

# **INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS**



---

# **INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS**

## **Inestabilidad de barras comprimidas y pandeo global de estructuras**

---

**Alejandro E. Martínez Castro**  
**María Esther Puertas García**  
**Rafael Gallego Sevilla**  
Universidad de Granada



**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE ESTRUCTURAS E INGENIERÍA HIDRÁULICA**



*A los alumnos de Grado en  
Ingeniería Civil de la  
Universidad de Granada*



# Índice general

---

Relación de Figuras	IX
Relación de Tablas	XIII
Presentación	XV
Acrónimos	XIX

## PARTE I FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

<b>1</b>	<b>Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias</b>	<b>3</b>
1.1.	Introducción	4
1.2.	Clasificación y definiciones	5
1.3.	Problemas de valores iniciales y problemas de contorno	7
1.4.	EDO lineales con coeficientes constantes	9
1.5.	Método general de resolución de una EDO lineal con coeficientes constantes	11
1.5.1.	Método de resolución de la ecuación homogénea	12
1.5.2.	Métodos de determinación de la solución particular	15
1.5.3.	Ejemplos de resolución completa de EDO lineales con coeficientes constantes	21
1.6.	Resolución de una EDO lineal mediante paquetes informáticos	22
1.6.1.	Resolución con Maxima	22
		VII

1.6.2.	Resolución con Mathematica	23
--------	----------------------------	----

## PARTE II INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS DE BARRAS

<b>2</b>	<b>Inestabilidad de barras comprimidas</b>	<b>27</b>
2.1.	Motivación	29
2.2.	Ejemplos sencillos de comportamiento no lineal	31
2.2.1.	Barra rígida con empotramiento elástico: voladizo	31
2.2.2.	Barra rígida con empotramiento elástico: columna	32
2.3.	Pandeo de una columna aislada biarticulada	37
2.3.1.	Pandeo de Euler	38
2.3.2.	Consideración de grandes deformaciones	44
2.4.	Pandeo de columnas: influencia de las condiciones de contorno	51
2.4.1.	Elemento biempotrado	51
2.4.2.	Elemento empotrado - libre	54
2.4.3.	Elemento empotrado - deslizadera	56
2.4.4.	Elemento empotrado - apoyado	58
2.5.	Ecuación Diferencial de pandeo de columnas	62
2.6.	Longitud de Pandeo. Hipérbola de Euler	64
2.7.	Pandeo con imperfecciones	68
2.7.1.	Elemento biarticulado comprimido con excentricidad de carga	70
2.7.2.	Elemento biarticulado comprimido con forma inicial no rectilínea	74
<b>3</b>	<b>Pandeo global de estructuras de barras</b>	<b>81</b>
3.1.	Introducción	81
3.2.	Modos de pandeo global	82
3.3.	El elemento viga-columna	84
3.3.1.	Concepto de viga-columna	84
3.3.2.	Ecuaciones de equilibrio interno	86
3.3.3.	Ecuación diferencial de una viga-columna	88
3.3.4.	Solución de la ecuación	89
3.3.5.	Matriz de rigidez de la viga-columna	90
3.3.6.	Matriz de rigidez geométrica	95
3.4.	Análisis no lineal de estructuras en segundo orden: efecto P-Delta	98
3.5.	Pandeo global de estructuras	99
<b>A</b>	<b>Matrices de rigidez elementales en coordenadas globales</b>	<b>101</b>
A.1.	Cambio de base de una aplicación lineal	101
A.2.	Matriz de rigidez de la viga-columna 2D	103
A.3.	Matriz de rigidez geométrica	104
	Referencias	107



# RELACIÓN DE FIGURAS

---

1.1	Página de ayuda de Maxima para Ecuaciones Diferenciales	23
1.2	Ejemplos de resolución con Maxima de EDO lineales de orden 2	24
1.3	Ejemplos de resolución con Mathematica de EDO lineales de orden 2	24
2.1	Barra flexible sometida a fuerza axial	29
2.2	Experimento sencillo sobre una regla de medir flexible	30
2.3	Barra rígida. Voladizo con empotramiento elástico	31
2.4	Barra rígida en posición vertical, con empotramiento elástico en la base	33
2.5	Imagen conceptual de la idea de estabilidad, y su relación con la segunda derivada del potencial $\Pi$	36
2.6	Puntos de equilibrio estable en sistema barra-resorte	37
2.7	Columna biarticulada. Problema de pandeo de Euler	39
2.8	Modos y cargas de pandeo de la columna biarticulada	42
2.9	Columna biarticulada. Planteamiento con grandes curvaturas	45
2.10	Solución al problema de Euler: caso lineal vs no lineal	48

2.11	Posiciones de equilibrio para cargas crecientes. Solución no lineal	49
2.12	Modelo experimental para obtener el modo 2 en una columna biarticulada. Universidad de Northwestern (1969). Fuente: [1]	50
2.13	Verificación experimental de carga crítica en columnas con distintas condiciones de contorno. Fuente: "Buckledmodel" by Grahams Child - <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Buckledmodel.JPG">http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Buckledmodel.JPG</a> . Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons -	50
2.14	Columna biempotrada	51
2.15	Longitud de pandeo de columna biempotrada	54
2.16	Columna con condiciones de empotramiento-libre	55
2.17	Longitud de pandeo de columna empotrada-libre	57
2.18	Columna con condiciones de empotramiento-deslizadera	58
2.19	Longitud de pandeo de columna empotrada-deslizadera	59
2.20	Columna con condiciones de empotramiento-apoyo	60
2.21	Representación de los puntos de corte de $\tan(\theta) = \theta$	61
2.22	Longitud de pandeo de columna empotrada-apoyada	62
2.23	Pandeo de columna, caso general	63
2.24	Interpretación geométrica de la longitud de pandeo	65
2.25	Coefficiente $\beta$ de los 5 casos básicos	65
2.26	Curva de diseño combinando la hipérbola de Euler con el límite resistente. Resultados para acero $E = 210$ GPa, $f_y = 235$ MPa	67
2.27	Curvas europeas de pandeo para columnas. Tomado de EN-1993-1 (2005)	68
2.28	Curvas de resistencia de columnas rectas. Tomado de [7]	69
2.29	Tensiones residuales procedentes del proceso de laminado. Tomado de [7]	69
2.30	Tensiones residuales de soldadura. Tomado de [7]	69
2.31	Columna biarticulada con carga excéntrica	70
2.32	Diferentes curvas de carga para diferentes excentricidades de carga. Resultados de la teoría lineal	74
2.33	Contraste entre solución no lineal y lineal	75

2.34	Columna con forma inicial no rectilínea	76
2.35	Curvas de carga para diferentes amplitudes de imperfección geométrica inicial. Resultados de la teoría lineal	78
2.36	Efecto de pandeo tipo <i>snap-through</i> en elemento biarticulado con imperfecciones siguiendo el modo 2 de pandeo. Tomado de [8]	79
3.1	Pórtico con cargas verticales	82
3.2	Modos intraslacionales para relaciones límite $I_d/I_p$	83
3.3	Modos traslacionales para relaciones límite $I_d/I_p$	84
3.4	Viga, columna, viga-columna comprimida y viga-columna traccionada	85
3.5	Equilibrio de rebanada diferencial de viga-columna	87
3.6	Grados de libertad en desplazamientos. Fuerzas nodales.	91
3.7	Funciones de estabilidad para barra comprimida, axil $P$	94
3.8	Funciones de estabilidad para barra traccionada, axil $T$	95
3.9	Esfuerzos axiales en barras de un sistema de carga proporcional	97
A.1	Vectores unitarios para desplazamientos en sistemas de referencia local y global	102



# RELACIÓN DE TABLAS

---

2.1 Solución al problema de Euler no lineal

47



# PRESENTACIÓN

---

*A teacher can never truly teach unless he is still learning himself. A lamp can never light another lamp unless it continues to burn its own flame. The teacher who has come to the end of his subject, who has no living traffic with his knowledge but merely repeats his lessons to his students, can only load their minds; he cannot quicken them.*

—Rabindranath Tagore, poeta indio y premio Nobel de Literatura en 1913

En el diseño estructural, la incorporación de las mejoras en el conocimiento sobre el comportamiento de los materiales, los criterios de fiabilidad estructural, y el uso de los ordenadores permiten diseñar estructuras más económicas y seguras. El aprovechamiento óptimo del material, en general, se consigue reduciendo las secciones resistentes. Esto genera estructuras más esbeltas y flexibles que las diseñadas mediante criterios clásicos, basados en general en el aprovechamiento del material sólo en su fase elástica.

Dentro de los condicionantes derivados de la mayor flexibilidad y esbeltez, destacan dos especialmente: los *dinámicos*, consecuencia de una disminución de las frecuencias naturales de las estructuras (generándose fenómenos de amplificación

resonante frente a acciones como el viento, o el paso rítmico de cargas), y los *fenómenos no lineales*, tanto de tipo *geométrico* como de *material*.

En esta parte de la asignatura se introducirán los condicionantes derivados de la no linealidad de la estructura, de tipo *geométrico*, dejando aparte el estudio de la no linealidad de material (plasticidad, viscoelasticidad, etc).

Se estudiarán los fenómenos no lineales básicos en barras comprimidas, tanto en su configuración aislada como formando parte de estructuras. Dentro de estas piezas, el estudio se centrará en dos modelos clásicos: la columna y la viga-columna. Asimismo, se introducirá el análisis no lineal geométrico de estructuras de barras.

Se explorará un nuevo campo dentro de la teoría de estructuras, que es el asociado a soluciones no-lineales más generales.

El proceso de estudio del comportamiento estructural parte de una base general procedente de una asignatura de Mecánica Clásica. En la misma, se plantearon las ecuaciones generales que definen los campos de desplazamientos del sólido rígido, obteniéndose como solución unas *ecuaciones diferenciales* del movimiento, que son válidas tanto para valores pequeños como grandes de los diferentes grados de libertad. Desde el punto de vista matemático, la estructura general de estas ecuaciones diferenciales es de tipo *no lineal*.

Al iniciar el estudio de la Teoría de Estructuras, se sistematizó el uso de la teoría lineal. Partiendo de la teoría de la Elasticidad Lineal, se propusieron diferentes simplificaciones cinemáticas para introducir el estudio de piezas alargadas sometidas a esfuerzos axiales, flectores, cortantes o torsores. Asimismo, se estudiaron los desplazamientos en piezas alargadas, simplificándose de manera particular las formas de considerar los alargamientos y giros en las barras.

Posteriormente, dentro de la asignatura “Análisis de Estructuras”, se han estudiado el método matricial, y el de los elementos finitos, manteniendo la teoría lineal. Esto supone que frente a un conjunto de fuerzas, la solución es única si el sistema está correctamente vinculado.

Puede afirmarse que, hasta este momento, el alumno se encuentra *sobreexposto* [2] a las conclusiones propias de la teoría lineal.

Al acercarse al estudio de fenómenos no lineales, es necesario retomar los planteamientos generales y abandonar ciertas conclusiones de la teoría lineal. Sólo así se explica la aparición de más de una configuración de equilibrio para un problema, gobernado por una ecuación de tipo *no lineal*. Es necesario por tanto liberar la mente de ataduras, “*mente fresca, pero no vacía*” [2].

Esta parte de la asignatura se centra en el estudio de los problemas de estabilidad o *pandeo* en régimen elástico del material. En inglés, se denomina *elastic buckling*, para distinguirlo del estudio del problema de pandeo en el cual aparecen deformaciones plásticas (o en general, *anelásticas*). Todos estos conceptos se aclararán y desarrollarán en las sucesivas secciones. El contenido se ha estructurado en dos partes:



**Bloque 1: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias** : Este apartado es introductorio y presenta un complemento formativo muy necesario para poder entender los desarrollos matemáticos de la teoría de pandeo elástico. En el mismo se expone el estudio básico de las ecuaciones diferenciales. Dentro de las mismas, se ha desarrollado más la parte relativa a ecuaciones diferenciales de tipo lineal, y a las técnicas básicas de resolución.

**Parte II: Inestabilidad de piezas comprimidas** .

En esta parte se introducen los capítulos propiamente destinados al estudio de la teoría de pandeo elástico.

En primer lugar se introducen las diferencias entre la descripción lineal frente a la no lineal en el contexto de un problema sencillo de equilibrio de un sistema de un grado de libertad. Este problema permitirá observar que el planteamiento general y más intuitivo del problema genera una ecuación no lineal. Se observará que la solución para los puntos de equilibrio no es única. Se introducirán los conceptos de equilibrio *estable e inestable* entre las ramas de la solución. Se introducirá asimismo el concepto de *carga crítica*, o punto de bifurcación de equilibrio. Este ejemplo permitirá también introducir el concepto de *linealización*. Se compararán las conclusiones obtenidas entre la teoría lineal y la no lineal, acotando la validez de los resultados aportados por la teoría lineal.

A continuación se desarrollan el estudio de piezas comprimidas aisladas. Se presentará un nuevo elemento estructural, denominado *columna*. Se observarán las diferencias existentes entre la solución linealizada y la no lineal general. Se observarán asimismo la dependencia de las soluciones a las condiciones de apoyo en los extremos. Se observará el importante papel que juegan las imperfecciones geométricas en el comportamiento de la barra comprimida.

Finalmente, se extenderán los conceptos vistos en cálculo matricial, incorporando un nuevo tipo de barra, denominada la *viga-columna*. Se introducirá el análisis no lineal de estructuras. La condición de pandeo global surgirá asociada a la singularidad de la matriz de rigidez global del sistema. Se desarrollará, para sistemas de carga proporcional, el análisis de los factores de carga de pandeo, y los modos de pandeo asociados.

Para superar con éxito esta parte de la asignatura es importante haber comprendido bien los contenidos del Método Directo de la Rigidez. Se recomienda al alumno que refuerce los fundamentos de las diferentes partes que se han estudiado en “análisis matricial” (grados de libertad, cambios de base, apoyos no concordantes, condensación, etc), ya que en esta parte de la asignatura se introduce un nuevo elemento (la viga-columna), pero no se repiten los conceptos vistos allí.



# ACRÓNIMOS

---

EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales
GDL	Grado de Libertad
MDR	Método Directo de la Rigidez
MRG	Matriz de Rigidez Geométrica
PVP	Problema de Valores Propios
PVPG	Problema de Valores Propios Generalizado



PARTE I

---

FUNDAMENTOS  
MATEMÁTICOS

---



# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

---

*Differential equations form the basis for the scientific view of the world*

—V.I. Arnold

*If you wish to foresee the future of mathematics, our proper course is to study the history and present condition of the science*

—Henry Poincaré

*However varied may be the imagination of man, nature is a thousand times richer, ... Each of the theories of physics ... presents (partial differential) equations under a new aspect ... without the theories, we should not know partial differential equations*

—Henry Poincaré

En el estudio de problemas de física matemática, se plantean ecuaciones en las que interviene una función  $y(x)$  y sus derivadas. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones diferenciales*. En este capítulo se introducen los fundamentos

matemáticos implicados en este tipo de ecuaciones, ya que son necesarios para una correcta comprensión de la teoría de pandeo elástico. El estudio más general de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales cae fuera del ámbito de este documento. Se recomienda al lector que desee profundizar en este aspecto las siguientes referencias:

- Libro de Lev Elsgoltz [6], de la editorial MIR. Se pueden encontrar algunas ediciones traducidas del ruso, como la de la editorial Mir-Rubiños. En esta obra se muestran los aspectos básicos de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales lineales, y sus diversas formas de integración. También se exponen temas de cálculo variacional.
- Libro de Ecuaciones Diferenciales de la Serie Shaum [3]. Los libros de la serie Shaum son muy prácticos y cubren muy bien las necesidades del estudiante de ingeniería.
- Libro de Murray R. Spiegel [10]. Es un libro clásico, muy claro y enfocado para un estudiante de ingeniería. Contiene tres bloques básicos: i) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, ii) sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, iii) Ecuaciones en Derivadas Parciales.
- Libro de T. Myint-U [9]. Trata los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. Muy completo y revisado en su cuarta edición. Es un libro muy bien escrito y curioso, por sus numerosas citas de frases de científicos y pensadores en torno a la ciencia y las matemáticas. Algunas de las frases de esta publicación están obtenidas de sus páginas.

## 1.1. Introducción

Al estudiar un fenómeno físico, con frecuencia no es posible encontrar de inmediato las leyes que relacionan las magnitudes que gobiernan dicho fenómeno. Sin embargo, es fácil establecer la dependencia entre las magnitudes básicas y sus derivadas. Las ecuaciones que se plantean, por tanto, contienen como incógnita funciones desconocidas, de las cuales se conocen las relaciones que han de darse entre la función y sus derivadas.

Se denomina *ecuación diferencial* a una ecuación cuya incógnita es una función. La función puede ser escalar o vectorial. En la ecuación aparece la función incógnita, combinada con expresiones que implican sus derivadas. Veamos algunos ejemplos:

1. La ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (1.1)$$



es la ecuación de la desintegración radiactiva, en la cual  $k$  es la constante de desintegración y  $x$  es la cantidad de sustancia no desintegrada que existe en la muestra en el tiempo  $t$ . La observación física que da origen a esta ecuación consiste en plantear que la velocidad de desintegración (que es el término  $dx/dt$ ), en un instante de tiempo  $t$ , es proporcional, y con signo negativo, a la cantidad (o concentración) de sustancia no desintegrada.

2. La ecuación del movimiento de un punto material puede escribirse como,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}) \quad (1.2)$$

en la cual  $m$  es la masa del punto material,  $\mathbf{r}$  es el vector de posición, y  $\mathbf{F}$  representa el vector fuerza dependiente del tiempo  $t$ , el radio-vector  $\mathbf{r}$  y la velocidad  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ .

3. La ecuación que gobierna la torsión de Saint Venant en una pieza prismática de sección constante es,

$$\frac{\partial^2 \Phi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(y, z)}{\partial z^2} = -2G\Theta \quad (1.3)$$

respecto al sistema de referencia ubicado en el centro de gravedad  $\mathcal{R}\{G; x, y, z\}$  siendo el eje  $x$  colineal con la directriz de la barra, y los ejes  $y$  y  $z$  contenidos en la sección de estudio. La constante  $G$  es el módulo de rigidez tangencial, y  $\Theta$  es el parámetro de deformación angular unitaria de la sección (ángulo de torsión girado por unidad de longitud en la directriz de la pieza).

## 1.2. Clasificación y definiciones

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse, atendiendo al *número de variables* de las que depende la función, como sigue:

**Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** Son aquellas en las cuales la función a determinar depende únicamente de un parámetro. Por ejemplo, en la ecuación de desintegración radiactiva (1.1), la función  $x(t)$  sólo depende de un parámetro, el tiempo  $t$ . También son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, formando un sistema, las que intervienen en el análisis del equilibrio dinámico de un punto material, visto anteriormente en la ecuación (1.2).

**Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)** Son aquellas en las que las funciones dependen de varias variables, y las relaciones se establecen con derivadas parciales respecto a algunas de estas variables. Por ejemplo, la ecuación (1.3) es una ecuación en derivadas parciales.

Se denomina *orden* de una ecuación diferencial al grado de la derivada más alta de la función desconocida que interviene en la ecuación.

### ■ EJEMPLO 1.1 Orden de una ecuación diferencial

- La ecuación de flexión de una viga de Bernoulli-Euler, de módulo de elasticidad  $E$ , momento de inercia constante  $I$ , y carga distribuida por unidad de línea  $p(x)$  (positiva en la dirección  $y$  positiva) es:

$$\frac{dy^4(x)}{dx} = \frac{p(x)}{EI} \quad (1.4)$$

es una EDO de cuarto orden, ya que la derivada más alta que aparece es de orden 4.

- La ecuación

$$\frac{dy^3(x)}{dx^3} + \cos(x) \frac{dy(x)}{dx} = f(x) \quad (1.5)$$

es una EDO de orden 3.

- La ecuación

$$\frac{\partial^5 u(x, y, z)}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{\partial^3 u(x, y, z)}{\partial z^2 \partial y} + u(x, y, z) = 0 \quad (1.6)$$

es una EDP de orden 5.

Se llama *solución* de una ecuación diferencial a una función tal que, al ser sustituida en la ecuación, la convierte en una identidad. Así, para la ecuación (1.1) de desintegración radiactiva, su solución es:

$$x(t) = c e^{-kt} \quad (1.7)$$

siendo  $c$  una constante arbitraria.

Nótese que la solución representada por la ecuación (1.7) depende de una constante  $c$ , la cual ha de ser determinada a partir del conocimiento *inicial* que se tenga sobre la función  $x$ . Si, por ejemplo, se sabe que para el tiempo  $t = t_0$  la cantidad de sustancia que se desintegra vale  $x_0$ , es decir  $x(t_0) = x_0$ , entonces, la determinación de cuánto debe valer la constante  $c$  es inmediata:

$$x(t_0) = c e^{-kt_0} = x_0 \Rightarrow c = x_0 e^{kt_0}$$

quedando,

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)} \quad (1.8)$$

El proceso de determinación de las soluciones de una ecuación diferencial se denomina *integración*. En el ejemplo anterior, la solución es analítica y exacta. En la literatura, existen distintas técnicas de resolución analítica de ecuaciones diferenciales, las cuales sólo son aplicables cuando la estructura de la ecuación es de un determinado tipo. Este tipo da nombre al grupo de ecuaciones que se está estudiando. Así, en el estudio de las EDO es clásico encontrar procedimientos y reglas

de integración aplicables a determinados tipos de ecuaciones. Asimismo, es objeto de estudio de las ecuaciones diferenciales atribuir propiedades a las soluciones aún sin haberlas integrado explícitamente: existencia y unicidad, estabilidad, singularidades, etc. Finalmente, los *métodos numéricos* surgen para resolver ecuaciones diferenciales de forma aproximada, cuando lo que se desea es obtener una predicción basada en una ecuación diferencial. Este último aspecto está íntimamente ligado a la ingeniería y a las ciencias aplicadas. Es por esto que en los estudios de ingeniería, los métodos numéricos (como el método de los elementos finitos) ocupan un lugar destacado dentro de las herramientas matemáticas útiles al ingeniero.

### 1.3. Problemas de valores iniciales y problemas de contorno

En el ejemplo de desintegración radiactiva, la solución definida en la ecuación (1.8) se ha podido determinar imponiendo una *condición inicial*. En general, en el contexto de problemas mecánicos, este tipo de condiciones están asociadas a información que se dispone en un determinado instante de tiempo. Este tipo de problemas se denominan *problemas con condiciones iniciales*.

Existe otro tipo de condición, denominada *condición de contorno*, ya que se establece en el contorno (o frontera) de un dominio. En problemas de mecánica de sólidos, corresponde con líneas, superficies o volúmenes que describen cada tipo de modelización empleada para los sólidos. Así,

- Las vigas se modelizan mediante su línea media, correspondiendo su contorno a los puntos inicial y final de la viga.
- Las placas y láminas se modelizan mediante la *superficie media*, correspondiendo su contorno a las líneas que definen sus fronteras.
- Los sólidos se definen mediante un volumen limitado por las superficies que forman su contorno.

Se denomina *problema de contorno* a la búsqueda de solución de una ecuación diferencial con condiciones definidas en su contorno. Nótese que necesario especificar condiciones en todo el contorno (valores de la función, derivadas direccionales, o condiciones mixtas). Al contrario que ocurre en un problema de valores iniciales, se especifican los valores conocidos de la función en un conjunto de puntos, y no sólo en un instante de tiempo.

#### ■ EJEMPLO 1.2 Viga biempotrada

Anteriormente se vio que la ecuación (1.4) es la ecuación de flexión de vigas de Bernoulli-Euler. Cuando el término de carga es una función constante,  $p(x) = q$ , la ecuación queda:

$$\frac{dy^4(x)}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (1.9)$$

La integración de esta ecuación es sencilla, ya que basta integrar en  $x$  a cada lado de la igualdad. Integrando una vez, queda:

$$\int \frac{dy^4(x)}{dx^4} dx = \int \frac{q}{EI} dx \Rightarrow \frac{dy^3(x)}{dx^3} = \frac{qx}{EI} + c_1$$

donde  $c_1$  es una constante de integración. Repitiendo el proceso tres veces más se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dy^2(x)}{dx^2} &= \frac{qx^2}{2EI} + c_1x + c_2 \\ \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{qx^3}{6EI} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 \\ y(x) &= \frac{qx^4}{24EI} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3x + c_4 \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación  $y(x)$  queda determinada en función de cuatro constantes. Precisamente esas cuatro constantes se determinan imponiendo las condiciones de contorno en los extremos. Si la viga está empotrada, tanto en  $x = 0$  como en  $x = l$ , entonces

$$\begin{aligned} y(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} &= 0 \\ y(l) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} &= 0 \end{aligned}$$

Las cuatro condiciones de contorno definen en este caso un único valor para las constantes  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ . En efecto. Imponiendo que

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

Imponiendo a su vez que el giro es cero en  $x = 0$ ,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

queda por tanto, tras imponer las condiciones de contorno asociadas a  $x = 0$ , que  $y(x)$  debe tener la siguiente expresión,

$$y(x) = \frac{qx^4}{24EI} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2}$$

Imponiendo ahora la primera condición en  $x = l$ ,

$$y(l) = 0 \Rightarrow \frac{ql^4}{24EI} + c_1 \frac{l^3}{6} + c_2 \frac{l^2}{2} = 0 \quad (1.10)$$

y finalmente, imponiendo que el giro en  $x = l$  se anule, tendremos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \frac{ql^3}{6EI} + c_1 \frac{l^2}{2} + c_2 l = 0 \quad (1.11)$$

Ya sólo queda resolver  $c_1$  y  $c_2$  de las ecuaciones (1.10) y (1.11). De la ecuación (1.11) se puede definir la variable  $c_2$  en función de  $c_1$ , como sigue

$$c_2 = -\frac{ql^2}{6EI} - c_1 \frac{l}{2} \quad (1.12)$$

y sustituyendo en la ecuación (1.10) se tiene

$$\frac{ql^4}{24EI} + c_1 \frac{l^3}{6} - \left( \frac{ql^2}{6EI} + c_1 \frac{l}{2} \right) \frac{l^2}{2} \quad (1.13)$$

De esta ecuación puede resolverse directamente  $c_1$  y sustituir en la ecuación (1.12), quedando

$$c_1 = \frac{-ql}{2EI}; \quad c_2 = \frac{ql^2}{12EI}$$

Finalmente, la ecuación de la viga queda:

$$y(x) = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qlx^3}{12EI} + \frac{ql^2x^2}{24EI} \quad (1.14)$$

Con esto, se ha resuelto un primer *problema de contorno* sencillo. Las abscisas  $x = 0$  y  $x = l$  constituyen el contorno del dominio matemático de la viga, que es el conjunto de puntos  $x$  contenido en el intervalo  $(0, l)$  abierto.

Para facilitar la notación, en lo que sigue se empleará la notación simplificada para las derivadas:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$$

En general, el orden de la derivada se escribirá con un superíndice en números romanos, a partir de la derivada tercera; así:

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} = y^{IV}(x)$$

#### 1.4. EDO lineales con coeficientes constantes

Se denomina EDO de tipo lineal a aquella en la cual la función y sus derivadas se escriben como combinación lineal de funciones que dependen sólo de la variable independiente. Las función o sus derivadas no se encuentran elevadas a ninguna potencia, ni existen productos entre funciones o sus derivadas.

**EJEMPLO 1.3 EDO lineal**

Las siguientes EDO son lineales:

$$3y'''(x) - 5y''(x) + 8y(x) = 0 \tag{1.15}$$

$$y^{IV}(x) + 12xy''(x) + 8y(x) = 0 \tag{1.16}$$

$$y^{IV}(x) + e^x y''(x) + 8y(x) = x^2 \tag{1.17}$$

Las siguientes ecuaciones no son lineales, por aparecer productos de la función  $y(x)$  o sus derivadas.

$$y'''(x) + 5y'(x)y''(x) - 6y(x) = e^{-x}$$

$$y^{IV}(x) + y^2(x) = 0$$

Finalmente, las siguientes ecuaciones no son lineales, por no ser los coeficientes que acompañan a la función  $y(x)$  o sus derivadas funciones sólo de  $x$ .

$$\cos(x)y'(x) + e^{y(x)x} = 0 \tag{1.18}$$

$$y(x) - \cos(y'(x)) = 3x \tag{1.19}$$

Dentro de las EDO lineales, se distinguen dos tipos:

**EDO lineales con coeficientes constantes** Son aquellas en las que la combinación lineal se realiza mediante coeficientes que son constantes (no dependen de la variable independiente). Por ejemplo, la ecuación (1.15) es de tipo lineal con coeficientes constantes.

**EDO lineales con coeficientes variables** Son aquellas en las que los coeficientes que acompañan a la función o a sus derivadas son funciones que dependen de la variable independiente. Por ejemplo, la ecuación (1.16) es de tipo lineal, pero no es de coeficientes constantes, puesto que la función  $12x$  acompaña a la derivada segunda  $y''(x)$ . Análogamente, la ecuación (1.17) es lineal, pero no de coeficientes constantes. Finalmente, la ecuación (1.15) sí es una EDO lineal con coeficientes constantes.

En general, una EDO es lineal de coeficientes variables si puede escribirse como sigue:

$$a_n(x) \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x) y(x) = f(x) \tag{1.20}$$

con  $n \in \mathbb{N}$ .

En la notación alternativa para las derivadas, también puede escribirse como sigue:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (1.21)$$

En las ecuaciones anteriores, nótese que se ha escrito en el término de la izquierda la combinación de la función con sus derivadas, y en el término de la derecha se ha dejado aislada a una función  $f(x)$ , que no depende de  $y(x)$ . Si el término  $f(x)$  es cero, la EDO lineal se denomina *homogénea*; en cambio, si el término  $f(x)$  es una función no nula, la EDO lineal se denomina *completa*.

### 1.5. Método general de resolución de una EDO lineal con coeficientes constantes

Esta sección se centra en el estudio práctico del método de resolución general de una EDO lineal con coeficientes constantes. El formato general de una ecuación de este tipo puede escribirse como,

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (1.22)$$

siendo  $a_n \dots a_1$  coeficientes constantes, y  $f(x)$  una función que sólo depende de  $x$ .

La solución general de una ecuación de este tipo es suma de dos términos.

$$y(x) = y^h(x) + y^p(x) \quad (1.23)$$

siendo  $y^h(x)$  la solución de la *ecuación homogénea*, e  $y_p(x)$  una solución particular que cumpla la *ecuación completa*.

La ecuación homogénea es idéntica a la original (1.22), pero con  $f(x) = 0$ . Por tanto,

$$a_n [y^h(x)]^{(n)} + a_{n-1} [y^h(x)]^{(n-1)} + \cdots + a_1 [y^h(x)]' + a_0 y^h(x) = 0 \quad (1.24)$$

La solución de (1.24) contendrá las constantes de integración del problema.

La solución particular  $y^p(x)$  es una solución *cualquiera* del siguiente problema,

$$a_n [y^p(x)]^{(n)} + a_{n-1} [y^p(x)]^{(n-1)} + \cdots + a_1 [y^p(x)]' + a_0 y^p(x) = f(x) \quad (1.25)$$

Sólo se exige para  $y^p(x)$  cumplir con (1.25), que en es una ecuación igual que la EDO del problema (1.22). No se le exige a  $y^p(x)$  cumplir ningún tipo de condición de contorno. Por lo tanto, no existe una única posibilidad, siendo cualquier  $y^p(x)$  que cumpla (1.25) válida para construir la solución.

Una vez obtenidas  $y^h(x)$  e  $y^p(x)$ , se construirá  $y(x) = y^h(x) + y^p(x)$ , y a ésta función sí se le pueden imponer condiciones de contorno, quedando las constantes libres procedentes de  $y^h(x)$  determinadas. Nótese que  $y^p(x)$  no aporta constantes de integración a la solución  $y(x)$ .

En lo que sigue se verá el método general de construcción de la solución homogénea, y se expondrán métodos para construir la solución particular para determinadas formas de  $f(x)$ .

### 1.5.1. Método de resolución de la ecuación homogénea

El método general consiste en probar como solución una función del tipo,

$$y(x) = e^{\gamma x} \quad (1.26)$$

siendo  $\gamma$  un parámetro a determinar. Si se asume que  $y(x)$  tiene la forma vista en la ecuación (1.26), sus derivadas se obtienen de forma sencilla. Así, para la primera derivada,

$$y'(x) = \gamma e^{\gamma x} \quad (1.27)$$

y en general, para una derivada de orden  $n$ , su expresión viene dada por,

$$y^{(n)}(x) = \gamma^n e^{\gamma x} \quad (1.28)$$

Sustituyendo la expresión de  $y(x)$  propuesta y la de sus derivadas en la ecuación, se obtiene que los valores de  $\gamma$  buscados son los ceros de un polinomio. Basta resolver los posibles valores de  $\gamma$  en el polinomio para encontrar las funciones que determinan una *base* de funciones en la cual puede escribirse la función  $y(x)$  como combinación lineal de coeficientes constantes desconocidos. Al resolver para  $\gamma$  pueden presentarse varios casos, lo cual origina diferentes estrategias para construir la solución base. Veamos estos casos.

**Caso I: Las raíces de  $\gamma$  son todas reales y distintas de cero** Este es el caso más general, y conduce directamente a una base formada por funciones exponenciales. Veámoslo con un ejemplo.

#### ■ EJEMPLO 1.4 Resolución de la ecuación homogénea, raíces reales

Consideremos la siguiente EDO,

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 0 \quad (1.29)$$

Claramente, esta ecuación es una EDO lineal con coeficientes constantes, de tipo homogéneo. Probemos una solución del tipo  $y(x) = e^{\gamma x}$ . En consecuencia, las derivadas de  $y(x)$  se escribirán como sigue,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \gamma e^{\gamma x} \\ y''(x) &= \gamma^2 e^{\gamma x} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación (1.29), tendremos

$$\gamma^2 e^{\gamma x} + 3\gamma e^{\gamma x} - 4e^{\gamma x} = 0$$



agrupando los términos en  $\gamma$  y observando que  $e^{\gamma x}$  es común, tendremos,

$$(\gamma^2 + 3\gamma - 4) e^{\gamma x} = 0$$

La función  $e^{\gamma x}$  no se anula para ningún valor de  $x \in \mathbb{R}$ . Por tanto, el paréntesis anterior ha de valer cero, quedando la ecuación de un *polinomio característico*,

$$\gamma^2 + 3\gamma - 4 = 0$$

polinomio cuyas soluciones son

$$\gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \quad (1.30)$$

Las dos soluciones de  $\gamma$  son

$$\gamma_1 = 1; \quad \gamma_2 = -4 \quad (1.31)$$

Por tanto, la solución para  $y(x)$  es,

$$y(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{-4x} \quad (1.32)$$

siendo  $c_1$  y  $c_2$  dos constantes, a determinar tras imponer las adecuadas condiciones de contorno.

**Caso II: Las raíces de  $\gamma$  son complejas** Las raíces del polinomio característico pueden ser complejas. Según la definición de la exponencial compleja:

$$e^{a+ib} = e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)) \quad (1.33)$$

Construir la solución con exponentes complejos es válido. Sin embargo, también puede definirse la solución en la base de funciones trigonométricas. Veámoslo con un ejemplo.

### ■ EJEMPLO 1.5 Resolución de la ecuación homogénea, raíces complejas

Considere la ecuación

$$y''(x) + 9y(x) = 0 \quad (1.34)$$

Para resolverla, busquemos una solución de la forma  $y(x) = e^{\gamma x}$ ; sustituyendo la función y sus derivadas en la ecuación (1.34) tendremos

$$(\gamma^2 + 9) e^{\gamma x} = 0; \quad (1.35)$$

La solución para  $\gamma$  es:

$$\gamma = \pm 3i \quad (1.36)$$

La solución puede escribirse por tanto como sigue;

$$y(x) = c_1 e^{i3x} + c_2 e^{-i3x} \quad (1.37)$$

La pareja de funciones exponenciales, teniendo en cuenta que en cada una de ellas puede realizarse la expansión (1.33) permite cambiar las funciones de base. En efecto, puede comprobarse, por simple sustitución en la Ecuación (1.34), que la siguiente función es solución también de dicha ecuación:

$$y(x) = d_1 \operatorname{sen}(3x) + d_2 \operatorname{cos}(3x) \quad (1.38)$$

con  $d_1$  y  $d_2$  dos constantes a determinar.

**Caso III: Raíces de  $\gamma$  con el mismo valor, pero múltiples** Otro caso interesante es el de polinomios con raíces dobles o de orden superior. En este caso la solución del polinomio característico tiene sólo una raíz. Para poder completar la base, es necesario añadir funciones adicionales. Estas funciones adicionales se construyen por producto de la base  $\{x, x^2, x^3, \dots\}$ , multiplicada por la solución exponencial para una raíz. Veámoslo con un ejemplo.

#### ■ EJEMPLO 1.6 Resolución de la ecuación homogénea, raíces múltiples

Considerese la siguiente EDO,

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0 \quad (1.39)$$

Probando una función de la forma  $y(x) = e^{\gamma x}$ , se obtendrá:

$$(\gamma^2 - 6\gamma + 9) e^{\gamma x} = 0 \quad (1.40)$$

Claramente, el término entre paréntesis es el *polinomio característico*, y debe valer cero. Pero este término puede escribirse como sigue:

$$\gamma^2 - 6\gamma + 9 = (\gamma - 3)^2 \quad (1.41)$$

Por tanto, la ecuación característica queda

$$(\gamma - 3)^2 = 0 \quad (1.42)$$

cuya solución es  $\gamma = 3$  *doble*. La función  $y(x) = e^{3x}$  es solución de la ecuación. Pero puesto que la ecuación es de orden 2, necesita 2 funciones para definir una base. Para construir una base, se completa con el producto de potencias en  $x$ , multiplicadas por la propia función  $y(x) = e^{3x}$ , hasta tener tantas funciones de base como orden tiene la ecuación. En este caso, sólo hay que añadir 1 función más, y será la  $y(x) = x e^{3x}$ . Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea será,

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \quad (1.43)$$

**Caso IV: Raíces  $\gamma = 0$  múltiples** Finalmente, puede presentarse una ecuación para la cual la derivada más baja no tenga orden 0. Supóngase el grado de la ecuación  $n$  y sea  $m$  el orden de la derivada menor. En este caso, el polinomio característico presenta  $\gamma = 0$  como solución, con multiplicidad distinta de cero. En tal caso, es necesario completar la base con las funciones  $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$  para tener una base con  $n$  términos.

### ■ EJEMPLO 1.7 Resolución de la ecuación homogénea, derivada más baja de grado superior a 0

Consideremos la siguiente EDO lineal homogénea.

$$y^{IV}(x) + 3y'''(x) - 4y''(x) = 0 \quad (1.44)$$

La búsqueda de una solución del tipo  $y(x) = e^{\gamma x}$  implica la formación del siguiente polinomio característico,

$$\gamma^4 + 3\gamma^3 - 4\gamma^2 = 0 \quad (1.45)$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$(\gamma^2 + 3\gamma - 4)\gamma^2 = 0 \quad (1.46)$$

La primera posibilidad para que la ecuación anterior sea cero es que  $\gamma^2 = 0$ . Esto implica que  $\gamma = 0$ , con multiplicidad 2. Si anulamos el primer paréntesis de la ecuación, entonces

$$\gamma^2 + 3\gamma - 4 = 0 \quad (1.47)$$

Esta ecuación ya se resolvió en el Ejemplo 1.4. Sus soluciones son,  $\gamma_1 = 1$  y  $\gamma_2 = -4$ . Si considerásemos que la solución general fuese,

$$y(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{-4x} \quad (1.48)$$

observaríamos que, siendo la ecuación de grado 4, faltarían 2 términos en la base. Para construir la base, completamos con las funciones generadas por las potencias  $\{1, x\}$ . Por tanto, la solución general quedará como sigue

$$y(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{-4x} + c_3 + c_4 x \quad (1.49)$$

Claramente, esta solución verifica la EDO (1.44) e incluye una base completa.

El resto de situaciones que puede presentarse para resolver la ecuación homogénea incluye una combinación de estos casos.

#### 1.5.2. Métodos de determinación de la solución particular

No existe un método general que permita construir cualquier solución particular. La búsqueda de una solución particular depende de la forma que tenga la función  $f(x)$ . En esta sección se verán los casos más habituales:

**Término  $f(x)$  polinómico** Consideramos en este caso que la función  $f(x)$  sea un polinomio, de grado total  $m$ :

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m \quad (1.50)$$

con  $b_0, b_1, \dots, b_m$  constantes. En este caso, se prueba una función  $y^p(x)$  que tenga la misma forma que  $f(x)$ .

$$y^p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m \quad (1.51)$$

con  $c_0, c_1, \dots, c_m$  constantes, las cuales se determinan sustituyendo (1.51) en la EDO que debe cumplir, que es (1.25). Las constantes quedan determinadas, ya que una característica fundamental de la solución particular es que no incluye constantes “libres” de integración.

■ **EJEMPLO 1.8 Búsqueda de una solución particular cuando  $f(x)$  es polinómica**

Consideremos la ecuación

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 11 - 4x \quad (1.52)$$

Para construir la solución particular, probamos una función  $y^p(x)$  de la forma

$$y^p(x) = c_0 + c_1x \quad (1.53)$$

Nótese que se ha considerado una expansión lineal, porque  $f(x)$  es lineal. Las derivadas de esta solución particular son:

$$\begin{aligned} [y_p(x)]' &= c_1 \\ [y_p(x)]'' &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$0 + 3c_1 - 4(c_0 + c_1x) = 11 - 4x \quad (1.54)$$

quedando

$$3c_1 - 4c_0 - 4c_1x = 11 - 4x \quad (1.55)$$

Cada potencia de  $x$  de forma independiente produce una ecuación. Escribiremos por tanto una ecuación en la que igualamos todo lo que no lleva potencias de  $x$ , y otra en la que se incluyen los términos que van con  $x$ . Esto es así porque la ecuación anterior es válida, para todo  $x$  incluido en el dominio de definición de la ecuación, y no sólo para valores puntuales de  $x$ .

$$\begin{aligned} 3c_1 - 4c_0 &= 11 \\ -4c_1 &= -4 \end{aligned}$$

La segunda ecuación permite resolver  $c_1 = 1$ ; sustituyendo en la primera, encontramos que  $c_0 = -2$ . Por tanto, la solución particular buscada es

$$y^p(x) = -2 + x \quad (1.56)$$

En efecto, puede comprobarse que la función  $y^p(x)$  de (1.56) verifica (1.52). Esto es así porque, *por construcción*, se ha ajustado una  $y_p(x)$  para que cumpla dicha ecuación. Obsérvese que la expresión (1.56) no incluye constantes no definidas, al contrario de lo que ocurre al resolver para la ecuación homogénea.

El método anteriormente visto necesita una modificación, que se da cuando en la ecuación homogénea correspondiente hay raíces del polinomio característico en  $\gamma = 0$ . Esta situación se da, cuando los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_\alpha$ , con  $\alpha < n$  son nulos. En esta situación  $\gamma = 0$  es una raíz, de multiplicidad  $\alpha$ . La solución particular se busca del tipo:

$$y_p(x) = x^\alpha (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) \quad (1.57)$$

análogo al procedimiento de búsqueda de la solución homogénea. Veamos un ejemplo.

■ **EJEMPLO 1.9 Búsqueda de una solución particular cuando  $f(x)$  es polinómica y el valor  $\gamma = 0$  está en la ecuación característica**

Consideremos la siguiente ecuación,

$$y''(x) + y'(x) = x - 2 \quad (1.58)$$

Observamos que la derivada más baja es  $y'(x)$ . Esto indica que  $\gamma = 0$  será un cero con multiplicidad 1 en la ecuación característica. Probemos una solución particular del tipo:

$$y^p(x) = x(c_0 + c_1 x) \quad (1.59)$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación, se obtiene que  $c_0 = -3$ ,  $c_1 = 1/2$ . Por lo tanto,

$$y^p(x) = x\left(-3 + \frac{x}{2}\right) \quad (1.60)$$

**Término  $f(x)$  tipo  $f(x) = e^{kx}(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$**  Vamos a distinguir dos casos. En el primero de ellos,  $k$  no es raíz de la ecuación característica; en el segundo de ellos,  $k$  es raíz de multiplicidad  $\alpha$  de la ecuación característica.

- Caso I. El parámetro  $k$  no es raíz de la ecuación característica. En ese caso, la solución particular tiene la misma exponencial, y se plantea un polinomio del mismo tipo que el que incluye el término  $f(x)$ . Es decir,

$$y^p(x) = e^{kx}(c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) \quad (1.61)$$

- Caso II (denominado también *resonante*). En este caso, se plantea una solución del mismo tipo que  $f(x)$ , con un polinomio del mismo tipo que el incluido en  $f(x)$ , pero se incluye el producto de  $x^\alpha$ .

$$y^p(x) = x^\alpha e^{kx} (c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m) \quad (1.62)$$

Veamos estos casos en ejemplos.

#### ■ EJEMPLO 1.10

Consideremos la ecuación

$$y''(x) + 9y(x) = e^{5x} \quad (1.63)$$

La ecuación homogénea tiene valores  $\gamma = \pm i3$ , y estos valores son diferentes de 5, que es el parámetro  $k$  de la exponencial. La solución particular tiene la misma forma que la exponencial,

$$y^p(x) = c e^{5x} \quad (1.64)$$

La constante  $c$  se ajusta sustituyendo en la ecuación.

#### ■ EJEMPLO 1.11

Considérese la siguiente ecuación

$$y''(x) + y(x) = e^{3x}(x-2) \quad (1.65)$$

La solución particular, teniendo en cuenta que la ecuación característica tiene por valores  $\gamma = \pm i$ , distinto de  $k = 3$ , tendrá la forma,

$$y^p(x) = e^{3x}(c_0 + c_1 x) \quad (1.66)$$

Las constantes  $c_0$  y  $c_1$  se determinarán sustituyendo esta solución en la ecuación

#### ■ EJEMPLO 1.12

Consideremos la ecuación

$$y''(x) - y(x) = e^x(x^2 - 1) \quad (1.67)$$

En este caso, las raíces del polinomio característico son  $\gamma = \pm 1$ . Observamos que la raíz  $\gamma = 1$  es la misma que el exponente de la función exponencial, es decir  $k = 1$ . Además, tiene multiplicidad 1. Por tanto, se buscará una solución particular con el siguiente formato,

$$y^p(x) = x e^x (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \quad (1.68)$$

Las constantes  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  se determinarán sustituyendo en la ecuación.

**Término  $f(x)$  tipo trigonométrico** Consideremos en esta sección el caso en el que  $f(x) = A \operatorname{sen}(kx)$ . Este caso es análogo a aquel en el que la función sea  $f(x) = B \operatorname{cos}(kx)$ . En ambos casos,  $A$  y  $B$  son dos constantes. Se distinguen nuevamente dos casos: que  $k$  no sea una de las raíces  $\gamma$  del polinomio característico, o bien que sí lo sea.

En el caso en el que  $k$  no sea una de las raíces  $\gamma$ , probaremos una función del tipo:

$$y^p(x) = c_1 \operatorname{sen}(kx) + c_2 \operatorname{cos}(kx) \quad (1.69)$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinarán sustituyendo en la ecuación e igualando los coeficientes que acompañen, por separado, a las funciones  $\operatorname{sen}(kx)$ , y haciendo nulos los coeficientes en  $\operatorname{cos}(kx)$ .

### ■ EJEMPLO 1.13

Consideremos la ecuación

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 2 \operatorname{sen}(5x) \quad (1.70)$$

Las raíces de  $\gamma$  son  $\gamma_1 = 2$  y  $\gamma_2 = -3$ . Claramente,  $k = 5$  no es ninguna de las raíces. Busquemos una solución de la forma

$$y^p(x) = c_1 \operatorname{sen}(5x) + c_2 \operatorname{cos}(5x) \quad (1.71)$$

Las derivadas primera y segunda son,

$$\begin{aligned} [y^p(x)]' &= 5c_1 \operatorname{cos}(5x) - 5c_2 \operatorname{sen}(5x) \\ [y^p(x)]'' &= -25c_1 \operatorname{sen}(5x) - 25c_2 \operatorname{cos}(5x) \end{aligned}$$

Sustituyendo la función y sus derivadas en la ecuación (1.70), queda

$$\begin{aligned} [-25c_1 \operatorname{sen}(5x) - 25c_2 \operatorname{cos}(5x)] - 5[5c_1 \operatorname{cos}(5x) - 5c_2 \operatorname{sen}(5x)] \\ + 6[c_1 \operatorname{sen}(5x) + c_2 \operatorname{cos}(5x)] = 2 \operatorname{sen}(5x) \end{aligned}$$

Agrupando todo lo que va con  $\operatorname{sen}(5x)$  y  $\operatorname{cos}(5x)$ ,

$$[-25c_1 + 25c_2 + 6c_1] \operatorname{sen}(5x) + [-25c_2 - 25c_1 + 6c_2] \operatorname{cos}(5x) = 2 \operatorname{sen}(5x)$$

Quedando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} -19c_1 + 25c_2 &= 2 \\ -25c_1 - 19c_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$c_1 = \frac{-19}{493}, \quad c_2 = \frac{25}{493} \quad (1.72)$$

y por tanto, la solución particular buscada queda,

$$y^p(x) = \frac{-19}{493} \operatorname{sen}(5x) + \frac{25}{493} \operatorname{cos}(5x) \quad (1.73)$$

Otro caso, de gran interés en el contexto de problemas de vibraciones, se da cuando la raíz compleja ( $ik$ ) es precisamente una de las raíces del polinomio característico, de multiplicidad  $\alpha$ . En este caso, denominado *resonante*, la solución particular se construye ponderando la combinación de funciones trigonométrica, por  $x^\alpha$ . Es decir,

$$y^p(x) = x^\alpha [c_1 \operatorname{sen}(kx) + c_2 \operatorname{cos}(kx)] \quad (1.74)$$

### ■ EJEMPLO 1.14

Considérese la ecuación

$$y''(x) + 16y(x) = 3 \operatorname{sen}(4x) \quad (1.75)$$

Las raíces del polinomio característico son  $\gamma = \pm i4$ . Puesto que 4 está presente en la función  $\operatorname{sen}(4x)$ , la función  $y^p(x)$  debe buscarse de la forma

$$y^p(x) = x [c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2 \operatorname{cos}(4x)] \quad (1.76)$$

La primera derivada es

$$[y^p(x)]' = [c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2 \operatorname{cos}(4x)] + x [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] \quad (1.77)$$

y la segunda derivada,

$$[y^p(x)]'' = 2 [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] + x [-c_1 16 \operatorname{sen}(4x) - c_2 16 \operatorname{cos}(4x)] \quad (1.78)$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$2 [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] + x [-c_1 16 \operatorname{sen}(4x) - c_2 16 \operatorname{cos}(4x)] + 16x [c_1 \operatorname{sen}(4x) + c_2 \operatorname{cos}(4x)] = 3 \operatorname{sen}(4x)$$

El segundo y tercer sumando del término de la izquierda son iguales, y cambiados de signo. Se anulan y por tanto, queda,

$$2 [c_1 4 \operatorname{cos}(4x) - c_2 4 \operatorname{sen}(4x)] = 3 \operatorname{sen}(4x)$$

Igualando los coeficientes que multiplican a la función  $\operatorname{sen}(4,x)$ , y los que multiplican a  $\operatorname{cos}(4,x)$ , tendremos dos ecuaciones para  $c_1$  y  $c_2$ .

$$\begin{aligned} 8c_1 &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ -8c_2 &= 3 \Rightarrow c_2 = -\frac{3}{8} \end{aligned} \quad (1.79)$$



Por tanto, la solución particular será

$$y^p(x) = -\frac{3}{8}x \cos(4x) \quad (1.80)$$

Existen más casos resueltos en la literatura. Puede consultarse en la bibliografía recomendada, especialmente en [6] otros métodos de construcción de soluciones particulares.

### 1.5.3. Ejemplos de resolución completa de EDO lineales con coeficientes constates

La solución general de una EDO lineal de coeficientes constantes se construye sumando la solución de la ecuación homogénea, más una solución particular.

$$y(x) = y^h(x) + y^p(x) \quad (1.81)$$

Veamos algunos ejemplos de resolución

#### ■ EJEMPLO 1.15

Considérese la EDO

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 11 - 4x \quad (1.82)$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y^h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} \quad (1.83)$$

Una solución particular es,

$$y^p(x) = x - 2 \quad (1.84)$$

Por tanto,

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + x - 2 \quad (1.85)$$

#### ■ EJEMPLO 1.16

Considérese la EDO

$$y''(x) + y'(x) = x - 2 \quad (1.86)$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$y^h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \quad (1.87)$$

Una solución particular es

$$y^p(x) = x \left( \frac{x}{2} - 3 \right) \quad (1.88)$$

Por tanto, la solución de la ecuación es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 + x \left( \frac{x}{2} - 3 \right) \quad (1.89)$$

## 1.6. Resolución de una EDO lineal mediante paquetes informáticos

Una forma práctica de resolver ecuaciones diferenciales consiste en emplear asistentes matemáticos de cálculo simbólico. Estos asistentes tienen implementados los principales métodos de construcción de soluciones, y por tanto, permiten una rápida solución *práctica* eliminando errores. En esta sección se presentarán dos asistentes matemáticos: Maxima y Mathematica.

### 1.6.1. Resolución con Maxima

Maxima es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, vectores, matrices y tensores. Maxima produce resultados de alta precisión usando fracciones exactas, números enteros de precisión arbitraria y números de coma flotante con precisión variable. Adicionalmente puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones.

El código fuente de Maxima puede ser compilado en varios sistemas operativos incluyendo Windows, Linux y MacOS X. El código fuente para todos los sistemas y los binarios pre-compilados para Windows y Linux están disponibles en el Administrador de archivos de SourceForge.

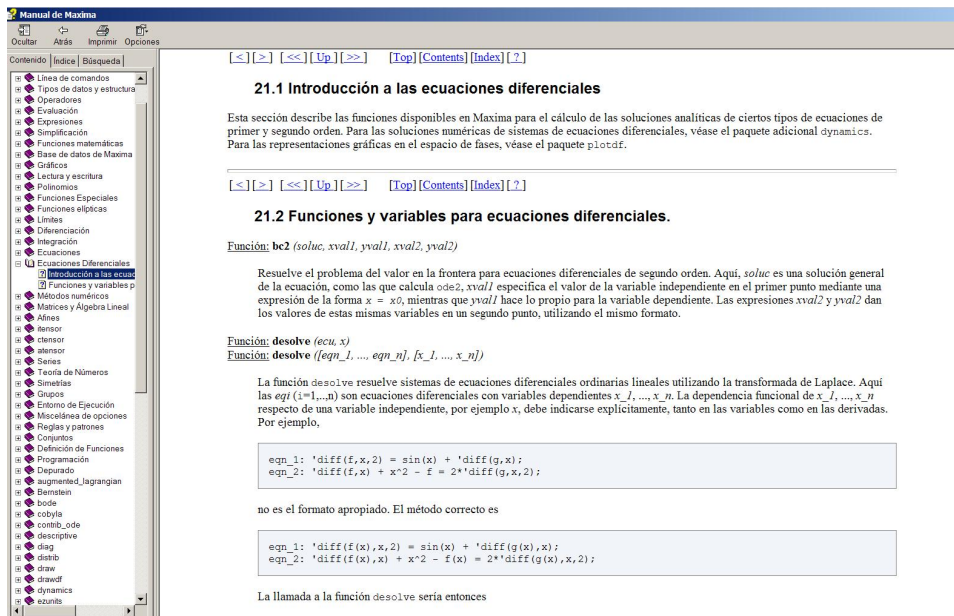
Maxima es un descendiente de Macsyma, el legendario sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Este es el único sistema basado en ese programa que está todavía disponible públicamente y con una comunidad activa de usuarios, gracias a la naturaleza del software abierto. Macsyma fue revolucionario en sus días y muchos sistemas posteriores, tales como Maple y Mathematica, se inspiraron en él.

La rama Maxima de Macsyma fue mantenida por William Schelter desde 1982 hasta su muerte en 2001. En 1998 él obtuvo permiso para liberar el código fuente bajo la licencia de software libre GPL. Su esfuerzo y habilidad hicieron posible la subsistencia del sistema Maxima. La comunidad científica le agradece su dedicación voluntaria, su tiempo y conocimientos, para mantener el código original de DOE Macsyma vivo. Después de su muerte se formó un grupo de usuarios y desarrolladores para propagar la audiencia de Maxima.

La Figura 1.1 muestra la ayuda del programa Maxima para resolver EDOs de segundo orden. Se muestra una pantalla obtenida de la compilación para Windows, denominada *WxMaxima*. En la ayuda, se indica que el procedimiento de resolución

está basado en la transformada de Laplace. El resultado final, para las ecuaciones analizadas en esta sección, es independiente del procedimiento empleado para resolverlas.

La Figura 1.2 muestra ejemplos de resolución de EDO lineales de orden 2. Los ejemplos están tomados a su vez de algunos ejemplos vistos anteriormente. El último de ellos es interesante, ya que se observa que la solución propuesta por Maxima para la solución particular difiere en una constante, respecto a (1.60). En efecto, la solución particular no es única, y puede verse que al sustituir la solución particular propuesta por Maxima en la EDO, también cumple la ecuación.



**Figura 1.1** Página de ayuda de Maxima para Ecuaciones Diferenciales

### 1.6.2. Resolución con Mathematica

El paquete Mathematica ha sido desarrollado por Wolfram Research, y constituye una excelente opción para cálculo simbólico. No es un programa libre, y es más completo, en general, que *Maxima*. Su desarrollo está fuertemente inspirado en él.

Mathematica permite resolver ecuaciones diferenciales de órdenes más altos. La Figura 1.3 muestra ejemplos de uso de Mathematica para resolver ecuaciones diferenciales. Nótese que en la última ecuación, la solución particular es idéntica a la propuesta en (1.60). Nuevamente, se hace la observación de que la solución particular no es única, y basta construir una cualquiera que cumpla la ecuación diferencial completa.

Figura 1.2 Ejemplos de resolución con Maxima de EDO lineales de orden 2

Actualmente, Mathematica se encuentra en su versión 10, y es el principal software de análisis simbólico que ofrece el mercado. Pueden consultarse sus características en la página web de Wolfram (<http://www.wolfram.com/mathematica/>).

Figura 1.3 Ejemplos de resolución con Mathematica de EDO lineales de orden 2

**PARTE II**

---

**INESTABILIDAD DE  
ESTRUCTURAS DE BARRAS**

---



## CAPÍTULO 2

---

# INESTABILIDAD DE BARRAS COMPRIMIDAS

---

*It is not say in the Bible that all laws of nature are expressible linearly*

—Enrico Fermi

*Using a term like nonlinear science is like referring to the bulk of zoology as the study of non-elephants animals*

—Stanislaw Ulam

De manera intuitiva, el concepto de *inestabilidad* en un elemento estructural puede asociarse a la idea de que *un pequeño cambio en la acción que solicita al elemento causa un gran cambio en el campo de desplazamientos*. Si este cambio en los desplazamientos es suficientemente grande, o se produce en un elemento crítico de una estructura, la inestabilidad local puede provocar el colapso de la estructura completa. Por tanto, comprender los fundamentos de la teoría de estabilidad, o los mecanismos que llevan a una estructura completa o a algunos de sus elementos a ser inestables, es una tarea importante en ingeniería.

En este capítulo se tratan los problemas de estabilidad de columnas aisladas. El marco de trabajo es el de la teoría de pandeo elástico. Entre las diferentes refe-

rencias bibliográficas existentes en el estado del arte, se recomienda al lector las siguientes:

- Libro de Timoshenko y Gere, *Theory of Elastic Stability* [11]. Referencia clásica en teoría de pandeo elástico. Existen ediciones tanto de McGraw-Hill como de Dover. El libro desarrolla la formulación teórica a los problemas de pandeo. El libro trata temas clásicos de pandeo de la viga-columna, pandeo torsional y lateral, pandeo de arcos, placas delgadas y láminas, entre otros temas.
- Libro del profesor José Domínguez Abascal, de la ETS de Ingenieros Industriales de Sevilla [5]. Los contenidos de este libro son los que se han impartido en la parte de Inestabilidad Estructural, en Análisis de Estructuras I, de la licenciatura en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de Granada.
- Libro de Juan Tomás Celigüeta, *Curso de análisis estructural* [4]. Este libro desarrolla en un capítulo específico los temas que se verán en esta asignatura, así como otros muy importantes pero que, por limitaciones de tiempo, no se verán en esta asignatura en detalle. Son los temas relativos a pandeo inelástico (teoría del módulo tangente, módulo reducido, teoría de Shanley) y a análisis no lineal (métodos iterativos para resolver la ecuación no-lineal de equilibrio). El libro está escrito en español (castellano).
- Libro de Bažant y Cedolin [1], *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Libro escrito por dos autores, hijos a su vez de prestigiosos ingenieros, investigadores y profesores, a los que se rinde tributo en el libro (Zdeněk J. Bažant y Lionello Cedolin). Este libro plasma la experiencia docente de ambos autores, tanto en la Universidad de Northwestern como en el Politécnico de Milan. Es interesante consultar la referencia al autor principal en la página web <http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/> donde se incluye un video breve (menos de 4 minutos) con referencias a sus logros científicos, ingenieriles y académicos. El libro es adecuado como libro de texto para estudiantes de grado, así como libro de consulta para estudios avanzados. Cubre temas de análisis dinámico de la inestabilidad, métodos energéticos, y especialmente, teorías anelásticas (pandeo elastoplástico, pandeo por fluencia), de daño y fractura.
- Libro de T. Galambos y A. Surovek, *Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers* [8]. El profesor Theodore Galambos es una de las mayores autoridades académicas internacionales en problemas de estabilidad de estructuras metálicas. Este libro está orientado a problemas de estabilidad, en estructura metálica. Desarrolla temas específicos de rigidización y arriostramiento para mejora de la estabilidad.



Otro interesante libro del mismo autor es la referencia *Guide to stability design criteria for metal structures*[7]. Es una referencia básica en temas de estabilidad para estructura metálica, en general.

## 2.1. Motivación

En esta sección se mostrará con un sencillo ejemplo que las ecuaciones conocidas hasta el momento, procedentes de teoría lineal, no son suficientes para explicar determinados fenómenos aparentemente simples. El marco de trabajo es el de un problema de barra flexible trabajando a axil.

Se considera una barra recta, de longitud  $L$ , sometida a la acción de una fuerza  $F$ , según muestra la Figura 2.1. La barra tiene una sección constante, de área  $A$ . El material tiene módulo elástico  $E$ . La barra se dispone entre dos apoyos simples. Se considera un sistema de referencia cartesiano,  $(x, y)$ , con origen en el punto inicial 1. Se considera el campo de desplazamientos axil  $u$  y el campo de desplazamientos transversal  $v$ .

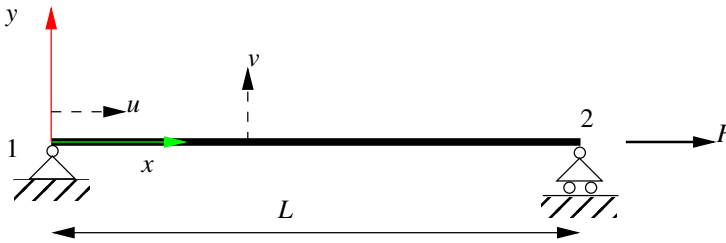


Figura 2.1 Barra flexible sometida a fuerza axil

Se desea determinar la solución al campo de desplazamientos  $u, v$  en los puntos de la barra.

Podría pensarse que, puesto que el modelo de barra trabajando a axil es conocido ya en Teoría de Estructuras, puede plantearse que la fuerza induce un estado de tracción uniforme en la barra, y que la solución al campo de desplazamientos es conocida: la barra únicamente experimentará desplazamientos en la dirección axil. El incremento de longitud de la barra puede calcularse mediante una sencilla expresión:

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} = u_2 \quad (2.1)$$

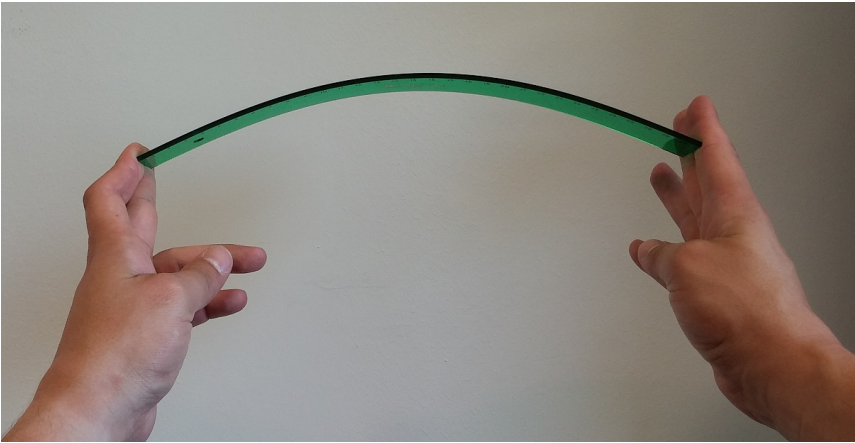
con  $v = 0$ , ya que según la teoría lineal, no hay desplazamientos en la dirección transversal. Si ahora se plantea que la fuerza  $F$  induce una compresión uniforme en la barra, es decir, si  $F = -P$ , la respuesta, desde el punto de vista lineal, es

idéntica a la anterior, pero cambiando el signo:

$$\Delta L = -\frac{PL}{EA} = u_2 \quad (2.2)$$

con  $v = 0$ .

Si este experimento se lleva a cabo de forma “rudimentaria” mediante una sencilla regla de medir elástica y flexible, puede comprobarse que al traccionar la misma, es difícil medir el desplazamiento axial, pero no se observan movimientos transversales. Por tanto, parece que el resultado obtenido por la teoría lineal es coherente. Sin embargo, si se induce una compresión, como muestra la Figura 2.2, se observa claramente que la geometría deformada es, fundamentalmente, de flexión, lo cual implica que el desplazamiento  $v$  no es nulo.



**Figura 2.2** Experimento sencillo sobre una regla de medir flexible

Este sencillo experimento pone en evidencia que las ecuaciones que se han utilizado hasta el momento no son válidas para predecir el comportamiento a compresión en este caso. Es necesario, por tanto, recurrir a otro tipo de formulación para obtener mayor coherencia entre la respuesta predecible mediante ecuaciones, y la respuesta experimental. La teoría con la que se ha intentado predecir el comportamiento axial de la barra es *lineal*. Esta teoría asume ciertos planteamientos, tales como que el equilibrio puede establecerse sobre la configuración indeformada. Al ver la imagen de la Figura 2.2, fácilmente se comprende que la configuración indeformada y la deformada son bien diferentes. Es necesario, por tanto, establecer el equilibrio considerando la configuración geométrica que realmente adopta la barra en equilibrio. Este planteamiento conduce a unas ecuaciones que son *no lineales*.

El planteamiento no lineal es más general que el lineal, pero la descripción matemática es más compleja que la asociada a la del planteamiento lineal. En lo que sigue se verán ejemplos sencillos que ilustran bien las diferencias entre el planteamiento no lineal, y el lineal.

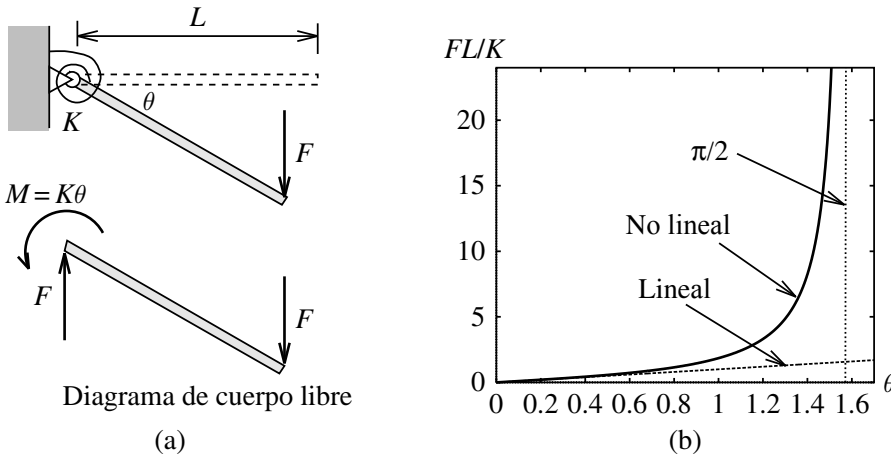
Recuérdese: la naturaleza es esencialmente no-lineal, y la no-linealidad es la regla, y no la excepción.

**2.2. Ejemplos sencillos de comportamiento no lineal**

Los ejemplos que se desarrollan a continuación se basan en el análisis de barras rígidas, con 1 grado de libertad. En ellos se observará que el planteamiento general de un problema de equilibrio requiere, como premisa básica, establecer las ecuaciones de equilibrio en la configuración en la que éste se produce. Esto conduce a unas ecuaciones que son no lineales (en general), lo cual supone que la solución no tiene porqué ser única. El planteamiento no lineal del problema conduce a una mayor complejidad matemática; sin embargo, los resultados son más intuitivos que los obtenidos mediante teoría lineal.

**2.2.1. Barra rígida con empotramiento elástico: voladizo**

Consideremos una barra rígida de longitud  $L$ , empotrada elásticamente, mostrada en la Figura 2.3 (a).



**Figura 2.3** Barra rígida. Voladizo con empotramiento elástico

La barra se encuentra sometida a la acción de la fuerza  $F$ , vertical. En la sección inicial existe una rótula, con una vinculación a un resorte elástico lineal de constante  $K$ . El sistema queda definido mediante un único grado de libertad, que es el ángulo  $\theta$ . Tomando momentos en la rótula, la ecuación de equilibrio queda,

$$F L \cos(\theta) = M \tag{2.3}$$

En el resorte elástico se ha de cumplir la ecuación del resorte, que es  $M = K\theta$ . Sustituyendo esta relación en la ecuación de equilibrio, se obtiene una relación no lineal entre  $F$  y  $\theta$ ,

$$\frac{FL}{K} = \frac{\theta}{\cos(\theta)} \quad (2.4)$$

Esta relación se puede linealizar, considerando la expansión en serie de Taylor de la función  $\cos(\theta)$ , y reteniendo los términos lineales. En esta expansión, recuérdese que el ángulo  $\theta$  debe tomarse en radianes.

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \dots \quad (2.5)$$

El segundo término ya es cuadrático en  $\theta$ . Por tanto, para obtener una aproximación lineal, debe tomarse únicamente el primer término, quedando

$$\cos(\theta) \simeq 1 \quad (2.6)$$

Esta igualdad puede admitirse únicamente para valores muy pequeños de  $\theta$ . Sustituyendo (2.6) en (2.4) queda la ecuación de equilibrio, en su versión *linealizada*

$$F = \frac{K}{L} \theta \quad (2.7)$$

Nótese que en general, la expresión (2.7) parece del todo lógica en el contexto de los problemas estructurales que se han visto hasta el momento en esta asignatura. En efecto, en hipótesis de pequeños desplazamientos, el momento solicitante es  $M = FL$ , ya que se asume que la configuración indeformada y la deformada son indistinguibles. La reacción del resorte elástico es  $M = K\theta$ . Por tanto, desde el punto de vista lineal, la ecuación (2.7) es coherente.

La Figura 2.3(b) muestra en abscisas el valor de  $\theta$ , y en ordenadas el valor  $FL/K$  que se obtiene con la solución no lineal (2.4). Asimismo, se representa la solución lineal. Puede observarse que:

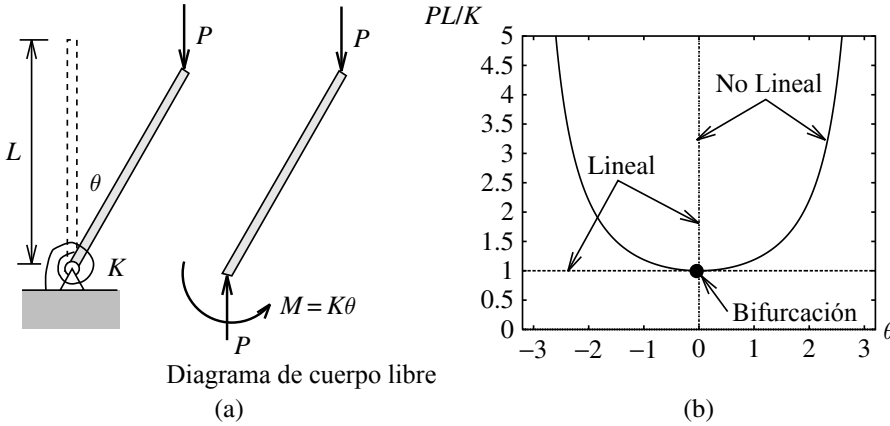
- Al aumentar el valor del ángulo  $\theta$ , la solución lineal difiere de la no lineal.
- Los resultados obtenidos por la solución no lineal son más intuitivos que los obtenidos con la teoría lineal. Físicamente, la relación de equilibrio se produce para  $\theta < \pi/2$ . La solución lineal no predice esta cota superior.

### 2.2.2. Barra rígida con empotramiento elástico: columna

Consideremos ahora la misma barra del ejemplo anterior, pero posicionada verticalmente, como muestra la figura 2.4(a).

Para una posición definida mediante el parámetro  $\theta$ , la ecuación de equilibrio de momentos en la base es:

$$PL \operatorname{sen}(\theta) = M = K\theta \quad (2.8)$$



**Figura 2.4** Barra rígida en posición vertical, con empotramiento elástico en la base

Reagrupando,

$$\frac{PL}{K} = \frac{\theta}{\sin(\theta)} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es general, para todo valor del ángulo  $\theta$ . Establece una relación entre la fuerza  $F$  aplicada, y el ángulo en el que se produce el equilibrio. La solución admite dos ramas:

1. Si  $\theta = 0$ , retomando la ecuación (2.8), queda

$$P \cdot 0 = 0 \Rightarrow \theta = 0 \forall P \quad (2.10)$$

Esta solución se representa en la figura 2.4(b), y corresponde con la línea vertical, en la abscisa  $\theta = 0$ . En efecto, si  $\theta = 0$ , al no producirse momento solicitante, la fuerza  $P$  se equilibra en el apoyo mediante una reacción vertical, y esta condición *matemática* se produce para cualquier valor de  $P$ , no importando si dicho valor es pequeño o elevado.

2. Si  $\theta \neq 0$ , queda la relación no lineal representada en la ecuación (2.9).

La rama de la solución no lineal puede ser linealizada, mediante una expansión en serie de la función  $\sin(\theta)$ .

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots \simeq \theta \quad (2.11)$$

Considerando que  $\sin(\theta) \simeq \theta$ , la linealización de la ecuación (2.9) queda,

$$\frac{PL}{K} = \frac{\theta}{\theta} = 1 \quad (2.12)$$

Observando la Figura 2.4, la rama de la solución que tiene sentido para valores de  $\theta$  diferentes de 0 se linealiza mediante una recta, paralela al eje de abscisas, y de ordenada constante  $PL/K$ . La teoría lineal, por tanto, ha sido capaz únicamente de predecir un valor de todos los posibles aportados por la curva no-lineal completa. Sin embargo, como se verá más adelante, este valor es sumamente valioso, y se conoce como *carga crítica*.

En relación a la Figura 2.4, obsérvese que el valor de carga  $P = K/L$  representa el límite de carga, a partir del cual hay más de una solución al equilibrio. Por debajo de este valor, la solución es única, y es la línea recta vertical. El valor de carga  $P = K/L$  representa en este caso un *punto de bifurcación*.

Dentro de los problemas de equilibrio del sólido rígido, es interesante no sólo conocer los puntos de equilibrio, sino saber si dicho equilibrio es *estable*. El análisis de la estabilidad de un equilibrio suele estudiarse en cursos de Mecánica Clásica. El objetivo es determinar si en el punto de equilibrio, pequeñas perturbaciones en torno a la posición de equilibrio hacen que el sistema recupere el equilibrio, o bien tienda a perder la posición de equilibrio para pasar a otro punto de equilibrio.

El análisis de estabilidad de un equilibrio puede hacerse mediante un procedimiento análogo al de minimización de funciones. Recordando conceptos básicos de minimización, para encontrar el mínimo o máximo de una función real de variable real, se deriva la función respecto a la variable y se iguala a cero. Se obtienen puntos denominados *extremos relativos*. Para saber si uno de dichos extremos es un máximo o un mínimo, se debe mirar en la segunda derivada. Si la segunda derivada, evaluada en el extremo relativo, es positiva, el punto será un mínimo; si por el contrario, es negativa, será un máximo. Observando una función como la  $y = x^2$ , es fácil ver que esta parábola, que presenta un mínimo en  $x = 0$ , tiene derivada segunda positiva.

En problemas de equilibrio, es necesario acudir a una función, denominada *potencial*, que se representará en este caso con la letra griega  $\Pi$ , para encontrar la analogía con los problemas de minimización.

Esta función  $\Pi$  tiene la siguiente expresión:

$$\Pi(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2 - PL(1 - \cos(\theta)) \quad (2.13)$$

Esta expresión del potencial puede obtenerse a partir de principios variacionales y de análisis funcional. El término  $\Pi$  puede descomponerse en dos sumandos,

$$\Pi = U + V_p \quad (2.14)$$

siendo,

$U$  : Representa la energía elástica del resorte.  $U = \frac{1}{2}K\theta^2$ .

$V_p$  : Representa el trabajo de las fuerzas externas, cambiado de signo;

$$V_p = -PL(1 - \cos(\theta))$$

En efecto, nótese que el desplazamiento vertical asociado, en valor absoluto, es  $L(1 - \cos(\theta))$ .

La presencia del signo negativo se justifica mediante teoría potencial/variacional. En el contexto de problemas estructurales, se puede justificar mediante el Teorema de los Trabajos Virtuales.

A partir del potencial  $\Pi$ , la ecuación de equilibrio se obtiene derivando e igualando a cero. En efecto,

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \Rightarrow K\theta - PL\sin(\theta) = 0 \quad (2.15)$$

ecuación que es idéntica a la expresada en (2.8). Para estudiar la estabilidad del sistema, se calcula la derivada segunda del potencial,

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = K - PL\cos(\theta) \quad (2.16)$$

Para la solución representada por la primera rama,  $\theta = 0$ , el valor de la segunda derivada queda,

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = K - PL \quad (2.17)$$

Este valor vale cero, si  $K = PL$ . Para valores de  $P > K/L$ , esta derivada segunda es negativa. Pero una derivada segunda negativa representa un máximo, en este caso, para la función potencial. Por tanto, el sistema será inestable en este caso.

Para valores de  $P < K/L$ , la segunda derivada es positiva, y localmente, se produce un “pozo” de potencial. Por tanto los puntos de equilibrio son estables.

Nótese por tanto, que el valor  $P = K/L$  representa un valor en el cual se produce un cambio en las características del equilibrio.

Observando ahora la segunda rama, definida por (2.9), puede substituirse la expresión de la derivada segunda del potencial. En este caso, queda,

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = K \left( 1 - \frac{\theta}{\tan(\theta)} \right) \quad (2.18)$$

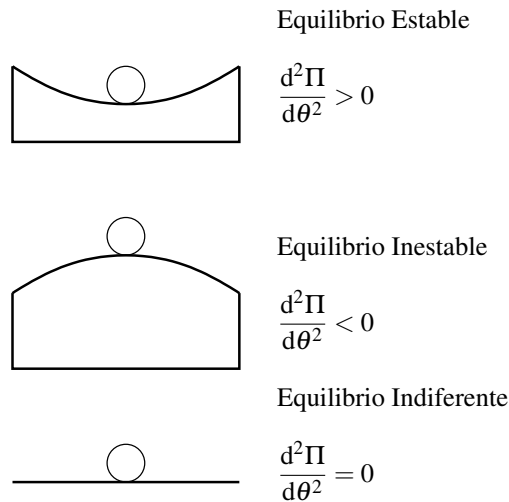
Puede demostrarse que este valor es siempre positivo. Por tanto, la segunda rama de la solución representa puntos de equilibrio estable.

La Figura 2.5 muestra la idea intuitiva del concepto de *estabilidad* de un equilibrio, y su relación con la segunda derivada del potencial, para este caso. Se representan tres casos:

- En el primer caso, se representa una bolita que está en equilibrio en un “valle”. Al aplicar una pequeña perturbación en el sistema, las fuerzas restauradoras del sistema tienden a devolver a esta bolita a su posición de equilibrio. Este equilibrio se denomina *estable*.

- En el segundo caso, la bolita se encuentra en equilibrio en una “cresta”. Se intuye que si se aplica una pequeña perturbación a la bolita, ésta abandonará la posición de equilibrio, sin que el sistema sea capaz de hacer volver a la bolita a la posición de equilibrio. Además, la bolita no encuentra en este caso una posición local de equilibrio. Este equilibrio se denomina *inestable*.
- Finalmente, si se considera un plano horizontal, cualquier posición es de equilibrio. Al alterar el equilibrio, la bolita pasa a una segunda posición, que también es de equilibrio. El equilibrio se denomina *indiferente*.

La Figura 2.6 muestra la posición de los puntos de estabilidad para el sistema barra-resorte.



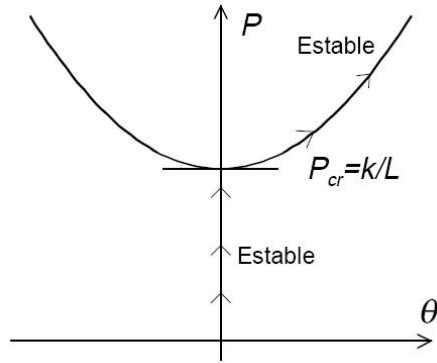
**Figura 2.5** Imagen conceptual de la idea de estabilidad, y su relación con la segunda derivada del potencial  $\Pi$

La teoría lineal obtiene resultados que pueden calificarse como “anómalos”:

- La solución sólo es posible si el valor es  $P = K/L$ . Sin embargo, observando los resultados de la teoría no lineal, claramente existe solución para diferentes valores de  $P$ .
- La solución no está acotada. La solución lineal no indica nada acerca del valor  $\theta$ . Para cualquier valor  $\theta$ , indica que  $P = K/L$ .

Los resultados de la teoría lineal no son correctos, salvo en un punto. Es necesario recurrir a la teoría no lineal para poder interpretar y validar los resultados de la teoría lineal. Sin embargo, obsérvese que la teoría lineal es capaz de predecir un único valor que es muy valioso en la práctica: el valor  $P = K/L$  es precisamente aquel tal que, para cargas por encima, se obtienen múltiples soluciones. Por debajo





**Figura 2.6** Puntos de equilibrio estable en sistema barra-resorte

de dicho valor, la solución es única y es estable. Esta conclusión es muy importante en la práctica.

En lo que sigue se estudiarán sistemas estructurales para los cuales se va a utilizar una solución linealizada. El ejemplo que en esta sección se ha desarrollado ayudará a comprender mejor las anomalías que se observen en los resultados obtenidos mediante teoría lineal. La teoría lineal resulta válida si únicamente se desea determinar el valor de la carga crítica del sistema.

### 2.3. Pandeo de una columna aislada biarticulada

En la sección anterior se planteó el problema de equilibrio para un sistema de 1 grado de libertad. Una viga es un sistema de infinitos grados de libertad. En este apartado se estudiará un problema análogo al visto anteriormente con un sistema de un grado de libertad. Se plantearán las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada, si bien en el caso de la viga, la complejidad matemática dificulta abordar en primer lugar el problema no lineal, y particularizar las conclusiones al problema lineal. Este camino general se sigue en algunas referencias, como en el libro de Galambos [8], sección 2.2.

Se planteará en primer lugar el problema de equilibrio en la configuración deformada, pero desde una teoría lineal. Se obtendrán resultados extraños, que requerirán de las explicaciones aportadas por la teoría no lineal. Se verá que el problema lineal es capaz de identificar los puntos de bifurcación de equilibrio, asociados a determinados modos de desplazamiento de la columna. La teoría lineal será capaz de identificar el punto a partir del cual, la solución recta es inestable.

En la literatura sobre inestabilidad de barras, se introduce el término *pandeo* para referirse al fenómeno asociado al paso por el punto de bifurcación de equilibrio. En inglés, se introduce el término *buckling* para referirse a este fenómeno.

### 2.3.1. Pandeo de Euler

En esta sección se estudia en primer lugar el caso ideal de un elemento articulado en sus dos extremos, y sometido a una carga de compresión  $P$ . Considérese una viga de longitud  $L$ , con apoyos simples en ambos extremos. La rigidez a flexión de la viga se caracteriza mediante el producto del módulo elástico  $E$  por el momento de inercia a flexión  $I$ .

Se supondrán las siguientes hipótesis:

1. El elemento es totalmente recto, y la carga  $P$  está aplicada en su eje.
2. Todas las deformaciones del material ocurrirán en periodo elástico.
3. La deformación transversal que pueda tener el elemento es suficientemente pequeña, para poder considerar que la expresión de la curvatura se puede linealizar,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \simeq y'' \quad (2.19)$$

Siendo  $\theta$  el giro diferencial de la rebanada, y  $s$  el parámetro arco. Nótese que para poder linealizar la curvatura, es necesario que  $y'(x) \ll 1$ .

Esta hipótesis de pequeñas deformaciones no implica que se desprecien los movimientos transversales para establecer las ecuaciones de equilibrio. Se linealiza la relación momento-curvatura.

4. Las condiciones de contorno se establecen en  $x = 0$ , y  $x = L$ . Puede intuirse que el punto superior se desplazará, y por tanto, en general, la posición de las rótulas no corresponde con estas dos abscisas. Se linealizan por tanto las condiciones de contorno.

Este problema fue resuelto por vez primera por Euler (1707 – 1783), en 1744.

Se pretende obtener el valor de la carga  $P$  que hace posible el equilibrio en la configuración de flexión (Figura 2.7(a)). Introduciendo un corte en  $A$  y equilibrando el tramo de viga superior (Figura 2.7(b)), es posible plantear la ecuación de equilibrio de momentos respecto del punto  $A$ . En la misma, interviene el momento que produce la carga  $P$ , a través de la distancia  $y$ ,

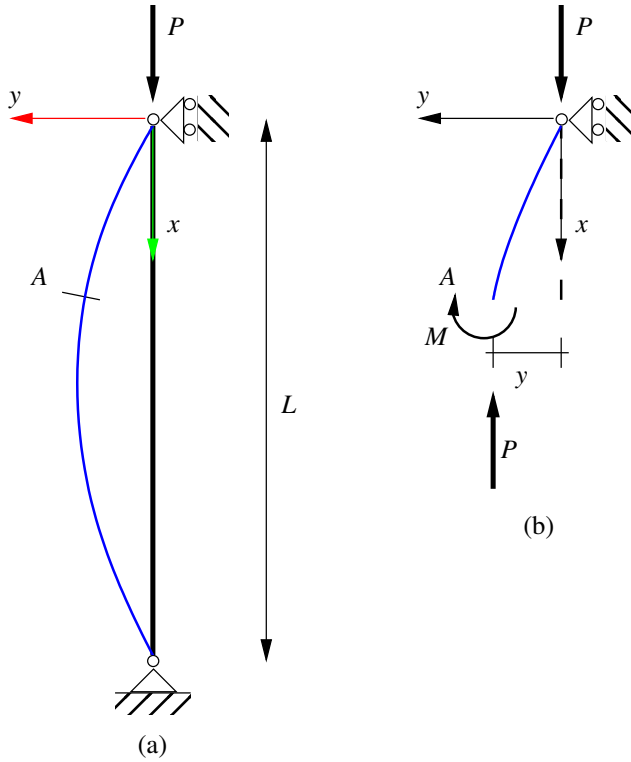
$$M + Py = 0 \quad (2.20)$$

Nótese que el momento flector  $M$  se ha representado positivo en el sentido indicado, puesto que si se representa así, es posible relacionarlo analíticamente con la curvatura, como

$$M = EIy'' \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.21) en (2.20), se obtiene

$$EIy'' + Py = 0 \quad (2.22)$$



**Figura 2.7** Columna biarticulada. Problema de pandeo de Euler

ecuación que puede ser escrita también como

$$y'' + \frac{P}{EI} = 0 \tag{2.23}$$

Esta ecuación es una EDO lineal de coeficientes constantes. Las condiciones de contorno asociadas a la configuración de viga biapoyada son:

$$y(0) = 0; \quad y''(0) = 0 \tag{2.24}$$

$$y(L) = 0; \quad y''(L) = 0 \tag{2.25}$$

Nótese que la condición de apoyo simple es que el desplazamiento  $y$  y el momento flector, que es proporcional a la segunda derivada  $y''$  (2.21), deben valer cero en los extremos  $x = 0$  y  $x = L$ .

La ecuación diferencial representada por (2.23) es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de tipo lineal, de coeficientes constantes, homogénea. Su solución puede encontrarse probando una solución del tipo:

$$y(x) = e^{\gamma x} \tag{2.26}$$

Sustituyendo (2.26) en (2.23), y omitiendo el factor  $e^{\gamma x}$  (pues no produce soluciones para  $\gamma$ ), se obtiene

$$\left(\gamma^2 + \frac{P}{EI}\right) = 0 \quad (2.27)$$

La solución para  $\gamma$  es:

$$\gamma = \pm i \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (2.28)$$

Lo cual genera una solución para  $y(x)$  de tipo trigonométrico

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) + c_2 \operatorname{cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) \quad (2.29)$$

Aplicando las condiciones de contorno en  $x = 0$ , se obtiene:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Por tanto, la expresión de  $y(x)$  pasa a depender sólo de  $c_1$ ,

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) \quad (2.30)$$

Al aplicar la segunda condición en 0, es decir  $y''(0) = 0$ , se obtiene que no es posible despejar  $c_1$ ; la segunda derivada de esta función “seno” vuelve a ser una función “seno”, y al evaluar en  $x = 0$ , sale idénticamente 0, no permitiendo despejar el valor de  $c_1$ .

Veamos si al aplicar las condiciones en  $x = L$  se puede despejar el valor de  $c_1$ . Aplicando la condición  $y(L) = 0$ , queda

$$y(L) = 0 \Rightarrow c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0 \quad (2.31)$$

Para que esta ecuación se verifique, hay dos opciones:

$$c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

La primera posibilidad conduce a que  $y(x) = 0$ . Esta solución se denomina *solución trivial*, ya que sabemos que sin no hay deflexión lateral, hay equilibrio. Esta solución tenía que aparecer entre las posibles soluciones, pero no aporta ningún resultado de interés, ya que se buscan soluciones para  $y(x) \neq 0$ .

La segunda rama de la solución es sumamente curiosa: para que la función trigonométrica  $\operatorname{sen}(\alpha) = 0$ , se tiene que producir para  $\alpha$  la condición de ser múltiplo entero de  $\pi$ . En efecto,

$$\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

considerando el valor de  $\alpha$  en este caso,

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = n\pi \tag{2.34}$$

Despejando el valor de  $P$ , se obtiene un conjunto indexado de posibles cargas,

$$P_n = \frac{(n\pi)^2 EI}{L^2} = P_n \tag{2.35}$$

Se obtiene como solución un conjunto de cargas, denominadas *cargas críticas*. La carga de valor más bajo se denomina *carga crítica de Euler*. Corresponde a la de una columna biarticulada. En general, la carga más baja se notará como  $P_{cr}$ ; sin embargo, para el caso de la columna de Euler, se notará como  $P_E$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.36}$$

Además, las posibles soluciones para  $y(x)$  se encuentran también ligadas a las cargas críticas  $P_n$ . Considerando que la forma de la solución viene descrita por la ecuación (2.30), e introduciendo en esta forma los valores de  $P_n$  encontrados en la ecuación (2.35), se encuentra un conjunto indexado de soluciones para  $y(x) = y_n(x)$ , denominados *modos de pandeo*.

$$y_n(x) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.37}$$

nótese que el valor de  $c_1$  es indeterminado.

La solución del problema de Euler es, por tanto, un conjunto de cargas críticas, asociadas a un conjunto de modos de pandeo. Para cada  $n$ , se asocia el correspondiente valor de la carga crítica  $P_n$  con el modo de pandeo  $y_n(x)$ . La Figura 2.8 muestra las cargas y formas modales de los tres primeros modos.

La solución obtenida resulta poco intuitiva, y aparentemente, contradice los resultados observables. Esta solución se ha obtenido porque la ecuación de gobierno del problema es lineal. La estructura matemática es la de un típico problema de valores propios. Será necesario por tanto acudir a un planteamiento no lineal para encontrar sentido físico a los resultados obtenidos.

El límite impuesto por el criterio de estabilidad, plasmado en el valor  $P_E$  (2.36), supone una cota superior al valor máximo de la carga de compresión que una columna biarticulada puede soportar, considerando que para valores por encima de  $P_E$  la solución es inadmisibles por plantear una configuración de equilibrio estable con forma no rectilínea. Este valor ha de ser tenido en cuenta a la vez que otro: el valor máximo de la carga de compresión por cuestiones resistentes del material. Veamos un ejemplo para interiorizar estos conceptos.

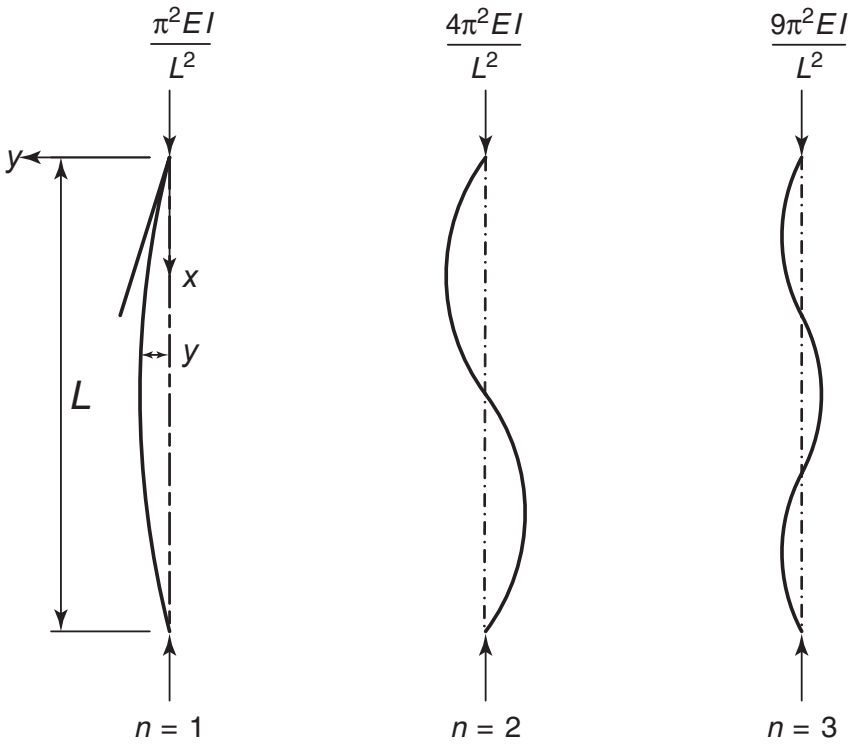


Figura 2.8 Modos y cargas de pandeo de la columna biarticulada

■ EJEMPLO 2.1

Considere una columna biarticulada de longitud  $L = 1$  m. El material de la columna es acero, de límite elástico  $f_y = 400$  MPa, y módulo de elasticidad  $E = 200$  GPa. La sección transversal es rectangular, de  $50 \times 10$  mm.

Se pide:

1. Determine el valor de la fuerza máxima de compresión, por criterio resistente ( $P_{max,r}$ ).
2. Determine el valor de la carga crítica  $P_E$ . Este será el límite máximo para la fuerza de compresión, limitada por criterio de inestabilidad.
3. Determine el valor que debe tener  $L$  para que se igualen  $P_E$  y  $P_{max,r}$ .

**Solución**

Se considera el sistema de unidades kN, m, para las fuerzas y longitudes.

1. El límite superior para la fuerza máxima que puede resistir la columna se calcula imponiendo que la máxima tensión axial de compresión sea igual al valor

límite  $f_y$ , que es una propiedad del material (resistencia a compresión). Por tanto,

$$P_{max,r} = f_y \cdot A$$

siendo,  $A$  el área de la sección transversal;  $A = 10E - 2 \cdot 5E - 2 = 5E - 4 \text{ m}^2$ . Además, considerando que  $f_y = 400E - 3 \text{ kN/m}^2$ , en el sistema de unidades del problema, se obtiene que,

$$P_{max,r} = 400E - 3 \cdot 5E - 4 = 200 \text{ kN}$$

Por tanto,  $P_{max,r} = 200 \text{ kN}$  es el límite, por encima del cual, el material plástica a compresión.

2. El valor de  $P_E$  puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

En la expresión anterior interviene en el numerador el momento de inercia  $I$ . Ahora bien, sabemos que la sección transversal tiene 2 momentos de inercia principales. ¿Qué valor debe tomarse para  $I$ ? En principio, es necesario estudiar el problema para los dos ejes. Cada eje proporcionará un valor de carga crítica. La carga crítica será el menor valor de entre los dos obtenidos para cada eje, ya que basta superar dicho valor para que se presente la inestabilidad.

En este caso, puesto que  $I$  está en el numerador, se tomará el valor del menor momento de inercia; puesto que la sección es rectangular,

$$I = \frac{1}{12} (5E - 2) \cdot (1E - 2)^3 = 4.166E - 9 \text{ m}^4$$

Considerando que en el sistema de unidades,  $E = 200E6 \text{ kN/m}^2$ ,

$$P_E = \frac{\pi^2 200E6 4.166E - 9}{1^2} = 8.22 \text{ kN}$$

El valor obtenido para  $P_E = 8.22 \text{ kN}$  es mucho menor que el valor obtenido para la carga máxima por criterio resistente ( $P_{max,r} = 200 \text{ kN}$ ). Por tanto, esta columna estará claramente condicionada por problemas de estabilidad. En otras palabras; aunque puede comprimirse hasta una carga máxima de 200 kN, lo cual supone que el material se aprovecha de manera óptima, no es posible superar 8.22 kN, ya que si se supera, aparecerá una forma de equilibrio que supone desplazamiento transversal.

3. A partir de la expresión de  $P_E$ , es posible despejar  $L$ , imponiendo que  $P_E = P_{max,r}$

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{L^2} = P_{max,r} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{\pi^2 E I}{P_{max,r}}}$$

y sustituyendo los valores,

$$L = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 200E6 \cdot 4.166E - 9}{200}} = 0.2027 \text{ m} \simeq 20.3 \text{ cm}$$

El resultado obtenido indica que la columna debe ser acortada desde 1 m hasta 20.3 cm, para que al comprimirla, el valor de la carga máxima y la crítica por pandeo se igualen.

En este ejemplo se intuye que en una barra alargada, biarticulada, y con sección de débil inercia, existirá una limitación por pandeo. Existe una longitud límite para la barra, a partir de la cual, si se acorta más, es posible desarrollar la máxima resistencia de la barra sin que aparezca el problema de inestabilidad antes que el de agotamiento.

### 2.3.2. Consideración de grandes deformaciones

Para resolver los interrogantes que plantea la solución del problema de Euler, es necesario considerar la solución no lineal al problema. Dentro de las fuentes de no-linealidad (material, o geométrica), en esta sección se va a considerar que la curvatura no es pequeña, y que las condiciones de contorno se establecen en los puntos donde realmente se encuentran las rótulas.

La Figura 2.9 representa la columna biarticulada, en una posición en la cual el equilibrio se establece con deformada no rectilínea, para la carga  $P$ . A diferencia del problema lineal, la distancia entre puntos de apoyo no es  $L$ , ya que el “carrito” superior se desplaza hacia abajo. Este hecho se muestra en la figura, mediante la representación de la posición inicial en línea discontinua. En esta ocasión,  $L$  es la longitud de la línea media, que se asume constante durante todo el movimiento (se desprecia el acortamiento axial), y que para  $P = 0$  coincide con la longitud de la columna. Se asume por tanto que la longitud total de la columna no cambia durante el movimiento. En la figura se ha representado además el ángulo  $\theta$ , que representa el giro en las distintas secciones, siendo el máximo valor de  $\theta$  el correspondiente a las secciones extremas, representado mediante  $\alpha$  ( $\theta_{max} = \alpha$ ). En relación a los parámetros de la figura, la curvatura  $\kappa$  se define como:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \quad (2.38)$$

siendo  $s$  el parámetro arco de la fibra media. La ecuación de equilibrio (2.20) sigue siendo válida; sin embargo, la relación momento-curvatura pasa a ser:

$$M = EI \frac{d\theta}{ds} \quad (2.39)$$

y por tanto, la ecuación (2.21) pasa a escribirse como,

$$EI \frac{d\theta}{ds} + Py = 0 \quad (2.40)$$



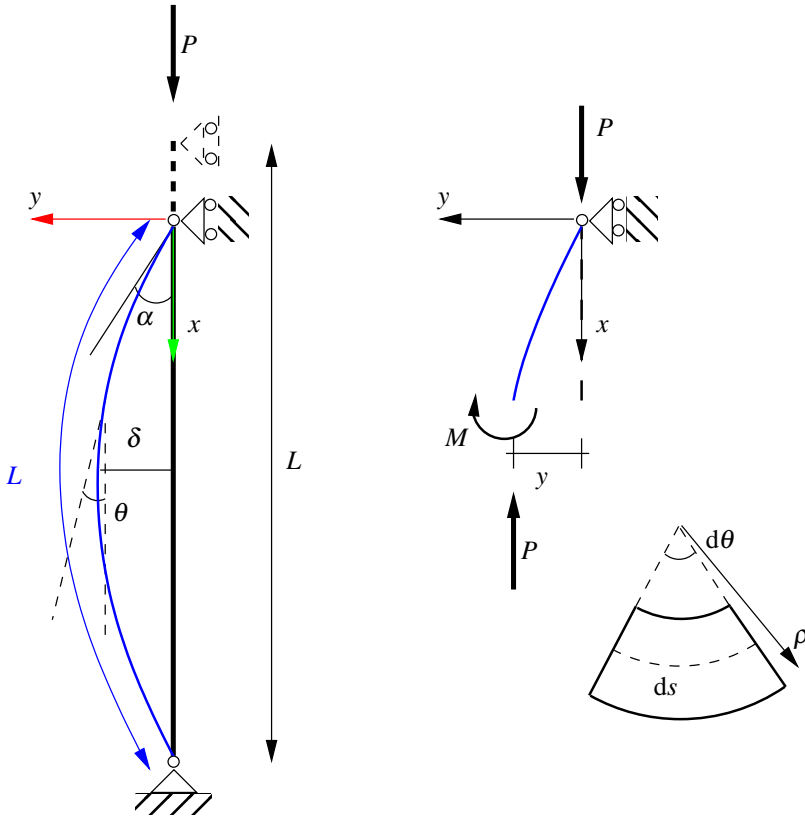


Figura 2.9 Columna biarticulada. Planteamiento con grandes curvaturas

Puede demostrarse que la solución puede escribirse en función de una *integral elíptica*:<sup>1</sup>

$$k' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - p^2 \text{sen}^2 \phi}} \tag{2.41}$$

siendo

$$p = \text{sen}(\alpha/2) \tag{2.42}$$

<sup>1</sup>Integral elíptica completa de primera especie

La integral representada por  $k'$  (2.41) es una integral especial, estudiada y tabulada en el estado del arte.<sup>2</sup> A partir de esta integral se pueden definir los parámetros:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{k'} \quad (2.43)$$

$$\frac{P}{P_E} = \frac{4(k')^2}{\pi^2} \quad (2.44)$$

siendo  $\delta$  el máximo desplazamiento transversal, que se presenta en la sección central. Este parámetro se muestra en la Figura 2.9. Esta solución puede analizarse estudiando la curva  $\{\delta/L, P/P_E\}$ , de parámetro  $\alpha$ . En el estudio de problemas no lineales, es habitual describir la relación entre la carga y unos pocos parámetros, estudiando su evolución. Se obtienen curvas denominadas *camino de equilibrio*, o *equilibrium path*. Mediante un test de desplazamiento controlado, es posible obtener la carga que está en equilibrio con una configuración deformada concreta. En este caso, si se fija el ángulo  $\alpha$ , es posible obtener el valor de la carga  $P$  que es compatible con un  $\alpha$  fijo. Para hacer más claro el análisis, se ha calculado el desplazamiento  $\delta$  para ser representado, en formato adimensional, en el eje de abscisas.

La Tabla 2.1 muestra los valores de  $\delta/L$  y  $P/P_E$  para diferentes ángulos  $\alpha$  (en grados sexagesimales). Esta curva se representa en la Figura 2.10. En la misma, se representan también la solución obtenida mediante la teoría lineal, y la solución para  $P/P_E < 1$ . Es interesante el siguiente límite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{P}{P_E} = 1 \quad (2.45)$$

Este término es el único término que queda al linealizar la solución, expandiéndola en función de  $\alpha$ . La solución lineal se ha representado mediante la recta paralela al eje de abscisas, pasando por el valor  $P/P_E = 1$ .

Las conclusiones que se obtienen al introducir la teoría no lineal son las siguientes:

- Si  $P < P_E$ , el sistema está en *etapa precrítica*. La solución es única, y esta solución no implica desplazamientos transversales. Además, esta solución es de equilibrio estable.
- Si  $P = P_E$ , la carga es crítica, y se encuentra en el *punto de bifurcación*. Este punto de bifurcación se predice con valor exacto mediante la teoría lineal.
- Si  $P > P_E$ , el sistema se encuentra en *etapa postcrítica*. La teoría no lineal permite resolver la relación entre cargas y desplazamientos transversales. Esta

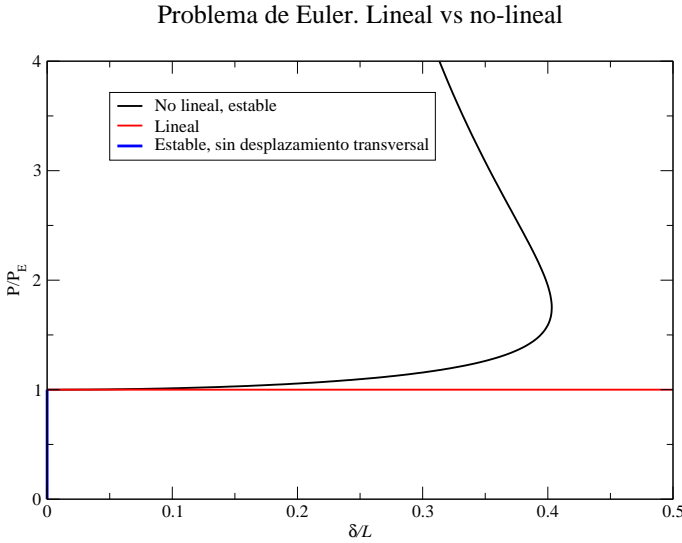
<sup>2</sup>En Mathematica, puede evaluarse mediante la función `EllipticK[p^2]`. En Python, la función `ellipk(p**2)` permite realizar esta integral; es necesario instalar `numpy`; la función se encuentra dentro del módulo `scipy.special`. Nótese que en la definición dada en ambos programas, es necesario introducir el argumento elevado al cuadrado

---

$\alpha$ (grados)	$\delta/L$	$P/P_E$
0	0.	1.
10	0.0553	1.0038
20	0.1097	1.0154
30	0.1619	1.0351
40	0.2111	1.0636
50	0.2562	1.1020
60	0.2966	1.1517
70	0.3313	1.2147
80	0.3597	1.2938
90	0.3813	1.3932
100	0.3957	1.5183
110	0.4025	1.6779
120	0.4015	1.8848
130	0.3925	2.1603
140	0.3751	2.5422
150	0.3489	3.1053
160	0.3123	4.0300

---

**Tabla 2.1** Solución al problema de Euler no lineal



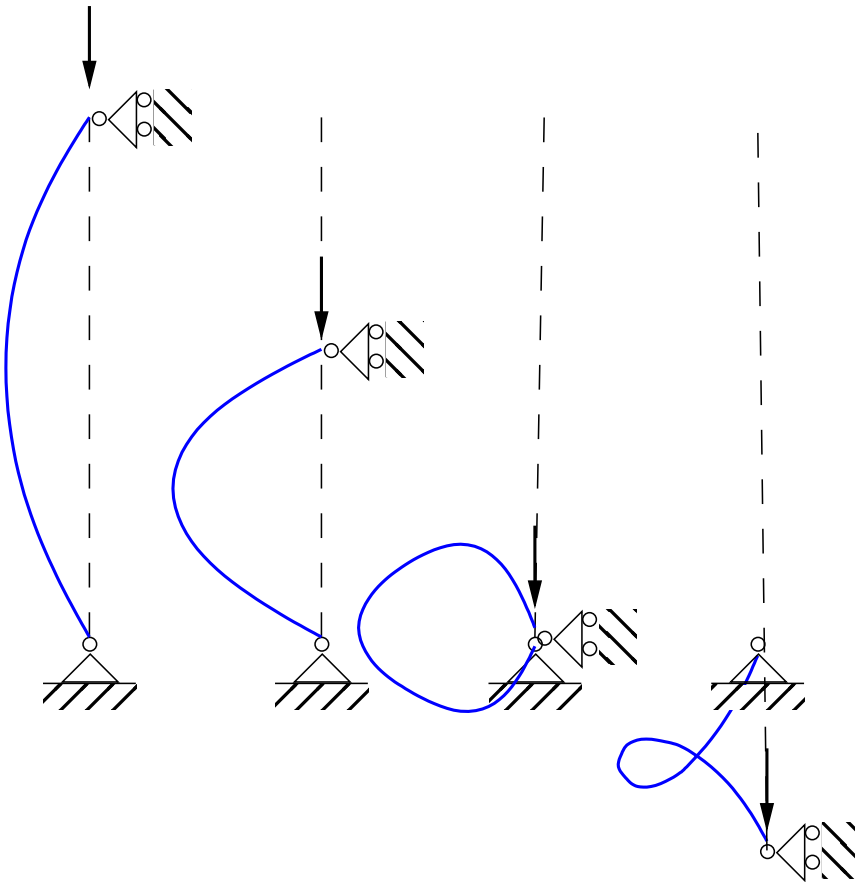
**Figura 2.10** Solución al problema de Euler: caso lineal vs no lineal

solución representa una rama de equilibrio estable. Observando la Figura 2.10, se observa que el sistema tiene un máximo para  $\delta/L$ . Este máximo se da en el punto  $\delta/L = 0.403$ ,  $P/P_E = 1.749$ , y el valor del ángulo  $\alpha = 113.76^\circ$ . A partir de  $P/P_E = 1.749$ , la relación  $\delta/L$  disminuye, tendiendo asintóticamente a 0 para  $P \rightarrow \infty$ . La Figura 2.11 muestra diferentes configuraciones de equilibrio, para valores de  $P$  crecientes. Se observa que la amplitud máxima del desplazamiento aumenta hasta un valor máximo, y luego disminuye.

La teoría no lineal aporta la descripción completa; por contra, el problema lineal permite obtener únicamente el valor de la carga crítica. El caso de la columna biarticulada se comprende bien cuando se compara con el ejemplo visto en la sección 2.2.2. En efecto, las figuras 2.4(b) y 2.10 son análogas. En ambos casos, la teoría lineal predice una línea recta paralela al eje de abscisas, con valor de carga adimensional 1.

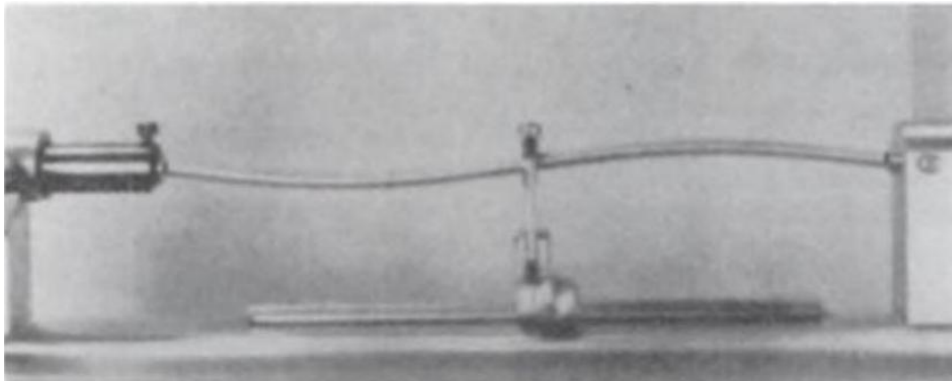
En conclusión, la teoría lineal aporta una descripción adecuada de los puntos de bifurcación. Las anomalías obtenidas mediante un planteamiento lineal se resuelven planteando el problema de forma no lineal, obteniéndose unas ecuaciones más complejas desde el punto de vista matemático. El cálculo de la carga crítica, por contra, resulta sencillo mediante la teoría lineal.

A diferencia del problema un sistema barra-resorte, el problema de una columna tiene infinitos grados de libertad. Por eso se obtienen modos de pandeo y cargas de pandeo. Los modos de pandeo representan los patrones de desplazamiento que

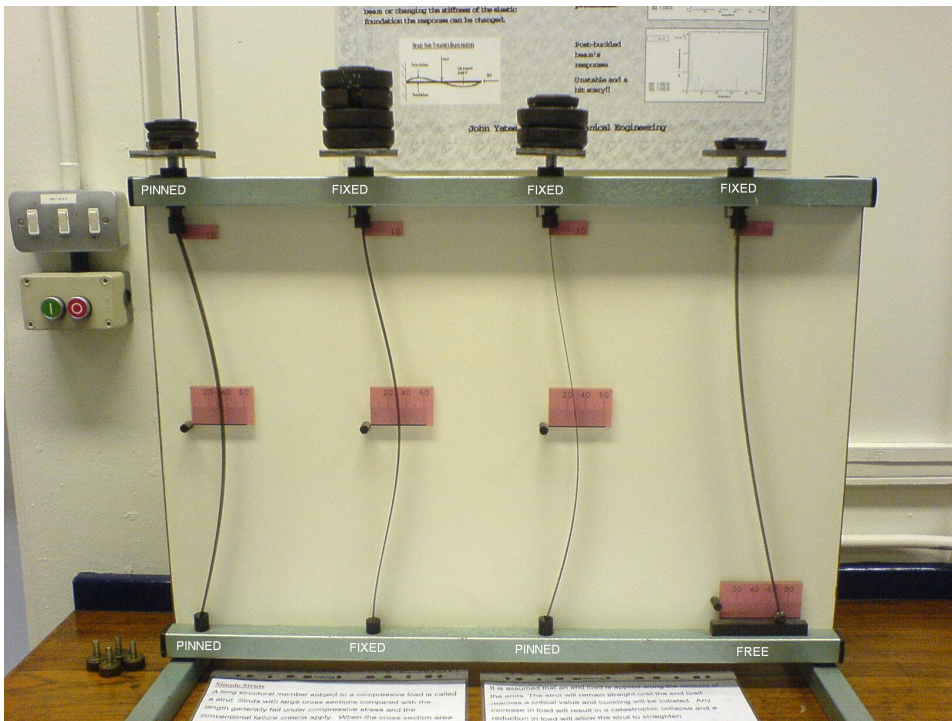


**Figura 2.11** Posiciones de equilibrio para cargas crecientes. Solución no lineal

debe tener la columna para que la carga crítica sea la asociada a cada modo de pandeo. Así, para obtener el modo 2, asociado a la segunda carga crítica, basta con bloquear el punto central, para que la carga crítica de esta columna así vinculada sea  $P_2 = 4P_E$ , con un patrón de desplazamiento parecido a  $y_2(x) = \sin(2\pi x/L)$ . La Figura 2.12 muestra un dispositivo experimental para obtener el modo 2 en una columna biarticulada: en la sección central se introduce un bloqueo que impide el desplazamiento transversal; seguidamente, la columna se comprime axialmente.



**Figura 2.12** Modelo experimental para obtener el modo 2 en una columna biarticulada. Universidad de Northwestern (1969). Fuente: [1]



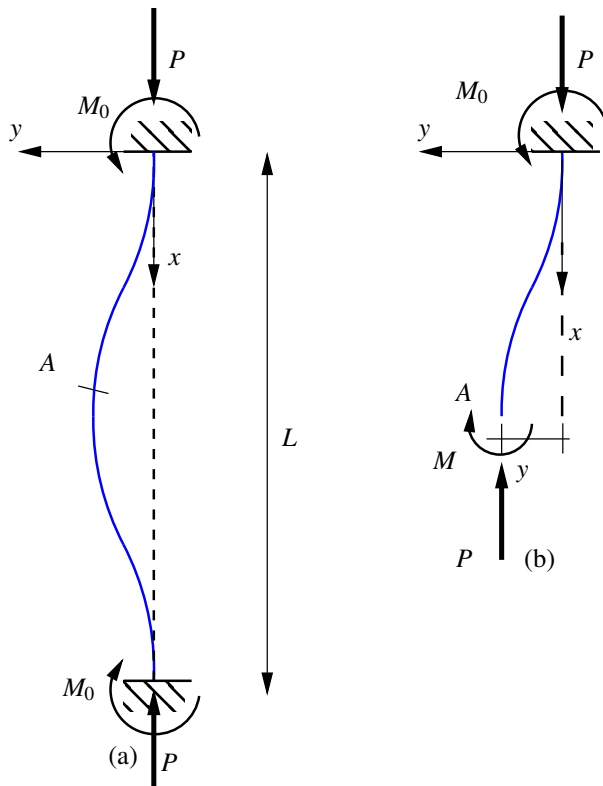
**Figura 2.13** Verificación experimental de carga crítica en columnas con distintas condiciones de contorno. Fuente: "Buckledmodel"by Grahams Child - <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Buckledmodel.JPG>. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons -

**2.4. Pandeo de columnas: influencia de las condiciones de contorno**

En esta sección se va a analizar el problema de pandeo elástico en columnas, considerando las mismas hipótesis que las vistas para el problema de Euler, pero variando únicamente las condiciones de contorno. La Figura 2.13 muestra la verificación experimental de que la carga crítica varía al variar las condiciones de contorno.

**2.4.1. Elemento biempotrado**

La Figura 2.14(a) representa el elemento sometido a compresión simple, con condiciones de empotramiento en ambos extremos. Si el elemento puede adoptar una configuración en equilibrio diferente de la rectilínea, en esta configuración existirán unos momentos de empotramiento, representados en la figura como  $M_0$ . Este momento depende de la amplitud del desplazamiento.



**Figura 2.14** Columna biempotrada

Planteando el equilibrio de un trozo (Figura 2.14(b)), comprendido entre 0 y  $x$ , la ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto de corte  $A$  es:

$$Py + M - M_0 = 0 \quad (2.46)$$

Considerando que  $M = EIy''$ , queda,

$$Py + EIy'' - M_0 = 0 \quad (2.47)$$

Dividendo en la ecuación anterior entre  $EI$ , y pasando al miembro de la derecha  $M_0/EI$ , queda:

$$y'' + \frac{P}{EI} = \frac{M_0}{EI} \quad (2.48)$$

La EDO (2.48) es de tipo lineal, de coeficientes constantes, no homogénea. Las condiciones de empotramiento en  $x = 0$  y  $x = L$  son:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (2.49)$$

$$y(L) = 0, \quad y'(L) = 0 \quad (2.50)$$

La solución de la EDO es suma de la solución de la ecuación homogénea más una solución particular,

$$y(x) = y^h(x) + y^p(x) \quad (2.51)$$

La ecuación homogénea es la misma que la vista en el problema de la columna biarticulada (2.29). Por tanto,

$$y^h(x) = c_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_2 \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) \quad (2.52)$$

La solución particular puede construirse fácilmente, ya que el miembro de la derecha de (2.48) es de tipo polinómico. Puede comprobarse que,

$$y^p(x) = \frac{M_0}{P} \quad (2.53)$$

es solución de (2.48). La solución para  $y(x)$  queda, por tanto:

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_2 \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + \frac{M_0}{P} \quad (2.54)$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  han de determinarse imponiendo las condiciones de contorno. Comencemos imponiendo las condiciones en  $x = 0$ , representadas por (2.49).

Imponiendo que  $y(0) = 0$ , queda:

$$c_2 + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{M_0}{P}$$



Imponiendo que  $y'(0) = 0$ , y teniendo en cuenta la expresión de la derivada:

$$y'(x) = c_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) - c_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) \quad (2.55)$$

Evaluando en  $x = 0$ , queda:

$$y'(0) = c_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad (2.56)$$

y teniendo en cuenta los valores de  $c_1$  y  $c_2$  ya resueltos, la solución queda:

$$y(x) = \frac{M_0}{P} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) \right] \quad (2.57)$$

Nótese que aunque se han encontrado los valores de  $c_1$  y  $c_2$ , éstos son función a su vez de  $M_0$ , con lo cual, la solución no está determinada. Es necesario imponer las condiciones en  $x = L$ . Imponiendo que  $y(L) = 0$ , queda

$$\frac{M_0}{P} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) \right] = 0 \quad (2.58)$$

La ecuación anterior admite una solución trivial, consistente en que  $M_0 = 0$ . En tal caso, la única solución para  $y(x) = 0$ . Para obtener soluciones que supongan que  $y(x) \neq 0$ , es necesario plantear que:

$$1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0 \quad (2.59)$$

es decir, que el argumento de la función coseno valga  $2n\pi$ . La función  $\cos(\theta) = 0$  si  $\theta = 2n\pi$ , con  $n = 1, 2, \dots$ . Por tanto,

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = 2n\pi \quad (2.60)$$

Los valores de  $P$  que verifican esta igualdad son

$$P_n = \frac{(2n\pi)^2}{L^2} EI \quad (2.61)$$

Para cada carga, se obtiene una forma modal  $y_n(x)$ ,

$$y_n(x) = 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \quad (2.62)$$

El valor de la carga más baja se dará para  $n = 1$  en  $P_n$ ; este valor será la *carga crítica* del elemento biempotrado,

$$P_{cr} = \frac{(2\pi)^2}{L^2} EI = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \quad (2.63)$$

Observando el resultado de la ecuación anterior, y comparándolo con la expresión vista para la carga crítica del elemento biarticulado (2.36), se concluye que las expresiones son similares. La carga crítica de un elemento biempotrado coincide con la de un biarticulado de longitud  $L/2$ . Este resultado puede interpretarse geoméricamente, ya que si se muestra la solución correspondiente al modo 1 de pandeo del elemento biempotrado,  $y(x) = 1 - \cos(2\pi x/L)$  (Figura 2.15), se observa que los puntos de inflexión de la deformada distan  $L/2$  entre sí. Por tanto, la parte central se comporta como un biarticulado de longitud  $L/2$ , para el cual, la carga crítica tiene la expresión:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} \tag{2.64}$$

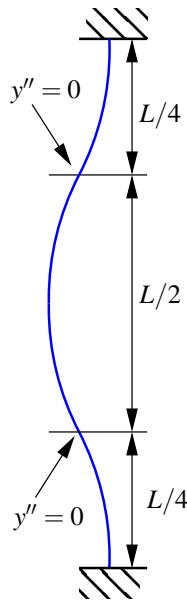
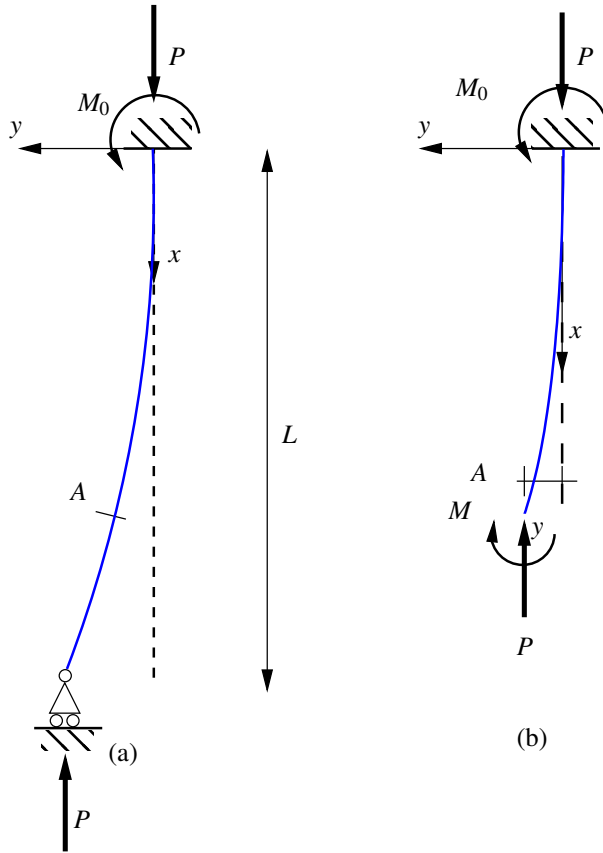


Figura 2.15 Longitud de pandeo de columna biempotrada

**2.4.2. Elemento empotrado - libre**

La Figura 2.16 representa un elemento de longitud  $L$  con condiciones de empotramiento en un extremo, y libre en el opuesto. Aislando un trozo, entre  $0$  y  $x$ , e imponiendo la condición de empotramiento en  $x = 0$ , se obtiene la misma ecuación que la ya obtenida en (2.57). Por tanto,

$$y(x) = \frac{M_0}{P} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) \right] \tag{2.65}$$



**Figura 2.16** Columna con condiciones de empotramiento-libre

Las condiciones en  $x = L$  son de extremo libre: no existe por tanto momento flector ni cortante. La expresión del esfuerzo cortante se verá más adelante para una viga-columna, ya que difiere de la viga de Bernoulli-Euler. La condición de momento flector nulo puede imponerse mediante la derivada segunda:  $y''(L) = 0$ . Derivando dos veces, e igualando a cero, se obtiene la siguiente ecuación:

$$y''(L) = \frac{M_0}{P} \frac{P}{EI} \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0 \tag{2.66}$$

Si se descarta la solución trivial, que se produce para  $M_0 = 0$ , lo cual supone que  $y(x) = 0$ , entonces, para que exista solución con  $y(x) \neq 0$  debe cumplirse que:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0 \tag{2.67}$$

La función  $\cos(\theta)$  vale 0 si  $\theta$  es un múltiplo impar de  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = (2n-1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.68)$$

Por tanto, las cargas críticas de los diferentes modos de pandeo son:

$$P_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EI}{(2L)^2} \quad (2.69)$$

El valor más bajo de estas cargas es la carga crítica de la columna empotrada-libre. Para  $n = 1$ ,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \quad (2.70)$$

Comparando esta expresión con la obtenida para la carga crítica de Euler del elemento biarticulado (2.36), se concluye que la carga crítica en este caso es igual que la de un elemento biarticulado de longitud doble. En efecto, observando la función en su *prolongación analítica*<sup>3</sup>, (Figura 2.17) se concluye que la distancia entre los puntos de momento nulo es, precisamente,  $2L$ .

Los modos de pandeo  $y_n(x)$  se obtienen sustituyendo los valores de las cargas  $P_n$  encontradas en (2.69) en la solución (2.65), quedando:

$$y_n(x) = 1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \quad (2.71)$$

### 2.4.3. Elemento empotrado - deslizadera

La Figura 2.18 representa un elemento de longitud  $L$  con condiciones de empotramiento en un extremo, y vinculado a una deslizadera en el apoyo opuesto.

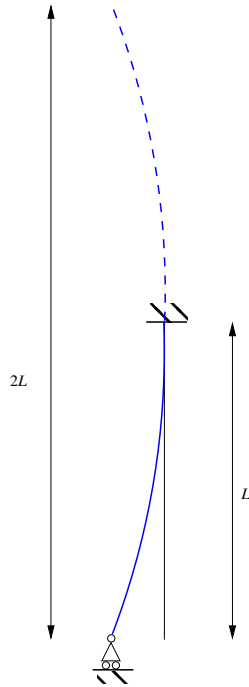
Nuevamente, aislando un trozo, entre 0 y  $x$ , e imponiendo la condición de empotramiento en  $x = 0$ , se obtiene:

$$y(x) = \frac{M_0}{P} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x\right) \right]$$

Imponiendo la condición de deslizadera en  $x = L$ , puede plantearse que el giro es nulo, o que el cortante es nulo. Puede demostrarse que ambas condiciones son equivalentes. Así, imponiendo que  $y'(L) = 0$ , se obtiene:

$$\frac{M_0}{P} \sqrt{\frac{P}{EI}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L\right) = 0 \quad (2.72)$$

<sup>3</sup>Se denomina *prolongación analítica* o *extensión analítica* a la función extendida que se obtiene evaluando una función analítica fuera del intervalo donde inicialmente está definida



**Figura 2.17** Longitud de pandeo de columna empotrada-libre

Para obtener soluciones diferentes de la trivial, ha de darse que:

$$\operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) = 0 \quad (2.73)$$

Este caso ya se estudió en la columna de Euler. El argumento de la función debe verificar la siguiente igualdad,

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.74)$$

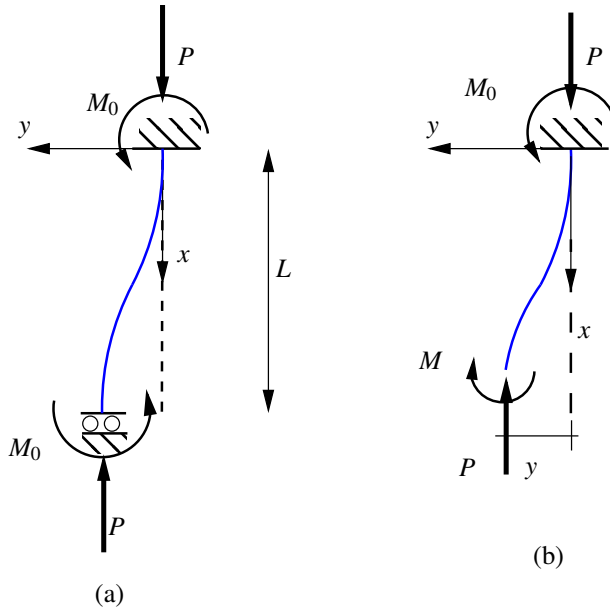
Por tanto, las cargas críticas son,

$$P_n = \frac{(n\pi)^2}{L^2} EI \quad (2.75)$$

Expresión que es idéntica a la obtenida en el caso de Euler (2.35). Para  $n = 1$  se obtiene la carga crítica, que en este caso es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.76)$$

Observando la ecuación anterior, y la Figura 2.19, el elemento empotrado-deslizadera pandea con la misma carga que un biarticulado de igual longitud.



**Figura 2.18** Columna con condiciones de empotramiento-deslizadera

Los modos de pandeo difieren respecto al caso de Euler. Sustituyendo los valores de  $P_n$  en  $y(x)$ , se obtiene:

$$y_n(x) = 1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.77}$$

**2.4.4. Elemento empotrado - apoyado**

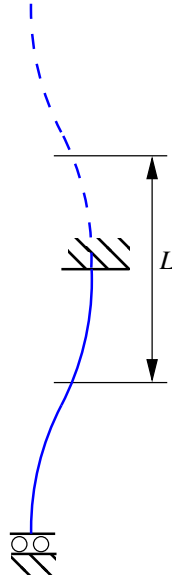
La Figura 2.20(a) representa un elemento de longitud  $L$  con condiciones de empotramiento en un extremo, y apoyo simple en el opuesto.

En este caso, nótese que es necesario el par de fuerzas horizontales  $M_0/L$  para que se de el equilibrio. Aislando un tramo entre  $0$  y  $x$ , mostrado en la Figura 2.20(b), y estableciendo el equilibrio de momentos respecto al punto de corte, queda:

$$M + Py + \frac{M_0}{L}x - M_0 = 0 \tag{2.78}$$

Introduciendo la relación momento-curvatura linealizada,  $M = EIy''$ , dividiendo entre  $EI$ , y pasando al miembro de la derecha la función que no depende de  $y$  ni de sus derivadas, queda la siguiente EDO:

$$y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{M_0}{EI}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{2.79}$$



**Figura 2.19** Longitud de pandeo de columna empotrada-deslizadera

La solución se construye sumando  $y^h(x)$  (solución de la homogénea), más una solución particular  $y_p(x)$ . La solución de la homogénea es conocida:

$$y^h(x) = c_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_2 \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) \quad (2.80)$$

La solución particular, teniendo en cuenta que el término de la derecha es una función lineal, puede tomarse de forma lineal, ajustando los coeficientes para que se de la identidad en la ecuación completa. En este caso, puede demostrarse, por sustitución en (2.79) que

$$y^p(x) = \frac{M_0}{P} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad (2.81)$$

La solución de la ecuación es:

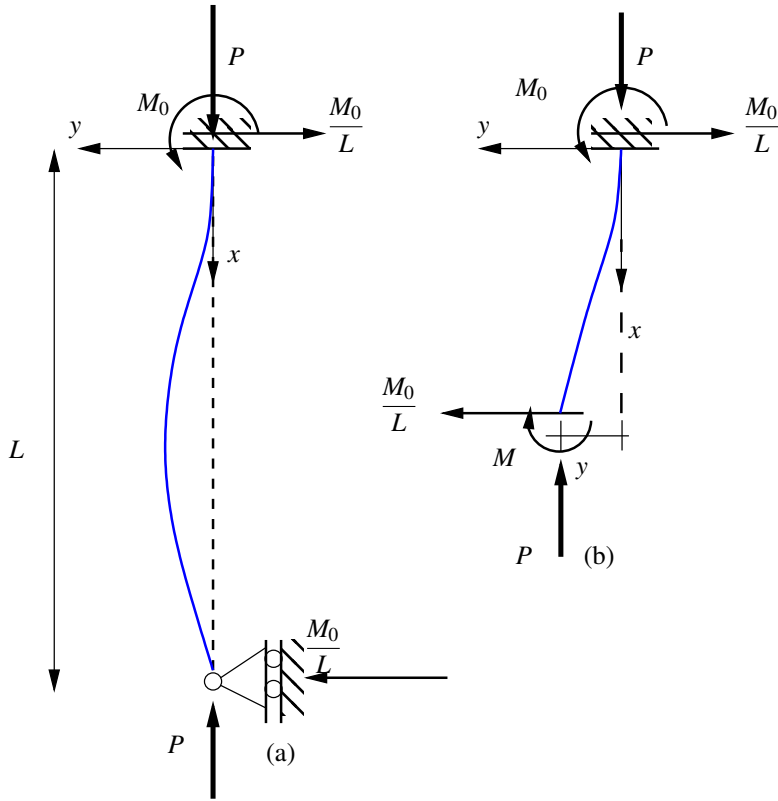
$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_2 \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + \frac{M_0}{P} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad (2.82)$$

Imponiendo la primera condición del empotramiento,

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 + \frac{M_0}{P} = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{M_0}{P}$$

Considerando la condición  $y'(0) = 0$ ,

$$c_1 \sqrt{\frac{P}{EI}} - \frac{M_0}{PL} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{M_0}{PL \sqrt{\frac{P}{EI}}}$$



**Figura 2.20** Columna con condiciones de empotramiento-apoyo

Considerando la solución para  $c_1$  y  $c_2$  encontrada, la expresión de  $y(x)$  es,

$$y(x) = \frac{M_0}{P} \left[ \frac{1}{L\sqrt{\frac{P}{EI}}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) - \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + 1 - \frac{x}{L} \right] \quad (2.83)$$

Imponiendo en el extremo  $x = L$  la primera condición de borde apoyado,  $y(L) = 0$ ,

$$y(L) = \frac{M_0}{P} \left[ \frac{1}{L\sqrt{\frac{P}{EI}}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) - \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) + 1 - 1 \right] = 0 \quad (2.84)$$

La solución distinta de la trivial es posible, si el término del corchete se anula.

$$\frac{1}{L\sqrt{\frac{P}{EI}}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) - \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) = 0 \quad (2.85)$$



Llamando al ángulo

$$\theta = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \tag{2.86}$$

Es posible reescribir la igualdad como,

$$\frac{1}{\theta} \text{sen}(\theta) = \text{cos}(\theta) \tag{2.87}$$

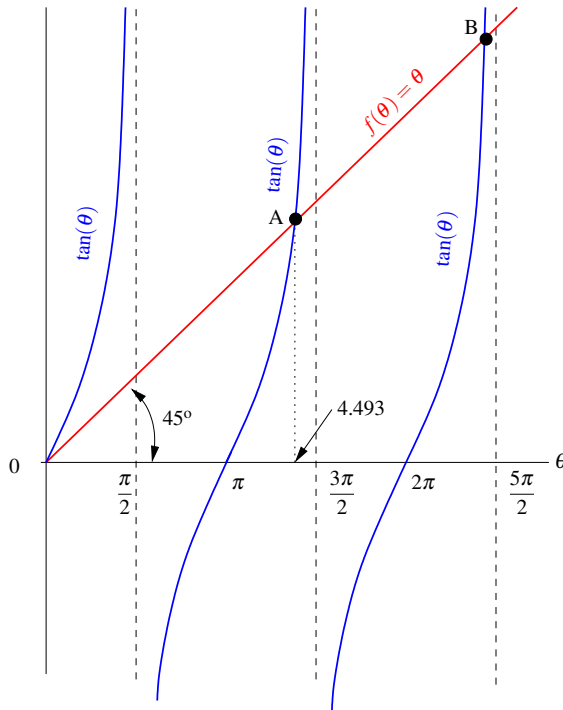
Dividiendo entre  $\text{cos}(\theta)$ , y pasando al miembro de la derecha el denominador, queda,

$$\tan(\theta) = \theta \tag{2.88}$$

La ecuación anterior es no lineal, y no tiene una solución algebraica sencilla. La Figura 2.21 muestra que las soluciones  $f(\theta) = \tan(\theta)$  y  $f(\theta) = \theta$  se cortan en cada intervalo de definición de la función  $\tan(\theta)$ , siendo el primer punto de corte el valor,

$$\theta \simeq 4.493 \tag{2.89}$$

Considerando que  $\theta$  viene dado por (2.86), para la primera carga crítica se verifica:



**Figura 2.21** Representación de los puntos de corte de  $\tan(\theta) = \theta$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L = 4.493 \Rightarrow P_{cr} = \frac{4.493^2 EI}{L^2} \tag{2.90}$$

Para tener esta expresión similar a la de la carga crítica, basta multiplicar y dividir en el denominador por  $\pi^2$ ,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\frac{\pi^2}{4.493^2} L^2} \simeq \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \tag{2.91}$$

El elemento empotrado - apoyado tiene la misma carga crítica que la de un biarticulado de longitud  $0.7L$ . La Figura 2.22 muestra la posición de las dos rótulas en la función solución; puede demostrarse que la distancia entre ambos puntos es de  $0.7L$ .

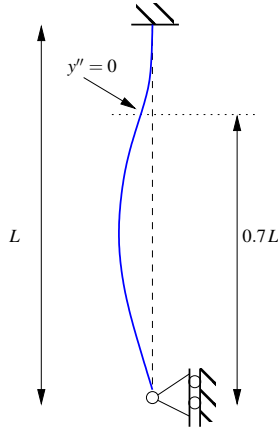


Figura 2.22 Longitud de pandeo de columna empotrada-apoyada

**2.5. Ecuación Diferencial de pandeo de columnas**

Se han estudiado casos en los que, para cada uno de ellos, se ha planteado el equilibrio de un trozo de columna, obteniéndose una ecuación diferencial que en cada caso se ha resuelto con condiciones de contorno específicas. Es fácil comprobar que todos los casos anteriores pueden englobarse en uno sólo.

Se considera una columna recta, con carga centrada en su eje. Si se considera cualquier configuración de equilibrio, los esfuerzos en los extremos del elemento serán los representados en la Figura 2.23. Además del axil  $P$ , existirán un cortante  $Q$ , y dos momentos, de valor genérico  $M_A$  y  $M_B$ . Aislando un trozo de longitud  $x$ , y tomando momentos respecto al punto de corte, se obtiene la ecuación de equilibrio de momentos:

$$M + Py - M_A + Qx = 0 \tag{2.92}$$

Considerando que  $M = EIy''$ , puede escribirse,

$$EIy'' + Py = M_A - Qx \tag{2.93}$$

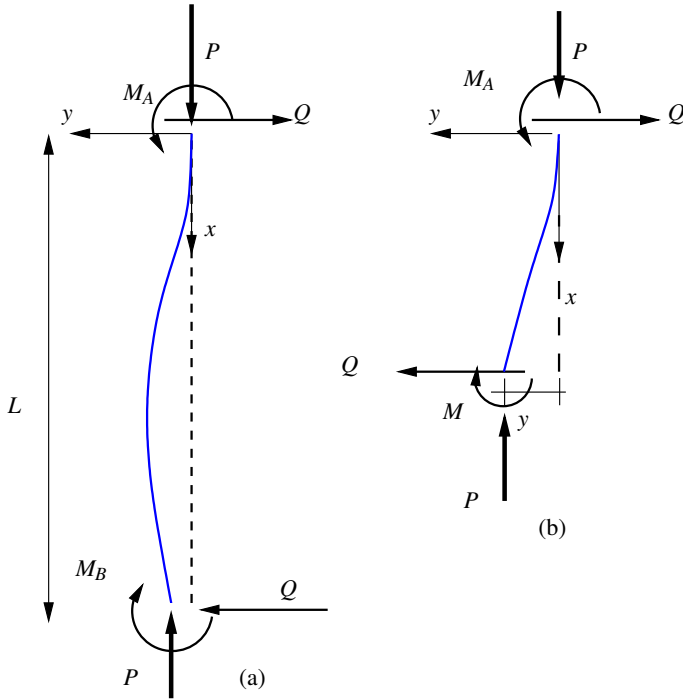


Figura 2.23 Pandeo de columna, caso general

Derivando dos veces respecto a  $x$  en la ecuación anterior, el miembro de la derecha de la igualdad se hace 0. Por tanto,

$$EIy^{IV} + Py'' = 0 \tag{2.94}$$

La ecuación (2.94) es la Ecuación Diferencial de pandeo de columnas. Es una EDO lineal de coeficientes constantes, de cuarto orden. Es posible plantear una solución general, ya que la ecuación es homogénea. Si se busca una solución del tipo  $y(x) = e^{\gamma x}$ , las raíces de  $\gamma$  deben cumplir:

$$\gamma^4 EI - \gamma^2 P = 0 \Rightarrow \gamma^2 (\gamma^2 EI - P) = 0 \tag{2.95}$$

Las soluciones son:

- Por un lado,  $\gamma = 0$  con multiplicidad 2.
- Por otro lado,  $\gamma = \pm i \sqrt{P/EI}$ .

Este caso corresponde al estudiado en el primer capítulo, en la sección 1.5.1 (Caso IV). Para tener 4 funciones de base, se completa la base con las funciones  $\{1, x, x^2, \dots\}$  hasta completar el número de funciones necesarias.

La solución general es:

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_2 \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_3 + c_4 x \quad (2.96)$$

siendo  $c_1, c_2, c_3, c_4$  cuatro constantes a determinar, imponiendo las condiciones de contorno. En general, al imponer estas condiciones de contorno, se obtendrá un problema de valores propios, cuyas soluciones son un conjunto de valores propios (cargas críticas), asociadas con las funciones propias (modos de pandeo).

## 2.6. Longitud de Pandeo. Hipérbola de Euler

Del estudio de los casos correspondientes a distintas condiciones de contorno, se concluye que la expresión de la carga crítica puede plantearse general, mediante la expresión:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l_k)^2} \quad (2.97)$$

siendo  $l_k$  un parámetro, conocido como *longitud de pandeo*. Nótese que la longitud de pandeo no es una longitud real (no se puede medir físicamente en la pieza). Simplemente, es una longitud ficticia que, al ser utilizada en la ecuación (2.97), permite obtener la carga crítica de una columna con una determinada configuración de apoyos. En los casos anteriores se concluyó que la longitud  $l_k$  podía interpretarse geoméricamente como la distancia entre puntos de momento nulo, evaluada sobre el modo de pandeo. La Figura 2.24 muestra la longitud de pandeo  $l_k$  en los 5 casos básicos estudiados. La longitud de pandeo  $l_k$  se suele describir en función de un parámetro  $\beta$  adimensional.

$$l_k = \beta L \quad (2.98)$$

El parámetro  $\beta$  depende exclusivamente de las condiciones de contorno del problema. La Figura 2.25 muestra los valores de  $\beta$  de los 5 casos básicos.<sup>4</sup>

La ecuación (2.97) permite obtener la carga crítica. A partir de la misma, puede definirse un parámetro, denominado *tensión crítica*, que se define como:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \quad (2.99)$$

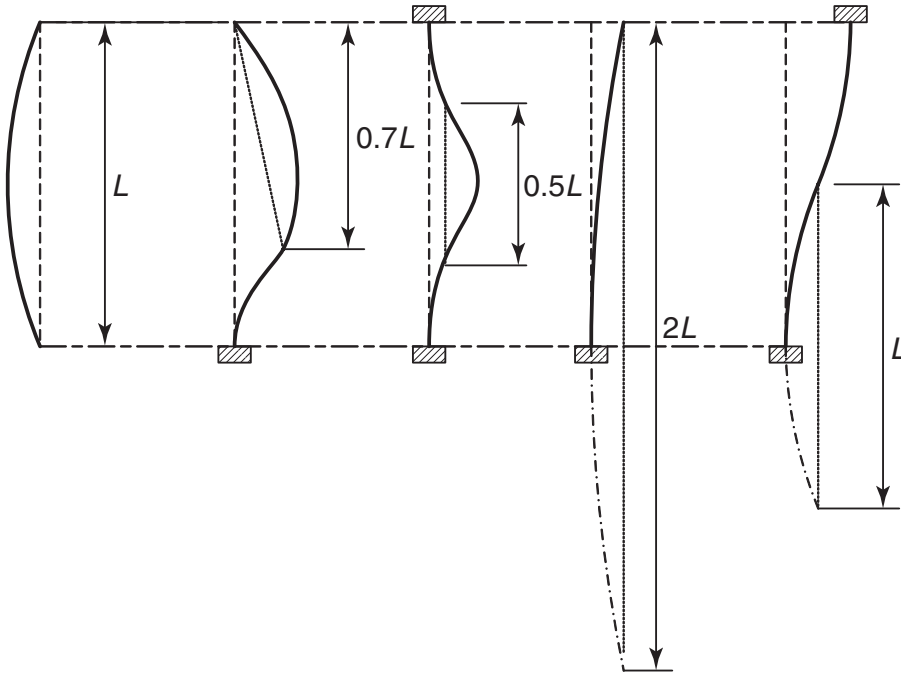
Considerando la expresión de  $P_{cr}$  dada por (2.97),

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l_k)^2 A} \quad (2.100)$$

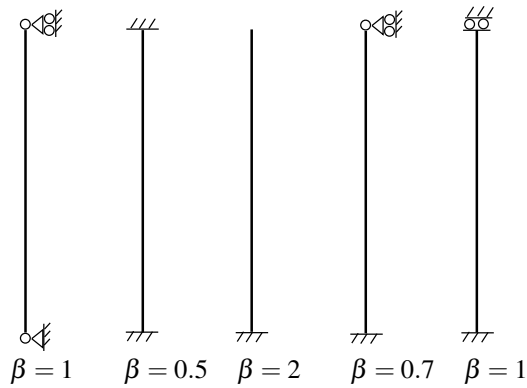
El momento de inercia  $I$  puede escribirse en función del parámetro  $r$ , denominado *radio de giro*, como

$$I = A r^2 \quad (2.101)$$

<sup>4</sup> $\beta$  es denominado en inglés *effective length factor*



**Figura 2.24** Interpretación geométrica de la longitud de pandeo



**Figura 2.25** Coeficiente  $\beta$  de los 5 casos básicos

El radio de giro es una propiedad de la sección, y se obtiene indirectamente a través del momento de inercia  $I$  y del área  $A$ .

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{2.102}$$

Considerando la expresión de  $I$  definida en (2.101), y sustituyendo en (2.100),

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E A r^2}{(l_k)^2 A} = \frac{\pi^2 E r^2}{(l_k)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_k}{r}\right)^2} \quad (2.103)$$

En este punto, introduciremos un nuevo parámetro,  $\lambda$ , denominado *esbeltez mecánica*.

$$\lambda = \frac{l_k}{r} \quad (2.104)$$

Nótese que la esbeltez mecánica es un ratio entre dos longitudes que no existen físicamente en la columna: por un lado, la longitud de pandeo  $l_k$ , que depende exclusivamente de las condiciones de apoyo en los extremos de la barra; por otro, el radio de giro  $r$ , que se define mediante (2.102), y que se calcula indirectamente a partir del momento de inercia  $I$  y del área  $A$ .

Existe otra esbeltez, conocida como *esbeltez geométrica* que sí se establece sobre medidas geométricas, como la longitud  $L$  o el canto  $h$ . La esbeltez geométrica se notará como  $\lambda_G = L/h$ . Esta esbeltez típicamente permite identificar si un elemento viga a flexión debe ser tratado con teoría de Bernoulli-Euler, o Timoshenko, o bien mediante ecuaciones de sólido.

Finalmente, existe otro parámetro de esbeltez, que es el adoptado en los Eurocódigos para el diseño de columnas comprimidas, denominado *esbeltez relativa*,  $\bar{\lambda} = \sqrt{\sigma/\sigma_{cr}}$ . Esta esbeltez relativa permite plantear la resistencia de la columna en fase postcrítica. Se suele emplear en caso en el que se supera el límite elástico con el ratio de deformación  $\bar{\lambda} = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_{cr}}$ , siendo  $\varepsilon_{cr} = \sigma_{cr}/E$ .

Considerando la esbeltez mecánica, la expresión de la tensión crítica puede escribirse como sigue:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.105)$$

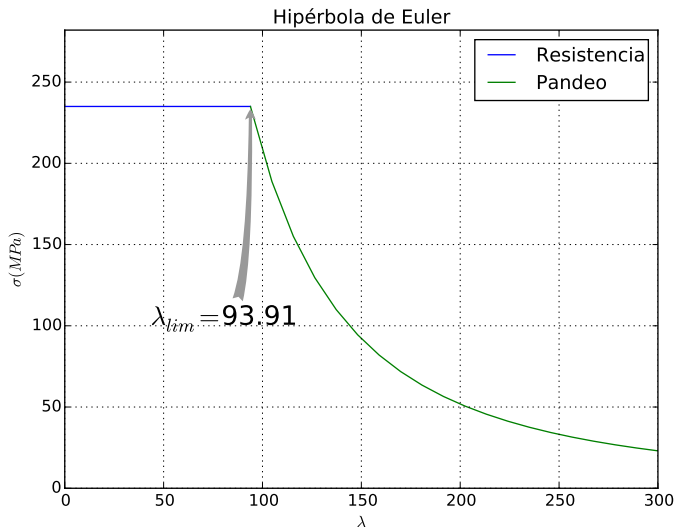
La ecuación anterior se conoce históricamente como la *hipérbola de Euler*. Esta expresión permite obtener la tensión máxima a la que puede ser cargada axialmente una columna para que se presente la carga crítica. Nótese que sólo depende del módulo elástico, y de la esbeltez mecánica. Cuanto mayor es el parámetro de esbeltez mecánica, menor es la tensión crítica. Por tanto, la hipérbola de Euler permite establecer una primera curva de diseño de columnas comprimidas a pandeo: si la tensión axil, calculada mediante el ratio  $\sigma = P/A$ , supera el valor  $\sigma_{cr}$  se producirá un *modo de fallo* concreto: el pandeo de la columna. Nótese que este modo de fallo no implica rotura, o consideraciones acerca de la resistencia de la columna en la fase postcrítica. Simplemente, establece el límite a partir del cual la recta deja de ser la única solución al equilibrio, apareciendo una forma de equilibrio estable que implica deflexiones transversales.

Nótese que existe una cota superior a la tensión máxima que se puede aplicar, que depende sólo del material. Este límite supone otro *modo de fallo* diferente: la

resistencia del material. Dependiendo del tipo de material, este límite será el de plastificación, o rotura. Si a este límite se le denomina  $\sigma_{max,r} = f_y$  (tensión máxima por criterio resistente), claramente, para una carga  $P$  arbitraria, se deben cumplir ambas condiciones:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \begin{cases} f_y & \text{(resistencia)} \\ \sigma_{cr} & \text{(pandeo)} \end{cases} \quad (2.106)$$

Existe una esbeltez límite,  $\lambda_{lim}$ , tal que  $\sigma_{cr} = f_y$ . Si  $\lambda < \lambda_{lim}$ , el criterio de fallo será por resistencia, ya que aunque la hipérbola de Euler produce puntos por encima, dicho límite no se podrá alcanzar, ya que el material fallará antes por resistencia. Para  $\lambda > \lambda_{lim}$ , el fallo se producirá por inestabilidad. La Figura 2.26 muestra la curva de diseño que se obtiene combinando ambos criterios.



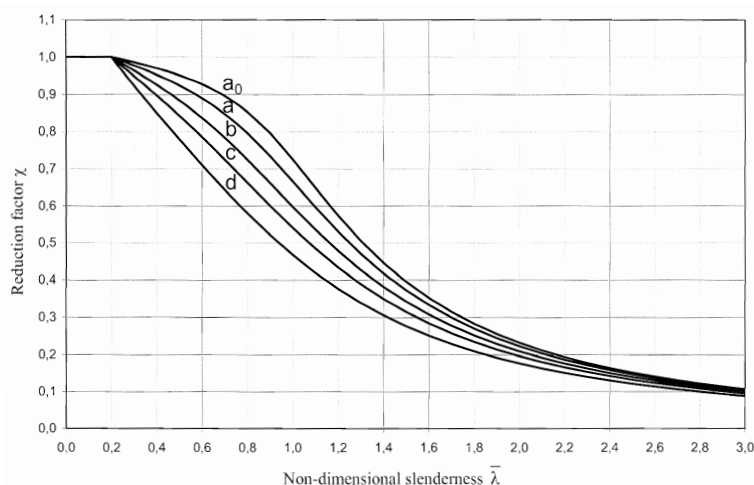
**Figura 2.26** Curva de diseño combinando la hipérbola de Euler con el límite resistente. Resultados para acero  $E = 210$  GPa,  $f_y = 235$  MPa

La curva compuesta por ambos criterios es una referencia para el diseño a columnas a compresión. Sin embargo, las curvas de diseño reales de columnas tienen en cuenta para cada esbeltez mecánica la resistencia en fase postcrítica, la cual depende del importante efecto de las imperfecciones, como se verá más adelante. En el comportamiento de columnas, la hipérbola de Euler constituye una cota superior que no se puede superar.

La Figura 2.27 muestra las curvas europeas de pandeo para columnas de acero. Cada curva es aplicable a un determinado tipo de sección transversal, e incluso depende del proceso de fabricación. Las curvas reflejan la sensibilidad a las imperfecciones. En las mismas, nótese que en el eje de abscisas está el parámetro de

esbeltez relativa  $\bar{\lambda}$ . En ordenadas se representa el factor  $\chi$  de reducción de la tensión máxima, respecto a la máxima resistente ( $\sigma_{max} = \chi f_y$ ). Nótese que si  $\chi = 1$ , la tensión es la del límite elástico. Todas las curvas representadas están por debajo del límite impuesto por la hipérbola de Euler y el límite resistente.<sup>5</sup>

La Figura 2.28 muestra la comparativa entre las curvas de resistencia reales, y la teórica de Euler, para perfiles en H. En las mismas, obsérvese que la curva compuesta definida mediante la ecuación (2.106) es una cota superior.



**Figura 2.27** Curvas europeas de pandeo para columnas. Tomado de EN-1993-1 (2005)

## 2.7. Pandeo con imperfecciones

En el estudio de problemas de inestabilidad de barras es muy importante tener en cuenta el efecto que tienen las *imperfecciones*. Dentro de las fuentes de imperfecciones, las más importantes son las geométricas (carga no centrada, pieza no perfectamente rectilínea), junto con la influencia de la heterogeneidad presente en la sección transversal (siendo las tensiones residuales una de las fuentes principales de no homogeneidad).

Las tensiones residuales son un conjunto autoequilibrado de tensiones que existen en la pieza, debida a los procesos de fabricación. Los efectos de estas tensiones residuales son, principalmente, dos: i) por un lado, modifican la posición teórica del centro de gravedad, y por tanto, de la línea de centros de gravedad, dejando

<sup>5</sup>Este comportamiento es típico de las columnas, y se denomina *pandeo tipo columna*. Es diferente del comportamiento de las placas y paneles rigidizados, los cuales permiten, bajo ciertas configuraciones, generar mecanismos internos resistentes en fase postcrítica, que permiten que se supere el límite de la tensión crítica. Estos mecanismos se aprovechan, por ejemplo, en el diseño de las chapas que forman las almas de los puentes metálicos y mixtos, los cuales suelen estar diseñados para que su resistencia última se produzca para tensiones por encima del límite de pandeo elástico



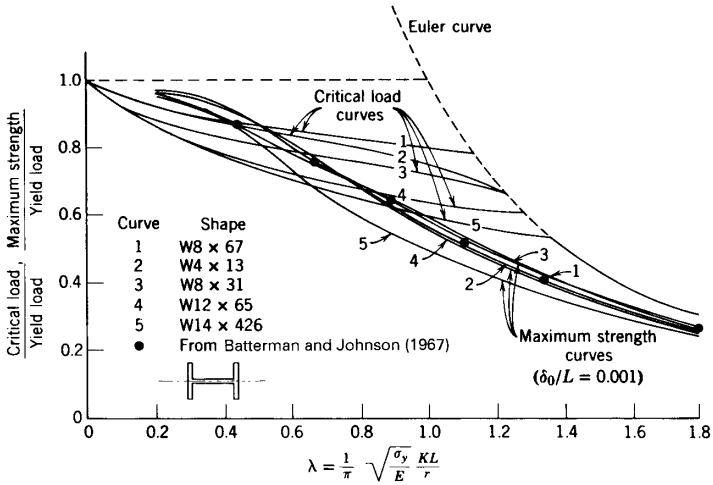


Figura 2.28 Curvas de resistencia de columnas rectas. Tomado de [7]

de ser dicha línea una recta perfecta; ii) por otro lado, modifican la distribución de tensiones interiores, siendo difícil predecir la distribución real de tensiones que se dará para cada carga aplicada.

En acero, las tensiones residuales proceden de diferencias en el proceso de enfriamiento tras el laminado de los perfiles (Figura 2.29). Asimismo, la soldadura introduce tensiones residuales (Figura 2.30), siendo en ocasiones necesario realizar tratamientos térmicos de eliminación de tensiones residuales si las piezas soldadas van a formar parte de elementos esbeltos comprimidos. En lo que sigue se planteará

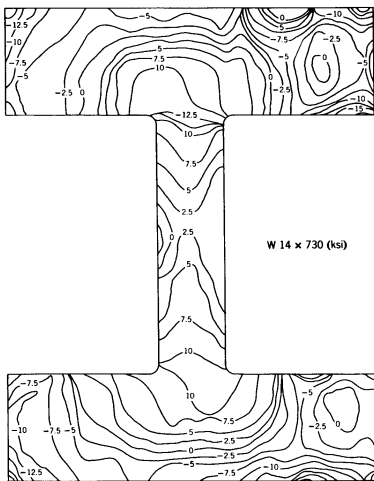


Figura 2.29 Tensiones residuales procedentes del proceso de laminado. Tomado de [7]

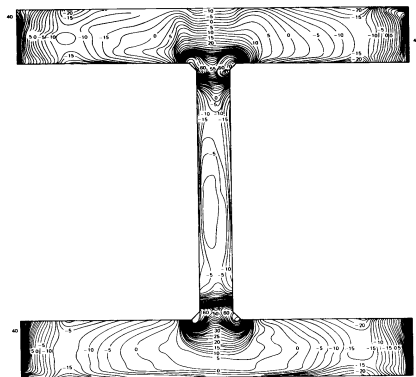
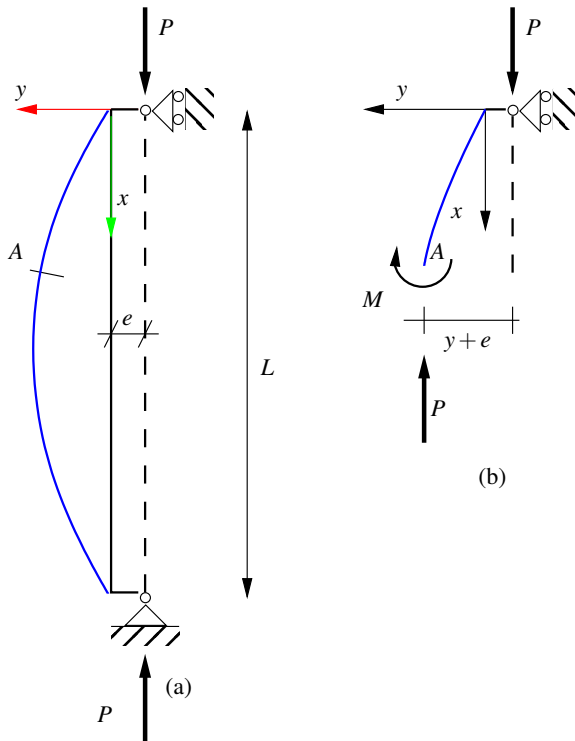


Figura 2.30 Tensiones residuales de soldadura. Tomado de [7]

la formulación linealizada para obtener soluciones a dos tipos de imperfecciones geométricas. Se planteará qué ocurre cuando la carga no está perfectamente centrada y cuando el elemento no es perfectamente rectilíneo. Mediante el análisis de la teoría lineal, se observará que la estructura matemática de las soluciones cambia profundamente por efecto de las imperfecciones: el problema de valores propios deja de presentarse, y la solución que implica  $y(x) = 0$  deja de aparecer entre las posibles soluciones. El contraste con las soluciones no lineales ayudarán a reinterpretar el concepto de carga crítica.

**2.7.1. Elemento biarticulado comprimido con excentricidad de carga**

Se considera en esta sección un elemento rectilíneo de longitud  $L$ , pero con una carga aplicada con una excentricidad  $e$ . Este elemento es equivalente a una forma inicial rectilínea, con dos patillas (superior e inferior) de longitud  $e$ . Algo muy importante es que  $e$ , al igual que  $L$ , tiene dimensión finita, y no es nulo. En relación a la Figura 2.31(a) se dispone un sistema de referencia posicionado en el vértice superior. Nótese que en  $x = 0$  no hay momento flector nulo, ya que el momento flector, en valor absoluto, será el producto  $P \cdot e$ . Aislando un trozo, mostrado en la



**Figura 2.31** Columna biarticulada con carga excéntrica

Figura 2.31(b), y tomando momentos respecto al punto de corte, se observa que en esta ocasión, la fuerza  $P$  debe multiplicarse por la distancia  $(y + e)$  para obtener el momento respecto al punto de corte. Por tanto, la ecuación de equilibrio de momentos es:

$$M + P(y + e) = 0 \quad (2.107)$$

Teniendo en cuenta que  $M = EIy''$ , dividiendo entre  $EI$ , y pasando al miembro de la derecha de la igualdad la función que no depende de  $y$  ni de sus derivadas, se obtiene:

$$y'' + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pe}{EI} \quad (2.108)$$

Esta ecuación ha de ser resuelta, junto con las adecuadas condiciones de contorno. En esta ocasión, la ecuación es una EDO lineal de coeficientes constantes, no homogénea, de orden 2. Necesita 2 condiciones de contorno para fijar una única solución. Se considerarán las condiciones de desplazamiento nulo en los extremos:

$$y(0) = 0; \quad y(L) = 0 \quad (2.109)$$

La solución general puede escribirse como sigue:

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + c_2 \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) - e \quad (2.110)$$

Nótese que, junto con la conocida ya solución de la ecuación homogénea, aparece la solución particular  $y^p(x) = -e$ ; es decir, una función constante. Por sustitución en la ecuación, puede comprobarse que en efecto, la solución particular es correcta. Imponiendo la condición  $y(0) = 0$ , se obtiene:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = e \quad (2.111)$$

Imponiendo que  $y(L) = 0$ , y teniendo en cuenta que  $c_2 = e$ , se obtiene:

$$c_1 \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) + e \left[ \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) - 1 \right] = 0 \quad (2.112)$$

de donde,

$$c_1 = e \frac{1 - \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)}{\operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)} \quad (2.113)$$

La solución queda:

$$y(x) = e \left[ \frac{1 - \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)}{\operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) + \operatorname{cos} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right) - 1 \right] \quad (2.114)$$

En ambos extremos se cumple que el momento flector no es nulo, sino  $M = EIy'' = -Pe$ . Observando la solución, se concluye:

- La solución existe para cualquier valor de  $P$ , y no sólo para un conjunto discreto de valores de  $P$ .
- La solución  $y(x) = 0$  ya no es solución. No puede serlo, ya que por pequeño que sea el valor de  $P$ , si se introduce la carga con una excentricidad, aparecerán momentos flectores que generarán deflexiones transversales, para cualquier  $P$  que se aplique.

Observando la ecuación (2.114), la solución es singular si el denominador se anula; es decir, si

$$\operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right) \Rightarrow P = \frac{(n\pi)^2 EI}{L^2} \quad (2.115)$$

La singularidad aparece asociada al conjunto de cargas críticas de la columna biarticulada. El valor más bajo de todas, para el que se producirá la primera singularidad, será la carga crítica de Euler  $P = P_E$ .

Para comprender mejor qué ocurre, puede plantearse la solución lineal y no lineal de un parámetro de desplazamiento. En este caso, si se obtiene la máxima amplitud de  $y$ , que se produce en el centro ( $y_{max} = y(L/2)$ ), se obtiene que:

$$y_{max} = e \left[ \frac{1 - \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)}{\operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \right)} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2} \right) + \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad (2.116)$$

Nótese que en las expresiones trigonométricas aparecen un ángulo y el ángulo mitad. Llamando  $\varphi$  al ángulo

$$\varphi = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \quad (2.117)$$

y teniendo en cuenta las identidades trigonométricas

$$\cos \varphi = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.118)$$

$$\operatorname{sen} \varphi = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.119)$$

Resulta,

$$y_{max} = e \left[ \frac{1 - 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right)} \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{2} \right) + \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right] \quad (2.120)$$

Simplificando,

$$y_{max} = e \left[ \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\text{cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + \text{cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1 \right] = e \left[ \frac{1}{\text{cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - 1 \right] \quad (2.121)$$

Llamando  $\delta$  a la deflexión lateral, medida respecto al eje de las cargas,

$$\delta = y_{max} + e \quad (2.122)$$

Puede escribirse,

$$\delta = e \left[ \frac{1}{\text{cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right] = e \left[ \frac{1}{\text{cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right)} \right] \quad (2.123)$$

El denominador se anula para

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = P_E \quad (2.124)$$

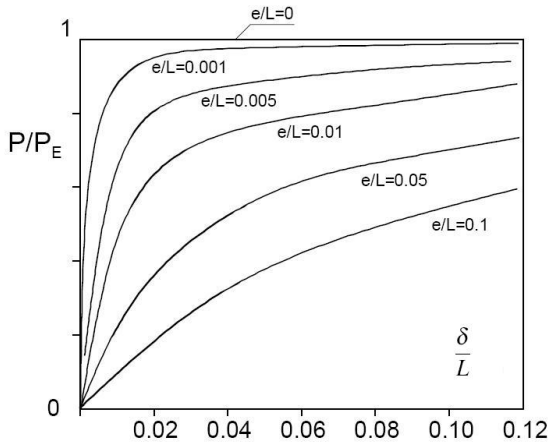
Analizando el resultado que se ha obtenido, se concluye que, cuando la carga  $P$  tiende a  $P_E$ , la deflexión  $\delta$  tiende a infinito. Este resultado no es coherente desde el punto de vista físico, ya que no son posibles desplazamientos infinitos. Lo que ha ocurrido es una consecuencia de las ecuaciones que se han empleado, que son lineales: la curvatura se ha planteado como  $y''$ , y las condiciones de contorno se han planteado en  $x = 0$  y en  $x = L$ .

El resultado obtenido es muy importante, ya que la caracterización de la carga crítica, desde el punto de vista de la teoría lineal, será aquella carga que, aplicada a un sistema, produce desplazamientos infinitos. En efecto, si se idealiza la relación entre fuerzas y desplazamientos, mediante la rigidez  $K$ , puede deducirse que:

$$F = KU \Rightarrow U = \frac{F}{K} \quad (2.125)$$

Si el desplazamiento es infinito, y  $F$  es un valor finito, la ecuación anterior indica que  $K = 0$ . La condición de carga crítica, por tanto, para la teoría lineal, será aquella carga que anula la rigidez del sistema. Esta condición se puede generalizar a un sistema matricial, como se verá en el capítulo siguiente.

La Figura 2.32 muestra las distintas soluciones para las curvas que relacionan la carga con la deflexión (adimensionalizadas con la carga  $P_E$  y la longitud  $L$ , respectivamente). En todos los casos, en  $P/P_E = 1$  se produce una asíntota horizontal. Si se analiza la solución con teoría no lineal con grandes curvaturas y condiciones de contorno no lineales, se concluye que la deflexión máxima no es infinita, sino que



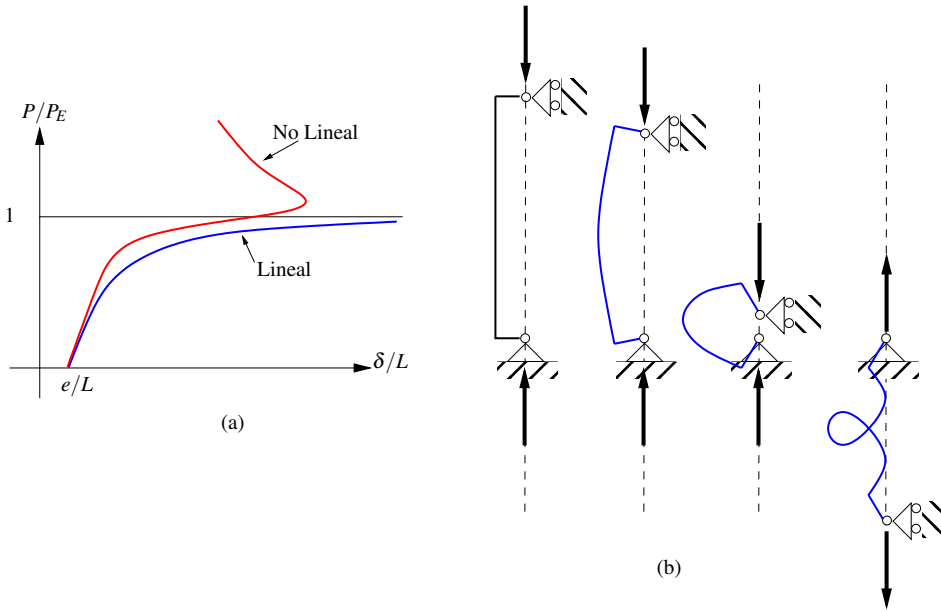
**Figura 2.32** Diferentes curvas de carga para diferentes excentricidades de carga. Resultados de la teoría lineal

tiene un máximo y a partir del mismo decrece. La condición de carga crítica real no puede, por tanto, asociarse a desplazamientos infinitos. La Figura 2.33(a) muestra la comparativa entre la solución lineal y no lineal, para una excentricidad  $e$  dada. Puede observarse que para valores bajos de la carga, ambas curvas están cercanas. Por tanto, la teoría lineal sirve para predecir desplazamientos que no son los obtenidos equilibrando en la configuración indeformada, hasta cierto valor de carga. Cuando la carga se aproxima a la carga crítica, las diferencias entre ambas curvas son máximas: la solución lineal tiende a  $\delta = \infty$ . En cambio, la solución no lineal muestra que el desplazamiento está acotado. La Figura 2.33(b) muestra diferentes estadios del proceso de carga no lineal.

La teoría no lineal permite valorar qué es realmente la carga crítica de una columna con excentricidad en la carga. La pendiente de la curva representa la rigidez del sistema. Se observa que al llegar a una fracción de la carga crítica, la pendiente cambia bruscamente (sin ser cero). En ese instante, para pequeños incrementos de carga, se producen grandes cambios en los desplazamientos. Esta era precisamente la definición intuitiva que se vio en la introducción de este capítulo.

**2.7.2. Elemento biarticulado comprimido con forma inicial no rectilínea**

En este apartado se considera el caso en el que el elemento no es perfectamente rectilíneo, aunque el eje de las cargas sí es rectilíneo. Se supondrá que la forma inicial del elemento es proporcional al modo 1 de pandeo. Esto no tiene porqué darse en la realidad, ya que el patrón de imperfecciones geométricas es, en general, arbitrario. Más adelante se verá qué importante consecuencia tiene que las imperfecciones no sigan el modo 1 de pandeo. No obstante, para obtener unas primera



**Figura 2.33** Contraste entre solución no lineal y lineal

conclusiones, consideraremos por ahora que la forma inicial del elemento viene dada por la ecuación:

$$y_0(x) = a \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \tag{2.126}$$

siendo  $a$  un parámetro finito, representativo de la máxima amplitud de la senoide, que se producen en  $x = L/2$ . La Figura 2.34(a) muestra la forma inicial y la deformada tras la aplicación de la carga  $P$ .

Se admite que la carga es centrada, el material es elástico, y las deformaciones pequeñas. Aislando un trozo de longitud  $x$ , representado en la Figura 2.34(b) y tomando momentos respecto al punto de corte, se obtiene:

$$M + P(y + y_0) = 0 \tag{2.127}$$

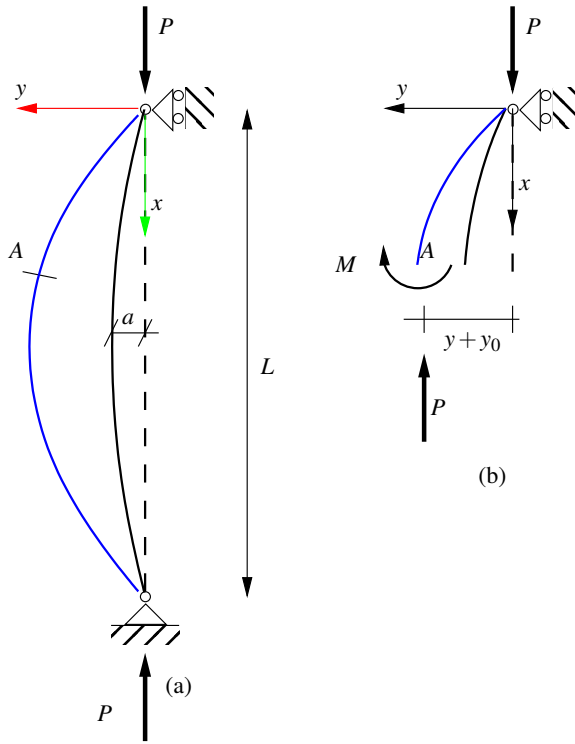
Sustituyendo  $M = EIy''$ , dividiendo entre  $EI$  y pasando al segundo miembro la función  $y_0$ , se tiene

$$y'' + \frac{P}{EI}y = -\frac{Py_0}{EI} \tag{2.128}$$

Considerando que  $y_0$  es en realidad una función, cuya expresión viene dada en (2.127), se tiene

$$y'' + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pa}{EI} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \tag{2.129}$$

Esta EDO ha de ser resuelta, junto con las condiciones en los extremos. En esta ocasión, puesto que la EDO es de orden 2, se van a considerar sólo dos condiciones:



**Figura 2.34** Columna con forma inicial no rectilínea

$y(0) = 0$ ;  $y(L) = 0$ . Para resolver la ecuación, podría aplicarse el método general, descomponiendo la solución en  $y(x) = y^h(x) + y^p(x)$ . Sin embargo, en este caso se va a probar que una solución del tipo

$$y(x) = A \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \tag{2.130}$$

es solución de la ecuación (cumple las condiciones de contorno) siendo  $A$  un parámetro que se va a determinar en función de  $a$ . En efecto, sustituyendo esta función y su segunda derivada en la ecuación, queda:

$$\left[ - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{P}{EI} \right] A \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) = - \frac{Pa}{EI} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \tag{2.131}$$

Por tanto, debe verificarse que

$$\left[ - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{P}{EI} \right] A = - \frac{Pa}{EI} \tag{2.132}$$

de donde

$$A = \frac{\frac{Pa}{EI}}{\left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - \frac{P}{EI}} = \frac{a}{\frac{\pi^2 EI}{L^2 P} - 1} = \frac{a}{\frac{P_E}{P} - 1} \tag{2.133}$$



siendo  $P_E$  la carga crítica de Euler. La solución general, si  $P \neq P_E$ , es

$$y(x) = \frac{a}{\frac{P_E}{P} - 1} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad (2.134)$$

Nótese que esta solución está definida, y verifica:

- La solución no es un conjunto de valores propios  $P_n$ .
- La solución está acotada. No se obtienen modos de pandeo.

Puede calcularse, al igual que con el caso de carga excéntrica, la relación existente entre la carga  $P$  y la deflexión máxima  $\delta$ , medida ésta desde la línea de actuación de la carga, es decir  $\delta = y_{max} + a$ , siendo  $y_{max} = y(L/2)$ .

$$\delta = \frac{a}{\frac{P_E}{P} - 1} + a = a \left( \frac{1}{\frac{P_E}{P} - 1} + 1 \right) = a \frac{\frac{P_E}{P}}{\frac{P_E}{P} - 1} = a \frac{P_E}{P_E - P} \quad (2.135)$$

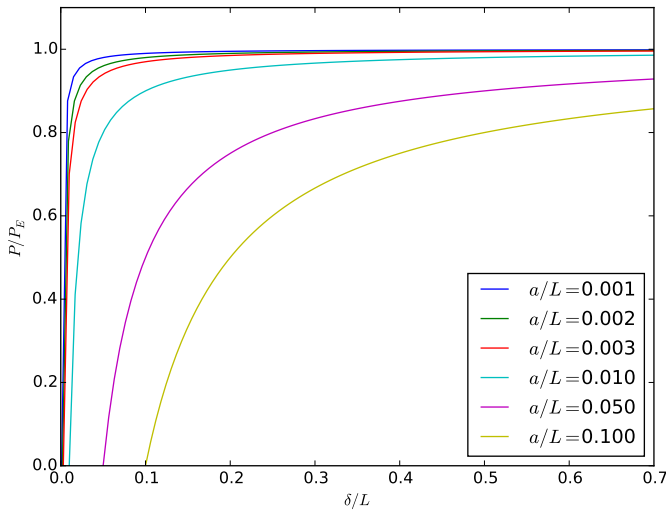
El valor de la amplitud de la imperfección inicial  $a$  se ve amplificado por efecto de la carga  $P$ . Es interesante observar el siguiente límite

$$\lim_{P \rightarrow P_E} \delta = \infty \quad (2.136)$$

El resultado indica que, si la carga es la crítica, la amplitud de la deflexión máxima se hace infinito. La ecuación obtenida para  $\delta$  puede representarse gráficamente para diferentes relaciones  $a/L$  iniciales, representándose en ordenadas la carga adimensional  $P/P_E$ . Estas curvas se muestran en la Figura 2.35. En todos los casos, en  $P/P_E = 1$  se obtiene una asíntota horizontal. Nótese que esta figura es análoga a la figura 2.32. Si se hubiese analizado con teoría no lineal, se hubiesen obtenido curvas del mismo tipo a las mostradas en la Figura 2.33

La carga crítica puede interpretarse de forma análoga a lo visto para el elemento biarticulado sometido a carga excéntrica. En el entorno de  $P_E$ , se produce una caída brusca en la rigidez transversal de la columna: pequeños incrementos de carga provocan grandes incrementos de desplazamiento.

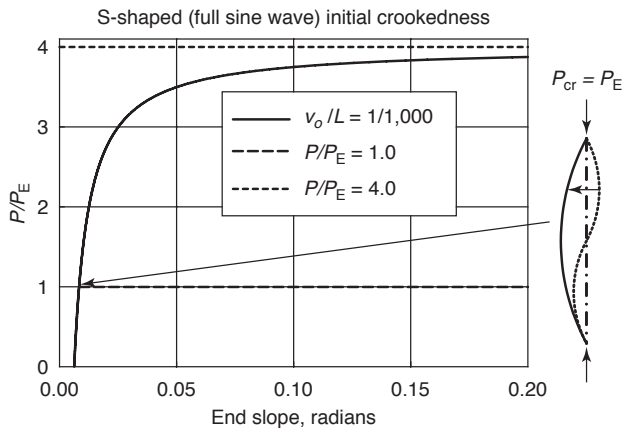
Finalmente, es interesante el caso en el que las imperfecciones geométricas no siguen el modo 1 de pandeo. Imaginemos que la forma inicial hubiese venido dada por el modo 2 de pandeo. En tal caso, el elemento comenzaría su deformación amplificando este modo 2 de pandeo. Nótese que la carga de pandeo del modo 2 es  $P_2 = 4P_E$ . En teoría, este elemento podría cargarse hasta superar  $P_E$ , y el fenómeno de amplificación de desplazamientos para pequeños incrementos de carga se produciría en el entorno de  $P_2$ . Sin embargo, esto no es así: al superar el valor  $P_E$ , el elemento es inestable. Se podrá superar el valor  $P_E$ , pero basta perturbar al elemento para que domine el modo 1 de pandeo, produciéndose un pandeo de tipo



**Figura 2.35** Curvas de carga para diferentes amplitudes de imperfección geométrica inicial. Resultados de la teoría lineal

*snap-through*, con un salto brusco hacia la curva de carga del modo 1. La Figura 2.36 muestra este efecto.

En general, cuando las imperfecciones no siguen el modo 1 de pandeo, el proceso de carga no se ve condicionado, desde el comienzo, hacia el modo fundamental. En estos casos, por encima del nivel de carga crítica  $P_E$ , se produce un salto brusco hacia la forma de equilibrio estable del modo 1. Este modo de fallo es crítico en columnas de acero, pero lo es más en elementos de chapa delgada con forma cilíndrica, los cuales son muy sensibles a imperfecciones geométricas. Esta experiencia puede tenerse comprimiendo axialmente una lata de refresco vacía, y observando que por encima de un nivel de carga, se produce un salto brusco y el colapso, sin existir una transición suave entre la carga y los desplazamientos.



**Figura 2.36** Efecto de pandeo tipo *snap-through* en elemento biarticulado con imperfecciones siguiendo el modo 2 de pandeo. Tomado de [8]



## CAPÍTULO 3

---

# PANDEO GLOBAL DE ESTRUCTURAS DE BARRAS

---

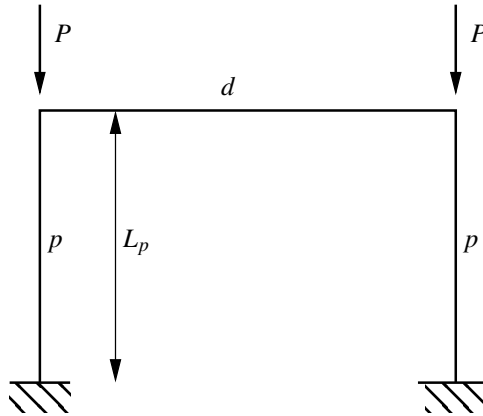
### 3.1. Introducción

En el capítulo precedente se ha estudiado el pandeo de elementos aislados con diversas condiciones de contorno en sus extremos (libre, empotrado, articulado, etc). Sin embargo, un elemento pocas veces puede ser considerado aisladamente, sino que frecuentemente, se encuentra unido a otros elementos de una estructura, con diversas condiciones de vinculación (nudos rígidos, vinculación flexible, etc). De esta forma, el pandeo de un elemento depende de las condiciones de otros elementos, tanto de cargas como de rigidez. La estabilidad de cada elemento depende de toda la estructura. Es preciso, por tanto, estudiar el problema de pandeo desde el punto de vista de la estructura completa.

En este capítulo se desarrollará la formulación matricial que permitirá analizar el problema de estabilidad global de una estructura. En el contexto de esta asignatura, es especialmente importante que el alumno repase y considere todos los planteamientos vistos en Análisis Matricial de Estructuras, ya que se introducirá un nuevo elemento, manteniéndose los conceptos propios del análisis matricial (cambios de base, sistemas de referencia, etc, etc).

**3.2. Modos de pandeo global**

Para aclarar ideas, nos centraremos en un ejemplo sencillo. Consideremos un pórtico, formado por dos pilares de longitud  $L_p$  e inercia  $I_p$  y un dintel, de inercia  $I_d$ , representado en la Figura 3.1 En este pórtico, cada pilar se encuentra sometido



**Figura 3.1** Pórtico con cargas verticales

a esfuerzos de compresión, debido al efecto de las fuerzas verticales. Por encima de un determinado valor de carga  $P$ , se producirá el pandeo de estos pilares. Pero debido al vínculo formado por el dintel, la carga crítica dependerá del conjunto pilares-viga.

La carga crítica puede acotarse para determinadas relaciones de inercia entre el dintel y los pilares. Para acotar estos valores, se van a considerar dos formas de moverse el conjunto, o *modos de pandeo*: modo intraslacional, y modo traslacional.

**Modo intraslacional** En este caso, se considerará que el dintel no puede trasladarse en la dirección horizontal. La relación de rigidez entre el dintel y el pilar determina la forma en la que el dintel impide el giro en el nudo. La relación  $I_d/I_p$  alcanza dos valores extremos:

$I_d/I_p \rightarrow \infty$ : En este caso, el dintel es infinitamente rígido en comparación con el pilar, impidiendo el giro. En esta situación, la carga crítica puede determinarse, considerando que el pilar está bienpotrado. Para este caso, el coeficiente  $\beta$  de pandeo vale 2, y por tanto,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} = 4P_E \tag{3.1}$$

siendo  $P_E$  la carga crítica de Euler, cuya expresión se vio en la ecuación (2.36)

$I_d/I_p \rightarrow 0$  : En este caso el dintel no opone resistencia al giro. El pilar se comporta como empotrado-apoyado, y en esta situación, la carga crítica puede determi-

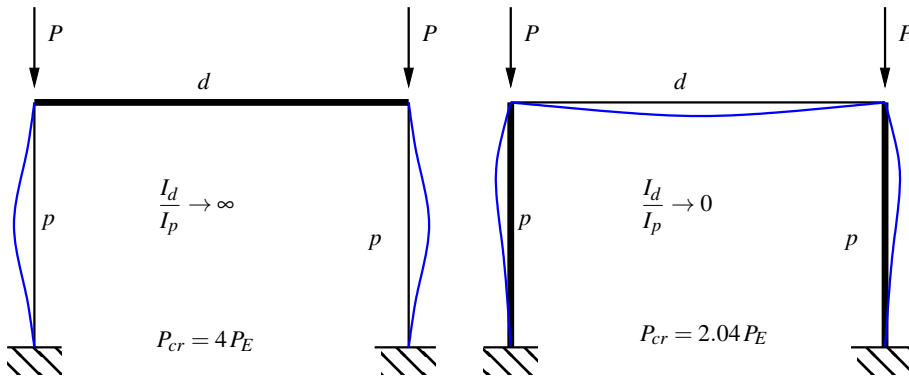
narse, considerando que  $\beta = 0.7$  como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \simeq 2.04 P_E \tag{3.2}$$

En conclusión, para el modo intraslacional, y para una relación  $I_d/I_p$  genérica, la carga crítica se encontrará acotada como

$$2 P_E \leq P_{cr} \leq 4 P_E \tag{3.3}$$

La Figura 3.2 muestra los dos casos extremos de esta situación.



**Figura 3.2** Modos intraslacionales para relaciones límite  $I_d/I_p$

**Modo traslacional** En este caso, se considerará que el movimiento horizontal del dintel no está impedido. Bajo esta hipótesis, los modos de pandeo adoptarán una configuración como la mostrada en la figura 3.3. Este modo se denomina también *de cimbreo*. No debe de extrañar que un sistema de carga simétrica en una figura simétrica produzca una deformada no simétrica. En realidad, la deformada es asimétrica, y para llegar a la misma, es necesario un planteamiento no lineal. Ya en el capítulo anterior se vieron configuraciones simétricas que producían configuraciones asimétricas en los modos de pandeo.

En función de la relación de rigidez entre el dintel y el pilar, se producirán nuevamente dos casos extremos:

$I_d/I_p \rightarrow \infty$ : En este caso, el dintel impide el giro de los pilares. En esta situación, la carga crítica puede determinarse, considerando que el pilar está empotrado-deslizadera. Para este caso, el coeficiente  $\beta = 1$ . Por tanto,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = P_E \tag{3.4}$$

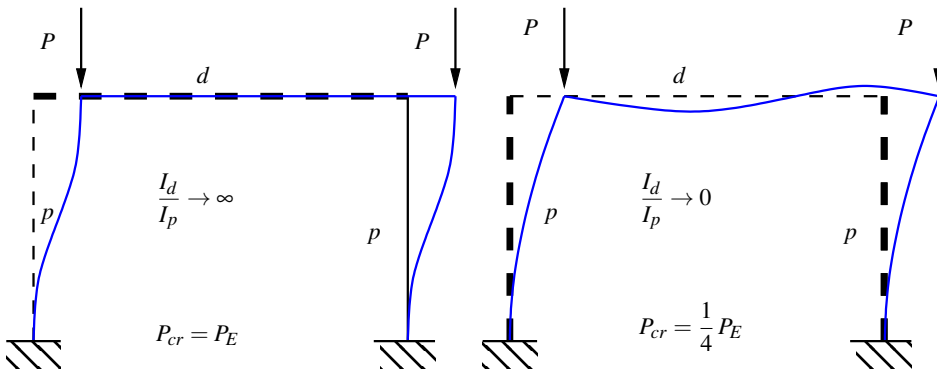
$I_d/I_p \rightarrow 0$  : En este caso el dintel no opone resistencia al giro. El pilar se comporta como empotrado-libre, y en esta situación, el coeficiente  $\beta = 2$  y la carga crítica puede determinarse como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = \frac{1}{4} P_E \tag{3.5}$$

En conclusión, para el modo traslacional, y para una relación  $I_d/I_p$  genérica, la carga crítica se encontrará acotada como

$$\frac{1}{4} P_E \leq P_{cr} \leq P_E \tag{3.6}$$

La Figura 3.3 muestra los dos casos extremos de esta situación.



**Figura 3.3** Modos traslacionales para relaciones límite  $I_d/I_p$

Al comparar ambos casos, se observa que fijando la relación  $I_d/I_p$  en los valores extremos, el modo traslacional siempre produce una carga más baja que el modo intraslacional. En este caso, sólo se ha podido determinar los límites entre los que se encuentra la carga crítica para una relación  $I_d/I_p$  genérica.

Para plantear un caso general, es necesario realizar un tratamiento matricial del problema, sobre un nuevo elemento, denominado *viga-columna*.

### 3.3. El elemento viga-columna

#### 3.3.1. Concepto de viga-columna

En el capítulo anterior se ha descubierto que es posible estudiar el equilibrio en la configuración deformada, aún cuando la formulación base mantiene cierta linealidad. Hasta el momento se conocen dos elementos estructurales que generan deformadas que implican flexión: la viga, y la columna. En este apartado se introducirá un elemento que participa de ambos comportamientos: la viga-columna. La



Figura 3.4 muestra el elemento viga, la columna, y la viga-columna, tanto para axil de compresión como para axil de tracción. Veamos por tanto unas definiciones:

**Viga:** Es un elemento alargado, para el cual dos de sus dimensiones (ancho, canto) son mucho menores que la tercera dimensión (longitudinal). Las vigas se caracterizan por su comportamiento a flexión, siendo éste lineal. Las acciones aplicadas a lo largo de la viga son transversales al elemento. Asimismo, se pueden aplicar en los extremos momentos flectores y esfuerzos cortantes.

**Columna:** Es un elemento de geometría análoga a la de la viga, pero la carga es únicamente un axil de compresión, y se estudia en la configuración deformada, siendo de interés la configuración de equilibrio estable que no es la recta. Es un elemento esencialmente no lineal.

**Viga-columna:** Es un elemento alargado, con dos de sus dimensiones inferiores a la tercera dimensión. Participa del comportamiento de la viga, y en el de la columna. Es un elemento con carga transversal y axil simultáneas, de forma tal que el equilibrio se estudia en la configuración deformada. Nótese la diferencia con el caso de la viga, para el caso en el que las cargas transversales generan un campo de desplazamientos debido a flexión, en el caso de la viga no se producen modificaciones por efecto del axil. Pero en el caso de la viga-columna, una carga de compresión provoca una flexibilización de la viga (es como si la viga “perdiere rigidez”, produciéndose una amplificación de los desplazamientos debidos a flexión). Un axil de tracción provoca el efecto opuesto. Y la ausencia de esfuerzo axil convierte a la viga-columna en una viga.

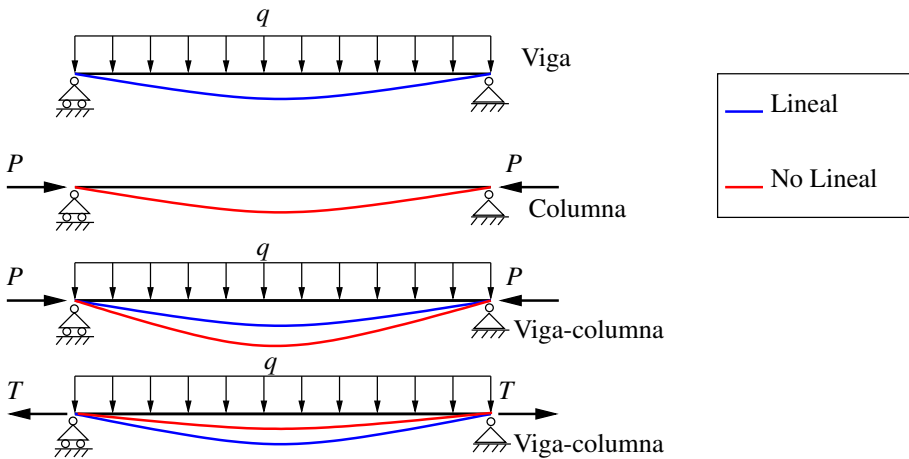


Figura 3.4 Viga, columna, viga-columna comprimida y viga-columna traccionada

En relación a la Figura 3.4, en la parte superior se muestra la viga: frente a una carga transversal  $q$ , los desplazamientos son lineales, y se representan en azul. Si sobre la viga existe un axil, éste no influye en la determinación de la solución a los desplazamientos transversales, ya que la ecuación del axil aparece desacoplada. A continuación se muestra la columna, la cual tiene como característica fundamental que el equilibrio se estudia en la configuración deformada, produciendo una deformada de flexión. En general, se vio que la teoría lineal (lineal, pero equilibrando en la configuración deformada), sobre la columna ideal, planteaba un problema de valores propios, para el cual se obtenían infinitas cargas de pandeo, e infinitos modos de pandeo.

La viga-columna es un elemento que, a diferencia de la viga, plantea el equilibrio debido a la acción *combinada* de flexión y axil, en la configuración deformada. En la figura se representan los casos de tracción y compresión. En ambos casos, la línea azul representa la solución que se obtendría analizando el elemento como viga. Para un axil de compresión, se obtiene una amplificación (línea roja) respecto a la solución obtenida como viga, ya que aparecen momentos en la configuración deformada que son proporcionales a los propios desplazamientos. La rigidez de una viga-columna depende del valor del axil de compresión: cuanto mayor es la compresión, menor es la rigidez, y por tanto, mayores los desplazamientos transversales. En el límite (carga crítica), la rigidez se hace cero, y en ese momento, diremos que el elemento viga-columna ha alcanzado su carga crítica.

El axil de tracción produce el efecto contrario. Si se mira la última figura, respecto a la solución lineal (línea azul) se produce una recuperación (línea roja).

### 3.3.2. Ecuaciones de equilibrio interno

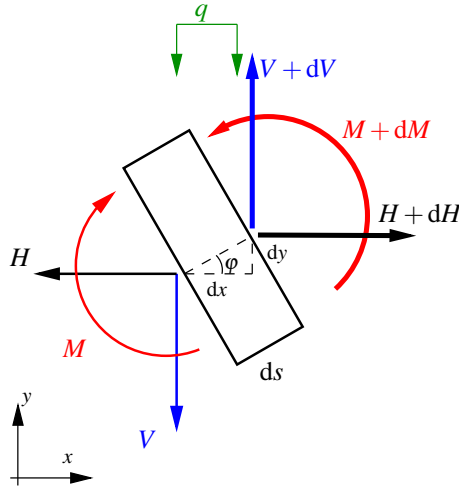
En este apartado se planteará un estudio análogo al que en su momento se planteó para estudiar el equilibrio interno en una viga. Se acudirá al modelo de rebanada diferencial, y a la notación no-estándar<sup>1</sup> para plantear las ecuaciones de equilibrio interno. En esta ocasión, puesto que lo exclusivo de la viga-columna es que el equilibrio se ha de plantear en la configuración deformada, es importante mantener este planteamiento también a nivel de rebanada, dibujando la misma en posición “inclinada”, mostrando claramente que está en posición deformada.

La Figura 3.5 representa una rebanada de ancho  $ds$ . Nótese que respecto a las direcciones  $x$  e  $y$ , se ha dibujado en la posición inclinada, un ángulo  $\varphi$ . Nótese que este ángulo es variable a lo largo de la viga-columna. Estableciendo las ecuaciones de equilibrio, se tiene:

**Equilibrio de fuerzas horizontales:** En la dirección horizontal se tiene:

$$H + dH - H = 0 \Rightarrow dH = 0 \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>Ver “Análisis No Standard” en <http://es.wikipedia.org/wiki/Infinitesimal>



**Figura 3.5** Equilibrio de rebanada diferencial de viga-columna

Lo cual implica que  $H$  es constante, ya que en la dirección horizontal no se han aplicado fuerzas axiales. Denominaremos por tanto en lo que sigue  $H$  al axil. Nótese que se ha representado positivo si es de tracción.

**Equilibrio de fuerzas vertiales:** El sumatorio de fuerzas verticales debe ser cero:

$$V + dV - V + q dx = 0 \tag{3.8}$$

De donde se deduce que

$$\frac{dV}{dx} + q = 0 \tag{3.9}$$

**Equilibrio de momentos:** Para el equilibrio de momentos, se tomará momentos respecto al punto de aplicación de los esfuerzos  $V$  y  $H$ . Nótese que, a diferencia del caso de la viga, la fuerza horizontal  $H + dH$  produce un momento, ya que se encuentra desplazada  $dy$  en vertical. En la ecuación de momentos no se introducirá el momento producido por la carga  $q$ , ya que es de orden  $(dx)^2$ , y se está obteniendo una ecuación de orden  $dx$ , que corresponde en un planteamiento incremental con los términos de orden  $\Delta x$  que independientemente han de valer cero.<sup>2</sup> Por este motivo, tampoco se va a plantear en el producto la variación de  $V$  ni de  $H$ , pues los términos  $dV \cdot dx$  y  $dH \cdot dy$  producen términos cuadráticos en  $dx$ .

$$M + dM - M + V dx - H dy = 0 \tag{3.10}$$

<sup>2</sup>En álgebra de diferenciales, se plantea que este diferencial “se desprecia”, si bien un análisis riguroso mediante formulación incremental permite ver que en realidad se obtiene un polinomio de equilibrio, y el esquema planteado con diferenciales produce directamente la ecuación de orden  $\Delta x$ . Por tanto, no se desprecia nada en estas ecuaciones de equilibrio

Esta ecuación queda:

$$\frac{dM}{dx} + V - H \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.11)$$

Nótese que en la ecuación (3.11), el término  $dy/dx$  es en realidad  $y'$ , la pendiente de la función  $y(x)$  que permite posicionar los puntos en la configuración deformada. Tomando la derivada respecto a  $x$  en la ecuación (3.11), y teniendo en cuenta que la ecuación (3.9) permite sustituir  $V' = -q$ , ambas ecuaciones se pueden combinar y producir la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2M}{dx^2} - H \frac{d^2y}{dx^2} = q \quad (3.12)$$

### 3.3.3. Ecuación diferencial de una viga-columna

La ecuación (3.12) es el punto de partida para deducir la ecuación diferencial de la viga-columna. Introduciendo ahora la ecuación que relaciona el momento flector con la curvatura,

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3.13)$$

Nótese que se están asumiendo hipótesis de pequeñas curvaturas. La ecuación (3.12) se transforma en:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) - H \frac{d^2y}{dx^2} = q \quad (3.14)$$

Esta ecuación es la Ecuación Diferencial de una viga-columna. Es aplicable a un caso general, en el que se admita que el producto  $EI$  es variable. Esta situación ocurre, por ejemplo, en una viga-columna de canto variable, donde  $I$  es en realidad una función de  $x$ ,  $I(x)$ . Si se considera el caso en el que  $EI$  sea constante, se obtendrá la siguiente ecuación:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} - H \frac{d^2y}{dx^2} = q \quad (3.15)$$

**Expresión del esfuerzo cortante en una viga-columna** . A partir de la tercera ecuación de equilibrio (3.11), y teniendo en cuenta la expresión del momento en función de  $y''$  dada por (3.13) puede obtenerse la expresión del esfuerzo cortante  $V$ ;

$$V = -EIy''' + Hy' \quad (3.16)$$

Nótese que esta expresión es diferente en el caso de la viga de Bernoulli-Euler, y es sensible a que el axil sea de compresión o de tracción. En general, debe recordarse que en una viga-columna, la relación momento-curvatura sí es igual que la vista para la viga de Bernoulli-Euler. En cambio, para calcular los esfuerzos cortantes no puede emplearse la misma expresión que la vista para el caso de Bernoulli-Euler. Si el axil es de compresión,  $H = -P$ , la expresión queda:

$$V = -EIy''' - Py' \quad (3.17)$$

**3.3.4. Solución de la ecuación**

La ecuación (3.15) es una EDO lineal, de coeficientes constantes, no homogénea (puesto que  $q$  es en realidad una función  $q(x)$  genérica que representa a una fuerza por unidad de línea). La solución puede escribirse, en general, como suma de la ecuación homogénea más una solución particular, que sólo depende de la carga. Por tanto,  $y(x) = y^h(x) + y^p(x)$ . Es interesante definir el tipo de solución que se obtiene, en función del axil  $H$ . Nótese que este axil puede ser de tracción ( $H = T$ ), de compresión ( $H = -P$ ) o nulo ( $H = 0$ ). Analicemos cada caso por separado.

**Axil de tracción** En este caso, la ecuación para la parte homogénea  $y^h(x)$  de (3.15) puede escribirse como:

$$EI[y^h(x)]^{IV} - T[y^h(x)]'' = 0 \tag{3.18}$$

Planteando que  $y^h(x) = e^{\gamma x}$ , se obtiene el siguiente polinomio característico:

$$\gamma^2 \left( \gamma^2 - \frac{T}{EI} \right) = 0 \tag{3.19}$$

ecuación que produce como raíces:  $\gamma = 0$  (doble), y  $\gamma = \pm \sqrt{\frac{T}{EI}}$ . Por tanto, la solución puede escribirse como:

$$y^h(x) = c_1 e^{\left(\sqrt{\frac{T}{EI}} \cdot x\right)} + c_2 e^{-\left(\sqrt{\frac{T}{EI}} \cdot x\right)} + c_3 + c_4 x \tag{3.20}$$

con  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , cuatro constantes a definir aplicando las condiciones de contorno. En casos como éste, en el que se ha obtenido una base de funciones exponenciales, es útil recurrir a la base alternativa generada por funciones trigonométricas hiperbólicas. Teniendo en cuenta que:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{3.21}$$

puede escribirse para la solución  $y(x)$  completa:

$$y(x) = c_1 \sinh \left[ \sqrt{\frac{T}{EI}} \cdot x \right] + c_2 \cosh \left[ \sqrt{\frac{T}{EI}} \cdot x \right] + c_3 + c_4 x + y^p(x) \tag{3.22}$$

**Axil de compresión** En este caso, tomando  $H = -P$ , la ecuación para  $y^h(x)$  queda:

$$EI[y^h(x)]^{IV} + P[y^h(x)]'' = 0 \tag{3.23}$$

El polinomio característico en este caso produce las raíces

$$\gamma^2 \left( \gamma^2 + \frac{P}{EI} \right) = 0 \tag{3.24}$$

cuyas soluciones son  $\gamma = 0$  (doble), y  $\gamma = \pm i \sqrt{\frac{P}{EI}}$ . Para el caso en el que las raíces son complejas, la solución puede escribirse en función de la base trigonométrica. La solución para  $y(x)$  es, en este caso.

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} \left[ \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right] + c_2 \operatorname{cos} \left[ \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right] + c_3 + c_4 x + y^p(x) \quad (3.25)$$

**Caso en el que no hay axil** En ausencia de axil, la ecuación (3.15) es idéntica a la ecuación de una viga de Bernoulli-Euler.

$$EI y^{IV} = q \quad (3.26)$$

quedando como solución:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + y^p(x) \quad (3.27)$$

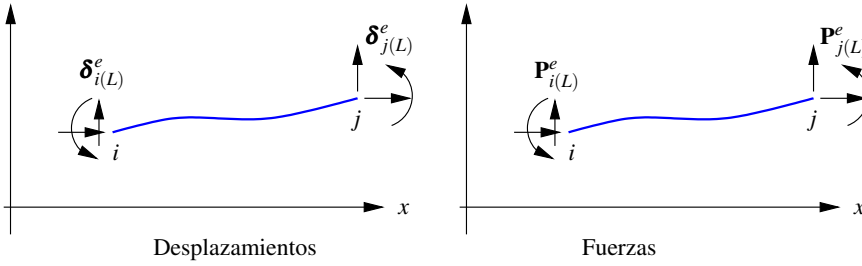
Tras resolver los tres casos, puede concluirse que:

- La solución para una viga-columna traccionada es diferente a la de una viga-columna comprimida. En el caso de compresión, aparecen funciones trigonométricas. Las soluciones pueden contener ceros dentro del intervalo de definición, siendo el número de pasos por cero creciente a medida que aumenta el axil. En el caso de tracción aparecen funciones trigonométricas hiperbólicas, las cuales no tienen el comportamiento de las funciones trigonométricas en lo referente a número de ceros crecientes con el valor del argumento.
- La solución para ausencia de axil es exactamente igual que la solución de una viga de Bernoulli-Euler. La viga-columna por tanto tiende a la viga de Bernoulli-Euler cuando no hay axil. Esta conclusión se obtendrá también al analizar la tendencia de la matriz de rigidez cuando el axil sea nulo.

### 3.3.5. Matriz de rigidez de la viga-columna

Las soluciones genéricas para vigas-columnas sometidas a axil de tracción (3.22) o de compresión (3.25) dependen de cuatro constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$ . Son necesarias cuatro condiciones para definir las cuatro constantes.

Para obtener la matriz de rigidez que relaciona las fuerzas aplicadas en los extremos, puede seguirse un procedimiento basado en imponer un conjunto de desplazamientos impuestos en los extremos, y fijar las cuatro constantes de integración  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$ . En relación a la Figura 3.6, se representan los grados de libertad en desplazamientos, en los extremos de una viga columna, así como las fuerzas en los extremos del elemento. En coordenadas locales, los desplazamientos en los



**Figura 3.6** Grados de libertad en desplazamientos. Fuerzas nodales.

extremos del elemento son:

$$\delta_{i(L)}^e = \begin{pmatrix} \delta_{ix(L)} \\ \delta_{iy(L)} \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad \delta_{j(L)}^e = \begin{pmatrix} \delta_{jx(L)} \\ \delta_{jy(L)} \\ \theta_j \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

donde se ha omitido la referencia local en el giro, ya que éste no cambia al pasarlo a coordenadas globales. Los vectores de fuerzas nodales son,

$$\mathbf{P}_{i(L)}^e = \begin{pmatrix} P_{ix(L)} \\ P_{iy(L)} \\ M_i \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_{j(L)}^e = \begin{pmatrix} P_{jx(L)} \\ P_{jy(L)} \\ M_j \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

La matriz de rigidez de la viga-columna permitirá escribir una relación matricial del tipo:

$$\mathbf{P}_{(L)}^e = \mathbf{K}_{(L)}^e \cdot \delta_{(L)}^e \tag{3.30}$$

Para construir  $\mathbf{K}_{(L)}^e$ , puede observarse ante todo que el comportamiento axil se encuentra desacoplado, y éste no presenta no linealidades. El comportamiento viga-columna sólo afecta a los 4 grados de libertad propios de la flexión. Para construir la relación matricial puede seguirse un procedimiento analítico.

1. Dependiendo del caso de tracción o compresión, se ha visto que las soluciones en general dependen de cuatro constantes  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ , en las soluciones (3.22) o (3.25), respectivamente, y que en este caso, al no haber carga transversal,  $y^p(x) = 0$ . Considerando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y(0) &= \delta_{iy(L)} \\ y'(0) &= \theta_i \\ y(L) &= \delta_{jy(L)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$y'(L) = \theta_j \tag{3.32}$$

pueden resolverse los parámetros  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ . La viga-columna quedará ya fijada, pues la solución es única.

- Tras esto, sólo queda relacionar las fuerzas y momentos en los extremos con los valores del esfuerzo cortante y del momento flector. Teniendo en cuenta el criterio de signos positivo para el esfuerzo cortante y el momento flector, y la relación entre el cortante y flector con las derivadas de la función, expresada en las ecuaciones (3.16) y (3.13), puede escribirse:

$$\begin{aligned} V(0) &= -P_{iy(L)} \\ M(0) &= -M_i \\ V(L) &= P_{jy(L)} \\ M(L) &= M_j \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$M(L) = M_j \tag{3.34}$$

Mediante este procedimiento se obtienen cuatro relaciones que pueden escribirse de forma matricial según la ecuación (3.30). La matriz de rigidez, incluyendo el efecto del axil, puede escribirse como sigue

$$\mathbf{K}_{(L)}^e = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_4 \frac{EI}{L^3} & \phi_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & -\phi_4 \frac{EI}{L^3} & \phi_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & \phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_2 \frac{EI}{L} & 0 & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_3 \frac{EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_4 \frac{EI}{L^3} & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & \phi_4 \frac{EI}{L^3} & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & \phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_3 \frac{EI}{L} & 0 & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_2 \frac{EI}{L} \end{array} \right) \tag{3.35}$$

En esta matrix,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  y  $\phi_4$  son las *funciones de estabilidad*, definidas inicialmente por James en 1935 para el método de la distribución de momentos (método de Cross), y posteriormente por Lundquist y Kroll en 1944, y por Livesley y Chandler en 1956 para el método directo de la rigidez.

Para un axil de compresión  $P$ , las funciones se definen a partir de  $\mu$  y  $\Delta_c$ , definidos como

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot L \tag{3.36}$$

$$\Delta_c = 2 [1 - \cos(\mu)] - \mu \operatorname{sen}(\mu) \tag{3.37}$$



Con estos dos parámetros, las funciones de estabilidad para una viga-columna comprimida tienen las siguientes expresiones:

$$\phi_1(P) = \frac{\mu^2 [1 - \cos(\mu)]}{\Delta_c} \quad (3.38)$$

$$\phi_2(P) = \frac{\mu \operatorname{sen}(\mu) - \mu^2 \cos(\mu)}{\Delta_c} \quad (3.39)$$

$$\phi_3(P) = \frac{\mu^2 - \mu \operatorname{sen}(\mu)}{\Delta_c} \quad (3.40)$$

$$\phi_4(P) = \frac{\mu^3 \operatorname{sen}(\mu)}{\Delta_c} \quad (3.41)$$

Si el axil es de tracción  $T$ , puesto que la solución es diferente, las funciones de estabilidad son distintas a las obtenidas en el caso de compresión. Las funciones de estabilidad se definen a partir de los parámetros  $\mu$  y  $\Delta_t$ , definidos como:

$$\mu = \sqrt{\frac{T}{EI}} \cdot L \quad (3.42)$$

$$\Delta_t = 2[1 - \cosh(\mu)] + \mu \operatorname{senh}(\mu) \quad (3.43)$$

Con estos dos parámetros, las funciones de estabilidad para una viga-columna traccionada tienen las siguientes expresiones:

$$\phi_1(T) = \frac{\mu^2 [\cosh(\mu) - 1]}{\Delta_t} \quad (3.44)$$

$$\phi_2(T) = \frac{\mu^2 \cosh(\mu) - \mu \operatorname{senh}(\mu)}{\Delta_t} \quad (3.45)$$

$$\phi_3(T) = \frac{\mu \operatorname{senh}(\mu) - \mu^2}{\Delta_t} \quad (3.46)$$

$$\phi_4(T) = \frac{\mu^3 \operatorname{senh}(\mu)}{\Delta_t} \quad (3.47)$$

Obsérvese que las expresiones de las funciones de estabilidad para el caso de tracción no se obtienen cambiando simplemente las funciones trigonométricas por trigonométricas hiperbólicas; además, hay cambios de signos, consecuencia de los cambios de signos que se producen en las derivadas  $[\cos(x)]' = -\operatorname{sen}(x)$  y  $[\cosh(x)]' = \operatorname{senh}(x)$ .

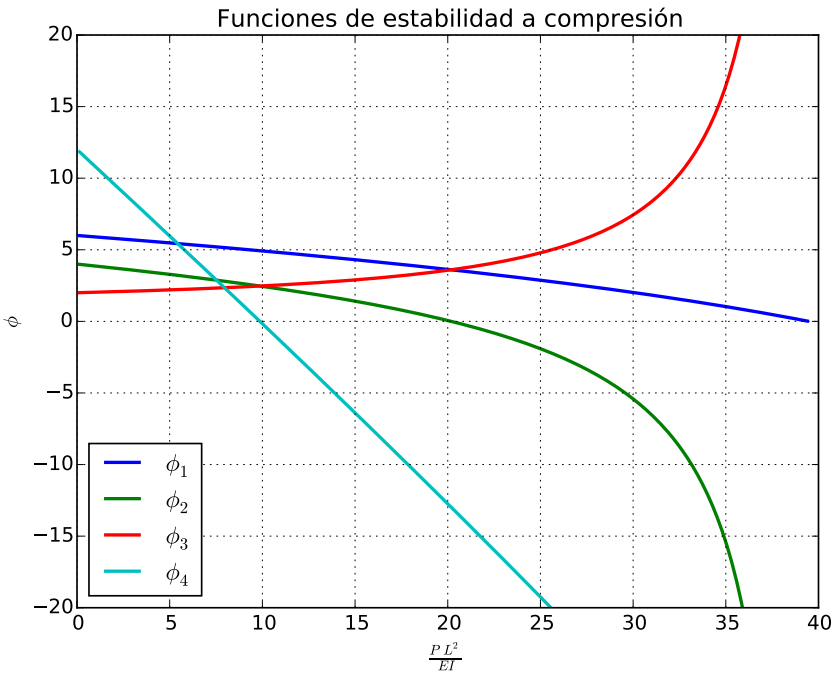
Nótese que en ambos casos, para  $P = 0$  en las funciones de la barra comprimida, o para  $T = 0$  en el caso de la barra traccionada, las funciones de estabilidad tienden

a los valores siguientes:

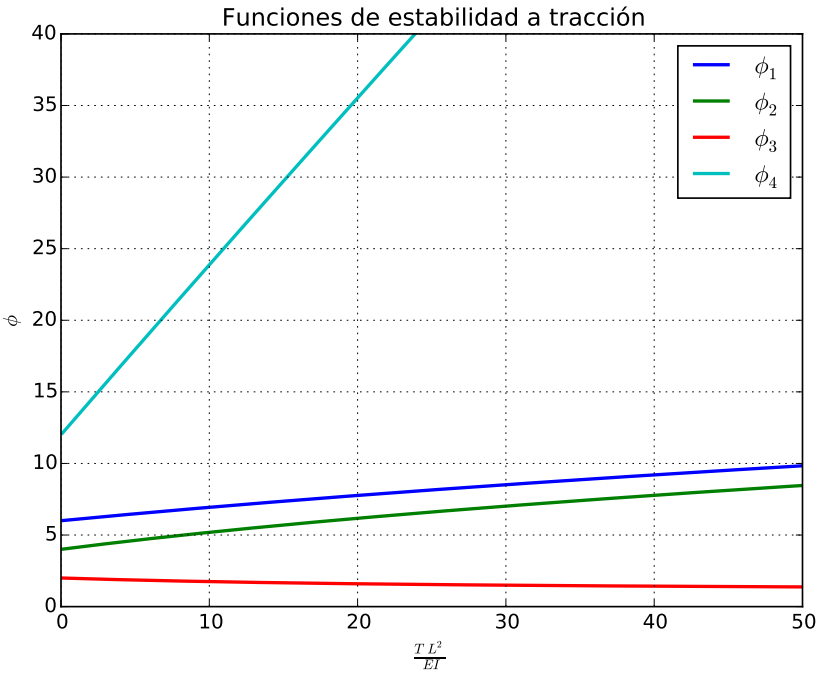
$$\begin{aligned}
 \phi_1 &\rightarrow 6 \\
 \phi_2 &\rightarrow 4 \\
 \phi_3 &\rightarrow 2 \\
 \phi_4 &\rightarrow 12
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

Nótese que si  $P = 0$ , los coeficientes obtenidos en (3.48), al ser sustituidos en la matriz (3.35), generan exactamente la matriz ya estudiada en la primera parte de la asignatura, para el elemento barra de 6 grados de libertad (viga de Bernoulli-Euler con axil).

Las Figuras 3.7 y 3.8 representan las funciones de estabilidad para los casos de compresión y tracción, respectivamente. En el eje de abscisas se representa el parámetro  $\mu^2$ , que es proporcional en cada caso a  $P$  y a  $T$ , respectivamente. Nótese que el comportamiento para compresión o tracción es diferente. Para compresión, se obtienen en las funciones asíntotas verticales en  $\mu^2 = (2\pi)^2$ . En general, al crecer el axil de compresión, la matriz refleja una pérdida de rigidez. En el caso de la tracción, no hay singularidades



**Figura 3.7** Funciones de estabilidad para barra comprimida, axil  $P$



**Figura 3.8** Funciones de estabilidad para barra traccionada, axil  $T$

### 3.3.6. Matriz de rigidez geométrica

Trabajar directamente con la matriz de rigidez de la viga-columna produce un sistema de ecuaciones trascendente. Para valores bajos del parámetro  $\mu$ , es posible linealizar el problema, mediante la expansión en serie de Taylor de las funciones de estabilidad. Para el caso de compresión, se obtiene:

$$\phi_1(P) \simeq 6 \left( 1 - \frac{PL^2}{60EI} \right) \quad (3.49)$$

$$\phi_2(P) \simeq 4 \left( 1 - \frac{PL^2}{30EI} \right) \quad (3.50)$$

$$\phi_3(P) \simeq 2 \left( 1 + \frac{PL^2}{60EI} \right) \quad (3.51)$$

$$\phi_4(P) \simeq 12 \left( 1 - \frac{PL^2}{10EI} \right) \quad (3.52)$$

Con esto, la matriz de rigidez de la viga-columna, en coordenadas locales, puede aproximarse mediante la suma de dos matrices:

$$\mathbf{K}_{(L)}^e \simeq \mathbf{K}_{L(L)}^e + \mathbf{K}_{G(L)}^e \quad (3.53)$$

siendo,

$\mathbf{K}_{L(L)}^e$  : Matriz de rigidez lineal. Es la misma que ya que la vista en análisis matricial para viga de Bernoulli-Euler de 6 grados de libertad.

$\mathbf{K}_{G(L)}^e$  : Matriz de rigidez geométrica.

Para un elemento, la matriz de rigidez geométrica puede escribirse en función del axil  $P^e$  de compresión del elemento, como:

$$\mathbf{K}_{G(L)}^e = -P^e \mathbf{K}_{\gamma(L)}^e \tag{3.54}$$

siendo  $\mathbf{K}_{\gamma(L)}^e$  una matriz que no depende del axil; sólo depende de la longitud de la barra  $L$ , y su expresión es:

$$\mathbf{K}_{\gamma(L)}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

En el estudio de determinados problemas estructurales es útil introducir un sistema de carga especial, denominado *sistema de carga proporcional*. En su versión más sencilla, en un sistema de carga proporcional, todas las cargas son proporcionales a un factor  $\lambda$ . El sistema es lineal y por tanto, los esfuerzos y desplazamientos obtenidos pueden escribirse en función del factor de carga  $\lambda$ . De esta forma, modificando un único factor  $\lambda$ , se modifica todo el sistema completo.

Este tipo de sistemas será el que se considerará más adelante para el análisis del problema de pandeo global. En este apartado es importante hacer ver que particularidad hay en la forma de evaluar la matriz de rigidez geométrica.

En un sistema de carga proporcional de parámetro  $\lambda$ , el axil de compresión de un elemento,  $P^e$  puede escribirse como sigue:

$$P^e = \lambda q^e \tag{3.56}$$

siendo  $q^e$  un factor propio del elemento barra  $e$ , y  $\lambda$  el factor de carga de pandeo, que es común para toda la estructura. Nótese que de forma independiente, ni  $\lambda$  ni  $q^e$  pueden interpretarse como un esfuerzo axil. Sólo el producto de ambos factores es el esfuerzo axil de la barra. Se define en este caso una matriz  $\mathbf{K}_{g(L)}^e$ , de subíndice

$g$  minúscula, como sigue:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{g}(L)}^e = q^e \mathbf{K}_{\gamma(L)}^e \tag{3.57}$$

La matriz de rigidez geométrica puede expresarse en función de esta matriz, como sigue:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{G}(L)}^e = -P^e \mathbf{K}_{\gamma(L)}^e = -(\lambda q^e) \mathbf{K}_{\gamma(L)}^e = -\lambda \left[ q^e \mathbf{K}_{\gamma(L)}^e \right] = -\lambda \mathbf{K}_{\mathbf{g}(L)}^e \tag{3.58}$$

Quedando la matriz de rigidez geométrica en un elemento como

$$\mathbf{K}_{\mathbf{G}(L)}^e = -\lambda \mathbf{K}_{\mathbf{g}(L)}^e \tag{3.59}$$

Nótese que en  $\mathbf{K}_{\mathbf{g}(L)}^e$  hay información del axil de la barra, a través de  $q^e$ . La matriz  $\mathbf{K}_{\mathbf{g}(L)}^e$  no es la que se muestra en la expresión matricial (3.55). La similitud entre las expresiones (3.59) y (3.54) no debe plantear la posibilidad de confundir  $\lambda$  con el axil  $P$  de una barra. El factor  $\lambda$  es común a toda la estructura, lo cual no quiere decir que el axil sea el mismo en toda la estructura.

■ EJEMPLO 3.1 Sistema de carga proporcional

Considérese el conjunto de axiles de las barras del sistema de carga proporcional representado en la Figura 3.9

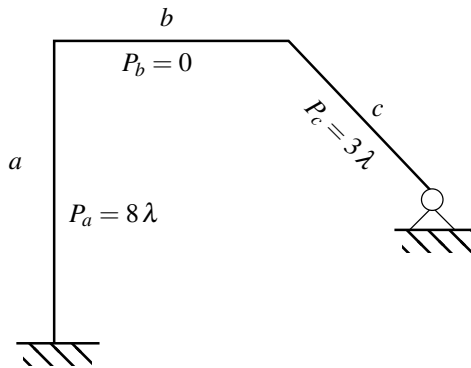


Figura 3.9 Esfuerzos axiles en barras de un sistema de carga proporcional

La barra  $a$  tiene un esfuerzo axil de compresión de valor  $8\lambda$ . El factor 8 tendrá unidades, ya que al multiplicar este número por  $\lambda$ , se debe obtener una fuerza. A la hora de construir la matriz de rigidez geométrica en coordenadas locales, ha de evaluarse la matriz  $\mathbf{K}_{\mathbf{g}(L)}^a$ , a partir de la matriz  $\mathbf{K}_{\gamma(L)}^a$ , mediante la expresión matricial (3.55). Para esto, se considerará la longitud de la barra  $a$ , y se evaluará

$$\mathbf{K}_{\mathbf{g}(L)}^a = 8 \mathbf{K}_{\gamma(L)}^a \tag{3.60}$$

De igual forma, la barra  $c$  tiene un axil de compresión de valor  $3\lambda$ . Por tanto, la matriz a evaluar en coordenadas locales es:

$$\mathbf{K}_{g(L)}^c = 3\mathbf{K}_{\gamma(L)}^c \quad (3.61)$$

Finalmente, la barra  $b$  tiene un axil de valor 0. Puede verse este valor también proporcional a  $\lambda$ , como  $P_b = 0\lambda$ . Para esta barra, la matriz de rigidez geométrica a evaluar es:

$$\mathbf{K}_{g(L)}^b = 0\mathbf{K}_{\gamma(L)}^b = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

Por tanto, no se requiere evaluar la matriz de rigidez geométrica, ya que es nula al pasarle el coeficiente 0.

De este ejemplo cabe destacar:

- Para evaluar la matriz de rigidez geométrica, ha de considerarse que las expresiones ya incluyen para el axil de compresión el signo negativo. Nótese que en la evaluación de la matriz de la barra  $a$ , ecuación (3.60), se ha evaluado la expresión con  $P_a = 3\lambda$  (no  $P_a = -3\lambda$ ).
- Si una barra no tiene axil, no aportará matriz de rigidez geométrica alguna.
- El factor  $\lambda$  no es el esfuerzo axil. Es sólo un parámetro por el que hay que multiplicar el factor de cada barra para obtener el axil.

### 3.4. Análisis no lineal de estructuras en segundo orden: efecto P-Delta

Partiendo de las matrices de rigidez en coordenadas globales de cada elemento, es posible ensamblar un sistema caracterizado por una matriz de rigidez global. Este sistema puede escribirse en general como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.63)$$

Este sistema es análogo al que aparece en el método directo de la rigidez. La única diferencia consiste en que la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  depende de los esfuerzos axiales de las barras, representados por el vector  $\mathbf{P} = [P_1, P_2, \dots, P_b]$ , siendo  $b$  el número de barras, pudiendo ser los axiles de tracción, compresión o nulos. Pero los axiles de las barras dependen a su vez de la solución del campo de desplazamientos. La solución es por tanto no lineal.

La formulación que se ha empleado asume cierta linealidad: las condiciones de contorno se establecen en los extremos del elemento, y la curvatura se considera pequeña. Sin embargo, el equilibrio se establece en la configuración deformada. Este tipo de solución se conoce en el estado del arte como *solución de segundo*

orden, o solución incluyendo el efecto *P-Delta*. Es un primer acercamiento a la no linealidad.

Tras imponer las condiciones de contorno, la solución puede determinarse resolviendo:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{K}(\mathbf{P})]^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (3.64)$$

Nótese que para que exista solución, es fundamental poder invertir la matriz de rigidez.

### 3.5. Pandeo global de estructuras

La ecuación (3.64) permite obtener la solución del sistema, siempre que sea posible invertir la matriz de rigidez. Sin embargo, esto no siempre es posible. La matriz de rigidez del sistema depende del conjunto de esfuerzos axiales. Existen determinadas configuraciones de esfuerzos axiales tales que la matriz de rigidez se vuelve singular. En este momento, diremos que el sistema ha alcanzado una configuración de carga crítica de inestabilidad global.

Para comprender mejor porqué esto es así, es interesante retomar el análisis que se hizo en la sección 2.7, cuando se estudió el pandeo con imperfecciones. Se obtuvo una ecuación diferencial que permitía una solución analítica, salvo para el caso concreto en el que el axil de compresión coincidiese con la carga crítica. Para la formulación empleada, la carga crítica producía desplazamientos infinitos. Esto implicaba que la rigidez del sistema tendía a cero. Al mejorar la formulación incluyendo no linealidad con grandes desplazamientos, se veía que realmente la pendiente no era cero, sino un valor pequeño.

Puede decirse que esta conclusión se obtuvo para un sistema de 1 grado de libertad, o un sistema matricial de rango 1. Cuando la matriz de rigidez del sistema no tiene rango 1, la no existencia de inversa para la matriz de rigidez indica que ésta es singular. Si la matriz de rigidez es singular para un vector  $\mathbf{P}_{cr}$  de axiales, se verifican dos propiedades (comunes a toda matriz singular que depende de funciones).

1. El determinante de la matriz, cuando los axiales son  $\mathbf{P}_{cr}$ , es nulo

$$|\mathbf{K}(\mathbf{P}_{cr})| = 0 \quad (3.65)$$

2. Existe un vector no nulo asociado al cada conjunto de cargas críticas, denominado *vector propio*, representativo del núcleo de la aplicación lineal representada por la matriz  $\mathbf{K}(\mathbf{P}_{cr})$ , tal que

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}_{cr}) \cdot \mathbf{U}_{P_{cr}} = 0 \quad (3.66)$$

Si el sistema es de carga proporcional, entonces, la matriz de rigidez depende de un escalar  $\lambda$ . La determinación del factor de carga crítico se hará igualmente

igualando el determinante de la matriz de rigidez del sistema a cero.

$$|\mathbf{K}(\lambda)| = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_{cr} \quad (3.67)$$

Este sistema producirá infinitas soluciones para  $\lambda_{cr}$ , uno para cada *modo de pandeo*. El valor más bajo de toda la serie será el *factor de carga de pandeo global*  $\lambda_{cr}$ . Para cada  $\lambda$ , existirá un vector propio asociado,  $\mathbf{U}(\lambda_{cr})$ , el cual se determina resolviendo un sistema compatible indeterminado:

$$\mathbf{K}(\lambda_{cr}) \cdot \mathbf{U}_{\lambda_{cr}} = 0 \quad (3.68)$$

Nótese que el vector propio no es único, ya que es un representante de un subespacio vectorial.

Finalmente, si se emplea la aproximación de la matriz de rigidez geométrica, la matriz del sistema se descompone en la matriz de rigidez lineal  $\mathbf{K}_L$  más la matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$ , con  $\mathbf{K}_G = -\lambda \mathbf{K}_g$ .

$$\mathbf{K}(\lambda) \simeq \mathbf{K}_L - \lambda \mathbf{K}_g \quad (3.69)$$

La condición de pandeo tiene estructura de un Problema de Valores Propio Generalizado,

$$|\mathbf{K}_L - \lambda \mathbf{K}_g| = 0 \quad (3.70)$$

Esto producirá un conjunto de valores propios, que serán precisamente la aproximación a los factores de carga críticos  $\lambda_{cr}$ . Este método produce tantos valores propios como grados de libertad tenga el sistema. Si las matrices son de dimensiones  $(m \times m)$ , se obtienen exactamente  $m$  valores propios. El más bajo de todos, para  $m = 1$  será la aproximación al factor de carga crítico global del sistema. Para los siguientes, se obtendrán aproximaciones a los factores de carga para los modos 2, 3, etc.

El vector propio asociado a cada valor propio puede obtenerse resolviendo el siguiente sistema, que es compatible e indeterminado.

$$[\mathbf{K}_L - \lambda \mathbf{K}_g] \cdot \mathbf{U}_{\lambda_{cr}} = 0 \quad (3.71)$$

Este sistema sólo permite ser resuelto encontrando un representante del subespacio vectorial. El procedimiento es análogo a como se resuelven los vectores propios de un problema de valores propios.



# APÉNDICE A

## MATRICES DE RIGIDEZ ELEMENTALES EN COORDENADAS GLOBALES

---

### A.1. Cambio de base de una aplicación lineal

Desde el punto de vista algebraico, la matriz de rigidez es la matriz asociada a una aplicación lineal. Transforma los vectores de un conjunto origen (desplazamientos) en los vectores de un conjunto imagen (fuerzas).

Esta matriz cambia al cambiar la orientación de la base elegida, tanto para los desplazamientos como para las fuerzas. La matriz del cambio de base de la referencia Local a la Global se notará como  $\mathbf{M}_{(L,G)}^e$ . Se construye por columnas, expresando cada vector de la base Local en la Global. En relación a la Figura A.1, se muestran las direcciones unitarias asociados a los dos primeros vectores de la base local:  $\mathbf{x}_{(L)}^e, \mathbf{y}_{(L)}^e$ . El tercer vector de la base es el giro  $\boldsymbol{\theta}_L^e$ . La base de vectores unitarios, en coordenadas globales, está formada por la terna  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}\}$ .

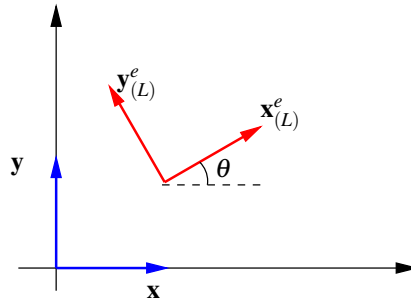


Figura A.1 Vectores unitarios para desplazamientos en sistemas de referencia local y global

$$\mathbf{M}_{(L,G)}^e = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

siendo  $c = \cos(\theta)$  y  $s = \text{sen}(\theta)$ . En efecto, en el sistema de referencia Global,  $\mathbf{x}_{(L)}^e = [c, s, 0]^T$ ;  $\mathbf{y}_{(L)}^e = [-s, c, 0]^T$ , y el giro es idéntico en ambas referencias, y por tanto  $\boldsymbol{\theta}_L^e = [0, 0, 1]^T$ .

La matriz de cambio de base  $\mathbf{M}_{(G,L)}^e$  será la inversa de  $\mathbf{M}_{(L,G)}^e$ . Puesto que las matrices son ortonormales (vectores perpendiculares entre sí, y módulo 1 para cada vector), la inversa se construye simplemente transponiendo la matriz. Así:

$$\mathbf{M}_{(G,L)}^e = \left[ \mathbf{M}_{(L,G)}^e \right]^T \tag{A.2}$$

Teniendo esto en cuenta, y considerando en qué base debe estar el vector que “toma” cada matriz, y en qué base debe “devolverlo”, es sencillo verificar que:

$$\mathbf{K}_{(G)}^e = \mathbf{M}_{(L,G)}^e \cdot \mathbf{K}_{(L)}^e \cdot \mathbf{M}_{(G,L)}^e \tag{A.3}$$

y teniendo en cuenta (A.2)

$$\mathbf{K}_{(G)}^e = \mathbf{M}_{(L,G)}^e \cdot \mathbf{K}_{(L)}^e \cdot \left[ \mathbf{M}_{(L,G)}^e \right]^T \tag{A.4}$$

Esta relación entre coordenadas globales y locales puede establecerse también entre coordenadas Nodales y Globales. Es útil observar que el producto matricial se “lee” de derecha a izquierda: la matriz  $\mathbf{K}_{(G)}^e$  debe tomar un vector de desplazamientos escrito en coordenadas globales, y devolver el resultado en fuerzas escrito también en coordenadas globales. Para hacer eso con la matriz de rigidez que está en coordenadas locales es necesario:

1. Convertir el vector de desplazamiento, que está en globales, a coordenadas locales, mediante  $\mathbf{M}_{(G,L)}^e$ .

2. Obtener las fuerzas en coordenadas locales, aplicando al vector obtenido del paso anterior la matriz  $\mathbf{K}_{(L)}^e$ .
  
3. Cambiar de base el vector de fuerzas resultante, ya que éste estará en coordenadas locales. Para esto, se multiplica el vector de fuerzas en coordenadas locales por la matriz  $\mathbf{M}_{(L,G)}^e$ .

**A.2. Matriz de rigidez de la viga-columna 2D**

La matriz de rigidez, en coordenadas locales, de la viga-columna, es

$$\mathbf{K}_{(L)}^e = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_4 \frac{EI}{L^3} & \phi_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & -\phi_4 \frac{EI}{L^3} & \phi_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & \phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_2 \frac{EI}{L} & 0 & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_3 \frac{EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_4 \frac{EI}{L^3} & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & \phi_4 \frac{EI}{L^3} & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} \\ 0 & \phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_3 \frac{EI}{L} & 0 & -\phi_1 \frac{EI}{L^2} & \phi_2 \frac{EI}{L} \end{array} \right) \tag{A.5}$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}^e = \left( \begin{array}{ccc|ccc} A & D & H & -A & -D & H \\ D & B & F & -D & -B & F \\ H & F & C & -H & -F & G \\ \hline -A & -D & -H & A & D & -H \\ -D & -B & -F & D & B & -F \\ H & F & G & -H & -F & C \end{array} \right) \tag{A.6}$$

Donde:

$$A = c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \phi_4 \frac{EI}{L^3} \quad (\text{A.7})$$

$$B = s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \phi_4 \frac{EI}{L^3} \quad (\text{A.8})$$

$$C = \phi_2 \frac{EI}{L} \quad (\text{A.9})$$

$$D = cs \left( \frac{EA}{L} - \phi_4 \frac{EI}{L^3} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$F = c \phi_1 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{A.11})$$

$$G = \phi_3 \frac{EI}{L} \quad (\text{A.12})$$

$$H = -s \phi_1 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{A.13})$$

Nótese que los términos  $C$  y  $G$  no se ven afectados por los cambios de base. Es del todo lógico, si se tiene en cuenta que estas expresiones que están en la posición (3,3) de cada submatriz pueden interpretarse como momentos a aplicar cuando se aplica un giro unitario en un extremo, manteniendo el resto de grados de libertad a cero. Las expresiones tanto del momento como del giro no cambian al cambiar de coordenadas locales a globales.

### A.3. Matriz de rigidez geométrica

En una barra, y para un axil  $P^e$  de compresión, la expresión de la matriz de rigidez geométrica, en coordenadas globales, se define como

$$\mathbf{K}_G^e = -P^e \mathbf{K}_\gamma^e \quad (\text{A.14})$$

En un sistema de carga proporcional, si  $P^e = q^e \lambda$ , entonces

$$\mathbf{K}_G^e = -\lambda \mathbf{K}_g^e \quad (\text{A.15})$$

siendo

$$\mathbf{K}_g^e = q^e \mathbf{K}_\gamma^e \quad (\text{A.16})$$

El cambio de base para determinar  $\mathbf{K}_G^e$  o  $\mathbf{K}_g^e$  sólo requiere obtener  $\mathbf{K}_\gamma^e$  a partir de  $\mathbf{K}_{\gamma(L)}^e$ , cuya expresión es:

$$\mathbf{K}_{\gamma(L)}^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

La matriz  $\mathbf{K}_{\gamma(L)}^e$  en coordenadas globales puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{K}_{\gamma}^e = \begin{pmatrix} A & D & H & -A & -D & H \\ D & B & F & -D & -B & F \\ H & F & C & -H & -F & G \\ \hline -A & -D & -H & A & D & -H \\ -D & -B & -F & D & B & -F \\ H & F & G & -H & -F & C \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Donde:

$$A = s^2 \frac{6}{5L} \quad (\text{A.19})$$

$$B = c^2 \frac{6}{5L} \quad (\text{A.20})$$

$$C = \frac{2L}{15} \quad (\text{A.21})$$

$$D = cs \left( -\frac{6}{5L} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$F = c \frac{1}{10} \quad (\text{A.23})$$

$$G = -\frac{L}{30} \quad (\text{A.24})$$

$$H = -s \frac{1}{10} \quad (\text{A.25})$$



# REFERENCIAS

---

1. Z. Bažant and L. Cedolin. *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. World Scientific, 2010.
2. J. Bonet and Richard Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis (Second Edition)*. Cambridge University Press, 2008.
3. Richard Bronson and Gabriel B. Costa. *Ecuaciones diferenciales (Shaum)*. McGraw-Hill, 1992.
4. J. T. Celigüeta. *Curso de Análisis Estructural*. EUNSA Ediciones, Universidad de Navarra, 2008.
5. J. Domínguez. *Elementos para el Cálculo de Estructuras Metálicas*. Servicio de publicaciones ETSII Las Palmas de Gran Canaria, 1982.
6. Lev Elsgoltz. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. MIR, 1992.
7. T. V. Galambos. *Guide to stability design criteria for metal structures*. John Wiley and Sons, 1998.
8. T. V. Galambos and A. E. Surovek. *Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers*. John Wiley and Sons, 2008.
9. Tyn Myint-U and Lokenath Debnath. *Linear partial differential equations for scientists and engineers (Fourth Edition)*. Birkhäuser, 2007.
10. Murray R. Spiegel. *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. Prentice-Hall, 1981.
11. S. P. Timoshenko and J. M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications, 2009.