EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DETECTADO EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LAS CUERDAS

Dinazar I. Escudero-Avila, José Carrillo, Eric Flores-Medrano, Nuria Climent, Luis Carlos Contreras y Miguel Montes

En este documento mostramos un análisis sobre el conocimiento que evidencia un profesor de matemáticas de secundaria al resolver el problema de las cuerdas(se colocan n*puntos sobre una circunferencia, ¿es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?), usando el modelo analítico de conocimiento profesional* mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK). *Los resultados muestran la potencialidad del modelo como herramienta de análisis para profundizar en la comprensión y caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas, en particular del conocimiento de los temas.*

Términos clave: Conocimiento de los temas; Conocimiento especializado; Profesor de matemáticas

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge Detected in the Circle Chord Problem Solution

In this paper we show an analysis of the knowledge that evidences a secondary teacher to solve the circle chord problem (if there are n *points in a circumference, is it possible to determine the number of all the possible cords?) using the analytical model of professional knowledge:* mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK). *The results show the potential of the model as an analytical tool to deep in the comprehension and characterization of the mathematics teacher's knowledge, especially the knowledge of topics.*

Keywords: Knowledge of topics; Mathematics teacher; Specialised knowledge

En las últimas décadas ha existido una preocupación creciente por profundizar en los elementos que han de formar parte del conocimiento de los profesores de matemáticas. Se ha partido del acuerdo indiscutible de que una parte sustancial de ese

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77. [http://hdl.handle.net/10481/37190]

conocimiento es el relativo a la propia disciplina; no parece razonable que alguien sea capaz de enseñar aquello que no conoce en profundidad (Fennema, Carpenter y Peterson, 1989). Sin embargo, no ha quedado claramente definido qué significa conocer en profundidad el contenido que se pretende enseñar (Ma, 1999). Entre los distintos focos de interés que han ido surgiendo, se ha puesto atención en el análisis de las concepciones y creencias de los profesores y la influencia de éstas en su práctica, el análisis sobre la estructura y evolución del conocimiento profesional, las relaciones entre la teoría producida en el campo de la investigación y la práctica de los profesores en el aula, así como en analizar a los profesores o formadores de profesores que reflexionan y aprenden de sus propias experiencias (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001; Sánchez, 2011).

Por otro lado, la investigación ha mostrado que una gran cantidad de conocimiento del contenido no siempre se corresponde con una mejor destreza, competencia o capacidad para enseñarlo (Askew, Brown, Rhodes, Johnson y William, 1997; Begle, 1979; Eisenberg, 1977), aunque sí parece relacionarse con una mejor disposición para alcanzar esa competencia (Hill, Rowan y Ball, 2005). Esto significa que, además de requerimientos de carácter disciplinar y psicopedagógico, sin duda útiles para alcanzar una práctica de enseñanza eficaz, se requiere también de un conocimiento del contenido como objeto de aprendizaje y objeto de enseñanza.

En aras de caracterizar el conocimiento del profesor para enseñar matemáticas, diversos grupos de investigación han analizado la práctica de los profesores, esforzándose por extraer de ella las claves de dicho conocimiento, como el proyecto *Subjectknowledge in mathematics* (SKIMA), de la Universidad de Cambridge (Rowland, 2005, 2007; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005), o los creadores del modelo *Mathematical knowledge for teaching* (MKT), de la Universidad de Michigan (Ball, 1991; Ball, Hill y Bass, 2005).

Una de las aportaciones consideradas como más relevantes del MKT, según sus autores y otros investigadores (e.g., Herbst y Kosko, 2012) es la inclusión de un subdominio de conocimiento especializado (*specialized content knowledge*), como parte del dominio matemático, conocimiento que, según los autores, sólo le es útil o necesario al profesor de matemáticas, a diferencia del conocimiento común del contenido (*common content knowledge*) que cualquier ciudadano instruido en matemáticas pudiera tener (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Más allá de algunas dificultades detectadas en el MKT con respecto a la delimitación del conocimiento especializado, derivadas de la definición deeste subdominio al aludir a actividades propias del profesor de matemáticas y no al conocimiento que permite realizarlas (Escudero, Flores y Carrillo, 2012; Flores, Escudero y Carrillo, 2013; Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), coincidimos con dicho modelo en la consideración de un cuerpo de conocimiento propio del profesor de matemáticas. Sin embargo, consideramos que este conocimiento no se encuentra solo en el dominio matemático, puesto que es imposible pensar en esta especificidad sin considerar aspectos del conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tales como las formas en que construyen los sujetos, el desarrollo de la complejidad dentro de los temas, y las características de aprendizaje, entre otros, todo ello referido a un contenido matemático (Carrillo et al., 2013; Flores, Escudero y Carrillo, 2013).Consideramos que esta especialización debe referirse a su conocimiento profesional en su conjunto, más que a una parcela de su conocimiento matemático.

Estas reflexiones, junto a la elucubración teórica y el bagaje de estudios empíricos sobre conocimiento y desarrollo profesional de nuestro grupo de investigación, sirven como base para que Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) presenten el modelo del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (en adelante MTSK, de *mathematics teacher's specialised knowledge*) [1] , que plantea lo especializado como la conjunción de conocimientos matemáticos y didácticos específicos del profesor de matemáticas, los cuales a su vez están permeados por las concepciones y creencias que tiene el profesor acerca de las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza.

El análisis de la práctica, de artefactos, o la evocación del recuerdo se han usado como elementos de obtención de información sobre el conocimiento del profesor y su relación con la práctica (Aubrey, 1997; Hegarty, 2000; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009). En este trabajo mostraremos que también podemos acceder al conocimiento del profesor a través del estudio de la interacción que se produce en un curso virtual de formación de profesores de matemáticas, en el que se induce la reflexión sobre un problema matemático. Hemos tomado la discusión acerca de la resolución del problema de las cuerdas como escenario propicio para mostrar algunos de los avances logrados, hasta el momento, en la construcción del MTSK. Buscamos además, ofrecer al lector una visión global del contenido y la utilidad del modelo como herramienta teórica y metodológica de investigación, además de explorar la potencialidad de la división en subdominios que propone el MTSK, con fines analíticos, particularmente en la definición y delimitación de uno de los subdominios diferenciados en el conocimiento matemático, el denominado "conocimiento de los temas", a través del análisis de un episodio de un informante participante en el mencionado curso de formación de profesores. En los siguientes apartados profundizaremos en el citado modelo y su proceso de elaboración, junto con su aplicación al caso de Omar en su resolución del problema de las cuerdas.

[1] Este modelo se está desarrollando en el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (España). En el momento de la escritura de este artículo el Seminario de Investigación está conformado por los siguientes miembros: José Carrillo (coordinador), Nuria Climent, Luis C. Contreras, Miguel Montes, Álvaro Aguilar, Dinazar I. Escudero-Avila, Eric Flores-Medrano y Enrique Carmona (Universidad de Huelva, España), María Cinta Muñoz-Catalán (Universidad de Sevilla, España), Pablo Flores, Nielka Rojas, Elisabeth Ramos (Universidad de Granada, España), C. Miguel Ribeiro, Rute Monteiro (Universidad del Algarve, Portugal), Leticia Sosa y José L. Huitrado (Universidad de Zacatecas, México), Diana Vasco (Universidad de Quevedo, Ecuador), Emma Carreño (Universidad de Piura, Perú) y Jeferson Moriel Junior (Universidad de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil).

Mathematics teacher's specialised knowledge

Podemos referir como antecedentes principales del modelo MTSK (figura 1) trabajos que buscan identificar la especificidad de un conocimiento que permita al profesor ser visto como un profesional, con un conjunto de conocimientos propios de la enseñanza de un contenido, como la diferenciación de Shulman (1986) entre *subject matter knowledge* y *pedagogical content knowledge*, y la concreción del trabajo de este al caso de la enseñanza de la matemática que supuso el *mathematical knowledge for teaching* (Ballet al., 2008) que, como hemos mencionado antes, focaliza la atención en un conocimiento distintivo del profesor como profesional de la enseñanza de las matemáticas. Este conocimiento distintivo, denominado conocimiento especializado del contenido(Ballet al., 2008),se basa en la exclusividad de este para el profesor, lo que genera problemas de diferenciación entre el conocimiento exclusivo del profesor y el que es común a otros usuarios profesionales de las matemáticas (Flores et al., 2013).

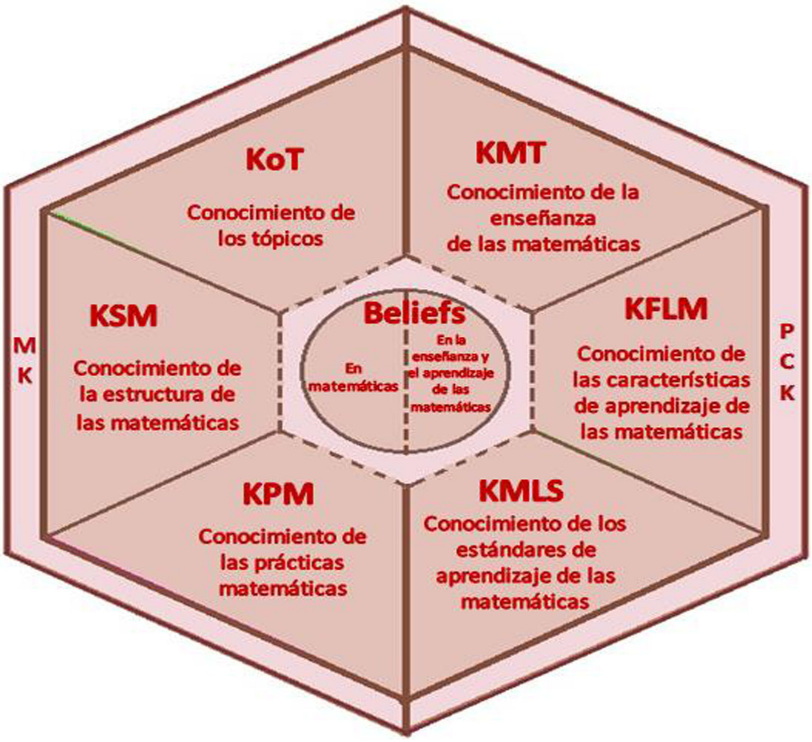


Figura 1. Mathematics teacher's specialised knowledge[2]

Construimos el MTSK como un modelo analítico del conocimiento del profesor de matemáticas de tipo descriptivo, propicio para elaborar una interpretación del conocimiento especializado del profesor desde un punto de vista integral, que toma en consideración las distintas naturalezas, tanto del dominio matemático como del dominio didáctico específico, es decir, tiene en cuenta las diferencias que existen en cuanto a

[2] Todas las siglas usadas para los subdominios provienen de su traducción al inglés.

los criterios de validez de uno y otro dominio y destaca las diferentes facetas en las que el profesor conoce el contenido matemático. Los procesos de construcción de conocimiento asociados a estos dominios también poseen diferencias, así como su expresión o manifestación, lo que implica diferentes aproximaciones de los investigadores para acceder a ellos.

En este modelo, la noción de especialización es intrínseca al tipo de reflexiones que el profesor establece sobre el contenido, de forma que entendemos por "especializado" cualquier conocimiento de índole matemática que el profesor pudiera requerir en su labor profesional.

Las concepciones y creencias del profesor son consideradas en el modelo de forma indiferente. Entendemos estas comoverdades personales incontrovertibles, derivadas de la experiencia o la fantasía, con una fuerte componente afectiva y evaluativa (Pajares, 1992; Ponte, 1994). Por su parte, "las concepciones son los esquemas subyacentes de organización de los conceptos, que tienen esencialmente naturaleza cognitiva" (Ponte, 1994, p. 199).La relación entre creencias y concepciones, así como su integración en el conocimiento, es una faceta que aún no se ha explorado en la profundidad necesaria como para llegar a puntos de consenso. Es por ello que adoptamos una posición pragmática, usando los términos creencias y concepciones en el mismo sentido y con el mismo significado. Se representan en el centro del modelo, para mostrar que interaccionan con todos los subdominios de conocimiento (especialmente creencias sobre la matemática con el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática con conocimiento didáctico). Reconocemos de este modo el papel de las creencias del profesor en la interpretación de supráctica, entendidas en la línea de lo que Leatham (2006) denomina *sensible system framework*. Pensamos también que las creencias representan una predisposición a través de las acciones y que no pueden ser directamente observadas o medidas, solamente inferidas. Al igual que el resto de elementos en el modelo, las creencias son consideradas con fines analíticos.

A continuación describimos de manera resumida los subdominios del modelo, comenzando con los correspondientes al dominio de conocimiento matemático.

Subdominios del conocimiento matemático

En lo correspondiente al conocimiento matemático, el modelo MTSK propone una separación de los subdominios basada en las diferentes formas de conocer la matemática disciplinar, escolar y didáctica (Tossavainen y Pehkonen 2013).El primer subdominio se refiere a un conocimiento profundo de los temas matemáticos. El segundo, tiene un carácter global en cuanto al conocimiento de la conectividad entre diferentes conceptos. El tercer subdominio, por su parte, es un conocimiento de las formas de proceder, crear y producir matemáticas.

Conocimiento de los temas matemáticos (KoT). Supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Integra el contenido que queremos que aprenda el alumno, con un nivel de profundización mayor.

Es importante decir que al utilizar el término “temas”nos referimos a los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente diferenciados en matemáticas, considerando como referenteslas áreas propuestas por el National Council of Teachers of Mathematics (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los cuales están relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas y pueden variar de acuerdo al currículo de cada país.

Conocimiento de la estructura de la matemática. Este conocimiento se refiere a las relaciones que establece el profesor entre distintos contenidos matemáticos, ya sea en un curso específico o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Consideramos aquí las conexiones interconceptuales entre contenidos matemáticos (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu, 2011), así como conexiones temporales (cuyo eje conector es la temporalidad, en el sentido de contenidos previos y posteriores, en cuanto a su proceso de construcción matemático, que conectan conceptualmente con uno dado). Las conexiones temporales pueden dar lugar a conexiones de complejización y de simplificación; mientras que como casos especiales de las conexiones interconceptuales diferenciamos las de contenidos transversales y las auxiliares (Monteset al., 2013; Montes, Contreras y Carrillo, 2013).

Conocimiento de la práctica matemática. Se sitúa aquí el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas (conocimiento sintáctico; Schwab, 1978), los aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba; por ejemplo, saber qué es definir y usar definiciones, además de establecer relaciones generales (entre conceptos, propiedades, etc.). Este subdominio se caracteriza por enfocarse en la identificación de prácticas propias del trabajo matemático, ligadas a un tema específico o a la matemática en general.

Subdominios del conocimiento didáctico del contenido

En el dominio del conocimiento didáctico del contenido, el MTSK identifica tres subdominios de conocimiento donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por lo que no se contemplan aquí conocimientos pedagógicos generales en contextos de actividades matemáticas.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. Responde a la necesidad del profesor de conocer el modo de pensar del alumno frente a las actividades y tareas matemáticas. Se refiere al conocimiento de las características del proceso de aprehensión de los distintos contenidos por parte de los estudiantes, así como el conocimiento sobre teorías de aprendizaje, personales o institucionalizadas, que pueda poseer el profesor; las fortalezas y dificultades, obstáculos o errores típicos, asociados al aprendizaje de un determinado contenido; los conocimientos sobre las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, es decir, sobre los procesos y estrategias de los estudiantes (habituales y no habituales) así como el lenguaje o vocabulario usualmente asociado al contenido (Flores-Medrano, Escudero, Montes y Carrillo, en prensa). Se consideran además, los conocimiento de las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático específico (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. Se refiere a los conocimientos que tiene el profesor sobre las teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, las distintas actividades, tareas, analogías o ejemplos que usa el profesor, así como los conocimientos sobre el potencial y limitaciones que pueden tener los recursos materiales o virtuales disponibles para la instrucción, al abordar determinados contenidos matemáticos.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.Versa sobre el conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales para saber lo que se prescribe en cada etapa, es decir, dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado. Además, se incluye la identificación del conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje no oficiales que pueda tener el profesor, como aquellos procedentes de asociaciones profesionales o de la investigación, o los que proceden de la experiencia del profesor respecto a los logros de aprendizaje, en relación con lo prescrito por la administración educativa. Se considera entonces el conocimiento de qué contenidos matemáticos corresponden al nivel de enseñanza que atiende el profesor, de cuáles están asociados al nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un determinado contenido, y los conocimientos sobre secuenciaciones de diversos temas dentro de un mismo curso o en cursos distintos.

El modelo MTSK supone una profundización en el conocimiento del profesor directamente relacionado con la enseñanza de la matemática. Planteamos aspectos que consideramos centrales en este conocimiento y reconsideramos en consecuencia los subdominios que conforman el MKT (relacionado con otra perspectiva de la especialización, asociada a la enseñanza de la matemática, que engloba al conocimiento del profesor en su conjunto, no una parte de este) y de las dificultades que les asociamos. Además, refinamos las caracterizaciones del conocimiento especializado, definiendo en términos de conocimiento, de modo intrínseco al propio conocimiento del profesor en relación con la enseñanza de la matemática, y detallando categorías dentro de los subdominios. Lo anterior refleja diferencias entre MKT y MTSK en su conjunto.

En la caracterización de los subdominios, el KoT supone un conocimiento profundo de la materia, que incluye relaciones intraconceptuales. El KSM no sólo contempla una visión de contenido en progreso (hacia delante, conexiones de complejización), sino también en cuanto a contenidos anteriores (conexiones de simplificación), así como contenidos transversales y auxiliares; se resalta la importancia del conocimiento de la práctica matemática (KPM). En KFLM y KMT se considera sólo conocimiento intrínsecamente ligado a la matemática (como objeto de enseñanza y de aprendizaje), y se incluye en ellos el conocimiento de aspectos teóricos. El KMLS amplía la referencia del currículo oficial. Finalmente, se integran las creencias del profesor sobre la materia y su enseñanza y aprendizaje.

El análisis del conocimiento especializado de Omar

Durante el Seminario intermedio del Grupo de Investigación Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), llevado a cabo en Sevilla, en Febrero de 2014, se presentó un primer análisis de esta actividad con la finalidad de realizar un debate sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, para lo cual se utilizaron diferentes perspectivas teóricas (Ribeiroet al., 2014). El análisis que presentaremos a continuación refleja parte de la presentación realizada para este encuentro, utilizando el MTSK como perspectiva de análisis. Además, hemos incorporado algunas reflexiones derivadas de las discusiones del seminario.

A continuación usaremos el modelo analíticoMTSK para elaborar una descripción del conocimiento especializado que un profesor de educación secundaria pone de manifiesto al resolver el problema de las cuerdas. Hemos decidido aprovecharesta actividad para mostrar la potencialidad del KoT identificado en la resolución del problema, tanto como forma de acceder al conocimiento, como en cuanto a su utilidad de cara al desarrollo de categorías del subdominio, con la intención de mostrar la potencialidad de este subdominio para analizar minuciosa y profundamente el conocimiento matemático implicado en la resolución de Omar.

Omar (seudónimo) es un profesor colombiano de enseñanza secundaria que, en el momento de la recolección de datos para este trabajo (enero a abril de 2013), se encontraba realizando una maestría en Matemática Educativa de formato virtual, en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del Instituto Politécnico Nacional en México, combinando esta actividad con su trabajo de profesor en Colombia. Al ser el programa de CICATA una maestría totalmente virtual, todas las participaciones y trabajos de los participantes quedan registrados en la plataforma Moodle, en la que se trabajan los cursos. Es importante destacar que Omar se encontraba cursando el segundo año de esta maestría orientada hacia la profesionalización docente y basada en propuestas derivadas de la investigación en didáctica de las matemáticas, por lo que muchas de sus participaciones hacen alusión a lecturas de investigación. Este hecho enriquece las respuestas del profesor y nos permite realizar un análisis de los elementos de conocimiento asociados al papel que desempeñan estas lecturas.

Tomando en cuenta que los datos que se presentan en este artículo son parte de la información de una investigación doctoral acerca del MTSK de profesores de secundaria en un contexto de formación continua, la actividad que se presentará a continuación muestra una visión parcial del trabajo de Omar con el problema. Presentamos una parte de la primera de cinco actividades que hace el profesor como parte del trabajo de uno de los cursos del programa de maestría en línea, en la cual se pide resolver el ya mencionado problema de las cuerdas, presentar las distintas técnicas o formas en las cuales puede resolverse el problema y, por último, se cuestiona a los participantes sobre el nivel en el cual puede utilizarse esta actividad como actividad de trabajo en el aula. Aunque se pide a los profesores tomar el papel de resolutor y no de educador, Omar, al igual que sus compañeros de curso, realiza una descripción de su proceso de solución que deja entrever una constante reflexión sobre los procesos de solución y las relaciones con el bagaje de conocimientos que requerirían los estudiantes para resolver el problema(ver anexo 1).

Con respecto a la perspectiva desde la cual se analiza la actividad, realizamos un análisis de contenido (Bardin, 1977) de la producción escrita del profesor, teniendo presentes las definiciones de los distintos subdominios del modelo MTSK. Hemos de decir que este análisis, junto con el de otros episodios en los que hemos podido estudiar el conocimiento de profesores, nos han permitido ir refinando y completando las definiciones de los subdominios y su categorización, en una interacción constante entre análisis y reflexión teórica. Consideramos que, de este modo, el análisis de los datos que ha contribuido a la definición del modelo MTSK se sitúa en la *grounded theory* (Strauss y Corbin, 1994).

Así, las descripciones de los subdominios del MTSK, son la base para el análisis de la resolución del problema por parte de Omar, organizando los fragmentos de su producción en categorías que ayuden a diferenciar los tipos de conocimiento identificados en cada subdominio.

Además, hemos señalado indicios que, si bien son insuficientes para hablar de un conocimiento evidente en ellos, consideramos que pueden ser puntos de interés para profundizar en aspectos que pueden usarse como detonador para realizar un análisis más profundo y diversificado del MTSK del profesor, por lo que quisimos resaltarlos como posibles focos de interés u oportunidades de investigación(Flores, Escudero y Aguilar, 2013), además de señalar las diferencias con los fragmentos en los que sí se han realizado asignaciones de evidencias de conocimiento a subdominios en el modelo.

Discusión de resultados

Coincidimos con Shulman (1986) en que es necesario que el profesor conozca el qué, y el porqué de los contenidos que enseña, además del cómo manejarlos y trabajarlos, matemáticamente hablando. De esta forma hemos analizado la actividad de manera que pudiéramos identificar los conocimientos que el profesor utiliza como base para abordar el problema y que, por lo tanto, forma parte del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas y el uso de un problema en el aula y de su conocimiento de los temas (Carrillo, Climent et al., 2013).

Con respecto al KoT

El KoT supone algo más que el conocimiento de la matemática como disciplina; el profesor debe conocer y entender los contenidos de la matemática escolar, comprender sus propiedades y significados de manera fundamentada, los procedimientos estándar y alternativos que se llevan a cabo al abordar un determinado contenido, o las distintas formas de representación matemática o registros de representación asociados al mismo, además de los fenómenos que pudieran estar asociados a la naturaleza de los contenidos y los aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permiten al profesor comprender diferentes significados que pueden atribuírsele al contenido (Carrillo, Climent et al., 2013; Carrillo, Contreras y Flores, 2013; Vasco y Climent, en prensa).

Teniendo en mente estos conocimientos,mostramos a continuación lo que el modelo MTSK nos ha permitido reconocer sobre el KoT identificado en el trabajo de Omar, el cual hemos organizado en categorías surgidas de los mismos datos y la definición del subdominio.

Sobre los conocimientos de propiedades

En la primera parte de su actividad, el profesor manifiesta su conocimiento sobre las propiedades de algunos de los objetos matemáticos que usa para la resolución del problema. Sobre la circunferencia, el profesor hace alusión a los puntos que la conforman y define el concepto de cuerda, lo cual le proporciona un conocimiento base para proponer una estrategia gráfica para la solución del problema (el trazado y conteo manual de cuerdas).

> *Recordemos que cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo*[3].

Consideramos parte del KoTel conocimiento del conjunto de propiedades que hacen definible a un objeto determinado, además de formas alternativas que utilice el profesor para definir (aunque no incluimos aquí el conocimiento de las características que ha de tener una definición, que formaría parte del KPM del profesor), dado que en la matemática escolar es común definir los objetos matemáticos utilizando una serie de propiedades que cumplen.

Posteriormente, en la búsqueda de un método generalizable, Omar explicita otros conocimientos sobre las propiedades de los polígonos al utilizar los conocimientos que tiene sobre la fórmula que relaciona las diagonales y el número de lados de los polígonos. "$D = \frac{n}{2}(n-3)[\ldots]$ entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, está dada de la siguiente manera: $cuerdas = D + n\,[\ldots]$".

Los conocimientos que percibimos implicados en el uso que hace el profesor de esta fórmula van más allá de la memorización de un modelo matemático, puesto que

[3] Indicamos de esta manera las unidades de información extraídas de la resolución de Omar (Anexo 1), destacando en cursiva los fragmentos que consideramos evidencias del conocimiento señalado en cada caso.

Omar establece una relación entre las cuerdas del círculo y las diagonales y lados de los polígonos inscritos dentro de una circunferencia, lo que requiere un conocimiento acerca de la relación existente entre el número de diagonales y vértices de un polígono. Este conocimiento se ubica dentro del KoT y no en el KSM, por ser considerado como una conexión intraconceptual que hace el profesor.

Al establecer estas relaciones reconocemos que Omar comienza a esbozar una estrategia algebraica para resolver el problema, a la cual trata de dar sustento mencionando que funciona sin importar el tipo de polígono que se pueda trazar en la circunferencia. Una vez que desarrolla la fórmula parece notar, además, que esta no se relaciona con la distancia entre los vértices del polígono, por lo que puede afirmar entonces que este procedimiento funciona tanto para puntos equidistantes entre sí como para los que no lo son, relacionando esto con el trazado de polígonos regulares e irregulares.

> *La otra manera sería utilizando [...] el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.*
>
> *Esta sucesión está dada de la siguiente forma:* $D = \frac{n}{2}(n-3)$ *donde* (n) *me representa el número de lados del polígono inscrito.*
>
> *[...]los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.*

Identificamos aquí un conocimiento tácito del profesor sobre estos tipos de polígonos y sus diferencias con respecto a la distancia que hay entre sus vértices, además de que nuevamente establece una relación tácita entre los puntos sobre la circunferencia y los vértices de los polígonos, es decir, utiliza de nuevo la idea de polígonos inscritos.

Sobre los conocimientos de procedimientos

Omar propone dos estrategias o procedimientos de solución al problema, dentro de los cuales va realizando justificaciones sobre cuándo y cómo funciona cada uno. Esto nos indica que sabe resolver el problema, más aún, justifica y evalúa los procedimientos, estableciendo algunas de las limitaciones que tienen los métodos a la vez que utiliza los conocimientos que tiene sobre las propiedades de los contenidos.

La estrategia gráfica del profesor no se muestra pero es descrita por Omar, de manera que sabemos que consiste en trazar manualmente las cuerdas en un círculo, tomando algunos casos particulares. Además, el profesor identifica una dificultad de aplicación deese método para una cantidad grande de puntos, puesto que, al parecer, la visualización y conteo en casos mayores se tornaría complejo y quizá confuso para el estudiante, dejando plasmado en su proceso su conocimiento sobre cómo y cuándo podría funcionar su estrategia:“Una de las más comunes es trazar manualmente las cuerdas en un círculo; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.”

Por otro lado, Omar propone una segunda estrategia que podemos denominar algebraica, que parece no estar desvinculada de la primera. Se apoya en la observación de las posibles relaciones entre las cuerdas del círculo y las diagonales, los lados y los vértices de los polígonos inscritos.

> *Esta sucesión está dada de la siguiente forma:* $D = \frac{n}{2}(n-3)$ *donde* (n) *me representa el número de lados del polígono inscrito. [...]*
>
> *Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera:* $cuerdas = D + n$, *donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;* $cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$.

Sobre los conocimientos de distintos registros de representación del contenido
Dentro del KoT se considera importante incluir el conocimiento sobre la existencia de lo que Duval (en D'Amore, 2004) propone como distintos registros en los cuales puede representarse un determinado contenido dentro de la matemática (registro numérico, gráfico, verbal, analítico, etcétera), así como el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones (un medio, la mitad, etcétera).

Un aspecto importante sobre los procedimientos de solución que utiliza el profesor es que buscan hacer uso de los contenidos de forma distinta, en la primera estrategia se da prioridad a trabajar el contenido en un registro gráfico, al trazar y comparar casos específicos, lo cual podríamos asociar con un conocimiento de Omar de un registro figural o gráfico de representación de las cuerdas en los círculos. Incluso podemos observar una representación usada por Omar en la figura 2.

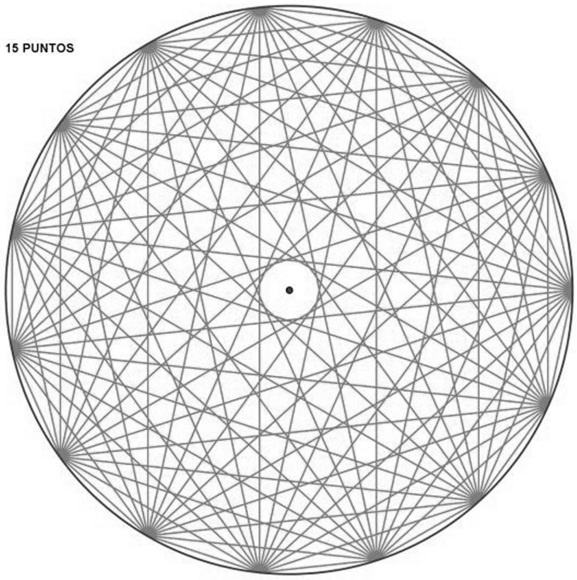


Figura 2. Ejemplo con un polígono regular

Por otra parte, a pesar de que en la segunda estrategia de solución el profesor propone un trabajo basado en la relación de los círculos y sus cuerdas con los polígonos inscritos, convirtiendo el problema en un problema geométrico, el trabajo que propone con el contenido está totalmente apoyado en el registro algebraico: $cuerdas = \frac{n}{2}(n-3)+n = \frac{n}{2}(n-1)$.

Llama especialmente la atención que Omar intente validar la fórmula haciendo uso de la noción de límite, aunque este no es un procedimiento necesario para la resolución y se encuentra desvinculado del propio problema (en caso de que el límite tuviera sentido, habría que considerar que *x* sea mayor que 1, puesto que para trazar una cuerda se necesita un mínimo de 2 puntos). Esto podría estar relacionado con las creencias del profesor sobre la importancia del rigor en matemáticas, con sus creencias sobre las valoraciones que puedan hacer sus compañeros y tutores de sus procesos de solución o con el conocimiento que tenga sobre los límites de sucesiones. Dado que el MTSK no pretende evaluar si el conocimiento del profesor es correcto o incorrecto, sino que intenta mostrar una descripción profunda de este, consideramos que este episodio nos proporciona una oportunidad de indagar acerca del conocimiento que tiene el profesor del proceso de obtención del límite, lo cual formaría parte de su KoT.“[…] puedo hallar el límite $\lim_{n\to x}(\frac{n}{2}(n-1))$ donde (x) es cualquier entero positivo”.

Identificamos también algunas oportunidades para profundizar en el uso del lenguaje que hace Omar en el siguiente segmento: “[…] se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo”.

Podríamos interpretar que Omar usa este lenguaje (impreciso) para hacer alusión al interior de la circunferencia. Surge entonces la oportunidad de profundizar acerca del conocimiento de la diferencia entre área e interior de la circunferencia, preguntando por esta expresión para saber si el uso de la misma es intencionado, y cómo se relaciona dicho uso con el conocimiento que tenga el profesor sobre las características del lenguaje de geometría usado en ese nivel educativo y de los posibles efectos en términos conceptuales que trae consigo el uso de lenguaje informal en la clase de matemáticas.

Una vez que hemos desgranado el conocimiento de los temas del profesor, podemos decir que este nos ha permitido profundizar en la parte medular del conocimiento matemático que evidencia Omar en esta actividad. En la figura 3 reorganizamos y relacionamos los conocimientos que hemos identificado de manera separada para comprender no solo qué conoce Omar, sino cómo lo conoce, lo usa y lo relaciona para dar solución al problema. En elipses se representan los conocimientos sobre propiedades de un contenido matemático, en rectángulos los conocimientos de procedimientos y en los pentágonos los conocimientos de registros de representación. Además, denotamos con líneas punteadas los contenidos de los cuales no hubo suficiente evidencia como para considerarlos parte del KoT pero que identificamos como posibles oportunidades de exploración de otros conocimientos. Además, mostramos la vinculación o desvinculación que existe entre los conocimientos que evidencia Omar. Los números corresponden a las codificaciones mostradas en el anexo 1.

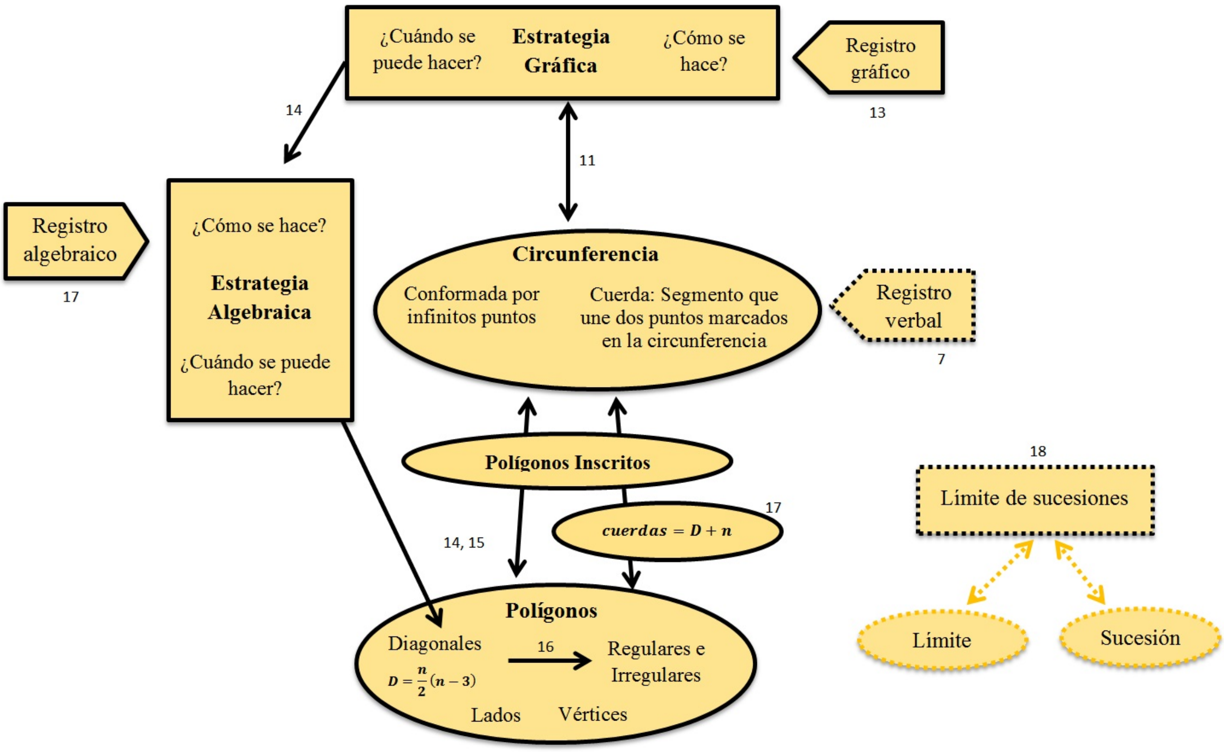


Figura 3. Conocimiento de los temas identificados en la resolución que hace Omar del problema de las cuerdas

A pesar de que la actividad contiene mucha más información del KoT que de ningún otro subdominio de conocimiento, consideramos importante mencionar algunos de los aspectos identificados en los demás subdominios del modelo, con la intención de tener una mirada global del conocimiento especializado identificado en la actividad de Omar.

Con respecto al KPM

Este subdominio es un aporte importante en el modelo, puesto que nos permite explorar las formas en las que el profesor realiza matemáticas, en este caso nos da información de Omar como resolutor del problema.

La exploración de casos simples parece ser lo que permite al profesor observar que las cuerdas trazadas en el círculo pueden relacionarse con polígonos inscritos en la circunferencia y sus correspondientes diagonales. Esto nos muestra que Omar tiene un conocimiento de que la descomposición en casos particulares le permite hacer un análisis puntual del problema y así generar ideas sobre la generalización del proceso, lo cual es una forma de proceder en matemáticas.

Además, se observa en todo el proceso de Omar una secuencia que va construyéndose a medida que avanza en resolver el problema, planificando y jerarquizando el uso y la relación de distintos contenidos: una vez que sabe que pueden calcularse las diagonales de un polígono, lo relaciona con los círculos (puesto que los polígonos pueden inscribirse en circunferencias de manera que las diagonales sean cuerdas de la circunferencia y los lados de los polígonos puedan considerarse como cuerdas), agrega el dato de los lados y transforma la fórmula.

A propósito de algunas afirmaciones del profesor, como la de que las diagonales de polígonos irregulares se marcan igual que las de los regulares "pero no son equivalentes",identificamos oportunidades para indagar acerca del conocimiento de Omar sobre las formas en que se valida una propiedad, cuándo se requiere de dichas validaciones e incluso de su conocimiento sobre la demostración en matemáticas.

Con respecto al KFLM

Con respecto a la introducción que el profesor elabora para la resolución de la actividad, consideramos que, a pesar de la desvinculación de esta con la resolución del problema, es importante destacar que Omar posee un conocimiento de trabajos de investigación que, muy probablemente, hayan sido consultadas como parte de las actividades formativas de la maestría que cursaba al momento de la toma de estos datos. En esta introducción el profesor refiere la siguiente cita de Brousseau (1986):

> *El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje.*

Vemos en este segmento un conocimiento de elementos teóricos sobre el aprendizaje derivados de la cita que usa de Brousseau, que podrían proporcionarle una base para construir su propia teoría personal de aprendizaje de las matemáticas.

Con respecto al KMLS

Al pedir a Omar que sitúe el problema en un nivel escolar en el que se pueda proponer como recurso didáctico, hace alusión a los temas que considera implícitos en las estrategias de solución que ha propuesto anteriormente, y habla del problema como un recurso aplicable en el 9° grado (14 o 15 años), puesto que es aquí donde se abordan los temas que identifica implicados en el problema y se establecen relaciones entre los registros gráficos y algebraicos, que él llama algorítmicos y que considera necesarias para la solución, y por último establece un nivel distinto de complejidad en torno al conocimiento necesario de límites de sucesiones.

> *[...] la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.*
>
> *En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.*
>
> *[...] la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.*

Inferimos además, que el profesor busca ubicar los contenidos pensando en las necesidades de conocimiento previo que percibe como demandas específicas de la solución. Consideramos que la ubicación del problema en el 9° grado podría tener que ver con el nivel de desarrollo conceptual que tendrían los estudiantes en este grado y en una ubicación temporal del contenido límites del currículo.

Utilizando la lógica del diagrama de la figura 3 (líneas continuas para conocimientos y líneas punteadas para oportunidades), elaboramos un esquema de todo el MTSK identificado en esta actividad, de tal manera que podamos plasmar el carácter holístico del modelo y nuestra visión de la integración del conocimiento. En la figura 4 se agregan al KoT de Omar (representado en color amarillo), los conocimientos sobre la práctica matemática en color azul, los conocimientos de los estándares de aprendizaje en color rojo y los conocimientos de las características de aprendizaje en color morado, de manea que se pongan de relieve las relaciones entre subdominios que se establecen a lo largo de la resolución del problema.

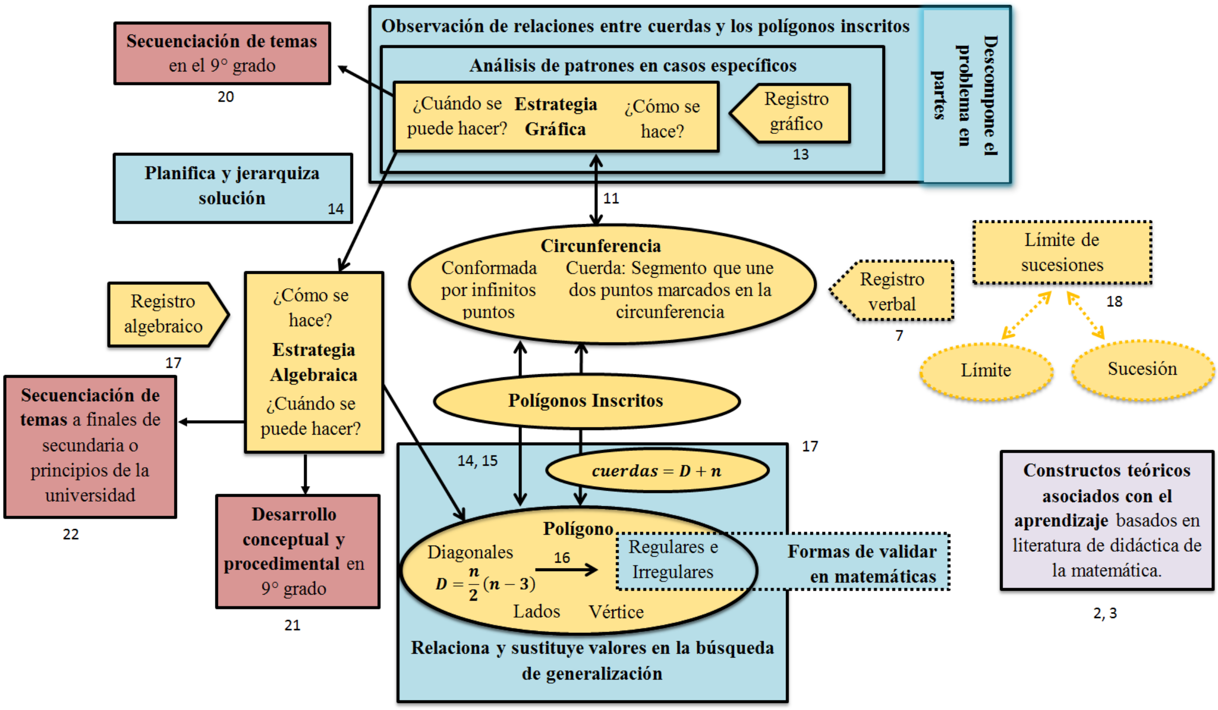


Figura 4. MTSK identificado en la resolución que hace Omar del problema de las cuerdas

Conclusiones

Las conclusiones que elaboramos a continuación no son sobre lo que Omar conoce de matemáticas, puesto que eso ha sido descrito en la sección anterior, sino que las hemos enfocado a analizar la potencialidaddel MTSK como herramienta para profundizar en dicho conocimiento. Las evidencias no dan cuenta de aspectos especialmente sobresalientes en cuanto al conocimiento de la circunferencia, el polígono u otros temas matemáticos, pero sí en cuanto al funcionamiento del MTSK.

El caso de estudio elegido ha resultado particularmente enriquecedor para resaltar el funcionamiento delos subdominios del MTSK como herramienta de análisis del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, por lo que consideramos que contribuye al objetivo de dar sustento teórico y empírico a este modelo en construcción. La profundización realizada dentro del KoT de Omar muestra las relaciones del contenido matemático con sus procedimientos para resolver el problema y sus reflexiones sobre este como una herramienta a usar en el aula.

Con este ejemplo se evidencia la importancia de descomponer o desempaquetar [usando el término de Ma(1999)] el conocimiento a través de herramientas teóricas que permitan, artificialmente, separar el conocimiento para profundizar en él de manera que podamos comprender no sólo lo que conoce el profesor, sino cómo lo conoce y cómo lo utiliza para la enseñanza.

El análisis del KPM de Omar nos permite observar su conocimiento sobre el trabajo matemático en sí mismo, sus formas de analizar, descomponer y planificar la resolución del problema. La identificación y explicitación de este subdominio en el modelo permite observar un tipo de conocimiento propio del resolutor de problemas, indispensable para el profesor de matemáticas.

Nos parece interesante resaltar el papel de las creencias de Omar. Los adornos gráficos (registro figural utilizado) o conceptuales (citas no directamente conectadas con el problema) parecen poner de manifiesto la importancia que Omar concede a elementos accesorios al problema, bien por su carácter motivador para los estudiantes, bien por la aparente muestra de erudición que puede esperar que sea valorada por los responsables del curso. Asimismo, introduce un formalismo innecesario (el uso del límite), que parece que desde su punto de vista añade valor a su resolución. Al parecer, el introducir las creencias como elemento que impregna y, quizá, en algunos casos condiciona el uso del conocimiento especializado del profesor, nos permite realizar una interpretación del porqué de las evidencias o ausencias de conocimiento.

Finalmente, introducir el término oportunidades da cabida a posibles profundizaciones en conocimientos que pueden no haber sido evidenciados dentro del trabajo del profesor, pero se destacan como focos de interés para el investigador que seguirá indagando sobre su conocimiento, tratando de construir un mapa cada vez más preciso del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Nos parece que hemos logrado ofrecer al lector una muestra de la potencialidad del modelo en cuanto a la separación por subdominios, además de evidenciar nuestro posicionamiento con respecto al carácter integrado de este conocimiento, que se puede ver reflejado en las figuras 2 y 3.

Con respecto al conocimiento de los temas, consideramos que la categorización utilizada en el análisis permite ir más allá de identificar los temas que conoce Omar, sino que busca analizar cómo los conoce y los usa.

Asimismo, creemos haber mostrado, a través de la exploración del potencial del modelo, algunas de las significativas diferencias que existen entre el propio modelo MTSK y el modelo cuyas limitaciones inspiran el desarrollo del mismo, el MKT. La reinterpretación de la noción de especialización elimina muchas de las dificultades analíticas inherentes al MKT, lo que supone una importante contribución del MTSK. Asimismo, en este nuevo modelo incluimos elementos no considerados en el anterior, como son las creencias, como elemento que permea el conocimiento del profesor, así como el conocimiento de la práctica matemática, que permite profundizar en la familiaridad que tiene el profesor con las formas de resolver problemas. En cuanto a las categorías propias del conocimiento didáctico del contenido, MTSK supone un refinamiento de los subdominios de MKT en términos del contenido de las mismas, así como en su conceptualización, focalizando la atención de los mismos en el conocimiento acerca de cómo las matemáticas son aprendidas, enseñadas, o de cuáles son las expectativas de aprendizaje en los diferentes niveles educativos. Por tanto, aunque reconocemos que existen paralelismos entre ambos modelos, MTSK supone un nuevo enfoque desde el cual comprender la naturaleza del conocimiento especializado, un modelo que pueda ser operativo en términos de diferenciar sus subdominios y que aporta contenidos no presentes en otras conceptualizaciones del conocimiento profesional propio del profesor de matemáticas.

REFERENCIAS

Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D. y William,D. (1997). *Effective teachers of numeracy*. Londres, Reino Unido: King's College.

Aubrey, C. (1997). *Mathematics teaching in the early years: An investigation of teachers' subject knowledge*. Londres, ReinoUnido: Falmer Press.

Ball, D.L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching* (pp. 1-48). Greenwich, CT:JAI Press.

Ball, D.L., Hill, H.C. y Bass, H. (2005). Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *29*(1), 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1977). *L'analyse de contenu*[Análisis de contenido]. París, Francia: PUF.

Begle, E.G. (1979).*Critical variables in mathematics education. Finding of a survey of the empirical literature*. Washington, DC: NCTM.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Cardeñoso, J., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada, España: Universidad de Granada.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L. C., Aguilar, A., Escudero, D. y Montes, M. A. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (España). En C. Dolores, M. García, J. Hernándezy L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 97-116). México, DF: Díaz de Santos.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,35,* 90-106.

Eisenberg, T.A. (1977). Begle revisited: Teacher knowledge and student achievement in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 8,* 216-222.

Escudero, D., Flores, E. y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y F. M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp. 35-42). México, D.F.: Cinvestav.

Fennema, E., Carpenter, T.P. y Peterson, P.L. (1989). Teachers' decision making and cognitively guided instruction: A new paradigm for curriculum development. En K. Clements y N.F. Ellerton (Eds.), *Facilitating change in mathematics education* (pp. 174-187).Geelong, Australia: Deakin University Press.

Flores, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepay N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao, España: SEIEM.

Flores, E. Escudero, D. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Hasery M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Flores-Medrano, E., Escudero, D., Montes, M. y Carrillo, J.(en prensa). Dos acercamientos para la caracterización del conocimiento que tiene un profesor acerca del aprendizaje en matemáticas. *Cuarto Simposio Internacional Espacio de Trabajo Matemático*. San Lorenzo del Escorial, España: ETM.

Hegarty, S. (2000).Teaching as a knowledge-based activity.*Oxford Review of Education, 26*(3-4), 451-465.

Herbst, P. y Kosko, K. (2012).Mathematics knowledge for teaching high school geometry. En L. R. Van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (Eds.),*Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 438-444), Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Hill, H.C., Rowan, B. y Ball, D.L. (2005).Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement.*American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Leatham, K.R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 91-102.

Ma, L. (1999).*Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. yDeulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real, España: SEIEM.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao, España: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).*Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research,62*(39), 307-332.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). En J. P. Ponte y J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. I, pp. 195-210).Lisboa, Portugal: PME.

Ribeiro, C. M., González, M. T., Fernández, C., Sosa, L., Escudero, D., Montes, M. A.,… Toscano, R. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica ─distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553-562). Salamanca, España: SEIEM.

Rowland, T. (2005). The knowledge quartet: A tool for developing mathematics teaching. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 69-81). Nicosia, Chipre: Cyprus Mathematical Society.

Rowland, T. (2007).Developing knowledge for teaching: A theoretical loop. En S. Close, D. Corcorany T. Dooley (Eds.), *Proceedings of the 2nd National Conference on Research in Mathematics Education* (pp. 14-27). Dublín, Irlanda: St. Patrick' College.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. yHuckstep, P. (2009).*Developing primary mathematics teaching*. Londres: SAGE.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N.J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education* (pp. 229-272). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Sosa, L., Aguayo, L. y Huitrado, J. (2013). KFLM: un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernándezy L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México, DF: Díaz de Santos.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Tossavainen, T. y Pehkonen, E. (2013). Three kinds of mathematics: Scientific mathematics, school mathematics and didactical mathematics. *Far East Journal of Mathematical Education, 11*(1), 27-42.

Vasco, D. y Climent, N. (en prensa). Conocimiento del profesor de Álgebra Lineal bajo el enfoque del mathematics teacher'sspecialised knowledge (MTSK). *Cuarto Simposio Internacional Espacio de Trabajo Matemático*. San Lorenzo del Escorial, España: ETM.

Dinazar I. Escudero-Avila
Universidad de Huelva
eadinazar@hotmail.com

José Carrillo
Universidad de Huelva
carrillo@uhu.es

Eric Flores-Medrano
Universidad de Huelva
ericfm_0@hotmail.com

Nuria Climent
Universidad de Huelva
climent@.uhu.es

Luis Carlos Contreras
Universidad de Huelva
lcarlos@uhu.es

Miguel Montes
Universidad de Huelva
miguel.montes@ddcc.uhu.es

Recibido: Julio 2014. Aceptado: Noviembre 2014.

ANEXO 1

Tabla 1

Codificación del documento de resolución del problema de las cuerdas de Omar, para el análisis

Codificación	Segmento textual
1	Actividad 1: el problema de cuerdas
2	La mayoría de trabajos realizados en el campo de la matemática, apuntan a encontrar estrategias para la enseñanza de diferentes conceptos dentro del aula, con el objeto de que el estudiante produzca conocimiento matemático.
3	“El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje” Brousseau (1986).
4	Resolver el siguiente problema:
5	Se colocan (n) puntos sobre una circunferencia.
6	a) ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?
7	Recordemos que cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.
8	La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞.
9	Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.
10	b) Presentar las técnicas o diferentes maneras en las cuales puede ser resuelto
11	Una de las técnicas más comunes es trazar manualmente las cuerdas en un círculo; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.
12	Ejemplo con un polígono regular

Tabla 1

Codificación del documento de resolución del problema de las cuerdas de Omar, para el análisis

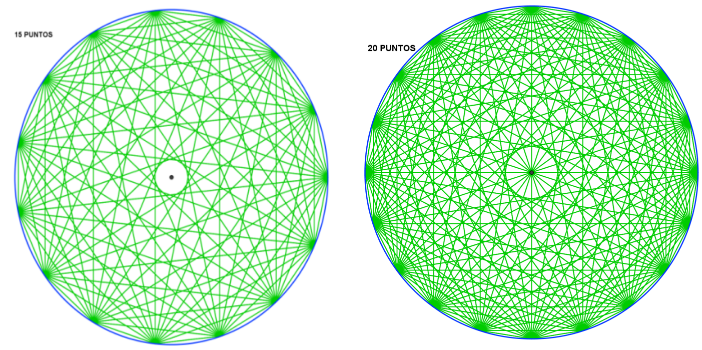
13	
14	La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.
15	Esta sucesión está dada de la siguiente forma $D = \frac{n}{2}(n-3)$, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.
16	Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.
17	Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: $cuerdas = D + n$, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono; $cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$
18	Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite $\lim_{n \to x}(\frac{n}{2}(n-1))$. Donde (x) es cualquier entero positivo.
19	c) ¿A qué nivel escolar se le puede proponer como actividad de trabajo?
20	Considero que la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.
21	En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.

Tabla 1
Codificación del documento de resolución del problema de las cuerdas de Omar, para el análisis

22	Respecto a la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.
23	REFERENCIAS
24	Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Facultad de matemática, astronomía, física. Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.