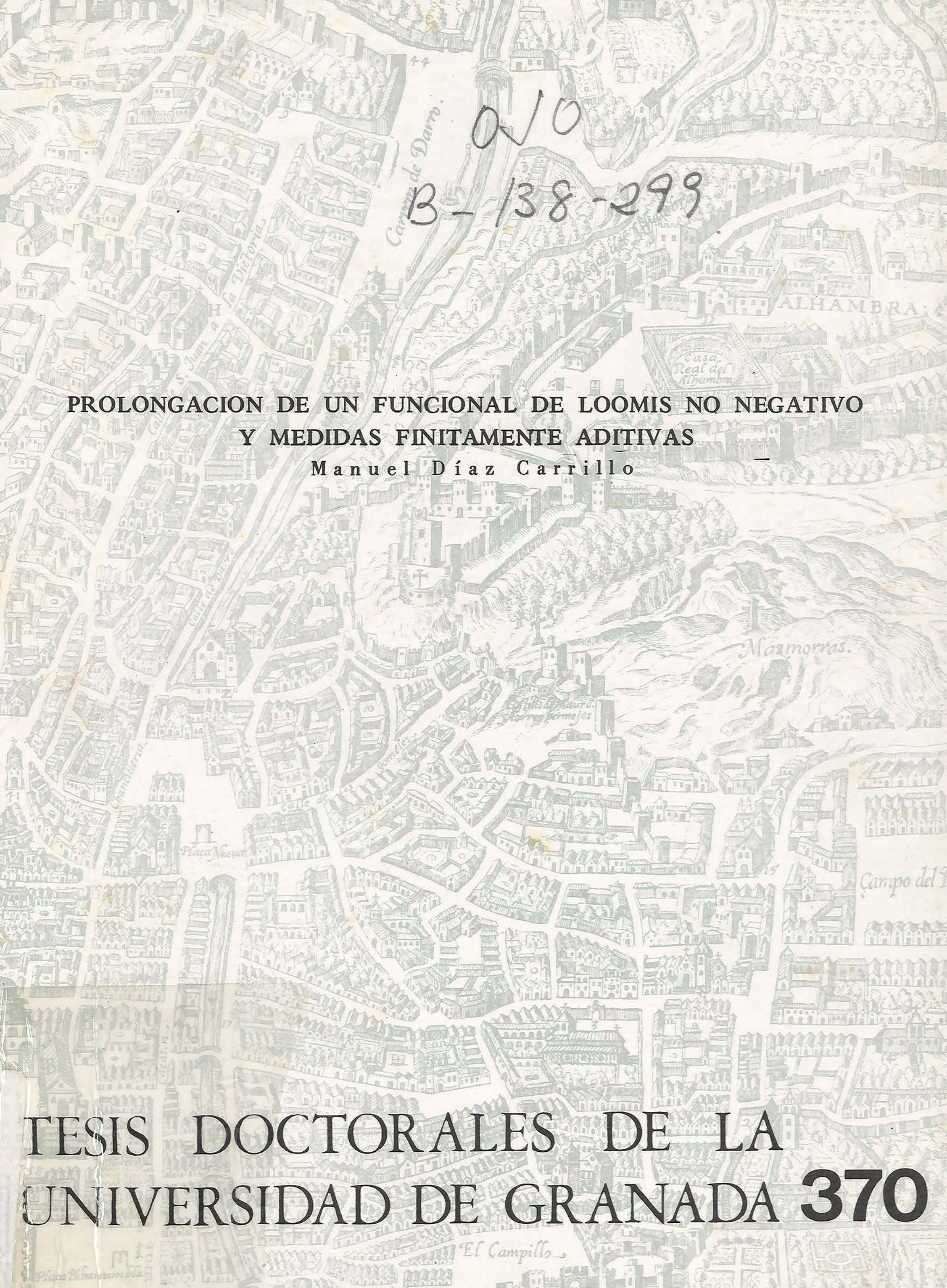
PROLONGACION DE UN FUNCIONAL DE LOOMIS NO NEGATIVO Y MEDIDAS FINITAMENTE ADITIVAS

Manuel Díaz Carrillo



TESIS DOCTORALES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA 370

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE TEORIA DE FUNCIONES

PROLONGACION DE UN FUNCIONAL DE LOOMIS NO NEGATIVO Y MEDIDAS FINITAMENTE ADITIVAS

MANUEL DIAZ CARRILLO

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA
1981

Depósito legal Gr.420.1982.
Imprenta de la Universidad de Granada.Hospital Real.

Tesis doctoral, dirigida por el prof. Dr. D. Pablo Bobillo Guerrero, Agregado de Análisis Matemático II de la Universidad de Granada. Fue leída el día 30 de mayo de 1981, ante el tribunal formado por los profesores: Batle Nicolau, Aguiló Fuster, Fuentes Miras, Bobillo Guerrero y Vinuesa Tejedor. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

INTRODUCCION

I

En la teoría clásica de construcción de la integral a partir de una medida, una vez que se han establecido los resultados relativos a las propiedades de las medidas, se introducen los conceptos de función simple y de su integral elemental, y a continuación los de función integrable y de integral de una función integrable (veáse , por ejemplo, Berberian, ref.2).

Salvo el caso infrecuente de que el único conjunto de medida nula sea el vacío, el conjunto de las funciones numéricas integrables, con la suma y el producto por un escalar naturales, no tiene estructura de espacio vectorial. Por el conocido paso al cociente del espacio de funciones integrables, módulo la relación que llama equivalentes a dos funciones iguales c.p.d., se obtiene un espacio vectorial L de clases de funciones integrables.

Puede afirmarse que el proceso de construcción de la integral consiste en la prolongación de una aplicación lineal -la integral elemental- del espacio vectorial de las funciones simples (identificado con un subespacio vectorial de L) al espacio L. Y ese proceso se considera satisfactoriamente concluido atendiendo a que L tiene estructura de espacio de Banach, en el cual es denso el subespacio de las funciones simples.

Si en lugar de partir de una medida, se considera una medida finitamente aditiva no necesariamente σ-aditiva, hay un proceso análogo de construcción de una integral (llamada abstracta de Riemann) con relación a dicha medida finitamente aditiva, pero hay que señalar dos diferencias esenciales: en primer lugar, los teoremas fuertes de convergencia de la integración de Lebesgue quedan considerablemente disminuidos, y en segundo lugar, las técnicas de demostración son distintas. Algunas propiedades se conservan, como la propiedad de densidad (Teorema I.6.6), aunque se demuestran de modo muy distinto en uno y otro caso. Y hay propiedades, como el teorema de la convergencia monótona que dejan de ser ciertos.

Modernamente, según es sabido, es mayoritaria la opinión de que "debe" construirse la integral por técnicas funcionales, y no por métodos conjuntistas. Sin entrar en la polémica, lo cierto es que abundan más los trabajos de investigación con técnicas funcionales que con técnicas conjuntistas.

PROLONGACION DE UN FUNCIONAL DE LOOMIS NO NEGATIVO

Los procesos de construcción de la integral por técnicas funcionales pueden clasificarse en dos tipos: los que siguen el método de Radon, y los que siguen el método de Daniell (este último, a su vez, para funcionales de Daniell o de Daniell-Bourbaki). Uno y otro tienen en común que parten, como datos iniciales, de un espacio vectorial real de funciones reales acotadas en un conjunto (llamado espacio de funciones elementales), y de una forma lineal I (llamada integral elemental) definida en dicho espacio, que se desea prolongar a un espacio L conservando la linealidad, de manera que, simplificando, los subconjuntos de X cuyas funciones características pertenezcan a L constituyan un σ-álgebra $\mathbb{A}$, y además, de modo que la aplicación que a cada $A \in \mathbb{A}$ le asigna $I(\chi_A)$ sea una medida.

Vamos a precisar la nomenclatura que utilizamos en lo relativo al método de Daniell:

Un funcional no negativo definido en un retículo vectorial de funciones reales acotadas sobre un conjunto X, se dirá que es de Daniell, si para cada sucesión monótona decreciente hacia cero de funciones del retículo, la correspondiente sucesión de valores del funcional tiende a cero.

Por otra parte, se dirá que el funcional es de Daniell-Bourbaki, si para cada familia $\mathcal{D}$ filtrante inferiormente de funciones del retículo convergente hacia cero, es $\inf\{I(f) ; f \in \mathcal{D}\} = 0$.

Un funcional de Daniell o de Daniell-Bourbaki, se dirá indistintamente que es un funcional de Daniell si no hay lugar a confusión. Y esto, que es usual, se debe a que los métodos de construcción de una teoría de la integral para uno y otro tipo de funcionales son muy parecidos, razón por la que suelen venir unificados en la bibliografía. Evidentemente todo funcional de Daniell-Bourbaki es de Daniell, aunque no al contrario.

No vamos a detallar los métodos de Radon y de Daniell, suficientemente conocidos, pero sí llamar la atención de que los funcionales no negativos juegan en las dos teorías un papel fundamental, principalmente debido a que un funcional de Radon o un funcional de Daniell se expresan como diferencia de dos funcionales no negativos (Munster, ref.45, p.546). Por ello, es habitual en la bibliografía, presentar la teoría en principio para funcionales no negativos, y posteriormente considerar el caso de funcionales de signo cualquiera.

Un funcional de Radon es continuo en sentido propio, para una cierta topología definida en el espacio de las funciones elementales; topología que a su vez se define a partir de una topología sobre X (Segal, ref.14, p.56). Por otro lado, un funcional de Daniell se dice, como es conocido, que es "monótonamente continuo", sin duda porque subyace la idea de que se precisa de "continuidad" para prolongar un funcional, de modo que se llegue a una clase de funciones integrables que conserve las propiedades formales de la integración de Lebesgue.

Pero cabe preguntarse qué resultados se conservan sin exigir condición de continuidad para el funcional-integral elemental. Y con el objetivo de obtener una prolongación que conserve el mayor número de propiedades formalmente coincidentes con las obtenidas por los métodos funcionales citados.

El hecho de que exista una gran analogía entre la teoría de la integral abstracta de Riemann respecto de una medida finitamente aditiva, con la teoría de la integral respecto de una medida, con las diferencias ya señaladas -que surgen del hecho de que los teoremas fuertes de convergencia (Levi, Fatou, Lebesgue,...)precisan de la σ-aditividad para su demostración (Segal, ref.14,p.31) -, permite sospechar que hay un proceso de prolongación de un funcional no negativo, con gran paralelismo con el proceso de Daniell, y con teoremas de convergencia débiles desde luego.

Pasamos a resumir nuestro trabajo.

En el capítulo primero partimos de un sistema de Loomis, esto es, una terna $(X,\mathcal{B},\phi)$ donde X es un conjunto no vacío, $\mathcal{B}$ un retículo vectorial de funciones reales definidas en X, y ϕ una forma lineal en $\mathcal{B}$ no negativa, que llamamos integral elemental. No se exige que los elementos de $\mathcal{B}$ sean funciones reales acotadas, ni que $\mathcal{B}$ sea stoniano, ni que ϕ cumpla el axioma de Daniell.

Se define $B^+ = \{ f \in \bar{R}^X \ ; \ f = \sup g, \ g \in B, \ g \leq f \}$,

y se prolonga ϕ a B^+, definiendo $\tilde{\phi}_+ : B^+ \to \bar{R}$ por

$$\tilde{\phi}_+(f) = \sup \{ \phi(g) \ ; \ g \in B, \ g \leq f \} .$$

Desde luego, $B \subset B^+$, y $\tilde{\phi}_+$ restringido a B coincide con ϕ.

Aunque B^+ es estable por la suma, $\tilde{\phi}_+$ no es aditivo en B^+, pero sí positivamente homogéneo y superaditivo.

Por ello, se introduce

$$B_+ = \{ f \in B^+ \ ; \ \tilde{\phi}_+(f+F) \leq \tilde{\phi}_+(f) + \tilde{\phi}_+(F), \ \textit{para toda} \ F \in B^+ \} .$$

Con ello, $\tilde{\phi}_+$ es aditivo en B_+.

Introduciendo $B^- = -B^+$ y $\tilde{\phi}_- : B^- \to \bar{R}$ que verifica $\tilde{\phi}_-(f) = -\tilde{\phi}_+(-f)$, se tiene que $\tilde{\phi}_+$ y $\tilde{\phi}_-$ no coinciden necesariamente en $B^+ \cap B^-$; y si se define dualmente B_-, se tiene que $B_- = -B_+$; y sobre todo, $\tilde{\phi}_+$ y $\tilde{\phi}_-$ coinciden en $B_+ \cap B_-$.

Entonces, se define $\tilde{B} = B_+ \cup B_-$, y $\tilde{\phi} : \tilde{B} \to \bar{R}$ por medio de

$$\tilde{\phi}(f) = \begin{matrix} \tilde{\phi}_+(f) & \textit{si} \ f \in B_+ \\ \tilde{\phi}_-(f) & \textit{si} \ f \in B_- \end{matrix}$$

La primera dificultad que hemos encontrado, siguiendo el paralelismo con el método de Daniell, para una primera extensión de la integral elemental, es que la clase B^+, que es satisfactoria en el caso de Daniell-Bourbaki, no lo es en nuestra situación. La clase B_+ (y la B_-) permiten introducir integrales de oscilación que que cumplen las propiedades formales exigibles para darles tal nombre. Es de hacer notar que si ϕ es un funcional de Daniell-Bourbaki, la clase $\mathcal{B}_+$ coincide con la clase $\mathcal{B}^+$. Y si ϕ es un funcional de Daniell, entonces la clase L^+ de las funciones numéricas que son límite de sucesiones crecientes de elementos de $\mathcal{B}$, está incluida en $\mathcal{B}^+$, y naturalmente, incluye a $\mathcal{B}$. Puede pues decirse que la condición de Daniell permite seleccionar la clase L^+, como subclase de $\mathcal{B}^+$ a la que se puede prolongar aditivamente el funcional. En nuestro trabajo, la selección de la clase $\mathcal{B}_+$ se hace por consideraciones puramente algebraicas, como hemos expuesto más arriba.

A partir de aquí, se introduce la clase de las funciones sumables $\mathcal{B}_0$ y la clase de las funciones integrables $\mathcal{B}^*$, en total paralelismo con el caso de Daniell.

Tenemos que señalar que hemos transcrito con minuciosidad todas las demostraciones, para poner de manifiesto que no se ha empleado un axioma de Daniell. Particularmente, el teorema de aditividad para funciones integrables (Teorema I.8.7), y en menor grado los resultados relativos a propiedades de funciones sumables -en especial el teorema de densidad (Teorema I.6.6)-, son resultados que destacamos por una mayor dificultad.

Hemos incluido una presentación lo más reducida posible de la integral de Riemann respecto de un sistema de Loomis (cap.I, apartado 2), no tanto para demostrar que una función R-integrable es sumable (Proposición I.6.1), como para recalcar que tal in tegración sugiere el modo de prolongar ϕ tal y como nosotros lo presentamos.

Este primer capítulo, pone de manifiesto pues, que la simple exigencia de la nonegatividad de ϕ permite una extensión, constructiva, que conserva propiedades importantes que se verifican en el método de Daniell. En el trabajo de Loomis (ref.38) se hacen un par de extensiones (que llama completaciones unilaterales y bilaterales respectivamente), menos amplias que la nuestra. Y demostramos en el primer capítulo y en el segundo (Teorema II.3.1), respectivamente, que una y otra extensión están incluidas en la nuestra.

La prolongación que hemos hecho del funcional ϕ de un sistema de Loomis, como ya hemos indicado, es constructiva (es decir, no se hace uso del axioma de la elección), y es lo más amplia posible respecto de la técnica de empleo de integrales de oscilación.

Como en el caso de que ϕ sea de Daniell, el proceso de construcción de integrales de oscilación queda cerrado al llegar a la clase $\mathcal{B}^*$(Nota I.7.4), y éste es un paralelismo que debemos resaltar. También, como en el caso de Daniell, el proceso de extensión no es cerrado, en cambio, respecto de tomar supremos (Nota I.7.5).

Hemos rechazado el término de "prolongación máxima posible", a pesar de que en la literatura (por ejemplo, Segal), se emplean sinónimos como "maximal", por la remota ambigüedad que podría pre sentarse, a pesar de que queda claro lo que entendemos por prolongación más amplia posible.

Debemos advertir, en lo que se refiere a la originalidad de nuestro trabajo, que posteriormente a Loomis se han considerado sus extensiones, junto con la integral abstracta de Riemann, como herramientas para teoremas de representación. Pensamos que no se han agotado todas las posibilidades de la técnica que hemos seguido, sino que los trabajos que hemos consultado, se inclinan, en buena parte, por obtener condiciones para que el funcional ϕ de un sistema de Loomis $(X,\mathcal{B},\phi)$, sea representable en $\mathcal{B}$ mediante una integral abstracta de Riemann, relativa a una medida finitamente aditiva definida en una clase de subconjuntos de X (veáse, por ejemplo,Flachsmeyer,ref.26; Loomis, ref.38,...).

Precisamente, la lectura de esos trabajos nos ha hecho observar la comodidad de las hipótesis para la obtención de teoremas de representación: se supone que $\mathcal{B}$ es stoniano y/o que sus elementos son funciones acotadas. Por ésta razón, hemos considerado en el segundo capítulo, qué nuevas propiedades se obtienen, al suponer que una o las dos condiciones citadas se cumplen.

En el segundo capítulo, además, hemos estudiado una medida finitamente aditiva asociada a un sistema de Loomis. En dicho capítulo exponemos con concisión la integral abstracta de Riemann respecto de un funcional de Loomis; señalaremos como limitaciones, el hecho de que la clase de las funciones integrables en ese sentido son de $\mathcal{B}_0$, y el hecho de que el contenido de Jordan es restricción de la medida finitamente aditiva asociada por nosotros.

Aparte, indiquemos como resultados originales que el resultado de Loomis acerca de imágenes inversas de semirectas por funciones medibles (ref.38), se conserva en nuestra prolongación (Teorema II.2.16), así como el teorema de continuidad para la integral (Teorema II.7.1).

Incluimos por último, dos apartados obligados acerca de funciones y conjuntos nulos.

El capítulo tercero comienza con una presentación de la integración abstracta de Riemann respecto de una medida finitamente aditiva (apartado 1). Hemos seguido preferentemente la exposición de Dunford-Schwartz (ref. 7), y presentamos, adaptándolos a nuestro planteamiento y de la forma más breve posible, los aspectos más destacados de la teoría.

En los siguientes apartados, nos ocupamos de la construcción de un adecuado sistema de Loomis $(X,\mathcal{B},\phi)$ a partir del dato de un espacio $(X,\mathbb{A},\mu)$ de medida finitamente aditiva (apartado 2), y de comparar la clase de las funciones ϕ-integrables con la clase de las funciones μ-integrables (apartado 3).

Dicho capítulo nos parece obligado, para dar un ejemplo no trivial de aplicación de nuestro método, y para comparar con los resultados existentes.

El resultado más importante es que toda función μ-integrable es también ϕ-sumable. Además, toda función μ-medible es también ϕ-medible. Así pues, nuestro método funcional de construcción de una integral a partir de una medida finitamente aditiva, dá lugar a una extensión más amplia que la usual. Y probamos con un ejemplo (p. 151) que puede ser estrictamente más amplia.

Señalemos también un punto especial de este capítulo: la justificación del nombre de conjunto de ϕ-medida nula, como consecuencia de un teorema de cierta dificultad (Teorema II.2.9), y no sólo sugerido como una mera analogía formal con el caso de que ϕ sea de Daniell.

Finalizamos el capítulo con unos comentarios acerca de cuestiones abiertas y de temas complementarios sugeridos por nuestro trabajo.

II

Pasamos a ocuparnos del material bibliográfico empleado, sin perjuicio de referirnos en el apartado siguiente a otros trabajos que tocan aspectos relacionados con esta memoria.

Por lo que se refiere a la prolongación de un funcional por el método de Daniell, los textos de Shilov y Weir (ref.15 y

18) constituyen conjuntamente una completa fuente de información. Dichas obras desarrollan extensamente la teoría de Daniell (ref. 24) y Stone (ref.47), fuentes originales de la teoría. La obra de Weir es particularmente interesante porque no utiliza el axioma fuerte de Stone exclusivamente, como hacen la mayoría de los textos. Sin embargo, es el texto de Pfeffer (ref.13), que se ocupa de la prolongación por el método de Daniell de dos tipos de funcionales distintos -de Daniell propiamente dicho y de Bourbaki-, quien nos ha sugerido nuestro método. Se puede decir que el método de Pfeffer, para un funcional de Bourbaki, en el que hay que manejar sistemas dirigidos de funciones reales, tiene como obligada y constante preocupación procurar que las distintas definiciones que se introduzcan sean independientes del particular sistema dirigido empleado. Lo mismo podría decirse respecto de las sucesiones puntualmente monótonas empleadas. En nuestro trabajo hemos seleccionado unas veces expresamente, otras tácitamente, un único sistema dirigido de funciones, por lo que esa preocupación no se da.

En este momento vale la pena señalar que, como tal vez se le haya ocurrido al lector, es muy rara una teoría de la integral sin pasos al límite. Efectivamente, en nuestro trabajo, a pesar de no imponer inicialmente condiciones de continuidad para el funcional elemental no negativo, y no manejar sucesiones con tanta frecuencia como es usual en los textos sobre la integral de Daniell, el empleo de supremos (o ínfimos) expuesto tal cual, por razones de claridad, se corresponde con un paso al límite según una adecuada red.

Vamos a referirnos a dos trabajos que nos han servido bastante para tener una panorámica del problema estudiado.

El de Flachsmeyer y Torpe (ref. 26) se ocupa (entre otros temas que no nos afectan) de la integral abstracta de Riemann, a partir de un funcional o a partir de una medida finitamente aditiva, y de representaciones integrales; pero hay que destacar que sólo se emplea una medida finitamente aditiva pero finita. Ello sólo ya es una limitación puesto que se emplea una medida que le es útil para sus resultados, pero que, desde nuestro objetivo ofrece dos objecciones importantes: a) Se puede asociar una medida no necesariamente finita, como nosotros hacemos, al retículo vectorial elemental de que se parte y a su correspondiente funcional elemental. b) Las funciones reales del retículo citado no tienen por qué ser acotadas, con lo cual, éstas quedan excluidas del espacio de funciones acotadas que se construye para obtener una representación integral. De esta manera, la prolongación no es tal, puesto que ni se prolonga ni representa a partir de un espacio inicial, sino a partir de un subespacio de funciones acotadas del mismo.

Y efectivamente se cita un trabajo de Bauer (ref.22) en que "without loss of generality", según Flachsmeyer, se puede suponer que todas las funciones del retículo inicial son acotadas, que separan puntos, y que en ningún punto se anulan simultáneamente todas las funciones del retículo. Claro está, para la obtención de teoremas de representación (que es de lo que se ocupa Bauer), puede aceptarse el entrecomillado, pero no para el proceso de extensión.

Precisamente en nuestro trabajo nos hemos ocupado de analizar a fondo estas exigencias adicionales, atendiendo puramente al proceso de prolongación (p.e. el estudio del espacio $\hat{X}$), ya que Bauer se detiene fundamentalmente en la representación integral del funcional de partida con una técnica que recurre, tácitamente, al método de Radon, al construir un espacio compacto adecuado para sus fines. Tal método está en la linea perfectamente trazada por Gillman y Jerison en su "Rings of continuons functions".

Loomis (ref.38) estudia la prolongación de un funcional no negativo, prescindiendo de un axioma de continuidad tipo Daniell o Bourbaki, pero tanto en el planteamiento como en los resultados, hay diferencias esenciales con nuestro trabajo: en primer lugar, las definiciones que da de integral superior e integral inferior son restringidas, y las funciones a las que asigna integral superior e integral inferior tienen dichas integrales finitas, y además dichas funciones son reales. En nuestro trabajo, no tienen por qué ser finitas esas integrales, ni las funciones reales, sino que se presentan valores infinitos. Y es que Loomis no se ocupa de la prolongación más amplia posible del funcional elemental, sino de la relación entre funcionales lineales y medidas finitamente aditivas, con lo que en el fondo está en la situación de Flachsmeyer.

Por lo que se refiere a las medidas finitamente aditivas, la obra de Dunford-Schwartz (ref. 7) nos parece el texto más completo sobre el tema, y en todo caso, a su planteamiento nos hemos adaptado para utilizarlo en nuestro trabajo. Hay que citar el trabajo de Yosida-Hewitt (ref.50) como fuente original. Más adelante nos referiremos a su limitación frente al texto de Dunford-Schwartz.

Tanto la integral abstracta de Lebesgue como la convergencia en medida, a que nos referimos en nuestro trabajo, vienentratadas para el caso σ-aditivo, con vagas alusiones al caso finitamente aditivo, en Hewitt-Stromberg (ref.9), Loeve (ref.11), y también en Munroe (ref.12). Como comentamos al final del trabajo, una teoría satisfactoria de las funciones medibles es difícil de obtener partiendo de una integral abstracta de Lebesgue para medidas finitamente aditivas. Por citar un solo ejemplo, veáse Loomis y Taylor (ref.38 y 16), para ver lo escasamente dicho sobre el tema, y las diferencias que se presentan. La raiz de la cuestión se encuentra en la definición que se dé de función medible para una medida finitamente aditiva, y así, no es nada fácil generalizar la demostración de que la suma de funciones medibles es medible.

Para nuestros objetivos Dunford-Schwartz da una definición satisfactoria de función medible (ref.7, p.106), aunque no estudia la relación entre su definición y la que dan otros autores, de los que el paradigma es Loomis (ref. 38, p.170). Lo mismo podría decirse de la obra de Bichteler (ref. 3).

III

Vamos a hacer un bosquejo histórico de la evolución y rumbo que han tomado los trabajos relacionados con nuestra memoria, con la intención de marcar los perfiles en los que se inserta este trabajo.

El método de Daniell (ref.24), mejorado por Stone (ref.47) fundamentalmente, pero también por otros como Kakutani y Arens (refs.36 y 20) en menor grado, sugirió abundantes generalizaciones de la teoría (en el sentido, sobre todo, de utilizar un axioma más débil que el de continuidad monótona, o más fuerte, como el de Bourbaki) y también refinamientos de la misma (en el sentido de considerar topología en el espacio base).

Otro tipo de generalizaciones de la teoría de Daniell aparece de manera natural: las funciones que se manejan en la teoría de Daniell son funciones numéricas; cabe pensar en una teoría para funciones con valores en un conjunto con una estructura de orden y con una estructura algebraica compatible con la anterior. Como la cuestión es tangencial citaremos como dos precedentes importantes los trabajos de Mcgill y Wright (refs.41 y 49) y más recientemente, un tratado muy completo, el de Cristescu (ref.5).

En esta linea es interesante señalar dos trabajos de Metzler (refs.42 y 43) y a Brooks (ref.23), por la originalidad que supone el empleo de teoría de la aproximación para abordar algunas generalizaciones.

Puesto que el axioma de continuidad de Daniell se refiere a sucesiones de funciones, es natural pensar en una generalización empleando redes, y así ha sido estudiado. Citemos a Knowles (ref. 37), por ejemplo.

Es inevitable volvernos a referir al importante trabajo de Loomis (ref.38). Ya hemos indicado algunas de sus características, pero destaquemos que se ocupa fundamentalmente de generalizar la teoría de la integral abstracta de Riemann a una teoría de integración impropia, y de lo que llama completación ("unilateral" y "bilateral") del espacio vectorial inicial (p.170). Su interés fundamental reside en los teoremas de representación. A pesar de un cierto desorden, se puede decir que los trabajos posteriores sobre representación de funcionales están basados en las ideas expuestas por Loomis es este trabajo. Ya hemos dicho que el axioma de continuidad débil aparece en él, aunque no lo desarrolla a fondo. Tampoco desarrolla con profundidad una teoría de la medibilidad y se limita a afirmar con vaguedad que parece ser la adecuada para medidas finitamente aditivas (p.171). Dos precedentes destacados de este trabajo son los de Fréchet y Hewitt (refs.27 y 35).

El axioma de continuidad débil para un sistema de Loomis puede enunciarse así:

"*Para cada* $g \in B$, $\{\phi(g \wedge \frac{1}{n})\}_{n \in N} \to 0$".

(Hay pequeñas variantes que no hacen al caso).

Como ya hemos indicado, con posterioridad a Loomis, se ha puesto el acento en las condiciones que debe satisfacer un funcional definido en un retículo vectorial stoniano de funciones reales acotadas, para que sea representable por una integral abstracta de Riemann respecto de una medida finitamente aditiva. En este ambiente vamos a citar algunos trabajos muy significativos.

Gould (ref.30) se ocupa con más detalle que Loomis de la extensión del espacio inicial. Pero no de la extensión máxima posible, sino de la más adecuada para sus fines: un teorema de representación del tipo de Riesz (p.305). Pero es importante señalar el hecho de que en lugar de topologizar el espacio base de las funciones reales del retículo vectorial, se ocupa de considerar un sistema de partes de dicho espacio base con estructura de álgebra u otra más débil.

En Gunzler no se exige que las funciones del retículo vectorial sean acotadas. En su primer trabajo (ref.32) se ocupa de funciones escalares, y en el segundo (ref.33) generaliza sus resultados a funciones con valores en un conjunto con estructuras de orden y algebraica compatible, con una atención especial a las cuestiones de medibilidad.

Un trabajo no muy extenso pero importante, por la síntesis que hace, es el de Heiden (ref.34). Desarrolla un estudio completo sobre el axioma débil de continuidad para los teoremas de representación (p.211), y una exposición equivalente, aunque distinta, a la de Dunford-Schwartz para la integral abstracta de Riemann respecto de una medida finitamente aditiva.

Nos hemos referido a autores significativos posteriores a Loomis, y a sus contribuciones; y en resumen, queda claro que no se ocupan del problema de prolongación de esta memoria, que no ha sido tratado sistemáticamente desde Loomis.

Vamos a señalar un trabajo de Malone (ref.40) especialmente por la utilización que nosotros hacemos -como oportunamente consignamos más adelante (p. 30)-de su definición de función medible.

Indiquemos, por último, algunas cuestiones que juzgmos de gran interés, y que están ligadas de una u otra forma al ambiente en el que se desarrolla nuestro trabajo.

Un aspecto importante del trabajo de Loomis se refiere al caso particular en que se considere un álgebra de funciones. En Segal (ref.14) puede verse una reciente recopilación de resultados (Capítulo VIII. Teoría algebraica de la integración).

Por supuesto, abundan los artículos sobre el proceso de extensión de una medida, muy bien tratado en Jacobs (ref.10) siguiendo técnicas de Caratheodory, y en el trabajo de Łos y Marczewski (ref.39). Sería interesante abordar la generalización de esas técnicas de extensión partiendo de medidas finitamente aditivas.

Finalmente, por lo que se refiere a los espacios de Riesz, muy relacionados al planteamiento de esta memoria, también se ocupan sólo del caso σ-aditivo. A la citada obra de Bichtler, habría que añadir la de Bourbaki (ref.4) y otros textos (como el exhaustivo "Topological Riesz spaces and measure theory" de Fremlin, con una bibliografía muy completa).

Quiero, por último, expresar mi agradecimiento al Dr. D. Pablo Bobillo Guerrero por la continua dirección y ayuda que de él he tenido desde hace tiempo, y gracias a la cual ha sido posible la realización de este trabajo.

C A P I T U L O I

SISTEMAS DE LOOMIS. INTEGRAL ASOCIADA

1. SISTEMAS DE LOOMIS.

Sea $\mathcal{B}$ un retículo vectorial de funciones reales definidas en un conjunto X. Esto es, por una parte, $\mathcal{B}$ tiene estructura de espacio vectorial real, con la suma y producto por escalares ordinarios para funciones de $\mathcal{B}$.

Por otra parte, si definimos para cada par (g_1, g_2) de funciones de $\bar{R}^X$ las aplicaciones:

$$g_1 \vee g_2 \quad : x \to \text{máx}\{g_1(x), g_2(x)\}$$

$$g_1 \wedge g_2 \quad : x \to \text{mín}\{g_1(x), g_2(x)\}$$

se verifica que $\mathcal{B}$ cumple $g_1 \vee g_2 \in \mathcal{B}$ y $g_1 \wedge g_2 \in \mathcal{B}$, para toda $g_1, g_2 \in \mathcal{B}$.

Si ϕ es una aplicación lineal de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{R}$, diremos que es un funcional no negativo en $\mathcal{B}$ si cumple:

$$f \geqslant 0 \quad \text{implica} \quad \phi(f) \geqslant 0.$$

Por supuesto, el orden (no total) considerado en $\mathcal{B}$ es el inducido en $\mathcal{B}$ por el orden usual en $\bar{R}^X$.

Como es sabido, $\mathcal{B}$ es retículo vectorial sí y sólo si $\mathcal{B}$ es un espacio vectorial modular; es decir, que para cada función f de $\mathcal{B}$ se verifica que $/f/ \in \mathcal{B}$.

Llamaremos $g^+ = g \vee 0$ y $g^- = -(g \wedge 0)$, para cada $g \in \mathcal{B}$.

Y se tiene que:

Una función $g \in \bar{R}^X$, pertenece a $\mathcal{B}$ si y sólo si $g^+ \in \mathcal{B}$ y $g^- \in \mathcal{B}$, en virtud de que

$$g = g^+ - g^- \quad \text{y} \quad /g/ = g^+ + g^-.$$

Nótese que $g^+ \geqslant 0$ y $g^- \geqslant 0$.

$$g_1 \vee g_2 = g_1 + (g_2 - g_1)^+$$

$$g_1 \wedge g_2 = g_1 - (g_1 - g_2)^+.$$

1.1. DEFINICION.- Si $\mathcal{B}$ es un retículo vectorial de funciones reales en un conjunto X, y ϕ es un funcional lineal positivo en $\mathcal{B}$, a la terna $(X, \mathcal{B}, \phi)$ la llamaremos un *sistema de Loomis en* X.

PROLONGACION DE UN FUNCIONAL DE LOOMIS NO NEGATIVO

En el caso de que un subconjunto C de $\bar{\bar{R}}^X$ verifique la siguiente propiedad:"para cada $g \in C$, $1 \wedge g \in C$, siendo 1 la función constantemente igual a 1 en X", se dice que C es *stoniano*. Por extensión, se dirá que $(X, \mathcal{B}, \phi)$ es stoniano si y sólo si $\mathcal{B}$ lo es.

Conviene señalar que si $\mathcal{B}$ es stoniano no necesita contener a las funciones constantes; pero que si $\mathcal{B}$ contiene a las funciones constantes, automáticamente es stoniano.

Observemos también que los elementos de $\mathcal{B}$ no tienen por qué ser funciones reales acotadas. Tampoco $\mathcal{B}$ tiene por qué separar puntos en X; recordemos que se dice que $\mathcal{B}$ separa puntos en X si para cada $x_1, x_2 \in X$, tales que $x_1 \neq x_2$, existe $g \in \mathcal{B}$ tal que $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Hacemos notar que en todo este trabajo, si tenemos una familia $\{f_i\}_{i \in I}$ de funciones de un cierto subconjunto B de $\bar{\bar{R}}^X$, se definirá $\sup\limits_{i \in I} f_i$ como la aplicación que a cada $x \in X$ le asigna como imagen $\sup f_i(x) \in \bar{R}$. Y hay que advertir que tal función $\sup\limits_{i \in I} f_i$, que recibe el nombre de *supremo puntual* no coincide en general con la función que designamos por $\sup \{f_i ; i \in I\}$, que sería el supremo de una familia para el orden (no total) natural a que nos hemos referido en $\mathcal{B}$. Desde luego si $\mathcal{B}$ es retículo superior e I es finito, dicho supremo funcional existe y coincide con el supremo puntual. Si I no es finito, ese resultado no es cierto en general. Veamos dos resultados que concretan estas cuestiones:

1.- Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones de $B \subset \bar{R}^X$, designamos por $\sup_{i\in I} f_i$ al supremo puntual. Y por $\sup\{f_i;\, i\in I\}$ al supremo funcional en B. Entonces, dada una función $f\in B$, si es $f = \sup_{i\in I} f_i$, también $f = \sup\{f_i;\, i\in I\}$.

En efecto, tenemos en primer lugar que, para cada $i\in I$, $f_i(x)\leqslant f(x)$ para todo $x\in X$, implica $f_i\leqslant f$.

Por otra parte, si $F\in B$ es cota superior del conjunto $\{f_i;\, i\in I\}$ se tiene que $F(x)\geqslant f_i(x)$, para todo $i\in I$ y para todo $x\in X$; por tanto, $F(x)\geqslant f(x)$, para todo $x\in X$. Con ello, resulta que f es cota superior del conjunto $\{f_i;\, i\in I\}$ y además es el mínimo de las cotas superiores, por lo cual, $f = \sup\{f_i;\, i\in I\}$, como queríamos.

NOTA.- El recíproco del resultado anterior no es cierto.

En efecto, consideremos el contraejemplo siguiente:

Sea $X = [0,1]$ y B el conjunto de las funciones continuas en $[0,1]$, esto es, $C([0,1])$. Para cada $n\in N$, definimos:

$$f_n(x) = \left|\begin{array}{ll} nx, & 0\leqslant x\leqslant 1/n \\ 1, & 1/n\leqslant x\leqslant 1. \end{array}\right.$$

Evidentemente f_n es continua en $[0,1]$

Sea f la función constante igual a la unidad en $[0,1]$; es evidente que $f = \sup\{f_n;\, n\in N\}$, y en cambio, $f \neq \sup_{n\in N} f_n$.

En cuanto a lo primero, $f_n \leqslant f$ para todo $n \in N$. Y si F es una función continua en $[0,1]$ tal que $F \geqslant f_n$ para todo $n \in N$, debe ser $F \geqslant f$, sin más que tomar límite por la derecha en cero. Así pues, f es cota superior mínima del conjunto $\{f_n ; n \in N\}$. Sin embargo, el supremo puntual de la sucesión $\{f_n\}_{n \in N}$ sería la función:

$$f_0(x) = \begin{vmatrix} 1, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{vmatrix} ,$$

que no es continua, y por tanto, no puede pertenecer a B.

Los anteriores hechos nos han destacado las diferencias entre lo que entendemos por supremo puntual y el supremo funcional. Este hecho será importante tenerlo en cuenta a lo largo de todo el trabajo, por lo que señalamos que, en todo lo que sigue, el supremo de una familia será siempre el supremo puntual, y se representará por los símbolos $\sup\limits_{i \in I} f_i$, empleado hasta ahora, y también por los más ambiguos, $\sup \{f_i\}_{i \in I}$ ó $\sup \{f_i ; i \in I\}$, u otros. No hay peligro de confusión si se recuerda que siempre se consideran supremos puntuales de familias de funciones.

Se plantea la cuestión de extender ϕ a un espacio vectorial que contenga a B y sea lo más amplio posible. Naturalmente, interesan prolongaciones de ϕ de manera que el nuevo funcional sea aditivo, homogéneo, o las dos cosas. Analicemos en primer lugar, la llamada extensión de Riemann de un sistema de Loomis.

2. INTEGRAL DE RIEMANN DE UN SISTEMA DE LOOMIS.

2.1. DEFINICION.- Sea $(X,\mathcal{B},\phi)$ un sistema de Loomis.

Llamamos:

$\bar{\mathcal{B}} = \{ f : X \to R$; para cada $\varepsilon \in R^+$, existen $g,h \in \mathcal{B}$, tales que: $g \leqslant f \leqslant h$ y $\phi(h-g) < \varepsilon \}$.

Estudiemos ahora la estructura de retículo vectorial de $\bar{\mathcal{B}}$ y la prolongación de ϕ a esta nueva clase.

Evidentemente $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{B}}$.

2.2. PROPOSICIÓN.- $\bar{\mathcal{B}}$ *es un retículo vectorial.*

DEMOSTRACION:

a) Veamos que $\bar{\mathcal{B}}$ es espacio vectorial.

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{B}$ entonces $f_1 + f_2 \in \bar{\mathcal{B}}$.

Elegimos g_1, g_2, h_1, h_2 tal que

$$g_1 \leqslant f_1 \leqslant h_1 \ , \ g_2 \leqslant f_2 \leqslant h_2 \ , \ y \ \ \phi(h_1 - g_1) < \varepsilon/2 \ , \ \phi(h_2 - g_2) < \varepsilon/2.$$

Evidentemente se cumple que:

$$g_1 + g_2 \leqslant f_1 + f_2 \leqslant h_1 + h_2 \quad y \quad \phi[(h_1 + h_2) - (g_1 + g_2)] < \varepsilon .$$

Análogamente, si $f \in \bar{\mathcal{B}}$ y $\lambda \in R$ entonces $\lambda f \in \bar{\mathcal{B}}$.

Si $\lambda=0$ es trivial.

Si $\lambda>0$, para cada $\varepsilon>0$, tomamos ε/λ y g,h tales que

$$g\leqslant f\leqslant h \quad y \quad \phi(h-g)<\varepsilon/\lambda ,$$

con lo cual:

$$\lambda g\leqslant\lambda f\leqslant\lambda h \quad y \quad \phi[\lambda(h-g)]<\varepsilon .$$

Si $\lambda<0$, se toma $\varepsilon/(-\lambda)$, y existen g,h tales que

$$g\leqslant f\leqslant h \quad y \quad \phi(g-h)<\varepsilon/(-\lambda),$$

con lo que

$$\lambda h\leqslant\lambda f\leqslant\lambda g \quad y \quad \phi[\lambda(g-h)]<\varepsilon .$$

b) $\bar{B}$ es retículo.

Veamos que es retículo inferior.

En efecto, si $f_1, f_2 \in\bar{B}$ y existen g_1, g_2, h_1, h_2, tales que

$$g_1\leqslant f_1\leqslant h_1 , \quad g_2\leqslant f_2\leqslant h_2 \quad y \quad \phi(h_1-g_1)<\varepsilon/2 , \ \phi(h_2-g_2)<\varepsilon/2,$$

tenemos que

$$(g_1\wedge g_2)\leqslant(f_1\wedge f_2)\leqslant(h_1\wedge h_2).$$

Y para que $f_1\wedge f_2$ pertenezca a $\bar{B}$ deberá ser

$$\phi[(h_1\wedge h_2)-(g_1\wedge g_2)]<\varepsilon .$$

por lo que basta probar que:

$$\phi[(h_1\wedge h_2)-(g_1\wedge g_2)]\leqslant(h_1-g_1)+(h_2-g_2).$$

Distinguimos los siguientes casos:

a) $h_1(x) \leqslant h_2(x)$ y $g_1(x) \leqslant g_2(x)$. Trivial

b) $h_2(x) \leqslant h_1(x)$ y $g_2(x) \leqslant g_1(x)$. Trivial

c) $h_1(x) \leqslant h_2(x)$ y $g_2(x) \leqslant g_1(x)$. En este caso el primer miembro será $h_1(x)-g_2(x)$, pero como $h_1(x) \leqslant h_2(x)$ y $g_1 \leqslant h_1$, se dará que

$$h_1(x)-g_2(x) \leqslant h_2(x)-g_2(x) \leqslant (h_2-g_2)(x)+(h_1-g_1)(x).$$

d) $h_2(x) \leqslant h_1(x)$ y $g_1(x) \leqslant g_2(x)$. El primer miembro será

$$h_2(x) - g_1(x) \leqslant h_1(x)-g_1(x) \leqslant (h_1-g_1)(x)+(h_2-g_2)(x),$$

ya que

$$h_2(x) \leqslant h_1(x) \quad y \quad g_2(x) \leqslant h_2(x).$$

Y por último, debido a que $f_1 \vee f_2 = -[(-f_1) \wedge (-f_2)]$, $\bar{B}$ es retículo superior.

2.3. PROPOSICIÓN.- *Si B es stoniano, entonces $\bar{B}$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN:

Dada $f \in \bar{B}$, deberá ser $1 \wedge f \in \bar{B}$. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, tendremos $g, h \in \bar{B}$ tales que

$$g \leqslant f \leqslant h \quad y \quad \phi(h-g) < \varepsilon .$$

Tomando ínfimos, $(1\wedge g)\leqslant(1\wedge f)\leqslant(1\wedge h)$,

y como $(1\wedge g)$ y $(1\wedge h)$ pertenecen a $\mathcal{B}$ por hipótesis, se tiene

$$1\wedge h - 1\wedge g = 1-(1-h)^+ - [1-(1-g)^+] =$$

$$= (1-g)^+ - (1-h)^+ = \frac{1-g+|1-g|}{2} - \frac{1-h+|1-h|}{2} =$$

$$= \frac{h-g}{2} + \frac{|1-g|-|1-h|}{2} \leqslant \frac{h-g}{2} + \frac{|(1-g)-(1-h)|}{2} =$$

$$= \frac{h-g}{2} + \frac{h-g}{2} = h-g\ .$$

Así pues, $\phi(1\wedge h-1\wedge g)\leqslant\phi(h-g)<\varepsilon$.

Una vez construida la extensión $\bar{\mathcal{B}}$ de la clase $\mathcal{B}$, y estudiadas sus propiedades, pasamos a analizar la prolongación del funcional ϕ a $\bar{\mathcal{B}}$.

2.4. DEFINICION.- Si $f\in\bar{\mathcal{B}}$, consideremos h_0, g_0 tales que:

$$g_0\leqslant f\leqslant h_0 \quad y \quad \phi(h_0-g_0)<\varepsilon\ ;$$

ello indica que el conjunto $\{\phi(g)\ ;\ g\in\mathcal{B},\ g\leqslant f\}$ está acotado superiormente por $\phi(h_0)$, ya que ϕ es monótono en $\mathcal{B}$.

Análogamente el conjunto $\{\phi(h)\ ;\ h\in\mathcal{B},\ f\leqslant h\}$ está acotado inferiormente por $\phi(g_0)$.

Pues bien, el supremo del primer conjunto se llama $\bar{\phi}(f)$. Esto es:

$$\bar{\phi}:\ \bar{\mathcal{B}}\ \rightarrow\ \bar{\mathbb{R}}\ ,\ \bar{\phi}(f) = sup\ \{\phi(g)\ ;\ g\in\mathcal{B},\ g\leqslant f\ \}.$$

Veamos que $\bar{\phi}(f)$ es igual al ínfimo del segundo conjunto.

2.5. PROPOSICION.- *Para cada* $f\in\bar{B}$, *es*

$$\bar{\phi}(f) = \inf \{\phi(h)\,;\, h\in B,\ f\leq h\}.$$

DEMOSTRACION:

Para cada $g\in B$ tal que $g\leq f$ y para cada $h\in B$ tal que $f\leq h$, se tiene que $g\leq h$ implica $\phi(g)\leq\phi(h)$; sea h fija aunque arbitraria de $\bar{B}$, con $f\leq h$. Puesto que $\phi(h)$ es cota inferior del conjunto $\{\phi(g)\,;\, g\in B,\ g\leq f\}$, se tiene:

$$\sup\{\phi(g)\,;\ g\in B,\ g\leq f\}\leq \phi(h).$$

Es decir, tal supremo es cota inferior del conjunto

$$\{\phi(h)\,;\ h\in B,\ f\leq h\},$$

y ya que el ínfimo es el mayor de las cotas inferiores, queda que

$$\sup\ \{\phi(g)\,;\ g\in B,\ g\leq f\}\leq \inf\{\phi(h)\,;\ h\in B,\ f\leq h\}.$$

Por otra parte, dado $\varepsilon>0$, existen $h_\varepsilon, g_\varepsilon$ tales que

$$g_\varepsilon\leq f\leq h_\varepsilon \quad y \quad \phi(h_\varepsilon-g_\varepsilon)<\varepsilon\ ;$$

o sea: $\phi(h_\varepsilon)-\phi(g_\varepsilon)<\varepsilon$ implica

$$0\leq\inf\{\phi(h)\,;\ h\in B,\ f\leq h\} - \sup\ \{\phi(g)\,;\ g\in B,\ g\leq f\}\leq$$

$$\leq\phi(h_\varepsilon) - \phi(g_\varepsilon)<\varepsilon .$$

Concluimos entonces que:

$$\bar{\phi}(f) = \sup\{\phi(g)\,;\ g\in B,\ g\leq f\} = \inf\ \{\phi(h)\,;\ h\in B,\ f\leq h\}.$$

Trivialmente $\bar{\phi}$ es lineal: la demostración es formalmente idéntica a la que se hace para la integral de Riemann habitual. También obviamente $\bar{\phi}$ es no negativo, y en consecuencia monótono. Y trivialmente extiende a ϕ.

El sistema $(X,\bar{B},\bar{\phi})$ se llama la *extensión de Riemann del sistema de Loomis* (X,B,ϕ).

La clase $\bar{B}$ puede introducirse de manera distinta a como se ha hecho, empleando los conceptos de integral superior e inferior.

Una función f real definida en X se dice que tiene *L-integral superior* respecto de (X,B,ϕ) si y sólo si, está mayorada por alguna función de B. En tal caso, se define *L-integral superior* de f como

$$L\text{-}\bar{I}(f) = \inf \{ \phi(g) ;\ f \leqslant g,\ g \in B \}.$$

Análogamente se dice que una función real f definida en X posee *L-integral inferior* respecto de (X,B,ϕ) si y sólo si, está minorada por alguna función de B . Y en este caso, se define *L-integral inferior* de f como

$$L\text{-}\underline{I}(f) = \sup \{ \phi(g) ;\ g \leqslant f,\ g \in B \}.$$

Es fácil ver que $\bar{B}$ es precisamente el conjunto de las funcio nes reales en X que poseen integral superior e integral inferior, y que son iguales. Pues si $f \in \bar{B}$, al estar mayorada y minorada por funciones de B, f posee L-integral superior y L-integral inferior, que coinciden con $\bar{\phi}(f)$ según la proposición 2.5.

Y si f posee L-integral superior y L-integral inferior iguales, se tiene:

Para cada $\varepsilon \in R^+$, existe $h \in B$ tal que $f \leqslant h$ y que

$$\phi(h) - L\text{-}\bar{I}(f) < \varepsilon/2 \; ;$$

y existe $g \in B$ tal que $g \leqslant f$ y que

$$L\text{-}\underline{I}(f) - \phi(g) < \varepsilon/2.$$

Con ello, $\phi(h) - \phi(g) < \varepsilon$, $\quad g \leqslant f \leqslant h.$

Es decir,

$f \in \bar{B}$ $\quad y \quad$ $\bar{\phi}(f) = L\text{-}\bar{I}(f) = L\text{-}\underline{I}(f)$ evidentemente.

Es de notar que si una función posee L-integral superior, ésta es un elemento de $\bar{R}$ distinto de $+\infty$; y que si una función posee L-integral inferior, ésta es un elemento de $\bar{R}$ distinto de $-\infty$. Si una función real f definida en X no está mayorada (resp. minorada) por alguna función de B, ¿Cabe asignarle una integral superior (resp. inferior)? Consideremos un caso particular: si una función f posee L-integral inferior igual a $+\infty$, y no posee L-integral superior (o sea, no está mayorada por ninguna función de B), parece que puede asignársele, por extensión, una integral superior igual a $+\infty$.

Igualmente la intuición sugiere que si una función real f definida en X no está mayorada por ninguna función g de B, al menos, relativamente al sistema de Loomis, es "demasiado grande", por lo que parece natural definir su integral superior como $+\infty$.

Ahora bien, con ello sólo se llegaría a la consideración de funciones con unas integrales superior e inferior no finitas e iguales. Es más interesante, siguiendo el paralelismo con la teoría de Daniell-Stone, considerar una extensión de ϕ a un campo de funciones más amplio que $\bar{B}$, de modo que tales funciones tengan asignada una integral finita.

A continuación probamos que, en el proceso de extensión que estamos analizando, la ampliación de la clase $\bar{B}$ a una nueva clase $\bar{\bar{B}}$, nos conduce a ella misma.

Diremos que una función F pertenece a la clase $\bar{\bar{B}}$ si y solamente si, se verifica que:

Para cada $\varepsilon>0$, existen $f_1, f_2 \in \bar{B}$ tales que

$$f_1 \leqslant F \leqslant f_2 \quad y \quad \bar{\phi}(f_2 - f_1) < \varepsilon .$$

Evidentemente se da la relación: $\bar{B} \subset \bar{\bar{B}}$.

2.6. PROPOSICION.- $\bar{\bar{B}} = \bar{B}$.

DEMOSTRACION:

Dada una función F de $\bar{\bar{B}}$, por definición se cumplirá que:

Para cada $\varepsilon>0$, existen $f_1, f_2 \in \bar{B}$ tales que:

$$f_1 \leqslant F \leqslant f_2 \quad y \quad \bar{\phi}(f_2 - f_1) < \varepsilon/3;$$

además, f_1 y f_2 por ser funciones de $\bar{B}$ cumplen a su vez que, existen $g_1, h_1, g_2, h_2 \in B$ tales que:

$$g_1 \leqslant f_1 \leqslant h_1 \ , \ g_2 \leqslant f_2 \leqslant h_2 \quad y \quad \phi(h_1 - g_1) < \varepsilon/3 \ , \ \phi(h_2 - g_2) < \varepsilon/3.$$

Veamos que $F \in \bar{B}$.

En efecto, siendo $g_1 \leqslant F \leqslant h_2$, se tiene que

$$\phi(h_2 - g_1) = \bar{\phi}(f_2 - g_1) = \bar{\phi}(h_2 - g_2) + \bar{\phi}(g_2 - h_1) + \bar{\phi}(h_1 - g_1) \leqslant$$

$$\leqslant \phi(h_2 - g_2) + \bar{\phi}(f_2 - f_1) + \phi(h_1 - g_1),$$

ya que $g_2 - h_1 \leqslant f_2 - f_1$, y además $\bar{\phi}$ es no negativo.

Con lo cual, $\phi(h_2 - g_1) < \varepsilon$. Esto es, $F \in \bar{B}$.

Así pues, $\bar{\bar{B}} = \bar{B}$, como queríamos demostrar.

2.7. TEOREMA.- *Si los elementos de B son funciones acotadas y si B es un álgebra para el producto natural de funciones reales, $\bar{B}$ es un álgebra.*

DEMOSTRACION:

Si $f \in \bar{B}$, también $|f| \in \bar{B}$. Existirán por tanto $g_0, h_0 \in B$, tales que $g_0 \leqslant |f| \leqslant h_0$ y $\phi(h_0 - g_0) < 1$. Como $f^2 = |f|^2$, no es restrictivo que $f \geqslant 0$.

Sea $M \in R^+$ una cota de h_0. Dado $\varepsilon \in R^+$ existen $g, h \in B$ tales que

$$g \leqslant f \leqslant h \qquad y \qquad \phi(h - g) < \varepsilon/2M .$$

No es restrictivo suponer $h \leqslant h_0$ (de no ser así, en lugar de h con sideraríamos $h \wedge h_0$). Tampoco es restrictivo suponer $g \geqslant 0$ (si no se tomaría $g \vee 0$).

Pues bien, $g^2 \leqslant f^2 \leqslant h^2$, siendo $g^2, h^2 \in B$. Y además

$$\phi(h^2-g^2) = \phi[(h-g)(h+g)] \leqslant \phi[2M(h-g)] < \varepsilon .$$

Así pues, queda probado que para cada $f \in \bar{B}$ es $f^2 \in \bar{B}$. Y en virtud de la identidad

$$f_1 \cdot f_2 = 1/4 \ [(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2] ,$$

resulta que el producto natural es operación interna en $\bar{B}$.

2.8. NOTA.- Hemos expuesto sucintamente el concepto de integral de Riemann relativa a un sistema de Loomis, insistiendo en las dos definiciones equivalentes de la clase $\bar{B}$, y no entrando en detalle ecerca de propiedades fundamentales (pero de fácil demostración) como son la linealidad y no negatividad y monotonía de $\bar{\phi}$. Ello está en la línea ([38],[9]) habitual. Pero queremos observar que la consideración de esa integral, a partir de la definición directa de $\bar{B}$, no sugiere una generalización. La definición equivalente, mediante el uso de integrales de oscilación, sí; como se verá más adelante.

3. PRIMERAS EXTENSIONES DE UN SISTEMA DE LOOMIS.

Consideremos un sistema de Loomis $(X,\mathcal{B},\phi)$, no necesariamente stoniano.

3.1. DEFINICION.- Llamamos:

$$\mathcal{B}^+ = \{ f : X \to \bar{R};\ f = \sup g,\ g \leq f,\ g \in \mathcal{B} \},$$

y $$\mathcal{B}^- = \{ f : X \to \bar{R};\ f = \inf h,\ f \leq h\ \ h \in \mathcal{B} \}.$$

Evidentemente: $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-$, $\mathcal{B}^+ = -\mathcal{B}^-$.

Definimos entonces:

$$\tilde{\phi}_+ : \mathcal{B}^+ \to \bar{R} \quad \text{y} \quad \tilde{\phi}_- : \mathcal{B}^- \to \bar{R},$$

por medio de las expresiones:

$$\text{si } f \in \mathcal{B}^+, \quad \tilde{\phi}_+(f) = \sup \{\phi(g);\ g \in \mathcal{B},\ g \leq f\},$$

$$\text{si } f \in \mathcal{B}^-, \quad \tilde{\phi}_-(f) = \inf \{\phi(h);\ h \in \mathcal{B}\ \ f \leq h\}.$$

Nótese que si $f \in \mathcal{B}^+$, entonces $f > -\infty$; y si $f \in \mathcal{B}^-$ se tiene $f < +\infty$. Por tanto, no hay dificultad en definir la suma de dos funciones de $\mathcal{B}^+$ o de dos funciones de $\mathcal{B}^-$.

Obsérvese también que si $f \in \mathcal{B}^+$, es $-f \in \mathcal{B}^-$ y $\tilde{\phi}_-(-f) = -\tilde{\phi}_+(f)$.

3.2. PROPIEDADES.-

Evidentemente $\tilde{\phi}_+$ restringido a $\mathcal{B}$ coincide con ϕ y $\tilde{\phi}_-$ restringido a $\mathcal{B}$ coincide con ϕ.

i) $\tilde{\phi}_+$ y $\tilde{\phi}_-$ son monótonos y no negativos.

En efecto, para dos funciones cualesquiera f_1, f_2 de B^+ se deberá cumplir que si $f_1 \leqslant f_2$ entonces $\tilde{\phi}_+(f_1) \leqslant \tilde{\phi}_+(f_2)$. Y ésto es inmediato considerando la relación:

$$\{\phi(g_1);\ g_1 \leqslant f_1\} \subset \{\phi(g_2);\ g_2 \leqslant f_2\}.$$

Para las funciones de B^- se tiene:

$$f_1 \leqslant f_2 \Leftrightarrow -f_1 \geqslant -f_2 \Leftrightarrow \tilde{\phi}_+(-f_1) \geqslant \tilde{\phi}_+(-f_2) \Leftrightarrow -\tilde{\phi}_-(-f_1) \geqslant$$

$$\geqslant -\tilde{\phi}_-(-f_2) \Leftrightarrow \tilde{\phi}_-(f_1) \leqslant \tilde{\phi}_-(f_2).$$

Por otra parte, si $f \in B^+$ y es $f \geqslant 0$, en particular la función cero cumple la condición de pertenencia a B^+ y se tiene que $\tilde{\phi}_+(f) \geqslant 0$.

También trivialmente $\tilde{\phi}_-$ es no negativo para funciones de B^-.

ii) Para cualquier $f \in B^+$ y $\lambda \in R_0^+$ se tiene que $\lambda f \in B^+$.

En efecto, si $\lambda = 0$, es obvio; y si $\lambda \neq 0$, se tiene que

$$f = sup\,\{g;\ g \in B,\ g \leqslant f\} \qquad \text{si y sólo si,}$$

$$\lambda f = sup\,\{\lambda g;\ g \in B,\ g \leqslant f\} = sup\,\{g_0;\ g_0/_\lambda \leqslant f,\ g_0 \in B\}\ ;$$

entonces,

$$\lambda f = sup\,\{g_0;\ g_0 \in B,\ g_0 \leqslant \lambda f\},$$ y por tanto $\lambda f \in B^+$, como queríamos.

Análogamente se prueba que

Para cada $f\in B^-$ *y* $\lambda\in R_0^+$, $\lambda f\in B^-$.

En consecuencia, se tiene que $\lambda f\in B^-$ si $f\in B^+$ y $\lambda\in R^-$.

iii) Si $\lambda\in R_0^+$ *y* $f\in B^+$, *es* $\widetilde{\phi}_+(\lambda f) = \lambda\widetilde{\phi}_+(f)$.

En efecto, $\widetilde{\phi}_+(\lambda f) = \sup\ \{\phi(g);\ g\in B,\ g\leqslant\lambda f\} =$

$= \sup\ \{\phi(g);\ g\in B,\ \frac{1}{\lambda}\ g\leqslant f\} = \sup\{\phi(\lambda g_0);\ g_0\in B,\ g_0\leqslant f\} =$

$\lambda\sup\{\phi(g_0);\ g_0\in B,\ g_0\leqslant f\} = \lambda\widetilde{\phi}_+(f)$, si $\lambda>0$.

Y si $\lambda = 0$ el resultado es inmediato.

Esta propiedad se expresa diciendo que $\widetilde{\phi}_+$ es positivamente homogéneo.

Análogamente se prueba que $\widetilde{\phi}_-$ es positivamente homogéneo.

iv) Para cada $f\in B^+$, $\widetilde{\phi}_+(f)>-\infty$ *y para cada* $f\in B^-$, $\widetilde{\phi}_-(f)<+\infty$.

Trivial.

v) $\widetilde{\phi}_+$ *es superaditivo en* B^+ *y* $\widetilde{\phi}_-$ *es subaditivo en* B^-.

Veamos previamente que

Si $f_1, f_2\in B^+$, *entonces* $f_1+f_2\in B^+$.

En efecto, para cada $x\in X$, es $f_1(x) = \sup\{g_1(x);\ g_1\in B,\ g_1\leqslant f_1\}$

y $f_2(x) = \sup\{g_2(x);\ g_2\in B,\ g_2\leqslant f_2\}$.

Probemos que $f_1(x)+f_2(x) = \sup\{h(x);\ h\in B,\ h\leqslant f_1+f_2\}$.

Designaremos, para abreviar, como

$$C_1 = \{g_1(x)\,;\ g_1 \leqslant f_1,\ g_1 \in B\}$$

$$C_2 = \{g_2(x)\,;\ g_2 \leqslant f_2\ \ g_2 \in B\}$$

$$C_3 = \{h\ (x)\,;\ h \leqslant f_1 + f_2,\ h \in B\}.$$

a) En primer lugar, $f_1(x) + f_2(x)$ es cota superior del conjunto C_3.

b) Si M es cota superior del conjunto C_3, hay que probar que $M \geqslant f_2(x) + f_1(x)$. Si el primer miembro es $+\infty$, vale la desigualdad. Si $M \in R$, se tiene $M \geqslant g_1(x) + g_2(x)$, para todo $g_1 \in B$ tal que $g_1 \leqslant f_1$, y para toda $g_2 \in B$ tal que $g_2 \leqslant f_2$; con ello, (obsérvese que la desigualdad es entre números reales), $M - g_1(x)$ es cota superior del conjunto C_2, por lo cual $f_2(x) < M - g_1(x)$. Evidentemente $f_2(x)$ es real; por tanto, $\forall\ g_1 \in B$, $g_1 \leqslant f_1$, es $g_1(x) < M - f_2(x)$, con lo que el segundo miembro es cota superior de C_1, y por consiguien<u>te</u>, $f_1(x) \leqslant M - f_2(x)$. Entonces, $f_1(x)$ es real y además $f_1(x) + f_2(x) \leqslant M$; es decir, $f_1(x) + f_2(x)$ es el supremo del conjunto C_3.

Veamos ahora la superaditividad de $\tilde{\phi}_+$ en B^+.

Para cada $f_1, f_2 \in B^+$ *se cumple que* $\tilde{\phi}_+(f_1 + f_2) \geqslant \tilde{\phi}_+(f_1) + \tilde{\phi}_+(f_2)$.

En efecto, en primer lugar, si $g_1 \in B$ y $g_2 \in B$ cumplen

$g_1 \leqslant f_1$ y $g_2 \leqslant f_2$, ello implica $g_1 + g_2 \leqslant f_1 + f_2$.

$$\phi(g_1 + g_2) = \phi(g_1) + \phi(g_2) \leqslant \tilde{\phi}_+(f_1 + f_2);$$

y de aquí se deduce facilmente que:

$$\tilde{\phi}_+(f_1)+\tilde{\phi}_+(f_2)\leq\tilde{\phi}_+(f_1+f_2).$$

Puesto que si

a) El segundo miembro es $+\infty$, es cierto.

b) $\tilde{\phi}_+(f_1+f_2)$ es finito, entonces se tiene que

$$\phi(g_1)\leq\tilde{\phi}_+(f_1+f_2)-\phi(g_2)\ \Rightarrow\ \tilde{\phi}_+(f_1)\leq\tilde{\phi}_+(f_1+f_2)-\phi(g_2),$$

y todos los términos son reales.

Poniendo

$$\phi(g_2)\leq\tilde{\phi}_+(f_1+f_2)-\tilde{\phi}_+(f_1)\quad\Rightarrow\quad\tilde{\phi}_+(f_2)\leq\tilde{\phi}_+(f_1+f_2)-\tilde{\phi}_+(f_1).$$

Luego, en todo caso tendremos que:

$$\tilde{\phi}_+(f_1+f_2)\geq\tilde{\phi}_+(f_1)+\tilde{\phi}_+(f_2).$$

Es evidente que si $\tilde{\phi}_+(f_1)$ ó $\tilde{\phi}_+(f_2)$ valen $+\infty$, se da el signo igual.

Analicemos qué sucede con el otro sentido de la desigualdad. Para ello demos una importante proposición.

3.3 PROPOSICION.- *Si* f_1 *ó* f_2 *pertenece a* B, *se tiene*

$$\tilde{\phi}_+(f_1+f_2)=\tilde{\phi}_+(f_1)+\tilde{\phi}_+(f_2).$$

DEMOSTRACION:

Supongamos que $f_1\in B$, $f_2\in B^+$, y sea $h\leq f_1+f_2$.

Con ello, $h-f_1\leq f_2$ implica

$$\phi(h-f_1) = \phi(h) - \phi(f_1) \leqslant \tilde{\phi}_+(f_2),$$

entonces $\qquad \phi(h) \leqslant \phi(f_1) + \tilde{\phi}_+(f_2) = \tilde{\phi}_+(f_1) + \tilde{\phi}_+(f_2)$

y por tanto, $\qquad \tilde{\phi}_+(f_1 + f_2) \leqslant \tilde{\phi}_+(f_1) + \tilde{\phi}_+(f_2).$

Así pues, $\qquad \tilde{\phi}_+(f_1 + f_2) = \tilde{\phi}_+(f_1) + \tilde{\phi}_+(f_2)$

cuando algún $f_i (i = 1,2)$ pertenece a B.

Por supuesto, estas propiedades se extienden dualmente a B^-:

Para cada $f_1, f_2 \in B^-$, $\tilde{\phi}_-(f_1 + f_2) \leqslant \tilde{\phi}_-(f_1) + \tilde{\phi}_-(f_2)$.
Y si, además, alguna $f_i \in B$ $(i=1,2)$, *entonces*

$$\tilde{\phi}_-(f_1 + f_2) = \tilde{\phi}_-(f_1) + \tilde{\phi}_-(f_2).$$

3.4. PROPOSICION.- B^+ *es retículo.*

DEMOSTRACION:

1) Veamos que es retículo superior.

Sean $f_1, f_2 \in B^+$; por lo tanto, $f_i = \sup\{g_i \in B,\ g_i \leqslant f_i\}$, para todo $i = 1,2$.

Tenemos que probar que $f_1 \vee f_2 \in B^+$. Esto es,

$$f_1 \vee f_2 = \sup\{g \in B;\ g \leqslant (f_1 \vee f_2)\}.$$

a) Para cada $x \in X$, evidentemente $(f_1 \vee f_2)(x)$ es cota superior del conjunto $\{g(x);\ g \in B,\ g \leqslant f_1 \vee f_2\} = C_1$.

b) Sea $x \in X$ y M una cota superior del conjunto C_1; entonces, si $M < (f_1 \vee f_2)(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, será $M < f_i(x)$, $(i = 1,2)$, luego, existirá $g_i \in B$ tal que

$$M < g_i(x) \leqslant f_i(x) \ , \ g_i \leqslant f_i \ , \qquad \text{para todo } i = 1,2.$$

Por consiguiente, $M < g_i(x) \leqslant (g_1 \vee g_2)(x)$, con $g_1 \vee g_2 \leqslant f_1 \vee f_2$, y llegamos a una contradicción; luego $(f_1 \vee f_2)(x)$ es la mínima de las cotas superiores del conjunto C_1 .

2) Veamos ahora que es retículo inferior.

Sean $f_1, f_2 \in B^+$. Tenemos que probar que $f_1 \wedge f_2 \in B^+$.

Esto es,

$$f_1 \wedge f_2 = \sup \{g \in B ; \ g \leqslant f_1 \wedge f_2\} .$$

a) Evidentemente, para cada $x \in X$, $(f_1 \wedge f_2)(x)$ es cota superior del conjunto $\{g(x) ; \ g \in B, \ g \leqslant f_1 \wedge f_2\} = C_2$.

b) Sea M una cota superior del conjunto C_2 . Por reducción al absurdo: supongamos que $M < (f_1 \wedge f_2)(x)$; con ello, $M < f_i(x)$, $(i = 1,2)$. Entonces, existen $g_i(x)$, $(i = 1,2)$, tales que

$$M < g_i(x) \leqslant f_i(x) \ , \ g_i \leqslant f_i,$$

lo que implica que

$$M < (g_1 \wedge g_2)(x) \quad y \quad g_1 \wedge g_2 \in B \ , \ g_1 \wedge g_2 \leqslant f_1 \wedge f_2 \ ,$$

con lo que obtenemos una contradicción.

Trivialmente se deduce que B^- también es retículo.

3.5. PROPOSICION.- B^+ *es cerrado tomando supremos (lo que equivale a que B^- es cerrado tomando ínfimos).*

DEMOSTRACION:

Sea $f : X \to \bar{R}$ tal que $f = sup\{F;\ F \in B^+,\ f \geq F\}$

Tenemos que probar que $f \in B^+$, es decir:

$$f = sup\ \{g;\ g \in B,\ g \leq f\}.$$

En primer lugar, se tiene

$$\{g;\ g \in B,\ g \leq f\} \quad \subset \quad \{F;\ F \in B^+,\ F \leq f\}.$$

Por lo tanto, para cada $x \in X$ se cumple que

$$sup\ \{F(x);\ F \in B^+,\ F \leq f\}$$

es cota superior del conjunto

$$\{g(x);\ g \in B,\ g \leq f\}.$$

Pues bien, sea $M < sup\ \{F(x);\ F \in B^+,\ F \leq f\}$; entonces, existirá $F_0 \in B^+$, $F_0 \leq f$ y tal que

$$M < F_0(x) \leq sup\ \{F(x);\ F \in B^+,\ F \leq f\};$$

pero como $F_0 \in B^+$, existirá $g_0 \in B$ tal que $M < g_0(x) \leq F_0(x)$; y como $F \leq f$, tenemos, en resumen, que existirá $g_0 \leq f$ tal que

$$g_0 \in B \qquad y \qquad g_0(x) > M .$$

Por tanto,

$$sup\{g(x);\ g \in B,\ g \leq f\} = sup\{F(x);\ F \in B^+,\ F \leq f\} = f(x).$$

3.6. COROLARIO.- *Si consideramos una familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *de elementos de* B^+*, se cumple que*

$$f = \sup\{f_i\}_{i\in I} \in B^+.$$

Trivial.

3.7. COROLARIO.- *Si* $\{f_n\}_{n\in N}$ *es una sucesión creciente de funciones de* B^+ *y es* $f = \lim_n f_n$ *, se tiene que* $f\in B^+$*.*

3.8. PROPOSICION.- *Si* B *es stoniano, también* B^+ *es stoniano.*

DEMOSTRACION:

Si $f\in B^+$, será $f = \sup\{g\,;\ g\in B,\ g\leqslant f\}$.

Veamos que $1\wedge f\in B^+$. Para esto habrá que probar que dado $x\in X$, y dado $r\in\bar{R}$ tal que $r<(1\wedge f)(x)$, existe $h\in B$ tal que

$$h\leqslant 1\wedge f \qquad \text{y} \qquad r<h(x)\leqslant(1\wedge f)(x).$$

Pues bien, como $f\in B^+$, existe $g\in B$ tal que $g\leqslant f$ y $r<g(x)\leqslant f(x)$, con lo que basta tomar $h = 1\wedge g\in B$, pues $h\leqslant 1\wedge f$ y $r<1$ implica $r<(1\wedge g)(x) = h(x)\leqslant(1\wedge f)(x)$, y se concluye la demostración.

4. PROLONGACION ADITIVA DE UN FUNCIONAL DE LOOMIS.

Si $(X,\mathcal{B},\phi)$ es un sistema de Loomis, hemos definido $\mathcal{B}^+$ y hemos prolongado la aplicación $\phi: \mathcal{B} \to R$ a una aplicación $\tilde{\phi}_+: \mathcal{B}^+ \to \bar{R}-\{-\infty\}$. Hemos visto también que $\hat{\phi}_+$ es positivamente homogéneo y superaditivo. Se plantea la cuestión de si $\tilde{\phi}_+$ es aditivo en $\mathcal{B}^+$. En algunos casos, cuando ϕ es de Daniell-Bourbaki por ejemplo (puede verse en [13], propos.4.23), sí lo es. Pero puede ocurrir que para algunos sistemas de Loomis falle la aditividad de $\tilde{\phi}_+$. Demos un ejemplo.

Consideremos $X = N$ y $\mathcal{B}$ igual al conjunto de las sucesiones reales casiconstantes, que evidentemente es retículo vectorial.

Definamos $\phi: \mathcal{B} \to R$ por medio de $\phi(\{a_n\}_{n\in N}) = \lim\limits_n a_n$.

Sea F_1 la sucesión $1,0,1,0,\ldots 1,0,\ldots$ y F_2 la sucesión $0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots$; es fácil ver que F_1 y F_2 pertenecen a $\mathcal{B}^+$. Por ejemplo, si $x\in N$, dado $\varepsilon\in R^+$ se verifica que la sucesión g_ε definida por $g_\varepsilon(n) = \delta_{n,x}\,[F_1(n)]$ cumple $g_\varepsilon\in \mathcal{B}$,

$$g_\varepsilon \leqslant F_1; \quad y \quad g_\varepsilon(x) = F_1(x) > F_1(x)-\varepsilon.$$

Por consiguiente, $F_1 \in \mathcal{B}^+$.

Veamos que $\tilde{\phi}_+(F_1)$ es igual a cero.

Si $g\in \mathcal{B}$, $g\leqslant F_1$, al ser g casiconstante deberá ser cero a partir de un término. Por tanto, $\phi(g)\leqslant 0$. Así pues,

$$\tilde{\phi}_+(F_1) = \sup\{\phi(g);\ g\in \mathcal{B},\ g\leqslant F_1\} \leqslant 0.$$

Pero por otra parte, como $F_1 \geqslant 0$ es $\widetilde{\phi}_+(F_1) \geqslant 0$, por lo que $\widetilde{\phi}_+(F_1) = 0$ Análogamente, $\widetilde{\phi}_+(F_2) = 0$, y sin embargo,

$$\widetilde{\phi}_+(F_1 + F_2) = \widetilde{\phi}_+(\{1\}_{n \in N}) = 1.$$

Es decir, $\widetilde{\phi}_+(F_1 + F_2) > \widetilde{\phi}_+(F_1) + \widetilde{\phi}_+(F_2)$.

Obsérvese que se deduce, indirectamente, que el funcional del ejemplo no es un funcional de Daniell-Bourbaki. También puede comprobarse directamente que ϕ no es de Daniell.

Sea $S_n \in B$ definido así:

$$S_n(i) = \begin{cases} 1, & si\ \ i \geqslant n \\ 0, & si\ \ i < n \end{cases}$$

Es decir, los términos de S_n son $0, 0, 0, \ldots, \overset{(n}{1}, 1, \ldots, 1, \ldots$

Evidentemente, $\{S_n\}_{n \in N}$ es decreciente y de límite cero (puntualmente en N, claro). Sin embargo, $\phi(S_n) = 1$, para todo n. Como ϕ no es de Daniell, no es de Daniell-Bourbaki.

Así pues, ϕ no cumple la condición de Daniell.

Aparece de manera natural la cuestión de encontrar un subconjunto de B^+ tal que $\widetilde{\phi}_+$ restringido a dicho subconjunto sea aditivo. Obviamente, tal subconjunto debe ser estable por la suma, y debe contener a B. Puesto que, como es usual, se procura ampliar ϕ al campo más amplio posible, B es insuficiente. Pero hay más razones: en primer lugar, los elementos de B^+ son funciones no necesariamente finitas, y el subconjunto buscado no tiene por qué ser, a priori, de funciones reales. En segundo lugar, aunque nos adelantemos a las consideraciones que se darán sobre integrales de oscilación asociadas a un sistema de Loomis, interesan que se asignen integrales superior y/o inferior a funciones numéricas no necesariamente finitas, lo que requiere un subconjunto más amplio que $\mathcal{B}$.

Por otra parte, debemos de estudiar, en el subconjunto que tratamos de hallar, qué otras propiedades formales de $\mathcal{B}^+$ se conservan, aparte de la estabilidad por la suma: la estructura de retículo, por ejemplo. Como veremos, no todas se conservan.

En nuestro trabajo, hemos seguido una línea sugerida por el concepto conjuntista de medibilidad. Si μ^* es una medida exterior definida en el conjunto de partes de un conjunto X, un subconjunto A de X se llama medible, si y sólo si, para cada $Y \subset X$ se cumple

$$\mu^*(Y) = \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(Y - A).$$

Pues bien, cabe pensar en la siguiente

4.1. DEFINICION.- Llamamos:

$$\mathcal{B}_+ = \{ f \in \mathcal{B}^+ ;\ \widetilde{\phi}_+(f+F) = \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F),\ \textit{para toda}\ F \in \mathcal{B}^+ \} =$$

$$= \{ f \in \mathcal{B}^+ ;\ \widetilde{\phi}_+(f+F) \leqslant \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F),\ \textit{para toda}\ F \in \mathcal{B}^+ \}.$$

Hagamos notar que esta definición, aparte de su coherencia y el paralelismo formal que permite, no es singular en la bibliografía sobre el tema (veáse [40] , p.428, definición 2.6.).

Evidentemente $B \subset B_+ \subset B^+$.

4.2. TEOREMA.- B_+ *es estable por la suma y* $\tilde{\phi}_+$ *es aditivo en* B_+.

DEMOSTRACION:

Observemos en primer lugar que si $f_1, f_2 \in B_+$; desde luego, $f_1 + f_2 \in B^+$, y para cada $F \in B^+$ se tiene:

$$\tilde{\phi}_+(f_1 + f_2 + F) = \tilde{\phi}_+(f_1) + \tilde{\phi}_+(f_2+F) = \tilde{\phi}_+(f_1) + \tilde{\phi}_+(f_2) + \tilde{\phi}_+(F) =$$

$$= \tilde{\phi}_+(f_1 + f_2) + \tilde{\phi}_+(F).$$

Con lo cual, $f_1 + f_2 \in B_+$. Así, B_+ es estable por la suma. Y eligiendo $F = 0$, se obtiene la aditividad enunciada.

Por supuesto, $\tilde{\phi}_+$ es positivamente homogéneo en B_+, por serlo en $B^+ \supset B_+$, y por ser B_+ estable por la multiplicación por escalares no negativos. Trivialmente, si $f \in B_+, \lambda \in R^+$, se tiene

$$\tilde{\phi}_+(\lambda f + F) = \lambda \tilde{\phi}_+(f + \frac{1}{\lambda} F) = \lambda [\tilde{\phi}_+(f) + \tilde{\phi}_+(\frac{1}{\lambda} F)] =$$

$\tilde{\phi}_+(\lambda f) + \tilde{\phi}_+(F)$, para toda $F \in B^+$. Es decir, $\lambda f \in B_+$.

Análogamente se define:

$$B_- = \{f \in B^- ;\ \tilde{\phi}_-(f + F) = \tilde{\phi}_-(f) + \tilde{\phi}_-(F),\ \textit{para toda}\ F \in B^-\} =$$

$$\{f \in B^- ;\ \tilde{\phi}_-(f + F) \geq \tilde{\phi}_-(f) + \tilde{\phi}_-(F),\ \textit{para toda}\ F \in B^-\}.$$

4.3. LEMA.- *$f \in B_-$ si y sólo si $-f \in B_+$.*

DEMOSTRACION:

Si $f \in B_-$, $-f \in B^+$. Y si $F \in B^+$, se tiene

$$\tilde{\phi}_+(-f+F) = \tilde{\phi}_+(-[f+(-F)]) = -\tilde{\phi}_-(f+(-F)) =$$

$$= -[\tilde{\phi}_-(f)+\tilde{\phi}_-(-F)] = \tilde{\phi}_+(-f)+\tilde{\phi}_+(F).$$ Es decir, $-f \in B_+$.

Y si $-f \in B_+$, $f \in B^-$. Para cada $F \in B^-$, se tiene

$$\tilde{\phi}_-(f+F) = -\tilde{\phi}_+[(-f)+(-F)] = -[\tilde{\phi}_+(-f)+\tilde{\phi}_+(-F)] =$$

$$= \tilde{\phi}_-(f)+\tilde{\phi}_-(F).$$ Es decir, $f \in B_-$, como queríamos.

4.4. TEOREMA.- *Si $f \in B_+ \cap B_-$, se cumple $\tilde{\phi}_+(f) = \tilde{\phi}_-(f)$.*

DEMOSTRACION:

Según el lema 4.3, se tiene $-f \in B_+ \cap B_-$, entonces

$$\tilde{\phi}_+(f+(-f)) = 0 = \tilde{\phi}_+(f)+\tilde{\phi}_+(-f) = \tilde{\phi}_+(f)-\tilde{\phi}_-(f).$$

Nótese que todos los términos son reales.

4.5. NOTA.- Si definimos $\tilde{B} = B_+ \cup B_-$, puede extenderse $\phi : B \to R$ a una aplicación $\tilde{\phi} : \tilde{B} \to \bar{R}$, definiendo:

$$\tilde{\phi}(f) = \begin{cases} \tilde{\phi}_+(f) & \text{si } f \in B_+ \\ \tilde{\phi}_-(f) & \text{si } f \in B_- . \end{cases}$$

No hay problema si $f \in B_+ \cap B_-$.

Obsérvese que si ϕ no es la forma lineal nula en B, ello implica que $B \neq \langle 0 \rangle$. Tácitamente se ha supuesto hasta ahora, y se supondrá en lo sucesivo, que así es, ya que prolongar una aplicación lineal nula es trivial.

$$\text{Sea} \quad \hat{X} = \{ x \in X \ ; \ \textit{existe } g \in B \textit{ tal que } g(x) \neq 0 \} =$$
$$= \{ x \in X \ ; \ \textit{existe } g \in B \textit{ tal que } g(x) > 0 \} =$$
$$= X - \{ x \in X \ ; \ \textit{para cada } g \in B,\ g(x) = 0 \}.$$

Sea $\hat{\chi}$ la función característica de $\hat{X}$. Evidentemente la función numérica $(+\infty).\hat{\chi} \in B^+$. Si $g \in B$ es tal que $\phi(g) \neq 0$, se tiene que: $\phi(|g|) \geq |\phi(g)| > 0$. Y para cada $n \in N$, se tiene:

$$(+\infty).\hat{\chi} \geq n|g| \qquad \text{lo que implica}$$

$$\tilde{\phi}_+[(+\infty).\hat{\chi}] \geq \tilde{\phi}_+(n|g|) = \phi(n|g|) = n\phi(|g|).$$

Por tanto, $\tilde{\phi}_+[(+\infty).\hat{\chi}] = +\infty$, de donde $(+\infty).\hat{\chi} \in B_+$.

Así pues, B está incluido estrictamente en B_+.

La aplicación $\tilde{\phi}$ definida más arriba, es positivamente homogénea y también homogénea. Es aditiva la resctricción a B_+ y también lo es la restricción a B_-. Además, $\tilde{\phi}$ es monótona en B_+ y en B_-.

Analicemos si $\tilde{\phi}$ es aditiva en $\tilde{B}$.

Sea $f_1, f_2 \in \widetilde{B}$. No puede asegurarse que $f_1 + f_2$ esté definida para todo punto de X, pues si $f_1 \in B_+$ y $f_2 \in B_-$, puede suceder que en algunos puntos de X, f_1 tome el valor $+\infty$, y f_2 tome el valor $-\infty$(tales puntos se llamarán críticos). Pero aun en el caso de que $f_1 + f_2$ esté definida en todo punto de X, $f_1 + f_2$ no tiene por qué pertenecer a B^+ ni a B^-(este hecho puede ocurrir incluso en el caso de que el funcional sea de Daniell-Bourbaki).

$\widetilde{B}$ no es, pues, estable por la suma (y por consiguiente, no es espacio vectorial).

4.6. TEOREMA.- *Si* $f_1, f_2 \in B_+$, *se verifica que* $f_1 \vee f_2 \in B_+$.

DEMOSTRACION:

Basta comprobar que

$$\widetilde{\phi}_+(f_1 \vee f_2 + F) \leqslant \widetilde{\phi}_+(f_1 \vee f_2) + \widetilde{\phi}_+(F), \text{ para toda } F \in B^+.$$

Desde luego, como $f_1 \vee f_2 \geqslant f_1$ y $f_1 \vee f_2 \geqslant f_1$, la desigualdad es cierta si $\widetilde{\phi}_+(f_1)$ ó $\widetilde{\phi}_+(f_2)$ valen $+\infty$.

Supongamos que $\widetilde{\phi}_+(f_1)$ y $\widetilde{\phi}_+(f_2)$ son reales. Dado $\varepsilon \in R^+$, sean $g_1, g_2 \in B$ tales que $g_1 \leqslant f_1$, $g_2 \leqslant f_2$ y

$$\widetilde{\phi}_+(f_1 - g_1) = \widetilde{\phi}_+(f_1) - \widetilde{\phi}_+(g_1) < \varepsilon/2 \quad y \quad \widetilde{\phi}_+(f_2 - g_2) = \widetilde{\phi}_+(f_2) - \widetilde{\phi}_+(g_2) < \varepsilon/2.$$

Observemos que $f_1 \vee f_2 - g_1 \vee g_2 \leqslant (f_1 - g_1) + (f_2 - g_2)$,

pues si $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, se tiene que

$$(f_1 \vee f_2)(x)-(g_1 \vee g_2)(x) = f_2(x)-(g_1 \vee g_2)(x) \leqslant f_2(x)-g_2(x) \leqslant$$

$$\leqslant (f_2(x)-g_2(x)) + (f_1(x)-g_1(x));$$

por simetría, si $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, se tiene que

$$(f_1 \vee f_2)(x)-(g_1 \vee g_2)(x) \leqslant (f_1(x)-g_1(x)) + (f_2(x)-g_2(x)).$$

Por tanto, $f_1 \vee f_2 \leqslant g_1 \vee g_2 + (f_1-g_1) + (f_2-g_2)$,

y para cada $F \in B^+$, se tiene

$$f_1 \vee f_2 + F \leqslant g_1 \vee g_2 + (f_1-g_1) + (f_2-g_2) + F.$$

Por la monotonía de $\widetilde{\phi}_+$, se cumple que

$$\widetilde{\phi}_+(f_1 \vee f_2 + F) \leqslant \widetilde{\phi}_+[(g_1 \vee g_2) + (f_1-g_1) + (f_2-g_2) + F] =$$

$$= \widetilde{\phi}_+(g_1 \vee g_1) + \widetilde{\phi}_+(f_1-g_1) + \widetilde{\phi}_+(f_2-g_2) + \widetilde{\phi}_+(F),$$

puesto que las funciones $g_1 \vee g_2$, f_1-g_1, f_2-g_2, pertenecen a B_+.

Así pues, $\widetilde{\phi}_+(f_1 \vee f_2 + F) \leqslant \widetilde{\phi}_+(g_1 \vee g_2) + \varepsilon + \widetilde{\phi}_+(F) \leqslant$

$\leqslant \widetilde{\phi}_+(f_1 \vee f_2) + \widetilde{\phi}_+(F) + \varepsilon$, dado que $g_1 \vee g_2 \leqslant f_1 \vee f_2$.

Al ser ε arbitrario, nos queda:

$\widetilde{\phi}_+(f_1 \vee f_2 + F) \leq \widetilde{\phi}_+(f_1 \vee f_2) + \widetilde{\phi}_+(F)$, como queríamos.

4.7. NOTA: Si $\widetilde{\phi}_+(f_1)$, $\widetilde{\phi}_+(f_2) \in R$, veamos que

$\widetilde{\phi}_+(f_1 \wedge f_2 + F) \leqslant \widetilde{\phi}_+(f_1 \wedge f_2) + \widetilde{\phi}_+(F)$, para toda $F \in B^+$.

Dado $\varepsilon \in R^+$, elegimos $g_1, g_2 \in B$ tales que $g_1 \leqslant f_1$, $g_2 \leqslant f_2$ y

$$\widetilde{\phi}_+(f_1-g_1) < \varepsilon/2 \quad , \quad \widetilde{\phi}_+(f_2-g_2) < \varepsilon/2 .$$

Observemos que $f_1 \wedge f_2 - g_1 \wedge g_2 \leqslant (f_1 - g_1) + (f_2 - g_2)$.

En efecto, si $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, es $(f_1 \wedge f_2)(x) - (g_1 \wedge g_2)(x) =$

$$= (f_1 \wedge f_2)(x) - g_1(x) \leqslant f_1(x) - g_1(x) \leqslant$$
$$\leqslant [f_1(x) - g_1(x)] + [f_2(x) - g_2(x)] \ .$$

Si $g_1(x) \geqslant g_2(x)$, por simetría se da

$$(f_1 \wedge f_2)(x) - (g_1 \wedge g_2)(x) \leqslant (f_1(x) - g_1(x)) + (f_2(x) - g_2(x)).$$

Como antes, $f_1 \wedge f_2 + F \leqslant g_1 \wedge g_2 + (f_1 - g_1) + (f_2 - g_2) + F$ para cada $F \in B^+$.

Por último, aplicando $\widetilde{\Phi}_+$ a los dos miembros, se concluye lo enunciado. Por tanto, deducimos que $f_1 \wedge f_2 \in B_+$.

Ahora bien, si $\widetilde{\Phi}_+(f_1) = +\infty$ ó bien $\widetilde{\Phi}_+(f_2) = +\infty$, no podemos concluir que $f_1 \wedge f_2 \in B_+$.

4.8. EJEMPLO:

Sea B el conjunto de las sucesiones cuasibiconstantes de números reales. Es decir, $\{a_n\}_{n \in N} \in B$ si y sólo si, existe $n_0' \in N$ tal que $n \geqslant n_0$ y n par implica $a_n = a'$. Y $n \geqslant n_0$ y n impar implica $a_n = a''$.

Evidentemente, con la suma y el producto por escalares ordinarios, B es espacio vectorial real. Además, B es retículo.

Definamos $\phi : B \to R$ por medio de $\phi(\{a_n\}_{n \in N}) = \dfrac{a' + a''}{2}$.

Es fácil ver que ϕ es lineal y no negativo. También es evidente que el espacio de las sucesiones reales cuasiconstantes es subespacio vectorial de $\mathcal{B}$, y que el funcional que definimos (ejemplo p.27) es precisamente la restricción de ϕ a tal subespacio.

Pues bien, sea f_1 la sucesión $-1,2,0,4,1,6,-1,8,0,10,1,12,-1,$ $-1,14,0,16,1,18,\ldots$, y sea f_2 la sucesión $1,0,1,0,1,0,1,0,\ldots$
Es fácil comprobar que $f_1 \in \mathcal{B}_+$ y $f_2 \in \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_+$.
Por otra parte, se tiene que $f_1 \wedge f_2$ es la sucesión $-1,0,0,0,1,0,-1,$ $0,0,0,1,0,\ldots$, que pertenece a $\mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-$ y además $\widetilde{\phi}_+(f_1 \wedge f_2) = -1/2$.

Se tiene entonces que

$$\widetilde{\phi}_+(f_1 \wedge f_2) + \widetilde{\phi}_+[-(f_1 \wedge f_2)] = -1/2 + (-1/2) = -1 <$$

$$< \widetilde{\phi}_+[(f_1 \wedge f_2) + (-f_1 \wedge f_2)] = 0.$$

No puede pensarse pues en la validez de la propiedad señala da más arriba. Ni aun exigiendo que una $f_1 \in \mathcal{B}_+$ y que la otra $f_2 \in \mathcal{B}$. Ni por tanto que $f_1, f_2 \in \mathcal{B}_+$ y alguna $\widetilde{\phi}_+(f_i) \in \mathbb{R}$.

Señalemos que puede ser $\widetilde{\phi}_+(f_1) = +\infty$, $\widetilde{\phi}_+(f_2) = +\infty$, $\widetilde{\phi}_+(f_1 \wedge f_2) \in \mathbb{R}$.

Como ejemplo demos el siguiente:

Sea f_1 la sucesión $-1,3,1,5,0,7,-1,9,1,11,0,13,-1,\ldots$, y sea f_2 la sucesión $2,0,4,-1,6,1,8,0,10,-1,12,1,14,0,\ldots$
Es fácil comprobar que f_1, f_2 pertenecen a $\mathcal{B}^+$ y que $\phi_+(f_1) =$ $= \phi_+(f_2) = +\infty$, por lo que f_1, f_2 pertenecen a $\mathcal{B}_+$.

En cambio, $f_1 \wedge f_2$ es la sucesión $-1,0,1,-1,0,1,-1,0,1,\ldots$, que petenece a $\mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-$, y sin embargo no pertenece a $\mathcal{B}_+$ sin más que considerar la sucesión $1,0,-1,1,0,-1,1,0,-1,\ldots$, que también pertenece a $\mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-$.

Se tiene entonces

$$\tilde{\phi}_+(f_1 \wedge f_2) + \tilde{\phi}_+[-(f_1 \wedge f_2)] = (-1) + (-1) = -2 <$$
$$< \tilde{\phi}_+[f_1 \wedge f_2 + (-f_1 \wedge f_2)] = 0.$$

4.9. TEOREMA.- *No puede asegurarse que B_+ sea cerrado por supremos.*

En efecto, consideremos el ejemplo de las sucesiones reales casiconstantes. Hemos visto que la sucesión

$\{\frac{(-1)^n+1}{2}\}n\in N$ no pertenece a la clase B_+. Sin embargo,

$\{\frac{(-1)^n+1}{2}\}n\in N = sup\{S_i \; ; \; i\in N\}$, siendo

$S_i = \{\varsigma_{i,n} \cdot \frac{(-1)^n+1}{2}\}n\in N \in B\subset B_+$, para todo $i\in N$.

Hemos considerado las estructuras de que están dotadas B^+ y B_+, y hemos analizado las que se pierden al pasar de B^+ a B_+. Pero lo realmente importante son las estructuras de que están dotadas la clase de las funciones sumables y la clase de las funciones integrables a que nos referiremos posteriormente.

5. INTEGRAL SUPERIOR E INTEGRAL INFERIOR.

Sea $(X,\mathcal{B},\phi)$ un sistema de Loomis. Designamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones numéricas f definidas en X tales que $f(X-\hat{X}) = \{0\}$. Si $X = \hat{X}$, se tomará $\mathcal{F} = \overline{R}^X$.

5.1. DEFINICION.- Para cada $f\in\mathcal{F}$ definimos la *integral superior* de f como

$$\bar{I}(f) = \inf\{\widetilde{\phi}(F)\ ;\ F\in\mathcal{B}_+\ ,\ F\geq f\}.$$

Análogamente se define la *integral inferior* de f como

$$\underline{I}(f) = \sup\{\widetilde{\phi}(F)\ ;\ F\in\mathcal{B}_-\ ,\ F\leq f\}.$$

Ninguno de esos dos conjuntos es vacío, ya que, para el primer conjunto $(+\infty).\hat{X}$ es mayorante de cualquier $f\in\mathcal{F}$, y $(+\infty).\hat{X}$ pertenece a $\mathcal{B}_+$. De igual manera, la consideración de $(-\infty).\hat{X}$ nos hace ver que el segundo conjunto tampoco es vacío.

Nótese que para una misma función numérica f, su integral superior y su integral inferior varían de un sistema de Loomis a otro, por lo que, en caso de confusión, escribiremos $\bar{I}_\phi(f)$ y $\underline{I}_\phi(f)$.

Cabe considerar, como hace Loomis ([38], p.169), otras integrales de oscilación:

Se definieron:

$$L\text{-}\bar{I}(f) = \inf\{\phi(g) ;\ g\in B,\ f\leq g\} \quad y$$

$$L\text{-}\underline{I}(f) = \sup\{\phi(g) ;\ g\in B,\ g\leq f\}.$$

Claro es que f debe estar mayorada por alguna función de B, y minorada por alguna función de B, para que puedan definirse las integrales anteriores. Con lo cual, f debe ser real, y sus integrales de oscilación números reales. Tal definición presenta el inconveniente de que el conjunto de funciones empleado es "pequeño", y sobre todo, que las funciones que se manejan no pueden tomar valores infinitos. No obstante, como puede verse en [38], son muy útiles para el estudio de las integrales impropias de Riemann y para la integral de Riemann abstracta. Sin embargo, es claro que son insuficientes para el problema de la extensión más amplia posible del sistema inicial.

También podría definirse, como hace Pfeffer ([13], p.56),

$$P\text{-}\bar{I}(f) = \inf\{\phi(g) ;\ g\in B^{+},\ f\leq g\} \quad y$$

$$P\text{-}\underline{I}(f) = \sup\{\phi(g) ;\ g\in B^{-},\ g\leq f\},$$

para funciones f pertenecientes a la clase $\mathcal{F}$.

En todo caso se verifican:

$L\text{-}\bar{I}(f)\geq\bar{I}(f)\geq P\text{-}\bar{I}(f)$ y $L\text{-}\underline{I}(f)\leq\underline{I}(f)\leq P\text{-}\underline{I}(f)$, para cualquier función f mayorada y minorada por funciones de B.

Basta observar:

$$\{\phi(g);\ g\in\mathcal{B},\ g\geq f\}\subset\{\tilde{\phi}(F);\ F\in\mathcal{B}_+,\ F\geq f\}\subset\{\tilde{\phi}(F);\ F\in\mathcal{B}^+,\ F\geq f\},$$

$$\{\phi(g);\ g\in\mathcal{B},\ g\leq f\}\subset\{\tilde{\phi}(F);\ F\in\mathcal{B}_-,\ F\leq f\}\subset\{\tilde{\phi}(F);\ F\in\mathcal{B}^-,\ F\leq f\}.$$

5.2. OBSERVACION:

Las ventajas de las integrales de oscilación definidas a partir de las clases $\mathcal{B}_+$ y $\mathcal{B}_-$, respecto de las L-integrales de oscilación, es que permiten considerar funciones numéricas no necesariamente reales. Su ventaja frente a las P-integrales, es que para estas últimas "no hay semiaditividad" (en el sentido que después veremos), y para las primeras sí. Queda justificado, pues, por qué hemos elegido, de entre los tres tipos de integrales de oscilación, uno de ellos para el desarrollo posterior.

Llegados a este punto, queremos comentar el hecho de que la asignación de una integral de oscilación no finita a una función dada es una cuestión delicada, que puede llegar a extender groseramente la aplicación ϕ inicial. Como ejemplo, consideremos una aplicación numérica $f\geq 0$ no perteneciente a la clase $\mathcal{F}$; es obvio que $\{F\in\mathcal{B}_+;\ F\geq f\}=\Phi$. Y si f fuese menor o igual que cero, sería $\{F\in\mathcal{B}_-;\ F\leq f\}=\Phi$. La intuición sugiere que, en el primer caso, puede asignarse a f como integral superior $+\infty$; en el segundo, puede asignarse a f como integral inferior $-\infty$.

En algunos textos de integración se hace esa asignación mecánicamente, en virtud de la suposición (lógicamente correcta) de que $inf(\phi) = -sup(\phi) = +\infty$. Aunque extrañe, intuitivamente, que $inf(\phi) > sup(\phi)$. En el ejemplo que hemos expuesto, la aplicación de una regla lógica concuerda con lo que podía hacerse directamente.

Pero en cambio, consideremos otro ejemplo:

Sea X la recta real, B el conjunto de las funciones continuas en R con soporte compacto, y ϕ la integral de Riemann ordinaria. Una función real absolutamente integrable Riemann en sentido impropio y cuyo soporte sea R (v.e.: e^{-x^2}), no está mayorada por ninguna función de B , por lo que, según los comentarios dados al tratar de las L-integrales de oscilación y, según la regla lógica citada, se le asignaría una L-integral superior igual a $+\infty$. En cambio la integral superior, que coíncide con la P-integral superior de tal función, es finita. Ciertamente, asignar a e^{-x^2} integral superior $+\infty$, e integral inferior finita, indica el cuidado con que hay que aplicar una regla formal o unas consideraciones intuitivas.

Por estas razones, hemos creído más natural considerar sólo las funciones de $\mathcal{F}$, que asignar integrales de oscilación infinitas a funciones de $\bar{R}^X$ cualesquiera.

5.3. PROPIEDADES.-

1) *Para cada* $f\in\mathcal{F}$, $\underline{I}(f)\leqslant\bar{I}(f)$.

2) $\tilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{F}$.

Pues si $f\in\mathcal{B}_+$, por pertenecer a $\mathcal{B}^+$ tiene que anularse en $X-\hat{X}$. Y si $f\in\mathcal{B}_-$, por pertenecer a $\mathcal{B}^-$, también debe anularse en $X-\hat{X}$.

3) *Para cada* $f\in\mathcal{F}$, $\bar{I}(f)=-\underline{I}(-f)$.

Trivial.

Nótese que si $f\in\mathcal{F}$, f puede alcanzar cualquier valor de $\bar{R}$, a diferencia de lo que sucedía en $\tilde{\mathcal{B}}$: una función de $\mathcal{B}_+$ no toma el valor $-\infty$, y una función de $\mathcal{B}_-$ no toma el valor $+\infty$.

4) *La clase* $\mathcal{F}$ *es estable por la multiplicación por números reales*. No puede decirse que sea estable por la suma, ya que la suma de dos funciones de $\mathcal{F}$ puede no estar definida en puntos en los que un sumando valga $+\infty$ y el otro $-\infty$. Ahora bien, es importante señalar que si la suma de dos elementos de $\mathcal{F}$ está bien definida, la función suma pertenece a $\mathcal{F}$ .Y si como sucede a menudo, se adopta algún convenio para los puntos (que hemos llamado críticos), en que un sumando vale $+\infty$ y el otro $-\infty$, para definir la función suma en esos puntos, tal función suma pertenece a $\mathcal{F}$. Recalquemos que aunque haya muchas posibilidades de definición de la función suma, según sean los puntos críticos, cualquiera que sea la de

terminación que se tome, la función resultante siempre pertenecerá a $\mathcal{F}$.

5) *$\bar{I}$ e $\underline{I}$ son crecientes en $\mathcal{F}$.*

Trivial.

6) *$\bar{I}$ e $\underline{I}$ son positivamente homgéneas; pero en general, no son homogéneas.* Trivial.

7) *Para cada $f \in \tilde{B}$, $\bar{I}(f) = \underline{I}(f) = \tilde{\phi}(f)$.*

En efecto: Si $f \in B_+$, $\inf\{\tilde{\phi}(F)\,;\ F \in B_+ ,\ F \geqslant f\} = \tilde{\phi}(f)$.

Por tanto, $\underline{I}(f) \leqslant \bar{I}(f) = \tilde{\phi}(f) = \sup\{\phi(g)\ ;\ g \in B,\ g \leqslant f\} \leqslant$

$$\leqslant \{\sup\{\phi(F)\,;\ F \in B_+ ,\ F \leqslant f\} = \underline{I}(f).$$

Luego, $\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = \tilde{\phi}(f)$, para toda $f \in B_+$.

Y si $f \in B_-$, es $\bar{I}(f) = -\underline{I}(-f) = -\bar{I}(-f) = -\tilde{\phi}(-f) = \tilde{\phi}(f)$, ya que $-f \in B_+$.

8) *$\tilde{\phi}$ es creciente en $\tilde{B}$.*

Es consecuencia inmediata de la propiedad anterior.

En efecto:

Sean $f_1 , f_2 \in \tilde{B}$, tales que $f_1 \leqslant f_2$. Se cumple que

$$\tilde{\phi}(f_1) = \bar{I}(f_1) = \underline{I}(f_1) \leqslant \underline{I}(f_2) = \bar{I}(f_2) = \tilde{\phi}(f_2).$$

Recordemos que se ha mencionado ya el hecho de que $\tilde{\phi}$ es creciente en B_+ y también en B_-, lo cual asegura el crecimiento de $\bar{I}$ e $\underline{I}$.

9) *Si* $f_1, f_2 \in F$, *entonces*

$$\bar{I}(f_1 + f_2) \leqslant \bar{I}(f_1) + \bar{I}(f_2) \qquad y$$

$$\underline{I}(f_1 + f_2) \geqslant \underline{I}(f_1) + \underline{I}(f_2),$$

siempre y cuando los dos segundos miembros tengan sentido en $\bar{R}$.

DEMOSTRACION:

Hemos escrito la propiedad de la forma en que suele hacerse habitualmente, aunque puede resultar imprecisa si no se aclara lo que quiere expresar: Propiamente habría que decir que si h es una función de F que coíncide con $f_1 + f_2$ salvo en los puntos críticos, es $\bar{I}(h) \leqslant \bar{I}(f_1) + \bar{I}(f_2)$, y análogamente $\underline{I}(h) \geqslant \underline{I}(f_1) + \underline{I}(f_2)$, exigiendo siempre que los segundos miembros tengan sentido.

En virtud de que $\bar{I}(f) = -\underline{I}(-f)$ basta demostrar la primera de las dos desigualdades del enunciado.

a) Si $\bar{I}(f_1)$ ó $\bar{I}(f_2)$ son iguales a $+\infty$, es evidente.

b) Supongamos que $\bar{I}(f_1) = \bar{I}(f_2) = -\infty$.

Dado $K \in R$, existen $F_1, F_2 \in B_+$ tales que $F_1 \geqslant f_1$, $F_2 \geqslant f_2$, y

$$\tilde{\phi}(F_1) < K/2, \qquad \tilde{\phi}(F_2) < K/2.$$

Con ello, $\bar{I}(f_1 + f_2) \leqslant \tilde{\phi}(F_1 + F_2) = \tilde{\phi}(F_1) + \tilde{\phi}(F_2) < K$.

Es decir, $\bar{I}(f_1 + f_2) = -\infty$.

c) $\bar{I}(f_i) = -\infty$, $\bar{I}(f_j) = r$, $r \in R$, siendo $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

En este caso, dado $K \in R^-$ existen $F_i, F_j \in B_+$, tales que

$$F_i \geq f_i \ , \ F_j \geq f_j \quad y \quad \tilde{\phi}(F_i) < K-r-1 \ , \ \tilde{\phi}(F_j) < r+1.$$

Con ello, $\bar{I}(f_i + f_j) \leq \tilde{\phi}(F_i + F_j) = \tilde{\phi}(F_i) + \phi(F_j) < K$,

y por tanto, $\bar{I}(f_i + f_j) = -\infty$.

d) $\bar{I}(f_1)$ é $\bar{I}(f_2)$ son números reales.

Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\bar{I}(f_1) + \bar{I}(f_2) < \bar{I}(f_1 + f_2).$$

Si $\varepsilon \in R^+$, existen $F_1, F_2 \in B_+$, tales que

$$F_1 \geq f_1 \ , \ F_2 \geq f_2 \quad y \quad \tilde{\phi}(F_1) < \bar{I}(f_1) + \varepsilon/2 \ , \ \tilde{\phi}(F_2) < \bar{I}(f_2) + \varepsilon/2.$$

con lo que $\tilde{\phi}(F_1 + F_2) < \bar{I}(f_2) + \bar{I}(f_1) + \varepsilon < \bar{I}(f_1 + f_2)$,

si se ha elegido ε suficientemente pequeño, y tanto si la última integral es real , como si es $+\infty$.

Por otra parte, se tiene que:

$$F_1(x) + F_2(x) \geq f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x),$$

si $f_1(x) + f_2(x)$ tiene sentido en $\bar{R}$.

Y $F_1(x) + F_2(x) = +\infty \geq (f_1 + f_2)(x)$,

si $f_1(x) + f_2(x)$ no tiene sentido en $\bar{R}$.

En todo caso, es $F_1 + F_2 \geq f_1 + f_2$, cualquiera que sea la de-terminación $f_1 + f_2$, de donde resulta que

$$\tilde{\phi}(F_1 + F_2) \geq \bar{I}(f_1 + f_2),$$

lo que nos lleva a una contradicción.

10) *Sean* $f, g \in F$. *Supongamos que* $\bar{I}(f) < +\infty$, *y* $f(x) = g(x)$ *en los puntos tales que* $f(x) < +\infty$. *Entonces*

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(g).$$

En efecto:

Puesto que $\bar{I}(f) < +\infty$, se cumplirá que para cada $\varepsilon > 0$, existirá $F \in B_+$, tal que $F \geq f$ y $\bar{I}(f) \leq \tilde{\phi}(F) \leq \bar{I}(f) + \varepsilon < +\infty$.

Definamos $h(x) = 0$ si $f(x) < +\infty$, y $h(x) = +\infty$ si $f(x) = +\infty$. En todo caso, $h \geq 0$. Si $F(x)$ es finito, también $f(x) < +\infty$, pues $F \geq f$; luego $h(x) = F(x) - F(x)$ cuando $F(x) < +\infty$; y puesto que $F(x)$ siempre es mayor que $-\infty$, se puede afirmar que $h(x) = F(x) + (-F(x))$ cuando el segundo meimbro tiene sentido.

Así pues $\bar{I}(h) = 0$.

Por otro lado, observemos que $f(x) = g(x) + h(x)$ cuando el segundo miembro tiene sentido. Efectivamente, si $f(x) = +\infty$, vale la igualdad trivialmente, a menos que $g(x)$ valga $-\infty$. Y si $f(x) < +\infty$, tendremos que $h(x) = 0$, y la igualdad se cumple por hipótesis y por definición de h. Pues bien, $\bar{I}(g) + \bar{I}(h)$ tiene sentido, ya que $\bar{I}(h) = 0$; y como $g \leq f$, se tiene finalmente que

$$\bar{I}(g) \leq \bar{I}(f) \leq \bar{I}(g) + \bar{I}(h) = \bar{I}(g).$$

Es decir, $\bar{I}(g) = \bar{I}(f)$, como queríamos probar.

NOTA: Se obtiene un resultado análogo para integrales inferiores.

6. FUNCIONES SUMABLES.

Llamamos:

$$B_0 = \{f: X \to \bar{R};\ f \in F,\ \bar{I}(f) = \underline{I}(f) \in R\}.$$

Y para cada función $f \in B_0 \cup \widetilde{B}$, definimos:

$$I(f) = \bar{I}(f) = \underline{I}(f).$$

6.1. PROPOSICION.- $\bar{B} \subset B_0$ *y para cada* $f \in \bar{B}$ *es* $\bar{\Phi}(f) = I(f)$.

DEMOSTRACION:

Como $L\text{-}\bar{I}(f) \geq \bar{I}(f) \geq \underline{I}(f) \geq L\text{-}\underline{I}(f)$, al ser $L\text{-}\bar{I}(f) = L\text{-}\underline{I}(f) = \bar{\Phi}(f)$ para toda $f \in \bar{B}$, se obtiene que

$$f \in B_0 \quad \text{y} \quad I(f) = \bar{\Phi}(f).$$

En general no se puede asegurar que $B_0 \subset \bar{B}$, pero el resultado siguiente nos evidencia un importante paralelismo entre la clase B_0 y la clase $\bar{B}$.

6.2. LEMA.- *Si* $f\in\mathcal{F}$, *entonces* $f\in B_0$ *si y sólo si para cada* $\varepsilon>0$, *existen* $F'_\varepsilon\in B_+$ *y* $F''_\varepsilon\in B_-$, *tales que*

$$F'_\varepsilon\geq f\geq F''_\varepsilon \quad y \quad \tilde{\phi}(F'_\varepsilon)-\tilde{\phi}(F''_\varepsilon)<\varepsilon.$$

DEMOSTRACION:

a) Veamos que la condición es necesaria.

En efecto, supongamos que $f\in B_0$, entonces

$$I(f)=\bar{I}(f)=\inf\{\tilde{\phi}(F)\ ;\ F\in B_+,\ F\geq f\}.$$

Como $\bar{I}(f)$ es finita, dado $\varepsilon>0$, existirá $F'_\varepsilon\in B_+$ tal que

$$f\leq F'_\varepsilon \quad e \quad I(f)=\bar{I}(f)\leq\phi(F'_\varepsilon)<\bar{I}(f)+\varepsilon/2,$$

pero también, $I(f)=\underline{I}(f)=\sup\{\tilde{\phi}(F)\ ;\ F\in B^-,\ F\leq f\}$,

y como $\underline{I}(f)$ es finita, existirá $F''_\varepsilon\in B^-$ tal que

$$f\geq F''_\varepsilon \quad e \quad I(f)=\underline{I}(f)\geq\tilde{\phi}(F''_\varepsilon)>\underline{I}(f)-\varepsilon/2\ .$$

Se tiene entonces:

$$-I(f)+\varepsilon/2>-\tilde{\phi}(F''_\varepsilon) \quad e \quad I(f)+\varepsilon/2>\tilde{\phi}(F'_\varepsilon),$$

sumando nos queda que: $\varepsilon>-\tilde{\phi}(F''_\varepsilon)+\tilde{\phi}(F'_\varepsilon)$.

O sea: $\tilde{\phi}(F'_\varepsilon)-\tilde{\phi}(F''_\varepsilon)<\varepsilon$, siendo $F''_\varepsilon\leq f\leq F'_\varepsilon$.

b) La condición es suficiente.

En efecto, para cada función $f\in\mathcal{F}$, que cumpla la condición citada, se tiene

$$\widetilde{\phi}(F''_\varepsilon) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \widetilde{\phi}(F'_\varepsilon).$$

Es decir, $0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon$, de donde $\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = I(f)$,

y por tanto $f \in B_0$.

6.3. TEOREMA.- $I: B_0 \to R$ *es lineal.*

DEMOSTRACION:

a) Sea $\lambda \in R$. Si $\lambda = 0$, para cualquier función de B_0 se tiene obviamente que $I(\lambda f) = \lambda I(f) = 0$.

Si $\lambda > 0$, se cumple que $\lambda f \in \mathcal{F}$ y

$$\overline{I}(\lambda f) = \lambda \overline{I}(f) = \lambda \underline{I}(f) = \underline{I}(\lambda f),$$

luego, $\lambda f \in B_0$ *y* $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

Si $\lambda < 0$, se tiene que

$$\overline{I}(\lambda f) = -\underline{I}(-\lambda f) = -(-\lambda)\underline{I}(f) = -(-\lambda)\overline{I}(f) = -\overline{I}(-\lambda f) = \underline{I}(\lambda f) \ ,$$

y en suma, $\lambda f \in B_0$ y $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.

b) Si $f, g \in B_0$, se define la suma $h(x) = f(x) + g(x)$ cuando el segundo miembro tiene sentido, y $h(x)$ arbitrariamente en los demás casos. No puede decirse que B_0 sea un espacio vectorial, pero sí es cierto que

$$-\infty < I(f) + I(g) = \underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leq \underline{I}(h) \leq \overline{I}(h) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g) =$$

$$= I(f) + I(g) < +\infty,$$

por consiguiente, $h \in \mathcal{B}_0$ e $I(h) = I(f) + I(g)$.

6.4. NOTA: Si $f \in \mathcal{B}_0$ y $g\colon X \to \bar{R}$ verifica que $g(x) = f(x)$, en los puntos $x \in X$ tales que $f(x)$ sea finito, se puede asegurar que

$$g \in \mathcal{B}_0 \quad y \quad I(g) = I(f).$$

La demostración es elemental en virtud de lo que se vió para integrales superiores e inferiores.

Se puede decir que $\mathcal{B}$ es densa en $\mathcal{B}_0$, en el sentido de que cada función de $\mathcal{B}_0$ se puede aproximar en media integral por funciones de $\mathcal{B}$; pero por cuestiones de técnica de demostración se prueba primero el lema siguiente:

6.5. LEMA .- *Si $f \in \mathcal{B}_0$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{B}$, tal que*

$$\bar{I}(/f-g/) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACION:

Ante todo, es fácil probar que $/f-g/ \in \mathcal{F}$, ya que $f \in \mathcal{F}$, por ser $f \in \mathcal{B}_0$, y también $g \in \mathcal{F}$. Además $f \vee g$ y $f \wedge g$ pertenecen a $\mathcal{F}$.

Elijamos ahora $F \in \mathcal{B}_+$ tal que $f \leq F$ e $I(F) < I(f) + \varepsilon/2$, y además, existe $g \in \mathcal{B}$ tal que $g \leq F$ e $I(g) > I(F) - \varepsilon/2$.

Nótese que al ser $I(f)$ finita también $I(F)$ es finita, con lo que $F \in \mathcal{B}_0$.

Pues bien, para cada $x \in X$ llamemos $h(x) = F(x) - f(x)$ cuando esta expresión tiene sentido, y $h(x) = +\infty$ en caso contrario; con lo cual se exige que h sea no negativa ($h \geqslant 0$) y pertenezca a la clase B_0.

Así, $I(h) = I(F) - I(f) < \varepsilon/2$.

Por otra parte, se verifica que

$$|f-g| \leqslant |F-f| + |F-g| = (F-f) + (F-g),$$

y esta desig ualdad es cierta si tiene sentido $F-f$, ya que $F-g$ no ofrece dificultades. Y en todo caso se da que $|f-g| \leqslant +\infty$, por lo cual podemos escribir que

$$|f-g| \leqslant h + (F-g).$$

Tomando integrales superiores queda que

$$\bar{I}(|f-g|) \leqslant \bar{I}(h) + \bar{I}(F-g) = I(h) + I(F-g) =$$

$$= I(h) + I(F) - I(g) < \varepsilon.$$

Al referirnos a este lema, así como al teorema que sigue hablaremos coloquialmente de la "densidad" de B en B_0.

6.6. TEOREMA DE CARACTERIZACION.- *Condición necesaria y suficiente para que una función $f \in F$ pertenezca a B_0, es que exista $\{g_n\}_{n \in N}$, sucesión de funciones de B, tal que*

$$\{\bar{I}(|f-g_n|)\}_{n \in N} \rightarrow 0.$$

DEMOSTRACION:

Obviamente, $f \in \mathcal{F}$ equivale a que cada $/f-g_n/$ pertenezca a $\mathcal{F}$.

La condición es necesaria según el lema 6.5.

Veamos la suficiencia.

Se tiene elementalmente, supuesto que se verifica la condición del teorema, que

$$-/f-g_n/+g_n \leqslant f \leqslant g_n + /f-g_n/ \;;$$

por tanto, $\bar{I}(f) \leqslant \bar{I}(g_n) + \bar{I}(/f-g_n/)$

y $\underline{I}(f) \geqslant \underline{I}(g_n) + \underline{I}(-/f-g_n/) = \underline{I}(g_n) - \bar{I}(/f-gn/)$.

O sea: $-\bar{I}(/f-g_n/) + I(g_n) \leqslant \underline{I}(f) \leqslant \bar{I}(f) \leqslant I(g_n) + \bar{I}(/f-g_n/)$.

Ahora bien, puesto que

$$/g_{n+h}-g_n/ \leqslant /f-g_{n+h}/ + /f-g_n/ \quad \text{será}$$

$$/I(g_{n+h})-I(g_n)/ = /I(g_{n+h}-g_n)/ \leqslant I(/g_{n+h}-g_n/) = \bar{I}(/g_{n+h}-g_n/) \leqslant$$
$$\leqslant \bar{I}(/f-g_{n+h}/) + \bar{I}(/f-g_n/),$$

queda demostrado que la sucesión $\{I(g_n)\}_{n \in N}$ es de Cauchy, y por tanto convergente hacia un cierto número real. Finalmente, haciendo tender n a infinito se obtiene que

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(f) = \lim \{I(g_n)\}_{n \in N},$$

con lo cual $f \in B_0$.

La propiedad de densidad estudiada precisa del carácter modular de la clase B_0 ; y esto es un hecho que prueba el siguiente

6.7. LEMA.- *Si* $f \in B_0$, *entonces* $|f| \in B_0$.

DEMOSTRACION:

En primer lugar, es trivial que $|f| \in F$.

Pues bien, dada una función f de B_0 tomemos $\varepsilon > 0$ y elijamos $g \in B$ tal que $\bar{I}(|f-g|) < \varepsilon/2$.

Como B es retículo vectorial se tiene que $|g| \in B$, y es cierto que:

$$|g| - |f-g| \leqslant |f| \leqslant |g| + |f-g|.$$

Por una parte,

$$\bar{I}(|f|) \leqslant \bar{I}(|g|) + \bar{I}(|f-g|) = I(|g|) + \bar{I}(|f-g|) < I(|g|) + \varepsilon ,$$

y por otra parte, $\underline{I}(|f|) \geqslant \underline{I}(-|f-g|) + \underline{I}(|g|) =$

$$= -\bar{I}(|f-g|) + I(|g|) > I(|g|) - \varepsilon .$$

Con ello, tanto $\bar{I}(|f|)$ como $\underline{I}(|f|)$ son finitos, luego

$$0 \leqslant \bar{I}(|f|) - \underline{I}(|f|) < \varepsilon ,$$

y dada la arbitrariedad del ε, se deduce que

$$\bar{I}(|f|) = \underline{I}(|f|) , \quad \text{y por tanto} \quad |f| \in B_0 .$$

6.8. TEOREMA.- *Si* $f \in B_0$, *para cada* $\varepsilon \in R^+$ *existe* $g \in B$ *tal que*

$$I(|f-g|) < \varepsilon.$$

La demostración es inmediata en virtud de los dos últimos lemas.

6.9. COROLARIO.- *Si* $f, g \in B_0$, *es* $f \vee g$, $f \wedge g \in B_0$.

En efecto, basta tener en cuenta las dos desigualdades siguientes:

$$f(x) \vee g(x) = 1/2[\ f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$y \qquad f(x) \wedge g(x) = 1/2[\ f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|] \ ,$$

cuando los dos segundos miembros tienen sentido

6.10. COROLARIO.- $f \in B_0$ *si y sólo si* $f^+, f^- \in B_0$.

Es trivial, dado que $f = f^+ - f^-$.

Llegados a este punto, damos una importante nota que, pensamos, clarifica tanto el sentido como el alcance de nuestro proceso.

6.11. NOTA: Si (X, B, ϕ) es un sistema de Loomis, se define:

$$D^+ = \{ f \in B_+ ;\ I(f) < +\infty \} .$$

Por definición, $\mathcal{D} = \{ f \in \bar{R}^X, f \in \mathcal{D}^+ - \mathcal{D}^+ \}$ se llama la *clase de Daniell asociada al sistema*. Y se define también

$$I_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to R,$$

por medio de $I_{\mathcal{D}}(f) = I(g) - I(h)$, siendo $f \in \mathcal{D}$, $f = g-h$, $g, h \in \mathcal{D}^+$.

Es trivial que $I_{\mathcal{D}}$ no depende de la descomposición particular de f empleada; que $\mathcal{D} \subset B_0$; y que $I_{\mathcal{D}}(f) = I(f)$, para toda $f \in \mathcal{D}$.

Si ϕ es de Daniell-Bourbaki, entonces es $B_0 \subset \mathcal{D}$, pero es preciso el teorema de Levi (vid. [15] pp.29-31 y [18] pp.10-11) para demostrarlo.

Queda claro, en nuestro caso, que se ha elegido B_0 y no $\mathcal{D}$, como clse más amplia para prolongar ϕ; y que, en general, si ϕ no es de Daniell-B no podemos asegurar que $B_0 \subset \mathcal{D}$.

En este ambiente, nuestro proceso de construcción tiene como última etapa la definición de una nueva clase, cuyo significado viene indicado en el partado que sigue.

7. FUNCIONES INTEGRABLES.

7.1. DEFINICION.- Llamamos:

$$B_+^* = \{ f \in F ; \ f \wedge g \in B_0, \ \textit{para cada } g \in B \},$$

análogamente:

$$B_-^* = \{ f \in F ; \ f \vee g \in B_0, \ \textit{para cada } g \in B \}.$$

Y, designamos por: $B^* = B_+^* \cup B_-^*$.

7.2. PROPIEDADES.-

i) $f \in B_+^*$ si y sólo si $-f \in B_-^*$.

Se concluye trivialmente de la definición.

ii) B_+^* y B_-^* son retículos.

En efecto, veamos que B_+^* es retículo superior e inferior.

Basta tener en cuenta que, dadas las funciones $f_1, f_2 \in B_+^*$, para cualquier función $g \in B$, se tiene:

$$(f_1 \vee f_2) \wedge g = (f_1 \wedge g) \vee (f_2 \wedge g) \in B_0$$

$$y \quad (f_1 \wedge f_2) \wedge g = (f_1 \wedge g) \wedge (f_2 \wedge g) \in B_0.$$

Análogamente para B_-^*.

iii) Si $f \in B_+^*$, entonces $f^+ \in B_+^*$ y $f^- \in B_0$.

Es consecuencia inmediata de las expresiones:

$$f^+ = f \vee 0 \in B_+^*$$

y $\quad f^- = -(f \wedge 0) \in B_0$, esto último se obtiene elementalmente del hecho de ser, por definición, $f \wedge 0 \in B_0$.

iv) Si B_+ es retículo inferior, entonces $B_+ \subset B_+^*$.

En efecto, si $f \in B_+$, para cada $g \in B$ es $f \wedge g \in B_+$.

Pero $-\infty < I(f \wedge g) \leqslant I(g) < +\infty$. Por tanto, $f \wedge g \in B_0$.

Pero en general, sólo puede asegurarse que las funciones de B_+ con integral finita pertenecen a B_0 (y por tanto a B_+^* y B_-^*).

NOTA: Si el sistema de Loomis cumple las condiciones de Daniell-Bourbaki, se tiene que $B_+ = B^+$ es retículo inferior. Por consiguiente, $B_+ \subset B_+^*$.

$v)$ $B_0 = B_+^* \cap B_-^*$.

Evidentemente $B_0 \subset B_+^* \cap B_-^*$.

Sea $f \in B_+^* \cap B_-^*$, por definición, para cada $g \in B$ se tiene que $f \wedge g \in B_0$, y $f \vee g \in B_0$, o sea, tomando $g = 0$, resulta que $f^+, f^- \in B_0$, lo que equivale a que $f \in B_0$.

$vi)$ Sea $f \in \mathcal{F}$, $f \geqslant 0$ y supongamos que $f \wedge g \in B_0$, para toda $g \in B$, $g \geqslant 0$. Entonces, $f \in B_+^*$.

Es trivial, por ser $f \wedge g = (f \wedge g^+) - g^-$, para toda $g \in B$.

Obsérvese que la propiedad $v)$ nos sugiere de modo muy claro, cómo debemos definir el funcional I sobre los elementos de la nueva clase.

7.3. DEFINICION.- Si $f \in B_+^*$, se define:

$$I(f) = \bar{I}(f).$$

Y si $f \in B_-^*$, se define:

$$I(f) = \underline{I}(f).$$

Es importante preguntarse el alcance de esta nueva extensión, con la correspondiente prolongación del funcional, y cuándo deja de tener sentido continuar con la ampliación, porque hemos llegado al final de un proceso que debe ser cerrado. Estas cuestiones son las que desarrollamos a continuación.

7.4. NOTA: Cabe pensar en definir integrales de oscilación a partir de B_+^* y B_-^*, en lugar de B_+ y B_- respectivamente.

Definimos $\bar{I}'(f) = \inf\{ I(F) ; F \in B_+^* , F \geq f \}$, siendo $f \in \mathcal{F}$.

Ahora bien, coma para cada $F \in B_+^*$, $F \geq f$, es

$$I(F) = \bar{I}(F) \geq \bar{I}(f),$$

resultará que $$\bar{I}'(f) \geq \bar{I}(f).$$

Por otra parte, veamos que $\bar{I}'(f) \leq \bar{I}(f)$.

Si $\bar{I}(f)$ es $+\infty$, evidentemente es cierto.

Y si $\bar{I}(f) < +\infty$ entonces

$$\bar{I}(f) = \inf\{ I(g) ; g \in B_+, g \geq f \} =$$

$$= \inf\{ I(g) ; g \in B_+, g \geq f, I(g) \in R \}.$$

Pero $$\{ I(g) ; g \in B_+, g \geq f, I(g) \in R \} \subset$$

$$\subset \{ I(g) ; g \in B_0 , g \geq f \} \subset \{ I(g) ; g \in B_+^*, g \geq f \} .$$

Por último, tomando ínfimos queda

$$\bar{I}'(f) \leq \bar{I}(f).$$

COMENTARIO: Por consiguiente, el proceso de definición de integrales superiores queda cerrado al llegar a la clase $\mathcal{B}_+^*$ (Puede razonarse análogamente para integrales inferiores).

7.5. NOTA: Hay que señalar que $\mathcal{B}_+^*$ y $\mathcal{B}_-^*$ no son cerrados tomando supremos, como prueba el siguiente

EJEMPLO 1.-

Consideremos la integral de Lebesgue ordinaria en R construida por el procedimiento de Daniell (que evidentemente es un caso particular de nuestro proceso de prolongación). Sea $E \subset R$ un conjunto acotado no medible Lebesgue, y para cada $x \in E$, sea χ_x la función característica de $\{x\}$.

Evidentemente $\chi_E = \sup \{\chi_x, x \in E\}$. Todos los χ_x son de $\mathcal{B}_+^*$ (pertenecen a $\mathcal{B}_0$), y en cambio, χ_E no es de $\mathcal{B}_+^*$.

La frecuencia con que se exige la pertenencia a F nos obliga a dar un ejemplo de que $\bar{R}^X$ puede ser distinto de $\mathcal{F}$.

EJEMPLO 2.-

Tomemos como $X = [0,2] \subset R$, y como $\mathcal{B}$ el conjunto de las funciones reales continuas en $[0,2]$ y nulas en $[0,1]$. Evidentemente $\mathcal{B}$ es un sistema stoniano, y además cumple, aunque esto no interesa a nuestro objetivos, las condiciones de Daniell y de Bourbaki. Pues bien, la función constantemente igual a $+\infty$, no está mayorada por ninguna función de $\mathcal{B}_+$, ya que cualquier función de $\mathcal{B}_+$ tiene que ser cero en $[0,1]$.

OBSERVACION:

En tratados elementales de análisis, en que no se considera la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$, a veces se define una integral para funciones no acotadas por el procedimiento de truncar funciones. Un ejemplo frecuente se tiene cuando se desea una rápida introducción a las series de Fourier. Por el teorema fundamental de integrabilidad-Lebesgue (ref.Titchmarsh*) para funciones localmente integrables Lebesgue, sabemos que el procedimiento de truncar una función es algo más que una simple argucia para ganar tiempo. Ahora bien, si partiendo de un sistema de Loomis se intenta truncar funciones, obviamente no puede truncarse por funciones constantes, puesto que éstas no tienen por qué pertenecer al retículo vectorial $\mathcal{B}$. Sí cabe truncar funciones numéricas mediante funciones de $\mathcal{B}$ ó $\bar{\mathcal{B}}$. En este sentido, se da una explicación intuitiva a la introducción de la clase $\mathcal{B}_+^*$; sin precisión, viene a ser la clase que se obtiene truncando funciones numéricas mediante funciones de $\mathcal{B}$, en lugar de mediante funciones constantes.

(* Titchmarsh, "The theory of functions", Oxford 1964).

Cabe recordar: no sólo las constantes no tienen por qué pertenecer a $\mathcal{B}$, sino que los elementos de $\mathcal{B}$ no tienen por qué ser funciones reales acotadas.

8. TEOREMA DE ADITIVIDAD PARA FUNCIONES INTEGRABLES.

8.1. LEMA.- En virtud de la "densidad" de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}_0$, puede sospecharse que sea cierta la propiedad:

$$f \in \mathcal{B}_+^* \text{ implica } f \wedge h \in \mathcal{B}_0 \text{ , para toda } h \in \mathcal{B}_0 .$$

Efectivamente, vamos a probar este hecho, pero señalemos antes la originalidad de la técnica empleada en la demostración, y la dificultad que nos ha supuesto encontrar una demostración que soslayase teoremas de convergencia que, como sabemos, no se verifican debido a la debilidad de nuestras condiciones frente a las de Daniell o de Bourbaki.

Indiquemos los pasos de la demostración:

Se tiene que

$$f(x) \wedge h(x) = 1/2 \; [f(x) + h(x) - /f(x) - h(x)/]$$

cuando el segundo miembro tiene sentido.

De manera puramente formal, sin entrar en la precaución de cuando tienen o no sentido las expresiones que siguen, se tendría:

Para cada $g \in \mathcal{B}$, $f(x) \wedge h(x) = 1/2 \; [f(x) + g(x) + (h(x) - g(x) -$

$$- /f(x) - g(x) + g(x) - h(x)/] \; .$$

Así, $f(x) \wedge h(x) \leqslant 1/2 \; [f(x) + g(x) - /f(x) - g(x)/ + (h(x) - g(x))$

$$/g(x) - h(x)/] = f(x) + g(x) + [h(x) - g(x)]^+ ,$$

análogamente: $f(x) \wedge h(x) \geq 1/2\,[\,f(x)+g(x)-/f(x)-g(x)/+$

$$+\,(h(x)-g(x))-/g(x)-h(x)/\,] = f(x)\wedge g(x)-[\,h(x)-g(x)\,]^{-}.$$

O sea, $-[\,h(x)-g(x)\,]^{-}+f(x)\wedge g(x) \overset{(1)}{\leq} f(x)\wedge h(x) \overset{(2)}{\leq}$

$$\leq f(x)\wedge g(x)+[\,h(x)-g(x)\,]^{+}.$$

Pues bien, vamos a comprobar directamente esta última expresión, teniendo ahora en cuenta cuando tienen sentido las expresiones que aparecen.

En cuanto a la desigualdad (1), su primer miembro tiene sentido por ser $f(x)\wedge g(x)$ real.

Para probar la desigualdad (2) obsérvese que si $h(x)\leq g(x)$ la desigualdad es cierta evidentemente.

Si $h(x)>g(x)$ se presentan los tres casos siguientes:

$$f(x)\geq h(x)>g(x),\quad h(x)>f(x)>g(x),\quad h(x)>g(x)\geq f(x),$$

en cada uno de los cuales es fácil comprobar que la desigualdad tratada se cumple.

En cuanto a la desigualdad (1), es evidentemente cierta si $g(x)\leq h(x)$ en todo caso.

Si $g(x)>h(x)$ se dan los tres casos siguientes:

$$f(x)\geq g(x)>h(x),\quad g(x)>f(x)>h(x),\quad g(x)>h(x)\geq f(x),$$

y también, en cada uno de ellos, se comprueba trivialmente la validez de la desigualdad.

Pues bien, si $f \in B_+^*$ se tiene

$$\bar{I}(f \wedge h) \leqslant \bar{I}(f \wedge g) + \bar{I}(/h-g/) = I(f \wedge g) + I(/h-g/),$$

ya que $g \in B$, $h \in B_0$ y $f \in B_+^*$; con lo cual $f \wedge g \in B_0$.

Y de aquí se deduce que $\bar{I}(f \wedge g) < +\infty$.

Análogamente:

$$\underline{I}(f \wedge h) \geqslant \underline{I}(f \wedge g) + \underline{I}(-[h-g]^-) =$$

$$= I(f \wedge g) - I([h-g]^-) \geqslant I(f \wedge g) - I(/h-g/).$$

Con ello, resulta que $\underline{I}(f \wedge g) > -\infty$.

Tenemos pues

$$\bar{I}(f \wedge h) \leqslant I(f \wedge g) + I(/h-g/), \quad -\underline{I}(f \wedge g) \leqslant -I(f \wedge g) + I(/h-g/).$$

Si sumamos estas desigualdades, y elegimos g tal que $I(/h-g/) < \varepsilon/2$, se sigue que $0 \leqslant \bar{I}(f \wedge g) - \underline{I}(f \wedge h) < \varepsilon$,

Con lo cual $\bar{I}(f \wedge h) = \underline{I}(f \wedge h)$, y queda demostrado que $f \wedge h \in B_0$, como queríamos.

8.2. LEMA.- *Si* $f \in B_+^*$, *entonces* $\underline{I}(f) > -\infty$.

DEMOSTRACION:

Si tenemos en cuenta, haciendo uso de la propiedad *iii)*, 7.2., que $f^+ \in B_+^*$ y $f^- \in B_0$, se obtiene que

$$\underline{I}(f) = \underline{I}(f^+ - f^-) \geqslant \underline{I}(f^+) + \underline{I}(-f^-) = \underline{I}(f^+) - I(f^-) > -\infty.$$

8.3. LEMA.- *Si* $f \in B_+^*$ *y* $I(f) < +\infty$, *entonces* $f \in B_0$.

DEMOSTRACION:

Eligiendo $g \in B_+$ tal que $f \leqslant g$ e $I(g) < +\infty$, resulta que $I(g) \neq \pm\infty$, puesto que $I(g) > -\infty$. Entonces $f = f \wedge g \in B_0$, sin más que aplicar el lema 8.1.

Análogamente, si $f \in B_+^*$ e $I(f) > -\infty$, es $f \in B_0$.

Como consecuencia inmediata de este resultado obtenemos el siguiente

8.4. TEOREMA.- *Si* $f \in B^*$ *y existe* $g \in B_0$ *tal que* $|f| \leqslant g$, *entonces* $f \in B_0$.

8.5. LEMA.- *Si* $f, g \in B^*$ *y* $f \leqslant g$, *entonces* $I(f) \leqslant I(g)$.

DEMOSTRACION:

En primer lugar, si $f, g \in B_+^*$ ó B_-^* simultáneamente, es inmediato.

Consideremos pues que $f \in B_-^*$, entonces

$$I(f) = \underline{I}(f) \leqslant \underline{I}(g) \leqslant \overline{I}(g),$$

por lo que la desigualdad es cierta tanto si $g \in B_-^*$(en cuyo caso $I(g) = \underline{I}(g)$), como si $g \in B_+^*$ (en cuyo caso $I(g) = \overline{I}(g)$).

Nos queda el caso de que $f \in B_+^*$ y $g \in B_-^*$, siendo $f \leqslant g$. Pero en esta situación tanto f como g pertenecen a B_0, con lo que

$$I(f) \leqslant I(g).$$

Y ello es debido a que

$$I(g) = \underline{I}(g) \geqslant I(f) > -\infty, \qquad \text{con } g \in B^*_- ,$$

$$\text{y } I(f) = \bar{I}(f) \leqslant \bar{I}(g) < +\infty , \qquad \text{con } f \in B^*_+ .$$

8.6. LEMA.- *Si $f \in B^*_+$ y $\lambda \geqslant 0$, es $\lambda f \in B^*_+$ evidentemente. Y se tiene: $I(\lambda f) = \lambda I(f)$.*

En cambio, si $\lambda < 0$, entonces $\lambda f \in B^*_-$.

En resumen, si $f \in B^*$ y $\lambda \in R$ se cumple que:

$$\lambda f \in B^* \quad y \quad I(\lambda f) = \lambda I(f),$$

puesto que pasamos de una clase a otra.

8.7. TEOREMA.- *Sean $f, g \in B^*_+$ y h una función numérica en X tal que $h(x) = f(x) + g(x)$ cuando $f(x) + g(x)$ tiene sentido.*

Entonces,

$$h \in B^*_+ \quad y \quad I(h) = I(f) + I(g).$$

DEMOSTRACION:

Si $f = f^+ - f^-$ y $g = g^+ - g^-$, llamamos

$\partial = f^+ + g^+$, $\psi = f^- + g^- \in B_0$ (por la propiedad *iii*),7.2.).

Con esto resulta que $h(x) = \partial(x) - \psi(x)$, cuando $\partial(x) - \psi(x)$ tiene sentido.

Veamos en primer lugar que $h \in \mathcal{B}_+^*$.

Ante todo, resulta que, para cada $\beta \in \mathcal{B}$, $\beta \geqslant 0$, se tiene:

$$\partial \wedge \beta = (f^+ \wedge \beta) + (g^+ \wedge \beta) \wedge \beta \in \mathcal{B},$$

según es fácil comprobar por disyunción de casos.

Como $\partial \geqslant 0$, se sigue que $\partial \in \mathcal{B}_+^*$ (aplicando la propiedad vi).7.2.).

Además, para cualquier $\beta \in \mathcal{B}$, se da que

$$h \wedge \beta = \partial \wedge [\psi + \beta] - \psi,$$

según es fácil comprobar también por disyunción de casos, y siempre que el segundo miembro tanga sentido.

Se deduce pues que $h \wedge \beta \in \mathcal{B}_0$, puesto que $\partial \in \mathcal{B}_+^*$ y $\psi \in \mathcal{B}_0$.

Por consiguiente $h \in \mathcal{B}_+^*$, como queríamos.

Por otra parte, en virtud de las definiciones de integral de funciones de la clase $\mathcal{B}_+^*$, obtenemos

$$I(h) = \bar{I}(h) \leqslant \bar{I}(f) + \bar{I}(g) = I(f) + I(g).$$

Y en esta expresión, si fuése $I(h) = +\infty$, la igualdad de la tesis queda probada. Y si es $I(h) < +\infty$, entonces $h \in \mathcal{B}_0$, con lo cual

$$\partial = h + \psi \in \mathcal{B}_0 \quad \text{, ya que } f^+ \leqslant \partial \text{ y } g^+ \leqslant \partial \text{ (por el teorema 8.4.).}$$

Por otra parte, como $I(f^+) < +\infty$ y $I(g^+) < +\infty$, se tiene que f^+ y

g^+ pertenecen a B_0 (usando el lema 8.3.), además f^- y $g^- \in B_0$ en todo caso, entonces resulta que $f, g \in B_0$ y se cumple que

$$I(h) = I(f) + I(g),$$

lo que concluye la demostración.

8.8. LEMA.- *Si* $f \in B^*$, *entonces* $|f| \in B^*_+$.

Basta considerar: $|f| = f^+ + f^-$, siendo $f^+ \in B^*_+$ y $f^- \in B_0 \subset B^*_+$.

Evidentemente es $|I(f)| \leq I(|f|)$.

C A P I T U L O II

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL Y DE LA MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA ASOCIADAS A UN SISTEMA DE LOOMIS.

1. EL ESPACIO $\hat{X}$.

1.1. DEFINICIONES.- Sea $(X,\mathcal{B},\phi)$ un sistema de Loomis. Ya definimos

$$\hat{X} = \{ x \in X \text{ ; } \textit{existe } g \in \mathcal{B}, \ g(x) \neq 0 \} =$$

$$= X - \{ x \in X \text{ ; } \textit{para cada } g \in \mathcal{B}, \ g(x)\} = 0 \text{ .}$$

Observemos que aparece de manera natural la consideración del conjunto $\hat{X}$ al estudiar si la función constantemente igual a $+\infty$, pertenece o no a $\mathcal{B}^{+}$. Como ya vimos, no tiene por qué suceder así. En cambio, ya hemos indicado que la función definida por

$$\hat{X}_{+\infty} = \chi_{\hat{X}}(+\infty).$$

pertenece a $\mathcal{B}_+$.

Sin embargo, no puede asegurarse, sin más, que $\hat{X} = \chi_{\hat{X}}$ pertenezca a $\mathcal{B}^+$, y en el caso de que pertenezca a $\mathcal{B}^+$, no puede asegurarse que pertenezca a $\mathcal{B}_+$.

Análogamente se define $\hat{X}_{-\infty}$.

Recalquemos que las funciones de $\mathcal{B}^+, \mathcal{B}_+, \mathcal{B}^-$ y $\mathcal{B}_-$ se anulan en $X-\hat{X}$. Las funciones de $\mathcal{B}_0$ también se anulan en $X-\hat{X}$. Y finalmente, las funciones de $\mathcal{B}^*_+$ y $\mathcal{B}^*_-$, asímismo se anulan en $X-\hat{X}$.

Pues bien, si construimos $\hat{\mathcal{B}}$ como el conjunto de las restricciones $\hat{g}$ a $\hat{X}$ de las funciones g pertenecientes a $\mathcal{B}$, resulta que $\hat{\mathcal{B}}$ es retículo vectorial. Y si definimos

$$\hat{\phi}(\hat{g}) = I(g), \quad \text{para toda } \hat{g} \in \hat{\mathcal{B}},$$

se tiene que $(\hat{X}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\phi})$ también es un sistema de Loomis, que puede identificarse canónicamente con el sistema inicial $(X, \mathcal{B}, \phi)$, en virtud del isomorfismo de estructura de uno y otro sistema.

Cabe preguntarse por qué hacemos esta consideración al final y no al principio de nuestro proceso de extensión, pues resulta evidente que se simplificarían nomenclatura y otros requisitos. La razón es que hemos querido prolongar ϕ poniendo énfasis en la posibilidad de hacerlo sin condiciones "topológicas" como la de Daniell o la de Bourbaki. Pero aunque nosotros no entremos en el tema, hay numerosos trabajos que se ocupan de dotar a X de la mínima topología que hace continuas a las funciones de $\mathcal{B}$, y/o para las cuales ϕ es "continuo" (en [26] hay abundante bibliografía sobre el tema). Creemos que nuestro trabajo permite plantearse cuestiones análogas a la citada, tratada en supuestos distintos de los nuestros. Para ello, $X-\hat{X}$ juega un papel importante. No nos extendemos más por ahora, y remitimos al lector a los comentarios finales.

Queda claro, en todo caso, que suponer X igual a $\hat{X}$ no es restrictivo, y puede ser muy cómodo. A título de ejemplo de la simplificación que puede proporcionar esa identificación, señalemos que para el sistema $(\hat{X},\hat{\mathcal{B}},\hat{\phi})$, cualquier función numérica definida en $\hat{X}$ tiene integral superior e integral inferior.

2. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS DE LOOMIS STONIANOS.

Ya hemos citado la cuestión de que no se puede afirmar, en general, que $\hat{X}$ pertenece a la clase $\mathcal{B}^+$.

Pues bien, las condiciones en las que se puede asegurar este hecho nos la ofrece la siguiente proposición.

2.1. PROPOSICION.- $\hat{X}\in\mathcal{B}^+$ *si y sólo si* $\mathcal{B}^+$ *es stoniano.*

DEMOSTRACION:

1) Si $\hat{X} \in \mathcal{B}^+$, sea $f \in \mathcal{B}^+$. Entonces,

$1 \wedge f = \hat{X} \wedge f \in \mathcal{B}^+$. Luego $\mathcal{B}^+$ es stoniano.

2) Si $\mathcal{B}^+$ es stoniano, $\hat{X} = 1 \wedge \hat{X}_{+\infty} \in \mathcal{B}^+$.

2.2. COROLARIO.- *Si* $\mathcal{B}$ *es stoniano,* $\hat{X} \in \mathcal{B}^+$.

NOTA: Si $\mathcal{B}^+$ es stoniano, no puede asegurarse que $\mathcal{B}_+$ o $\mathcal{B}$ lo sean. Y si $\mathcal{B}$ es stoniano, no puede afirmarse en general que $\mathcal{B}_+$ lo sea.

2.3. PROPOSICION.- *Si* $\mathcal{B}_+$ *es stoniano, necesariamente* $\hat{X} \in \mathcal{B}_+$

Es inmediato, dado que $\hat{X} = 1 \wedge X_{+\infty}$, y $\hat{X}_{+\infty} \in \mathcal{B}_+$.

Nótese que al no ser $\mathcal{B}_+$ necesariamente retículo inferior, no puede afirmarse que el recíproco sea cierto. Sin embargo, se tiene:

2.4. COROLARIO.- *Si* $\mathcal{B}_+$ *es stoniano, también lo es* $\mathcal{B}^+$.

Basta tener en cuenta que $\hat{X} \in \mathcal{B}_+ \subset \mathcal{B}^+$.

2.5. PROPOSICION.- *Si* $\mathcal{B}^+$ *es stoniano y* $\widetilde{\phi}_+(\hat{X}) = +\infty$, *entonces* $\hat{X} \in \mathcal{B}_+$.

Trivial.

2.6. PROPOSICION.- *B^*_+ es stoniano si y sólo si $\hat{x} \in B^*_+$.*

En efecto: 1) Si B^*_+ es stoniano, como $\hat{x}_{+\infty} \in B^*_+$, es

$$\hat{x} = 1 \wedge \hat{x}_{+\infty} \in B^*_+.$$

2) Si $\hat{x} \in B^*_+$, al ser B^*_+ retículo inferior se tiene que para cada $f \in B^*_+$, es $1 \wedge f = \hat{x} \wedge f \in B^*_+$. Por tanto, B^*_+ es stoniano.

2.7. PROPOSICION.- *B^*_+ es stoniano si y sólo si B_0 es stoniano.*

DEMOSTRACION:

1) Si B^*_+ es stoniano, para cada $f \in B_0$ es $1 \wedge f \in B^*_+$, ya que $f \in B^*_+$. Pero $I(f \wedge 1) \leqslant I(f) < +\infty$. Por tanto, $1 \wedge f \in B_0$. Así pues, B_0 es stoniano.

2) Si B_0 es stoniano, para cada $g \in B$ es $\hat{x} \wedge g = 1 \wedge g \in B_0$. Por tanto, $\hat{x} \in B^*_+$, y en virtud de la proposición anterior B^*_+ es stoniano.

Los resultados anteriores nos permiten dar el siguiente

2.8. TEOREMA.- *Si B es stoniano, lo son B^+, B_0 y B^*_+. En general, B_+ no tiene por qué serlo.*

DEMOSTRACION:

Sólo nos queda por ver que para cada $f \in B^*_+$ es

$1 \wedge f \in B_+^*$. Pero si $f \in B_+^*$, para cada $g \in B$ se tiene

$$(1 \wedge f) \wedge g = (1 \wedge g) \wedge f \in B_0 .$$

Vamos a ocuparnos de la cuestión de si la imagen inversa por funciones de B^+ de un intervalo de $\bar{R}$, es un conjunto cuya función característica pertenece o no a B_+^*. Tal cuestión es clásica en los tratados que se ocupan de las integrales de Daniell o de Bourbaki. En nuestro caso, la ausencia de teoremas fuertes de convergencia, tales como los de Levi, Lebesgue o Fatou, nos da resultados más débiles en este tema, como era de esperar.

En un orden de exposición, completamos este apartado con algunos resultados de interés que enunciamos en los siguientes lemas.

2.9. LEMA.- *Si B^+ es stoniano, dada $f \in B^+$ y $r \in]-\infty, 0]$, designamos por*

$$A_r = \{x \in X ; \ f(x) > r\} .$$

Entonces

$$\chi_{A_r} \in B^+ .$$

DEMOSTRACION:

Es inmediato que $f - r\chi \in B^+$, con lo que

$$\{n(f - r\hat{\chi})^+ \wedge \hat{\chi}\}_{n \in N} \uparrow \chi_{A_r},$$

y por tanto

$$\chi_{A_n} \in B^+.$$

2.10. OBSERVACION.- En las hipótesis del lema anterior, si $f \geqslant 0$, es

$$A_0 = N(f) = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}.$$

Con ello, $\chi_{N(f)} \in B^+$. Pero si no se exige que f sea mayor o igual que cero, no puede decirse, sin más, que el resultado sea cierto.

La razón reside en que si $f \not\geqslant 0$, no es posible afirmar que la sucesión del lema anterior tienda crecientemente hacia $\chi_{N(f)}$.

2.11. LEMA.- *Si* B *es stoniano, para cada* $g \in B$, *es*

$$(g-\hat{\chi})^+ \in B.$$

DEMOSTRACION:

Basta observar que la expresión:

$$(g-\hat{\chi})^+ = (g-g \wedge \hat{\chi})^+, \quad \text{es cierta.}$$

En efecto, si $g(x) \leqslant 1$, la igualdad anterior queda $0 = 0$, y si $g(x) > 1$, dicha igualdad quedaría $g(x)-1 = g(x)-1$.

Ahora bien, $g \wedge \hat{\chi} \in B$, por lo que $-(g \wedge \hat{\chi}) \in B$, y con ello, $g-(g \wedge \hat{\chi}) \in B$. Entonces, $(g-\hat{\chi})^+ \in B$, como queríamos.

2.12. LEMA.- *Si B es stoniano, para cada $f \in B$, es*

$$|f-\hat{x}| \in B^+.$$

DEMOSTRACION:

Se concluye trivialmente de la expresión

$$|f-\hat{x}| = (f-\hat{x})^+ + (f-\hat{x})^- = (f-\hat{x})^+ + [-(f-\hat{x}) \wedge 0] .$$

2.13. LEMA.- *Si B es stoniano, para cada $f \in B^+$, es*

$$(f-\hat{x})^+ \in B^+.$$

DEMOSTRACION:

Tendremos que probar que

$$(f-\hat{x})^+ = \sup \{ g \leq (f-\hat{x})^+ ; \ g \in B \} .$$

Observemos que si $(f-\hat{x})^+(x) = 0$, tomando $g = 0$ se verifica que:

$$g \in B \ , \quad g \leq (f-\hat{x})^+ \quad y \quad g(x) = (f-\hat{x})^+(x).$$

En cambio, si $(f-\hat{x})^+(x) = r > 0$, será $f(x) = 1 + r$.

Tomemos ε, tal que $0 < \varepsilon < r$, y elijamos $g_\varepsilon \leq f$, tal que

$$g_\varepsilon \in B \qquad y \qquad g_\varepsilon(x) > f(x) - \varepsilon ,$$

y esto es posible por ser $f \in B^+$. Así pues, como $g_\varepsilon(x) > 1 + r - \varepsilon$, se tiene

$$g_\varepsilon - \hat{x} \leq f - \hat{x} \qquad y \qquad g_\varepsilon(x) - 1 > r - \varepsilon > 0.$$

Entonces, se da

$$(g_\varepsilon-\hat{x})^+ \leqslant (f-\hat{x})^+ , \qquad (g_\varepsilon-\hat{x})^+ \in B,$$

y $\quad (g_\varepsilon-\hat{x})^+(x) = (g_\varepsilon-\hat{x})(x) \geqslant r-\varepsilon > 0.$

O sea, $\quad (g_\varepsilon-\hat{x})^+(x) > (f-\hat{x})^+(x)-\varepsilon.$

Por tanto, $\quad (f-\hat{x})^+ \in B^+$, como queríamos.

2.14. TEOREMA.- *Si B es stoniano, para cada $f\in B^+$ y para cada $r\in]0,+\infty]$, el conjunto $A_r = \{x\in X;\ f(x) > r\}$ cumple:*

$$\chi_{A_r} \in B^+.$$

DEMOSTRACION:

Se tiene $\quad (f-r\hat{x})^+ = r(\frac{f}{r} - \hat{x})^+ \in B^+,$

y con ello, $\quad \{n(f-r\hat{x})^+ \wedge \hat{x}\}_{n\in N} \uparrow \chi_{A_r}.$

Luego $\quad \chi_{A_r} \in B^+.$

A partir de estos resultados podemos obtener el siguiente

2.15. COROLARIO.- *Si B es stoniano, para cada $f\in B^+$ y para cada $r\in R$, el conjunto $A_r = \{x\in X\ ;\ f(x) > r\}$ cumple que*

$$\chi_{A_r} \in B^+.$$

Cabe preguntarse si este resultado puede generalizarse para funciones de B^*_+. La respuesta a esta cuestión es negativa. Tampoco es válido el resultado tal cual si $f \in B_0$. En cambio, se obtiene un resultado importante, débil, pero que en cierta forma es más general que el resultado del corolario 2.15.

2.16. TEOREMA.- *Sea* (X,B,ϕ) *un sistema de Loomis stoniano. Sea* $f \in B_0$. *Entonces:*

El conjunto $A_r = f^{-1}(]r,+\infty]) =$

$= \{x \in X ;\ f(x) > r\}$, *cumple que* $\chi_{A_r} \in B_0$, *salvo quizás para un conjunto numerable de valores* r de R^+.

DEMOSTRACION:

Hagamos constar que este resultado generaliza uno de Loomis para contenidos de Jordan (ref.38).

Sean $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ números reales. Para cada $k = 1,..n$, definamos

$$f_k = \frac{1}{r_k - r_{k-1}} (f \wedge r_k - f \wedge r_{k-1}).$$

Aunque f tome valores infinitos, cada f_k es una función real perteneciente a B_0. Pero además, se verifican:

a) $0 \leq f_k \leq 1$.

Pues $r_{k-1} < r_k$ implica $f \wedge r_{k-1} \leq f \wedge r_k$.

Y por otra parte,

$$f_k \leq \frac{1}{r_k - r_{k-1}} (r_k - f \wedge r_{k-1}).$$

Si $r_{k-1} \leq f(x)$, será $f_k(x) \leq 1$.

Y si $r_{k-1} > f(x)$, será $f_k(x) = 0 < 1$.

b) $f_k(x) = 0$, si $f(x) \leq r_{k-1}$.

c) $f_k(x) = 1$, si $f(x) \geq r_k$. Por tanto, f_k vale 1 en el conjunto A_{r_k}.

d) Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene

$$\chi_{A_{r_k}} \leq f_k \leq \chi_{A_{r_{k-1}}},$$

en virtud de lo anterior.

Con estas propiedades, cada $\chi_{A_{r_k}} \in \mathcal{F}$, y por tanto, tiene sentido hablar de su integral superior y de su integral inferior, que son reales en virtud de la acotación de d).

Se dá que:

$$I(\chi_{A_{r_k}}) - I(\chi_{A_{r_k}}) \leq I(f_k) - I(f_{k+1}) = I(f_k) - I(f_{k+1}),\ si\ k = 1, .\, n-1.$$

Y $\bar{I}(\chi_{A_{r_k}}) - \underline{I}(\chi_{A_{r_k}}) \leq \bar{I}(f_n) = I(f_n)$. Con ello,

$$\sum_{i=1}^{k} [\bar{I}(\chi_{A_{r_i}}) - \underline{I}(\chi_{A_{r_i}})] \leqslant I(f_1).$$

Sea $a \in Q^+$, y elijamos $r_0 = a/2 < r_1 = a$. .

Sea $\varepsilon \in Q^+$. Si existen puntos r de R posteriores á a tales que

$$\bar{I}(\chi_{A_r}) - \underline{I}(\chi_{A_r}) > \varepsilon,$$

en número infinito, para cada $n \in N$ podemos elegir $r_2 < r_3 < \ldots < r_n$ de entre ellos.

Se verificará que $n\varepsilon \leqslant I(f_1)$. Contradicción, ya que f_1 sólo depende de $f, a/2$, y a. Con esto hemos demostrado, que para cada a, ε pertenecientes a Q^+, sólo hay un número finito de números reales r tales que $r > a$ y $\bar{I}(\chi_{A_r}) - \underline{I}(\chi_{A_r}) > \varepsilon$.

De aquí deducimos que el conjunto de los números reales positivos r tales que $\bar{I}(\chi_{A_r}) - \underline{I}(\chi_{A_r}) \neq 0$ es numerable. Pues tal conjunto es igual a

$$\bigcup_{\varepsilon, a \in Q^+} \{r \in R^+ ;\ \bar{I}(\chi_{A_r}) - \underline{I}(\chi_{A_r}) > \varepsilon\ ,\ r > a\}.$$

COMENTARIO: Hemos visto que si (X, B, ϕ) es un sistema de Loomis stoniano, para cada función $f \in B_0$, $f^{-1}(]r, +\infty])$ es un conjunto medible salvo un conjunto numerable de valores r de R^+ a lo sumo. Si el funcional fuése de Bourbaki, como es sabido, se obtiene un resultado más fuerte: para cada función $f \in B_+^*$, la imagen inversa de cualquier intervalo propio o impropio de R es un conjunto medible.

3. CONTENIDO DE JORDAN REALTIVO A UN SISTEMA DE LOOMIS.

Ya nos hemos referido a la clase $\bar{B}$. El sistema $(X,\bar{B},\bar{\phi})$ se llama -siguiendo a Loomis- la *completación bilateral de* (X,B,ϕ) ([38], p.170).

Un conjunto A de X se dice *medible-Jordan* si y sólo si $\chi_A \in \bar{B}$. El número real $c(A) = \bar{\phi}(\chi_A)$ se llama *el contenido de Jordan de* A. Puede hacerse un estudio de las integrales superiores L-$\bar{I}$, y de las integrales inferiores L-$\underline{I}$, relacionado con los conceptos de contenido exterior e interior, que se definen de manera obvia. Tal estudio es sencillo (formalmente se puede seguir Apostol, primera edición ,p.217,...), aunque no es objeto de nuestro trabajo.

Designemos por S_0 el conjunto de las funciones reales definidas en X, que son combinaciones lineales finitas de funciones características de conjuntos medibles-Jordan dos a dos disjuntos. S_0 es un espacio vectorial real, con las operaciones naturales. La demostración se basa fundamentalmente en que la unión, intersección y diferencia de conjuntos medibles-Jordan también tiene ese caracter.

Señalemos únicamente que si B no es retículo vectorial, sino simplemente espacio vectorial, tal resultado no es cierto: efectivamente, sí será cierto que la suma de dos combinaciones lineales de funciones características de conjuntos medibles-Jordan, es una combinación lineal de tal tipo; lo que no será cierto es que la suma de dos combinaciones lineales finitas de funciones características de conjuntos medibles-Jordan dos a dos disjuntos, sea una combinación lineal de ese tipo.

Es inmediato ver que S_0 es subespacio vectorial de $\bar{B}$.

$$f \in S_0 \ , \quad f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} \ ,$$

entonces $$\bar{\phi}(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i \bar{\phi}(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, c(A_i).$$

Si B contiene funciones no acotadas, $\bar{B}$ también contiene funciones no acotadas, y como los elementos de S_0 son funciones reales acotadas, será S_0 subespacio vectorial estricto de $\bar{B}$.

Hemos visto que $\bar{B}$ es retículo vectorial. Pues bien, S_0 es también retículo vectorial. La completación bilateral del sistema $(X,S_0\bar{\phi})$ se llama *el sistema de las funciones integrables-Riemann en sentido abstracto relativo al sistema* (X,B,ϕ). Las funciones integrables-Riemann en sentido abstracto son elementos de $\bar{B}$. Su estudio puede verse en [38], apartado 2., quien no utiliza, como hacemos nosotros, que el sistema inicial sea stoniano. Es inmendiato que si (X,B,ϕ) es stoniano, también lo es el sistema $(X,S_0,\bar{\phi})$ y, por consiguiente, también lo es su completación bila teral. Su estudio fue hecho por Bauer (ref.[21], ref. [14] de Flasmeyer); aparte de Bauer citemos a Grinblal (ref. [31]) cuyo trabajo es importante para construcciones efectivas de compactificaciones en el espacio X, así como a Gould (ref. [29]). En [26], p.152, viene una exposición muy bien esquematizada del tema, en donde se plantea la cuestión de si la clausura $\mathcal{R}$ de S_0 en $C_b(X)$, espacio de Banach de las funciones reales acotadas en X, cumple o no que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_0$.

En todo caso, hemos demostrado que las funciones integrables-Riemann en sentido abstracto pertenecen a $\mathcal{B}_0$.

3.1. TEOREMA.- *Sea* $(X, \mathcal{B}, \phi)$ *un sistema stoniano, y supongamos que* $\bar{I}(\hat{X}) < +\infty$. *Entonces* $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_0$.

DEMOSTRACION:

Al ser un sistema stoniano, $\hat{X} \in \mathcal{B}_+^*$. Exigimos por tanto, que $\hat{X} \in \mathcal{B}_0$. Veamos en primer lugar que $\bar{\phi} : S_0 \to R$ es continua para la topología de la norma del supremo en S_0. Pues si $g \in S_0$ y $g \neq 0$, $g/\|g\| \in S_0$ y $|\bar{\phi}(g/\|g\|)| \leqslant \bar{\phi}(|g|/\|g\|) =$

$$= I(|g|/\|g\|) \leqslant I(\hat{X}).$$

Por tanto, $|\bar{\phi}(g)| \leqslant I(\hat{X}) \, \|g\|$, para toda $g \in S_0$.

Según es conocido (veáse [6] ,p.62, 3.15.16.) al ser $\bar{\phi}$ uniformemente continua puede extenderse de manera única a $\mathcal{R}$; seguiremos designando por $\bar{\phi}$ tal prolongación. Si $f \in \mathcal{R}$, y es $\{g_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones de S_0 que tiende en norma hacia f, se verifica que

$$\bar{\phi}(f) = \lim \{\bar{\phi}(g_n)\}_{n\in N} .$$

Observemos que si $f \in R$, $f \in \mathcal{F}$ por ser límite uniforme de funciones de $S_0 \subset \mathcal{F}$.

Dado $\varepsilon \in R^+$, existe $g_0 \in S_0$ tal que

$$// f-g_0 // < \frac{\varepsilon}{2(I(\hat{X})+1)} ,$$

y por tanto, $\bar{I}(/f-g_0/) \leqslant \varepsilon/2.\bar{I}(\hat{X})/_{\bar{I}(\hat{X})+1} < \varepsilon/2.$

Ahora bien, como $g_0 \in B_0$, existirá $g \in B$ tal que

$\bar{I}(/f-g/) < \varepsilon.$ Es decir, $f \in B_0$.

Para cada $n \in N$, sea $g_n \in S_0$ tal que $// f-g_n // < \dfrac{1}{n+1}$.

Con ello, $/f-g_n/ \leqslant 1/_{n+1} \cdot \hat{X}$,

por lo que

$$/I(f)-I(g_n)/ = /I(f-g_n)/ \leqslant I(/f-g_n/) \leqslant 1/_{n+1} . I(\hat{X}).$$

Entonces, $I(f) = \lim \{I(g_n)\}_{n\in N} = \lim \{\bar{\phi}(g_n)\}_{n\in N} = \bar{\phi}(f)$,

ya que $\{g_n\}_{n\in N}$ tiende a f según la topología de la norma.

NOTA: No es difícil dar un ejemplo de que el funcional $\bar{\phi}$ sea no acotado, (Veáse [28], nota 3, p. 510), en el caso de que $\bar{I}(\hat{X}) = +\infty$.

4. MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA ASOCIADA A UN SISTEMA DE LOOMIS.

Vamos a precisar con detalle qué es para nosotros una medida finitamente aditiva, en vista de que no hay uniformidad total entre los distintos autores.

Si X es un conjunto no vacío, un sistema M de subconjuntos de X se llama un *anillo* de subconjuntos de X, si y sólo si, cumple:

i) $\Phi \in M$.

ii) *Si* $A, B \in M$, $A - B \in M$.

iii) *Si* $A, B \in M$, $A \cup B \in M$.

Conviene tener presente que en esta definición no exigimos que X pertenezca a M, (en cuyo caso se dice que M es un *álgebra*). Tampoco exigimos que la unión numerable de conjuntos de M pertenezca a M, (en cuyo caso se dice que M es un σ-*anillo*, y si además, X pertenece a M, se dice que M es una σ-*álgebra*).

Si un sistema de subconjuntos de X cumple la propiedad de que la unión numerable de conjuntos del sistema también pertenece al sistema, se dice que éste es *σ-aditivo* o también *completamente aditivo*, independientemente de que el sistema sea o no anillo o álgebra. Por ejemplo, si $\mathbb{A}$ es un σ-álgebra de partes de X, y es $\bar{\mathbb{A}}$ su completación conjuntista respecto de una medida definida en $\mathbb{A}$ (veáse [12], p.99), $\bar{\mathbb{A}}$ se dice que es completamente aditiva, a pesar de que no es álgebra en general, ya que el complementario de un elemento de $\bar{\mathbb{A}}$ no tiene por qué ser de $\bar{\mathbb{A}}$. Desde luego, $\bar{\mathbb{A}}$ es anillo.

Un sistema de partes de X que cumple *i)*, *iii)* y que sea cerrado por intersecciones, se llama un *semianillo*. Evidentemente todo anillo es semianillo, pero el recíproco no es cierto.

La nomencratura empleada, insistimos en ello, no es general, (veáse [45],[12],[8], entre otros).

Con estos supuestos estamos en condiciones de dar la siguiente

4.1. DEFINICION.- *Sea X un conjunto no vacío, y M un semianillo de subconjuntos de X. Una aplicación $\mu : M \to \bar{R}_0^+$, se dice que es una medida finitamente aditiva en el par (X,M), si y sólo si, cumple:*

i) $\mu(\Phi) = 0$.

ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, *si* $A, B \in M$ *y* $A \cap B = \Phi$.

Si $\mu(\bigcup_{1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, cuando los A_i son elementos de M dos a dos disjuntos, y la unión pertenece a M, se dice que μ es σ-aditiva o completamente aditiva. Si además M es σ-álgebra, se dice que μ es una *medida*.

4.2. NOTA: La exigencia de que μ sea no negativa no es una restricción esencial, habida cuenta de que existe un teorema de descomposición de Jordan análogo al de las medidas, (con precisión, el teorema sa da para medidas finitamente aditivas de variación acotada; veáse por ejemplo [12], p.81) y dado que en nuestro trabajo aparecen ligadas a sistemas de Loomis medidas finitamente aditivas no negativas, hablaremos sólo de éstas.

Cabe también señalar que si μ sólo toma valores reales se llama una *carga* . Y está bastante estudiada la relación entre funcionales de Loomis y cargas (veáse [16], [26], [38]), pero no la relación entre medidas finitamente aditivas, no necesariamente finitas, y sistemas de Loomis.

Enunciamos a continuación un resultado clave, el cual nos sitúa en el ambiente de las medidas finitamente aditivas asociadas a un sistema de Loomis.

(Señalemos que algunos autores definen medidas finitamente aditivas sobre un semianillo, y otros sobre un álgebra).

4.3. TEOREMA.- *Sea* (X,B,ϕ) *un sistema de Loomis y sea* I *la prolongación a* B^* *descrita anteriormente. Definimos*

$$M = \{ A \subset X ; \chi_A \in B^*_+ \}.$$

Entonces se verifica:

1) M *es un anillo de subconjuntos de* X.

2) $\mu : M \to \bar{R}^+_0$, *definida por* $\mu(A) = I(\chi_A)$, *es una medida finitamente aditiva en* (X,M).

DEMOSTRACION:

Ante todo, notemos que los elementos de M son subconjuntos de $\hat{X}$, y sus correspondientes funciones características son elementos de $\mathcal{F}$.

1) Veamos que M es un anillo de subconjuntos de X.

a) $\Phi \in M$, ya que χ_Φ es la función nula que pertenece a B, y por tanto, a B^*_+.

b) Si $A,B \in M$, se cumple $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$, que pertenece a B^*_+ por ser retículo, con ello $A \cup B \in M$.

c) Si $A,B \in M$, se cumple $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$, que también pertenece a B^*_+, luego, $A \cap B \in M$.

d) Si $A,B \in M$, también es cierto que $\chi_{A-B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$, en virtud de ser $A-B$ el complementario de $A \cap B$ respecto de A.

Tendremos que probar que $\chi_{A-B} \in B_+^*$. Pues bien, ya que

$$\chi_{A-B} \leqslant \chi_A \in B_+^* \quad , \textit{es} \quad \chi_{A-B} \in \mathcal{F};$$

por otra parte, si $f \in B$ y $f \geqslant 0$, se tiene la igualdad

$$f \wedge \chi_{A-B} = f \wedge \chi_A - f \wedge \chi_{A \cap B} \text{ , } \quad (1)$$

que probamos por disyunción de casos:

Si $x \notin A$, $\quad (f \wedge \chi_{A-B})(x) = 0 = 0-0.$

Si $x \in A-B$, $\quad (f \wedge \chi_{A-B})(x) = \min \{f(x), 1\} = \min \{f(x), 1\} - 0 = (1).$

Y si $x \in A \cap B$, $\quad (f \wedge \chi_{A-B})(x) = 0 = 1-1 = (f \wedge \chi_A)(x) - (f \wedge \chi_{A \cap B})$

Y en suma, $f \wedge \chi_{A-B}$ es diferencia de dos funciones de B_0, luego $f \wedge \chi_{A-B} \in B_0$, y con ello queda probado que $\chi_{A-B} \in B_+^*$.

2) Veamos que μ es una medida finitamente aditiva.

a) $\mu(\Phi) = I(\chi_\Phi) = I(0) = 0.$

b) Si $A, B \in M$ y $A \cap B = \Phi$, evidentemente $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, y al ser I aditivo en B_+^*, se tiene que

$$I(\chi_{A \cup B}) = I(\chi_A) + I(\chi_B).$$

Esto es,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

4.4. DEFINICION.- *Un subconjunto* A *de* X *se llama* ϕ*-medible si y sólo si* $A \in M$ *(esto es, si y sólo si* $\chi_A \in B_+^*$*).*

4.5. DEFINICION.- *una función f de F se llama ϕ-medible si y sólo si f^+ y f^- pertenecen a B_+^*.*

4.6. NOTA: Es inmediato que todo conjunto medible-Jordan pertenece a M, y que c es la restricción de μ al conjunto de los conjuntos medibles-Jordan. c es una medida finitamente aditiva en X, pero μ es una prolongación de c, por lo que es a μ a quien se le llama la medida finitamente aditiva ligada al sistema de Loomis.

Hemos comentado el hecho de que en nuestras definiciones no se exige que el conjunto X pertenezca a la clase M. Pues bien, los dos teoremas que siguen analizan en qué condiciones se puede afirmar que los conjuntos X ó $\hat{X}$ pertenecen a M.

4.7. TEOREMA.- *$X \in M$ si y sólo si B_+^* es stoniano y $X = \hat{X}$.*

DEMOSTRACION:

Si $X \in M$, se tiene $\chi_X = 1 \in B_+^*$, por lo que B_+^* es stoniano al ser retículo inferior. Pero si $1 \in B_+^*$, 1 tiene un mayorante F perteneciente a B_+. Y F es mayor o igual a 1 en cualquier punto $x \in X$, con lo que para cada punto del espacio X al menos hay una función de B que no se anula; esto es, $X = \hat{X}$.

Recíprocamente, si B_+^* es stoniano, se tendrá que $\hat{X} \in B_+^*$ en virtud de la proposición 2.6. de caracterización. Pero si además es

$X = \hat{X}$, se sigue que $X_X = X_{\hat{X}} = \hat{X}$, y con ello, $X \in M$, lo que termina la demostración.

4.8. TEOREMA.- $\hat{X} \in M$ *si y sólo si* B_+^* *es stoniano.*

DEMOSTRACION:

Basta considerar las dos equivalencias siguientes:

$\hat{X} \in B_+^*$ si y sólo si B_+^* es stoniano.

y $\hat{X} \in B_+^*$ si y sólo si $\hat{X} \in M$.

A título de comentario sobre el párrafo de la p.121 de [13], demos el siguiente

4.9. COROLARIO.- *Que* B *sea stoniano, no es suficiente para asegurar que* X *pertenezca a* M, *a menos que, se añada la condición* $X = \hat{X}$.

No hay ninguna dificultad en genralizar resultados del apartado 3., haciendo intervenir los conjuntos de M en lugar de los conjuntos medible-Jordan. Esta generalización que no aparece en la bibliografía, es muy simple por el paralelismo total que hay con el partado anterior.

5. CONJUNTOS DE MEDIDA NULA RELATIVOS A UN SISTEMA DE LOOMIS.

5.1. DEFINICION.- Sea $(X,\mathcal{B},\phi)$ un sistema de Loomis, y supongamos que ϕ se ha prolongado a una aplicación I en la clase $\mathcal{B}^*$.

Un subconjunto C de X se llama de *medida nula* si y sólo si $\bar{I}(\chi_C) = 0$.

Es fácil ver que todo subconjunto de un conjunto de medida nula también es de medida nula; que la unión finita de conjuntos de medida nula es de medida nula.

En cambio, no puede asegurarse que la unión numerable de conjuntos de medida nula sea también de medida nula. Esta diferencia fundamental con el caso de la integral de Daniell, surge de la necesidad de emplear el axioma de continuidad de Daniell para demostrar esta propiedad ([14],p.31).

La situación que acabamos de describir se pone de manifiesto con detalle, en el siguiente

5.2. EJEMPLO:

Tomemos $X = N$ y como $\mathcal{B}$ el conjunto de las sucesiones reales casiconstantes.

Si $\{a_n\}_{n\in N}\in\mathcal{B}$, se define $\phi(\{a_n\}_{n\in N}) = \lim\limits_n a_n$.

Ya vimos que $(X,\mathcal{B},\phi)$ es un sistema de Loomis, y que ϕ no es una integral de Bourbaki , ni de Daniell.

Sea $n\in N$, y llamemos $A_n=\{n\}$. Veamos que A_n es de medida nula.

En efecto: χ_{A_n} es la sucesión de números reales cuyos términos son iguales a cero exceptuando el n-ésimo que es igual a 1; por tanto,

$$\chi_{A_n}\in\mathcal{B} \quad y \quad \phi(\chi_{A_n})=\bar{I}(\chi_{A_n})=0,$$

por lo que A_n es de medida nula.

En cambio, sea $A=\bigcup_{n\in N} A_n=N$, entonces χ_A es la sucesión de términos constantes iguales a 1, con lo que χ_A también pertenece a $\mathcal{B}$ y $\phi(\chi_A)=\bar{I}(\chi_A)=1$, de donde se deduce que A no es de medida nula.

Hemos indicado que ϕ no es de Bourbaki pero nótese que hemos dado dos demostraciones de este hecho: una directa; y otra, indirecta, ya que si la unión numerable de conjuntos de medida nula no es de medida nula, el funcional no puede ser de Bourbaki.

5.3. DEFINICION.- Análogamente a como se define para funciones de Daniell, se dice que:

Una propiedad relativa a puntos de X es *cierta casi por doquier* (y la notaremos *c.p.d.*), si y sólo si el conjunto de puntos de X para los que la propiedad no es válida, es un conjunto de medida nula.

5.4. DEFINICION.- Si $f\in\bar{R}^X$, y $f\geqslant 0$, definimos el conjunto

$$A = \{ x\in X ;\ f(x) = +\infty \},$$

y la función $f_0 : X \to \bar{R}$ por:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in A \\ f(x) & \text{si } x\notin A. \end{cases}$$

A f_0 se le llama *la parte finita de* f.

Obviamente se tendrá que $f = f_0 + (+\infty).\chi_A$, con $f_0\geqslant 0$ y tomando f_0 sólo valores finitos.

5.5. LEMA.- *Sea* $f : X \to \bar{R}$ *tal que* $f\geqslant 0$ *y* $\bar{I}(f)<+\infty$, *entonces* f *es finita c.p.d.*

DEMOSTRACION:

Según la definición anterior, es $f = f_0 + (+\infty).\chi_A$, pero también se cumple que: para cada $n\in N$,

$$f/_{n+1} = f_0/_{n+1} + (+\infty).\chi_A \geqslant \chi_A ,$$

de donde, $0\leqslant\bar{I}(\chi_A)\leqslant\bar{I}(f/_{n+1}) = 1/_{n+1}\bar{I}(f) \to 0$, por ser $\bar{I}(f)$ finita.

Se concluye entonces que $\bar{I}(\chi_A) = 0$, y A es de medida nula.

5.6. LEMA.- *Si* $f\in B_0$ *y* C *es de medida nula, se tiene que* $f.\chi_C\in B_0$ *y* $I(f.\chi_C) = 0$, *suponiendo que las funciones de* B *sean acotadas.*

DEMOSTRACION:

Sea $g \in \mathcal{B}$ tal que $\bar{I}(/f-g/) < \varepsilon$. Se tiene

$$/f\chi_C - g\chi_C/ = \chi_C/f-g/,$$

con lo cual, $\bar{I}(/f\chi_C - g\chi_C/) \leq \bar{I}(/f-g/) < \varepsilon$,

luego $\qquad 0 \leq \bar{I}(/f\chi_C/) \leq \varepsilon + \bar{I}(/g\chi_C/)$.

Ahora bien, si $M \in R^+$ es cota superior de $g \in \mathcal{B}$, se tiene que

$$0 \leq \bar{I}(/f.\chi_C/) \leq M\bar{I}(\chi_C) = 0.$$

Por tanto, $\qquad \bar{I}(/f.\chi_C/) = 0,$

de donde $/f.\chi_C/ \in \mathcal{B}_0$ y $I(/f.\chi_C/) = 0$, pues $\underline{I} \leq \bar{I} = 0$.

Finalmente, como $-/f.\chi_C/ \leq f.\chi_C \leq /f.\chi_C/$, se tiene

$$I(-/f.\chi_C/) = 0 \leq \underline{I}(f.\chi_C) \leq \bar{I}(f.\chi_C) \leq 0 = I(/f.\chi_C/),$$

lo que concluye la demostración.

Hagamos constar que en todo lo que sigue de este apartado se supondrá que las funciones de $\mathcal{B}$ son <u>acotadas</u>.

5.7. LEMA.- *Si $f, g \in \mathcal{B}_0$, y $f = g$ c.p.d., entonces*

$$I(f) = I(g).$$

DEMOSTRACION:

Si llamamos $h = f-g$, cuando esta diferencia tiene sentido (con los criterios ya usuales), se tiene que $h \in B_0$ y además $f \leq g + h$.

Sea $A = \{ x \in X;\ f(x) \neq g(x) \}$, de medida nula por hipótesis. Obviamente $f \leq g + h.\chi_A$; luego, aplicando el lema 5.6., será

$$\bar{I}(f) \leq \bar{I}(g) + 0.$$

Por simetría se deduce igualmente que $\bar{I}(g) \leq \bar{I}(f)$, y se consigue la igualdad buscada.

Con estos resultados estamos en condiciones de obtener el siguiente teorema de descomposición.

5.8. TEOREMA.- *Si $f \geq 0$, $f \in B_+^*$ y f es finita c.p.d., se tiene que f_0 también pertenece a B_+^*.*

Se sigue entonces que, cada función de B_+^* no negativa y finita c.p.d., es igual a la suma de una función finita f_0 de B_+^* y de una función del tipo $(+\infty).\chi_A$, donde A es un conjunto de medida nula.

DEMOSTRACION:

Por hipótesis el conjunto A es de medida nula y de $f = f_0 + (+\infty).\chi_A$, se desprende que:

Para cada $g \in B$, $g \geq 0$, es $f \wedge g = f_0 \wedge g + g.\chi_A$.

En efecto, si $x \in A$, $(f \wedge g)(x) = g(x)$,

y si $x \notin A$, $(f \wedge g)(x) = f_0(x) \wedge g(x)$.

Ahora bien, por el lema 5.6. se tiene que $g.\chi_A \in \mathcal{B}_0$, y por tanto $f_0 \in \mathcal{B}^*_+$, como queríamos.

5.9. NOTA: Por el lema 5.6., se ha establecido que si A es un conjunto de medida nula y $f \in \mathcal{B}_0$, se cumple que

$$f.\chi_A \in \mathcal{B}_0 \quad y \quad I(f.\chi_A) = 0$$

Pues bien, en el caso de los funcionales de Bourbaki se tiene un resultado más fuerte; éste es: si A es de medida nula y $f \in \mathcal{B}^*_+$, se dá que

$$f.\chi_A \in \mathcal{B}_0 \quad y \quad I(f.\chi_A) = 0.$$

Hagamos un esbozo de la demostración: si A es un conjunto de medida nula, y consideramos la función $(+\infty).\chi_A$, resulta que

$$n.\chi_A \uparrow (+\infty).\chi_A,$$

con lo cual, $(+\infty).\chi_A \in \mathcal{B}^*_+$,

y además $I((+\infty).\chi_A) = \lim_n I(n.\chi_A) = 0$, si ϕ es de Bourbaki.
(pero el teorema de convergencia monótona no tiene por qué ser cierto si ϕ es simplemente un funcional de Loomis). Con ello, minorando por una función no negativa f cualquiera, se consigue que

$$f.\chi_A \leq (+\infty).\chi_A ,$$

con lo que $\bar{I}(f.\chi_A) = 0$, y entonces $f.\chi_A \in \mathcal{B}_0$.

6. FUNCIONES NULAS RELATIVAS A UN SISTEMA DE LOOMIS.

Si consideramos una función $f \in B^*$, tal que $f \geq 0$ e $I(f) = 0$, no puede asegurarse que $f = 0$ c.p.d. , como muestra el ejemplo siguiente:

Sea $X = N$ y B el conjunto de las sucesiones reales casiconstantes.

Consideremos $f : N \to R$ definida por $f(n) = 1/_{n+1}$.

Sea $f_n = f \vee 1/_{n+1} \in B$.

Se tiene que para cada $n \in N$, $0 \leq f \leq f_n$. Por consiguiente,

$$0 \leq L\text{-}\underline{I}(f) \leq L\text{-}\bar{I}(f) \leq L\text{-}\bar{I}(f_n) = \phi(f_n) = 1/_{n+1}.$$

Evidentemente $L\text{-}\underline{I}(f) = L\text{-}\bar{I}(f) = 0$.

Así, $f \in \bar{B}$ y $\bar{\phi}(f) = 0$. Por tanto, $f \in B_0$, $f \geq 0$, $I(f) = 0$.

Ahora bien, $\{n \in N \ ; \ f(n) \neq 0\} = N$, y sin embargo,

$\bar{I}(\chi_N) = \phi(\chi_N) = 1$, ya que χ_N es la sucesión constantemente igual a 1, que pertenece a B.

O sea, N no es de medida nula y por consiguiente, f no es nula c.p.d.

No obstante, f cumple la siguiente propiedad:

Para cada $\varepsilon \in R^+$, $A_\varepsilon = \{x \in X ; \ |f(x)| > \varepsilon\}$ *es de medida nula.*

En efecto:

Evidentemente es $0 \leqslant \chi_{A_\varepsilon} \leqslant f/\varepsilon$, de donde

$$0 \leqslant \bar{I}(\chi_{A_\varepsilon}) \leqslant \bar{I}(f/\varepsilon) = I(1/_\varepsilon f) = 1/_\varepsilon I(f) = 0.$$

6.1. DEFINICION.- Una función numérica f que cumpla la propiedad antes descrita, se llamará *una función nula*.

A partir de esta definición son de comprobación inmediata las siguientes propiedades:

i) Una función numérica es una función nula si y sólo si lo es su función valor absoluto.

ii) Si f es una función nula, cualquier función g tal que $/g/ \leqslant /f/$, también es una función nula.

iii) El producto de una función nula por un escalar, también es una función nula.

Obsérvese que la expresión "la función nula", se refiere a la función constantemente igual a cero, en tanto que el artículo "una" se reserva para las funciones con la propiedad indicada.

Probemos ahora otras propiedades elementales:

iv) La suma de dos funciones nulas es una función nula.

En efecto, basta tener en cuenta que para cada $\varepsilon \in R^+$, se da la relación:

$$\{x \in X;\ /f(x)+g(x)/>\varepsilon\} \subset \{x \in X;\ /f(x)/>\tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X;\ /g(x)/>\tfrac{\varepsilon}{2}\}.$$

(Por supuesto, también en esta ocasión, utilizamos el convenio habitual de definición de la suma de funciones, cuando carece de sentido en $\bar{R}$).

v) El producto de dos funciones nulas es una función nula.

En efecto, si f y g son dos funciones nulas, elementalmente lo son f^2 y g^2, con lo que $f.g$ también lo es, sin más que considerar la expresión:

$0 \leqslant /f.g/ \leqslant f^2+g^2$, junto a la propiedad *ii)*.

Los resultados obtenidos son más débiles que los que se consiguen probar para funcionales de Daniell. De todas formas, siendo el funcional de Loomis, y en determinadas condiciones de la clase B, se pueden potenciar algunos de dichos resultados.

Se tiene también que, el producto de una función nula por una función numérica cualquiera no es, en general, una función nula. Si ϕ es de Daniell siempre puede afirmarse que sí.

En cambio, el producto de una función nula c.p.d., por una función numérica cualquiera, siempre es una función nula c.p.d.

¿Será cierto que toda función nula tiene integral superior igual a cero? La respuesta es afirmativa si el funcional es de Bourbaki como es fácil ver. Pero si el funcional es de Loomis cualquiera, no puede afirmarse. Precisamente, como analizaremos con detalle en el capítulo III, en algunas situaciones se asigna integral nula a las funciones nulas, pero sin que ello sea a costa de perder la linealidad.

7. TEOREMA DE CONTINUIDAD PARA SISTEMAS DE LOOMIS DE FUNCIONES REALES ACOTADAS.

Como se ha visto, la prolongación que hemos hecho de ϕ no precisa que $\mathcal{B}$ sea stoniano, ni que las funciones de $\mathcal{B}$ sean acotadas. Ahora bien, si suponemos que se verifica alguna de estas dos propiedades (que se presentan con frecuencia), se obtienen más resultados.

Hay que señalar que algunos resultados obtenidos imponiendo como hipótesis que los elementos de $\mathcal{B}$ son funciones reales acotadas, pueden también obtenerse considerando la propiedad de que cualquier función numérica no negativa, multiplicada por la función característica de un conjunto de medida nula, tiene integral superior igual a cero. Aunque en la práctica, son las propiedades directamente ligadas a $\mathcal{B}$, a ϕ o a ambas, las que permiten saber si tal condición relativa a los conjuntos de medida nula se cumple o no.

Como ejemplo de lo que puede suponer añadir la hipótesis de que los elementos de $\mathcal{B}$ sean funciones acotadas, daremos un teorema de gran importancia.

7.1. TEOREMA.- *Sea $(X,\mathcal{B},\phi)$ un sistema de Loomis tal que los elementos de $\mathcal{B}$ son funciones reales acotadas. Y sea $f\in\bar{R}^X$ tal que $\bar{I}(/f/)<+\infty$.*

Entonces

$$\bar{I}(/f/.\chi_B)\to 0,\ si\ \bar{I}(\chi_B)\to 0,\ con\ B\subset\hat{X}.$$

DEMOSTRACION:

Señalemos que la razón por la que se exige $B\subset\hat{X}$, es que así $\chi_B\leqslant(+\infty).\hat{\chi}$ y existe $\bar{I}(\chi_B)$.

Con precisión, tenemos que demostrar que, para cada $\varepsilon\in R^+$, existe $\nu\in R^+$ tal que, si $B\subset\hat{X}$ y $\bar{I}(\chi_B)<\nu$, se verifica:

$$\bar{I}(/f/.\chi_B)<\varepsilon.$$

Probemos en primer lugar el caso particular de que $f\in\mathcal{B}_+$.

a) Si $f\in\mathcal{B}_+$, existe $g\in\mathcal{B}$ tal que $g\leqslant/f/$, y $I(g)>I(/f/)-\varepsilon/2$. Con ello, $I(/f/)-I(g)=I(/f/-g)<\varepsilon/2$.

Por otra parte, para cualquier $B \subset \hat{X}$, es

$$|f|.\chi_B \leqslant (|f|-g).\chi_B + g.\chi_B \text{ , de donde,}$$

$$\bar{I}(|f|.\chi_B) \leqslant \bar{I}[(|f|-g).\chi_B] + \bar{I}(g.\chi_B) \leqslant \bar{I}(|f|-g) + \bar{I}(g.\chi_B) < \bar{I}(g.\chi_B) < \varepsilon/2$$

Así pues, si M es cota de g, tomemos $\nu = \varepsilon/2M$, con lo cual, $\bar{I}(\chi_B) < \nu$ implica que $\bar{I}(|f|.\chi_B) < \varepsilon$ elementalmente.

b) En el caso general, si $\bar{I}(|f|) < +\infty$ existe $F_0 \in B_+$ de manera que $F_0 \geqslant |f|$ e $\bar{I}(F_0) < \bar{I}(|f|) + 1$.

Por lo tanto, $F_0 = |F_0|$ cumple que $\bar{I}(|F_0|) < +\infty$ y en virtud del apartado a), se tiene que:

dado $\varepsilon \in R^+$, existe $\nu \in R^+$, tal que, si $\bar{I}(\chi_B) < \nu$, entonces

$I(|F_0|.\chi_B) < \varepsilon$ y dado que $|f|.\chi_B \leqslant |F_0|.\chi_B$, se deduce que

$I(|f|.\chi_B) < \varepsilon$, como queríamos.

7.2. COROLARIO.- *En las mismas condiciones del teorema 7.1., se verifica que: dado* $\varepsilon \in R^+$, *existe* $\nu > 0$, *tal que, si* $B \in M$ *y* $\mu(B) < \nu$, *se tiene* $\bar{I}(|f|.\chi_B) < \varepsilon$. ($B \in M$, $\mu(B) = I(\chi_B)$).

Interpretación intuitiva: si B es un conjunto "muy pequeño", la integral superior citada es un número real muy pequeño también.

CAPITULO III

METODO FUNCIONAL DE CONSTRUCCION DE LA INTEGRAL RESPECTO DE UNA MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA. COMPARACION CON EL METODO CONJUNTISTA.

1. INTEGRAL DE RIEMANN ABSTRACTA RESPECTO DE UNA MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA.

La integral construida a partir de una medida finitamente aditiva, presenta una gran analogía con la integral respecto de una medida completamente aditiva. Como es de esperar, no se alcanzan resultados tan potentes, lo que es particularmente claro en el tema de los teoremas de convergencia de sucesiones funcionales; pero, sobre todo, se presentan dificultades para conseguir un concepto satisfactorio de función medible. Parece natural exigir que las funciones medibles,definidas a partir de una medida finitamente aditiva, deban cumplir un mínimo de propiedades: por ejemplo, que la suma de funciones medibles sea medible, que el producto de una función medible por un escalar sea medible, que una función medible dominada por una función integrable sea integrable.

Pues bien, ha sido difícil conseguir una definición satisfactoria. En textos antiguos (citemos como paradigma a Taylor (ref. 16), que dedica bastante atención al tema), se aprecia una definición que en casos particulares, como por ejemplo cuando la medida es finita, es satisfactoria. Posteriormente se observa en la bibliografía la influencia de trabajo de Yosida-Hewitt (ref. 50, de 1951, anterior a la obra de Taylor que es de 1957). En dicho trabajo la integral respecto de una medida finitamente aditiva, se trata como si las dificultades fuesen superficiales, concretamente remite a Titch-Mach, cuya obra es de 1939, diciendo que "pequeñas"modificaciones debe hacerse a la teoría de la integral clásica.

Una exposición completa de lo que ha venido en llamarse integral de Riemann abstracta respecto de una medida finitamente aditiva, puede verse en Dunford-Schwartz(ref. 7, de 1958) para el caso de medidas vectoriales. Algo más de detalle para el caso de medidas reales viene en De Finetti (ref. 25). Para ligeras variantes del método de Dunford-Schwartz remitimos a Heiden (ref. 34) y a Appling (ref. 19).

Vamos a resumir brevemente la teoría tal y como se acepta hoy en día, siguiendo fundamentalmente a Dunford-Schwartz citado casi unánimemente por los especialistas en el tema como fuentes de referencia. Pero conviene advertir que, para el caso de funciones reales, se han obtenido apreciables mejoras que simplifican la teoría.

Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathbb{A}$ un álgebra de partes de X y μ una medida finitamente aditiva no negativa definida en $\mathbb{A}$. Notemos que $X \in \mathbb{A}$, cosa que no se impone en todos los trabajos.

Se define una aplicación de $P(X)$ en $\bar{R}_0^+$ por medio de

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B);\ A \subset B,\ B \in \mathbb{A}\}\ .$$

al aplicación se llama la *medida exterior* asociada a μ. (Por analogía con el caso en que μ sea σ-aditiva). Es inmediato que el conjunto que aparece en la definición no es vacío, ya que $X \in \mathbb{A}$. En los casos en los que se exige simplemente que $\mathbb{A}$ sea un anillo de partes de X, la aplicación μ^* se define en el sistema de subconjuntos de X incluidos en algún elemento de $\mathbb{A}$.

μ^* cumple que $\mu^*(\Phi) = 0$, y que μ^* es subaditiva.

Un subconjunto C de X se llama de *medida nula*, o con precisión, μ-*nulo*, si y sólo si $\mu^*(C) = 0$. Parece natural llamar conjuntos de medida nula simplemente a los elementos de $\mathbb{A}$ cuya medida es cero. Cabe sospechar que una tal clase de conjuntos de medida nula sería inconveniente o insuficiente. Basta pensar en un ejemplo: el contenido de Jordan y la medida de Lebesgue.

Una vez definido lo que es conjunto de medida nula, se define *función* μ-*nula c.p.d.* y *función* μ-*nula* a partir de μ^*, de manera obvia: Se dice que f es μ-nula c.p.d., si y sólo si el conjunto $\{x \in X \,;\, f(x) \neq 0\}$ es μ-nulo.

Se dice que $f : X \rightarrow R$ es μ-nula, si y sólo si para cada $\varepsilon \in R^+$, el conjunto $\{x \in X \,;\, |f(x)| > \varepsilon\}$ es μ-nulo.
(Obsérvese el parecido con las definiciones que vimos en el cap.II).

Si la medida μ no es completamente aditiva, una función μ-nula no tiene por qué ser μ-nula c.p.d.,(véase el ejemplo de [7] p. 103). En todo caso, desde luego, una función μ-nula c.p.d. es μ-nula.

Pues bien, como consecuencia, debe imponerse en los inicios de la construcción de la integral que una función nula tenga como integral el número real cero.

Llamemos la atención de que nos estamos refiriendo a funciones reales definidas en X, aunque en [7] se haga la teoría general para funciones con valores en un espacio de Banach.

En el conjunto R^X se define una estructura topológica del modo siguiente: si $f \in R^X$, para cada $\varepsilon \in R^+$ se define

$$A_\varepsilon = \{x \in X \,;\, |f(x)| > \varepsilon\}.$$

Y se define la "norma" $//f//$ de la función f como:

$$\inf \{ \operatorname{arctg} [\varepsilon + \mu^*(A_\varepsilon)] \; ; \; \varepsilon \in R^+ \} .$$

A pesar del nombre, la norma de f no es propiamente una norma, pues $//\lambda f// \neq /\lambda/ \; //f//$ con $\lambda \in R$, en general. Sin embargo, si definimos $d(f,g) = //f-g//$, d es una semidistancia invariante por traslación.

Pasando al cociente por la relación de equivalencia:

$$f \sim g \Leftrightarrow f-g \text{ es } \mu\text{-nula},$$

obtenemos una distancia, para la cual el espacio cociente es completo. Se obtiene una distancia fundamentalmente por ser $//f// = 0$ si y sólo si f es una función μ-nula. Por otra parte, la topología debida a esa distancia es compatible con la estructura de grupo aditivo del espacio cociente, pero no con su estructura de espacio vectorial.

Pues bien, si definimos la convergencia en medida como se hace para medidas (esto es, $\{f_n\}_{n \in N} \to f$ en medida - o en μ-medida, para evitar confusiones - , si y sólo si, para cada $\varepsilon \in R^+$, es

$$\lim_n \mu^*(\{x \in X ; \; /f(x) - f_n(x)/ > \varepsilon \}) = 0 ,$$

resulta que la convergencia en μ-medida de una sucesión de funciones de R^X equivale a su convergencia para la topología engendrada por la semidistancia definida en R^X.

Se puede decir que la clave del método estriba en esta interpretación topológica de la convergencia en medida. Observemos un hecho que [7] no analiza con detalle, aunque sea una cuestión no difícil: si el espacio en que toman valores las funciones fuera $\bar{R}$, no hay dificultad en definir la diferencia entre funciones, exigiendo que, tanto el minuendo como el sustraendo, sean finitas c.p.d.. Si el espacio en que toman valores las funciones no es uno-dimensional, es delicado establecer qué se entiende por valores infinitos vectoriales, pues hay que proceder a considerar cómo se compactifica, o con más precisión, qué compactificación se considera en tal espacio de Banach.

En este ambiente, una función real definida en X se llama μ-*simple*, si y sólo si es de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} a_i . \chi_{A_i}$$

siendo los a_i números reales; los A_i elementos de $\mathbb{A}$ con $\mu(A_i) \in R$, y dos a dos disjuntos.

Designemos por S al conjunto de las funciones μ-simples.

La descomposición de una función μ-simple en suma del tipo indicado no es única trivialmente.

Se define la *integral* de una función μ-simple como el número real

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

Después de probar que la definición de integral no depende de la descomposición particular elegida, y de generalizar el concepto de integral a una clase más amplia, resulta arduo demostrar que una función no negativa tiene integral nula si y sólo si es una función nula.

Es sabido que el concepto de función medible, en el caso de medidas finitamente aditivas, es un concepto poco desarrollado con detalle en la meyoria de los textos. Precisamente [7] constituye una excepción. Se define el conjunto de las funciones μ-*medibles* como la clausura del conjunto de las funciones μ-simples en R^X, con lo cual, el conjunto de las funciones μ-medibles es un subespacio vectorial cerrado del espacio R^X.

Por razones de completitud en la exposición, hay que señalar que la definición anterior, no sólo se puede generalizar satisfactoriamente al concepto de función medible para el caso de funciones vectoriales, sino que, sobre todo, se obtiene el resultado básico de que la suma de funciones medibles es medible, y que el producto por un escalar de una función medible también es una función medible, aspecto éste que se puede escapar si no se contrasta con otros textos. Por citar un ejemplo, en [16] se da una definición tal que la suma de funciones medibles no tiene por qué ser una función medible.

Conviene llamar la atención sobre un punto que consideramos ante todo diferenciador según que μ sea completamente aditiva o no lo sea. En el primer caso, si $(X,\mathbb{A},\mu)$ es un espacio de medida, una función de X en $\bar{R}$ se llama μ-medible, si y sólo si la imagen inversa de cualquier boreliano de $\bar{R}$ es un elemento de $\mathbb{A}$, (como se vé pues, μ no interviene en la condición de medibilidad).

En cambio, si μ es finitamente aditiva, pero no completamente aditiva, para decidir si una función es o no μ-medible interviene la topología de R^X, y por consiguiente, μ. No conocemos por la bibliografía consultada, que esté estudiado si el concepto de medibilidad es independiente de la medida finitamente aditiva particularmente considerada. Parece a primera vista que no es así, pero en todo caso sería de desear una definición de medibilidad independiente de la medida.

Diremos que un subconjunto A de X es μ-*medible* si y sólo si χ_A es μ-*medible*.

Finalmente, una función de R^X se llama μ-*integrable*, si y sólo si es el límite en μ-medida de una sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ de Cauchy de funciones μ-simples (Esto es,

$$\lim_{m,n} \int |f_m - f_n| \to 0).$$

Si f es μ-integrable, se define

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu,$$

Se prueba que la definición es independiente de la sucesión empleada; y que la integral es lineal.

Si E es un subconjunto de X, y $f.\chi_E$ es μ-integrable, por definición, se dice que f es μ-*integrable* en E y se escribe:

$$\int_E f\, d\mu = \int f.\chi_E\, d\mu.$$

Por tal razón,el algunos casos conviene escribir $\int_X f\, d\mu$ en lugar de $\int f\, d\mu$.

Es inmediato que una función μ-nula es μ-integrable y que su integral es cero. En este punto, puede compararse el énfasis que pone [7] en llamar también funciones μ-simples a las que se obtienen sumando una función μ-nula a un sumatorio del tipo indicado, con las definiciones en trabajos posteriores.

Como muestran estos conceptos, se consigue una construcción aceptable, pues en el caso de que μ se σ-aditiva coincide con el procedimiento standard. Este método presenta las limitaciones que eran de esperar: no se pueden dar los teoremas de convergencia clásicos si la medida no es σ-aditiva. Quizá tenga interés indicar que en [7] , en el apartado dedicado a los espacios L_p, se pueden ver los teoremas débiles de convergencia que es posible obtener, y comparar con el caso σ-aditivo. No los citamos pues no vamos a utilizarlos, salvo el teorema de la convergencia dominada.

Apurando esta exposición, puede decirse que los puntos claves son: la introducción y empleo del concepto de función μ-nula, y la definición de función μ-medible.

NOTA 1.- Hemos modificado la nomenclatura de [7], porque era molesta al emplear símbolos ambiguos para designar la "norma" de una función, y la función norma de una función dada.

Por otra parte, llamamos función μ-medible a la que en [7] se llama totalmente medible, y en otros textos, fuertemente medible, por razones de simplicidad. La diferencia entre función μ-medible y función fuertemente medible es de interés para cuestiones que nosotros no vamos a considerar: por ejemplo, para el resultado de que una función medible dominada por una integrable sea integrable.

Insistimos que, en nuestro trabajo (como es usual), μ σ-aditiva es sinónimo a μ completamente aditiva.

NOTA 2.- Loomis indica, en el resultado que hemos generalizado en el teorema II.2.16., que si definimos función medible como aquella tal que la imagen inversa de cada semirecta $]r,+\infty]$ es un conjunto cuya función característica es integrable (excepto para un conjunto numerable de valores de $\mathcal{R}$), "parece ser la modificación correcta de la definición usual de medibilidad cuando la medida considerada no es completamente aditiva" (ref.38, p.117).

NOTA 3.- Hemos dicho que un subconjunto A de X se llama μ-medible si y sólo si χ_A es μ-medible. Conviene advertir que elgunos autores llaman μ-medibles a los elementos de $\mathbb{A}$.

Señalemos para terminar este apartado, dos resultados muy importantes.

1.- Definición equivalente de μ-integrabilidad. (ref.34, p.211).

Si f es una función real no negativa definida en X, la condición necesaria y suficiente para que sea μ-integrable es que se cumplan:

i) Para cada $A \in \mathbb{A}$, con $\mu(A) < +\infty$ y para cada ε y M de R^+, existen funciones g y h μ-simples tales que

$$g \leq (f \wedge M) . \chi_A \leq h \quad y \quad \int (h-g)\, d\mu < \varepsilon .$$

ii) El conjunto $\{\int g \, d\mu \,;\; g \leq f$ y g μ-simple$\}$ está acotado superiormente.

En tal caso, $\int f \, d\mu$ es precisamente el supremo de dicho conjunto.

2.- Teorema de la convergencia dominada. (ref.7, p.124).

Si $\{f_n\}_{n \in N}$ es una sucesión de funciones μ-simples dominadas por una función μ-integrable dada, se tiene:

$\{f_n\}_{n \in N}$ converge en medida hacia una función f si y sólo si f es μ-integrable y

$$\{\int |f_n - f| \, d\mu\}_{n \in N} \rightarrow 0.$$

2. METODO FUNCIONAL DE CONSTRUCCION DE LA INTEGRAL RESPECTO DE UNA MEDIDA FINITAMENTE ADIVA.

Sea X un conjunto no vacío, y μ una medida finitamente aditiva definida en un semianillo $\mathbb{A}$ de partes de X. Nos hallamos pues en la situación más general en lo que se refiere al campo de definición de μ.

Supongamos μ no negativa.

2.1. DEFINICIONES.- Llamamos:

$$\mathbb{A}^* = \{ B \subset X ; \text{ existe } A \in \mathbb{A}, \text{ tal que } A \supset B\}.$$

Para cada $B \in \mathbb{A}^*$, definimos

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) ; \ A \in \mathbb{A}, \ A \supset B \}.$$

Es fácil probar que $\mu^*(\Phi) = 0$; que $\mu^*(A) = \mu(A)$ si $A \in \mathbb{A}$; y que μ^* es subaditiva.

Por definición, un conjunto $C \in \mathbb{A}^*$ se dice de *medida nula* si y sólo si $\mu^*(C) = 0$. La clase de todos los conjuntos de medida nula se representa por $\mathbb{A}_0^*$. POr supuesto, si se maneja más de una medida habría que precisar a cuál nos referimos. Es elemental ver que cada subconjunto de un conjunto de medida nula también es de medida nula, y que la unión finita de conjuntos de medida nula también es de medida nula. Pero nótese que esta propiedad no se extiende a uniones numerables.

μ^* se llama también *medida exterior asociada a* μ, a pesar de que μ no esté definida en un álgebra de partes de X necesariamente, ni tampoco μ^* esté definida en todo $\mathcal{P}(X)$.

Introduzcamos la clase

$$\bar{\mathbb{A}} = \{ A \subset X \; ; \; A = A_0 \cup C_0 \; , \; A_0 \in \mathbb{A} \; \text{ y } \; C_0 \in \mathbb{A}_0^* \} .$$

No es restrictivo suponer, cuando ello convenga, que $A_0 \cap C_0 = \Phi$. Pues en todo caso, $A_0 \cup C_0 = A_0 \cup (C_0 - A_0)$. Así, es $A_0 \cap (C_0 - A_0) = \Phi$ y $\mu^*(C_0 - A_0) = 0$.

A partir de estos conceptos podemos enunciar el siguiente

2.2 LEMA.- $\bar{\mathbb{A}}$ *es un semianillo de partes de* X.

DEMOSTRACION:

a) Evidentemente $\Phi \in \bar{\mathbb{A}}$.

b) Si $A', A'' \in \bar{\mathbb{A}}$, también $A' \cup A'' \in \bar{\mathbb{A}}$.

En efecto, si $A' = A_0' \cup C_0''$, y $A'' = A_0'' \cup C_0''$, se sigue que

$$A' \cup A'' = (A_0' \cup A_0'') \cup (C_0' \cup C_0'') .$$

c) Si $A', A'' \in \bar{\mathbb{A}}$, también $A' \cap A'' \in \bar{\mathbb{A}}$.

En efecto, si $A' = A_0' \cup C_0'$, y $A'' = A_0'' \cup C_0''$, es

$$A' \cap A'' = [A_0' \cap A_0''] \cup [(A_0' \cap C_0'') \cup (A_0'' \cap C_0') \cup (C_0' \cap C_0'')] .$$

Estamos ya en condiciones de obtener la ampliación a la clase $\bar{\mathbb{A}}$ de la medida μ, hecho que precisamos en el siguiente

2.3. TEOREMA.- *μ se puede prolongar a $\bar{\mathbb{A}}$, de manera que la prolongación continúe siendo finitamente aditiva.*

DEMOSTRACION:

a) Si $A \in \bar{\mathbb{A}}$, es $A = A_0 \cup C_0$, y definamos

$$\mu(A) = \mu(A_0).$$

Veamos que la definición es buena; es decir, ésta prolongación de μ será independiente de la descomposición particular empleada. Con precisión: si $A = A_0' \cup C_0'$, debemos probar que

$$\mu(A_0) = \mu(A_0').$$

Ahora bien, $\mu(A_0') = \mu^*(A_0') \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_0) + \mu^*(C_0) =$

$$= \mu(A_0) + \mu^*(C_0) = \mu(A_0) + 0 = \mu(A_0).$$

Análogamente se demuestra que $\mu(A_0) \leqslant \mu(A_0')$.

b) Elementalmente, $\mu(\Phi) = 0$, $\Phi \in \bar{\mathbb{A}}$.

c) Si $A', A'' \in \bar{\mathbb{A}}$ y $A' \cap A'' = \Phi$, es $\mu(A' \cup A'') = \mu(A') + \mu(A'')'$

En efecto, si $A' = A_0' \cup C_0'$ y $A'' = A_0'' \cup C_0''$, es $A_0' \cap A_0'' = \Phi$, por lo que, $\mu(A' \cup A'') = \mu[(A_0' \cup A_0'') \cup (C_0' \cup C_0'')] =$

$$\mu(A_0' \cup A_0'') = \mu(A_0') + \mu(A_0'') = \mu(A') + \mu(A'').$$

COMENTARIO: A pesar que las demostraciones anteriores son muy sencillas y podíamos haberlas omitido, el lector reconocerá la técnica de completación de una medida en lo que antecede, pero hemos querido poner de manifiesto que no se emplea para nada la σ-aditividad de μ para establecer las propiedades anteriores.

Si $\mathbb{A} = \bar{\mathbb{A}}$, se dice que μ es *completa*. Nótese que $\bar{\mathbb{A}}$ se construye a partir de $\mathbb{A}$ pero también a partir de μ, lo que justifica que una igualdad entre clases de conjuntos se exprese diciendo que μ es completa. Nuestra construcción podía haberse hecho partiendo de la condición de que fuese completa, pero hemos preferido no situarnos en este ambiente y hacer la construcción para una medida finitamente aditiva cualquiera. Conviene tener presente que para los conjuntos de medida nula definidos a partir de un sistema de Loomis, todo subconjunto de un conjunto de medida nula es de medida nula. En cambio, partiendo de una medida finitamente aditiva, se tiene que un subconjunto C de un conjunto A tal que $\mu(A) = 0$, no verifica necesariamente que $\mu(C) = 0$, ya que no tiene por qué pertenecer a $\mathbb{A}$, si bien, siempre C pertenecerá a $\mathbb{A}^*$

2.4. DEFINICION.- Una función f de X en R se llama *ϕ-simple* si y sólo si, existen conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \bar{\mathbb{A}}$ dos a dos disjuntos, de medida finita, y números reales $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tales que

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} .$$

Por supuesto, la descomposición de f en sumandos del tipo indicado no tiene por qué ser única, hecho que constituye una ventaja más que un inconveniente a la hora de calcular con funciones simples.

Designamos por B al conjunto de las funciones símples.

Si $f,g \in B$, y $\lambda \in R$, es inmediato que $f+g \in B$ y $\lambda f \in B$.

Y podemos concretar el siguiente resultado.

2.5. TEOREMA.- *B con las operaciones naturales es un espacio vectorial real, evidentemente modular y stoniano, de funciones reales acotadas.*

Por consiguiente, si definimos $\phi(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i)$,

la terna (X,B,ϕ) es un sistema de Loomis, que se llama asociado a μ (o con más precisión, al espacio de medida finitamente aditiva $(X,\mathbb{A},\mu)$).

Es inmediato que la definición de la integral elemental de una función simple, $\phi(f)$, es independiente de la descomposición de f empleada (se usaría la técnica habitual de descomposición empleada para probar, por ejemplo, que la suma de funciones simples es una función simple). Lo mismo puede decirse para probar la linealidad de ϕ.

2.6. CONVENIO.- A partir de este sistema de Loomis, se puede construir la prolongación de ϕ por el método funcional que hemos desarrollado en el capítulo I. Por tanto, si μ es una medida finitamente aditiva no negativa definida en un álgebra de partes de X, puede considerarse la integral de Riemann abstracta obtenida a partir de μ (que hemos expuesto en el apartado 1 de este capítulo). O bien, puede considerarse la integral obtenida a partir del sistema $(X,\mathcal{B},\phi)$ ligado a μ.

Para precisar, hablaremos de funciones ϕ-simples y no confundirlas con las μ-simples.

Para no incurrir en repeticiones innecesarias y para mayor claridad, desde este momento cuando se consideren las dos integrales citadas, siempre que se diga que un subconjunto $\mathcal{C}$ de X es μ-nulo o ϕ-nulo, se entenderá que es de medida nula respecto de μ ó respecto de ϕ.

Lo mismo diremos para funciones nulas o funciones nulas c.p.d.

También distinguiremos entre funciones μ-integrables y ϕ-integrables, y funciones μ-medibles y ϕ-medibles.

Convendremos que cuando una función f sea ϕ-integrable, su integral se representará por $I(f)$, o bien por $\phi(f)$ si $f \in \mathcal{B}$. En cambio, si f es μ-integrable, su integral se representará por $\int f\, d\mu$.

El conjunto de las funciones μ-simples se representará por $\mathcal{S}$, y el de las ϕ-simples por $\mathcal{B}$.

La medida finitamente aditiva asociada a $(X,\mathcal{B},\phi)$ se representará por m, y su medida exterior asociada por m^*.

A continuación damos unos resultados que clarifican el concepto de conjunto ϕ-nulo que dimos en el capítulo II, definición 5.1.

2.7. DEFINICION.- Sea $(X,\mathcal{B},\phi)$ un sistema de Loomis, y llamemos $M(\phi)$ al sistema de los conjuntos medibles. Para evitar confusiones, insistimos en que designaremos por m a la medida finitamente aditiva ligada al sistema de Loomis.

Se define

$$M^*(\phi) = \{ A \subset X ;\ \textit{existe}\ M \in M(\phi),\ \textit{tal que}\ A \subset M \}$$

La aplicación $m^* : M^*(\phi) \rightarrow \bar{R}_0^+$ definida por:

$$m^*(A) = \inf \{ m(M) ;\ M \in M(\phi),\ A \subset M \},$$

se llama la *medida exterior asociada al sistema*, por analogía con el caso de las medidas.

Se verifican naturalmente las propiedades siguientes:

i) $M \subset M^*(\phi)$, $m^*(A) = m(A)$ *si* $A \in M(\phi)$.

ii) *Si* $A_1, A_2 \in M^*(\phi)$ *y* $A_1 \subset A_2$ *es* $m^*(A_1) \leq m^*(A_2)$.

iii) *Si* $A_1, A_2 \in M^*(\phi)$, $m^*(A_1 \cup A_2) \leq m^*(A_1) + m^*(A_2)$.

Quizá convenga resaltar que si $A_1 \cap A_2 = \Phi$ no puede asegurarse que $m^*(A_1 \cup A_2)$ sea igual a $m^*(A_1) + m^*(A_2)$, a diferencia de lo que sucede con la aplicación m. Por supuesto m cumple la propiedad formal *ii)* llamada de monotonía, y también la propiedad *iii)* llamada de subaditividad.

Obsérvese que si $M(\phi) = \{A \subset X ; \chi_A \in B^*_+\}$ también es igual al conjunto $\{A \subset \hat{X} ;\ \chi_A \in B^*_+\}$ pues si $\chi_A \in B^*_+$, χ_A se anula en $X - \hat{X}$, de donde se sigue que $A \subset \hat{X}$.

Recalquemos que χ_A se considera función de X en $\bar{R}$, a pepesar de que $A \subset \hat{X}$.

Nótese también que si $B \in M^*(\phi)$, existe $A \in M(\phi)$ tal que $B \subset A$, por lo que B está incluido en X. Con ello, $M^*(\phi) \subset P(\hat{X})$. Si además, B^*_+ es stoniano, resulta que $P(\hat{X}) \subset M^*(\phi)$, pues si $B \subset \hat{X}$, como $\hat{X} \subset M(\phi)$, será $B \in M^*(\phi)$.

Resumiendo: siempre es $M^*(\phi) \subset P(\hat{X})$; si B es stoniano puede asegurarse que $M^*(\phi) = P(\hat{X})$.

2.8. LEMA.- *Sea* (X,B,ϕ) *un sistema de Loomis. Para cualquier* $B \in M^*(\phi)$, *es* $\bar{I}(\chi_B) \leq m^*(B)$.

DEMOSTRACION:

Ante todo, si $B \in M^*(\phi)$, existe $A \in M(\phi)$ tal que $B \subset A$, y por tanto $\chi_B \leq \chi_A \in B^*_+$, con lo que $\chi_B \in \mathcal{F}$, y tiene sentido hablar de la integral superior.

Así pues, por la definición equivalente de la integral superior, se tiene que

$$\bar{I}(\chi_B) = \inf\{ I(f) \,;\; f \in B_+^* \,,\; f \geq \chi_B \};$$

pero el conjunto $\{ I(f) \,;\, f\in B_+^* \,,\; f\geq \chi_B\} \supset \{ I(\chi_A) \,;\; \chi_A \in B_+^* \,, \chi_A \geq \chi_B\} =$

$$= \{ m(A) \,;\; A\in M(\phi) \;,\; A\supset B\}.$$

y tomando ínfimos se deduce que $\bar{I}(\chi_B) \leq m^*(B)$, como queríamos.

2.9. TEOREMA.- *Sea* $(X,\mathcal{B},\phi)$ *un sistema de Loomis stoniano. Para cada* $B\subset\hat{X}$ *se tiene*

$$m^*(B) \leq \bar{I}(\chi_B).$$

DEMOSTRACION:

Al ser B_+^* stoniano, podemos asegurar que $M^*(\phi) = P(\hat{X})$. Sea pues $B\subset\hat{X}$. Si $\bar{I}(\chi_B) = +\infty$, evidentemente vale la desigualdad indicada.

Supongamos que $\bar{I}(\chi_B)\in R$. Sea $f\in B_+$ tal que $f\geq\chi_B$ con $I(f)\in R$. Así, $f\geq 0$, $f\in B_0$.

En virtud del teorema II.2.16. , podemos encontrar una sucesión de números reales positivos $\{ r_i\}_{i\in N}$ de límite 1, siendo los $r_i<1$, y tales que $\chi_{A_{r_i}} \in B_0$ para todo $i\in N$.

Recordemos que $A_{r_i} = \{x\in X \,;\; f(x) > r_i \}$. Naturalmente, $A_{r_i} \in M(\phi)$. Para cada $i\in N$, es evidente que $B\subset A_{r_i}$. Pues si $x\in B$, es $f(x) \geq \chi_B(x) = 1 > r_i$, luego $x\in A_{r_i}$.

Con ello, $m^*(B) \leqslant m^*(A_{r_i}) = m(A_{r_i}) = I(\chi_{A_{r_i}})$.

Por otra parte, tenemos que $\chi_{A_{r_i}} \leqslant 1/_{r_i} . f$ como se ve por disyunción de casos:

Si $x \in A_{r_i}$ es $f(x) > r_i$, y por tanto, $\chi_{A_{r_i}}(x) = 1 < 1/_{r_i} . f(x)$.

Y si $x \notin A_{r_i}$, $\chi_{A_{r_i}}(x) = 0 \leqslant 1/_{r_i} . f(x)$, ya que $f \geqslant 0$.

Finalmente, se deduce que $m^*(B) \leqslant I(1/_{r_i} . f) = 1/_{r_i} . I(f)$,

y tomando límite cuando $i \to +\infty$ resulta que

$m^*(B) \leqslant I(f)$, para toda $f \in B_+$, tal que $f \geqslant \chi_B$, $I(f) < +\infty$.

Con ello, concluimos que $m^*(B) \leqslant \bar{I}(\chi_B)$.

2.10. COROLARIO.- *Si* (X, B, ϕ) *es un sistema de Loomis stoniano, se puede asegurar que* $M^*(\phi)$ *es el conjunto de partes de* $\hat{X}$, *y que* $m^*(B) = \bar{I}(\chi_B)$ *para todo* $B \in M^*(\phi)$.

NOTA: Queda claro por qué hemos llamado conjunto de medida nula a los conjuntos B tales que $\bar{I}(\chi_B) = 0$.

Como ya hemos indicado, por $M(\phi)$ representamos el sistema de los conjuntos ϕ-medibles. Y claro está, por $M(\mu)$ el sistema de los conjuntos μ-medibles.

Antes de la consideración simultánea de las dos integrales, demos un resultado para el sistema de Loomis ligado a una medida finitamente aditiva.

2.11. TEOREMA.- *Sea* $f \in \bar{R}^{\hat{X}}$ *tal que* $\bar{I}(|f|) < +\infty$. *Entonces, para cada* $\varepsilon \in R^+$, *existe* $A \in \bar{\mathbb{A}}$ *tal que* $\bar{I}(|f| . \chi_{\hat{X}-A}) < \varepsilon$.

DEMOSTRACION:

a) Si $f \in B_+$, tomemos $g \in B$ tal que

$$0 \leq g \leq |f| \quad y \quad I(g) > I(|f|) - \varepsilon.$$

Con ello, $|f| \leq |f-g| + g$.

Por lo tanto, $|f| . \chi_{\hat{X}-A} \leq |f-g| . \chi_{\hat{X}-A} + g . \chi_{\hat{X}-A}$, para todo $A \subset \hat{X}$.

Elijamos $A \in \bar{A}$ tal que $g(x) = 0$ para todo $x \in \hat{X}-A$, lo que es posible al ser g símple.

Con lo cual, se tiene:

$$|f| . \chi_{\hat{X}-A} \leq |f-g| . \chi_{\hat{X}-A} \leq |f-g|,$$

y por consiguiente

$$\bar{I}(|f| . \chi_{\hat{X}-A}) \leq \bar{I}(|f-g|) = \bar{I}(f-g) = I(f-g) = I(f) - I(g) < \varepsilon.$$

b) En el caso general, elijamos $F \in B_+$ de manera que

$$F \geq |f| \quad y \quad I(F) < \bar{I}(|f|) + 1 .$$

Así pues, $F = |F|$ verifica que $I(|F|) < +\infty$. Y eligiendo A a partir de F según el apartado anterior, queda que

$$I(|f| . \chi_{\hat{X}-A}) \leq I(F . \chi_{\hat{X}-A}) < \varepsilon,$$

con lo que se termina la demostración.

3. RELACION ENTRE μ-INTEGRABILIDAD Y ϕ-INTEGRABILIDAD.

Recalquemos que para una medida finitamente aditiva no negativa definida en un semianillo de partes de un conjunto X, se ha definido un sistema de Loomis que hemos llamado asociado a μ. En este apartado, consideraremos una medida finitamente aditiva μ no negativa definida en un álgebra $\mathbb{A}$ de partes de un conjunto X, y vamos a ver qué relación hay entre las dos integrales que pueden considerarse.

3.1. PROPOSICION.- *Si C es μ-nulo, también C es ϕ-nulo.*

DEMOSTRACION:

Si C es μ-nulo, para cada $\varepsilon \in R^+$, existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $C \subset A$ y $\mu(A) < \varepsilon$.

Por otra parte, como $f = \chi_A \in B \subset B_+^*$, podemos afirmar que: para cada $\varepsilon \in R^+$, existe $f \in B_+^*$ tal que $f \geqslant \chi_C$ y $I(\chi_A) = \mu(A) < \varepsilon$.

Por consiguiente, $\bar{I}(\chi_C) = 0$. Es decir, C es ϕ-nulo.

3.2. PROPOSICION.- *Si f es μ-nula, también f es ϕ-nula.*

DEMOSTRACION:

Para cada $\varepsilon \in R^+$, el conjunto $\{x \in X; /f(x)/ > \varepsilon\}$ es μ-nulo, y por la proposición 3.1., también es ϕ-nulo. Por tanto, f es ϕ-nula.

3.3. PROPOSICION.- *Si $g \in B$ es μ-nula, entonces $\phi(g) = 0$.*

DEMOSTRACION:

Se tiene que $/g/$ es μ-nula y $0 \leqslant /g/ \in B$. Además, si $/g/ = \sum_{i=1}^{k} a_i . \chi_{A_i}$, con $A_i \in \bar{A}$, $a_i > 0$, debe ser $\mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = 0$. Luego $/\phi(g)/ \leqslant \phi(/g/) = 0$.

3.4. PROPOSICION.- *Si f es una función μ-nula y no negativa, se tiene que $f \in B^+$. Además, $\tilde{\phi}_+(f) = 0$.*

DEMOSTRACION:

Para ver que $f \in B^+$, sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$. Está claro que la función nula es ϕ-simple, es menor o igual que f, y en el punto x_0 toma el mismo valor que f.

En otro caso, si $f(x_0) = r > 0$, consideremos el conjunto $\{x \in X ; f(x) > r - \varepsilon\} = A_\varepsilon$, que es μ-nulo, si $0 < \varepsilon < r$.

Con ello, es evidente que $(r-\varepsilon).\chi_A \leqslant f$.

Así pues, $f(x_0)-\varepsilon = r-\varepsilon = (r-\varepsilon).\chi_{A_\varepsilon}(x_0) \leq f(x_0)$.

Es decir, $g=(r-\varepsilon).\chi_{A_\varepsilon} \in B$ cumple que $g \leq f$, y además

$$f(x_0)-\varepsilon < g(x_0) \leq f(x_0).$$

Finalmente, si $f(x_0)=+\infty$, dado $k\in R^+$, se considera el conjunto $A_k=\{x\in X;\ f(x) > k+1\}$ que es μ-nulo.

De donde, $\chi_{A_k} \in B$ y $(k+1).\chi_{A_k} \leq f$.

Con ello, $g=(k+1).\chi_{A_k} \in B$ cumple que $g\leq f$, y

$$k < g(x_0) \leq f(x_0) = +\infty.$$

De todo lo anterior se deduce que $f\in B^+$, como queríamos.

Por otra parte, si $g\in B$ y es $0\leq g\leq f$, es $|g|\leq f$, con lo que g es μ-nula; y por tanto, $\phi(g)=0$ en virtud de la proposición 3.3. Pero al ser $f\geq 0$, $\tilde{\phi}_+(f) = \sup\{\phi(g);\ g\in B,\ g\leq f\} =$

$$= \sup\{\phi(g);\ g\in B,\ 0\leq g\leq f\} = 0.$$

3.5. LEMA.- *Sea A un conjunto μ-nulo. Entonces $(+\infty).\chi_A \in B_+$ y $I((+\infty).\chi_A)=0$.*

DEMOSTRACION:

Según la proposición 3.4., $(+\infty).\chi_A$ es μ-nula y $(+\infty).\chi_A \in B^+$ y $\tilde{\phi}_+((+\infty).\chi_A)=0$.

Para cada $F\in B^+$, veamos que

$$\tilde{\phi}_+[(+\infty).\chi_A+F] \leq \tilde{\phi}_+[(+\infty).\chi_A]+\tilde{\phi}_+(F) = \phi_+(F).$$

Sea $g \in \mathcal{B}$ tal que $g \leqslant (+\infty).\chi_A + F$, con lo cual

$$g \leqslant (1-\chi_A).F + g.\chi_A , \quad \text{ya que}$$

Si $x \in A$, es $g(x) \leqslant 0 + g(x)$.

y si $x \notin A$, entonces $g(x) \leqslant (+\infty).\chi_A(x) + F(x) = F(x)$.

Por tanto, $g \leqslant F + M.\chi_A$, siendo M cota de g.

Pero como $M.\chi_A \in \mathcal{B}$, es $\phi(g) \leqslant \widetilde{\phi}_+(F) + \phi(M.\chi_A)$, con $\phi(M.\chi_A) = 0$.

O sea, para cada $g \in \mathcal{B}$ tal que $g \leqslant (+\infty).\chi_A + F$, se tiene que

$$\phi(g) \leqslant \widetilde{\phi}_+(F).$$

Con ello, $\widetilde{\phi}_+[(+\infty).\chi_A + F] \leqslant \widetilde{\phi}_+(F)$.

Y entonces, $(+\infty).\chi_A \in \mathcal{B}_+$ como queríamos demostrar, y

$$I[(+\infty).\chi_A] = \widetilde{\phi}_+[(+\infty).\chi_A] = 0 .$$

3.6. COROLARIO.- *Si f es una función numérica cualquiera definida en X, y A es un conjunto μ-nulo, entonces*

$$\bar{I}(|f|.\chi_A) = 0.$$

En efecto:

$$0 \leqslant \bar{I}(|f|.\chi_A) \leqslant \bar{I}((+\infty).\chi_A) = \widetilde{\phi}_+((+\infty).\chi_A) = 0.$$

3.7. TEOREMA.- *Si f es una función μ-nula y no negativa, Entonces:*

a) $f \in \mathcal{B}_+$.

b) f *es ϕ-sumable e* $I(f) = 0$.

DEMOSTRACION:

a) Se ha visto en la proposición 3.4., que $f \in B^+$.

Debemos pues demostrar que para cada $F \in B^+$, es

$$\widetilde{\phi}_+(f+F) \leqslant \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F) = \widetilde{\phi}_+(F).$$

Pues bien, sea $g \in B$ tal que $g \leqslant f+F$. Tomemos $h \in B$, tal que $h \leqslant F$. Y sea $A \in \bar{\mathbb{A}}$, tal que $g-h$ se anula en X-A.

Con ello, $g \leqslant f+F \Rightarrow g-h \leqslant f+(F-h) \Rightarrow g-h = (g-h).\chi_A \leqslant$

$$\leqslant f.\chi_A + (F-h).\chi_A \leqslant f.\chi_A + F-h \Rightarrow g \leqslant f.\chi_A + F.$$

Para cada $n \in N$, sea $A_n = \{x \in X\ ;\ /f(x)/ > 1/_{n+1}\}$, que es un conjunto μ-nulo.

Para cada $n \in N$ pues, $g \leqslant \chi_A.(f.\chi_{A_n} + f.\chi_{X-A_n}) + F \leqslant$

$$\leqslant (+\infty).\chi_{A_n} + 1/_{n+1}.\chi_A + F.$$

Ahora bien, como $(+\infty).\chi_{A_n} \in B_+$ según el lema 3.5., y

$1/_{n+1}.\chi_A \in B \subset B_+$, resulta que

$$\phi(g) = \widetilde{\phi}_+(g) \leqslant \widetilde{\phi}_+((+\infty).\chi_{A_n} + 1/_{n+1}.\chi_A + F) =$$

$$= \widetilde{\phi}_+((+\infty).\chi_{A_n}) + \widetilde{\phi}_+(1/_{n+1}.\chi_A + F) = \widetilde{\phi}_+(1/_{n+1}.\chi_A) + \widetilde{\phi}_+(F) =$$

$$= 1/_{n+1}.\phi(\chi_A) + \widetilde{\phi}_+(F).$$

y de aquí se deduce que $\phi(g) \leqslant \widetilde{\phi}_+(F)$.

En resumen, el conjunto $\{\phi(g)\ ;\ g\leqslant f+F\ ,\ g\in\mathcal{B}\}$ está acotado superiormente por $\widetilde{\phi}_+(F)$, de donde se deduce que

$$\widetilde{\phi}_+(f+F)\leqslant\widetilde{\phi}_+(F).$$

b) Como $f\in\mathcal{B}_+$, y $I(f)=\widetilde{\phi}(f)=0$, al ser $I(f)$ finita se tiene $f\in\mathcal{B}_0$.

3.8. COROLARIO.- *Si f es una función μ-nula y no negativa, para cualquier $A\subset X$, es $f.\chi_A\in\mathcal{B}_0$ y $I(f.\chi_A)=0$.*

Trivial, ya que $f.\chi_A$ es también μ-nula y no negativa.

NOTA: Obsérvese que en los anteriores resultados se ha utilizado que si un conjunto es μ-nulo su función característica pertenece a $\mathcal{B}$. Hagamos constar que si en lugar de $\bar{\mathbb{A}}$ hubiésemos considerado solamente $\mathbb{A}$ para defininir funciones ϕ-simples, no habríamos podido concluir los resultados citados.

3.9. PROPOSICION.- *Si g es μ-simple, evidentemente es ϕ-simple y $I(g)=\phi(g)=\int g\,d\mu$. Y si g es ϕ-simple, es la suma de una función μ-simple con una función μ-nula. Por tanto, g es μ-integrable y $\int g\,d\mu = I(g)$.*

3.10. LEMA.- *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones reales que converge en μ-medida hacia la función nula. Supongamos además* *que, para cada* $n\in N$, *es* $\bar{I}(/f_n/)<+\infty$, *y que* $\{f_n\}_{n\in N}$ *es* ϕ-*Cauchy (o sea,* $\lim_{m,n} \bar{I}(/f_n-f_m/)=0$*). Entonces:*

$$\{\bar{I}(/f_n/)\}_{n\in N} \to 0.$$

DEMOSTRACION:

a) Para cada $B\subset\hat{X}$, y para cada $m,n\in N$, se tienen: $/f_n/.\chi_B \leq /f_m/.\chi_B + /f_n-f_m/.\chi_B \leq /f_m/.\chi_B + /f_n-f_m/.$

$$/f_m/.\chi_B \leq /f_n/.\chi_B + /f_n-f_m/.\chi_B \leq /f_n/.\chi_B + /f_n-f_m/.$$

Con ello: $\bar{I}(/f_n/.\chi_B) \leq \bar{I}(/f_m/.\chi_B) + \bar{I}(/f_n-f_m/)$

$$\bar{I}(/f_m/.\chi_B) \leq \bar{I}(/f_n/.\chi_B) + \bar{I}(/f_n-f_m/).$$

Así pues, $/\bar{I}(/f_m/).\chi_B)-\bar{I}(/f_n/.\chi_B)/ \leq \bar{I}(/f_n-f_m/).$

Y entonces, para cada $B\subset\hat{X}$, existe

$$\lim\{\bar{I}(/f_n/.\chi_B)\}_{n\in N} = L(B).$$

Pero observemos que: para cada $\eta\in R^+$, existe $n_0\in N$ tal que $n\geq n_0 \Rightarrow /\bar{I}(/f_n/.\chi_B-L(B)/<\eta$, cualquiera que sea $B\subset\hat{X}$. (Es decir, la sucesión $\{I(/f_n/.\chi_B)\}_{n\in N}$ converge uniformemente respecto de $B\subset\hat{X}$). Basta observar que al ser $\{f_n\}_{n\in N}$ sucesión ϕ-Cauchy, existe $n_0\in N$ tal que $n,m\geq n_0 \Rightarrow \bar{I}(/f_n-f_m/)<\eta/2$.

Por otra parte, del hecho de que $n\geq n_0 . \Rightarrow$

$\Rightarrow /I(/f_n/.\chi_B)/-I(/f_{n_0}/.\chi_B)<\eta/2$, podemos concluir algo más:

Existe $\rho\in R^+$ tal que $\bar{I}(\chi_B)<\rho \Rightarrow \bar{I}(\chi_B./f_{n_0}/<\eta/4$ (por el teorema de continuidad II.7.1.).

Con ello, $\bar{I}(\chi_B)<\rho\Rightarrow \bar{I}(/f_n/.\chi_B)\leqslant$

$$\leqslant \bar{I}(/f_{n_0}/.\chi_B+[\bar{I}(/f_n/.\chi_B)-\bar{I}(/f_{n_0}/.\chi_B)] \leqslant$$

$$\leqslant \bar{I}(/f_{n_0}/.\chi_B)+/\bar{I}(/f_n/.\chi_B)-\bar{I}(/f_{n_0}/.\chi_B)/\leqslant$$

$$\leqslant \bar{I}(/f_{n_0}/.\chi_B)+\bar{I}(/f_n-f_m/)<\eta/4+\eta/2=3/4\eta, \quad \forall\, n\geqslant n_0.$$

De donde se tiene que $/L(B)/<3\eta/4<\eta$.

O sea: para cada $\eta\in R^+$, existe $\rho\in R^+$ tal que $B\subset\hat{X}$ con $\bar{I}(\chi_B)<\rho$ implica $L(B)<\eta$.

Brevemente, $L(B)\to 0$ si $\bar{I}(\chi_B)\to 0$.

b) Sea $\varepsilon\in R^+$. Por el apartado a), existe $\nu'\in N$ y existe $\delta\in R^+$ tales que:

$$I(\chi_B)<\delta \Rightarrow /L(B)/=L(B)<\varepsilon/5.$$

$$n\geqslant\nu' \Rightarrow /\bar{I}(/f_n/.\chi_B)-L(B)/<\varepsilon/5, \qquad \text{para cada } B\subset\hat{X}.$$

Por el teorema 2.11, existe $A'\in\bar{\mathbb{A}}$ tal que

$$\bar{I}(/f_{\nu'}/.\chi_{X-A'})<\varepsilon/5.$$

Con lo cual, $L(\hat{X}-A')=/L(\hat{X}-A')/\leqslant/L(\hat{X}-A')-I(/f_{\nu'}/.\chi_{\hat{X}-A'})/+$

$$+\ I(/f_{\nu'}/.\chi_{\hat{X}-A'})<\varepsilon/5+\varepsilon/5=2/5\varepsilon.$$

Por otra parte, como $\{f_n\}_{n\in N}\to 0$ en μ-medida, si llamamos

$$A_\varepsilon^n = \{x\in\hat{X}\ ;\ f_n(x)>\frac{\varepsilon}{5[1+\mu(A')]}\},$$

se tiene que

$$\lim_n \mu^*(A_\varepsilon^n) = 0.$$

Por consiguiente, existirá $\nu'' \in N$, tal que $n \geqslant \nu''$ implica que

$$\mu^*(A_\varepsilon^n) < \delta.$$

Llamemos $\nu = max\{\nu', \nu''\}$. Resulta que $\mu^*(A_\varepsilon^\nu) < \delta$.

Elijamos $A \in \mathbb{A}$ tal que $A \supset A_\varepsilon^\nu$ y $\mu(A) < \delta$, con lo que se obtiene: $x \in \hat{X} - A$ implica que $x \in \hat{X} - A_\varepsilon^\nu$; y por tanto, $x \in \hat{X} - A$ implica

$$/f_\nu(x)/ \leqslant \frac{\varepsilon}{5[1+\mu(A')]}.$$

De donde se deduce que,

$$L[A' \cap (\hat{X}-A)] < \varepsilon/5 + \bar{I}(\chi_{A' \cap (\hat{X}-A)} \cdot /f_\nu/) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon/5 + I(\frac{\varepsilon}{5[1+\mu(A')]} \cdot \chi_{A'}) = \varepsilon/5 + I(\frac{\varepsilon}{5[1+\mu(A')]} \cdot \chi_{A'}) =$$

$$= \varepsilon/5 \quad \frac{\varepsilon}{5[1+\mu(A')]} \cdot \chi(A') < 2\varepsilon/5 \quad \text{(Nótese que } \chi_{A'} \in B).$$

Como $\bar{I}(\chi_{A \cap A'}) \leqslant \bar{I}(\chi_A) = \phi(\chi_A) = \mu(A) < \delta$.

es $L(A \cap A') < \varepsilon/5$ (Nótese que $\chi_A \in B$).

En resumen:

$L(\hat{X}-A) < 2\varepsilon/5$, $L[A' \cap (\hat{X}-A)] < 2\varepsilon/5$ y $L(A \cap A') < \varepsilon/5$.

c) Al ser $\bar{I}$ subaditiva, $L(B)$ es función subaditiva de $B\in P(\hat{X})$. Con ello, es

$$L(\hat{X})\leqslant L(\hat{X}-A')+L[A'\cap(\hat{X}-A)]+L(A\cap A')<\varepsilon,$$

sin más que teneren cuenta que

$$X=(\hat{X}-A')\cup[A'\cap(\hat{X}-A)]\cup(A\cap A').$$

Y dado que $0\leqslant L(\hat{X})<\varepsilon$ para todo $\varepsilon\in R^{+}$, debe ser $L(\hat{X})=0$.

Esto es,

$$\lim\{\bar{I}(/f_n/)\}_{n\in N}=\lim\{\bar{I}(/f_n/.\chi_{\hat{X}}\}_{n\in N}=0.$$

como queríamos.

3.11. LEMA.- *Si f es μ-integrable, e $\bar{I}(/f/)<+\infty$, también f es ϕ-sumable y además*

$$I(f)=\int f\,d\mu.$$

DEMOSTRACION:

Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones μ-simples tal que

$$\{f_n\}_{n\in N}\to f \qquad \text{(en } \mu\text{-medida)}$$

y que es μ-Cauchy.

En esta situación se tiene:

a) La sucesión $\{f-f_n\}_{n\in N}\to 0$ en μ-medida, evidentemente.

b) Se cumple que

$$\bar{I}(/(f-f_n)-(f-f_m)/)=\bar{I}(/f_n-f_m/)=\int/f_n-f_m/\,d\mu\ ;$$

por consiguiente, la sucesión $\{f-f_n\}_{n\in N}$ es ϕ-Cauchy.

Además,

$$\bar{I}(|f-f_n|)\leq\bar{I}(|f|)+\bar{I}(|f_n|)<+\infty.$$

Con esto, aplicando el lema 3.10., se tiene que

$$\{\bar{I}(|f-f_n|)\}_{n\in N}\to 0.$$

Y en virtud del teorema I.6.6. de caracterización, se deduce que f es ϕ-sumable (o sea, $f\in B_0$), y además

$$I(f)=\lim_n\{\phi(f_n)\}_{n\in N}=\lim_n\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu.$$

3.12. LEMA.- *Si f es μ-integrable y no negativa, también $f\in B^+$, y se tiene*

$$\tilde{\phi}_+(f)=\int f\,d\mu.$$

DEMOSTRACION:

Definimos $f_s=sup\{g\in B\,;\,g\leq f\}$.

Evidentemente $f_s\in B^+$ y $f_s\leq f$.

Vamos a ver que $f-f_s$, obviamente no negativa, es μ-nula, con lo cual f pertenecerá a B^+, al se $f-f_s\in B_+\subset B^+$ y al ser B^+ estable por la suma.

En virtud de la definición equivalente de Heiden Uwe and Der (cap.III,p.120), para cada $n\in N$, existe $g_n\in S$, $0\leq g_n\leq f$, y

$$\int g_n\,d\mu>\int f\,d\mu-1/_{n+1}.$$

Con ello, $\int |f-g_n|\, d\mu = \int (f-g_n)\, d\mu = \int f\, d - \int g_n\, d\mu < 1/_{n+1}$.

Por el teorema de la convergencia dominada (cap.IIIp.120) resulta que $\{g_n\}_{n\in N}$ tiende hacia f en μ-medida, con lo cual se tiene:

$$\{x\in X\ ;\ |f(x)-f_s(x)|>\varepsilon\} = \{x\in X\ ;\ f(x)-f_s(x)>\varepsilon\}\subset$$

$$\subset \{x\in X\ ;\ f(x)-g_n(x)>\varepsilon\} = \{x\in X\ ;\ |f(x)-g_n(x)|>\varepsilon\}$$ para cada $n\in N$.

Entonces, $\mu^*(\{x\in X\ ;\ |f(x)-f_s(x)|>\varepsilon\}) \leqslant$

$$\leqslant \mu^*(\{x\in X\ ;\ |f(x)-g_n(x)|>\varepsilon\}).$$

Haciendo teneder n a infinito, concluimos que

$$\mu^*(\{x\in X\ ;\ |f(x)-f_s(x)|>\varepsilon\} = 0.$$

Así pues, $f-f_s$ es μ-nula. De paso queda claro que $f = f_s$ y que

$$\widetilde{\phi}_+(f) = \int f\, d\mu.$$

NOTA: Por lo que se refiere a la demostración anterior, hemos de decir que hemos buscado en la bibliografía un resultado que directamente afirmarse: "toda función μ-medible no negativa es límite en medida de una sucesión creciente de funciones μ-simples no negativas y menores que f".

Hemos encontrado un resultado de Mertens (ref. 42) que así lo dice, pero su medostración (que omite porque dice que es elemental), se basa en un resultado previo cuya demostración es incorrecta. La proposición entrecomillada permite dar una demostración inmediata del hecho de que $f-f_\delta$ es una función μ-nula, sin utilizar el teorema de convergencia ni, el teorema de la convergencia dominada.

De la demostración dada se deduce que la proposición entrecomillada es cierta, pero tal vez se utilizan recursos demasiado fuertes para su verificación.

3.13. LEMA.- *Si f es μ-integrable y no negativa, puede asegurarse que $f\in B_+$ cuando f es acotada.*

DEMOSTRACION:

En virtud del lema 3.12., $f\in B^+$.

Veamos que, para cada $F\in B^+$, es $\tilde{\phi}_+(f+F)\leqslant\tilde{\phi}_+(f)+\tilde{\phi}_+(F)$.

Sea pues $F\in B^+$, y $g\in B$ tal que $g\leqslant f+F$.

Elijamos $\delta\in B$ tal que $\delta\leqslant F$. Con ello, $g-\delta\leqslant f+(F-\delta)$.

Si es $A\in\bar{\mathbb{A}}$ tal que $g-\delta$ se anula en X-A, se tiene:

$$g-\delta=\chi_A(g-\delta)\leqslant f.\chi_A+(F-\delta)\chi_A\leqslant f.\chi_A+F-\delta,$$

y por tanto, $g\leqslant f.\chi_A+F$.

Elijamos una sucesión $\{g_n\}_{n\in N}$ de funciones μ-simples para f como en el lema 3.12. Con ello, $g\leqslant\chi_A(f-g_n)+g_n.\chi_A+F\leqslant$

$$\leqslant\chi_A(f-g_n)+g_n+F, \qquad \text{para todo } n\in N.$$

Sea $\varepsilon\in R^+$. Si para cada $n\in N$ definimos el conjunto

$A_{n,\varepsilon}=\{x\in X;\ /f(x)-g_n(x)/>\varepsilon\}$ se verifica: $\lim\limits_n \mu^*(A_{n,\varepsilon})=0.$

Por consiguiente, para cada $n \in N$, existe $A_n^\varepsilon \subset \mathbb{A}$ tal que $A_n^\varepsilon \supset A_{n,\varepsilon}$ y si llamamos $\mu(A_n^\varepsilon) = \varepsilon_n$, se tiene que $\lim_n \varepsilon_n \neq 0$.

Sea M una cota de f. Por tanto, será cota de $f-g_n$.

Como $(f-g_n).\chi_A = (f-g_n).\chi_{A \cap A_n^\varepsilon} + (f-g_n).\chi_{A-A_n^\varepsilon}$, será

$$(f-g_n).\chi_A \leqslant M.\chi_{A_n^\varepsilon} + \varepsilon\chi_A.$$

Con ello, $g \leqslant M.\chi_{A_n} + \varepsilon.\chi_A + g_n + F$.

Ahora bien, los tres primeros sumandos del segundo miembro son de $\mathcal{B}$, por lo que $\widetilde{\phi}_+(g) \leqslant \widetilde{\phi}_+(M.\chi_{A_n^\varepsilon}) + \widetilde{\phi}_+(\varepsilon.\chi_A) + \widetilde{\phi}_+(g_n) + \widetilde{\phi}_+(F) \leqslant$

$$\leqslant M.\mu(A_n^\varepsilon) + \varepsilon.\mu(A) + \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F).$$

Si hacemos tender n a infinito queda

$$\phi(g) \leqslant \varepsilon.\mu(A) + \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F).$$

y ε tendiendo a cero, queda:

$$\phi(g) \leqslant \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F).$$

En resumen, como $g \leqslant f + F$ es arbitraria, resulta que

$\widetilde{\phi}_+(f+F) \leqslant \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F)$ para toda $F \in \mathcal{B}^+$, como queríamos demostrar.

3.14. TEOREMA.- *Si f es μ-integrable y no negativa, también f es ϕ-sumable e $I(f) = \int f\, d\mu$.*

DEMOSTRACION:

Bastará ver que $f \in B_+$, pues en tal caso,

$$\bar{I}(f) = \underline{I}(f) = \widetilde{\phi}(f) = \widetilde{\phi}_+(f) = \int f \, d\mu < +\infty,$$

y según el lema 3.11., se obtiene el resultado.

Desde luego, $f \in B^+$. Sea pues $F \in B^+$ y sea $g \in B$, tal que $g \leqslant f + F$. Elijamos $\delta \in B$ tal que $\delta \leqslant F$. Con ello, $g - \delta \in B$, por lo que existe $M \in R^+$ tal que $g - \delta \leqslant M$. Además, $F - \delta \geqslant 0$.

De una parte, $(g-\delta) - (F-\delta) \leqslant g - \delta \leqslant M$.

De otra, $(g-\delta) - (F-\delta) \leqslant f$. De las dos se deduce que

$$(g-\delta) - (F-\delta) \leqslant M \wedge f,$$

y por consiguiente, $(g-\delta) \leqslant f \wedge M + (F-\delta)$,

de donde $\quad g - \delta \leqslant \chi_A (f \wedge M) + F - \delta.$

siendo $A \in \bar{A}$ tal que $g - \delta$ se anula en $X - A$.

Con ello, $\quad g \leqslant \chi_A (f \wedge M) + F.$

Ahora bien, según el lema 3.13., ya que $(f \wedge M) . \chi_A$ es μ-integrable, no negativa y acotada, resulta que $(f \wedge M) . \chi_A \in B_+$.

Por tanto, $\widetilde{\phi}_+(g) \leqslant \widetilde{\phi}_+[\chi_A(f \wedge M) + F] =$

$= \widetilde{\phi}_+(\chi_A(f \wedge M)) + \widetilde{\phi}_+(F) \leqslant \widetilde{\phi}_+(f) + \widetilde{\phi}_+(F).$

Como antes, concluimos que $f \in B^+$.

3.15. COROLARIO.- *Si f es μ-integrable, f es ϕ-sumable y*

$$I(f) = \int f \, d\mu.$$

Basta con descomponer $f = f^{+} - f^{-}$.

3.16. COROLARIO.- *Si f es μ-medible y no negativa, entonces*

$$f \in B^{*}_{+}.$$

DEMOSTRACION:

Desde luego, si $g \in B$ y $g \geqslant 0$, es μ-integrable, y por tanto μ-medible. Este hecho junto a las hipótesis, nos permite afirmar que $f \wedge g$ es μ-medible.

Pero $/f \wedge g/ = f \wedge g \leqslant g$, por lo que $f \wedge g$ es μ-integrable.

Por tanto, $f \wedge g$ es ϕ-sumable, con lo que concluimos que

$$f \in B^{*}_{+}$$

3.17. COROLARIO.- *Si $A \subset X$ es μ-medible (lo que significa, por definición, que χ_A es μ-medible), se tiene que $\chi_A \in B^{*}_{+}$.*

La demostración es inmediata a partir del corolario 3.16. Ni que decir tiene que este corolario lo que afirma es que los conjuntos μ-medibles son también ϕ-medibles.

3.18. COROLARIO.- *Si f es μ-medible, $f^{+}, f^{-} \in B^{*}_{+}$.*

Es elemental a partir del corolario 3.16.

3.19. NOTA: Cabe preguntarse si una función ϕ-*medible* (lo que por influencia del empleo de la integral abstracta de Lebesgue significa, por definición, que es diferencia de dos funciones de $\mathcal{B}_+^*$) es también μ-medible. La respuesta a esta cuestión es negativa, pues incluso una función ϕ-sumable no tiene por qué ser μ-medible como prueba el siguiente ejemplo.

EJEMPLO:

Consideremos $X = N$ y $\mathbb{A} = P(N)$. Para cada $A \in \mathbb{A}$, se define $\mu(A) = +\infty$ si A es infinito.

$$\text{Y } \mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{(n+1)^2} \qquad \text{si } A \text{ es finito.}$$

Con estas condiciones es fácil probar que μ es finitamente aditiva y no es completamente aditiva.

En efecto:

a) Veamos que μ es finitamente aditiva.

Siendo $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 \cap A_2 = \Phi$, se tiene que si algún A_i $(i = 1, 2)$ es infinito también A es infinito, y por tanto

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = +\infty .$$

En cambio, si A_1 y A_2 son finitos, A es finito, y entonces

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) < +\infty .$$

b) Probemos ahora que μ no es σ-aditiva.

Para ello, si tomamos $A_n = \{n\}$, desde luego $\bigcup_{n\in N} A_n = N$, y sin embargo

$$\mu(N) = +\infty \neq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

Nótese que $A^* = A = \bar{A}$ y el Φ es el único conjunto μ-nulo.

c) Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una función μ-nula, el conjunto $\{n\in N;\ /a_n/ > \varepsilon\}$ es de medida nula para todo $\varepsilon \in R^+$. Resulta así que, para cada $\varepsilon \in R^+$, el conjunto $\{n\in N;\ /a_n/ > \varepsilon\} = \Phi$

Con ello, $a_n = 0$ para todo $n\in N$.

La única función nula es la sucesión constantemente igual a cero. Las funciones μ-s mples son las sucesiones casinulas. Asímismo, las funciones ϕ-simples son también las casinulas. Y así, $B = S$.

Además, $\mu^* = \mu$ evidentemente.

Si $\{a_n\}_{n\in N}$ es una sucesión casinula, se tiene

$$\phi(\{a_n\}_{n\in N}) = \int \{a_n\}_{n\in N}\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^2}.$$

Es inmediato que (N, B, ϕ) es un sistema de Daniell-Bourbaki. O sea, para cada $\varepsilon \in R^+$, existe s_ε tal que

$$0 \leqslant s_\varepsilon \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad \phi(s_\varepsilon) < \varepsilon \quad (1)^*$$

Sabemos que, para cada $n\in N$, $\inf\{s(n);\ s\in \mathcal{D}\} = 0$. Sea s_0 un elemento de $\mathcal{D}$; existirá $n_0 \in N$ tal que $s_0(n) = 0$, $n \geqslant n_0$.

Existirán $s_1, s_2, \ldots, s_{n_0} \in \mathcal{D}$ tales que, para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n_0 - 1$, es

$$s_{i+1}(i) < \frac{\varepsilon}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}}.$$

$(1)^*$. $\mathcal{D}$ sistema dirigido inferiormente de funciones casinulas, no negativas de límite cero.

Sea $\sigma = s_0 \wedge s_1 \wedge s_2 \wedge, \ldots, \wedge s_{n_0}$.

Existirá $s_\varepsilon \in \mathcal{D}$ tal que $s_\varepsilon \leqslant \sigma$, por ser $\mathcal{D}$ filtrante inferiormente. Con ello,

$$\phi(s_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n_0 - 1} \frac{s_\varepsilon(i)}{(i+1)^2} \leqslant \sum_{i=0}^{n_0 - 1} \frac{s_{i+1}(i)}{(i+1)^2} < \varepsilon \text{ como queríamos.}$$

Ahora bien, si f representa la sucesión constantemente igual a uno, obviamente $f \in B^+ = B_+$. Con lo que es fácil ver que

$$I(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

Resulta así que f es ϕ-integrable. En cambio, ninguna sucesión $\{g_i\}_{i \in N}$ de sucesiones casinulas puede tender a f en μ-medida, ya que

$$A_\varepsilon^i = \{ n \in N;\ /f(n) - g_i(n)/ > \varepsilon \} = \{ n \in N;\ /1 - g_i(n)/ > \varepsilon \}.$$

tiene μ-medida, y por tanto μ^*-medida igual a $+\infty$, por ser cada g_i casi-nula (si $\varepsilon < 1$). Por consiguiente, la sucesión $\{\mu^*(A_i)\}_{i \in N}$ tiende a $+\infty$ para todo $\varepsilon \in]0, 1[$.

Se puede dar una interpretación intuitiva que justifique por qué este ejemplo es adecuado: si se hubiése definido la medida de una parte cualquiera A de N por

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{(n+1)^2},$$

al ser la familia $\{\frac{1}{(n+1)^2}\}_{n\in N}$ sumable, μ sería una medida σ-aditiva, y entonces, 1 sería μ-integrable según es fácil ver.

Es muy frecuente en la literatura sobre el tema este hecho, que hace posible que conjuntos de medida finita se consideren de medida infinita.

El lector habrá observado que tanto por el método conjuntista como por el método funcional, sólo intervienen para el concepto de función simple los conjuntos de medida finita; pero, aunque queda un poco más encubierto, en la definición de convergencia em medida no es independiente el papel que juegan los conjuntos de μ-medida (ó μ^*-medida) igual a $+\infty$. El ejemplo que precede, con la variante que podía haberse introducido para definir una medida σ-aditiva, permite ver con claridad que no sólo los conjuntos de medida finita intervienen para decidir la μ-integrabilida. En cambio, sólo los conjuntos de μ-medida finita intervienen en la definición de ϕ-integrabilidad.

Esta particularidad pensamos que es un dato clave para obtener ejemplos y contraejemplos.

4. COMENTARIOS FINALES.

4.1.- Es de notar que Loomis (ref. 38, p. 178) sugiere en su trabajo la posibilidad de asignar como integral a cada función $f \geq 0$ perteneciente a B_+^*, no $\bar{I}(f)$, sino $\sup\{I(f \wedge g);\ g \in B_0\}$.

Por ese camino obtiene su teoría de las integrales de Riemann impropias, ampliamente desarrollada en lo que se refiere a teoremas de representación en el trabajo citado.

No nos ocupamos de la diferencia que supone dar una definición tipo Pfeffer o una definición tipo Loomis, que tendría eventualmente que analizarse al estudiar procesos de iteración, ya que esto presupone el manejo de teoremas de representación de un funcional a partir de una medida finitamente aditiva.

Lo que sí se aprecia a primera vista es que el $\sup\{I(f \wedge g);\ g \in B_0\}$, que es menor o igual que $\underline{I}(f)$ no tiene por qué coincidir con $\bar{I}(f)$.

4.2.- Cabe pensar que podríamos haber asociado a μ un sistema de Loomis cuyo retículo vectorial incluyese las funciones μ-nulas. Desde luego, de esta forma se habría conseguido que automáticamente toda función μ-nula fuese también ϕ-nula. Pero al menos hay una seria objección, que es definitiva: en tal caso, las funciones del retículo vectorial no tendrían por qué ser acotadas y, por ejemplo, el teorema de continuidad no sería aplicable. El lector puede repasar las demostraciones y darse cuenta que es esencial el empleo de dicho teorema.

4.3.- Como queda visto, el método funcional permite hacer una prolongación a una clase de funciones que no tienen por qué ser finitas c.p.d., mientras que el método de Dunford-Schwartz, aun si se modifica para admitir la asignación de integral a funciones numéricas, la naturaleza de la convergencia en medida obliga a manejar funciones finitas c.p.d.

Aparte del interés que tiene el comparar la técnica funcional con la técnica conjuntista, el método funcional seguido tiene interés y utilidad de por sí. A título de ejemplo, consideremos la eventualidad de tener como dato un sistema de Loomis del que no se sepa encontrar efectivamente una medida finitamente aditiva μ que tenga a $\mathcal{B}$ como conjunto de funciones simples. Evidentemente en esta situación es útil saber prolongar ϕ automáticamente.

4.4.- Puede suceder que una medida finitamente aditiva μ, que no sea σ-aditiva, dé lugar a un sistema de Loomis que verifique la condición de Bourbaki. Tal sucede en el ejemplo de la nota 3.19.

4.5.- El apartado anterior nos obliga a poner de manifiesto que puede haber medidas finitamente aditivas cuyo sistema de Loomis asociado no es siquiera de Daniell. Así lo muestra el siguiente

EJEMPLO:

Sea $X = \mathbb{N}$, y $\mathbb{A} = \{A \in \mathbb{N};\ A$ es finito ó $\mathbb{N}-A$ es finito$\}$

a) Veamos que $\mathbb{A}$ es un álgebra.

i) $\Phi, \mathbb{N} \in \mathbb{A}$. Evidente.

ii) Si $A \in \mathbb{A}$, es $\mathbb{N}-A \in \mathbb{A}$. Evidente.

iii) Si $A, B \in \mathbb{A}$, es $A \cap B \in \mathbb{A}$.

En efecto, si uno de los dos conjuntos es finito, es inmediato. Y si A y B son complementarios de un A_0 y B_0 respectivamente, A_0 y B finitos, será : $\mathbb{N}-(A \cap B) = A_0 \cup B_0$ finito; luego en todo caso vale la propiedad de intersección.

iv) Si $A, B \in \mathbb{A}$, es $A-B \in \mathbb{A}$.

Se deduce trivialmente de la expresión

$$A-B = A \cap (\mathbb{N}-B).$$

v) Si $A, B \in \mathbb{A}$, es $A \cup B \in \mathbb{A}$.

En efecto, si los dos son finitos, es evidente. Y si uno de los dos es el complementario de un finito, el complementario de $A \cup B$ también es finito. En todo caso vale la propiedad unión.

b) Definamos $\mu: \mathbb{A} \to R_0^+$ por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito} \\ 1 & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

Veamos que μ es finitamente aditiva.

i) $\mu(\Phi) = 0$. Evidente.

ii) Si $A, B \in \mathbb{A}$, tales que $A \cap B = \Phi$, se tiene que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

En efecto, si A y B son finitos es

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Si uno de los dos, por ejemplo A, es infinito, también $A \cup B$ es infinito. Pero como $B \cap A = \Phi$ se cumple que $(N-B) \cup (N-A) = N$. Ya que $N-A$ es finito, debe ser $N-B$ infinito, y por lo tanto B será finito (conviene tener presente que si B pertenece a $\mathbb{A}$, o B, o su complementario han de ser finitos).

En este caso es $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 1$.

c) Sin necesidad de caracterizar el conjunto de las funciones μ-nulas, ni el conjunto de las funciones μ-simples (se puede comprobar que son respectivamente el conjunto de las sucesiones casinulas, y el conjunto de las sucesiones convergentes), es fácil observar que una sucesión casinula es una función μ-nula, y que una sucesión casiconstante es una función μ-simple cuya integral es el límite de la sucesión. El sistema de Loomis asociado a μ no puede ser de Daniell, ya que el subsistema de sucesiones casiconstantes no lo es, según vimos.

4.6.- Conviene llamar la atención sobre el hecho de que se podía haber asociado a una medida finitamente aditiva μ como espacio de funciones simples, con la integral elemental natural, el espacio $\mathcal{B}'$ obtenido considerando combinaciones lineales de fuciones características de conjuntos μ-medibles finitos, y no sólo pertenecientes a $\mathbb{A}$. Este espacio será adecuado (por no decir obligado) para el estudio de las iteraciones;

$$\mu \to \phi_\mu \to m(\phi_\mu) \quad y \quad \phi \to m_\phi \to \phi(m_\phi),$$

a que nos referimos con más detalle en 4.7.

A primera vista, ya que $\mathcal{B}\subset\mathcal{B}'$, puede parecer que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'_0$ y $\mathcal{B}^*_+ \subset \mathcal{B}'^*_+$. Pero no es inmediato, a priori, siquiera que $\mathcal{B}_+ \subset \mathcal{B}'_+$. Por supuesto, es trivial que $\mathcal{B}^+ \subset \mathcal{B}'^+$.

4.7.- Por último, queremos señalar algunas cuestiones importantes sugeridas por el tema que hemos desarrollado, aparte de las suscitadas en los comentarios 4.1 y 4.6.

1) Cabe estudiar, si se parte de una medida μ finitamente aditiva, y se considera el funcional de Loomis correspondiente ϕ_μ, qué relación hay entre μ y la medida $m(\phi_\mu)$ asociada a dicho fun-

cional. Igualmente cabe estudiar la relación entre un funcional de Loomis ϕ y el funcional de Loomis asociado a la medida m_{ϕ} asociada a ϕ. Para abordar tal cuestión, tendrían gran interés buena parte de los trabajos a que nos referíamos en la introducción, sobre teoremas de representación de funcionales.

Pensamos que, por analogía con lo que sucede para el caso de que la medida inicial sea σ-aditiva, o que el funcional inicial sea de Daniell, tal como viene exhaustivamente tratado en [13] , habría que introducir el concepto de saturación y de completitud de una medida finitamente aditiva, para que el método conjuntista y el funcional fueran en cierto sentido isomorfos, puesto que para una medida σ-aditiva son conceptos que intervienen necesariamente en el estudio de la iteración.

Quizás abusemos, en una expresión vaga -o si se quiere coloquial-, del término isomorfismo; nos remitimos a los trabajos de Rodriguez-Salinas (ref. 46) y sus comentarios y precisiones acerca del isomorfismo, planteado en este tema, por Kakutani (ref. 36), para señalar que advertimos el cuidado con que debe emplearse el término.

2) Sería de desear que se pudiése hablar de una integral abstracta de Lebesgue a partir de una medida finitamente aditiva. El estudio de una integral abstracta de Lebesgue a partir de una

medida viene muy bien tratado en [13], que la emplea esencialmente en su tratamiento de la iteración, y sobre todo en [9].

¿Cuál es la principal dificultad? Creemos que la definición de función medible relativa a un semianillo de partes de un conjunto. Pues obsérvese que en la definición de función medible para la integral abstracta de Riemann a partir de una medida finitamente aditiva μ, se emplea de manera esencial dicha medida μ, (aparte de los trabajos ya citados, destacamos especialmente el [21]); y en cambio, cuando se tiene una σ-álgebra de conjuntos, el concepto de función medible relativo a tal σ-álgebra, independientemente de la particular medida σ-aditiva que se considere. En la bibliografía consultada no hemos visto tratado el tema. Para concretar este comentario, nos referiremos a una idea que viene indicada en [16], en donde sugiere una definición del tipo siguiente: Recordemos que si $\mathbb{A}$ es un σ-álgebra de subconjuntos de X y f una función numérica definida en X, se dice que f es medible si y sólo si la imagen inversa de cualquier boreliano pertenece a $\mathbb{A}$. Y el sistema de los borelianos es la mínima σ-álgebra de subconjuntos de $\bar{R}$ que contiene a los intervalos, propios o impropios, de R.

Pues bien, si $\mathbb{A}$ es un semianillo de subconjuntos de X, cabría considerar el mínimo semianillo de partes de $\bar{R}$ que contiene a los intervalos. De esta forma, una función numérica definida en X se llamaría medible si y sólo si, la imagen inversa de un elemento culaquiera de ese semianillo de partes de $\bar{R}$ fuése un elemento del semianillo $\mathbb{A}$.

Ni que decir tiene que, cualquier definición que se dé, deberá ajustarse en orden a que algunas propiedades formales de las funciones medibles se conserven: por ejemplo, la suma de funciones medibles tiene que ser medible.

3) No es necesario citar todos los tratados de teoría de la medida que dedican algunos capítulos a estudiar el caso en que el espacio base del espacio de medida esté dotado de una topología, lo cual dá lugar a toda una teoría muy desarrollada si la topología citada es localmente compacta, y bastante menos si se parte de hipótesis más débiles (en [46] viene muy bien resumida la diferencia entre uno y otro caso).

Por otro lado, ya hemos citado trabajos acerca de funcionales definidos es un espacio vectorial de funciones reales continuas sobre un espacio topológico. En líneas generales pueden clasificarse dos grupos: los que estudian el caso de que el espacio base de un sistema de Loomis $(X,\mathcal{B},\phi)$ tenga una topología localmente compacta de manera que las funciones de $\mathcal{B}$ sean continuas; y los que estudian qué topología se puede definir en X que haga continuas las funciones de $\mathcal{B}$, y de modo que X resulte ser localmente compacto (a priori, por supuesto, no tiene por qué existir tal topología). En uno y otro caso, puede estudiarse qué topología se da a $\mathcal{B}$ para que ϕ sea continuo.

Vamos a citar especialmente una cuestión que puede estudiarse, generalizando resultados conocidos (en [26] puede verse con detalle el tema que resumimos).

Si se parte de un sistema de Loomis $(X,\mathcal{B},\phi)$ tal que los elementos de $\mathcal{B}$ son funciones reales acotadas, que $\mathcal{B}$ es stoniano y separa puntos en X, y que $X=\hat{X}$, la mínima topología en X que hace continuas a las funciones de $\mathcal{B}$ coincide con la topología inducida en X, por una compactificación de X: la engendrada por el álgebra de Banach de las funciones reales acotadas en X que tiene por generadores a 1, y a los elementos de $\mathcal{B}$ (el espacio compacto de sus ideales maximales es el espacio compacto que, salvo identificación, contiene al X, pedido). Puesto que el proceso de prolongación que hemos desarrollado no exige para el sistema de Loomis todas esas condiciones, y puesto que en la bibliografía consultada se emplean muchas condiciones, nos parece interesante estudiar las condicione mínimas.

5) Ya Hewitt en 1952 (ref. 35) hablaba de "enorme literatura" acerca de teoremas de representación del tipo de Riesz para funcionales no necesariamente de Daniell. Casi treinta años después se observa que los teoremas de representación siguen apare-

ciendo, y no son, por supuesto, repeticiones ni meras generalizaciones. Y, dado que todos esos trabajos tienen el denominador común de que representan el funcional ϕ definido en $\mathcal{B}$ mediante una integral abstracta de Riemann respecto de una medida finitamente aditiva, se puede pensar en dos tipos de generalizaciones: a) representar el funcional prolongado a la clase $\mathcal{B}_0$, b) representar el funcional (en $\mathcal{B}$ o en $\mathcal{B}_0$), empleando una previa integral abstracta de Lebesgue.

5) Pensamos que nuestro trabajo permite su aplicación al estudio de funcionales positivos en espacios de sucesiones. Como ejemplo concreto citemos el de un espacio de sucesiones con límite generalizado monótono.

Los cinco temas tratados brevemente, y que no hemos estudiado en esta memoria, nos parece que no son triviales, ni poco extensos. En todo caso, creemos que queda justificado su interés.

BIBLIOGRAFIA

Textos:

[1] ASH R., *Measure, integration, and functional analysis.* Academic Press, 1972.

[2] BERBERIAN S.K., *Measure and integration.* Chelsea, 1965.

[3] BICHTELER K., *Integration theory.* Springer-Verlag, 1973.

[4] BOURBAKI N., *Intégration. Capítulo I.* Hermann, 1965.

[5] CRISTESCU R., *Ordered vector spaces an linear operators.* Abaeus Press. Tumbridge Wells, Kent, 1976.

[6] DIEDONNE J., *Elementos de análisis.* Reverté, 1977.

[7] DUNFORD N., SCHWARTZ J.T., *Linear operators. Part. I.* Interscience Publishers Inc., 1963.

[8] HALMOS P., *Measure Theory.* Springer-Verlag, 1974.

[9] HEWITT E., STROMBERG K., *Real and abstract analysis*. Springer-Verlag, 1969.

[10] JACOBS K., *Measure and integral*. Academic Press, 1968.

[11] LOEVE M., *Probability Theory*. D-Van Nostrand Company, 1960.

[12] MUNROE M.E., *Measure and integration*. Second ed., Addison Wesley, 1971.

[13] PFEFFER W., *Integral and measure*. Marcel Dekker, Inc.,1976.

[14] SEGAL I.E., KUNZE R.A., *Integrals and operators*. Springer-Verlag, 1968.

[15] SHILOV G. E., GUREVICH B.L., *Integral, measure and derivative*. Prentince Hall, Inc., 1966.

[16] TAYLOR, *Introduction to functional analysis*. John Wiley, 1958.

[17] VERLEY J.L., *Theorie elementaire de l'intégration*. Les cours de Sorbonne, 1968.

[18] WEIR A., *General integration and measure*. Cambridge University Press, 1974.

Artículos:

[19] APPLING W.L.D., *Summability of real-valued set function.* Rev. Mat. Parma (2), 77-100,(1967).

[20] ARANS R., *Representation of functionals by integrals.* Duke Math. J., 17, 499-506, (1950).

[21] BARTLE R.G., *A general bilinear vector integral.* Stud. Math., 15, 337-352, (1956).

[22] BAUER H., *Sur l'equivalence des théories de l'intégration selon N. Bourbaki et selon M.H. Stone.* Bull. Soc. Math. France, 85, 71-75, (1957).

[23] BROOKS J.K., *Interchange of limit theorems for finitely additive measures.* Rev. Roum. Math. Pures et appl., Tome XIX, 6, 731-744, (1974).

[24] DANIELL P.J., *A general form of integral.* Ann. of Math.(2), 19, 279-294, (1917).

[25] FINETTI De B., *Sulla teoria astratta della misura et dele' integrazione.* Ann. di Mat. pura ed appl. (serie IV), 40, 307-319, (1955).

[26] FLACHSMEYER J., TERPE F., *Some applications of the theory*

of compactifications of topological spaces and measure theory. Russian Math. Surveys 32, 5, 133-171. (1977).

[27] FRECHET M.M., *Sur l'entégrale d'une fonctionnelle étendue a un ensemble abstrait*. Bull. Soc. Math. de France, 43, 248-265, (1915).

[28] GIESY D.P., *A finite-valued finitely additive un-bounded measure*. Amer. Math. Monthley , 77, 508-510, (1970).

[29] GOULD G.G., *A Stone-Cech-Alexandroff-type compactification and its application to measure theory*. Proc. London Math. Soc. (3), 14, 221-224, (1964).

[30] GOULD G.G., *The Daniell-Bourbaki integral for ninitely additive measures*. Proc. London Math. Soc. (3), 16, 297-320, (1966).

[31] GRINBLAL L.S., *Compactifications of spaces of functions and integration of functionals*. Trans. Amer. Math. Soc., 217, 195-223, (1976).

[32] GUNZLER H., *Linear functionals which are integrals*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano XLIII, 167-176, (1973).

[33] GUNZLER H., *Integral representations with prescribed lattices*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 45, 107-168, (1975).

[34] HEIDEN UWE and Der, *On the representation of linear functionals by finitely additive set functions.* Arch. der Math. 30, 210-214, (1978).

[35] HEWITT E., *Integral representation of certain linear functionals.* Arkiv for Mat., 2, 269-282, (1952).

[36] KAKUTANI S., OSTOBY J., *Concrete representation of abstract (M)-spaces (a caracterization of the space of continuons fonctions.* Ann. Math., 42, 4, 994-1028, (1941).

[37] KNOWLES J.D., *Measures on topological spaces.* Proc. London. Math. Soc., (3), 17, 139-156, (1967).

[38] LOOMIS L.H., *Linear functionals and content.* Amer. J. Math. 76, 168-182, (1954).

[39] LOS J., MARCZEWSKI E., *Extensions of measures.* Fund. Math. 36, 267-276, (1944).

[40] MALONE J., *Funstions and integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. 173, 421-427, (1972).

[41] MCGILL P., *Integration in vector lattices.* J. London Math. Soc. (2), 11, 347-360, (1975).

[42] MERTENS J.F., *Integrations des measures non dénombrable-*

ment additives: una géneralisation du lemme de Fatou et du théoreme de convergence de Lebesque. Ann. Soc. Sci. de Bruxelles, 84, II, 231-239, (1970).

[43] METZLER R.C., *Positive linear functions, integration, and Choquet's theorem.* Pac. J. of Math., 60,1, 277-296, (1975).

[44] METZLER R.C., *Uniqueness of extensions of positive linear functions.* Pac. J. of Math., 74, 1, 179-182, (1978).

[45] MUNSTER M., *Théorie génerale de la measure et de l'intégration.* Bull. Soc. R. Sci. de Liége, 11,12, 526-567, (1974).

[46] RODRIGUEZ SALINAS PALERO B., *Teoría de la medida sobre espacios topológicos no localmente compactos.* Rev. Mat. Hisp. Amer. XXXX,III, (1973).

[47] STONE M.H., *Notes on integration, IV.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35, 50-58, (1949).

[48] SULTAN A., *A general measure extension procedure.* Proc. Amer. Math. Soc., 69, 37-45, (1978).

[49] WRIGHT J.D.M., *The measure extension problem for vector lattices.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 21,4, 65-85, (1971).

[50] YOSIDA K., HEWITT E., *Finitely additive measure.* Trans. Amer. Math. Soc., 72, 46-66, (1952).

I N D I C E

CAPITULO II:

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL Y DE LA MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA ASOCIADAS A UN SISTEMA DE LOOMIS.

CAPITULO III:

METODO FUNCIONAL DE CONSTRUCCION DE LA INTEGRAL RESPECTO DE UNA MEDIDA FINITAMENTE ADITIVA. COMPARACION CON EL METODO CONJUNTISTA.