(A_1|A_0) = A_0$$

$$D(f_1|f_0) = f_1 \qquad R(f_1|f_0) = f_0$$

(2.1.9) Cada subfuntor L del funtor identidad en $\underline{\underline{C}}$, induce un funtor $L_0 : \underline{\underline{C}}_p \longrightarrow \underline{\underline{C}}$, mediante $L_0 = LR$, esto es, $L_0(A_1|A_0) = L(A_0)$ y $L_0(f_1|f_0) = L(f_0)$.

(2.1.10) Denotaremos por F_L el conjunto de funtores

$$S : \underline{\underline{C}}_p \longrightarrow \underline{\underline{C}} \qquad .$$

tales que:

i) S es un subfuntor de L_0, que es un funtor normal en R y por (1.1.2)vi) normal en L_0.

ii) Si en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\ A_1 \arrow[r, tail, "a"] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] & A_0/A_1 \end{tikzcd}$$

se verifica $a^c f = a^c g$, entonces en el diagrama

$$\begin{tikzcd} & L(X) \arrow[d, shift right, "L(f)"'] \arrow[d, shift left, "L(g)"] & \\ S(A_1|A_0) \arrow[r, tail, "\sigma_a"'] & L(A_0) \arrow[r, two heads, "\sigma_a^c"'] & L(A_0)/S(A_1|A_0) \end{tikzcd}$$

se verifica $\sigma_a^c L(f) = \sigma_a^c L(g)$.

(2.1.11) $A_1 \cap L(A_0) \in F_L$.

Claramente, $(A_1|A_0) \longmapsto A_1 \cap L(A_0)$ es un funtor de $\underline{\underline{C}}p$ a $\underline{\underline{C}}$, que verifica la condición i) por (1.1.8)i), Veamos que verifica ii).

Si en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\
A_1 \arrow[r, tail, "a"] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] & A_0/A_1
\end{tikzcd}$$

se tiene $a^c f = a^c g$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \cap L(A_0) \arrow[rr, tail, "\tau_a"] \arrow[ddd, "s"'] & & L(A_0) \arrow[r, two heads, "\tau_a^c"] \arrow[ddd, "\mu_{A_0}"] & L(A_0)/A_1 \cap L(A_0) \arrow[ddd, dashed, "t"] \\
 & L(X) \arrow[ur, shift left, "L(f)"] \arrow[ur, shift right, "L(g)"'] \arrow[d, "\mu_X"'] & & \\
 & X \arrow[dr, shift right, "f"'] \arrow[dr, shift left, "g"] & & \\
A_1 \arrow[rr, tail, "a"'] & & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"'] & A_0/A_1
\end{tikzcd}$$

verifica:

$$t\,\tau_a^c\, L(f) = a^c\, \mu_{A_0}\, L(f) = a^c\, f\, \mu_X = a^c\, g\, \mu_X = a^c\, \mu_{A_0}\, L(g) =$$

$$= t\,\tau_a^c\, L(g) \quad \Longrightarrow \quad \tau_a^c\, L(f) = \tau_a^c\, L(g)$$

ya que t existe y es *mónica* por (1.1.18).

(2.1.12) Para todo subfuntor L del funtor identidad en $\underline{\underline{C}}$, F_L tiene un elemento minimal:

$$L_1 = \cap S_i \qquad \text{con } S_i \in F_L$$

Evidentemente, L_1 es un funtor de $\underline{\underline{C}}_p$ a $\underline{\underline{C}}$ que verifica la condición i) por (1.1.2)iii).

Además, si en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\ A_1 \arrow[r, tail, "a"] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] & A_0/A_1 \end{tikzcd}$$

se tiene $a^c f = a^c g$ entonces para todo $S_i \in F_L$ se tiene $\sigma_i^c L(f) = \sigma_i^c L(g)$

$$\begin{tikzcd} & L(X) \arrow[d, shift right, "L(f)"'] \arrow[d, shift left, "L(g)"] & \\ S_i(A_1|A_0) \arrow[r, tail, "\sigma_i"] \arrow[d, "t_i"'] & L(A_0) \arrow[r, two heads, "\sigma_i^c"] \arrow[dr, two heads, "\sigma^c"'] & \bullet \arrow[d, "s_i"] \\ S(A_1|A_0) \arrow[ur, tail, "\sigma"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

Ahora bien, ya que $\sigma_i < \sigma$ entonces $\sigma_i^c > \sigma^c$ esto es, $\sigma^c = s_i \sigma_i^c$ y así tenemos

$$\sigma^c L(f) = s_i \sigma_i^c L(f) = s_i \sigma_i^c L(g) = \sigma^c L(g)$$

(2.1.13) $L(A_1) < L_1(A_1|A_0)$.

En efecto, consideremos el par de morfismos:

$$a, 0 : A_1 \rightrightarrows A_0$$

Ya que $a^c a = a^c 0 = 0$ entonces $\sigma^c L(a) = \sigma^c L(0) = \sigma^c 0 = 0$ y por tanto existe un morfismo mónico

$$\rho : L(A_1) \rightarrowtail L_1(A_1|A_0)$$

verificando $\sigma\ \rho = L(a)$.

(2.1.14) $L_1(A_1|A_0) \triangleleft A_1$.

En efecto, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L_1(A_1|A_0) \arrow[drr, "h_1"] \arrow[dr, "h_2"] \arrow[ddrr, "h_3"'] \arrow[ddr, "h_4"'] & & \\
& A_1 \cap L(A_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & L(A_0) \arrow[d, tail] \\
& A_1 \arrow[r, tail] & A_0
\end{tikzcd}$$

Ya que h_3 es normal, por (1.1.2)vi) también lo son h_1, h_2 y h_4.

(2.1.15) Un par ideal $(A_1|A_0)$ se dice V-central para una cierta variedad $\underline{\underline{V}}$, si para todo par de morfismos $f,g: X \rightrightarrows A_0$ para los que $a^c\ f = a^c\ g$ se verifica $V(f) = V(g)$.

(2.1.16) El par ideal $(A_1|A_0)$ es V-central si y solo si $V_1(A_1|A_0) = 0$ siendo V_1 el funtor minimal de F_V.

$\Longrightarrow$) Demostremos que $0 \in F_V$.

i) Es inmediata.

ii) Si en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\
A_1 \arrow[r, tail, "a"] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] & A_0/A_1
\end{tikzcd}$$

se verifica que $a^c f = a^c g$ entonces ya que $0^c = 1$ y $V(f) = V(g)$ se tiene $0^c V(f) = 0^c V(g)$ luego $0 \in F_V$ y así $V_1(A_1|A_0) = 0$ por minimalidad.

$\Leftarrow$) Si $V_1(A_1|A_0) = 0$ y $f,g : X \rightrightarrows A_0$ son un par de mosrfismos cualesquiera, entonces ya que $0^c = 1$ y $0^c V(f) = 0^c V(g)$ se tiene $V(f) = V(g)$, luego el par $(A_1|A_0)$ es V-central.

(2.1.17) Inpongamos a nuestra categoria $\underline{\underline{C}}$ un nuevo axioma:

A.7. Si $a : A_1 \rightarrowtail A_0$ es un monomorfismo central tal que para todo par de morfismos $f,g : X \rightrightarrows A_0$ con $a^c f = a^c g$ existe un morfismo $h : X \longrightarrow A_1$ verificando $g = ah + f$.

(2.1.18) Si $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{Ab}}$ la variedad de objetos abelianos, un par ideal $(A_1|A_0)$ es central si y solo si es V-central.

$\Longrightarrow$) Si $(A_1|A_0)$ es central, entonces para todo par de morfismos $f,g : X \rightrightarrows A_0$ tales que $a^c f = a^c g$ existe por (2.1.17) un morfismo $h : X \longrightarrow A_1$ verificando $g = f + ah$, pero por (1.3.23) V es aditivo, así

$V(g) = V(ah+f) = V(ah) + V(f) = V(a)V(h) + V(f) = 0 + V(f) = V(f)$.

La razón de que $V(a) : [A_1, A_1] \longrightarrow [A_0, A_0]$ sea el morfismo cero se sigue de que $[A_1, A_0] = 0$, por hipótesis y de que $V(a)$ se factoriza a través de $[A_1, A_0]$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $(A_1|A_0)$ es V-central y tomemos $X = A_1 * A_0$ y $f = p_0 = \langle 0, 1 \rangle$ y $g = \langle a, 1 \rangle$. Así tenemos que tanto f como g son epimorfismos conormales, ya que son retracciones. Además se verifica que

$$a^c f = a^c <0,1> = <0,a^c> = a^c <a,1> = a^c g$$

Así por (2.1.14) los dos morfismos inducidos $[X,X] \rightrightarrows [A_0,A_0]$ son iguales.

Ahora aplicando (2.1.5) a los pares de morfismos

$$(1|f),(1|g):(A_1|A_1 * A_0) \rightrightarrows (A_1|A_0)$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& {[A_1, A_1 * A_0]} \arrow[rr, "DV_c(v_1|1)"] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd] & & {[A_1 * A_0, A_1 * A_0]} \arrow[dl, shift right, "DV_c(f|f)"'] \arrow[dl, shift left, "DV_c(g|g)"] \arrow[dd] \\
{[A_1, A_0]} \arrow[rr] \arrow[dd] & & {[A_0, A_0]} \arrow[dd] & \\
& A_1 * A_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, shift right, "f"'] \arrow[dl, shift left, "g"] & & A_1 * A_0 \arrow[dl, shift right, "f"'] \arrow[dl, shift left, "g"] \\
A_0 \arrow[rr, equal] & & A_0 &
\end{tikzcd}$$

luego si los dos morfismos de la derecha son iguales en la cara superior del cubo, son iguales también los de la izquierda en dicha cara.

Ya que f y g son epimorfismos conormales, también lo son al aplicarle el funtor asociado a la variedad $\underline{\underline{V}}_c$ y tomar el dominio

Veamos que el producto

$$[A_1, A_1 * A_0] \longrightarrow [A_1 * A_0, A_1 * A_0] \longrightarrow [A_0, A_0]$$

es el morfismo cero.

En efecto,

$DV_c(f|f)\, DV_c(v_1|1) = DV_c(fv_1|f) = DV_c(p_0v_1|f) = DV_c(0|1) = 0$

donde $v_1 : A_1 \rightarrowtail A_1 * A_0$ es la inyección canónica.

Por tanto el epimorfismo conormal

$DV_c(1|f) : [A_1, A_1 * A_0] \twoheadrightarrow [A_1, A_0]$

es cero y así $[A_1, A_0] = 0$.

(2.1.19) Si $\underline{\underline{V}}$ es la variedad de objetos abelianos entonces $V_1(A_1|A_0) = [A_1, A_0]$.

En efecto, por (2.1.18), (1.2.23) y (2.1.14) se tiene que $V_1(A_1|A_0) = 0$ si y solo si $[A_1, A_0] = 0$ y así (2.1.18) da el resultado.

2.2. INVARIANTES DE BAER ABSOLUTOS.

(2.2.1) Si $(A_1|A_0)$ y $(A_1'|A_0')$ son dos presentaciones proyectivas de A y si $S\in F_L$ entonces:

$$\frac{L_0(A_1|A_0)}{S(A_1|A_0)} = \frac{L_0(A_1'|A_0')}{S(A_1'|A_0')}$$

Dado un morfismo $f:A\longrightarrow B$ y presentaciones proyectivas $(A_1|A_0)$ y $(B_1|B_0)$ respectivamente de A y B, existe un morfismo $f_0:A_0\longrightarrow B_0$ no necesariamente único y un morfismo $f_1:A_1\longrightarrow B_1$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "f_1"'] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] \arrow[d, "f_0"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B_1 \arrow[r, tail, "b"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "b^c"'] & B
\end{tikzcd}$$

luego tenemos un morfismo $(f_1|f_0):(A_1|A_0)\longrightarrow(B_1|B_0)$ y así existe un morfismo

$$f_0^*:L_0(A_1|A_0)/S(A_1|A_0)\longrightarrow L_0(B_1|B_0)/S(B_1|B_0)$$

haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S(A_1|A_0) \arrow[r, tail, "\sigma_a"] \arrow[d, "S(f_1|f_0)"'] & L_0(A_1|A_0) \arrow[r, two heads, "\sigma_a^c"] \arrow[d, "L_0(f_1|f_0)"] & L_0(A_1|A_0)/S(A_1|A_0) \arrow[d, "f_0^*"] \\
S(B_1|B_0) \arrow[r, tail, "\sigma_b"'] & L_0(B_1|B_0) \arrow[r, two heads, "\sigma_b^c"'] & L_0(B_1|B_0)/S(B_1|B_0)
\end{tikzcd}$$

f_0 no es necesariamente único pero la condición ii)(2.1.10) asegura que si g_0 es otro de tales morfismos, entonces

$$b^c f_0 = b^c g_0 \Longrightarrow \sigma_b^c L(f_0) = \sigma_b^c L(g_0) \Longrightarrow f_0 \sigma_a^c = g_0 \sigma_a^c \Longrightarrow f_0^* = g_0^*$$

Así f_0^* es independiente de la elección de f_0 y lo denotaremos f^*.

Si ahora $(C_1 | C_0)$ es una presentación proyectiva de C y $g:B \longrightarrow C$ un morfismo, entonces $(gf)^* = g^* f^*$.

En efecto, sean

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "f_1"'] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] \arrow[d, "f_0"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B_1 \arrow[r, tail, "b"] \arrow[d, "g_1"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "b^c"] \arrow[d, "g_0"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C_1 \arrow[r, tail, "c"] & C_0 \arrow[r, two heads, "c^c"] & C
\end{tikzcd}$$

presentaciones proyectivas de A, B, C respectivamente y sea

$$g^*: L_0(B_1 | B_0)/S(B_1 | B_0) \longrightarrow L_0(C_1 | C_0)/S(C_1 | C_0)$$

el morfismo inducido, que es independiente a su vez de la elección de g_0. Ahora bien $g_0 f_0 : A_0 \longrightarrow C_0$ induce $gf: A \longrightarrow C$ y da lugar al morfismo

$$(g\,f)^*: L_0(A_1 | A_0)/S(A_1 | A_0) \longrightarrow L_0(C_1 | C_0)/S(C_1 | C_0)$$

Entonces $\qquad (g\,f)^* = g^* f^*$.

Tomemos ahora $A = B$ y $f = 1_A$. Veamos que f^* es un isomorfismo. Para ello sean

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, shift right, "f_1"'] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] \arrow[d, shift right, "f_0"'] & A \arrow[d, equal, "f=g=1_A"] \\
A'_1 \arrow[r, tail, "a'"'] \arrow[u, shift right, "g_1"'] & A'_0 \arrow[r, two heads, "a'^c"'] \arrow[u, shift right, "g_0"'] & A
\end{tikzcd}$$

dos presentaciones proyectivas diferentes para A y $f=g=1_A$. Ya que $(gf)^*$ es independiente de la elección de g_0f_0 podemos tomar $g_0f_0=1_{A_0}$ y así $g^*f^*=(gf)^*=1$. Análogamente $f^*g^*=(fg)^*=1$. Por todo esto f^* es un isomorfismo.

(2.2.2) Llamaremos invariante de Baer absoluto a todo funtor $T:\underline{\underline{C}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$ que sea independiente de la presentación proyectiva de cualquier objeto.

(2.2.3) $L(A_0)/A_1 \cap L(A_0)$ es un invariante de Baer absoluto.

Inmediato a partir de (2.2.1) y (2.1.11).

(2.2.4) $L(A_0)/L_1(A_1|A_0)$ es un invariante de Baer absoluto.

Inmediato a partir de (2.2.2) y (2.1.12)

(2.2.5) $A_1 \cap L(A_0)/L_1(A_1|A_0)$ es un invariante de Baer absoluto.

La demostración es totalmente análoga a la efectuada en (2.2.1).

(2.2.6) También son invariantes de Baer absolutos: A_0/A_1 y $L(A_0/A_1)$.

(2.2.7) Si L conserva epimorfismos conormales

$$L(A_0/A_1)=\frac{L(A_0)}{A_1\cap L(A_0)}$$

En efecto, sea $(A_1 \rightarrowtail A_0)$ una presentación proyectiva de A. Ya que L conserva epimorfismos conormales, $L(a^c):L(A_0)\twoheadrightarrow L(A_0/A_1)$ es un epimorfismo conormal. Aplicando (1.1.10) obtenemos que $L(A_0/A_1)=L(A_0)/A_1\cap L(A_0)$.

(2.2.8) Resumiendo los resultados anteriores tenemos los siguientes invariantes absolutos:

$$M(A)=\frac{L(A_0)}{A_1\cap L(A_0)}$$

$$L(A)=L(A_0/A_1)$$

$$DL(A)=\frac{L(A_0)}{L_1(A_1\rightarrowtail A_0)}$$

$$\Delta L(A)=\frac{L(A_0)\cap A_1}{L_1(A_1\rightarrowtail A_0)}$$

(2.2.9) Si L es un funtor variedad entonces $M(A)=L(A)$.

Inmediato, por (2.2.7) y (1.3.15).

(2.2.10) Para un funtor variedad V la siguiente sucesión

$$\Delta V(A) \rightarrowtail DV(A) \twoheadrightarrow V(A)$$

es exacta y natural.

En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_1(A_1|A_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & V_1(A_1|A_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & 0 \arrow[d, tail] \\
A_1 \cap V(A_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & V(A_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \dfrac{V(A_0)}{A_1 \cap V(A_0)} \arrow[d, two heads] \\
\dfrac{A_1 \cap V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, tail] & \dfrac{V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, two heads] & \dfrac{V(A_0)}{A_1 \cap V(A_0)}
\end{tikzcd}$$

Entonces por (1.1.10) la sucesión inferior es exacta.

La naturalidad es inmediata.

(2.2.11) Si A es proyectivo, entonces $\Delta V(A) = 0$ y por tanto $DV(A) = V(A)$.

En efecto, si A es proyectivo entonces $(0|A)$ es una presentación proyectiva de A y

$$\Delta V(A) = \frac{V(A) \cap 0}{V_1(0|A)} = 0$$

y así $DV(A) = V(A)$.

2.3. SUCESION EXACTA DE CINCO TERMINOS.

(2.3.1) Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$$

Elijamos presentaciones proyectivas $(A_1 | A_0)$ de A y $(B_1 | B_0)$ de B tales que $A_0 = B_0$

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[d, tail, "i"] \\
B_1 \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, tail, "i''"'] & B_0 \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\
A_1 \arrow[r, tail, "\bar{i}"] \arrow[d, two heads, "p''"'] & A_0 \arrow[r, two heads, "\bar{p}"] & A \\
C & &
\end{tikzcd}$$

El dominio del nucleo de p y el rango del conucleo de i'' coinciden por (1.1.23).

La funtorialidad de $V_1(-,-)$ nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
V_1(B_1 | A_0) \arrow[r, tail] \arrow[d] & V(A_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \dfrac{V(A_0)}{V_1(B_1 | A_0)} \arrow[d, "\sigma"] \\
V_1(A_1 | A_0) \arrow[r, tail] & V(A_0) \arrow[r, two heads] & \dfrac{V(A_0)}{V_1(A_1 | A_0)}
\end{tikzcd}$$

del que se obtiene la sucesión exacta:

$$\mathrm{Ker}\,\sigma = \frac{V_1(A_1|A_0)}{V_1(B_1|A_0)} \xrightarrow{\tau} DV(B) = \frac{V(A_0)}{V_1(B_1|A_0)} \xrightarrow{\sigma} DV(A) = \frac{V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)}$$

Así el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,\sigma \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & DV(B) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & DV(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
C \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "p"'] & A
\end{tikzcd}$$

tiene filas exactas. El morfismo α es el producto:

$$DV(A) \longrightarrow V(A) \longrightarrow A$$

y análogamente β es el producto :

$$DV(B) \longrightarrow V(B) \longrightarrow B$$

El cuadrado II es conmutativo por funtorialidad de DV. La existencia de γ y la conmutatividad de I se sigue de (1.1.18)i).

(2.3.2) Dada la sucesión exacta corta

$$C \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} A$$

se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$\Delta V(B) \longrightarrow \Delta V(A) \longrightarrow C/V_1(C|B) \longrightarrow B/V(B) \longrightarrow A/V(A)$$

Aplicando (1.1.23) al diagrama de (2.3.1) se tiene la sucesión exacta:

$$\cdot \longrightarrow \Delta V(B) \longrightarrow \Delta V(A) \longrightarrow C/\mathrm{Im}\,\gamma \longrightarrow B/V(B) \longrightarrow A/V(A)$$

Veamos que $\mathrm{Im}\,\gamma = V_1(C|B)$.

En primer lugar probemos que

$$V_1(C|B) = V_1(A_1|A_0)/V_1(A_1|A_0)\cap B_1$$

Por la funtorialidad de V_1, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
V_1(A_1|A_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & V(A_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "V(p')"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & DV(A) \arrow[d, equal] \\
V_1(A_1/B_1|A_0/B_1) \arrow[r, tail] & V(A_0/B_1) \arrow[r, two heads] & DV(A)
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, ya que V conserva epimorfismos conormales $V(p')$ es un epimorfismo conormal, y como por (1.1.18)i) el cuadrado I es cartesiano, entonces por (1.1.8)ii) q es un epimorfismo conormal.

Consideremos ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & V_1(A_1|A_0)\cap B_1 \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & B_1/V_1(A_1|A_0)\cap B_1 \arrow[d, tail] \\
 & V_1(A_1|A_0) \arrow[r, tail, "\tau_{A_0}"] \arrow[d, two heads] \arrow[ddl, two heads, "q"'] & A_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "p'"'] & A_0/V_1(A_1|A_0) \arrow[d, two heads] \\
 & V_1(A_1|A_0)/V_1(A_1|A_0)\cap B_1 \arrow[r, tail] \arrow[dl, dashed, "q'"] & A_0/B_1 \arrow[r, two heads] & A_0/V_1(A_1|A_0)\cup B_1 \\
V_1(A_1/B_1|A_0/B_1) \arrow[urr, tail, "\tau_B"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Ya que $\tau_B q = p'\tau_{A_0}$ por funtorialidad de V_1 se verifica que $\tau_B\, q\, (p'\tau_{A_0})^k = p'\tau_{A_0}(p'\tau_{A_0})^k = 0$

luego existe un morfismo q' tal que $q'(p'\tau_{A_0})^{ck} = q$

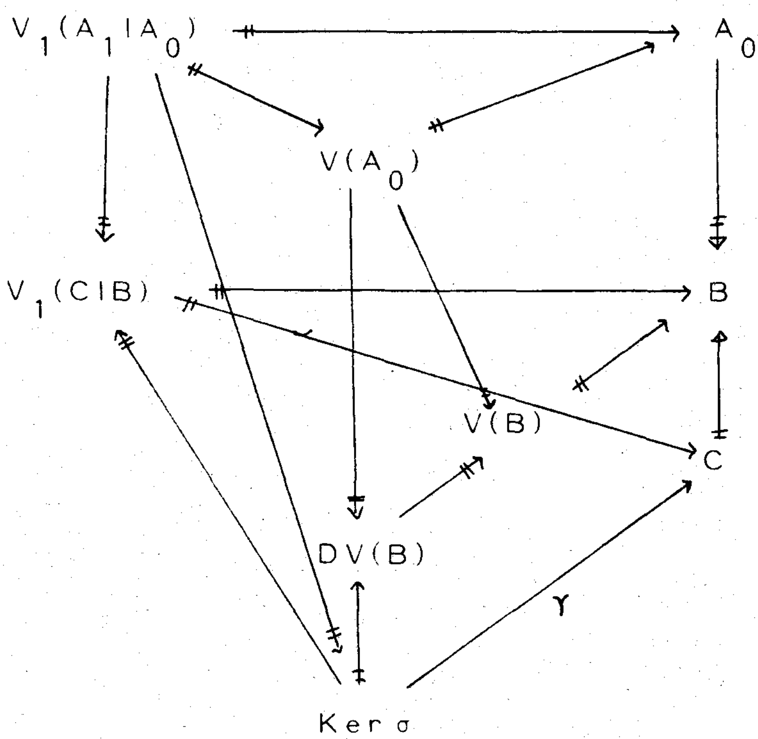
y así q' es un epimorfismo conormal por (1.1.2)vi).

Además $\tau_B q'(p'\tau_{A_0})^{ck} = \tau_B q = p'\tau_{A_0} = (p'\tau_{A_0})^{l}(p'\tau_{A_0})^{ck}$

de donde $\tau_B q' = (p'\tau_{A_0})^{l}$ luego q' es un monomorfismo normal por (1.1.2)vi) y por tanto un isomorfismo.

Pasemos ahora a comprobar que $\mathrm{Im}\gamma = V_1(C|B)$.

Consideremos el siguiente diagrama:



En dicho diagrama se verifica:

$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\,\sigma \twoheadrightarrow V_1(C|B) \rightarrowtail C \rightarrowtail B \; =$

$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow V_1(C|B) \rightarrowtail C \rightarrowtail B \; =$

$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow V_1(C|B) \rightarrowtail B$

$$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow \operatorname{Ker}\sigma \longrightarrow C \rightarrowtail B \;=$$

$$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow \operatorname{Ker}\sigma \rightarrowtail DV(B) \twoheadrightarrow V(B) \rightarrowtail B \;=$$

$$V_1(A_1|A_0) \rightarrowtail V(A_0) \twoheadrightarrow DV(B) \twoheadrightarrow V(B) \rightarrowtail B \;=$$

$$V_1(A_1|A_0) \rightarrowtail V(A_0) \rightarrowtail A_0 \twoheadrightarrow B \;=$$

$$V_1(A_1|A_0) \rightarrowtail A_0 \twoheadrightarrow B \;=$$

$$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow V_1(C|B) \rightarrowtail B$$

de donde se deduce la igualdad

$$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow \operatorname{Ker}\sigma \twoheadrightarrow V_1(C|B) \rightarrowtail C \rightarrowtail B \;=$$

$$V_1(A_1|A_0) \twoheadrightarrow \operatorname{Ker}\sigma \longrightarrow C \rightarrowtail B$$

y por tanto $\operatorname{Ker}\sigma \twoheadrightarrow V_1(C|B) \rightarrowtail C = \operatorname{Ker}\sigma \xrightarrow{\gamma} C$, esto es

$$\operatorname{Im}\gamma = V_1(C|B)$$

3. INVARIANTES DE BAER RELATIVOS.

3.1. CASO $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{W}}$.

(3.1.1) Sea $\underline{\underline{W}}$ una variedad de la categoria $\underline{\underline{C}}$ y $\underline{\underline{V}}$ una subvariedad de $\underline{\underline{W}}$, entonces W_1 es un subfuntor de V_1.

En efecto, probemos para ello que

$$W_1(A_1 | A_0) < W(A_0) \cap V_1(A_1 | A_0)$$

La demostración la efectuaremos, probando que si definimos $S(A_1 | A_0) = W(A_0) \cap V_1(A_1 | A_0)$ entonces $S \in F_W$.

i) Claramente S es un funtor de $\underline{\underline{C}}_p$ a $\underline{\underline{C}}$ verificando que $S(A_1 | A_0) < W(A_0)$ y $S(A_1 | A_0) \triangleleft A_0$.

ii) Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\
A_0 \arrow[r, tail, "a"] & A_0 \arrow[r, two heads, "a^c"] & A_0/A_1
\end{tikzcd}$$

verifcando $a^c f = a^c g$.

De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & W(X) \arrow[dl, "\tau_X"'] \arrow[dd, shift right, "W(f)"'] \arrow[dd, shift left, "W(g)"] & & \\
 & & V(X) \arrow[dd, shift right, "f"'] \arrow[dd, shift left, "g"] & & & \\
 & V_1(A_1 | A_0) \cap W(A_0) \arrow[rr, tail, "b"] \arrow[dl, "t"] & & W(A_0) \arrow[rr, two heads, "b^c"] \arrow[dl, "\tau_{A_0}"] & & W(A_0)/V_1(A_1 | A_0) \cap W(A_0) \arrow[dl, "s"] \\
V_1(A_1 | A_0) \arrow[rr, tail, "d"'] & & V(A_0) \arrow[rr, two heads, "d^c"'] & & V(A_0)/V_1(A_1 | A_0) &
\end{tikzcd}$$

y de $d^c V(f) = d^c V(g)$ se sigue que

$$s\, b^c\, W(f) = d^c\, \tau_{A_0}\, W(f) = d^c\, V(f)\, \tau_X = d^c\, V(g)\, \tau_X =$$

$$= d^c\, \tau_{A_0}\, W(g) = s\, b^c\, W(g)$$

de donde $b^c\, W(f) = b^c\, W(g)$.

Así por la minimalidad de W_1 tenemos que

$$W_1(A_1|A_0) < W(A_0) \cap V_1(A_1|A_0)$$

y por tanto que $W_1(A_1|A_0) < V_1(A_1|A_0)$.

(3.1.2) El siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\Delta W(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha"'] & DW(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta"'] & W(A) \arrow[d, tail, "\gamma"'] \\
\Delta V(A) \arrow[r, tail] & DV(A) \arrow[r, two heads] & V(A)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con filas exactas.

En efecto, la conmutatividad y exactitud se siguen de considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W_1(A_1|A_0) \arrow[rr, equal] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, tail] & & W_1(A_1|A_0) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, tail] & & 0 \arrow[dr, equal] \arrow[dd, tail] & \\
& V_1(A_1|A_0) \arrow[rr, equal] \arrow[dd, tail] & & V_1(A_1|A_0) \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, tail] & & 0 \arrow[dd, tail] \\
A_1 \cap W(A_0) \arrow[rr, tail] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, two heads] & & W(A_0) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, tail] \arrow[dd, two heads] & & W(A) \arrow[dr, tail] \arrow[dd, equal] & \\
& A_1 \cap V(A_0) \arrow[rr, tail] \arrow[dd, two heads] & & V(A_0) \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, two heads] & & V(A) \arrow[dd, equal] \\
\Delta W(A) \arrow[rr, tail] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & & DW(A) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & & W(A) \arrow[dr, tail, "\gamma"'] & \\
& \Delta V(A) \arrow[rr, tail] & & DV(A) \arrow[rr, two heads] & & V(A)
\end{tikzcd}$$

(3.1.3) Consideremos los diagramas conmutativos con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
W(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "\gamma"'] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A/W(A) \arrow[d, two heads] \\
V(A) \arrow[r, tail] & A \arrow[r, two heads] & A/V(A)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\Delta W(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha"'] & DW(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta"'] & W(A) \arrow[d, tail, "\gamma"'] \\
\Delta V(A) \arrow[r, tail] & DV(A) \arrow[r, two heads] & V(A)
\end{tikzcd}$$

Aplicando (1.1.23) al primer diagrama obtenemos el isomorfismo

$$Ker(A/W(A) \twoheadrightarrow A/V(A)) = Coker(W(A) \rightarrowtail V(A))$$

y en el segundo diagrama obtenemos el isomorfismo

$$Ker(\Delta W(A) \longrightarrow \Delta V(A) = Ker(DW(A) \text{——} DV(A))$$

junto con una sucesión exacta corta

$$Coker(\Delta W(A) \longrightarrow \Delta V(A)) \rightarrowtail Coker(DW(A) \longrightarrow DV(A)) \twoheadrightarrow Coker(W(A) \rightarrowtail V(A))$$

(3.1.4) Los nucleos y conucleos de α, β y γ en (3.1.2) son funtores de $\underline{\underline{C}}$ a $\underline{\underline{C}}$ y no dependen de la presentación proyectiva y serán llamados invariantes relativos de Baer-Fröhlich.

En efecto, claramente son funtores de $\underline{\underline{C}}$ en $\underline{\underline{C}}$. Además si $(A_1|A_0)$ y $(A_1'|A_0')$ son dos presentaciones proyectivas de A, como $\Delta V(A)$ y $\Delta W(A)$ no dependen de la presentación proyectiva de A, tampoco dependerá de la presentación proyectiva de A, $Coker(\Delta W(A) \longrightarrow \Delta V(A))$

Análogamente para los demás.

(3.1.5) Calculemos dichos invariantes en términos de una presentación proyectiva $(A_1|A_0)$ de A:

Del diagrama (3.1.2) se deduce que

$$\mathrm{Im}\,\alpha = \frac{A_1 \cap W(A_0)}{W(A_0)\cap V_1(A_1|A_0)}$$

$$\mathrm{Im}\,\beta = \frac{W(A_0)}{W(A_0)\cap V_1(A_1|A_0)}$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma = W(A)$$

de donde se sigue que

$$\mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Ker}(DW(A) \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\,\beta) = \frac{W(A_0)\cap V_1(A_1|A_0)}{W_1(A_1|A_0)}$$

$$\mathrm{Coker}\,\alpha = \mathrm{Coker}(\mathrm{Im}\,\alpha \rightarrowtail \Delta V(A)) =$$

$$= \frac{\dfrac{A_1\cap V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)}}{\dfrac{(A_1\cap W(A_0))\cup V_1(A_1|A_0)}{V_1(A_1|A_0)}} = \frac{A_1\cap V(A_0)}{(A_1\cap W(A_0))\cup V_1(A_1|A_0)} =$$

$$= \frac{W(A_0)\cup(A_1\cap V(A_0))}{W(A_0)\cup V_1(A_1|A_0)}$$

siendo los isomorfismos consecuencia de (1.1.14) y (1.1.16).

$$\mathrm{Coker}\,\beta = \mathrm{Coker}(\mathrm{Im}\,\beta \rightarrowtail DV(A)) =$$

$$= \frac{\dfrac{V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)}}{\dfrac{W(A_0)\cup V_1(A_1|A_0)}{V_1(A_1|A_0)}} = \frac{V(A_0)}{W(A_0)\cup V_1(A_1|A_0)}$$

siendo el isomorfismo consecuencia de (1.1.14)

$$\mathrm{Coker}\ \gamma = \frac{\dfrac{V(A_0)\cup A_1}{A_1}}{\dfrac{W(A_0)\cup A_1}{A_1}} = \frac{V(A_0)\cup A_1}{W(A_0)\cup A_1}$$

siendo el isomorfismo consecuencia de (1.1.14).

(3.1.6) En el caso de que $A \in \underline{\underline{W}}$ y la presentación $(A_1|A_0)$ de A sea W-proyectiva, los invariantes (3.1.5) adoptan las siguientes expresiones:

$$\mathrm{Coker}\ \alpha = A_1 \cap V(A_0)/V_1(A_1|A_0)$$

$$\mathrm{Coker}\ \beta = V(A_0)/V_1(A_1|A_0)$$

$$\mathrm{Coker}\ \gamma = V(A_0 \cup A_1/A_1$$

$$\mathrm{Ker}\ \beta = 0$$

La demostración se sigue de (3.1.5) teniendo en cuenta que en este caso $W(A_0) = 0$.

(3.1.7) Si $\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{C}}$, los invariantes de Baer-Fröhlich coinciden con los invariantes absolutos definidos en (2.2).

Inmediato a partir de (3.1.6).

(3.1.8) Las imágenes de α , β y γ definidas en (3.1.5) son funtores de $\underline{\underline{C}}$ en $\underline{\underline{C}}$ y no dependen de la presentación proyectiva y serán llamados invariantes de Baer-Furtado.

La demostración es análoga a la efectuada en (3.1.4).

(3.2.5) Si $(A_1 | A_0)$ es una presentación proyectiva de $A \in \underline{\underline{W}}$, entonces $(A_1/W(A_0) | A_0/W(A_0))$ es una presentación W-proyectiva de A.

En efecto, si $(A_1 | A_0)$ es una presentación proyectiva de A, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W(A_0) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & W(A_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & W(A)=0 \arrow[d, tail] \\
A_1 \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & A_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\bullet"] & A \in \underline{\underline{W}} \arrow[d, equal] \\
A_1/W(A_0) \arrow[r, tail] & A_0/W(A_0) \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

Por (1.1.10) la fila inferior es exacta y así por (1.3.12) $(A_1/W(A_0)/A_0/W(A_0))$ es una presentación W-proyectiva de A.

(3.2.6) Por (3.2.5) si $(A_1 | A_0)$ es una presentación proyectiva de $A \in \underline{\underline{W}}$, $(A_1/W(A_0) | A_0/W(A_0))$ es una presentación W-proyectiva de A, de donde, podemos calcular los invariantes de Baer relativos definidos en (3.2.2) en terminos de dicha presentación :

$$L(V,W)(A) = \frac{V\left(\frac{A_0}{W(A_0)}\right) \cap \frac{A_1}{W(A_0)}}{V_1\left(\frac{A_1}{W(A_0)} \Big| \frac{A_0}{W(A_0)}\right)} = \frac{\frac{W(A_0) \cup V(A_0)}{W(A_0)} \cap \frac{A_1}{W(A_0)}}{\frac{V_1(A_1 | A_0) \cup W(A_0)}{W(A_0)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{(W(A_0) \cup V(A_0)) \cap A_1}{W(A_0)}}{\dfrac{V_1(A_1|A_0) \cup W(A_0)}{W(A_0)}} = \frac{(W(A_0) \cup V(A_0)) \cap A_1}{V_1(A_1|A_0) \cup W(A_0)} = \frac{(A_1 \cap V(A_0)) \cup W(A_0)}{V_1(A_1|A_0) \cup W(A_0)}$$

El primer isomorfismo es consecuencia de (2.2.9) y (2.3.2) el segundo por (1.1.11), el tercero por (1.1.14) y el cuarto por (1.1.17).

$$D(V,W)(A) = \frac{V(\dfrac{A_0}{W(A_0)})}{V_1(\dfrac{A_1}{W(A_0)}|\dfrac{A_0}{W(A_0)})} = \frac{\dfrac{W(A_0) \cup V(A_0)}{W(A_0)}}{\dfrac{V_1(A_1|A_0) \cup W(A_0)}{W(A_0)}} =$$

$$= \frac{W(A_0) \cup V(A_0)}{V_1(A_1|A_0) \cup W(A_0)}$$

Los isomorfismos son por (2.2.9),(2.3.2) y (1.1.14).

$$\nabla(V,W)(A) = \frac{V(\dfrac{A_0}{W(A_0)})}{V(\dfrac{A_0}{W(A_0)}) \cap \dfrac{A_1}{W(A_0)}} = \frac{\dfrac{W(A_0) \cup V(A_0)}{W(A_0)}}{\dfrac{W(A_0) \cup V(A_0)}{W(A_0)} \cap \dfrac{A_1}{W(A_0)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{W(A_0) \cup V(A_0)}{W(A_0)}}{\dfrac{(W(A_0) \cup V(A_0)) \cap A_1}{W(A_0)}} = \frac{W(A_0) \cup V(A_0)}{(W(A_0) \cup V(A_0)) \cap A_1}$$

Los isomorfismos son por (2.2.9),(1.1.11) y (1.1.14).

(3.2.7) Si $\underline{\underline{W}} \subset \underline{\underline{V}}$, los invariantes de Baer relativos definidos en (3.2.2) coinciden con los invariantes de Baer relativos definidos en (3.1.5).

La comprobación es inmediata, ya que en este caso $W(A_0) \cup V(A_0) = W(A_0)$.

3.3. EL SEGUNDO FUNTOR DE HOMOLOGIA VARIETAL.

(3.3.1) Sea $\underline{\underline{C}}$ una categoria de Kurosh y $\underline{\underline{V}}$ y $\underline{\underline{W}}$ subvariedades de $\underline{\underline{C}}$. Utilizando el tercer invariante de Baer absoluto ΔV, definimos para $A \in \underline{\underline{W}}$:

$$\Delta(V,W)(A) = \mathrm{Coker}(\Delta V(A_0) \longrightarrow \Delta V(A))$$

siendo $(A_1 | A_0)$ una presentación W-proyectiva de A.

(3.3.2) La definición de $\Delta(V,W)(A)$ no depende de la presentación W-proyectiva de A. Además

$$\Delta(V,W) : \underline{\underline{W}} \longrightarrow \underline{\underline{C}}$$

es un funtor.

Sean $(A_1 | A_0)$ y $(A_1' | A_0')$ dos presentaciones W-proyevtivas de A. Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[rr, shift left, "h"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & A_0' \arrow[ll, shift left, "h'"] \arrow[dl, two heads, "p'"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

y utilizando la funtorialidad de ΔV (2.2.5), también es conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Delta V(A_0) \arrow[rr, shift left, "h_*"] \arrow[dr, "p_*"'] & & \Delta V(A_0') \arrow[ll, shift left, "h_*'"] \arrow[dl, "p_*'"] \\ & \Delta V(A) & \end{tikzcd}$$

Entonces $p_*^c = (p'_* h_*)^c > p'^c_*$. Análogamente $p'^c_* < p^c_*$. En consecuencia $\Delta(V,W)(A)$ es independiente de la presentación W-proyectiva de A.

Sea $f:A \longrightarrow A'$ un morfismo en $\underline{\underline{W}}$ y $(A_1|A_0)$ y $(A'_1|A'_0)$ presentaciones W-proyectivas de A y A′ respectivamente. Entonces se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, twoheadrightarrow, "p"] \arrow[d, "f_0"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A'_0 \arrow[r, twoheadrightarrow, "p'"'] & A' \end{tikzcd}$$

del cual se deduce:

$$\begin{tikzcd} \Delta V(A_0) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_{0*}"'] & \Delta V(A) \arrow[r, twoheadrightarrow, "p_*^c"] \arrow[d, "f_*"] & \Delta(V,W)(A) \arrow[d, "\Delta(V,W)(f)"] \\ \Delta V(A'_0) \arrow[r, "p'_*"'] & \Delta V(A') \arrow[r, twoheadrightarrow, "p'^c_*"'] & \Delta(V,W)(A') \end{tikzcd}$$

y por tanto la funtorialidad de $\Delta(V,W)$.

(3.3.3) De (3.3.2) deducimos que el funtor definido en (3.3.1) es un invariante de Baer relativo.

(3.3.4) Si $\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{C}}$, entonces $\Delta(V,W) = \Delta V$.

En efecto, sea $(A_1|A_0)$ una presentación W-proyectiva de A. Por la hipótesis A_0 es proyectiva, y así, teniendo en cuenta (2.2.11) $\Delta V(A_0) = 0$. Por tanto $\Delta(V,W)(A) = \Delta V(A)$.

(3.3.5) Si A es W-proyectivo entonces $\Delta(V,W)(A) = 0$.

Se considera la presentación W-proyectiva $(0|A)$ de A, de donde se deduce que $\Delta(V,W)(A) = 0$.

(3.3.6) Si $(A_1|A_0)$ es una presentación proyectiva de $A \in \underline{\underline{W}}$, por (3.2.5) ,$(A_1/W/A_0)|A_0/W(A_0))$ es una presentación W-proyectiva de A, de donde el funtor $\Delta(V,W)$ calculado en A, adopta la siguiente expresión:

$$\Delta(V,W)(A) = \frac{\dfrac{A_1 \cap V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)}}{\dfrac{(W(A_0) \cap V(A_0)) \cup V_1(A_1|A_0)}{V_1(A_1|A_0)}} =$$

$$= \frac{(A_1 \cap V(A_0))}{(W(A_0) \cap V(A_0)) \cup V_1(A_1|A_0)} =$$

$$= \frac{(A_1 \cap V(A_0)) \cup W(A_0)}{W(A_0) \cup (V_1(A_1|A_0) \cap A_1)} = \frac{(A_1 \cap V(A_0)) \cup W(A_0)}{W(A_0) \cup V_1(A_1|A_0)}$$

Los isomorfismos son consecuencia de (1.1.14),(1.1.16) y (1.1.17).

(3.3.7) Comparando la expresión obtenida para $\Delta(V,W)$ en (3.3.6) con la obtenida para $L(V,W)$ en (3.2.6), comprobamos que ambas coinciden y que por tanto

$$\Delta(V,W) = L(V,W)$$

(3.3.8) Si $\underline{\underline{C}}$ es la categoria de grupos y $\underline{\underline{V}}$ la variedad de grupos abelianos de exponente q eentonces el funtor $\Delta(V,W)$ coincide con el W^q introducido por Stammbach ([54], p.42).

En efecto, sea A un grupo en la variedad $\underline{\underline{W}}$, $(R|F)$ una presentación W-libre de A y $(R'|F')$ una presentación libre de F. Sea N el nucleo de $F' \twoheadrightarrow F \twoheadrightarrow A$, entonces $(N|F')$ es una presentación libre de A. Teniendo en cuenta que si $V(F') = F' \#_q F'$ entonces $V_1(N|F') = N \#_q F'$ y análogamente $V_1(R'|F') = R' \#_q F'$ ([50]), y que $H_2(A, Z_q) = F' \#_q F' \cap N / N \#_q F'$ ([54], p.17), se obtiene

$$\Delta V(F) = H_2(F, Z_q) \text{ y } \Delta V(A) = H_2(A, Z_q)$$

Por tanto $\Delta(V,W)(A) = W^q(A)$.

3.4 (V,W)-SUCESION EXACTA DE CINCO TERMINOS.

(3.4.1) Sea $\underset{=}{C}$ una categoria de Kurosh, y $\underset{=}{V}$ y $\underset{=}{W}$ dos variedades de $\underset{=}{C}$.

Si $C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es una sucesión exacta corta en $\underset{=}{W}$, entonces se tiene una sucesión exacta y natural

$$\Delta(V,W)(B) \longrightarrow \Delta(V,W)(A) \longrightarrow C/V_1(C|B) \longrightarrow B/V(B) \twoheadrightarrow A/V(A)$$

En efecto, sean $(A_1|A_0)$ y $(B_1|B_0)$ dos presentaciones W-proyectivas de A y B respectivamente con $A_0 = B_0$.

Utilizando (2.3.2) se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Delta V(A_0) \arrow[r, equal] \arrow[d, "p'_*"'] & \Delta V(A_0) \arrow[d, "\bar{p}_*"] & & & & \\
\Delta V(B) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, two heads, "p'^{c}_*"'] & \Delta V(A) \arrow[r, two heads, "p^c_*"] \arrow[d, two heads, "\bar{p}^{c}_*"] & \cdot \arrow[r, tail] & C/V_1(C|B) \arrow[r] & B/V(B) \arrow[r, two heads] & A/V(A) \\
\Delta(V;W)(B) \arrow[r, "\Delta(V,W)(p)"'] \arrow[ur, phantom, "\bullet"] & \Delta(V,W)(A) \arrow[ur, tail, "\Delta(V,W)(p)^c"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado inferior es cocartesiano y por tanto los conucleos de p_* y $\Delta(V,W)(p)$ tienen el mismo rango ([45] ,p.28 y 32). Se deduce asíla exactitud de la sucesión.

(3.4.2) Si $\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{C}}$, entonces por (3.3.7) $\Delta(V,W) = \Delta V$, luego la sucesión que aparece en (2.3.2) es un caso particular de la obtenida en (3.4.1).

4. SERIES V-CENTRALES.

4.1. V-CENTRO.

(4.1.1) Impondremos, en este apartado, que la categoria $\underline{\underline{C}}$ verifique el siguiente axioma:

A.6*. La unión de subobjetos V-centrales es V-central, para toda variedad $\underline{\underline{V}}$ de $\underline{\underline{C}}$.

(4.1.2) Llamaremos V-centro del objeto A al par ideal (B|A) que es maximal respecto de la condición $V_1(B|A)=0$.

Denotaremos por $V^*(A)$ al dominio del V-centro de A.

(4.1.3) $V_1(B|A)$ es el menor ideal J de A, con $J<B$ tal que $B/J < V^*(A/J)$

En efecto:

$V_1(B/J|A/J) < V_1(V^*(A/J)|A/J) = 0$

pero ya que $V_1(B/J|A/J) = V_1(B|A) \cup J/J$ (2.3.2) se sigue que $V_1(B|A) < J$

(4.1.4) $V(V^*(A)) = 0$

En efecto, se tiene que $V(A) = V_1(A|A)$, por tanto $V(V^*(A)) = V_1(V^*(A)|V^*(A)) < V_1(V^*(A)|A) = 0$.

(4.1.5) $V^*(A) \in \underline{\underline{V}}$ para todo $A \in \underline{\underline{C}}$..

Es consecuencia inmediata de (4.1.4).

(4.1.6) $A \in \underline{\underline{V}}$ si y solo si $V^*(A) = A$.

En efecto:

$A \in \underline{\underline{V}} \Longrightarrow V(A)=0 \Longrightarrow V_1(A|A)=V(A)=0 \Longrightarrow A < V^*(A)$

y como $V^*(A) < A$ se tiene la igualdad.

La implicación recíproca se sigue de (4.1.5).

(4.1.7) Si $B \triangleleft A$ y $B \cap V(A) = 0$ entonces $B < V^*(A)$.

En efecto:

$V_1(B|A) < B \cap V(A) = 0 \Longrightarrow B < V^*(A)$.

(4.1.8) $V^*(V^*(A)) = V^*(A)$.

En efecto:

$0 = V(V^*(A)) = V_1(V^*(A)|V^*(A)) \Longrightarrow V^*(A) < V^*(V^*(A))$

y como $V^*(V^*(A)) < V^*(A)$ se sigue la igualdad.

(4.1.9) Sean W y V subfuntores variedad. Si $W < V$ entonces $V^* < W^*$.

En efecto, si $W < V$ entonces $W_1 < V_1$ por (3.1.1) luego $W_1(V^*(A)|A) < V_1(V^*(A)|A) = 0$ y así $V^*(A) < W^*(A)$.

(4.1.10) Se llama serie normal de subobjetos de A a una serie del tipo

$$A = A_0 > A_1 > \ldots > A_n > \ldots$$

donde cada A_i es normal en A_{i-1}.

Se llama serie invariante de subobjetos de A a una serie del tipo

$$A = A_0 > A_1 > \ldots > A_n > \ldots$$

tal que A_i es normal en A para todo i.

Toda serie invariante es normal.

Una serie V-central de subobjetos de A es una serie invariante tal que

$$A_{i-1}/A_i < V^*(A/A_i)$$

(4.1.11) Como sabemos para todo $A \in \underline{\underline{C}}$, V(A) es normal en A, luego (V(A)|A) es un par ideal. Así podemos considerar $V_1(V(A)|A)$. Por definición $V_1(V(A)|A) \triangleleft A$.

Además $V_1(V(-)|-)$ es un subfuntor del funtor identidad en $\underline{\underline{C}}$ que conserva conormales (ya que V lo hace), por tanto es un funtor variedad.

Escribamos:

$$V^0(A) = A,\ V^1(A) = V(A),\ \ldots,\ V^{n+1}(A) = V_1(V^n(A)|A)$$

Denotaremos por $V\ (A) =: \cap V^n(A)$.

Ya que por (2.1.13) $V(B) \triangleleft V_1(B|A)$ para todo par ideal (B|A) tenemos la serie invariante

$$A = V^0(A) > V^1(A) > \ldots > V^n(A) > \ldots$$

(4.1.12) Para todo $A \in \underline{\underline{C}}$ se verifica

$$V^n(A)/V^{n+1}(A) < V^*(A/V^{n+1}) \qquad n \geqslant 0$$

En efecto:

$$V_1(V^n(A)/V^{n+1}(A)|A/V^{n+1}(A)) = V^{n+1}(A)/V^{n+1}(A) = 0$$

luego $\quad V^n(A)/V^{n+1}(A) < V^*(A/V^{n+1}(A)) \qquad n \geqslant 0.$

La serie definida en (4.1.11) es V-central y la llamaremos la serie V-central inferior de A.

(4.1.13) $V^n(A)/V^{n+1}(A) \in \underline{\underline{V}}$ $\quad n \geqslant 0$.

En efecto, para n=0 es cierto trivialmente. Supongamos el enunciado cierto para $V^n(A)/V^{n+1}(A)$ con $n > 0$.

Sabemos pues, que $V^n(A)/V^{n+1}(A) \in \underline{\underline{V}}$, pero $V(V^{n+1}(A)) = V_1(V^{n+1}(A)|V^{n+1}(A)) < V_1(V^{n+1}(A)|A) = V^{n+2}(A)$ luego $V^{n+1}(A)/V^{n+2}(A) \in \underline{\underline{V}}$.

(4.1.14) Un objeto A $\underline{\underline{C}}$ se dice V-nilpotente de clase n si $V^n(A) = 0$.

4.2. TEOREMA DE SERIES V-CENTRALES.

(4.2.1) Sea $f:A \longrightarrow B$ un morfismo en $\underset{=}{W}$. Supongamos que f induce un isomorfismo $A/V(A) = B/V(B)$ y un epimorfismo conormal $\Delta(V,W)(A) \twoheadrightarrow \Delta(V,W)(B)$. Si f induce un isomorfismo $A/V^n(A) = B/V^n(B)$ entonces f induce isomorfismos $V^n(A)/V^{n+1}(A) = V^n(B)/V^{n+1}(B)$ y $A/V^{n+1}(A) = B/V^{n+1}(B)$.

Aplicando (3.4.1) a las sucesiones exactas cortas:

$$V^n(A) \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/V^n(A) \quad \text{y} \quad V^n(B) \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B/V^n(B)$$

se obtiene el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
\Delta(V,W)(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_5"] & \Delta(V,W)\left(\frac{A}{V^n(A)}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & \frac{V^n(A)}{V^{n+1}(A)} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & \frac{A}{V(A)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha_2"] & \frac{\frac{A}{V^n(A)}}{V\left(\frac{A}{V^n(A)}\right)} \arrow[d, "\alpha_1"] \\
\Delta(V,W)(B) \arrow[r] & \Delta(V,W)\left(\frac{B}{V^n(B)}\right) \arrow[r] & \frac{V^n(B)}{V^{n+1}(B)} \arrow[r] & \frac{B}{V(B)} \arrow[r, two heads] & \frac{\frac{B}{V^n(B)}}{V\left(\frac{B}{V^n(B)}\right)}
\end{tikzcd}$$

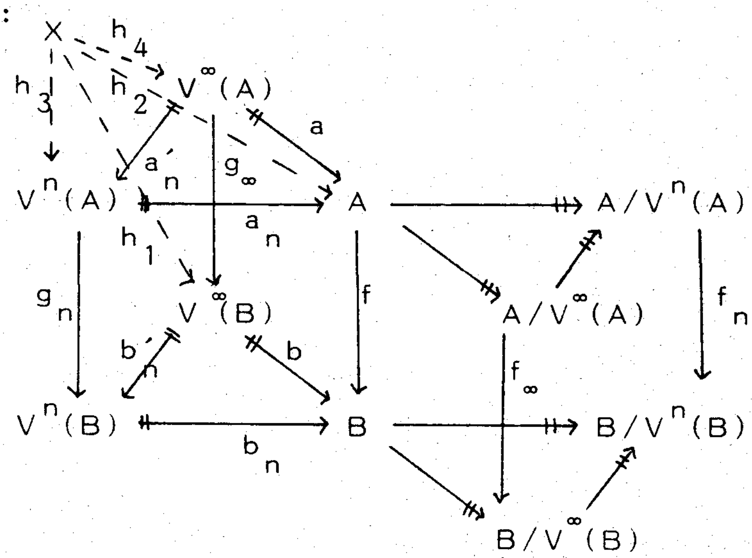
Por hipótesis α_5 es un epimorfismo conormal y α_2 es un isomorfsimo. Además α_4 y α_1 son isomorfismos y utilizando (1.1.20) se deduce que α_3 es un isomorfismo, esto prueba la primera parte; la segunda parte se deduce de considerar el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
V^n(A)/V^{n+1}(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha_3"'] & A/V^{n+1}(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & A/V^n(A) \arrow[d, "f_n"] \\
V^n(B)/V^{n+1}(B) \arrow[r, tail] & B/V^{n+1}(B) \arrow[r, two heads] & B/V^n(B)
\end{tikzcd}$$

Ya que α_3 y f_n son isomorfismos se deduce por (1.1.18) vi) que f_{n+1} es un isomorfismo.

(4.2.2) Sea $f:A \longrightarrow B$ un morfismo en $\underline{\underline{W}}$. Si f induce un isomorfismo $A/V^n(A) = B/V^n(B)$ para todo $n > 0$, entonces f induce un monomorfismo $A/V^{\infty}(A) \rightarrowtail B/V^{\infty}(B)$.

Para probar que f_{∞} es un monomorfismo, basta considerar el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:



Por (1.1.18) f_∞ es un monomorfismo si y solo si el cuadrado $f\,a = b\,g$ es cartesiano.

Así pues sean h_1 y h_2 dos morfismos tales que $b\,h_1 = f\,h_2$, pero ya que $f\,a_n = b_n\,g_n$ es cartesiano por (1.1.18) y $f\,h_2 = b\,h_1 = b_n\,b'_n\,h_1$, existe h_3 tal que $a_n\,h_3 = h_2$ y $g_n\,h_3 = b'_n\,h_1$ y ya que $V^\infty(A) = \bigcap V^n(A)$ existe h_4 verificando $a\,h_4 = h_2$. Por tanto $b\,g_\infty\,h_4 = f\,a\,h_4 = f\,h_2 = b\,h_1 \Longrightarrow g_\infty\,h_4 = h_1$ y el cuadrado es cartesiano.

(4.2.3) Sea $f:A \twoheadrightarrow B$ un epimorfismo conormal en $\underline{\underline{W}}$. Si f induce un isomorfismo $A/V^n(A) = B/V^n(B)$ para todo $n>0$, entonces f induce un isomorfismo $A/V^\infty(A) = B/V^\infty(B)$.

En efecto, f induce un morfismo f_∞ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads] \\ A/V^\infty(A) \arrow[r, dash, "f_\infty"'] & B/V^\infty(B) \end{tikzcd}$$

Así f_∞ es un isomorfismo por (1.1.2)vi) y (4.2.2).

(4.2.4) Sea $f:A \longrightarrow B$ un morfismo en $\underline{\underline{W}}$ que induce un isomorfismo $A/V(A) = B/V(B)$ y un epimorfismo conormal $\Delta(V,W)(A) \twoheadrightarrow \Delta(V,W)(B)$. Entonces f induce un isomorfismo $f_n : A/V^n(A) = B/V^n(B)$ para todo $n>0$, también induce un monomorfismo $f_\infty : A/V^\infty(A) \rightarrowtail B/V^\infty(B)$.

Si además f es un epimorfismo conormal, entonces f es un isomorfismo.

La demostración se realiza por inducción sobre n teniendo en cuenta los resultados de (4.2.1) ,(4.2.2) y (4.2.3).

(4.2.5) Sea $f:A\longrightarrow B$ un morfismo en $\underline{\underline{W}}$ de objetos V-nilpotentes ,que induce un isomorfismo $A/V(A) = B/V(B)$ y un epimorfismo conormal $\Delta(V,W)(A)\longrightarrow\!\!\!\!\to \Delta(V,W)(B)$. Entonces f es un isomorfismo.

Ya que A y B son V-nilpotentes, existe un n tal que $V^n(A) = V^n(B) = 0$. Basta pues aplicar (4.2.4) para obtener el resultado.

(4.2.6) Supongamos que A,B $\underline{\underline{W}}$ son objetos V-nilpotentes. Si $\Delta(V,W)(A) = 0$ entonces un morfismo $f:A\longrightarrow B$ es un isomorfismo si y solo si lo es $A/V(A)\longrightarrow B/V(B)$. En particular esto es así, si B es W-proyectivo.

El resultado se deduce de (4.2.5).

Resaltemos que si $A,B \in \underline{\underline{W}}$ y B es W-proyectivo, entonces $\Delta(V,W)(B) = 0$ por (3.3.5).

(4.2.7) Sea $A \in \underline{\underline{W}}$ tal que $\Delta(V,W)(A) = 0$. Si $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para un proyectivo F', entonces existe un objeto W-proyectivo F y un morfismo f induciendo un isomorfismo $f_n : F/V^n(F) = A/V^n(A)$ para todo $n \geq 0$ y un monomorfismo $f_\infty : F/V^\infty(F) \rightarrowtail A/V^\infty(A)$.

Por hipótesis existe un proyectivo F' tal que

$A/V(A) = (1/V)(1/W)(F') = (1/V)(F'/W(F')) = F'/V(F') \cup W(F')$

Llamemos F a $F'/W(F')$. F es pues W-proyectivo y considerando el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V(F')\cap W(F') \arrow[rr, tail] \arrow[d, tail] & & W(F') \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, tail] & & W(F')/V(F') \quad W(F') \arrow[dd, tail] \\
& V(F')\cup W(F') \arrow[dr, tail] & & & \\
V(F') \arrow[rr, tail] \arrow[d, two heads] & & F' \arrow[rr, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[drr, two heads] & & F'/V(F') \arrow[d, two heads] \\
V(F')/V(F')\cap W(F') \arrow[rr, tail] & & F \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, dashed] & & A/V(A) \\
& & & A \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

Ya que $A \in \underline{\underline{W}}$ y $A/V(A) \in \underline{\underline{V}} \cap \underline{\underline{W}}$, existe $f: F \longrightarrow A$ haciendo el triángulo inferior del diagrama conmutativo.
Como además

$F/V(F) = F'/W(F')/V(F'/W(F')) = F'/W(F')/V(F') \cup W(F')/W(F') = F'/V(F') \cup W(F')$

$= A/V(A)$

y $\Delta(V,W)(A) = 0$, de (4.2.4) se sigue el resultado.

(4.2.8) Supongamos que $\underline{\underline{W}}$ es una variedad V-nilpotente. Sea $A \in \underline{\underline{W}}$ tal que $\Delta(V,W)(A) = 0$. Si $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para un proyectivo F', entonces A es W-proyectivo.

Por (4.2.7), existe un objeto W-proyectivo F tal que $f_n : F/V^n(F) = A/V^n(A)$ para todo $n \geq 0$. Ya que $\underline{\underline{W}}$ es V-nilpotente, existe un n tal que $V^n(A) = V^n(F) = 0$, luego $A = F$.

4.3. V-NILPOTENCIA RESIDUAL.

(4.3.1) Un objeto $A \in \underline{\underline{W}}$, se dice residualmente V-nilpotente si $V^{\infty}(A) = 0$.

(4.3.2) Sea $\underline{\underline{W}}$ una variedad tal que los objetos W-proyectivos son residualmente V-nilpotentes y $A \in \underline{\underline{W}}$ con $\Delta(V,W)(A) = 0$. Si $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para un proyectivo F', entonces existe un monomorfismo $f : F \longrightarrow A$ con F, W-proyectivo.

Por (4.2.7) existe un objeto W-proyectivo F y un morfismo $f:F \longrightarrow A$, tal que induce un monomorfismo f_{∞}: $F/V^{\infty}(F) \rightarrowtail A/V^{\infty}(A)$. Pero ya que $V^{\infty}(F) = 0$, por hipótesis, del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, two heads] \\
F/V^{\infty}(F) \arrow[r] & A/V^{\infty}(A)
\end{tikzcd}$$

se deduce que f es un monomorfismo.

(4.3.3) Sea $\underline{\underline{W}}$ una variedad tal que los objetos W-proyectivos son residualmente V-nilpotentes y A un objeto W-proyectivo. Si $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para un proyectivo F', entonces existe un monomorfismo $f : F \longrightarrow A$ con F, W-proyectivo.

El resultado se sigue trivialmente de (4.3.2), ya que en este caso $A \in \underline{\underline{W}}$, y $\Delta(V,W)(A) = 0$.

4.4. OBJETOS W-PARAPROYECTIVOS.

(4.4.1) Diremos que dos objetos A y B tienen la misma serie V-central inferior si existen isomorfismos

$$f_n : A/V^n(A) \cong B/V^n(B) \qquad n \geqslant 0$$

tal que para todo $n \geqslant 0$ el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A/V^{n+1}(A) & \twoheadrightarrow & A/V^n(A) \\ {\scriptstyle f_{n+1}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f_n} \\ B/V^{n+1}(B) & \twoheadrightarrow & B/V^n(B) \end{array}$$

es conmutativo.

(4.4.2) Un objeto W-paraproyectivo es un objeto A tal que:

i) $A \in \underline{\underline{W}}$

ii) A es residualmente V-nilpotente

iii) A tiene la misma serie V-central inferior que un objeto W-proyectivo.

(4.4.3) Si $\underline{\underline{W}}$ es una variedad tal que los objetos W-proyectivos son residualmente V-nilpotentes, entonces todo objeto W-proyectivo es W-paraproyectivo.

Es evidente por definición.

(4.4.4) Supongamos que A tiene la misma serie V-central inferior que algún objeto W-proyectivo y sea

$$g_n : A \twoheadrightarrow A/V^n(A) \qquad n \geqslant 1$$

Entonces $(g_n)_* : \Delta(V,W)(A) \longrightarrow \Delta(V,W)(A/V^n(A))$ es el morfismo cero.

Por hipótesis, existe un objeto W-proyectivo F e isomorfismos

$$f_n : F/V^n(F) \cong A/V^n(A) \qquad n \geqslant 0$$

tal que para todo $n \geqslant 0$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
F/V^{n+1}(F) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & F/V^n(F) \arrow[d, "f_n"] \\
A/V^{n+1}(A) \arrow[r, two heads] & A/V^n(A)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
V^n(F)/V^{n+1}(F) \arrow[r, tail] \arrow[d, "h_n"'] & F/V^{n+1}(F) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{n+1}"] & F/V^n(F) \arrow[d, "f_n"] \\
V^n(A)/V^{n+1}(A) \arrow[r, tail] & A/V^{n+1}(A) \arrow[r, two heads] & A/V^n(A)
\end{tikzcd}$$

se verifica que h_n es un isomorfismo (1.1.18)vii).

Consideremos a continuación el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \Delta(V,W)(\frac{F}{V^n(F)}) \arrow[r] \arrow[d, "(f_n)_*"'] & \frac{V^n(F)}{V^{n+1}(F)} \arrow[r] \arrow[d, "h_n"'] & \frac{F}{V(F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_1"'] & \frac{F/V^n(F)}{V(F/V^n(F))} \arrow[d, "(f_n)_*"] \\
\Delta(V,W)(A) \arrow[r, "(g_n)_*"'] & \Delta(V,W)(\frac{A}{V^n(A)}) \arrow[r] & \frac{V^n(A)}{V^{n+1}(A)} \arrow[r] & \frac{A}{V(A)} \arrow[r, two heads] & \frac{A/V^n(A)}{V(A/V^n(A))}
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo por (4.2.1). Ya que f_n es un isomorfismo, $(f_n)_*$ también lo es. El hecho de que h_n es un isomorfismo entonces establece que $(g_n)_*$ es el morfismo cero.

(4.4.5) Sea $f:A \longrightarrow B$ un morfismo en $\underline{\underline{W}}$, tal que f induce un isomorfismo $A/V(A) = B/V(B)$. Supongamos también que $(g_n)_* : \Delta(V,W)(B) \longrightarrow \Delta(V,W)(B/V^n(B))$ es el morfismo cero para todo $n \geqslant 1$. Entonces f induce isomorfismos $f_n : A/V^n(A) = B/V^n(B)$ para todo $n \geqslant 0$ y un monomorfismo $f_\infty : A/V^\infty(A) \rightarrowtail B/V^\infty(B)$.

La demostración es la misma que la del teorema (4.2.4), la única diferencia es que α_5 en el diagrama (4.2.1) no es necesariamente un epimorfismo conormal. Sin embargo en nuestro caso $(g_n)_*$ es el morfismo cero y podemos reemplazar en dicho diagrama el objeto $\Delta(V,W)(B)$ por el objeto cero.

(4.4.6) Supongamos que $(g_n)_* : \Delta(V,W)(A) \longrightarrow \Delta(V,W)(A/V^n(A))$ es el morfismo cero para $n \geqslant 1$. Entonces si $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para algún proyectivo F', entonces existe un objeto W-proyectivo F y un morfismo $f:F \longrightarrow A$ tal que f induce isomorfismos

$$f_n : F/V^n(F) = A/V^n(A) \qquad n \geqslant 0$$

De forma análoga a (4.2.7), existe un objeto W-proyectivo F y un morfismo $f:F \longrightarrow A$ tal que $A/V(A) = F/V(F)$. El resto se deduce de (4.4.5).

(4.4.7) Sea $A \in \underline{\underline{W}}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A tiene la misma serie V-central inferior que algún objeto W-proyectivo.

ii) $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para un objeto proyectivo F', y $(g_n)_*:\Delta(V,W)(A)\longrightarrow\Delta(V,W)(A/V^n(A))$ es el morfismo cero para todo $n\geq 1$.

iii) existe un objeto W-proyectivo F, un morfismo $f:F\longrightarrow A$ tal que $f_n:F/V^n(F) = A/V^n(A)$ $n\geq 0$.

Se deduce inmediatamente de (4.4.4) y (4.4.6).

(4.4.8) Sea $A \in \underline{\underline{W}}$ residualemente V-nilpotente con $A/V(A)$ de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para un proyectivo F' y $\Delta(V,W)(A) = 0$. Entonces A es W-paraproyectivo.

Es consecuencia inmediata de (4.4.2) y (4.4.7).

(4.4.9) Sea $\underline{\underline{W}}$ una variedad tal que los objetos W-proyectivos son residualmente V-nilpotentes. Si A es W-paraproyectivo, entonces existe un objeto W-proyectivo F y un monomorfismo $f:F\rightarrowtail A$ induciendo isomorfismos

$$f_n:F/V^n(F) = A/V^n(A) \quad n\geq 0$$

De (4.4.5) y (4.4.6) se deduce que existe un morfismo $f:F\longrightarrow A$ con F, W-proyectivo induciendo un monomorfismo $f_\infty:F/V^\infty(F)\rightarrowtail A/V^\infty(A)$. Ya que $V^\infty(F) = 0$ el morfismo f_∞ se factoriza como $F\xrightarrow{f} A\twoheadrightarrow A/V^\infty(A)$, por tanto f es un monomorfismo verificando las propiedades requeridas.

(4.4.10) Sea $f:A \longrightarrow B$ un morfismo en $\underline{\underline{W}}$. Supongamos que B es W-paraproyectivo y que B es residualmente V-nilpotente. Si $A/V(A) = B/V(B)$ entonces A es W-paraproyectivo y f es un monomorfismo.

Es consecuencia inmediata de (4.4.5).

5. EXTENSIONES V-CENTRALES.

5.1. EXTENSIONES EN UNA VARIEDAD $\underline{\underline{V}}$

(5.1.1) La sucesión exacta corta

$$E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$$

es llamada una extensión en $\underline{\underline{V}}$, si $B \in \underline{\underline{V}}$.

Resaltemos que entonces $A, C \in \underline{\underline{V}}$.

(5.1.2) La sucesión exacta corta

$$E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$$

es llamada una extensión V-central si $V_1(C|B) = 0$.

(5.1.3) Si $E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es una extensión V-central entonces $C \in \underline{\underline{V}}$.

En efecto, por (2.1.13) tenemos que $V(C) < V_1(C|B)$, luego si E es V-central entonces $V(C) = 0$, esto es, $C \in \underline{\underline{V}}$.

(5.1.4) Toda extensión en $\underline{\underline{V}}$, es V-central.

Si $E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es una extensión en $\underline{\underline{V}}$, entonces $V(B) = 0$. Pero ya que $V_1(C|B) < V(B) = 0$ tenemoa que $V_1(C|B) = 0$ y por tanto E es V-central.

(5.1.5) Impongamos a nuestra categoria $\underline{\underline{C}}$ un nuevo axioma:

A.8. En un cuadrado cartesiano $f_1 g_1 = f_2 g_2$, si f_2 es un epimorfismo conormal, entonces g_1 también lo es.

(5.1.6) Sea $E: C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ una sucesión exacta corta. Dado cualquier morfismo $h: A' \longrightarrow A$, formamos el cuadrado cartesiano (5.1.5)

$$\begin{tikzcd}
B^h \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare", very near start] & A' \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, two heads, "p"'] & A
\end{tikzcd}$$

y por tanto una sucesión exacta corta inducida

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, equal, "1"'] & B^h \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare", very near start] & A' \arrow[d, "h"] \\
C \arrow[r, tail, "i"'] & B \arrow[r, two heads, "p"'] & A
\end{tikzcd}$$

junto con un morfismo $(1, h', h)$ de sucesiones exactas cortas.

(5.1.7) Si $f, g: X \rightrightarrows B^h$ es un par de morfismos para los que $p'f = p'g$, entonces $V(f) = V(g)$ si y solo si $V(fh') = V(gh')$.

$\Longrightarrow$) Si $V(f) = V(g)$ entonces $V(fh') = V(f)V(h') =$ $= V(g)\,V(h') = V(gh')$.

$\Longleftarrow$) Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V(X) \arrow[r, tail, "\mu_X"] \arrow[d, shift right, "V(f)"'] \arrow[d, shift left, "V(g)"] & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dr, "p'f=p'g"] & \\
V(B^h) \arrow[r, tail, "\mu_{B^h}"'] \arrow[d, "V(h')"'] & B^h \arrow[r, two heads, "p'"'] \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare", very near start] & A' \arrow[d, "h"] \\
V(B) \arrow[r, tail, "\mu_B"'] & B \arrow[r, two heads, "p"'] & A
\end{tikzcd}$$

se deduce que

$$p\,\mu_B\,V(h'f) = p\,\mu_B\,V(h')V(f) = p\,h'\mu_{B^h}\,V(f) = h\,p'\mu_{B^h}\,V(f) =$$

$$= h\,p'f\,\mu_X$$

luego $\mu_{B^h}\,V(f) = \mu_{B^h}\,V(g)$ y por tanto $V(f) = V(g)$.

(5.1.8) Si $E: C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es una extensión V-central también lo es $E^h: C \overset{i'}{\rightarrowtail} B^h \overset{p'}{\twoheadrightarrow} A'$ para todo morfismo $h: A \longrightarrow A'$.

En efcto, sean $f,g: X \rightrightarrows B^h$ tales que $p'f = p'g$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\ C \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, equal] & B^h \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & A' \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, tail, "i"'] & B \arrow[r, two heads, "p"'] & A \end{tikzcd}$$

entonces $h\,p'f = h\,p'g$ implica $p\,h'f = p\,h'g$ luego $V(h'f) = V(h'g)$ y por (5.1.7) $V(f) = V(g)$. El resultado se sigue de (2.1.16).

(5.1.9) Si $E: C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es una extensión escindida entonces también lo es $E^h: C \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow A'$ para todo morfismo $h: A \longrightarrow A'$.

En efecto, supongamos que la extensión E escinde por la derecha, esto es, que existe un morfismo $s: A \longrightarrow B$ tal que $ps = 1_A$.

Ya que $h\,p' = p\,h'$ es un cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[d, dashed, "s'"] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, bend right=60, "hs"'] & \\
E^h : C \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h'"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & A' \arrow[d, "h"] \\
E \;: C \arrow[r, tail, "i"'] & B \arrow[r, two heads, "p"'] & A \arrow[l, bend right=20, "s"']
\end{tikzcd}$$

y $p\,s\,h = 1\,h = h = h\,1$ existe un morfismo $s' : A' \longrightarrow B'$ con $p's' = 1$.

Si la extensión E escinde por la izuierdq, esto es, existe un morfismo $q : B \longrightarrow C$ tal que $q\,i = 1_C$, entonces $q\,h'i' = q\,i = 1_C$, luego E^h escinde también por la izquierda.

(5.1.10) Si $E : C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es una extensión V-central, obtenemos por (2.3.2) teniendo en cuenta que en este caso $V_1(\dot{C}|B) = 0$ una sucesión exacta

$$\Delta V(B) \xrightarrow{p_*} \Delta V(A) \xrightarrow{\delta_*^E} C \xrightarrow{i_*} B/V(B) \overset{p_*}{\twoheadrightarrow} A/V(A)$$

(5.1.11) La extensión V-central $E : C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es llamada marginal si $\delta_*^E = 0$.

Para una extensión V-central E las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\delta_*^E = 0$

ii) $C \rightarrowtail B/V(B) \twoheadrightarrow A/V(A)$ es exacta corta

iii) $V(B) = V(A)$

iv) $C \cap V(B) = 0$

La equivalencia de i) y ii) es inmediata a partir de (5.1.10).
ii)$\Rightarrow$iii)$\Rightarrow$iv)$\Rightarrow$ii). Se sigue de considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C\cap V(B) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & V(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, dash] & V(A) \arrow[d, dash] \\
C \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\
C/C\cap V(B) \arrow[r, tail] & B/V(B) \arrow[r, two heads] & A/V(A)
\end{tikzcd}$$

(5.1.12) Para todo objeto A y para todo $C \in \underline{\underline{V}}$, denotamos por $Ext_{\underline{\underline{V}}}(A/V(A),C)$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de extensiones en $\underline{\underline{V}}$ de C por A/V(A). Dicho conjunto no es vacio ya que la extensión producto

$$C \rightarrowtail C\times A/V(A) \twoheadrightarrow A/V(A)$$

es una extensión en $\underline{\underline{V}}$.

En efecto, $V(C\times A/V(A)) = V(C)\times V(A/V(A)) = 0\times 0 = 0$.

(5.1.13) Denotamos por V-Ext(A,C) el conjunto de todas las clases de equivalencia de extensiones V-centrales de A por C. Dicho conjunto no es vacio.

En efecto, si $C \overset{i'}{\rightarrowtail} B' \overset{p'}{\twoheadrightarrow} A/V(A)$ es una extensión en $\underline{\underline{V}}$ de C por A/V(A), por (5.1.4) es V-central y así

$$\begin{tikzcd}
E^{\mu_A^C} : & C \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads, "\mu_A^C"] \\
E \quad : & C \arrow[r, tail, "i'"'] & B' \arrow[r, two heads, "p'"'] & A/V(A)
\end{tikzcd}$$

$E^{\mu^A_C}$ es V-central (5.1.8). Por tanto V-Ext(A,C) no es vacio ya que Ext_VA/V(A),C) no lo es.

(5.1.14) En virtud de (5.1.12) y (5.1.13) tenemos definida una aplicación de conjuntos

$$\begin{aligned} \Sigma:\ \mathrm{Ext}_V(A/V(A),C) &\longrightarrow V\text{-}\mathrm{Ext}(A,C) \\ E &\longmapsto E^{\mu^C_A} \end{aligned}$$

(5.1.15) La aplicación definida en (5.1.14) es una aplicación de conjuntos punteados.

Ya que por (5.1.12) la extensión producto de A/V(A) por C es una extensión en $\underline{\underline{V}}$, ésta nos da un elemento distinguido en Ext_V(A/V(A),C). Además por (5.1.13) proporciona una extensión V-central que por (5.1.9) es equivalente a la extensión producto de A por C y por consiguiente un elemento distinguido de V-Ext(A,C).

(5.1.15) La extensión V-central $G: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ está en la imagen de Σ si y solo si es marginal.
En este caso, si $G: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es la imagen de $E: C \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow A/V(A)$ mediante Σ, entonces E es equivalente a la extensión $C \rightarrowtail B/V(B) \twoheadrightarrow A/V(A)$.

Por (5.1.11) la sucesión $C \rightarrowtail B/V(B) \twoheadrightarrow A/V(A)$ es exacta corta si y solo si $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es marginal en cuyo caso es evidente que $C \rightarrowtail B/V(B) \twoheadrightarrow A/V(A)$ se aplica en $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$.

Solo queda probar que cualquier otra extensión

$C \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow A/V(A)$ que se aplica en $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es equivalente a $C \rightarrowtail B/V(B) \twoheadrightarrow A/V(A)$.

Supongamos pues, que $C \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow A/V(B)$ se aplica en $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, tail] \arrow[dd, equal] \arrow[dr, equal] & & B \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, two heads, "h''"] \arrow[dd, two heads, "h'"' near start] & & A \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, two heads] & \\
& C \arrow[rr, tail] \arrow[dl, equal] & & B/V(B) \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, dashed, two heads, "(1/V)(h')"] & & A/V(A) \arrow[dl, equal] \\
C \arrow[rr, tail] & & B' \arrow[rr, two heads] & & A/V(A) &
\end{tikzcd}$$

Ya que $V(B') = 0$, existe $(1/V)(h')$ verificando

$$h' = (1/V)(h')\, h''$$

El morfismo $(1/V)(h')$ establece la equivalencia deseada.

(5.1.16) La aplicación Σ definida en (5.1.4) es una aplicación inyectiva de conjuntos punteados.

Es inmediato por (5.1.15) que la aplicación Σ es una aplicación inyectiva de conjuntos punteados.

(5.1.17) Asociando a la extensión V-central $E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ el morfismo δ^{E}, (5.1.10) obtenemos una aplicación de conjuntos punteados:

$$\Pi : V\text{-}Ext(A,C) \longrightarrow Hom(\Delta V(A), C)$$

(5.1.18) La sucesión

$$\mathrm{Ext}_{V}(A/V(A),C)\xrightarrow{\Sigma} V\text{-}\mathrm{Ext}(A,C)\xrightarrow{\Pi} \mathrm{Hom}(\Delta V(A),C)$$

es exacta.

En efecto, por (5.1.16) la aplicación Σ es inyectiva. Además por (5.1.15), la extensión V-central $E:C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ está en la imagen de Σ si y solo si es marginal y por (5.1.11) la extensión E es marginal si y solo si $\delta^{E} = 0$, esto es, δ^{E} está en el nucleo de Π.

(5.1.19) $\Delta V(A) = o$ si y solo si para todo $C \in \underline{\underline{V}}$, la aplicación Σ es sobreyectiva.

$\Longrightarrow$) Si $\Delta V(A) = 0$, entonces $\mathrm{Hom}(\Delta V(A),C) = 0$.

$\Longleftarrow$) Sea $(A_1|A_0)$ una presentación proyectiva de A. Sea $C = A_1/V_1(A_1|A_0)$ y $B = A_0/V_1(A_1|A_0)$, entonces la sucesión $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es exacta corta y V-central. Ya que $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ está en la imagen de Σ, por (5.1.15) será marginal, esto es, $C \cap V(B) = 0$ (5.1.11). Así

$$0 = C\cap V(B) = A_1/V_1(A_1|A_0)\cap V(A_0/V_1(A_1|A_0)) =$$

$$= A_1/V_1(A_1|A_0)\cap V(A_0)/V(A_0)\cap V_1(A_1|A_0) =$$

$$= A_1/V_1(A_1|A_0)\cap V(A_0)/V_1(A_1|A_0) =$$

$$= A_1\cap V(A_0)/V_1(A_1|A_0) =$$

$$= \Delta V(A)$$

(5.1.20) Si $A \in \underline{\underline{V}}$, entonces $\Delta V(A) = 0$ si y solo si para todo $C \in \underline{\underline{V}}$

$$\mathrm{Ext}_V(A,C) = V\text{-}\mathrm{Ext}(A,C)$$

Es inmediato por (5.1.16) y (5.1.19).

(5.1.21) La extensión V-central

$$E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$$

es llamada:

i) V-stem si δ^E es un epimorfismo conormal.

ii) V-stem cover si δ^E es un isomorfismo.

(5.1.22) Para una extensión V-central $E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) E es V-stem

ii) $i_* : C \longrightarrow B/V(B)$ es el morfismo cero

iii) $p_* : B/V(B) = A/V(A)$

iv) $C < V(B)$

En efecto: i)$\Leftrightarrow$ii) $\delta = \delta^{ck} \Longleftrightarrow 1 = \delta^{I} = i_*^{k} \Longleftrightarrow i_* = 0$

ii)$\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ iv) $\Longrightarrow$ ii) Se deducen de considerar el diagrama de (5.1.11).

(5.1.23) Para una extensión V-central $E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) E es V-stem cover

ii) $B/V(B) = A/V(A)$ y $\Delta V(B) \longrightarrow \Delta V(A)$ es el morfismo cero.

La demostración es inmediata a partir de (5.1.10).

5.2. OBJETOS V-PERFECTOS.

(5.2.1) Un objeto A diremos que es V-perfecto si $A=V(A)$.

(5.2.2) Si B es V-perfecto, toda extensión V-central $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es una extesnión V-stem.

Inmediato, ya que en este caso $C \longrightarrow B/V(B)=0$ es el morfismo cero.

(5.2.3) Si A es V-perfecto, entonces $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es una extensión V-stem si y solo si B es V-perfecto.

En efecto, $A/V(A) = B/V(B)$ si y solo si B es V-perfecto.

(5.2.4) Sea

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, "\delta"'] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "\tau"] & A \arrow[d, equal] \\
C \arrow[r, tail, "i"'] & B \arrow[r, two heads, "p"'] & A
\end{tikzcd}$$

un morfismo de extensiones en donde B´ es V-perfecto y $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es V-central. Entonces τ está determinado de forma única por ρ.

En efecto, sean τ y τ' dos morfismos haciendo el diagrama conmutativo. Ya que $p\tau = p' = p\tau'$ y $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es V-central se verifica que $V(\tau)=V(\tau')$. Así la funtorialidad de V nos da el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[rr, equal, "\mu_{B'}"] \arrow[d, shift right, "\tau"'] \arrow[d, shift left, "\tau'"] & & V(B') \arrow[d, shift right, "V(\tau)"'] \arrow[d, shift left, "V(\tau')"] \\ B & & V(B) \arrow[ll, two heads, "\mu_B"] \end{tikzcd}$$

de donde $\quad \tau = \mu_B V(\tau) = \mu_B V(\tau') = \tau'$

(5.2.5) Si B es V-perfecto, diremos que el epimorfismo conormal $B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es un morfismo V-cover (ó bien que B es un V-cover) de A si $C \rightarrowtail^{p^k} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es una extensión V-central.

Ya que V conserva epimorfismo conormales, entonces A es también V-perfecto.

(5.2.6) Si A es V-perfecto, entonces existe un morfismo V-cover de A universal.

Sea $B \twoheadrightarrow A$ un morfismo V-cover de A y sea el par ideal $(A_1|A_0)$ una presentación proyectiva de A. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} \dfrac{V(A_0)\cap A_1}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \dfrac{V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & V(A) \arrow[d, equal] \\ \dfrac{A_1}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, tail] & \dfrac{A_0}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

Las filas de dicho diagrama son trivialmente V-centrales, así para demostrar que $V(A_0)/V_1(A_1|A_0)$ es un V-cover de A, habrá que probar que $V(A_0)/V_1(A_1|A_0)$ es V-perfecto.

Completemos para ello el diagrama anterior

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{V(A_0)\cap A_1}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, tail] \arrow[dd] & \dfrac{V(A_0)}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[rr, two heads, "\zeta"] \arrow[dd, shift right, "\alpha"'] & & V(A) \arrow[dd, equal, "V(p')"] \\
 & & V(A_0) \arrow[ul, two heads, "s"'] \arrow[ur, two heads] & \\
\dfrac{A_1}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[r, tail] & \dfrac{A_0}{V_1(A_1|A_0)} \arrow[uu, dashed, shift right, "\beta"'] \arrow[rr, two heads, "\eta"] & & A \\
 & & A_0 \arrow[ul, two heads, "q"] \arrow[ur, two heads, "p'"'] \arrow[uu, dashed, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Ya que A_0 es proyectivo, existe r tal que $V(p')r = p'$ y ya que s y q tienen el mismo conucleo existe β tal que $sr = \beta q$.

Así $\zeta\beta q = \zeta s r = V(p') r = p' = \eta q$ de donde $\zeta\beta = \eta$ y por tanto $\eta = \zeta\beta = \eta\alpha\beta$ y $\zeta = \eta\alpha = \zeta\beta\alpha$. De estas igualdades y de la V-centralidad de las filas del diagrama se deduce que $V(\alpha\beta) = V(1) = 1$ y análogamente $V(\beta\alpha) = V(1) = 1$, de donde $V(A_0/V_1(A_1|A_0)) = V(V(A_0)/V_1(A_1|A_0))$ pero ya que $V(A_0/V_1(A_1LA_0)) = V(A_0)/V_1(A_1|A_0)$ tenemos que $V(A_0)/V_1(A_1|A_0)$ es V-perfecto.

Es universal en el siguiente sentido:

Dada cualquier extensión V-central $E: C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ tal que $\Pi(E) = \delta$, existe, por (5.2.4), un único morfismo $\tau : V(A_0)/V_1(A_1|A_0) \longrightarrow B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta(V,W)(A) = V(A_0)\ A_1/V_1(A_1|A_0) \arrow[r, rightarrowtail] \arrow[d, "\delta"'] & V(A_0)/V_1(A_1|A_0) \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[d, "\tau"'] & A \arrow[d, equal] \\
C \arrow[r, rightarrowtail] & B \arrow[r, twoheadrightarrow] & A
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

5.3. EXTENSIONES V-CENTRALES EN UNA VARIEDAD $\underline{\underline{W}}$.

(5.3.1) Para una extensión $C \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $C < V(B)$

ii) $i_*: C \longrightarrow B/V(B)$ es el morfismo cero

iii) $\Delta(V,W)(A) = C/V_1(C|B)$ para toda variedad $\underline{\underline{W}}$ conteniendo a A,B y C.

iv) $p_* : B/V(B) = A/V(A)$

v) la extensión V-central $C/V_1(C|B) \rightarrowtail B/V_1(C|B) \twoheadrightarrow A$ asociada es una extensión V-stem.

i)$\Longrightarrow$ ii)$\Longrightarrow$iii)$\Longrightarrow$i) Análogamente a (5.1.21).

i)$\Longrightarrow$v) $C < V(B) \Longleftrightarrow C/V_1(C|B) < V(B)/V_1(C|B) =$

$= V(B) \cup V_1(C|B)/V_1 C|B) = V(B/V_1(C|B)$

ya que $V_1(C|B) < V(B)$.

iii)$\Longleftrightarrow$iv) Se deduce de considerar la (V,W)-sucesión exacta de cinco términos

$$\Delta(V,W)(B) \longrightarrow \Delta(V,W)(A) \longrightarrow C/V_1(C|B) \longrightarrow B/V(B) \twoheadrightarrow A/V(A)$$

(5.3.2) Una extensión verificando una de las condiciones equivalentes de (5.3.1) es llamada una extensión pseudo-V-stem.

(5.3.3) Para una extensión $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ en $\underline{\underline{W}}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\Delta(V,W)(A) = C/V_1(C|B)$

ii) $B/V(B) = A/V(A)$ y $\Delta(V,W)(B) \longrightarrow \Delta(V,W)(A)$ es el morfismo cero.

La demostración es análoga a (5.1.21).

(5.3.4) Una extensión en $\underline{\underline{W}}$ verifcando una de las condiciones equivalentes de (5.3.3) es llamada una extensión pseudo V-stem cover en $\underline{\underline{W}}$.

(5.3.5) Sea $C \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ una extensión en $\underline{\underline{W}}$. Entonces es una extensión pseudo V-stem (V-stem cover) en $\underline{\underline{W}}$ si y solo si la extensión V-central asociada

$$C/V_1(C|B) \rightarrowtail B/V_1(C|B) \twoheadrightarrow A$$

es una extensión V-stem (V-stem cover) en $\underline{\underline{W}}$.

De la naturalidad de la (V,W)-sucesión exacta de cinco términos se deduce que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta(V,W)(B) \arrow[r] \arrow[d] & \Delta(V,W)(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dfrac{C}{V_1(C|B)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dfrac{B}{V(B)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \dfrac{A}{V(A)} \arrow[d, equal] \\
\Delta(V,W)\left(\dfrac{B}{V_1(C|B)}\right) \arrow[r] & \Delta(V,W)(A) \arrow[r] & \dfrac{C}{V_1(C|B)} \arrow[r] & \dfrac{B}{V(B)} \arrow[r, two heads] & \dfrac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, de donde se sigue el enunciado.

(5.3.6) Un objeto A, W-paraproyectivo es un pseudo V-stem cover en $\underline{\underline{W}}$ de sus cocientes por los términos $V^n(A)$ $n \geqslant 1$, de la serie V-central inferior.

Dado $n \geqslant 1$, existe $f: F \longrightarrow A$ con F, W-paraproyectivo induciendo $f_n: F/V^n(F) = A/V^n(A)$ $n \geqslant 0$ (4.4.7)

En el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V^n(F)/V^{n+1}(F) \arrow[r, tail] \arrow[d, "g_n"'] & F/V^{n+1}(F) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & F/V^n(F) \arrow[d, "f_n"] \\ V^n(A)/V^{n+1}(A) \arrow[r, tail] & A/V^{n+1}(A) \arrow[r, two heads] & A/V^n(A) \end{tikzcd}$$

entonces g_n es un isomorfismo. Considerando el diagrama de sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Delta(V,W)(\frac{F}{V^n(F)}) \arrow[r] \arrow[d, "(f_n)_*"] & \frac{V^n(F)}{V^{n+1}(F)} \arrow[r] \arrow[d, "g_n"'] & \frac{F}{V(F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_1"'] & \frac{F/V(F)}{F/V^n(F)} \arrow[d, "(f_n)_*"] \\ \Delta(V,W)(A) \arrow[r] & \Delta(V,W)(\frac{A}{V^n(A)}) \arrow[r] & \frac{V^n(A)}{V^{n+1}(A)} \arrow[r] & \frac{A}{V(A)} \arrow[r, two heads] & \frac{A/V(A)}{A/V^n(A)} \end{tikzcd}$$

Ya que f_n es un isomorfismo y $\Delta(V,W)$ es un funtor, $(f_n)_*$ es un isomorfismo también. El hecho de que g_n es un isomorfismo establece que

$$\Delta(V,W)(A) \longrightarrow \Delta(V,W)(A/V^n(A))$$

es el morfismo cero. Finalmente

$$A/V^n(A) \longleftrightarrow A/V(A) \qquad n \geq 1$$

Así $V^n(A) \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A/V^n(A)$ es un pseudo V-stem cover en $\underline{\underline{W}}$.

(5.3.7) Sea A un pseudo V-stem cover en $\underline{\underline{W}}$ de sus cocientes $A/V^n(A)$ $n \geq 1$. Si $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para algún proyectivo F', entonces existe un objeto W-proyectivo F y un morfismo $f: F \longrightarrow A$ tal f induce isomorfismos $F/V^n(F) = A/V^n(A) \quad n \geqslant 0$.

Inmediato a partir de (4.4.7).

(5.3.8) El objeto A es W-paraproyectivo si y solo si

i) $A \in \underline{\underline{W}}$

ii) A es residualmente V-nilpotente

iii) $A/V(A)$ es de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para algún proyectivo F', y A es un pseudo V-stem cover en $\underline{\underline{W}}$ de sus cocientes $A/V^n(A) \quad n \geqslant 1$.

Es consecuencia de (4.4.7).

(5.3.9) Sea A un pseudo V-stem cover en $\underline{\underline{W}}$ de $A/V^n(A)$ $n \geqslant 1$ y sea $A/V(A)$ de la forma $(1/V)(1/W)(F')$ para algún proyectivo F'. Entonces $A/V^{\infty}(A)$ es W-paraproyectivo.

Se deduce del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta(V,W)(A) & \xrightarrow{p_*} & \Delta(V,W)(A/V^n(A)) & \longrightarrow & V^n(A)/V^{n+1}(A) \\
\downarrow & & \| & & \| \\
\Delta(V,W)(A/V(A)) & \xrightarrow[p_*]{} & \Delta(V,W)(A/V^n(A)) & \longrightarrow & V^{n}(A)/V^{n+1}(A)
\end{array}$$

Si en el diagrama p_* superior es el morfismo cero entonces p_* inferior es el morfsimo cero.

BIBLIOGRAFIA

1.- BAER,R.
Representations of groups as quotient groups.
Trans.Amer.Math.Soc.58(1945) 295-416

2.- BAUMSLAG,G.
Groups with the same lower central sequence as a relatively free group.
Trans.Amer.Math.Soc.129 (1967) 308-321
Trans.Amer.Math.Soc.142 (1969) 507-538

3.- BRUCK,R.H.
A survey of binary systems.
Springer (1966)

4.- BURGIN,M.S.
Central extensions in γ-categories.
Soviet Math.Dokl. 13 (1972) 1050-1053

5.- BURGIN,M.S.
Categories with involution and correspondences in γ-categories.
Trans.Moscow Math.Soc. 22 (1970) 181-257

6.- CALENKO,M.S.
On the foundations of the theory of categories
Russian Mtah.Surveys 15 (1960) 47-51

7.- CALENKO,M.S.
Correspondences over a quasiexact category
Math.U.S.S.R.Sbornik. 2 (1967) 501-520

8.- ECKMANN,B.-HILTON,P.J.-STAMMBACH,U.
On the homology theory of central group extensions .
Comment.Math.Helv. 47 (1972) 102-122 y 171-178
Comment.Math.Helv. 48 (1973) 136

9.- FRANCO,L.
Formaciones de Fitting en una categoria de Burgin.
Alxebra (Santiago) 18 (1976)

10.- FRANCO,L.
Sobre la resolubilidad en una categoria de Burgin.
Rev.Mat.Hisp.Amer. 39 (1979) 66-69

11.- FROHLICH,A.
On groups over a d.g. near-ring.
Quart.J.Math. 11 (1960) 193-228

12.- FROHLICH,A.
Non abelian homological algebra
Proc.London Math.Soc.11 (1961) 239-275
Proc.London Math.Soc.12 (1962) 1-28 y 739-768

13.- FROHLICH,A.
Baer invariants of algebras.
Trans.Amer.Math.Soc. 109 (1963) 221-244

14.- FURTADO-COELHO,J.
Varieties of Ω-groups and associated functors.
Ph.D.Thesis.University of London (1972)

15.- FURTADO-COELHO,J.
Homology and generalized Baer-invariants.
J.Algebra 40 (1976) 596-609

16.- FURTADO-COELHO,J.
Functors associated with varieties of universal algebras.
Est.da Mat.em hom.ao Prof.A.Almeida Costa.Lisboa.(1974) 1-31

17.- FURTADO-COELHO,J.
V-center and some related concepts.
Est.de Geom.Alg.Anal.Publ.da II Cent.da Acad. Ciencias de Lisboa (1978) 161-184

18.-GECSEG,F.
A Schreier extension of groups with multiple operators.
Acta Sci.Math.(Szeged) 23 (1962) 58-63

19.- HALL,P.
Verbal and marginal subgroups.
J.Reine Angew.Math. 182 (1940) 156-157

20.- HIGGINS,P.J.
Groups with multiple operators.
Proc.London Math.Soc. 6 (1956) 366-416

21.- HIGGINS,P.J.
Baer invariants and the Birkhoff-Witt theorem.
J.Algebra 11 (1969) 469-482

22.- HILTON,P.J.-STAMMBACH,U.
A course in Homological Algebra.
Springer (1971)

23.- HOFMANN,F.

Uber eine die kategorie der gruppen umfassende kategorie.

Bayer Akad.Wiss.Math.Nat.Kl.S.B.(1960) 163-204

24.- HUQ,S.A.

Commutator,nilpotency and solvability in categories.

Quart.J.Math.Oxford 19 (1968) 363-389

25.- HUQ,S.A.

Upper central series in a category.

J.Reine Angew.Math. 252 (1972) 209-214

26.- JOHNSON,K.W.

Varietal generalizations of Schur multipliers,stem extensions and stem covers.

J.Reine Angew.Math. 270 (1974) 169-183

27.- KNOPFMACHER,J.

Extensions in varieties of groups and algebras.

Acta Math.115 (1966) 17-50

28.- KNOPFMACHER,J.

Homology and presentations of algebras.

Proc.Amer.Math.Soc. 17 (1966) 1424-1428

29.- KNUS,M.A.

Homology and homomorphisms of rings.

J.Algebra 9 (1968) 275-284

30.- KUROSH,A.G.-LIVSIC,A.H.-SULGEIFER,E.G.

Foundations of the theory of categories

Russian Math.Surveys 15 (1960) 1-46

31.- LAMBEK,J.

Goursat´s theorem and homological algebra.

Can.Math.Bull.7 (1964) 597-608

32.- LECOUTURIER,P.

Quelques proprietes des categories hofmaniennes.

Ann.Soc.Sci.de Bruxelles 80 (1966) 19-72

33.- LEEDHAM-GREEN,C.R.

Homology in varieties of groups.

Trans.Amer.Math.Soc. 162 (1971) 1-33

Trans.Amer.Math.Soc. 170 (1972) 293-303

34.- LEEDHAM-GREEN,C.R.-MCKAY,S.

Baer invariants,isologism,varietal laws and homology.

Acta Math.137 (1976) 99-150

35.- LEICHT,J.B.

Axiomatic proof of J.Lambek homological theorem.

Can.Math.Bull. 7 (1964) 609-613

36.- LIVSIC,A.H.-CALENKO,M.S.-SULGEIFER,E.G.

Varieties in categories.

Amer.Math.Soc.Transl. 58 (1966) 29-56

37.- LUE,A.S.T.

Baer-invariants and extensions relative to a variety.

Proc.Camb.Phil:Soc 63 (1967) 569-578

38.- LUE,A.S.T.

Cohomology of algebras relative to a variety.

Math.Z. 121 (1971) 220-232

39.- LUE, A.S.T.
Connected algebras and universal covering.
Comment.Math.Helv. 48 (1973) 370-375

40.- LLERENA, I.
Sobre extensiones centrales en una variedad de grupos.
Pub.Mat.Universidad Autonoma Barcelona (1978)

41.- MACDONALD, J.L.
Group derived functors.
J.Algebra 10 (1968) 448-477

42.- MACLANE, S.
Categories for the working mathematician.
Springer (1971)

43.- MITCHELL, B.
Theory of categories.
Academic Press (1965)

44.- NEUMANN, H.
Varieties of groups
Springer (1967)

45.- R-GRANDJEAN, A.
Homologia en categorias exactas.
Alxebra(Santiago) 4 (1970)

46.- R-GRANDJEAN, A.
Reticulo de ideales de un objeto en una R-categoria.
Rev.Mat.Hisp.Amer. 32 (1971) 14-20

47.- R-GRANDJEAN,A.

Sucesión de homologia en una categoria hofmaniana.

Coll.Math.22 (1971) 229-239

48.- R-GRANDJEAN,A.

Theoreme de Jordan-Hölder dans les G-categories.

C.R.Acad.Sci.Paris 274 (1972) 1872-1875

49.- R-GRANDJEAN,A.

Sucesiones exactas entrelazadas.

Actas Primeras Jornadas Mat.LusoEspañolas.(197)

92-101.

50.- R-GRANDJEAN,A.-FRANCO,L.

Sucesión exacta de cinco terminos.

Pendiente de publicación.

51.- RODRIGUEZ,C.

Teoria general de variedades.

Alxebra (Santiago) 21 (1978)

52.- STALLING,J.

Homology and central series of groups.

J.Algebra 2 (1965) 170-181

53.- STAMMBACH,U.

Homological methods in group varieties.

Comment.Math.Helv. 45 (1970) 287-298

54.- STAMMNACH,U.

Homology in group theory.

Springer.L.N.359 (1973)

55.- STAMMBACH,U.

Varietal homology and parafree groups.

Math.Z.128 (1972) 154-168

56.- SULGEIFER,E.G.

On the general theory of radicals in categories.

Amer.Math.Soc.Transl.60 (1966) 150-162

57.- SULGEIFER,E.G.

The lattice of ideals of an object of a category.

Amer.Math.Soc.Transl.59 (1966) 163-190

58.- TARAZONA,D.

Homologia respecto auna variedad de algebras de Lie.

Alxebra (Santiago) 23 (1978)