



VOL. 19, Nº2(mayo-agosto2015)

ISSN 1138-414X (edición papel)

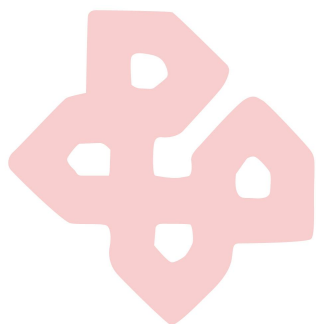
ISSN 1989-639X (edición electrónica)

Fecha de recepción 4/03/2015

Fecha de aceptación 1/09/2015

## UN MODELO PARA EL ANÁLISIS DE OBJETOS MATEMÁTICOS EN LIBROS DE TEXTO CHILENOS: SITUACIONES PROBLEMÁTICAS, LENGUAJE Y CONCEPTOS SOBRE PROBABILIDAD

*A model for analysing mathematical objects in chilean textbooks: problematical situations, language and concepts of probability*



\*Claudia Vásquez Ortiz y \*\*Ángel Alsina Pastells

\*Pontificia Universidad Católica de Chile, \*\*Universidad de Girona

E-mail: [cavasque@uc.cl](mailto:cavasque@uc.cl); [angel.alsina@udg.edu](mailto:angel.alsina@udg.edu)

### Resumen:

*En este artículo se presenta un modelo para el análisis del tratamiento otorgado a la probabilidad en libros de texto chilenos de educación primaria. Para ello utilizamos herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática que han permitido indagar en los objetos matemáticos (situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos) asociados al estudio de la probabilidad. Estos objetos se analizan a partir de su diversidad de significados, con base en el currículo oficial chileno. Los resultados muestran que la probabilidad es abordada, principalmente, desde un enfoque intuitivo, para luego incluir de manera progresiva los significados frecuencial y clásico, con un leve acercamiento al significado subjetivo.*

**Palabras clave:** *Enfoque Ontosemiótico, objetos matemáticos, probabilidad, libro de texto*

**Abstract:**

*This article presents a model for analysing how probability is treated in Chilean textbooks in primary education. In order to do this, we have used theoretical tools from the Onto-semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction which have enabled us to identify mathematical objects (problematical situations, language and concepts) associated with the study of probability. These objects are analysed according to the diversity of their meanings, based on the official Chilean curriculum. The results show that probability is treated mainly from an intuitive perspective, with frequency and classical meanings then being included gradually, and with a rather superficial approach to subjective meaning.*

**Key Words:** *Onto-Semiotic Approach, mathematical objects, probability, textbooks*

## 1. Introducción

Existe un acuerdo generalizado sobre la necesidad de desarrollar el pensamiento probabilístico tempranamente, dadas sus múltiples aplicaciones. Esta tendencia, que se ha reflejado en los currículos de matemática de muchos países, entre ellos Chile, cobró fuerza desde que el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) incluyó, a “Datos y Azar” como área temática en el Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics (NCTM, 1989), reforzando esta iniciativa en los Principles and Standard for School Mathematics (2000), que contemplan que los programas de enseñanza deberían capacitar a los niños para aprender conocimientos relacionados con análisis de datos y probabilidad a partir del nivel Pre-K (tres años). Este cambio requiere profesores capaces de implementar los nuevos currículos, que cuenten con herramientas disciplinares y didácticas para poder introducir progresivamente el objeto matemático “probabilidad” a partir de sus distintos significados. Sin embargo, muchos profesores de educación primaria no han tenido formación sobre probabilidad y su didáctica (Vázquez & Alsina, 2014), por lo que se apoyan en los libros de texto para compensar este déficit formativo, conformándose éstos en un recurso didáctico importante a la hora de interpretar el currículo y seleccionar tareas matemáticas para los alumnos (Stylianides, 2009). Lo anterior, convierte al libro de texto en un recurso preponderante a la hora de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Remillard, 2000), ya que expone de manera concreta una transposición didáctica del saber (Chevallard, 1991). Pese a esta importancia, que convierte al libro de texto en un agente fundamental para enseñar probabilidad, las investigaciones sobre el tratamiento otorgado a la probabilidad en libros de texto de primaria son todavía muy escasas. Recientemente, Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) estudian el lenguaje de la probabilidad en dos series de libros de texto españoles, y en sus resultados destacan la diversidad y predominancia de expresiones verbales, sobre todo las de tipo coloquial, y la presencia de los diversos significados de la probabilidad.

Desde esta perspectiva es que surge esta investigación, la cual tiene por finalidad analizar el tratamiento otorgado a la probabilidad en libros de texto de educación primaria chilenos, dada la reciente incorporación del eje de “Datos y probabilidades” en el currículo escolar (Mineduc, 2012). Concretamente, se analiza la presencia de la probabilidad a partir de sus significados para detectar las fortalezas y debilidades de los textos escolares y disponer de criterios objetivos para su elección. Para realizar este análisis se asume el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) pues este proporciona un modelo integrado para el análisis del conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje.

## 2. Fundamentación teórica

Dado que el principal objetivo de este trabajo es presentar un modelo para el análisis del tratamiento otorgado a la probabilidad en libros de texto chilenos de educación primaria, es que consideramos necesario abordar dicho propósito desde dos campos de estudios que otorgan el fundamento teórico a esta investigación: 1) Los distintos significados vinculados a la interpretación del concepto probabilidad en el contexto escolar, que en la actualidad coexisten y no han estado exentos de debates filosóficos que, en su búsqueda por dar respuesta a situaciones problemáticas, han contribuido al avance de la probabilidad (Batanero, Henry y Parzysz, 2005); y2) El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, pues este lente teórico brinda potentes herramientas para el análisis de los objetos matemáticos vinculados a la probabilidad presentes en los libros de texto.

### 2.1 Significados de la probabilidad

En el desarrollo histórico-epistemológico de la probabilidad, coexisten distintos significados que cobran gran relevancia en el contexto de la matemática escolar (intuitivo, laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático) (Figura 1). Shaughnessy (1992) expone que ello se debería a que el desarrollo de la probabilidad, en comparación con otras ramas de la matemática, es relativamente reciente.



Figura 1 *Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar*  
Fuente: Elaboración propia

Tales significados junto a otros significados externos al contexto de la matemática escolar han llevado al surgimiento de la probabilidad, permitiendo fundamentar y desarrollar la Teoría de la Probabilidad, que otorga modelos para fenómenos donde la incertidumbre en los resultados es relevante, posicionándola como una de las ramas más fecundas de la matemática (Godino et al., 1987).

- Significado intuitivo

A principios del siglo XVII, se inicia la cuantificación de los grados de creencia para comparar la posibilidad de ocurrencia de distintos sucesos. No obstante, las ideas intuitivas se remontan a siglos anteriores; y sus vestigios están ligados a los juegos de azar. Actualmente se utilizan diversos términos (posible, previsible, chance, presumible, etc.) de nuestro lenguaje común para cuantificar y hacer referencia a la incerteza o certeza de determinados sucesos, y expresar, por medio de frases coloquiales, el grado de creencia en relación a sucesos inciertos (Batanero, 2005). Bajo esta perspectiva, los juegos de azar y el lenguaje

asociado a la cuantificación de la incertidumbre pueden ser de utilidad para iniciar el estudio de la probabilidad en la educación primaria a partir de las intuiciones de los niños.

- Significado laplaciano

La primera definición clásica de probabilidad fue publicada por Moivre en *Doctrine of Chances* (de Moivre, 1967/1718):

Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances con la que el suceso podría ocurrir y el denominador es el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (p.1)

Definición que más tarde fue reformulada por Laplace, quien en 1814 enuncia la Regla de Laplace, según la cual la probabilidad de un suceso es “la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables” (Laplace, 1985/1814, p. 28). Hoy esta definición aparece en muchos textos escolares dada su simplicidad para el cálculo de probabilidades. Sin embargo, en tiempos de Laplace fue considerada inadecuada, pues “además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidad de algunos sucesos sencillos” (Godino, Batanero y Cañizares, 1987, p. 21). Asimismo, según Lecoutre (1992), no puede ser aplicada en experimentos con un número infinito de posibilidades o cuando el espacio muestral es finito pero no simétrico, es decir, no cumple con la condición de equiprobabilidad, por lo que puede provocar el sesgo de la equiprobabilidad.

- Significado frecuencial

Dados los problemas que presentaba la definición de probabilidad propuesta por Laplace, es que en 1713 Bernoulli plantea la asignación de probabilidades de un suceso a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones del experimento, lo cual permitiría estimar la probabilidad del suceso observado. Este planteamiento fue aceptado por la comunidad científica de la época por su objetividad al despojar a la probabilidad de factores subjetivos, ligándola a la demostración práctica por medio de la experimentación (Godino et al., 1987). Este teorema, denominado Ley de los Grandes Números, indica que “la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones, se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas” (Batanero, 2005). Así, la probabilidad de ocurrencia es la frecuencia relativa con la que puede esperarse que ocurra un suceso, si fuera repetido muchas veces. No obstante, de acuerdo con Batanero, Henry y Parzysz (2005) este significado presenta ciertas limitaciones, por ejemplo: 1) la imposibilidad de realizar un experimento una infinidad de veces, bajo las mismas condiciones, para poder determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso cualquiera; 2) no permite obtener un valor exacto, sino aproximaciones; 3) se desconoce la cantidad necesaria de ensayos que permiten una buena estimación; y 4) es inaplicable a sucesos que si bien son aleatorios, son irrepetibles. Sin embargo, pese a estas limitaciones, presenta potencialidades para su estudio en el aula, por ejemplo la utilización de software para simular experimentos aleatorios.

- Significado subjetivo

Se fundamenta en la confianza que una persona deposita sobre la verdad de una determinada proposición, por lo que no está unívocamente determinada (Godino et al., 1987). Este significado se da a conocer con el teorema de Bayes en 1763, que describe la probabilidad subjetiva como grados de creencia personal en que la probabilidad es asignada a un suceso por una persona en particular, que puede ser bastante diferente de la probabilidad subjetiva que estipula otra persona. En este caso, la probabilidad dependerá del observador y, de lo que éste conoce del suceso en estudio. La contribución de Bayes fue un elemento clave en el desarrollo de la inferencia estadística, que emplea la interpretación subjetiva. Sin embargo, su presencia en los currículos de educación primaria es prácticamente inexistente.

- Significado axiomático

Es durante el siglo XX que la probabilidad alcanza el carácter de teoría matemática formalizada, debido principalmente a Borel y Kolmogorov, quienes cristalizan a la probabilidad como una teoría matemática que puede utilizarse para describir e interpretar la realidad de fenómenos aleatorios (Batanero, 2005). Borel por su parte concibe la probabilidad como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida. Mientras que Kolmogorov, a partir de las ideas de Borel, la teoría de la medida y la teoría de conjuntos, define una axiomática satisfactoria que es aceptada por las diferentes escuelas, independientemente de la interpretación filosófica (Batanero y Díaz, 2007). Bajo este enfoque no se define explícitamente cómo calcular probabilidades, sino que se establecen las reglas que dicho cálculo debe satisfacer. Debido a la rigurosidad matemática que este significado conlleva, se desaconseja su estudio en la educación primaria, pues en esta etapa los estudiantes no tienen las herramientas conceptuales para alcanzar una comprensión de la probabilidad desde este significado (Godino et al., 1987).

La comprensión de estos significados, por parte de los profesores llamados a enseñar probabilidad, cobra gran relevancia para orientar el proceso de enseñanza de manera progresiva que se apoye en las ideas intuitivas de los alumnos sobre azar y probabilidad para luego incorporar e integrar de manera gradual los diversos significados e ir construyendo poco a poco el concepto probabilidad. Para ello, de acuerdo con Steinbring (1990) y Batanero et al. (2005) es fundamental que los profesores al momento de enseñar probabilidad adopten una perspectiva de modelización en que sus significados se complementen, pues una comprensión adecuada del concepto no puede limitarse solo a uno de ellos.

## 2.2 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

Este enfoque es un referente teórico de la didáctica de la matemática que presenta un modelo integrado de puntos de vista y nociones teóricas para el análisis del conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Para ello, adopta una perspectiva global que contempla: un modelo epistemológico basado en supuestos antropológicos y socioculturales; un modelo de cognición sobre bases semióticas; un modelo instruccional sobre bases socio-constructivistas, y un modelo sistémico-ecológico que estudia las interrelaciones de los modelos anteriores. Una de las principales características de este enfoque es su interés por los objetos matemáticos que emergen de las prácticas matemáticas involucradas en la resolución de una situación-problemática (problema, proyecto, ejercicio, tarea, etc.) que requiere de actividad matemática para su solución. Así, a partir del análisis de las prácticas matemáticas y de los sistemas de prácticas se responde a cuestiones como ¿qué es un determinado objeto matemático?, en nuestro caso ¿qué es la probabilidad? o ¿qué significa

una determinada expresión?, ya sea a nivel personal o institucional, pregunta que se responde por medio del análisis del sistema de prácticas involucradas en la resolución de una situación-problemática que realiza una persona (significado personal) o del análisis del sistema de prácticas de una institución (significado institucional) vinculadas con dicho objeto. Del acoplamiento progresivo entre los distintos tipos de significados institucionales y personales, se establecen relaciones entre la enseñanza y aprendizaje, que según Godino (2002) implican participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales (enseñanza), y supone apropiación de dichos significados (aprendizaje).

Desde esta perspectiva, Godino y su equipo proponen objetos matemáticos observables en un texto matemático (situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos). Esta tipología de objetos primarios consiste en:

- Situaciones-problemas: aplicaciones extra matemáticas, ejercicios, problemas, tareas, etc. que llevan a desarrollar una actividad matemática.
- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. empleados para enunciar o resolver problemas, sea de forma escrita, oral, gestual, etc.
- Conceptos-definición: definiciones y conceptos vinculados a un objeto matemático que los alumnos deben recordar y aplicar para solucionar un problema matemático.
- Propositiones: enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que deben ser utilizados para la resolución de problemas.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc. que los alumnos deben conocer y aplicar para la resolución de problemas.
- Argumentos: enunciados utilizados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o la solución de los problemas.

Para identificar los objetos matemáticos puestos en juego y los significados dados a los mismos en los procesos de formulación y resolución de problemas matemáticos específicos se asume la “Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados” (GROS) (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008), centrándonos específicamente en el análisis de las situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones, al ser éstos los objetos matemáticos primarios que deberían ser abordados en el estudio de la probabilidad en educación primaria.

### 3. Metodología

Para alcanzar el objetivo de este estudio que es presentar un modelo para el análisis del tratamiento otorgado a la probabilidad en libros de texto chilenos de educación primaria, se examinó una colección de libros de texto chilenos (Anexo 1), la cual conforma nuestra unidad de análisis. Esta colección de libros de texto para la asignatura de matemática de 1.º a 6.º de primaria, fue distribuida gratuitamente por el Ministerio de Educación chileno en 2013a más de 3 millones 200 mil estudiantes, y se encuentra conformada por seis libros de texto (uno para cada nivel) a los que haremos referencia como texto [A], [B], [C], [D], [E] y [F]. Para realizar este análisis de corte cualitativo, se consideraron algunos elementos de la metodología para el análisis de libros de textos propuesta por Cobo (2003), ya que dicha

metodología de acuerdo con el análisis de datos cualitativo, propone un proceso de análisis inductivo y cíclico, que considera los siguientes pasos(Cobo, 2003):

- Seleccionar aquellos capítulos en los que se aborda el tema de interés.
- Lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado que contienen: situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos presentes.
- Elaboración de tablas comparativas que recogen los elementos de significados presentes en los distintos libros de texto analizados.

Así, a partir de una adaptación de la metodología propuesta por Cobo (2003), hemos diseñado un modelo de análisis que considera las siguientes seis fases o pasos (Figura 2) para llevar a cabo nuestro análisis.

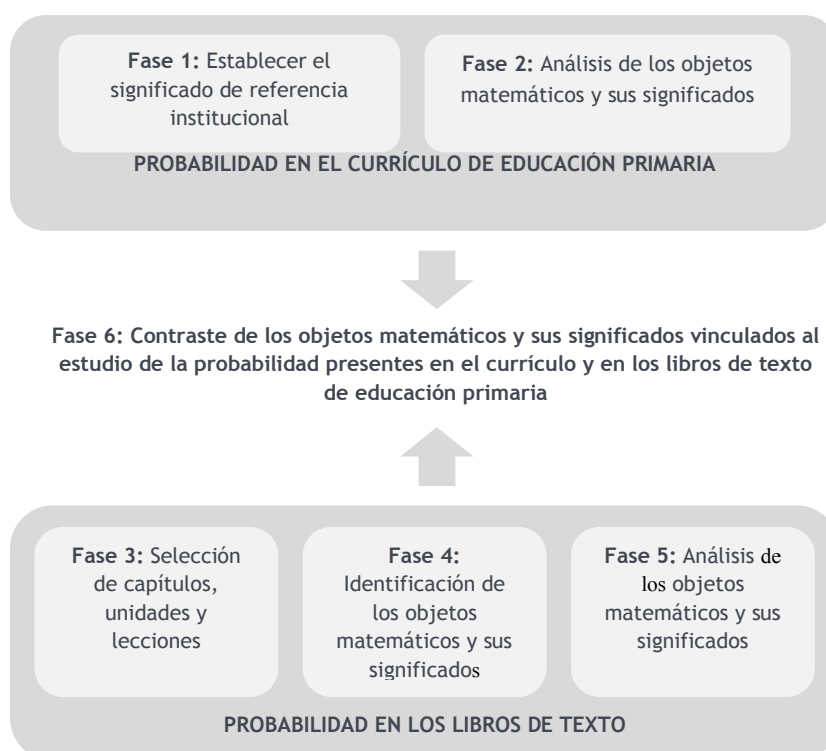


Figura 2 Modelo de análisis de los objetos matemáticos primarios y sus significados en libros de texto

#### 4. Resultados

En lo que sigue se da a conocer los resultados obtenidos en cada una de las fases que conforman el modelo de análisis de los objetos matemáticos primarios y sus significados en libros de texto chilenos de educación primaria. Si bien el análisis se centra en una colección de textos chilenos, los resultados pueden ser de gran interés tanto para la comunidad investigadora afín como para los docentes e investigadores chilenos.

#### 4.1 Fase 1: Estableciendo un significado de referencia institucional

Se revisaron a partir de la GROS (Godino et al., 2008), los significados de la probabilidad presentes en las orientaciones curriculares chilenas (Mineduc, 2012) y los objetos matemáticos asociados que son de nuestro interés (situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones). Para ello, se consideran los objetos matemáticos en relación con los significados intuitivo (I), subjetivo (S), frecuencial (F) y clásico (C) de probabilidad. A partir de esta revisión se distinguen claramente tres grandes focos en el tratamiento otorgado a la probabilidad en las orientaciones curriculares chilenas: 1) plantear distintos tipos de situaciones y preguntas, en un contexto familiar y de interés para los alumnos, que les permita distinguir los datos que son pertinentes para responder; b) organizar y analizar datos a través de distintos registros que permitan realizar inferencias y predicciones para responder a las situaciones y preguntas; c) adquirir nociones básicas de probabilidad para su aplicación en situaciones de la vida diaria y para su estudio con mayor profundidad en etapas posteriores.

#### 4.2 Fase 2: Análisis de los objetos matemáticos y sus significados

Una vez establecido el significado referencia institucional inferido a partir de la revisión de las orientaciones curriculares chilenas, se dio paso a la segunda fase que consistió en el análisis de los objetos matemáticos y sus significados presentes en tales orientaciones curriculares. La Tabla 1 resume dicho análisis, evidenciando que el estudio de la probabilidad está relacionado con los significados intuitivo, subjetivo, clásico y frecuencial, pues desde 1.º a 6.º los alumnos resuelven diversas situaciones-problemas que involucran tales significados, ya sea implícita o explícitamente. Además de una evolución del trabajo matemático que estructura el estudio de la probabilidad en la educación primaria, esta evolución depende de varios aspectos, objetos y significados, que progresan paulatinamente, consolidando los conocimientos de los alumnos sobre probabilidad.

Tabla 1

*Situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones asociados al estudio de la probabilidad en el currículo chileno*

Objeto matemático probabilidad en la educación primaria chilena	Curso					
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
<i>Situaciones-Problemas</i>						
Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas (I)	x	x	x	x	x	x
Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos en base a la información de la cual se dispone (I, S)		x	x	x	x	x
Hacer predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio (F)				x	x	x
A partir de los resultados observados en un experimento determinar la probabilidad teórica de ocurrencia (C)					x	x
Cálculo de probabilidades (C)					x	x
<i>Elementos lingüísticos</i>						
Lenguaje común (I, S, F, C)	x	x	x	x	x	x
Lenguaje probabilístico (I, S, F, C)	x	x	x	x	x	x
Representación en tablas y gráficos (F)	x	x	x	x	x	x
Representación numérica (C)					x	x
Diagrama de árbol (C)					x	X
<i>Conceptos-Definición</i>						
Suerte/azar (I)		x	x	x	x	x
Suceso seguro, poco posible, posible, poco posible, imposible (I)				x	x	x



Resultados posibles (I)	x	x	x	x	x
Suceso incierto (S)		x	x	x	x
Experimento aleatorio (F)		x	x	x	x
Frecuencia absoluta y relativa (F)			x	x	x
Espacio muestral (C)			x		x
Casos favorables y no favorables (C)				x	x
Juego justo e injusto (C)				x	x
Probabilidad (C)				x	x

### 4.3 Fase 3: Selección de capítulos, unidades y lecciones

Siguiendo con la fase 3, se seleccionaron los capítulos que abordan la probabilidad, ya sea de manera implícita o explícita, clasificando y agrupando los distintos objetos matemáticos primarios de nuestro interés (situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos y definiciones), para ello se utilizó como base los objetos matemáticos identificados en las orientaciones curriculares chilenas, las cuales constituyen nuestro significado de referencia institucional. Luego, revisamos el desarrollo de contenidos de probabilidad en las Unidades (U) y Lecciones (L) de cada texto, obteniendo una aproximación de los contenidos de probabilidad que desarrollan (Tabla 2). En algunos libros, los contenidos se presentan de forma explícita en unidades y lecciones completas (2.º, 4.º y 5.º). En cambio en otros se presenta de manera implícita, como es el caso del texto de 3.º, que desarrolla la probabilidad a través de problemas vinculados a la unidad de medición (U7, L7.1). Cabe señalar que los libros de texto de 1.º y 6.º no presentan contenidos de probabilidad, en disonancia con el currículo.

Tabla 2  
Unidades y lecciones vinculadas al estudio de probabilidad

Curso	Unidad	Lecciones	Páginas
1.º		No presenta contenidos	
2.º	U10: Gráficos y probabilidad	L10.6: eventos probables y poco probables	236-243
		L10.7: Seguro, probable e imposible	
3.º	U7: Medición	L7.1: Hora, media hora y cuarto de hora	172-173
	U8: Fracciones	L8.6: Hacer una tabla y buscar patrón	204-205
	U9: Datos y gráficas	L9.8: Usar tablas y gráficos para sacar conclusiones	
4.º	U11: Gráficos y probabilidad	L11.6: Resultados y experimentos	226-227
			256-275
5.º	U15: Probabilidad	L1: Resultados posibles	364-388
		L3: Hacer predicciones	
		L4: Probabilidad como fracción	
		L5: Probabilidad experimental	
6.º		No presenta contenidos	

### 4.4 Fase 4: Identificación de los objetos matemáticos y sus significados

Así, a partir de la GROS, identificamos las situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones vinculados a la probabilidad presentes en los libros de texto (fase 4) que se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3  
*Situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones*

OBJETOS	SIGNIFICADOS
<i>Situaciones-Problemas</i>	
Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas	Desarrollo de competencias de reconocimiento del azar y grados de posibilidad de ocurrencia, intuiciones probabilísticas en juegos de azar
Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos en base en información disponible	Desarrollo de competencias de análisis de datos
Predicción de resultados de un experimento aleatorio observando resultados posibles	
Análisis de datos en una experiencia empírica en juegos con dados o monedas, para determinar probabilidad teórica de ocurrencia	Reflexión sobre las propiedades de convergencia en pequeñas muestras
Cálculo de probabilidades	Aplicación de regla de Laplace.
<i>Elementos Lingüísticos</i>	
Lenguaje común Lenguaje probabilístico Representación numérica Representación en tablas	Términos y expresiones verbales con un significado matemático asociado a probabilidad
<i>Conceptos-Definición</i>	
Azar	Ocurrencia de un suceso no condicionada por la relación de causa y efecto
Posibilidad de ocurrencia de un suceso	Grados de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso
Resultados posibles	
Experimento aleatorio	Conjunto de resultados posibles a obtener en la realización de un experimento aleatorio
Frecuencia absoluta y relativa	Lanzar dados y observar el resultado Lanzar moneda y observar el resultado Girar la ruleta y observar el resultado Extraer una bolita y observar el resultado
Casos favorables y no favorables	Número de veces que se repite un determinado suceso; cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos Un resultado es favorable a un suceso o evento cuando observar este resultado implica la ocurrencia del suceso o evento
Probabilidad Probabilidad como grado de creencia personal	Proporción de casos favorables entre posibles; número al que tiende la frecuencia en una serie larga; grado de creencia de que un suceso ocurra
Juego justo e injusto	Juego de azar en el que los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar

#### 4.5 Fase 5: Análisis de los objetos matemáticos y sus significados

A continuación, se presentan los datos obtenidos a partir del análisis y descripción de los objetos matemáticos (situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones) presentes en los libros de texto considerados para este estudio. Esto ha permitido indagar en el tratamiento otorgado a la probabilidad en los libros de texto de educación primaria, y contrastar su nivel de adecuación en relación con los objetos

matemáticos y significados contemplados y declarados en las orientaciones curriculares chilenas.

#### 4.5.1 Situaciones-Problemas

A partir del análisis de las orientaciones curriculares chilenas se han identificado cinco tipos de situaciones-problemas, relacionadas con los significados intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico de probabilidad. Estas situaciones-problemas están presentes en las actividades y problemas de los libros analizados, y se basan principalmente en juegos con monedas y dados, además de situaciones cotidianas. Como ejemplo, se presentan algunos de ellos.

##### a) Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas

Los libros de texto analizados proponen actividades que involucran estimación y comparación de posibilidades de ocurrencia mediante uso y manipulación de dispositivos aleatorios como dados, monedas y ruletas (Figura 3). Éstas se concentran mayoritariamente en los textos de 3.º y 4.º.

**USA LOS DATOS** Para cada experimento, di si los sucesos A y B son *igualmente posible* o *no son igualmente posible*. Si no son igualmente posibles, menciona el suceso que es más posible.

7. Experimento: Lanzar una moneda. Suceso A: cara Suceso B: sello	8. Experimento: Lanzar un cubo numerado del 1 al 6. Suceso A: sacar un número menor que 3 Suceso B: sacar un número par
9. Experimento: Girar la flecha. Suceso A: rojo Suceso B: amarillo	10. Experimento: Sacar una ficha de una bolsa si todas las fichas son del mismo tamaño. Suceso A: verde Suceso B: rojo





Figura 3 Estimación de posibilidades de ocurrencia (Texto [E], p. 374)

Con base en el significado intuitivo de la probabilidad, se pide a los alumnos que estimen y comparen posibilidades de ocurrencia de sucesos de acuerdo con la información presentada, asociando la posibilidad de ocurrencia con diferentes grados de posibilidad que van de lo imposible a lo seguro, para desarrollar competencias de reconocimiento del azar y grados de posibilidad de ocurrencia, e intuiciones probabilísticas en juegos de azar.

##### b) Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos con base en información disponible

Este tipo de situación-problema se fundamenta también en el significado intuitivo de probabilidad, con la diferencia que estudia la posibilidad de ocurrencia de eventos a partir de la información entregada en figuras, gráficos o tablas (Figura 4). Estas actividades están presentes principalmente en los textos de 2.º y 3.º, como un modo de afianzar la comprensión de la relación entre grados de posibilidad de ocurrencia y probabilidad de ocurrencia. Estas actividades pretenden la visualización de posibles resultados de un experimento aleatorio y el desarrollo de la competencia de análisis de datos, para la posterior formalización del cálculo de probabilidades desde un enfoque frecuencial. Este tipo de situaciones-problemas no sólo incluye situaciones vinculadas al significado intuitivo de la probabilidad, sino que también, aunque en menor medida, presenta algunas vinculadas al significado subjetivo, en que las

experiencias personales de los alumnos o del contexto podrían hacer variar la respuesta (Figura 5).

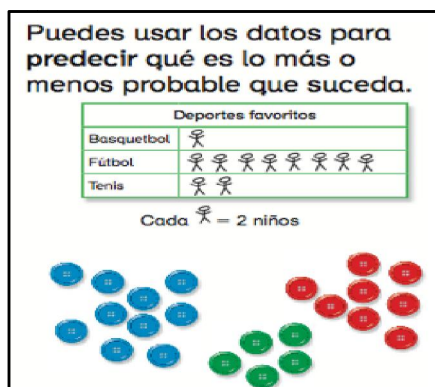


Figura 4. Posibilidades de ocurrencia a partir de datos (Texto [B], p. 225)

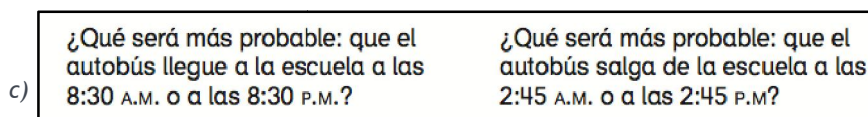


Figura 5 Posibilidades de ocurrencia a partir de datos (Texto [C], p. 172)

**d) Predicción de los resultados de un experimento aleatorio observando los resultados posibles**

El propósito de este tipo de situaciones que aparece con frecuencia en estos libros es que los alumnos realicen estimaciones o predicciones del grado de posibilidad de ocurrencia de un determinado suceso, a partir de la información que se proporciona (Figura 6).

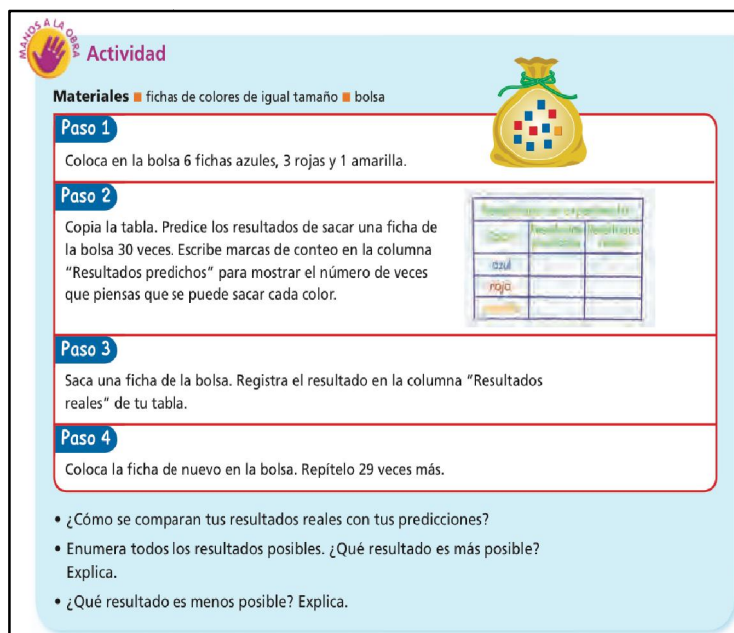


Figura 6. Predicción de resultados a partir de datos (Texto [E], p. 373).

**e) A partir de los resultados observados en un experimento, determinar la probabilidad teórica**

Estas situaciones-problemas buscan acercar a los alumnos al cálculo de probabilidad teórica de un experimento aleatorio, desde un enfoque frecuentista, por medio del experimento de lanzar una moneda (Figura 7). Esta situación está presente solo en el libro de 5.º, y su propósito es que los alumnos comprendan que al repetir un número suficientemente grande de veces el experimento, de manera independiente y bajo las mismas condiciones, las frecuencias relativas de ocurrencia de una situación se estabilizan, tendiendo o acercándose cada vez más a cierto valor, que corresponde a la probabilidad de ocurrencia.

Puedes usar probabilidad experimental para predecir los sucesos futuros.

**A** Predice qué crees que pasará cuando lances una moneda 50 veces.

**B** Lanza la moneda. Registra el resultado en una tabla de conteo.

**C** Repítelo durante un total de 50 pruebas.

**D** Usa tus resultados para hallar la probabilidad experimental de sacar cara.  

$$\frac{\text{número de resultados favorables (cara)}}{\text{número total de lanzamientos}} = \frac{\text{■}}{50} \text{ o } \frac{\text{○}}{50} \text{ de 50}$$

**E** Halla la probabilidad matemática de sacar cara.  

$$\frac{\text{número de resultados favorables (cara)}}{\text{total de resultados posibles (cara/sello)}} = \frac{\text{■}}{\text{■}}$$

**Sacar conclusiones**

1. Compara tu predicción con los resultados mostrados en la tabla de conteo. ¿Se acercó tu predicción al resultado? Explica tu respuesta.
2. Compara tu probabilidad experimental con las de tus compañeros de clase. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? ¿Por qué crees que pasa esto?
3. **Análisis** ¿Tu probabilidad experimental es igual que la probabilidad matemática? ¿Por qué lo crees?

Experimento de lanzamiento de monedas			
	Predicción	Resultado	Conteo
Cara			
Sello			




Figura 7 Probabilidad experimental y teórica (Texto [E], p. 380).

**f) Cálculo de probabilidades**

Por último, encontramos situaciones-problemas que buscan el cálculo directo de probabilidad de ocurrencia en base al enfoque clásico de la probabilidad (Figura 8). Este tipo de situaciones aparece en el texto de 5.º.

**Más ejemplos** Halla la probabilidad de cada suceso cuando todas las bolitas son del mismo tamaño. Después, escribe la probabilidad.

**A** Halla la probabilidad de sacar una bolita que no sea azul.  
 La probabilidad de que no sea azul  $= \frac{5}{8}$  ←  $\frac{\text{resultados favorables (4 rojas, 1 verde)}}{\text{total de resultados posibles (3 azules, 4 rojas, 1 verde)}}$   
 La probabilidad de sacar una bolita que no sea azul es posible.

**B** Halla la probabilidad de sacar una bolita verde.  
 La probabilidad de que sea verde  $= \frac{0}{9}$  ←  $\frac{\text{resultados favorables (0 verdes)}}{\text{total de resultados posibles (3 azules, 4 rojas, 2 amarillos)}}$   
 La probabilidad de sacar una bolita verde es imposible.

**C** Halla la probabilidad de sacar una bolita roja o verde.  
 La probabilidad de que sea roja o verde  $= \frac{5}{7}$  ←  $\frac{\text{resultados favorables (2 rojas, 3 verdes)}}{\text{total de resultados posibles (2 rojas, 3 verdes, 2 blancas)}}$   
 La probabilidad de sacar una bolita roja o verde es posible.

**D** Halla la probabilidad de sacar una bolita negra.  
 La probabilidad de que sea negra  $= \frac{8}{8}$  ←  $\frac{\text{resultados favorables (8 negras)}}{\text{total de resultados posibles (8 negras)}}$   
 La probabilidad de sacar una bolita negra es segura.




Figura 8 Cálculo de probabilidades (Texto [E], p. 377)

En la Tabla 4 se expone una síntesis de los datos obtenidos en relación a la presencia o ausencia de situaciones-problemas en los libros analizados.

Tabla 4  
*Situaciones-problemas*

Situaciones-Problemas	Libros de texto			
	2.º	3.º	4.º	5.º
Estimar y comparar posibilidades de ocurrencia a partir de juegos con dados y monedas (I)	x	x	x	x
Determinar posibilidad de ocurrencia de eventos en base a la información de la cual se dispone (I, S)	x	x	x	x
Hacer predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio (F)			x	x
A partir de los resultados observados en un experimento, determinar la probabilidad teórica de ocurrencia (C)				x
Cálculo de probabilidades (C)				x

Como puede apreciarse en la Tabla 4, existe coherencia entre las situaciones-problemas identificadas en las orientaciones curriculares chilenas y los libros de texto. No obstante, hay algunas situaciones-problemas que se trabajan escasamente, como las vinculadas al enfoque subjetivo, que aparecen únicamente en el libro de 3.º, mientras que las más se trabajan son las vinculadas al significado frecuentista, al que se otorga gran énfasis en estos libros.

#### 4.5.2 Elementos lingüísticos

De acuerdo con Font y Godino (2006), estos elementos son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos al resolver situaciones-problemas, representar por medio de objetos concretos aquéllos más abstractos, posibilitando una correspondencia semiótica entre objeto representante y representado.

En las orientaciones curriculares identificamos los elementos lingüísticos: lenguaje común, lenguaje probabilístico, representación en tablas y gráficos, representación numérica y diagrama de árbol, de éstos, sólo cuatro están presentes en los libros de texto.

##### a) *Lenguaje de uso común*

De acuerdo con Ortiz, Batanero y Serrano (2001), consideramos que el lenguaje desempeña un rol fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, especialmente de la probabilidad, debido a la estrecha relación existente entre las expresiones de uso común y el lenguaje de corte más matemático o probabilístico.

Dentro del lenguaje utilizado en los libros, domina el lenguaje de uso común por sobre del probabilístico. Las expresiones de uso común asociadas al estudio de la probabilidad se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5

*Lenguaje de uso común asociado a la probabilidad identificado en los libros de texto*

Significado intuitivo	Significado frecuencial	Significado clásico
Más probable, menos probable, igualmente probable.	Cuántos	Fracción
Probabilidad.	Predecir	Cuántos
Seguro, casi seguro, posible, poco posible, imposible.	Seguro, casi seguro, posible, poco posible, imposible	Más probable, menos probable, igualmente probable
Azar.	Comparar	Sin ver
Resultados.	Lanzamiento de un dado	Resultados favorables
Elegir.	Lanzamiento de una moneda	Resultados posibles
Sin ver.	Girar una ruleta	Total de resultados posibles
Juego justo e injusto.	Frecuencia	Juego justo e injusto
	Tabla de datos	Calcular probabilidad
	Juego justo e injusto	Comparar probabilidad
	Datos	Sacar una bolita
		Elegir
		Girar una ruleta
		Lanzamiento de un dado
		Lanzamiento de una moneda

La tabla da cuenta de una diversidad de objetos, agrupados por tipo de significado, asociados a un lenguaje común de la probabilidad, que de acuerdo con Shuard y Rothery (1984) son expresiones que aparecen en matemáticas y en el lenguaje común, y tienen significados muy próximos en ambos contextos. Como se evidencia, predominan las expresiones vinculadas al significado frecuencial y clásico de probabilidad, en coherencia con las orientaciones curriculares chilenas, que enfatizan la experimentación asociada al enfoque frecuentista, para una posterior formalización a un enfoque clásico.

### **b) Lenguaje probabilístico**

En esta categoría consideramos expresiones específicas de matemática, y que por lo general no forman parte del lenguaje común. Pero, como Shuard y Rothery (1984) plantean, en algunos casos estas expresiones aparecen en el contexto cotidiano con significados muy próximos. Las expresiones identificadas, con un claro dominio de las de significado clásico, se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6

*Lenguaje probabilístico identificado en los libros de texto*

Significado intuitivo	Significado frecuencial	Significado clásico
Más probable, menos probable, igualmente probable	Gráfico	Fracción
Eventos	Experimento	Más probable, menos probable, igualmente probable
Probabilidad	Predecir	Equiprobable
Azar	Seguro, casi seguro, posible, poco posible, imposible	Probabilidad matemática
Resultados	Probabilidad experimental	Resultados favorables
Sucesos	Frecuencia	Resultados posibles
Juego justo e injusto	Tabla de datos	Total de resultados posibles
	Juego justo e injusto	Juego justo e injusto
		Calcular probabilidad
		Comparar probabilidad
		Girar una ruleta
		Lanzamiento de un dado
		Lanzamiento de una moneda

Las Tablas 5 y 6 evidencian que el lenguaje utilizado está en una categoría mixta, es decir, pertenecen tanto al lenguaje propio de la matemática como al lenguaje de uso común, pues sus significados son muy próximos. Además, se observa una predominancia, en ambos casos, de las expresiones vinculadas al significado frecuentista y laplaciano, lo que manifiesta un mayor énfasis en el desarrollo de la probabilidad desde dichos enfoques. Otorgando menor importancia, a nivel de lenguaje, al significado intuitivo, el cual de acuerdo con las orientaciones internacionales es el más próximo en las primeras edades.

### c) Representaciones numéricas

Dentro de las representaciones numéricas que admite la probabilidad se encuentran los números enteros, ya que la probabilidad de ocurrencia de un suceso corresponde a una medida cuantitativa de la posibilidad de ocurrencia de ésta, que de acuerdo con el primer axioma de probabilidad corresponde a un valor entre 0 y 1. Así, una situación catalogada como imposible tendrá probabilidad de ocurrencia 0, y una segura tendrá probabilidad de ocurrencia 1. Además, podemos expresar la probabilidad de ocurrencia mediante una fracción o número decimal, puesto que al repetir un número suficientemente grande de veces un experimento aleatorio, de manera independiente y en las mismas condiciones, las frecuencias relativas de ocurrencia de una situación se estabilizan, tendiendo a cierto valor que se puede expresar mediante una fracción, o como una proporción entre el número de casos favorables y el total de casos posibles.

Las representaciones numéricas utilizadas en estos libros de texto se refieren a la probabilidad como proporción entre casos favorables y total de casos posibles, y como fracción (Figura 9), presentándose éstas sólo en el libro de texto de 5.º, pues en los cursos anteriores la probabilidad se aborda como medida cualitativa.

**Más ejemplos** Halla la probabilidad de cada suceso cuando todas las bolitas son del mismo tamaño. Después, escribe la probabilidad.

**A** Halla la probabilidad de sacar una bolita que no sea azul.

La probabilidad de que no sea azul  $= \frac{5}{8}$  ← resultados favorables (4 rojas, 1 verde)  
 ← total de resultados posibles (3 azules, 4 rojas, 1 verde)

La probabilidad de sacar una bolita que no sea azul es posible.




Figura 9 Representación numérica de probabilidad (Texto [E], p. 377).

### d) Representación en tablas

Otro tipo de representación es el uso de tablas y gráficos, presente en los libros de texto de 4.º y 5.º y vinculados a un enfoque frecuentista. Se identifican, principalmente, tablas de conteo y tablas de frecuencia, que tienen por propósito resumir las frecuencias absolutas y relativas obtenidas a partir de la realización de un experimento aleatorio (Figura 10).

**USA LOS DATOS** Para los ejercicios 3 a 6, usa la flecha giratoria B y la tabla. La flecha giratoria B tiene secciones iguales.


3. ¿Cuántas veces gira la flecha Silvia?

4. ¿Cuál es la probabilidad experimental de sacar rojo? ¿Cuál es la probabilidad matemática?

5. ¿Cuál es la probabilidad experimental de no sacar verde? ¿Cuál es la probabilidad matemática?

6. **ESCRIBE** ¿Cuál es la pregunta? Sue usó la tabla para determinar la probabilidad. La respuesta es  $\frac{14}{40}$ .

**B**



**Resultados de Silvia**

Resultados	Azul	Rojo	Verde	Amarillo
Conteo	IIII IIII IIII IIII IIII	IIII IIII IIII IIII IIII	IIII IIII IIII IIII IIII	IIII IIII IIII IIII IIII

Figura 10 Representación en tablas (Texto [E], p. 381).



Mientras que las representaciones gráficas están ausentes en el estudio de la probabilidad, pese a que los libros de texto se centran en el trabajo a partir de experimentos aleatorios y en la asociación del cálculo de probabilidad a partir de la estabilización de las frecuencias relativas, no se utilizan las representaciones gráficas como un medio de apoyo al aprendizaje de la probabilidad.

La Tabla 7 expone una síntesis de los elementos lingüísticos identificados en cada libro de texto analizado.

Tabla 7  
*Elementos lingüísticos identificados*

Elementos lingüísticos	Libros de texto			
	2.º	3.º	4.º	5.º
Lenguaje común	x	x	x	x
Lenguaje probabilístico		x	x	x
Representación numérica				x
Representación en tablas			x	x

Se evidencia que escasean ciertos elementos lingüísticos fundamentales asociados al estudio de la probabilidad en la educación primaria, que aun que están especificados en las orientaciones curriculares, no están presentes en los libros de texto. Tal es el caso de representaciones gráficas y diagramas de árbol. También se observa que se enfatiza por sobre otros elementos lingüísticos la adquisición de expresiones del lenguaje común vinculadas a probabilidad.

#### 4.5.3 Conceptos y definiciones

Examinamos diversos tipos de entidades matemáticas, presentadas explícita o implícitamente en los libros de texto, a partir de las cuales es posible formular una definición, pues hay pocas definiciones explícitas, presentándose la mayoría como resultados a problemas resueltos, o como conclusiones por extraer y formular. Los conceptos y definiciones identificados se muestran en la Tabla 8, agrupados según el significado de la probabilidad al cual se vinculan.

Tabla 8  
*Conceptos y definiciones identificadas*

Significado intuitivo	Significado Subjetivo	Significado Frecuencial	Significado Clásico
Azar	Probabilidad como grado de creencia personal	Experimento aleatorio	Resultados posibles
Suceso seguro, poco posible, posible, muy posible, imposible		Frecuencia absoluta y relativa	Casos favorables y no favorables
Posibilidad de ocurrencia de un suceso		Probabilidad experimental	Probabilidad matemática
			Juego justo e injusto

En la Tabla 8 se observa que muchos conceptos y definiciones están asociados a los significados intuitivos, frecuentista y clásico de probabilidad, con menor presencia aquellos asociados al significado subjetivo.

Cabe señalar que en los textos de 2.º, 3.º y 4.º se da importancia a conceptos y definiciones vinculados al significado intuitivo, mientras que en el texto de 5.º hay predominancia de conceptos y definiciones vinculados al significado frecuencial y clásico (Figura 11).

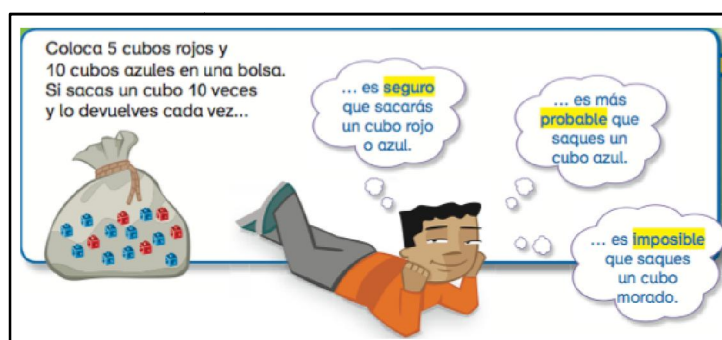


Figura 11 Definición asociada al concepto de sucesos seguro, probable e imposible (Texto [B], p. 238).

La Tabla 9 muestra los conceptos y definiciones identificados en la serie de libros de texto.

Tabla 9  
Conceptos y definiciones identificados en los libros de texto

Conceptos-Definición	Libros de texto			
	2.º	3.º	4.º	5.º
Azar	x	x	x	x
Suceso seguro, poco seguro, posible, poco posible, imposible	x	x	x	x
Posibilidad de ocurrencia de un suceso	x	x		
Probabilidad como grado de creencia personal		x	x	x
Experimento aleatorio				x
Frecuencia absoluta y relativa				x
Probabilidad experimental				x
Resultados posibles				x
Casos favorables y no favorables				x
Probabilidad matemática				x
Juego justo e injusto				x

La tabla 9 muestra los conceptos y definiciones asociados al significado intuitivo y subjetivo que se concentran mayoritariamente en los libros de 2.º, 3.º y 4.º, mientras que las ligadas al significado frecuencial y clásico se presentan mayoritariamente en 5.º. Al analizar la coherencia de los conceptos y definiciones presentes, en relación con las orientaciones curriculares, se observa que no se abordan todos los presentes en tales orientaciones, dejando de lado algunos de ellos, como es el caso del concepto suerte asociado al azar y el concepto espacio muestral, el cual no se formaliza y se aborda sólo a nivel intuitivo.

#### 4.6 Fase 6: Contraste de los objetos matemáticos y sus significados vinculados al estudio de la probabilidad presentes en el currículo y en los libros de texto

A partir del análisis realizado en relación con los distintos objetos matemáticos presentes en los libros de texto de educación primaria: situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos-definiciones y sus significados vinculados al estudio de la probabilidad, se infiere que la probabilidad es abordada, principalmente, desde un enfoque intuitivo, para luego incluir de manera progresiva los significados frecuencial y clásico. Incluyéndose sólo en uno de los libros de texto un leve acercamiento a la interpretación subjetiva de la probabilidad.

Es importante señalar que con base en los distintos objetos matemáticos identificados, el estudio de la probabilidad en la educación primaria, se realiza desde una

perspectiva más bien intuitiva en la que se otorga gran importancia al uso de lenguaje cotidiano. Lo anterior, favorecería el desarrollo del pensamiento probabilístico a partir de un contexto familiar y cercano sobre todo en los primeros cursos de primaria en que las intuiciones y el lenguaje desempeñan un rol fundamental en el aprendizaje de la probabilidad (Alsina, 2012). No obstante, es necesario que los libros de texto posibiliten que los estudiantes transiten, poco a poco, desde un lenguaje cotidiano e informal a un lenguaje probabilístico que les permita alcanzar un aprendizaje en profundidad de la probabilidad (Chapman, 1995).

Bajo esta perspectiva, es necesario que los libros presenten situaciones-problemas adecuadas que permitan ahondar de manera progresiva en el desarrollo del pensamiento probabilístico y que promuevan en los estudiantes una profundización en los conceptos y propiedades claves asociadas a un estudio integral de la probabilidad desde su diversidad de significados. Por ejemplo, para un correcto estudio de la probabilidad desde el enfoque frecuentista, sería deseable que se presenten situaciones-problemas centradas en el análisis de la convergencia de las frecuencias relativas al valor de la probabilidad de ocurrencia de dicho suceso. Puesto que la ausencia de este tipo de situaciones-problema podría traer consigo la aparición de sesgos probabilísticos en los alumnos, así como de diversos errores y dificultades asociadas a un incorrecto tratamiento de la probabilidad.

Otro aspecto evidenciado a partir del análisis realizado es la carencia de actividades vinculadas al uso de software, sobre todo si consideramos la riqueza que puede tener la utilización de este tipo de recurso, por ejemplo, para analizar la convergencia de las frecuencias relativas en el caso del enfoque frecuentista. Por otro lado, hay una serie de objetos matemáticos que fueron identificados en las orientaciones curriculares chilenas que no son abordados en los libros de texto, lo que demuestra falta de alineación entre la propuesta del Ministerio de Educación (Mineduc, 2012) y los libros que éstos distribuyen gratuitamente en los colegios municipales y particulares subvencionados del país, es más en los libros de texto de 1.º y 6.º año de educación básica no se incluyen unidades de estudio referidas a la probabilidad.

## 5. Conclusiones

En este estudio se ha presentado un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos, centrado específicamente en situaciones problemáticas, elementos lingüísticos y conceptos sobre probabilidad en el contexto de la educación primaria. Dicho análisis ha permitido constatar que en la colección de libros de texto chilena analizada la probabilidad es abordada, principalmente, desde un enfoque intuitivo, para luego incluir de manera progresiva los significados frecuencial y clásico, con un leve acercamiento al significado subjetivo.

Si se atiende a las orientaciones de la asociación norteamericana de profesores de matemáticas en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad (NCTM, 2000), sugieren que en la didáctica de la probabilidad en Educación Primaria deberían considerarse tres fases correlativas: en primer lugar, la adquisición de lenguaje probabilístico elemental (términos como imposible, probable y seguro); en segundo lugar, la cuantificación de la probabilidad, considerando que la posibilidad de ocurrencia de un hecho oscila entre 0 (cuando es imposible) hasta 1 (cuando es seguro); y en tercer lugar, el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un hecho. Este proceso de adquisición, que contempla los

significados intuitivos, laplaciano y frecuencial de la probabilidad, con algunos matices vinculados al significado subjetivo, coincide a grandes rasgos con los libros de texto analizados. Pero si se atiende a las orientaciones curriculares chilenas analizadas en Vázquez & Alsina (2014), se observa la influencia de las directrices del NCTM, aunque con una menor profundidad y amplitud en los contenidos, ya que solo se aborda la probabilidad desde un punto de vista intuitivo y más bien ligada a una visión frecuentista.

Este desajuste entre las orientaciones curriculares chilenas y la colección de libros de texto analizada indica que urge llevar a cabo una reformulación del tratamiento otorgado a la probabilidad en los libros de texto de educación primaria, acompañada probablemente de una revisión más en detalle de las orientaciones curriculares chilenas. Desde nuestro punto de vista, esta reformulación debería contemplar un desarrollo gradual del pensamiento probabilístico a partir del trabajo con términos probabilísticos que provengan del contexto de los estudiantes, y que incorpore de manera paulatina el estudio de la probabilidad desde sus significados más relevantes en el contexto de la matemática escolar. Creemos que dicha reformulación permitiría mejorar el tratamiento de la probabilidad en las aulas de primaria dada la gran influencia que tienen los libros de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sobre todo si consideramos la escasa preparación que poseen los profesores de primaria para enseñar probabilidad (Vázquez & Alsina, 2015). Adquiere, pues, gran importancia el enfoque dado al proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, que debería evolucionar desde las ideas intuitivas e informales (intuiciones primarias) que tienen los alumnos sobre probabilidad y azar hasta adquirir la rigurosidad matemática asociada a la cuantificación y el cálculo de probabilidades (intuiciones secundarias). Las intuiciones primarias sobre el azar están presentes en los niños antes de los 7 años, y es después de esta edad cuando los niños alcanzan, poco a poco, una estructura conceptual distinta y organizada que desempeña un rol fundamental para el desarrollo completo del razonamiento probabilístico. Asimismo, es importante considerar las múltiples aplicaciones de la probabilidad tanto en la vida cotidiana como en otras disciplinas en que es necesario tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

De lo anterior, es posible deducir ciertos aspectos a contemplar para una enseñanza idónea de la probabilidad en educación primaria, que debería contemplar las particularidades de los distintos niveles escolares:

- Nociones previas sobre azar y/o aleatoriedad y probabilidad.
- Diversidad de significados de la probabilidad asociados a distintas aplicaciones en la vida diaria.
- Vinculación del cálculo de probabilidad de ocurrencia de un suceso con la realización o simulación de experimentos.
- Cuantificación de la posibilidad de ocurrencia de un suceso o evento.
- Distinción entre probabilidad teórica y empírica.

En síntesis, pues, aún sin haber analizado otras colecciones de libros de texto, puede concluirse que, en términos generales, el trato que se da a la probabilidad en los libros de texto no está siempre en absoluta concordancia con las directrices curriculares. Se hace necesario, pues, un replanteamiento riguroso en los textos escolares respecto a los contenidos matemáticos en general, y los de probabilidad en particular, para que los alumnos aprendan lo que deberían aprender, sobre todo considerando que el libro de texto sigue siendo el recurso mayoritario para enseñar matemáticas en educación primaria.

### Referencias bibliográficas

- Alvarez Suárez, P., De la Fuente Solana, E. I. y García García, J. (2002). Dimensionalidad de una escala de actitud hacia el medio ambiente para la educación secundaria. *Revista de Investigación Educativa*, 20(1), 77-87. Recuperado de <http://www.doredin.mec.es/documentos/007200330071.pdf>
- Alsina, A. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas*, 7, 4-22.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Henry, M., &Parzys, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nueva York: Springer.
- Batanero, C., &Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics.The case of probability. En J. P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Nueva York: Springer.
- Bernoulli, J. (1987). *Ars conjectandi-4ème partie* (N. Meunier, Trans.) Rouen: IREM [Trabajo original publicado en 1713].
- Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education*, 7(3), 243-262.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*(Tesis doctoral). Universidad de Granada. Granada.
- Font, V. &Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.ZDM.*The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., &Konic, P. (2008).Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. En *Actas VI Jornadas de educación matemática región de Murcia* (pp. 25-49). Murcia: Centro de profesores y recursos de Lorca, Mar Menor, Murcia I y Murcia II.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1987). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. & Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Revista Unión*, 35, 75-91.
- Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial

- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive Models and Problem spaces in “Purely Random” Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Mineduc (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Moivre de, A. (1967). *The doctrine of chances*. New York: Chelsea Publishing
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.: NCTM.
- Ortiz, J. J., Batanero, C., & Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
- Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers’ learning?. *Elementary School Journal*, 100(4), 331-350.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). Nueva York: MacMillan.
- Shuard, H. & Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. Londres: Murray.
- Steinbring, H. (1990). The nature of stochastic knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: ISI.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.
- Vázquez, C. & Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, 85, 5-23.
- Vázquez, C. & Alsina, A. (2015). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: Diseño, Construcción y Validación de un Instrumento de Evaluación. *BOLEMA* (En prensa).