UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

EVALUACIÓN Y DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis Doctoral

Emilse Gómez Torres

Dirigida por:

Dra. Carmen Batanero Bernabeu

Dr. José Miguel Contreras García

Granada, 2014

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Emilse Gómez Torres
D.L.: GR 1871-2014
ISBN: 978-84-9083-055-0

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

EVALUACIÓN Y DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL, realizada bajo la dirección de la Doctora Carmen Batanero y el Doctor José Miguel Contreras en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta Dª. **Emilse Gómez Torres** para optar al grado de Doctor en el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación.

Fdo. Emilse Gómez Torres

Vº Bº de los Directores,

Dra. Carmen Batanero | Dr. José Miguel Contreras

Reconocimientos:

Esta investigación se ha realizado en el seno del Grupo de Investigación FQM126 del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, en el marco del Proyecto de investigación sobre formación de profesores EDU2010-14947 (MICINN-FEDER).

El doctorando Emilse Gómez Torres y los directores de la tesis Carmen Batanero Bernabeu y José Miguel Contreras García garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 16 de enero de 2014

Director/es de la Tesis

Fdo.: Carmen Batanero Bernabeu

Fdo: J. Miguel Contreras García

Doctorando

Fdo.: Emilse Gómez Torres

RESUMEN

En esta investigación se aborda la evaluación y el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria. El interés del tema se justifica por su reciente inclusión en este nivel educativo y la escasez de investigaciones previas.

Nos basamos en el "enfoque ontosemiótico" (EOS) de la cognición e instrucción matemática, que permite determinar las configuraciones epistémicas asociadas a los significados intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático de la probabilidad, fijando el significado de referencia de la probabilidad en esta investigación. Este enfoque también es utilizado en el diseño de los instrumentos de evaluación y el análisis de sus resultados. A partir de este primer análisis se realizan tres estudios complementarios:

- *Estudio 1.* Se analiza la presentación de la probabilidad en los decretos oficiales y en dos series de libros de texto de educación primaria, determinando los objetos matemáticos que se tienen en cuenta respecto a cada significado de la probabilidad en el currículo. Con ello se establece el significado pretendido en el currículo español y se fijan las bases de la definición semántica de los cuestionarios construidos para los estudios de evaluación 2 y 3.
- *Estudio 2.* Se evalúa el conocimiento matemático sobre probabilidad, en una muestra de 157 futuros profesores de educación primaria que completan individualmente el Cuestionario 1. Dicho cuestionario, construido para la investigación, tiene en cuenta el conocimiento común, ampliado y especializado de los principales objetos matemáticos ligados a los diferentes significados de la probabilidad, que se identificaron en el Estudio 1.
- *Estudio 3.* Realizada una discusión conjunta con los futuros profesores de las soluciones al Cuestionario 1, apoyada por actividades de simulación, se lleva a cabo una segunda evaluación. Una submuestra de 81 estudiantes, trabajando en parejas, completan el Cuestionario 2, también construido para la investigación, que incluye posibles soluciones de niños a cuatro ítems del Cuestionario 1 y preguntas complementarias sobre el contenido evaluado. El análisis de las respuestas permite describir la evolución del conocimiento matemático común, ampliado y especializado de los participantes, así como evaluar su conocimiento sobre el contenido y el estudiante.

Los resultados proporcionan una información valiosa sobre el conocimiento matemático inicial para la enseñanza respecto a los diferentes significados de la probabilidad y la evolución de dicho conocimiento. Otras aportaciones de la tesis son el análisis curricular, los instrumentos y las actividades diseñados. Algunos de estos resultados se han reflejado en las publicaciones que se detallan a lo largo de la memoria.

ABSTRACT

In this work we face the assessment and development of the mathematical knowledge for teaching probability in prospective primary school teachers. The interest of the topic is justified by its recent introduction in the primary school curricula and the scarce previous research.

We base on the ontosemiotic approach (OSA) to mathematical cognition and instruction, which serves to determining the epistemic configurations linked to the different probability meanings (intuitive, classic, frequentist, subjective and axiomatic) in order to fix a reference meaning of probability in this research. This approach is also used to design the evaluation instruments and to analyze their results. This epistemic analysis is base for three complementary studies:

- *Study 1.* We analyse the way in which probability is presented in the curricular guidelines and in two textbooks series for primary school. The aim was to identify the mathematical objects that are taken into account in the curriculum as regards each different meaning of probability. As result we determine the intended meaning of probability in the Spanish primary curriculum and we establish the bases for the semantic definition of questionnaires used in the assessment studies (2 and 3).

- *Study 2.* We assess the mathematical knowledge of probability in a sample of 157 prospective primary school teachers, which individually answered Questionnaire 1. This questionnaire was built for this research, with the aim of assessing the common, horizon and specialized knowledge about the main mathematical objects linked to the different probability meaning that were identified in Study 1.

- *Study 3.* A second evaluation is performed after a collective discussion with prospective teachers of the responses to Questionnaire 1, supported by simulation activities. A subsample of 81 students, working by pairs, completed Questionnaire 2, which was also built for this research, and includes children solutions to four items taken from Questionnaire 1, together with some questions concerning the mathematical content of the items. The analysis of responses served to assess the knowledge of content and students of these prospective teachers and to describe the evolution in their probability knowledge.

Our results provide valuable information about the initial mathematical knowledge for teaching as regards the different meanings of probability and its development. Other contributions include the curricular analysis, the questionnaires and activities designed. Part of these results was reflected in different publications quoted along the document.

INDICE

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha reconocido la necesidad de formar el conocimiento y razonamiento probabilístico desde la infancia, para que el ciudadano pueda desenvolverse con éxito en las situaciones inciertas. Como consecuencia, en España, siguiendo la tendencia internacional, se ha incluido recientemente la enseñanza de la probabilidad desde la educación primaria (MEC, 2006).

Puesto que la probabilidad es un tema relativamente nuevo en el currículo, parte de los futuros profesores de educación primaria que ingresan en las Facultades de Educación no han recibido una formación suficiente en probabilidad. Esta situación, común en otros países, ha llevado a instituciones internacionales como IASE (International Association for Statistical Education) e ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) a priorizar la investigación sobre la formación probabilística de los profesores.

Con objeto de contribuir a esta problemática, nuestro trabajo aborda el problema de la evaluación y el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria. Nos basamos para ello en el enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática (Godino y Batanero, 1994; 1998a y b; Godino, 2002; Godino, Batanero, y Font, 2007; 2012) y en el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Schilling, y Ball, 2004; Ball, Thames y Phelp, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball y Bass, 2009), matizado con algunas aportaciones del enfoque ontosemiótico (Godino, 2009), que también proporcionan criterios para su evaluación.

La Memoria se ha organizado en los siguientes capítulos:

En el *Capítulo 1* se describe y justifica el problema de investigación, presentando también los elementos del enfoque ontosemiótico, que se utilizan en el trabajo. Se presenta un análisis de algunos significados actuales de la probabilidad, discutiendo su problemática filosófica (descrita previamente por de Batanero, 2005 y Batanero y Díaz, 2007) y su adecuación en el currículo de educación primaria. Con ello se fijará el significado de referencia de la probabilidad en la investigación y se formulan los objetivos e hipótesis del trabajo. Finalmente se hace un resumen de la forma en que se articulan las diversas fases de la investigación y los rasgos generales de la metodología empleada.

En el *Capítulo 2* se presenta un estudio curricular (Estudio 1). En primer lugar se analizan los objetos matemáticos específicos ligados a los diversos significados de la probabilidad en los documentos curriculares para educación primaria vigentes en España (MEC, 2006; Consejería de Educación, 2007) y Estados Unidos (NCTM, 2000; Franklin et al., 2007). Igualmente se analizan los objetos matemáticos ligados a cada significado de la probabilidad en dos series de libros de texto de matemáticas para educación primaria. Como consecuencia, se deduce el significado institucional de referencia para nuestra investigación, que servirá de base en la definición semántica para la construcción de los cuestionarios de evaluación utilizados en los Estudios 2 y 3.

En el *Capítulo 3* se realiza una síntesis de la investigación previa sobre razonamiento probabilístico en niños y adolescentes, clasificados desde los diferentes significados de la probabilidad contemplados actualmente en el currículo español para la educación primaria. Nuestra síntesis considera un intervalo de edad amplio, con el fin de comprender el proceso de desarrollo cognitivo del alumno; pues consideramos que este proceso ha de ser conocido por el profesor. La información obtenida de este capítulo nos proporciona información sobre tareas, estrategias y dificultades, creencias y conocimientos de los niños a diversas edades, que permitirán la posterior construcción de ítems para evaluar el conocimiento del contenido y el estudiante.

El *Capítulo 4* resume las investigaciones sobre formación de profesores para enseñar la probabilidad. En primer lugar, presentamos algunos modelos sobre conocimiento del profesor de matemáticas relevantes para enmarcar la investigación y las principales adaptaciones de estos modelos para la educación estadística. Justificamos la elección en nuestro trabajo de adoptar el modelo de Ball y sus colaboradores, matizado con las sugerencias metodológicas de Godino (2009) para la construcción del futuro cuestionario. Igualmente se exponen los principales resultados de investigaciones sobre los diversos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad, así como sobre actitudes y creencias. Esta síntesis permite mostrar el interés de la construcción de nuestro futuro cuestionario. El capítulo finaliza con la descripción de la formación en probabilidad que han recibido los participantes en los Estudios 2 y 3, y de las características generales de la secuencia formativa propuesta.

En el *Capítulo 5* se describe el *Estudio 2*, orientado a la evaluación del conocimiento matemático de los futuros profesores de educación primaria. Para ello se construye el Cuestionario 1 que evalúa el conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad respecto a los contenidos de mayor interés determinados en el Estudio 1. La aplicación del cuestionario en una muestra de 157 futuros profesores y el análisis detallado de sus respuestas permite caracterizar dichos componentes de su conocimiento. Por otro lado, las dificultades encontradas son retomadas en una actividad formativa, basada en el debate de las soluciones y la simulación para desarrollar el conocimiento matemático de la probabilidad en estos profesores.

En el *Capítulo 6* se describe el *Estudio 3*, dirigido a evaluar nuevos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad, así como la evolución de algunos aspectos del conocimiento matemático sobre probabilidad de los futuros profesores. Para ello se construye el Cuestionario 2 y se analizan las respuestas al mismo de una submuestra de 81 futuros profesores trabajando en pequeños grupos. El análisis detallado de sus respuestas permite, por un lado, concluir la evolución positiva del conocimiento matemático en los ítems utilizados, debido a la actividad formativa realizada con los futuros profesores después de responder al Cuestionario 1. Asimismo permite describir parte de su conocimiento especializado del contenido y de su conocimiento del contenido y el estudiante.

El *Capítulo 7* contiene las principales conclusiones. Por un lado, se justifica el cumplimiento de los objetivos fijados para el trabajo, y se discuten las hipótesis iniciales, parte de las cuáles se han confirmado. Entre las aportaciones del estudio destacamos el análisis curricular, el avance en la descripción del conocimiento matemático para enseñar probabilidad, los cuestionarios aportados y la descripción detallada de las respuestas y razonamientos de los participantes. Todo ello proporciona una información valiosa para los investigadores y los formadores de profesores con respecto a la enseñanza de la probabilidad a nivel de educación primaria. Resultados parciales se han dado a conocer a través de diversas publicaciones que se detallan a lo largo de la memoria.

La memoria finaliza con las referencias y cuatro anexos al trabajo. El primero es el Cuestionario 1, que evalúa el conocimiento común, especializado y ampliado de la probabilidad en profesores de educación primaria. Un segundo anexo describe las actividades de experimentación, simulación y análisis desarrolladas con los futuros profesores durante la actividad formativa de resolución y debate del Cuestionario 1. El tercero es el Cuestionario 2, dirigido a la evaluación del conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y el estudiante. El cuarto anexo incluye el material entregado a los profesores en formación tras la resolución de los Cuestionarios 1 y 2.

CAPITULO 1.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo se dedica a describir el problema de investigación, relacionado con la evaluación y desarrollo del *conocimiento matemático para la enseñanza* de la probabilidad del futuro profesor de educación primaria.

En primer lugar, se justifica el interés de la investigación, a partir de la necesidad de "alfabetización probabilística" de los ciudadanos, que debe ser cubierta durante la educación obligatoria. Las modificaciones recientes en los currículos de educación primaria, que introducen ideas de probabilidad desde los seis años así lo posibilitan. Sin embargo, puesto que este tema es nuevo en este nivel educativo, se producen implicaciones en la formación de profesores, para responder a los retos que imponen estas nuevas directrices curriculares.

En la Sección 1.3 se describen los elementos del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática, que utilizamos en este trabajo, puesto que nos permitirán un análisis detallado del conocimiento probabilístico, tanto en las directrices curriculares y libros de texto, como en los propios profesores. También servirán para describir en forma precisa los objetivos de la investigación (Sección 1.5). Seguidamente utilizamos este marco para analizar los diferentes significados de la probabilidad de interés en nuestro estudio, por su presencia en la educación primaria.

El capítulo se completa con la formulación de los objetivos del trabajo y de las hipótesis iniciales y la descripción de los rasgos generales de la metodología empleada en las diversas fases de la investigación.

1.2. JUSTIFICACIÓN DEL TEMA

Nuestra justificación del interés de la investigación se basa, en primer lugar, en la necesidad de alfabetización probabilística, en segundo en la novedad que supone para los profesores la inclusión de la probabilidad en todos los cursos de la educación primaria y, como consecuencia, en la necesidad de preparación de los profesores de este nivel educativo.

Necesidad de alfabetización probabilística

La alfabetización probabilística es reclamada con fuerte insistencia por autores como Gal (2002, 2005), Jones (2005) o Batanero (2006, 2014), por ser parte de los conocimientos, que las personas necesitan en diferentes momentos de la vida. No sólo la probabilidad es el modelo matemático adecuado para analizar situaciones inciertas que ocurren en el día a día, además es indispensable para avanzar en el estudio posterior de la estadística (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005). Por otro lado, como indica Batanero (2006, p. 1):

> El azar es inherente a nuestras vidas y aparece en múltiples situaciones cotidianas o de la vida profesional. Pero las intuiciones en probabilidad con frecuencia nos engañan y una enseñanza formal es insuficiente para superar los sesgos de razonamiento que pueden llevar a decisiones incorrectas.

El modelo de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2005) consta de diversos tipos conocimiento y elementos actitudinales, y resalta que los sentimientos personales (como aversión injustificada al riesgo en ciertas situaciones) también afectan las decisiones bajo incertidumbre. En cuanto al conocimiento, el autor menciona los siguientes componentes de la cultura probabilística:

1. *Ideas probabilísticas,* conocimiento de aquellas que son necesarias para entender e interpretar afirmaciones probabilísticas. En particular, considera fundamentales las de variación, aleatoriedad e independencia, que se comprenden en conjunción con las de constancia, determinismo y asociación.

2. *Competencia para la asignación de probabilidades* y evaluación de la calidad de la información disponible. La comprensión de los significados clásico, frecuencial y subjetivo, por separado no es suficiente para tratar con las situaciones cotidianas, que requieren la valoración conjunta de informaciones de diversa índole. Más recientemente, Borovcnik (2012) hace mención especial a la importancia de la comprensión de la probabilidad condicionada, debido a su impacto en situaciones de decisión. El autor además indica que la estimación frecuencial de la probabilidad tiene poca fiabilidad cuando la probabilidad teórica tiene un valor muy pequeño o muy grande.

3. *Conocimiento del lenguaje* (*o terminología*), para comunicar en forma verbal o numérica la probabilidad de un suceso, para operar con la probabilidad y para describir otros conceptos probabilísticos relevantes.

4. *Cuestionamiento crítico* del propio trabajo con la probabilidad o de la información probabilística en los medios de comunicación; por ejemplo, consciencia de las debilidades y sesgos que pueden surgir en la obtención, presentación e interpretación de la información probabilística.
5. *Capacidad de contextualizar* el pensamiento probabilístico y el lenguaje, tanto en contextos públicos como privados.

Cambios recientes en el currículo

La demanda de alfabetización probabilística ha impulsado la enseñanza de la probabilidad, que, aunque desde hace más de cuarenta años se incluye en los currículos de secundaria, sólo recientemente se ha adelantado a la educación primaria (NCTM, 2000; MEC, 2006; Consejería de Educación, 2007). Hay también un cambio de enfoque, que había sido, en general, axiomático y clásico, privilegiando la aplicación de la combinatoria y la demostración matemática de las propiedades de la probabilidad. Dicho enfoque no ayudaba a desarrollar el razonamiento probabilístico ni la intuición sobre la probabilidad.

El análisis curricular en España y Estados Unidos (Sección 2.3) muestra que actualmente se pretende el desarrollo del razonamiento de los niños, además de la capacidad de cálculo, con actividades como la experimentación o la simulación, la formulación de predicciones y conclusiones basadas en los datos. Esto implica un aumento del tiempo dedicado al enfoque frecuencial de la probabilidad. La inclusión de la probabilidad en la educación primaria es producto de la influencia de las investigaciones que se analizan en el Capítulo 3 y que también proporcionan material de apoyo a los profesores.

Formación de los profesores

El éxito de los nuevos programas depende fuertemente de la formación de los profesores, quienes tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas de sus estudiantes (Batanero y Díaz, 2012).

La investigación sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas sigue siendo un área de investigación en desarrollo; si bien es amplia en la actualidad, como veremos en el Capítulo 4, en particular después que Shulman (1986a) introdujera el *conocimiento pedagógico del contenido (PCK)* como un conocimiento específico del profesor. Pocas de estas investigaciones se centran en la probabilidad y los resultados de las existentes indican que algunos profesores mantienen inconscientemente una variedad de dificultades y errores en probabilidad que podrían transmitir a sus estudiantes (por ejemplo, Azcárate, 1995; Stohl, 2005; Batanero, Biehler, Engel, Maxara, y Vogel, 2005; Batanero, Cañizares, y Godino, 2005; Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano, y Rodríguez, 2006; Canada, 2008; Contreras, 2011).

La mayoría de dichos trabajos se han centrado en aspectos particulares de la probabilidad, sin tratar de llevar a cabo una evaluación global comprensiva del conocimiento de los futuros profesores o analizar su evolución. El más completo es la tesis doctoral de Mohamed (2012), que contempla algunos componentes del conocimiento didáctico del profesor, además del conocimiento matemático tomado en cuenta en investigaciones anteriores. Sin embargo, sólo tiene en cuenta el enfoque clásico de la probabilidad (omite los enfoques frecuencial y subjetivo, recomendados en el actual currículo). Su cuestionario es una adaptación directa del empleado por Cañizares (1997) con niños, en lugar de estar pensado directamente para profesores, y no se basa en un análisis previo del currículo y los libros de texto. Nuestro trabajo parte de este último, con el fin de construir un cuestionario específico para profesores.

La importancia de la formación de profesores para enseñar estadística se resaltó en el estudio conjunto de ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) e IASE (International Association for Statistical Education) (Batanero, Burrill y Reading, 2011). En el caso de España, los nuevos planes de estudio ofrecen la posibilidad de mejorar la formación de los futuros profesores al proporcionar un mayor número de créditos dedicados a la matemática y su didáctica. Es por este motivo que cobra actual relevancia una investigación centrada en la evaluación y desarrollo de los conocimientos de los profesores en este tema específico.

En nuestro trabajo utilizamos el modelo de Ball y colaboradores que definen el conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374) y lo descompone en dos grandes categorías: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido (o conocimiento didáctico). Este modelo ha orientado al desarrollo de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor en educación matemática, se analiza con detalle en el Capítulo 4. Además, en nuestra investigación, se tendrá en cuenta la reinterpretación de dicho modelo realizada desde el enfoque ontosemiótico en Godino (2009), y en otros trabajos posteriores del autor.

1.3. MARCO TEÓRICO

En esta sección se analizan algunos de los elementos del enfoque ontosemiótico (EOS**)** tenidos en cuenta en el trabajo**,** ejemplificados para el objeto probabilidad.

1.3.1. LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA Y OBJETOS LIGADOS A ELLA

En el EOS, la actividad matemática se entiende como un conjunto de prácticas, que tienen como finalidad la resolución de problemas disciplinares o extra-disciplinares, y de las cuáles surgen los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998a y b; Godino, 2002; Godino, Batanero, y Font, 2007; 2012). Estas prácticas se pueden desarrollar de manera individual o conjunta; en este último caso, los autores denominan *institución* al grupo de personas que, además de tener intereses comunes, comparte instrumentos, reglas y modos de funcionamiento propios de la institución. La actuación de las personas o instituciones frente a un tipo de situaciones problemáticas relacionadas con un cierto objeto (por ejemplo, probabilidad) está dada por sus sistemas de prácticas de las cuáles surge el objeto, denominado por los autores *significado del objeto matemático* que puede ser institucional o personal.

Godino (2002) define una tipología básica de significado, para aplicarla en un análisis didáctico. A nivel institucional, identifica cinco tipos de significado: el *holístico* (sistema de prácticas en el sentido más amplio), el *referencial* (base en una investigación, que suele ser más restringido que el anterior), el *pretendido* (fijado para la planificación de un proceso de enseñanza), el *evaluado* (subsistema que utiliza el docente para valorar los aprendizajes), el *implementado* (sistema de prácticas implementado por el docente). A nivel personal, identifica el significado *global* (todo el sistema potencial de prácticas subjetivas), el *declarado* (prácticas mostradas en un proceso de evaluación), el *logrado* (las mostradas que coinciden con las pretendidas institucionalmente). En un proceso de estudio, interesan también los significados *iniciales* y *finales* de los estudiantes que se observan al comparar sus sistemas de prácticas personales antes y después de la instrucción (ver también Font, Godino, y Gallardo, 2013).

Tipos de objetos y configuraciones

Godino, Batanero y Font (2007; 2012) definen las categorías de objetos, que se presentan a continuación:

- *Situaciones problema*: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, que inducen una actividad matemática. Un problema sencillo para un estudiante de secundaria es decidir cuál, entre dos urnas con diferente composición de bolas de colores, debe elegir en un juego, donde se premia la extracción de un cierto color de bola.

- *Elementos lingüísticos*: términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, operaciones con estos datos, objetos matemáticos que se utilizan y soluciones encontradas. Algunos ejemplos serían los símbolos, diagramas en árbol, tablas o histogramas de frecuencias.

- *Conceptos*: en las prácticas realizadas para resolver un problema se usan implícita o explícitamente objetos matemáticos, de los cuáles el estudiante ha de recordar la definición. Algunos ejemplos en nuestra investigación serían experimento, aleatoriedad, espacio muestral, suceso, casos favorables y posibles, frecuencia, variable aleatoria, función de distribución, valor esperado, independencia, probabilidad condicionada.

- *Proposiciones*: enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos. Por ejemplo, los axiomas de probabilidad, los teoremas de probabilidad total y de Bayes son proposiciones en el campo de la probabilidad.

- *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes aplican al resolver el problema. Algunos procedimientos que se enseña a los estudiantes son la estimación de probabilidades a partir de frecuencias relativas (ya sea por recolección de datos o por simulación) y el cálculo de probabilidades con un modelo de distribución de probabilidades.

- *Argumentos*: enunciados usados para validar o explicar proposiciones y procedimientos, o bien la solución de los problemas. Pueden ser deductivos, inductivos, formales o informales. Un ejemplo sería la generalización de una propiedad.

Cada objeto primario tiene asociado un proceso mental: las situaciones problema emergen mediante el proceso de problematización, los elementos lingüísticos mediante el proceso de comunicación, los conceptos mediante el proceso de definición, las proposiciones mediante el proceso de enunciación, los procedimientos mediante el proceso de algoritmización, y los argumentos mediante el proceso de argumentación.

Godino, Batanero y Font (2007; 2012) consideran que estos seis tipos de objetos se relacionan formando configuraciones didácticas, entendidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas con sus relaciones. Los autores clasifican estas configuraciones en socio-epistémicas (si los objetos en las redes son institucionales), o cognitivas (si son personales). Adicionalmente, se reconoce que la clasificación anterior de objetos es relativa a los marcos institucionales y a los contextos de uso, y tiene carácter recursivo, según el nivel de análisis (por ejemplo un argumento puede articular conceptos y proposiciones).

1.3.2. FACETAS DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En segunda instancia, el enfoque ontosemiótico propone una tipología de facetas duales que surge de las distintas maneras de operar, con los objetos matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; 2012):

- *Personal – institucional*. Los objetos emergentes se denominan “objetos personales” si emergen de sistemas de prácticas personales, e institucionales si emergen de prácticas comunes a una institución.
- *Ostensivo – no ostensivo*. Un objeto es ostensivo si es perceptible, y no ostensivo si no lo es. En general, los objetos emergentes son imperceptibles por sí mismos; para las prácticas públicas estos objetos no ostensivos se representan con sus ostensivos asociados.
- *Expresión – contenido*. Corresponden al antecedente (significante) y consecuente (significado) de cualquier función semiótica (que se define en la Sección 1.3.3).
- *Extensivo – intensivo* (*ejemplar – tipo*). Un objeto que se usa como ejemplo o caso particular se denomina “objeto extensivo”; un objeto que se usa como una clase más general o genérica se denomina “objeto intensivo”.
- *Unitario – sistémico*. Cuando los objetos matemáticos intervienen como entidades indivisibles son unitarios, por ejemplo, la probabilidad de un suceso dado; si intervienen como sistema (composición de varios objetos) son sistémicos, por ejemplo la función de distribución.

La emergencia de estas dualidades también corresponde a procesos mentales que se realizan para pasar de uno a otro polo de dichas facetas, en su orden: personalización – institucionalización; materialización/concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación; particularización – generalización; análisis/descomposición – síntesis/reificación.

En nuestro trabajo utilizaremos los constructos descritos de la faceta epistémica del enfoque ontosemiótico al analizar la presentación de la probabilidad en los documentos curriculares y los libros de texto (Capítulo 2), donde un objetivo importante será identificar los significados de la probabilidad (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero, 2014) que subyacen en estos documentos.

1.3.3. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA

Un papel esencial en el proceso relacional durante las prácticas matemáticas corresponde a las funciones semióticas (Godino y Batanero, 1998b; Godino, Batanero y Font, 2007; 2012), que se entienden como relaciones que establecen los sujetos, personas o instituciones entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), por ejemplo, una correspondencia entre un símbolo y un concepto matemático. Es de notar que esta noción de función semiótica es muy amplia pues el antecedente (expresión) y consecuente (significado) de una función semiótica no se restringe a conceptos, sino abarca los seis tipos de objetos matemáticos que se han descrito anteriormente.

Una función semiótica se puede catalogar como representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, los autores extrapolan el significado de función semiótica dado en la lingüística. Estas funciones semióticas pueden producir significados sistémicos o elementales según el contexto. Por ejemplo, "la distribución de probabilidades del *número de bolas verdes* obtenidas al extraer con reemplazamiento cinco bolas de una urna" refiere al objeto matemático distribución, particularizado en este ejemplo, que involucra el conjunto completo de valores de la variable y sus probabilidades en esta distribución específica.

La producción o interpretación de cada función semiótica implica un acto de *semiosis* por el estudiante y constituye un conocimiento personal, del agente interpretante. En este sentido, un conocimiento se entiende como el contenido de una función semiótica, y su tipología concuerda con las diversas funciones semióticas:

> Podemos interpretar la comprensión de un objeto *O* por parte de un sujeto (institución o individuo) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como expresión o contenido (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 132).

Conflictos semióticos

Cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones se denomina *conflicto semiótico.* En particular, un desajuste entre la interpretación del estudiante y del profesor corresponde a un *conflicto interaccional*, una disparidad de prácticas de instituciones diferentes a un *conflicto de tipo epistémico* y un desajuste a nivel interno del sujeto a un *conflicto de tipo cognitivo*. Estas ideas se pueden aplicar para analizar resultados de la evaluación o procesos de enseñanza (ver, por ejemplo, Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) y explicar las dificultades mediante conflictos semióticos observados o potenciales.

Batanero, Henry y Parzysz (2005) muestran que la historia de la probabilidad proporciona muchos episodios y problemas paradójicos e indican que el desarrollo de razonamiento probabilístico en los estudiantes sigue un proceso similar al histórico. Por tanto es de esperar que algunos de estos errores puedan explicarse por medio de la idea de conflicto semiótico.

1.3.4. COMPRENSIÓN Y COMPETENCIA

La distinción entre significado personal e institucional permite describir las diferencias que se podrían observar entre el significado asignado por un estudiante a un objeto matemático y el acordado en la institución. Godino (1996) presenta una teoría de la *comprensión* de un concepto, como un recorrido progresivo y relativo a la apropiación de elementos ligados a los significados institucionales. Desde esta perspectiva, el sentido de la enseñanza sería aproximar los significados personales a los institucionales. Para el caso de la probabilidad, Batanero (2005) ilustra con ejemplos como entienden la *comprensión de la probabilidad* las siguientes instituciones educativas:

- *Escuela primaria*: el niño comprende la probabilidad cuando calcula probabilidades de sucesos en experimentos muy sencillos, por ejemplo el lanzamiento de un dado, y entiende que corresponde a un valor entre 0 y 1.
- *Escuela secundaria*: el adolescente comprende la probabilidad cuando memoriza la regla de Laplace, conoce algunas propiedades como la regla del producto y resuelve problemas un poco más complicados, por ejemplo calcular la probabilidad de un experimento compuesto de varias etapas dependientes (como lanzar una moneda y según el resultado lanzar un dado o una moneda).
- *Sociedad*: el individuo comprende la probabilidad cuando la utiliza adecuadamente en el contexto de apuestas, votaciones o inversión en la bolsa, y toma decisiones correctas con base en esa información.
- *Ciencia, vida profesional o universidad*: el adulto comprende la probabilidad cuando trabaja variables aleatorias en una o más dimensiones y diferentes modelos de distribuciones de probabilidad, como la binomial. En algunas profesiones también se requiere estimación de parámetros o contraste de hipótesis.

Cabe notar que, aunque no nos centramos directamente en competencias, este término puede aparecer ocasionalmente en el trabajo. A este respecto:

> Los posicionamientos pragmatistas del EOS llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas) (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 10).

1.3.5. EVALUACIÓN

En el modelo de comprensión propuesto por Godino (1996), se tienen en cuenta dos ejes: uno *descriptivo*, que indica los aspectos o componentes de los objetos que se pretende evaluar, y otro *procesual* que indica las fases o niveles necesarios en el logro de una comprensión adecuada a un tipo de estudiante.

En dicho modelo se resalta que la comprensión personal de un determinado objeto por parte de un sujeto, no puede ser observada directamente, pero puede observarse indirectamente a través de las prácticas personales (significado personal). La evaluación de la comprensión sería el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales. Por tanto, la comprensión depende de la institución desde donde se lleva a cabo la evaluación, que es la que determina hasta qué punto un sujeto “comprende” el significado de un objeto. A este respecto, Batanero y Díaz (2005) recuerdan los diferentes procesos de inferencia llevados a cabo en un proceso de evaluación y que factores condicionan la generalizabilidad de los resultados. La evaluación supone un muestreo de estudiantes, preguntas y circunstancias, cada una de las cuáles afecta a la posibilidad de inferencia.

Estos elementos del EOS serán aplicados en los capítulos 5 y 6, al analizar las respuestas de futuros profesores en tareas de evaluación y su evolución.

1.3.6. CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS

Al pasar al estudio de los procesos de enseñanza es necesario utilizar nuevas herramientas, entre las que destacan las de configuración didáctica e idoneidad didáctica. Una configuración didáctica se define como una unidad primaria de análisis didáctico constituida por interacciones profesor/alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando recursos materiales específicos (Godino, Batanero y Font, 2007).

Cada configuración didáctica lleva asociadas tres configuraciones interrelacionadas: una *epistémica* representada por una tarea con sus objetos matemáticos previos y emergentes; una *instruccional*, conformada por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito de dicha tarea; y otra *cognitiva*, constituida por la red completa de objetos de los sistemas de prácticas personales al implementar la configuración epistémica dada. Esta última se puede utilizar para describir los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso.

1.3.7. CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Para el análisis didáctico de un proceso de estudio de las matemáticas es conveniente establecer criterios de calidad. Godino, Contreras y Font (2006) definen la idoneidad didáctica de un proceso como la articulación coherente y sistémica de seis componentes, que permiten valorar la calidad de un proceso educativo. Godino (2011) describe también criterios detallados para evaluar estos componentes, que son los siguientes:

- *Idoneidad epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los estudiantes (están en la zona de desarrollo potencial siguiendo la terminología de Vygotski), así como la proximidad de los significados personales logrados por los estudiantes a los significados pretendidos por el profesor.
- *Idoneidad interaccional*: grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales y resolver conflictos observados durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional*: grado de implicación (por ejemplo interés o motivación) del

alumnado en el proceso de estudio.

- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo de la institución (o comunidad) y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

1.4. PROBABILIDAD ELEMENTAL, PROBLEMÁTICA FILOSÓFICA Y CONFIGURACIONES DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Una vez descritos los elementos del marco teórico, en lo que sigue se realiza un análisis elemental del objeto matemático probabilidad y otros ligados a ella, con la finalidad de establecer un significado de referencia para nuestro trabajo.

La probabilidad ha recibido diversas interpretaciones y debates filosóficos, sobre su naturaleza y su posible carácter objetivo o subjetivo a lo largo de la historia, que todavía se tienen en cuenta en el momento de asignar probabilidades y en la enseñanza (Batanero y Díaz, 2007). El objetivo de esta sección es describir algunos de estos significados, que podrían utilizarse en la enseñanza, analizando su problemática filosófica. Utilizamos conscientemente el término “significado” en el sentido dado en el marco teórico, implicando que los objetos matemáticos utilizados (conceptos, problemas, procedimientos, etc.) pueden variar en cada uno de dichos significados.

Empezamos el análisis con el significado axiomático, que, aunque es el más formal e históricamente el más reciente, nos permite presentar con precisión objetos como el experimento aleatorio o el espacio muestral, a lo que haremos referencia en el estudio de los significados que lo antecedieron, usando la terminología actual. Seguidamente haremos un recorrido por los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo, que de acuerdo a Batanero (2005) se pueden introducir en la educación primaria.

1.4.1. SIGNIFICADO AXIOMÁTICO

La *definición axiomática de la probabilidad* es aceptada por las escuelas estadísticas, con independencia de su epistemología, pues los axiomas de probabilidad propuestos por Kolmogorov (1956/1933) son aplicables a cada una de las visiones clásica, frecuencial y subjetiva (Batanero y Díaz, 2007).

La axiomatización de la probabilidad tuvo lugar en el siglo XX: por un lado, para tratar de conectar la probabilidad con la matemática moderna (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005) y, por otro, para tratar de superar las discusiones filosóficas en torno a los significados anteriormente aceptados para la probabilidad, que se describirán en las secciones siguientes. De acuerdo a Batanero (2005) varios matemáticos contribuyeron a esta axiomatización; entre ellos Borel, quien conectó la probabilidad con la teoría de la medida, observando que la probabilidad es un caso particular de medida. Kolmogorov (1956/1933) completó esta idea, asumiendo que los sucesos se pueden representar por conjuntos, donde el espacio muestral sería el conjunto total y el resto de los sucesos subconjuntos de este conjunto (Batanero y Díaz, 2007).

Aceptada esta idea, se puede realizar las operaciones conjuntistas habituales (unión, intersección, contrario) con los sucesos y definir sobre el espacio muestral un álgebra de sucesos. De manera que, la probabilidad en esta acepción es una medida normada (acotada entre 0 y 1) definida sobre este álgebra (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005). A continuación, presentamos un análisis resumido elemental de la teoría axiomática de la probabilidad, restringiéndonos sólo a los objetos que tienen relevancia en el nivel de educación primaria o en la formación de profesores de este nivel.

Experimento y sucesos aleatorios

Un estudio de probabilidad ha de iniciarse considerando un fenómeno o *experimento aleatorio*, expresión que se utiliza para describir fenómenos en que se aplican las técnicas estadísticas (Godino, Cañizares, y Batanero, 1987).

Formalmente, un experimento es *aleatorio* si al repetirlo (en condiciones análogas) no se puede predecir el resultado. En caso contrario, el experimento se llama *determinista*. De acuerdo a Ortiz (2002) se exige la repetibilidad e impredecibilidad del experimento y se diferencia entre experimento aleatorio y su resultado (suceso), pues es posible producir resultados “aleatorios” (pseudoaleatorios) con algoritmos de ordenador deterministas. También conviene considerar las secuencias de resultados aleatorios.

Una vez determinado el experimento se define el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento, llamado *espacio muestral*, que denotaremos *E*. Este conjunto puede ser numerable o no, finito o infinito (Stuart y Ord, 1994); presentaremos las definiciones iniciales en espacios muestrales numerables finitos, que serán los tratados en la educación primaria.

Se llama *suceso* a cada uno de los subconjuntos de un espacio muestral; se califica como suceso *elemental* a cualquier subconjunto unitario de un espacio muestral, el suceso se llama *compuesto* cuando consta de varios sucesos elementales. Diremos que un suceso *A* está incluido en otro *B*, $A \subset B$, si siempre que ocurre *A* ocurre *B*. Los sucesos que se verifican siempre, se llaman *seguros*, son iguales al espacio muestral *E*. El *suceso imposible* es el conjunto vacío, no hay un suceso elemental que lo verifique.

Álgebra de Boole de sucesos

Se llama *espacio de sucesos* de un experimento aleatorio, y se denota con *U*, al conjunto formado por todos los sucesos. En términos de la teoría de conjuntos, *U* representa al conjunto partes de *E*. Para definir la probabilidad es necesario dotar primero al espacio *U* de una estructura de álgebra (en su forma más sencilla, un álgebra de Boole). Para ello se comienza definiendo las operaciones de unión e intersección (Loeve, 1976): Sean *A* y *B* dos sucesos que pertenecen al mismo espacio de sucesos, $A \in U$ y $B \in U$.

- Se llama *unión de los sucesos A y B*, denotada por $A \cup B$, al suceso que se verifica cuando se produce al menos uno de los dos sucesos *A* o *B*.
- Se llama *intersección de los sucesos A y B*, y se denota por $A \cap B$, al suceso que ocurre cuando se producen simultáneamente *A* y *B*.

Estas operaciones son similares a las definidas entre conjuntos y tienen sus mismas propiedades. Para definir la probabilidad conviene también considerar la idea de incompatibilidad. Dos sucesos son *incompatibles* cuando no pueden verificarse simultáneamente, esto es:

$$A \text{ y } B \text{ son incompatibles} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Un caso particular es el de sucesos complementarios. Dos sucesos son *complementarios* (o *contrarios*) si siempre que no se verifica uno de ellos se produce el otro, esto es:

$$A\ y\ B\ son\ complementarios\ \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset\ y\ A \cup B = E$$

Se denota con A^c al suceso complementario (o contrario) del suceso A. Entre las propiedades del suceso contrario se hallan las siguientes:

$$E^c = \emptyset \qquad \emptyset^c = E \qquad A \cup A^c = E \qquad A \cap A^c = \emptyset$$

Probabilidad

Una vez dotado al espacio U de estructura de álgebra de Boole, es posible definir la probabilidad. Se llama *probabilidad* a toda función que asocia a cada suceso A, del espacio de sucesos U, un número real comprendido entre 0 y 1, que se representa por $P(A)$, esto es:

$$\begin{array}{rcl} P\!: U & \rightarrow & R \\ A & \rightarrow & P(A) \end{array}$$

Además, se exige que P, que es una función de conjunto, cumpla las siguientes propiedades:

1. $1 \geq P(A) \geq 0, \forall A \in U$; es decir, la probabilidad está siempre acotada entre 0 y 1.
2. $P(E) = 1$.
3. Si A, B $\in U$ y $A \cap B = \emptyset$; entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Es decir la probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de sus probabilidades.

El tercer axioma se puede extender, tanto para uniones finitas como infinitas. Dados n sucesos $\{A_i\}_{i=1}^{n} \in U$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, entonces $P(\cup A_i) = \sum_i P(A_i)$

Este sistema axiomático se aplica a espacios muestrales infinitos numerables y continuos, restringidos al espacio euclidiano, esto es, se requiere el desarrollo de propiedades de campos de Borel (Stuart y Ord, 1994).

Se llama *espacio probabilístico* o *espacio de probabilidades*, asociado a un experimento aleatorio, a la terna (E, U, P) donde E es el espacio muestral, U es el álgebra de sucesos y Puna probabilidad definida sobre U. Es de notar que a un mismo experimento aleatorio se le pueden asociar distintos espacios probabilísticos, sin más que modificar la probabilidad. Otras propiedades de la probabilidad que se derivan de estos tres axiomas son:

- La probabilidad del suceso complementario de A es igual a 1 menos la probabilidad del suceso A, esto es: $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- La probabilidad del suceso imposible es cero, esto es: $P(\emptyset) = 0$.

- Sean A y B dos sucesos cualesquiera, no necesariamente incompatibles, entonces se cumple: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- La probabilidad de un suceso compuesto *A* es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo conforman, teniendo en cuenta que estos sucesos elementales son incompatibles; esto es, si $A = \{a_1, \dots, a_k\}, P(A) = P(a_1) + \cdots + P(a_k)$

Completamos a continuación el análisis incluyendo las nociones de probabilidad condicionada e independencia y el Teorema de Bayes, que nos permitirán posteriormente un análisis más acertado del significado subjetivo de la probabilidad. También analizamos los experimentos compuestos y la variable aleatoria discreta que aparecen a veces implícitamente en problemas propuestos en el final de la educación primaria.

Probabilidad condicionada e independencia

En algunas situaciones, se puede tener alguna información sobre la ocurrencia de sucesos que pueden estar relacionados con el suceso de interés. En tales casos, entra en juego el concepto de probabilidad condicionada. Formalmente, sean *(E,U,P)* el espacio de probabilidades, *A* y *B* sucesos cualesquiera en *U*, el primero con probabilidad no nula. Se llama *probabilidad del suceso B condicionada por el suceso A*, al cociente:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

De la definición anterior se obtienen dos expresiones que permiten calcular la probabilidad de la intersección de los sucesos *A* y *B*:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \quad P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Esta regla, que se conoce como *teorema de la probabilidad compuesta o del producto*, puede generalizarse sin dificultad a tres o más sucesos:

P(*A*Ç *B*Ç *C*)=*P*(*A*)*P*(*B/A*)*P*(*C/A*Ç *B*)

P(A_1ÇA_2Ç .... ÇA_n)=*P*(A_1)*P*(A_2/A_1)...*P*(A_n/A_1Ç … ÇA_{n1})

A veces, la probabilidad de un suceso *B* condicionada por otro *A* es la misma que la probabilidad del suceso *B*, cuando no se impone condición. Esta propiedad se utiliza para la definición de dependencia e independencia entre sucesos: Sea *A* un suceso en un espacio de sucesos *U*, si $P(A) \neq 0$, un suceso *B* es *independiente del suceso A* si *P*(*B*|*A*) = *P*(*B*). En caso contrario si *P*(*B*|*A*) ≠ *P*(*B*), el *suceso B depende del suceso A.*

Es de notar que dos sucesos son independientes mutuamente, puesto que en el caso de que *B* no dependa de *A* se verifica: *P*(*A*Ç*B*) = *P*(*A*) x *P*(*B*), y por tanto, *P*(*A*|*B*) = *P*(*A*), por lo cual *A* tampoco depende *B*.

Un teorema importante es el *Teorema de Bayes*. Si los sucesos A_1, A_2,…, A_n forman una partición del espacio muestral *E*, es decir si verifican las dos condiciones siguientes: (i) son incompatibles dos a dos, y (ii) la unión de todos es el espacio muestral. Y si las probabilidades de estos sucesos *P*(A_i) no son nulas para todo *i=1,…,n*;

entonces, para todo suceso B del espacio muestral E, de probabilidad no nula, se verifica:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \times P(B / A_i)}{P(A_1) \times P(B / A_1) + P(A_2) \times P(B / A_2) + ... + P(A_n) \times P(B / A_n)}$$

El denominador de esta fórmula corresponde al *teorema de la probabilidad total.*

Experimentos compuestos

Las anteriores definiciones son válidas para espacios muestrales generados por experimentos aleatorios *simples*, que corresponde a situaciones problema que no se puede dividir en partes; o *compuestos*, que constan de varios experimentos simples realizados en forma sucesiva o simultánea.

Denotemos con $E_1=\{a_1,a_2,\ldots\}$y $E_2=\{b_1,b_2,\ldots\}$a los espacios muestrales de dos experimentos aleatorios simples. Representamos al espacio muestral del experimento compuesto por estos dos experimentos simples mediante el producto combinatorio (E_1, E_2) que contiene el conjunto de todas las parejas ordenadas (a_i, b_j) tales que $a_i \in E_1$ y $b_j \in E_2$ (Feller, 1983). La generalización a experimentos compuestos con k etapas (más de dos) implica la extensión de las siguientes definiciones a espacios muestrales generados por el producto combinatorio ($E_1,\ldots,E_k$) donde E_i es el espacio muestral simple de la i-ésima etapa.

Cuando los sucesos "el primer resultado es a_i" y "el segundo resultado es b_j" son siempre estadísticamente independientes, los experimentos se dicen independientes y la probabilidad de cada punto muestral en (E_1, E_2) se define en forma general, dados $p_i=P(a_i \in E_1)$ y $q_j=P(b_j \in E_2)$, como $P((a_i,b_j) \in (E_1,E_2))=p_i q_j$ para todo $a_i \in E_1$ y $b_j \in E_2$ (Feller, 1983). Situaciones problema de este tipo son el muestreo con reemplazamiento o las loterías tradicionales.

Cuando los sucesos "el primer resultado es a_i" y "el segundo resultado es b_j" no son estadísticamente independientes se tiene que $P((a_i,b_j) \in (E_1,E_2))=p_i q_{j|i}$ donde $q_{j|i}=P(b_j \in E_2|a_i \in E_1)$. Situaciones problema de este tipo son el muestreo sin reemplazamiento, los modelos de urnas con extracciones simultáneas de un mismo dispositivo, o la lotería primitiva.

Variable aleatoria discreta y esperanza matemática

Una *variable aleatoria* X es una función de conjunto cuya imagen es real y está definida sobre el espacio muestral E, asociado a un experimento aleatorio (Wilhelmi, 2004). Es decir, a cada suceso elemental s le asocia un valor real $X(s)$, en otros términos:

$$\begin{array}{rcl} X: E & \rightarrow & R \\ s & \rightarrow & X(s) \end{array}$$

Una variable aleatoria es discreta cuando la imagen es numerable, la considerada para el nivel escolar de nuestro estudio además es finita.

Se llama *distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X* a la función de variable real y con dominio de valores contenido en el intervalo real [0;1] dada por: $P(X=k)=P\left(X^{-1}(k)\right)=P(A)$ donde $A=X^{-1}(k)=\{s\epsilon E|X(s)=k\}$, es decir, *A* es la imagen inversa de la variable aleatoria; exigiéndose que *A* sea un elemento del álgebra *U*. El término *distribución de probabilidad* se refiere a la colección que incluye tanto los valores de la variable aleatoria como sus respectivas probabilidades.

Los valores que caracterizan a una variable aleatoria, y especifican completamente su distribución de probabilidad, se suelen llamar *parámetros de la distribución.* Uno de los más utilizados es la media de la variable o *esperanza matemática E*(*X*):

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}k_iP(X=k_i)$$

A continuación se presenta la definición de algunos modelos de probabilidad que sirven para modelizar situaciones cotidianas y que son utilizados en forma implícita en los textos de educación primaria.

Distribución uniforme: La colección de valores de una variable aleatoria X están distribuidos de forma uniforme en *m* puntos $(x_1,\dots,x_m)$ si:

$$P(X=k)=\frac{1}{m}\ ;\ si\ k=x_i, para\ i\in\{m\in N|1\leq i\leq m\}$$

En cualquier otro caso, $P(X=k)=0$.Esta distribución de probabilidades se tiene cuando hay sucesos elementales equiprobables y cada uno genera un valor diferente de *X*. Se puede mostrar, calculando *E*(*X*) como se indicó antes, que su esperanza matemática es $\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i}{m}$.

Distribución de Bernoulli: Sea una variable aleatoria *X*, que puede tomar solo los valores 0 o 1, y sea π la probabilidad del valor 1; entonces la colección de valores de esta variable aleatoria *X* están distribuidos según Bernoulli si:

$$P(X=k;p)=\ \pi^k(1-\pi)^{1-k};\ si\ k\in\{0,1\}$$

En cualquier otro caso, $P(X=k)=0$. Calculando *E*(*X*) como se indicó antes, se obtiene que su esperanza matemática esπ.

Una situación aleatoria que tiene las siguientes propiedades se conoce como *experimento Bernoulli*:

- El experimento es repetible bajo idénticas condiciones.
- Los resultados de un intento (cualquiera) sólo admiten una de dos opciones, suelen clasificarse como éxito o fracaso (también puede ser tener o no una característica).
- La probabilidad de éxito se representa por π.

Tabla 1.1. Configuración de objetos matemáticos en el significado axiomático

Tipo		Objeto
Conceptos		Aleatoriedad, experimento aleatorio, secuencia de resultados, espacio muestral
		Suceso: elemental, compuesto, seguro, imposible, incompatible, complementario
		Espacio de sucesos, álgebra de sucesos. Unión e intersección de sucesos
		Probabilidad, medida
		Probabilidad condicionada, dependencia e independencia
		Experimentos compuestos: por etapas o simultáneos
		Variable aleatoria, parámetro, esperanza matemática, distribución de probabilidades, distribución uniforme y de Bernoulli
Propiedades	Aleatoriedad experimento aleatorio	Distinción entre proceso, resultado y secuencia de resultados
		Contraposición entre determinismo y aleatoriedad
		Impredecibilidad: se conoce el conjunto de resultados, pero no el que ocurrirá
		Repetibilidad: Es posible repetir el experimento en condiciones fijas
	Espacio muestral	Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio
		Conjunto de todos los sucesos elementales
	Suceso y tipos	Suceso: cada subconjunto del espacio muestral
		Suceso elemental: formado por un solo resultado del experimento
		Suceso elemental: subconjunto unitario del espacio muestral
		Suceso compuesto: colección de sucesos elementales
		Suceso compuesto: formado por dos o más resultados del experimento aleatorio
		Suceso seguro: igual al espacio muestral
		Suceso seguro: se verifica siempre
		Suceso imposible: nunca se verifica
		Suceso imposible: contrario al suceso seguro.
		Suceso imposible: subconjunto vacío del espacio muestral
		Suceso seguro; complementario del suceso imposible
		La unión del suceso seguro con el suceso imposible es el espacio muestral
		La intersección del espacio muestral y el suceso imposible es el suceso imposible
	Probabilidad	Función en el álgebra de sucesos, que toma valores en el intervalo [0,1]
		Sólo podemos asociar probabilidad a los elementos del álgebra de sucesos
		La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1
		La probabilidad del suceso seguro es 1; la probabilidad del suceso imposible es 0
		La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de estos sucesos.
		Se requieren la operaciones de unión e intersección y una estructura de álgebra de Boole para poder definir la probabilidad
		Probabilidad: función de conjuntos, normada, numerablemente aditiva
		Probabilidad del suceso complementario a uno dado
		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
		$P(A) = P(a_1) + \cdots + P(a_k)$;$A = \{a_1, \dots, a_k\}$,$a_i$ son sucesos elementales

	Probabilidad condicionada dependencia	$P(B\|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ Si A y B son independientes, $P(B\|A) = P(B)$; $P(A\|B) = P(A)$ Regla del producto de probabilidades (sucesos dependientes) Regla del producto de probabilidades (sucesos independientes) Teorema de la probabilidad total, Teorema de Bayes La probabilidad del suceso condicionante debe ser distinta de cero $P(A\|B) \neq P(B\|A)$, en general La condicionada es la probabilidad y no el suceso. La probabilidad condicionada toma un valor comprendido entre 0 y 1 La probabilidad condicionada del suceso seguro es igual a la unidad Si $A \cap C = \emptyset$, $P(A \cup C\|B) = P(A\|B) + P(C\|B)$
	Experimento compuesto	Se compone de varios experimentos simples, dependientes o no Espacio muestral (*k experimentos*):producto ($E_1,\ldots,E_k$) donde E_i es el espacio muestral simple de la *i*-ésima etapa $P((a_i,b_j) \in (E_1,E_2))=P(a_i \in E_1)P(b_j \in E_2 \|a_i \in E_1)$ para todo $a_i \in E_1$ y $b_j \in E_2$ Si $P((a_i,b_j) \in (E_1,E_2))= P(a_i \in E_1)P(b_j \in E_2)$ en experimentos independientes
	Variable aleatoria distribución	Sus valores dependen de los resultados de un experimento aleatorio Queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad: Conjunto de valores que toma junto con su probabilidad La distribución de probabilidad es una función real de variable real La distribución de probabilidad se compone de la probabilidad y la inversa de la variable aleatoria La suma de probabilidades en la distribución de probabilidad es 1 Sea (x_i, p_i), $i \in \{1,\ldots,m\}$, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X. La media o esperanza matemática es $E(X)= \Sigma x_i p_i$.
Procedimientos	Experimento aleatorio	Discriminar experimentos aleatorios y deterministas Proponer ejemplos de experimentos aleatorios y/o deterministas
	Espacio Muestral	Enumerar el espacio muestral en un experimento aleatorio simple Calcular el número de elementos de un espacio muestral simple Enumerar el espacio muestral en experimentos compuestos Calcular el número de elementos de un espacio muestral compuesto
	Sucesos	Escribir todos los sucesos posibles asociados a un experimento Dados dos sucesos formar su unión Dados dos sucesos formar su intersección Dado un suceso formar su complemento Reconocer/discriminar sucesos simples y compuestos Reconocer un suceso complementario Reconocer un suceso incompatible
	Probabilidad	Discriminar la probabilidad como medida y otros tipos de medidas Calcular la probabilidad de sucesos compuestos (experimento simple) Calcular la probabilidad de sucesos simples (experimentos independientes o dependientes) Calcular la probabilidad de sucesos compuestos (experimentos independientes o dependientes)

	Probabilidad Condicionada dependencia	Calcular probabilidades condicionadas en experimentos simples Calcular probabilidades condicionadas en experimentos compuestos Reconocer si dos sucesos son independientes Analizar situaciones en las que aparezca clara la dependencia entre sucesos Analizar situaciones en las que aparezca clara la independencia entre sucesos Analizar situaciones en las que aparezca clara la dependencia entre experimentos Analizar situaciones en las que aparezca clara la independencia entre experimentos Calcular la probabilidad de un suceso aplicando el teorema de probabilidad total Calcular la probabilidad condicionada de un suceso aplicando la definición Calcular la probabilidad condicionada de un suceso aplicando el teorema de Bayes
	Experimento Compuesto	Identificar el número de etapas en un experimento compuesto Distinguir el experimento simple que conforma cada etapa Reconocer si dos etapas consecutivas son independientes Calcular probabilidades conjuntas para sucesos independientes Calcular probabilidades conjuntas para sucesos dependientes
	Variable aleatoria; distribución	Determinar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria Determinar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor determinado Calcular media, mediana o moda, o medidas de dispersión

Es de notar que la mayoría de problemas o actividades propuestas a nivel escolar se corresponden con este esquema, ya sea en contexto de juegos (como extracción de una bola o lanzamiento de una moneda) o de tipo cotidiano, en cuyo caso el espacio muestral suele tener más posibles resultados. La variable aleatoria se define, de forma implícita, como una indicadora de poseer una característica en particular, de manera que sus posibles valores son 1 si el suceso tiene la característica y 0 si no la tiene.

Desde el punto de vista de la enseñanza la aproximación axiomática es poco apropiada en los primeros niveles de formación (Godino, Batanero, y Cañizares, 1987). La enseñanza de la probabilidad, bajo esta axiomatización, se debiera posponer hasta que se hayan comprendido las definiciones clásica, frecuencial y subjetiva. Por ello sólo sería aconsejable a nivel universitario, aunque los estudiantes de secundaria podrían comprenderla a nivel intuitivo.

La Tabla 1.1 resume los conceptos, propiedades y procedimientos presentados en esta sección. Respecto a los otros tres tipos de objetos matemáticos considerados en nuestro marco teórico, podemos decir lo siguiente:

- *La situación problema* de donde surge el significado axiomático de la probabilidad es la necesidad de formalizar y axiomatizar los otros significados de la probabilidad (descritos a continuación). Es decir, es un campo de problemas puramente intra-matemático.
- *El lenguaje* utilizado es principalmente simbólico, con escasa presencia de gráficos. Aunque se usa lenguaje verbal, la mayoría de las expresiones son puramente matemáticas (no tomadas de la vida ordinaria). En particular resaltamos el uso del lenguaje conjuntista.
- *La argumentación* es puramente deductiva y formal.

1.4.2. SIGNIFICADO INTUITIVO

Batanero (2005) indica que las ideas intuitivas sobre el azar aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, quienes usan frases y expresiones coloquiales como posible, previsible, presumible, para “cuantificar” sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. Estas mismas ideas aparecen en todas las civilizaciones y su origen está ligado a las apuestas, ceremonias religiosas y adivinación. Aunque estas prácticas son tan antiguas como el hombre, según Batanero, Henry y Parzysz (2005) durante muchos siglos se consideró impensable cualquier predicción sobre los sucesos aleatorios, pues se suponía que el futuro era solo conocido por los dioses.

Esto no fue obstáculo para hacer apuestas sobre juegos de azar o sorteos, aunque la predicción de los mismos era tan sólo intuitiva, y no llega a precisarse hasta bastante después, cuando se trató de asignar números a estos grados de creencia para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos.

Hacking (1995) menciona posibles argumentos para la demora en la formalización de la teoría de probabilidades, entre ellos la falta de interés en explicar las razones para obtener un resultado en particular y la ausencia de condiciones equiprobables naturales. El hombre primitivo buscó mecanismos para obtener dispositivos aleatorios equiprobables, pero no eran simétricos físicamente. Un ejemplo son los astrágalos que provenían de huesos del talón de diversos animales y que cumplían la función de nuestros actuales dados en juegos de tiempos antiguos, incluso del paleolítico. Otros artefactos provenientes de huesos también se usaban en juegos de azar:

> Una taba tiene seis caras, pero sólo cuatro son lo suficientemente estables como para que se pose sobre ellas. Y de esas cuatro, con variaciones según los animales de los que proceda el hueso, las posibilidades se sitúan en torno al 40% en dos de las caras y al 10% en las otras dos (Corbalán y Sanz, 2010, p. 36-37).

En consecuencia, consideramos la aproximación intuitiva como aquella en que se asignan cualitativamente probabilidades a los sucesos en base a las preferencias individuales; se emplean diversas expresiones lingüísticas para referirse a estas comparaciones: "más probable", "muy probable". En algunos casos se ordenan por su mayor verosimilitud y se cuantifican sólo en casos sencillos, sin formalismo matemático. Se trata de estimar la mayor o menor posibilidad de sucesos aislados (sin considerar las variables aleatorias explícitamente); en ocasiones se encuentran valores numéricos en casos sencillos, pero no hay procedimientos matemáticos sistemáticos.

Godino, Batanero y Cañizares (1987) sugieren comenzar la enseñanza a partir de este significado intuitivo, aprovechando el interés de los niños por los juegos. Para asignar probabilidades a sucesos, en este nivel, se puede hacer comparaciones de la verosimilitud de sucesos con palabras del lenguaje habitual. Los autores proponen hacer corresponder un valor numérico entre 0 y 1 a sucesos comparados previamente, o situar los sucesos de interés sobre un gráfico, mostrando la escala de la probabilidad, de modo que 1 corresponda al suceso seguro y 0 al imposible. A pesar de que no saber cuál suceso ocurrirá en una prueba particular, algunos merecen más confianza que otros, en función del conocimiento previo sobre las condiciones de realización del experimento. La comparación de resultados individuales o por grupos es importante para reflexionar sobre el carácter subjetivo de las probabilidades asignadas.

La Tabla 1.2 resume los conceptos, propiedades y procedimientos presentados en esta sección. Respecto a los otros tres tipos de objetos matemáticos considerados en nuestro marco teórico, podemos decir lo siguiente:

- *Las situaciones problema* de donde surge el significado intuitivo de la probabilidad son la cuantificación de sucesos inciertos o la expresión de grados de creencia en los mismos. En particular en juegos de azar o sorteos.
- *El lenguaje* utilizado es principalmente coloquial, con empleo de palabras del lenguaje ordinario, que muchas veces son imprecisas.
- *La argumentación* es puramente informal; se reduce al análisis de ejemplos y contraejemplos.

Tabla 1.2. Objetos específicos del significado intuitivo

Tipo		Objeto
Conceptos		Azar y variabilidad Suceso; Suceso seguro, posible e imposible Posibilidad, grado de creencia
Propiedades	Azar	No se puede predecir con seguridad el resultado
	Suceso y tipos	Suceso posible: cualquier resultado de un experimento Suceso imposible: nunca se verifica Suceso seguro: siempre ocurre
	Posibilidad, grado de creencia	Se puede aproximar analizando el fenómeno Se puede aproximar con experiencias anteriores Se puede calificar con relaciones comparativas (más, menos, poco, mucho) El grado de posibilidad o creencia del suceso imposible es 0 El grado de posibilidad o creencia del suceso seguro es 1 El grado de posibilidad o creencia de un suceso posible está entre 0 y 1
Procedimientos	Azar	Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas (en que interviene o no el azar) Reconocer la impredicibilidad de un resultado
	Suceso y tipos	Reconocer tipos de sucesos (seguro, imposible y posible) Listar sucesos posibles en un fenómeno o experimento sin un procedimiento combinatorio sistemático
	Posibilidad, grado de creencia	Valorar cualitativamente posibilidades Comparar cualitativamente posibilidades Interpretar el grado de posibilidad o creencia

1.4.3. SIGNIFICADO CLÁSICO

Progresivamente algunos autores comienzan a describir procedimientos matemáticos para resolver problemas de juegos de azar, primeramente en forma poco sistemática para, posteriormente, dar lugar a tratados específicos sobre el tema.

Uno de los primeros problemas de probabilidad resueltos se describe en un poema del siglo XIII analizado por Bellhouse (2000), cuyo autor calcula la probabilidad de todas las sumas posibles al lanzar dos dados. A partir del siglo XVII matemáticos tales como Cardano (1961/1663) resuelven otros problemas similares y recomendaron a los jugadores tener en cuenta todas las posibilidades de los diferentes resultados al hacer sus apuestas. Sin embargo, el concepto de probabilidad tarda en formalizarse hasta comienzos del siglo XVIII.

Durante el Renacimiento, la probabilidad fue un problema de interés para matemáticos y filósofos, que llevó al desarrollo de diversas teorías, comenzando por problemas en los que resultaba básica o conveniente la condición de equiprobabilidad de los sucesos elementales (Hacking, 1995). La preocupación por las ganancias esperadas en los juegos de azar, lleva a definir la esperanza matemática antes que la probabilidad, por lo que Heitele (1975) considera que la variable aleatoria y su esperanza son ideas más intuitivas que este concepto.

La correspondencia entre Pascal y Fermat, en la que resuelven algunos de estos problemas, se considera como el punto de partida de la teoría de la probabilidad; aunque ellos usan la probabilidad en forma implícita, sin llegar a definirla (Batanero y Díaz, 2007). Uno de los problemas planteado a estos autores por el caballero de Mèré consistió en la división de la apuesta en un juego, cuando la partida se ve interrumpida. Pascal (1963/1654) sugirió que una división justa debía ser proporcional a la probabilidad de ganar la partida completa que tenía cada jugador al momento de la interrupción.

Siguiendo las ideas de Pascal y Fermat, Huygens publica el primer tratado de cálculo de probabilidades *De Ratiociniis in Aleae Ludo*. En él introduce lo que hoy conocemos como esperanza matemática, y demuestra que una persona puede esperar ganar la cantidad $pa + qb$ donde p es la probabilidad de ganar la cantidad a y q es la de ganar b (Huygens, 1998/1657). Este resultado fue posteriormente extendido por Leibniz (1995/1676, p. 161):

> Si una situación tiene diferentes resultados favorables excluyentes entre sí, la estimación de la esperanza sería la suma de los casos favorables posibles para el conjunto de todos estos resultados, dividido en el número total de resultados.

Posteriormente de Moivre propone la primera definición formal de probabilidad:

> Si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia (De Moivre 1967/1718, p.1).

Laplace refina esta definición; para él, la probabilidad de un suceso que puede ocurrir en un número finito de resultados "es una fracción con denominador el número de todos los casos posibles y con numerador el número de casos favorables al suceso de interés" (Laplace, 1985/1814, p. 28).

Formalmente, si un espacio muestral E consta de un número finito n de sucesos elementales y no hay motivo para suponer que alguno de ellos pueda ocurrir con mayor frecuencia que los restantes, la probabilidad de cada suceso elemental es $1/n$. Un suceso compuesto que consta de k sucesos elementales tiene una probabilidad igual a k/n (regla de Laplace). Al aplicar esta regla, se presenta a menudo el problema de calcular el número de elementos de un cierto subconjunto del espacio muestral; para resolverlo, se puede utilizar el cálculo combinatorio.

Godino, Batanero y Cañizares (1987) indican que la definición de Laplace fue discutida desde su publicación. Por un lado es circular, pues utiliza el término que quiere definir (equiprobable) y, por otro, introduce un elemento subjetivo asociado a la necesidad de juzgar la equiposibilidad de diferentes resultados. Por otro lado, más que una definición de qué es la probabilidad, Laplace propone una forma de cálculo que implica reducir los acontecimientos aleatorios a un cierto número de casos igualmente posibles. Este hecho constituye una debilidad, pues esta definición no es aplicable cuando los experimentos tienen posibilidades infinitas (la variable es continua) o no se cumple la equiprobabilidad (el espacio muestral finito no es simétrico). Por tanto se encuentran pocos casos donde pueda aplicarse, fuera de los juegos de azar (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005).

Otra debilidad es que la simetría física es insuficiente para la aceptación del supuesto de equiprobabilidad; posibles sesgos en factores externos relacionados con el experimento pueden llevar a que, a pesar de existir simetría física, no se garantice la simetría estadística, entendida como la simetría confirmada por el registro de frecuencias relativas en una experimentación repetida muchas veces (Batanero, 2001).

A nivel escolar, este significado ha sido enseñado durante muchos años debido a su interés para los niños; pues resultaba fácil calcular las probabilidades de los sucesos elementales en ejemplos de juegos con dados o monedas, que hacen parte de la vida cotidiana del niño. Sin embargo, una vez se pasa de la probabilidad simple a la compuesta el cálculo se complica, pues se requiere razonamiento combinatorio, que se dificulta para los estudiantes (Batanero, 2005).

La Tabla 1.3 resume los conceptos, propiedades y procedimientos presentados en esta sección. Respecto a los otros tres tipos de objetos matemáticos considerados en nuestro marco teórico, podemos decir lo siguiente:

Tabla 1.3. Objetos específicos del significado clásico

Tipo		Objeto
Conceptos		Azar, juego de azar Casos favorables, casos posibles Probabilidad Esperanza matemática, juego equitativo
Propiedades	Azar, juego de azar	Número de resultados finito y numerable Equiprobabilidad de sucesos elementales
	Casos favorables/posibles	Casos favorables: resultados que favorecen (proporcionan ganancia) Casos posibles: todos los resultados
	Probabilidad	Valor objetivo, calculable La probabilidad de ocurrencia de un suceso sólo depende del número de resultados Regla de Laplace
	Esperanza, juego equitativo	Esperanza: Valor medio de la ganancia (o de la probabilidad de ganar) en muchas repeticiones del juego Juego equitativo: todos los jugadores tienen la misma esperanza de ganar
Procedimientos	Azar, juego de azar	Analizar diferentes juegos de azar
	Casos favorables/ posibles	Enumerar o contar casos favorables y posibles (mediante listas sistemáticas, diagramas o combinatoria) Diferenciar casos favorables y no favorables
	Probabilidad	Distinguir sucesos elementales equiprobables Comparar probabilidades con razonamiento proporcional Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples Aplicar la regla de Laplace en experimentos compuestos con etapas dependientes o independientes
	Esperanza, juego equitativo	Calcular la esperanza de un juego Decidir si un juego es equitativo Cambiar las reglas de un juego para transformarlo en equitativo

- *Las situaciones problema* de donde surge el significado clásico de la probabilidad son los relacionados con juegos de azar usando dispositivos equiprobables; en particular se trata de solucionar problemas de reparto equitativo y reconocer juegos equitativos.

- *El lenguaje* utilizado combina palabras de lenguaje cotidiano jugadores (casos favorables, casos posibles, juego equitativo. posibilidad) con vocablos formales (fracción, equiprobable, probabilidad de ocurrencia, esperanza matemática). Se utiliza también notación combinatoria y matemática, para expresar las probabilidades y operaciones con las mismas.

- *La argumentación* es tanto inductiva como deductiva; a partir del análisis de ejemplos y contraejemplos va construyendo un cuerpo de conocimiento mediante la identificación de patrones recurrentes y la validación de algunas generalizaciones. Hay un primer paso de formalización en definiciones y deducción de reglas de cálculo.

1.4.4. SIGNIFICADO FRECUENCIAL

Algunos matemáticos trataron de encontrar una nueva definición de la probabilidad que no tuviese los problemas mencionados en el significado clásico, y dotarla de objetividad, dándole un nuevo sentido y relacionándola con resultados de experimentación a través de la convergencia de las frecuencias a la probabilidad.

El pionero en esta línea fue Bernoulli, quien en su libro *Ars Conjectandi*, escrito en 1713 muestra que las frecuencias relativas observadas en gran número de repeticiones experimentales, se pueden utilizar para estimar las probabilidades de los sucesos. Fundamentando así la aplicación del cálculo de probabilidades a aspectos sociales, morales y económicos. La comunidad científica aceptó su demostración de la *primera ley de los grandes números,* la cual indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque a la probabilidad teórica del suceso puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas (Batanero, 2005).

En consecuencia, las situaciones aleatorias se clasifican en dos tipos, que se identifican con dos de los significados de la probabilidad: el clásico donde las probabilidades se conocen a priori, y el frecuencial, en que las probabilidades se definen a posteriori, después de un gran número de experiencias. En estas últimas interpreta las probabilidades "como el grado de certidumbre con el que un acontecimiento futuro se puede producir" (Corbalán y Sanz, 2010, p. 47).

La convergencia de las frecuencias relativas fue observada por otros autores. Buffon, en 4040 tiradas de una moneda obtuvo una frecuencia relativa de caras de 0,5069. Pearson repitió este mismo experimento, obteniendo una frecuencia relativa de 0,5005 para 24000 tiradas. Sin embargo, hasta 1928 no se dio una definición formal de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial, cuando von Mises la define como el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la existencia teórica de dicho límite. Para ello exige, en primer lugar la repetibilidad del ensayo e introduce el término "colectivo", como una serie de sucesos o procesos semejantes que difieren en ciertos atributos observables (von Mises, 1952/1928).

Esta definición resalta que los resultados son imprevisibles de una repetición a otra (reconoce la ausencia de patrón en corto plazo) y que a la larga se observa la regularidad. Algunos problemas filosóficos de este enfoque (Godino, Batanero, y Cañizares, 1987) son los siguientes: No se obtiene un valor exacto para la probabilidad, sino que siempre se dan aproximaciones; no se sabe con certeza el número de experimentos idóneo para aceptar la estimación; a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación. Otra objeción es que no se podría aplicar en algunos campos del conocimiento, por ejemplo a fenómenos económicos o históricos que por su naturaleza son irrepetibles.

Formalmente, en la terminología moderna, cuando se realiza un experimento N veces, la frecuencia absoluta del suceso A es el número N_A de veces que ocurre A. Se pueden observar las tres propiedades siguientes en las frecuencias relativas $h(A)=N_A/N$:

1. La frecuencia relativa del suceso varía entre 0 y 1.
2. La frecuencia relativa del suceso seguro siempre es 1 en cualquier serie de ensayos.
3. Si un suceso A se forma uniendo sucesos que no tienen elementos comunes, la frecuencia relativa del suceso A es la suma de las frecuencias relativas de los sucesos que lo componen.

Estas tres propiedades, al generalizarse, se corresponden con los tres axiomas de la probabilidad citados en la sección 1.4.1. El valor de la frecuencia relativa de un suceso no es fijo para N, puesto que se trata de un fenómeno aleatorio. Sin embargo, para una serie larga de ensayos, los teoremas conocidos como *leyes de los grandes números* muestran que las fluctuaciones de la frecuencia relativa son cada vez más raras y de menor magnitud, y que la frecuencia relativa oscila alrededor de un valor bien determinado, que se denomina *probabilidad* de dicho suceso.

Este significado es válido para espacios muestrales numerables, finitos o no. (Stuart y Ord, 1994). No obstante, se resaltan dos aspectos: a) que el valor obtenido es siempre aproximado, es decir, constituye una *estimación de la probabilidad*; y b) que a mayor tamaño de muestra mayor fiabilidad porque hay más variabilidad en las muestras pequeñas que en las grandes. Es también muy importante no confundir la probabilidad (que es siempre un valor teórico desconocido) con su estimación a partir de la frecuencia (que es siempre una aproximación) (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005).

La realización de experimentos aleatorios puede requerir bastante tiempo, por lo que una alternativa válida consiste en *simular* tales experimentos por medio de una tabla de números aleatorios o con tecnología (Godino, Batanero, y Cañizares, 1987).

Se denomina *simulación* a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente con el cual se experimenta para obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al primer experimento. Este método se emplea para obtener previsiones en situaciones como experimentos complejos, experimentos peligrosos o situaciones futuras (Fernandes, Batanero, Contreras y Díaz, 2009). Un hecho importante es que todos los experimentos aleatorios con espacio muestral discreto y finito se pueden representar mediante modelos de urnas, que son más accesibles a la comprensión que algunos otros experimentos. Experimentos aleatorios compuestos se harían equivaler con modelos de urna apropiados que reflejen la misma composición de los experimentos simples originales; pues el modelo compuesto le corresponden urnas que tienen las mismas distribuciones conjuntas y condicionadas que el primitivo (Batanero, 2001).

Tabla 1.4. Objetos específicos del significado frecuencial

Tipo		Objeto
Conceptos		Colectivo (población); atributos Ensayo; ensayos repetidos Frecuencia (absoluta, relativa) Distribución de frecuencias Probabilidad teórica del suceso Valor estimado de la probabilidad Simulación (de experimentos aleatorios)
Propiedades	Colectivo Ensayos repetidos	Posibilidad de repetición ilimitada en las mismas condiciones Colectivo: grupos de elementos semejantes que difieren en atributos observables El número de atributos en un colectivo puede o no ser finito
	Frecuencia, distribución	La frecuencia relativa de un atributo tiende a estabilizarse La frecuencia relativa de cada atributo es un número comprendido entre *0* y *1* La suma de las frecuencias relativas en un colectivo y *N* ensayos es igual a *1* Las frecuencias relativas (y la distribución varían en cada serie de *N* ensayos
	Probabilidad del suceso; valor estimado	Probabilidad: Valor objetivo, hipotético, desconocido Diferencia entre probabilidad y su estimación (frecuencia) La probabilidad de "la diferencia entre probabilidad teórica y frecuencia relativa observada exceda cierto valor" es función del número de ensayos Convergencia estocástica Los atributos en un colectivo pueden o no ser equiprobables Regularidad en el largo plazo con ausencia de patrón en el corto plazo Desconocimiento del número de experimentos para una estimación buena Aumento en la fiabilidad de la estimación con el tamaño de muestra
	Simulación	Simulación: Sustitución (real o tecnológica) de un experimento por otro equivalente Validez de la estimación de la probabilidad a partir del experimento simulado
Procedimientos	Ensayos repetidos; colectivo	Enumerar o discriminar atributos en un colectivo Analizar si se cumplen las condiciones de repetibilidad de un ensayo
	Frecuencia, Distribución	Calcular frecuencias relativas (de atributos) a partir de observaciones o datos Comprobar las propiedades de la distribución de frecuencias Interpretar una distribución de frecuencias en representación tabular o gráfica Representar una distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimento compuesto)
	Probabilidad del suceso; valor estimado	Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos Reconocer el carácter aproximado de la estimación Analizar la variación de la probabilidad estimada, al aumentar el tamaño de muestra Reconocer diferencias en muestras pequeñas y grandes Comparar la estimación frecuencial con la probabilidad teórica Confrontar la ley empírica de los grandes números con resultados obtenidos en experimentos reales
	Simulación	Simular con dispositivos físicos un experimento aleatorio Simular con tecnología un experimento aleatorio Estudiar la equivalencia de los experimentos original y simulado Confrontar la ley empírica de los grandes números con resultados obtenidos en experimentos simulados

La Tabla 1.4 resume los conceptos, propiedades y procedimientos presentados en esta sección. Adicionalmente:

- *Las situaciones problema* de donde surge el significado frecuencial de la probabilidad se relacionan con la descripción de la distribución de variables y la previsión de tendencias en fenómenos aleatorios naturales o sociales a partir de datos observados. Por ejemplo, los estudios demográficos y actuariales, astronómicos, o políticos.

- *El lenguaje* utilizado es formal, adapta términos matemáticos en la definición de algunos conceptos (límite, estabilidad, convergencia, ley, tendencia, existencia del límite, corto plazo, largo plazo, cociente, simulación) y crea algunos propios (estimación de probabilidades, frecuencias relativas, leyes de los grandes números, series de ensayos, muestra pequeña, muestra grande).
- *La argumentación* es inductiva-deductiva. A partir del análisis de ejemplos y contraejemplos con gran cantidad de repeticiones experimentales va construyendo un cuerpo de conocimiento mediante la identificación de patrones recurrentes y la validación de las generalizaciones. Esto se hace en dos niveles: primero mediante contraste con la experimentación y luego con la demostración de teoremas propios de probabilidad.

1.4.5. SIGNIFICADO SUBJETIVO

Problemas que no podían ser tratados con los anteriores significados pues no cumplían la repetibilidad, como por ejemplo, los grados de prueba en derecho interesaron a pensadores del siglo XVII, como Leibniz. Su vinculación formal a la teoría de la probabilidad se registra hasta el siglo XX, aunque se inicia con los trabajos de Thomas Bayes (1702-1761). Este autor presenta, a través de su teorema, la base de lo que hoy conocemos como estadística bayesiana (Batanero, Henry, y Parsysz, 2005); aunque inseguro de promocionar una idea que era contraria al carácter objetivo dado hasta entonces a la probabilidad, no quiso publicar su estudio y fueron sus discípulos quienes lo divulgarían, en el año 1763, dos años después de su muerte.

Este teorema enunciado en la sección 1.4.1 indica que la probabilidad a posteriori de un suceso $P(A_i/B)$ es proporcional al producto entre su probabilidad a priori $P(A_i)$ y sus verosimilitudes $P(B/A_i)$. Permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos observados. Las probabilidades de varias posibles causas podrían revisarse a partir de los datos (pasar de probabilidades a priori a probabilidades a posteriori). La probabilidad pierde de este modo el carácter objetivo que le asigna el significado frecuencial.

Esta idea fue retomada más tarde por varios matemáticos, quienes definen las probabilidades como grados de creencia personal basados en el conocimiento y experiencia de la persona que asigna la probabilidad. La probabilidad de un suceso está condicionada por un cierto sistema de conocimientos, por lo que no es necesaria la repetición en idénticas condiciones y se amplía el campo de aplicación de las probabilidades.

La controversia sobre el estatuto científico de esta visión de la probabilidad surge ante la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal (Batanero, 2005). Para tratar de salvar esta dificultad, Ramsey (1926) y de Finetti (1937) propusieron una teoría que permite asignar las probabilidades subjetivas separando las creencias personales de las preferencias, que posteriormente consolidó Savage quien las denominó probabilidades personales.

Tabla 1.5. Objetos específicos del significado subjetivo

Tipo		Objeto
Conceptos		Suceso incierto Probabilidad como grado de creencia personal Probabilidades a priori, a posteriori; verosimilitudes
Propiedades	Suceso incierto	Se tiene cierta información, pero no es totalmente predecible No se conoce el resultado, ni sus causas No se exige la repetibilidad Las causas pueden ser o no equiprobables El número de causas puede ser o no finito
	Probabilidad como grado de creencia personal	Condicionada por un sistema de conocimientos Puede ser diferente para personas distintas La probabilidad personal ha de seguir reglas de coherencia Supuesto de transitividad
	Probabilidades a priori, a posteriori; verosimilitudes	La probabilidad a priori es la probabilidad en ausencia de información La probabilidad a posteriori es la probabilidad ajustada a partir de la experiencia La verosimilitud de un resultado depende de la causa Teorema de Bayes: liga las probabilidades a posteriori y a priori por medio de las verosimilitudes
Procedimientos	Suceso incierto	Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal Discriminar fenómenos en que sea aplicable este significado de la probabilidad Enumerar posibles causas y posibles resultados
	Probabilidad como grado de creencia personal	Valorar probabilidades a partir de experiencias personales Estimar probabilidades personales mediante el cociente de posibilidades a favor y en contra Interpretar el grado de creencia personal Comparar las asignaciones hechas por diferentes personas
	Probabilidades a priori, a posteriori; verosimilitudes	Determinar probabilidades a priori y verosimilitudes Aplicar el teorema de Bayes con una información dada

De Finetti propone asignar la probabilidad de un suceso comprometiéndose a aceptar cualquier apuesta basada en dicha asignación. En términos de la axiomática (Stuart y Ord, 1994), dada una información observada H, para cada individuo se diría que gana un monto c si el suceso A ocurre, las ganancias esperadas por cada individuo son $c \times P(A|H)$.

Puesto que la información H, es indiferente para cada individuo hacia otro, se tiene que $P(A|H)$es diferente para cada individuo. Se añade la condición de coherencia, en la cual se considera que la función de ganancia no es uniformemente negativa, es decir, que no se está dispuesto a perder en forma sistemática (Batanero, 2005). El cumplimiento de los tres axiomas de la probabilidad es posible tras la inclusión de un supuesto de transitividad entre las relaciones de desigualdad para la probabilidad de diferentes eventos dada la misma información observada H.

La enseñanza del Teorema de Bayes no sería posible en la educación primaria; generalmente se estudia a partir de los 14-15 años, es decir a final de la Educación Secundaria Obligatoria. Sin embargo, Godino, Batanero y Cañizares (1987) sugieren usar este enfoque en forma intuitiva en situaciones experimentadas por el niño. Para asignar probabilidades a sucesos, en este nivel, se puede hacer corresponder un valor numérico entre 0 y 1 a sucesos comparados previamente, o situar los sucesos de interés sobre un gráfico, mostrando la escala de la probabilidad. Estas probabilidades se podrían revisar posteriormente con nuevas experiencias.

La Tabla 1.5 resume los conceptos, propiedades y procedimientos presentados en esta sección. Respecto a los otros tres tipos de objetos matemáticos considerados en nuestro marco teórico, podemos decir lo siguiente:

- *Las situaciones problema* de donde surge el significado subjetivo de la probabilidad son el estudio de sucesos inciertos cuando hay información disponible y su probabilidad puede cambiar con la información; no se exige repetibilidad. Por ejemplo, la medición de la incertidumbre en los grados de prueba en el derecho, en economía o en pruebas médicas.
- *El lenguaje* utilizado es formal y especializado. Se introducen términos específicos como "probabilidad a priori" y "a posteriori" y "verosimilitud", así como la notación de condicionamiento.
- *La argumentación* es altamente formalizada, de tipo deductivo. Se basa en la aplicación sistemática del Teorema de Bayes.

1.5. OBJETIVOS DEL TRABAJO

Finalizada la presentación del problema, el marco teórico y el análisis del objeto matemático probabilidad, desde sus distintos significados pasamos a explicitar los objetivos, hipótesis y metodología de la investigación.

El *objetivo general* planteado en este trabajo es evaluar y desarrollar algunos componentes de los conocimientos matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores en formación de educación primaria en España. Dicho conocimiento se entenderá según la terminología de Ball, Thames y Phelps (2008), que se precisará en el Capítulo 4. También se tendrán en cuenta la reinterpretación de Godino (2009), de estos componentes del conocimiento del profesor desde el enfoque ontosemiótico, y sus sugerencias sobre criterios de evaluación del mismo.

La importancia de este objetivo ya ha sido resaltada y se deduce de la necesidad de proporcional mayor cultura probabilística al ciudadano, de la posibilidad que ahora se brinda de alcanzar este objetivo con la inclusión de la probabilidad en la educación primaria y la consiguiente necesidad de preparar al futuro profesor. Este objetivo general se divide en los siguientes específicos:

O1. Analizar los significados de la probabilidad presentados en los documentos curriculares y en los textos de educación primaria españoles.

Este objetivo se requiere para fundamentar la construcción de nuestros cuestionarios y el desarrollo de las actividades formativas previstas; permitirá fijar de modo más preciso el significado institucional de referencia en nuestro trabajo. Se aborda en el Capítulo 2, donde se analizan las directrices curriculares de educación primaria para la probabilidad (MEC, 2006; Consejería de Educación, 2007) y la presentación de este objeto matemático en dos series completas de libros de texto. Todo ello utilizando como base el análisis de los significados de la probabilidad presentado en este capítulo (Sección 1.4).

O2. Evaluar y desarrollar el conocimiento matemático común y ampliado de la probabilidad en una muestra de futuros profesores de educación primaria.

Debido a la novedad del tema, los futuros profesores de educación primaria han recibido una escasa formación en probabilidad; pues no la han estudiado durante la educación primaria y en la educación secundaria se dedica poco tiempo al contenido (Serradó, Azcárate, y Cardeñoso, 2006; Eichler, 2008; 2011). Los resultados de las investigaciones previas (analizados en el Capítulo 4) sugieren que es común que futuros profesores de educación primaria tengan bajos conocimientos en probabilidad. Como se ha indicado, los estudios anteriores al nuestro no han utilizado cuestionarios sistemáticos que contemplen los diversos significados de la probabilidad presentes en el currículo, en su mayoría han evaluado el significado clásico y unos pocos el frecuencial.

De ello se deduce el interés de evaluar estos componentes del conocimiento matemático sobre la probabilidad, que se definen con más precisión en el Capítulo 4. En el Capítulo 5 se analiza el cuestionario construido y los resultados de la evaluación inicial. Si bien preferentemente nos centramos en la evaluación, una vez que los futuros profesores completan el cuestionario, se realiza con ellos la discusión de las soluciones y actividades de simulación (que se describen con detalle en el Anexo 2). En el Capítulo 6 se recogen algunos datos sobre la evolución del conocimiento matemático de la probabilidad de los futuros profesores participantes en el estudio.

O3. Evaluar, en una muestra de futuros profesores de educación primaria, algunos componentes del conocimiento especializado de probabilidad y del conocimiento de la probabilidad y los estudiantes, respecto a una selección de objetos incluidos en el currículo de primaria.

La novedad del tema conlleva que los futuros profesores de educación primaria han recibido una escasa formación en didáctica de la probabilidad. Los resultados de las escasas investigaciones previas (analizados en la Sección 4.3) sugieren que es posible que los futuros profesores tengan bajos conocimientos en didáctica de la probabilidad. Por tal motivo es de interés evaluar estos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad, que se definen con más precisión en el Capítulo 4. En el Capítulo 6 se analiza el cuestionario construido y los resultados de la evaluación, que, también, constituye un ejercicio dirigido a desarrollar el conocimiento didáctico de la probabilidad en los futuros profesores.

1.6. HIPÓTESIS INICIALES

Las hipótesis que planteamos se deben entender como expectativas previas, pues en algunos puntos no tenemos antecedentes. Estas hipótesis son las siguientes:

H1: Se espera mostrar en el análisis de libros de texto que sus contenidos no reflejan de forma adecuada los contenidos curriculares del Decreto de Enseñanza Mínimas, en el sentido de que no se considera la probabilidad en todos los cursos de la educación primaria. También se espera que el desarrollo de los diferentes significados de la probabilidad sea desigual; en particular que se presentan más contenidos referidos a los significados intuitivo y clásico, menos al frecuencial y ninguno al subjetivo y al axiomático.

Para formular esta hipótesis nos apoyamos en el estudio previo de libros de textos de educación secundaria de Ortiz (2002), en cuyo análisis se observó un tratamiento desigual de los diferentes conceptos y falta de tratamiento del significado subjetivo.

H2: En el cuestionario de evaluación que se analiza en el Capítulo 5, se espera detectar en una proporción importante de futuros profesores algunas dificultades relacionadas con el conocimiento de probabilidad (común y ampliado) ya descritas por diversos autores. En concreto se espera falta de percepción de la independencia, incapacidad para discriminar si algunos juegos son equitativos y para comparar probabilidades (para problemas correspondientes al nivel de operaciones formales), sesgo de equiprobabilidad y de representatividad; incorrecta interpretación de la probabilidad frecuencial e incorrecta restricción del espacio muestral en problemas de probabilidad subjetiva.

Esta hipótesis se sustenta en los resultados de investigaciones previas en España sobre el conocimiento de la probabilidad entre futuros profesores de educación primaria (Azcárate, 1995; Batanero, Cañizares y Godino, 2005; Contreras, 2011; Mohamed, 2012). Dichos trabajos sugieren debilidades en el desarrollo de pensamiento probabilístico por parte de los alumnos, la preponderancia de aspectos procedimentales y errores en la resolución de problemas sencillos. También nos apoyamos en los hallazgos de Serrano (1996), quien observó alta presencia de heurísticas y sesgos entre algunos futuros profesores de educación primaria. Otros estudios indican la persistencia de estos sesgos a pesar de la instrucción en alumnos universitarios cuando prevalece su intuición sobre su conocimiento (Díaz, 2003).

H3: Se espera que la actividad de resolución y discusión colectiva del cuestionario y posteriores actividades de simulación contribuya a una mejora en el conocimiento común y ampliado de los futuros profesores participantes en el estudio, que se hará visible en algunas preguntas del cuestionario que se analiza en el Capítulo 6.

El uso de la simulación como recurso didáctico se ha utilizado en experiencias de formación de profesores (Dugadle, 2001; Lee y Hollebrands, 2008; Contreras, 2011) y en experiencias de enseñanza para niños (Aspinwall y Tarr, 2001; Pratt, 2000, 2005; Serrano, Ortiz y Rodríguez, 2009; Lee, Angotti y Tarr, 2010). Estas investigaciones sugieren que las actividades de simulación proporcionan experiencia estocástica; a la vez que permiten familiarizar al futuro profesor con recursos didácticos para la enseñanza de la probabilidad.

H4: Se espera, que, a pesar de las citadas actividades de discusión del primer cuestionario y de simulación, el conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y el estudiante sea escaso en los profesores participantes

Esta hipótesis se basa en los resultados de las investigaciones sobre el conocimiento del contenido probabilístico y los estudiantes, dirigidas a profesores en ejercicio (Watson, 2001; Stohl, 2005) o a profesores en formación (Mohamed, 2012). Tales estudios (que no realizan actividades formativas) sugieren debilidades en diversos componentes del conocimiento didáctico; pensamos que el tiempo limitado disponible para nuestras experiencias no será suficiente para desarrollar este conocimiento en forma adecuada.

1.7. ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se ha organizado alrededor de tres estudios complementarios, cada una de los cuáles se describe brevemente a continuación y se desarrolla en más detalle en los restantes capítulos.

- *Estudio 1.* Análisis de la presentación de la probabilidad en el currículo de educación primaria, incluyendo los decretos oficiales y libros de texto (Capítulo 2). En este análisis se pone especial énfasis en determinar los significados de la probabilidad presentados en el currículo, utilizando para ello el estudio realizado en la Sección 1.4.

- *Estudio 2.* Evaluación del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria al inicio de la investigación, es decir, de los conocimientos matemáticos sobre probabilidad adquiridos en primer curso y a nivel preuniversitario. Se consideran tres componentes del modelo de Ball y colaboradores, conocimiento común, ampliado y especializado del contenido. Finalizado el estudio 2 se diseñó y realizó una actividad de discusión de las respuestas, que se describe en detalle en el Capítulo 4, para desarrollar el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria, haciendo énfasis en las dificultades y sesgos encontrados en un primer cuestionario.

- *Estudio 3.* Evaluación del conocimiento didáctico para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria al finalizar la actividad formativa citada en el punto anterior. En esta evaluación, además de comprobar, para algunos ítems del primer cuestionario, la evolución de los conocimientos de los participantes, se consideran otro componente del modelo de Ball y colaboradores (2008), conocimiento del contenido y los estudiantes.

Previo a los anteriores estudios se requirió la construcción de bases teóricas de la investigación, con el fin de delimitar el "conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad del futuro profesor de educación primaria". Se descompone en los puntos siguientes:

- Análisis de los fundamentos matemáticos de la probabilidad adecuados al nivel de formación de profesores de educación primaria, incluyendo el estudio de diversos significados actuales de la probabilidad, su problemática filosófica y didáctica (Sección 1.4).

- Análisis de la formación en probabilidad que reciben los futuros profesores de educación primaria que participarán en el estudio (Sección 4.4). Para ello se estudian los contenidos de probabilidad y su didáctica incluidos en la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria" de primer curso del grado de *Maestro de educación primaria* y los libros de texto utilizados por los estudiantes (puesto que los participantes son alumnos de segundo curso). También se describe con detalle la secuencia de actividades de evaluación, discusión de resultados y simulación que se llevaron a cabo, como parte de una práctica en la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", que sería el primer contacto de estos estudiantes con la didáctica de la probabilidad.

1.8. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA METODOLOGÍA

Como se ha indicado, nuestra investigación utilizará una metodología mixta, cuantitativa y cualitativa. A continuación, describimos las características específicas, muestras, variables y técnicas de análisis más relevantes en cada estudio.

Estudio curricular

En el Estudio 1, análisis curricular, predomina la metodología cualitativa. Se parte una concepción global fenomenológica, que trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades analizadas, en este caso, el libro de texto (Cook y Reichardt, 2000). Según las clasificaciones recogidas en Bisquerra (1989), el proceso de investigación seguido es inductivo, pues partimos del examen de casos particulares, aunque se desea descubrir algunas generalizaciones a partir del análisis sistemático de los documentos.

La población objetivo son los libros de texto de matemáticas de educación primaria y la muestra se reduce a dos colecciones completas de textos, elegida por ser las más utilizadas en el curso en que se realiza el análisis en los centros públicos de Andalucía.

Las variables dependientes son la presencia/ausencia de los diferentes objetos matemáticos, fijados en el significado de referencia de la probabilidad. Las variables independientes son la editorial que publica el libro y el ciclo educativo (1º, 2º o 3º) a que se dirige. Para identificar la presencia o ausencia de cada objeto matemático se utiliza análisis de contenido y análisis semiótico. Se adepta el método utilizado en la investigación de Cobo (2003), con los siguientes pasos:

1. Seleccionados los libros, y el capítulo correspondiente. se efectuaron varias lecturas cuidadosamente, para determinar los párrafos que constituirían la primera unidad de análisis.

2. Mediante un proceso cíclico e inductivo se comparó el contenido de dichos párrafos con los objetos matemáticos identificados en el significado de referencia, para determinar su presencia en los libros de texto. Estos elementos constituirían nuestras unidades secundarias de análisis. La clasificación se revisa con ayuda de los directores del trabajo y de algunos profesores visitantes.

3. Una vez que se llegó a una lista de los principales campos de problemas, definiciones, propiedades, representaciones, procedimientos y argumentos presentes en los libros, se procedió a analizar la forma en que se presentan y a buscar y describir el ejemplo más característico, para cada objeto.

4. Elaboración de tablas para resumir los resultados y obtener conclusiones sobre el significado de la probabilidad implementado en los libros analizados.

Estudios de evaluación

En los Estudios 2 y 3 hay un alto componente de cualitativo a nivel de los ítems, y un componente cuantitativo, pues se realiza análisis estadístico de las respuestas individuales a ítems y a nivel global en los cuestionarios.

Puesto que estos estudios están orientados al desarrollo del conocimiento de los participantes, además de hacia la evaluación, tienen algunos rasgos de la denominada investigación basada en diseño, ya que se utiliza el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales (Godino, 2013). Asimismo se trata de explicar y no solo describir cómo funciona el diseño en contextos reales. El propósito es investigar las posibilidades de mejora educativa, incluyendo en el diseño nuevas formas de aprendizaje para estudiarlas (de la Orden, 2007).

La población de interés en los Estudios 2 y 3 son los profesores en formación de educación primaria. La muestra será intencional, tomada de los estudiantes de la Universidad de Granada que cursen la asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”, del segundo curso en el Grado de Magisterio de educación primaria. Como se describirá en la Sección 4.4, estos estudiantes han cursado la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria”. De esta manera, garantizamos que los participantes en el estudio han estudiado previamente los contenidos de probabilidad que pretendemos evaluar.

Las principales variables son: (a) Variables cuantitativas dependientes: Puntuación total en el cuestionario y puntuaciones parciales sobre componentes del conocimiento matemático para la enseñanza evaluados); (b) Variables cualitativas dependientes: tipos de respuestas a cada ítem; principales justificaciones (en preguntas que requerían argumentación); principales estrategias de respuesta (en preguntas que implicaban un procedimiento). En estos estudios no hemos considerado variables independientes, se ha omitido la inclusión de factores que puedan explicar diferencias entre grupos de evaluados.

El Estudio 2 se descompone en los pasos siguientes:

- Construcción de un banco de ítems. Partiendo de la investigación previa se adaptaron o construyeron ítems que puedan servir para evaluar cada una de las unidades de contenido semántico de la variable.

- Determinación del instrumento de evaluación, siguiendo la metodología de Batanero y Díaz (2005). Una vez elaborado el banco de ítems, se seleccionaron los más adecuados para cubrir todas las unidades del contenido que constituyen la definición semántica de la variable y conseguir una prueba de extensión razonable. Cada ítem fue revisado por el equipo investigador en cuanto a su formato, redacción y adecuación del contenido, con la colaboración de dos profesores visitantes y otros profesores expertos en la didáctica de la probabilidad. Como resultado se obtuvo un instrumento (Cuestionario 1) que se analiza en el Capítulo 5 y se justificó su validez de contenido.

- Recolección de datos. Se recogieron las respuestas individuales de un total de 157 futuros profesores con el cuestionario obtenido. Los evaluados formaban parte de tres de los grupos de la asignatura “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” en el curso 2011-2012, dos de los cuales estaban a cargo de un mismo formador y uno a cargo de otro formador.

- Análisis de datos. Se codificaron y analizaron los datos, con técnicas cualitativas y cuantitativas que se describen en la siguiente sección. Los resultados se presentan en el Capítulo 5.

- Análisis de la idoneidad del cuestionario. La validez de contenido y las características psicométricas se estudian siguiendo a Batanero y Díaz (2005). Para el análisis de las características psicométricas del Cuestionario 1 se calcula el índice de dificultad y discriminación de los ítems; la fiabilidad (Alpha de Crombach; generalizabilidad) del cuestionario; las puntuaciones parciales y global en el cuestionario.

El Estudio 3 se descompone en los siguientes pasos:

- Selección de cuatro ítems del Cuestionario 1, entre aquellos en los cuáles los futuros profesores habían tenido mayor dificultad. Estos ítems servirían para evaluar el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes, a la vez que se desarrollaba algo el conocimiento del contenido y los estudiantes. Dos de estos ítems forman parte de la categoría conocimiento común en el Cuestionario 1 y dos del conocimiento ampliado.

- Redacción de preguntas orientadas a evaluar conocimiento común (o ampliado) y especializado del contenido, siguiendo las directrices de Godino (2009) para cada uno de estos cuatro ítems.

- Redacción de preguntas orientadas a evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes, siguiendo también las directrices de Godino (2009). Para ello se seleccionaron posibles respuestas de niños que se presentarían para cada uno de los cuatro ítems, de modo que se cubriesen los errores más comunes en los mismos. Las respuestas se tomaron entre las mismas dadas por los futuros profesores en el Cuestionario 1, incluyendo en cada ítem alguna respuesta correcta e incorrecta. El resultado de los pasos anteriores es un instrumento (Cuestionario 2) que se analiza y se justifica su validez de contenido.

- Recolección de datos utilizando el Cuestionario 2. El cuestionario fue respondido en parejas de futuros profesores, con la intención de conseguir mayor riqueza en sus respuestas, al desarrollar una discusión conjunta entre ellos. Participaron un total de 81 futuros profesores, conformando 39 parejas y un grupo de tres integrantes. Estos futuros profesores habían respondido al Cuestionario 1 y formaban parte de los dos grupos participantes en la Etapa 3.

- Análisis de la idoneidad del cuestionario siguiendo a Batanero y Díaz (2005). Debido al tamaño de la muestra evaluada (40 cuestionarios respondidos) este análisis es solo exploratorio. Dado el menor número de participantes en el Estudio 3, el análisis de las características psicométricas del Cuestionario 2 es más restringido; se calcula el índice de dificultad de los ítems y las puntuaciones en el cuestionario.

CAPITULO 2.

LA PROBABILIDAD EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA

2.1. INTRODUCCIÓN

Una vez presentado y justificado el problema de investigación, y analizado el objeto matemático probabilidad desde sus diversos significados, en este capítulo establecemos el significado institucional de referencia de nuestro trabajo, que será el significado pretendido de la probabilidad, en la educación primaria, es decir, el sistema de prácticas fijado para la planificación de un proceso de enseñanza (Godino, 2002).

En primera instancia presentamos los objetivos e hipótesis propuestos para el Estudio 1 (estudio del currículo). Seguidamente, revisamos las orientaciones oficiales del Ministerio de Educación español (MEC, 2006) que incluye por primera vez la probabilidad en todos los niveles de esta etapa y de la Junta de Andalucía (Consejería de Educación, 2007). Para tener un referente internacional, se hace una mención al currículo norteamericano (NCTM, 2000), que ha inspirado los anteriores, incluyendo, un breve análisis del proyecto GAISE (Franklin et al., 2007), que complementa a este último con sugerencias específicas para los contenidos de estadística y probabilidad.

En la Sección 2.4 exponemos un análisis de libros de texto vigentes en la Comunidad Autónoma de Andalucía, desde la publicación de esta normativa. Dentro de este análisis, primero resumimos sus antecedentes, luego describimos la muestra de libros de texto y la metodología de análisis. Para cada uno de los objetos matemáticos ligados a los significados de la probabilidad que se identificaron en los libros de textos, se analiza su presencia en los textos y se ilustra con un ejemplo. Con todo ello complementamos el significado institucional de referencia para nuestro estudio. Algunos resultados de este estudio se han reflejado en publicaciones, en Gómez y Contreras (2013), Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) y Gómez, Ortiz y Gea (en prensa).

2.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO 1

Como se ha indicado, el Estudio 1 tiene como finalidad completar la caracterización del significado institucional de referencia para esta investigación a partir de un análisis curricular. Este objetivo se descompone en los siguientes:

O1.1. Caracterizar el significado institucional del objeto matemático "probabilidad" en los documentos curriculares para educación primaria en Andalucía vigentes durante el curso 2011-2012, que fue el periodo en que se realizó el estudio con los futuros profesores

Estos documentos curriculares, están constituidos por directrices nacionales (MEC, 2006) y autonómicas (Consejería de Educación, 2007), referidas a organización del currículo, desarrollo de competencias, contenidos y criterios de evaluación. Estas directrices siguen vigentes en la fecha de lectura de la tesis puesto que no ha habido cambio de normativa.

El análisis del currículo pretendido según Cai y Howson (2013), determina qué se espera que aprendan los estudiantes, cuándo y cómo; en tal sentido, esta caracterización hace parte de nuestro significado de referencia. Además, lo compararemos con algunas directrices internacionales. Nos apoyamos en el análisis realizado de los diversos significados de la probabilidad en la Sección 1.4 para determinar cuáles se sugieren para los diferentes ciclos de la educación primaria.

O1.2. Describir el significado de la probabilidad presentado en una muestra de libros de texto para educación primaria. En particular, determinar cuáles de los significados descritos en nuestro análisis previo (Sección 1.4) se contemplan en cada ciclo educativo en estos libros de texto.

Puesto que las orientaciones curriculares nacionales y autonómicas son muy abiertas, el currículo queda más precisado en los libros de texto. Examinaremos dos series completas de libros de publicación reciente y amplia difusión analizando la presencia de los diferentes objetos matemáticos considerados en nuestro marco teórico. Este análisis mostrará si el desarrollo de cada uno de los significados de la probabilidad es similar en los textos o se privilegia uno sobre otro; asimismo se podrá comparar entre lo presentado en los textos y lo sugerido en las orientaciones curriculares.

O1.3. Caracterizar un significado de referencia a nivel curricular del objeto matemático "probabilidad" en la educación primaria en Andalucía, que sea la base en la construcción de los instrumentos de evaluación de conocimientos del profesor en nuestro trabajo.

La identificación de los objetos matemáticos asociados a cada concepto y cada significado actual de la probabilidad, en el currículo pretendido (documentos curriculares y libros de texto), servirá para fijar el significado pretendido en nuestro estudio; entendido como los conocimientos mínimos (conocimiento común del contenido) que el futuro profesor de educación primaria debe dominar para enseñar probabilidad. Asimismo, estos elementos de significado constituyen un referente para caracterizar el resto de componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad a alumnos de primaria. Por ello servirá de base para la construcción de los instrumentos de evaluación en los Estudios 2 y 3.

Para lograr estos objetivos, se identifica en los documentos curriculares y en los libros de textos los objetos matemáticos primarios, identificados en la caracterización de los diferentes significados expuestos en el Capítulo 1 (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático). Luego, se elaboran tablas mostrando los encontrados en el análisis, entendiendo que su presencia será diferenciada según el ciclo de la educación primaria.

Hipótesis

Las hipótesis planteadas inicialmente en el estudio curricular son las siguientes:

H1.1: *Se espera que nuestros resultados indiquen predominio del significado intuitivo de la probabilidad en el currículo.*

Debido a la edad de los niños y a que es su primer encuentro con la probabilidad, se ha de aprovechar sus ideas intuitivas, como paso previo al inicio de la formalización. Además un paso previo a la formalización es el aprendizaje del lenguaje del azar, por lo cual la aproximación intuitiva debe ser la predominante tanto en los documentos curriculares como en los textos.

H1.2: *Se espera una presencia alta de significado clásico de la probabilidad en el currículo.*

Hacemos esta hipótesis debido a la relación de este enfoque con los juegos de azar, que son muy familiares a los niños, sobre todo en el último ciclo de la educación primaria. Además, la aproximación clásica solo se aplica a espacios muestrales finitos, cuyos sucesos elementales son equiprobables; por tanto más sencillos para el niño.

H1.3: *Se espera que nuestros resultados indiquen cierta presencia del significado frecuencial*

Pensamos que esta aproximación será favorecida en los documentos curriculares y los libros de texto, al conectar estadística y probabilidad, ya que los dos temas se incluyen en las directrices curriculares a este nivel y también por su mayor campo de aplicación, respecto al significado clásico.

H1.4: Se espera que nuestros resultados indiquen baja presencia del significado subjetivo de la probabilidad en los documentos analizados

H1.5: Se espera que nuestros resultados indiquen ausencia del significado axiomático de la probabilidad en los documentos analizados.

Estas dos últimas hipótesis se basan en los resultados descritos en las investigaciones resumidas en la Sección 2.4.1 sobre la presencia de la probabilidad en libros de texto para educación secundaria. También en los resultados expuestos en el Capítulo 3 de las investigaciones sobre el desarrollo de razonamiento probabilístico, y en las características descritas para cada significado en la Sección 1.4.

Suponemos que nuestros resultados serán similares a los que observo Ortiz (2002) con diferencias en la presencia de algunos elementos, debidas al último cambio curricular (MEC, 2006) y a que este autor estudió textos de educación secundaria.

2.3. ORIENTACIONES CURRICULARES EN ESPAÑA

El currículo en España, está definido a nivel nacional por los Decretos de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), que se concretan luego a nivel autonómico. Esta tesis se desarrolla en la comunidad autónoma de Andalucía por lo cual presentamos primero las directrices de nivel nacional español y luego las de nivel regional. Algunos resultados parciales se han publicado en Gómez y Contreras (2013).

2.3.1. DECRETO DE ENSEÑANZAS MÍNIMAS

La enseñanza de las matemáticas para la educación primaria en España se organiza en cuatro bloques de contenido: Números y operaciones; medida: estimación y cálculo de magnitudes; geometría; tratamiento de información, azar y probabilidad. Este último bloque presenta contenidos explícitos de probabilidad para cada ciclo de formación, y también encontramos otras menciones en otros bloques temáticos, en concordancia con el carácter global e integrador del currículo:

> Además de las características tradicionalmente asignadas a las matemáticas, éstas también implican el tratamiento de la incertidumbre y mejoran la capacidad de enfrentarse a situaciones sin solución única y cerrada. La valoración del grado de certeza asociado a los resultados derivados de razonamientos válidos es uno de los logros de competencias básicas esperados en matemáticas. (MEC, 2006, p. 43059).

Se indica que los contenidos de este bloque tienen una vinculación con situaciones problemáticas reales y contribuye a la articulación del área de matemáticas con otras áreas de conocimiento. Se espera también que:

> El trabajo ha de incidir en forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones (MEC, 2006, p. 43096).

Contenidos

Los contenidos incluidos en el primer ciclo corresponden al significado intuitivo de la probabilidad y son los siguientes:

> Primer ciclo: Carácter aleatorio de algunas experiencias: Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad (MEC, 2006, p. 43098).

También se hace mención a los siguientes contenidos estadísticos que serán necesarios en el trabajo con la probabilidad en el significado frecuencial: “descripción verbal e interpretación de gráficos sencillos y la utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos” (MEC, 2006, p. 43098). Para el segundo ciclo se incluyen los siguientes objetos matemáticos propios del significado intuitivo.

> Segundo ciclo: Carácter aleatorio de algunas experiencias: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar. Confianza en las propias posibilidades, y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica (MEC, 2006, p. 43099).

Se añaden los siguientes contenidos estadísticos que corresponden al significado frecuencial:

> Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares” (MEC, 2006, p. 43099)

El documento continúa en la forma siguiente; en este caso los contenidos corresponden al significado clásico y al frecuencial.

> Tercer ciclo: Carácter aleatorio de algunas experiencias: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso. Valoración de la necesidad de reflexión, razonamiento y perseverancia para superar las dificultades implícitas en la resolución de problemas. Confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales (MEC, 2006, p. 43101).

Los recursos estadísticos sugeridos para el trabajo con el tema en este ciclo son los siguientes, que describen objetos matemáticos propios del significado frecuencial.

> Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. Obtención y utilización de información para la realización de gráficos (MEC, 2006, p. 43101).

La situación problemática común en los tres ciclos (que apareció en el enfoque intuitivo) es identificar tipos de sucesos o expresar grados de creencias en los mismos. También aparecen problemas relacionados con los juegos de azar (asociados al significado clásico), aunque no se explicita la idea de juego equitativo o reparto. Se sugiere el campo consistente en la descripción de tendencias en fenómenos naturales a partir de datos (significado frecuencial) cuando se hace mención a la recogida e información de tales datos. Se insinúa el estudio de sucesos donde la probabilidad puede cambiar por información disponible (significado subjetivo) cuando se hace mención a la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación.

Es común que este documento sugiera la argumentación basada en ejemplos y contraejemplos, siendo la única en el primer ciclo; mientras en los otros dos se incluye la inducción a partir de datos experimentales o simulados, así como la generalización. En la Tabla 2.1 se analizan los conceptos, propiedades y procedimientos presentes en las normativas, algunos de los cuáles son compartidos entre ciclos variando en el nivel de complejidad y en la Tabla 2.2 el resto de objetos matemáticos.

Criterios de evaluación

El Real Decreto propone los siguientes criterios de evaluación referidos a azar o probabilidad dentro de cada ciclo:

- *Primer ciclo*: La mención a la evaluación de la comprensión de la probabilidad en este ciclo es indirecta, en el siguiente criterio relacionado con la comprensión de gráficos, donde se indica que "también se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible" (MEC, 2006, p. 43098).

- *Segundo ciclo*: No hay mención explícita al azar o a la probabilidad. Sin embargo se evalúan la construcción correcta y la lectura adecuada de las distintas representaciones; para realizar un recuento de datos efectivo y representar su resultado y para describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares.

- *Tercer ciclo*: La comprensión de las ideas de azar y probabilidad se evalúan mediante el siguiente criterio: "Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado" (MEC, 2006, p. 43101). Se indica que se "comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en la experiencia." (MEC, 2006, p. 43101) Además, se repiten las recomendaciones respecto a la realización, lectura e interpretación de representaciones gráficas de un conjunto de datos.

La enseñanza de la probabilidad en la educación primaria en este Decreto apoya el desarrollo de tres capacidades matemáticas generales: (a) Utilizar el conocimiento matemático para comprender y valorar situaciones de la vida cotidiana; (b) apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana y otras disciplinas; y (c) adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas.

Competencias

La enseñanza de la probabilidad aporta igualmente al desarrollo de competencias básicas mencionadas en el decreto (MEC, 2006): Aporta en el *conocimiento e interacción con el mundo físico* porque hace posible una mejor comprensión y descripción más ajustada del entorno. Contribuye a la adquisición de competencia en *tratamiento de la información y competencia digital*. Fomenta el desarrollo de *competencia en comunicación lingüística* en la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y su uso adecuado en la descripción de razonamientos y procesos. Aporta a la *competencia social y ciudadana* mediante la aceptación de otros puntos de vista distintos al propio. Asimismo, aporta a la *autonomía e iniciativa personal* mediante los contenidos asociados a la resolución de problemas probabilísticos: la planificación en detalle de la situación; la gestión de los procesos de resolución; y la evaluación periódica del proceso.

2.3.2. ORIENTACIONES CURRICULARES DE LA JUNTA DE ANDALUCÍA

El currículo de primaria en Andalucía (Consejería de Educación, 2007) hace énfasis en la transversalidad en matemáticas a partir de tres núcleos temáticos: la resolución de problemas, el uso de los recursos TIC para la enseñanza y aprendizaje, y la dimensión histórica, social y cultural. El núcleo temático *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* es conectado con otras materias, entre ellas Conocimiento del medio natural, social y cultural. Además adopta los contenidos del decreto de enseñanzas mínimas, proponiendo tareas como la planificación para la recogida de información y el uso de técnicas de recuento y agrupación, que más adelante se pueden potenciar para el entendimiento de la probabilidad desde el enfoque frecuencial.

La introducción de las nociones de probabilidad e incertidumbre se sugieren explícitamente a través de juegos de azar; cuyo criterio de evaluación involucra objetos matemáticos ligados al significado clásico:

> Que el alumnado sea capaz de razonar sobre los posibles resultados de un experimento aleatorio sencillo a la vez que pueda asignar probabilidades a sucesos equiprobables o no, utilizando distintas estrategias sobre técnicas de conteo (Consejería de Educación, 2007, p.50).

Al igual que en el Real Decreto, se lee entre líneas, el abordaje de los significados intuitivo, frecuencial y subjetivo en otro criterio de evaluación relacionado con la capacidad de deducción de conclusiones y estimaciones a partir de datos publicados en distintos medios de comunicación. La Junta de Andalucía sugiere el uso de las TIC para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en matemáticas, haciendo mención explícita al concepto de simulación que está tácito en el Decreto de Enseñanzas Mínimas. Adicionalmente, el análisis de funcionamiento de estas herramientas, también permite el desarrollo de nociones de incertidumbre, de variabilidad y la diferencia y pertinencia en la asignación de probabilidades con los diferentes significados.

Tabla 2.1. Objetos matemáticos presentes en el currículo de Educación Primaria

	Sign.	Objeto matemático	Ciclo 1°	2°	3°
Situac. Prob.	Int	SPI. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos	x	x	x
	Cla	SPC. Previsión de probabilidad en juegos de azar		x	x
	Frec	SPF. Prever tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados		x	x
	Subj	SPS. Sucesos donde la probabilidad cambia por información disponible	x	x	x
Conceptos	Int	CI1. Azar y variabilidad	x	x	x
		CI2. Suceso; seguro, posible e imposible	x	x	x
		CI3. Posibilidad, grado de creencia	x		
	Cla	CC1. Juego de azar		x	x
		CC2. Casos favorables; casos posibles		x	x
		CC3. Probabilidad			x
	Frec	CF1. Colectivo (población); atributos	x		
		CF2. Ensayo; ensayos repetidos		x	x
		CF3. Frecuencia (absoluta, relativa)		x	x
		CF4. Valor estimado de la probabilidad			x
		CF5. Simulación			x
	Subj	CS1. Suceso incierto	x	x	x
		CS2. Probabilidad como grado de creencia personal		x	
Propiedades	Int	PI1. Impredecibilidad del resultado	x	x	x
		PI2. Posible: cualquier resultado de un experimento	x	x	x
		PI3. Imposible: nunca se verifica	x	x	x
		PI4. Seguro: siempre ocurre	x	x	x
		PI5. Calificable comparando	x	x	x
	Cla	PC1. Número de resultados finito y numerable		x	x
		PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales			x
		PC3. C. favorables: resultados que favorecen		x	x
		PC4. C. posibles: todos los resultados		x	x
		PC5. Probabilidad: valor objetivo, calculable		x	x
		PC6. Regla de Laplace			x
	Frec	PF1. Colectivo: semejantes que difieren en atributos observables	x	x	x
		PF2. Atributos equiprobables o no	x	x	x
		PF3. Probabilidad: valor objetivo hipotético, estimable			x
		PF4. Simulación: sustitución de un experimento por otro equivalente			x
	Subj	PS1. Suceso incierto: impredecible aunque se tiene información adicional		x	x
		PS2. Probabilidad: condicionada por un sistema de conocimientos		x	x
Procedimientos	Int	PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas	x	x	x
		PRI2. Reconocer la impredicibilidad de un resultado	x	x	x
		PRI3. Reconocer tipos de sucesos	x	x	x
		PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades	x	x	x
		PRI5. Comparar cualitativamente posibilidades	x	x	x
	Cla	PRC1. Analizar juegos de azar	x	x	x
		PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles		x	x
		PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables		x	x
		PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables			x
		PRC5. Comparar probabilidades con razonamiento proporcional		x	x
		PRC6. Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples			x
	Frec	PRF1. Enumerar o discriminar atributos	x	x	x
		PRF2. Calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos			x
		PRF3. Representar distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica		x	x
		PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimento compuesto)		x	
		PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos			x
		PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación			x
		PRF7. Simular con tecnología un experimento aleatorio			x
	Subj	PRS1. Analizar experimentos cuya probabilidad depende de información personal	x	x	x

Para sintetizar, en las Tablas 2.1 y 2.2 se presentan los objetos matemáticos que aparecen explícita o implícitamente en las orientaciones curriculares. Muchos de estos objetos sólo se usan en este nivel educativo, sin llegar a formalizarlos o definirlos. Observamos que, el Real Decreto incluye temáticas asociadas al significado intuitivo de la probabilidad en el primer ciclo (niños de 6 y 7 años); otras que permiten conectar la estadística con la probabilidad e introducir los significados subjetivo y frecuencial en el segundo ciclo (niños de 8 y 9 años); y las que formalizan el significado clásico y frecuencial en el tercer ciclo (niños de 10 y 11 años).

La Junta de Andalucía adiciona contenidos de iniciación al significado clásico de probabilidad y amplía los contextos de aplicación, haciendo énfasis en los juegos de azar y el entorno cercano al niño como fuente de situaciones problema.

En relación con los conceptos, los estudiantes tienen contacto con los principales, analizados en el Capítulo 1. Además, se pretende que adquieran destrezas de cálculo e interpretación de las probabilidades, y uso adecuado del lenguaje probabilístico de uso cotidiano y algunos términos especializados. La aplicación con situaciones de la vida cotidiana les muestra el carácter interdisciplinar y la necesidad del pensamiento probabilístico y su lenguaje, en contextos públicos y privados.

Tabla 2.2. Lenguaje y argumentos presentes en el currículo de Educación Primaria

			Ciclo		
Tipo	Sign.	Objeto matemático	1°	2°	3°
Lenguaje	Todos	L1. Expresiones cotidianas, incluido lenguaje numérico	x	x	x
	Clásico y	L2. Expresiones formales		x	x
	Frecuencial	L3. Simbólico			x
	Frecuencial	L4. Tabular		x	x
		L5. Gráfico	x	x	x
Argumentos	Todos	A1. Ejemplos y contraejemplos	x	x	
		A2. Generalización			x
	Frecuencial	A3. Uso de gráficos para comprobación de propiedades	x	x	
		A4. Inductivo, a partir de datos	x	x	
		A5. Simulación			x

2.3.3. PRINCIPIOS Y ESTÁNDARES CURRICULARES NORTEAMERICANOS

Los estándares sugeridos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000) indican lo que se espera que conozcan y hagan los estudiantes en Estados Unidos; relacionados con los *contenidos* (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, y análisis de datos y probabilidad) y formas de adquisición y uso de dichos contenidos, denominados *estándares de procesos* (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones, y representación).

Uno de los estándares de contenido es el *Análisis de datos y probabilidad* al cual se dedica entre un 10 y 15% (NCTM, 2000, p. 32) del total disponible para la enseñanza de las matemáticas. Se indica que todos los estudiantes deberían al finalizar su educación escolar: (a) Formular preguntas acerca de diferentes temas; recolectar y organizar datos relevantes para responder esas preguntas; (b) seleccionar y usar apropiadamente métodos estadísticos para analizarlos; (c) hacer y evaluar inferencias y predicciones basadas en el análisis, y (d) comprender y usar los conceptos básicos de probabilidad.

La probabilidad se incorpora desde el pre-escolar (5 años) y continúa a lo largo de toda la escolaridad. Nosotros analizamos los correspondientes a los niveles equivalentes a la Educación Primaria en España:

- *Desde pre-escolar hasta el grado 2°* (5 a 7 años): Los niños deberían poder discutir sobre sucesos con expresiones como *más probable* o *menos probable* en relación con sus experiencias propias
- *Grados 3° a 5°* (8 a 10 años): Los niños deberían discriminar sucesos probables o improbables y discutir el grado de probabilidad usando expresiones como seguro, igualmente probable e improbable. Deben predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos y comprobar sus predicciones a través de la experimentación, así como comprender que podemos representar la probabilidad por un número comprendido entre 0 y 1. También debieran proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos y diseñar estudios relacionados.
- *Grados 6° a 8°* (11 a 13 años): Comprender y utilizar la terminología apropiada para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes. Utilizar la proporcionalidad y comprensión básica de probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones. Calcular probabilidades de sucesos sencillos, utilizando listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.

NCTM (2000) sugiere que las ideas sobre probabilidad en la primera etapa deberían ser informales, centrándose en los juicios que emiten los niños a partir de sus propias experiencias (noción subjetiva), acompañados de actividades que refuercen concepciones relativas a otros estándares, principalmente números y geometría, y los pongan en contacto con experimentos aleatorios, como girar ruletas sencillas o lanzar dados (noción frecuencial). También se sugiere el contacto con las nociones de probabilidad en otras situaciones sencillas del cotidiano

En la siguiente etapa (8 a 10 años) deberían ser frecuentes las investigaciones concernientes a datos, desde rápidos sondeos hasta proyectos de varios días (observacionales o experimentales, mediante medición o entrevista), pues los niños empiezan a ser más conscientes del mundo que los rodea, y pueden abordar algunas cuestiones con influencia en sus decisiones. Estas experiencias le permitirán darse cuenta que aunque no puedan determinar un resultado particular, pueden pronosticar la frecuencia de varios resultados, representando con cero la probabilidad de un suceso imposible, con uno la de un suceso seguro y con fracciones comunes la de sucesos que no son imposibles ni seguros.

En los niveles medios (11 a 13 años) los contenidos de probabilidad aumentan facilitando el desarrollo de destrezas con la proporcionalidad y promoviendo el uso de diversas representaciones, debido a la comprensión de fracciones, decimales y proporciones. Las nociones de azar desarrolladas en las etapas previas en conjunción con el conocimiento de números y operaciones permite determinar probabilidades en situaciones más complejas, aunque sigan tratando experimentos sencillos (de una o dos etapas); de esta manera el significado intuitivo de la probabilidad se va formalizando hacia otros significados.

Por otra parte, se promueve el uso del lenguaje adecuado (sucesos mutuamente excluyentes, complementarios) y de formas alternas de obtener y presentar los resultados (como el diagrama de árbol, listas organizadas y modelos de área para calcular la probabilidad de sucesos compuestos de dos etapas). NCTM resalta el papel de la tecnología como apoyo en la superación o evasión de ideas erróneas, tanto con muestras grandes como con muestras pequeñas; llamando la atención en que las simulaciones con ordenador pueden ser útiles con un buen acompañamiento del profesor para entender los procesos internos y conservando las experiencias con datos reales.

En resumen, la propuesta de NCTM (2000) favorece el significado intuitivo de la probabilidad en edades tempranas (de 5 a 7 años); la asignación numérica de probabilidades y la obtención de probabilidades frecuenciales en la etapa siguiente (de 8 a 10 años) y asimismo familiarizarlo con la importancia de los procesos de muestreo, recolección de datos y toma de decisiones basadas en esos datos. Los cursos para niños de 11 a 13 años se orientan al reconocimiento de la aleatoriedad y significado intuitivo de la probabilidad, finalizando con la introducción de la definición clásica de probabilidad con sucesos sencillos (diagrama en árbol, proporcionalidad).

Cabe notar que un estudio del currículo implementado en Estados Unidos de 1996 a 2000 y a 2003 muestra un notable incremento de la estadística, pero que “el trabajo de la probabilidad en la escuela primaria ha sido más limitado y no ha sido tan exitoso - tal vez debido a la falta de comprensión de los profesores” (Cai y Howson, 2013, p. 963).

Proyecto GAISE

El proyecto GAISE (Franklin et al., 2007), realizado por la Asociación Americana de Estadística (ASA) y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) completa los estándares del NCTM (2000) proporcionando un marco conceptual para la educación estadística.

La probabilidad se presenta como una herramienta esencial para la estadística, sugiriendo que a nivel escolar el razonamiento probabilístico de nivel intuitivo es suficiente para el desarrollo de pensamiento estadístico. Al finalizar la etapa escolar el estudiante debe haber utilizado nociones de aleatoriedad, aleatorización, predicción en el largo plazo, variación esperada en muestras grandes, detección de diferencias debidas al azar (con relación a las debidas a otras causas). Este marco contempla tres niveles jerárquicos de desarrollo que no están ligados a la edad, sino a las experiencias de aprendizaje:

- En el nivel A, el profesor indica paso a paso los procesos, el tipo de situaciones problema se relaciona con el entorno cercano de los niños, los contenidos están orientados a mostrar la variabilidad al interior de un grupo, sin interés en generalizar ni en leer más allá de los datos. Al finalizar este nivel el niño debe haber desarrollado ideas básicas de probabilidad, entendiendo que es una medida de la posibilidad o de la certeza que algo ocurrirá. Los sucesos deben verse como subyacentes en un continuo desde lo imposible hasta lo seguro, encontrando en los intermedios gradaciones cualitativas de probable (menos, igual o más). Los estudiantes deben aprender a asignar informalmente números a la verosimilitud de un suceso.

- En el nivel B, la actividad es guiada por el profesor, los estudiantes empiezan a proponer sus propias preguntas, los contenidos están orientados a mostrar la variabilidad de un grupo a otro además de posibles relaciones de covariación entre dos variables en un mismo grupo. Al finalizar este nivel, el alumno usa propiedades de las distribuciones, calcula e interpreta en forma básica medidas de variación conjunta y de variabilidad entre grupos, reconoce el error de muestreo y reconoce la posibilidad de leer más allá de los datos. El contexto incluye experimentos comparativos sencillos (usando aleatorización, asignación aleatoria al grupo).

- En el nivel C, que no sería propio para la educación primaria, la actividad es supervisada por el profesor, los estudiantes proponen sus propias preguntas, los contenidos están orientados al ajuste de un modelo. Al finalizar este nivel el alumno entiende las distribuciones; compara la variabilidad de un grupo con la de otro; describe y cuantifica el error de muestreo; distingue entre conclusiones de estudios muestrales y de estudios experimentales; es capaz de leer más allá de los datos.

En los últimos niveles la estadística usa la probabilidad, pero no es un objetivo explícito de aprendizaje y solo se requieren los conceptos necesarios para el entendimiento del razonamiento inferencial. No comentamos más este documento pues los contenidos inferenciales van más allá de los adecuados para la educación primaria.

2.4. LA PROBABILIDAD EN LOS TEXTOS DE PRIMARIA

Para completar el estudio curricular, se ha realizado un análisis de dos series completas de libros de texto actuales, por ser uno de los recursos más utilizado dentro y fuera del aula.

2.4.1. ANTECEDENTES

Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007). Estos libros son un producto del proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1991), es decir, la adaptación del conocimiento matemático formal a conocimiento matemático para ser enseñado.

Los libros de texto que usa el niño son uno de los principales recursos educativos, ya que muchas de decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar con los niños están mediadas por ellos (Stylianides, 2009). Cordero y Flores (2007) indican que determinan con frecuencia el discurso matemático escolar, y prácticamente regula la enseñanza y el aprendizaje, debido en parte a las creencias de los actores del sistema didáctico. Por otro lado, puesto que la probabilidad se puede presentar desde diferentes significados (Batanero y Díaz, 2007), también es importante analizar si los libros de texto los tienen en cuenta de una forma equilibrada y adecuada a la edad del niño.

Respecto a los estudios previos sobre contenidos probabilísticos en libros de texto de matemática, son muy escasos y evidencian la prevalencia del cálculo de probabilidades sobre la comprensión conceptual o desarrollo de razonamiento probabilístico, y la baja articulación entre los diversos significados, como resumimos a continuación.

Ortiz (2002) analizó el significado de conceptos probabilísticos y sus propiedades en una muestra de 11 libros de texto españoles para alumnos de 14-15 años, que abarcaba el período 1975-1991. En todos los libros se presentaban los significados clásico y frecuencial casi siempre de manera formal; una minoría presentaba el significado subjetivo. Aunque la mayoría introducía el concepto de espacio muestral y la frecuencia relativa de forma correcta, sólo algunos contemplaban los tres aspectos subyacentes en la idea de aleatoriedad, las propiedades de la frecuencia relativa, la probabilidad condicionada o la variable aleatoria y hubo gran variabilidad en la presentación de las operaciones entre sucesos. El autor también ilustra algunos sesgos en los significados de la probabilidad presentados en los libros analizados e indica que el profesor debe mantener una permanente vigilancia epistemológica en el uso de textos para evitar su transmisión a los alumnos.

Azcárate y Serradó (2006) analizaron el contenido de probabilidad en cuatro series de libros de texto de educación secundaria obligatoria, todos los cuáles establecen inicialmente sus objetivos e introducen una actividad inicial para motivar y evaluar los conocimientos previos de los estudiantes. Encuentran diferencias en el desarrollo, pues mientras dos editoriales organizan los contenidos de forma lineal, comenzando con las nociones teóricas y acabando con actividades de aplicación, las organización en las otras dos es helicoidal, alternando nociones teóricas y actividades basadas en recursos manipulativos y trabajo cooperativo. Este estudio se completa con Cardeñoso, Azcárate y Serradó (2005) y Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2005). Los autores concluyen que las relaciones entre los significados frecuencial y clásico no se formalizan, con presencia mayoritaria del clásico en unas editoriales y del frecuencial en otras.

Estas investigaciones sugieren la posibilidad de un tratamiento también incompleto o no relacionado de los diversos significados de la probabilidad en los textos de educación primaria, que tratamos de valorar en nuestro estudio.

2.4.2. MUESTRA DE TEXTOS Y CRITERIOS DE SELECCIÓN

La selección de los libros de texto a analizar se basó en una consulta electrónica en la web de la Consejería para la Educación, de la Junta de Andalucía, eligiendo las dos editoriales más utilizadas en los centros públicos para el curso 2011-2012[1]. Cada editorial tiene uno o dos proyectos vigentes, dependiendo del ciclo; nuestra muestra intencional está constituida por los siguientes libros de texto, a cada uno de los cuales asignamos un código que será usado en adelante:

- Serie 1: Editorial Anaya:

  [T1]. Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T. y Cid, O. (2011). Matemáticas 2. Proyecto "Una a una".

  [T2]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2008). Matemáticas 3. Proyecto "Abre la puerta", reedición 2011.

  [T3]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. y Martínez, L. (2008). Matemáticas 4. Proyecto "Abre la puerta", reedición 2011.

  [T4]. Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2009). Matemáticas 5. Proyecto "Abre la puerta".

  [T5]. Ferrero, L., Gaztelu, I. y Martín, P. (2009). Matemáticas 6. Proyecto "Abre la puerta".

[1]Consulta hecha en www.juntadeandalucia.es/educacion/vscripts/libros/index.asp, noviembre de 2011

- Serie 2: Editorial SM:

[T6]. Labarta, P., Santaolalla, E., Ferrandíz, B. y Galve, R. (2011) Matemáticas. 2 Primaria. Conecta con Pupi, reedición 2012.

[T7]. Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). Matemáticas 3º. Proyecto Tirolina, reedición 2011.

[T8]. Peña, M., Aranzubía, V. y Santaolalla, E. (2008). Matemáticas 4°. Proyecto Tirolina, reedición 2011.

[T9]. Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V. y Sanz, B. (2009). Matemáticas 6º, Proyecto Timonel, reedición 2010.

[T10]. Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J. y Pérez, E. (2009). Matemáticas 6º, Nuevo proyecto Planeta Amigo.

2.4.3. MÉTODO Y VARIABLES ANALIZADAS

La faceta epistémica del enfoque ontosemiótico ha sido utilizada para el análisis de los libros de texto en diversas investigaciones sobre educación estadística, por ejemplo, sobre medidas de posición central (Cobo, 2003; Mayén, 2009), probabilidad en educación secundaria (Ortiz, 2002), y distribución normal (Tauber, 2001). Este análisis ha permitido identificar los significados institucionales de referencia y prever la presencia de conflictos potenciales en el aprendizaje del objeto matemático de interés.

El análisis de libros de texto que se presenta en este capítulo usa esta faceta y adapta la metodología de Cobo (2003):

1. Elaboración de una lista de objetos matemáticos (situaciones problema, elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) a partir de un análisis epistémico del significado de la probabilidad según los lineamientos curriculares españoles (Tablas 2.1 y 2.2). Esta lista se determina mediante sucesivas revisiones de los documentos curriculares, en modo cíclico e inductivo.

2. Identificación de las páginas o los capítulos de los libros de texto donde se incluyen temas de azar o probabilidad. División del texto en secciones independientes (párrafos, ejemplos, ejercicios) que se toman como unidades de análisis.

3. Establecimiento de la presencia de cada uno de los objetos matemáticos del significado curricular, a través de la comparación del contenido de estas páginas con la lista elaborada en el paso 1. Sí aparece alguno nuevo se incluye en una nueva lista.

4. Selección de ejemplos para ilustrar los objetos matemáticos presentes en el libro de texto.

5. Elaboración de tablas que resumen los contenidos en cada libro de texto, cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el significado de referencia en estas colecciones.

A continuación presentamos los resultados del análisis para cada uno de los tipos de objetos matemáticos descritos en la Sección 1.3. En primer lugar, resumimos los objetos matemáticos observados en relación con el lenguaje y los argumentos, teniendo en cuenta que son compartidos para dos o más significados de la probabilidad. En segundo lugar, exponemos los objetos matemáticos observados en relación con los demás tipos de objetos, clasificados de acuerdo con el significado de la probabilidad al que correspondan, siguiendo la caracterización hecha en la Sección 1.4. Cada sección concluye con una tabla de resumen de los objetos encontrados en los libros de texto para cada ciclo en cada editorial.

2.5. LENGUAJE

En los Decretos de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006) se sugiere transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la etapa a asignar algunas probabilidades sencillas. Consideraciones similares se realizan en programas de otros países (p. e. NCTM, 2000).

El uso adecuado de elementos lingüísticos facilita un aprendizaje significativo y el desarrollo de un razonamiento probabilístico acorde con las expectativas curriculares. Los textos de primaria contienen representaciones de tipo diverso: verbal, numérico, simbólico, tabular y gráfico.

El lenguaje matemático es fundamental en el enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que postula que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje, que es, a la vez, instrumento representacional y operativo. Los autores también indican la presencia de posibles conflictos semióticos al interpretar el lenguaje matemático, entendiendo por tales “cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)” (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

A continuación analizamos diferentes tipos de lenguaje en los textos; algunos resultados parciales se han publicado en Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013).

2.5.1. EXPRESIONES COTIDIANAS, FORMALES Y SIMBÓLICAS

En primer lugar se analizaron expresiones verbales, para las cuáles Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías: 1) palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano; 2) palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos, y 3) palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Como veremos, en nuestro estudio la mayoría de los vocablos pertenecen a las dos últimas categorías.

L1 y L2. Expresiones verbales (cotidianas y formales)

Identificamos 70 expresiones ligadas a la probabilidad en los textos analizados, que hacen alusión a algunos de los conceptos probabilísticos, a sus propiedades, o a procedimientos asociados, y a significados diferenciados de la probabilidad.

Tabla 2.3. Expresiones verbales incluidas en los libros de texto

Concepto	Expresión verbal	Significado a que se asocia
Aleatoriedad	Acertar, Adivinar	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Aleatoria	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Asegurar resultado	Frecuencial, intuitivo
	Azar	Intuitivo
	No saber	Frecuencial, intuitivo
	Saber qué saldrá	Clásico, intuitivo
	Saber de antemano	Clásico
	Saber resultados posibles	Clásico
	Sin mirar	Clásico, intuitivo
	Suerte	Clásico, intuitivo
Espacio muestral	Cuántos	Clásico, frecuencial
	Tabla (de doble entrada)	Clásico
	Todos los posibles; formas posibles	Clásico
Esperanza matemática	Apostar	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Estimar	Frecuencial
	Fiable. Predecir	Frecuencial
	Juego (Juego) justo	Clásico, frecuencial, intuitivo
Experimento aleatorio	Coger/sacar objeto	Clásico
	Datos	Frecuencial
	Distribuir cartas	Clásico
	Elegir/extraer	Clásico, intuitivo
	Experiencia	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Girar peonza/ruleta	Clásico
	Juego de pares y nones	Intuitivo
	Lanzar dado/moneda	Clásico
	Observar	Frecuencial
	Parchís; Sorteo (lotería)	Clásico
	Sacar (salir) bola/carta	Clásico
	Sacar (salir) resultado	Frecuencial
	Situación	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Tabla (de datos)	Frecuencial
	Tirar (lanzar) chapa, dardo	Frecuencial
Probabilidad	*Cálculo de probabilidades*	Clásico
	Comparar probabilidad	Clásico
	Medir, valorar	Clásico
	Ocurrir sucesos	Clásico, frecuencial, intuitivo
	(Nº. de) posibilidad(es) entre	Clásico
	Posibilidad	Intuitivo
	Probabilidad	Clásico, frecuencial
	Seguridad	Intuitivo
Suceso y tipos	Bastante/poco probable	Intuitivo
	Casos favorables/casos posibles	Clásico
	Hay más/tantas/menos posibilidad	Intuitivo
	Más fácil de conseguir	Clásico
	Más, menos, muy probable	Intuitivo
	Ocurre siempre/a veces/ nunca	Intuitivo
	Posibles resultados	Intuitivo
	Probablemente	Intuitivo
	Resultado	Intuitivo
	Seguro posible/imposible	Clásico, frecuencial
	Suceso	Intuitivo
	Suceso muy/igual/poco probable	Clásico, frecuencial, intuitivo
Variable aleatoria	*Estadísticas*	Frecuencial
	Probabilidad estimada	Frecuencial

La Tabla 2.3 muestra estas expresiones agrupadas según el concepto probabilístico al que hacen referencia, e indicando los significados de la probabilidad a los que se asocia en estos libros de texto; para distinguir las expresiones cotidianas de las formales resaltamos estas últimas con cursiva. Esta diversidad de términos pudiera aumentar la dificultad del tema, sobre todo si se utilizan términos del lenguaje cotidiano con otra acepción; por ejemplo, en el lenguaje ordinario el término seguro a veces se emplea para referirse a un suceso de probabilidad cercana a uno, mientras que en matemáticas, siempre indica un suceso de probabilidad uno.

Los conceptos con mayor riqueza de lenguaje verbal son el experimento aleatorio, los sucesos y sus tipos, y la aleatoriedad. La mayoría de expresiones ligadas a experimento aleatorio y aleatoriedad son verbos (asociados con procedimientos) y las ligadas a los sucesos son adjetivos (propiedades de la tipología de sucesos).

La mayor parte de las expresiones se refieren al significado clásico, habiendo casi el mismo número de expresiones asociadas al significado intuitivo. Pocas expresiones están asociadas al significado frecuencial, de poco peso (o nulo) en las editoriales, a pesar de recomendarse en el currículo. No se identificaron expresiones que hicieran alusión al significado subjetivo; debido a que las pocas situaciones asociadas a este significado están formuladas de manera que el niño las relacione con el intuitivo o el frecuencial.

Un resumen se presenta en la Tabla 2.4; observamos que las expresiones matemáticas específicas son pocas, y que de acuerdo a las normativas españolas el lenguaje de azar se incluye en todos los ciclos. Asimismo, se concluye que la Serie 1 presenta un mayor uso de lenguaje formal y más riqueza verbal en general. Al igual que el estudio de Ortiz (2002) con textos de secundaria, observamos más riqueza de lenguaje verbal referido a experimento aleatorio, aleatoriedad, sucesos y sus tipos, que con respecto a conceptos más avanzados.

Tabla 2.4. Número de expresiones según tipología incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Expresiones cotidianas	4	6	26	18	19	21
Expresiones específicas de aleatoriedad y probabilidad			10	4	12	6
Expresiones específicas de los juegos de azar	1	2	8	6	7	7

Lenguaje numérico

En los libros analizados es frecuente el lenguaje numérico, especialmente números enteros, fracciones y decimales.

Los números enteros se introducen desde primer ciclo con función nominal o numérica. En el primer caso, el entero representa un valor de la variable aleatoria de interés o un suceso en el experimento; por ejemplo, al preguntar “*¿Cuál es la probabilidad de sacar un 3 al lanzar un dado de parchís? […]¿y un número menor que 7?*” ([T10], p. 215). En el segundo caso, el entero representa un conteo, ya sea de casos favorables o posibles en el significado clásico; o de frecuencias absolutas en el significado frecuencial.

Las fracciones se utilizan desde segundo ciclo, principalmente para representar el valor de la probabilidad o la frecuencia. Un ejemplo es el siguiente: *"La probabilidad de que [Ana] saque una varilla azul es 7/10"* ([T10], p. 215). En algunos casos, desde el tercer ciclo, se hace la equivalencia de estas fracciones con números decimales; como el siguiente ejemplo en la estimación frecuencial de la probabilidad: "P*robabilidad estimada de que mañana no falten menos de 3 […] 0,67*" ([T5], p. 211).

En ambas editoriales los números enteros se utilizan en todos los ciclos (Tabla 2.5), mientras que la representación con números decimales, de acuerdo al currículo, se retrasa hasta tercer ciclo y solo está presente en la Serie 1. Asimismo, la Serie 2 presenta un mayor uso de fracciones para representar probabilidades o frecuencias relativas en el tercer ciclo.

Tabla 2.5. Tipos de números incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Números enteros	x	x	x	x	x	x
Números decimales					x	
Fracción representa probabilidad			x		x	x
Fracción representa frecuencia relativa			x		x	x

L3. Lenguaje simbólico

La mayor parte del lenguaje simbólico es común con otros bloques de contenido y se introduce en el ciclo en que el niño lo aprende o en el siguiente. Por ejemplo, el símbolo de la suma (+) se utiliza desde segundo ciclo, para calcular el número de casos posibles en un suceso compuesto o para obtener los valores posibles en un experimento compuesto sencillo. La igualdad (=) se usa también desde segundo ciclo; por ejemplo, como símbolo de equivalencia entre dos fracciones, o entre una fracción y un número decimal (Figura 2.1). La desigualdad se encontró solo en un texto, para expresar relaciones de orden en la comparación de probabilidades: "*Como* $\frac{7}{10} > \frac{2}{10}$ *, es más probable que Rebeca saque una varilla azul*" ([T8], p. 218).

	Frecuencia absoluta (aciertos)	Total de preguntas del test	Frecuencia relativa
María	14	16	$\frac{14}{16} = 0{,}875$

Figura 2.1. Uso de lenguaje tabular y simbólico ([T10], p. 210)

En la Serie 1 se introduce lenguaje simbólico específico de la probabilidad; éste es muy variado e incluso complejo con relación al nivel de enseñanza. En particular, hemos observado el uso combinado de letras y notación funcional, aunque sólo en los textos del último curso, combinándolo con descripciones en lenguaje verbal, esquemas o gráficos, para iniciar la formalización del tema. Un ejemplo al formalizar la asignación clásica de probabilidad se muestra a continuación, donde la flecha simboliza representación, de manera que "P" (el ostensivo que la precede, significante) significa "probabilidad de un suceso" (el ostensivo que la antecede, significado). La igualdad simboliza asignación numérica, mediante la regla de Laplace, es decir, una fracción cuyos términos están descritos en lenguaje verbal.

Probabilidad de un suceso → $\mathrm{P} = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos posibles}}$ ([T5], p. 208)

En otro ejemplo, que se muestra a continuación, los símbolos representan operaciones o equivalencias: *P* denota probabilidad estimada del suceso de interés; la primera igualdad representa la asignación hecha a *P*, la fracción, frecuencia relativa del suceso. La segunda igualdad indica que la fracción también corresponde a la operación división (representado con el ostensivo “:”). El símbolo ≅ indica una probabilidad estimada, *P* se aproxima al decimal *0,27*.

Probabilidad estimada de que mañana no falte nadie; $\mathrm{P} = \frac{4}{15} = 4{:}\,15 \;\cong 0{,}27$ ([T5], p. 211)

Tabla 2.6. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Igualdad (=)			X	X		
Suma (+)			X	X		
Desigualdad (>)						X
Aproximación (≅)					X	
División (:)					X	

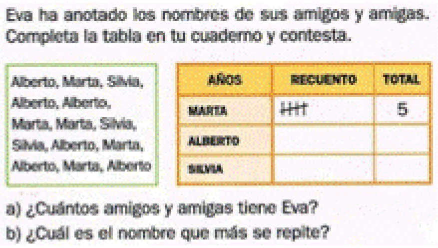
En ambas editoriales observamos ausencia de cualquier notación en el primer ciclo (Tabla 2.6), y uso de símbolos y operaciones de suma e igualdad en el segundo ciclo. La Serie 2 usa el símbolo de desigualdad para la comparación de probabilidades; la Serie 1 usa el símbolo de aproximación, para la estimación de probabilidades o para la aproximación de fracciones a números decimales.

Como resumen de esta sección, observamos que las expresiones cotidianas son más frecuente que las formales y simbólicas en estas colecciones, acorde con la edad de los niños; a diferencia de los hallazgos de Ortiz (2002) que encontró una presentación más formal, en textos dirigidos a estudiantes de 14 o 15 años. Una diferencia con el estudio de Ortiz es la mayor consistencia en el uso de lenguaje numérico y simbólico, en nuestras dos editoriales; aunque su presencia es mucho menor que en los textos analizados por dicho autor. Estas diferencias se relacionan con objetivos didácticos, pues los textos de primaria se orientan a la fundamentación mientras que los textos de secundaria se orientan a la consolidación y formalización.

2.5.2. LENGUAJE TABULAR (L4)

El lenguaje de tipo tabular se usa con frecuencia en el tema de probabilidad, y su estructura avanza en complejidad con los cursos. Su principal uso se asocia con presentación de datos; sólo al final de la educación primaria se relaciona explícitamente con la probabilidad, al presentar las frecuencias relativas como estimaciones de probabilidades, facilitando su articulación con la estadística y la introducción del significado frecuencial.

Un primer uso es presentar listados de datos, que pueden constituir el espacio muestral en el experimento de interés o bien como tablas para efectuar un recuento (ambos casos se dan en la Figura 2.2).


Eva ha anotado los nombres de sus amigos y amigas.
Completa la tabla en tu cuaderno y contesta.

Alberto, Marta, Silvia, Alberto, Alberto, Marta, Marta, Silvia, Silvia, Alberto, Marta, Alberto, Marta, Alberto

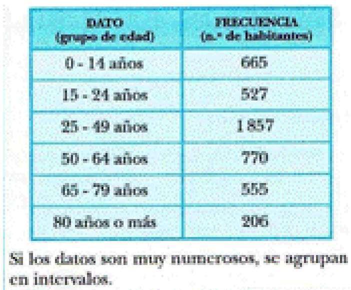
AÑOS	RECUENTO	TOTAL
MARTA	𝍸	5
ALBERTO		
SILVIA		

a) ¿Cuántos amigos y amigas tiene Eva?
b) ¿Cuál es el nombre que más se repite?

Figura 2.2.Listado de datos y tabla de recuentos ([T2], p. 204)

Otro uso está en las tablas de frecuencia, que se consolidan en el segundo ciclo con la presentación de frecuencias absolutas o relativas para resumir la información estadística. Estas tablas de frecuencias ofrecen una estructura de relaciones, más allá de los números consignados en ellas; por ejemplo, relacionando cada valor de la variable con su frecuencia. Implícitamente reforzarían la idea intuitiva de la probabilidad como correspondencia que asigna valores reales entre 0 y 1 a cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio, aunque su formalización está lejos de este nivel educativo.

En ocasiones también se presentan tablas de datos agrupados en intervalos, al finalizar la Primaria. Puesto que el agrupamiento en intervalos es un paso previo a la introducción de las variables aleatorias continuas; la interpretación de la frecuencia de un intervalo facilita la comprensión, posterior en Secundaria, de la probabilidad en intervalos de dichas variables. El ejemplo de la Figura 2.3 utiliza intervalos de edad desigual, lo que podría ser una fuente de conflicto potencial en los niños.



DATO (grupo de edad)	FRECUENCIA (n.º de habitantes)
0 - 14 años	665
15 - 24 años	527
25 - 49 años	1 857
50 - 64 años	770
65 - 79 años	555
80 años o más	206

Si los datos son muy numerosos, se agrupan en intervalos.

Figura 2.3.Tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos ([T4], p. 204).

La tabla de doble entrada se presenta en el segundo ciclo con algunas celdas en blanco para ser completadas a partir de operaciones aditivas; las actividades propuestas están dirigidas a su lectura e interpretación (no a su construcción). Este tipo de tabla implica un nivel de razonamiento más complejo, porque establece relaciones entre tres objetos matemáticos, ya que relaciona las dos variables que se ubican en filas y columnas con las frecuencias absolutas que se ubican en las celdas de esa matriz. También se pueden ver como representación de un espacio muestral producto en un experimento compuesto.

En esta tabla se recogen las preferencias deportivas de los niños y niñas del colegio de María. Completa la tabla en tu cuaderno y contesta.

	NIÑAS	NIÑOS	TOTAL
NATACIÓN	23	25	
TENIS	12	10	
FÚTBOL	18		45
ESQUÍ		20	41
BALONMANO	19	21	40
TOTAL	93	103	

a) ¿Cuántos niños y niñas prefieren el tenis?
b) ¿Qué significa el número 18 de la tabla? ¿Y el número 20?
c) ¿Cuál es el deporte preferido por las niñas? ¿Y por los niños?
d) ¿Cuál es el deporte que menos prefieren los niños y niñas?

Figura 2.4.Tabla de doble entrada ([T2], p. 205)

Esta frecuencia conjunta es un concepto preliminar de la probabilidad conjunta y, si los niños han comprendido la noción parte-todo, permite introducir intuitivamente su cálculo. Asimismo, la comprensión de la noción parte-todo facilita la introducción de la probabilidad condicionada cuando se relaciona una celda con el total de su fila o de su columna, en lugar de hacerlo con el total de la tabla. En el ejemplo de la Figura 2.4 las preguntas están formuladas en términos de frecuencias absolutas, que se pueden asociar con probabilidad simple (en a), conjunta (en b) y condicionada (en c y d).

Aparecen pocas tablas de frecuencias relativas en el contexto de probabilidad. El ejemplo de la Figura 2.5 difiere del formato estándar; su propósito es facilitar la comparación de la ocurrencia de un suceso en tres experimentos diferentes. En este tipo de tabla cada frecuencia relativa en la última columna se puede ver como la proporción de un suceso condicionado (acertar) variando el suceso condicionante (persona que contesta el test). Su construcción es una fuente de conflicto potencial para un niño que está aprendiendo la construcción de tablas de frecuencias tradicionales; por ejemplo, pierde sentido que la suma de valores en todas las filas corresponda al total.

	Frecuencia absoluta (aciertos)	Total de preguntas del test	Frecuencia relativa
María	14	16	$\frac{14}{16} = 0{,}875$
Paulo	12	15	$\frac{12}{15} = 0{,}8$
Elisa	28	40	$\frac{28}{40} = 0{,}7$

Figura 2.5.Tabla para comparación de frecuencias ([T10], p. 210)

En ambas editoriales observamos el aumento en la complejidad de las tablas acorde con el ciclo educativo (Tabla 2.7). Notamos que la Serie 1 presenta más riqueza en el lenguaje tabular, desde segundo ciclo, con la inclusión de al menos una tabla de frecuencias con datos agrupados y una tabla de doble entrada. El lenguaje tabular se vincula principalmente con la estadística y, en general, los autores no hacen mención de la relación entre estadística y probabilidad, ni resaltan que la suma de las frecuencias relativas debe ser igual a uno.

Tabla 2.7. Tipos de tablas incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Listado de datos			X	X		
T. de recuento	X	X				
T. de frecuencias sin agrupar			X	X		
T.de frecuencias con datos agrupados					X	
T. de doble entrada			X			
T. de frecuencias relativas					X	X
T. de frecuencias en probabilidad					X	

Esta progresión es paralela al incremento del número de objetos matemáticos y la complejidad de las relaciones en las tablas. En el primer ciclo, los niños realizan listados de datos y completan tablas de recuentos; en el segundo, los niños completan tablas de frecuencias absolutas (con una o dos variables); y en el tercero, los niños completan tablas de frecuencias relativas con una variable y tablas de frecuencias absolutas de doble entrada. También se usa como introducción a la probabilidad condicionada (significado subjetivo) a través de las tablas de doble entrada.

En nuestro estudio hay más diversidad de lenguaje tabular, aunque de menor complejidad, que en Ortiz (2002). En concordancia con este autor, las diferencias entre las editoriales son visibles; también observamos el tratamiento separado para los contenidos de estadística y los de probabilidad.

2.5.3. LENGUAJE GRÁFICO (L5)

Aunque los diagramas de barra, de sectores y pictogramas, están más relacionados con el tratamiento de datos que con la probabilidad; éstos son tenidos en cuenta en este análisis como base para la comprensión de la distribución de probabilidades y del histograma, y en la comprensión del significado frecuencial. Hemos encontrado gráficos de barra, circulares, pictogramas, histogramas y diagramas en árbol.

El gráfico de barras verticales sirve como preparación para el estudio en la secundaria del gráfico de probabilidades para variables aleatorias discretas. Su uso es muy amplio a partir de primer ciclo, tanto con actividades de lectura, como de construcción, y asociado al significado frecuencial de la probabilidad a partir del segundo o tercer ciclo. También se usa como apoyo en la argumentación (Figura 2.6).

El pictograma es apropiado para representar las frecuencias absolutas de una variable cualitativa o discreta con pocos valores; su uso es frecuente a partir de segundo ciclo, enfocado a su lectura más que a su construcción. Formalmente, no se utilizan en el contexto de probabilidades.

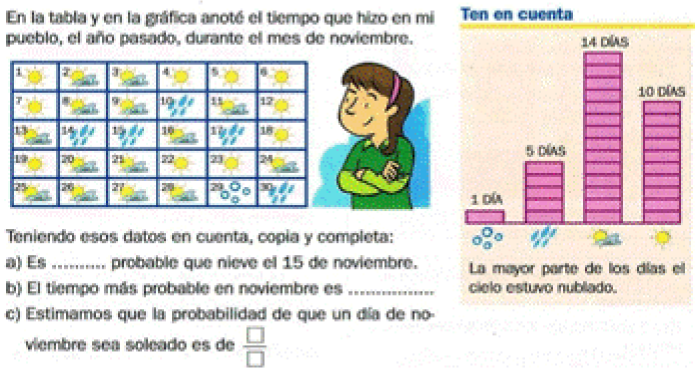


Figura 2.6.Uso de gráfico de barras en un problema de probabilidad ([T3], p. 211)

El gráfico de sectores es apropiado para representar proporciones (o frecuencias relativas) de una variable cualitativa o discreta con pocos valores; también se introduce con frecuencia a partir de segundo ciclo, pero poco en el contexto de probabilidades. Un ejemplo asociado al significado frecuencial se presenta en la Figura 2.7; es de notar que este gráfico tiene un error, que facilita su confusión con una ruleta, pues se representan sectores separados correspondientes al mismo valor de la variable (fútbol y tenis). Hubiera sido correcto si dichos sectores fuesen contiguos.

El histograma es apropiado para representar las probabilidades (o las frecuencias observadas) de una variable continua; su uso es escaso en estos libros de texto y, básicamente, orientado a la lectura. Un ejemplo se muestra en la Figura 2.8 donde la actividad se orienta a la interpretación de los datos resumidos después de una recolección.

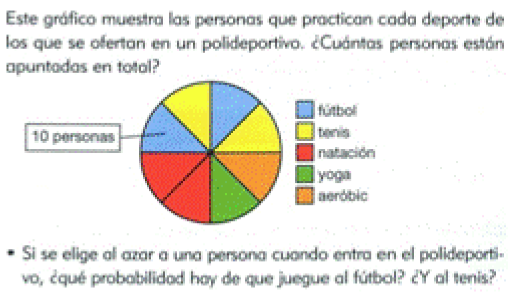


Figura 2.7.Uso de gráfico de sectores en contexto probabilístico ([T9], p. 219)

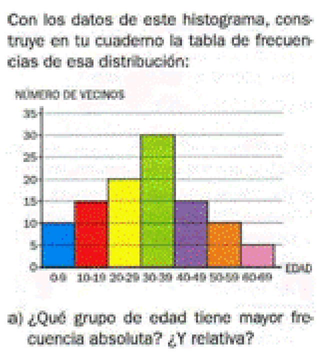


Figura 2.8.Uso de un histograma en un problema de estadística ([T5], p. 199)

Además de estos gráficos estadísticos, hemos encontrado el diagrama en árbol para representar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio de varias etapas, aunque no se hace una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionadas. En el ejemplo de la Figura 2.9 se pregunta por el tamaño del espacio muestral compuesto de tres etapas simples, cada una con dos resultados. Cada posible resultado del experimento compuesto está representado por un trío ordenado de dibujos. El diagrama en árbol se presenta como un recurso sistemático de enumeración.

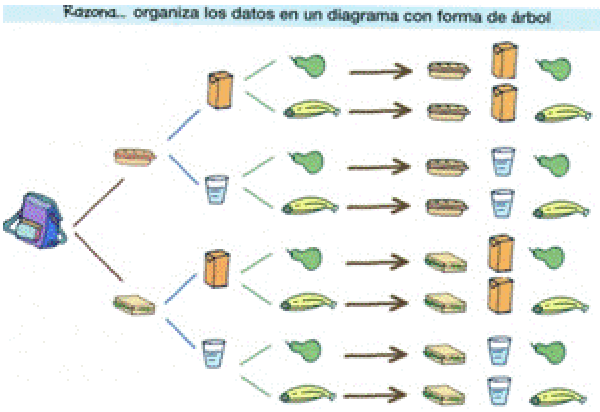


Figura 2.9.Uso de un diagrama en árbol en un experimento compuesto ([T7], p. 122)

Observamos en ambas editoriales el uso de gráficos de más complejidad acorde con el avance en la formación (Tabla 2.8). Al igual que en el uso de lenguaje tabular, la Serie 1 desarrolla más el significado frecuencial, en este caso con la presencia del histograma; y notamos que, esta representación no se usa en la Serie 2. El pictograma, por el contrario, se adelanta en la Serie 2 respecto a la Serie 1.

Tabla 2.8. Tipos de gráficos incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Gráfico de barras	X	X	X	X	X	X
Gráfico circular			X	X	X	X
Pictograma				X	X	X
Histograma					X	
Diagrama en árbol				X	X	

En concordancia con Ortiz (2002), las diferencias entre las editoriales son visibles en cuanto al uso de lenguaje gráfico para el desarrollo del significado frecuencial; y escaso el uso del diagrama en árbol. Los dos estudios coinciden en la presencia de gráficos de barras y de diagrama en árbol; entre los restantes, en nuestro estudio aparecen dos de menos complejidad, con respecto a los observados por este autor (gráficos cartesianos, diagramas de flechas y de Venn), y el histograma (de mayor complejidad y riqueza probabilística).

Resaltamos que esta riqueza de lenguaje, observada en las series de texto, apoya el componente comunicativo en el modelo de alfabetización probabilística (Gal, 2005), descrito en la Sección 1.2; que incluye el uso de lenguaje, en particular verbal y numérico, puesto que permite comunicar no solo la probabilidad de un suceso sino también otros constructos relevantes para un ciudadano de la era de la información.

2.6. ARGUMENTOS

Los textos analizados contienen cuatro tipos de argumentos: uso de ejemplos y contraejemplos, generalización, apoyo gráfico y razonamiento inductivo; algunos de éstos se utilizan para varios significados de la probabilidad, en tanto otros son propios de uno, como se describe a continuación.

A1. Uso de ejemplos y contraejemplos. Es la forma de argumentación más frecuente en los libros de texto revisados, con todos los significados de la probabilidad; en particular se utiliza en los primeros cursos, donde los niños no tienen el desarrollo cognitivo requerido para la presentación formal de conceptos probabilísticos. La Figura 2.18 ilustra un ejemplo, donde el concepto de suceso está implícito en los ejemplos, y los conceptos seguro, posible e imposible están explícitos en la descripción de los ejemplos, debajo del dispositivo correspondiente.

A2. Generalización. Para todos los significados de la probabilidad, la presentación de algunos contenidos, en segundo y tercer ciclo, incluye un ejemplo para relacionar el concepto con una situación conocida y una definición general para ampliar su validez. Por ejemplo, la siguiente introducción de la regla de Laplace se presenta después del análisis detallado de un ejemplo.

> Ana y Marcos tienen una bolsa cada uno con varillas azules y amarillas. Si cada uno saca sin mirar una varilla de su bolsa, ¿quién tiene más probabilidad de sacarla azul? … Como 7/10 es mayor que 2/10, es más probable que Ana saque una varilla azul de la bolsa.
>
> La probabilidad de un suceso mide la posibilidad de que un suceso ocurra. Para calcularla utilizamos una fracción.
>
> $\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$ ([T10], p. 215).

Cabe notar que el texto no menciona las condiciones de aplicación; como las situaciones propuestas en esta colección asumen equiprobabilidad de sucesos elementales, se puede generar el sesgo de equiprobabilidad o un conflicto potencial en el momento que se introduzcan las otras formas de asignación de la probabilidad.

A3. Apoyo gráfico para comprobación de propiedades. Los gráficos estadísticos son trabajados en esta muestra de textos en todos los cursos de la Educación Primaria. En particular, observamos que se utilizan diagramas de barra para facilitar la comprensión de algunas propiedades del significado frecuencial; suponemos que se debe al papel que juega la visualización en el aprendizaje, particularmente en edades tempranas. Algunos ejemplos se vieron al describir los tipos de gráficos (Sección 2.5.3).

A4. Razonamiento inductivo a partir de datos. La interpretación de tablas se trabaja en esta muestra de textos en todos los cursos de la Educación Primaria, con diferentes niveles de dificultad tanto en las tablas como en su lectura. Algunas de estas lecturas pueden facilitar la comprensión de algunas propiedades del significado frecuencial, como se menciona en la Sección 2.5.2. La Figura 2.10 ilustra este tipo de argumento para la comprensión de los tipos de sucesos; en la primera parte se recopilan datos experimentales, y en la segunda, se pide identificar tipos de sucesos teniendo en cuenta los datos

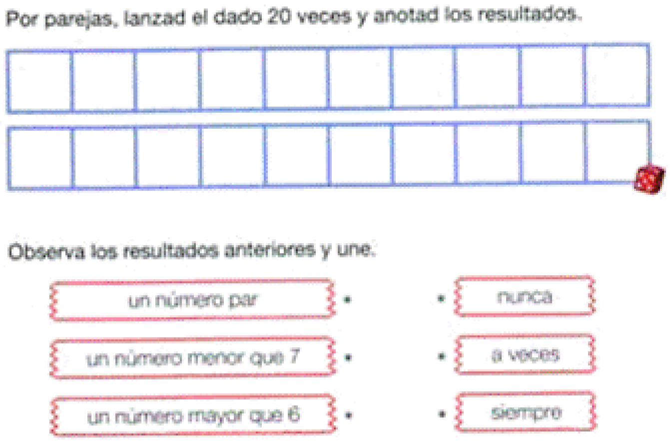


Figura 2.10.Razonamiento inductivo como argumento ([T6], p. 168)

La Tabla 2.9 resume el uso de estos tipos de argumentos en ambas editoriales; destaca la preferencia del uso de ejemplos y contraejemplos y un bajo aprovechamiento de los gráficos como elemento de argumentación. Cabe notar que la Serie 2 hace un uso más temprano de razonamiento inductivo, aunque con baja frecuencia. La generalización se emplea desde segundo ciclo, consideramos que con cierta ligereza puesto que se omiten las condiciones para su validez. En general, ambas editoriales atienden las sugerencias de los documentos curriculares, salvo por la exclusión de la simulación.

Tabla 2.9. Argumentos presentes en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
A1. Ejemplos y contraejemplos	X	X	X	X	X	X
A2. Gráficos para comprobar propiedades			X			
A3. Razonamiento inductivo		X	X	X	X	X
A4. Generalización			X	X	X	X

Igual que observó Ortiz (2002), predomina el uso de ejemplos y contraejemplos, y se utilizan poco los gráficos con esta finalidad. Un argumento que identificó este autor y no aparece en nuestro estudio fue la demostración formal de algunas propiedades, que se introduce en la Educación Secundaria, no es adecuado para los niños.

2.7. SITUACIONES PROBLEMAS

Los libros de texto analizados presentan sus explicaciones y proponen actividades enmarcadas en dos grandes contextos, juegos de azar sencillos conocidos por el niño y experiencias de su vida cotidiana. Estos se enmarcan en los siguientes tipos de situaciones problemas, considerando nuestro análisis curricular y epistemológico (Tabla 2.2).

SPI. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos. En las series analizadas hay pocas actividades de reconocimiento del azar en el primer ciclo, y éstas se refieren básicamente a dispositivos usados en juegos de azar; los experimentos sencillos en contexto cotidiano son más frecuentes a partir del segundo ciclo, un ejemplo para primer ciclo se presenta en la Figura 2.11. El grado de creencia se representa en una escala cualitativa; corresponde por tanto al significado intuitivo.

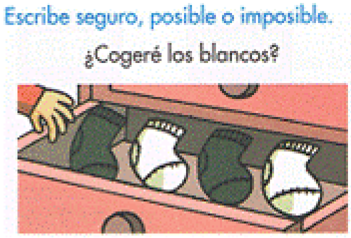


Figura 2.11.Expresión del grado de creencia en un suceso ([T1] p. 186)

SPC. Previsión de probabilidad en juegos de azar. Actividades referidas a juegos de azar se proponen en los tres ciclos, con diverso nivel de complejidad; es el contexto más habitual para ejemplos que siguen a la definición de un concepto probabilístico. La asignación numérica aparece en la Serie 1 al final del segundo ciclo y en la Serie 2 en el tercer ciclo, después que han trabajado con la regla de Laplace. Sin embargo, este campo de problemas aparece con alta frecuencia en actividades didácticas de los dos primeros ciclos, preguntando por la valoración cualitativa de la ocurrencia de un suceso, con calificativos como “muy, mas, igual, menos o poco” probable; un ejemplo se observa en la Figura 2.12.

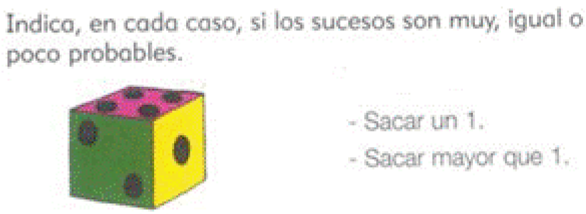


Figura 2.12.Valoración de un juego de azar ([T8], p. 124)

SPF. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados. La recolección de datos por parte de los mismos niños aparece pocas veces en estos textos. Actividades de predicción se proponen desde segundo ciclo en la Serie 1; sin embargo, la mayoría parten de datos recolectados, presentados dentro del mismo texto en lenguaje tabular (como se describió en la sección 2.5.2). Un ejemplo se ilustra en la Figura 2.13, donde se pregunta por una predicción del resultado (en términos de apuesta) a partir de datos, por tanto corresponde al significado frecuencial.

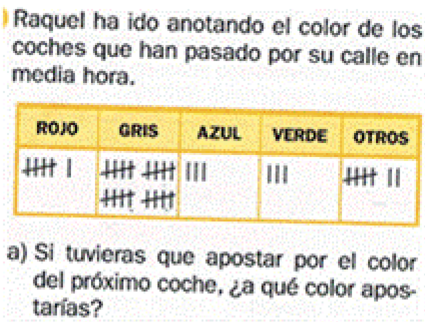


Figura 2.13.Previsión de tendencias a partir de datos observados ([T3], p. 213)

SPS. Estudio de sucesos donde la probabilidad puede cambiar en función de la información disponible. Los textos analizados presentan algunas situaciones ligadas a fenómenos naturales o a juegos de destreza, que dependen de la disponibilidad de información o conocimiento previos. Por su naturaleza corresponden al significado subjetivo; sin embargo, su tratamiento se hace a un nivel más sencillo, acorde con la edad del niño, se valora la verosimilitud de forma intuitiva; la experiencia personal del niño puede llevar a respuestas diferentes en una situación como la siguiente:

> Clasifica como “seguro”, “probable” o “imposible” cada uno de estos sucesos en la experiencia LANZAR A CANASTA:
> a) Que meta canasta
> b) Que el balón vuele por el aire
> c) Que el balón toque el aro
> d) Que la canasta valga cuatro puntos ([T5], p. 214).

En resumen, la Tabla 2.10 muestra que ambas editoriales proponen en primer ciclo exclusivamente situaciones problema ligadas al significado intuitivo, y desde segundo se introducen también las situaciones ligadas al significado clásico y al subjetivo. La Serie 1 además plantea situaciones relacionadas con los significados frecuencial, en los dos últimos ciclos. En general, observamos que las dos series atienden a los documentos curriculares, excepto porque la Serie 2 no incluye situaciones probabilísticas del significado frecuencial.

Tabla 2.10. Situaciones problema en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
SPI. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos	x	x	x	x	x	x
SPC. Previsión de probabilidad en juegos de azar			x	x	x	x
SPF. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados			x		x	
SPS. Estudio de sucesos donde la probabilidad puede cambiar en función de la información disponible			x	x	x	x

Observamos que estas situaciones problema favorecen un primer contacto con la capacidad de contextualizar el pensamiento probabilístico y el lenguaje, tanto en contextos públicos como privados, uno de los componentes de conocimiento en el modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005).

Al igual que en Ortiz (2002), una de las editoriales concede mayor importancia al significado clásico, sin mencionar situaciones del significado frecuencial. A diferencia de este autor, observamos que en nuestra muestra de textos hay situaciones problema del significado intuitivo y en una de las editoriales del significado subjetivo, que no aparecieron en los libros analizados por este autor.

2.8. CONCEPTOS

Un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático son los conceptos y propiedades involucrados en la resolución de los problemas. Aunque conocimiento conceptual y procedimental son dos partes de un continuo y están relacionados, el conocimiento conceptual es flexible y más generalizable, ya que no está ligado a un tipo específico de problema; incluye la comprensión implícita o explícita de los principios de un dominio dado y sus interrelaciones (Rittle-Johnson, Siegler y Alibali, 2001).

El aprendizaje de conceptos se desarrolla a lo largo de los años (Orton, 1990), por lo que es importante que se inicie el estudio de los mismos desde edades tempranas, siempre que el lenguaje y la forma de presentación sean adecuados a la edad del niño. Un principio fundamental para el aprendizaje de los conceptos, según Skemp (1980), es introducirlos mediante una adecuada colección de ejemplos y una adecuada secuenciación de actividades, en lugar de hacerlo mediante la definición.

A nivel de Educación Primaria la mayoría de conceptos probabilísticos básicos se implementan con significados parciales y, no se utiliza la terminología formal o definiciones de los mismos. Estos conceptos en su conjunto incluyen la mayoría de ideas estocásticas consideradas fundamentales por Heitele (1975), quien opina que dichas ideas deben constituir una guía del currículo de probabilidad desde la escuela primaria a la universidad. A continuación presentamos los conceptos identificados en estos textos, que hemos clasificado de acuerdo con el significado de la probabilidad al que correspondan. Algunos resultados se han publicado en Gómez, Ortiz y Gea (en prensa).

2.8.1. CONCEPTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO INTUITIVO

Todos los conceptos descritos en la Tabla 2.1, y casi todos los de la Tabla 1.2, están presentes en los textos analizados, de forma explícita, mediante definiciones o ejemplos.

CI1. Azar y variabilidad. En ambas editoriales, el azar y la variabilidad, utilizados intuitivamente en ejemplos de la vida y lenguaje cotidianos, aparecen implícitos en la definición de *experiencia de azar*. Su presentación enfatiza la existencia de múltiples resultados y está ligado principalmente a la ignorancia o inseguridad de obtener un resultado particular en una realización del experimento (Batanero, 2005). No se suele mencionar que el experimento se puede repetir en las mismas condiciones (lo que se exige desde el punto de vista matemático); queda implícito, como corresponde a la edad del niño: *"Una experiencia es de azar si conocemos los posibles resultados, pero no podemos asegurar cuál de ellos saldrá a final"* ([T8], p. 120).

CI2. Suceso; suceso seguro, suceso posible, suceso imposible. En todos los ciclos se trabajan estas nociones. La Serie 1 introduce una definición de suceso desde segundo ciclo: *"En una experiencia aleatoria, un conjunto que reúna algunos de los resultados posibles se llama suceso"* ([T3], p. 206). La Serie 2 omite la definición de suceso en todos los ciclos, pero describe su tipología (seguro, imposible, posible), en función de la valoración de la posibilidad de ocurrencia (Figura 2.18); en consecuencia, en esta serie el concepto de suceso sólo se presenta en forma intuitiva, al igual que ocurre con los tipos de sucesos.

CI3. Posibilidad, grado de creencia. En ambas editoriales se desarrolla especialmente en el primer ciclo y está presente en los otros dos. No se define, pero se utiliza explícitamente en las dos series cuando se pide clasificar los tipos de sucesos, como se verá en las propiedades descritas en la Sección 2.9.1.

2.8.2. CONCEPTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO CLÁSICO

Los textos analizados exponen todos los conceptos descritos en la Tabla 2.1, así como uno que aparece en la Tabla 1.3 pero no en los documentos curriculares. En general, se exponen de forma explícita aunque no se desarrollan definiciones formales.

CC1. Juego de azar. Desde primer ciclo, la mayoría de experiencias de azar propuestas en estos textos corresponde a juegos de azar, que se basan en dispositivos aleatorios como dados, monedas y ruletas, con equiprobabilidad de los sucesos elementales. No se presenta una definición, formal ni informal, en ninguna de las dos editoriales; posiblemente debido a la presencia de este tipo de juegos en la vida cotidiana del niño.

CC2. Casos favorables; casos posibles. La definición de estos conceptos queda implícita en la introducción de la regla de Laplace, en ambas editoriales. Se entiende que se denominan casos favorables a los sucesos elementales con una característica de interés y casos posibles al espacio muestral completo, que tampoco se define, y está usualmente descrito como "*(todos) los posibles resultados del experimento*" ([T3], p. 205). Su introducción, mediante un ejemplo, se observa en la Figura 2.14.

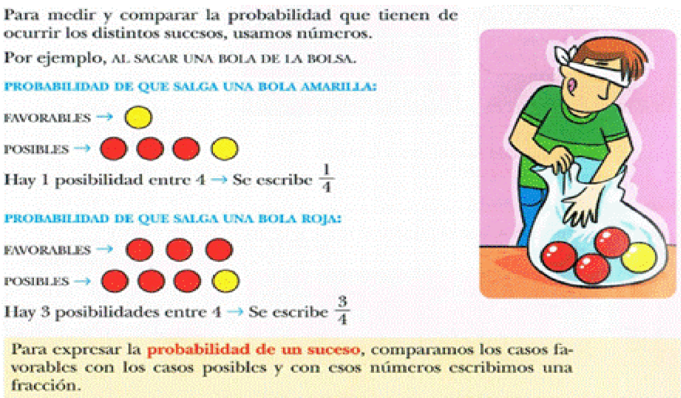


Figura 2.14. Probabilidad de un suceso ([T3], p. 208)

CC3. Probabilidad. En la Serie 1 se presenta en segundo ciclo como se observa en la Figura 2.14, y en la Serie 2 se introduce en tercer ciclo de la siguiente manera:

> La probabilidad de un suceso mide la posibilidad de que un suceso ocurra. Para calcularla utilizamos una fracción
>
> $\text{Probabilidad} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$ ([T10], p. 215).

CC4. Juego equitativo. Este concepto apenas se menciona en los libros analizados, no se define aunque su noción aparece en situaciones como la siguiente:

> Rosa, Iria y Esteban no se ponen de acuerdo en qué película ver en el cine. Deciden lanzar dos monedas: si salen dos caras elige Rosa; si sale cara y cruz elige Iria. Si no, elige Esteban. ¿Es justo? Ayúdate de un dibujo, y explica tu respuesta ([T9], p. 219).

CC5. Experimentos compuestos, dependencia, independencia. Notamos que el *experimento compuesto*, en su mayoría dos etapas simultáneas, se presenta como un caso de experiencia de azar; no se definen los experimentos compuestos de forma diferente a los experimentos simples, ni se denominan. Sin embargo, la composición del experimento es evidente, debido al número de dispositivos aleatorios utilizados en forma simultánea (Figura 2.15).

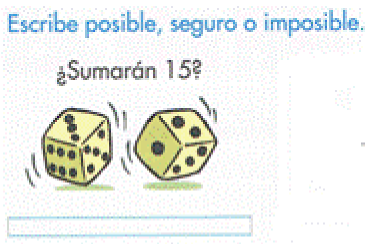


Figura 2.15.Experimento compuesto de dos etapas simultáneas ([T1], p. 188)

Si bien estos tres conceptos no son exclusivos del significado clásico los hemos clasificado aquí porque entre los procedimientos observados en los textos se incluyen ejercicios de asignación clásica de probabilidad conjunta en experimentos compuestos, tanto dependientes como independientes; por este motivo, aunque no se defina implícitamente, se considera que el concepto de independencia-dependencia se considera en los textos, ya que se ha de usar en los ejercicios.

2.8.3. CONCEPTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO FRECUENCIAL

Casi todos los conceptos enlistados en la Tabla 2.1, que también se encuentran en la Tabla 1.4, están presentes en los textos analizados; de forma implícita o explícita, aunque se vinculan más a estadística que a probabilidad

CF1. Colectivo (población); atributos. Aunque no se introducen explícitamente, estos objetos matemáticos, están presentes en todas las situaciones didácticas de las páginas dedicadas a la estadística, pues los textos asumen el tratamiento de una población, que es el grupo observado como totalidad de individuos con unas características comunes, y el interés está en los atributos, que distinguen a unos individuos de otros como valores de una variable estadística.

CF2. Ensayo; ensayos repetidos. Tampoco se introduce explícitamente este objeto matemático, pero de igual modo, está presente en todas las situaciones didácticas de estadística, y en las situaciones de probabilidad donde aplica el significado frecuencial. Por ejemplo, en la Figura 2.16 se muestran los resultados en 10 ensayos repetidos, lanzamiento de un tiro libre en baloncesto, cada uno de ellos realizado por el mismo jugador.

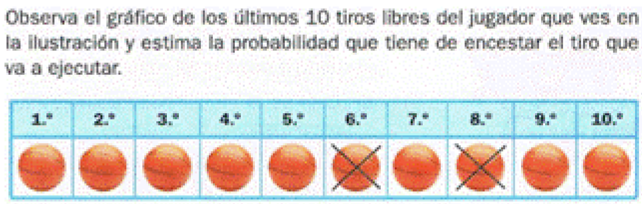


Figura 2.16.Ensayos repetidos ([T5], p. 214)

CF3. Frecuencia absoluta; frecuencia relativa. Estos objetos aparecen implícitos en pocas situaciones didácticas de contenido probabilístico; su definición se asocia a estadística: *"La frecuencia absoluta es el número de veces que se repite un dato. La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos"* ([T10], p. 210). Ligado a las frecuencias, encontramos la *tabla de frecuencias*, que se presenta en la estadística de tercer ciclo, y sirve como precedente para la introducción de la distribución de probabilidades en la Educación Secundaria: *"En la tabla de frecuencias organizamos los datos junto a las frecuencias que les corresponden. Si los datos son muy numerosos se agrupan en intervalos"* ([T4], p. 204).

CF4. Valor estimado de la probabilidad. La Serie 2 no presenta este concepto. En la Serie 1 se desarrolla implícitamente la diferencia entre probabilidad y su estimación en el tercer ciclo, de manera informal: *"En algunas situaciones, estimamos la probabilidad atendiendo a los datos recogidos anteriormente"* ([T3], p. 210).

2.8.4. CONCEPTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO SUBJETIVO

Los dos conceptos presentes en la Tabla 2.1, que también aparecen en la Tabla 1.4, se encuentran en los textos analizados; ambos se observan implícitos en ejemplos, sin presentar su denominación ni una definición.

CS1. Suceso incierto. En el significado subjetivo de la probabilidad, en lugar de hablar de sucesos aleatorios, se trabaja con sucesos inciertos; en los libros analizados podemos equiparar este objeto con el de suceso posible que hemos descrito asociado al significado intuitivo. Las características que distinguen a un suceso incierto de otro determinista son inherentes a la situación en que se enmarca; ninguna de estas editoriales menciona estas diferencias en ninguno de los tres ciclos. La Figura 2.17 ilustra un suceso ejemplo de aplicación del significado subjetivo, donde podríamos entender que se presenta un suceso incierto, pues un niño de 7 años puede asignar diferentes probabilidades, dependiendo de su experiencia personal.

Figura 2.17.Situación en que aplica el significado subjetivo ([T1], p. 186)

CS2. Probabilidad como grado de creencia personal. Son poco frecuentes las situaciones ligadas al significado subjetivo, donde el niño, por su experiencia cotidiana pueda asignar una probabilidad a partir del grado de creencia personal que puede cambiar de un niño a otro; en general esta asignación no es numérica sino a nivel del significado intuitivo (como en el ejemplo de la Figura 2.17).

En resumen, ambas editoriales desarrollan conceptos básicos de los cuatro significados de la probabilidad (Tabla 2.11); durante todos los ciclos se observan conceptos propios del significado intuitivo y en los dos últimos ciclos, los significados clásico, frecuencial y subjetivo. Algunos conceptos no se formalizan, como es de esperar a esta edad, solo se presentan en forma intuitiva, en especial los ligados al significado subjetivo. La Serie 2 presta mayor atención al significado clásico; mientras que la Serie 1 también desarrolla conceptos del significado frecuencial.

Asimismo, observamos que las normativas españolas se cumplen parcialmente; llaman la atención la ausencia del concepto de simulación y la presencia del juego equitativo, resaltado en cursiva porque no aparece explícitamente como contenido en los documentos curriculares, aunque es introducido por las editoriales en tercer ciclo. Los demás conceptos están sugeridos en el Real Decreto (MEC, 2006) o por la Junta de Andalucía (Consejería de Educación, 2007).

Tabla 2.11. Conceptos en los libros de texto

Concepto según significado	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Intuitivo						
CI1. Azar y variabilidad	x	x	x	x	x	x
CI2. Suceso; seguro, posible e imposible	x	x	x	x	x	x
CI3. Posibilidad, grado de creencia	x	x	x	x	x	x
Clásico						
CC1. Juego de azar	x	x	x	x	x	x
CC2. Casos favorables; casos posibles			x		x	x
CC3. Probabilidad			x		x	x
CC4. Juego equitativo					x	x
CC5. Exp. compuesto, dependencia, independencia	x		x	x	x	x
Frecuencial						
CF1. Colectivo (población); atributos	x	x	x	x	x	x
CF2. Ensayo; ensayos repetidos			x		x	
CF3. Frecuencia (absoluta, relativa)			x	x	x	x
CF4. Valor estimado de la probabilidad			x		x	
Subjetivo						
CS1. Suceso incierto			x	x	x	X
CS2. Probabilidad como grado de creencia personal			x	x	x	X

Estos conceptos en su conjunto incluyen la mayoría de ideas estocásticas consideradas fundamentales por Heitele (1975), quien opina que dichas ideas deben constituir una guía del currículo de probabilidad desde la escuela primaria a la universidad. Asimismo, estos conceptos forman parte de las tres ideas probabilísticas fundamentales en el modelo de Gal (2005): variación, aleatoriedad e independencia, así como sus contrapartes constancia, determinismo y asociación.

Hay coincidencia con el estudio de Ortiz (2002) en la mayor presentación en los textos del significado clásico y frecuencial, aunque una de las editoriales que él analiza presenta conceptos ligados al significado frecuencial sólo desde el punto de vista estadístico, con lo que se pierde ocasión de conectar la estadística con la probabilidad. En ambos estudios se nota la ausencia del concepto variable aleatoria y el bajo desarrollo del concepto de experimento compuesto; aunque a nivel de primaria esta omisión es lógica por su mayor dificultad. Este autor identifica conceptos de mayor complejidad, como son probabilidad condicionada e independencia de sucesos, que no son adecuados para la Educación Primaria.

2.9. PROPIEDADES

La presentación de propiedades en los textos analizados es informal y se implementan con significados parciales, hay pocos enunciados explícitos y ninguna demostración, como corresponde a esta edad. A continuación presentamos las observadas en estos textos, que hemos clasificado de acuerdo con el significado de la probabilidad al que correspondan.

2.9.1. PROPIEDADES RELACIONADAS CON EL SIGNIFICADO INTUITIVO

Todas las propiedades descritas en la Tabla 2.1, y casi todas las de la Tabla 1.2, están presentes en los textos analizados; de forma más o menos explícita.

PI1. No se puede predecir con seguridad el resultado. La impredecibilidad es la primera propiedad de los experimentos aleatorios que se introduce a los niños, por ejemplo en la actividad titulada: "*¿Qué puede salir al lanzar un dado?*" ([T6], p. 168). En los siguientes ciclos, esta pregunta se transforma en la reflexión acerca de la posibilidad de predecir un resultado para establecer si una experiencia es o no aleatoria.

PI2, PI3, PI4. Suceso posible (cualquier resultado de un experimento); suceso imposible (nunca se verifica); suceso seguro (siempre ocurre). Las propiedades que identifican los tres tipos de sucesos se exponen simultáneamente en ambas editoriales: "*Un suceso seguro es el que ocurre siempre, un suceso posible es el que ocurre a veces, y un suceso imposible es el que no ocurre nunca*" ([T8], p. 122).

Estos textos proponen actividades para que el niño identifique, o invente, sucesos de cada uno de los tres tipos en un mismo experimento aleatorio; esta situación didáctica facilita comprender que esta clasificación es excluyente y ordinal. También presentan situaciones didácticas con tres experimentos aleatorios diferentes y un mismo suceso de interés (Figura 2.18). Esta forma de presentación utiliza propiedades del significado axiomático no evidentes para los niños; podría llevarles a confundir la propiedad que define al suceso con una característica del dispositivo aleatorio.

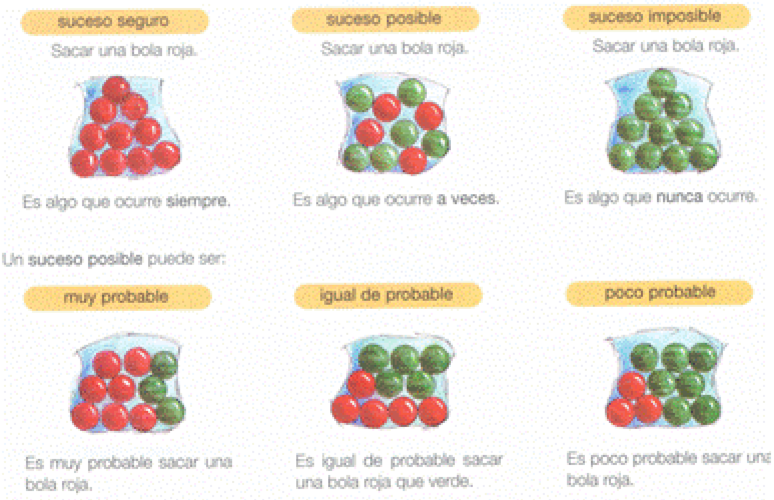


Figura 2.18.Tipos de sucesos y comparación de posibilidades ([T10], pp. 214).

PI5. La posibilidad de ocurrencia se puede comparar. La distinción entre sucesos según su grado de creencia sirve como introducción del concepto probabilidad, la necesidad de medirla numéricamente. La comprensión de una escala ordinal en la verosimilitud de ocurrencia de los sucesos ayudará, posteriormente, a la asignación de probabilidades con el significado subjetivo (Ortiz, 2002). La Serie 1 omite esta propiedad; mientras que la Serie 2 la presenta, en segundo y tercer ciclo. Como en los tipos de sucesos, hay dos situaciones: comparación de un mismo suceso en diferentes condiciones experimentales (Figura 2.18) o de varios sucesos en un mismo experimento aleatorio.

PI6. La posibilidad, como grado de creencia, se puede aproximar analizando el fenómeno. Esta propiedad vincula el significado intuitivo con los demás significados; en particular, permite analizar cuándo es más conveniente utilizar una forma u otra para la asignación de la probabilidad (Batanero, 2005). La Figura 2.19 ilustra esta propiedad en contraposición con la idea de suerte o con creencias de que el azar depende de condiciones externas, como la voluntad de los dioses.

Figura 2.19.La posibilidad se puede aproximar analizando el fenómeno ([T10], pp. 208-209)

PI7. La posibilidad, como grado de creencia, se puede revisar con la experiencia. Esta propiedad facilita vincular el significado intuitivo con los significados frecuencial y subjetivo. A diferencia de la propiedad anterior, hace referencia al análisis de la verosimilitud en fenómenos aleatorios a partir de información previa o experiencia personal. Un ejemplo se presenta en la Figura 2.20.

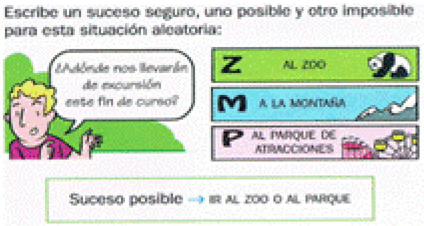


Figura 2.20.El grado de creencia puede cambiar con la experiencia personal ([T3], p. 207)

2.9.2. PROPIEDADES RELACIONADAS CON EL SIGNIFICADO CLÁSICO

Se encuentran todas las propiedades descritas en la Tabla 2.1, y la mayoría de la Tabla 1.3.

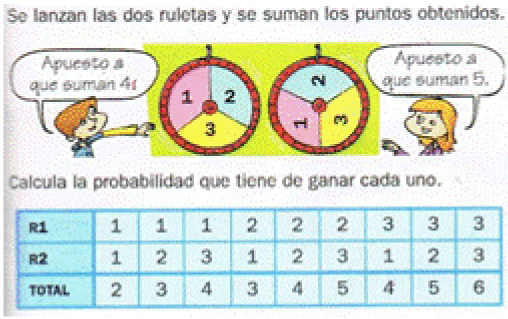
PC1. Número de resultados finito y numerable. Esta propiedad, que es indispensable para asignar probabilidad según este significado (Ortiz, 2002), se asume en casi todas las situaciones didácticas presentadas en estos textos. El cardinal del espacio muestral está presente en el procedimiento de cálculo, ya sea por conteo o por conocimiento previo del dispositivo aleatorio. Por ejemplo en la situación presentada en la Figura 2.15.

PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales. Se asume en la mayoría de las situaciones didácticas presentadas en los textos, con base en la simetría física de los dispositivos aleatorios de las experiencias de azar (como ruletas con sectores de igual área). La Serie 2 menciona esta propiedad a través del siguiente ejemplo:

> Si lanzamos una moneda al aire, ¿qué es más probable, sacar cara o cruz?
> Hay 1 cara y 1 cruz.
> Es igual de probable sacar cara que sacar cruz. ([T7], p. 125)

PC3, PC4. Casos favorables: resultados que favorecen; casos posibles: todos los resultados. Estas dos propiedades caracterizan los tipos de resultados que conforman los dos conjuntos de referencia para el cálculo de la probabilidad clásica. Los casos favorables se refieren a un subconjunto del espacio muestral, cuyo cardinal será el numerador de la fracción; los casos posibles hacen referencia al espacio muestral, cuyo cardinal será el denominador. Se utiliza en todas las situaciones de cálculo o comparación de probabilidades (por ejemplo en la Figura 2.15); sin embargo, en ningún texto se encuentra una descripción verbal de esta propiedad.

PC5. Probabilidad: Valor objetivo, calculable. Esta propiedad es válida en el contexto de juegos de azar, donde la probabilidad sólo depende del juego y del número de resultados; constituye una de las diferencias epistemológicas entre el significado clásico y los demás significados (Batanero, 2005). Un ejemplo de esta propiedad, aplicada a un experimento compuesto, se observa en la Figura 2.21. Es una de las situaciones más complejas para los niños porque implica principios de combinatoria para la enumeración del espacio muestral y reconocer la ausencia de equiprobabilidad en los resultados del total a pesar de la equiprobabilidad en los experimentos simples que componen la experiencia de azar. En este ejemplo también está implícita la noción de variable aleatoria, sin formalizarla.



R1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
R2	1	2	3	1	2	3	1	2	3
TOTAL	2	3	4	3	4	5	4	5	6

Figura 2.21.La probabilidad es un valor objetivo, calculable ([T5], p. 209)

PC6. Regla de Laplace. Constituye uno de los ejes centrales del significado clásico y se enuncia sin nombrarla como tal (por ejemplo en la Figura 2.15). Su validez está ligada al cumplimiento de las propiedades anteriores, hecho que se omite o apenas se menciona en los textos analizados, lo que podría favorecer la aparición en los niños del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

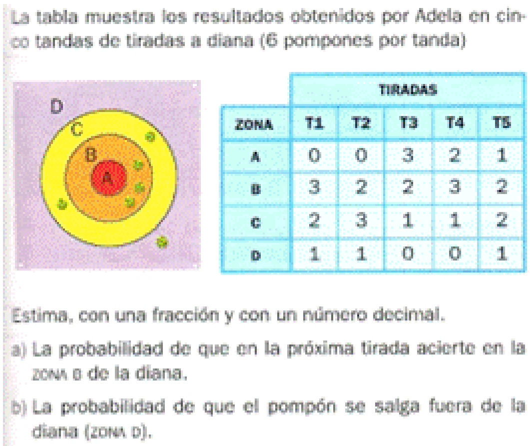
PC7. La posibilidad de ocurrencia de un suceso es cuantificable. Esta propiedad es básica para llegar a la definición de función de probabilidad y vincula el significado clásico con el intuitivo. Aceptarla es un paso importante en el desarrollo del razonamiento probabilístico de los niños. Se utiliza en todas las situaciones didácticas de cálculo de probabilidades y se enuncia al introducir este procedimiento: "*La probabilidad de un suceso mide la posibilidad de que ese suceso ocurra*" ([T10], p. 215).

2.9.3. PROPIEDADES RELACIONADAS CON EL SIGNIFICADO FRECUENCIAL

Casi todas las propiedades descritas en la Tabla 2.1, y algunas de la Tabla 1.4, están presentes en los textos analizados, de forma implícita o explícita, pero se vinculan más a estadística que a probabilidad. Ninguna de las editoriales incluye propiedades referidas a simulación.

PF1. Colectivo: semejantes que difieren en atributos observables. Esta propiedad caracteriza las situaciones en las que aplica este significado, y hace explícito su vínculo con la estadística. En el siguiente ejemplo se caracterizan el colectivo en tiempo y espacio, y se resalta el atributo observable de interés en cada elemento, el color de cada coche: "*Rafael ha anotado los colores de los coches que han pasado por la calle en los últimos cinco minutos. Estima la probabilidad de que el próximo coche sea blanco*" ([T5], p. 211).

PF2. Los atributos en un colectivo pueden o no ser equiprobables. Todas las situaciones didácticas que desarrollan el significado frecuencial consideran experimentos aleatorios con resultados no equiprobables; la mayoría en contextos donde el niño puede reconocer esta propiedad (como en la Figura 2.22), lo que puede evitar el surgimiento del sesgo de equiprobabilidad. El libro no lo sugiere explícitamente, queda a criterio del profesor la mención de esta característica y la inconveniencia de aplicar la asignación clásica.



La tabla muestra los resultados obtenidos por Adela en cinco tandas de tiradas a diana (6 pompones por tanda)

	TIRADAS				
ZONA	T1	T2	T3	T4	T5
A	0	0	3	2	1
B	3	2	2	3	2
C	2	3	1	1	2
D	1	1	0	0	1

Estima, con una fracción y con un número decimal.

a) La probabilidad de que en la próxima tirada acierte en la ZONA B de la diana.

b) La probabilidad de que el pompón se salga fuera de la diana (ZONA D).

Figura 2.22. Atributos no equiprobables en un colectivo ([T5], p. 211)

PF3. Probabilidad: Valor objetivo, hipotético, desconocido. El carácter objetivo pero desconocido de la probabilidad distingue al significado frecuencial del clásico, aunque no se resalta explícitamente en los textos. En la Serie 1 se proponen experimentos aleatorios con repeticiones pidiendo la estimación, entendida como aproximación de la probabilidad, sin enfatizar que este valor es hipotético: *"En algunas situaciones, estimamos la probabilidad atendiendo a los datos recogidos anteriormente"* ([T3], p. 210).

PF5. Aumento en la fiabilidad de la estimación con el tamaño de muestra: Esta propiedad es básica en la comprensión de la ley de los grandes números, así como en el reconocimiento de las nociones de variabilidad y precisión. La noción de límite es desconocida para los niños de estas edades, por tanto el tratamiento de esta aproximación debe hacerse en forma intuitiva, para lo cual es muy útil recurrir a la simulación y apoyo tecnológico. Las situaciones didácticas de la Serie 1 no la aplican, pues los tamaños de muestra que utilizan son muy pequeños, lo que puede promover en el niño el sesgo de representatividad. Un ejemplo es el siguiente: *"Observa también que este tipo de estimaciones son más fiables cuantos más datos entren en la estadística; en este caso, cuántos más partidos contabilicemos"* ([T5], p. 210).

PF6. La frecuencia relativa de un atributo tiende a estabilizarse. La apreciación de la estabilidad de las frecuencias requiere la realización de ensayos repetidos con diferentes tamaños de muestra, que no suelen proponerse en estos textos. En la Serie 1, solo se encuentra un ejemplo relacionado con esta propiedad. Se plantea en el capítulo de estadística en términos de las frecuencias absolutas; esta actividad realizada con frecuencias relativas también permitiría contrastar el valor teórico con el estimado, que dejaría en evidencia la calidad de la aproximación:

Lanza un dado 30 veces, anota los resultados obtenidos, construye su tabla de frecuencias y contesta:

a) ¿Cuáles son los valores posibles al lanzar el dado?
b) ¿Qué frecuencia absoluta de cada valor has obtenido?
c) ¿Qué crees que ocurrirá con las frecuencias absolutas a medida que aumentamos el número de lanzamientos? ([T5], p. 193)

PF7. Las frecuencias relativas (y las distribuciones de frecuencias) varían en cada serie de N ensayos: Esta propiedad facilita la comprensión del carácter aproximado de esta asignación de probabilidad y el desarrollo del razonamiento inferencial. Su reconocimiento se obtiene a través de la reflexión de las diferencias observadas, la similitud de patrones y la posibilidad de cálculo de la probabilidad teórica. Sólo identificamos una alusión a la misma (Figura 2.23).

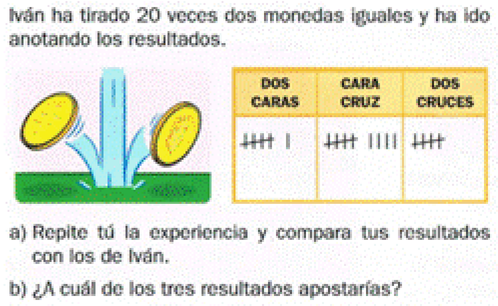


Figura 2.23.Variabilidad de las frecuencias en dos series de 20 ensayos ([T3], p. 211)

2.9.4. PROPIEDADES RELACIONADAS CON EL SIGNIFICADO SUBJETIVO

Todas las propiedades presentes en la Tabla 2.1, y algunas de la Tabla 1.4, se encuentran en los textos analizados, de forma implícita.

PS1. Suceso incierto: Se tiene cierta información, pero no es totalmente predecible. En el significado subjetivo se asume que la ocurrencia de un resultado está parcialmente ligada a una o varias causas, no deterministas. El cambio en la probabilidad de ocurrencia debido al conocimiento de información adicional, en relación con estas causas, no se menciona en ninguno de los tres ciclos, aunque está presente en algunas situaciones; por ejemplo cuando se pregunta "*¿Cuántas rosas dará el rosal esta primavera?*" ([T5], p. 204).

PS2. Probabilidad como grado de creencia personal: condicionada por un sistema de conocimientos. Los conocimientos sobre el fenómeno de interés permiten hacer una mejor asignación de probabilidades. Se encontraron algunos ejemplos donde aparece implícita, esta propiedad, que es comprensible para los niños cuando se piensa en contextos cotidianos de toma de decisiones personales o familiares. Un ejemplo se muestra a continuación:

> Ya estamos como todos los años, negociando las vacaciones.
>
> Al principio pensábamos ir a París, porque allí hay un parque de atracciones fabuloso y mi madre quiere que visitemos también el museo del Louvre. ¡Imposible! Este año no llega el presupuesto, ¡otra vez será!
>
> Descartando París, todos preferimos la playa. Así que sobre eso no hay discusión: iremos al mar con toda seguridad.
>
> Mi padre quiere alquilar un apartamento, que es más independiente.
>
> Pero mi madre prefiere un hotel, que te lo dan todo hecho. Dice que, si no, no para de trabajar. Pero que conste que en casa colaboramos todos, ¿eh?
>
> Nosotros preferimos ir al camping. No sales del agua en todo el día y es más fácil encontrar amigos. Y, además, prometemos ayudar en todo.
>
> No sé en qué acabará la cosa. Lo más probable es que vayamos a un hotel. Pero nunca se sabe, todo es posible… ([T3], p. 20)

PS3. La probabilidad a priori es la probabilidad en ausencia de información: En este significado la ocurrencia de un resultado depende parcialmente de causas no deterministas, las probabilidades se denominan a posteriori cuando se ajustan a partir de la experiencia, y a priori cuando se desconocen tanto las causas como el resultado obtenido. Una mención indirecta de esta propiedad, compleja incluso para adultos, se encuentra en el siguiente ejemplo, donde la asignación clásica de probabilidades puede no ser adecuada. Por tanto, tratar solo la aproximación clásica puede promover en ellos el sesgo de equiprobabilidad: *"La probabilidad de que salgas delegado en una clase de 30 alumnos sería de 1 entre 30"* ([T10], p. 209).

Ambas editoriales incluyen propiedades de los cuatro significados (Tabla 2.12), como sugieren los documentos curriculares. Se observa la presencia durante todos los ciclos de propiedades del significado intuitivo, con respecto a la impredecibilidad y a la tipología de sucesos. Las propiedades fundamentales de los significados clásico y frecuencial, sugeridas en los documentos españoles, se presentan gradualmente; con mayor presencia del primero, muy baja atención a la experimentación y sin mención a la simulación, a pesar de la importancia que otorga la Junta de Andalucía al uso de tecnologías (Consejería de Educación, 2007). Asimismo, las dos propiedades fundamentales del significado subjetivo, sugeridas en los documentos curriculares, están mencionadas en los dos últimos ciclos.

Tabla 2.12. Propiedades presentes en los libros de texto y los documentos curriculares

Propiedad según significado	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Intuitivo						
PI1. Impredecibilidad del resultado	x	x	x	x	x	x
PI2. Posible: cualquier resultado de un experimento	x	x	x	x	x	x
PI3. Imposible: nunca se verifica	x	x	x	x	x	x
PI4. Seguro: siempre ocurre	x	x	x	x	x	x
PI5. Calificable comparando				x		x
Clásico						
PC1. Número de resultados finito y numerable	x	x	x	x	x	x
PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales	x	x	x	x	x	x
PC3, PC4. Casos favorable; posibles	x	x	x	x	x	x
PC5. Valor objetivo, calculable			x		x	x
PC6. Regla de Laplace			x		x	x
Frecuencial						
PF1. Colectivo: semejantes que difieren en atributos observables	x	x	x	x	x	x
PF2. Atributos equiprobables o no	x	x	x	x	x	x
PF3. Probabilidad: Valor objetivo hipotético, estimable			x		x	
Subjetivo						
PS1. Suceso incierto: impredecible aunque se tiene información adicional			x	x	x	x
PS2. Probabilidad: condicionada por un sistema de conocimientos			x	x	x	x

En la Tabla 2.13 se presentan propiedades importantes consideradas por las editoriales y que no se identificaron en el análisis de los documentos curriculares. En particular, la Serie 1 desarrolla cuatro propiedades del significado frecuencial que facilitan la comprensión de su carácter aproximado y su relación con la estadística.

Ambas editoriales, durante todos los ciclos, incluyen propiedades del significado intuitivo que vinculan con los significados frecuencial y subjetivo; y en los dos últimos ciclos presentan la asignación clásica como cuantificación de una posibilidad, y tres propiedades del subjetivo referidas a la posible relación de causas y resultados.

Tabla 2.13. Propiedades presentes en los libros, ausentes en los documentos curriculares

Propiedad según significado	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Intuitivo						
PI6. La posibilidad se puede aproximar por análisis del fenómeno	x	x	x	x	x	x
PI7. La posibilidad se puede aproximar con experiencias anteriores	x	x	x	x	x	x
Clásico						
PC7. La posibilidad es cuantificable			x		x	x
Frecuencial						
PF5. Fiabilidad de estimación aumenta con N					x	
PF6. Frec. rel. tiende a estabilizarse					x	
PF7. Frec. rel. varía en cada serie de N ensayos			x			
Subjetivo						
PS3. Probabilidad a priori: probabilidad en ausencia de información					x	x

Ortiz (2002) identifica algunas propiedades adicionales, por ejemplo la ley empírica de los grandes números, y con más formalidad, como la comprobación de propiedades básicas de la frecuencia relativa. Al igual que este autor, observamos que una de las editoriales presenta pocas propiedades del significado frecuencial, y únicamente en el contexto estadístico. A diferencia de este autor, notamos algunas menciones tangenciales a propiedades del significado subjetivo que no aparecen en su análisis.

2.10. PROCEDIMIENTOS

La exposición de los procedimientos en los textos analizados es informal y se implementan con significados parciales. A continuación presentamos los que observamos, clasificados de acuerdo con el significado de la probabilidad al que correspondan.

2.10.1. PROCEDIMIENTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO INTUITIVO

La mayoría de los procedimientos descritos en las Tablas 2.2 y 1.2 están presentes en los textos analizados.

PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas. Los textos analizados evocan situaciones conocidas por el niño, e invitan a la reflexión sobre la presencia del azar en tales situaciones. El reconocimiento de este tipo de experiencias fortalece la comprensión de los conceptos de aleatoriedad y experimento aleatorio. Un ejemplo se presenta en la Figura 2.24.

Figura 2.24. Distinción de fenómenos aleatorios y deterministas ([T3], p. 205)

PRI2. Reconocer la impredecibilidad de un resultado. Los textos analizados invitan a la reflexión sobre el resultado que se obtendrá, antes de la experimentación, en situaciones conocidas por el niño. Esta reflexión conlleva al reconocimiento de la variabilidad en los resultados y de la propiedad de impredecibilidad; por ejemplo al niño de primer ciclo se presenta una ruleta hexagonal de seis colores y se pregunta "*Antes de girar la ruleta, ¿podemos saber qué color saldrá? __ Sí __ No*" ([T6], p. 165).

PRI3. Reconocer tipos de sucesos. Los textos analizados plantean este procedimiento con dos clases de situación didáctica: presentan a la vez varios sucesos, cada uno ligado a un experimento diferente (como en la Figura 2.25), o presentan un experimento y definen varios sucesos referidos a éste (como en la Figura 2.20). En ambos casos, suele haber un suceso de cada tipo y se pide al niño identificar para cada suceso si corresponde a un suceso seguro, posible o imposible.

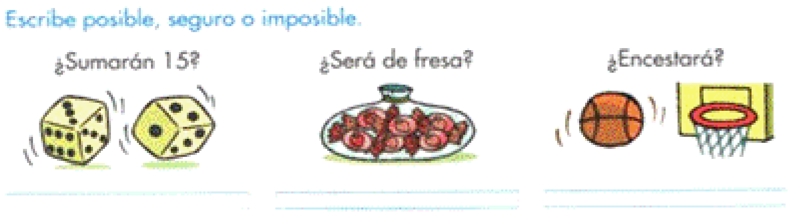


Figura 2.25. Reconocimiento de tipos de sucesos ([T1], p. 188)

PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades. Los textos presentan situaciones didácticas para que el niño distinga niveles de posibilidad de ocurrencia de un suceso asociado a un cierto experimento aleatorio por medio de expresiones verbales, como "muy probable" o "poco probable". Un ejemplo se presenta en la Figura 2.12.

PRI5. Comparar cualitativamente probabilidades. Dados dos sucesos, se pide elegir el que parece más probable. Este tipo de actividades, ampliamente utilizado en la investigación sobre cuantificación de probabilidades por parte de los niños, como las de

Piaget e Inhelder (1951), Fischbein y Gazit (1984), Cañizares (1997), aparecen en los ejemplos mostrados en la Figura 2.26

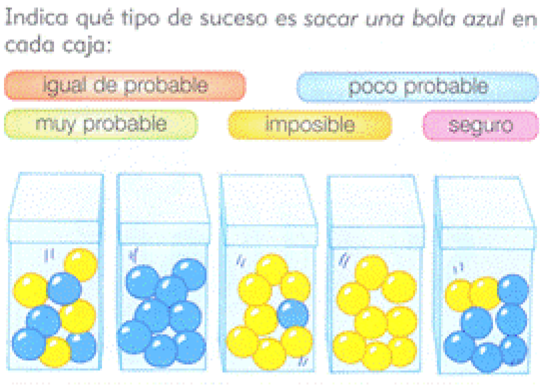


Figura 2.26. Comparación cualitativa de probabilidades ([T8], p. 125)

2.10.2. PROCEDIMIENTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO CLÁSICO

Todos los procedimientos descritos en la Tabla 2.2, y casi todos los de la Tabla 1.3, están presentes en los textos analizados, de forma implícita o explícita.

PRC1. Analizar diferentes juegos de azar. Los textos analizados evocan juegos conocidos por el niño, como el parchís o los sorteos, y proponen comparar (o calcular) la probabilidad de algunos sucesos relacionados con estos juegos, más que la reflexión sobre sus características. En las secciones anteriores se presentaron varios ejemplos.

PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles. Identificamos dos niveles para este procedimiento en los textos analizados, de acuerdo con la complejidad del experimento, el primero referido a experimentos simples y el segundo a experimentos compuestos. El primer nivel sería un procedimiento previo a la enumeración sistemática, en general se pide la lista de posibles resultados sin una técnica, como en la Figura 2.27.

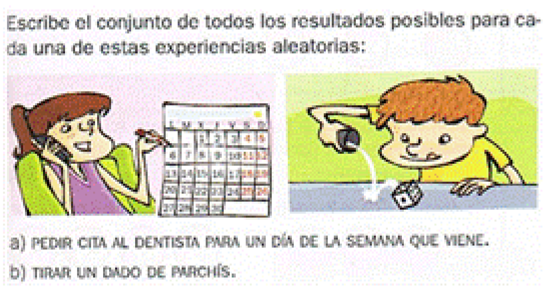


Figura 2.27. Enumeración del espacio muestral ([T5], p.205)

El segundo nivel potencia el interés de los niños para buscar procedimientos de enumeración sistemática, por ejemplo apoyados de gráficos como el diagrama en árbol; las técnicas de combinatoria no se desarrollan formalmente en Primaria. Procedimientos de razonamiento combinatorio, fortalecen el desarrollo de razonamiento probabilístico en los niños. A continuación se presenta un ejemplo sencillo, que puede generar un conflicto semiótico si no se aclara la importancia del orden combinado con la denominación de la moneda: *"Copia y completa todos los resultados posibles (cara-cruz), en la experiencia TIRAR DOS MONEDAS AL AIRE, una de 50 céntimos y otra de 10 céntimos"* ([T5], p.205).

PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables. Los textos analizados se enfocan en identificar o enumerar casos favorables y posibles, tanto en experimentos simples como compuestos. El reconocimiento de casos no favorables está implícito en la distinción de estos dos tipos de casos, es un paso previo a la noción de suceso complementario del significado axiomático. Un ejemplo se presenta en la Figura 2.21.

PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables. La mayoría de situaciones didácticas asumen la equiprobabilidad de los sucesos elementales, sin hacerlo explícito; en tales casos sería labor del profesor hacer notar esta propiedad y explicar las situaciones bajo las cuales es válida para evitar en sus alumnos el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Aunque las situaciones con sucesos elementales equiprobables aparecen desde primer ciclo, este procedimiento aparece más adelante, la Serie 1 lo hace en segundo ciclo y la Serie 2 en tercero. El ejemplo de Figura 2.28 pregunta por la probabilidad de dos sucesos complementarios en un sorteo, recibir uno u otro premio no son equiprobables.

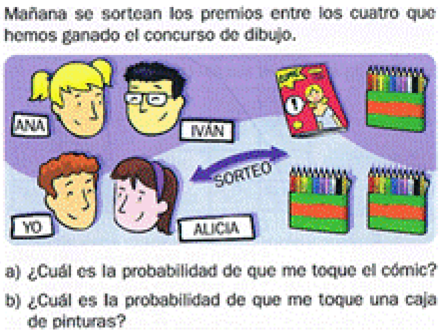


Figura 2.28.Equiprobabilidad en significado clásico ([T3], p. 209)

PRC5. Comparar probabilidades con razonamiento proporcional. Este procedimiento es poco frecuente en los textos de la muestra. Antes de la introducción de la asignación numérica de probabilidades, algunas actividades inducen a contestar las preguntas con base en el número de casos favorables al suceso, manteniendo constante el número de casos posibles. En general, el objetivo principal de la situación didáctica es la comparación y la respuesta puede darse en términos de la relación de orden sin la asignación numérica de estas probabilidades (Figura 2.29).

Figura 2.29.Comparación de probabilidades con razonamiento proporcional ([T3], p. 213)

PRC6. Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples. La Serie 1 introduce la asignación numérica de probabilidades con el significado clásico en segundo ciclo y la Serie 2 en tercero. La regla de Laplace aplica para sucesos compuestos bajo el supuesto de equiprobabilidad en los sucesos elementales. Estos textos presentan la forma de cálculo sin mención a sucesos elementales o compuestos, que tampoco se definen, como es de esperar para la edad de los niños. Este procedimiento es muy frecuente en esta muestra de textos, un ejemplo se observa en la Figura 2.30.

Figura 2.30.Regla de Laplace ([T5], p. 208)

Otros procedimientos del significado clásico observados en los textos analizados, que no se identificaron en los documentos curriculares, se describen a continuación.

PRC7. Decidir si un juego es equitativo o no. Los textos analizados rara vez ponen en consideración reflexionar acerca de las condiciones globales del juego de azar que están analizando los niños; en general, preguntan por probabilidades puntuales, como obtener resultados particulares o que gane algún niño específico. Decidir que un juego es equitativo en las situaciones planteadas en estos textos sólo requiere la comparación de las probabilidades de ganar entre todos los jugadores; son juegos sencillos que no incluyen valores de apuesta. La única situación encontrada donde se pregunta si un juego es equitativo es la siguiente:

> Rosa, Iria y Esteban no se ponen de acuerdo en qué película ver en el cine. Deciden lanzar dos monedas: si salen dos caras elige Rosa; si sale cara y cruz elige Iria. Si no, elige Esteban. ¿Es justo? Ayúdate de un dibujo, y explica tu respuesta. ([T9], p. 219).

Otros procedimientos que hemos asociado al significado clásico, aunque no son exclusivos de éste sino ligados al significado axiomático (Tabla 1.5.1), se identifican en situaciones problema del tipo *SPC* donde se espera una asignación de probabilidad con regla de Laplace.

PRC8. Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos etapas independientes. Como ya se ha indicado, los textos analizados no hacen distinción entre experimentos simples y compuestos, de modo que los niños tratan experimentos compuestos y calculan algunas probabilidades conjuntas sin utilizar lenguaje formal. Hay pocas situaciones didácticas de este tipo, en ellas los sucesos conjuntos elementales son equiprobables y el procedimiento seguido por los textos es aplicar la regla de Laplace. El siguiente ejemplo se propone al niño después que se ha construido el espacio muestral, en otra actividad, y como ayuda, se presenta el cálculo de otra probabilidad conjunta del mismo experimento aleatorio.

> En la experiencia TIRAR DOS MONEDAS:
> a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos cruces?
> b) ¿Y la de obtener una cara y una cruz? ([T5], p. 209).

PRC9. Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos etapas dependientes. El análisis de experimentos compuestos de dos etapas dependientes constituye un avance importante en el desarrollo del razonamiento probabilístico del niño, pues requiere, por ejemplo, que el niño reconozca la intersección de sucesos, la importancia que puede tener el orden y la dependencia (sin conocer aún la probabilidad condicionada). Hay muy pocas situaciones didácticas de este tipo; un ejemplo se observa en la Figura 2.31.

Figura 2.31.Asignación de probabilidad conjunta en muestreo sin reemplazamiento ([T5], p. 209)

2.10.3. PROCEDIMIENTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO FRECUENCIAL

Los procedimientos descritos en la Tabla 2.2, y algunos de la Tabla 1.4, excepto los referidos a simulación, están presentes en los textos analizados.

PRF1. Enumerar o discriminar atributos en un colectivo. La recolección de datos es poco frecuente en estos textos; la discriminación de atributos en un colectivo aparece pocas veces y se realiza a partir de una lista de datos disponible en el mismo enunciado. El siguiente ejemplo propone la construcción de la tabla para una variable, que implica identificar y enumerar los diferentes atributos observados.

> Al preguntar a un grupo de chicos y chicas por su postre preferido se obtuvieron las respuestas siguientes:
> helado – flan – fruta – fruta – helado – natillas – yogur – natillas – helado – fruta – flan – yogur – fruta – helado – yogur – fruta – flan
> a) Construye la tabla de frecuencias de los datos e indica cuáles son la frecuencia absoluta y relativa del helado. ([T5], p. 199)

PRF2. Calcular la frecuencia relativa (de atributos) a partir de observaciones o datos. En la Serie 1, todas las actividades, de las páginas dedicadas a estadística descriptiva del 6º curso, se orientan a calcular frecuencias relativas de valores observados de una variable estadística a partir del listado de datos, de un gráfico o la tabla de recuentos. Hay pocas actividades en las que el niño calcule la frecuencia relativa a partir de los datos o de la observación; un ejemplo se da en la Figura 2.32.

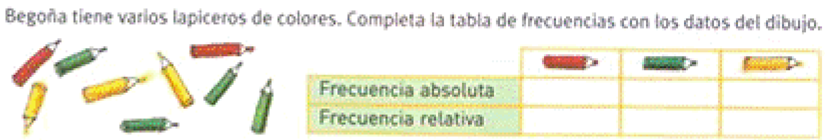
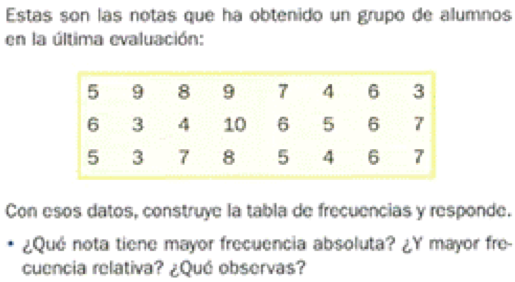


Figura 2.32.Cálculo de frecuencias relativas ([T10], p. 210)

PRF3. Representar una distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica: Este procedimiento solo se asocia a la estadística y no a la probabilidad en nuestra muestra de textos. En estos textos, la representación de una distribución de frecuencias es el último paso en la evolución del uso de lenguaje tabular, que se mostró en la Sección 2.5.2, y es un paso previo a la construcción de una distribución de probabilidades para variable discreta. Un ejemplo se muestra en la Figura 2.33 donde a partir de lista de datos de una variable se propone la construcción de la tabla.


Estas son las notas que ha obtenido un grupo de alumnos en la última evaluación:

5	9	8	9	7	4	6	3
6	3	4	10	6	5	6	7
5	3	7	8	5	4	6	7

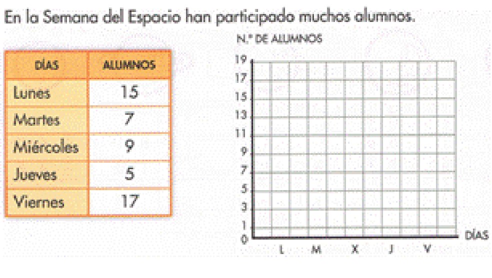
Con esos datos, construye la tabla de frecuencias y responde.

- ¿Qué nota tiene mayor frecuencia absoluta? ¿Y mayor frecuencia relativa? ¿Qué observas?

Figura 2.33.Representación tabular de una distribución ([T5], p. 192)

La representación gráfica de las frecuencias absolutas se realiza desde primer ciclo sin el uso de lenguaje formal, como se observa en la Figura 2.34; la variedad de gráficos utilizados para esta representación se expuso en la Sección 2.5.3. Este nivel de representación es más accesible a los niños que la representación gráfica de frecuencias relativas, que no se propone en estos textos, suponemos que debido a la dificultad del cambio de escalas con números enteros a escalas con decimales o fraccionarios.

PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimentos compuestos). Como se indicó en la Sección 2.5.2, el uso de lenguaje tabular para experimentos compuestos es poco frecuente; algunas tablas de doble entrada se encuentran en la parte de tratamiento de datos, ninguna en la parte de probabilidad. La Figura 2.5 ilustra un ejemplo, que se podría conectar con la probabilidad.



DÍAS	ALUMNOS
Lunes	15
Martes	7
Miércoles	9
Jueves	5
Viernes	17

Figura 2.34.Representación gráfica de una distribución ([T1], p. 56)

PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos. Todas las situaciones didácticas, en la sección de "probabilidad a partir de datos" de la Serie 1 en cuarto y sexto curso, se orientan a proporcionar una estimación para una probabilidad; en algunos casos a partir del listado de datos o la tabla de recuentos (Figura 2.35), en otros proponiendo la experimentación por parte del niño (Figura 2.36).

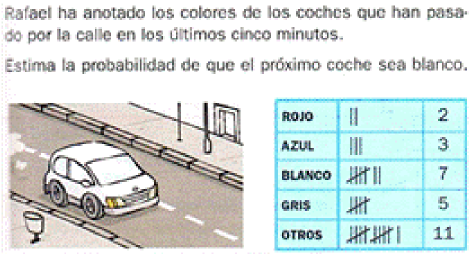


Figura 2.35. Estimación de la probabilidad a partir de datos observados ([T5], p. 211)

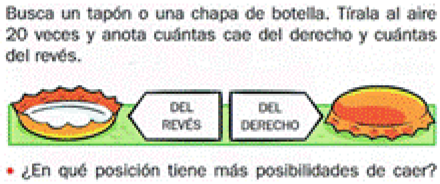


Figura 2.36. Estimación de una probabilidad teórica ([T3], p. 211)

PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación del valor de probabilidad. En estos textos no hay mención explícita a la diferencia entre el valor teórico de la probabilidad y su estimación, como se indicó en *PF5*; queda en manos del profesor hacer esta aclaración, así como explicar la diferencia entre "calcular la probabilidad", del significado clásico, y "estimar la probabilidad", del significado frecuencial. Solo una situación didáctica permite reflexionar acerca del carácter aproximado de la estimación de probabilidades (Figura 2.23). Esta actividad también permitiría contrastar el valor teórico con el estimado, que dejaría en evidencia la calidad de la aproximación.

Otros procedimientos del significado frecuencial, sin mención en los documentos curriculares, se describen a continuación.

PRF8. Reflexionar sobre la fiabilidad. Los textos sólo hacen mención a la fiabilidad en dos ocasiones, cuando se enuncia la propiedad (Sección 2.9.3), y en la actividad de la Figura 2.37.

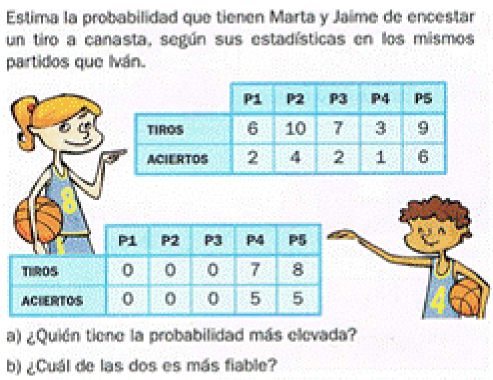
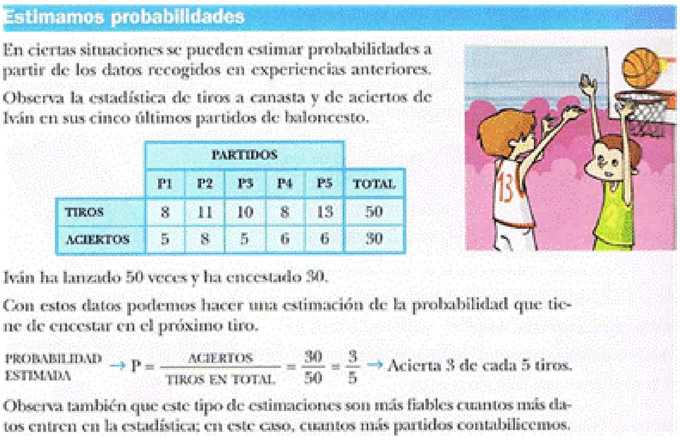


Figura 2.37. Reflexión sobre la fiabilidad de una estimación de probabilidad ([T5], p. 210)

PRF9. Analizar experimentos en los que puede aplicarse este significado. Los textos presentan diversidad de situaciones adecuadas para la aplicación del significado frecuencial, sin analizar las razones que justifican esta aplicación. En la mayoría de casos no se dispone de suficiente información de tipo estadístico, para que la asignación frecuencial de probabilidades sea suficientemente precisa, pues el tamaño de muestra es pequeño. Un ejemplo se plantea en la Figura 2.38.



Estimamos probabilidades

En ciertas situaciones se pueden estimar probabilidades a partir de los datos recogidos en experiencias anteriores.

Observa la estadística de tiros a canasta y de aciertos de Iván en sus cinco últimos partidos de baloncesto.

	PARTIDOS					
	P1	P2	P3	P4	P5	TOTAL
TIROS	8	11	10	8	13	50
ACIERTOS	5	8	5	6	6	30

Iván ha lanzado 50 veces y ha encestado 30.

Con estos datos podemos hacer una estimación de la probabilidad que tiene de encestar en el próximo tiro.

PROBABILIDAD ESTIMADA $\rightarrow P = \dfrac{\text{ACIERTOS}}{\text{TIROS EN TOTAL}} = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5} \rightarrow$ Acierta 3 de cada 5 tiros.

Observa también que este tipo de estimaciones son más fiables cuantos más datos entren en la estadística; en este caso, cuantos más partidos contabilicemos.

Figura 2.38.Experimentos donde aplica el significado frecuencial ([T5], p. 210)

2.10.4. PROCEDIMIENTOS RELACIONADOS CON EL SIGNIFICADO SUBJETIVO

El único procedimiento relacionado con el significado subjetivo que se identificó en los documentos curriculares (Tabla 2.2) está presente en los textos analizados, de forma implícita.

PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal. Se presentan algunos experimentos aleatorios ligados a fenómenos naturales o a juegos de destreza que se pueden analizar con el significado subjetivo dependiendo de la disponibilidad de información o del conocimiento previo. En el siguiente ejemplo, la pregunta el conocimiento del niño puede llevar a respuestas parcialmente diferentes: "*Escribe todos los resultados posibles en la experiencia LANZAR TRES TIROS LIBRES*" ([T5], p. 214).

Para resumir los hallazgos en esta sección se presentan las Tablas 2.14 y 2.15. En la primera se observa que ambas editoriales atienden las directrices curriculares al incluir procedimientos de cada uno de los significados, excepto los referidos a interpretación. La presencia del significado intuitivo es notable en todos los ciclos, donde los procedimientos de reconocimiento aparecen desde primero y los de valoración desde segundo ciclo. El ciclo en que se introducen procedimientos del significado clásico varía de una editorial a otra. En el significado frecuencial, el foco de atención varía de una editorial a otra, solo la Serie 1 incluye procedimientos de naturaleza probabilística; ambas incluyen procedimientos de naturaleza estadística, y ninguna incluye procedimientos de simulación. Los procedimientos del significado subjetivo están implícitos en otros, y tienen baja presencia en estos textos, así como en las directrices curriculares.

Tabla 2.14. Procedimientos presentes en los libros de texto y documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Intuitivo						
PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas	x	x	x	x	x	x
PRI2. Reconocer la impredicibilidad de un resultado	x	x	x	x	x	x
PRI3. Reconocer tipos de sucesos	x	x	x	x	x	x
PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades			x	x	x	x
PRI5. Comparar cualitativamente posibilidades			x	x	x	x
Clásico						
PRC1. Analizar juegos de azar	x	x	x	x	x	x
PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles			x	x	x	x
PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables						
PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables			x		x	x
PRC5. Comparar con razonamiento proporcional			x		x	x
PRC6. Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples			x		x	x
Frecuencial						
PRF1. Enumerar o discriminar atributos	x	x	x	x	x	x
PRF2. Calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos					x	x
PRF3. Representar distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica	x	x	x	x	x	x
PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimento compuesto)			x			
PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos			x		x	
PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación			x		x	
Subjetivo						
PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal			x	x	x	x

En la Tabla 2.15 se observa que ambas editoriales, más en la Serie 1, mencionan en el último ciclo procedimientos importantes de los significados clásico y frecuencial que no se identificaron en el análisis de los documentos curriculares. En especial, observamos la inclusión de dos procedimientos, enmarcados en situaciones del significado clásico, que son trasversales a los cuatro significados (PRC10 y PRC11), con respecto al desarrollo del significado axiomático. Por otra parte, resaltamos que la Serie 2 incluye procedimientos que implican creatividad, en los dos últimos ciclos pregunta al niño por su propia ejemplificación de conceptos.

Cabe notar que la mayoría de procedimientos promueven el desarrollo del componente asignación de probabilidades del modelo de alfabetización probabilística (Gal, 2005), aunque no se hace énfasis en la evaluación de la calidad de la información disponible.

Ortiz (2002) identifica, aunque con baja frecuencia, procedimientos de mayor complejidad, por ejemplo el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos con experimentos compuestos dependientes, o con más formalidad, como determinar la distribución de una variable aleatoria. Al igual que este autor, observamos el predominio de procedimientos algorítmicos sobre los interpretativos, y que una de las editoriales presenta pocos procedimientos del significado frecuencial, y únicamente en el contexto estadístico.

Tabla 2.15. Procedimientos presentes en los libros y ausentes en los documentos curriculares

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Clásico						
PRC7. Decidir si un juego es equitativo						x
PRC8. Asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes					x	
PRC9. Asignar probabilidad conjunta en experimentos dependientes					x	
PRC10. Calcular probabilidad de la unión de dos sucesos					x	
PRC11. Calcular probabilidad del complementario					x	
Frecuencial						
PRF8. Reflexionar sobre fiabilidad de la estimación					x	
PRF9. Analizar experimentos en los que puede aplicarse este significado			x		x	

2.11. CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS CURRICULAR

Como se indicó al establecer los objetivos este estudio trató de c*aracterizar el significado institucional del objeto matemático "probabilidad" en los documentos curriculares para educación primaria en Andalucía vigentes durante el curso 2011-2012.*

Asimismo se pretendió *describir el significado de la probabilidad presentado en una muestra de libros de texto para educación primaria.* Todo ello para c*aracterizar un significado de referencia a nivel curricular del objeto matemático "probabilidad" en la educación primaria en Andalucía, que sea la base en la construcción de los instrumentos de evaluación de conocimientos del profesor en nuestro trabajo.*

Inicialmente se plantearon las siguientes hipótesis:

H2.1: *Se espera que nuestros resultados indiquen predominio del significado intuitivo de la probabilidad.*

H2.2: *Se espera una presencia alta de significado clásico de la probabilidad.*

H2.3: *Se espera que nuestros resultados indiquen cierta presencia del significado frecuencial.*

H2.4: *Se espera que nuestros resultados indiquen baja presencia del significado subjetivo de la probabilidad.*

H2.5: *Se espera que nuestros resultados indiquen ausencia del significado axiomático de la probabilidad.*

En lo que sigue presentamos nuestras conclusiones respecto a estos objetivos e hipótesis en tres apartados, de acuerdo con los tres objetivos planteados para el Estudio 1. El primero con respecto a las directrices curriculares, y el segundo con respecto a los contenidos presentes en dos colecciones de libros de texto. Estos análisis nos permiten consolidar en el tercer apartado nuestro significado institucional de referencia para la investigación.

2.11.1. CONCLUSIONES SOBRE LAS ORIENTACIONES CURRICULARES

Las directrices curriculares confirman, en general nuestras hipótesis. A nivel nacional promueven el desarrollo del significado intuitivo de la probabilidad desde el primer ciclo; la introducción del significado subjetivo y frecuencial en el segundo ciclo; y un primer nivel de formalización del significado clásico y del frecuencial en el tercer ciclo. En general, los objetos matemáticos aparecen implícitamente, en su mayoría con finalidad introductoria y de reconocer su aplicabilidad.

Las directrices regionales siguen esta misma línea. En cuanto a contenidos, refuerzan el desarrollo del significado clásico de probabilidad y proponen en forma explícita contextos de aplicación potenciando los significados frecuencial y subjetivo.

Las situaciones problema mencionadas cubren los cuatro significados de la probabilidad, aunque en la descripción de contenidos y criterios de evaluación no aparecen explícitas situaciones relacionadas con el significado subjetivo. Se sugiere que los estudiantes tengan contacto con los conceptos principales, sin definiciones formales, y uso adecuado del lenguaje probabilístico básico, en particular del usado en el cotidiano. Se observa más atención en los procedimientos que en las propiedades; en particular se promueve la adquisición de destrezas para el cálculo y la interpretación.

Las propuestas de NCTM (2000) y del proyecto GAISE (Franklin et al., 2007) dan más importancia a los datos y a argumentos de experimentación y simulación; lo que conlleva mayor énfasis del significado frecuencial. El desarrollo de contenidos probabilísticos tiene como finalidad principal su servicio para la estadística. Al igual que en las directrices españolas en edades tempranas se promueve el significado intuitivo de la probabilidad; entre 8 y 10 años, el significado frecuencial; y de 11 a 13 años se introduce la formalización del significado clásico. A diferencia del currículo español, no se identifican menciones al significado subjetivo.

2.11.2. CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS DE DOS COLECCIONES DE LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA

También se confirman nuestras hipótesis previas en las dos colecciones españolas analizadas, que desarrollan parcialmente los cuatro significados de la probabilidad sugeridos para estos ciclos en las directrices curriculares. La mayoría de conceptos se presentan en forma intuitiva, sin definiciones formales, y no se mencionan algunas propiedades o los supuestos requeridos para el cumplimiento de propiedades; esto promueve la generación de conflictos semióticos, sesgos o heurísticas.

Las dos editoriales difieren en forma notable en cuanto a las características de los procedimientos propuestos y a la orientación, reflejada en la inclusión de algunos contenidos así como en el ciclo en el cual se introducen éstos. Llama la atención la ausencia, en ambas colecciones, de objetos matemáticos relacionados con simulación, a pesar de la importancia dada en los documentos curriculares al uso de tecnologías para la información.

El significado intuitivo, es el que recibe mayor nivel de atención en ambas colecciones. Está presente en los tres ciclos, en el primer ciclo se introduce y desarrolla este significado, en los otros ciclos se fortalece su desarrollo y se articula parcialmente con otros significados.

El significado clásico está muy presente en ambas colecciones en los tres ciclos; en el primero se dan a conocer propiedades de este significado, aunque se está desarrollando el intuitivo; en el segundo se introduce con cierta formalidad y se articula parcialmente con el significado intuitivo; en el tercer ciclo se fortalece su desarrollo, en particular su asignación numérica.

El significado frecuencial de la probabilidad recibe una baja atención. En los textos de primer ciclo, hay algunas menciones a las propiedades del significado frecuencial, cuando se está desarrollando el intuitivo o cuando se presentan contenidos de tratamiento de datos. En los otros dos ciclos, se omite en la Serie 2, y se introduce con poco nivel de detalle en la Serie 1; en el segundo ciclo, se introducen algunas propiedades con cierta formalidad, y se articula parcialmente con el significado intuitivo y en el tercero se fortalece su desarrollo.

La omisión del significado frecuencial en la Serie 2 puede favorecer la aparición del sesgo de equiprobabilidad en los niños; es de suponer que extiendan la aplicación de la regla de Laplace a todas las situaciones probabilísticas que enfrentan, si no conocen otras alternativas de asignar o aproximar numéricamente probabilidades. Por otra parte, el número de ensayos presentados o requeridos en la Serie 1 es menor que 30, con la desventaja que puede favorecer la heurística de representatividad o el sesgo de la ley de los pequeños números (Tversky y Kahneman, 1974).

El significado subjetivo de la probabilidad tiene muy baja atención en ambas editoriales. Las propiedades asociadas al significado subjetivo se encuentran presentes en los textos de motivación de los capítulos de probabilidad, nunca en forma explícita. Básicamente referidas a los conceptos de suceso incierto y probabilidad como grado de creencia, sin utilizar estas denominaciones; no se llega a la distinción entre probabilidades a priori y a posteriori. De alguna manera se siguen las sugerencias de Godino, Batanero y Cañizares (1987) con respecto a usar en forma intuitiva este enfoque, en la educación primaria, con situaciones cotidianas del niño. Sería labor del profesor comenzar a sugerir la asignación, por parte del niño, de valores numéricos a las probabilidades, que en los textos solo se preguntan con valoración cualitativa, así como proponer la revisión de estas probabilidades asignadas después de nuevas experiencias.

Común a los cuatro significados, en las dos series de textos observamos la relevancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, así como su gran riqueza y diversidad. Nuestro análisis sugiere que la presentación de la probabilidad en los textos lleva un uso diferenciado de diversas representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), dependiendo de la editorial y el ciclo educativo. El lenguaje predominante en todos los ciclos es el verbal de uso cotidiano. Los lenguajes numérico y simbólico se introducen gradualmente, en concordancia con su aparición en otros bloques de contenido en el área de matemáticas, aunque no se relacionan de forma explícita. Los lenguajes tabular y gráfico, que utilizan desde primer ciclo en contexto de estadística, aparecen casi desligados de la probabilidad.

También es común para los cuatro significados en las dos editoriales, el predominio de la argumentación basada en ejemplos y contraejemplos, y el aumento en la complejidad de la argumentación con el avance en los ciclos. En la preferencia por ese tipo de argumentación reconocemos un principio fundamental para el aprendizaje de los conceptos citado por Skemp (1980), introducir un concepto mediante una adecuada colección de ejemplos y una adecuada secuenciación de actividades, en lugar de hacerlo mediante la definición. Cabe notar que la generalización no es cuidadosa en cuanto a las condiciones de validez, y esto es un generador de conflictos potenciales, sesgos o concepciones erróneas.

Todos estos resultados han de interpretarse con precaución, pues, de acuerdo a Lowe y Pimm (1996), el impacto del libro de texto depende no sólo del mismo libro, sino del lector, y del profesor, así como de las interacciones que determinan su uso en el aula. En este sentido el profesor debe buscar estrategias para que los estudiantes progresen desde lo intuitivo hasta los significados más avanzados de la probabilidad. Ello requiere, entre otros aspectos, que los profesores relacionen lenguaje cotidiano y lenguaje formal, mediante el cual se construye el conocimiento matemático, facilitando el aprendizaje de los estudiantes (Chapman, 1995; O'Halloran, 1998; Veel, 1999).

Significado de la probabilidad pretendido en el currículo español para educación primaria

Para finalizar el capítulo resumimos el significado institucional de referencia para nuestro estudio, con base en los objetos matemáticos provenientes del análisis curricular expuesto en este capítulo.

Este significado será base para la construcción de los instrumentos de evaluación en los Estudios 2 y 3 y la interpretación de las respuestas obtenidas en los mismos. Se fundamenta en los diversos elementos de significado asociados a cada concepto identificados en el Capítulo 1 y descritos en las Tablas 2.1 y 2.2, o que aparecen en los libros de texto. Se resume en la Tabla 2.16 y se completa con la Tabla 2.17 con los objetos transversales a estos significados, referidos al lenguaje y a la argumentación.

No comentamos más los elementos encontrados, pues ya se han detallado exhaustivamente. Todas estas conclusiones apuntan a las necesidades formativas de los futuros profesores, incluso sobre el conocimiento común y también en los diferentes componentes del conocimiento matemático para la enseñanza.

Tabla 2.16.Lenguaje y argumentos en el significado de pretendido de la probabilidad en educación primaria

Tipo	Objeto
Lenguaje	L1. Lenguaje verbal: expresiones cotidianas L2. Lenguaje formal: numérico y simbólico L3. Lenguaje tabular: listado de datos, tabla de recuentos, tabla de frecuencias, tabla de doble entrada L4. Lenguaje gráfico: gráfico de barras, gráfico circular, pictograma, histograma, diagrama en árbol
Argumentos	A1. Ejemplos y contraejemplos A2. Gráficos para comprobar propiedades A3. Razonamiento inductivo A4. Generalización

Tabla 2.17. Síntesis de objetos matemáticos en el significado de pretendido de la probabilidad en educación primaria

	Intuitivo	Clásico	Frecuencial	Subjetivo
Situac. Prob.	SPI. Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos	SPC. Previsión de probabilidad en juegos de azar	SPF. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados	SPS. Estudio de sucesos cuya probabilidad puede cambiar por información disponible
Conceptos	CI1. Azar y variabilidad CI2. Suceso; seguro, posible, imposible CI3. Posibilidad, grado de creencia	CC1. Juego de azar CC2. Casos favorables; c. posibles CC3. Probabilidad como cociente *CC4. Juego equitativo* *CC5. Experimento compuesto Dependencia-independencia*	CF1. Colectivo (población); atributos CF2. Ensayo; ensayos repetidos CF3. Frecuencia (absoluta, relativa) CF4. Valor estimado de probabilidad	CS1. Suceso incierto CS2. Probabilidad como grado de creencia personal
Propiedades	PI1. Impredecibilidad del resultado PI2. Posible: cualquier resultado de un experimento PI3. Imposible: nunca se verifica PI4. Seguro: siempre ocurre PI5. Calificable comparando *PI6. Aprox. análisis del fenómeno* *PI7. Aprox. experiencias anteriores*	PC1. Número de resultados finito y numerable PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales PC3. C. favorables: resultados que favorecen PC4. C. posibles: Todos los resultados PC5. Valor objetivo, calculable PC6. Regla de Laplace *PC7. La posibilidad es cuantificable*	PF1. Colectivo: semejantes que difieren en atributos observables PF2. Atributos equiprobables o no PF3. Probabilidad: Valor objetivo hipotético, estimable PF4. Simulación: sustitución exp. por otro *PF5. Fiabilidad aumenta con N* *PF6. Tiende a estabilizarse* *PF7. Varía en cada serie de N ensayos*	PS1. Suceso incierto: impredecible aunque se tiene información adicional PS2. Probabilidad: condicionada por un sistema de conocimientos *PS3. Probabilidad a priori: d en ausencia de información*
Procedimientos	PRI1. Distinguir fenómenos de azar PRI2. Reconocer la impredicibilidad de un resultado PRI3. Reconocer tipos de sucesos PRI4. Valorar posibilidades PRI5. Comparar cualitativamente posibilidades	PRC1. Analizar juegos de azar PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles PRC3. Diferenciar favorables y no favorables PRC4. Distinguir sucesos equiprobables PRC5. Comparar con razonamiento proporcional PRC6. Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples *PRC7. Decidir si un juego es equitativo* *PRC8. Asignar prob. conjunta exp. independientes* *PRC9. Asignar prob. conjunta exp. dependientes*	PRF1. Enumerar o discriminar atributos PRF2. Calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos PRF3. Representar distribución de frecuencias PRF4. Leer tablas de doble entrada PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación PRF7. Simular con tecnología *PRF8. Reflexionar sobre fiabilidad* *PRF9. Analizar experimentos en los que puede aplicarse este significado*	PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal

CAPITULO 3.

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN NIÑOS Y ADOLESCENTES

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo sintetizamos las investigaciones más relevantes sobre comprensión de la probabilidad en niños y adolescentes, respecto a cada uno de los significados tenidos en cuenta en el currículo de educación primaria. Puesto que la investigación existente es demasiado amplia, se hace una selección de las que fundamentaron la investigación, porque serán base para la construcción de los ítems en los cuestionarios de evaluación descritos en los Capítulos 5 y 6, pues nos proporcionan preguntas o tareas pensadas para niños en edad escolar, así como respuestas típicas de alumnos. Se añaden otras que permiten comprender mejor la organización realizada hasta el momento y mostrar los aspectos originales de la nuestra.

Para comprender mejor esta síntesis, hay que tener en cuenta la naturaleza del razonamiento probabilístico. Como indica Cañizares (1997), los niños aprenden en su entorno familiar y social, antes de entrar en la escuela, y su razonamiento se enriquece a partir de la interacción con el mundo que les rodea. La autora sugiere que, desde muy pequeño, basándose en la reversibilidad de las operaciones aritméticas y geométricas, el niño aprende a estimar y diferenciar cantidades, formas y distancias.

Una de las dificultades en el desarrollo cognitivo probabilístico es que los fenómenos aleatorios no son reversibles y por tanto no es identificable un patrón en su comportamiento; pues sólo pueden estudiarse en relación a su distribución (Batanero, Godino y Roa, 2004). Otras dificultades son la falta de unicidad en la forma de asignar un valor de probabilidad a un suceso según se utilice uno u otro significado de la probabilidad, y el hecho de que algunos conceptos de probabilidad son contra-intuitivos (Batanero, 2005).

Este estado de la cuestión ya se inició en Gómez (2011) y parte de las tesis de Serrano (1996) y Cañizares (1997), complementados con otras referencias y trabajos de síntesis como Langrall y Money (2005) y Jones, Langrall y Mooney (2007). El nivel de detalle en la descripción de las investigaciones varía según su relevancia para los Estudios 2 y 3; es más exhaustiva en las publicaciones que nos proporcionan ítems para las versiones finales de nuestros cuestionarios (Anexos 1 y 3), y es más resumida en las publicaciones utilizadas sólo con fines de comparación o como complemento de nuestro análisis.

Las investigaciones se han agrupado según el significado con el que se relacionan y se exponen en orden cronológico. En la Sección 3.2 se presentan las asociadas al significado clásico, empezando con el trabajo de Piaget; en la Sección 3.3 las relacionadas con el significado intuitivo, resaltando el trabajo de Fischbein; en la Sección 3.4 las asociadas al significado frecuencial y en la Sección 3.5 las relacionadas con significado subjetivo.

Para concluir se presenta una síntesis de los aspectos más relevantes de esta revisión que se han tenido en cuenta para construir las versiones finales de los instrumentos de evaluación y para analizar las respuestas observadas en nuestra aplicación.

3.2. APROXIMACIONES DESDE EL SIGNIFICADO CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD

3.2.1. INVESTIGACIÓN DE PIAGET

De acuerdo a Batanero (2001), Piaget trató de establecer criterios para clasificar el nivel de desarrollo intelectual de un niño en diversas edades; a partir de una graduación de la comprensión formal de los conceptos. Su teoría asume que la experiencia, la actividad y el conocimiento previo determinan el aprendizaje; de manera que el conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno La caracterización que realizaron Godino, Batanero y Cañizares (1987) de sus teorías con relación a la probabilidad y conceptos relacionados se resume a continuación:

Principales etapas de desarrollo

Piaget e Inhelder (1951) suponen que, para adaptarse al mundo que le rodea, cuando el niño encuentra una idea nueva, que choca con las ya existentes, tiene un "conflicto cognitivo" o "desequilibrio" en su estado mental, el cual se resuelve mediante asimilación (acepta la nueva idea) y acomodación (modifica toda la estructura mental). Los autores clasifican en varias etapas a los niños de acuerdo con su nivel general de pensamiento, admitiendo la variación de la edad física en que se alcanza cada etapa, que se suceden en forma ordinal. Si las respuestas de un niño a diferentes tareas se ubican en diferentes niveles, su nivel cognitivo global se identifica con el nivel de clasificación en donde se encuentran la mayoría de sus respuestas.

Las etapas en el desarrollo cognitivo están definidas en forma general, y la idea de *operación* constituye un eje fundamental; entendiendo que las operaciones lógicas y formales conforman sistemas de acciones interrelacionadas de forma rigurosa. Esta última característica es la razón por la cual, según Piaget, la noción de azar no se puede desarrollar hasta una edad avanzada, pues el autor la concibe como complemento a la relación causa-efecto; además basada en la comprensión de la proporción y la combinatoria, que son esquemas propios del periodo de las operaciones formales.

Nosotros consideraremos únicamente tres etapas, que son las relevantes hasta finalizar la educación obligatoria:

- *Etapa pre-operacional* (2 a 7 años): Es el período de desarrollo en el que no se comprenden las operaciones (reversibles). El niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos, identificando patrones a partir de la manipulación de objetos reales. En estas edades el niño no puede interpretar la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios, por tanto no tiene una intuición innata de azar. Es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, debido a que no posee los recursos necesarios, como sería el razonamiento proporcional. Realiza combinaciones, permutaciones y variaciones de forma empírica, sin buscar alguna estrategia sistemática de enumeración; por tanto tendrá dificultad en identificar todos los elementos de un espacio muestral.

- *Operaciones concretas* (7 a 11 años): Es el período de desarrollo en el cual se identifican y realizan operaciones sobre objetos físicos presentes u observables, pero todavía hay dificultad en hacerlas en forma abstracta. Se comienza a comprender la conservación de características físicas como masa, peso y volumen y aparecen conceptos que no necesitan ser abstraídos de la experiencia concreta. Los niños establecen relaciones causales y conciben el azar como resultado de la combinación de una serie de causas independientes que producen un resultado inesperado. Pueden resolver problemas de comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes, sólo en situaciones donde el número de casos favorables (o el número de casos desfavorables) a A son iguales en ambos experimentos. Al finalizar la etapa pueden resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción, en casos donde esta proporción es sencilla de observar. A esta edad, los niños pueden realizar el inventario de todas las permutaciones (variaciones o combinaciones) posibles en un conjunto con pocos elementos, utilizando estrategias de ensayo y error, pero no alcanzan estrategias sistemáticas de enumeración.

- *Operaciones formales* (en general aparece sobre los 12 años, aunque se puede retrasar a los 14 o 15): En este período se identifican y realizan operaciones que desarrollan pensamiento hipotético-deductivo. Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones verbalmente, sin referirse a objetos particulares. Con todos estos recursos, el adolescente logra una comprensión completa del azar, que se hace inteligible por medio de esquemas operacionales. Progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso si las fracciones a comparar tienen diferente denominador. Adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para formar todas las permutaciones (variaciones o combinaciones) posibles de un conjunto dado. Este razonamiento combinatorio es necesario para poder concebir las distintas posibilidades existentes y por tanto sólo en este período se comprende el significado clásico de probabilidad.

Algunos experimentos piagetianos

Piaget e Inhelder (1951) deducen las anteriores características de cada etapa planteando a los niños experimentos y haciéndoles entrevistas clínicas para ver la forma en que razonan sobre los mismos. Estudian las concepciones de los niños sobre azar, comparación de probabilidades, razonamiento combinatorio, distribución y convergencia (distribución normal y proceso plano de Poisson), experimento compuesto, entre otros. Describimos solo los dos primeros que son los más cercanos a los niños en Educación Primaria.

Para estudiar la percepción del azar organiza un experimento, que consiste en predecir el comportamiento de ocho bolas rojas y ocho blancas que al inicio de la actividad están ubicadas en dos compartimentos de una bandeja. La bandeja se hace oscilar, generando una mezcla progresiva de las dos clases de bolas y luego se pregunta a los chicos qué esperan que suceda con las dos clases de bolas si se sigue basculando la bandeja. En la etapa pre-operacional, los niños piensan que las bolas se reagrupan por colores, ya sea volviendo a su lugar original o invirtiendo sus posiciones; indican con esta respuesta que no comprenden la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria. En la etapa de operaciones concretas, predicen una mezcla progresiva de las bolas, reconocen la baja credibilidad en que las bolas puedan volver a sus posiciones originales; indican con estas respuestas que comienzan a comprender la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. En la etapa de operaciones formales, responden en forma más analítica con relación a posibles combinaciones y permutaciones, mostrando comprensión del proceso de mezcla aleatoria.

Otro experimento clásico de Piaget e Inhelder, es pedir al niño que indique, entre dos experimentos, cuál tiene más probabilidad de que se observe cierta característica. Por ejemplo, obtener una cruz al dorso de una carta blanca al elegir un elemento al azar, cuando hay dos opciones (tener una cruz marcada al respaldo o no tenerla). Al empezar el experimento se muestra a los niños dos colecciones de 2 a 6 fichas con composiciones distintas en el contenido de una de sus caras (difiere la proporción de fichas marcadas con cruz); luego se voltean para quedar mostrando todas la otra cara y se mezclan. En ese punto se pregunta en cuál de las dos colecciones es más fácil obtener una cruz al tomar una de las fichas.

Según Cañizares (1997), el nivel de complejidad de la tarea cambia según la proporción de cruces en ambas colecciones, tipificando diferentes composiciones: por ejemplo, doble imposibilidad (ninguna tiene cruz), desigualdad de casos favorables e igualdad de posibles, o desigualdad de casos posibles y de favorables. Los resultados mostraron que el desarrollo de la capacidad de comparar probabilidades no es uniforme dentro de cada estadio, pues se identificaron dos niveles en la etapa preoperatoria (denotados IA y IB), dos en la de operaciones concretas (IIA y IIB) y uno en la de operaciones formales (III), que se caracterizan a continuación.

En el nivel IA el niño no realiza operaciones lógicas ni aritméticas elementales ni usa la disyunción, sólo considera los conteos de casos favorables y frecuentemente elige en forma arbitraria; la noción de probabilidad no es accesible porque requiere la noción ausente de parte-todo. En el nivel IB logra solucionar correctamente algunas situaciones que dependen de una sola variable desde apreciaciones intuitivas sin razonamiento operatorio, en casos simples. También resulta más difícil un problema con un solo conjunto, que un problema de comparación de probabilidades en dos conjuntos, porque es más fácil diferenciar la parte y el todo en el segundo caso. El niño adquiere la intuición de la relación entre casos favorables y probabilidad, pero fracasa en las elecciones porque utiliza información parcial, solo usa el dato constante en las dos colecciones y no considera la variación de la composición dada por el elemento variable (ya sea el número total de casos o el número de favorables).

El niño en el nivel IIA resuelve de forma correcta las situaciones de comparación de una sola variable y de forma incorrecta las de composición proporcional. La adquisición de operaciones lógico-matemáticas permite una noción de parte-todo y de disyunción. Por ello la comparación de problemas con una variable se pueden resolver con cálculos aditivos pero no con la proporcionalidad (dobles cocientes), que implica las ideas de fracción y proporción, de mayor dificultad. En el nivel IIB el niño, además, intenta generalizar las estrategias usadas en casos simples, sin éxito en las composiciones donde varían tanto los casos favorables como los posibles. El niño soluciona los casos de proporcionalidad de forma empírica y progresiva.

El adolescente en el nivel III logra la inclusión de las partes en el todo, y alcanza la capacidad lógica de establecer disyunciones, la proporcionalidad y capacidad combinatoria. Todo ello le permite cuantificar las probabilidades. En caso de no calcular fracciones, el niño establece algún tipo de correspondencia entre los dos cocientes cuando las proporciones o desproporciones no son evidentes. Construye nociones probabilísticas fundamentales debido a su dependencia de operaciones construidas sobre otras operaciones y de un poder hipotético deductivo mayor que en la etapa de las operaciones concretas.

En resumen, para la comparación de probabilidades en la etapa preoperatoria del desarrollo del concepto de probabilidad, hay ausencia de comparación lógico-aritmética que no permite resolver el problema; en la de operaciones concretas el niño logra comparar una variable y en la de operaciones formales llega a una solución general y rápida.

3.2.2. COMPLEMENTOS A LOS ESTUDIOS DE PIAGET SOBRE COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

Algunas réplicas o variaciones de los experimentos de Piaget se desarrollaron hasta final de la década de los 90. Estas investigaciones se centran en dos áreas: identificar las estrategias en la estimación de probabilidades por parte de niños en educación básica primaria o secundaria, e identificar los efectos de la instrucción en el desarrollo de razonamiento probabilístico en estas edades. A continuación se presenta una síntesis de algunos de los citados por Cañizares (1997) y se complementa con investigaciones posteriores a esta tesis.

Falk, Falk y Levin (1980) analizaron el desempeño de 61 niños israelíes de 4 a 11 años, divididos en dos grupos experimentales, para desarrollar tareas sobre comparación de probabilidades con tres contextos (bolas en urnas, ruletas y peonzas). En el primer experimento, 36 niños de 5 a 11 años fueron enfrentados a 22 tareas dos veces, cambiando el material de una ocasión a otra. En el segundo experimento, 25 niños de 4 a 7 años se enfrentaron a 32 tareas (incluyendo las 22 del grupo anterior), divididas en dos grupos de 16 ítems con características equivalentes, que se ejecutaron unas con los ojos cerrados y otras con los ojos abiertos. Los autores plantearon tres clases de problemas de acuerdo con las relaciones entre el tipo de fracciones presentadas en la comparación con respecto a 1/2. Se observó que desde los 6 años los niños manifiestan un razonamiento de tipo probabilístico; destacándose como error más frecuente en los menores la elección del conjunto con mayor número de casos favorables. Los niños no parecen seguir una sola estrategia y algunos siguen prejuicios irrelevantes. La capacidad de los niños para evaluar probabilidades no se alteró por el cambio de contextos. Los autores sugieren que la probabilidad se compone de dos subconceptos: azar y proporción, y que la capacidad de calcular proporciones, por sí sola, no implica la comprensión de probabilidad, pues se precisa comprender la imposibilidad de controlar o predecir los resultados.

Maury (1984) analizó el desempeño de 80 adolescentes franceses, de 17 años, al desarrollar seis tareas sobre cuantificación de probabilidades, que combinaban dos contextos: bolas en urnas (discreto) y ruletas de sectores iguales (continuo de secuencia estructural), con dos formatos de pregunta (vocabulario cotidiano y técnico). Midió el efecto de estas dos variables en las respuestas y argumentaciones de los estudiantes, repartiendo sistemáticamente entre los estudiantes cuatro listas de seis problemas de manera que no coincidieran ni el formato ni el contexto con el compañero del lado. La autora planteó tres tipos de tareas: comparación de una variable, proporcionalidad y comparación de dos variables; y clasificó las respuestas en correctas de argumento pertinente, correctas de argumento no pertinente, o mixtas. Los argumentos pertinentes se referían a áreas, casos favorables/casos posibles, casos favorables/casos desfavorables; en tanto que los argumentos no pertinentes se referían a distribución de los sectores en la ruleta, diferencia entre casos favorables y desfavorables en las urnas, omisión de información (sólo considera casos favorables).

La autora observó que el vocabulario incide en la proporción de respuesta correcta (mayor cuando se utiliza vocabulario cotidiano que técnico), pero no en los argumentos. El contexto no afecta a la proporción de respuesta correcta pero sí en los argumentos, notando que hay más riqueza en las tareas con urnas. Hubo mayor número de argumentos pertinentes de casos favorables/casos posibles en el contexto de ruletas, que favorece la relación parte-todo; y mayor número de argumentos pertinentes de casos favorables/casos desfavorables en el contexto de urnas, que favorece la relación parte-parte.

Truran (1994) realiza entrevistas clínicas a 32 niños de 8 a 15 años en Australia con el fin de examinar si utilizan comprensión probabilística al elegir, entre dos opciones, la urna con mayor proporción de bolas de cierto color. Sus resultados amplían la lista de estrategias de resolución de este tipo de tareas, con otras como: descripción del contenido sin hacer una elección, respuesta acertada sin justificación (intuición), estrategias diferentes para cada urna, preferencia por el número menor, comparación aproximada, comparación de la diferencia de casos favorables y desfavorables en las dos urnas, comparación aproximada, comparación con proporciones sencillas conocidas, comparación entre razones de posibilidades.

Falk y Wilkening (1998) proponen a niños de 6 a 14 años (israelíes y suizos) tareas de asignación de probabilidad, en el contexto de un juego de apuesta con dos urnas con diferente composición. A cada alumno se preguntó cuántas bolas de un tipo harían falta en la segunda urna para que el juego fuera equitativo. Los autores usan este contexto argumentando que asegura una comprensión y motivación óptima de los niños en la actividad. Los resultados mostraron que los niños de 6 a 7 años no pudieron generar iguales probabilidades usando nociones de proporcionalidad y no usaron estrategias sistemáticas. En general se enfocaron para cada urna en el número de bolas de un solo tipo, ya fueran las favorables o las desfavorables. Los niños de 9 a 10 años integraron las dimensiones de probabilidad y proporcionalidad, aunque tendían a tomar decisiones en función de la diferencia de casos favorables con desfavorables de cada urna. Los niños de 13 utilizaron proporcionalidad con desempeño casi perfecto, siendo más exitosos si el factor de proporcionalidad era entero. La conclusión principal fue que en un nivel dado, la maestría en tareas de elección binaria precede a la habilidad para ajustar probabilidades y que el conocimiento usado en el ajuste de probabilidad fue más analítico que intuitivo.

Una conclusión de esta sección es que problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico, no lo son en el plano cognitivo, debido a la influencia del contexto. Por ello, trabajar diferentes contextos puede favorecer la evolución de razonamientos erróneos o incompletos, así como la puesta en evidencia de conflictos cognitivos o semióticos en los niños. También se concluye que los niños son conscientes de la naturaleza probabilística de este tipo de situaciones.

3.2.3. CONSTRUCCIÓN DE INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Las investigaciones anteriormente descritas se basan en experimentos o entrevistas. Otros investigadores desarrollaron cuestionarios de evaluación que pudiesen ser respondidos en forma escrita para evaluar el razonamiento probabilístico en muestras más amplias, tratando de generalizar los resultados de las investigaciones previas, realizadas usualmente con grupos muy pequeños. En esta sección describiremos solamente: (a) el trabajo de Green, quien fue el primer autor que construye este tipo de cuestionarios, (b) el estudio de evaluación de Navarro-Pelayo sobre razonamiento combinatorio y (c) algunos trabajos basados en la taxonomía SOLO, que permite definir un nivel de desarrollo de las respuestas de los alumnos, en lugar de un nivel de desarrollo cognitivo del alumno, pues implícitamente admite la dificultad de medir dicho nivel basándose en pruebas escritas.

Cuestionario de Green

Green (1983a) analizó el nivel de desarrollo cognitivo y algunas intuiciones incorrectas sobre probabilidad en una muestra de 2930 estudiantes ingleses entre 11 y 16 años, mediante un cuestionario construido con esta finalidad. El autor no realiza una comparación de los diversos significados de la probabilidad; la mayoría de sus ítems evalúan el significado clásico de la probabilidad; aunque incluye alguna pregunta sobre el significado subjetivo o frecuencial.

La mayoría de los ítems son de selección múltiple y en muchos de ellos se pide a los estudiantes que escribiesen las razones de sus elecciones. Su cuestionario tenía 26 preguntas que sumaban 50 puntos, clasificados en tres categorías: verbal (30% de la puntuación total), que estudia el uso de lenguaje específico y su aplicación en situaciones de incertidumbre; combinatoria (12% de la puntuación) y razonamiento combinatorio y probabilístico (58% de la puntuación) que estudia el nivel de desarrollo del razonamiento probabilístico, según la teoría de Piaget. Esta parte (26 puntos) se divide en dos tipos de ítems: Unos evalúan las intuiciones de los sujetos sobre la aleatoriedad: secuencias de resultados aleatorios obtenidas mediante un modelo de proceso de Bernoulli, procesos de Poisson en el plano y convergencia estocástica. Otros ítems plantean problemas de probabilidades, evaluando el sesgo de equiprobabilidad, aplicación del principio de indiferencia, heurística de representatividad, comparación de probabilidades y probabilidad compuesta. El contenido matemático de esta parte es comparación de probabilidades en experimentos simples, probabilidad geométrica, independencia, esperanza matemática, juego equitativo, razonamiento combinatorio y probabilidad condicionada.

Además aplicó un test de razonamiento general, registró la calificación del profesor de Matemáticas durante ese curso y entrevistó algunos chicos acerca de sus respuestas. Este autor observa que el patrón de respuesta es similar para estudiantes entre 11 y 13 años, con un rendimiento inferior al de los de 14 a 16 años; y que los niños tienen un mayor nivel probabilístico que las niñas.

Los ítems de combinatoria fueron difíciles, pues la tarea de permutación de 4 o 5 objetos apenas se calcula correctamente. Los alumnos tienen habilidad verbal pobre para describir de forma correcta situaciones probabilísticas; no desarrollan de manera espontánea significados comunes para términos que indican distintos grados de probabilidad. También es pobre la aplicación de los diagramas de árbol y del principio de multiplicación de probabilidades. Se les dificultó realizar inferencias desde un muestreo, exhibiendo una tendencia al sesgo de equiprobabilidad, sin diferenciar las características de la situación aleatoria. Asimismo se vieron dificultades con tareas donde la simetría era un factor fundamental para definir el espacio muestral. Los estudiantes resolvieron mejor preguntas de tipo combinatorio que de proporciones.

El autor observó diversas estrategias de resolución según el contexto de la tarea: En la comparación de probabilidades en urnas la elección se argumentó con (a) mayor número total de casos, (b) mayor número de casos favorables, (c) más casos favorables que desfavorables, (d) mayor proporción entre casos favorables y desfavorables. En las situaciones de ruletas se argumentó con (a) concepto de área, (b) comparación numérica, (c) comparación de razones, (d) características físicas de la aguja, (e) continuidad, (f) separación.

Green concluyó que la mayoría de los estudiantes del último curso de secundaria no consiguen el nivel de las operaciones formales en cuanto al concepto de razón, aunque habían superado la edad esperada para lograr este nivel según la teoría de Piaget. Presume que los estudiantes terminan su vida escolar estando en el nivel de las operaciones concretas con relación a este concepto, clave para la comprensión de la probabilidad desde el enfoque clásico.

En consecuencia, el autor sugirió estrategias de enseñanza ligadas a la experimentación, esto es desarrollar actividades prácticas para las diferentes edades, de complejidad progresiva que permitan construir experiencias adecuadas a su nivel cognitivo, empezando desde corta edad.

Cuestionario de razonamiento combinatorio de Navarro-Pelayo

Aunque no está directamente relacionado con la comprensión de la probabilidad, hacemos un breve resumen del cuestionario construido por Navarro-Pelayo (1994) para evaluar el razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria, puesto que usaremos algún ítem relacionado con la combinatoria en nuestro estudio.

La autora diseñó un cuestionario con 13 tareas, que tuvo en cuenta las principales variables descritas en la investigación previa que afectan la dificultad de los problemas:

tipo de operación combinatoria (variación con o sin repetición con o sin repetición, permutación, combinación); el tipo de elementos que se combina (personas, números u objetos) y tamaño de los parámetros. Validó el cuestionario de una forma rigurosa y lo pasó a 720 estudiantes españoles de 14-15 años (368 sin instrucción específica del tema y 352 con instrucción). La autora observó mejor desempeño en estudiantes con instrucción en combinatoria que en estudiantes sin instrucción. Asimismo, caracteriza varios tipos de errores, algunos de los cuáles puede aparecer simultáneamente en una respuesta: error en tipo de objeto, error de orden; error de repetición, igualación o exclusión; enumeración no sistemática; error en operaciones aritméticas; respuesta ciega (no se identifica estrategia); interpretación incorrecta del diagrama en árbol; error en los parámetros; error en la fórmula; error en los números combinatorios.

Investigaciones basadas en el modelo SOLO

En los últimos años se han aplicado instrumentos de evaluación con otras metodologías y marcos teóricos. Resaltamos entre ellos el estudio de Jones, Thornton, Langrall y Tarr (1999) que describen cuatro niveles jerárquicos de las respuestas a las tareas sobre: espacio muestral, probabilidad (significado clásico y frecuencial), comparación de probabilidades, probabilidad condicionada e independencia.

- *Nivel 1 o subjetivo*: Predice el suceso más probable basado en juicios subjetivos; reconoce sucesos seguros e imposibles en experimentos simples o muestreo sin remplazamiento. La comparación de probabilidades es subjetiva y no se diferencia entre situaciones equitativas y no equitativas. En un experimento simple no hace una lista completa de resultados. Tiende a relacionar sucesos consecutivos con dependencia estadística.
- *Nivel 2 o transicional entre subjetivo y cuantitativo ingenuo*: Predice el suceso más probable basado en datos experimentales pero puede revertir a subjetivos, cuando la evidencia experimental entra en conflicto con sus expectativas. La comparación de probabilidades puede ser incorrecta, empieza a diferenciar situaciones equitativas y no equitativas. Reconoce el cambio en las probabilidades en muestreo sin remplazamiento. Empieza a reconocer que sucesos consecutivos pueden o no ser dependientes.
- *Nivel 3 o cuantitativo informal*: Predice el suceso más probable basado en juicios cuantitativos; distingue los sucesos "cierto", "posible" e "imposible", justificando cuantitativamente su decisión. Compara probabilidades usando juicios cuantitativos. Distingue las situaciones equitativas y no equitativas mediante razonamientos numéricos. Reconoce la alteración en las probabilidades en muestreo sin remplazamiento. Reconoce la necesidad de muestreo con grandes muestras y diferencia entre probabilidades teóricas y frecuencia experimental.
- *Nivel 4 o numérico*: Predice el suceso más probable asigna probabilidades numéricas a sucesos. Compara probabilidades numéricas, incluyendo sucesos no contiguos; asigna probabilidades numéricas iguales a sucesos equiprobables y en situaciones con y sin remplazamiento. Entiende la ley de los grandes números e identifica situaciones para las cuales las probabilidades solo pueden estimarse en forma experimental. Distingue sucesos dependientes e independientes.

3.3. APROXIMACIONES DESDE EL SIGNIFICADO INTUITIVO

En esta sección analizamos las investigaciones que estudian la existencia de intuiciones parciales sobre la probabilidad. El interés de los autores es mostrar que el razonamiento probabilístico no sólo aparece cuando el concepto completo está formado, sino que se desarrolla a partir de estas intuiciones parciales; como algunas de ellas son incorrectas, es importante su evaluación. Comenzamos nuestra síntesis con las investigaciones de Fischbein.

3.3.1. INVESTIGACIÓN DE FISCHBEIN

Intuición, sus características y tipos

Fischbein concedió gran importancia a la intuición, describiéndola como "una clase de conocimiento que no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, que, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente" (Fischbein, 1975, p. 26). Cañizares (1997) indica que las intuiciones difieren de las percepciones en que exceden o extrapolan los hechos dados, de manera que constituyen teorías personales que, con frecuencia, guían la acción.

Según Batanero (2001), para Fischbein (1975) la intuición es inmediata, surge espontáneamente (no es reflexiva); es global (constituye un todo sin una descomposición o análisis); generalizante (se extrapolan a entornos más amplios); autoevidente (no necesita demostración); perseverante (resistente al cambio); coercitiva (se impone ante otras formas de razonamiento); intrínsecamente cierta (el individuo tiene total convicción de la proposición que encierra). En consecuencia, tiene naturaleza teórica, capta la universalidad de un principio mediante una situación particular; por ello se distingue de la percepción o de la habilidad. Se diferencia entre intuiciones primarias, que se forman directamente por la experiencia del sujeto, y secundarias, que aparecen como resultado de la educación.

Algunas de las intuiciones primarias sobre probabilidad son correctas, mientras que otras no, porque están restringidas por circunstancias y condiciones personales, y cada individuo tiende a simplificar las situaciones al interpretar cada suceso en relaciones deterministas de causa y efecto.

Intuiciones primarias de los niños sobre la probabilidad

Según Fischbein (1975) la intuición sobre el azar es primaria, posibilita distinguir un fenómeno aleatorio de uno determinista y está presente en los niños sobre los 6 o 7 años, incluso antes. Para estos niños, azar es equivalente a falta de predictibilidad y si el experimento planteado tiene pocos sucesos diferentes el niño de preescolar razona correctamente al respecto. Esta intuición cambia hacia una estructura conceptual distinta y organizada a partir de los 7 años, cuando el niño da inicio a una comprensión de la interacción de cadenas causales que generan hechos impredecibles y a la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios, aunque no llega a construir una idea de azar. El adolescente evita lo impredecible y busca dependencias causales que reduzcan lo incierto, por ejemplo para reconocer equiprobabilidad en diferentes condiciones experimentales. Por ello Fischbein piensa que no es espontánea ni completa la comprensión del azar al llegar a las operaciones formales; más bien se requiere una instrucción orientada al desarrollo de pensamiento probabilístico.

Por otra parte, según el autor, la noción de probabilidad corresponde a una intuición secundaria. Fischbein considera que los niños pueden hacer juicios probabilísticos en el sentido de estimar intuitivamente las posibilidades a favor de algún suceso y que tales juicios están directamente influidos por sus percepciones del experimento aleatorio. En edad pre-escolar estas comparaciones solo se harán utilizando números enteros, estimando las probabilidades con los conocimientos numéricos que manejan. Empiezan a hacer comparaciones de probabilidades en casos muy sencillos, usando proporciones desde los 9 años. Después de 12 años y sin recibir instrucción particular, los niños comparan en forma acertada las probabilidades de dos sucesos sencillos para razones con términos desiguales a partir de su conocimiento de fracciones. Fischbein muestra que esto mismo se logra a los 9 o 10 años con ayuda de instrucción especial. En problemas de probabilidad en contexto geométrico, como caminos con ramificaciones, las estimaciones son menos acertadas al aumentar la edad, debido a la asignación de causas de tipo mecánico o físico (exhibiendo el aprendizaje adquirido en otras áreas o el desarrollo del pensamiento determinista).

Efecto de la enseñanza

Fischbein, Pampu y Minzat (1970) desarrollaron un programa de enseñanza con 60 niños rumanos de 10, 12 y 14 años, para investigar su efecto en la capacidad combinatoria. Antes de la instrucción se pregunto a cada niño estimar el número de posibles permutaciones con 3, 4 y 5 elementos; aunque el desempeño fue mejor entre los mayores, en general subestimaron el número total. El programa de enseñanza empezó con el uso del diagrama en árbol para generar y contar grupos de elementos, hasta llegar a procedimientos de permutación y arreglo de un número moderado de elementos. Niños desde los 10 años aprendieron el uso adecuado de estas técnicas.

Fischbein y Gazit (1984) investigaron la influencia que un programa de enseñanza puede tener indirectamente en los juicios probabilísticos intuitivos de 285 estudiantes de 10 a 13 años, centrándose en algunos errores intuitivos típicos. Estos autores parten de la hipótesis que el pensamiento probabilístico y el razonamiento proporcional se basan en esquemas mentales distintos, aunque compartan el mismo origen a un nivel intuitivo muy básico. Así un progreso en uno no implica una mejora en otro.

El curso tuvo 12 lecciones apoyadas en juegos y experimentos, y se comparó con un grupo control de 305 estudiantes. La evaluación se hizo con dos cuestionarios, uno de asimilación de conceptos estudiados sólo en las clases experimentales y otro de valoración del efecto indirecto de la instrucción sobre errores intuitivos aplicado a clases experimentales y de control, porque no requería conocimientos especiales sobre probabilidad. Este segundo cuestionario constaba de ocho ítems, cuatro acerca de estrategias en la comparación de probabilidades en urnas y cuatro acerca de intuiciones sobre suceso seguro, creencia en la “suerte” y heurística de representatividad. Los resultados muestran que la instrucción no fue útil en los niños de 10-11 años (5° grado), con éxito parcial en el siguiente grado y mejores resultados con los mayores (7° grado, de 12-13 años). Los autores concluyen que las ideas intuitivas de los alumnos pueden mejorar con una enseñanza explícita de las probabilidades, aunque reconocen la dificultad para sustituir una intuición primaria inadecuada por una secundaria; además, resaltan la trascendencia de introducir las nociones probabilísticas en forma sistemática desde los primeros años.

Los autores también estudiaron los errores sobre ideas estocásticas fundamentales que afectan las asignaciones de probabilidades. Los niños de 9 a 14 años tienen más dificultad con la noción de seguro que con la de probable, en especial en sucesos compuestos; una explicación es que se asocia seguro con único resultado y posible con multiplicidad de resultados. Se identifica raro con imposible, e imposible con incierto, porque se guían por sus experiencias subjetivas o sus creencias. Este resultado fue objetado por Truran (1994) quien mostró que los niños de 8 a 15 años son capaces de adecuar correctamente un lenguaje probabilístico y dan buenos argumentos para sucesos seguros e imposibles, con antelación al trabajo con sucesos posibles.

Fischbein y Gazit (1988) desarrollaron otro programa de enseñanza para mejorar la capacidad combinatoria, ahora con 43 niños de 11-12 años y 41 de 13-14 años. El programa constaba de seis lecciones; a partir del diagrama en árbol se obtienen las formulas para variaciones con repeticiones, permutaciones, variaciones ordinarias y combinaciones. Los autores encontraron que el diagrama en árbol fue un recurso de aprendizaje efectivo para los niños; los resultados en la pruebas post-test (uno al finalizar el programa y otro seis meses después) fueron mejores que en el pre-test (al inicio del programa). Asimismo caracterizaron errores típicos en la resolución de estos tipos de problemas; siendo los más persistentes: (a) error de orden, confusión de combinaciones con variaciones y viceversa; (b) multiplicar los parámetros, inadecuada transcripción del lenguaje simbólico; (c) dar como solución uno de los números representados en la fórmula; (d) dar una respuesta incoherente.

Los resultados de otras investigaciones de Fischbein y Schnarch (1996) con niños entre 11 y 17 años muestran que los alumnos usan con ambigüedad los términos suceso seguro y posible (por ejemplo “obtener menos de siete al lanzar un dado” se cataloga como seguro y como posible). Tienen la ilusión de control de lo aleatorio, intuiciones primarias favorables a la regla de Laplace y a los axiomas fundamentales, y dificultad para determinar el espacio muestral en experiencias aleatorias con varias partes, en particular les falta razonamiento combinatorio. La regla del producto en la intersección de sucesos independientes no es espontánea, pues sólo entre estudiantes de 17 años, se obtuvo un 60% de transferencia del cálculo de probabilidades compuestas en contexto de dados a otro contexto.

Otra dificultad consiste en distinguir sucesos compuestos de simples. Fischbein, Nello y Marino (1991) analizan las respuestas de 618 niños italianos entre 9 y 14 años en el lanzamiento de dos dados (211 niños de 9 a 11 sin instrucción previa en probabilidad, 130 de 11 a 14 años con instrucción previa, y 278 de la misma edad que no la habían recibido). Se aplicaron simultáneamente dos cuestionarios con 14 preguntas cada uno (alternados entre los niños). En general, los estudiantes aplican el principio de equiprobabilidad, válido en el lanzamiento de un dado pero no en los resultados conjuntos. Los autores concluyen que muchos niños tienen la capacidad intuitiva de evaluar globalmente la magnitud del espacio muestral y su estructura cuando se pregunta en forma general. Pero si se cambia el formato de la pregunta se basarán en otras interpretaciones (intuición primaria del azar, combinación aditiva de sucesos independientes o evaluación multiplicativa). La intuición de la relación entre probabilidad y tamaño del espacio muestral es generalizada, no así la de considerar el orden de los resultados elementales en la construcción del espacio muestral.

Estos autores también examinaron el efecto del tipo de experimento (simultáneo o en etapas sucesivas) y del contexto (monedas y dados) en experimentos equivalentes desde el punto de vista de la estructura matemática. El desempeño mejora con la edad y con la instrucción. Sin embargo, hay más respuestas erradas en las realizaciones sucesivas que en las simultáneas, pues no se ha separado la estructura matemática del contexto y se cree que la situación secuencial es más controlable que la simultánea. Truran (1994) obtuvo los mismos resultados, con relación a las características de generadores aleatorios, como urnas con bolas y ruletas que tienen mismas propiedades matemáticas, pero a las que los niños hasta los 13 años asignan comportamiento probabilístico diferente. Estos resultados sugieren la necesidad de inclusión de diversos contextos prácticos en la instrucción para captar las estructuras matemáticas antes de realizar la formalización matemática de estos conceptos.

Sáenz (1998) analiza los resultados de 136 estudiantes españoles de secundaria entre 14 y 15 años divididos en dos grupos: experimental (75 adolescentes que cursaron los tres primeros años de secundaria con tres profesores diferentes) y de control (61 adolescentes con características similares). Antes y después de la instrucción el autor midió el desempeño en cálculo de probabilidades, razonamiento probabilístico, actitud hacia las matemáticas y nivel de cambio conceptual. La instrucción en probabilidad se impartió en 15 sesiones de una hora con temas referidos a identificación del problema (experiencias aleatorias frente a deterministas), lenguaje de azar y representaciones de incertidumbre, experiencias aleatorias de un ensayo (suceso simple), la ley de los grandes números, experiencias aleatorias de varios ensayos (sucesos compuestos).

El autor identificó la naturaleza altamente contingente del razonamiento probabilístico, de manera que los juicios y razonamientos probabilísticos no son invariantes en función de factores de tarea, ni de los factores asociados al sujeto. Se observaron diversos grados de aceptación intuitiva de las ideas formales probabilísticas clasificándolas en intuitivas, contra-intuitivas y contradictorias. Se detectó la presencia sistemática de un pequeño grupo de principios intuitivos o normativos que permiten hablar de un sistema de ideas personales de los adolescentes sobre el azar y la probabilidad en torno a tres elementos, naturaleza, lenguaje y métrica del azar, y asignación de probabilidades.

3.3.2. COMPARACIÓN DE SIGNIFICADOS INTUITIVO Y CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD

Cañizares (1997) compara, de modo teórico y empírico, las investigaciones de Piaget y Green (realizadas desde el significado clásico de la probabilidad) con las de Fischbein (que analiza el significado intuitivo). Sugiere que los dos significados son complementarios para el desarrollo en los niños de los conceptos ligados a la probabilidad, y que su comprensión se daría cuando el razonamiento del individuo integre la información fácilmente disponible en las intuiciones con la que requiere un esfuerzo para su consecución, derivada de las capacidades operatorias. Debido a esta conjugación se esperaría que tras la instrucción desaparecieran algunas intuiciones erróneas, sin embargo, en ocasiones, éstas se refuerzan como se verá posteriormente al analizar las investigaciones realizadas desde el enfoque subjetivo.

Como base de su trabajo, Cañizares (1997) analiza las diferencias entre las ideas de Piaget y Fischbein. Según Piaget, el niño en el estadio pre-operacional no posee los recursos necesarios para estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios. Fischbein por el contrario piensa que el niño puede hacer juicios probabilísticos, en situaciones sencillas, como elegir entre dos urnas, con diferente número de bolas blancas y negras, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola blanca.

La complementariedad de las dos posturas se debe a que Piaget, en su formalidad, considera que la comprensión del azar y probabilidad sólo se alcanza cuando se es capaz de dar una argumentación teórica o mostrar una abstracción generalizable que explique las respuestas a los problemas de probabilidad. En tanto, Fischbein acepta el desarrollo de un razonamiento probabilístico empírico incipiente, que se muestra en el uso cotidiano de términos como “posible”, y la elección de la más probable entre dos situaciones, aunque no sea posible a estas edades asignar un valor matemáticamente correcto a la probabilidad de un suceso en una situación dada. Ambos autores aceptan que la estimación de probabilidades de un resultado es mejor en adolescentes que en niños de menor edad; la diferencia entre una postura y la otra está en la edad a la que se logra, a partir de doce años para Piaget, que lo atribuye al tercer nivel de desarrollo cognitivo, y desde diez para Fischbein, si se recibe una instrucción adecuada. Además Fischbein piensa que sin instrucción explícita muchos adultos nunca desarrollarán el nivel formal de comprensión y estimación de probabilidades.

Cañizares (1997) comparó también los dos instrumentos de evaluación utilizados por Green (1983a) y por Fischbein y Gazit (1984), en sus características estructurales. El análisis de contenido de cada pregunta en ambos instrumentos mostró que el test de Fischbein y Gazit contempla el peso de creencias arraigadas y factores culturales (que corresponderían, tanto a una aproximación intuitiva como a una subjetiva), escasamente representados en el de Green. Además incluye contextos naturalistas y de loterías, ausentes en el test de Green. Éste contiene una mayor variedad de conceptos probabilísticos; Fischbein y Gazit se centran en la comparación de probabilidades.

Además Cañizares (1997) compara los resultados obtenidos con los dos instrumentos al aplicarlos en 251 estudiantes españoles de 11 a 14 años, para establecer el grado de coincidencia de la evaluación del razonamiento probabilístico de los niños. El cuestionario de Fischbein y Gazit (1984) se aplicó a una muestra ampliada (incluyó también niños de 10 años), en total 320 niños españoles de 10 a 14 años.

Los resultados de las aplicaciones de ambos cuestionarios fueron, en general, mejores que los obtenidos por Green, y Fischbein y Gazit. Entre las intuiciones correctas se destacaron la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, la comparación de probabilidades en casos sencillos, las probabilidades geométricas y la probabilidad condicionada. Los alumnos consiguen una proporción aceptable de éxito en la comparación de probabilidades en dos urnas. Asimismo se observa un mayor número de estrategias basadas en el razonamiento proporcional en los problemas de nivel avanzado, debido a que no pueden resolverse con éxito utilizando una estrategia de nivel inferior. La mayoría de los niños mostraron comprensión y uso adecuado de lenguaje probabilístico, en particular con los términos probable, posible y seguro, en tanto causaron cierta dificultad los términos improbable e imposible.

Los niños mostraron gran dificultad en el cálculo de probabilidades de experimentos compuestos, la interpretación de diagramas de árbol y la independencia en el contexto de loterías. El concepto de suceso imposible resultó más difícil que en la muestra de Green, mientras que no parece existir tal dificultad con la idea de probable. El razonamiento combinatorio y proporcional de los alumnos se mostró bastante escaso, muy pocos resuelven un problema de permutaciones que requiere capacidad recursiva. En general, estos niños muestran pocas creencias subjetivas, aunque algunas son favorecidas por el proceso de instrucción, y otras forman parte del bagaje socio-cultural que da la tradición española. Aparecen los sesgos de equiprobabilidad, representatividad, recencia positiva y negativa y concepciones erróneas sobre la aleatoriedad; además de creencias sobre la influencia de factores causales improcedentes en los resultados aleatorios. Las intuiciones mejoran con la edad, aunque permanecen la heurística de la representatividad, la dificultad de reconocer la independencia y el bajo razonamiento combinatorio. La autora indica que estas creencias pueden constituirse en obstáculos cognitivos que impidan llegar a manejar correctamente conceptos como la independencia de sucesos.

Otras características estructurales de los instrumentos se midieron mediante el cálculo de coeficientes de correlación entre puntajes totales y parciales y análisis factorial del conjunto de todos los ítems. En este análisis se observó una baja correlación entre las puntuaciones totales de los dos instrumentos, aunque ambos se construyeron con el propósito de evaluar el razonamiento probabilístico de los niños de edades similares y sin instrucción de probabilidad. La explicación puede radicar en la diferencia en el enfoque ya que uno se enmarca en el significado clásico y otro abarca, además, el intuitivo y subjetivo.

De acuerdo con los resultados del análisis factorial y el estudio de correlaciones con el test de Green, los ítems del test de Fischbein-Gazit se dividen en dos grupos: los que evalúan la influencia de elementos subjetivos y creencias culturales sobre la asignación de probabilidades, que no correlacionan con los de Green y los que correlacionan moderadamente, relacionados con el razonamiento combinatorio y comparación de probabilidades en contexto de urnas. Como el análisis estructural mostró la falta de correlación entre las puntuaciones de ambos instrumentos, Cañizares creó uno nuevo, basado en el test de Fischbein y Gazit, enriquecido con algunas preguntas que suplieran sus carencias con respecto al de Green. Para ello incluyó dos ítems de autoría propia, sobre elementos subjetivos en la asignación y comparación de probabilidades, y su relación con razonamiento proporcional; así como sobre independencia, control de azar, juego equitativo y razonamiento combinatorio.

La autora aplicó el nuevo cuestionario a 143 niños españoles de 10 a 14 años, quienes demostraron una comprensión adecuada de la idea de suceso seguro, aunque algunos lo confunden con el suceso posible. El razonamiento combinatorio fue con frecuencia insuficiente y no siempre se aplica para asignar probabilidades a experimentos simples no equiprobables. El sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) o el enfoque en el resultado (Konold, 1989), que explicamos en la Sección 3.5.1, se aplican con frecuencia. Un pequeño porcentaje de los alumnos, que disminuye con la edad y el rendimiento matemático, manifiesta creencias en el control de lo aleatorio y supersticiones aceptadas en la cultura popular.

La heurística de la representatividad (Tversky y Kahneman, 1982) y sesgos asociados, que también se explican en la Sección 3.5.1, son frecuentes entre los estudiantes y se han mostrado favorecidos por el proceso de enseñanza. Se observó una variedad de interpretaciones para juego equitativo, si bien más de la mitad de los niños tienen una intuición correcta. Algunos ítems de comparación de probabilidades tuvieron escaso porcentaje de éxito con relación a los resultados de un problema equivalente de fracciones explorado por Noelting (1980) en cuya investigación la edad media era menor que la de los niños de la muestra de Cañizares; la diferencia fue más evidente en ítems que incorporaban elementos subjetivos, que fueron un distractor muy fuerte en su resolución.

Para profundizar en su razonamiento, la autora entrevistó ocho niños de la muestra con igual nivel de razonamiento proporcional y diferente tasa de éxito en la resolución de problemas de comparación de probabilidades. Observó la falta de relación entre la existencia de supersticiones y el nivel de razonamiento proporcional. La modificación del contexto en las preguntas (ruletas en lugar de urnas) implicó cambios en las estrategias de resolución para problemas con análogo nivel de dificultad. En el caso de ruletas prevalece la comparación de áreas ocupadas por el color de interés; algunos niños plantearon que la separación entre los sectores podía afectar las probabilidades. Con la evidencia de los dos estudios, la autora confirmó la hipótesis de mayor dificultad de un problema de comparación de probabilidades respecto a otro equivalente de comparación de fracciones.

Con base en los datos observados, la autora rechaza la hipótesis de estructura lineal del razonamiento probabilístico de los niños y sugiere que las etapas descritas por Piaget no deben ser entendidas en sentido literal. Por el contrario, un mismo niño puede estar en distintas etapas para diferentes conceptos y tipos de problemas probabilísticos, de tal forma que el razonamiento probabilístico de los niños puede describirse mediante un constructo de tipo vectorial y sistémico, entre cuyos elementos se pueden citar aleatoriedad, independencia, elementos subjetivos, razonamiento proporcional y combinatorio. Se sugiere un estudio individualizado de cada uno de estos elementos y un tratamiento didáctico específico de las dificultades de razonamiento y comprensión asociadas.

3.4. APROXIMACIONES DESDE EL ENFOQUE FRECUENCIAL

La investigación del proceso de enseñanza-aprendizaje del significado frecuencial de la probabilidad tiene su auge en la última década, debido al cambio de las directrices curriculares que se mencionaron en el Capítulo 1 y la mayor oportunidad de acceso a software que facilita esta aproximación. A continuación se describen algunas investigaciones en las que se evalúa la comprensión del enfoque frecuencial que tienen los estudiantes.

El cuestionario de Green (1983a) incluye un ítem que proporciona información frecuencial sobre la ocurrencia de diferentes sucesos en un experimento con sucesos no equiprobables (lanzar al aire 100 chinchetas, para saber cuántas caen con la punta hacia arriba o hacia abajo). La pregunta consiste en elegir entre cinco opciones la frecuencia de resultados que se cree más probable que resultará en una repetición del experimento. En el enunciado del ítem se indica que el profesor ha obtenido 68 chinchetas con la punta hacia arriba y 32 con la punta hacia abajo. Si el niño presenta el sesgo de equiprobabilidad, puede ignorar la información frecuencial dada por el profesor y decir que la forma de la chincheta implica mayor posibilidad de que la punta caiga hacia arriba.

En la primera prueba piloto (Green, 1983b) se pedía a 66 niños estimar, sin información previa, cuántas chinchetas espera el niño que caigan punta arriba y cuántas punta abajo, al lanzar sobre una mesa una bolsa con 100 chinchetas; 61% respondieron con razones a 50:50, indicio de sesgo de equiprobabilidad, y 15% con preferencia para punta arriba (correcta o parcialmente correcta). En consecuencia, se incluyó en el enunciado el resultado de un primer ensayo (del profesor) y se cambió la respuesta abierta por una de selección con una lista de posibles resultados para un segundo ensayo; esta lista se modificó en tres versiones de la prueba, teniendo en cuenta los resultados de cada pilotaje y entrevistas con los niños. A pesar de las modificaciones, las tasas de acierto y sesgo no mejoraron en la versión final; el autor concluye que la experimentación en este tipo de contextos es importante y la persistencia del sesgo de equiprobabilidad en niños de todas las edades.

En la investigación de Cañizares (1997) el 64,1% muestran el sesgo de equiprobabilidad en este ítem (que tiene un leve aumento con la edad) y sólo el 15% contestan correctamente, exhibiendo un cierto nivel de comprensión del significado frecuencial. Resultados parecidos fueron obtenidos por Green (1983a).

3.4.1. PERCEPCIÓN DE LA ALEATORIEDAD

Algunas investigaciones que se pueden situar en la perspectiva frecuencial tratan de describir la comprensión de los estudiantes sobre las características de las secuencias aleatorias. Esta comprensión es necesaria para enseñar probabilidad desde este enfoque, pues los alumnos habrán de realizar experiencias y registrar datos de secuencias de resultados aleatorios.

A continuación se describen algunas de ellas, teniendo en cuenta que Falk y Konold (1997) clasificaron las tareas propuestas en investigaciones sobre percepción de la aleatoriedad en dos grandes grupos: (a) *Tareas de generación*, en las que se pide al sujeto generar secuencias que simulen una serie de resultados de un proceso aleatorio típico, como el lanzamiento de una moneda; y (b) *tareas de reconocimiento*, donde el sujeto debe elegir entre varias secuencias, indicando cuál considera aleatoria.

La investigación de Green (1983a) pide a los niños una tarea de reconocimiento. Las dos sucesiones propuestas simulan el resultado de lanzar 150 veces una moneda equilibrada. La mayor parte de los niños en todas las edades elige la secuencia no aleatoria. Green clasifica los argumentos de los niños para la no aleatoriedad en correctos (patrón demasiado regular o rachas muy cortas -grupos de pocos símbolos idénticos consecutivos-) e incorrectos (patrón demasiado irregular, el porcentaje de caras no es 50% o rachas muy largas -grupos de muchos símbolos idénticos consecutivos-).

Green (1991) compara las respuestas de 305 niños ingleses, de 7 a 11 años, a preguntas sobre secuencias aleatorias. Una pregunta consistía en una tarea de generación, escribir una sucesión de 50 símbolos simulando los resultados de lanzamientos sucesivos de una moneda. Del análisis de los datos recogidos se observó la tendencia a equiparar el número de caras y de cruces en los niños con diversos niveles de habilidad (clasificados en cinco categorías por sus profesores). Además producen sucesiones tales que el número de caras en la primera mitad de la secuencia es muy cercana al número de caras en la segunda mitad. En el análisis de la independencia de los resultados producidos por los estudiantes se observa la longitud de las rachas producidas por los estudiantes, notando un sesgo importante a la alternancia de resultados, pues encontró que la longitud media de la racha más larga en su muestra era inferior al valor teórico, en niños de todas las capacidades y edades. No encontró mejora durante cuatro años de seguimiento longitudinal. El porcentaje de niños con resultados extremos (alternan siempre entre cara y cruz o producen rachas demasiado largas) es bajo. Se observa que los niños tienden a subestimar la variabilidad en las secuencias y a aproximar a ½ la proporción de caras y cruces con dispersión más pequeña de lo esperado para una secuencia realmente aleatoria.

Serrano (1996) entrevista a 20 alumnos españoles (10 de 16 años y 10 estudiantes de magisterio, sobre 20 años) sobre la resolución de algunos problemas de probabilidad incluidos en una secuencia didáctica para introducir la probabilidad con enfoque frecuencial. Utiliza cuatro ítems con subítems, que propone individualmente a cada alumno. El alumno trata de resolverlos y combina con experiencias de simulación para ver si hay una progresión de aprendizaje. Los participantes mostraron su comprensión de las características generales de imprevisibilidad de fenómenos aleatorios y de la regularidad en la frecuencia de posibles resultados. Asimismo se vio un razonamiento combinatorio correcto sobre la secuencia de resultados e identificación de sucesos elementales en el espacio muestral producto. Hubo traducción entre sistemas de representación (secuencias de ensayos, recorrido aleatorio, frecuencias relativas). Pero también aparecen estrategias o ideas incorrectas como la aplicación de la regla de Laplace en un contexto inadecuado, dificultad en la aplicación de la independencia de ensayos en contexto práctico, previsiones incorrectas de recorridos aleatorios; heurística de representatividad: comparación de porcentajes sin tener en cuenta el tamaño de la muestra, confusión de la magnitud relativa de la proporción con el tamaño muestral, confianza en una continuación de la tendencia o de una compensación en pequeñas muestras, estabilización en los extremos (rápida o a largo plazo); mayor fiabilidad en las muestras pequeñas frente a las grandes; influencia de resultado observado sobre lo que ocurría en siguientes experimentos.

A partir de las anteriores observaciones, el autor diseñó un cuestionario con 10 ítems que incluía preguntas abiertas y de selección múltiple. Dos de los tópicos tratados fueron tareas de reconocimiento y generación de secuencias aleatorias, y la interpretación frecuencial de la probabilidad. El cuestionario fue diligenciado por 277 estudiantes españoles de 13 (147) y 17 años (130). En cuanto al reconocimiento de sucesiones aleatorias, el autor detectó tres concepciones: variabilidad local (se esperan frecuentes alternancias entre distintas posibilidades y ausencia de patrones establecidos), regularidad global (convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica) y grado de discrepancia entre la distribución esperada y la observada (más notoria en secuencias lineales que en un plano). En cuanto al último aspecto, los estudiantes tuvieron dificultad en la interpretación frecuencial de una probabilidad. Estos resultados se amplían en Batanero y Serrano (1999) y nos sirven de base para analizar las respuestas de nuestros evaluados.

Aunque, posiblemente relacionado con la familiaridad con el contexto de la pregunta, se observó un alto porcentaje de respuestas correctas, hubo un bajo porcentaje de argumentos basados en las normas matemáticas. Entre los argumentos incorrectos, el autor resalta la creencia en que los datos de frecuencias de un suceso están errados, si no corresponden a sus expectativas; creencia en que alta probabilidad de un suceso equivale a seguridad en su ocurrencia; búsqueda de razones causales para un resultado inesperado en un experimento aleatorio; justificación de dichos resultados mediante la impredicibilidad obviando los valores de probabilidad. Se identificaron tres aspectos poco comprendidos: (a) el uso de estimación frecuencial de una probabilidad no sirve para predecir la ocurrencia de un único suceso en un experimento simple; (b) uso de razones frecuenciales para explicar la ocurrencia de un suceso poco probable, y (c) estimación de la frecuencia relativa de un suceso en una serie futura de experimentos cuando se tiene una estimación frecuencial de su probabilidad.

3.4.2. INVESTIGACIONES APOYADAS EN LA SIMULACIÓN

La investigación de Pratt (2000, 2005) profundiza en los significados que atribuyen los niños de 10 y 11 años a fenómenos aleatorios. Supone que los menores conservan múltiples intuiciones e incluso se inclinan hacia un resultado en particular. Pratt diseñó un micro-mundo computacional con dados, monedas y ruletas electrónicas, que podían ser manipulados por los niños en cuanto a la distribución de probabilidad, el número de ensayos, la opción gráfica y numérica para ver los resultados. Además, el software podía producir resultados no aleatorios para observar el comportamiento de los niños al confrontar esta situación. Previo al uso del programa, los niños fueron entrevistados para deducir el significado que daban al término aleatorio, clasificándole como impredecible, irregular, incontrolable y equitativo. Se pidió a los niños ver si varios generadores eran o no aleatorios. Con objeto de establecer si el generador se podía considerar aleatorio, los niños comprobaban o descartaban conjeturas replicando ensayos usando el programa. Al finalizar el experimento algunos niños habían construido algunos conocimientos de probabilidad frecuencial, como la relación entre las frecuencias de los resultados y la estructura del generador, y el efecto sobre las frecuencias relativas del número de ensayos y la distribución inicial de probabilidades.

Aspinwall y Tarr (2001) evalúan el efecto de un programa de instrucción en 23 estudiantes estadounidenses de grado 6°, con el objeto de determinar si tareas de simulación de fenómenos aleatorios influyen en la comprensión del papel que juega el tamaño de muestra al estimar probabilidades bajo un enfoque frecuencial. Utilizan un programa de instrucción de cinco sesiones, que comprendía tareas de resolución de problemas, preguntas clave y la escritura por parte de los alumnos de un reporte escrito. Según las evaluaciones, los autores observaron diferencias significativas entre los conocimientos previos y los posteriores a la instrucción. Puesto que la diferencia es positiva, lo asumen como evidencia de que el programa de instrucción propuesto puede facilitar la comprensión de la ley de los grandes números que no es un concepto intuitivo. A partir del estudio de caso con seis de estos niños encontraron que los juegos donde la probabilidad de ganar es desigual entre los jugadores ayudan a los estudiantes a entender el papel del tamaño de la muestra en la emisión de juicios probabilísticos.

Serrano, Ortiz y Rodríguez (2009) analizan los resultados de 45 estudiantes de 3° de Educación Secundaria (14-15 años) en la aplicación de un cuestionario de intuiciones sobre sucesiones aleatorias desde el enfoque frecuencial, con el fin de determinar la influencia de la simulación sobre tales intuiciones. Los estudiantes estaban divididos en dos grupos, uno más interesado que el otro en la materia y con evaluación media de notable. El cuestionario constaba de tres ítems con subítems para un total de doce preguntas adaptadas de Serrano (1996) y de Green (1991). Los autores observaron inseguridad e inmadurez para interpretar y responder al cuestionario, además de dificultades iniciales con el simulador. Los adolescentes identificaban correctamente situaciones aleatorias en la mayoría de casos, reconociendo la variabilidad e impredicibilidad de los resultados, y usaban frecuencias relativas para contestar algunas preguntas de probabilidades. Se observaron intuiciones correctas en el 80% de los estudiantes, aunque no se detectaron diferencias entre las concepciones erróneas antes y después de la simulación. Ello puede ser debido a la similitud entre resultados previstos y simulados, puesto que se trabajó sólo con muestras pequeñas.

Lee, Angotti y Tarr (2010) analizaron el desempeño de 23 estudiantes de 6° grado (11-12 años) de Estados Unidos que participaron en un experimento de enseñanza de probabilidad de doce sesiones de 60 minutos cada una. Los estudiantes abordaron seis tareas en parejas o tríos, experimentando con objetos reales (monedas, dados y ruletas) y simulando con un software educativo (*Probability Explorer*). El programa de ordenador permitía especificar condiciones de simulación como el número de ensayos, la visualización del resultado por ensayo, el sistema de representación para el resumen de los resultados (tabular y gráfica, con frecuencias absolutas o relativas) y la actualización de estas representaciones después de cada ensayo. Después del trabajo en grupos, la clase completa discutía los resultados comparando las observaciones en los ensayos empíricos con las expectativas derivadas del modelo teórico de distribución de probabilidades. Este experimento fue grabado y los vídeos se utilizaron en un estudio con futuros profesores que se describirá en el Capítulo 3.

Otros resultados están publicados en Tarr, Lee y Rider (2006), donde completan el estudio anterior con un análisis de casos para una de las seis tareas (evaluar si el dado fabricado por cierta compañía es justo) y tres grupos de trabajo (seis estudiantes). Los estudiantes son seleccionados por tener la misma clasificación (alta, media o baja) en dos pruebas, una estandarizada y una creada por los investigadores, que se aplicó antes de empezar la instrucción. Se observa que uno de los grupos establece mejor que los otros la relación entre las frecuencias observadas y las probabilidades teóricas. Los cambios en los tamaños de muestra para ir acercándose a la probabilidad no son sistemáticos, sino que se incrementan a voluntad de los miembros del grupo. Dos de los grupos no se fijan en el efecto del tamaño de la muestra, respecto a la variabilidad de los resultados observados. Los grupos se centran en la variabilidad dentro de la muestra pero no tienen en cuenta la variabilidad de una muestra a otra.

Comparación de la comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial

Polaki (2002) contrastó el desempeño de dos grupos de 12 niños en Italia, de 4° y 5° grado, que recibieron instrucción sobre probabilidad con metodología diferente. En uno de los grupos se generaban muestras pequeñas con datos experimentales y se utilizaba el análisis de la estructura del espacio muestral para determinar las probabilidades, de una forma clásica. En el otro grupo se simulaban, en un ordenador, grandes muestras de un experimento, antes de considerar el análisis de la composición del espacio muestral, usando, por tanto el enfoque frecuencial para estimar las probabilidades.

El autor menciona el impacto positivo de ambos métodos para desarrollar el razonamiento probabilístico de los niños, notando que no fueron significativas las diferencias en las pruebas realizadas para evaluar el aprendizaje en los dos grupos. Concluyó también que el enfoque frecuencial puede ser demasiado abstracto para los niños de esta edad, ya que no logran comprender el efecto del tamaño de muestra en la convergencia, identificando como posible argumento para esta dificultad la falta de familiaridad de los participantes en su estudio con la generación de datos por ordenador y la manipulación de conjuntos con gran número de datos.

3.5.APROXIMACIONES DESDE EL ENFOQUE SUBJETIVO

En el significado subjetivo de la probabilidad, diferentes sujetos pueden asignar diferente probabilidad al mismo suceso, dependiendo de la información disponible. Este enfoque implica la comprensión de la probabilidad condicionada, pues en el enfoque subjetivo todas las probabilidades son condicionadas. Por consecuencia, clasificamos las investigaciones de esta sección en dos grupos:

- Las que se refieren a creencias y sesgos que afectan la verosimilitud que cada persona puede asociar a un suceso de acuerdo con sus experiencias anteriores o la información previa. Respecto a ellas se hará una muy breve mención a las que se han centrado en sujetos adultos para introducir las definiciones requeridas para nuestro análisis.
- Un segundo grupo se refieren a la comprensión de la probabilidad condicionada y conceptos relacionados, que se detallan en las tesis de Díaz (2007) y Contreras (2011). Respecto a ellas se hará un breve resumen de las centradas en alumnos de secundaria.

3.5.1. HEURÍSTICAS Y SESGOS EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

Durante la década de 1970, los psicólogos lideraron una nueva área de investigación, cuya publicación más citada es la compilación de Kahneman, Slovic y Tversky (1982), enfocada a identificar formas incorrectas de razonar en probabilidad y factores que afectan a estos errores. Los autores denominan *heurísticas* a simples reglas de conducta, usualmente inconscientes, que hacen prescindir parcialmente de información relevante y reducen tareas complejas a simples juicios. Dichas heurísticas explican cómo las personas toman decisiones; difieren de los algoritmos en que son automáticas y no reflexivas, pueden trabajar bien bajo ciertas circunstancias pero en otras llevar a sesgos sistemáticos en los resultados. La confianza en tales principios y la persistencia de los sesgos no es exclusiva de sujetos inexpertos, pues investigadores y profesionales de la estadística son también propensos a ellos cuando prevalece su intuición sobre su conocimiento (Díaz, 2003). A continuación se describen algunas de estas heurísticas y los sesgos asociados.

La *heurística de representatividad* (Tversky y Kahneman, 1982) consiste en estimar la verosimilitud de un suceso en base a su similitud con la población de la que proviene. Como el nivel de similitud es un juicio subjetivo del individuo está sujeta a las percepciones del mismo. En situaciones de predicción la persona puede recurrir a los sucesos más representativos (considerados más probables que otros no tan representativos) y puede incurrir en sesgos, que son debidos al bajo costo de razonamiento de esta heurística frente al uso de cálculos matemáticos, y no a la falta de comprensión de los conceptos probabilísticos. Un sesgo relacionado es insensibilidad al tamaño de la muestra (no se tiene en cuenta el efecto de este tamaño sobre la variabilidad del muestreo). La persona aplica en muestras pequeñas resultados propios de la ley de los grandes números, asumiendo que una muestra pequeña representa en todas sus características a la población de la que proviene, a manera de una "ley de los pequeños números" (Tversky y Kahneman, 1974).

Un segundo sesgo es la *falacia del jugador,* que consiste en ver el azar como un proceso auto-correctivo, considerando que el resultado del experimento aleatorio afectará la probabilidad de sucesos futuros. Por ejemplo después de una racha de caras en el lanzamiento de una moneda, muchas personas creen que en el siguiente lanzamiento será más probable una cruz. La *recencia positiva* y la *recencia negativa* (Fischbein, 1975) se presentan en los juicios emitidos acerca de secuencias si sólo hay dos tipos de símbolos. La primera consiste en creer que después de la aparición consecutiva de un tipo de símbolo éste volverá a aparecer y la segunda en creer que debe presentarse una alternancia entre los símbolos equilibrando los resultados. En ambos casos se desconoce la independencia de las repeticiones del experimento y se asume que el proceso tiene memoria. Un tercer sesgo es la *falacia de las tasas base*, que consiste en ignorar el tamaño relativo de subgrupos en la población cuando se juzga la verosimilitud de sucesos contingentes que involucran los subgrupos.

La *heurística de la disponibilidad* (Tversky y Kahneman, 1974) consiste en fundamentar un juicio de verosimilitud de un suceso en su fuerza de asociación con los recuerdos de la persona. Entre los sesgos asociados, Díaz (2003) indica los debidos a la facilidad para encontrar ejemplos y a la efectividad de patrones de búsqueda. El primero consiste en que la probabilidad se estima según la facilidad de recordar situaciones favorables al suceso. Por ejemplo, la estimación del índice de violencia en una región se basa en la rapidez de la persona cuestionada para evocar situaciones violentas en esa región. Un ejemplo del segundo es que se considera más probable encontrar una palabra que comience con A que otra que finalice con la misma letra, pues es más efectiva la búsqueda de las primeras.

Otros tres sesgos frecuentes son el de equiprobabilidad, el enfoque en el resultado y la ilusión de control. El *sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992) consiste en creer que todos los resultados son igualmente probables en cualquier experimento aleatorio, y se ha encontrado en muchas investigaciones, aunque se modifique el contexto y el formato de la pregunta. Una explicación es que muchas personas asocian azar con probabilidades iguales para los resultados y no con modelos combinatorios.

El *enfoque en el resultado* (Konold, 1989) consiste en estimar la probabilidad de un suceso de forma no probabilística, interpretando la pregunta como predicción del resultado de un ensayo simple. No se interpreta el resultado de un experimento en forma frecuencial, sino subjetiva. El autor indica que esta confusión se debe a la multiplicidad de significados institucionales de la probabilidad, por lo que el estudiante tiene la ambivalencia entre grado de creencia y límite de frecuencias relativas.

La *ilusión de control* (Langer, 1982) es la creencia en la posibilidad personal de control de lo aleatorio, para aumentar la probabilidad de éxito ante juegos de azar. Se debe a que el individuo no reconoce que la suerte es fortuita o no distingue la diferencia entre juegos de habilidad y de azar.

Serrano (1996) da una interpretación alternativa para cuatro sesgos, indicando su relación con dificultades en la comprensión del significado frecuencial de la probabilidad: el enfoque en el resultado se puede explicar porque existen pocas situaciones problemáticas en lo cotidiano que requieran recolección de datos frecuenciales sobre fenómenos aleatorios y su uso para hacer predicción; la recencia negativa se puede ver como la ausencia de reconocimiento de la variabilidad en la convergencia; la recencia positiva se puede ver como la ausencia de reconocimiento de la rapidez de esta convergencia; la insensibilidad al tamaño de la muestra se puede ver en dos sentidos: como creencia en que la regularidad del proceso se puede observar localmente o en que todas las características estocásticas se estabilizan con el tiempo. Ello podría sugerir la importancia de hacer contrastar a los estudiantes los significados subjetivos y frecuencial de la probabilidad, que comentaremos con más detalle en las conclusiones de este capítulo.

Investigaciones con niños y adolescentes

El cuestionario de Green (1983a), aplicado a niños ingleses de 11 a 16 años, también incluyó ítems que evalúan la heurística de representatividad y el sesgo de equiprobabilidad. Con relación a éste, el autor observó dificultades en uso de lenguaje, algunos responden “todo es igual de probable” aunque consideren menos factibles los resultados extremos; también notó que se asocia probabilidad 50% tanto a resultados que pueden o no suceder (tipo Bernoulli) como a resultados equiprobables cuando hay más de dos opciones posibles. La insensibilidad al tamaño de muestra se relaciona con falta de comprensión de la estabilidad de las frecuencias en el largo plazo, con deficiencias en uso del lenguaje y con lectura literal de las razones sin tener en cuenta el contexto. Concluye que solo un programa extensivo de actividades en el aula puede dar la experiencia y evidencia necesarios para eliminar concepciones e intuiciones erradas.

Entre las investigaciones realizadas con niños se encuentran las siguientes: Amir y Williams (1994) entrevistaron a 38 estudiantes ingleses de 11 y 12 años para conocer el efecto de factores culturales, creencias (religiosas) o actitudes fatalistas en heurísticas y sesgos. Los autores concluyen que los niños usan razonamiento mixto (racional e irracional) para asignar probabilidades, siendo lo más influyente sus experiencias pasadas, como la espera ansiosa de un resultado aparentemente esquivo en el lanzamiento de un dado, y sus creencias de tipo religioso, control divino absoluto, o supersticioso, como números afortunados o romper un espejo.

Fischbein y Schnarch (1996) analizaron las respuestas a un cuestionario con siete problemas, cada uno asociado a un error probabilístico conocido, de 20 estudiantes en Israel en cada uno de los grados 5°, 7°, 9° y 11° (10, 12, 14 y 16 años). Los resultados muestran que algunas heurísticas y sesgos disminuyen con la edad (heurística de representatividad, recencia negativa, falacia de la conjunción), otras se mantienen (sucesos compuestos tratados como simples) y otras se fortalecen (influencia del tamaño de la muestra, disponibilidad, falacia del eje temporal). Los autores concluyen que la perduración se debe al arraigo de algún esquema intelectual (principio general) que se hace más claro para el sujeto con el tiempo (más integrado a su actividad intelectual e influyente en sus decisiones).

Respecto a las heurísticas y sesgos, Serrano (1996), en su cuestionario con 277 estudiantes españoles de 13 (147) y 17 años (130), analiza también este aspecto, con preguntas tomadas o adaptadas de investigaciones previas con adultos. La principal conclusión fue que las proporciones de estudiantes que mostraron enfoque en el resultado, sesgo de equiprobabilidad o heurística de representatividad, resultaron menores que las proporciones reportadas en la literatura. Además, observó que los estudiantes varían la estrategia de estimación de probabilidades en experimentos compuestos y que la asignación está relacionada con el razonamiento combinatorio, la introducción de elementos subjetivos y el tamaño de la muestra.

Como conclusión de esta sección se observa la gran influencia de los aspectos subjetivos en la comprensión y el trabajo con la probabilidad, que aparecen tanto en adultos como en escolares.

3.5.2. PROBABILIDAD CONDICIONADA E INDEPENDENCIA

El segundo grupo de investigaciones relacionadas con el significado subjetivo de la probabilidad se centra en la probabilidad condicionada, que siendo uno de los conceptos básicos de probabilidad, presenta mucha dificultad a los estudiantes de todos los niveles de formación. Entre las confusiones más frecuentes, se encuentran las falacias de la *conjunción* (creencia que la intersección de los sucesos es más probable que sólo uno de ellos; Tversky y Kahneman, 1982), de la *condicional transpuesta* (uso indiscriminado de *P(A/B)* y *P(B/A)*; Falk, 1986) y del *eje del tiempo* (creer que no se puede condicionar un suceso por otro posterior; Falk, 1986). También se confunde condicionamiento con causalidad (Falk, 1986) e independencia con exclusión (Sánchez, 1996).

Una de las principales conclusiones de los estudios sobre percepción de la aleatoriedad es que incluso los adultos tienen dificultades para producirla o percibirla (Falk, 1986; Falk y Konold, 1997; Nickerson, 2002); encontrándose sesgos sistemáticos en sus razonamientos. Por ejemplo, algunos adultos muestran la falacia del jugador, o creencia que la probabilidad de un suceso decrece cuando el suceso ha ocurrido recientemente, sin reconocer la independencia de los ensayos repetidos (Tversky y Kahneman, 1982). Estos sujetos tienden a rechazar secuencias con rachas largas del mismo resultado en tareas de percepción, y consideran aleatorias las secuencias con un exceso de cambios entre los diferentes resultados (Falk, 1986; Falk y Konold, 1997).

En lo que sigue analizamos las investigaciones realizadas sobre este concepto con escolares.

Maury (1986) propuso a 374 estudiantes franceses, entre 17 y 19 años, problemas de probabilidad condicionada en contexto continuo (ruletas) y discreto (urnas); en el caso discreto consideró extracciones con y sin remplazamiento. Una fuente de dificultad fue la ausencia de equiprobabilidad en los problemas, pues sólo 25% se desempeñaron satisfactoriamente debido a deficiencias para identificar y restringir el espacio muestral de acuerdo con la condición.

Totohasina (1992) estudió las estrategias intuitivas de 67 franceses de 16-17 años, sin instrucción, en la resolución de problemas de probabilidad condicionada. El 60% solucionaron con éxito los problemas usando diagramas en árbol, tablas de doble entrada o representaciones rectangulares. Sólo uno de cada cuatro llega a la respuesta correcta en problemas de Bayes, mediante la aplicación de la regla de Laplace, después de obtener el espacio muestral de referencia. Los principales errores observados por el autor fueron el uso de frecuencias absolutas, la confusión de probabilidad condicionada y conjunta y la ausencia de restricción en el espacio muestral.

Con otros 65 alumnos implementa una secuencia de enseñanza en que usa diagramas en árbol y tablas de doble entrada para resolver problemas de Bayes. En la evaluación, sólo 9 estudiantes resuelven correctamente los problemas, si bien cerca de la mitad construyeron el diagrama en árbol correspondiente y llegaron al cálculo de probabilidad total, entendiendo la naturaleza secuencial del experimento. El autor concluye que el diagrama en árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicionada, mientras que la tabla de doble entrada puede facilitar la confusión de probabilidad condicionada y conjunta.

Gras y Totohasina (1995) estudian las respuestas de 172 alumnos franceses de 17 y 18 años a un cuestionario sobre probabilidad condicionada e identifican tres concepciones erróneas. Los autores denominan *concepción cronológica* a la falacia del eje del tiempo; *concepción causal* a la confusión entre condicionamiento y causalidad y *concepción cardinal* a utilizar cardinales en el cálculo de la probabilidad condicionada en forma errada (a veces es acertado). Los autores resaltan que las dos primeras concepciones constituyen obstáculos cognitivos, en tanto la tercera es de naturaleza didáctica, y que la irreversibilidad de las relaciones causales o temporales conlleva una complejidad adicional en la comprensión de la probabilidad condicionada.

Ojeda (1995) analiza las respuestas a un cuestionario de 255 estudiantes mexicanos entre 14 y 16 años, después de enseñarles probabilidad condicionada y teorema de Bayes con dos metodologías. En un grupo (control, 149 estudiantes) la instrucción se basó en conjuntos y diagramas de Venn, y en el otro (experimental, 106 estudiantes) en empleo sistemático de diagramas de árbol. El cuestionario incluyó aplicación del teorema de Bayes, probabilidad condicionada, identificación de la intersección de sucesos y del suceso condicionante en las dos anteriores, con cuatro contextos (urnas, dianas, redes de canales y lenguaje cotidiano).

El porcentaje de aciertos fue similar con las dos metodologías, pero hubo diferencia en la argumentación, predominó el lenguaje ordinario (74%) para el grupo control y el simbólico (70%) para el grupo experimental. La mitad de los adolescentes interpretaron la conjunción como condicionamiento; sólo 9% identificaron la intersección (y su probabilidad) y el 23% el suceso condicionante (y su probabilidad). El 25% aplicó bien el teorema de Bayes en un problema de razonamiento diagnóstico, aunque fue común el intercambio de sucesos al justificar el procedimiento en lenguaje ordinario, convirtiendo el problema de razonamiento diagnóstico en uno de razonamiento causal. El 40% aplicó bien la probabilidad condicionada en un problema de razonamiento causal; más del 45% resolvieron con éxito problemas bayesianos, planteados tanto en formato frecuencial como probabilístico. La autora también observó que el contexto afecta el desempeño, pues los contextos de dianas (tiro al blanco) y redes de canales fueron más difíciles que los de urnas y lenguaje cotidiano. Además, los estudiantes describieron el espacio muestral cuando el formato llevaba explícita la terminología de variables aleatorias, pero no en otros casos.

Shaughnessy y Ciancetta (2002) analizan las respuestas de 652 estudiantes de Estados Unidos, entre 12 y 18 años con diferentes niveles de formación en matemáticas, a un ítem de probabilidad conjunta (que modificamos ligeramente para nuestro cuestionario). Se plantea un juego no equitativo con dos ruletas iguales divididas por la mitad, que funcionan en forma independiente; se pregunta si la probabilidad de ganar es de 50% y se pide justificación. Este ítem se extrajo de una prueba nacional aplicada en 1996 a estudiantes preuniversitarios y se utilizó en esta investigación debido a la baja proporción de respuesta correcta en su aplicación original (8% respuestas correctas con argumentos válidos y 20% parcialmente correctas). Los investigadores encontraron que la proporción de respuesta correcta fue diferenciada según grado escolar y nivel de formación en matemáticas; además que la mayoría no consideraron el espacio muestral compuesto para justificar su respuesta. Cerca del 90% de estudiantes entre 16 y 18 años con cursos avanzados de matemáticas respondieron correctamente, en tanto 20% de los estudiantes entre 12 y 14 años respondieron en forma parcialmente correcta; el desempeño de estudiantes entre 15 y 17 años con un nivel introductorio en matemáticas fue similar al observado en la prueba de 1996.

Posteriormente, los investigadores adaptaron el ítem para aplicar a un grupo nuevo (28 estudiantes, 14 a 18 años) que podía confrontar su respuesta inicial después de realizar 10 veces el experimento. La mitad de los estudiantes inicialmente dieron la respuesta correcta pero muy pocos usaron la regla del producto o el espacio muestral compuesta; la mayoría de los que inicialmente se equivocaron en su respuesta cambiaron su opinión después de experimentar con el juego y una proporción importante argumentó con conocimiento matemático. Finalmente, los investigadores resaltan la utilidad de la simulación o la experimentación para establecer conexión entre los datos observados en realizaciones sucesivas del experimento y los resultados esperados según un modelo de probabilidad o el espacio muestral subyacente.

Lonjedo y Huerta evalúan la resolución de problemas de probabilidad condicionada a través de varios estudios (Huerta y Lonjedo, 2003; Lonjedo y Huerta, 2005, 2007; Huerta, 2009, 2014). En 2003, los investigadores plantean a 11 estudiantes españoles de bachillerato, de 16 a 17 años (5 en 1° y 6 en 2°) quienes no han recibido instrucción en probabilidad condicionada, una prueba con cinco problemas de probabilidad condicionada que se pueden solucionar de forma aritmética. Cada problema corresponde a una tipología diferente según la información suministrada (datos de marginales, intersecciones o condicionales); naturaleza de las cantidades (frecuencia absoluta o porcentaje) y pregunta (probabilidad condicionada, simple o conjunta). Los autores observan que basta el uso de pensamiento numérico en la solución, pues los estudiantes intuitivamente los convierten en problemas de probabilidad simples.

En Lonjedo y Huerta (2005) proponen otro cuestionario a 56 estudiantes españoles (10 universitarios de la Facultad de Matemáticas, 15 de 17 a 18 años en 2° de Bachillerato de Ciencias sociales y 31 de 15 a 16 años en 4° de ESO). Modifican el número y tipo de problemas (seis con sólo una probabilidad condicionada) y la forma de plantear la pregunta (porcentaje o probabilidad) sin variar el resto de condiciones. Los autores observan menor dificultad para resolver problemas bayesianos cuando los datos están en frecuencias absolutas (60% frente al 50% en formato probabilístico). Entre quienes dieron solución correcta, muy pocos vieron la tarea como cálculo de probabilidades (los universitarios y tres de Bachillerato); el resto lo interpretaron en forma aritmética.

Lonjedo y Huerta (2007) aplican una nueva prueba, con tres problemas isomorfos que cambian en el formato de los datos, a estudiantes de diferente formación (13-14, 16-18 y 19-20 años). Cada problema es abordado por un número diferente de estudiantes (67 en formato porcentual, 80 en frecuencia absoluta y 33 en probabilidad). Los autores proponen un esquema de análisis para el estudio de las respuestas. El análisis de las respuestas correctas se centra en el tipo de razonamiento empleado; en las incorrectas en el tipo de dificultad y en los errores asociados a éstas. El razonamiento empleado estuvo relacionado con el nivel de formación: sólo los universitarios usan razonamiento exclusivamente probabilístico y muy pocos de éstos logran resolver el problema con datos en porcentajes o probabilidades. El porcentaje de éxitos es mayor si los datos están expresados en frecuencias absolutas, casi siempre resuelto con razonamiento aritmético. Los autores argumentan que el desempeño también mejora con la modificación en el enunciado de expresiones que provocan ambigüedad en la condicionalidad, como "y" o "también". Estos estudios, y otros posteriores, se sintetizan en Huerta (2014).

En resumen las investigaciones reseñadas en esta sección indican que algunas fuentes de dificultad, en la probabilidad condicionada, son la imprecisión en el lenguaje cotidiano, la dificultad de identificar el suceso condicionante y el condicionado, la confusión entre probabilidades condicionadas y compuestas, así como entre una probabilidad condicionada y su transpuesta, condicionamiento y causalidad, independencia y exclusión.

3.6. CONCLUSIONES SOBRE EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE NIÑOS Y ADOLESCENTES

En las investigaciones revisadas, cuyo contenido se resume en la Tabla 3.1, se han encontrado algunas que se centran en cada uno de los significados de la probabilidad presentes en el currículo de educación primaria. Igualmente, otras comparan entre sí o mezclan problemas resolubles bajo dos de las aproximaciones de la probabilidad; por ejemplo, Cañizares (1997) incluye elementos subjetivos en problemas que se pueden resolver desde el significado clásico.

Respecto *significado intuitivo* se mostró la existencia de intuiciones parciales sobre el azar y la probabilidad en niños muy pequeños y la capacidad para resolver problemas sencillos, basándose en la comparación de números enteros, áreas u otras magnitudes. También se indicó que estas intuiciones pueden evolucionar hacia concepciones erróneas y que un razonamiento probabilístico completo no se alcanza en la edad adulta sin una enseñanza adecuada desde la infancia.

En relación con el *significado clásico* se ha mostrado la necesidad del razonamiento proporcional suficiente (dependiendo de la relación entre casos favorables y posibles) para resolver problemas de comparación de probabilidades, aunque sólo este razonamiento no es suficiente; los problemas de comparación de probabilidades resultaron más complejos que los equivalentes de comparación de fracciones en todos los estudios. También destaca la necesidad y dificultad del razonamiento combinatorio, la dificultad para aplicar el razonamiento proporcional inverso al juzgar si un juego es equitativo.

Tabla 3.1. Conceptos tratados en las investigaciones

Enfoque	Conceptos analizados
Clásico	Asignación de probabilidades, azar, comparación de probabilidades, distribución y convergencia, espacio muestral, experimento compuesto, juego equitativo, lenguaje, razonamiento combinatorio, principio de indiferencia, regla de Laplace, sucesos equiprobables y no equiprobables
Intuitivo	Asignación de probabilidades, comparación de probabilidades, creencias, lenguaje, suceso compuesto, suceso seguro
Frecuencial	Asignación de probabilidades, comparación de probabilidades interpretación de la probabilidad frecuencial, convergencia, muestreo (con y sin reemplazamiento), percepción de la aleatoriedad, secuencias aleatorias
Subjetivo	Probabilidad condicionada, independencia, teorema de Bayes, condicionamiento y causación, heurísticas y sesgos

Respecto al *significado frecuencia*l, dos puntos clave son la comprensión de las características de las secuencias de resultados aleatorios y de la convergencia, así como de la posibilidad de estimar una probabilidad teórica a partir de datos de frecuencias. Al analizar la simulación en contexto informático, se observa que a los niños de corta edad no les causa confianza la generación con el ordenador; sin embargo, se involucran rápidamente.

Asimismo, la introducción del significado frecuencial se aconseja con apoyo de software didáctico (Probability Explorer o Imagine) más que con programas de uso común (hojas de cálculo), debido a la amigabilidad del entorno para el estudiante y a la posibilidad de creación de escenarios que lo involucren más rápidamente (bajo contextos de vídeo-juegos). Una desventaja es la incidencia del número de repeticiones en la aproximación de la probabilidad, que puede redundar en sesgos como la indiferencia al tamaño de la muestra o la confusión entre frecuencia relativa y probabilidad. Otra desventaja, que solo tiene una mención, es que el estudiante puede reconocer la variación dentro de una muestra pero ignorar la variación entre muestras.

Finalmente, las investigaciones centradas en el *significado subjetivo* muestran la gran dificultad de los conceptos de probabilidad condicionada e independencia y los muchos sesgos ocasionados por heurísticas inapropiadas de pensamiento.

En consecuencia, el conocimiento del profesor sobre la probabilidad y los estudiantes se debiera contemplar desde los significados intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo, pues cada uno de ellos implica sus propias dificultades y errores de razonamiento, que el profesor debiera conocer para una enseñanza efectiva de la probabilidad en la educación primaria.

Nuestros Estudios 2 y 3 han tenido en cuenta los conceptos tratados en los estudios descritos en este capítulo, que se recogen en la Tabla 3.1. Las investigaciones analizadas en este capítulo han sido utilizadas en la construcción de nuestros cuestionarios. Por un lado, proporcionan ítems para la evaluación de conocimiento común y ampliado de la probabilidad (Cuestionario 1); por otra parte, proporcionan ejemplos de respuestas (correctas e incorrectas) de niños en dichos ítems que serán utilizados para la evaluación de conocimiento de la probabilidad y los estudiantes (Cuestionario 2).

CAPITULO 4.

CONOCIMIENTO Y FORMACIÓN DE PROFESORES PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD

4.1. INTRODUCCIÓN

Puesto que el trabajo de investigación se orienta a la evaluación de los conocimientos de los profesores, en este capítulo se realiza primero una síntesis de la investigación específica sobre este tema y luego una descripción de la formación en probabilidad de los participantes en el estudio.

Como mencionan Batanero y Díaz (2011), no ha sido usual en la formación de futuros profesores de matemáticas introducir un curso específico sobre didáctica de la probabilidad; en parte debido a que hasta la última década, el currículo de probabilidad era casi inexistente en la educación primaria.

Desde hace algunos años se comienza a mejorar la formación de los profesores en este tema para responder a las necesidades actuales, pues como se vio en el Capítulo 2, los currículos escolares vigentes han adelantando la enseñanza de la probabilidad al primer ciclo de la educación primaria. Asimismo, este cambio ha propiciado un interés creciente por la investigación sobre conocimiento y formación de los profesores respecto a la probabilidad.

Este capítulo comienza con un análisis de algunos modelos teóricos que describen los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas y otros específicos desarrollados en el campo de la estadística. Se describe asimismo la visión de este conocimiento desde el enfoque ontosemiótico, explicitando y justificando el modelo que será utilizado para fundamentar esta investigación, que combina el de Ball y colaboradores (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball y Bass, 2009), con ideas tomadas de Godino (2009; 2011).

En las secciones siguientes se desglosan estudios relacionados con algunos componentes de dicho modelo: conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad; conocimiento de la probabilidad y los estudiantes; conocimiento de la probabilidad y la enseñanza. Este estado de la cuestión se inició en Gómez (2011), donde se partió de los trabajos sintetizados en Batanero y Díaz (2011) y Contreras (2011); también tienen en cuenta los recopilados en Mohamed (2012). No es exhaustivo pues referimos solo trabajos que serán tomados como referencia en nuestra investigación.

Para finalizar, se analiza la formación específica en probabilidad y su didáctica de los futuros profesores participantes en el estudio y se presentan las conclusiones obtenidas de esta revisión.

4.2. MODELOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD

La investigación sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas es hoy día muy amplia; produciendo, entre otros resultados, diversidad de modelos sobre el conocimiento del profesor y sus componentes, la mayoría desarrollados en los últimos 20 años. Es de resaltar la existencia de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, el “handbook” editado por Wood (2008) y el libro publicado en 2008 como consecuencia del ICMI Study 15, “The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics Teachers”. En el terreno específico de la estadística destacamos el estudio de ICMI e IASE sobre el tema (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

En lo que sigue se analizan algunos modelos sobre el conocimiento que requiere el profesor para tener éxito en la enseñanza de las matemáticas. Nos centramos en los que han sido utilizados en didáctica de la estadística, o bien en otras investigaciones desarrolladas dentro del enfoque ontosemiótico, por ser base para nuestro estudio.

4.2.1. ALGUNOS MODELOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Entre los muchos modelos desarrollados, describiremos el trabajo de Shulman, que ha tenido gran seguimiento en educación estadística, y el de Ball y colaboradores, quienes han desarrollado una investigación orientada al desarrollo de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor en educación matemática y que utilizamos en nuestro trabajo.

4.2.1.1. MODELO DE SHULMAN

Uno de los primeros en interesarse por el pensamiento del profesor fue Shulman (1986a,b) quien ha tenido gran influencia en la investigación posterior y que describe un conocimiento específico del profesor que denomina *conocimiento pedagógico del contenido (PCK)*. Según este autor, sería el conocimiento, necesario para la enseñanza de un cierto tema, e interactúa con el conocimiento de contenido y el conocimiento curricular. Lo describe como "conocimiento que va más allá del conocimiento de la materia en sí, hacia un conocimiento de la materia para enseñar" (Shulman, 1986b, p.9). También propone tres componentes esenciales, ligados entre sí, dentro de este conocimiento:

1. *El conocimiento del contenido enseñable o conocimiento de la materia.* El profesor necesita unos conocimientos suficientes de aquello que va a enseñar, aunque esto no es suficiente. La investigación sobre el conocimiento del contenido matemático del profesor se orienta a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento matemático (genérico o específico) que tienen los profesores, así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento (Even, 1993).

2. *Las formas de representación o estrategias para enseñar el tema*, tales como: analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Las representaciones son elementos utilizados por el profesor para ayudar en la generación del conocimiento en los alumnos

3. *Conocimiento del aprendizaje del estudiante*, incluyendo errores, dificultades, creencias y concepciones de sus estudiantes y de las condiciones necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta.

El PCK conceptualiza la forma en que un contenido específico (como la probabilidad) se reinterpreta en la enseñanza, partiendo de la experiencia e ideas del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Cooney, 1994). Llinares (1998, p. 161) lo describe del modo siguiente:

> Conocimiento del profesor del contenido que tiene que enseñar considerándolo desde la perspectiva de la enseñanza-aprendizaje. Se centra en el conocimiento del profesor de las potencialidades y limitaciones de los diferentes modos de representación del contenido matemático como medios para hacer comprensible a los estudiantes dicho contenido y el conocimiento de las dificultades y errores más comunes de los alumnos en relación a un contenido específico, etc.

Shulman (1987) desarrolla los componentes del PCK como conocimiento base para la enseñanza, que agrupa en seis categorías: (a) conocimiento de contenido, acorde con la disciplina a enseñar, (b) conocimiento pedagógico general, en especial la gestión en el aula con el fin de trascender al contenido; (c) conocimiento del currículo, en particular de los materiales y directrices; (d) conocimiento de los alumnos y de sus características; (e) conocimiento del contexto educativo, el entorno del aula, el funcionamiento de la institución escolar y de la comunidad a la que pertenece la escuela; y (f) conocimiento de los propósitos, valores y fines educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos.

Asimismo, el autor describe cuatro fuentes para desarrollar estos conocimientos: (a) la formación académica disciplinar; (b) los materiales y estructuras del proceso educativo institucionalizado, como, por ejemplo, los libros de texto o documentos curriculares sobre un tema; (c) el conocimiento de los resultados de la investigación que afecta el ejercicio docente, y (d) la experiencia que el profesor va adquiriendo a lo largo de su vida profesional con buenas prácticas docentes.

4.2.1.2. MODELO DE BALL Y COLABORADORES

Estos autores describen lo que denominan *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), o conocimiento matemático para la enseñanza, que es "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374), y descomponen en dos grandes categorías: conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido (o conocimiento didáctico), de acuerdo a la Figura 4.1.

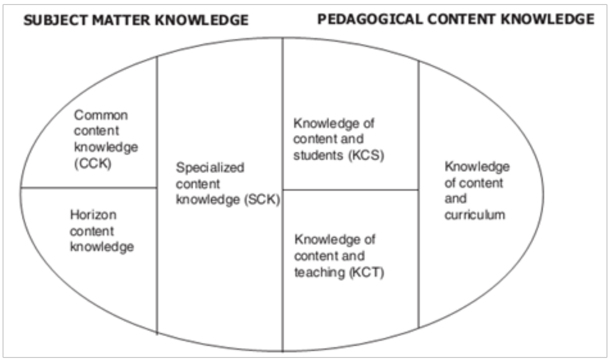


Figura 4.1. Componentes del MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 403)

El conocimiento del contenido matemático está desglosado en tres subdivisiones:

- El *conocimiento común del contenido* (CCK), sería el conocimiento del tema que tiene cualquier alumno o persona educada; es decir, el necesario por cualquier persona para resolver problemas de naturaleza matemática. Permite al profesor resolver las tareas que propone a sus alumnos; pero no es un conocimiento especial del profesor (Hill, Schilling, y Ball, 2004). Puesto que nuestra investigación se centra en la preparación de profesores de educación primaria, tomaremos como conocimiento común el esperado en un alumno de educación primaria, es decir, el explicitado en los documentos curriculares o en los libros de texto. Dicho conocimiento se refleja en el significado institucional de referencia de la probabilidad recogido en el Capítulo 2.
- El *conocimiento especializado del contenido* (SCK): es también un conocimiento matemático pero específico del profesor, que no se requiere en otras profesiones. Sería el aplicado por el profesor de matemáticas para proponer tareas matemáticas en un tema particular y articularlas dentro de la enseñanza, graduando su dificultad o variando el contenido matemático de la tarea. Serviría también para dar explicaciones o justificaciones alternativas de un tema o una tarea (Ball, Thames y

Phelps, 2008).

- El *conocimiento en el horizonte matemático* se refiere a aspectos más avanzados que aportan perspectivas al profesor, es decir, un conocimiento más amplio de la matemática en el cual un tema particular está situado. Tiene en cuenta aquellos componentes del tema, no incluidos en el currículo, pero que son útiles para la enseñanza y proporcionan una comprensión más profunda del tema (Ball y Bass, 2009). Incluye, entre otros aspectos, la historia del tópico específico a desarrollar o la detección de posibles desvíos respecto a las ideas matemáticas; por ejemplo, para la probabilidad incluye el conocimiento de los problemas filosóficos de los diferentes enfoques. Ball y Bass (2009) indican que este conocimiento incluye la comprensión de las principales ideas y estructura de las disciplina, de las prácticas matemáticas y del valor de la matemática.

Por otro lado, el conocimiento pedagógico del contenido está desglosado en el modelo descrito en tres subdivisiones:

- El *conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS) "es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375). Para el caso de la probabilidad incluiría el conocimiento de la literatura resumida en el capítulo anterior, sobre concepciones erradas, como el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) o el enfoque en el resultado (Konold, 1989), así como los niveles de desarrollo cognitivo descritos por Piaget en relación con la probabilidad.

- El *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT), combina conocimiento con respecto a la enseñanza y conocimiento matemático. Es el conocimiento sobre procesos adecuados para enseñar y evaluar un tema teniendo en cuenta aspectos como elección de ejemplos, ventajas y desventajas de utilizar una u otra representación (Ball, Thames y Phelps, 2008) para tratar errores y concepciones erróneas de los estudiantes (que se han detectado por medio del conocimiento del contenido y los estudiantes). Por ejemplo, una estrategia para hacer notar a los alumnos que la equiprobabilidad no es siempre aplicable es trabajar con variables socio-demográficas, como elegir entre los alumnos uno con una cierta característica relacionada con la frecuencia observada en el aula y no con el número de resultados posibles.

- El *conocimiento del currículo* se refiere a las características del currículo en los diferentes ciclos formativos y le permite al profesor articular sus temas con los de otras asignaturas o áreas de la matemática (Hill, Ball y Schilling, 2008). Por ejemplo, el profesor puede hacer notar como la suma y diferencia de fracciones se pueden aplicar cuando se calculan probabilidades de la unión de dos sucesos. Asimismo, este conocimiento se pone en juego cuando el profesor genera una expectativa entre sus estudiantes de los temas en que aplicará estos conocimientos; como que la comprensión de probabilidades simples se requiere para comprender distribuciones de probabilidades o probabilidades condicionadas.

La anterior clasificación es difusa, de modo que a veces la separación entre diferentes tipos de conocimiento no es clara, porque depende del contexto. Ball, Thames y Phelps (2008, p. 404) reconocen que "no siempre es fácil distinguir donde una de nuestras categorías se separa de otra, y esto afecta a la precisión de nuestras definiciones (o su falta de precisión)"; por tal motivo nosotros trataremos de aplicarlas en la forma más coherente posible en nuestro trabajo, adaptadas según algunos criterios propuestos por Godino (2009).

4.2.1.3. OTROS MODELOS

Otro modelo reciente es el de Schoenfeld y Kilpatrick (2008), quienes proponen una teoría del desempeño experto en enseñanza de las matemáticas, definiendo un marco conceptual con siete dimensiones, referidas a conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas. Estas dimensiones son:

a. Conocimiento profundo y amplio de las matemáticas escolares (equivalente al MKT).

b. Conocimiento de la forma en que piensan los estudiantes, basada en su observación de formas de razonamiento alternas a las teorías conocidas o preconcebidas del profesor.

c. Conocimiento de la forma en que aprenden los estudiantes, incluyendo, las teorías de aprendizaje, acciones del profesor en clase y las interacciones con los estudiantes.

d. Diseño experto y gestión de entornos de aprendizaje, en concordancia con las tendencias actuales.

e. Desarrollo de normas en el aula y apoyo del discurso de la clase, como parte de la enseñanza para la comprensión, promoviendo una comunidad de aprendizaje, todos los actores están comprometidos con las discusiones académicas dentro del respeto por el pensamiento del otro.

f. Construcción de relaciones que apoyen el aprendizaje, articulando las relaciones entre contenidos, sus representaciones y los miembros de la clase.

g. Reflexión sobre la propia práctica, pensar cómo se desarrolló una situación en clase y qué se podría hacer para mejorarla. En esta propuesta el rol del alumno es más importante que en los modelos anteriores, y las interacciones en la comunidad escolar juegan un papel fundamental.

En resumen, los modelos analizados en esta sección proponen componentes del conocimiento del profesor, que serían necesarios para mejorar la enseñanza, desde distintas perspectivas. Shulman inicia la discusión de los conocimientos necesarios por parte del profesor para su ejercicio docente, resaltando el conocimiento pedagógico del contenido como elemento distintivo de otras profesiones. Ball y colaboradores desarrollan esta idea con algunos matices propios, con objeto de evaluar el conocimiento del profesor. Schoenfeld y Kilpatrick dan relevancia a las relaciones intra e inter personales en el aula, viendo el proceso de enseñanza-aprendizaje como una actividad humana y social afectada por interacciones entre los sujetos intervinientes. Como veremos en la Sección 4.2.3, Godino (2009) amalgama los tres enfoques en un intento por recoger la complejidad del proceso y amplía la diversidad de herramientas disponibles para el análisis didáctico.

4.2.2. MODELOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA

En educación estadística son muy pocos los modelos descritos del conocimiento del profesor, siendo una de las primeras menciones, la realizada en Godino, Batanero y Flores (1999), quienes describen los siguientes componentes: (a) la reflexión epistemológica sobre el conocimiento estocástico; (b) el análisis de las transformaciones de los objetos estocásticos para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza; (c) el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas; y (d) la ejemplificación de situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos. Los autores utilizan el término "estocástico" pues su modelo es válido para estadística y probabilidad.

Batanero, Godino y Roa (2004) refinan la lista anterior, considerando los siguientes componentes en el conocimiento requerido para la formación de profesores:

a. Reflexión epistemológica sobre el significado de los conceptos a ser enseñados, involucrando meta-conocimiento sobre la estadística (es decir, conocimiento de los aspectos históricos, filosóficos, culturales y epistemológicos de la estadística, así como sobre su relación con otras disciplinas).

b. Experiencia en ajustar el contenido y los recursos metodológicos para enseñar una temática. En particular capacidad para ajustar el contenido según características diversas de grupos a los que se impartirá la enseñanza, en cuanto a nivel de formación y nivel de comprensión de los estudiantes; asumiendo ese contenido y sus recursos metodológicos como medios para conocer y entender la estadística.

c. Capacidad crítica para analizar libros de texto y materiales curriculares, seleccionando los que sean más adecuados para unos alumnos y un contenido dado.

d. Predicción de las estrategias para resolución de tareas específicas por parte de los estudiantes, de sus dificultades de aprendizaje, errores y obstáculos con cada temática.

e. Capacidad para desarrollar y analizar instrumentos de evaluación, para diversos temas, así como para interpretar las respuestas de los estudiantes al aplicarlos.

f. Experiencia con buenos ejemplos de situaciones, materiales y recursos didácticos para enseñar un contenido dado.

Los autores resaltan la complementariedad de estos componentes y la importancia de enseñar este conocimiento didáctico de forma efectiva, promoviendo el uso del aprendizaje activo. Analizan también dos actividades didácticas dirigidas a profesores, mediante las cuales es posible enseñar al mismo tiempo probabilidad y conocimiento didáctico sobre la probabilidad. Indican que esta forma de desarrollar la instrucción proporciona a los profesores la responsabilidad en su propia formación, les ayuda a reflexionar y discutir sobre sus creencias con respecto a la enseñanza, y vivir el enfoque constructivista y social, que se espera repliquen en sus aulas. Una de estas actividades es posteriormente utilizada por Contreras (2011), quien realiza una evaluación amplia de su uso en varios talleres de formación de profesores, mostrando su utilidad en el desarrollo de diversos componentes del conocimiento de estos profesores.

4.2.2.1. MODELO DE BURGESS

Burgess (2008; 2011) parte del conocimiento matemático para la enseñanza de Ball y sus colaboradores y describe un modelo aplicable a la enseñanza de la estadística. Para ello se basa también en el modelo de razonamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), tomando los siguientes elementos:

a. *El ciclo de investigación*, sería el compuesto de las diferentes fases que se siguen al resolver un problema o una investigación estadística (plantear un problema, planificar su resolución, ejecutar el plan, incluyendo la toma de datos, analizar los datos y obtener una conclusión sobre el problema planteado).

b. *El ciclo interrogativo*, que se usa al trabajar en estadística e interacciona con el anterior (generar ideas sobre cómo resolver el problema o analizar los datos, buscar recursos, problemas similares o explicaciones, interpretar los datos y resultados, criticar los pasos seguidos, los datos o las soluciones y juzgar la validez de las conclusiones).

c. *Las disposiciones actitudinales*, típicas del estadístico, como escepticismo, perseverancia, creatividad.

d. Las cinco categorías que definen *modos fundamentales de razonamiento* estadístico: reconocimiento de la necesidad de datos, transnumeración (extracción de información adicional a partir de los datos), consideración de la variación (reconocimiento, descripción de patrones y relación con el contexto), razonamiento con modelos estadísticos (simples o complejos) e integración de la estadística y el contexto.

El autor cruza las categorías anteriores con cuatro de los componentes definidos por Ball y colaboradores (CCK, SCK, KCS, KCT), obteniendo un modelo bidimensional (Figura 4.2).

			Statistical knowledge for teaching			
			Content knowledge		Pedagogical content knowledge	
			Common knowledge of content (ckc)	Specialised knowledge of content (skc)	Knowledge of content and students (kcs)	Knowledge of content and teaching (kct)
Statistical thinking in empirical enquiry	Types of thinking	Need for data				
		Transnumeration				
		Variation				
		Reasoning with models				
		Integration of statistical and contextual				
	Investigative cycle					
	Interrogative cycle					
	Dispositions					

Figura 4.2. Modelo de conocimiento del profesor de Burgess (2008, p. 3)

Por ejemplo, sobre el ciclo de investigación el profesor necesita conocimiento común y especializado del contenido, conocimiento del contenido y el estudiante y conocimiento del contenido y la enseñanza. La aplicación de este modelo para analizar las clases de dos profesores con poca experiencia mostró marcadas diferencias en el dominio del conocimiento del profesor de matemáticas, en general, y el dominio del razonamiento estadístico en particular.

4.2.2.2. MODELO DE LEE Y HOLLEBRANDS

Lee y Hollebrands (2008; 2011) proponen el modelo de “conocimiento estadístico pedagógico tecnológico de los profesores” (TPSK), adaptando para la estadística el enfoque de Niess (2005), quien integra el conocimiento del profesor de matemáticas y ciencias en cuanto a contenido, pedagogía y tecnología. Para construir su modelo, Niess emplea cuatro componentes del PCK de Shulman, de modo que su modelo, TPCK, está conformado por:

a. Concepciones de qué significa enseñar un tema particular integrando la tecnología en el proceso de aprendizaje.

b. Conocimiento de las estrategias de enseñanza y las representaciones para enseñar temas particulares con la tecnología.

c. Conocimiento sobre la comprensión, razonamiento y aprendizaje de los estudiantes con la tecnología.

d. Conocimiento del currículo y materiales curriculares que integran la tecnología en el aprendizaje.

Lee y Hollebrands (2008; 2011) adaptan el modelo anterior al conocimiento estadístico, donde la tecnología puede usarse como amplificador de los procesos de razonamiento estadístico y como reorganizador cognitivo para promover la comprensión conceptual. La combinación de estos elementos revierte en el TPSK que incluye cuatro tipos de conocimientos requeridos por parte del profesor:

a. La comprensión del aprendizaje de los estudiantes y del pensamiento de ideas estadísticas con y sin tecnología. Por ejemplo, cómo difiere el aprendizaje de los estudiantes de la idea de convergencia si se utiliza simulación manual o simulación en ordenador, que incluya gráficas dinámicas.

b. El conocimiento de cómo las herramientas tecnológicas y las representaciones apoyan el pensamiento estadístico. Por ejemplo, la posibilidad de realizar cálculos y gráficos interactivos en poco tiempo o la posibilidad de obtener datos de Internet apoyan el trabajo con proyectos e investigaciones.

c. El reconocimiento de estrategias formativas para desarrollar lecciones de estadística con tecnología, que incluiría el saber cuándo y cómo integrar la tecnología para reforzar el aprendizaje de un tema.

d. La actitud crítica hacia la evaluación y uso de materiales curriculares para la enseñanza de ideas estadísticas con tecnología, de modo que sea capaz de seleccionar los materiales más adecuados; que sea consciente del tiempo necesario para aprender el uso de la tecnología y no sustituya el aprendizaje de la estadística por aprendizaje de la tecnología, sino que ambas se complementen.

4.2.2.3. OTROS MODELOS

Garfield y Ben-Zvi (2008) proponen otro modelo de conocimiento profesional para enseñar estadística que incluye cinco competencias que se ha de desarrollar en la formación de profesores: (a) ideas estadísticas fundamentales; (b) uso de datos reales; (c) uso de actividades para el aula; integración de las herramientas tecnológicas; (d) implementación del discurso en el aula y (e) uso de métodos alternativos de evaluación. Estos componentes, sin embargo no se relacionan con los descritos en la literatura de formación de profesores ya que más bien serían aspectos a tener en cuenta en la formación estadística, tanto de alumnos como de profesores.

En resumen, los modelos desarrollados coinciden en aspectos que son comunes a la educación en cualquier área o a la enseñanza de las matemáticas; además coinciden en elementos propios de la naturaleza incierta de lo estocástico. Estos modelos no son divergentes sino complementarios, pues Batanero, Godino y Roa (2004) enfatizan la epistemología específica de la estocástica, Burgess (2008) los componentes del razonamiento estadístico y Lee y Hollebrands (2008) integran la tecnología.

En lo que sigue describimos el modelo propuesto por Godino (2009) que complementa a los expuestos en este capítulo y que usaremos en nuestro trabajo como complemento al de Ball y colaboradores.

4.2.3. EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Godino (2009) integra, organiza y extiende los modelos de Shulman, de Ball y colaboradores, y de Schoenfeld y Kilpatrick, basándose en el enfoque ontosemiótico descrito en nuestro marco teórico. Con todo ello propone un nuevo modelo de lo que denomina *conocimiento didáctico-matemático* del profesor, cuya aplicabilidad en el campo de la estadística se expone en Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi (2011); incluye las siguientes seis facetas del conocimiento del profesor necesarias para la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos:

- *Epistémica*: conocimiento probabilístico acorde con los significados institucionales en el contexto correspondiente y sus diferentes componentes, tanto objetos matemáticos (problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos) como los correspondientes procesos. Para algunos profesores, adquirir este componente de su conocimiento es más complejo que para otros contenidos matemáticos, debido a las diferencias inherentes a la aleatoriedad con respecto al determinismo y a la falta de unicidad epistemológica interna, que se vio en la Sección 1.4, donde se describieron cinco significados institucionales válidos de la probabilidad. Esta faceta, según el autor, incluye el conocimiento en el horizonte, común y especializado y ampliado del contenido (en el modelo de Ball y sus colaboradores).

- *Cognitiva:* conocimiento del progreso en los significados personales logrados por los alumnos, del grado de dificultad en la aproximación de éstos significados a los significados pretendidos, de la asequibilidad de los significados pretendidos o implementados de acuerdo con las características cognitivas o de otro tipo de los alumnos. Es decir, incluye el conocimiento de las formas de razonar del estudiante en el tema, las fases de su desarrollo cognitivo, sus estrategias de aprendizaje y de resolución de problema, sus posibles errores y obstáculos, entre otros.

- *Afectiva:* conocimiento del grado de implicación (interés o motivación) del alumnado en el proceso de estudio, de sus sentimientos y de toda la componente emocional (actitudes, emociones, creencias). La unión de las facetas cognitiva y afectiva corresponden al conocimiento del contenido y el estudiante en el modelo de Ball.

- *Mediacional:* conocimiento del uso de recursos didácticos de todo tipo (libros, de texto o ayudas al estudio, recursos tecnológicos o manipulativos) apropiados para cada temática y de la distribución temporal adecuada para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, según el nivel de formación o el grado al cual se imparte la enseñanza.

- *Interaccional*: conocimiento de modelos de comunicación entre los actores del proceso de instrucción (en particular, reconocimiento de conflictos semióticos potenciales y su resolución entre profesor-estudiantes o estudiantes entre sí) con el fin de promover el logro de acuerdos en la construcción de significados compartidos y la fijación de éstos. Estas dos facetas cubren el conocimiento del contenido y la enseñanza.

- *Ecológica:* conocimiento del grado en que el proceso de estudio se ajusta al currículo, al proyecto educativo de la institución (o comunidad), relaciones con otras materias y la vida cotidiana y laboral, así como los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Es algo más amplio que el conocimiento del currículo en el modelo de Ball.

Además, para cada una de las anteriores facetas, el autor propone promover la capacidad de análisis didáctico del profesor en cuatro niveles diferentes (Godino et al., 2011):

1. *Análisis de prácticas matemáticas y didácticas*: consiste en desarrollar la capacidad del profesor para identificar problemas adecuados para un tema particular; analizar las prácticas operativas y discursivas necesarias (a priori) o realizadas (a posteriori) para resolver estas tareas. También la capacidad de identificar las líneas generales de actuación del docente y discentes con el fin de conseguir un aprendizaje particular y contextualizar el contenido.

2. *Descripción de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos*: Se trata de identificar los objetos y procesos probabilísticos que intervienen o emergen en la realización de las prácticas anteriormente citadas; con énfasis en concienciarse de la complejidad, de contenido y su didáctica, y valorar sus posibles significados, diferenciados como factor explicativo de los conflictos y de la progresión del aprendizaje.

3. *Identificación del sistema de normas y metanormas*: Se estudian los fenómenos de índole social a través de una dimensión normativa, la cual condiciona y hace posible el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

4. *Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio*: sintetiza los análisis previos con el fin de valorar el proceso de estudio como un todo e identificar potenciales mejoras para futuras implementaciones.

Godino (2009, 2011) propone utilizar un sistema de indicadores empíricos para analizar idoneidad didáctica. Estos indicadores de idoneidades parciales y sus interacciones se presentan como una guía de diseño y valoración de acciones formativas, que hemos tomado como referencia para nuestra investigación.

4.2.4. MODELO DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR EN NUESTRA INVESTIGACIÓN

En este trabajo utilizamos el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball y sus colaboradores, descrito en la Sección 4.2.1.2 y adaptado al caso de la probabilidad; es decir consideramos tanto el conocimiento matemático sobre la probabilidad, como el conocimiento didáctico, con los componentes ya descritos (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball y Bass, 2009).

Cabe notar que utilizaremos la denominación *conocimiento ampliado del contenido* (Godino, 2009) en lugar de conocimiento en el horizonte matemático. Lo interpretamos en el sentido de Zazkis y Mamolo (2011), es decir, como el conocimiento matemático de la probabilidad que es más amplio que el correspondiente a la educación primaria y que los estudiantes debieran haber adquirido durante su preparación como profesores. Lo determinaremos al analizar el plan de formación de estos profesores en su primer año de estudio.

Usamos la metodología de evaluación de conocimientos de profesores propuesta por Godino (2009), también utilizada por Contreras (2011), Gonzato, Godino y Neto (2011), Mohamed (2012) y Ortiz, Batanero y Contreras (2012), que consiste en dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar.
2. Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto por el autor.

Asimismo, adoptamos los indicadores de Godino (2009, 2011) como herramientas para valorar los diferentes componentes del modelo de conocimiento para la enseñanza de la probabilidad de la siguiente manera:

Para evaluar el *conocimiento común del contenido*, la consigna sería resolver una tarea orientada a niños de educación primaria, lo cual nos daría indicación de los errores o dificultades de los estudiantes. Para evaluar el *conocimiento ampliado* del contenido, se pediría a los profesores resolver tareas matemáticas, de un nivel más alto al de primaria, que involucra un conocimiento más avanzado del contenido específico; por ejemplo, del nivel de educación secundaria o los adquiridos en la universidad durante su preparación como profesores. También se les podría pedir establecer conexiones con otros temas o bien realizar generalizaciones de una tarea.

El *conocimiento especializado del contenido* se podría evaluar mediante la identificación de los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución correcta a una tarea matemática correspondiente al nivel de enseñanza que ellos han de impartir (en este caso la educación primaria); también se les puede pedir identificar las variables de la tarea; justificar las soluciones o resolver el problema con diferentes estrategias o usando distintas representaciones (Godino, 2009).

El *conocimiento del contenido y los estudiantes*, se puede evaluar describiendo los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución; describiendo errores plausibles o razonamientos de los estudiantes y analizando las configuraciones cognitivas de objetos y procesos implícitas en los mismos; también se les puede pedir formular cuestiones de evaluación.

4.3. INVESTIGACIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD

Finalizada la exposición de los diferentes modelos del conocimiento del profesor y la caracterización del que se usará en nuestro trabajo, pasamos a describir las investigaciones específicas sobre cada uno de los componentes del modelo del conocimiento del profesor para el campo de la probabilidad.

Son pocas las investigaciones centradas en la formación de profesores para enseñar estadística o probabilidad, motivo por el cual la *International Commission on Mathematical Instruction* y la *International Association for Statistical Education* organizaron un estudio específico sobre el tema (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

4.3.1. INVESTIGACIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO COMÚN DE PROBABILIDAD

Contreras (2011) y Mohamed (2012) describen diferentes investigaciones que se centran específicamente en evaluar los conocimientos de probabilidad de los profesores en formación o en ejercicio y presentan sus propios estudios al respecto.

A continuación resumimos estas investigaciones e incluimos otras no tratadas por estos autores; en general indican que el nivel de comprensión de estos profesores en temas relacionados con probabilidad es insuficiente, en especial para educación primaria. Al igual que en el Capítulo 3, el nivel de detalle en la descripción de las investigaciones varía según su relevancia para los Estudios 2 y 3; es más exhaustiva en las publicaciones que nos proporcionan ítems para las versiones finales de nuestros cuestionarios (Anexos 1 y 3), y es más resumida en las publicaciones utilizadas sólo con fines de comparación o como complemento de nuestro análisis.

4.3.1.1. INVESTIGACIONES CON FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Azcárate (1995) analiza las respuestas de 57 futuros profesores de educación primaria, a un cuestionario sobre concepciones de aleatoriedad y probabilidad. El instrumento contenía 28 ítems, que incluían preguntas de selección múltiple con justificación de la respuesta y preguntas abiertas. En el bloque de 12 preguntas sobre si ciertos fenómenos eran o no aleatorios se observó que muy pocos comprendían las características de los fenómenos aleatorios; los futuros profesores relacionaron la aleatoriedad con la causalidad y aspectos contextuales, no comprendiendo la utilidad de la probabilidad para estudiarlos.

El bloque de preguntas referidas a probabilidad incluyó seis problemas de asignación de probabilidad en experimentos simples y otras cuatro situaciones problema: razonamiento combinatorio, interpretación de una predicción del clima y su precisión, heurística de representatividad y juego equitativo. En general, la autora observó predominio de esquemas causales y uso de heurísticas o sesgos. Los participantes sólo aplican modelos probabilísticos en contexto de juegos de azar y muestran dificultades en el uso y comprensión de información frecuencial. Mostraron también errores en la cuantificación de probabilidades e idea de juego equitativo, debido a concepciones erradas de probabilidad y fallos en razonamiento combinatorio. La autora considera que esos futuros profesores presentaron un conocimiento cercano al cotidiano sobre el tratamiento de la realidad y cargado de los mismos condicionantes, debido a su escasa formación matemática.

La autora caracterizó cinco grupos según las tendencias de las explicaciones a sus respuestas, que muestra una gradación desde la dificultad en el reconocimiento de sucesos aleatorios hasta la facilidad en este procedimiento. En el primer grupo (8 participantes) prevalece la indecisión en respuestas y no respuestas; en el segundo (15 futuros profesores) predomina un razonamiento determinista, básicamente reconoce sucesos aleatorios solo en los juegos de azar; en el tercero (12) prevalece la argumentación causal, relacionan aleatoriedad con ausencia de control; en el cuarto (16) se observa un reconocimiento de la imprevisibilidad aunque con razonamientos ligados a la causalidad; en el quinto (6) predomina el reconocimiento de la imprevisibilidad con bajo uso de explicaciones causales y debilidades en la valoración del estudio de las situaciones aleatorias.

Posteriormente, la autora entrevistó a un participante de cada uno de los grupos identificados para profundizar en su nivel de conceptualización y sus posibles obstáculos; señalando que todos muestran gran desconfianza en procedimientos predictivos, algunos dan valor al estudio probabilístico como apoyo a la toma de decisiones y otros consideran el azar desligado de cualquier posibilidad de estudio matemático. Finalmente, concluye que es necesario desarrollar procesos de aprendizaje sobre estos temas para provocar la evolución de concepciones de los futuros profesores y potenciar buenas prácticas en su futuro ejercicio profesional.

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006) evaluaron la capacidad de 102 futuros profesores españoles de educación primaria para comparar probabilidades, confrontando sus respuestas a un cuestionario con las dadas por alumnos de educación primaria. Aunque las respuestas fueron mejores que las de los niños, todavía se observan errores al aplicar la proporcionalidad o respuestas correctas con razonamiento inadecuado.

Contreras (2011) y Contreras, Batanero, Díaz y Fernandes (2011) analizan las respuestas de 183 futuros profesores españoles de educación primaria a tres tareas para evaluar su conocimiento sobre el cálculo de probabilidades en tablas de contingencia 2x2. Los datos se tomaron como parte de una evaluación de una asignatura cuyo contenido es la Didáctica de la Matemática. Los alumnos habían realizado dos prácticas dedicadas a los temas de estadística y probabilidad, y habían estudiado el tema el año anterior durante aproximadamente dos semanas. Recogidos los datos, se realizó un análisis semiótico de las respuestas abiertas de los estudiantes a cada uno de los tres apartados. El autor encontró que la lectura de estas tablas y el cálculo de probabilidades a partir de ellas no es una tarea trivial para los futuros profesores de Primaria: 66% calculó correctamente probabilidades simples, pero sólo el 41% la probabilidad compuesta y 44% la probabilidad condicionada, además aproximadamente el 25% dejaron en blanco al menos una pregunta.

En cuanto a los errores se resalta que algunos daban probabilidades con valor mayor que uno, por invertir los términos en la fracción o por confusión entre frecuencias relativas y absolutas. Diez participantes (5,6%) tuvieron confusión entre probabilidad simple y compuesta, siete (3,9%) confundieron probabilidad simple y condicionada, nueve (4,9%) la probabilidad condicionada pedida con su traspuesta, un cuarto de los encuestados confunde probabilidades compuestas con condicionadas o viceversa. Los alumnos también tienen errores en la identificación de los datos en el enunciado, cálculo incorrecto, fórmula incorrecta y cálculo de la probabilidad del complemento en lugar de la del suceso requerido. Algunos errores no encontrados en la literatura previa fueron la confusión de la probabilidad simple con la probabilidad de un suceso elemental y suponer independencia en los datos, a pesar de que la dependencia era claramente visible. Este último error implica problemas en la comprensión de la independencia y escasa competencia en la lectura de datos de la tabla. Al dividir el total de conflictos entre el número de estudiantes se encontró una media de 1,7 conflictos por estudiante en las tres tareas, es decir, en promedio, cada estudiante encuentra un conflicto en la mitad de las tareas propuestas.

Mohamed (2012) aplicó un cuestionario con preguntas de probabilidad pasadas previamente a niños de 10 a 14 años a 283 futuros profesores españoles que cursaban, en el antiguo plan de estudios, la Diplomatura de Magisterio en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla. El cuestionario constaba de 15 problemas que evaluaban intuiciones y conocimientos básicos de probabilidad, tomadas de investigaciones con niños (Green, 1983; Fischbein y Gazit, 1994; Cañizares, 1997). Las proporciones de respuesta correcta estuvieron entre 77% y 90% para asignación de probabilidades simples, probabilidad condicionada, probabilidad frecuencial en el corto plazo y juego equitativo en un experimento simple, y las menores proporciones de respuesta correcta correspondieron a variable aleatoria (12%) y muestreo (5%).

Los errores más frecuentes fueron confusión entre suceso seguro y posible; falta de razonamiento combinatorio; e ideas confusas sobre características de los fenómenos aleatorios, independencia y experimento compuesto. El sesgo de equiprobabilidad se presentó en algunos problemas con más frecuencia que en otros; también se observó la heurística de representatividad, insensibilidad al tamaño de la muestra y el enfoque en el resultado. El autor observó las mayores tasas de no respuesta al evaluar juego equitativo en un experimento compuesto (21%), muestreo (16%), espacio muestral (12%), probabilidad compuesta (10%) y probabilidad frecuencial (7%). La comparación de estos resultados con una investigación previa muestra que, estos futuros profesores tienen mejor argumentación y tasas de acierto más altas que los niños de 10 a 14 años de Cañizares (1997). En general, el conocimiento común mostrado por estos futuros profesores fue aceptable, aunque insuficiente para la enseñanza; según el autor “estos resultados son preocupantes dada la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que se supone deberían tener los futuros profesores.” (Mohamed, 2012, p. 215).

4.3.1.2. INVESTIGACIONES CON FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS PARA SECUNDARIA

Carter (2008) analizó las respuestas de 210 futuros profesores de secundaria, a un cuestionario con 11 ítems de opción múltiple o respuesta abierta sobre probabilidad y estadística, pensado para los grados 6° a 8° en Estados Unidos. Dos ítems versaban sobre aleatoriedad, dos sobre la ley de los grandes números, tres sobre probabilidad conjunta, dos sobre tendencia central y tres sobre variabilidad (otro ítem sobre la ley de los grandes números también trataba el concepto de variabilidad). Todos los ítems evaluaban conocimiento conceptual y a veces procedimental. Los ítems de probabilidad tuvieron menor proporción de respuesta correcta que los de estadística, lo cual fue consistente con la formación recibida por los participantes, que habían cursado dos asignaturas de estadística y ninguna de probabilidad. La falacia del jugador se observó en 11,4% de los participantes, el sesgo de equiprobabilidad en 35,7%, indiferencia al efecto del tamaño de la muestra en 70%; errores con la probabilidad conjunta en 60%; y algunos asociados a la heurística de representatividad. Ya que un futuro profesor debe tener un conocimiento superior al común la autora concluye que los resultados muestran un desempeño conceptual incompleto.

Mohr (2008) analizó las respuestas de 122 futuros profesores de secundaria en Estados Unidos, a un cuestionario, con 7 ítems para cada uno los cuatro ejes temáticos propuestos por NCTM (2000) para los grados 6° a 8°. Cada ítem tenía tres partes, las dos primeras evaluaban el conocimiento de contenido (en uno la respuesta numérica, y en el otro su justificación). El apartado de probabilidad y estadística evaluaba la comprensión de la independencia, rango, lectura de gráficos y predicción de resultados. Se observó que sólo uno de los siete ítems, referido a independencia de sucesos, tuvo más de la mitad de respuestas incorrectas. Los dos errores más comunes fueron sumar las dos probabilidades y confundir muestreo con y sin reemplazamiento. Con respecto a la argumentación de las respuestas correctas, la mayoría describieron el algoritmo de cálculo pero no justificaron su elección o hicieron mención de algún razonamiento probabilístico. La autora concluye que el conocimiento común de contenido es insuficiente para la enseñanza.

Contreras (2011) analizó las respuestas a un cuestionario sobre probabilidad condicionada de 196 futuros profesores de matemáticas para secundaria, 95 de licenciatura y 101 que cursaban el máster de formación de profesorado en diversas universidades españolas. El cuestionario, tomado de Díaz (2007), se componía de ocho ítems de selección múltiple que permitían diagnosticar sesgos de razonamiento y siete ítems de respuesta abierta para evaluar el conocimiento de la definición y la capacidad para resolución de problemas de este tema.

Un alto porcentaje de futuros profesores presentó sesgos comunes en los ítems de opción múltiple, en especial la falacia del eje del tiempo (68,3% en un ítem y 32,7% en otro), falacia de las tasas base (39,8%), confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes (32,1%) y confusión entre probabilidad conjunta y condicionada (31,6%). De menor relevancia fueron la falacia de la conjunción (11,7%) o la condicional traspuesta (13,8%). El análisis comparativo al interior de la muestra dio porcentajes más bajos en estudiantes de licenciatura para la falacia de las tasas base y la confusión entre conjunta y condicionada, más bajos en estudiantes del máster para la confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Fueron pocos los estudiantes sin sesgos. El 96,8% de los alumnos de matemáticas y el 90,1% del Máster incurrió por lo menos en un sesgo y el 76,8% de matemáticas y 74,3% del Máster en dos o más; en promedio, cada futuro profesor mostró 2,3 sesgos sin grandes diferencias entre uno y otro tipo de estudiantes. Al comparar con los resultados en una muestra de 414 estudiantes de psicología (con quienes se validó el cuestionario cuatro años antes) se observó que los futuros profesores tenían mayor proporción de sesgos en las falacias de las tasas base y de la condicional traspuesta, menor en la del eje del tiempo y mínimas diferencias en el resto.

Respecto a los ítems abiertos se observa un conocimiento formal alto, menor para la definición de la probabilidad condicionada que para resolución de problemas sobre probabilidad condicionada, probabilidad total, independencia y probabilidad compuesta (con y sin independencia). Los estudiantes de máster contestan bien a más ítems abiertos (75% contestaron correctamente de cuatro a seis ítems, de siete) que los de licenciatura (50% en el mismo intervalo). En comparación con la muestra de 414 estudiantes de psicología, el desempeño es mejor en los futuros profesores excepto en la verbalización de la definición de probabilidad condicionada y en el teorema de Bayes, explicable porque la formación de los psicólogos incluye más redacción y hacen más énfasis en problemas de Bayes por la amplia utilidad de tasas y razones en su campo profesional.

En general, tanto en Contreras (2011) como en Díaz (2007) se observa la ausencia de correlación estadística de la capacidad de resolución de problemas con la presencia de sesgos, evaluada con un análisis factorial del cuestionario y con el cálculo de coeficientes de correlación entre algunas variables seleccionadas para los ítems correspondientes. En consecuencia, después de contar con un buen conocimiento formal es conveniente organizar situaciones didácticas para los futuros profesores que les permita reconocer y superar sus sesgos, pues al no ser conscientes de ellos no podrán identificarlos en sus estudiantes y por el contrario pueden transmitírselos.

4.3.1.3. INVESTIGACIONES CON PROFESORES EN EJERCICIO

Begg y Edwards (1999) evaluaron con un cuestionario los conocimientos sobre probabilidad de 22 profesores en activo y 12 en formación, llegando a la conclusión de que dichos profesores tenían una escasa comprensión de la probabilidad. Mostraron dificultad con la idea de aleatoriedad e independencia, interpretaron un enunciado probabilístico en forma no probabilística, solo dos tercios mostraron comprensión de sucesos igualmente probables. Los profesores también hicieron un uso excesivo de sus teorías previas al resolver los problemas.

Sánchez (1996) estudia en tres etapas la comprensión del concepto sucesos independientes entre profesores de secundaria de matemáticas en México: En primera instancia analiza las respuestas de 88 profesores a dos preguntas sobre el concepto de independencia. En una de ellas, relacionada con seleccionar una carta de una baraja francesa, la mitad de los profesores intentó resolver el problema en forma sistemática. De éstos, 39 profesores llegaron a una respuesta, aunque sólo 4 fueron correctas porque utilizaron la regla del producto. En la otra mitad se observan dos tipos principales de razonamientos incorrectos: identificar independencia y exclusión entre sucesos, o creer que la independencia se relaciona con experimentación sucesiva.

En la segunda etapa, el autor realiza entrevistas semi-estructuradas a adultos con formación en probabilidad, encontrando tres tipos de ideas la independencia de dos sucesos se asocia a que: (a) son ajenos, (b) son excluyentes según el orden de ocurrencia, (c) cualquiera puede presentarse con o sin el otro. Finalmente, plantea algunas situaciones problemáticas a cuatro profesores activos que acaban de cursar un semestre de Probabilidad y enseñanza. Una de ellas fue falsificada intencionalmente para generar un conflicto, pues la percepción de relación dada por el contexto era directa y se alteraron los números para que al calcular las probabilidades condicionadas se concluyera que la relación era inversa. Los cuatro profesores, en mayor o menor grado, indicaron la independencia de sucesos debido a sus ideas preconcebidas a pesar de que, al realizar los cálculos, se mostraba lo contrario. Insistieron en buscar argumentos a favor de su percepción, aun cuando el investigador los confrontaba con los resultados numéricos que ellos mismos habían obtenido.

En resumen, a nivel de profesores en formación para educación primaria se concluye que el conocimiento de probabilidad suele ser escaso. La misma conclusión se obtiene de las pocas investigaciones con profesores en ejercicio. Estas investigaciones muestran aspectos a mejorar en la formación de los futuros profesores, y la importancia de hacerlos conscientes de los propios sesgos, para evitar su replicación en sus alumnos y para que estén en capacidad de diagnosticarlos.

4.3.2. INVESTIGACIONES SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO Y AMPLIADO DE LA PROBABILIDAD

Mientras las investigaciones sobre conocimiento común son algo más frecuentes, hemos encontrado pocas investigaciones sobre conocimiento ampliado de la probabilidad. En este sentido, podemos considerar la de Batanero, Cañizares y Godino (2005), quienes proponen un cuestionario con tareas algo más avanzadas que las correspondientes a la educación primaria a 132 futuros profesores españoles de educación primaria, observando sesgos en su razonamiento probabilístico, como la heurística de la representatividad (60% de la muestra), la heurística de la equiprobabilidad (60%) y el enfoque en el resultado (23%). Estos sesgos se ven notablemente reducidos después de un experimento de enseñanza basado en la simulación con dispositivos manipulativos, tablas de números aleatorios y el software Statgraphics.

Respecto al conocimiento especializado del contenido, Callingham y Watson (2011) reportan los resultados de dos cuestionarios aplicados a profesores experimentados que enseñaban a niños de educación media (10 a 15 años), quienes participaron en un proyecto de formación profesional desarrollado durante de 2007 a 2009 en Australia. El proyecto, denominado *StatSmart*, contemplaba seminarios anuales de dos días, capacitación y uso de recursos como el programa *Tinkerplots* y el seguimiento permanente de los profesores y sus estudiantes.

Cada año se aplicó un cuestionario de 11 preguntas, 4 sobre anticipar las respuestas de estudiantes, 3 sobre motivar a la clase y 4 sobre retroalimentar a los estudiantes según sus respuestas; estas dos últimas tipologías harían parte del conocimiento especializado del contenido. Seis de estas preguntas se repitieron de un año a otro, una se modificó completamente debido a su alta tasa de no respuesta en la primera aplicación, ésta pregunta correspondía a la lectura de una tabla de dos vías.

Se clasificaron a los profesores en cuatro niveles jerárquicos de PCK, siguiendo el modelo de Shulman (1987), según sus respuestas: consciente, emergente, competente y hábil (o experto). En la primera aplicación, la mitad de los 42 participantes se clasificaron en el nivel competente, poco más de la cuarta parte en emergente, 14% en consciente y 7% en hábil. En 2008, respondieron sólo 26 participantes, 18 de los cuales también habían contestado el primer año y los 8 restantes tenían características homogéneas con el grupo inicial. De esta aplicación se resalta el aumento en la proporción clasificada como hábil (23%; en términos absolutos se dobló, de 3 pasó a 6) y la disminución en la proporción clasificada como emergente (15%; en términos absolutos se redujo a la tercera parte, de 12 pasó a 4); las otras dos clasificaciones presentaron porcentajes similares al año anterior, 15% conscientes y 46% competentes. A partir de estos resultados las autoras consideran que el proyecto de formación mejoró el nivel de PCK de los profesores participantes. Para concluir, invitan a seguir investigando en el tema teniendo en cuenta las limitaciones de su estudio y la importancia de perfeccionar la medición del conocimiento del contenido pedagógico (PCK) para evaluar los programas de formación del profesorado.

El resumen de estos trabajos es que también hay un fallo en el conocimiento ampliado y especializado del contenido, lo cual es razonable, dado su dependencia del conocimiento común. Asimismo, las pocas investigaciones existentes sugieren el interés de incluir estos componentes en nuestro trabajo.

4.3.3. INVESTIGACIONES SOBRE CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y SU ENSEÑANZA

Finalizado el análisis de las investigaciones sobre conocimientos matemáticos de la probabilidad en profesores, comenzamos en esta sección el estudio de los conocimientos didácticos; en primer lugar el relacionado con la enseñanza de la probabilidad, abordado por algunos autores y resumidos por Contreras (2011). El autor indica que estas investigaciones son muy escasas y en general revelan problemas en este conocimiento; explicable por tratarse de un tema relativamente nuevo en los currículos. A continuación las describimos.

Watson (2001) analizó las respuestas de 43 profesores australianos en ejercicio, 28 de los cuales enseñaban en secundaria, a un extenso cuestionario de respuesta abierta con relación a la enseñanza de probabilidad y estadística, empleando el marco de Shulman (1987). Pocos profesores reconocieron apoyarse en la simulación o en la observación de muestras, para la enseñanza de probabilidad o estadística, aunque utilizaban otros recursos como material manipulativo, calculadoras o bases de datos disponibles. En general, tenían una buena capacidad de observación reflexiva, porque su autovaloración del nivel de confianza para enseñar los temas centrales del instrumento fue muy cercana a los desempeños mostrados al respecto. El nivel más alto, se obtuvo en relación a la enseñanza de la media, seguido de muestreo y menor para razón de posibilidades (relación de casos favorables frente a desfavorables). La confianza fue mayor en profesores de secundaria que en los de primaria, debido a su mayor base matemática.

En el estudio de Carter (2008), pidió a los participantes también explicar el razonamiento seguido en su solución a tres de los ítems a un estudiante ficticio. 18,1% de los participantes dieron una explicación deseable a la pregunta relacionada con independencia y 20% dieron explicaciones aceptables. Con relación a la ley de los grandes números sólo 11% dieron una explicación adecuada y 4,3% dieron explicaciones aceptables. Para la pregunta sobre probabilidad conjunta 20,5% fueron capaces de proporcionar una explicación y uno (0,5%) dio una explicación aceptable. La autora concluye que hay una brecha entre la comprensión y la explicación de un concepto, y que es necesario cambiar la instrucción de los futuros profesores habilitándolos para explicar las ideas a los aprendices de un contenido que tiene comprensión correcta.

En el estudio de Mohr (2008), la parte final de cada uno de los siete ítems analizaba el conocimiento didáctico. La mayoría de los futuros profesores explicaron exitosamente su propio procedimiento a otra persona, que dice no haber entendido; y la mitad de éstos pueden ir más allá. Por ejemplo relacionan el procedimiento utilizado con diferentes partes del problema o pueden explicar por qué estas partes llevarían a una respuesta correcta o a un procedimiento acertado. En consecuencia, una proporción menor de lo esperada para futuros profesores, tienen la argumentación necesaria para la enseñanza de los temas de probabilidad y estadística al nivel de grados intermedios en esta investigación.

Watson, Callingham y Donne (2008) entrevistaron a 42 profesores australianos de primaria y secundaria que cursaban un programa de formación en estadística aplicando un cuestionario, con doce ítems referidos a PCK. El análisis con métodos estadísticos mostró tres agrupaciones de profesores según su habilidad en la enseñanza de la estadística. El nivel bajo, con 14 profesores, se caracterizaba porque podía empezar a predecir respuestas de los estudiantes y usar materiales en clase. El nivel medio, con 19 profesores, se caracterizaba por la capacidad de sugerir respuestas correctas e incorrectas para algunos temas y tratar problemas de razonamiento proporcional involucrando contenido matemático. El nivel alto, con 9 profesores, se caracterizó por un buen desempeño para direccionar la matemática involucrada en problemas de razonamiento proporcional y sugerir respuestas correctas e incorrectas para ítems de dificultad moderada, aunque su desempeño no es bueno con ítems más complejos.

En el estudio de Contreras (2011) con 174 futuros profesores de primaria, la segunda y tercera preguntas planteadas estaban dirigidas a evaluar los conocimientos didácticos del contenido de los futuros profesores, respecto a dos componentes del MKT de Ball y colaboradores: (a) conocimiento especializado del contenido, y (b) conocimiento del contenido y la enseñanza. Para evaluar el conocimiento especializado del contenido se pidió a los estudiantes analizar los objetos matemáticos implícitos en la tarea. Los estudiantes identificaron algunos objetos matemáticos, aunque no todos los necesarios para resolver el problema. Respecto a los correctamente identificados, los más frecuentes han sido los conceptos, con un promedio de al menos dos correctamente identificado por alumno, seguido de los procedimientos.

Para valorar el conocimiento del contenido y la enseñanza se pidió a los estudiantes identificar algunas variables que se pudiesen cambiar en el problema propuesto para aumentar o disminuir la dificultad o bien variar el contenido. Los resultados indican que los futuros profesores son capaces de encontrar variaciones en las cuestiones, para con ello modificar los contenidos y la dificultad de las tareas propuestas, con el fin de llegar a una comprensión mayor por parte del alumnado; pero con gran dificultad, pues el número de respuestas es pequeño, la mayoría identificaron entre una y dos variables del problema o de la situación, y sólo una relacionada con el sujeto.

En resumen, estas investigaciones sobre conocimiento del contenido y la enseñanza de la probabilidad reflejan deficiencias, con peligro de que los profesores enseñen el tema en forma incorrecta o se omita. La posibilidad de que los profesores simplemente adquieran este conocimiento con la práctica podría contradecirse por la investigación de Haller (1997), quien observó cuatro profesores de educación secundaria que asistían a un curso de desarrollo profesional, concluyendo que la experiencia docente no parecía tener tanta repercusión en la enseñanza de la probabilidad por parte de los profesores como su preparación específica. Estos profesores también dependían en gran medida de los libros de texto y no aprovechaban el contexto de la probabilidad para desarrollar relaciones entre las fracciones, los decimales y los porcentajes. Puesto que esta investigación ya es bastante antigua y la enseñanza de la probabilidad ha progresado, los resultados quizás no se puedan generalizar, pues en la actualidad los profesores en ejercicio tienen mayor dominio del tema porque han estado más tiempo en contacto con la probabilidad.

4.3.4. INVESTIGACIONES SOBRE CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y LOS ESTUDIANTES

Las investigaciones que tratan el conocimiento del contenido y los estudiantes sobre probabilidad son escasas; en general realizadas con profesores en ejercicio, para evaluar su conocimiento empírico de las condiciones favorables al aprendizaje, y de los errores y dificultades de los estudiantes.

Watson (2001) encontró que 13 de los 28 profesores australianos de educación secundaria a los que pasó el cuestionario descrito en la sección anterior, reconocieron algunas de las dificultades de sus alumnos, aunque se centraban principalmente en aspectos de procedimiento. La autora sugiere que ello se explica porque su enseñanza se basaba en un enfoque computacional y debido a ello tenían limitaciones para valorar cierto tipo de respuestas conceptuales. Por ejemplo, no eran capaces de identificar errores en un gráfico o en un problema de muestreo simple. Este resultado es razonable teniendo en cuenta el momento en que desarrolló la investigación y que la formación de estos profesores no incluyó el área de probabilidad y estadística.

Stohl (2005) examinó la interpretación que treinta y cinco profesores de educación secundaria hicieron del desempeño de algunos estudiantes, cuando estos desarrollaban una tarea dada, utilizando una herramienta de simulación. Las observaciones filmadas de estos profesores sugirió a la autora que éstos se limitaban a criticar la ausencia de ideas formales sobre probabilidad en sus alumnos, ignorando el desarrollo de ideas intuitivas probabilísticas, reflejadas, sin embargo, en las acciones de los alumnos con el software y su uso apropiado del lenguaje probabilístico. El autor concluye que los profesores no llegaban a valorar de una forma completa los razonamientos de sus estudiantes.

Mohamed (2012) evalúo las respuestas de 90 futuros profesores españoles, que analizaron en grupos de dos o tres, siete posibles respuestas de niños para cuatro problemas. Que habían sido resueltos previamente por los participantes. El autor observó que la mayoría de los grupos discriminaron bien las respuestas correctas e incorrectas de los niños. Sin embargo, la argumentación de las razones que explicaban las respuestas incorrectas mostró bajo conocimiento, en varios grupos, que fueron inconsistentes respecto a su clasificación de la respuesta como correcta o incorrecta.

La mayoría de grupos de futuros profesores reconocieron los siguientes razonamientos erróneos de los niños: en un problema de comparación de probabilidades simples, la comparación de un solo tipo de casos (solo favorables o solo desfavorables);

en un problema sobre juego equitativo, el fallo en el razonamiento proporcional y la exigencia de la repetición de la jugada para admitir la equitatividad; la confusión entre suceso seguro y espacio muestral, o entre seguro y posible; en otro problema sobre juego equitativo en un experimento compuesto, el sesgo de equiprobabilidad y el fallo al calcular o identificar el número total de casos posibles.

En resumen, estas tres investigaciones sugieren debilidades en la valoración del razonamiento probabilístico de los alumnos, el reconocimiento de la complejidad de este desarrollo de pensamiento, la preponderancia de aspectos procedimentales y la identificación de errores en el manejo del tema.

4.3.5. INVESTIGACIONES SOBRE ACTITUDES Y CREENCIAS

Otras investigaciones han tratado las facetas interaccional y afectiva en el modelo de Godino (2009). El componente afectivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje se refleja en creencias y actitudes, que son muy importantes en el caso de los profesores, porque pueden transmitirlas (tanto si son positivas como si son negativas) a sus estudiantes. Las creencias, de carácter cognitivo, son concepciones personales acerca de un elemento del aprendizaje (sujeto, objeto o ambiente). Las actitudes y las emociones, de carácter afectivo, se diferencian en su temporalidad; mientras las primeras son sentimientos intensos que prevalecen en el tiempo, las segundas son expresiones transitorias (Estrada, 2007).

Steinbring (1990) fue pionero en la investigación sobre creencias o actitudes de los profesores hacia la probabilidad. Este autor, resaltó dos aspectos importantes en relación con las creencias sobre la enseñanza: la consciencia de las características inherentes a lo estocástico y la tendencia a favorecer un ambiente propicio para integrar el desarrollo de pensamiento estocástico a nivel escolar. También sugiere que, el conocimiento estocástico es más complejo y sistémico que el de otras áreas de las matemáticas; además tiene implícitas o explícitas actividades interpretativas, pues los conceptos están interrelacionados con el contexto de aplicación siendo susceptibles de controversias, como hemos visto al hablar de los diferentes significados de la probabilidad.

Estrada, Batanero y Fortuny (2004) realizaron un amplio estudio de actitudes hacia la estadística en una muestra de 367 futuros profesores de educación primaria. Sus resultados mostraron actitudes positivas en ítems relacionados con su propia competencia para aprender ("Yo puedo aprender estadística") y con el valor de la estadística ("La estadística es útil"). También se observa que el gusto o desagrado hacia la estadística no estuvo relacionado con su propia percepción de su capacidad para aprender estadística y el valor dado a la estadística. Los autores también analizaron las relaciones entre las actitudes de los futuros profesores de educación primaria y sus conocimientos estadísticos, mostrando una relación positiva, así como con el número de cursos de estadística cursados por los participantes.

Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) aplicaron cuestionarios y entrevistas a cinco profesores en ejercicio para comprender las razones para omitir la probabilidad en la enseñanza de la escuela y establecer los factores que pueden influenciar esta decisión. Estos profesores, con diferentes niveles de formación y de experiencia tenían una visión formal de la matemática; mostraron su creencia de que la probabilidad no tenía suficiente consistencia educativa en la enseñanza obligatoria ni garantizaba ningún propósito práctico para los estudiantes. Otros argumentaron potenciales dificultades para el estudiante, la necesidad de una metodología diferente para este tema, la falta de apoyo de los compañeros y de fuentes de información.

Eichler (2008, 2011) muestra la influencia de las creencias de los profesores alemanes, respecto a la enseñanza de la estadística sobre su práctica docente y cómo esta influye en los conocimientos que adquieren sus alumnos. Clasifica las creencias de estos profesores según su visión (estática o dinámica) de las matemáticas y orientación (formal o aplicada) de su enseñanza. Esta clasificación implica diferencias, que pueden ser notables, en la enseñanza del mismo contenido para estudiantes de un nivel educativo dado.

En resumen, las investigaciones sobre actitudes de los profesores en ejercicio sugieren que su omisión de la enseñanza de la probabilidad se debe, principalmente, a una baja valoración de su importancia en la formación del escolar, o a la ansiedad que les genera la toma de consciencia de las diferencias entre razonamiento probabilístico y matemático, así como la falta de apoyo en recursos. Por el contrario, la investigación con profesores de primaria en formación sugiere que una mejor disposición para su enseñanza, debido a su mayor confianza en su conocimiento del contenido y a la consciencia de su importancia.

4.3.6. EXPERIENCIAS DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Batanero y Díaz (2011) sugieren que la formación de profesores requiere de entornos y contextos en que se trabajen sobre problemas significativos relacionados con su desarrollo profesional así como de la reflexión sobre dichas actividades. Algunas investigaciones, que han realizado este tipo de experiencias, para resolver los problemas antes descritos, se analizan a continuación.

En la actualidad se sugiere la experimentación empírica o simulada para la enseñanza de la probabilidad a nivel escolar, como herramienta para mejorar el razonamiento probabilístico de los estudiantes. Dugdale (2001) utilizó la simulación por ordenador para analizar el conocimiento didáctico de un grupo de 16 profesores de educación primaria en formación en Estados Unidos y mostró las ventajas de enseñar a los profesores a simular un juego conocido con probabilidades alteradas. Destacando que los profesores en prácticas podían usar esta experiencia para promover el debate y la comprensión de la probabilidad, contrastando las frecuencias relativas generadas en la simulación por ordenador con las probabilidades teóricas y razonando los resultados. Lee y Hollebrands (2008, 2011) también sugieren explorar conceptos de probabilidad e inferencia con herramientas computacionales, debido a ventajas como reducción de tiempo de cálculos, trabajo en clase con aplicaciones reales, simulación y creación de micro-mundos estocásticos virtuales. Los autores experimentaron con profesores la utilidad de herramientas tecnológicas para promover el pensamiento estocástico a la vez que desarrollaban su comprensión de probabilidad con esta misma tecnología.

Batanero, Godino y Roa (2004) sugirieron resolver situaciones problemáticas paradójicas y reflexionar sobre su contenido: Enfrentar un reto como alumno al resolver una tarea o problema planteado facilita al profesor en formación la identificación de dificultades en el aprendizaje de un concepto dado. Es importante, según estos autores, proponer algunos problemas, que sean sencillos en apariencia, cuya solución sea contra-intuitiva o sorprendente, considerando que los futuros profesores tienen conocimientos más sólidos de estadística que sus futuros estudiantes.

Una de las situaciones propuestas por estos autores se usa en Contreras (2011), quien evalúo una experiencia de formación con 166 profesores, 79 en formación y 87 en ejercicio, españoles, mexicanos y portugueses. Para ello introduce una variante de la paradoja de la caja de Bertrand, que se combina con la simulación de la situación, la recogida de datos y la discusión con los participantes de las diferentes estrategias, así como pruebas matemáticas de las mismas. Este proceso se repite varias veces, y al finalizar el mismo se comparan las estrategias finales con iniciales. Las estrategias iniciales revelaron la existencia de sesgos, tales como la falacia del eje de tiempo y falta de percepción de la independencia en aproximadamente dos tercios de los participantes. Sin embargo, cerca de la mitad de participantes reconocen y superan sus sesgos de razonamiento tras la instrucción, la mayoría apropiaron herramientas útiles para el ejercicio profesional tanto de la enseñanza de la probabilidad condicionada como del análisis didáctico, se promovió la reflexión didáctica entre los profesores.

Groth (2008) plantea que el profesor de estadística y probabilidad debe manejar dos tipos de incertidumbre en su trabajo cotidiano: uno es del conocimiento estocástico y el otro debido a las interacciones entre estudiantes y profesor, que no son predecibles. Propone como dispositivo formativo el análisis colectivo por grupos de profesores de experiencias didácticas: Sugiere que al discutir problemas y necesidades comunes, los profesores imaginan alternativas más interesantes para la enseñanza, descartan opciones no exitosas en aplicaciones anteriores por otros colegas o aprenden sobre errores y razonamientos de los estudiantes. La discusión puede ser en vivo o virtual, y tratar sobre ideas, estrategias, comportamientos, dificultades, respuestas de los estudiantes y concepciones erradas, o de materiales.

Chick y Pierce (2008) sugieren que una tarea adecuada es la planificación de una lección para enseñar a alumnos y utilizar un artefacto de instrucción, que consiste en experimentar ellos mismos una lección. Jugar sucesivamente los roles de alumno y profesor le permite al futuro profesor poner en juego su conocimiento estadístico y su conocimiento profesional, comprender mejor las dificultades potenciales de los alumnos, así como adaptar los conceptos y tareas al nivel de formación requerido. El diseño de unidades didácticas por parte de los mismos profesores es una de las habilidades citadas por Schoenfeld y Kilpatrick (2008), pero debe tenerse en cuenta el alto nivel de dificultad que les implica enfrentarse a conceptos nuevos para ellos.

La propuesta de formación dirigida a futuros profesores para enseñar estadística presentada por Garfield y Ben-Zvi (2008) se basa en seis principios: (a) enfocarse en desarrollar ideas estadísticas fundamentales más que en presentar herramientas y procedimientos; (b) usar datos reales e interesantes para motivar a los estudiantes a hacer y probar conjeturas; (c) usar actividades de aula para apoyar el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes; (d) integrar el uso apropiado de herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes probar sus conjeturas, explorar y analizar datos, desarrollando razonamiento estadístico; (e) promover el discurso en el aula, con la exposición de argumentos estadísticos centrados en ideas fundamentales; y (f) valorar el aprendizaje de los estudiantes y hacer un seguimiento del desarrollo de su pensamiento estadístico, así como usar métodos de evaluación progresivos. Los autores han aplicado estos principios en sus clases para profesores denominando esta metodología como Ambiente para el desarrollo de razonamiento estadístico (SRLE).

En resumen, las experiencias sobre formación de profesores promueven el aprendizaje del contenido y su enseñanza con estrategias diversas, y complementarias; se identifica como elemento común la replicación de su experiencia de aprendizaje para el ejercicio profesional, adecuándola al nivel de formación que se dirige. Adicionalmente, en la práctica docente se recomienda la reflexión con los pares acerca de la incertidumbre propia de la interacción con los estudiantes.

4.4. LA PROBABILIDAD EN LA FORMACIÓN DE LOS PARTICIPANTES EN EL ESTUDIO

4.4.1. INTRODUCCIÓN

Finalizado el estudio de las investigaciones previas relacionadas con los conocimientos y la formación de profesores sobre probabilidad, pasamos en esta sección a analizar la formación específica recibida por los participantes en el estudio, que nos permitirá relativizar la valoración que se haga en los Capítulos 5 y 6 de los resultados de la evaluación de su conocimiento.

Dichos estudiantes cursan en la Universidad de Granada el Grado de Maestro de educación primaria, cuya normativa viene regulada por la armonización de la educación superior en Europa y el perfil profesional recogido en la Ley Orgánica de Educación (MEC, 2006) y en la correspondiente Ley de Educación de Andalucía (Consejería de Educación, 2007). La normativa de dicha titulación recoge las competencias a desarrollar y la distribución de créditos en módulos de Formación Básica, Formación Didáctico – Disciplinar y Prácticas Externas.

De manera previa a esta normativa, el Ministerio de Educación estableció las directrices de lo que debe ser la formación del maestro en educación primaria en su "Libro Blanco del título de Grado en Magisterio (ANECA, 2005), que pretende capacitar al maestro de educación primaria para que sea organizador de la interacción de cada alumno/a con el objeto de conocimiento; estimule su potencial de desarrollo; diseñe y organice trabajos disciplinares e interdisciplinares; colabore con el mundo exterior a la escuela y ejerza las funciones de tutoría, orientación de los estudiantes y evaluación de sus aprendizajes.

En la Universidad de Granada, el componente de formación didáctico-disciplinar, comprende tres materias obligatorias: Bases matemáticas en la educación primaria (9 ECTS en el primer semestre del primer curso), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria (6 ECTS en el segundo semestre del segundo curso) y Diseño y desarrollo del currículum de matemáticas en la educación primaria (7 ECTS en el segundo semestre del tercer curso).

Las competencias específicas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, son las siguientes (ANECA, 2010, p. 18):

> CMD6.1. Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones especiales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.).
> CMD6.2. Conocer el currículo escolar de matemáticas.
> CMD6.3. Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas.
> CMD6.4. Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.

CMD6.5. Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.
CMD6.6. Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

En lo que sigue se analizan brevemente las dos primeras asignaturas citadas y, con mayor detalle, la experiencia concreta de enseñanza de la probabilidad, llevada a cabo en la segunda.

4.4.2. LA PROBABILIDAD EN LA ASIGNATURA "BASES MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA"

Los contenidos de esta materia, corresponden al conocimiento común y ampliado del contenido, tratan de:

> Estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos, sus formas de representación y modelización, fenomenología y aspectos históricos de los mismos, utilizando materiales y recursos sobre los bloques de matemáticas de educación primaria: Números y operaciones; La medida, estimación y cálculo; Geometría (las formas y figuras y sus propiedades); Tratamiento de la información. Azar y probabilidad.
>
> Los contenidos transversales de matemáticas en educación primaria: Sentido numérico, Resolución de problemas, Uso de las nuevas tecnologías en matemáticas, Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas. (ANECA, 2010, p. 67)

La guía docente de la asignatura[1] incluye los siguientes contenidos de probabilidad en el temario teórico: "Fenómenos y experimentos aleatorios. Sucesos. Probabilidad: asignación subjetiva; estimación frecuencial y asignación clásica (regla de Laplace)." (Departamento de Didáctica de la Matemática, 2011a, p. 3).

En el temario práctico se incluyen tres contenidos relacionados con estadística y probabilidad: "Organización de datos; interpretación de información en medios de comunicación; fenómenos relacionados con el azar." (Departamento de Didáctica de la Matemática 2011a, p. 4); es de notar que, los dos primeros se pueden desarrollar desde dos enfoques: estadístico y probabilístico, o sólo estadístico.

Las referencias recomendadas contienen un capítulo dedicado a la probabilidad. Hemos revisado los capítulos escritos por Azcárate y Cardeñoso (2001) (texto [A]), Batanero y Godino (2004) (texto [B]) y Pareja (2011) (texto [C]); todos recogen los siguientes contenidos: aleatoriedad, sucesos, espacio muestral, experimentos simples y compuestos, probabilidad, asignación de probabilidades mediante regla de Laplace, estimación frecuencial de la probabilidad, probabilidad conjunta y condicionada. Aparecen también problemas propuestos y resueltos de cada uno de estos contenidos.

El texto [A] presta mayor atención a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos que a su desarrollo. El texto [C] presenta el contenido exclusivamente, sin mención a la didáctica, puesto que la orientación del libro es al contenido disciplinar de matemáticas para maestros de primaria. El texto [B] incluye dos capítulos: uno de contenido

[1] Descargado de: grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/estudios

matemático que es el que analizamos acá y otro de contenido didáctico, que se utilizará en la asignatura de segundo curso.

El análisis de estos capítulos siguió la metodología descrita en el Capítulo 2 para el análisis de los libros de texto de educación primaria y se basa en el estudio epistemológico de la Sección 1.4. Su presentación será más sucinta que la de ese capítulo, dado el número de documentos analizados, y que en los Capítulos 1 y 2 se han descrito en detalle los diferentes objetos matemáticos ligados a cada uno de los cinco significados de la probabilidad.

Todos los textos exponen situaciones problema ligadas a los cuatro significados de la probabilidad: expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos, previsión de probabilidad en juegos de azar, previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados y estudio de sucesos cuya probabilidad puede cambiar por información disponible. Estos objetos coinciden con el significado pretendido de la probabilidad la educación primaria (Tabla 2.17), aunque el tratamiento es más avanzado y los contextos más complejos, acordes con su entorno. Solo el texto [C] expone la necesidad de formalizar los otros significados para introducir el significado axiomático.

Los textos [B] y [C] combinan lenguaje verbal, simbólico, gráfico, tabular y numérico; se destaca que el texto [A] usa casi exclusivamente lenguaje verbal, y no emplea lenguaje gráfico ni tabular.

La argumentación es inductiva-deductiva o basada en razonamientos deductivos informales, de nivel de Bachillerato; las justificaciones son preferentemente mediante ejemplos y contraejemplos que faciliten la identificación de patrones y la validación de generalizaciones, en los textos [A] y [B] predomina el contraste con la experimentación en diferentes contextos y en el texto [C] la deducción en lenguaje simbólico, sin llegar a demostraciones formales.

Las tablas 4.1 a 4.5 resumen los conceptos, propiedades y procedimientos que aparecen en estos libros de texto; construidas a partir de los objetos matemáticos ligados a cada uno de los cinco significados de la probabilidad analizados en el Capítulo 1 (Tablas 1.1 a 1.5) y completadas con los objetos nuevos que se encontraron en el análisis presentado en esta sección (resaltados con cursiva).

El significado axiomático (Tabla 4.1) está presente en forma implícita, y es inusual la formalización de propiedades y procedimientos, aunque se hace mención a su importancia y las implicaciones que tiene su conocimiento o la omisión de su enseñanza, aunque sea de manera intuitiva.

En relación con los conceptos, los estudiantes tienen contacto con los principales, analizados en el Capítulo 1, excepto variable aleatoria y su distribución propios del significado axiomático; no todos se definen rigurosamente, sino de modo informal, semejante al nivel de Bachillerato.

Los tres textos presentan casi todas las propiedades y procedimientos ligados a los significados intuitivo y clásico, y la mayoría del subjetivo y del frecuencial. [B] y [C] exponen de modo informal buena parte de las propiedades y procedimientos del significado axiomático, mientras que el texto [A] apenas les hace mención. En general, se excluyen propiedades y procedimientos muy complejos, por su formalidad o por corresponder a un conocimiento especializado de otras profesiones.

Tabla 4.1. Objetos del significado axiomático en textos recomendados para "Bases matemáticas"

Tipo		Objeto	[A]	[B]	[C]
Conceptos		Aleatoriedad, experimento aleatorio, espacio muestral	x	x	x
		Suceso. Tipos de sucesos	x	x	x
		Espacio de sucesos, álgebra de sucesos.		x	x
		Probabilidad, medida	x	x	x
		Probabilidad condicionada, dependencia e independencia		x	x
		Experimentos compuestos: por etapas o simultáneos	x	x	x
Propiedades	Aleatoriedad experimento aleatorio	Distinción entre proceso, resultado y secuencia de resultados		x	x
		Impredecibilidad: se conoce el conjunto de resultados, pero no el que ocurrirá	x	x	x
		Repetibilidad: del experimento en condiciones fijas	x	x	x
	Espacio muestral	Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio	x	x	x
		El espacio muestral puede ser finito o infinito		x	x
	Suceso y tipos	Suceso: cada subconjunto del espacio muestral		x	x
		Suceso elemental: formado por un solo resultado del experimento	x	x	x
		Suceso compuesto: dos o más resultados del e. aleatorio	x	x	x
		Suceso unión de dos sucesos		x	x
		Suceso intersección de dos sucesos		x	x
		Sucesos excluyentes o incompatibles: no pueden ocurrir a la vez		x	x
		Sucesos excluyentes o incompatibles: sin elementos comunes		x	x
	Probabilidad	La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1	x	x	x
		La probabilidad del suceso seguro es 1; la del suceso imposible 0	x	x	x
		La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de estos sucesos.		x	x
		Probabilidad del suceso complementario a uno dado		x	x
		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		x	x
		$P(A) = P(a_1) + \cdots + P(a_k); A = \{a_1, \ldots, a_k\}, a_i$ sucesos elementales		x	x
	Probabilidad condicionada, dependencia	$P(B\|A) = P(A \cap B)/P(A)$		x	x
		Si A y B son independientes, $P(B\|A) = P(B)$; $P(A\|B) = P(A)$		x	x
		Regla del producto de probabilidades (sucesos dependientes)		x	x
		Regla del producto de probabilidades (sucesos independientes)		x	x
		Teorema de la probabilidad total		x	x
		Teorema de Bayes		x	x
		La probabilidad del suceso condicionante debe ser distinta de cero		x	x
	Experimento compuesto	Se compone de varios experimentos simples, dependientes o no	x	x	x
		Espacio muestral (*k experimentos*): producto ($E_1,\ldots,E_k$)		x	x
		Probabilidad conjunta (experimentos dependientes/independientes)		x	x
Procedimientos	Sucesos	Dados dos sucesos formar su intersección		x	x
		Dado un suceso formar su complemento		x	x
		Reconocer un suceso complementario		x	x
		Reconocer un suceso incompatible		x	x
	Probabilidad	Calcular probabilidad de suceso simple y compuesto (exp. simple)	x	x	x
		Calcular la probabilidad de la unión		x	x
	Probabilidad dependencia	Calcular probabilidades condicionadas en experimentos simples		x	x
		Reconocer si dos sucesos son independientes		x	x
		Analizar situaciones de dependencia/independencia entre sucesos		x	x
		Calcular la probabilidad aplicando el t. de probabilidad total		x	x
		Calcular la probabilidad condicionada aplicando la definición		x	x
		Calcular la probabilidad condicionada aplicando el T. de Bayes		x	x
	Experimento compuesto	Identificar el número de etapas en un experimento compuesto	x	x	x
		Distinguir el experimento simple que conforma cada etapa	x	x	x
		Reconocer si dos etapas consecutivas son independientes	x	x	x
		Calcular prob. conjuntas para sucesos dependientes/ independencia	x	x	x

Es notable la diferencia de los textos en la parte procedimental, [A] tiene pocas actividades de cálculo y preferencia por las propuestas de experimentación real o de contraste (identificar, clasificar, comparar con creencias personales); [C] tiene más presencia de actividades de cálculo que de otro tipo de procedimientos y [B] además de estas actividades propone la simulación con tecnología en la mayoría de tareas (los otros dos textos apenas mencionan estos recursos informáticos).

Tabla 4.2. Objetos del significado intuitivo en textos recomendados para "Bases matemáticas"

Tipo		Objeto	[A]	[B]	[C]
Conceptos		Azar y variabilidad	x	x	x
		Suceso; Suceso seguro, posible e imposible	x	x	x
		Posibilidad, grado de creencia	x	x	x
Propiedades	Azar	No se puede predecir con seguridad el resultado	x	x	x
		Opuesto al determinismo	x	x	x
	Suceso y tipos	Suceso posible: cualquier resultado de un experimento	x	x	x
		Suceso imposible: nunca se verifica	x	x	x
		Suceso seguro: siempre ocurre	x	x	x
	Posibilidad, grado de creencia	El grado de posibilidad o creencia del suceso seguro es 1	x	x	x
		El grado de posibilidad o creencia de un suceso posible está entre 0 y 1	x	x	x
Procedimientos	Azar	Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas (en que interviene o no el azar)	x	x	x
	Suceso y tipos	Reconocer tipos de sucesos (seguro, imposible y posible)	x	x	x
		Listar sucesos posibles en un fenómeno o experimento sin un procedimiento combinatorio		x	x
	Posibilidad, grado de creencia	*Calibración de grados de posibilidad en una escala de 0 a 1*	x	x	x
		Interpretación del grado de posibilidad o creencia	x	x	

Tabla 4.3. Objetos del significado clásico en textos recomendados para "Bases matemáticas"

Tipo		Objeto	[A]	[B]	[C]
Conceptos		Azar, juego de azar	x	x	x
		Casos favorables, casos posibles	x	x	x
		Probabilidad	x	x	x
		Juego equitativo	x	x	x
Propiedades	Azar, juego de azar	Número de resultados finito y numerable	x	x	x
		Equiprobabilidad de sucesos elementales	x	x	x
	Casos favorables/posibles	*Casos favorables a A: número de elementos en el suceso A*	x	x	x
		Casos posibles: todos los resultados	x	x	x
	Probabilidad	La probabilidad de ocurrencia de un suceso sólo depende del número de resultados	x	x	x
		Regla de Laplace	x	x	x
Procedimientos	Azar, juego de azar	Analizar diferentes juegos de azar	x	x	x
	Casos favorables/ posibles	Enumerar o contar casos favorables y posibles (mediante listas sistemáticas, diagramas o combinatoria)		x	x
		Diferenciar casos favorables y no favorables	x	x	x
	Probabilidad	Distinguir sucesos elementales equiprobables	x	x	x
		Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples	x	x	x
		Aplicar la regla de Laplace en experimentos compuestos con etapas dependientes o independientes	x	x	x
	Juego equitativo	Decidir si un juego es equitativo	x	x	x
		Cambiar las reglas de juego para transformarlo en equitativo	x		

En resumen, los libros analizados realizan una presentación completa de la probabilidad y sus diversos significados, de acuerdo a la guía docente de la asignatura; en los textos [B] y [C], incluso ampliando ésta. Es de notar que los textos [A] y [B] se publicaron para cubrir los requerimientos del currículo anterior, donde la probabilidad recibía menor atención; desarrollan en paralelo aspectos didácticos, son menos formales que el texto [C] en la presentación del significado axiomático y más orientados a experimentar o simular con diferentes dispositivos (usando materiales manipulativos o tecnológicos). Desde nuestro punto de vista si se estudiase por completo el contenido disciplinar de alguno de los tres textos, en particular el [B] o [C], los futuros profesores recibirían una formación matemática adecuada para llevar a cabo su futura labor docente.

Tabla 4.4. Objetos del significado frecuencial en textos recomendados para "Bases matemáticas"

Tipo		Objeto	[A]	[B]	[C]
Conceptos		Frecuencias (absoluta, relativa)	x	x	x
		Distribución de frecuencias		x	x
		Valor estimado de la probabilidad	x	x	x
		Simulación (de experimentos aleatorios)	x	x	x
Propiedades	Frecuencias (absoluta, relativa)	La frecuencia relativa de un atributo tiende a estabilizarse	x	x	x
		La frecuencia relativa de cada atributo es un número comprendido entre *0* y *1*		x	x
		Las frecuencias relativas varían en cada serie de *N* ensayos	x	x	x
	Probabilidad del suceso; valor estimado	Probabilidad: Valor objetivo, hipotético, desconocido	x	x	x
		Frecuencia relativa del suceso al repetir el experimento en idénticas condiciones un número ilimitado de veces	x	x	x
		Regularidad en el largo plazo, ausencia de patrón en el corto plazo	x		
		Desconocimiento del número de exp. para una estimación buena	x	x	x
		Aumento en la fiabilidad de la estimación con el tamaño de muestra	x	x	x
	Simulación	Simulación: Sustitución (real o tecnológica) de un experimento por otro equivalente	x	x	x
Procedimientos	Frecuencia, Distribución	Calcular frecuencias relativas (de atributos) a partir de observaciones o datos		x	x
		Interpretar una distribución de frecuencias en representación tabular o gráfica		x	x
		Representar una distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica		x	x
		Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimento compuesto)		x	x
	Probabilidad del suceso; valor estimado	Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos	x	x	x
		Comparar la estimación frecuencial con la probabilidad teórica		x	x
		Analizar experimentos donde aplica este significado	x	x	x
	Simulación	Simular con dispositivos físicos un experimento aleatorio	x	x	x
		Simular con tecnología un experimento aleatorio	x	x	x
		Investigar y reflexionar sobre recursos TIC y noción de simulación		x	x

Sin embargo, la realidad muestra que, debido al tiempo limitado disponible para la asignatura (9 créditos), y a tener que completar todos los contenidos matemáticos y no sólo la probabilidad, los profesores podrán dedicar una semana, dos como mucho a la presentación del tema de probabilidad. Este tiempo, incluso sería suficiente, si los estudiantes en Bachillerato han cursado la asignatura de Matemáticas II orientada a ciencias sociales, que incluye todo el contenido citado (e incluso amplía con el estudio de las variables aleatorias y la inferencia). Por desgracia, la experiencia de algunos miembros del equipo de investigación muestra que son pocos los estudiantes que la han cursado y los que la han hecho a veces han olvidado lo aprendido. Ello justifica el estudio de evaluación que llevaremos a cabo en el Capítulo 5, y que nos informará con más precisión de los conocimientos adquiridos previamente por estos futuros profesores. También justifica las actividades de desarrollo de su conocimiento probabilístico, dentro de la asignatura de segundo curso, que se describen en la siguiente sección.

Tabla 4.5. Objetos del significado subjetivo en textos recomendados para "Bases matemáticas"

Tipo		Objeto	[A]	[B]	[C]
Conceptos		Suceso incierto	x	x	x
		Probabilidad como grado de creencia personal	x	x	x
		Probabilidades a priori, a posteriori; verosimilitudes	x	x	x
Propiedades	Suceso incierto	Se tiene cierta información, pero no es totalmente predecible	x	x	x
		Las causas pueden ser o no equiprobables	x	x	x
	Probabilidad como grado de creencia personal	Condicionada por un sistema de conocimientos	x	x	x
		Puede ser diferente para personas distintas	x	x	x
		La probabilidad personal ha de seguir reglas de coherencia		x	x
	Probabilidades a priori, a posteriori; verosimilitudes	La probabilidad a priori es la probabilidad en ausencia de información	x	x	x
		La probabilidad a posteriori es la probabilidad ajustada a partir de la experiencia	x	x	x
		La verosimilitud de un resultado depende de la causa	x	x	x
		Teorema de Bayes: liga las probabilidades a posteriori y a priori por medio de las verosimilitudes		x	x
Procedimientos	Suceso incierto	Analizar experimentos cuya probabilidad depende de información personal	x	x	x
		Discriminar fenómenos en que sea aplicable este significado de la probabilidad	x	x	x
	P. a priori, a posteriori; verosimilitudes	Determinar probabilidades a priori y verosimilitudes	x	x	x
		Aplicar el teorema de Bayes con una información dada		x	x

4.4.3. LA PROBABILIDAD EN LA ASIGNATURA "ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS"

En el segundo curso de la titulación, los estudiantes realizan una asignatura de contenido didáctico de seis créditos. La guía docente de la asignatura[2] indica que se incluyen los siguientes contenidos en el temario teórico: Matemáticas, cultura y sociedad; sentido matemático (que incluye características y componentes del sentido numérico, geométrico, magnitudes y estocástico); aprendizaje de las matemáticas; y la enseñanza de las matemáticas.

Los contenidos de esta materia se refieren al conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y el currículo y conocimiento del contenido y la enseñanza. Tratan de proporcionar al estudiante: "Fundamentación didáctica: Fundamentos de la didáctica de las matemáticas y Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de Primaria" (ANECA, 2010, p. 68). El temario versa sobre aspectos epistémicos (la matemática, sus características, objetos y

[2] Descargado de: grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/estudios

procesos matemáticos; importancia cultural); cognitivos (aprendizaje matemático; errores, dificultades y obstáculos; evaluación y diagnóstico) y didácticos (tareas y actividades; variables de tarea; enseñanza de las matemáticas; técnicas, materiales y recursos; análisis didáctico).

Cada uno de estos aspectos, cognitivos y didácticos, están referidos a la enseñanza y el aprendizaje del sentido numérico, sentido de la medida, sentido espacial y sentido estocástico, acordes con los bloques de contenido incluidos en currículo de primaria (MEC, 2006): números y operaciones; la medida: estimación y cálculo de magnitudes; geometría; y tratamiento de la información, azar y probabilidad.

El temario práctico trata las siguientes actividades (Departamento de Didáctica de la Matemática, 2011b, p. 3): Análisis del currículo de matemáticas de educación primaria; análisis y valoración de supuestos prácticos en la enseñanza de las matemáticas; identificación, y clasificación de errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria; análisis y diseño de tareas matemáticas, sus variables y conocimientos puestos en juego; fases, técnicas matemáticas y estrategias en el planteamiento, resolución e invención de problemas escolares; y selección de tareas escolares en matemáticas.

Los libros para didáctica de la matemática recomendados en la guía docente cubren los contenidos propuestos sobre didáctica de la probabilidad. La sección de Batanero y Godino (2004) denominada “conocimientos didácticos”, dentro del capítulo sobre probabilidad, incluye los siguientes epígrafes:

- Orientaciones curriculares: Diseño curricular base del MEC (para los grupos participantes fue complementado con el Decreto de Enseñanzas Mínimas del MEC, 2006) y Principios y estándares de las matemáticas escolares del NCTM (2000).
- Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje: La intuición del azar; la estimación de la frecuencia relativa; estimación de probabilidades y noción de probabilidad.
- Situaciones y recursos: Juegos y sorteos; experimentación y estimación frecuencial de la probabilidad; construcción de dispositivos aleatorios; recursos en Internet.
- Conflictos en el aprendizaje: instrumentos de evaluación.
- Taller de didáctica: Análisis de textos escolares; diseño de unidades didácticas; análisis de ítems de evaluación; análisis de entrevistas a niños.

Asimismo, el capítulo de probabilidad de Azcárate y Cardeñoso (2001), también sugerido en la guía docente, incluye los siguientes contenidos de didáctica de la probabilidad: aspectos curriculares y epistemológicos de la evolución histórica; importancia del aprendizaje de los cuatro significados de la probabilidad; algunos errores y dificultades en el aprendizaje con respecto a lenguaje de probabilidad, conceptos básicos, razonamiento probabilístico, paso del significado intuitivo a la asignación numérica y destrezas de cálculo de probabilidades con los significados clásico y frecuencial; materiales y recursos para la enseñanza (análisis de juegos de azar, mención a experimentación y estimación de probabilidades, mención de comprensión e interpretación de datos extraídos de medios de comunicación, mención de la existencia de recursos tecnológicos sin descripción detallada).

En resumen, los textos analizados realizan una presentación completa de los aspectos didácticos de la probabilidad para educación primaria, de acuerdo a la guía docente de la asignatura, incluso ampliando ésta. Es de notar que ambos textos se publicaron para cubrir los requerimientos del currículo anterior, donde la probabilidad recibía menor atención; sin embargo, desarrollan el tema con un nivel de detalle aceptable para los currículos vigentes. Desde nuestro punto de vista si se estudiase por completo el contenido disciplinar de alguno de los dos textos, los futuros profesores recibirían una formación adecuada para llevar a cabo su futura labor docente.

Sin embargo, la realidad muestra que, debido al tiempo limitado disponible para la asignatura (6 créditos) y a tener que tratar aspectos didácticos de todos los contenidos matemáticos y no sólo de la probabilidad, los formadores de profesores podrán dedicar una o dos semanas a la presentación de la didáctica de la probabilidad. Por desgracia, la experiencia de algunos miembros del equipo de investigación muestra que hay fallos en el conocimiento matemático del contenido; esto dificulta la comprensión de su didáctica. El estudio de evaluación que llevaremos a cabo en el Capítulo 6 nos informará con más precisión de los conocimientos adquiridos por los futuros profesores participantes en la experiencia, que describimos a continuación.

4.4.4. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA: PRÁCTICAS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO SOBRE PROBABILIDAD

La experiencia, que describimos brevemente a continuación, se llevó a cabo en la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas, durante el curso académico (2011-2012).

La asignatura se organiza en actividades presenciales y no presenciales, que pueden variar ligeramente, dependiendo del grupo. En los grupos donde se desarrolló la experiencia, la parte presencial contempla semanalmente sesiones en gran grupo (2 horas, 60 alumnos) y seminarios (1 hora, 20 alumnos). La mitad del tiempo dedicado al trabajo en gran grupo consistió en exposiciones teóricas por parte del profesor; apoyadas por el texto recomendado y presentaciones. En estas presentaciones se incluye generalmente algún ejercicio corto, donde los alumnos trabajan en grupo.

La otra mitad del tiempo se dedica a la presentación o discusión de prácticas propuestas por el profesor en concordancia con el tema en desarrollo. Estas prácticas pueden ser individuales o por equipos, se continúan durante las sesiones de seminario y se finalizan fuera del aula. Cada práctica, que puede ser individual o realizada en grupo, finaliza con un informe escrito por parte de los alumnos y una puesta en común de las soluciones, que se realiza en la sesión en gran grupo.

Se realizaron en total dos actividades prácticas, a cada una de las cuales se dedicó varias sesiones de trabajo. En la primera práctica cada participante completó en forma individual el cuestionario de evaluación de su conocimiento matemático común y ampliado sobre la probabilidad (Cuestionario 1) a lo largo de dos sesiones de una hora de duración. Otras dos sesiones de igual duración se destinaron a la discusión colectiva de los problemas del cuestionario, apoyada con la experimentación y la realización de experiencias de simulación.

La segunda práctica consistió en la evaluación de respuestas de niños a algunas preguntas del Cuestionario 1, e identificación de objetos matemáticos en las tareas, completando en pequeños grupos un segundo cuestionario (Cuestionario 2) dirigido a evaluar y desarrollar su conocimiento didáctico sobre la probabilidad durante dos sesiones de una hora. La solución a esta tercera práctica se discutió en gran grupo en otra sesión, dedicando una hora. Conjuntamente, el conjunto de prácticas descrito constituyen una secuencia formativa sobre la probabilidad y su didáctica.

Con estas actividades se desarrollan cuatro contenidos teóricos de fundamentación didáctica: errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje; estrategias e intuiciones en los problemas de comparación de probabilidades; etapas en el desarrollo de la capacidad de comparar fracciones y probabilidades; y didáctica de la probabilidad: currículo, materiales, evaluación.

Los siguientes contenidos matemáticos están presentes en estas actividades: a) respecto a la probabilidad: experimento aleatorio, experimento compuesto, suceso y tipos de sucesos, enumeración de posibilidades, combinatoria, casos posibles, casos favorables, probabilidad, asignación clásica, regla de Laplace, juego equitativo, esperanza matemática, experimentación, asignación frecuencial, frecuencia (absoluta/relativa), ley de los grandes números, probabilidad condicional, muestreo, predicción, variabilidad; b) respecto a otros contenidos secundarios: fracciones, sistemas de numeración, proporcionalidad, razón, operaciones aritméticas, regla de tres, regla de tres inversa.

Todos estos temas fueron objeto de reflexión por parte de los estudiantes y de las exposiciones teóricas por parte del formador, como se describe a continuación para cada práctica. Adicionalmente, el formador de profesores preparó un material de apoyo, consistente en las soluciones escritas a los dos cuestionarios, y las presentaciones de *Power Point* utilizadas en su corrección, así como en las actividades de formación. Las tres prácticas entraron a formar parte de la evaluación final (como el resto de las prácticas de la asignatura), con lo cual se asegura que los futuros profesores las completasen con interés y estudiasen sus soluciones. En la Tabla 4.6 se presenta el esquema de las sesiones realizadas con los futuros profesores. A continuación se describe con un poco más detalle cada una de las dos prácticas.

Tabla 4.6. Temporalización de las actividades prácticas sobre probabilidad

	Sesiones 1 y 2	Sesiones 3 y 4	Sesiones 5 y 6	Sesión 6
Tiempo	2 sesiones de 1 hora cada una	2 sesiones de 1 hora	2 sesiones de 1 hora	1 hora
Organización	Gran grupo	Pequeño grupo	Pequeño grupo	Gran grupo
Actividad	Resolución individual del Cuestionario 1 (6 ítems en cada sesión)	Debate de soluciones y simulación (6 ítems cada sesión)	Evaluación de respuestas de alumnos e identificación de objetos matemáticos en pareja	Discusión de las soluciones aportadas en la Sesión 5

Primera práctica: evaluación y desarrollo del conocimiento matemático

La primera práctica, denominada “Análisis de un cuestionario sobre probabilidad”, sirvió para evaluar los conocimientos común y especializado del contenido al inicio de la experiencia, así como para desarrollarlo. El cuestionario utilizado (denominado Cuestionario 1, Anexo 1), sus contenidos y los resultados obtenidos se describen en el Capítulo 5.

Los objetivos planteados a los estudiantes fueron: Adquirir competencias en el análisis de cuestionarios de evaluación; adquirir competencias en la identificación de intuiciones incorrectas y posibles errores que cometen los alumnos al resolver problemas de probabilidades y su relación con el razonamiento proporcional e idea de fracción y percibir el papel que juega el error como fuente de aprendizaje. Adicionalmente, aunque no se les dijo, tratábamos de evaluar y mejorar su conocimiento probabilístico.

El cuestionario se dividió en dos partes, cada una con 6 problemas que fueron resueltas individualmente por los participantes en dos sesiones (dedicando una hora a cada parte del cuestionario); con objeto de no cansarlos y que tuvieran tiempo suficiente. Se pidió a los participantes argumentar lo mejor posible sus respuestas.

En una sesión posterior se realizó una discusión colectiva de las soluciones aportadas por los participantes (en cada uno de los seis seminarios en que se dividió el total de participantes). Para cada uno de los problemas propuestos, en primer lugar se pidió a los futuros profesores sus soluciones; como algunos alumnos dieron soluciones incorrectas, para cada problema hubo más de una solución dada por los participantes. El formador de profesores organizó una discusión, donde los futuros profesores trataron de justificar por qué consideraban correcta su solución, hasta conseguir que se reconociera la que era matemáticamente pertinente y se identificaran los errores que llevaron a cada solución incorrecta.

La discusión también se apoyó en actividades de simulación (Anexo 2), basadas en simuladores relacionados con algunos problemas; en otros problemas, no se encontró un simulador adecuado y entonces se recurrió al diagrama en árbol o a enumeración del espacio muestral para justificar la solución.

Para la construcción de esta actividad hemos tenido en cuenta los resultados de experiencias de formación de profesores que describen las ventajas de utilizar la simulación como recurso didáctico (por ejemplo, Dugdale, 2001; Lee y Hollebrands, 2008, 2011; Contreras, 2011), y la sugerencia de vincular en la formación de profesores el uso de las nuevas tecnologías y los foros de discusión formativo (Viseu y Ponte, 2009). Asimismo, las investigaciones de enseñanza para niños con apoyo en la simulación (Sección 3.4.2; Pratt, 2000, 2005; Aspinwall y Tarr, 2001; Polaki, 2002; Serrano, Ortiz y Rodríguez, 2009; Lee, Angotti y Tarr, 2010).

Estas actividades de simulación también sirvieron para familiarizar al futuro profesor con herramientas de libre acceso en la web, que pueden utilizar en el futuro para enseñar a los niños nociones del significado frecuencial probabilidad, como la variabilidad, la diferencia entre distribución teórica y empírica, o el efecto del tamaño de la muestra. Finalmente se proporcionó a los estudiantes un material que contenía la solución correcta a todos los problemas planteados (ver Anexo 4).

Segunda práctica: evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico

La segunda práctica, denominada "Análisis de respuestas de estudiantes", sirvió para evaluar algunos componentes del conocimiento didáctico, así como para desarrollarlo. El cuestionario utilizado (denominado Cuestionario 2, Anexo 3), sus contenidos y los resultados obtenidos se describen en el Capítulo 6.

Los objetivos planteados a los estudiantes fueron los mismos de la primera actividad. Adicionalmente, aunque no se les dijo, tratábamos de evaluar y mejorar su conocimiento didáctico, en particular su conocimiento especializado de la probabilidad y su conocimiento de la probabilidad y los estudiantes.

La práctica consistió en evaluar algunas respuestas de niños a parte de los ítems utilizados en el Cuestionario 1. También se pidió argumentar las razones de las respuestas erróneas e identificar los objetos matemáticos requeridos para dar la solución correcta.

La práctica fue resuelta por parejas durante dos sesiones de seminario (dedicando una hora a cada una) y el informe correspondiente se entregó en la semana siguiente. Al igual que en la otra práctica, con objeto de no cansarlos y que tuvieran tiempo de discutir y argumentar sus respuestas. Se pidió a los participantes argumentar lo mejor posible sus respuestas buscando mayor riqueza del análisis didáctico.

En una sesión posterior se realizó una discusión colectiva. Para cada uno de los puntos propuestos, en primer lugar se pidió a los alumnos sus soluciones; como algunos alumnos dieron soluciones incorrectas, por la matemática o por la didáctica, para cada problema hubo más de una solución dada por los participantes. El formador de profesores organizó una discusión, donde los alumnos trataron de justificar por qué consideraban correcta su solución, hasta conseguir que se reconociera la que era pertinente y se identificaran los errores que llevaron a cada solución incorrecta.

Finalmente se proporcionó a los estudiantes un material que contenía la solución correcta a todos los puntos planteados (ver Anexo 4).

4.5. CONCLUSIONES SOBRE LA PROBABILIDAD EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

En este capítulo hemos estudiando cómo se tiene en cuenta la probabilidad en la formación de profesores, desde un doble punto de vista: a) la investigación sobre conocimientos del profesor, y b) la formación que recibieron los participantes en nuestra investigación. Todas estas conclusiones permitirán delimitar mejor los conceptos y enfoques sobre los que nos centraremos en nuestro trabajo.

Del análisis de la investigación previa se concluye la existencia de una variedad de dificultades o concepciones incorrectas en los profesores en formación, especialmente en los futuros profesores de educación primaria. Los estudios analizados muestran que muchos profesores no poseen conocimientos de probabilidad ni matemáticos ni didácticos para el desarrollo de sus clases.

Estas investigaciones proporcionan guías sobre puntos a mejorar en la formación de los mismos; sin embargo, se centran en su mayoría sobre los significados clásico e intuitivo de la probabilidad. Por ello sería necesario completar estos trabajos con nuevos estudios sobre la comprensión del significado frecuencial y subjetivo, como abordamos en nuestro trabajo.

Por otra parte, dichas investigaciones se centran en conocimiento matemático, mientras que el conocimiento probabilístico para la enseñanza ha sido un área de baja atención en la investigación en educación matemática, en particular en cuanto al aspecto didáctico; esta ausencia es notoria por la necesidad actual de formación de los profesores que atienden los currículos vigentes. La investigación con profesores de primaria en formación sugiere, sin embargo, que hay buena disposición para la enseñanza de la probabilidad y la estadística; con respecto a investigaciones con profesores en ejercicio, muestran mayor confianza en el conocimiento del contenido y consciencia de su importancia, posiblemente, fruto de las campañas de enculturación estadística lideradas por los investigadores en educación estadística en las últimas dos décadas.

Del estudio de los antecedentes de investigación sobre formación de profesores, se deduce también la existencia de diferentes estudios sobre los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas. No hay actualmente un consenso sobre qué incluye cada una de las categorías de conocimiento, ni incluso sobre cuáles son estas categorías. Por ello se hace necesario elegir un modelo específico para llevar a cabo la investigación, que en nuestro caso es del de conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad descrito por Ball y colaboradores (Ball, Thames, y Phelps, 2008).

Por otro lado, al analizar las investigaciones sobre formación de profesores en estadística, observamos un intento por adaptar o desarrollar modelos específicos del conocimiento del profesor, que se justifican por las características epistemológicas inherentes a la aleatoriedad. En nuestro caso, el modelo elegido de MKT se adaptará teniendo en cuenta algunas sugerencias de Godino (2009) y Godino et al. 2011).

Las experiencias de formación proponen estrategias complementarias que se podrían clasificar en las facetas el modelo de Godino (2009) de la siguiente forma: mediacional (apoyo del ordenador, el uso de métodos de evaluación no tradicionales), epistémica (el enfrentamiento a retos cognitivos con problemas de tipo contra-intuitivo), interaccional (el diseño de lecciones como actividad formativa, el discurso en el aula), cognitiva (la aplicación de pruebas antes y después de la instrucción que permita contrastar resultados e identificar el aprendizaje). Finalmente estas propuestas indican que instrucción matemática y didáctica deben relacionarse en la formación de profesores, pues, por un lado, hay poco tiempo disponible y por otro, una estrategia para ayudar a los profesores o futuros profesores en la identificación de sus propias dificultades es mostrarles dificultades conceptuales de los estudiantes. Todas estas propuestas fueron tenidas en cuenta en la experiencia de evaluación y desarrollo realizada con los futuros profesores, que se ha descrito resumidamente al final de este capítulo y se analizará con detalle en los que siguen.

Respecto a la formación recibida por los participantes en los estudios, se ha mostrado que las guías docentes de las asignaturas cursadas, “Bases matemáticas para la educación primaria” y “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”, así como los libros recomendados en dichas asignaturas cubren teóricamente la formación en probabilidad y su didáctica que necesitaría un futuro profesor de educación primaria para desarrollar con éxito la enseñanza.

Sin embargo, la restricción del tiempo docente y la amplitud de los contenidos, que han de cubrir los conocimientos del profesor en sus diferentes facetas, hacen que, de hecho, pueda dedicarse un tiempo muy limitado a la probabilidad y su didáctica. Aunque, de hecho hay otra asignatura complementaria en tercer curso, dicha asignatura no incluye contenidos específicos de probabilidad para todos los estudiantes, aunque es posible que algunos alumnos voluntariamente aborden este contenido. Este hecho sirve para justificar la necesidad de nuestro de estudio de evaluación que proporcione un diagnóstico de los conocimientos adquiridos por los futuros profesores.

CAPITULO 5.

EVALUACIÓN INICIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos el Estudio 2, orientado a evaluar algunos elementos del conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad en una muestra de futuros profesores de educación primaria. Para ello se construye un cuestionario que pretende evaluar los conocimientos matemáticos sobre los principales elementos del significado de referencia de la probabilidad, incluidos en los documentos curriculares y libros de texto analizados en el Capítulo 2.

En primera instancia presentamos los objetivos e hipótesis propuestas para este estudio, y posteriormente, describimos la muestra. A continuación, analizamos el cuestionario, su proceso de construcción y validez de contenido, así como la metodología de análisis de los datos.

Para cada una de las tareas que componen el cuestionario se realiza un análisis epistémico de su solución correcta y se presentan resultados observados, comparando con estudios previos, cuando existan. Se presenta una síntesis del resultado de la evaluación, analizando puntuaciones parciales y globales, fiabilidad y generalizabilidad del cuestionario, índices de dificultad y discriminación. El capítulo finaliza con las conclusiones sobre el conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad en la muestra participante.

5.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO 2

Como se ha indicado, el Estudio 2 tiene como finalidad evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad de futuros profesores de educación primaria, al iniciar su segundo año de estudios, cuando ya han recibido formación en la parte matemática de la probabilidad, pero todavía no en la parte didáctica. Este objetivo se descompone en los siguientes:

O2.1: Analizar el conocimiento común de probabilidad que ponen de manifiesto los futuros profesores de educación primaria respecto a los objetos probabilísticos elementales más relevantes, incluidos en los documentos curriculares de educación primaria.

O2.2: Analizar el conocimiento ampliado de probabilidad que ponen de manifiesto los futuros profesores de educación primaria respecto a objetos probabilísticos fundamentales que exceden lo incluido en los documentos curriculares de educación primaria y hacen parte de la formación de maestro en su primer año.

O2.3: Analizar el conocimiento especializado de probabilidad requerido por los futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de una selección de objetos probabilísticos elementales.

Para lograr estos objetivos se elabora el Cuestionario 1, compuesto de ítems tomados de investigaciones previas. Para evaluar el conocimiento común del contenido, estos ítems se seleccionan de manera que se cubran los principales objetos matemáticos identificados en el análisis del currículo de educación primaria presentado en el Capítulo 2. Además, en el cuestionario se incluyen algunos ítems cuyo contenido matemático es más amplio que el citado explícitamente en el currículo de educación primaria, para evaluar el conocimiento ampliado del contenido. Se utilizan las justificaciones a las respuestas dadas en algunas preguntas para evaluar el conocimiento especializado del contenido.

El cuestionario tiene en cuenta los diferentes significados (clásico, frecuencial y subjetivo) considerados en el currículo y libros de texto, entendiendo que este conocimiento hace parte del conocimiento común del futuro profesor. También se incluyen ítems sobre sesgos frecuentes en el razonamiento probabilístico de sujetos adultos, entendiendo que el conocimiento de tales sesgos ha de formar parte del conocimiento ampliado de la probabilidad del futuro profesor.

Como se describió en el Capítulo 4, alrededor de este cuestionario se organizan dos prácticas, dentro de una asignatura de contenido didáctico, que permitirán, por un lado evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad de una muestra amplia de futuros profesores, y por otro desarrollarlo en todos ellos, aunque la evaluación de su desarrollo solo se lleva a cabo en una sub-muestra de futuros profesores que hayan participado en la primera evaluación.

En este capítulo se describen los resultados de la evaluación inicial, analizando las respuestas de los participantes al Cuestionario 1 desde diversos puntos de vista. Somos conscientes de la amplitud requerida en el conocimiento probabilístico del futuro profesor y es por ello que reconocemos el carácter limitado de nuestros instrumentos, cuyos resultados, no obstante proporcionan nuevo conocimiento respecto a investigaciones previas.

Hipótesis

Las hipótesis planteadas inicialmente para este estudio son las siguientes:

H2.1: Se espera que nuestros resultados indiquen un conocimiento común y ampliado suficiente de la probabilidad en su significado clásico, por parte de los futuros profesores de la muestra.

Más concretamente, se espera que una proporción aceptable de la muestra desarrolle adecuadamente los ítems del conocimiento común sobre el significado clásico de la probabilidad, coincidiendo con los resultados de estudios previos, como los de Mohamed (2012). También se espera que sólo una pequeña parte muestre sesgo de equiprobabilidad o tenga dificultad al establecer la apuesta necesaria para convertir un juego en equitativo (como en Azcárate, 1995), que forman parte del conocimiento ampliado.

H2.2: La hipótesis es que el conocimiento común y ampliado de la probabilidad en su significado frecuencial, por parte de los futuros profesores de la muestra será suficiente para la enseñanza.

En particular, se espera que, al igual que en la investigación de Batanero y Serrano (1999), los futuros profesores desarrollen correctamente los ítems ligados al significado frecuencial; aunque también se esperan algunas dificultades con el concepto de aleatoriedad, no percibiendo la variabilidad y la independencia en las secuencias aleatorias.

H2.3: Se espera que nuestros resultados indiquen un conocimiento común y ampliado insuficiente sobre el significado subjetivo de la probabilidad por parte de los futuros profesores de la muestra.

Debido a la baja atención que se ha prestado a este significado en la educación (Borovcnik, 2012), pensamos que los futuros profesores tendrán dificultades para resolver los ítems ligados al significado subjetivo (como en Contreras, 2011).

Por otro lado, también se espera que, una alta proporción muestre algún tipo de sesgo o heurística; dada la prevalencia de concepciones erradas comunes en adultos a pesar de la instrucción como la heurística de representatividad (Tversky y Kahneman, 1974), el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) o el enfoque en el resultado (Konold, 1989).

H2.4: Se espera que nuestros resultados indiquen un conocimiento especializado insuficiente de la probabilidad.

Al igual que en las investigaciones de Contreras (2011) y Mohamed (2012) con futuros profesores, pensamos que una proporción importante de nuestra muestra tendrá dificultades en la argumentación de sus respuestas. Incluimos estas argumentaciones en el conocimiento especializado del contenido, debido a que los futuros profesores necesitan la capacidad de argumentar sus soluciones para enseñar la resolución de los problemas propuestos a sus futuros alumnos.

5.3. MUESTRA

La muestra se conformó de 157 alumnos divididos en tres grupos, dos a cargo de un profesor y uno a cargo de otro. El porcentaje de mujeres fue 57,3%. La edad de la mayoría de los estudiantes es de 19-20 años, con algunas excepciones en uno de los grupos, que al impartir las clases por la tarde contaba con algunos estudiantes que trabajan y tienen una edad entre 30-40 años. Estas características son comunes en otros grupos de estudiantes de la misma titulación y curso.

Como se ha expuesto en el Capítulo 4, el cuestionario se pasó durante el curso académico 2011-2012 como parte de una actividad práctica de análisis didáctico sobre probabilidad, relacionada con el tema de Sentido estocástico y con el Bloque *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*, del currículo de primaria. La práctica completa (el cuestionario con sus soluciones, así como las actividades de simulación y la práctica de evaluación de respuestas de estudiantes que se describen en los capítulos 4 y 6) fueron objeto de evaluación para la calificación de la asignatura. En la evaluación final se incluyeron preguntas sobre esta práctica, para motivar a los participantes a realizarla con interés y a estudiar las soluciones correctas.

Todos los grupos participantes en la evaluación recibieron y completaron el cuestionario en las mismas condiciones, individualmente dentro del aula. El cuestionario se dividió en dos partes, completando cada una de ellas durante un tiempo de una hora, en dos semanas sucesivas, con objeto de no fatigar innecesariamente al estudiante. Posteriormente, se dedicaron dos sesiones de una hora a la discusión de las soluciones y actividades de simulación, según se describió en el Capítulo 4.

5.4. CUESTIONARIO 1

5.4.1. PROCESO DE CONSTRUCCIÓN

La construcción del cuestionario parte de la definición semántica de la variable, siguiendo la metodología descrita en Batanero y Díaz (2005), y tratando de seguir las recomendaciones metodológicas de APA, AERA y NCME (1999). A continuación se detallan estos pasos.

Definición semántica de la variable

Se comenzó por la definición semántica de la variable objeto de medición: *conocimiento de la probabilidad por parte de futuros profesores de educación primaria*. Puesto que el conocimiento es un constructo inobservable, hemos de inferirlo de las respuestas al cuestionario (León y Montero, 2002). La definición semántica consiste en una descripción detallada de los componentes del conocimiento que se quieren evaluar y de las respuestas esperadas.

Esta definición semántica se basa en el análisis curricular presentado en el Capítulo 2 (documentos curriculares y libros de texto), que nos permitió fijar detalladamente los elementos del significado de referencia para el conocimiento común y especializado, destacando los correspondientes a los diferentes significados de la probabilidad.

También nos apoyamos en la revisión bibliográfica de las investigaciones previas, descrita en los Capítulos 3 y 4, que permitió conocer los errores y sesgos más importantes relacionados con los objetos incluidos en el cuestionario y recopilar algunos ítems usados en dichas investigaciones. Asimismo, se ha tenido en cuenta la revisión del contenido de probabilidad presente en la formación de los profesores participantes en el estudio (Sección 4.4), que contribuyó a determinar los elementos de significado referidos al conocimiento ampliado y especializado.

Como resultado se produjo la Tabla 5.1 que describe las componentes principales de la definición semántica del cuestionario teniendo en cuenta los significados de la probabilidad en el currículo. Adicionalmente, se deseaba tener en cuenta el mayor número de objetos matemáticos identificados en el significado de referencia, lo cual se conseguiría mediante una selección adecuada de los ítems.

Tabla 5.1. Componentes de la definición semántica del cuestionario

Contenidos probabilísticos	– Enumeración del espacio muestral (significado intuitivo)
	– Comparación de probabilidades (significado clásico)
	– Juego equitativo (significado clásico)
	– Probabilidad conjunta. Experimentos dependientes e independientes (significado clásico)
	– Probabilidad simple (significado frecuencial)
	– Percepción de la aleatoriedad (significado frecuencial)
	– Muestreo (significado frecuencial)
	– Probabilidad condicional (significado subjetivo)
Heurísticas y sesgos	– Enfoque en el resultado (significado frecuencial)
	– Heurística de representatividad (significado frecuencial)
	– Sesgo de equiprobabilidad (significado clásico)

Selección y depuración de ítems

Para formar un banco de ítems, se comenzó revisando diversas investigaciones sobre probabilidad; recogiendo y analizando las tareas utilizadas, junto con información sobre el tipo de estudiantes que tomó parte en su evaluación y las respuestas obtenidas. En caso necesario, se tradujo el ítem.

Cada una de las tareas recopiladas se estudió, junto con sus posibles soluciones correctas e incorrectas, analizando los objetos matemáticos puestos en juego en su solución, comparando con el significado de referencia fijado en el Capítulo 2 y clasificándola como de conocimiento común o ampliado de la probabilidad. Tras sucesivas revisiones, se llegó a un conjunto potencial de ítems, eligiendo uno para cada componente de la Tabla 5.1 de modo que se evalúen los componentes del conocimiento matemático del profesor y el máximo número posible de objetos del significado de referencia.

Fijados los ítems, se procedió a revisar su redacción y formato, adaptándolo cuando fuese necesario. Se decidió usar *ítems de respuesta construida por el alumno* (Millman y Greene, 1989) que permiten evaluar no sólo la respuesta correcta, sino los procedimientos y argumentos. Así es posible dar una calificación parcial a la respuesta (y no simplemente dicotómica); por ejemplo, diferenciando respuesta y razonamiento.

Categorías de conocimiento del profesor

Respecto a las categorías de conocimiento del profesor consideradas en el cuestionario, todas ellas se refieren a conocimiento matemático (faceta epistémica en el modelo de Godino, 2009), diferenciándose las tres categorías propuestas por Ball, Thames y Phelps (2008). La evaluación se realiza por medio de las consignas propuestas por Godino (2009):

- El *conocimiento común del contenido* sería el conocimiento del tema que tiene cualquier alumno o persona educada para resolver problemas de naturaleza matemática. En nuestro cuestionario se evalúa este conocimiento al proponer seis ítems que responden al significado pretendido en educación primaria, de acuerdo con nuestro análisis curricular (Capítulo 2).
- El *conocimiento ampliado del contenido* (Godino, 2009) o *conocimiento en el horizonte matemático* (Ball, Thames y Phelps, 2008) se refiere a aspectos más avanzados que aportan perspectivas al profesor: incluye la comprensión de las principales ideas y estructura de la disciplina y detección de posibles desvíos respecto a las ideas matemáticas. En nuestro cuestionario se evalúa con cuatro ítems que involucran un conocimiento más amplio al de primaria, correspondiente a la educación secundaria obligatoria, o el que debieran haber adquirido los estudiantes durante su primer año de estudios universitarios. También se evalúa con cinco ítems creados originalmente para la detección de sesgos de razonamiento (Sección 3.5), que aportan al profesor una perspectiva subjetiva (psicológica) sobre el tema.
- El *conocimiento especializado del contenido* es específico del profesor; por ejemplo, para proponer tareas matemáticas, o saber corregir los errores de los alumnos. En este cuestionario se evalúa mediante las justificaciones a cuatro ítems del conocimiento común y cuatro del ampliado, pues pensamos que la justificación de soluciones es un conocimiento requerido por el profesor. Algunos ítems en su planteamiento original solicitaban la justificación de la respuesta, en otros la hemos añadido.

En la Tabla 5.2 se clasifican los ítems del cuestionario, de acuerdo a las categorías del conocimiento del profesor. En los ítems que evalúan conocimiento común del contenido se indica si los objetos matemáticos implícitos en la solución se contemplan en los documentos curriculares o los libros de texto españoles para educación primaria.

Tabla 5.2. Categorías de conocimiento del profesor consideradas en el cuestionario

	Significado de probabilidad	Ítem	Considerado en	
Conocimiento común del contenido			Currículo	Textos
Enumeración del espacio muestral	Todos	1	x	x
Comparación de probabilidades	Clásico	2	x	x
P. compuesta. Experimentos independientes	Clásico/subjetivo	3		x
P. compuesta. Experimentos dependientes	Clásico/subjetivo	4		x
Probabilidad simple	Frecuencial	5	x	x
Noción de juego equitativo	Clásico	6a		x
Conocimiento ampliado del contenido				
Esperanza matemática	Clásico/subjetivo	6b		
Probabilidad condicional	Subjetivo/clásico	7		
Sesgo de equiprobabilidad	Subjetivo/clásico	8		
Muestreo. Estimación	Frecuencial	9		
Percepción de la aleatoriedad	Subjetivo /frecuencial	10		
Heurística de representatividad	Frecuencial/subjetivo	11a		
Distribución binomial	Frecuencial /subjetivo	11b		
Enfoque en el resultado. Estimación	Frecuencial	12a		
Enfoque en el resultado. Validez de una predicción	Subjetivo/frecuencial	12b,c		
Conocimiento especializado del contenido		Justificaciones en 2, 3, 4, 6a, 10, 11a, 11b, 12b		

Observamos que se tienen en cuenta los significados clásicos, subjetivo y frecuencial de la probabilidad; a veces aparecen dos en el mismo ítem porque nosotros hemos tenido en cuenta uno al proponerlo, pero los estudiantes pueden aplicar otro. Por ejemplo, en los ítems sobre enfoque en el resultado, la información se da en forma de probabilidad frecuencial que el futuro profesor ha de interpretar; pero las respuestas suelen incluir elementos de tipo subjetivo.

El significado intuitivo aparece en forma implícita, está presente en todos los significados; sin embargo no incluimos ítems específicos para su evaluación porque consideramos que este conocimiento está presente en todos los futuros profesores. En el análisis se encontró que algunas respuestas se basan en este significado, sin activar su conocimiento de otros significados, con respuestas similares a las de niños de primeros años de escolaridad.

5.4.2. VALIDEZ DE CONTENIDO

Una vez establecida la tabla de especificaciones (Tabla 5.1) y seleccionado el conjunto inicial de ítems (más amplio que el conjunto de ítems descrito en la Tabla 5.2), se analizó con detalle el contenido de los ítems para aportar evidencias de validez de contenido (Martínez Arias, 1995). Este tipo de validez indica si el instrumento mide lo que se pretende, es decir, si hay una correspondencia entre la variable que se quiere medir y el contenido de los ítems del instrumento.

Para aportar evidencias de validez de contenido es necesario asegurar que el instrumento recoge una muestra representativa de los contenidos que se pretenden evaluar (Messick, 1998). Para conseguirlo se hizo una planificación cuidadosa de los ítems que se incluirían en el mismo y se analizó cómo cada ítem contribuye a la medida del constructo subyacente, describiendo de antemano el dominio, sus dimensiones y facetas (Martínez Arias, 1995).

Esta descripción se detallará a lo largo del capítulo, que se resume en una tabla con los objetos matemáticos cubiertos por el total de los ítems (Tabla 5.3). La comparación de este significado evaluado con el significado institucional de referencia identificado en el Capítulo 2 y matizado en el Capítulo 4 será una primera evidencia de validez de contenido del instrumento. Una segunda evidencia de validez de contenido se aporta por la participación en la elección y depuración final de los ítems de algunos expertos en didáctica de la probabilidad. Aunque no hacemos un estudio del juicio de estos expertos, ellos colaboraron en las sucesivas revisiones, su aportación fue valiosa para llegar a la versión final del cuestionario.

En el análisis de contenido participaron, además de la autora del trabajo y sus directores, una investigadora del equipo y dos profesores visitantes, que realizaron una estancia de investigación en la universidad. Todos ellos eran expertos en didáctica de la probabilidad, había realizado su tesis doctoral sobre este tema y contaban con una experiencia de enseñanza de la probabilidad de seis años en el primer caso y de más de veinte en los otros dos. También habían dirigido tesis doctorales sobre didáctica de la probabilidad y estadística y tenían publicaciones relacionadas.

Colaboraron en primer lugar en la definición del contenido del instrumento, revisando sucesivas versiones de la Tabla 5.1. Fijada la tabla, colaboraron en el estudio de la adecuación de diferentes ítems a cada uno de los contenidos fijados; sugiriendo cambio de ítems o cambio en su enunciado en varias ocasiones. Finalmente se llegó con este procedimiento al Cuestionario 1 que se presenta en el Anexo 1.

La construcción del instrumento de evaluación en este estudio se fundamenta en el significado institucional de referencia para nuestro estudio. Contiene los diversos elementos de significado, asociados a cada concepto, provenientes de los análisis curriculares expuestos en el Capítulo 2 y en la Sección 4.4. El significado institucional pretendido en los documentos curriculares y en los libros de texto de matemáticas para educación primaria, resumido en la Sección 2.11, describe los contenidos que forman parte del conocimiento común del contenido probabilidad, en nuestro estudio. El significado institucional pretendido en los documentos curriculares y en los libros de texto de matemáticas para el título de maestro, resumido en la Sección 4.4, describe los contenidos que forman parte del conocimiento ampliado del contenido probabilidad, en nuestro estudio.

En relación con el conocimiento común del contenido (Tabla 5.3), nuestro instrumento cubre la parte fundamental del significado de referencia identificado en el Capítulo 2, salvo objetos relacionados con el concepto *simulación* debido a limitaciones para su resolución en el aula, por lo que consideramos que el contenido del cuestionario es representativo del significado institucional pretendido. La tabla omite objetos primarios referidos a argumentos y lenguaje, teniendo en cuenta su transversalidad en los diferentes significados de la probabilidad, como se indicó en la Sección 2.11.

Tabla 5.3. Objetos matemáticos evaluados con el Cuestionario 1

	Sign.	Objeto matemático	Primario	Secundario
Sit. Prob.	Todos	*SP. Enumeración de todas las posibilidades*	1	
	Cla	SPC. Previsión de probabilidad en juegos de azar	3, 6	2, 8
	Frec	SPF. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados	5, 9, 11, 12	10
	Subj	SPS. Estudio de sucesos cuya probabilidad puede cambiar por información disponible	4, 7	
Concepto	Ax	*CA1. Espacio muestral*	1	6
		CA2. Variable aleatoria; esperanza matemática	6	10, 12
		CA3. Probabilidad condicionada	7	
	Cla	CC1. Juego de azar	3, 6	8
		CC2. Casos favorables; casos posibles	1, 2, 3, 8	6, 7
		CC3. Probabilidad	3	2, 8, 6
		CC4. Juego equitativo	6	
		CC5. E. compuesto, dependencia, independencia	3, 4, 6, 8	1, 7
	Frec	CF1. Colectivo (población); atributos	9a	9b, 12
		CF2. Ensayo; ensayos repetidos	5, 9b, 10, 11	12b
		CF3. Frecuencia (absoluta, relativa)	5, 10, 11	9
		CF4. Valor estimado de la probabilidad	5, 9, 12	11
	Subj	CS1. Suceso incierto	1, 4, 7	
Propiedades	Cla	PC1. Número de resultados finito y numerable	1	
		PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales		6, 7, 8
		PC3. C. favorables: resultados que favorecen	2, 3, 8	6, 7
		PC4. C. posibles: todos los resultados	1, 2	3
		PC5. Probabilidad: valor objetivo, calculable		2, 3, 8
		PC6. Regla de Laplace		2
	Frec	PF1. Colectivo: semejantes que difieren en atributos observables	9a	9b
		PF2. Atributos equiprobables o no	5, 9	10
		PF3. Probabilidad: valor objetivo hipotético, estimable	12	9, 11
		PF5. Fiabilidad de la estimación aumenta con N	11a	10
		PF6. Tiende a estabilizarse	5, 10, 11a, 12a	
		PF7. Varía en cada serie de N ensayos	5, 10, 12b	9, 11
	Subj	PS1. Suceso incierto: impredecible aunque se tiene información adicional	4, 7	
		PS2. Probabilidad: condicionada por un sistema de conocimientos	4, 7	
Procedimientos	Cla	PRC1. Analizar juegos de azar	6	3
		PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles	1, 3, 8	7
		PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables	2, 3, 8	4, 7
		PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables		2, 3, 8
		PRC5. Comparar probabilidades con razonamiento proporcional	2	
		PRC6. Aplicar la regla de Laplace, experimentos simples		2
		PRC7. Decidir si un juego es equitativo	6a	
		PRC8. Asignar prob. conjunta e. independientes	3	6a, 8
		PRC9. Asignar prob. conjunta experimentos dependientes	4	
	Frec	PRF1. Enumerar o discriminar atributos	9	
		PRF2. Calcular f. relativas a partir de datos		9, 10
		PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos	5, 9	
		PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación	5, 11, 12a	
		PRF8. Reflexionar sobre fiabilidad	10, 11, 12b	
	Subj	PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información adicional	7	

En relación con el conocimiento ampliado del contenido, nuestro instrumento cubre la parte fundamental del significado de referencia identificado en la Sección 4.4, salvo objetos relacionados con los conceptos simulación y teorema de Bayes en el primer caso por las limitaciones antes indicadas y en el segundo porque consideramos muy complejo este tema y excedía los intereses de la investigación.

Respecto al conocimiento especializado, puesto que los futuros profesores pueden utilizar cualquier tipo de argumentación, no realizamos en este momento un análisis del contenido cubierto, que, en todo caso, debe ser al menos el cubierto en los ítems que se deben argumentar (2, 3, 4, 6a, 10, 11a, 11b, 12b) y que está detallado en las tablas anteriores.

Por todo lo anterior, consideramos que el contenido del cuestionario es representativo del significado institucional pretendido y se justifica una adecuada validez de contenido.

5.4.3. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Los datos se analizan por ítem, en las secciones siguientes, y globalmente, en la Sección 5.7. Para cada ítem, en primer lugar se encuentra el análisis epistémico, donde se describe formalmente la solución correcta, explicitando los objetos matemáticos involucrados en esta solución, entre aquellos que conforman el significado de referencia. Este análisis previo apoya evidencias de validez de contenido del instrumento y, por tanto, es previo a su aplicación. A continuación se describe el análisis de resultados, por considerar que esta organización facilita la lectura del documento y la comprensión de los resultados.

El análisis de las respuestas a los problemas planteados en el Cuestionario 1 utiliza una metodología mixta: análisis cualitativo (de contenido y semiótico) y análisis estadístico. En cada ítem se identifican patrones de respuesta, que se describen mostrando un ejemplo (transcripción literal) para facilitar su comprensión. La categorización fue seguida de una codificación para facilitar el análisis cuantitativo de ítems que se realiza en la forma siguiente:

- En las preguntas de opción múltiple se presentan tablas de frecuencia y porcentajes para cada una de las posibles opciones.
- En las preguntas abiertas se presentan tablas de frecuencias y porcentajes para cada categoría de respuesta; adicionalmente se han clasificado y categorizado las estrategias de resolución o los argumentos utilizados para apoyar la respuesta, presentando también las correspondientes tablas de frecuencia.
- El análisis cuantitativo se completa con tablas cruzadas de tipo de respuesta y argumentos o estrategias (según corresponda). En la mayoría de casos solo discriminamos las que apoyan la respuesta correcta de cualquier otro tipo de respuesta. En los ítems 4 y 8, que tienen dos partes referidas a sucesos excluyentes, también se utiliza la tabla cruzada para establecer la consistencia de las respuestas dadas por los evaluados.

A nivel global (Sección 5.7) el estudio estadístico se completa con estadísticas descriptivas de la puntuación total del cuestionario, obtenida como la suma de puntuaciones provenientes de cada ítem, y las puntuaciones parciales según categoría del conocimiento del profesor. Teniendo en cuenta este criterio de agregación, así como el significado de la probabilidad evaluado, se analizó comparativamente el índice de dificultad de los ítems con el fin de establecer cuáles habían resultado más fáciles y cuáles más difíciles para nuestra muestra de futuros profesores. También se analizó la discriminación de cada ítem con relación a la totalidad del cuestionario, con el fin de identificar cuáles habían aportado más en la obtención de puntuaciones más altas y más bajas en nuestros evaluados.

Para completar el análisis de características psicométricas de nuestro cuestionario, estudiamos su fiabilidad desde dos enfoques, el de la teoría clásica de los test, usando el alpha de Cronbach (global y eliminando cada ítem), y el de la teoría de la generalizabilidad, calculando los coeficientes correspondientes a partir del análisis de varianza de las puntuaciones globales.

En lo que sigue presentamos el análisis epistémico de cada ítem, seguido de los resultados obtenidos con dicho ítem. Una visión sintética del contenido cubierto por el cuestionario según el análisis epistémico, se presentó en la Tabla 5.3, indicando los objetos matemáticos específicos evaluados en cada uno de los ítems.

5.5. EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO COMÚN Y ESPECIALIZADO DE LA PROBABILIDAD

Los cinco primeros ítems y la primera parte del ítem 6 evalúan el conocimiento común de la probabilidad, mientras que los argumentos evalúan el conocimiento especializado. A continuación se analizan conjuntamente las respuestas y argumentos para facilitar la lectura.

5.5.1. FORMACIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL (ENUMERACIÓN)

Análisis a priori de la tarea

Ítem 1. Supongamos que tres niños quieren jugar por turnos con un juego de consola. Los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (los llamaremos A, B y C). Sortean el orden en que van a jugar y obtienen el siguiente resultado BCA

a. Escribe a continuación todas las formas diferentes en que podrían ordenarse los niños para jugar por turno a la consola
b. ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar?
c. Si quiere jugar un cuarto niño ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar los cuatro niños?

Este ítem fue construido por Green (1983a), y utilizado por Cañizares (1997) para evaluar estrategias de enumeración en niños españoles de 10-14 años. Para resolverlo, el evaluado debe reconocer las características de las permutaciones, la importancia de considerar el orden y que no es posible repetir elementos. En el apartado a) se esperaría que los futuros profesores recurrieran a esquemas sistemáticos de enumeración para garantizar la inclusión de todos los posibles resultados. Para ello podría construir un diagrama en árbol, o simplemente usar un procedimiento recursivo, en la forma siguiente

ABC BAC CAB ACB BCA CBA

En el apartado b), el evaluado puede contar los elementos del anterior espacio muestral, aplicar la fórmula de las permutaciones ($3! = 1\times2\times3=6$) o la regla del producto. En el apartado c) se puede volver a enumerar las permutaciones de cuatro elementos, aplicar la fórmula de las permutaciones ($4! = 1\times2\times3\times4=24$); o deducirla aplicando la regla del producto, argumentando que un cuarto niño más se puede poner en 1ª, 2ª, 3ª o 4ª posición en cualquiera de los arreglos obtenidos en el apartado a); en total $6\times4=24$ permutaciones. Con ello se estaría ejercitando el razonamiento inductivo y la generalización.

Este ítem se enmarca en una situación problema transversal a todos los significados de la probabilidad *enumeración de todas las posibilidades* (*SP*). El contenido primario corresponde a los conceptos *espacio muestral* (*CA1*); *casos posibles* (*CC2*) y *suceso incierto* (*CS1*); las propiedades *número de resultados finito y numerable* (*PC1*), *casos posibles: todos los resultados* (*PC4*) y el procedimiento *enumerar casos favorables y posibles* (*PRC2*); como contenido secundario incluye conceptos de *experimento compuesto, dependencia, independencia* (*CC5*). En forma implícita se activan objetos ligados al significado axiomático, en la mayoría de casos solo a nivel intuitivo.

Resultados sobre enumeración

Las respuestas de las partes a) y b) están relacionadas, por lo que casi todos los futuros profesores respondieron correctamente ambos apartados (Tablas 5.4 y 5.5); otras respuestas omitían algún ordenamiento o repetían algún elemento. Llama la atención la falta de coincidencia en la respuesta por parte de unos pocos evaluados (Tabla 5.5).

Tabla 5.4. Frecuencia y porcentaje de respuestas en la parte a del ítem de enumeración

Número de elementos en la lista	Frecuencia	Porcentaje
Menor que 6	8	5
6 (correcta)	147	93,6
Mayor que 6	2	1,3
Total	157	

Tabla 5.5. Coincidencia entre partes a y b en el ítem de enumeración

Coincidencia	Frecuencia	Porcentaje
Si (con respuesta correcta)	143	91,1
Si (con respuesta incorrecta)	6	3,8
No	8	5,1
Total	157	

En la Tabla 5.6 se cruzan las respuestas a las partes a y c. Poco más de la mitad de los futuros profesores respondió en forma correcta el apartado c, porcentaje que aumenta poco en el caso de dar la respuesta correcta a la parte a. Esta diversidad muestra debilidad en el razonamiento combinatorio, pues cuatro de cada diez se equivocan en la permutación de cuatro elementos. Como resaltó Green (1983a) en su investigación, hay más complejidad en la tarea cuando se aumenta el número de elementos a permutar.

Tabla 5.6. Frecuencia conjunta de respuestas en las partes a y c

	Respuesta parte a					
	Correcta (6)		Incorrecta			
Respuesta parte c	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Correcta (24)	90	61,2	2	20	92	58,6
Incorrecta /blanco	57	38,8	8	80	65	41,4
Total	147		10		157	

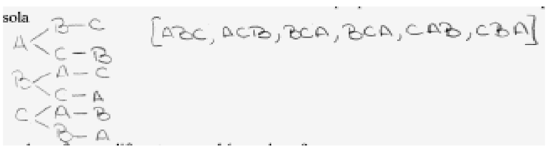
Los resultados son mejores que los obtenidos por Green (1983a) y Cañizares (1997), con niños de 10-14 años; pues aunque 81% de los ingleses y 74 % de los españoles responden correctamente a los apartados a) y b), en el c) el porcentaje se reduce al 15% en ambos estudios.

Sin embargo, nuestros resultados son peores que los de otras investigaciones que proponen tareas similares al finalizar experimentos de enseñanza; por ejemplo, Fischbein, Pampu y Minzat (1970) observó 73% de respuesta correcta en niños de 10, 12 y 14 años, después de la instrucción. Navarro-Pelayo (1994) obtiene 71% respuestas correctas en alumnos de 14-15 años con instrucción y 24% en alumnos sin instrucción. Roa (2000) obtuvo 100% de respuesta correcta preguntando a alumnos de matemáticas el mismo ítem de Navarro-Pelayo (1994). En consecuencia, consideramos que el conocimiento de los futuros profesores en nuestro estudio es aceptable, teniendo en cuenta que no han recibido, al menos recientemente, instrucción con respecto a combinatoria.

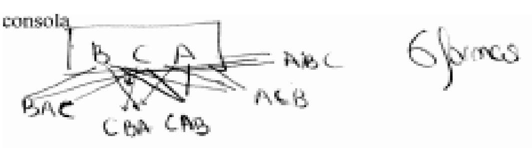
Estrategias de enumeración

Para completar la evaluación sobre la capacidad de enumeración, se han analizado las estrategias seguidas para obtener la respuesta, cuyos fallos conllevan dificultades para hacer un inventario completo de sucesos posibles (Navarro-Pelayo, 1994).

Diagrama en árbol. Fischbein (1975) da una gran importancia a estos diagramas como medio de visualización de la estructura de un problema combinatorio y como recurso productivo de la solución. Por ello, son un instrumento importante en la adquisición de esquemas mentales característicos del razonamiento combinatorio. Sin embargo, en las investigaciones de Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000) pocos alumnos lo emplearon, y muchos de los que lo hicieron cometieron errores de construcción. En nuestro estudio, algunos participantes usan diagramas en árbol para realizar la enumeración, como el siguiente ejemplo (A044):



Esquemas. En otros casos, algunos esquemas facilitan relacionar los elementos a permutar, por ejemplo la respuesta del evaluado A012:



Enumeración sistemática. Citada por Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000), consiste en formar listas organizadas en grupos, fijando el niño que tendría el primer turno y, mediante un proceso recursivo y sistemático se completa la enumeración; por ejemplo: "ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA" (A017).

Enumeración parcialmente sistemática. Observada por Fischbein y Gazit (1988) corresponde al uso de un elemento constante, para formar las demás configuraciones, sin repetición cíclica que garantice la formación correcta de todas las permutaciones (Roa, 2000). Un ejemplo en el apartado c), es el siguiente (A012):

"B C A D →	BADC	CADB	CBAD	ACDB	18 formas"
	BACD	CABD	CBDA	ABDC	
	BCDA	CDBA	ADBC	ABCD	
	BDCA	CDAB	ADCB		
	BDAC		ACBD		

Enumeración no sistemática. Fischbein, Nello y Marino (1991) concluyeron que no es una intuición generalizada considerar el orden en la construcción del espacio muestral. Navarro-Pelayo (1994) encontró que era el error más frecuente en los estudiantes, con o sin instrucción. Incluye dos procedimientos, también citados por Roa (2000), tanteo, y paso entre el tanteo y el procedimiento algorítmico. Por ejemplo: "BCA BAC ABC CBA ACB CAB" (A005).

Uso de la fórmula de permutación. La aplicación de la fórmula muestra un nivel de razonamiento más avanzado. Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000) observaron esta estrategia en la mayoría de sus estudiantes con instrucción, aunque algunos tuvieron fallos en la identificación de parámetros, en recordar la fórmula o en aplicarla. En nuestro estudio, sólo dos estudiantes usan este procedimiento dando respuesta correcta:

> Permutación de 4=4!=4x3x2x1=24 (G020).

Regla del Producto. Algunos estudiantes identifican un patrón y aplican el principio de multiplicación; la mayoría llega a respuestas correctas:

> Se podrían ordenar de 24 formas diferentes, ya que cada letra tiene 6 posibles formas de ordenarse 6x4=24 (A004)

No se identifica estrategia (respuesta ciega). Algunos participantes escriben el número de formas, sin justificarlo o mostrar pasos que permitan identificar la estrategia seguida, lo que es denominado por Fischbein, Pampu y Minzat (1970) respuesta ciega y fue el segundo error más frecuente en Navarro-Pelayo (1994):

> En 24 formas diferentes (A011)

Estrategias minoritarias. Estrategias observadas en pocos futuros profesores fueron emplear una regla de tres, omitir el orden (documentado por Fischbein y Gazit, 1988), y el error de repetición (observado por Maury, 1986), repetir un elemento, no reconocer el modelo combinatorio o no comprender la pregunta (observadas en Navarro-Pelayo, 1994).

En los dos primeros apartados del problema (Tabla 5.7), lo más frecuente es el uso de una lista (parcialmente sistemática, seguida de la sistemática); mientras que en la parte c) (Tabla 5.8) lo más frecuente fue la regla del producto, seguido de la enumeración parcialmente sistemática. Hay pocos listados sistemáticos y una alta proporción de respuesta ciega. Entre las estrategias en el estudio de Navarro-Pelayo (1994), las más frecuentes fueron enumeración no sistemática (35% y 71%), respuesta ciega (11% y 15%), y cometer más de tres errores (21% y 12%).

Tabla 5.7. Frecuencia de cada estrategia en la parte a del ítem de enumeración, según respuesta

	Respuesta parte a					
	Correcta (6)		Otra			
Estrategia	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Diagrama de árbol o algún esquema gráfico	8	5,4			8	5,1
Lista sistemática	41	27,9			41	26,1
Listas parcialmente sistemáticas	62	42,2	3	30	65	41,4
Listas no sistemáticas	36	24,5	7	70	43	27,4
Total	147		10		157	

Tabla 5.8. Frecuencia de cada estrategia en la parte c del ítem 1, según respuesta

	Respuesta parte c					
	Correcta (24)		Otra			
Estrategia	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Permutación	3	3,3			3	1,9
Producto	27	29,3	13	20	40	25,5
Diagrama de árbol o algún esquema gráfico	3	3,3	2	3,1	5	3,2
Lista sistemática	6	6,5			6	3,8
Listas parcialmente sistemáticas	23	25	13	20	36	22,9
Listas no sistemáticas	7	7,6	18	27,7	25	15,9
No se identifica (Respuesta ciega)	23	25	15	23,1	38	24,2
Estrategias minoritarias			4	6,2	4	2,5
Total	92		65		157	

En resumen, la parte c tiene más riqueza en el análisis de conocimientos que las partes a y b, debido al aumento en la complejidad de la tarea por la cantidad de elementos a permutar. Pocos futuros profesores recuerdan (o al menos aplican) la fórmula de la permutación, pero una cuarta parte deduce la fórmula aplicando la regla del producto, alrededor del 40% producen listas, algunas de ellas no sistemáticas; otras estrategias son incorrectas o no se expresan de forma que podamos identificarlas. Por todo ello la capacidad de enumeración debiera reforzarse en los futuros profesores.

5.5.2. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES: SIGNIFICADO CLÁSICO

Análisis a priori de la tarea

Ítem 2. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra? ¿Por qué?

Este ítem se adaptó de un experimento de Falk y Wilkening (1998), quienes lo propusieron, como actividad de aula con recursos manipulativos, a niños entre 6 y 14 años para evaluar su habilidad en la comparación de probabilidades.

El evaluado debe reconocer la falta de proporcionalidad en la conformación inicial de las cajas, distinguir casos favorables de no favorables y aplicar la regla de Laplace, para obtener el número de bolas a trasladar de una caja a la otra, de modo que la distribución de las dos cajas mantenga proporcionalidad. Como hay 20 bolas, 8 blancas y 12 negras, la probabilidad de extraer negra, si todas estuvieran en la misma caja es 12/20 = 3/5; también se puede ver que están en razón de 2 blancas a 3 negras. La Tabla 5.9 resume los cambios que pueden hacerse en las cajas para que, sin alterar el número total de bolas, mantengan la misma proporción.

Tabla 5.9. Estrategias de cambio en la composición de las cajas que llevan a respuesta correcta

	Nueva caja Pablo			Nueva caja Miguel		
Estrategia	Blancas	Negras	Total	Blancas	Negras	Total
A: Pasar de Pablo a Miguel 1B y 1N	4	6	10	4	6	10
B: Pasar de Miguel a Pablo 1B y 2N	6	9	15	2	3	5
C: Pasar de Pablo a Miguel 3B y 4N	2	3	5	6	9	15

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado clásico *previsión de probabilidad en juegos de azar* (*SPC*); el contenido primario que evalúa corresponde a los procedimientos *diferenciar casos favorables y no favorables* (*PRC3*) y *comparar probabilidades con razonamiento proporcional* (*PRC5*); que implican las propiedades c*asos favorables: resultados que favorecen* (*PC3*) y *casos posibles: todos los resultados* (*PC4*) y, por tanto, el concepto *casos favorables, casos posibles* (*CC2*). Como contenidos secundarios evalúa los procedimientos *distinguir sucesos elementales equiprobables* (*PRC4*) y *aplicar la regla de Laplace en experimentos simples* (*PRC6*), que implican el concepto *probabilidad* (*CC3*), y las propiedades *probabilidad: valor objetivo, calculable* (*PC5*) y *regla de Laplace* (*PC6*).

Resultados en la distribución de bolas en las urnas

En la Tabla 5.10 se presentan las soluciones dadas por los futuros profesores en este problema; el 75% divide por igual las bolas en las dos cajas, es decir, pasa a cajas idénticas. Sólo tres futuros profesores proponen cajas proporcionales no idénticas. En todo caso, los resultados son buenos, pues la mayoría da una solución correcta. Como respuestas incorrectas encontramos no modificar las cajas o proponer otras modificaciones que no aseguran la equiprobabilidad de las cajas. Muy pocos no responden. Estas respuestas coinciden parcialmente con las observaciones de Falk y Wilkening (1998), quienes no indican la proporción de cada una.

Tabla 5.10. Frecuencia y porcentaje de respuestas en la comparación de probabilidades

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Pasar 1By 1N de Pablo a Miguel (Cajas iguales)	117	74,5
Pasar 1B y 2N de Miguel a Pablo (Cajas proporcionales)	3	1,9
No modifica las cajas (Cajas no proporcionales)	14	8,9
Otras respuestas	20	12,7
No responde (en blanco)	3	1,9
Total	157	

Argumentos

Con objeto de evaluar su conocimiento especializado en cuanto a la comparación de probabilidades en el significado clásico, se estudiaron las justificaciones de los futuros profesores en este ítem, obteniendo las siguientes:

Repartición entre dos del total de bolas. Se argumenta que, teniendo los mismos casos favorables y posibles, se cumple la igualdad de las probabilidades. No se hace uso explícito del razonamiento proporcional. La siguiente respuesta ilustra este argumento:

> Un total de 8 blancas y 12 negras, por lo que cada uno debe de tener 4 blancas y 6 negras, esto se consigue si Pablo le da una bola de cada color a Miguel (A030).

Igualdad de condiciones. Otros participantes, al igual que en Falk y Wilkening (1998), proponen composiciones de cajas idénticas, justificando que de este modo se consigue la misma probabilidad.

Pablo	5 bolas blancas	Miguel	3 bolas blancas	$\frac{5}{12} \neq \frac{3}{8}$
	7 negras		5 negras	$\frac{7}{12} \neq \frac{5}{8}$
	12 bolas		8 bolas	
	4 blancas		4 blancas	
	6 negras		6 negras	
	10		10	

> De la primera caja a la segunda pasaría 1 bola blanca y 1 bola negra para que así haya tantas bolas blancas y negras en la primera caja y en la segunda, por lo que el resultado total de bolas es el mismo y así existe la misma probabilidad de que ambos niños extraigan una bola negra
> CAJA 1 6/10 CAJA 2 = 6/10 (A010).

Proporcionalidad. Una estrategia más elaborada, pero poco usada es proponer composiciones de cajas (iguales o diferentes) con base en la razón de proporcionalidad en el total de bolas. Hay dos posibles respuestas correctas, pero sólo se observó una de ellas en el grupo evaluado:

> Tendría que pasar de la caja de Miguel a la de Pablo 1 bola blanca y 2 negras, por lo que ahora Miguel tendría 2 bolas blancas y 3 negras y Pablo 6 blancas y 9 negras. Porque de esta manera tendrían la misma proporción y serían equivalentes (A008).

Diferencia entre favorables y no favorables. Un argumento para no modificar la composición de las cajas es relacionar la igualdad de probabilidades con la diferencia entre número de casos favorables y no favorables. Inhelder y Piaget (1955) indican que esta forma de comparar probabilidades corresponde a una etapa anterior a las operaciones formales. Este razonamiento también fue encontrado por Falk y Wilkening (1998), y supone falta de comprensión de la proporcionalidad:

> En ambas cajas tienen 2 bolas negras más que blancas, entonces tienen la misma probabilidad (C034).

Comparar casos favorables. Este argumento, citado por Inhelder y Piaget (1955) para el periodo de las operaciones concretas, y encontrado por Falk y Wilkening (1998), aparece en algunos de nuestros futuros profesores, como se ilustra con el siguiente ejemplo:

> Así ambas cajas, tanto la de Miguel como la de Pablo, poseen 6 bolas negras cada una y por tanto tienen la misma probabilidad de extraer una bola negra (A035).

Sesgo de equiprobabilidad. Algunos argumentos reflejan dos formas del sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). En un caso, construyen cajas, donde las probabilidades de sacar negra son iguales al 50%, pero no respetan que en total haya 8 blancas y 12 negras. En otro caso, consideran que los dos niños tienen la misma probabilidad de sacar negra a pesar de obtener diferente proporción, por tanto no modifican la composición de las cajas; por ejemplo:

> Ambos tienen la misma probabilidad de sacar una bola negra porque Pablo tiene más bolas en total que Miguel para la probabilidad de sacar una negra es de 0,583 y la de Miguel que tiene menos bolas en total, es de 0,625 (A025).

Otros argumentos. Algunos argumentos minoritarios reflejan interpretación errada de la pregunta, una baja comprensión de la probabilidad, o de razonamiento proporcional, o de la relación entre probabilidad y proporcionalidad; por ejemplo:

> Si sumamos las 7 negras de Pablo con las 5 de Miguel nos daría 12 bolas negras, por tanto así hay más probabilidad de que les toque una bola negra (G023).

Tabla 5.11. Frecuencia y porcentaje de argumentos en la comparación de probabilidades

Categoría de argumentos	Frecuencia	Porcentaje
Igualdad de condiciones (argumento de correspondencia)	97	61,8
Repartición en dos del total de bolas (argumento distributivo)	13	8,3
Proporcionalidad (argumento multiplicativo)	6	3,8
Diferencia entre favorables y no favorables (argumento aditivo)	7	4,5
Comparar casos favorables (argumento univariado)	8	5,1
Sesgo de equiprobabilidad	11	7,0
Otros argumentos	12	7,6
No responden a la pregunta	3	1,9
Total	157	

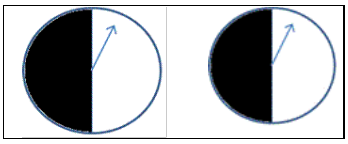
Nuestros resultados (Tabla 5.11) dan una mayoría de argumentos correctos (75%), por lo que este ítem resultó sencillo para nuestra muestra e indica algún conocimiento especializado sobre la comparación de probabilidades (ser capaz de argumentar por qué dos probabilidades son iguales).

Son mucho mejores que los de Falk y Wilkening (1998) con niños de 6 a 14 años, donde la mayor parte de los niños se enfoca en el número de bolas de un solo tipo (favorables), mientras en nuestro caso la mayoría usan todos los datos del problema. Estas diferencias son coherentes pues, según Falk y Wilkening (1998), este tipo de tarea promueve pensar a la vez en la valoración de cada probabilidad y en su comparación. Aun así, todavía algunos futuros profesores muestran tendencia a tomar decisiones en función de la diferencia de casos favorables con desfavorables; sin integración de las dimensiones de probabilidad y proporcionalidad.

5.5.3. PROBABILIDAD CONJUNTA. EXPERIMENTOS INDEPENDIENTES

Análisis a priori de la tarea

Ítem 3. En una feria hay un juego. El jugador tiene que girar una vez cada una de las dos ruletas que aparecen en el dibujo. Gana un premio si las flechas de las dos ruletas caen en la zona negra.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador gane?
b. ¿Por qué?

Este ítem fue adaptado de Shaughnessy y Ciancetta (2002). La probabilidad de ganar es 1/4, se obtiene aplicando la regla del producto para sucesos independientes, dado que el resultado de un experimento no afecta a la probabilidad de los resultados del otro. El problema se puede solucionar con ayuda de un diagrama en árbol (Figura 5.1), notando que cada experimento simple tiene dos posibles resultados B o N. Ambas probabilidades son iguales a 1/2 porque los dos experimentos aleatorios simples son idénticos, por tanto la probabilidad conjunta es $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

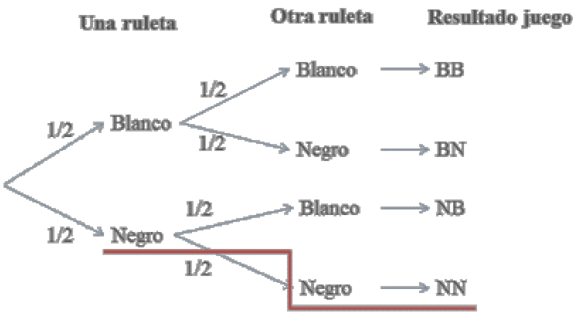


Figura 5.1. Diagrama en árbol para resolver el ítem 3

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado clásico *previsión de probabilidad en juegos de azar* (*SPC*); evalúa como contenido primario los procedimientos *enumerar o contar casos favorables y posibles* (*PRC2*), *diferenciar casos favorables y no favorables* (*PRC3*) y *asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes* (*PRC8*); que implica la propiedad *casos favorables: resultados que favorecen* (*PC3*) y los conceptos *casos favorables, casos posibles* (*CC2*), *probabilidad* (*CC3*) y *experimento compuesto, dependencia, independencia* (*CC5*). Como contenidos secundarios evalúa las propiedades *casos posibles: todos los resultados* (*PC4*) y *probabilidad: valor objetivo, calculable* (*PC5*); y el procedimiento *distinguir sucesos elementales equiprobables* (*PRC4*).

Resultados en el cálculo de la probabilidad

La frecuencia de respuestas de los futuros profesores al valor de probabilidad de ganar en el juego se muestra en la Tabla 5.12. Observamos que más de la mitad responden en forma correcta; una proporción considerable opta por ½; algunos dan otro tipo de respuestas y pocos dejan en blanco.

Tabla 5.12. Frecuencias y porcentajes de respuestas a ¿cuál es la probabilidad de ganar el juego?

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta (0,25)	89	56,7
0,5	46	29,3
Otra respuesta	15	9,6
En blanco	7	4,5
Total	157	

Estos resultados son mejores que los reportados por Shaughnessy y Ciancetta (2002), en una muestra de 1100 estudiantes de 18 años, se obtuvo un 8% de respuestas correctas y 20% parcialmente correctas (probabilidad de ganar menor que 50%). Posteriormente, los investigadores obtuvieron mayor proporción de respuestas correctas en otra muestra (652 estudiantes de 11 a 18 años), observando un aumento en la proporción de respuestas correctas o parcialmente correctas, en concordancia con el grado que cursaban los evaluados.

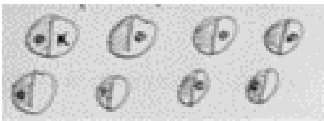
Argumentos

Los argumentos de los futuros profesores se analizaron para evaluar el conocimiento especializado en relación con los objetos matemáticos involucrados en la resolución de este problema; se clasificaron como se describe a continuación.

Regla del producto. Algunos evaluados muestran un buen conocimiento de probabilidad y del experimento compuesto y son capaces de justificar su respuesta en la aplicación de la regla del producto para sucesos independientes; por ejemplo:

> El jugador debe colocar la flecha de la ruleta en la zona negra y no en la blanca (50%) pero es que además las flechas de las dos ruletas deben caer en la zona negra (50%). Por tanto la probabilidad de ganar un premio en el juego de esta feria es 50%x50%=25% (C039).

Regla de Laplace. Otros participantes aplican la relación entre casos favorables y posibles, realizando o no la enumeración completa del espacio muestral producto; obtienen una justificación correcta:



> Porque hay 4 combinaciones posibles para el juego: Tiene la probabilidad de que gane de un 25% ya que de las cuatro combinaciones posibles del juego solo hay una ganadora (A022).

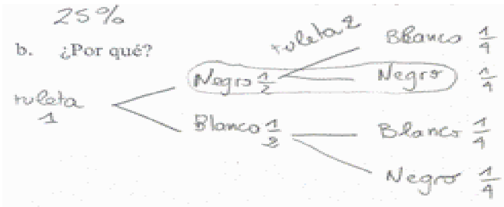
Hay casos que fallan en la enumeración del espacio muestral producto:

> Hay 3 soluciones posibles: (a) que gire las ruletas y salgan las dos flechas sobre la zona blanca: (b) que gire las ruletas y salgan las dos flechas sobre la zona negra, (c) que gire las ruletas y salgan una flecha en la zona blanca y otra en la negra. Por tanto hay más posibilidades de que pierda de que gane (A041).

Otros fallan en la comprensión del experimento compuesto, por lo que ofrecen una justificación incorrecta; por ejemplo:

> En total hay 4 franjas de colores, dos negras y dos blancas y como solo gana premio si cae la flecha en la parte negra, eso se corresponde con un 50% de probabilidades de que caigan en la franja blanca o en la negra, por lo que es relativamente fácil ganar (C003).

Diagrama en árbol. Pocos evaluados se basaron en el diagrama en árbol, que suele ser correcto. Un ejemplo es la respuesta de G040:



Sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Cuando no realizan operaciones y basan su argumento en la idea de que cualquier resultado es igualmente probable. En algunos casos se mezcla con una incomprensión del experimento compuesto, pues se basan en la equiprobabilidad de los sucesos en el experimento simple, que sí se cumple, también observado en Fischbein, Nello y Marino (1991); por ejemplo:

> Tiene las mismas posibilidades de ganar como de perder ya que cada ruleta consta de la misma parte de blanco que de negro (G003).

Argumentos minoritarios. En pocos casos se da una respuesta inconsistente, basada en otras características de las ruletas (ubicación de la flecha en el dibujo o fuerza del impulso), o en creencias personales; por ejemplo:

> Como están las dos manecillas en el mismo lugar, tendrá más posibilidades de que caiga en la zona negra; así que un 60% de que caiga en la zona negra (A009).

Tabla 5.13. Frecuencia y porcentaje de argumentos según la respuesta a la primera pregunta

	Correcta (0,25)		0,5		Otra o NR			
Argumento	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Diagrama en árbol	7	7,9	1	2,2			8	5,1
Regla de Laplace	42	47,2	21	45,6	6	27,3	69	44,0
Regla del producto	39	43,8					39	24,8
Sesgo de equiprobabilidad			17	37,0	4	18,2	21	13,4
Argumentos minoritarios	1	1,1	5	10,9	5	22,7	11	7,0
No argumenta o no responde			2	4,3	7	31,8	9	5,7
Total	89		46		22		157	

La Tabla 5.13 muestra la frecuencia de argumentos para explicar la solución del problema. En general, se observa predominio de razonamiento probabilístico (regla de Laplace) y combinatorio (regla del producto), con proporciones no despreciables de sesgo de equiprobabilidad y de no respuesta. Estas dos justificaciones son mucho más frecuentes (casi la totalidad entre las dos) entre los futuros profesores que dieron la respuesta correcta.

Es decir, la mayoría de los participantes que asignaron 0,25 como probabilidad de ganar el juego utilizaron en forma correcta argumentos probabilísticos; se basaron principalmente en la aplicación de las reglas de Laplace y del producto, y unos pocos usaron el diagrama en árbol. En cambio la mayoría de los participantes que asignaron 0,5 como probabilidad de ganar el juego aplicaron la regla de Laplace, con algún error; otra proporción importante de quienes dieron esta respuesta mostró sesgo de equiprobabilidad. Estos dos tipos de argumento también se observaron entre los participantes que asignaron otros valores de probabilidad.

Cabe notar que los argumentos referidos a la regla del producto conllevaron a la respuesta correcta siempre, y casi siempre los basados en el diagrama en árbol, excepto uno que cometió un error de construcción; en tanto los sustentados en la regla de Laplace fueron menos exitosos, debido a fallos en la comprensión del experimento compuesto o en su enumeración.

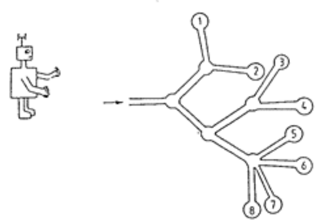
Nuestros resultados son mejores que los de Shaughnessy y Ciancetta (2002), quienes en su primer análisis encontraron 8% de argumentos apropiados, referidos a la composición del espacio muestral, al principio de la multiplicación y a modelos de áreas; 20% se basaron en que si con una sola ruleta la probabilidad es 0,5 con las dos debería ser menor o dieron un argumento incompleto. El análisis posterior mostró una argumentación más elaborada en los estudiantes de últimos grados o que cursaban asignaturas especializadas de matemáticas (cálculo, álgebra o estadística). Los argumentos no probabilísticos se observaron principalmente en niños de 11 y 12 años, como enfocarse en el resultado, o la creencia en que los juegos de feria están truncados.

5.5.4. PROBABILIDAD CONJUNTA. EXPERIMENTOS DEPENDIENTES

Análisis a priori de la tarea

Ítem 4. Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino como por otro (Pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo).

a. ¿En qué trampa ó trampas tiene el robot más probabilidades de acabar?
b. ¿Por qué?
c. ¿En qué trampa o trampas tiene menos posibilidades de acabar?



Este ítem fue tomado de investigaciones sobre razonamiento probabilístico en niños (Green, 1983a; Cañizares, 1997). Las trampas más probables son la 1 y la 2 (cada una con probabilidad 1/4) y las menos probables son la 5, la 6, la 7 y la 8 (cada una con probabilidad 1/16).

Esta tarea presenta un experimento compuesto por un número variable de etapas dependientes consecutivas (dos o tres o cuatro). El futuro profesor podría encontrar la solución con ayuda de un diagrama de árbol; las probabilidades condicionales se representan en cada ramificación del árbol y las compuestas por el producto de probabilidades de cada rama (Figura 5.2).

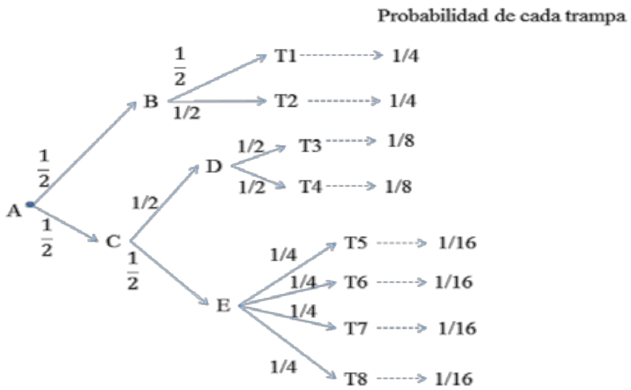


Figura 5.2. Diagrama en árbol para representar el problema

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado subjetivo *estudio de sucesos cuya probabilidad puede cambiar por información disponible* (*SPS*); evalúa como contenido primario los procedimientos *asignar probabilidades conjuntas en experimentos dependientes* (*PRC9*), las propiedades *suceso incierto: impredecible aunque se tiene información adicional* (*PS1*) y *probabilidad: condicionada por un sistema de conocimientos* (*PS2*) y los conceptos *suceso incierto* (*CS1*) y *experimento compuesto, dependencia, independencia* (*CC5*).

Resultados y discusión

En primer lugar describimos las frecuencias de las respuestas a la primera pregunta, la trampa más probable (Tabla 5.14). Observamos que la mitad de los participantes responde en forma correcta; en proporciones importantes dan la respuesta contraria, trampas entre la 5 y la 8, o dan la respuesta complementaria a las trampas menos probables, trampas 1 a 4; pocos se inclinan por la equiprobabilidad o responden con otras trampas, como la 3 y la 4. La tasa de no respuesta es muy baja.

Tabla 5.14. Frecuencia y porcentaje de respuestas ¿Cuál trampa es más probable?

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Trampas 1 y 2 (correcta)	79	50,3
Trampas 5 a 8	34	21,7
Trampas 1 a 4	23	14,6
Equiprobable	9	5,7
Otra	8	5,1
En blanco	4	2,5
Total	157	

Tabla 5.15. Respuestas a la pregunta ¿Cuál trampa es menos probable?

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Trampas 5 a 8 (Correcta)	86	54,8
Trampas 1 a 4	27	17,2
Trampas 3 a 8	10	6,4
Otra	21	13,4
Equiprobable	8	5,1
En blanco	5	3,2
Total	157	

Los resultados de la tercera pregunta (Tabla 5.15), cuál opción es menos probable, son algo mejores. Aumenta ligeramente la proporción de respuesta correcta y se mantienen la equiprobabilidad y la tasa de no respuesta. Es de notar que el sesgo de equiprobabilidad en este ítem apenas aparece en nuestra muestra.

Tabla 5.16. Consistencia en las dos respuestas del ítem 4

	Más probable			
	Trampas 1 y 2 (Correcta)		Otra (incorrecta)	
Menos probable	Frec.	%	Frec.	%
Trampas 5 a 8 (Correcta)	62	78,5	24	30,8
Otra o blanco (Incorrecta)	17	21,5	54	69,2
Total	79		78	

Del análisis conjunto (Tabla 5.16) identificamos cuatro grupos, según la consistencia de sus respuestas: ambas correctas (39,5% de los evaluados), que serían los que muestran un conocimiento adecuado en la pregunta; ambas incorrectas (35%), solo la primera correcta (10,2%) y solo la segunda correcta (15,3%). Estos últimos son los que, de acuerdo a Konold (1989), razonarían según el enfoque en el resultado y no según el sesgo de equiprobabilidad.

Entre los que respondieron en forma correcta a la primera pregunta destacamos que la mayoría también lo hizo a la segunda. Entre los pocos que respondieron con equiprobabilidad a la primera pregunta (9 sujetos), la mayoría (7) permaneció en la equiprobabilidad, dejando en evidencia la presencia del sesgo de equiprobabilidad, pero son muy pocos casos. Entre quienes consideraron más probables otras trampas, la mayoría respondió cuáles eran menos probables en forma complementaria. Aplicando el contraste Chi-cuadrado (Chi=36,07, g. l.=1, $p<0,001$) se obtiene una relación estadísticamente significativa entre respuestas correctas /incorrectas en cada parte.

Estos resultados son mucho mejores que los observados en estudios anteriores con niños de 11 a 14 años. Green (1983a) encontró una alta proporción de respuestas incorrectas a favor del sesgo de equiprobabilidad, que aumenta con la edad (60%) y baja proporción de respuestas correctas (5%). Cañizares (1997) obtuvo mejores resultados que éste, aunque peores que los nuestros; también observó baja proporción de respuesta correcta (8%) y alta presencia del sesgo de equiprobabilidad (55%) que aumenta con la edad.

Argumentos

Los argumentos dados por los futuros profesores en la segunda pregunta muestran su conocimiento especializado de objetos matemáticos involucrados en la resolución de este problema. En muchos casos, los alumnos contestan conjuntamente a la segunda y tercera pregunta, por lo cual describimos en un solo apartado los argumentos.

Diagrama en árbol. Fischbein (1975) resalta el uso del diagrama en árbol para la visualización de la estructura del problema y para la producción de la solución correcta. Sin embargo, en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) se observaron errores de construcción con alta frecuencia, conllevando a respuestas incorrectas. En nuestro estudio, observamos que estos errores de construcción llevaron a que solo se contestara en forma correcta una de las dos preguntas.

Cálculo de probabilidades. Pocos evaluados calcularon las probabilidades conjuntas directamente utilizando la regla del producto, o cálculo mental. La mayoría respondieron en forma correcta a las dos preguntas; por ejemplo:

> En la primera elección tiene un 50% de probabilidad de elegir el camino. Más adelante, en el próximo cruce tendrá un 25% de probabilidad, como es el caso de la 1 y 2. Con las 2 trampas que más posibilidades tiene de caer (G006).

Número de intersecciones. Algunos futuros profesores eligen como más probables a las trampas cuyos recorridos requieren menos cruces, para llegar a ellas; el robot ha pasado por menos intersecciones. Muestran una intuición correcta de la regla del producto; en general, este razonamiento lleva a responder en forma correcta ambas preguntas:

> Solo tendría que elegir ese camino en el primer cruce y luego elegir 1 o 2, mientras que los demás elegiría primer cruce, luego el segundo y ya el camino (A039).

Número de caminos. Otros participantes se fijan en el número de caminos después de la última intersección, es decir se fijan solo en los posibles resultados de las últimas etapas del experimento compuesto; y comparan las probabilidades de estas últimas etapas, sin tener en cuenta las probabilidades de llegar a cada una de estas etapas, como si cada una de éstas constituyera un experimento simple e independiente de los otros. Bajo este razonamiento, las trampas 1 a 4 son más probables porque en cada caso provienen de una última etapa con dos opciones, mientras que las trampas 5 a 8 son menos probables porque provienen de una última etapa con cuatro opciones; por ejemplo el evaluado C054:

> Las trampas 1 a 4 son más probables porque al llegar al cruce de estas, al solo haber dos caminos, tiene 50% de probabilidad de irse por uno u otro.
> Las trampas 5 a 8 son menos probables porque al llegar al cruce cada camino tendría un 25% de probabilidad es decir, menos.

Distancia al origen. Fischbein (1975) observó que en problemas de probabilidad en contexto de caminos con ramificaciones, las estimaciones son menos acertadas al aumentar la edad, debido a la asignación de causas de tipo mecánico o físico (exhibiendo el aprendizaje adquirido en otras áreas o el desarrollo del pensamiento determinista). Algunos evaluados contestan que las trampas 1 y 2 son más probables porque parecen estar más cercanas del origen, mientras que las trampas 5 a 8 son menos posibles porque parecen más alejadas del origen:

> Las trampas 1 y 2 son más probables porque al ser las trampas más cercanas y fáciles de acceder tienen una mayor probabilidad de que el robot acabe en ellas (A017).

Sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Se observa en futuros profesores que indican que todas las trampas son igualmente probables o eligen cualquier trampa (o ninguna), bajo el argumento que cualquier resultado es posible. Estos casos implican falta de comprensión de la dependencia de las etapas en el experimento compuesto (asumirlo como un experimento simple):

> Se entiende que tiene un 50% de probabilidad de ir a izquierda y a derecha. Por lo cual la posibilidad de acabar en una trampa es la misma (A046).

Argumentos minoritarios. Muy pocos evaluados interpretaron en forma errada el enunciado, como la posibilidad de terminar o no en trampa. Otros justificaron su elección de la trampa más (o menos) probable a voluntad o con argumentos basados en creencias personales, sociales, visuales o de otra índole; por ejemplo el evaluado C017:

> Las trampas 1 y 2 más probables, porque al coger el primer camino es probable que se desvíe hacia las trampas que son más directas, en este caso la 1 y 2. Las trampas 3 y 4 menos probables, porque para 5, 6, 7 y 8 el camino es ~~mas~~más recto, en cambio para la 3 y 4 de repente debería desviarse a la izquierda.

Tabla 5.17. Frecuencias y porcentaje de argumentos con respecto al acierto en las otras dos preguntas

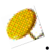
Argumento	Ambas correctas Frec	%	Alguna incorrecta Frec	%	Total	%
Diagrama en árbol	10	16,1	6	6,3	16	10,2
Probabilidad	5	8,1	1	1,1	6	3,8
Número de intersecciones	18	29	11	11,6	29	18,5
Número de caminos			38	40,0	38	24,2
Distancia al origen	22	35,5	9	9,5	31	19,7
Sesgo de equiprobabilidad			8	8,4	8	5,1
Argumentos minoritarios	5	8,1	17	17,9	22	14
No argumenta	2	3,2	5	5,3	7	4,5
Total	62		95		157	

La Tabla 5.17 muestra con qué frecuencia se presentó cada una de estas tipologías relacionando con el acierto en las otras dos preguntas. En general se observa una prevalencia de argumentos referidos a características del recorrido, número de caminos, distancia al origen y número de intersecciones; y una baja presencia de razonamiento probabilístico, diagrama de árbol y cálculo de probabilidades. También observamos pequeñas proporciones de sesgo de equiprobabilidad y de falta de argumentación.

Estos razonamientos conllevaron a diferentes niveles de acierto en las respuestas. Los participantes que contestaron ambas en forma correcta se basaron principalmente en la distancia al origen, el número de intersecciones y el diagrama en árbol; al igual que aquellos que contestaron solo la primera en forma correcta. En tanto, la mayoría de los participantes que contestaron solo la segunda en forma correcta se basaron en el número de caminos. Este argumento también fue el mayoritario entre los participantes que fallaron en ambas respuestas.

5.5.5. PROBABILIDAD SIMPLE: SIGNIFICADO FRECUENCIAL

Análisis a priori de la tarea

Ítem 5. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .
Supongamos que el profesor pide a 4 niños más repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Este ítem se adaptó de investigaciones con niños entre 11 y 16 años (Green, 1983b). Su objetivo es valorar el reconocimiento del carácter aproximado de la estimación de la probabilidad en el significado frecuencial. Se debe reconocer la ausencia de equiprobabilidad ocasionada por la asimetría física en el dispositivo, y utilizar la información de la primera experimentación para predecir la frecuencia en repeticiones sucesivas, estimando la variabilidad del muestreo.

Una buena comprensión del significado frecuencial se refleja en la asignación de pares de frecuencias de resultados no constantes de un niño a otro. La distribución del número de chinchetas que caen punta arriba sigue el modelo Binomial $B(p,n)$ con *n=100* y *p* desconocida, que se puede estimar. El valor esperado es *np*, para este caso es *68*, y su desviación estándar $\sqrt{npq}$ se aproximaría a *4,7*. La propuesta de valores por encima y por debajo de 68 indica la comprensión del experimento en su totalidad, en especial, si oscilan en el intervalo (63,73) que es la media menos y más una desviación típica.

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado frecuencial *previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados* (*SPF*); los contenidos primarios que se evalúan corresponden a los procedimientos *estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos* (*PRF5*) y *reconocer el carácter aproximado de esta estimación* (*PRF6*), que implica los conceptos *ensayo, ensayos repetidos* (*CF2*), *frecuencia (absoluta, relativa)* (*CF3*) y *valor estimado de la probabilidad* (*CF4*), y sus propiedades *atributos equiprobables o no* (*PF2*), *el valor estimado de la probabilidad tiende a estabilizarse* (*PF6*) y *varía en cada serie de N ensayos* (*PF7*).

Resultados y discusión

El análisis de las respuestas de los futuros profesores se basará en medidas de resumen de los cuatro valores dados, más que en los resultados consignados para cada niño ficticio, puesto que dichas se asumen como una muestra de tamaño cuatro. Los resultados de este ítem se publicarán en Gómez, Batanero y Contreras (en prensa).

Valores medios de las frecuencias previstas

La distribución de las medias de los cuatro valores dados para el número de chinchetas con la punta arriba (Figura 5.3) se concentra alrededor de 57,7; más cercano a 50 que a 68, el valor teórico esperado (línea vertical), reflejo de la tendencia hacia el sesgo de equiprobabilidad.

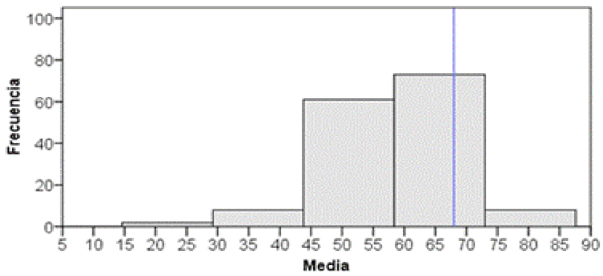


Figura 5.3. Distribución del número medio de chinchetas con la punta hacia arriba

Para mayor claridad, en la Tabla 5.18 representamos las frecuencias con intervalos desiguales para tener en cuenta diferentes tipos de respuesta. Por un lado, la tercera parte de los estudiantes da valores próximos al esperado (entre 63 y 73), que sería la respuesta correcta como se indicó antes. Un segundo grupo dan respuestas parcialmente correctas (media algo por encima o por debajo del teórico); tiene en cuenta que los dos sucesos considerados no son equiprobables y se acerca algo al valor esperado, aunque no totalmente. En todo caso están en el intervalo de la media más o menos dos desviaciones típicas, por lo cual también serían aceptables.

Tabla 5.18. Frecuencia y porcentaje de intervalos de las medias

Intervalo	Frecuencia	Porcentaje
Hasta 45 (Representatividad)	14	8,9
45-55 (Equiprobabilidad)	53	33,8
55-63 (Aceptable, bajo)	25	15,9
63-73 (correcto)	53	33,8
Mayor que 73 (Aceptable, alto)	7	4,4
No dan respuesta	5	3,2
Total	157	

Otro grupo proporcionan valores medios entre 45 y 55, considerando los resultados equiprobables, sin tener en cuenta la información frecuencial, bien por dar valores cercanos al 50%, o bien por alternancia de resultados, compensando valores altos para punta arriba en dos lanzamientos con valores altos para punta abajo en los otros dos. Estos alumnos mostrarían el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

El último grupo, minoritario, con tendencia a valores medio bajos (mayor proporción punta abajo, posiblemente para "compensar" el resultado inicial), mostrarían una heurística de representatividad y falta de comprensión de la independencia.

Dispersión de valores

También se analizó si los estudiantes comprenden la posible dispersión de valores cuando se repite el experimento. Como se ha indicado, la desviación típica en este experimento es aproximadamente igual a 5; por tanto el intervalo de dos desviaciones típicas (95%) debiera producir valores de punta hacia arriba con una variabilidad entre 58 y 78, es decir una amplitud de 20 sería un rango aceptable.

La distribución de los rangos de los cuatro valores del número de chinchetas con punta arriba (Figura 5.4) muestra un valor medio 28,7, mayor de lo esperado, pero sería compatible con un intervalo de tres desviaciones típicas (cobertura de 99,9%). La asimetría en los datos es un reflejo de la tendencia de algunos pocos estudiantes a dar valores extremos.

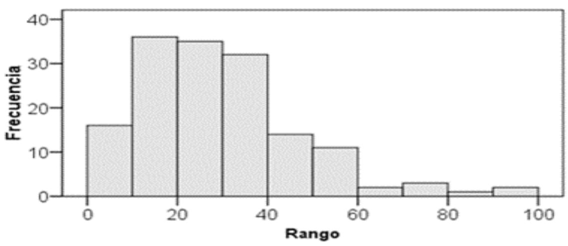


Figura 5.4. Distribución de rangos en los datos dados por los alumnos

La Figura 5.4 permite identificar varios tipos de respuestas con relación a la variabilidad de los datos, encontramos los siguientes grupos de alumnos:

Variabilidad adecuada. Los evaluados asignan valores con rango entre 10 y 20, esto es entre una y dos veces la desviación típica. Refleja una buena comprensión de la aleatoriedad o de la ley de los grandes números; por ejemplo la respuesta de G043:

63	75	70	78

Algunos participantes, muestran esta variabilidad moderada combinada con un sesgo de equiprobabilidad, con valores más cercanos a 50; esta insensibilidad a la información previa es atribuida por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) a la heurística de representatividad. Por ejemplo, G017:

43	60	59	53

Dispersión alta pero aceptable. Asignan rangos entre 20 y 30, esto es dos y tres veces la desviación típica, dispersión que refleja una comprensión aceptable de la aleatoriedad Algunos de estos participantes tienen promedios entre 63 y 72, pero la mayoría muestran algún sesgo de equiprobabilidad, con una media cercana a 50; por ejemplo, G015:

48	72	57	61

Concentración alta. Rango inferior a 10. Esta baja variabilidad, refleja una comprensión parcial de la ley de los grandes números, ya que el estudiante espera que los resultados estén siempre muy cerca de un teórico. La mayoría de los evaluados que utilizan esta estrategia tienen promedios entre 63 y 68, con resultados como G031

67	66	69	70

Dispersión alta. Rango mayor que 30, que refleja una baja comprensión de la aleatoriedad, puede indicar que el estudiante espera una compensación entre los resultados. La mayoría de los evaluados que utilizan esta estrategia tienen promedios entre 41 y 57, con resultados como A025:

56	69	30	46

Otro grupo muestra alta dispersión de valores y tiene en cuenta la información previa, la tendencia es a valores mayores de punta arriba con promedios entre 60 y 76. Sin embargo, casi todos incluyen un valor cercano a 50. Por ejemplo, el evaluado A003:

57	73	81	48

Casos extremos. Muy pocos evaluados respondieron a la tarea con conjuntos de valores incluyendo datos extremos, que implican dispersiones extremas; entre éstos se identifican dos casos: ausencia de variabilidad, escriben los mismos pares de valores para los cuatro niños, y dispersión excesivamente alta, rango mayor que 70 (más de siete desviaciones). Algunos ejemplos de estos casos son:

50	50	50	50	(C021, G050)
100	50	0	50	(A022)

Estas categorías se resumen en la Tabla 5.19; donde observamos que la mitad tiene una buena comprensión de la variabilidad ligada con el significado frecuencial; una proporción importante muestra una percepción de variabilidad alta o muy alta; es menos frecuente la tendencia a dar valores muy cercanos (excesiva concentración, rango menor que 10); y pocos no comprenden bien la dispersión del proceso asignando valores con dispersión extrema.

Tabla 5.19. Frecuencia y porcentaje de categorías de percepción de variabilidad, de acuerdo con respuesta considerada correcta

Categoría	Media entre 63 y 73 Sí Frec.	%	No Frec.	%	Total	%
Variabilidad adecuada (Rango entre 10 y 20)	25	47,2	11	11,1	36	22,9
Dispersión alta, pero aceptable (Rango entre 20 y 30)	12	22,6	23	23,2	35	22,3
Concentración alta (Rango entre 1 y 10)	8	15,1	5	5,1	13	8,3
Dispersión alta (Rango entre 30 y 70)	8	15,1	51	51,5	59	37,6
Casos extremos (Rango 0 o mayor que 70)			9	9,1	9	5,7
No responden					5	3,2
Total	53		104		157	

También notamos que, entre los participantes con una comprensión correcta de la aproximación en la estimación (media entre 63 y 73), 70% tienen una noción de variabilidad buena o aceptable; es decir, 24% del total de futuros profesores evaluados muestra una percepción integral del significado frecuencial en la experimentación. Por el contrario, entre los participantes con sesgos de equiprobabilidad o heurística de representatividad, más de la mitad tiene una noción de mayor variabilidad en muestras pequeñas, 9% le asocian muy poca dispersión y 51% le asocian elevada dispersión.

Otros aspectos destacados

Otro indicador de la comprensión de la dispersión es el número de valores repetidos; en nuestro estudio observamos que pocos estudiantes repiten valores, ninguno repite el del enunciado y cinco repiten los que han puesto (3,2%). Por otro lado, 22% incluye al menos un 50 como posible respuesta en el lanzamiento de las chinchetas (Tabla 5.20). Todos estos futuros profesores tendrían dificultad en comprender la aproximación frecuencial, puesto que todavía esperan algún valor cercano al 50%. Tres estudiantes claramente muestran el sesgo de equiprobabilidad pues dan dos o más valores alrededor del 50%; además de los casos comentados anteriormente, que, admitiendo algo de variabilidad, obtienen un promedio alrededor del 50%.

Tabla 5.20. Frecuencia y porcentaje de aparición de 50 en los conjuntos de 4 datos

Número de veces que aparece 50	Frecuencia	Porcentaje
0	119	75,8
1	35	22,3
2	1	0,6
4	2	1,3
No responde	5	3,2
Total	157	

54% de estudiantes escribe al menos un valor menor que 50 y solo seis (3,8%) dan el contrario al enunciado, es decir, 68 con punta abajo o cercano, éstos tendrían heurística de representatividad. Finalmente, una respuesta (participante G035) mostró falta de comprensión del enunciado y ausencia de dispersión, escribió pares de valores idénticos que suman 25 para cada niño (repartió 100 chinchetas entre los cuatro niños):

17 (con 8 punta abajo)	17 (con 8 punta abajo)	17 (con 8 punta abajo)	17 (con 8 punta abajo)

En nuestra muestra hubo mayor proporción de respuestas correctas y menor de no respuesta y del sesgo de equiprobabilidad que en Green (1983b), Cañizares (1997) y Mohamed (2012), quienes aplicaron un ítem similar, como se describió en los antecedentes (Sección 3.4). Los tres estudios mostraron baja proporción de respuestas correctas (17% entre niños ingleses, 15% entre niños españoles y 31% entre futuros profesores) y alta proporción del sesgo de equiprobabilidad (61% entre niños ingleses, 64% entre niños españoles y 62% entre futuros profesores españoles). Consideramos que nuestra forma de plantear la pregunta permite medir de forma más integral la comprensión del significado frecuencial, pues además de la estimación de la probabilidad observamos la percepción de la variabilidad en el muestreo.

5.5.6. JUEGO EQUITATIVO

Análisis a priori de la tarea

Ítem 6. Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos. Miguel gana un euro si el producto es par. Si el producto es impar Luis gana un euro

a. ¿Te parece que el juego es equitativo? ¿por qué?

Este ítem es habitual en los libros de texto, y similar a uno usado por Azcárate (1995) en su estudio con futuros profesores de educación primaria. Su objetivo es evaluar la comprensión intuitiva y procedimental de juego equitativo, aplicando el significado clásico en un experimento compuesto.

La probabilidad de ganar Miguel es la probabilidad de obtener un producto par, se puede calcular a partir del espacio muestral del experimento aleatorio compuesto (Tabla 5.21) razonando que el producto de dos números pares, o un par y otro impar, es par. La probabilidad de que el producto sea par es *27/36*, esto es *P(gane Miguel)= 27/36* y, la contraria, es la probabilidad de impar o que gane Luis, *P(gane Luis)= 9/36.*

Tabla 5.21. Espacio muestral producto del lanzamiento de dos dados distinguibles

		Número en un dado					
		1	2	3	4	5	6
Número en un dado	1	**(1,1)**	(1,2)	**(1,3)**	(1,4)	**(1,5)**	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	**(3,1)**	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	**(3,5)**	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	**(5,1)**	(5,2)	**(5,3)**	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado clásico *previsión de probabilidad en juegos de azar* (*SPC*). En sus dos partes, la segunda se describe en la Sección 5.6.1, evalúa como contenido primario el procedimiento *analizar diferentes juegos de azar* (*PRC1*), que implica los conceptos de *juego de azar* (*CC1*), *juego equitativo* (*CC4*) y *experimento compuesto, dependencia, independencia* (*CC5*), y como contenido secundario los conceptos de *casos favorables*, *casos posibles* (*CC2*), *probabilidad* (*CC3*) y *espacio muestral* (*CA1*); y las propiedades *equiprobabilidad de* *sucesos elementales* (*PC2*) y *casos favorables: resultados que favorecen* (*PC3*).

Otros objetos matemáticos solo se evalúan en una parte del problema o tienen un rol diferenciado. Esta primera parte involucra otros dos contenidos primarios, los procedimientos *decidir si un juego es equitativo* (*PRC7*) y *asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes* (*PRC8*).

Resultados y discusión

La frecuencia de futuros profesores que consideran el juego equitativo (Tabla 5.22) indica que una mayoría muestran una intuición correcta, pues nueve de cada diez responden en forma correcta que el juego no es equitativo; muy pocos dicen que lo es y ninguno omite esta respuesta. Estos resultados son mejores que los observados por Azcárate (1995), quien propone el mismo juego, 69% contestan en forma correcta, 26% incorrecta y 5% no contestan.

Tabla 5.22. Frecuencias y porcentajes de respuestas a la pregunta sobre si el juego es equitativo

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta (No equitativo)	141	89,8
Incorrecta	16	10,2
Total	157	

Nuestros resultados son mejores que los de Mohamed (2012), quien analiza dos ítems sobre identificación de juego equitativo. En un ítem en contexto de urnas, donde la probabilidad de ganar era igual para los dos jugadores, el 69% acertó la respuesta. En otro, también con dos dados, donde la probabilidad de ganar era desigual, 42% aciertan al identificar un juego no equitativo.

Argumentos para considerar el juego equitativo

Para analizar el conocimiento especializado del concepto de juego equitativo, se clasificaron los argumentos de los futuros profesores en esta pregunta, diferenciando los que hacen referencia a las probabilidades de ganar de cada niño, a los casos favorables y al sesgo de equiprobabilidad.

Probabilidades. Algunos futuros profesores calcularon o aproximaron las probabilidades de ganar para cada niño, reflejando una concepción de juego equitativo consistente con la visión clásica de la probabilidad (Sección 1.4.3). En algunos casos, esta concepción correcta se mezcla con alguna incorrecta, por ejemplo, estimando a la baja la probabilidad de obtener un producto par.

Las estrategias relacionadas con las probabilidades son de dos tipos; en ambos casos llevó a responder en forma correcta. Algunos calculan directamente las probabilidades aplicando la regla de Laplace:

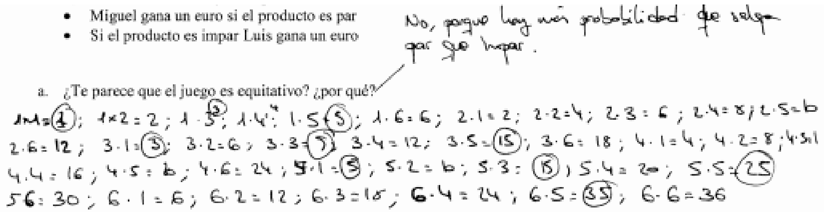
> De las 36 posibilidades que ocurren al multiplicarlas 27 ocasiones es par = 75% de probabilidad
>
> 9 ocasiones es impar =25% de probabilidad (C009).

Otros aciertan en identificar que Miguel tiene ventaja aunque su estimación de la probabilidad es errada, por ejemplo:

> Hay el doble de números pares que de números impares, por lo que Miguel tendría más probabilidad de ganar (A047).

Enumeración del espacio muestral. Algunos futuros profesores enumeran el espacio muestral compuesto, basando su respuesta en el número de casos favorables o en el cálculo de las probabilidades de ganar para cada niño y llegando a la respuesta correcta. Estas respuestas también reflejan una concepción de juego equitativo consistente con la visión clásica de la probabilidad. Se distinguen los siguientes casos:

La mayoría enumera el espacio muestral compuesto y distingue los dados, aunque a veces tienen errores aritméticos, llegando a una probabilidad incorrecta, como A025:



Pocos enumeran el espacio muestral compuesto conformado por sucesos compuestos (resultados pares e impares en cada dado) sin expresar los posibles resultados. Ponen en juego su conocimiento de aritmética y la regla de Laplace, sin hacer explícitas las probabilidades a favor de cada jugador; por ejemplo:

> De 4 fórmulas, par por par, par por impar, impar por par, impar por impar, solo 1 fórmula es la que le va bien a Luis para que gane que es la de impar por impar, mientras que Miguel tiene más posibilidades (C017).

Número de casos favorables. Algunos futuros profesores calcularon el número de casos favorables, sin enumerar el espacio muestral, dando, en general la respuesta correcta. La mayoría escriben en forma explícita, solo el número de casos favorables, para justificar su respuesta. Al igual que en los argumentos basados en la enumeración, se identifican dos concepciones de espacio muestral compuesto según los dados se consideren distinguibles (36 resultados posibles) o no (21 resultados posibles); por ejemplo:

> En los productos hay 24 números pares y 12 impares, por lo que hay el doble de posibilidades de que salga un número par (A026).

Otros evaluados escriben solo la relación de desigualdad que da ventaja a Miguel, poniendo en juego su conocimiento numérico; por ejemplo:

> Un número par, al multiplicar otro número siempre dará par, pero para dar impar es necesario que los dos componentes de la multiplicación sea impar (G048).

Equiprobabilidad. Justifican la respuesta incorrecta con base en que ambos niños tienen igual probabilidad de ganar, omitiendo cualquier cálculo; en general, está ligado a falta de comprensión del experimento compuesto. Por ejemplo:

> Existen los mismos números de pares que de impares, por lo que la cantidad de productos que se pueden dar son las mismas (G032).

Tabla 5.23. Frecuencia y porcentaje de argumentos para justificar si el juego planteado es, o no, equitativo

Argumento	Respuesta correcta Frec.	%	Respuesta incorrecta Frec.	%	Total	%
Probabilidades	58	41,1			58	36,9
Enumeración del espacio muestral	40	28,4			40	25,5
Número de casos favorables	42	29,8	2	12,5	44	28
Equiprobabilidad			13	81,3	13	8,3
No argumentan	1	0,7	1	6,3	2	1,3
Total	141		16		157	

La Tabla 5.23 resume estos argumentos. Observamos que el argumento mayoritario es el basado en la probabilidad, seguido de los casos favorables y de la enumeración. El uso de estos argumentos está asociado al acierto en la respuesta; mientras que el sesgo de equiprobabilidad fue la base para la mayoría de respuestas incorrectas. Nuestros resultados son mejores que los de Azcárate (1995), quien observó argumentos básicamente intuitivos y falta de razonamiento combinatorio: ninguno realiza cálculos de probabilidades, 14% enumeran el espacio muestral completo, 54% se apoyan en criterios de naturaleza aritmética sin identificar el número o la proporción de casos favorables, 23% muestra sesgo de equiprobabilidad, 5% dan argumentos confusos y 3% no argumentan.

5.6. EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO AMPLIADO Y ESPECIALIZADO DE LA PROBABILIDAD

La segunda parte del ítem 6, así como el resto de los ítems que componen el Cuestionario 1 evalúan el conocimiento ampliado de la probabilidad; igual que antes, los argumentos evalúan el conocimiento especializado, y se analizan conjuntamente con las respuestas para facilitar la lectura.

5.6.1. JUEGO EQUITATIVO (ESPERANZA MATEMÁTICA)

Análisis a priori de la tarea

Ítem 6. Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos. Miguel gana un euro si el producto es par. Si el producto es impar Luis gana un euro

b. Si Miguel gana 1 euro cuando el producto de los números de los dos dados es par, ¿Cuántos euros debiera ganar Luis, cuando el producto es impar, para que el juego sea equitativo?

Para dar la respuesta correcta a la segunda parte del ítem 6 se debe igualar la esperanza matemática de la ganancia de cada jugador, esto es:

$$1\ euro \times P(gane\ Miguel) = x\ euros \times P(gane\ Luis)$$

$$1\ euro \times \frac{27}{36} = x\ euros \times \frac{9}{36}$$

$$1\ euro \times 27 = x\ euros \times 9$$

Despejando *x* en la igualdad, se obtiene que Luis debe ganar 3 euros para que el juego sea equitativo. Aunque los futuros profesores no utilicen explícitamente la idea de esperanza matemática, pueden razonar en base a la proporcionalidad inversa.

Esta segunda parte evalúa, además de los contenidos citados en la sección 5.5.6, objetos matemáticos ligados al significado axiomático, como los de *variable aleatoria*, *esperanza matemática* (*CA2*), sus propiedades y procedimientos (Tabla 1.1).

Resultados y discusión

En la Tabla 5.24 se observa que, entre los futuros profesores que contestaron en forma correcta que el juego no es equitativo, la mitad también contestaron en forma correcta la segunda parte, algunos dieron otro valor y muy pocos dieron una respuesta no numérica. Llama la atención la aparente inconsistencia en dos evaluados que consideran equitativo el juego, siguiendo su intuición, y responden que Luis debía ganar 3€ para que fuera equitativo.

Tabla 5.24. Frecuencias y porcentajes de respuestas a las dos preguntas sobre juego equitativo

	Respuesta primera parte					
	No (Correcta)		Sí			
Respuesta segunda parte	Frec.	%	Frec	%	Total	%
Correcta (3 €)	**77**	54,6	2	12,5	79	50,3
Incorrecta (otro valor)	42	29,8	11	68,8	53	33,8
Otra respuesta	3	2,1			3	1,9
No responde	19	13,5	3	18,8	22	14
Total	141		16		157	

La diferencia en las proporciones de respuesta correcta en las dos partes del ítem (89% de respuestas correctas en la primera parte) sugiere que los futuros profesores podrían haber calculado correctamente la probabilidad, pero no son capaces de aplicar la proporcionalidad inversa para establecer el premio.

Nuestros resultados son mejores que los de Mohamed (2012), quien analiza dos ítems similares; 79% aciertan la respuesta al calcular la ganancia que hace equitativo un juego con un dado y desigual probabilidad de ganar para los jugadores, y 11% aciertan el valor de la ganancia que hace equitativo otro juego con dos dados.

Estrategias en la determinación de la apuesta

Para la determinación de la apuesta, encontramos las siguientes estrategias:

Cálculo del valor esperado e igualación de ganancia esperada. Cuando se calcula el valor que debía ganar Luis para conseguir igualdad en la ganancia esperada por ambos niños. Estas respuestas reflejan una concepción correcta de juego equitativo; por ejemplo:

> 3€ porque de cada 36 tiradas Miguel a razón de 1€ ganaría 27€ y Luis a razón de 3€ ganaría 27€ y no 9€ como antes (G013).

Proporcionalidad. Algunos futuros profesores calcularon el valor que debía ganar Luis en forma proporcional inversa a la razón entre las probabilidades (o número de casos a favor) de ganar sin explicitar el valor de la esperanza matemática. Estas respuestas llevan implícita una concepción correcta de juego equitativo, más intuitiva que en la anterior estrategia, con predominio de razonamiento proporcional sobre el probabilístico. Incluso algunos plantean una regla de tres que relaciona ganancias de cada niño con número de casos favorables; por ejemplo C049:

27 – par	27 – 1	$\frac{27x1}{9} = 3$	Si Miguel gana 1€ Luis debe ganar 3€
9 – impar	9 – x		para que sea equitativo

Equiprobabilidad. En esta estrategia encontramos a los futuros profesores que contestaron que Luis debía ganar 1€ en concordancia con su respuesta que el juego era equitativo en la primera parte:

> Miguel ganaría 3 euros y Luis ganaría 3 también, si les tocara todos los números pares e impares (G035).

Otras estrategias. Algunas estrategias minoritarias son confusas o tienen implícito fallos en el concepto de juego equitativo, como asignación del valor de ganancia con base en la diferencia, por ejemplo:

> Si Miguel gana 1€ por cada resultado par, teniendo en cuenta que tiene 15 posibilidades, Luis debería ganar la diferencia entre 15 y 6, que es 9€ (A044).

No argumenta. Algunos futuros profesores escriben únicamente el valor de ganancia de Luis, es decir sin dejar constancia del procedimiento o argumentar la respuesta.

La Tabla 5.25 resume estas estrategias; donde observamos que la más frecuente es aplicar la proporcionalidad; seguida por la no argumentación e igualación de ganancia esperada. Hay una fuerte asociación entre respuesta y estrategia, la mayoría de respuestas correctas corresponde a estrategia correcta y las respuestas incorrectas se debieron más a no argumentación, equiprobabilidad y otras estrategias.

Tabla 5.25. Frecuencia y porcentaje de estrategias para contestar cuánto debería ganar Miguel para que el juego sea equitativo

	Correcta (3€)		Incorrecta (otra o NR)			
Estrategia	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Igualdad de ganancia esperada	17	21,5	3	3,8	20	12,7
Proporcionalidad	45	56,9	21	26,9	66	42,0
Equiprobabilidad	1	1,3	8	10,3	9	5,7
Otras estrategias	2	2,5	16	20,5	18	11,5
No argumenta	14	17,7	30	38,5	44	28,0
Total	79		78		157	

5.6.2. PROBABILIDAD CONDICIONADA: SIGNIFICADO SUBJETIVO

Análisis a priori de la tarea

Ítem 7. Hemos lanzado un dado rojo y otro azul y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro).

Este ítem se adaptó de la investigación de Díaz (2007) y Contreras (2011), para hacerlo más sencillo. Su objetivo es calcular una probabilidad condicional. Denotaremos al suceso condicionante *A* "el producto de los dos números es *12*" y al suceso condicionado *B* "uno de los dos números es *6*". El espacio muestral restringido a la condición es *{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)}*. Los casos favorables al suceso condicionado serán los sucesos en la intersección *{(2,6),(6,2)}*. La equiprobabilidad de las parejas en el espacio muestral producto permite aplicar la regla de Laplace para obtener, $P(A) = 4/36$ y $P(A \cap B) = 2/36$; el cálculo de la probabilidad condicionada sería:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{4/36} = \frac{2}{4}$$

También se obtiene este resultado por enumeración del espacio muestral producto formado por 36 parejas ordenadas equiprobables (Tabla 5.26). Restringiendo luego a la condición dada quedan 4 casos posibles; de los cuáles son subrayados los dos casos favorables; con lo cual, también se obtiene que $P(B|A) = 2/4$.

Tabla 5.26. Espacio muestral del lanzamiento de dos dados distinguibles

		Número en dado rojo					
		1	2	3	4	5	6
Nro. en dado azul	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	**<u>(2,6)</u>**
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	**(3,4)**	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	**(4,3)**	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	**<u>(6,2)</u>**	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

La situación problema del ítem corresponde al significado subjetivo *estudio de sucesos cuya probabilidad puede cambiar por información disponible* (*SPS*); el contenido primario que evalúa corresponde al procedimiento *analizar experimentos donde la probabilidad depende de información adicional* (*PRS1*); los conceptos de *suceso incierto* (*CS1*), *probabilidad condicionada* (*CA2*); y las propiedades *suceso incierto: impredecible aunque se tiene información adicional* (*PS1*) y *probabilidad: condicionada por un sistema de conocimientos* (*PS2*).

Como el contexto de esta situación es un juego de azar también se involucran objetos matemáticos del significado clásico, que se evalúan como contenidos secundarios, *enumerar casos favorables y posibles* (*PRC2*), *diferenciar casos favorables y no favorables* (*PRC3*), *casos favorables, casos posibles* (*CC2*), *experimento compuesto, dependencia, independencia* (*CC5*), , *número de resultados finito y numerable* (*PC1*), *equiprobabilidad de sucesos elementales* (*PC2*) y *casos favorables: resultados que favorecen* (*PC3*).

Resultados y discusión

Los resultados se muestran en la Tabla 5.27, donde observamos que únicamente el 23% respondió en forma correcta, mientras la mayoría calculan bien probabilidades de sucesos que no corresponden a la pregunta formulada; por ejemplo, la probabilidad de la intersección, o de sacar un valor cualquiera en un dado. Otros responden con números que no se pueden identificar como probabilidades; por ejemplo, número mayores que 1, casos favorables, etc. Algunos no realizan una asignación numérica y pocos no responden. Los resultados son consistentes con los de Díaz (2007), con estudiantes de Psicología, y Contreras (2011), estudiantes de Matemáticas y Máster en Secundaria. En todo caso se muestra que los estudiantes tuvieron mucha dificultad en este problema.

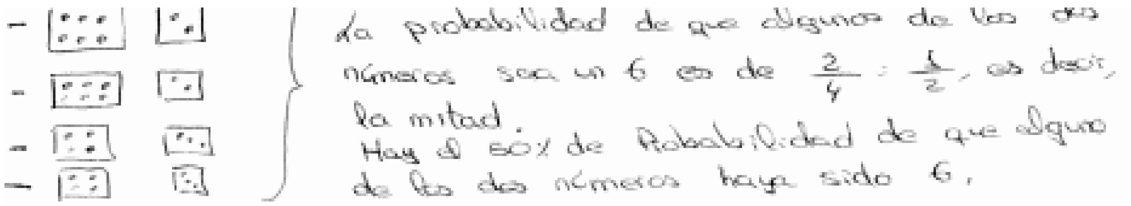
Tabla 5.27. Frecuencia y porcentaje de las respuestas en la tarea de cálculo de probabilidad condicional

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
2/4=0,5 (Correcta)	36	22,9
Calculan correctamente probabilidad de otros sucesos	74	47,1
Otro número	27	17,2
Respuesta no numérica	14	8,9
No responde	9	5,7
Total	157	

Estrategias

Las estrategias empleadas se relacionan con características de razonamiento combinatorio y con cálculo de probabilidades; como se analiza a continuación:

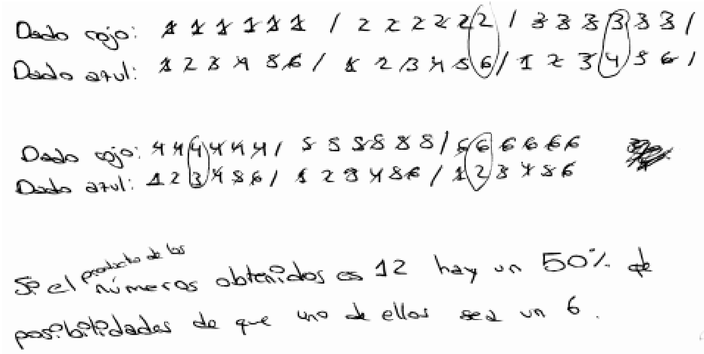
Enumeración del espacio muestral restringido diferenciando los dados, considerado necesario por Totohasina (1992) para calcular la probabilidad condicional. Estos estudiantes interpretan correctamente el enunciado, el experimento compuesto, consideran el orden de los dados y la implicación de la condición. Por ejemplo, C040:



Enumeración del espacio muestral restringido sin diferenciar los dados. Una fuente de dificultad en la probabilidad condicional, que identificó Maury (1986), es no tener en cuenta el orden en los sucesos; este error también se notó en los trabajos de Navarro-Pelayo (1994) y Roa (2000). En nuestro estudio, aparece en un grupo de evaluados, que, no obstante, podrían obtener con esta estrategia la solución correcta, por ejemplo:

6x2=12; 3x4=12 p=1/2=0,5 (A12).

Enumeración del espacio muestral completo. Algunos alumnos escriben los 36 resultados posibles en el lanzamiento de dos dados; esta estrategia puede llevar a respuestas correctas, cuando, una vez formados todos los casos del producto, se separan los posibles para la pregunta del enunciado y de ellos los favorables, por ejemplo el participante C024:


Dado rojo: 1 1 1 1 1 1 / 2 2 2 2 2 2 / 3 3 3 3 3 3 /
Dado azul: 1 2 3 4 5 6 / 1 2 3 4 5 6 / 1 2 3 4 5 6 /

Dado rojo: 4 4 4 4 4 4 / 5 5 5 5 5 5 / 6 6 6 6 6 6
Dado azul: 1 2 3 4 5 6 / 1 2 3 4 5 6 / 1 2 3 4 5 6

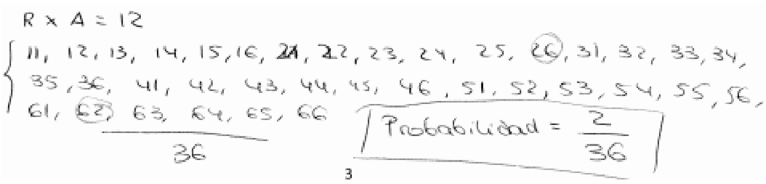
Si el producto de los números obtenidos es 12 hay un 50% de posibilidades de que uno de ellos sea un 6.

Dentro de esta misma categoría, otros tienen dificultades para reconocer los casos favorables o posibles, pues no tienen en cuenta el orden, por ejemplo el participante C049:

> 1/12 porque la única probabilidad que hay de que en uno de los dos dados haya un 6 es 1 de 12 ya que solo hay una forma de multiplicar un n° x por 6 y te salga 12. El número x es el 2, ya que 2x6=12.

Cálculo de otra probabilidad no pedida en el enunciado. Varios estudiantes hacen una interpretación incorrecta del enunciado llegando a una respuesta incorrecta. Algunos casos son los siguientes:

- *Probabilidad conjunta de obtener 2 y 6:* Se entiende la pregunta como probabilidad de sacar un 6 y que el producto sea 12; es decir se confunde la probabilidad condicional y conjunta, error descrito por Totohasina (1992), Díaz (2007) y Contreras (2011). Algunos además no tienen en cuenta el orden; un ejemplo de cálculo correcto de la probabilidad conjunta es la respuesta de C019:


R x A = 12
{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66
36
Probabilidad = 2/36

- *Obtener suma 12.* Algunos participantes interpretan que la variable de interés es la suma en lugar del producto; la mitad de éstos calcula bien la probabilidad condicional, por ejemplo el participante G037:

> 100% porque para llegar a 12 entre dos dados, los dos dados tienen que haber sacado un 6.

- *Cálculo de probabilidad simple.* Algunos participantes no comprenden la composición del experimento aleatorio y descomponen el experimento compuesto en dos experimentos simples, por ejemplo:

> 1/6 porque sabemos que por ejemplo, en el dado rojo es el n° 2 y en el azul el 6, por lo que del dado azul es 1 probabilidad de 6 caras que tiene el dado (C043).

Otras estrategias. Otros futuros profesores confunden probabilidad con posibilidades; tienen una concepción errada de impredecibilidad, pues la asocian con imposibilidad de cálculo de la probabilidad, una forma del "enfoque en el resultado"

(Konold, 1989); son incapaces de calcular la probabilidad o bien no se identifica la estrategia.

Tabla 5.28. Frecuencias de argumentos y porcentaje en relación a la respuesta correcta

	Respuesta correcta					
	Sí		No			
Estrategia	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Enumeración del espacio muestral restringido (diferenciando dados)	22	61,1	17	14,0	39	24,8
Enumeración del espacio muestral completo	2	5,6	7	5,8	9	5,7
Enumeración del espacio muestral restringido (sin diferenciar dados)	9	25,0	10	8,3	19	12,1
Obtener suma 12, en lugar de producto			17	14,0	17	10,8
Confusión con la conjunta			16	13,2	16	10,2
Cálculo de probabilidad simple			20	16,5	20	12,7
Criterio confuso o sin respuesta	3	8,3	34	27,1	37	23,6
Total	36		121		157	

En la Tabla 5.28 presentamos estas estrategias, observando de nuevo la fuerte relación de respuesta y estrategia. Las respuestas correctas se obtienen principalmente mediante enumeración, en especial del espacio muestral reducido, aunque también algunas con una estrategia incorrecta, como es enumerar sin tener en cuenta el orden. Entre las respuestas incorrectas, las tres estrategias principales se pueden asociar a una mala interpretación del enunciado: operar con la suma en lugar del producto, confusión con la conjunta y cálculo de probabilidades simples.

La proporción de respuesta correcta de nuestros participantes es menor que la observada en Díaz (2007), 34% en 414 estudiantes españoles de psicología, y en Contreras (2011), 57% en 196 futuros profesores de matemáticas. Estos resultados son consistentes con lo esperado, nuestros futuros profesores han recibido menos formación en probabilidad. Mohamed (2012) obtuvo una proporción de acierto más alta (89%) en un ítem de probabilidad condicional en contexto de muestreo sin reemplazamiento, modelo de urnas con bolas de tres colores. Esta diferencia puede estar relacionada con el formato de la pregunta, en Mohamed (2012) los ítems son de selección múltiple y en nuestro estudio son problemas abiertos. Por otro lado, en Mohamed (2012) hay dependencia estadística relacionada con el muestreo secuencial y en nuestro estudio hay independencia relacionada con la simultaneidad del lanzamiento.

Por otro lado, comparando este ítem con el 6 (Secciones 5.5.6 y 5.6.1) notamos que, para el mismo experimento aleatorio compuesto, el concepto de juego equitativo es mejor comprendido que el de probabilidad condicional. En este ítem la respuesta correcta fue solo de un 23%, mientras en el otro el cálculo de la ganancia para que el juego sea equitativo tuvo 50% de acierto y la identificación de juego equitativo 89%.

5.6.3. SESGO DE EQUIPROBABILIDAD EN EXPERIMENTO COMPUESTO

Análisis a priori de la tarea

Ítem 8. Cuando lanzamos tres dados simultáneamente

a. ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra? Marca la respuesta correcta:

- Obtener un 5, un 2 y un 3_____
- Obtener dos veces un 5 y una vez el 3____

- Obtener tres veces el 5____
- Todos estos resultados son igualmente probables____

b. ¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos? ¿Cuál o cuáles?

Este ítem fue tomado de Serrano (1996), quien lo adaptó de investigaciones de Lecoutre. El objetivo es identificar el sesgo de equiprobabilidad en un experimento compuesto de tres etapas. El evaluado debe reconocer el espacio muestral y las probabilidades (o los casos favorables) de cada suceso, y utilizar razonamiento combinatorio.

Los casos favorables al primer suceso corresponderían a tripletas en las cuales se obtienen un 5, un 3 y un 2; el suceso compuesto contiene $3!=1\times2\times3=6$ sucesos elementales: {(*5,3,2*), (*5,2,3*), (*3,2,5*), (*3,5,2*), (*2,5,3*), (*2,3,5*)}. Aplicando la regla de Laplace, debido a que todas las tripletas son equiprobables, la probabilidad de este suceso es 6/216. Los casos favorables al segundo suceso corresponderían a tripletas en las cuales se obtienen dos veces 5 y un 3; el suceso compuesto contiene $3!/2!= 3$ sucesos elementales: {(*5,3,5*), (*5,5,3*), (*3,5,5*)}. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de este suceso es 3/216. El tercer suceso sólo tiene un suceso elemental: {(*5,5,5*)} y su probabilidad es 1/216.

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado clásico *previsión de probabilidad en juegos de azar* (*SPC*); evalúa como contenido primario los procedimientos *enumerar o contar casos favorables y posibles* (*PRC2*), *diferenciar casos favorables y no favorables* (*PRC3*) e implica conceptos de *casos favorables, casos posibles* (*CC2*) y *experimento compuesto, dependencia, independencia* (*CC5*), así como las propiedades *casos favorables: resultados que favorecen* (*PC3*).

Como contenidos secundarios evalúa los procedimientos *distinguir sucesos elementales equiprobables* (*PRC4*) y *asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes* (*PRC8*); que implica el concepto *probabilidad* (*CC3*). También se evalúan objetos relacionados con el significado clásico: el concepto de *juego de azar* (*CC1*) y la propiedad *equiprobabilidad de sucesos elementales* (*PC2*).

Resultados y discusión

Sólo la tercera parte de los participantes da una respuesta correcta a la primera pregunta, mientras dos tercios se inclinan por la equiprobabilidad, la tasa de no respuesta es muy baja y ninguno eligió la opción dos 5 y un 3 (Tabla 5.30). Estos resultados son mejores que los observados en Serrano (1996) quien observó 23% de respuesta correcta y alta presencia de enfoque en el resultado (44%), interpretación dada a la respuesta "es imposible saberlo" (una de las opciones en la pregunta original).

En la segunda parte, la mitad de los evaluados (Tabla 5.29) se inclina por la equiprobabilidad cuando se le pregunta por el resultado más fácil de ocurrir, 39,5% responden en forma correcta. Estos resultados son peores que los de Serrano (1996), 45% responden en forma correcta y 36% muestran sesgo de equiprobabilidad.

Tabla 5.29. Frecuencias conjuntas de las respuestas en el ítem de sesgo de equiprobabilidad

	Más probable (Primera parte)							
Menos probable	Un 5, un 2, un 3 (Correcta)		Equiprobable		Otra respuesta			
(Segunda parte)	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Tres 5 (Correcta)	43	86,0	19	18,3			62	39,5
Equiprobable	1	2,0	77	74,0			78	49,7
Otra respuesta	4	8,0	1	1,0	1	33,3	6	4,8
En blanco	2	4,0	7	6,7	2	66,6	11	7
Total	50		104		3		157	

Entre los que respondieron en forma correcta a la primera pregunta la mayoría también lo hizo a la segunda, pocos respondieron en forma incorrecta pero coherente a las dos preguntas; el resto fueron incoherentes o no contestaron. Entre los que respondieron con equiprobabilidad a la primera pregunta, la mayoría permaneció en la equiprobabilidad. Este análisis conjunto sugiere tres grupos: los que responden en forma correcta a ambas preguntas (27,4%), los que son consistentes en contestar con equiprobabilidad (49%) y los que responden en forma contradictoria (13,4%).

5.6.4. MUESTREO

Análisis a priori de la tarea

Ítem 9. En una alberca hay peces, pero su dueño no sabe cuántos. Toma 200 peces y les pone una marca; los devuelve a la alberca, donde se mezclan con el resto. Al día siguiente, el dueño toma 250 peces de la alberca, y encuentra que 25 de ellos están marcados y el resto no.
a. ¿Cuál es el número aproximado de peces en la alberca?
b. Si el dueño saca ahora 100 peces más de la alberca, ¿cuántos aproximadamente estarán marcados?

Este ítem fue adaptado de un experimento de enseñanza de Fishbein y Gazit (1984) con niños de 10 a 13 años. La probabilidad de un pez marcado en el estanque, *p*, se estima a partir de la muestra de *250* peces, esto es $p \approx \frac{25}{250} = 0{,}1$. La estimación se puede considerar fiable pues la muestra observada es grande.

Para la primera pregunta, el total se puede aproximar teniendo en cuenta que la probabilidad teórica es la fracción de peces marcados con respecto al total de peces en la alberca, esto es: $p = \frac{200}{N}$, como p es aproximadamente 0,1 se puede despejar N y aproximar el total de peces en la alberca $N \approx \frac{200}{0{,}1} = 2000$.

Para la segunda pregunta, el resultado de un nuevo muestreo se puede aproximar teniendo en cuenta que la frecuencia relativa de una muestra se espera sea cercana a la probabilidad teórica. La frecuencia relativa de peces marcados al sacar una nueva muestra de 100 peces es $f_r = \frac{y}{100}$, como f_r es aproximadamente 0,1 se puede despejar y aproximar el número de peces marcados en la nueva muestra, $y \approx 0{,}1 \times 100 = 10$.

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado frecuencial *previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados* (*SPF*). Sus dos partes evalúan como contenidos primarios la propiedad *los atributos pueden o no ser equiprobables* (*PF2*) y los procedimientos *enumerar o discriminar atributos* (*PRF1*) y *estimar el valor teórico de la probabilidad a partir de ensayos repetidos* (*PRF5*), que implica el concepto de *valor estimado de la probabilidad* (*CF4*).

Como contenidos secundarios, ambas partes evalúan el procedimiento *calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos* (*PRF2*) que implica el concepto de *frecuencia (absoluta, relativa)* (*C3*), y las propiedades *probabilidad: valor objetivo hipotético, estimable* (*PF3*) y *el valor estimado de la probabilidad varía en cada serie de N ensayos* (*PF7*).

En la primera pregunta también se evalúa como contenido primario la propiedad *colectivo: semejantes que difieren en atributos observables* (*PF1*) que implica el concepto de *colectivo (población), atributos* (*CF1*). Estos dos objetos matemáticos forman parte del contenido secundario en la segunda pregunta, que también evalúa el concepto de *ensayo, ensayos repetidos* (*CF2*) como contenido primario.

Resultados y discusión

En la Tabla 5.30 se resumen las respuestas a la primera pregunta, la tasa de no respuesta es relativamente alta, la quinta parte responde que hay 2000 peces en la alberca, en tanto la mayoría dan otros valores. En la distribución de respuestas (Figura 5.5) se observa una tendencia a valores inferiores a 500.

Tabla 5.30. Frecuencia y porcentaje de respuestas a primera pregunta

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
2000 (Correcta)	32	20,4
Otro número	103	65,6
Otra respuesta	8	5,1
En blanco	14	8,9
Total	157	

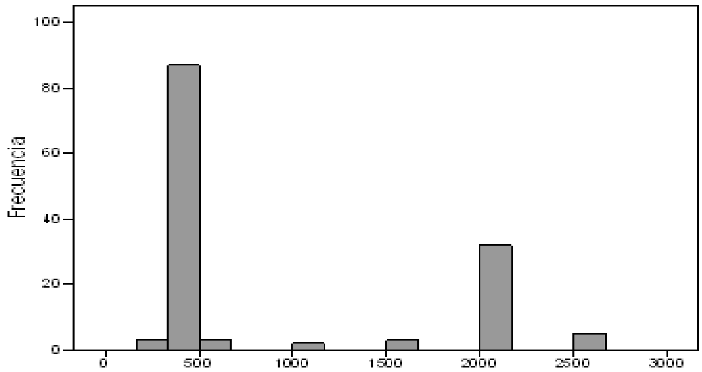


Figura 5.5. Número de peces estimados en la alberca

Nuestros resultados son peores que los observados por Fishbein y Gazit (1984), la proporción de acierto de los niños aumentó con la edad (1% a los 10 años, 23% a los 11, 44% a los 12), es decir, nuestros futuros profesores mostraron una proporción de acierto cercana a la de niños de 11 años con instrucción en probabilidad. Consideramos que este resultado se puede deber a falta de formación en estimación y falta de razonamiento proporcional.

Los resultados de la segunda parte (Tabla 5.31) son mejores, pues aumenta la proporción de respuesta correcta (consideramos válido 35 porque algunos interpretaron que se preguntaba por la suma de las dos muestras extraídas). Sin embargo, también aumenta la tasa de no respuesta y la proporción de respuestas no numéricas o en porcentajes. En la Figura 5.6 se observa que una mayoría da valores cercanos al correcto y sólo algunos extremadamente altos. Cabe notar que solo 17% de los participantes respondieron en forma correcta a ambas preguntas.

Tabla 5.31. Frecuencia y porcentaje de respuestas a segunda pregunta

Respuesta	Frec.	%
10 o 35 (Correcta)	85	54,1
Otro número	28	17,8
Otra respuesta	17	10,8
En blanco	27	17,2
Total	157	

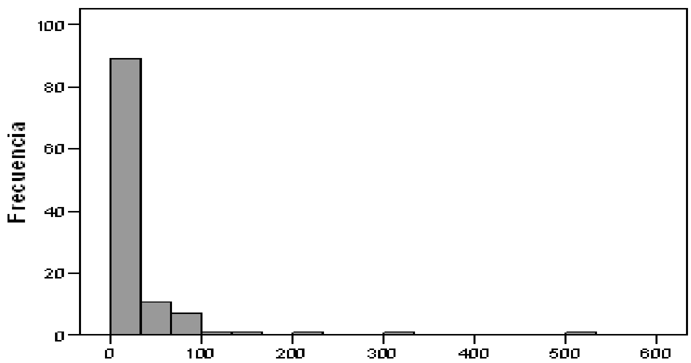


Figura 5.6. Número de peces marcados estimados en la segunda muestra

Estrategias

A continuación describimos las estrategias identificadas en las respuestas de los futuros profesores.

Razonamiento proporcional. La comprensión de ambas partes de la tarea como situaciones proporcionales (comprensión del concepto de muestra y buen razonamiento proporcional) en general, conlleva a respuestas correctas. Algunos incluso expresan su razonamiento proporcional sin el uso de razones o proporciones, combinando lenguaje verbal con multiplicación o regla de tres, por ejemplo:

> Parte a: Si por cada 25 marcados hay 225 sin marcar pues 225 x8=1800 sin marcar, más los marcados que son 200 → 1800+200=2000
>
> Parte b: Pues si 225 -25 / 100 – x $x = \frac{100\times25}{225} = 11'11 \cong 11$ peces marcados (G012)

Operaciones aditivas. La comprensión de la tarea como una unión de sucesos conlleva a operaciones de suma (o suma y resta) entre los valores del enunciado; el concepto de muestra está ausente, los datos se asumen como totales. Entre ellos encontramos dos casos identificados por Fishbein y Gazit (1984). En primer lugar, algunos evaluados suman el número de peces en cada conjunto y restan los de la intersección, concluyen que en la alberca hay 425 peces; aplicando una unión de sucesos no excluyentes, por ejemplo:

> 250-25 =225 aún no están marcados. Si anteriormente marcó 200 peces; pues habrá 425 (G017)

Otros sumaron el número de peces en cada conjunto, llegando a que en la alberca hay 450 peces; considerando la unión de sucesos excluyentes, no tiene en cuenta que algunos peces tienen las dos características, por ejemplo:

200+250=450 (C035)

No se identifica estrategia (respuesta ciega). Algunos participantes escriben la respuesta sin justificarla o mostrar pasos que permitan identificar la estrategia seguida.

Estrategias minoritarias. Uno o dos evaluados muestran alguna de las siguientes estrategias: sesgo de equiprobabilidad, argumentos confusos, fallo en la interpretación del enunciado, o se basan en la impredecibilidad para no dar una respuesta numérica.

Tabla 5.32. Frecuencias y porcentaje de estrategias con respecto a la estimación del total

	2000 (Correcta)		Incorrecta o NR			
Estrategia	Frec	%	Frec	%	Total	%
Razonamiento proporcional	16	50,0	2	1,6	18	11,5
Razonamiento proporcional (uso de regla de tres)	8	25,0			8	5,1
Aditivo			44	35,2	46	29,3
Respuesta ciega	8	25,0	61	48,8	68	43,3
Otra estrategia			2	1,6	2	1,3
No responde			14	11,2	15	9,5
Total	32		125		157	

En la Tabla 5.32 se cruzan respuestas y estrategias en la primera pregunta. En general, se observa prevalencia de respuestas ciegas, seguida de estrategias aditivas y razonamiento proporcional, incluyendo quienes aplican de regla de tres (5%). Entre las respuestas correctas, la mitad corresponden al uso de relaciones proporcionales, el resto provienen por igual de uso de regla de tres y respuestas ciegas. Entre las respuestas incorrectas, la mitad corresponden a respuestas ciegas, pocas a otros razonamientos y las demás a estrategias aditivas. Estos resultados son mejores que los observados por Fishbein y Gazit (1984), cuyos niños usaron generalmente procedimientos aditivos: llegando a que en la alberca hay 425 peces (41% a los 10, 36% a los 11, 36% a los 12), 450 peces (11% a los 10, 7% a los 11, ninguno a los 12) o 475 peces (7% a los 10, ninguno a los 11 o a los 13).

La Tabla 5.33 cruza las respuestas y estrategias en la segunda pregunta. En general se observa una disminución de respuestas ciegas y más razonamiento proporcional que en la pregunta anterior, en particular aumentó el uso de regla de tres.

Tabla 5.33. Frecuencias y porcentaje de estrategias en la estimación de una segunda muestra

	10 o 35 (Correcta)		Incorrecta o NR			
Estrategia	Frec	%	Frec	%	Total	%
Razonamiento proporcional	17	20	4	5,5	21	13,4
Razonamiento proporcional (uso de regla de tres)	38	44,7	10	13,8	48	30,6
Respuesta ciega	30	35,3	26	36,1	56	35,7
Otra estrategia			5	6,9	5	3,2
No responde			27	37,5	27	17,2
Total	85		72		157	

Entre las respuestas correctas, la mayoría corresponden al uso de regla de tres, las demás al uso de relaciones proporcionales y a respuestas ciegas. Entre las respuestas incorrectas, la mayoría corresponden a respuestas ciegas, el resto a estrategias aditivas y al uso de relaciones proporcionales. Esta segunda pregunta no aparece en la investigación de Fischbein y Gazit (1984).

Estos resultados sugieren que los futuros profesores requieren más instrucción en probabilidad y su vínculo con muestreo para desarrollar la capacidad de contextualizar, uno de los componentes del pensamiento probabilístico (Gal, 2005).

5.6.5. PERCEPCIÓN DE LA ALEATORIEDAD

Análisis a priori de la tarea

Ítem 10. El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas una moneda 150 veces, y que apuntaran cada vez si salía cara ó cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
01010011100110101100101100101100100101110110011011
01010010110010101100010011010110011101110101100011
Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
11100000001000101001000001000110001010000000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda, sino que inventó los resultados

a. ¿Qué niña ha hecho trampas?

b. ¿Por qué crees que ha sido ella?

Este ítem se tomó del cuestionario de Green (1983a), habiendo sido también utilizada por Cañizares (1997), y es semejante a otras utilizadas en las investigaciones sobre percepción de la aleatoriedad en sujetos adultos. Los resultados obtenidos se han publicado en Batanero, Gómez, Serrano y Contreras (2012) y Batanero, Gómez, Contreras y Gea (2014).

Una estrategia para resolverlo (Batanero, 2011), es contar el número de caras de cada secuencia. Comparando con el número esperado en 150 lanzamientos de una moneda equilibrada (variable aleatoria Binomial *B(150, 0,5),* con media igual a 75 caras y desviación típica 6,12), se observa que no hay coincidencia con el número de caras en ninguna de las secuencias (Tabla 5.34). Un contraste Chi-cuadrado de bondad de ajuste permite evaluar si la diferencia entre el valor observado y esperado del número de caras en cada caso se ajusta a la variabilidad propia de un fenómeno aleatorio.

Tabla 5.34. Frecuencias observadas y teóricas de caras en la tarea propuesta

	Cara	Cruz
Clara	72	78
Luisa	67	83
Teórica	75	75

Si denotamos las frecuencias observadas como (o_i) y las esperadas (e_i), el valor del estadístico sería $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$, que sigue una distribución Chi-cuadrado con *k-1* grados de libertad (*K=2* en este caso), bajo la hipótesis de que los datos provienen de la distribución teórica. La aplicación de este contraste a los datos de la Tabla 5.34 no produce resultados estadísticamente significativos; en la secuencia de Clara $\chi^2_{obs}=0{,}24$, $p=0{,}6$, y en la de Luisa $\chi^2_{obs}=1{,}71$, $p=0{,}19$.

Repitiendo el mismo procedimiento para analizar la secuencia por pares (es decir, como lanzamientos sucesivos de dos monedas) obtenemos la Tabla 5.35. En este caso, el contraste Chi- cuadrado, para la secuencia de Clara es $\chi^2_{obs=}9{,}84$, $p=0{,}02$ (con 3 g.l.), y para la de Luisa $\chi^2_{obs}=4{,}89$, $p=0{,}18$. Puesto que el resultado de Clara es estadísticamente significativo, rechazamos la hipótesis de que su secuencia es aleatoria, con un nivel de significación de *0,02*. La diferencia es todavía más evidente cuando se analizan los datos como lanzamientos sucesivos de tres monedas, en cuyo caso, en la secuencia de Clara $\chi^2_{obs}= 27{,}8$, $p=0{,}0001$ (con 7 g.l.), y en la de Luisa $\chi^2_{obs}=6=6{,}33$, $p=0{,}501$.

Tabla 5.35. Resultados observados y teóricos por parejas en el ítem de percepción de aleatoriedad

	CC	C+	+C	++
Clara	12	30	18	15
Luisa	25	21	12	17
Teórica	19	19	19	19

Aunque los futuros profesores no tienen los conocimientos suficientes para aplicar el contraste Chi- cuadrado, podrían contar la frecuencia de caras y cruces (Tabla 5.34) en las dos secuencias y argumentar su respuesta en base a la diferencia con el valor esperado, al igual que hicieron los niños de la investigaciones de Green (1983a) o Cañizares (1997), respuesta que consideraríamos correcta, para los conocimientos que ellos tienen.

Otros participantes podrían basar sus respuestas en la longitud de la racha más larga, que es de sólo 3 caracteres para Clara y de 9 para Luisa. De acuerdo a Schilling (1990), el valor esperado de la longitud de la racha más larga en *n* repeticiones de un experimento, donde el suceso de interés tiene probabilidad *0,5*, se aproxima a $log_2\, n - 2/3$; en este caso $log_2\,(50) - 2/3=6{,}56\cong 7$, de manera que el resultado de Luisa se acerca más al valor esperado que el de Clara. Sin embargo, Green (1983a) indica que algunos niños eligen precisamente como aleatoria la sucesión de Clara, porque esperan rachas cortas.

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado frecuencial *previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados* (*SPF*); evalúa como contenidos primarios los conceptos de *ensayos repetidos* (*CF2*) y *frecuencia (absoluta, relativa)* (*CF3*), y el procedimiento *reflexionar sobre fiabilidad* (*PRF8*), que implica las propiedades *el valor estimado de la probabilidad varía en cada serie de N ensayos* (*PF7*) y *tiende a estabilizarse* (*PF6*). Como contenidos secundarios evalúa la propiedad *la fiabilidad de la estimación aumenta con N* (*PF5*), el procedimiento *calcular frecuencias relativas a partir de observaciones o datos* (*PRF2*) y el concepto *variable aleatoria* (*CA2*) y algunas de sus propiedades (Tabla 1.1).

Resultados y discusión

En la Tabla 5.36 se presenta la frecuencia de estudiantes que consideran que Clara, o Luisa, hace trampas, observamos que la mayoría responde de forma incorrecta (Luisa hizo trampas), 26,8% de ellos muestra una intuición correcta, y el resto no responde o indica que ninguna niña hace trampas. Los resultados son peores que los de estudios anteriores, pues 34% de niños ingleses entre 11 y 16 en el estudio de Green (1983a) y 29% de niños españoles entre 10 y 14 años en el de Cañizares (1997) indicaron que Clara hizo trampas. Las intuiciones parecen más acertadas en secuencias más cortas; Batanero y Serrano (1999) usan secuencias de 40 lanzamientos de una moneda, dos aleatorias y dos no, las aleatorias obtienen secuencias correctamente identificadas por 54% y 59% de los estudiantes, y las no aleatorias por 40% y 64%.

Tabla 5.36. Frecuencia y porcentaje de respuestas a la pregunta ¿qué niña hace trampas?

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Clara (Correcta)	42	26,8
Luisa	89	56,7
No sabe	17	10,8
Ninguna de las dos	1	0,6
No responde	8	5,1
Total	157	

Argumentos

Para el análisis del conocimiento especializado del concepto de aleatoriedad, se clasificaron los argumentos de los futuros profesores, discriminando en las categorías que se indican a continuación.

Frecuencia de caras: Algunos futuros profesores contaron las frecuencias de caras en las dos secuencias, y las compararon con la teórica (75 caras), reflejando, de acuerdo a Serrano (1996), una concepción de la aleatoriedad consistente con la visión frecuencial de la probabilidad. Por un lado, manifiestan la idea de convergencia; por otro lado, han realizado un proceso de inferencia informal (Batanero, 2011), pues han usado un modelo matemático (número esperado de caras) comparando con sus datos para rechazar o aceptar la hipótesis de aleatoriedad de cada secuencia. A veces esta concepción correcta se mezcla con alguna incorrecta, por ejemplo, estimando a la baja la variabilidad de un experimento aleatorio. Los argumentos relacionados con las frecuencias son de dos tipos.

Frecuencias muy alejadas del valor teórico. Se comparan las frecuencias observadas y esperadas, indicando que hay demasiada diferencia entre ellas. Si el participante considera que es Clara quien hace trampas, usando este argumento, se reconoce la variabilidad inherente a un proceso aleatorio, que es una capacidad constituyente del razonamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Si, por el contrario, indica que Luisa hace trampas, este argumento indica una concepción incorrecta de la aleatoriedad, pues no percibe suficientemente la variabilidad inherente a una secuencia aleatoria, como el siguiente ejemplo, en el que, sin embargo, se muestran concepciones adecuadas de la equiprobabilidad de resultados, convergencia y valor esperado:

> Luisa hizo trampa porque la probabilidad al lanzar una moneda de que salga cara o cruz es del 50%. Por tanto en 150 lanzamientos estimaríamos los valores más cercanos a la media (75) y en este caso es 78 el valor más cercano (A039).

Frecuencias muy próximas al valor teórico. Si el argumento se refiere a Clara, indican que son demasiado próximas para lo que esperarían en un procedimiento aleatorio, reconociendo la variabilidad aleatoria.

En otros casos, se usa para rechazar la secuencia de Luisa, ya que se espera mayor proximidad con el valor teórico, incluso coincidencia, mostrando una concepción incorrecta de la aleatoriedad, como en el siguiente ejemplo:

> Luisa hizo trampa porque si los niños lanzan una moneda 150 veces y solo hay dos posibilidades, tienen que obtener cada lado más o menos 75 veces. Solo Clara tiene este resultado pero Luisa no (G051).

Longitud de las rachas. Otros futuros profesores han analizado la longitud de las rachas, obteniéndose dos argumentos diferenciados:

Rachas largas. Se argumenta la existencia de rachas largas para rechazar la secuencia como aleatoria; se corresponde con la *recencia negativa*, una forma de la *falacia del jugador,* que espera un cambio en el resultado después de varias repeticiones. Este razonamiento también apareció en el trabajo de Serrano (1996), quien sugiere que indica una comprensión incorrecta de la independencia de los ensayos repetidos.

Un sujeto argumenta la falta de rachas largas, para rechazar la secuencia de Clara como aleatoria, mostrando una buena percepción de la independencia de ensayos:

> Clara hace trampa porque aparece de forma más aleatoria, alternando los "0" y los "1", en cambio lo de Luisa parece más real ya que hay más continuidad de resultados muchos "0" y "1" seguidos (C017).

Rachas cortas. Otros sugieren que las rachas de una de las secuencias (Clara) son demasiado cortas para un proceso aleatorio, lo que indica una buena percepción de la independencia:

> Clara hace trampa porque en su grupo de resultados no hay más de tres resultados iguales seguidos, y puede haber más de tres resultados iguales seguidos porque hay la misma probabilidad de que salga una cruz o una cara (A027).

Existencia de un patrón: La existencia o no de un patrón en la secuencia sirve a algunos participantes para justificar quien hace trampas. También hemos diferenciado dos tipos de argumento:

Existe un patrón en la secuencia. Se hace referencia al orden en que van apareciendo las caras y cruces en la secuencia, que parece muy regular. Para algunos, la regularidad en el patrón de alternancias es un indicativo de falta de aleatoriedad (Clara haría trampas), lo que indica una concepción correcta. Dichos participantes asociarían la aleatoriedad con ausencia de modelo o patrón, una visión próxima a la de von Mises (1952/1928), para quien una secuencia es aleatoria si es imposible encontrar en ella patrones predecibles y no existe un algoritmo que permita generarla. Estos futuros profesores tienen una idea parcialmente correcta; sin embargo, en la secuencia aleatoria se pueden identificar una multitud de modelos, por ejemplo la distribución Binomial o geométrica, por lo que la aleatoriedad podría interpretarse igualmente como multiplicidad de modelos (Serrano, 1996).

Para otros, la alternancia de los dos valores debe darse en experimentos con resultados equiprobables (Luisa haría trampas), este razonamiento indica *enfoque en el resultado* (Konold, 1989) y pobre comprensión del significado frecuencial. Una respuesta en esta categoría es:

> Luisa hace trampa porque sus resultados se repiten mucho durante todas las veces, es decir, por ejemplo "cruz" le sale muchas veces, creo que hay más probabilidad que salga también cara, que se igualen tanto cara como cruz (C006).

La secuencia no sigue un patrón. Un participante usa el argumento contrario al anterior, rechazando la aleatoriedad, lo que indicaría una concepción incorrecta:

> Luisa hizo trampa porque apenas se intercalan valores de distinto valor, es decir, que si tenemos una probabilidad del 50% es más posible que tanto cara como cruz se intercalen de forma más sucesiva (A029).

Impredecibilidad. La comprensión del carácter impredecible de un resultado particular en un proceso aleatorio es fundamental en la comprensión de la aleatoriedad, pero también la de la posibilidad de predicción del conjunto de resultados (variabilidad local y regularidad global). Sin embargo, algunos participantes confunden el resultado impredecible con imposibilidad de predecir las frecuencias de los diferentes resultados en una serie de ensayos. Serrano (1996) relaciona este argumento con el *enfoque en el resultado*, consistente en interpretar un enunciado de probabilidad en forma no probabilística (Konold, 1989), como el siguiente caso:

> No sabe quien hizo trampa porque al igual que una niña lanzó la moneda y de forma aleatoria se obtienen los resultados, con la chica que se los inventó ocurre lo mismo, no puede comprobarse porque lanzar una moneda es un caso aleatorio que no se puede comprobar (A005).

Otros argumentos. Otras justificaciones de menor frecuencia son confusas, se refieren a la equiprobabilidad de resultados y por tanto mostrarían, según Batanero y Serrano (1999) una concepción de aleatoriedad ligada al enfoque clásico de la probabilidad o expresan creencias personales poco justificadas.

En la Tabla 5.37 se cruza la respuesta sobre qué niña hizo trampas con el argumento que la apoya. Los argumentos para indicar que Clara hace trampas se relacionan principalmente con la existencia de un patrón o rachas demasiado cortas, e indicarían en los dos casos concepciones correctas de la aleatoriedad. Los participantes que indica que Luisa hace trampas se basan primordialmente en su racha más larga, indicando una comprensión incorrecta de la independencia de ensayos sucesivos. Otro porcentaje apreciable espera frecuencias observadas más próximas a las esperadas, lo que sugiere falta de percepción de la variabilidad inherente a la aleatoriedad.

La mayoría de los futuros profesores da argumentos erróneos para apoyar que Luisa hace trampas, el 27% da argumentos correctos para apoyar que Clara hace trampas y el resto no es capaz de detectar cuál secuencia es no aleatoria, o no da un argumento consistente. Este porcentaje es muy próximo al obtenido en investigaciones previas, ya que 22% de los niños ingleses (Green, 1983a) así como 29% de los niños españoles (Cañizares, 1997) proporcionan argumentos correctos. Una diferencia es que la ausencia de argumentos fue mayor en los niños (14% de los ingleses y 30% de los españoles), lo que indica una mayor capacidad de argumentación entre los futuros profesores.

Tabla 5.37. Frecuencias de argumentos y porcentaje en relación a qué niña hace trampas

	Niña que hace trampas							
	Clara		Luisa		Otra			
Argumento	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Frecuencias muy diferentes	1	2,4	5	5,6			6	3,8
Frecuencias muy próximas	3	7,1	19	21,3			22	14,0
Rachas largas	1	2,4	51	57,3			52	33,1
Rachas cortas	12	28,6					12	7,6
Existencia de un patrón	21	50,0	7	7,9			28	17,8
No existe patrón			1	1,1			1	0,6
Impredecibilidad					15	57,7	8	5,1
Otros argumentos	4	9,5	5	5,6	3	11,5	19	12,1
No responden			1	1,1	8	30,8	9	5,7
Total	42		89		26		157	

5.6.6. HEURÍSTICA DE REPRESENTATIVIDAD

Análisis a priori de la tarea

Ítem 11. En la maternidad de una ciudad realizan un estudio para ver el número de recién nacidos que son hombres o mujeres.

a. Marca la respuesta que consideres correcta:
   - Es más probable que entre los próximos diez nacimientos ocho o más sean hombres____
   - Es más probable que entre los próximos cien nacimientos ochenta o más sean hombres____
   - Las dos cosas anteriores son igual de probables_____

   Razona tu respuesta:

b. Marca la respuesta que consideres correcta para los siguientes diez nacimientos
   - la fracción de chicos será mayor o igual a 7/10_____
   - la fracción de chicos será menor o igual a 3/10______
   - la fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10_____
   - las tres cosas son igual de probables____

   Razona tu respuesta:

Este ítem de Green (1983a), también usado por Serrano (1996), es una versión del problema de la maternidad, original de Tversky y Kahneman (1974). La primera parte evalúa la *insensibilidad al tamaño de la muestra*, una forma de la heurística de representatividad. La primera opción es más probable que la segunda, debido al efecto del tamaño muestral sobre la fluctuación del muestreo. El número de hombres puede oscilar alrededor del 50%, debido al carácter aleatorio del fenómeno, y es más fácil obtener 8 de 10 (8 se aparta poco de 5) que 80 de 100 (80 se aparta demasiado de 50).

Desde un punto de vista formal, el número X de hombres nacidos en los siguientes 10 nacimientos sigue una distribución Binomial *(10, 0,5)* y el número Y de hombres nacidos en los siguientes 100 nacimientos sigue una Binomial *(100, 0,5)*. La desviación típica de una variable con distribución Binomial está dada por la fórmula $\sqrt{np(1-p)}$; en este caso, la desviación de X es cercana a 1,6 y la de Y es 5. Es de notar que, en X, 8 está a solo 3 unidades (2 desviaciones típicas) del valor central; mientras que, en Y, 80 está a 30 unidades (6 desviaciones típicas) por lo que la probabilidad de tomar este valor o uno mayor es casi nula.

La segunda parte del ítem evalúa *intuiciones de la convergencia en series cortas*. La tercera opción es la respuesta correcta, pues en la distribución Binomial (*10, 0,5*); la media es 5 y al ser simétrica, los valores más probables son los centrales.

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado frecuencial *previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados* (*SPF*); las dos partes evalúan como contenido primario los conceptos *ensayos repetidos* (*CF2*) y *frecuencia (absoluta, relativa)* (*CF3*) y los procedimientos *reconocer el carácter aproximado de la estimación* (*PRF6*) y *reflexionar sobre fiabilidad* (*PRF8*). Como contenidos secundarios común a ambas partes se evalúan el concepto de *valor estimado de la probabilidad* (*CF4*), las propiedades *probabilidad: valor objetivo hipotético, estimable* (*PF3*) y *el valor estimado de la probabilidad varía en cada serie de N ensayos* (*PF7*).

La parte a también evalúa como contenidos primarios las propiedades *la fiabilidad de la estimación aumenta con N* (*PF5*) y *el valor estimado de la probabilidad tiende a estabilizarse* (*PF6*).

Resultados y discusión

Las respuestas a ambas preguntas se resumen en la Tabla 5.38. En la primera pregunta, la mayoría indican que los resultados son equiprobables, lo que, según Tversky y Kahneman (1974), en esta pregunta indica sesgo de representatividad. En la segunda, aumenta la proporción de respuesta correcta, y disminuye ampliamente la de equiprobabilidad.

Entre quienes optaron por considerar los resultados equiprobables en la primera pregunta, la tercera parte se mantiene la respuesta de resultados equiprobables en la segunda (serían alumnos con sesgo de equiprobabilidad, según Serrano, 1996); el resto cambian a la respuesta correcta, no respuesta u otra incorrecta (considerar más probables los valores altos, 7 o más).

Tabla 5.38. Frecuencias y porcentajes de las respuestas en la segunda pregunta de acuerdo con la respuesta en la primera pregunta

	Respuestas primera parte							
	8 de 10 (correcta)		Equiprobables		Otra			
Respuesta segunda parte	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
De 4/10 a 6/10 (correcta)	14	45,2	46	38,0	2	40,0	62	39,5
7/10 o mas	5	16,1	17	14,0	1	20,0	23	14,6
Equiprobables	5	16,1	39	32,2	1	20,0	45	28,7
Otra	4	12,9	8	6,6	1	20,0	13	8,3
No responde	3	9,7	11	9,1			14	8,9
Total	31		121		5		157	

Nuestros resultados son mejores que los de investigaciones previas. El 62% en Serrano (1996) mostraron sesgo en la primera parte y 25% respondieron en forma correcta; en la segunda parte, 39% respondieron en forma correcta y 44% mostraron el sesgo. Azcárate (1995) evaluó la primera parte con un ítem similar, 67% mostraron heurística de representatividad, 10% eligieron la respuesta correcta (muestra pequeña) y 23% la otra opción (muestra grande).

Argumentos primera parte

El análisis del conocimiento especializado de nuestra muestra de futuros profesores con relación a la primera pregunta nos lleva a identificar los siguientes argumentos:

Tamaño de muestra. Algunos evaluados se enfocan en el número de nacimientos; generalmente han elegido la opción correcta y denotan comprensión intuitiva de la ley de los grandes números. Este argumento también aparece en Serrano (1996). Por ejemplo:

> En general, hay el mismo número de hombres y mujeres en nacimientos (50%). Por tanto en 100 nacimientos hay 50 mujeres y 50 hombres. Pero eso solo es válido en grupos medidos grandes. Entonces en grupos pequeños es posible que este número no sea cierto, pero si el grupo medido es más grande es más preciso (G051).

Rango. Muy pocos evaluados hacen mención al rango de valores que puede tomar la variable, que se podría ver como un caso especial del argumento anterior; todos eligen la opción correcta, por ejemplo:

> El rango de la segunda respuesta es mayor, por lo tanto la probabilidad de que salga ochenta hombres es menor (C049).

Heurística de representatividad. Algunos evaluados se enfocan exclusivamente en la fracción simple de la igualdad (o en la proporción), mostrando predominio del razonamiento numérico sobre el razonamiento probabilístico, omisión de parte del enunciado (ocho o más, ochenta o más), e insensibilidad al tamaño de la muestra. Este error apareció también en Azcárate (1995) y Serrano (1996), denominado "ley de los pequeños números" por Kahneman y cols. (1982), es parte de la heurística de representatividad. Un ejemplo observado en nuestro estudio es el siguiente:

> Según ambas respuestas el resultado es el mismo a mayor y a menor escala (8/10; 80/100) así que existe la misma probabilidad (A003).

Argumentos minoritarios: Pocos evaluados muestran razonamiento basado en el sesgo de equiprobabilidad. (Lecoutre, 1992); justificaciones que reconocen la incertidumbre del suceso y no tienen en cuenta los datos del enunciado (también observado en Azcárate, 1995); o explicaciones difíciles de clasificar en alguna tipología, por falta de claridad en la redacción, o en la comprensión del contenido por parte del evaluado, Serrano (1996) interpreta este tipo de respuesta como "actúa por intuición".

La Tabla 5.39 contiene la frecuencia de estos argumentos con relación a la opción elegida. Entre quienes contestaron a esta pregunta, la mayoría de argumentos mostraron la heurística de representatividad con insensibilidad al tamaño de la muestra; otros hicieron referencia al tamaño de las muestras; pocos manifestaron sesgo de equiprobabilidad, se expresaron en forma confusa, expusieron ideas erradas del concepto aleatoriedad o se basaron en el rango de valores de las variables.

La mayoría de las respuestas correctas se basan en argumentos que muestran una adecuada comprensión de la variabilidad en relación con el tamaño de la muestra; pocos provienen de una comprensión parcial de la distribución de probabilidades (aunque no se reconoce la Binomial) con relación al rango de las variables; o muestran heurística de representatividad. La mayoría de las respuestas incorrectas se apoyan en un predominio de razonamiento numérico sobre el probabilístico, heurísticas y sesgos: la mayoría referidas a la heurística de representatividad, el resto al sesgo de equiprobabilidad, a concepciones erradas de la aleatoriedad (creen que la equiprobabilidad es una de sus propiedades) y a la insensibilidad al tamaño de la muestra.

Tabla 5.39. Frecuencias de argumentos y porcentaje en relación a la respuesta correcta

	Respuesta							
	Correcta		Equiprobable		Otra			
Argumento	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Total	%
Tamaño de muestra	25	80,6	2	1,7			27	17,2
Rango	2	6,5					2	1,3
Heurística representatividad	2	6,5	100	83,3	3	50,0	105	66,9
Argumentos minoritarios	2	6,5	18	2,5	1	16,6	21	13,3
No argumenta					2	33,3	2	1,3
Total	31		120		6		157	

Estos resultados son consistentes con los de investigaciones previas (Azcárate, 1995; Serrano, 1996); en los tres casos se observó una buena comprensión entre los evaluados que eligieron la respuesta correcta. Nuestros futuros profesores mostraron mejor argumentación, con mayor razonamiento probabilístico, y menor proporción de argumentación confusa o ausente (12% en Azcárate, 1995; 19% en Serrano, 1996). Con respecto al de Azcárate (1995), hay menor proporción de concepción errada de la aleatoriedad (19%) y sesgo de equiprobabilidad (21%); y mayor proporción de argumentos referidos a variabilidad en muestras pequeñas (9%) y heurística de representatividad (39%). Serrano (1996) describió algunos matices de heurística de representatividad (hay mayor proporción en muestras más grandes y deben nacer más niñas), que no observamos en nuestro estudio, posiblemente por la modificación hecha a la pregunta.

Argumentos segunda parte

En la segunda pregunta se repitieron algunos de los argumentos anteriores y se presentaron otros basados en la cercanía al valor central.

Cercanía al valor central: Consiste en elegir la tercera opción como correcta justificando que son cercanos a la mitad. También fue encontrado por Serrano (1996), quien menciona la dificultad para identificar si los evaluados ponen en juego su conocimiento de la distribución binomial o la heurística de representatividad. Por ejemplo:

> Hay solo dos datos hombre/mujer, se acerca más de la mitad de 10 (G040).

Algunos evaluados muestran una noción correcta de la distribución binomial, justificando la tercera opción como más probable, por ser el *conjunto de valores más cercano al valor esperado*:

> La 3a es más probable ya que en cada nacimiento hay un 50% de probabilidad de que sea hombre o mujer. Así que es más probable que salga un porcentaje próximo en ambos sexos (C052).

La Tabla 5.40 contiene la frecuencia de estos argumentos en el grupo evaluado, con relación a la opción elegida. La diversidad de argumentos que llevan a respuestas correctas e incorrectas, se observa en la ausencia de argumentos mayoritarios; destacamos los cinco con mayor frecuencia: cercanía al valor central, sesgo de equiprobabilidad, heurística de representatividad, rango y concepción sobre aleatoriedad.

Entre las respuestas correctas, la mayoría corresponden a argumentos válidos, estar cerca de la mitad (con o sin mención a las probabilidades) y rango; los demás muestran alguna heurística o sesgo en su razonamiento, en particular representatividad y equiprobabilidad.

Entre las respuestas incorrectas, encontramos argumentos diferenciados: La respuesta "los tres casos son igual de probables" se justifican por sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992); concepciones de la aleatoriedad, estar en la mitad, el rango y la heurística de representatividad. La otra respuesta incorrecta ("7/10 o más", "las dos primeras", "ninguna") se justifica en su mayoría por otros argumentos, y confusión con la primera parte, los evaluados asumieron que la segunda situación dependía de la primera.

Tabla 5.40. Frecuencias de argumentos y porcentaje en relación a la respuesta correcta

	Respuesta							
	Correcta		Equiprobabilidad		Otra			
Argumento	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Total	%
Estar en la mitad	21	33,9	4	8,7			25	15,9
Rango	4	6,5	3	6,5	8	22,2	15	9,6
Concepción de aleatoriedad	2	3,2	11	23,9	2	5,6	15	9,6
Sesgo de equiprobabilidad	5	8,1	16	34,8			21	13,4
Heurística de representatividad	10	16,1	2	4,3	8	22,2	20	12,7
Otro argumento	5	8,1			12	33,3	17	10,8
Argumento confuso	7	11,3	6	13,0	3	8,3	16	10,2
No responden o no argumentan	8	12,9	4	8,7	3	8,3	28	17,8
Total	62		46		36		157	

Nuestros futuros profesores mostraron mejor argumentación y menor tasa de no respuesta que la observada en Serrano (1996). Los argumentos comunes a ambos estudios se refieren al determinismo del número de niños que nacerán y la cercanía a la mitad (igual número de niños y niñas). El conocimiento acerca del comportamiento de la variable en muestras pequeñas es menor que en muestras grandes. Comparando con el ítem anterior aumentan la tasa de no respuesta y las proporciones de argumentos confusos y de heurísticas y sesgos.

5.6.7. ENFOQUE EN EL RESULTADO

Análisis a priori de la tarea

Ítem 12. El Centro Meteorológico de Santiago de Compostela da una predicción de 70% de posibilidades de lluvia para el año 2013.

a. Si la predicción es buena, ¿cuántos días, aproximadamente, esperas que llueva durante ese año?
b. Supongamos que este Centro Meteorológico informa que esta semana hay un 80% de posibilidades de lluvia en Santiago, pero el Lunes no llueve ¿Piensas que su predicción es todavía válida? ¿Por qué?
c. ¿Y si no llueve ni el Lunes ni el Martes?

Este ítem se adaptó de Serrano (1996), quien lo tomó de estudios de Konold y Garfield y evalúa el enfoque en el resultado (Konold, 1989). La solución correcta requiere reconocer el carácter aproximado de la estimación y la variabilidad en las repeticiones del experimento. En la parte a), se espera una estimación alrededor del 70% de 365 días, esto es 255,5 días; como es una variable aleatoria, se podrían admitir como válidos valores que estén dentro de un intervalo razonable. Utilizando la aproximación de la distribución a la normal, podemos pensar que a una desviación estándar del valor esperado se concentra una probabilidad de 68% y a dos desviaciones estándar 95%; estos intervalos son (246,7; 264,2) y (238; 273), respectivamente. En las partes b) y c), la validez de la predicción se conserva aunque no llueva en los días de referencia; teniendo en cuenta que un fenómeno aleatorio conlleva un margen de error.

Este ítem se enmarca en la situación problema del significado frecuencial *previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados* (*SPF*). Sus tres partes evalúan como contenidos primarios el concepto de *valor estimado de la probabilidad* (*CF4*) y la propiedad *probabilidad: valor objetivo hipotético, estimable* (*PF3*); y como contenidos secundarios los conceptos *colectivo (población), atributos* (*CF1*) y *variable aleatoria* (*CA2*).

La primera pregunta también evalúa como contenido primario el procedimiento *reconocer el carácter aproximado de la estimación* (*PRF6*) que implica la propiedad *la estimación tiende a estabilizarse* (*PF6*). Las partes b y c también evalúan como contenido primario el procedimiento *reflexionar sobre fiabilidad de la estimación* (*PRF8*) y la propiedad *el valor estimado de la probabilidad varía en cada serie de N ensayos* (*PF7*), que implica, como contenido secundario, el concepto de *ensayo, ensayos repetidos* (*CF2*).

Resultados y discusión

El análisis de las respuestas a estas tres preguntas comprende la estimación de días lluviosos esperado para la parte a; y la validez de la predicción y la descripción de los argumentos para las partes b y c.

Estimación de días lluviosos

La distribución del número esperado de días lluviosos (Figura 5.7) en la primera pregunta, muestra la mayor concentración alrededor de 255,5, el valor teórico esperado; indicación de buena comprensión de la estimación de la probabilidad. La media fue 252,6, menor que la teórica. Se resalta la presencia de un valor atípico (55,5), posiblemente debido a un error de cálculo.

En la Tabla 5.41 representamos las frecuencias de intervalos de interés e incluimos una categoría para otro tipo de respuestas. La mayoría da valores próximos al esperado (246,7; 264,2), que sería la respuesta correcta. Dos estudiantes darían respuestas parcialmente correctas, en cuanto a que se acercan algo al valor esperado, aunque no totalmente. En todo caso, están en el intervalo de la media más o menos dos desviaciones típicas (entre 238 y 273), por lo cual también serían aceptables.

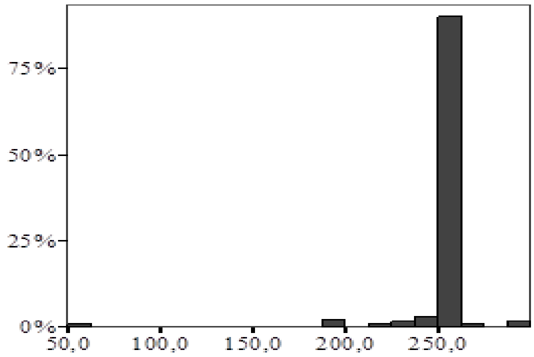


Figura 5.7. Distribución del número de días lluviosos en 2013, esperado por los futuros profesores

Tabla 5.41. Frecuencia y porcentaje de categoría de respuesta en parte a

Categoría de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta: En el intervalo (246,7;264,2)	137	87,3
Parcialmente Correcta: En los intervalos (238; 246,7) o (264,2;273)	2	1,3
Por fuera del intervalo (238;273)	11	7,0
Respuesta no numérica	7	4,4
Total	157	

Otro grupo, pequeño, responde con valores por fuera del intervalo distante dos desviaciones estándar de la media teórica (238; 273); con respuestas muy diversas y en general sin indicar procedimientos de cálculo: "*200 días (aunque falta información para especificar el problema)*" (G029). El último grupo incluye a los evaluados que no llegan a una respuesta, a uno que dijo no saber contestar a la pregunta y otro que da una respuesta sesgada, "*llovería los ocho primeros meses del año*" (G023).

Validez de la predicción

En la Tabla 5.42 se presentan las respuestas a las preguntas sobre la validez del pronóstico. En la parte b la mayoría contestan en forma correcta, pocos muestran el "enfoque en el resultado" considerando la predicción no válida, y muy pocos dan otra respuesta. Estos resultados son mejores que los de Azcárate (1995), quien en una pregunta similar observa 56% de respuestas correctas y 39% muestran el enfoque en el resultado. También que los observados por Serrano (1996), donde 28% responden en forma correcta y 44% muestran enfoque en el resultado.

Tabla 5.42. Frecuencia y porcentaje de respuesta en b y en c

	b) Si no llueve el lunes		c) Si no llueve lunes ni martes	
Respuesta	Frec.	%	Frec.	%
Válida (Correcta)	134	85,4	44	28,0
Inválida	10	6,4	86	54,8
Otra respuesta	3	1,9	13	8,3
No responde	10	6,4	14	8,9
Total	157		157	

En la parte c sólo 28% contestan en forma correcta, la mayoría manifiestan el "enfoque en el resultado" y pocos dan otra respuesta. De un análisis conjunto se encuentra que las respuestas en las dos partes son concordantes en 59 evaluados

(37,6%). De quienes respondieron en forma correcta a la pregunta b, 31% también lo hacen a la c, 61% consideran incorrecta la parte c y 8% dan otro tipo de respuesta.

Argumentos acerca de la validez del pronóstico

Al analizar el conocimiento especializado de nuestra muestra con relación a la validez del pronóstico identificamos básicamente dos tipos de argumentos según revelen lectura probabilística (comprensión del significado frecuencial) o aritmética (interpretación proporcional determinista) del enunciado.

Lectura probabilística del enunciado. Son los que interpretan el pronóstico a través del significado frecuencial de la probabilidad; al igual que en Azcárate (1995) o Serrano (1996) responden que la predicción es válida. Explican la ausencia de lluvias (en uno o en los dos días) utilizando alguna propiedad del significado frecuencial; por ejemplo que el suceso complementario tiene una probabilidad de ocurrencia mayor que cero, como el siguiente ejemplo:

> (Parte b): Hay un 20% que indica que no va a llover; por lo tanto el lunes no lluvioso era una de las posibilidades; (Parte c): Entra dentro del 20% que indica que va a llover (G052).

Lectura aritmética del enunciado. La mayoría aplica la proporción en este contexto, calculan porcentajes, reglas de tres, productos o divisiones, para concluir que la predicción es válida (o no) según consideren que el número de días sin lluvia es cercano (o no) al valor calculado. En algunos casos hay confusión entre la probabilidad y el número esperado de días de lluvia y no se entiende la estimación como componente del razonamiento en probabilidad (Azcárate, 1995):

> Parte b: 7x0,8=5,6 días. Aún es válida, porque quedan 6 días, de los cuales puede llover en 5,6
> Parte c: También sería válida (siempre que despreciemos el resultado decimal considerándolo margen de error, por lo que nos quedaría una probabilidad de 5 días de lluvia) (A013).

Argumentos minoritarios: Se recogen acá otros argumentos, como la *confusión entre suceso muy probable y suceso seguro* (Azcárate, 1995; Serrano 1996), considerando la lluvia durante la semana como un suceso seguro, pues su probabilidad (80%) es elevada:

> (Parte b): Para que sea cierta, el lunes debe llover algo también; (Parte c): Para que sea cierta el lunes debe llover algo, pero ya el martes debe ser un día lluvioso, por lo tanto no cumple los resultados (A005).

Otros estudiantes dan una *explicación causal al fallo en la predicción* (Azcárate, 1995; Serrano, 1996) razonamiento asociado al patrón descrito por Konold (1989) del enfoque en el resultado:

> (Parte b): Se pueden haber dado rachas de viento de forma considerable y eso deriva en que algún día no llegue a llover. En líneas generales sigue siendo válido (C017).

Las Tablas 5.43 y 5.44 muestran la distribución de argumentos, donde un alto porcentaje justificaron la respuesta a la parte c) aunque no se requería. En ambas preguntas se observa una prevalencia de argumentos aritméticos; tanto éstos como los argumentos probabilísticos disminuyen en la parte c), a favor de la ausencia de respuesta o falta de argumentación.

Tabla 5.43. Frecuencias y porcentaje de argumentos con respecto a la validez de la predicción en la parte b

	Respuesta							
	Válida		Inválida		Otra o NR			
Argumento	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Total	%
Probabilístico	18	13,4					18	11,5
Aritmético	107	79,9	5	50	1	7,7	113	72,0
Otro	9	6,7	4	40	2	15,4	15	9,6
No responde			1	10	10	76,9	11	7,0
Total	134		10		13		157	

La respuesta correcta (que la predicción es válida), se apoya en argumentos de tipo probabilístico y, para la mayoría, en argumentos aritméticos. No aparecen argumentos probabilísticos en la respuesta incorrecta o no respuesta a la parte b, que se apoya más en argumentos aritméticos; algo semejante ocurre en la c.

Tabla 5.44. Frecuencias y porcentaje de argumentos con respecto a la validez de la predicción en la parte c

	Respuesta							
	Válida		Inválida		Otra o NR			
Argumento	Frec	%	Frec	%	Frec	%	Total	%
Probabilístico	13	29,5	1	1,2	1	3,7	15	9,6
Aritmético	21	47,7	71	82,6	7	25,9	99	63,1
Otro	4	9,1	5	5,8	5	18,5	14	8,9
No argumenta	6	13,6	9	10,5	14	51,9	29	18,5
Total	44		86		27		157	

Azcárate (1995) en dos preguntas similares observó argumentos basados en creencias personales (26% y 37%), lectura probabilística (32% y 16%), reconocimiento de la incertidumbre sin ponderar la probabilidad (25% y 0), lectura aritmética (0 y 19%), y explicaciones causales (12% y 19%); el resto no responde o no argumenta o da argumento confuso. Los argumentos observados en Serrano (1996) fueron lectura probabilística (28%), explicación causal (44%) e imposibilidad de predicción (18%).

Nuestras preguntas sobre validez de la predicción se diferencian, de las formuladas en estudios previos, en que planteamos el pronóstico para una semana y estos dos autores plantean para un día; esto podría explicar la mayor presencia de lectura literal en nuestro estudio y la menor presencia del uso de heurísticas y sesgos, tales como explicaciones causales o concepciones erradas acerca de la impredecibilidad en un experimento aleatorio.

5.7. SÍNTESIS DE RESULTADOS EN EL ESTUDIO 2

Finalizado el análisis detallado de cada ítem, en esta sección presentaremos una síntesis, estudiando algunos indicadores que permitan evaluar globalmente el conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad de los futuros profesores de nuestra muestra. En lo que sigue se analiza la puntuación global en el cuestionario y las puntuaciones parciales por categoría de conocimiento, la fiabilidad y generalizabilidad del cuestionario, y los índices de dificultad y discriminación de los ítems.

5.7.1. ANÁLISIS DE PUNTUACIONES PARCIALES Y GLOBAL

Para dar una medida cuantitativa del conocimiento global de cada participante, en cada ítem se asignó una puntuación de 0 o 1, indicando 1 a respuesta correcta o el uso de una estrategia o argumento válido.

Puntuación global

La puntuación global del cuestionario es la suma de las puntuaciones en cada ítem; teóricamente varía entre 0 (ninguna respuesta correcta) y 32 (todas las respuestas, argumentos y estrategias son correctos). Teóricamente se espera una puntuación que varía entre 0 y 32, con un valor medio igual a 16. Asumiendo una puntuación normal de las puntuaciones, la mediana tomaría el mismo valor, la asimetría y curtosis serían igual a cero.

En la muestra de 157 futuros profesores, las puntuaciones totales variaron entre 2 y 24; por lo tanto todos realizan algún ítem (no se obtiene la puntuación mínima cero), y ninguno llega al máximo previsto. La media y mediana son menores que lo esperado teóricamente. Una cuarta parte de los participantes se sitúan por debajo de nueve puntos (cuarta parte de la puntuación máxima). Las medidas resumen se observan en la Tabla 5.45.

Tabla 5.45. Medidas de resumen de las puntuaciones globales observadas

	Observado	Teórico
Media	12,15	16
Desviación típica	4,43	-
Rango	22	32
Mediana	12	16
Mínimo	2	0
Máximo	24	32
Asimetría	0,09	0
Curtosis	-0,52	0

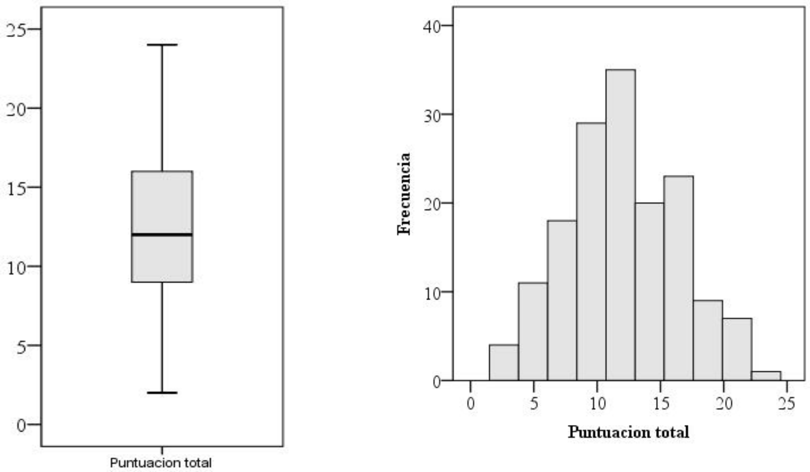


Figura 5.8. Puntuaciones globales observadas en la muestra de 157 futuros profesores

Hay una tendencia a valores relativamente bajos, como se observa en el gráfico de caja y en el histograma de la Figura 5.8. En consecuencia los resultados de la evaluación inicial no son muy alentadores. Hay también un ligero sesgo por encima de la media, muy pequeño, como se muestra en el coeficiente de asimetría; el valor del coeficiente de curtosis estaría dentro del rango aceptable para asumir la normalidad, al igual que los resultados de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov con parámetros estimados de la muestra (Tabla 5.46), que nos autoriza a realizar contrastes posteriores.

Tabla 5.46. Prueba de Kolmogorov-Smirnov para las puntuaciones globales observadas

		Estadística
Parámetros normales	Media	12,15
(estimados de la muestra)	Desviación típica	4,433
Diferencias más extremas	Absoluta	0,086
	Positiva	0,086
	Negativa	-0,067
Z de Kolmogorov-Smirnov		1,077
Sig. asintótica (bilateral)		0,197

Para matizar el anterior resultado, se ha realizado un estudio descriptivo de las puntuaciones parciales, según categoría de conocimiento: común, ampliado y especializado, pues pensamos que se obtendría mejor resultado en la primera categoría que en las otras dos, ya que los participantes estudiaron probabilidad los cursos anteriores, mientras que este es su primer encuentro con la didáctica de la probabilidad.

Puntuaciones por categoría de conocimiento

Para cada categoría de conocimiento se obtienen puntuaciones parciales, que son la suma de la puntuación en cada ítem que evalúa esa categoría; debido a la diferencia en el número de ítems asociados a cada categoría, para facilitar la comparación de resultados (Figura 5.9) hemos normado estas puntuaciones parciales en una escala de 0 (ninguna respuesta correcta en esa categoría) a 1 (todas las respuestas de esa categoría son correctas).

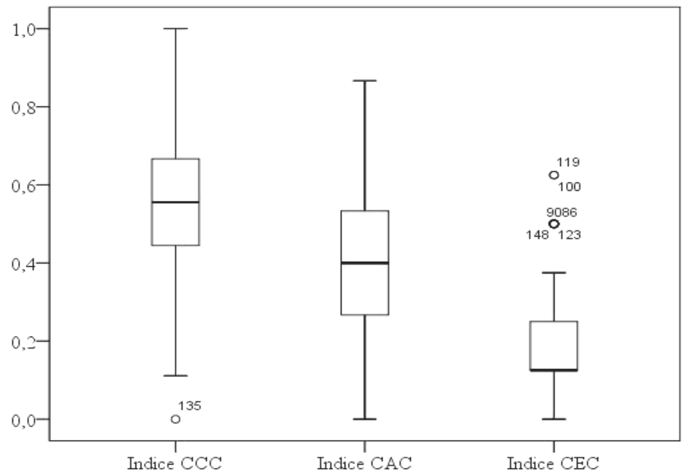


Figura 5.9. Puntuaciones por categoría del conocimiento observadas en la muestra

Nuestro grupo de futuros profesores muestra más conocimiento común de la probabilidad que conocimiento ampliado y éste más que conocimiento especializado, si excluimos los casos atípicos en este último conocimiento. En la Figura 5.9 y en la Tabla 5.47 se presentan los estadísticos resumen, observamos que la puntuación normada disminuye en la medida que aumenta la complejidad del conocimiento evaluado: Mientras que la mediana del conocimiento común del contenido se sitúa por encima del valor medio teórico (0,5), no se alcanza este valor en el conocimiento ampliado y mucho menos en el especializado cuyo valor medio es muy deficiente. Teniendo en cuenta que los ítems referidos a conocimiento ampliado incluyen problemas que los estudiantes han debido ver en sus estudios de secundaria, Bachillerato e incluso el año anterior, en su preparación como profesores, estos resultados son preocupantes.

Tabla 5.47. Medidas resumen de las puntuaciones parciales normadas según categoría del conocimiento

Puntuación normada	Media	Desv. típ.	Asimetría	Curtosis	Rango	Mínimo	Máximo
Conocimiento común	0,548	0,185	0,001	-0,124	1,000	0	1,000
Conocimiento ampliado	0,378	0,169	0,176	-0,406	0,867	0	0,867
Conocimiento especializado	0,193	0,155	0,644	-0,208	0,625	0	0,625
Teórica	0,5	-	0	0	1	0	1

Igual conclusión se obtiene al considerar que el conocimiento especializado se ha evaluado simplemente mediante la capacidad de argumentación de las soluciones de estos futuros profesores, que se muestra muy pobre en el grupo participante. Este resultado concuerda con las observaciones de Mohr (2008) y Callingham y Watson (2011). Ello apunta no sólo a la falta de conocimientos de probabilidad, sino a una escasa competencia en argumentación y en comunicación escrita, que es requerida hoy día en los diseños curriculares en todos los ciclos educativos (MEC, 2006).

Llama la atención la presencia de un evaluado que falla en todos los ítems referidos al conocimiento común del contenido; de igual manera se destacan los seis evaluados que exhiben mayor conocimiento especializado con relación al grupo, dos dan argumento válido a 5 de los 8 ítems y cuatro responden en forma acertada la mitad de las preguntas referidas a esta categoría de conocimiento.

También es notable la menor variabilidad en la puntuación del conocimiento especializado excluyendo los atípicos, las otras dos puntuaciones están bien distribuidas en un rango de 0,9, mientras que ésta está bastante concentrada por debajo de 0,4. Analizando en detalle estas puntuaciones encontramos se debe a que hay coincidencia en la mayoría en incapacidad de dar justificaciones válidas a los ítems que componen esta categoría de conocimiento: una cuarta parte argumenta en forma probabilística solo a uno de los 8 ítems, otra cuarta parte a dos, poco menos de la mitad a tres.

Correlaciones entre categorías de conocimiento

Por otra parte, hemos explorado posibles correlaciones entre estas puntuaciones (Tabla 5.48). Observamos una correlación positiva entre todos los pares de puntuaciones. Todas las correlaciones fueron estadísticamente significativas con $p<0{,}001$; por lo cual no se incluye el valor p en la tabla, para no ser reiterativos. Los resultados son lógicos pues el conocimiento común es necesario para los otros dos.

La intensidad de los coeficientes, es, no obstante moderada, siendo más alta la correlación existente entre el conocimiento especializado y el común o ampliado que entre estos dos. Esto es razonable por el modo en que se ha medido en nuestro cuestionario, el conocimiento especializado ha tenido en cuenta la capacidad de argumentar correctamente la respuesta y es claro que si se tiene es porque también se posee un conocimiento común o avanzado suficiente.

Tabla 5.48. Correlaciones observadas entre puntuaciones por categoría del conocimiento

	Índice CCC	Índice CAC	Índice CEC
Índice CCC	1	0,389	0,449
Índice CAC	0,389	1	0,596
Índice CEC	0,449	0,596	1

5.7.2. ANÁLISIS DE DIFICULTAD Y DISCRIMINACIÓN DE LOS ÍTEMS

La dificultad de cada ítem, que se refleja en la proporción de respuesta correcta (índice de dificultad), se presenta en la Tabla 5.49, organizados los resultados por categoría de conocimiento evaluado.

Tabla 5.49. Índices de dificultad para cada ítem según categoría de conocimiento

	Sign	Ítem	Índice de dificultad
Conocimiento común	Clas	1a. Enumeración del espacio muestral (tres elementos)	0,94
	Clas	1c. Enumeración del espacio muestral (cuatro elementos)	0,59
	Clas	Estrategia 1c: Enumeración del espacio muestral (para cuatro elementos)	0,21
	Clas	2. Comparación de probabilidades (significado clásico)	0,76
	Clas	3. Probabilidad conjunta. Experimentos independientes	0,57
	Subj	4. Probabilidad conjunta. Experimentos dependientes	0,39
	Frec	5. Asignación de probabilidades (significado frecuencial)	0,34
	Frec	Estrategia 5: Variabilidad en el muestreo (significado frecuencial)	0,24
	Clas	6a. Noción de juego equitativo	0,9
Conocimiento ampliado	Subj	7. Probabilidad condicional	0,23
	Subj	Estrategia 7: Probabilidad condicional	0,15
	Clas	6b. Esperanza matemática	0,5
	Clas	Estrategia 6b: Esperanza matemática	0,39
	Clas	8. Sesgo de equiprobabilidad en experimento compuesto	0,27
	Frec	9a.Muestreo. Estimación del total	0,2
	Frec	Estrategia 9a: Muestreo. Estimación del total	0,15
	Frec	9b. Re-muestreo. Estimación de una submuestra	0,54
	Frec	Estrategia 9b: Re-muestreo. Estimación de una submuestra	0,35
	Frec	10. Percepción de la aleatoriedad	0,27
	Frec	11a. Heurística de representatividad. Insensibilidad al tamaño de la muestra	0,2
	Frec	11b. Heurística de representatividad. Distribución binomial	0,39
	Frec	12a. Enfoque en el resultado. Predicción	0,87
	Frec	12b. Enfoque en el resultado. Validez de pronóstico ante un resultado contrario	0,85
	Frec	12c. Enfoque en el resultado. Validez de pronóstico ante dos resultados contrarios	0,28
C. especializado	Clas	Arg 2. Comparación de probabilidades (significado clásico)	0,04
	Clas	Arg 3. Probabilidad conjunta. Experimentos independientes	0,25
	Subj	Arg 4. Probabilidad conjunta. Experimentos dependientes	0,21
	Clas	Arg 6a. Noción de juego equitativo	0,89
	Frec	Arg 10. Percepción de la aleatoriedad	0,23
	Frec	Arg 11a. Heurística de representatividad	0,17
	Frec	Arg 11b. Heurística de representatividad. Distribución binomial	0,13
	Frec	Arg 12b. Enfoque en el resultado. Validez de pronóstico ante un resultado contrario	0,11

Los ítems más fáciles respecto al conocimiento común en nuestra muestra (índice superior a 0,75) evaluaban parcialmente el significado clásico: 1a (permutación de tres elementos), 2 (comparación de probabilidades) y 6a (identificar un juego no equitativo). Fueron difíciles (índice inferior a 0,25) los referidos a estrategias más elaboradas o correspondientes al significado frecuencial: 1c (permutaciones de 4 elementos) y 5 (comprensión de variabilidad en el muestreo). Los demás ítems que evalúan el conocimiento común presentaron una dificultad moderada (índice entre 0,25 y 0,75).

Con respecto al conocimiento ampliado, los ítems más fáciles en nuestra muestra evaluaban parcialmente el significado frecuencial: 12a (estimación del número de días lluviosos en un año) y 12b (validez de una predicción ante la observación de un resultado contrario). Resultaron más difíciles ítems que evalúan parcialmente el significado subjetivo 7 (probabilidad condicional) y su estrategia de respuesta, 9a (estimación de un total) y su estrategia de respuesta, y 11a (heurística de representatividad). Los demás ítems que evalúan el conocimiento ampliado presentaron una dificultad moderada.

En relación con el conocimiento especializado, solo fue fácil la argumentación a la respuesta 6a (identificar un juego no equitativo), asociado a un mayor dominio del significado clásico. La argumentación de la respuesta 12b fue lo más difícil para esta muestra, a pesar de la alta proporción de respuesta correcta, debido a una alta presencia del enfoque en el resultado (Konold, 1989); asimismo la argumentación de las respuestas 11a y 11b fueron difíciles posiblemente debido a la presencia de la heurística de representatividad en nuestra muestra.

En general se observa una alta dificultad en la argumentación y en la elección de una estrategia probabilística, en todos los casos el índice fue inferior a 0,4; en algunos debido a que la respuesta se basa en la intuición o en sesgos citados en las investigaciones previas. En otros porque el evaluado aplica estrategias aritméticas y no probabilísticas.

Análisis de discriminación de los ítems

Otro indicador del interés del cuestionario es su capacidad de discriminación de los evaluados, teniendo en cuenta sus conocimientos. Para determinar la discriminación de cada ítem se han tomado dos grupos de la muestra, de 51 futuros profesores cada uno (32% de la muestra), teniendo en cuenta su desempeño. En el primero ubicamos los que obtuvieron las puntuaciones totales más altas y en otro los que obtuvieron las más bajas.

El contraste de diferencia de índices de dificultad por ítem entre estos dos grupos (Tabla 5.50) indica la capacidad de discriminación de la pregunta de acuerdo con el constructo en evaluación. Prácticamente todos los ítems discriminan, como se observa en los valores p obtenidos; como realizamos múltiples contrastes sobre la misma muestra, por precaución tomamos como nivel de significación efectivo $\alpha = \frac{0,10}{32} \approx 0,003$, para obviar el problema de las comparaciones múltiples.

Con respecto al conocimiento común, en nuestra muestra es estadísticamente significativa la discriminación de los ítems 1c (permutaciones 4 elementos), 3 (probabilidad conjunta en experimentos independientes), 4 (probabilidad conjunta en experimentos dependientes), 5 (probabilidad simple con asignación frecuencial) y 6a (noción de juego equitativo).

En relación con el conocimiento ampliado es estadísticamente significativa la discriminación de los ítems 6b (valor de la apuesta en un juego equitativo), 9a (estimación en muestreo), 10 (percepción de aleatoriedad), 11a (heurística de representatividad), 12a (predicción) y 12b (validez de un pronóstico ante una observación contraria). En cuanto al conocimiento especializado, es estadísticamente significativa la discriminación de los ítems de argumentación (3, 4, 6a y 11a).

Se observa que los ítems incluidos en el cuestionario tienen un buen nivel de discriminación para nuestro constructo, excepto el ítem 12c, más complejo por tratarse de la evaluación de un sesgo en un experimento compuesto, siendo el que tuvo mayor tasa de no respuesta entre todos los del cuestionario y una baja proporción de respuesta correcta en nuestra muestra de futuros profesores (Tablas 5.42 y 5.50). Sin embargo, las otras dos partes de este mismo ítem son relevantes en la discriminación de puntuaciones altas y bajas.

Tabla 5.50. Diferencia en las proporciones de respuesta correcta para cada ítem teniendo en cuenta las 51 puntuaciones totales más altas (A) y más bajas (B)

Cat. Con.	Sign.	Ítem	Índice de dificultad		Proporción común	Diferencia de proporciones	Estadística de prueba	Valor p	
			Grupo A	Grupo B					
C. Común	Clás.	1a EM	1,000	0,902	0,951	0,098	2,293	0,011	
	Clás.	1c EM	0,725	0,392	0,559	0,333	3,390	0,000	x
	Clás.	Estr. 1c EM	0,412	0,020	0,216	0,392	4,815	0,014	
	Clás.	2 CP	0,882	0,706	0,794	0,176	2,204	0,000	x
	Clás.	3 EI	0,784	0,275	0,529	0,510	5,158	0,000	x
	Subj.	4 ED	0,569	0,216	0,392	0,353	3,650	0,000	x
	Frec.	5 PF	0,490	0,157	0,324	0,333	3,598	0,001	x
	Frec.	Estr. 5 PF	0,353	0,137	0,245	0,216	2,532	0,000	x
	Clás.	6a JE	0,980	0,765	0,873	0,216	3,266	0,006	
C. Ampliado	Subj.	7 PC	0,314	0,176	0,245	0,137	1,611	0,054	
	Subj.	Estr. 7 PC	0,275	0,118	0,196	0,157	1,995	0,023	
	Clás.	6b JE	0,863	0,118	0,490	0,745	7,527	0,000	x
	Clás.	Estr. 6b JE	0,804	0,020	0,412	0,784	8,047	0,000	x
	Clás.	8 SE	0,353	0,196	0,275	0,157	1,775	0,038	
	Frec.	9a RM	0,392	0,020	0,206	0,373	4,653	0,000	x
	Frec.	Estr. 9a RM	0,333	0,000	0,167	0,333	4,517	0,000	x
	Frec.	9b RM	0,804	0,176	0,490	0,627	6,338	0,000	x
	Frec.	Estr. 9b RM	0,608	0,098	0,353	0,510	5,387	0,000	x
	Frec.	10 PA	0,373	0,216	0,294	0,157	1,738	0,041	
	Frec.	11a HR	0,510	0,020	0,265	0,490	5,611	0,000	x
	Frec.	11b HR	0,490	0,294	0,392	0,196	2,028	0,021	
	Frec.	12a ER	1,000	0,784	0,892	0,216	3,511	0,000	x
	Frec.	12b ER	0,961	0,667	0,814	0,294	3,815	0,000	x
	Frec.	12c ER	0,235	0,294	0,265	-0,059	-0,673	0,750	
C. especializado	Clás.	Arg 2 CP	0,098	0,020	0,059	0,078	1,683	0,046	
	Clás.	Arg 3 EI	0,373	0,078	0,225	0,294	3,554	0,000	x
	Subj.	Arg 4 ED	0,333	0,098	0,216	0,235	2,889	0,002	x
	Clás.	Arg 6a JE	0,804	0,020	0,412	0,784	8,047	0,000	x
	Frec.	Arg 10 PA	0,333	0,137	0,235	0,196	2,334	0,010	
	Frec.	Arg 11a HR	0,451	0,020	0,235	0,431	5,135	0,000	x
	Frec.	Arg 11b HR	0,216	0,039	0,127	0,176	2,672	0,004	
	Frec.	Arg 12b ER	0,137	0,039	0,088	0,098	1,745	0,040	

5.7.3. ANÁLISIS DE FIABILIDAD Y GENERALIZABILIDAD

Para completar información sobre el cuestionario, con el fin de que sea útil en otros trabajos, se proporcionan en este apartado evidencias de fiabilidad tanto desde la teoría clásica de los test (TCT), como desde la teoría de la generalizabilidad (TG).

En primer lugar se calcula el coeficiente alfa de Cronbach que refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el cuestionario y que resultó en un valor de 0,737. Santisteban (2009) considera válidos en las pruebas de evaluación valores por encima de 0,5. El valor obtenido es razonable, ya que valores moderados son usuales en cuestionarios con fines de evaluación de conocimientos complejos que no son unidimensionales (Díaz, 2007); nuestro cuestionario no lo es, debido a la heterogeneidad de los contenidos evaluados con cada ítem y a la correlación moderada de las puntuaciones a los diversos significados de la probabilidad. Por otro lado la variación del coeficiente es mínima cuando se calcula al omitir cada ítem (Tabla 5.51).

Tabla 5.51. Medidas resumen si se elimina el elemento (extracción del ítem correspondiente)

Conoc.	Ítem	Media de la escala	Varianza de la escala	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach
Común	Respuesta 1a EM	11,20	19,343	0,124	0,736
	Respuesta 1c EM	11,56	18,427	0,231	0,732
	Estrategia 1c EM	11,94	18,278	0,345	0,725
	Respuesta 2 CP	11,38	19,161	0,083	0,740
	Respuesta 3 EI	11,58	17,976	0,339	0,725
	Respuesta 4 ED	11,75	18,444	0,229	0,732
	Respuesta 5 PF	11,81	18,617	0,198	0,734
	Estrategia 5 PF	11,91	18,851	0,167	0,735
	Respuesta 6a JE	11,25	18,701	0,327	0,728
Ampliado	Respuesta 7 PC	11,92	19,115	0,097	0,739
	Estrategia 7 PC	11,99	19,083	0,139	0,736
	Respuesta 6b JE	11,64	17,346	0,492	0,714
	Estrategia 6b JE	11,75	17,252	0,530	0,711
	Respuesta 8 SE	11,87	19,202	0,064	0,742
	Respuesta 9a RM	11,94	18,336	0,333	0,726
	Estrategia 9a RM	11,99	18,442	0,348	0,726
	Respuesta 9b RM	11,61	17,510	0,452	0,717
	Estrategia 9b RM	11,80	17,894	0,377	0,722
	Respuesta 10 PA	11,88	19,120	0,086	0,740
	Respuesta 11a HR	11,95	18,010	0,437	0,720
	Respuesta 11b HR	11,75	18,970	0,103	0,741
	Respuesta 12a ER	11,27	18,867	0,232	0,732
	Respuesta 12b ER	11,29	18,542	0,322	0,727
	Respuesta 12c ER	11,87	19,950	-0,125	0,753
Especializado	Arg 2 CP	12,11	19,379	0,139	0,736
	Arg 3 EI	11,90	18,759	0,188	0,734
	Arg 4 ED	11,94	18,688	0,225	0,732
	Arg 6a JE	11,75	17,252	0,530	0,711
	Arg 10 PA	11,92	18,974	0,136	0,737
	Arg 11a HR	11,97	18,243	0,391	0,723
	Arg 11b HR	12,01	19,154	0,128	0,737
	Arg 12b ER	12,03	19,275	0,098	0,738

El aporte de cada ítem a la consistencia interna del cuestionario se ha medido con la correlación corregida entre el ítem y la puntuación total del cuestionario (Tabla 5.51).

Observamos correlaciones positivas en su mayoría, salvo el ítem 12c (validez de una predicción ante la observación de dos resultados contrarios) que tiene correlación negativa aunque muy baja. Mientras algunas correlaciones se acercan a 0,5, otras son bajas o moderadas; esto puede explicarse por la diversidad de contenidos evaluados (ver Tabla 5.3). Las correlaciones menores corresponden a ítems que evalúan contenidos menos relacionados con los evaluados en los demás ítems; es decir, son ítems más específicos.

Coeficientes de generalizabilidad

Además de calcular el coeficiente de Cronbach, se calcularon los coeficientes de generalizabilidad. La teoría de la generalizabilidad considera que los errores en las medidas psicométricas provienen de diversas fuentes y su análisis permitirá establecer la precisión e idoneidad de las inferencias provenientes de estas medidas. Su perspectiva es establecer el grado en que las puntuaciones obtenidas representan a un *universo de puntuaciones admisibles*, el cual es un conjunto mucho más amplio. En consecuencia, se estudia si los ítems propuestos producen puntuaciones representativas, “en el sentido de que esas puntuaciones sean consistentes con las que se hubieran obtenido si todos esos posibles ítems que potencialmente miden ese rasgo se hubieran administrado” (Santisteban, 2009, p.184).

Los coeficientes de generalizabilidad se basan en el análisis de las distintas fuentes de variación que afectan a las puntuaciones observadas, y se realiza mediante el estudio del aporte a la varianza total por parte de cada una de estas fuentes, con la técnica usual de análisis de varianza. En nuestro estudio empleamos el diseño cruzado más simple, porque las preguntas (ítems) son la única fuente de variación, adicional a la debida a evaluados (sujetos) y residual.

Tabla 5.52. Tabla de análisis de varianza de las puntuaciones totales

Fuente de variación	Suma de cuadrados	g.l.	Media cuadrática	F
Entre sujetos	95,8	156	0,614	
Dentro de sujetos				
Entre ítems	307,0	31	9,904	61,38
Residual	780,3	4836	0,161	
Total (dentro de sujetos)	1087,3	4897	0,223	
Total	1183,1	5023	0,236	

Los resultados del análisis de varianza de medidas repetidas (Tabla 5.52) proporcionan los datos necesarios para estimar la varianza debida a los sujetos σ_S^2, la debida a los ítems σ_i^2 y la residual σ_R^2, teniendo en cuenta que (Santisteban, 2009):

$$\sigma_S^2 \approx \frac{MC_S - MC_R}{n} \quad \sigma_i^2 \approx \frac{MC_i - MC_R}{k} \quad \sigma_R^2 \approx MC_R$$

donde MC_S es la media cuadrática entre sujetos, MC_i es la media cuadrática entre ítems, MC_R la residual, *k* es el número de ítems y *n* es el número de sujetos. En consecuencia, para nuestro estudio, con 32 ítems (contando las preguntas, argumentaciones y estrategias en los 12 problemas) y 157 sujetos, la varianza debida a sujetos σ_S^2 se aproxima a 0,014, la debida a los ítems σ_i^2 a 0,062 y la residual σ_R^2 se aproxima a 0,161.

El coeficiente de generalizabilidad respecto a los ítems se calcula con la siguiente expresión:

$$G_i = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + {\sigma_R^2}/{k}}$$

En nuestro estudio se obtiene G_i = 0,737, un valor relativamente alto; coincide con el Coeficiente Alfa de Cronbach debido a que la varianza entre los ítems es la única fuente de variación cuando se analiza dentro de los alumnos. Análogamente, se calcula el coeficiente de generalizabilidad respecto a los sujetos:

$$G_S = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + {\sigma_R^2}/{n}}$$

En nuestro estudio se obtiene G_S = 0,984, un valor muy alto, indicando que hay una alta posibilidad de generalizar los resultados a otros alumnos conservando el mismo cuestionario, teniendo en cuenta que se conserven características socio-demográficas y educativas de nuestra muestra.

5.8. CONCLUSIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO INICIAL DE LOS FUTUROS PROFESORES

Finalmente presentamos nuestras conclusiones en dos apartados. En primer lugar se analizan las tres hipótesis formuladas sobre el conocimiento común y ampliado de los diversos significados de la probabilidad y finalmente la referida al conocimiento especializado.

5.8.1. CONCLUSIONES SOBRE CONOCIMIENTO COMÚN Y AMPLIADO DE LA PROBABILIDAD

Al comienzo del capítulo y al considerar los diversos significados de la probabilidad, se plantearon algunas siguientes hipótesis iniciales, relacionadas con los conocimientos de los profesores en relación a los diferentes significados de la probabilidad, que ahora discutimos.

Significado clásico

Esperábamos que nuestros resultados indicasen un conocimiento común y ampliado suficiente de la probabilidad en su significado clásico, por parte de los futuros profesores de la muestra (H2.1). Confirmando parcialmente esta hipótesis, el conocimiento común del significado clásico en nuestra muestra fue adecuado en algunos objetos. Nuestros participantes mostraron unos resultados similares al observado en investigaciones previas con futuros profesores de educación primaria (Azcárate, 1995; Mohamed, 2012).

Así fue sencilla la enumeración del especio muestral de tres elementos. También la comparación de probabilidades en urnas resultó muy sencilla, aunque pocos participantes son capaces de proponer una composición proporcional de urnas que de una misma probabilidad. Más de la mitad de los participantes calculan también correctamente la probabilidad conjunta en experimentos independientes. Nueve de cada diez diferencian correctamente que un juego no es equitativo.

Sin embargo, aún aparecen dificultades. Sólo el 40% calcula correctamente la probabilidad conjunta en experimentos dependientes. Poco más de la mitad de los futuros profesores respondió en forma correcta a las permutaciones de cuatro elementos, generalmente porque son los menos los que recuerdan (o al menos aplican) la fórmula de la permutación. Una cuarta parte deduce la fórmula aplicando la regla del producto, y alrededor del 40% producen listas, pero algunas de ellas son no sistemáticas.

Por otro lado, el conocimiento ampliado del significado clásico fue algo menor a lo esperado, y necesitaría mejorarse para abordar con éxito la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Además sólo el 27% responden correctamente un problema sobre heurística de equiprobabilidad en experimentos compuestos. Como en investigaciones anteriores con futuros profesores de educación primaria (Azcárate, 1995; Mohamed, 2012), sólo la mitad de la muestra es capaz de establecer la apuesta necesaria para convertir un juego en equitativo, exhibiendo una comprensión insuficiente de la esperanza matemática y del juego equitativo. Igualmente muestran fallos de razonamiento proporcional.

Significado frecuencial

Pensábamos que el conocimiento común y ampliado aceptable de la probabilidad en su significado frecuencial sería adecuado en los futuros profesores de la muestra (H2.2). Al contrario de lo supuesto, esta hipótesis no se confirma en nuestra muestra.

Respecto al conocimiento común, se plantea sólo un ítem, que es una reformulación original del planteado por Green (1983a), puesto que pedimos a los futuros profesores predecir cuatro resultados en vez de uno sólo, lo que nos permite analizar no sólo el valor esperado, sino la variabilidad en los cuatro valores dados por los participantes. La mayoría de los participantes muestra una buena percepción del valor esperado en un problema de probabilidad frecuencial, también aparecen dificultades con la percepción de la variabilidad del proceso (Ítem 5, sobre lanzamiento de chinchetas). Además hubo un porcentaje importante de fallos en este ítem asociados al sesgo de equiprobabilidad, la heurística de representatividad, el enfoque en el resultado.

Se obtienen mejores resultados que los logrados por Mohamed (2012) con este ítem en su planteamiento original; incluso cuando nuestra formulación es más difícil. Consideramos también que nuestro ítem permite evaluar la comprensión del significado frecuencial de la probabilidad en forma más completa, al poder observar la variabilidad y no solo la tendencia en las estimaciones.

En relación al conocimiento ampliado, se incluyeron varios ítems. El primero, sobre estimación del tamaño de una población en un proceso de muestreo. Sólo el 20% es capaz de resolver el problema y una proporción similar tiene una estrategia correcta; fueron mejores los resultados al estimar la proporción en una nueva muestra (54%) aunque la estrategia correcta sólo la alcanzan el 35%

Resultados similares se encuentran en un ítem sobre discriminación entre una secuencia de resultados aleatorios y otra que no lo es y en la percepción del efecto del tamaño de una muestra sobre la variabilidad del muestreo. El único ítem que dio buenos resultados en esta categoría fue la interpretación directa de una probabilidad dada mediante frecuencias, e incluso la explicación de un resultado de baja probabilidad.

En resumen se obtuvieron resultados deficientes en la mayor parte de los ítems que evalúan el conocimiento ampliado del significado frecuencial en nuestra muestra, contradiciendo, en general, la hipótesis H2.2, por lo que consideramos todavía insuficiente este conocimiento para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria.

Significado subjetivo

Esperábamos que nuestros resultados indicasen un conocimiento común y ampliado insuficiente sobre el significado subjetivo de la probabilidad por parte de los futuros profesores de la muestra (H2.3).

Respecto al conocimiento común, el 39% resuelve correctamente un problema de probabilidad conjunta en experimentos dependientes; Por otro lado, en relación al conocimiento ampliado solo la cuarta parte es capaz de resolver un problema de probabilidad condicional; la estrategia correcta en este problema no llega al 15%.

En consecuencia, aunque son pocos los ítems que evalúan este conocimiento, nuestra hipótesis se confirma pues el conocimiento común del significado subjetivo es apenas aceptable para la enseñanza en educación primaria; y por otro lado, también el conocimiento ampliado del significado subjetivo de la probabilidad, evaluado en el ítem 7 fue insuficiente. Es posible que estos resultados sean debidos a la baja atención del significado subjetivo en la educación, como señala Borovcnik (2012), que se ratifica en la formación universitaria.

Los resultados son peores que los observados con futuros profesores de secundaria (Contreras, 2012) o estudiantes de psicología (Díaz, 2007); como es de esperar por la complejidad inherente a la probabilidad condicional y la menor formación en matemáticas que tiene nuestra muestra. Un porcentaje importante de fallos en la muestra se asocian con la presencia del sesgo de equiprobabilidad, la mala interpretación del enunciado o la modificación de la pregunta porque calcularon las probabilidades de otros sucesos.

Comparación entre el conocimiento común y ampliado

Al comparar los tres tipos de conocimiento evaluados, los mejores resultados se dan en el conocimiento común, seguido por el ampliado y especializado. Discutimos acá los dos primeros y el especializado en la última sección

El *conocimiento común de la probabilidad* mostrado por el grupo de futuros profesores fue, en general, el mejor de las tres categorías de conocimiento evaluadas, como se pone de manifiesto en la puntuación parcial normada (que supera a las otras dos) y también al ver los índices de dificultad. El menor de ellos es 0,353 lo que indica que todos los ítems o estrategias fueron superados por al menos el 35% de la muestra, llegando en 6 de los 9 indicadores a ser superados por más de la mitad de la nuestra.

Si bien hay tendencia a un alto porcentaje de respuestas correctas, las estrategias empleadas para llegar a éstas indica un pobre razonamiento probabilístico y el predominio de estrategias aritméticas, e incluso falta de razonamiento probabilístico, asociando igual probabilidad con igual número de casos favorables (sin tener en cuenta los casos desfavorables o asumiendo la equiprobabilidad de los sucesos elementales. También observamos que el conocimiento es muy variable; encontramos un futuro profesor que responde en forma errada a todos los ítems y otros que responden en forma correcta los 9 ítems que componen esta categoría de conocimiento.

El *conocimiento ampliado del contenido* mostrado por el grupo de futuros profesores evaluado es pobre, y debería mejorar para abordar con éxito la enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Por un lado, la puntuación media normada no alcanza 0,5, lo que indica que globalmente se realizan con éxito menos de la mitad de los ítems o estrategias que evalúan este conocimiento. Por otro, en 8 de los 15 ítems o estrategias que evalúan este contenido el índice de dificultad es menor que 0,5 (respuesta o estrategia correcta sólo en menos de la mitad de la muestra).

Igual que en el conocimiento común, hay una alta variabilidad en el desempeño de los evaluados; la mitad aciertan más del 40% de las preguntas, aunque ninguno responde en forma correcta los 15 ítems que componen esta categoría de conocimiento. A diferencia del conocimiento común, la mayor parte de respuestas correctas se debieron al uso de estrategias probabilísticas válidas, que son más necesarias cuando se trata de un problema más avanzado que cuando se trata de un problema muy simple de probabilidad. Aún así, una proporción importante de estudiantes se basa en razonamiento proporcional, en general bien aplicado, para solucionar la mayoría de estas preguntas. Sin embargo, se nota cierta dificultad con la proporcionalidad inversa (en los ítems 6b y 9a).

5.8.2. CONCLUSIONES SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LA PROBABILIDAD

En la hipótesis (H2.4) analizamos el conocimiento especializado de la probabilidad, que fue insuficiente en los participantes, confirmando esta hipótesis.

De hecho es el que da peor resultado, dentro de los tres tipos de conocimiento, con un promedio muy bajo y, de las ocho argumentaciones que puntúan en este conocimiento, sólo una de ellas es correcta en más de la mitad de la muestra (75%) da argumentos correctos en la comparación de probabilidades (fue capaz de argumentar por qué dos probabilidades son iguales).

Estos argumentos correctos aumentan cuando se resuelve el problema. Por ejemplo, la mayoría de los que son capaces de calcular la probabilidad compuesta también usa razonamientos probabilísticos o combinatorios correctos y argumentar por qué un juego no es equitativo. Mayor dificultad tiene argumentar las respuestas a los ítems sobre conocimiento ampliado del contenido, como determinación de la apuesta en un juego, el cálculo de la probabilidad condicional, y los ítems relacionados con la evaluación de sesgos de razonamiento.

Además hubo poca variabilidad en las argumentaciones; en general el estudiante repite el mismo tipo de argumento en todos los ítems. Esto indica una muy pobre capacidad argumentativa, que podría ser común en otros contenidos matemáticos y no sólo síntoma de pobre conocimiento de la probabilidad. En todo caso, como la capacidad de dar una justificación matemática de la respuesta a un problema es un componente del conocimiento especializado del profesor, este es un punto en que se debe insistir en la enseñanza.

De nuevo en esta parte del cuestionario una proporción importante de futuros profesores en la muestra no exhibe una visión probabilística del problema en la justificación de su respuesta sino que utiliza argumentos aritméticos o razonamiento proporcional en un sentido determinista.

En particular el conocimiento especializado del significado frecuencial fue peor que el del clásico y subjetivo, con proporciones de argumentación válida que no superan el 23% en los 4 ítems evaluados. En ello también influye la presencia de sesgos relacionados con los conceptos de aleatoriedad e independencia, como los de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), heurística de representatividad (Tversky y Kahneman, 1974) o enfoque en el resultado (Konold, 1989).

CAPITULO 6.

EVALUACIÓN Y DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD

6.1. INTRODUCCIÓN

Como se indicó en el Capítulo 4, la primera práctica sobre probabilidad realizada por los participantes en el estudio constó de una primera parte, en que completaron el Cuestionario 1 (cuyos resultados se describen en el Capítulo 5) y una discusión colectiva de las soluciones al cuestionario, apoyadas por actividades de análisis, experimentación y simulación (que se describen en el Anexo 2).

Finalizada dicha práctica, era de esperar que los futuros profesores hubiesen incrementado su conocimiento común, ampliado y especializado de la probabilidad, siendo capaces de identificar las respuestas correctas a las tareas y los objetos matemáticos requeridos en su solución. Se esperaba también que los nuevos conocimientos les permitiesen realizar actividades de evaluación de respuestas de sus futuros alumnos, desarrollando su conocimiento del contenido y los estudiantes.

En este capítulo presentamos el Estudio 3, orientado a evaluar estos componentes del conocimiento matemático para enseñar probabilidad en una parte de la muestra de futuros profesores de educación primaria que participó en el Estudio 2, tras finalizar las actividades descritas en el Anexo 2. De esta manera, pretendemos cumplir el tercer objetivo de investigación, enunciado en la Sección 1.5. Cabe notar que algunos resultados del estudio se han publicado en Gómez, Batanero y Contreras (en prensa).

En primera instancia presentamos los objetivos e hipótesis propuestas para este estudio. Posteriormente describimos la metodología, con detalles acerca de la muestra participante y el contexto de aplicación, la construcción del cuestionario y su validez de contenido, así como la metodología para el análisis de los datos. Seguidamente, analizamos cada una de las tareas propuestas y los resultados observados. Finalmente, presentamos las conclusiones sobre los componentes evaluados del conocimiento matemático para enseñar probabilidad.

6.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Como se ha indicado, el Estudio 3 tiene como finalidad *evaluar nuevos componentes de los conocimientos matemáticos para enseñar probabilidad de futuros profesores de educación primaria* (Hill, Ball y Schilling, 2008), *que complementen los analizados en el Estudio 2.* Se utilizarán los tipos de tareas sugeridos por Godino (2009). Este objetivo se descompone en los siguientes:

> *O3.1*: *Evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes que ponen de manifiesto los futuros profesores de educación primaria, con respecto a algunas de las tareas propuestas en el cuestionario completado en el Estudio 2.*

Para lograr este objetivo, se elabora un cuestionario (Cuestionario 2) compuesto de cuatro de los problemas, que ya fueron resueltos por los futuros profesores participantes en el Estudio 2, y fueron elegidos por la dificultad que mostraron los futuros profesores en su resolución. Como se describió en la Sección 4.4, los mencionados problemas (así como los demás del Estudio 2) fueron resueltos y discutidos colectivamente en la segunda parte de la Práctica 1, con ayuda de simulación o experimentación en el aula (ver descripción detallada de las actividades en el Anexo 2).

Para cada uno de los problemas incluidos en el Cuestionario 2 se proporcionan cuatro o cinco posibles respuestas de niños ficticios y se pide a los futuros profesores indicar cuáles respuestas son correctas y cuáles no. Dichas respuestas incorrectas fueron elegidas tomando ejemplos de errores mostrados por los propios participantes en el Estudio 2 o citados en investigaciones previas. Además, se pide a los futuros profesores que identifiquen las posibles causas que llevan a cada una de las respuestas incorrectas y las argumenten.

> *O3.2*: *Evaluar el conocimiento especializado de la probabilidad que ponen de manifiesto los futuros profesores de educación primaria, al analizar el contenido*

matemático de las tareas propuestas.

Para ello se pide a los participantes la identificación de objetos matemáticos puestos en juego por niños en la resolución correcta de cada una de las cuatro tareas probabilísticas. Los participantes habían realizado actividades de análisis del contenido matemático implícito en otros problemas anteriormente; en concreto, en problemas de proporcionalidad y razonamiento algebraico elemental.

O3.3: *Analizar el desarrollo del conocimiento común y ampliado sobre la probabilidad en los futuros profesores de la muestra.*

Este objetivo se alcanza indirectamente, una vez analizadas las respuestas del Estudio 3 y comparando la competencia adquirida para identificar las respuestas correctas e incorrectas con los errores cometidos en el Estudio 2, al resolver ellos mismos estos problemas.

Hipótesis

El Estudio 3 estuvo orientado a analizar las siguientes hipótesis:

H3.1: *Se espera que la actividad de resolución y discusión colectiva del cuestionario y posteriores actividades de simulación contribuya a mejorar el conocimiento común y ampliado de los futuros profesores participantes en el estudio, que se hará visible en la identificación de las respuestas correctas a algunas preguntas del Cuestionario 1.*

Ya en el Capitulo 1 se justificó esta hipótesis, en base a la importancia resaltada por diversos autores de la simulación como recurso (Dugdale, 2001; Lee y Hollebrands, 2008; Contreras, 2011). Por otro lado, tanto en el Capítulo 4 como en el Anexo 2 se han descrito con detalles las actividades realizadas de discusión y corrección del Cuestionario 1 con los futuros profesores. En consecuencia es de esperar una evolución positiva de su conocimiento común y ampliado del contenido, que se pondrá de manifiesto al ser capaces de reconocer las soluciones correctas e incorrectas de niños a los mismos problemas.

H3.2: *Se espera observar en los participantes un conocimiento especializado de la probabilidad moderado en relación a cuatro contenidos seleccionados.*

Es de esperar que los futuros profesores sean capaces de identificar algunos objetos matemáticos que se ejercitan al resolver las tareas, teniendo en cuenta que ellos mismos las han resuelto antes, han discutido en clase con el formador las diferentes formas de llegar a respuestas correctas y han desarrollado actividades de análisis, experimentación o simulación como apoyo a su comprensión de la tarea. Este análisis (reconocimiento de objetos matemáticos en tareas escolares) lo había realizado varias veces en tareas de otro contenido, como geometría, álgebra elemental o proporcionalidad. Sin embargo, investigaciones previas como las de Chick y Pierce (2008) y Mohamed (2012) nos alertan de la dificultad que tienen los futuros profesores para identificar los objetos matemáticos en situaciones de enseñanza.

H3.3: *Se espera observar en los participantes un conocimiento de la probabilidad y el estudiante aceptable con respecto a cuatro contenidos seleccionados.*

Es de esperar que los futuros profesores desarrollen algún conocimiento sobre el contenido y los estudiantes al progresar su conocimiento matemático. De este modo aprenden a valorar sus respuestas y estrategias y también se preparan para comprender los errores de los estudiantes, ya que ellos los cometieron anteriormente.

La evaluación de respuestas de posibles estudiantes cumple también algunos requisitos, señalados por Suzuka et al. (2009), para desarrollar el conocimiento matemático para la enseñanza, debido a que proporcionan una oportunidad de explicitar y desarrollar las ideas matemáticas centrales en el currículo, y establecer conexiones entre las mismas, así como entre múltiples representaciones y métodos de solución. También permiten la práctica con actividades centrales a la enseñanza, como es la evaluación de los estudiantes y la identificación de sus formas de razonamiento y sus errores.

6.3. METODOLOGÍA DEL ESTUDIO 3

6.3.1. MUESTRA Y CONTEXTO DEL ESTUDIO 3

Los datos se tomaron durante el curso académico 2011-2012 en dos grupos de futuros profesores de segundo año y también en la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria", cuyo desarrollo se ha descrito en el Capítulo 4. En total participaron 81 futuros profesores, que trabajaron en parejas (en un caso un grupo de tres); en total 40 equipos y todos ellos a cargo de un mismo formador.

La mayoría de ellos (73) habían desarrollado el Cuestionario 1 completo, cinco habían contestado solo la primera parte, dos solo la segunda y uno ninguna. Todos habían asistido a la discusión colectiva de los problemas y a las actividades de simulación, pues la asistencia era obligatoria. Además, el formador de estos profesores preparó un material escrito con las soluciones correctas de todos los problemas y se los entregó a los futuros profesores (Anexo 4).

Este material formaba parte del examen final de la asignatura, por lo cual se esperaba que la mayoría de los futuros profesores lo estudiasen y participasen con atención a la discusión de los problemas. La presentación de *Power Point* con el resumen de todas las simulaciones y vínculos a los simuladores utilizados también se les entregó a los participantes.

Los datos del Estudio 3 se recogieron con un nuevo cuestionario (Cuestionario 2) como parte de la segunda práctica dedicada a la probabilidad, denominada "Análisis de respuestas de los estudiantes", ya descrita en el Capítulo 4. En este segundo cuestionario, se pide a los futuros profesores, trabajando en parejas o pequeño grupo analizar el contenido matemático y las respuestas de niños ficticios a cuatro de los problemas propuestos en el Cuestionario 1. Se pidió a las parejas de participantes argumentar por escrito lo mejor posible sus respuestas buscando mayor riqueza del análisis didáctico.

Esta práctica, al igual que la descrita en el Capítulo 5, fue objeto de evaluación para la calificación final de la asignatura, incluyéndose alguna pregunta relacionada en dicha evaluación, de modo que los futuros profesores debían estudiar la práctica y sus soluciones correctas.

Finalizada la recogida de datos, durante la segunda parte de la Práctica 2 se corrigieron colectivamente las respuestas en sesiones de seminario, donde, divididos en grupos de 14 a 20 alumnos (seis en total) y durante una sesión de una hora de duración, se adoptó el siguiente esquema:

1. El formador de profesores presenta un ítem y las soluciones ficticias de los niños. Pide a los futuros profesores que identifiquen las respuestas correctas e incorrectas.
2. Se abre un debate donde los diferentes estudiantes tratan de argumentar las causas de las soluciones incorrectas. Asimismo se discuten cuáles son los objetos matemáticos requeridos para las respuestas correctas.
3. Finalizadas las sesiones, el formador de profesores pone a disposición de los futuros profesores un documento en *Word* con las soluciones previstas a la actividad.

Puesto que, además de hacia la evaluación, este estudio están orientado al desarrollo del conocimiento de los participantes, pensamos que esta parte de la investigación puede incluirse en la denominada investigación basada en diseño, ya que se utiliza el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales (Godino, 2013).

Asimismo se trata de explicar y no solo describir cómo funciona el diseño en contextos reales, es decir, explicar mediante la actividad formativa la mejora del conocimiento de los participantes. El propósito final es investigar las posibilidades de mejora de la formación de los profesores, incluyendo en el diseño nuevas formas de aprendizaje para estudiarlas (La Orden, 2007).

6.3.2. CUESTIONARIO: PROCESO DE CONSTRUCCIÓN Y VALIDEZ DE CONTENIDO

Al igual que en el Estudio 2, la variable objeto de medición es un constructo inobservable: conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad por parte de futuros profesores de educación primaria. Por tanto hemos de inferirlo de las respuestas al cuestionario (León y Montero, 2002).

La construcción del Cuestionario 2 parte de la definición semántica de la variable, siguiendo la metodología descrita en Batanero y Díaz (2005), y tratando de seguir las recomendaciones metodológicas de APA, AERA y NCME (1999).

Definición semántica de la variable

Para la definición semántica de la variable parte de las definiciones de los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza en el modelo adoptado para nuestra investigación, como se describió en la Sección 4.2.4. Más concretamente, se trata de valorar dos de estos componentes: conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y el estudiante. Indirectamente se observará también el avance del conocimiento común y ampliado de la probabilidad.

En la Tabla 6.1 se especifican los contenidos evaluados en cada ítem respecto a los diferentes significados e la probabilidad. Por restricciones de tiempo se eligieron únicamente cuatro ítems del Cuestionario 1 que se desarrollaron en el Cuestionario 2 añadiendo nuevas preguntas y respuestas posibles a cada ítem.

En concreto se eligieron cuatro ítems en los que los futuros profesores habían tenido dificultades en el Cuestionario 1 (ítems 1-3) o bien dieron respuestas de bajo nivel cognitivo (ítem 4) y además teniendo en cuenta los tres significados de la probabilidad. Respecto a la evaluación del conocimiento especializado del contenido, en la Tabla 6.2 se analiza con detalle los contenidos matemáticos primarios y secundarios en cada ítem. Respecto a la evaluación del conocimiento del contenido y el estudiante, se incluyeron los principales sesgos de razonamiento y dificultades conceptuales ligadas a los ítems elegidos y descritas en la investigación previa (Tabla 6.1).

Tabla 6.1. Categorías de conocimiento del profesor consideradas en el Cuestionario 2

	Significado de probabilidad	Ítem
Conocimiento especializado del contenido		
Sesgo de equiprobabilidad; experimento compuesto	Clásico /Subjetivo	1
Noción de juego equitativo y esperanza matemática	Clásico	2
Percepción de la aleatoriedad y Probabilidad simple	Frecuencial	3
Comparación de probabilidades	Clásico	4
Conocimiento del contenido y el estudiante		
Predecibilidad; enfoque en el resultado	Clásico /Subjetivo	1 (A1)
Razonamiento combinatorio; sesgo de equiprobabilidad	Clásico /Subjetivo	1 (A2, A3, A4)
Estrategias aditivas al comparar probabilidades	Clásico	2 (B1)
Falta de proporcionalidad al establecer el premio	Clásico	2 (B2, B4)
Añade condiciones innecesarias al juego equitativo	Clásico	2 (B3)
Heurística de representatividad	Frecuencial	3 (C1)
Falta de percepción de la variabilidad	Frecuencial	3 (C3)
Equiprobabilidad	Frecuencial	3 (C4)
Incomprensión del enunciado	Clásico	4 (D1)
Estrategia univariada al comparar probabilidades	Clásico	4 (D2)
Razonamiento proporcional insuficiente	Clásico	4 (D4)

Podemos mostrar evidencias de validez de contenido para el especificado en la Tabla 6.1, pues se recoge una muestra representativa de los contenidos que se pretenden evaluar (Messick, 1998). También en este caso se hizo una planificación cuidadosa de los ítems y se analizará a lo largo del capítulo cómo cada ítem contribuye a la medida del constructo evaluado (Martínez Arias, 1995).

Al igual que en el Cuestionario 1, también en este caso contamos con ayuda de investigadores externos (citados en el Capítulo 5) para el análisis de contenido. Asimismo contamos con el análisis previo del significado institucional de referencia; aunque ahora se recoge una muestra menor de contenidos, al menos es representativa de los diversos significados de la probabilidad y de los conceptos más importantes incluidos en el currículo. Del mismo modo, se recogen las principales dificultades previstas para los niños en estos ítems.

Tabla 6.2. Objetos matemáticos evaluados con el Cuestionario 2

	Sign.	Objeto matemático	Primario	Secundario
Sit. Prob.	Cla	SPC. Previsión de probabilidad en juegos de azar		4
	Frec	SPF. Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados	3	
Conceptos	Ax	CA1. Espacio muestral		2
		CA2. Variable aleatoria; esperanza matemática	2	
	Cla	CC1. Juego de azar	2	1
		CC2. Casos favorables; casos posibles	1, 4	2
		CC3. Probabilidad		1, 2, 4
		CC4. Juego equitativo	2	
		CC5. E. compuesto, dependencia, independencia	1, 2	
	Frec	CF2. Ensayo; ensayos repetidos	3	
		CF3. Frecuencia (absoluta, relativa)	3	
		CF4. Valor estimado de la probabilidad	3	
Propiedades	Cla	PC2. Equiprobabilidad de sucesos elementales		2
		PC3. C. favorables: resultados que favorecen	1, 4	2
		PC4. C. posibles: todos los resultados	4	
		PC5. Probabilidad: valor objetivo, calculable		1, 4
		PC6. Regla de Laplace		4
	Frec	PF2. Atributos equiprobables o no	3	
		PF6. Tiende a estabilizarse	3	
		PF7. Varía en cada serie de N ensayos	3	
Procedimientos	Cla	PRC1. Analizar juegos de azar	2	
		PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles	1	
		PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables	1, 4	
		PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables		1, 4
		PRC5. Comparar probabilidades con razonamiento proporcional	4	
		PRC6. Aplicar la regla de Laplace, experimentos simples		4
		PRC7. Decidir si un juego es equitativo	2	
		PRC8. Asignar probabilidad conjunta exp. independientes		1, 2
	Frec	PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos	3	
		PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación	3	

Tipos de ítems

Se decidió usar *ítems de respuesta construida por el alumno* (Millman y Greene, 1989) que permiten evaluar no sólo la respuesta correcta, sino también las explicaciones. Así es posible dar una calificación parcial a la respuesta (y no simplemente dicotómica), diferenciando respuesta y justificación.

Las consignas se han formulado siguiendo la metodología propuesta por Godino (2009) y teniendo en cuenta el conocimiento matemático utilizado por el profesor en la resolución de problemas profesionales, como puede ser el análisis de los problemas, identificando lo matemáticamente relevante en la situación o bien evaluando a los estudiantes (Llinares, 2009). En la Práctica "Análisis de respuestas de estudiantes" (Anexo 3) se dio la siguiente instrucción a los futuros profesores:

> A continuación presentamos algunas de las preguntas del cuestionario sobre probabilidad, junto con algunas de las respuestas obtenidas en las mismas. Para cada una de las preguntas:
> 1. Señala cuál o cuáles de las respuestas son correctas
> 2. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
> 3. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea

En la pregunta 1, *señala cuál o cuáles de las respuestas son correctas*, comprobaremos si los futuros profesores han mejorado su conocimiento, respecto al mostrado en el Estudio 2 y como consecuencia de la actividad desarrollada en la clase.

La segunda pregunta tiene como objetivo analizar el conocimiento especializado del contenido sobre probabilidad y las otras dos evaluar y desarrollar el conocimiento del contenido y los estudiantes. También constituyen un recurso didáctico para el reconocimiento del aprendizaje de los alumnos en su futura práctica profesional (Godino, 2009).

6.3.3. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS

Los datos se analizan por ítem, en las secciones siguientes, y globalmente, en la Sección 6.8.

Para cada ítem, en primer lugar se encuentra el análisis epistémico siguiendo el método propuesto por Godino (2009) y también utilizado por Mohamed (2012). Se describe formalmente la solución correcta, explicitando los objetos matemáticos involucrados en esta solución, entre aquellos que conforman el significado de referencia. Este análisis previo apoya evidencias de validez de contenido del instrumento. Seguidamente se describe el análisis de resultados, por considerar que esta organización facilita la lectura del documento y la comprensión de los resultados.

El análisis de las respuestas a las situaciones didácticas planteadas en el Cuestionario 2 utiliza una metodología mixta: análisis cualitativo (de contenido y semiótico) y análisis estadístico. En cada ítem se identifican categorías de respuesta, que se describen mostrando un ejemplo (transcripción literal) para facilitar su comprensión. La categorización fue seguida de una codificación para facilitar el análisis cuantitativo de ítems que se presenta en tablas de frecuencias y porcentajes para cada categoría de respuesta. Adicionalmente se han clasificado y categorizado las explicaciones utilizadas para apoyar la respuesta, presentando también las correspondientes tablas de frecuencia.

También se analizan los objetos matemáticos correcta e incorrectamente identificados en las tareas.

A nivel global (Sección 6.8) el estudio estadístico se completa con estadísticas descriptivas del cuestionario por componente de contenido evaluado, obtenidas del número de respuestas correctas a la pregunta correspondiente. Esto es, la puntuación asignada al conocimiento especializado del contenido será el número de objetos correctamente identificados, y la asignada al conocimiento del contenido y los estudiantes será el número de respuestas de estudiantes correctamente identificadas.

Asimismo, se analizó comparativamente la dificultad de los ítems con el fin de establecer cuáles habían resultado más fáciles y cuáles más difíciles para nuestra muestra de futuros profesores. En la evaluación del conocimiento especializado del contenido se toman como referencia medidas descriptivas del número de objetos correctamente identificados. En la evaluación del conocimiento del contenido y los estudiantes se toman como referencia tanto la proporción de respuesta correcta como la proporción de explicaciones satisfactorias a las respuestas incorrectas de los niños ficticios.

Para este cuestionario no se realiza un estudio formal de fiabilidad y generalizabilidad, pues tanto el número de ítems como el de estudiantes son pequeños. Quedaría hacer este estudio para un trabajo futuro. El análisis y resultados en cada ítem se incluyen a continuación.

6.4. SESGO DE EQUIPROBABILIDAD

6.4.1. ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA

Ítem 1. ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra al lanzar tres veces un dado? Marca la respuesta correcta:

- Obtener un 5, un 2 y un 3_____
- Obtener dos veces un 5 y una vez el 3____
- Obtener tres veces el 5____
- Todos estos resultados son igualmente probables____

¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos? ¿Cuál o cuáles?

Respuestas de los alumnos

A1. *"Todos son igualmente probables; es un juego de azar, no se puede predecir"*

A2. *"Es más difícil obtener tres veces el 5; los otros dos resultados tienen la misma probabilidad"*

A3. *"Es más fácil obtener un 5, un 2 y un 3, porque tienes tres casos diferentes: 523, 325 y 532"*

A4: *"Es más difícil obtener tres veces el 5; para los otros resultados tienes más casos y para este solo 1"*

A5. *"Es más difícil obtener tres veces el 5, porque sólo tienes un resultado; para dos veces el 5 y una el tres tienes tres resultados (553, 535, 355); para el 5, 2, 3 tienes 6 resultados (523, 532, 325, 352, 235, 253)".*

Este ítem estuvo orientado en el Estudio 2 a evaluar el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), como parte del conocimiento ampliado del significado clásico de la probabilidad (Sección 5.6.3). Se eligió para el Estudio 3 porque dos tercios de los futuros profesores mostraron el sesgo de equiprobabilidad y solo un tercio resolvió de forma correcta la tarea en el Estudio 2. Por otra parte, para su futura labor docente, es importante que ellos sepan identificar el sesgo en sus alumnos y convertirlo en concepciones correctas.

Para dar la solución correcta al problema (pregunta 2), en primer lugar hay que considerar los conceptos de aleatoriedad, experimento aleatorio compuesto, independencia, espacio muestral, casos favorables, juego de azar y probabilidad.

También intervienen propiedades: equiprobabilidad de los sucesos elementales, casos favorables son resultados que favorecen a un suceso en particular, y que, en la aproximación clásica, la probabilidad es un valor objetivo, calculable porque sólo depende del número de resultados. También utilizarían conceptos numéricos (número, proporción) junto con sus propiedades.

Como procedimientos para llegar a una respuesta correcta los alumnos necesitarían asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes, diferenciar casos favorables y no favorables, enumerar o contar los casos favorables y posibles, distinguir sucesos elementales equiprobables; o asignar la probabilidad de sucesos compuestos con regla de Laplace, que es una solución alternativa.

En su forma original, la pregunta es cerrada (Serrano, 1996) y no requiere justificación de la respuesta; las fuentes de nuestros ejemplos han sido las explicaciones o los comentarios que han escrito voluntariamente algunos de los participantes en nuestro Estudio 2. En las preguntas de evaluación del conocimiento de la probabilidad y los estudiantes esperamos unas respuestas similares a las siguientes, que se encontraron en el Estudio 2:

- La respuesta A1 es incorrecta; aunque en un juego de azar no se puede predecir el resultado exacto que ocurrirá, si se puede decir cuál es más probable. Este razonamiento denota baja comprensión de la aleatoriedad, en particular de la propiedad de impredecibilidad en un experimento aleatorio; se confunde la imposibilidad de predecir un resultado particular con la de conocer previamente su probabilidad, sería una forma del “enfoque en el resultado” (Konold, 1989).

- La respuesta A2 es parcialmente correcta, teniendo en cuenta que la primera parte es correcta, pero la segunda no. El alumno no enumera los casos favorables; y muestra una forma de sesgo de equiprobabilidad, aunque identifica al menos probable de los tres sucesos, no distingue al suceso más probable entre los dos restantes. En el Estudio 2 el 18% de los participantes fueron inconsistentes al responder con equiprobabilidad a la pregunta del más probable y con “obtener tres veces el 5” a la pregunta del menos probable. Indica una mezcla entre sesgo de equiprobabilidad y una intuición correcta de que algunos resultados son menos posibles de ocurrir, o una mezcla de intuiciones correctas por experiencias previas y confusión entre equiprobabilidad y aleatoriedad.

- La respuesta A3 es incorrecta, ya que la enumeración de casos para la primera opción es incompleta y le falta la segunda parte, distinguir al suceso menos probable. Navarro-Pelayo (1994) observó con alta frecuencia el error de enumeración incompleta asociado a una enumeración no sistemática. La identificación de los sucesos más y menos probables en experimentos compuestos en muchos casos es contraintuitiva; llegar a la respuesta correcta es más efectivo con el uso de procedimientos sistemáticos o con la aplicación de razonamiento combinatorio, aunque la pregunta no requiera hacer explícita la enumeración, ni del espacio muestral completo ni de los casos favorables.

- La respuesta A4 es parcialmente correcta, pues la respuesta es incompleta. La primera parte de su respuesta, que corresponde a la segunda pregunta, es correcta; y no responde a la primera pregunta. El alumno identifica al menos probable de los tres sucesos, pero no compara entre los dos restantes para indicar cuál suceso es más probable. El alumno omite la enumeración de todos los casos favorables para cada suceso, se conforma con decir que éstos tienen más casos que el más difícil de obtener. En nuestro Estudio 2 fue común apoyar la elección del menos probable con este argumento sin hacer mención a los casos favorables para las otras opciones; ya sea por centrarse en responder únicamente a la última pregunta o por evadir la enumeración de casos favorables a los otros sucesos.

- La respuesta A5 es correcta; muestra un adecuado razonamiento combinatorio. Este tipo de respuestas también se observó en el Estudio 2, aunque con baja frecuencia; recordamos que la justificación no era requerida y solo un 27% respondieron correctamente ambas preguntas.

6.4.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Como se ha indicado, se realiza un estudio estadístico del número de objetos matemáticos correctamente identificados (Tabla 6.3). Aunque casi todos los grupos son capaces de identificar alguno de los objetos citados, el número dado es pequeño: 52,5% de los equipos de futuros profesores identifican entre dos y tres objetos matemáticos en esta tarea, 8 equipos (20%) no contestan esta pregunta, 3 (7,5%) identifican sólo uno, 4 equipos (10%) identifican 4 objetos matemáticos y otros 4 equipos (10%) identifican 5.

Tabla 6.3. Número de objetos matemáticos identificados por los futuros profesores en la tarea 1

Número de objetos matemáticos identificados	Frecuencia	Porcentaje
0	8	20
1	3	7,5
2	10	25
3	11	27,5
4	4	10
5	4	10

La mayoría de los objetos matemáticos identificados son propios del contenido probabilístico y algunos hacen parte de otros contenidos, por ejemplo números, que también se emplean en la actividad. En total se identifican 27 objetos matemáticos diferentes por alguno de los grupos:

- Conceptos: azar, casos de azar, casos favorables, casos posibles, experimento aleatorio, fracciones, números, números enteros, números naturales, posibilidades, probabilidad, sistemas de numeración.
- Propiedades: carácter aleatorio de algunas experiencias, proporcionalidad, regla de Laplace, suceso más probable.

Tabla 6.4. Frecuencia de objetos matemáticos identificados por más de un grupo en la tarea 1

	Objeto matemático	Frecuencia	Porcentaje
Concepto	Probabilidad	30	75
	Números naturales	4	10
	Casos favorables	3	7,5
	Fracciones	3	7,5
	Números	3	7,5
	Casos posibles	2	5
	Experimento aleatorio	2	5
Propiedad	Proporcionalidad	2	5
	Suceso más probable	2	5
	Regla de Laplace	2	5
Procedimiento	Enumeración de posibilidades	10	25
	Combinatoria	3	7,5
	Asignación de probabilidades	3	7,5
	Suma	3	7,5
	Conteo	2	5

- Procedimientos: combinatoria, enumeración de posibilidades, asignación de probabilidades, conteo, comparar casos posibles; distinción entre lo posible, lo seguro y lo probable; distinguir lo más probable de lo menos; distinguir lo seguro y aquello que es posible pero no seguro; predicción; razonamiento proporcional.

- También un equipo cita el lenguaje del azar.

Los objetos correctamente identificados por más de un grupo se presentan en la Tabla 6.4. El objeto matemático identificado con mayor frecuencia es el de probabilidad (75% de equipos), pocos grupos especifican que se trata de una asignación clásica, tres (7,5%) mencionan la asignación de probabilidades y solo dos (5%) hacen referencia a la regla de Laplace. El segundo objeto matemático identificado es un procedimiento, la enumeración de posibilidades (25% de equipos). Observamos que se tiende a identificar más conceptos que procedimientos, o propiedades.

También se identificaron objetos que no aparecen en la actividad, tales como asignación frecuencial, estadística, estimación del grado de probabilidad de un suceso, suma; o se hace referencia a objetos no matemáticos como el sentido común o estrategias. No llegan a nombrarse las ideas de experimento aleatorio compuesto, espacio muestral, independencia; ni los procedimientos distinguir sucesos elementales equiprobables, asignar probabilidad conjunta en experimentos independientes, diferenciar casos favorables y no favorables.

En consecuencia, los futuros profesores muestran algún conocimiento especializado del contenido en relación al sesgo de equiprobabilidad, pero aún insuficiente para su futura práctica profesional.

6.4.3. IDENTIFICACIÓN DE RESPUESTAS ERRÓNEAS

La Tabla 6.5 resume las valoraciones de los futuros profesores a las respuestas de alumnos ficticios. La identificación adecuada de las cinco respuestas como correctas e incorrectas, fue hecha solo por dos equipos (5%); 20 (50%) acertaron la respuesta correcta pero fallaron en la identificación de una de las otras cuatro; un equipo (2,5%) indica como correcta a la tercera y no califica las restantes. Otro no responde esta pregunta.

Tabla 6.5. Frecuencia y porcentaje de equipos según evalúan las respuestas de alumnos ficticios

	A1 (incorrecto)		A2 (incorrecto)		A3 (incorrecto)		A4 (p. correcto)		A5 (correcto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta	2	5			11	27,5	24	60	36	90
Incorrecta	33	82,5	31	77,5	18	45	3	7,5	1	2,5
Parcialmente correcta	3	7,5	7	17,5	10	25	11	27,5	1	2,5
No responden	2	5	2	5	1	2,5	2	5	2	5
Total	40		40		40		40		40	

La respuesta correcta (A5) fue bien identificada por la mayoría de los equipos (90%), lo que indica un aprendizaje producido en la discusión colectiva realizada después de solucionar individualmente el Cuestionario 1, pues en el Estudio 2, pocos respondieron en forma correcta a ambas preguntas de este ítem (27,4% de los 157).

La respuesta incorrecta debido al sesgo de equiprobabilidad (A1) fue bien identificada por la mayor parte de los equipos (82,5%), lo que también indica aprendizaje, teniendo en cuenta que en el Estudio 2 contestaron con sesgo de equiprobabilidad, en forma consistente en ambas preguntas, 49% de los participantes.

La respuesta incorrecta por fallar en la primera pregunta y acertar en la segunda (A2) se reconoce por 77,5% de los equipos y fue calificada como parcialmente correcta por 17,5%. La respuesta parcialmente correcta por acertar en la segunda pregunta y tener incompleta la primera (A4) fue bien identificada por 27,5% de los equipos, siendo la más difícil de evaluar.

En resumen, la mayoría de futuros profesores supieron identificar la respuesta correcta y algunas incorrectas; evidencia del aprendizaje logrado con las actividades de simulación y discusión colectiva, en comparación con los resultados de este mismo ítem en el Estudio 2. El sesgo de equiprobabilidad se logró detectar en los niños ficticios, no así los fallos en razonamiento combinatorio.

6.4.4. IDENTIFICACIÓN DE CAUSAS DE ERROR

Para analizar las explicaciones de los equipos respecto a la causa del error se han tenido en cuenta, como argumentaciones correctas los razonamientos esperados en el análisis a priori. Se analizan también otras posibles explicaciones, observando las siguientes categorías:

Equiprobabilidad. Estos equipos identificaron, en la respuesta del niño ficticio el sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992), que se discutió durante la corrección del Cuestionario 1. Se argumenta que el niño presenta este sesgo, puesto que asume que los sucesos son equiprobables y no reconoce que los sucesos tienen probabilidades diferentes. En el ejemplo siguiente, el grupo, además, reconoce que, aunque los sucesos aislados en un proceso aleatorio son impredecibles, se puede calcular la probabilidad de cada suceso:

> Para la respuesta de A1: El alumno se ha dejado llevar por la hipótesis de equiprobabilidad. Además, aunque es un juego de azar y no se puede predecir con certeza (adivinar) el resultado, sí podemos calcular las probabilidades para cada uno de los resultados (E37).

Concepción de aleatoriedad como equiprobabilidad. Es una variante de la anterior justificación. Estos equipos indicaron explícitamente que el niño responde en base a su concepción personal sobre el azar, en la que asocia equiprobabilidad como una propiedad del azar. Esta fue una de las concepciones sobre aleatoriedad que se observaron en el desarrollo histórico del tema de acuerdo a Batanero y Serrano (1999):

> Para la respuesta de A1: Al apoyarse en la idea del azar, al implicar éste cualquier posibilidad, se lleva a pensar que tienen igual probabilidades las distintas series de números (E14, E15).

Razonamiento combinatorio. Estos equipos indicaron que el niño ficticio se equivoca en su percepción o asignación de probabilidades debido a una enumeración incompleta de casos favorables a cada suceso, reconociendo la importancia del razonamiento combinatorio para resolver el problema; por ejemplo:

> Para la respuesta de A3: Este alumno ha puesto sólo tres casos diferentes porque solo hay 3 números (5, 2, 3) pero no ha tenido en cuenta todas las posibles combinaciones (E16).

Cálculo de probabilidades incorrecto. Estos equipos argumentaron que el niño ficticio falló porque no calcula el número de casos favorables a cada posible respuesta; en realidad subyace falta de razonamiento combinatorio por parte del niño ficticio, pero los futuros profesores no lo explicitan. Sin embargo, sí muestra que el futuro profesor es capaz de hacer una enumeración correcta, por ejemplo:

> Para la respuesta de A4: Responde correctamente al indicar que "es más difícil obtener tres veces el 5, para los otros resultados tienes más casos y para este solo 1". Pero para que la respuesta fuese perfecta podría haber aclarado el alumno que para la opción 1 (un 5, un 2, y un 3) existen seis casos posibles y que para la opción 2 (dos veces el 5 y una el 3) existen 3 casos. Le ha faltado precisar y detallar un poco la respuesta, ya que no aclara los casos posibles de las distintas opciones y de que una tiene un mayor número de casos posibles de salir que la otra (E21).

Ratifican la parte correcta. Estos equipos compararon la respuesta del niño ficticio con la respuesta correcta, identificando la parte correcta de la respuesta a las preguntas formuladas, pero no completan la parte incorrecta ni mencionan posibles intuiciones incorrectas o estrategias que llevan al error:

> Para la respuesta de A2: Tiene razón que es más difícil obtener tres veces 5, pero no hace una diferencia entre los dos otros casos que tienen diferente posibilidad (E38).

Indican la respuesta a la parte incorrecta. Es una variante de la anterior, un poco más precisa. Estos equipos confirmaron que hay una parte correcta en la respuesta del niño ficticio y dicen cuál sería la respuesta correcta a la parte que está incorrecta:

> Para la respuesta de A3: Sí que es más fácil obtener un 5, 2 y 3 pero porque tiene 6 casos diferentes, no 3 (E27).

Otra explicación. Pocos equipos dieron como posible causa de respuesta incorrecta error de cálculo, relevancia del orden, simultaneidad en los lanzamientos, creencias personales o intuición, por ejemplo:

> Para la respuesta de A2: El niño no entiende que los números son distintos y es por ello que piensa que (5, 5, 3) y (5, 2, 3), tienen la misma probabilidad (E39).

Interpretación errada del enunciado. Unos pocos equipos interpretaron de forma alternativa el enunciado del problema; por ejemplo:

> En general, escribe: Todos los niños hacen el mismo razonamiento, ya que piensan que hay más posibilidad de que salgan números distintos, porque se forman más números diferentes. Cree que sacar 3 veces el mismo número es menos probable que obtener números diferentes determinados (E13).

Las anteriores explicaciones se utilizaron para exponer posibles intuiciones o estrategias incorrectas para todas o casi todas las respuestas erróneas de los niños ficticios (Tabla 6.6), lo cual es razonable, teniendo en cuenta que tres de ellas son variantes de posibles fallos en el razonamiento combinatorio (A2, A3 y A4) y en dos está presente el sesgo de equiprobabilidad (A1 y A2).

La explicación mayoritaria del error de A1 (que indica que en un juego de azar no se puede predecir el resultado) fue el sesgo de equiprobabilidad, ya sea identificando explícitamente este sesgo descrito por Lecoutre (1992) o por asociar equiprobabilidad y aleatoriedad, en forma incorrecta. Le siguió la falta de razonamiento combinatorio en la resolución por parte del niño.

Las explicaciones expuestas para justificar la respuesta parcialmente correcta de A2 (que identifica correctamente el suceso menos probable pero no el más probable) fueron más diversas. Predominaron las respuestas de tipo normativo, donde los equipos no explicaron la posible fuente del error; solo indicaron la parte correcta de la respuesta o se centran en la parte incorrecta de la respuesta. También se usaron algunas explicaciones basadas en la equiprobabilidad.

Tabla 6.6. Explicaciones de posibles intuiciones o estrategias incorrectas en el ítem 1

Explicación	A1 (incorrecto)		A2 (incorrecto)		A3 (incorrecto)		A4 (P. correcto)		A5 (correcta)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Equiprobabilidad	11	27,5	7	17,5						
Concepción de aleatoriedad como equiprobabilidad	8	20,0	1	2,5	1	2,5				
Razonamiento combinatorio	7	17,5	5	12,5	7	17,5			1	2,5
Cálculo incorrecto de probab.					5	12,5	11	27,5	4	10,0
Ratifican lo correcto	1	2,5	7	17,5	2	5,0	1	2,5		
Dan respuesta a parte incorrecta	2	5,0	9	22,5	8	20,0				
Otras explicaciones	7	17,5	6	15,0	3	7,5				
Comprensión errada			3	7,5	2	5,0	2	5,0	1	2,5
No argumenta	4	10,0	2	5,0	12		26	65,0	34	85,0
Total	40		40		40		40		40	

Las explicaciones utilizadas para el error de A3 (reconocer el suceso más probable, pero calcula incorrectamente la probabilidad) también resultaron diversas. El 30% de los equipos se refieren a una respuesta incompleta, ya sea por fallos en el razonamiento combinatorio o por una explicación insuficiente. El 25% utilizaron respuestas de tipo normativo, 20% se centran en la parte incorrecta de la respuesta y el 5% en la parte correcta.

La explicación mayoritaria para la parte incorrecta en la respuesta de A4 (identifica únicamente el suceso menos probable) fue el cálculo de probabilidades incorrecto; cabe recordar que 60% la calificaron como correcta, caso en el cual no se requería contestar esta pregunta.

En resumen, la mayoría de los grupos identificó la respuesta correcta A5, por tanto no la explicó, y también identificó las incorrectas o las partes incorrectas del resto. Se hizo bastante referencia al sesgo de equiprobabilidad, lo que indica que este sesgo fue bien identificado por los futuros profesores; también se reconoció la falta de capacidad combinatoria y se completó la parte incorrecta de las respuestas.

Por tanto, la mayor parte de los equipos fue ahora capaz de resolver este problema, en el que tuvieron tantos fallos en el Estudio 2, mostrando una mejora de su conocimiento común del contenido; también, mostraron cierto conocimiento del contenido y los estudiantes respecto al sesgo de equiprobabilidad y la capacidad de enumeración.

6.5. JUEGO EQUITATIVO

6.5.1. ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA

Ítem 2. Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos.

- Miguel gana un euro si el producto es par
- Si el producto es impar, Luis gana un euro

¿Te parece que el juego es equitativo? ¿Por qué? ¿Cuánto tendría que ganar Luis, si Miguel gana 1 euro, para que el juego sea equitativo?

Respuestas de los alumnos

B1. "Miguel tiene 2 posibilidades de ganar más que Luis; considero que sea justo que Luis gane 2 euros"

B2. "(Luis debe ganar) 6 euros para que sea justo porque tiene menos posibilidades»,

B3. "Si a Luis le diesen 3 euros estaría equilibrado, porque por cada vez que le toque a Miguel le dan un euro; pero sólo si le dan a Luis tres oportunidades, ya que Miguel tiene tres veces más oportunidades de ganar"

B4. "El juego no es justo porque Miguel tiene muchas más oportunidades; aunque le des más dinero a Luis cuando gane, sigue sin ser justo, porque tiene menos posibilidades de ganar"

B5. "Para que el juego sea justo Luis tiene que ganar 3 euros."

Este ítem estuvo orientado en el Estudio 2 a evaluar la comprensión del juego equitativo (Secciones 5.5.6 y 5.6.1). Se eligió para el Estudio 3 para ver la evolución de la comprensión de este concepto como consecuencia de las actividades formativas posteriores a la solución individual del cuestionario y porque en investigaciones previas con futuros profesores (Azcárate, 1995; Mohamed, 2012) se observó falta de comprensión del juego equitativo.

Como indicamos en el Capítulo 5, mientras que la comprensión del juego equitativo forma parte del conocimiento común de la probabilidad, el cálculo de la ganancia esperada para convertirlo en equitativo requiere poner en juego conocimiento ampliado de la probabilidad pues el concepto de esperanza matemática no aparece en el currículo de primaria. En el Estudio 2 solo la mitad de los futuros profesores respondieron en forma correcta a la segunda pregunta y 14% no la respondieron, aunque 90% respondieron la primera pregunta en forma correcta.

Para dar la solución correcta del problema, en primer lugar hay que considerar los conceptos de aleatoriedad, experimento aleatorio compuesto, independencia, espacio muestral, casos favorables, probabilidad, juego equitativo, variable aleatoria y esperanza matemática. También intervienen propiedades, como que los sucesos elementales del experimento compuesto son equiprobables, la probabilidad es un valor objetivo y calculable, regla de Laplace y que un juego es equitativo si la esperanza de ganancia de los dos jugadores es la misma. Adicionalmente se utilizarían conceptos numéricos (número, proporción, proporcionalidad inversa) junto con sus propiedades.

Como procedimientos para llegar a una respuesta correcta los alumnos necesitarían enumerar o contar los casos favorables y posibles, decidir si un juego es equitativo y asignar probabilidad a sucesos de experimentos independientes. También tienen que calcular la esperanza de ganar de cada jugador, como producto de su probabilidad por el premio e igualar estas esperanzas, mediante proporcionalidad inversa.

Cañizares (1997) indagó en niños sus concepciones sobre juego equitativo, con una pregunta en su cuestionario y profundizando en las entrevistas; sus respuestas nos sirvieron de referencia para los ejemplos dados en este ítem. En el análisis de las respuestas de cinco alumnos ficticios por parte de los futuros profesores, esperamos unas respuestas similares a las siguientes:

- La respuesta del alumno B1 es parcialmente correcta; la segunda parte está errada, aunque la primera es correcta. El alumno ha estimado bien la razón de posibilidades a favor de cada jugador, cuando dice "Miguel tiene dos posibilidades de ganar más que Luis", en la medida que esta razón es 27:9. Sin embargo, el niño compara estas posibilidades en forma aditiva y no multiplicativa para establecer el valor del premio; en consecuencia establece un premio incorrecto. En la investigación de Cañizares (1997) se observó una variedad de interpretaciones para juego equitativo, como este tipo de respuesta.

- La respuesta del alumno B2 es incorrecta; el niño tiene una buena percepción de la ausencia de equiprobabilidad a favor de los dos jugadores, pero no es capaz de calcular correctamente la apuesta para convertir el juego en equitativo. El alumno B2 observa que un jugador (Miguel) tiene más probabilidades que el otro (Luis), pero falla al establecer el valor del premio, ya sea por la ausencia de capacidad de cuantificación de sus probabilidades o por un desconocimiento de que en un juego equitativo la razón de las ganancias debe ser el inverso de la razón de probabilidades. El niño estaría interpretando la equidad del juego con un razonamiento proporcional, pero incompleto quien tiene menos posibilidades debería tener más ganancia en una cantidad; lo cual es cierto, pero estima una cantidad considerablemente mayor que la correcta. Este tipo de respuesta no sólo se observa en niños, también la dan algunos adultos como los participantes de nuestro Estudio 2, un pequeño porcentaje utilizó argumentos similares al de B2.

- La respuesta del alumno B3 también es parcialmente correcta; la primera parte es correcta, pero la segunda está errada. El niño muestra haber calculado correctamente las probabilidades y también un buen razonamiento proporcional al haber calculado correctamente el premio de Luis, que hace equitativo el juego. El niño se equivoca al añadir una condición innecesaria, que se dé tres oportunidades a Luis; esta condición implica un cambio en el juego, y, dado este cambio, Luis tendría ventaja en el juego. Esta condición fue sugerida en las entrevistas a algunos niños en la investigación de Cañizares (1997).

- La respuesta del alumno B4 es incorrecta. El niño muestra poco razonamiento combinatorio (no es capaz de calcular el número de casos favorables), tampoco comprende la idea de juego equitativo; piensa que aunque se cambie la cantidad de dinero que gana cada jugador seguiría sin ser equitativo. Esta creencia fue común en los niños más jóvenes en la investigación de Cañizares (1997).

- El alumno B5 da una solución correcta; muestra idea clara del juego equitativo, buen razonamiento probabilístico y razonamiento proporcional de nivel IIIB, según la clasificación de Noelting (1980). En Cañizares (1997) más de la mitad de los niños tenía una intuición correcta con respecto a juego equitativo.

6.5.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Para analizar el conocimiento especializado del contenido, se estudia el número de objetos correctamente identificados en la Tabla 6.7, donde se observa la alta variabilidad en la identificación de objetos matemáticos en esta tarea: nueve equipos de futuros profesores (22,5%) identificaron dos objetos matemáticos; cinco (12,5%) reconocieron 6; 4 (10%) identificaron 4, o 5, o 7 objetos matemáticos y sólo un equipo (2,5%) llega a describir 8. Como en los demás ítems, ocho equipos (20%) no contestan esta pregunta.

Tabla 6.7. Número de objetos matemáticos identificados por los futuros profesores en la tarea 2

Número de objetos matemáticos identificados	Frecuencia	Porcentaje
0	8	20,0
1	2	5,0
2	9	22,5
3	3	7,5
4	4	10,0
5	4	10,0
6	5	12,5
7	4	10,0
8	1	2,5

La mayoría de objetos identificados hace parte de otros contenidos, por ejemplo números y operaciones, que también se emplean en la actividad. En total se identifican 42 objetos matemáticos diferentes por alguno de los grupos:

- Conceptos: azar, casos favorables y posibles, esperanza matemática, fracciones, grado de probabilidad de un suceso, juego equitativo, magnitudes, números, números enteros, números naturales, probabilidad, proporción, razón, razonamiento proporcional.
- Propiedades: carácter aleatorio de algunas experiencias, equidad, equivalencia, impar, par, m.c.m., relaciones entre números, propiedades de los números pares e impares, proporcionalidad, regla de Laplace, relación entre los factores de un producto y el resultado esperado.
- Procedimientos: aritmética, asignación de probabilidad, cálculo, comparación, conteo, división, enumeración de posibilidades, multiplicación, operaciones aritméticas, predicción, producto, regla de tres, regla de tres inversa, resta, simplificación, suma.
- También un equipo cita el lenguaje de azar.

Los objetos correctamente identificados por más de un grupo se presentan en la Tabla 6.8. El más frecuente fue el de probabilidad (57,5% de equipos), ningún grupo especificó que se trata de una asignación clásica, cinco (12,5%) hacen referencia a la regla de Laplace. El segundo objeto matemático identificado fue el concepto de juego equitativo (30%), que está explícito en el enunciado; seguido de objetos compartidos con otras áreas de las matemáticas, tales como multiplicación (22,5% de equipos), fracciones (20%), proporcionalidad (20%). Observamos que se mencionan más propiedades que en los demás ítems, si bien la mayoría son propiedades numéricas, no exclusivas de la probabilidad.

También se identificaron objetos que no aparecen en la actividad, tales como asignación frecuencial o estadística. No llegan a nombrarse las ideas de experimento aleatorio compuesto o espacio muestral.

Tabla 6.8. Frecuencia de los objetos matemáticos identificados por más de un grupo en la tarea 2

	Objeto matemático	Frecuencia	Porcentaje
Concepto	Probabilidad	23	57,5
	Juego equitativo	12	30,0
	Fracciones	8	20,0
	Números naturales	5	12,5
	Proporción	3	7,5
	Casos favorables y posibles	2	5,0
	Esperanza matemática	2	5,0
Propiedad	Proporcionalidad	8	20,0
	Regla de Laplace	5	12,5
	Equivalencia	2	5,0
	Impar	2	5,0
	Par	2	5,0
	m.c.m.	2	5,0
Procedimiento	Multiplicación	9	22,5
	Enumeración de posibilidades	6	15,0
	Suma	5	12,5
	Operaciones aritméticas	4	10,0
	División	3	7,5
	Cálculo	2	5,0
	Conteo	2	5,0

En consecuencia, los futuros profesores muestran un nivel bajo de conocimiento especializado del contenido en relación con el juego equitativo; aunque mejor que el observado por Mohamed (2012) en un ítem similar, que no requería el cálculo de la ganancia que haría equitativo al juego. En su estudio se identificaron nueve objetos matemáticos, seis comunes con los citados en nuestro estudio: Probabilidad (35%), azar/aleatoriedad (19%), fracciones (6%), operaciones numéricas (6%), posibilidades (6%), juego equitativo (3%); y otros no citados en nuestro estudio: razonamiento combinatorio (19%), experimento aleatorio (6%), tablas (3%). También hubo mayor número de objetos identificados que no están presentes en la tarea: estadística (13%), estimación frecuencial de la probabilidad (10%), frecuencia relativa (3%), gráfico estadístico (3%) y no utiliza conocimiento matemático (3%).

6.5.3. IDENTIFICACIÓN DE RESPUESTAS ERRÓNEAS

La Tabla 6.9 resume las valoraciones hechas por los futuros profesores de las respuestas de alumnos ficticios de educación primaria. La identificación adecuada de las cinco respuestas como correctas e incorrectas, fue hecha por seis equipos (15%); ocho (20%) acertaron la correcta pero calificaron como parcialmente correcta al menos una de las incorrectas y otros 16 (40%) acertaron la correcta pero calificaron como correcta al menos una de las incorrectas. Un equipo no responde a esta pregunta.

Tabla 6.9. Frecuencia y porcentaje de equipos según evalúan las respuestas de alumnos ficticios

	B1 (incorrecto)		B2 (incorrecto)		B3 (P. correcto)		B4 (incorrecto)		B5 (correcto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta			1	2,5	18	45,0	10	25	34	85,0
Incorrecta	38	95,0	37	92,5	9	22,5	25	62,5	2	5,0
P. correcta	1	2,5	1	2,5	12	30,0	4	10	3	7,5
No responden	1	2,5	1	2,5	1	2,5	1	2,5	1	2,5
Total	40		40		40		40		40	

La respuesta correcta (B5) está bien identificada por casi todos los equipos, de lo que se deduce el aprendizaje producido en el conocimiento común y ampliado del contenido, pues en el Estudio 2, sólo 49% de los participantes respondieron en forma correcta a ambas preguntas (Sección 5.6.1).

Fue más sencillo identificar la respuesta incorrecta con ganancia equivocada para Luis, ya sea por exceso (B2) o por defecto (B1).También acá notamos el aprendizaje logrado con las actividades formativas; pues en el Estudio 2 observamos respuestas similares a las de B1 o B2 en 27% de los participantes, quienes, aunque acertaron al decir que el juego no era equitativo no calcularon correctamente la ganancia de Luis que equilibra el juego.

Fue más difícil identificar el error en la respuesta incorrecta debido a falta de comprensión del juego equitativo, por pensar que de ninguna forma puede llegar a ser equitativo (B4). Esta respuesta fue bien identificada por más de la mitad de los equipos, pocos la consideran parcialmente correcta y la cuarta parte se equivocan al decir que es correcta. La mayor dificultad se encontró en la valoración de la respuesta parcialmente correcta de B3, que impone doble condición al juego tornándolo a favor de Luis, bien identificada sólo por la tercera parte de los equipos; una cuarta parte la consideran incorrecta y poco menos de la mitad se equivocan al decir que es correcta.

Estos resultados son mucho mejores que los obtenidos por Mohamed (2012) en un ítem similar pero más sencillo; en su trabajo 14 equipos (45%) aciertan al identificar la respuesta correcta, 17 (55%) al identificar una incorrecta por enumeración incompleta, y 27 (87%) al identificar una incorrecta por considerar el juego equitativo, cuando no lo es.

6.5.4. IDENTIFICACIÓN DE CAUSAS DE ERROR

Al razonar las causas de los errores en las respuestas incorrectas de los niños a la tarea, encontramos las siguientes variantes en las justificaciones dadas por los grupos de futuros profesores:

Fallo en el cálculo de probabilidades. Algunos equipos indican que el alumno se equivocó en el cálculo de las probabilidades de ganar de cada uno de los participantes en el juego. En general, se asocia esta explicación a la respuesta B2, y corresponde a una interpretación diferente de la supuesta en el análisis a priori de la frase “dos posibilidades más”:

> Para el alumno B2: Se ha equivocado haciendo las probabilidades de los casos porque Luis tiene 9 probabilidades (casos favorables) mientras que Miguel tiene 27 probabilidades entonces Luis debería de ganar 18 € más no 6€ como ha dicho (E040).

Fallo en el cálculo del premio. Estos equipos indican que el alumno se equivocó al calcular el valor del premio para convertir el juego en equitativo y por tanto al asignar la ganancia para Luis. A veces el razonamiento es muy sintético, denotando falta de capacidad argumentativa:

> Para el alumno B2: Se ha equivocado porque ha relacionado el 6 con el número de caras que tiene un dado (E18).

Condición innecesaria. Algunos equipos indican que se añade una condición innecesaria para considerar un juego como equitativo. Otros, que la primera parte de la respuesta es correcta, puesto que se calcula la probabilidad y el premio, pero la segunda no lo es. Se refiere al alumno B3 para quien el juego debe tener el mismo número de oportunidades de lanzamiento para ambos jugadores y que muestra una concepción errónea de juego equitativo similar a la observada en niños por Cañizares (1997):

> Toma dos medidas para equilibrar el juego que individualmente estarían bien, pero las dos juntas benefician mucho a Luis (E06).

Dan la respuesta correcta. Algunos equipos escriben cuál sería la respuesta correcta, completando o corrigiendo la parte que está incorrecta. Comparan la respuesta del niño ficticio con una solución normativa, pero no mencionan posibles intuiciones incorrectas o estrategias que llevan al error:

> Para el alumno B2: Debe de ganar 3€ en vez de 6€ como dice (E09).

Error de cálculo. Estos equipos no explican dónde está el error, solo que el niño se equivocó al calcular las probabilidades o la ganancia; no queda claro si no llegan a identificar la causa del error o no saben explicarlo adecuadamente, por ejemplo:

> Para el alumno B1: Falla en la suma de resultados o en la multiplicación (E29).

Explicación incompleta. Estos equipos consideran que el niño debe explicar más su respuesta, ya sea para comprender dónde se encuentra su error; o porque consideran que no ha contestado a todas las preguntas formuladas o bien que da la respuesta al azar. Al igual que la anterior argumentación, indica que no son capaces de encontrar la causa del error o al menos de justificarla:

> Para el alumno B2: A falta de ver cómo lo ha calculado, 6 euros parece una cantidad arbitraria, aunque efectivamente Luis tiene menos probabilidades (E37).

Otras explicaciones. Algunos equipos utilizan explicaciones minoritarias referidas a uso de lenguaje inapropiado, bajo nivel de reflexión, no intenta realizar operación o planteamiento para llegar a la solución, que el niño no entiende el problema, o que establece relaciones incorrectas (ganancia de 1€ con número impar, ganancia de 2€ con número par); también incluimos la respuesta de un equipo que dice no saber explicar por qué está errada la respuesta del alumno B2.

Confuso. La explicación que expone el equipo es inconsistente con la situación o refiere elementos que parecen no corresponder con el problema. Por ejemplo:

> Para el alumno B4: No, porque Luis gana en una tirada lo mismo que Miguel en 3 veces, entonces no es necesario que salga los dos nombres las mismas veces para que sea equitativo (E03).

Estas explicaciones se observan en todas las respuestas de los niños ficticios, excepto identificar la imposición de una condición innecesaria que se observa exclusivamente para B3 (Tabla 6.10).

Tabla 6.10. Explicaciones de posibles intuiciones o estrategias incorrectas en el ítem 2

Explicación	B1 (incorrecto)		B2 (incorrecto)		B3 (P. correcto)		B4 (incorrecto)		B5 (correcto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Fallo en probabilidades	24	60,0	5	12,5						
Fallo en el premio	2	5,0	8	20,0			14	35,0	2	5,0
Condición innecesaria					11	27,5				
Indican respuesta correcta	4	10,0	9	22,5			2	5,0		
Error de cálculo	4	10,0	1	2,5	2	5,0			1	2,5
Explicación incompleta			8	20	1	2,5	1	2,5	3	7,5
Otras explicaciones	3	7,5	4	10,0	3	7,5	7	17,5		
Confuso					2	5,0	3	7,5	3	7,5
No explica	3	7,5	5	12,5	21	52,5	13	32,5	31	77,5
Total	40		40		40		40		40	

La explicación mayoritaria para el error de B1 (Luis debe ganar 2 euros) es el error en el cálculo de las probabilidades de ganar de los niños. Si se añade los que indican fallo en el cálculo del premio o dan la respuesta correcta, el 80% de los equipos es capaz de deducir la causa del error en B1.

Las explicaciones expuestas para el error de B2 (Luis debe ganar 6 euros) son más diversas, pero también correctas en su mayoría; no hay predominio de una en particular, resaltamos las que sólo indican que debía ser 3€, las que se basan en la forma como se calculó el premio, y las que se basan en la equivocación al calcular las probabilidades de ganar.

La explicación mayoritaria para la parte incorrecta en la respuesta de B3 (debe darse 3 turnos a Luis) es la imposición de una condición innecesaria en el juego; cabe recordar que 45% de los equipos la calificaron como correcta, caso en el cual no se requería contestar esta pregunta. En estos casos los futuros profesores comparten la creencia errónea expresada en este enunciado.

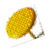
La explicación más repetida para el error de B4 (el juego no puede ser justo) se basa en equivocarse en el premio, en particular se explica que es posible establecerlo para que el juego sea equitativo. En este caso no se identifica bien la causa del error.

Estos resultados son mejores que los de Mohamed (2012), en cuanto a la riqueza de la argumentación por parte de nuestros futuros profesores, suponemos que debido a la discusión en clase de sus respuestas al Cuestionario 1 y a las actividades de simulación. Este autor identificó cinco tipos de explicación, la coincidencia con la respuesta del análisis a priori (que en nuestro caso está dividida en tres categorías), no tener en cuenta la proporción y desconocer la probabilidad (que nosotros hemos reunido en una sola).

Además, indica que pocos grupos detectan las fuentes de los errores y dan explicaciones alternativas; el fallo en razonamiento combinatorio fue bien identificado por 39% (12 grupos), y comprender juego equitativo como igualdad de ocurrencia en los casos favorables fue identificado por 13% (4 grupos), las otras explicaciones se observaron en forma minoritaria (de uno a tres grupos). Adicionalmente, la tasa de no respuesta o de explicación no satisfactoria estuvo entre 19% y 26%, más alta que la nuestra.

6.6. PROBABILIDAD SIMPLE. SIGNIFICADO FRECUENCIAL

6.6.1. ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA

Ítem 3. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños más repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Respuestas de los alumnos:

	Daniel	Martín	Diana	María
C1	Punta arriba: 32	Punta arriba: 70	Punta arriba: 35	Punta arriba: 65
	Punta abajo: 68	Punta abajo: 30	Punta abajo: 65	Punta abajo: 35

	Daniel	Martín	Diana	María
C2	Punta arriba: 67	Punta arriba: 68	Punta arriba: 70	Punta arriba: 71
	Punta abajo: 33	Punta abajo: 32	Punta abajo: 30	Punta abajo: 29

	Daniel	Martín	Diana	María
C3	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68
	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32

	Daniel	Martín	Diana	María
C4	Punta arriba: 50	Punta arriba: 51	Punta arriba: 48	Punta arriba: 53
	Punta abajo: 50	Punta abajo: 49	Punta abajo: 52	Punta abajo: 47

Este ítem estuvo orientado en el Estudio 2 a evaluar el conocimiento del significado frecuencial de la probabilidad (Sección 5.5.5). Se eligió para el Estudio 3 porque, por una parte, aunque la mayoría de los futuros profesores, al resolverlo dieron valores apropiados de la frecuencia de chinchetas con la punta hacia arriba, hubo un porcentaje importante que mostró el sesgo de equiprobabilidad. Y, aunque la variabilidad de valores en general fue aceptable, hubo una tendencia a la baja variabilidad, y un 22% incluyó como valor posible al menos una vez el 50%.

En la evaluación del conocimiento especializado del contenido esperamos respuestas como las siguientes: para resolver el ítem se involucran los conceptos de aleatoriedad y experimento aleatorio, ensayos repetidos, frecuencia (absoluta, relativa), valor estimado de la probabilidad, muestreo y variabilidad del muestreo.

También intervienen propiedades, como que los atributos no son equiprobables en el colectivo, la estimación de la probabilidad tiende a estabilizarse y varía en cada serie de N ensayos. Finalmente se utilizarían conceptos numéricos (número, proporción) junto con sus propiedades.

Como procedimientos para llegar a una respuesta correcta, los alumnos necesitarían estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos y reconocer el carácter aproximado de esta estimación, además de procedimientos aritméticos, tales como suma u otras operaciones.

La originalidad del ítem hacía que no contáramos con fuentes de respuestas reales de niños; hemos utilizado para los ejemplos las respuestas dadas por los evaluados en el Estudio 1 con pequeñas variaciones, para evitar el señalamiento de algún participante. En la evaluación del conocimiento del contenido y los estudiantes esperamos unas respuestas similares a las siguientes:

- El alumno C1 da una respuesta incorrecta. Aunque da valores alrededor de los obtenidos por el profesor, intercambia los correspondientes a la frecuencia de chinchetas con la punta hacia arriba y hacia abajo y alterna estas respuestas con una similar a la del profesor en los cuatro experimentos propuestos. Parece esperar que se equilibren los resultados en los sucesivos lanzamientos; es decir, no comprende la independencia de resultados, ni que al ser la probabilidad de caer hacia arriba mayor, casi siempre caerán más con la punta hacia arriba. Manifiesta la heurística de la representatividad, esperando una convergencia muy exacta en pequeñas muestras (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). 20% de nuestros evaluados en el Estudio 2 dieron respuestas similares a ésta, con media alrededor de 50 y dispersión alta (rango mayor que 30).

- El alumno C2 da una posible respuesta correcta. Tiene en cuenta los valores esperados (parecidos a los que obtuvo el profesor, puesto que la única información que tiene de la probabilidad es el valor estimado). También considera la variabilidad de un fenómeno aleatorio (no siempre saldrán exactamente los mismos resultados). Asimismo entiende que el valor de frecuencias obtenido por el profesor es sólo una estimación del verdadero valor de la probabilidad (teórico y desconocido), por lo que, al tomar otras muestras de resultado, la estimación puede variar. 5% de los participantes en el Estudio 2 dieron respuestas similares a ésta, con media cercana a 68 y alta concentración (rango menor que 10).

- El alumno C3 comprende la idea de valor esperado (la probabilidad teórica será parecida a lo que obtuvo el profesor), pero no tiene en cuenta la variabilidad de un fenómeno aleatorio y repite exactamente cuatro veces los mismos resultados, lo cual es altamente improbable. 3% de los participantes en el Estudio 2 dieron respuestas similares a ésta, pues repitieron valores dados por ellos mismos en sus respuestas, aunque ninguno lo hizo con el valor dado como ejemplo en el enunciado.

- El alumno C4 no tiene en cuenta los datos dados por el profesor y considera igualmente probables los dos sucesos, por ello da valores sobre el 50%; tiene en cuenta, sin embargo, la variabilidad aleatoria, pues da diferentes resultados. Dos de los evaluados en el Estudio 2 respondieron en forma similar a C4, con todos sus valores muy cercanos de 50 (rango menor que 10).

6.6.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

En general, casi todos los grupos son capaces de identificar alguno de los objetos citados, aunque el número dado es pequeño. Observamos que la mitad de los equipos de futuros profesores (Tabla 6.11) identifican entre dos y tres objetos matemáticos en esta tarea, 7 equipos no contestan esta pregunta, 7 identifican sólo uno, 4 equipos identifican 4 objetos matemáticos y sólo 2 equipos identifican 6.

Tabla 6.11. Distribución de frecuencias del número de objetos matemáticos identificados por los futuros profesores en la tarea 3

Número de objetos matemáticos identificados	Frecuencia	Porcentaje
0	7	17,5
1	7	17,5
2	9	22,5
3	11	27,5
4	4	10
6	2	5
Total	40	

La mayoría de los objetos matemáticos identificados son propios del contenido probabilístico y algunos hacen parte de otros contenidos, por ejemplo operaciones aritméticas, que también se emplean en la actividad. Entre todos los grupos se identifican 27 objetos matemáticos diferentes:

- Conceptos: Aleatoriedad, azar, casos, casos posibles/casos favorables (oportunidades), fenómeno aleatorio, fracciones, frecuencia, frecuencia relativa, números naturales, probabilidad, probabilidad teórica, variabilidad.
- Propiedades: el mayor peso de la cabeza de la chincheta hace que la punta hacia arriba sea más posible, mecánica del experimento que anula la equiprobabilidad, proporcionalidad, relaciones numéricas.
- Procedimientos: Asignación frecuencial, enumeración de posibilidades (o casos), estimación del grado de probabilidad de un suceso, experimentación, operaciones aritméticas, porcentaje, suma.
- También un equipo cita el lenguaje de azar y la lógica (sería equivalente a razonamiento).

Tabla 6.12. Frecuencias de los objetos matemáticos con más menciones en la tarea 3

	Objeto matemático	Frecuencia	Porcentaje
Conceptos	Probabilidad	29	72,5
	Esperanza matemática	6	15
	Aleatoriedad (azar)	5	12,5
	Frecuencia	5	12,5
	Números naturales	3	7,5
	Proporción	2	5
Propiedad	Proporcionalidad	4	10
Procedimientos	Enumeración de posibilidades	7	17,5
	Suma	4	10
	Asignación frecuencial	4	10
	Comparación de probabilidades	2	5

Los objetos correctamente identificados por más de un grupo se presentan en la Tabla 6.12. El objeto matemático identificado con mayor frecuencia es el de probabilidad, aunque pocos grupos especifican que se trata de una asignación frecuencial de la misma o hacen referencia a la frecuencia. El resto de objetos es identificado únicamente por una proporción pequeña de los grupos: enumeración de posibilidades, esperanza matemática, azar, frecuencia, asignación frecuencial, proporcionalidad y suma. Observamos que se tiende a identificar únicamente conceptos y procedimientos.

También se identificaron objetos que no aparecen en la actividad, tales como el principio de conservación; o se hace referencia a objetos no matemáticos como la intuición, el sentido común o estrategias. No llegan a nombrarse las ideas de muestra, ensayos repetidos, estimación de la probabilidad, ni que tiende a estabilizarse o varía en cada serie de N ensayos, o el reconocimiento del carácter aproximado de esta estimación.

En consecuencia, los futuros profesores muestran algún conocimiento especializado del contenido en relación al significado frecuencial de la probabilidad, pero aún insuficiente para su futura práctica profesional.

6.6.3. IDENTIFICACIÓN DE RESPUESTAS ERRÓNEAS

La Tabla 6.13 resume las valoraciones hechas por los futuros profesores de las respuestas de alumnos ficticios de educación primaria. La identificación adecuada de las cuatro respuestas como correctas e incorrectas, fue hecha por 14 equipos (35%); otros nueve (22,5%) calificaron como parcialmente correcta al menos una de las respuestas incorrectas; y siete (17,4%) acertaron la respuesta correcta pero fallaron en la identificación de alguna de las tres incorrectas. Un equipo no responde; otros cinco interpretan mal el enunciado, dando otro tipo de respuesta.

Tabla 6.13. Frecuencia y porcentaje de equipos según evalúan las respuestas de alumnos ficticios

	C1 (incorrecto)		C2 (correcto)		C3 (incorrecto)		C4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta	5	12,5	33	82,5	3	7,5	2	5,0
Incorrecta	19	47,5	1	2,5	29	72,5	29	72,5
Parcialmente correcta	9	22,5			2	5,0	3	7,5
Otra respuesta	5	12,5	5	12,5	5	12,5	5	12,5
No responden	2	5,0	1	2,5	1	2,5	1	2,5
Total	40		40		40		40	

Lo más sencillo fue identificar la respuesta correcta del Alumno C2, lo que indica el aprendizaje producido en la discusión colectiva realizada después de solucionar individualmente el Cuestionario 1, pues en el Estudio 2 sólo 38,4% de respuestas fueron correctas y 20,3% parcialmente correctas.

Fue también sencillo identificar como incorrectas las respuestas correspondientes a ausencia de variabilidad (Alumno C3) y sesgo de equiprobabilidad (Alumno C4). Recordamos que sólo el 45,2% de estos futuros profesores en el Estudio 2, produjo muestras de variabilidad adecuada o aceptable, mientas ahora la variabilidad demasiado pequeña es bien identificada y de nuevo se observa el efecto de aprendizaje.

Fue más difícil identificar la respuesta incorrecta debido a un patrón alternante del Alumno C1. Consideramos que este tema se debe trabajar más en la formación de los futuros profesores, pues ellos mismos dieron este tipo de respuestas; y más de la mitad de los equipos no logran reconocer que es una respuesta errónea, aún después de la discusión del Cuestionario 1 y la experimentación en clase.

En resumen, la mayoría de equipos fueron capaces de reconocer las respuestas correctas e incorrectas, lo que evidencia el desarrollo logrado en su conocimiento común de la probabilidad mediante las actividades de experimentación y discusión colectiva, en comparación con los resultados en el Estudio 2. Este desarrollo del conocimiento probabilístico les ha permitido también adquirir un cierto conocimiento del contenido y el estudiante.

6.6.4. IDENTIFICACIÓN DE CAUSAS DEL ERROR

Para analizar las explicaciones de los equipos respecto a la causa del error se ha tenido en cuenta si se basan en los valores de las frecuencias o en la variabilidad de resultados, ya que estos fueron los dos puntos principales que analizamos sobre este ítem en el Estudio 2.

Frecuencia de resultados

La mayoría de los grupos para dar su valoración analiza las frecuencias de chinchetas con la punta hacia arriba en las respuestas de los alumnos, con las siguientes variantes:

Los resultados concuerdan con la frecuencia esperada. Cuando se indica que los resultados son parecidos a los del profesor, o bien que el alumno ficticio piensa en términos de probabilidad. En algunos casos se utiliza para argumentar que la respuesta es correcta, pues hay una concordancia razonable con el valor esperado, es decir, que los resultados son parecidos entre sí, pero no exactos; por ejemplo:

> Para el alumno C2: Todos los alumnos plantean algo razonable por el peso de la cabeza de la chincheta, ya que todos ponen más chinchetas boca arriba. Diana ha obtenido un resultado demasiado redondo (E19).

Esta explicación se puede usar también para justificar una respuesta incorrecta, cuando se repiten exactamente los mismos resultados:

> Es casi imposible que el Alumno C3 en los 4 casos se obtenga el mismo número de chinchetas con la punta hacia arriba y hacia abajo y además, los números coinciden con el ejemplo del enunciado. Lo único que vemos positivo es que da más posibilidades a que caigan chinchetas con la punta hacia arriba que hacia abajo (E22).

Los resultados de alguno de los experimentos no concuerdan con la frecuencia esperada. Algunos equipos consideran que hay demasiada discrepancia entre la frecuencia dada por el alumno C1 o el alumno C4 y el valor esperado; utilizan este tipo de explicación para valorarla como incorrecta:

> Puede ocurrir que en la tirada salgan 2 casos con 68 y 65 puntas hacia abajo, pero es muy difícil casi siempre saldrán más chinchetas con punta hacia arriba (E04).

Los resultados son los contrarios a la frecuencia esperada, tratando de compensarla para conseguir equiprobabilidad. Se indica que el alumno trata de compensar las frecuencias de punta arriba y abajo, para conseguir un número total igual de caras y cruces, es decir, se identifica la heurística de representatividad, aunque no se le dé este nombre:

> El alumno C1 ha escrito que en 2 casos es más probable que las chinchetas caigan con la punta hacia arriba y es muy difícil que eso ocurra así. Para dar esa respuesta es posible que el alumno haya pensado que los dos casos tienen la misma probabilidad (E07).

Los resultados son muy próximos al 50%. Esta explicación del error en la respuesta del alumno C4 asume que el niño ficticio tiene un sesgo de equiprobabilidad pues los valores dados de las frecuencias no corresponden con lo esperado para este experimento aleatorio:

> En todos los casos las respuestas son muy cercanas al 50% cuando en realidad que las chinchetas caigan con la punta hacia arriba tiene más probabilidad (E07).

Otras respuestas debidas a mala interpretación del enunciado. Algunos equipos leen en vertical los resultados y evalúan correctamente cuál de los niños (Daniel, Martín, Diana y María) da una mejor solución, o bien leen los resultados en forma aislada y evalúan cuál respuesta da una mejor solución; por ejemplo, el equipo E13 indica que hay 6 pares de valores incorrectos y 10 correctos (incluidos los que no tienen variabilidad).

Las explicaciones antes descritas se utilizan principalmente para justificar respuestas incorrectas de C1 y C4 (Tabla 6.14). La diferencia de frecuencias dadas por el profesor es la explicación mayoritaria para el error de C1, es decir que la mayoría de grupos se fijaron en que los valores dados por los niños no coincidían con el esperado; solo dos equipos leyeron los resultados en conjunto y notaron el patrón de alternancia en esta respuesta incorrecta.

Tabla 6.14. Explicaciones basadas en las frecuencias para intuiciones o estrategias incorrectas en ítem 3

Explicación	C1 (incorrecto)		C2 (correcto)		C3 (incorrecto)		C4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Concordancia de frecuencias con las dadas por el profesor			7	17,5	3	7,5		
Diferencia de frecuencias con las dadas por el profesor	22	55,0	1	2,5	1	2,5	11	27,5
Contrarios	2	5,0						
Frecuencia alrededor del 50% o equiprobabilidad	1	2,5					16	40,0
Otra interpretación del enunciado	7	17,5	5	12,5	5	12,5	5	12,5
No se basa en la frecuencia	8	20,0	27	67,5	31	77,5	8	20,0
Total	40		40		40		40	

La cercanía al 50% de los valores dados por los niños es la explicación mayoritaria para el error de C4, puesto que 40% de los grupos leyeron estos cuatro resultados en conjunto y se fijaron en que había un sesgo de equiprobabilidad. La segunda razón dada para el error de C4 es la diferencia con frecuencias dadas por el profesor; esos equipos hacen mayor énfasis en que los valores dados se alejan de la estimación de la probabilidad, sin mencionar el patrón de equiprobabilidad en esta respuesta incorrecta

Las explicaciones dadas a la respuesta correcta de C2 se refieren a la similitud de valores dados por los niños con las frecuencias dadas por el profesor, mostrando una buena comprensión del significado frecuencial; solo 7 equipos hacen mención de esta explicación, es de tener en cuenta que no se requería justificar intuiciones o estrategias que llevaran a una respuesta correcta sino las que se consideraran incorrectas.

La respuesta de C3 fue considerada correcta por tres equipos, que se basaron en la concordancia de las frecuencias con las dadas por el profesor, mostrando una baja comprensión del significado frecuencial. Aún en una lectura individual de los datos, como la hecha por estos equipos, es sospechoso que se replique el mismo resultado en una repetición de un experimento aleatorio. Hacemos notar, sin embargo, que estos grupos pudiesen dar una explicación en base a la variabilidad, que se analiza a continuación.

Variabilidad

En segundo lugar hemos estudiado las explicaciones que se basan en un análisis de la variabilidad de resultados de Daniel, Martín, Diana y María para cada uno de los cuatro alumnos ficticios. Son muy pocos los grupos de participantes que analizan este punto, a pesar de que la variabilidad, junto con la oscilación alrededor del valor esperado es una característica de las frecuencias relativas de las muestras, y se trabajó durante la discusión de las soluciones a las preguntas del Cuestionario 1. Las categorías encontradas son las siguientes:

Hay una variabilidad adecuada en un experimento aleatorio. Explicación dada por un equipo para analizar los razonamientos de los alumnos C2 y C4, en que todos los valores aportados se concentran alrededor de un mismo número, pero con cierta dispersión. Este equipo además tiene en cuenta las tendencias de las frecuencias en ambos casos; es el que muestra una argumentación más completa, pues percibe simultáneamente las dos características del muestreo aleatorio: tendencia hacia el valor esperado y variabilidad. Su respuesta es la siguiente:

> El alumno C4 determina que el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba es igual de probable que el número de chinchetas que caen con la punta hacia abajo. No obstante, no establece siempre los mismos resultados sino que varía el número. Este alumno tampoco tiene en cuenta los resultados dados por el profesor (E01).

No hay variabilidad de resultados (o es muy baja). En este caso se argumenta que siempre aparece el mismo resultado, no hay variabilidad o es pequeña, generalmente cuando analizan el razonamiento del alumno C3, que corresponde a un patrón determinista:

> Está mal, ya que es poco probable que a los 4 niños, al lanzar las chinchetas, les salgan los mismos números (E03).

Los resultados varían mucho. Sería la explicación de los grupos que consideran excesiva la variabilidad de los resultados y sólo lo usa un equipo cuando analiza el razonamiento del alumno C1:

No tiene en cuenta la probabilidad, sino que tiene en cuenta datos muy distintos (E09).

El uso de estas tres explicaciones para justificar respuestas incorrectas se resume en la Tabla 6.15. Vemos pocos equipos que analizan la variabilidad, posiblemente porque les parece suficiente dar un solo argumento; por ello, cuando dieron explicaciones basadas en las frecuencias no analizan la variabilidad. En todo caso, cada explicación se usa preferentemente con una respuesta; consideramos que, la mayoría de futuros profesores muestran un conocimiento adecuado de la variabilidad.

Tabla 6.15. Explicaciones basadas en la variabilidad para intuiciones o estrategias incorrectas en ítem 3

Explicación	C1 (incorrecto)		C2 (correcto)		C3 (incorrecto)		C4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Variabilidad adecuada			1	2,5			1	2,5
No hay (o es baja)	1	2,5			29	72,5	4	10
Demasiada variabilidad	1	2,5						
No analizan la variabilidad	38	95	39	97,5	11	27,5	35	87,5
Total	40		40		40		40	

La mayoría de las explicaciones dadas a la respuesta incorrecta de C3 se refieren a la ausencia de variabilidad en los valores dados por los niños, mostrando una buena comprensión de la variabilidad como propiedad de un experimento aleatorio. Precisamente en este caso fueron pocas las explicaciones basadas en las frecuencias, lo que ratifica la suposición de que los futuros profesores se conformaron con dar un solo argumento.

La respuesta de C1 fue considerada incorrecta por dos equipos en base a la variabilidad, uno por considerarla más alta de lo esperado y otro por considerarla más baja de lo esperado. Puesto que en este ítem la mayoría se basó en el estudio de las frecuencias, pocos analizan la variabilidad. Lo mismo ocurre en la respuesta de C4, que fue considerada incorrecta por cuatro equipos debido a una baja variabilidad. Un equipo (E01) indicó que la variabilidad en las respuestas de C2 y C4 es adecuada para este experimento aleatorio, añadiendo explicaciones basadas en frecuencias para calificar como correcta o incorrecta cada respuesta.

En consecuencia, los futuros profesores muestran conocimiento de la variabilidad, al analizar la respuesta del alumno C3; en el resto de las respuestas no analizan esta variabilidad, pues ya llegaron a una conclusión clara en función de las frecuencias.

6.7. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES. SIGNIFICADO CLÁSICO

6.7.1. ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA

Ítem 4. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra?

Respuestas de los alumnos

D1. *Se puede añadir a la caja de Miguel 2 bolas blancas y 2 negras sin cambiar la de Pablo*

D2. *Se puede pasar 1 bola blanca de la caja de Pablo a la de Miguel*

D3. *Hay en total 8 bolas blancas y 12 negras entre las dos cajas. Las bolas están en razón 8/12, es decir 2 blancas por cada 3 negras. Si dejamos en la caja de Pablo 2 blancas y 3 negras, tenemos que pasar 3 blancas y 4 negras a la de Miguel; entonces Miguel tendrá 6 blancas y 9 negras; sus bolas también están en razón 6/9=2/3 y tienen la misma probabilidad*
D4. *Pasando 1 bola blanca y 1 negra de la caja de Miguel a la de Pablo*

Este ítem estuvo orientado en el Estudio 2 a evaluar el conocimiento del significado clásico de la probabilidad (Sección 5.5.2). Aunque la mayoría de los futuros profesores lo resolvieron en forma correcta, se eligió para el Estudio 3, porque un porcentaje importante mostró fallos en relacionar el razonamiento proporcional y el probabilístico.

En la pregunta que evalúa el conocimiento especializado del contenido esperamos respuestas como: Para dar la solución correcta del problema, en primer lugar hay que considerar los conceptos de aleatoriedad y experimento aleatorio, casos posibles, casos favorables, probabilidad según el significado clásico. También intervienen propiedades tales como que la probabilidad es un valor objetivo y calculable, casos favorables son resultados que favorecen, casos posibles son todos los resultados, y regla de Laplace. También se utilizan conceptos numéricos (número, proporción) junto con sus propiedades.

Como procedimientos para llegar a una respuesta correcta los alumnos necesitarían diferenciar casos favorables y no favorables, distinguir sucesos elementales equiprobables, aplicar la regla de Laplace en experimentos simples, comparar probabilidades con razonamiento proporcional; y se realizarán procedimientos aritméticos, tales como suma u otras operaciones.

Falk y Wilkening (1998) en su investigación con niños observaron sus estrategias para comparar probabilidades y modificar las urnas para que el juego fuese equitativo, mediante actividades desarrolladas en el aula; sus resultados nos sirvieron de referencia para los ejemplos dados en este ítem. En las preguntas que evalúan el conocimiento del contenido y los estudiantes esperamos unas respuestas similares a las siguientes:

- La respuesta del alumno D1 es incorrecta. Su estrategia lleva a tener dos cajas exactamente iguales; pero no corresponde al enunciado del problema, pues el enunciado pide no variar el número total de bolas. En todo caso, se obtendría la misma probabilidad para cada caja. Falk y Wilkening (1998) observaron que niños de 9 a 10 años integraron dimensiones de probabilidad y proporcionalidad, aunque aún cometían algunos fallos como el que se expone en este ejemplo.

- El alumno D2 también da una respuesta incorrecta, pues su estrategia solo tiene en cuenta los casos desfavorables; por eso piensa que igualando los casos favorables las probabilidades serían iguales. Este niño estaría en la segunda etapa de razonamiento probabilístico, en la teoría de Piaget e Inhelder; no tendría un razonamiento proporcional completo, pues solo compara los denominadores de las fracciones. Niños de 6 a 7 años dieron respuestas similares a éstas (Falk y Wilkening, 1998) y no generaron probabilidades iguales en las urnas, porque se enfocaron en el número de bolas de un solo tipo (favorable o desfavorable).

- La respuesta del alumno D3 es correcta; muestra un buen razonamiento proporcional. El alumno ha calculado la proporción total en la suma de bolas blancas y bolas negras en las dos cajas y propone dos urnas con diferente composición, que respeta esta proporción. Según observaron Falk y Wilkening (1998), en general los niños de 13 años fueron más analíticos que intuitivos, y desarrollaron la tarea con más éxito que los niños más pequeños.

- La respuesta del alumno D4 es incorrecta. En la solución propuesta quedaría Pablo con 6 bolas blancas y 8 negras, por lo que la proporción entre los dos colores sería ¾; mientras que Miguel tendría 2 blancas y 4 negras, que estarían en proporción ½; por lo que las probabilidades son diferentes en las dos cajas. Muestra un razonamiento proporcional insuficiente, es posible que el alumno haya confundido el nombre de los niños, pues si lo hiciese pasando las bolas de Pablo a Miguel las dos urnas quedarían con idéntica composición.

6.7.2. IDENTIFICACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

En general, casi todos los grupos son capaces de identificar alguno de los objetos citados; el número dado sigue siendo pequeño, aunque es mayor que en el ítem anterior. Observamos que la mitad de los equipos de futuros profesores (Tabla 6. 16) identifican entre tres y cinco objetos matemáticos en esta tarea, 10 equipos identifican tres, 2 identifican cuatro y 10 identifican cinco; 4 identifican un objeto, dos o seis; sólo uno identifica siete objetos y 7 equipos no contestan esta pregunta.

Tabla 6.16. Distribución del número de objetos matemáticos identificados en la tarea 4

Número de objetos matemáticos identificados	Frecuencia	Porcentaje
0	7	17,5
1	4	10
2	4	10
3	10	25
4	2	5
5	8	20
6	4	10
7	1	2,5
Total	40	

La mayoría de los objetos matemáticos identificados son propios del contenido probabilístico o bien de contenidos numéricos, por ejemplo razones y proporciones, que también se emplean en la actividad. En total se identifican 32 objetos matemáticos diferentes:

- Conceptos: casos posibles/casos favorables, esperanza matemática, fracciones, juego equitativo, números enteros, número natural, números, probabilidad, proporción, razón.

- Propiedades: equivalencia, fracciones equivalentes, mínimo común múltiplo, mismo número de bolas, múltiplos, propiedades de la fracción, proporcionalidad, regla de Laplace, relación entre cantidades.

- Procedimientos: asignación de probabilidades, cálculo matemático, comparar, descomposiciones de factores, división, enumeración de posibilidades, estrategia, multiplicación, operaciones aritméticas, simplificación, suma y resta.

- También un equipo cita el lenguaje de azar.

Los objetos correctamente identificados por más de un grupo se presentan en la Tabla 6.17. El objeto matemático identificado con mayor frecuencia (28 equipos, 70%) es probabilidad, aunque ninguno especifica que se trata de una asignación clásica (tres mencionan la asignación sin especificar que sea la clásica) y siete equipos (17,5%) hacen referencia a la regla de Laplace. Otros objetos matemáticos identificados con alta frecuencia, aunque no son exclusivamente probabilísticos, son fracciones (50%) y proporcionalidad (35%). El resto de objetos es identificado únicamente por una proporción pequeña de los grupos. Observamos que se identifican más conceptos y procedimientos, que propiedades.

También se identificaron objetos que no aparecen en la actividad o que no son matemáticos, como estrategias e intuiciones en los problemas de comparación de probabilidades. No llegan a nombrarse las ideas de aleatoriedad y experimento aleatorio, ni los procedimientos de diferenciar casos favorables y no favorables, distinguir sucesos elementales equiprobables, o comparar probabilidades con razonamiento proporcional (comparar, probabilidad y proporcionalidad son mencionadas sin relacionarse).

Tabla 6.17. Frecuencias de los objetos matemáticos con más menciones en la tarea 4

	Objeto matemático	Frecuencia	Porcentaje
Conceptos	Probabilidad	28	70
	Fracciones	20	50
	Juego equitativo	8	20
	Razón	4	10
	Número natural	3	7,5
	Proporción	3	7,5
Propiedad	Proporcionalidad	14	35
	Regla de Laplace	7	17,5
	Equivalencia	3	7,5
Procedimiento	Comparar	4	10
	Suma y resta	4	10
	Asignación de probabilidades	3	7,5
	Enumeración de posibilidades	3	7,5

En consecuencia, los futuros profesores muestran un conocimiento especializado del contenido aceptable en relación al significado clásico de la probabilidad. Los resultados son mejores que los observados por Mohamed (2012) en un ítem de comparación de probabilidades, suponemos que producto del proceso de instrucción. Los grupos que participaron en su investigación identificaron un total de ocho objetos matemáticos en una tarea de comparación de probabilidades en dos urnas con bolas; seis comunes con los citados en nuestro estudio, aunque con menor frecuencia: Probabilidad (regla de Laplace) (68%), fracciones (y su comparación) (32%), proporcionalidad (23%), comparación de probabilidades (6%), números y operaciones (6%); y dos no citados en nuestro estudio: azar (13%), estimación de probabilidades (13%).

6.7.3. IDENTIFICACIÓN DE RESPUESTAS ERRÓNEAS

La Tabla 6.18 resume las valoraciones de las respuestas de alumnos ficticios de educación primaria. La identificación adecuada de las cuatro respuestas como correctas e incorrectas, fue hecha por 22 equipos (55%); dos (5%) identificaron la correcta y calificaron como parcialmente correcta al menos una respuesta incorrecta; y 11 (27,5%) acertaron la respuesta correcta pero fallaron en la identificación de alguna de las tres respuestas incorrectas. Dos equipos no indican si las respuestas son correctas o incorrectas; uno sólo da su solución al ítem, y el otro proporciona otra respuesta.

Lo más sencillo fue identificar la respuesta incorrecta del niño ficticio D1 (92,5% de los equipos), solo un equipo considera que la respuesta de D1 es correcta. Fue también sencillo identificar como incorrecto el caso del niño D2 y como correcto el caso del niño D3; cada uno bien identificado por 87,5% de los equipos. Fue más difícil identificar la respuesta incorrecta (D4), lograda por 60% de los equipos, mientras 35% la califican como correcta. Estos resultados indican que se produjo un aprendizaje en la discusión colectiva realizada después de solucionar individualmente el Cuestionario 1; aunque 76,4% de los 157 futuros profesores respondieron en forma correcta a este ítem en el Cuestionario 1, muy pocos razonaron de forma similar a D3 y ninguno propuso esa misma modificación en las cajas.

Tabla 6.18. Frecuencia y porcentaje de equipos según evalúan las respuestas de alumnos ficticios

	D1 (incorrecto)		D2 (incorrecto)		D3 (correcto)		D4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta	1	2,5			35	87,5	14	35
Incorrecta	37	92,5	35	87,5	2	5	24	60
P. Correcta			3	7,5	1	2,5		
No responden	2	5	2	5	2	5	2	5
Total	40		40		40		40	

En resumen, la mayoría de futuros profesores fueron capaces de reconocer las respuestas correctas e incorrectas en este ítem; se observa una mejora en su conocimiento común de la probabilidad mediante las actividades de simulación y discusión colectiva, en comparación con los resultados de este mismo ítem en el Estudio 2.

Estos resultados son consistentes e incluso mejores que los de Mohamed (2012), teniendo en cuenta que nuestra tarea es un poco más compleja que la evaluada por este autor, pues además de comparar probabilidades se han de modificar las urnas para cumplir una condición. Los porcentajes de acierto en la identificación de respuestas de niños ficticios, observados por este autor según la estrategia de resolución de los niños fueron: 93% para respuestas correctas con estrategia multiplicativa, 97% para respuestas erradas con estrategia univariada y aditiva, 87% para respuesta errada con sesgo de equiprobabilidad y 71% para respuesta correcta con estrategia de correspondencia. Solo un equipo no respondió (3,2%).

6.7.4. IDENTIFICACIÓN DE CAUSAS DEL ERROR

Para analizar las explicaciones de los equipos respecto a la causa del error se ha tenido en cuenta si corresponden con la respuesta esperada en el análisis a priori. Hemos encontrado las siguientes variantes:

El alumno no tiene en cuenta parte del enunciado de la tarea. Esta explicación solo se observa para el error en la respuesta del alumno D1, indicando que el niño ficticio propone una solución incorrecta con dos cajas iguales, debido a una falta de atención o de comprensión en una parte del enunciado:

> En parte es correcta porque añadiendo dos bolas de cada a la caja de Miguel sería correcta, pero el enunciado dice pasar de uno a otro no añadir. Por lo que el niño ha tenido que tener una confusión en el enunciado (E18).

No se puede hacer. Esta explicación también aparece únicamente para el error en la respuesta del alumno D1. Estos equipos no indican posibles intuiciones incorrectas o estrategias que llevan al error; sólo señalan que el niño hace algo incorrecto:

> No se puede porque se desconoce el origen de las bolas ya que no las quita de la caja de Pablo (E34).

El alumno utiliza una estrategia univariada. Esta explicación solo se observa para la respuesta del alumno D2, que se califica como errónea o parcialmente correcta, con base en que el niño tiene en cuenta sólo los casos desfavorables o no tiene en cuenta los casos favorables, aunque no utilizan lenguaje probabilístico:

> El niño no ha tenido en cuenta las bolas negras (E08).

El alumno confunde los nombres de los niños. Esta explicación aparece asociada a la respuesta del alumno D4, señalando que el niño equivocó los nombres, notando que en tal caso la respuesta sería correcta porque conseguiría cajas iguales para los dos niños:

> Confunde la caja de la persona a la que hay que pasar la bola, y en vez de señalar que de la caja de Pablo se pasa a Miguel, lo dice de modo incorrecto y al contrario (E21).

Igualdad de la probabilidad (o proporción). Algunos equipos tienen en cuenta que no hay proporcionalidad en las cajas, o que la probabilidad de extraer la bola negra es diferente para Miguel y para Pablo. Incluimos en una misma categoría las justificaciones que se basan en la proporción y en la probabilidad, debido a la relación entre proporciones y probabilidades; aunque observamos que la mayoría solo se fijan en la proporción. En esta explicación los equipos se centran en el cálculo de las razones resultantes de los traslados planteados en las respuestas de los niños ficticios, no mencionan posibles intuiciones incorrectas o estrategias que llevan a este error. Por ejemplo:

> Para la respuesta del alumno D2: 4/7 y 4/5 no está bien la proporción (E26).

Igualdad de las cajas. Estos equipos comparan la modificación de cajas, dada por el alumno ficticio, con una solución correcta que conlleva a tener dos cajas iguales (pasar una bola blanca y una negra de Pablo a Miguel). En esta categoría de respuesta no se describen posibles intuiciones o estrategias que expliquen el error; por ejemplo:

> Para la respuesta del alumno D4: si es cierto que hay que pasar ese número de bolas, es decir el planteamiento está bien, pero hay que pasarlas de la caja de Pablo a la de Miguel y no al contrario (E11).

Proceso incompleto. Estos equipos atribuyen el fallo del alumno a una omisión de una parte del procedimiento o de su explicación, teniendo en cuenta que la modificación dada por el alumno ficticio difiere de la respuesta correcta en un paso:

> Para la respuesta del alumno D2: ¡Olvida hacer los cambios necesarios en las bolas negras! Nosotras consideramos que puede ser debido simplemente a olvido de resolver la segunda parte del problema, puesto que se queda satisfecho con resolver la primera parte (E19).

Otras explicaciones. Pocos grupos se refieren a errores de cálculo, considerar ilógico el planteamiento, fijarse en la diferencia entre favorables y desfavorables. También incluimos en esta categoría explicaciones inconsistentes por parte del equipo:

> Para la respuesta del alumno D3: El alumno se ha complicado demasiado y por lo tanto el cálculo lo ha hecho erróneamente (E24).

En la Tabla 6.19 se resumen las categorías de respuesta utilizadas para explicar las respuestas de los niños ficticios. La explicación mayoritaria para el error de D1 fue el incumplimiento de una instrucción en el enunciado; una proporción importante solo indica que esto "no se puede hacer". Los demás equipos sugieren una interpretación errada por parte del equipo del enunciado o de la respuesta del niño; entre ellos probabilidad desigual, cajas iguales y proceso incompleto.

Tabla 6.19. Explicaciones de posibles intuiciones o estrategias incorrectas en el ítem 4

Explicación	D1 (incorrecto)		D2 (incorrecto)		D3 (correcto)		D4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
No tiene en cuenta parte del enunciado	16	40,0						
No se puede hacer	14	35,0						
Estrategia univariada			6	15,0				
Confunde nombres							4	10,0
Igual probabilidad	1	2,5	12	30,0	4	10,0	7	17,5
Cajas iguales	1	2,5	9	22,5			9	22,5
Proceso incompleto	1	2,5	6	15,0			1	2,5
Otras explicaciones	4	10,0	3	7,5	1	2,5	7	17,5
No argumenta	3	7,5	4	10,0	35	87,5	12	30,0
Total	40		40		40		40	

Las explicaciones expuestas para el error de D2 fueron más diversas, indicando la diferencia en la probabilidad de extraer bola negra para los dos niños, la desigualdad en las cajas, el uso de una estrategia univariada por parte del alumno, y que el proceso está incompleto. Las explicaciones que justifican el error de D4, también fueron variadas; se refieren a la desigualdad en las cajas, a que la probabilidad de extraer bola negra es diferente para los dos niños y a la confusión en los nombres.

En común, observamos que algunos equipos tiendan a comparar las respuestas dadas con una solución de referencia (donde las cajas son iguales o el proceso se considera incompleto); 37,5% de los equipos para el error de D2, 25% para el error de D4 y 5% para el error de D1. Este tipo de argumentación es consistente con sus propias estrategias de resolución de la tarea; según observamos en el Estudio 2 con los 157 futuros profesores, en la evaluación de este ítem 63% usan estrategia de correspondencia, igualar las cajas; 8,4% distributiva, dividir en dos partes iguales el total de cajas y 3,9% multiplicativa, aplicar la proporcionalidad (Sección 5.7.2).

Estos resultados son mejores que los de Mohamed (2012), en cuanto a la riqueza de la argumentación por parte de nuestros futuros profesores, suponemos que debido a la discusión en clase de sus respuestas al Cuestionario 1 y a las actividades de simulación. Este autor identificó solo tres tipos de explicación, la coincidencia con la respuesta del análisis a priori (que en nuestro caso está dividida en tres categorías), no tener en cuenta la proporción y desconocer la probabilidad (que nosotros hemos reunido en una sola). Adicionalmente, la tasa de no respuesta o de explicación no satisfactoria estuvo entre 23% y 39%, más alta que la nuestra.

6.8. SINTESIS DE RESULTADOS EN EL ESTUDIO 3

En esta sección resumimos los resultados de la evaluación de los conocimientos especializado del contenido y del contenido y los estudiantes. Por un lado, indicamos observaciones generales y, por otro, comparamos el desempeño de los grupos por ítem.

Identificación de objetos matemáticos en las soluciones a las tareas

Casi todos los grupos son capaces de identificar alguno de los objetos citados en el análisis a priori; sin embargo, el número dado por ítem es relativamente pequeño, la tendencia es identificar entre dos y tres (Tabla 6.20).

Tabla 6.20. Estadísticos del número de objetos matemáticos identificados por ítem y grupo

Ítem	Contenido evaluado	Máximo	Moda	Media	D. Típica	Objetos probabilísticos (Análisis a priori)
1	Sesgo de equiprobabilidad	5	3	2,3	1,6	19
2	Juego equitativo	8	2	3,3	2,6	18
3	S. Frecuencial	6	3	2,3	1,6	15
4	S. Clásico: Compara prob.	7	3	3	2,1	12

Fue común identificar el objeto probabilidad en forma mayoritaria, como es de esperar por la naturaleza de los problemas y como eje común de la práctica. Los grupos también identificaron con facilidad el procedimiento de enumeración de posibilidades en el ítem referido a sesgo de equiprobabilidad; así como, los conceptos de juego equitativo, fracción y proporcionalidad en los ítems relacionados con el significado clásico y juego equitativo. En general, la mayoría de objetos identificados son conceptos, una proporción importante son procedimientos y muy pocos son propiedades (Tabla 6.21).

Los grupos de futuros profesores tuvieron mejores resultados en el ítem 4, donde se observó más cercanía entre lo observado y lo esperado (Sección 6.7), aunque, no llegaron a identificar los conceptos de aleatoriedad o experimento aleatorio, ni los procedimientos diferenciar casos favorables y no favorables, distinguir sucesos elementales equiprobables o comparar probabilidades con razonamiento proporcional. Esto se debe, en parte, a que tienen más conocimiento común y ampliado del significado clásico de la probabilidad que de los otros significados, como se observó en el análisis del Cuestionario 1 (Capítulo 5). Es de notar que, este ítem involucra menos objetos probabilísticos que los demás (12 según el análisis a priori).

Otro ítem con buenos resultados es el ítem 2, donde se observó más diversidad en la identificación de objetos (Sección 6.5). Aunque no llegan a nombrarse el experimento aleatorio compuesto o espacio muestral, los otros 16 objetos probabilísticos extraídos en el análisis a priori fueron identificados por al menos un grupo de futuros profesores. La riqueza del análisis de este ítem se debe a que plantea dos preguntas y a la inclusión de más objetos matemáticos no probabilísticos que en los otros ítems, como se observa en el resumen de la Tabla 6.21 donde exponemos el total de objetos identificados por los grupos, según tipo de objeto. Los resultados en estos dos ítems reflejan el aprendizaje con las actividades previas; teniendo en cuenta los resultados en el Estudio 2.

Tabla 6.21. Número total de objetos matemáticos identificados por ítem según tipo de objeto

		Conceptos		Propiedades		Procedimientos		
Ítem	Contenido evaluado	Prob.	Otras áreas	Prob.	Otras áreas	Prob.	Otras áreas	Total
1	Sesgo de equiprobabilidad	7	5	4		9	1	27
2	Juego equitativo	6	8	2	9	4	12	42
3	S. Frecuencial	11	3	2	2	4	3	27
4	S. Clásico: Compara prob.	4	6	2	7	2	10	32

Se observan resultados algo más flojos en el conocimiento especializado del significado frecuencial de la probabilidad (ítem 3) y sesgo de equiprobabilidad (ítem 1) (Secciones 6.6 y 6.4), además en ellos los futuros profesores identifican menos propiedades y procedimientos; en consecuencia, consideramos que debiera reforzarse la enseñanza de estos temas. De todos modos se observa un mejor desempeño en esta evaluación que en la del Estudio 2 (Secciones 5.5.5 y 5.6.3).

En el estudio de Mohamed (2012), los grupos de profesores en general reconocieron el concepto de probabilidad y el procedimiento de asignación de probabilidades con regla de Laplace; sin embargo, otros conceptos y procedimientos solo fueron identificados por minorías, tales como aleatoriedad, espacio muestral, juego equitativo, proporcionalidad, comparación de probabilidades o de fracciones. El autor menciona que no se llegan a identificar objetos matemáticos implícitos en las tareas propuestas como esperanza matemática, proporcionalidad inversa o razonamiento combinatorio. Es de notar que su cuestionario no incluyó preguntas referidas al significado frecuencial.

Evaluación de respuestas de estudiantes

La identificación de respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes ficticios fue buena. De un total de 18 respuestas de niños ficticios, todos los grupos calificaron en forma idónea más de la mitad, excepto uno que no respondió estas preguntas (Tabla 6.22). En esta tabla se puntúa un punto si se asigna en forma correcta que la respuesta es correcta o incorrecta; para respuestas parcialmente correctas también consideramos válido si fueron calificadas como incorrectas, debido a que tienen una parte correcta. Lo más frecuente fue dar entre 13 y 15 respuestas y se obtuvo un valor medio de 13,3 identificaciones correctas.

Tabla 6.22. Número de respuestas de estudiantes bien identificadas por grupo

No. aciertos	Frecuencia	Porcentaje
0	1	2,5
10-12	10	25,0
13-15	23	57,5
16-18	6	15,0
Total	40	

En general, consideramos que estos futuros profesores muestran un buen desempeño para evaluar las respuestas en estas cuatro tareas; sin embargo, su desempeño en la explicación de las fuentes de error es menor o, en algunos casos, insuficiente. En la Tabla 6.23 se presenta el porcentaje de los que hacen una evaluación adecuada, saben explicar la causa del error cuando es pertinente y los que completan las dos tareas correctamente. Entendemos por explicaciones satisfactorias las que tienen una base probabilística correcta.

Tabla 6.23. Porcentaje de grupos que evalúa y explica correctamente las respuestas de los niños ficticios

Niño ficticio	Tipo de error	Evaluación idónea	Da una razón satisfactoria	Evalúa y argumenta en forma satisfactoria
A1	Predecibilidad; enfoque en el resultado	82,5	65,0	53,6
A2	R. combinatorio: equiprobabilidad parcial	77,5	32,5	25,2
A3	R. combinatorio: enumeración incompleta	45,0	32,5	14,6
A4	P. correcta; r. combinatorio: no enumera	35,0	27,5	9,6
A5	Correcta	90,0	NA	90,0
B1	Comparaciones aditivas; premio incorrecto	95,0	65,0	61,8
B2	Premio incorrecto; falta de proporcionalidad	92,5	32,5	30,1
B3	P. correcta. Añade condición innecesaria	52,5	27,5	14,4
B4	No comprende el concepto de j. equitativo	62,5	35,0	21,9
B5	Correcta	85,0	NA	85,0
C1	Heurística de representatividad: alterna resultados	47,5	65,0	30,9
C2	Correcta	82,5	NA	82,5
C3	Falta de percepción de la variabilidad	72,5	62,5	45,3
C4	Equiprobabilidad	72,5	67,5	48,9
D1	Incomprensión del enunciado	92,5	42,5	39,3
D2	Estrategia univariada: solo casos favorables	87,5	45,0	39,4
D3	Correcta	87,5	NA	87,5
D4	Razonamiento proporcional insuficiente	60,0	27,5	16,5

NA= No se aplica

En la tabla observamos un buen desempeño en la identificación de respuestas incorrectas en la mayoría de los casos; siendo en general, el nivel de argumentación de posibles fuentes de error menor en los 18 ejemplos de respuestas posibles. El porcentaje de equipos que explican en forma satisfactoria los errores en las respuestas de los niños varía entre 27,5% y 67,5%.

En la tarea de sesgo de equiprobabilidad (ítem 1) lo más sencillo fue identificar el error debido a asociar un experimento aleatorio con equiprobabilidad (A1); en la tarea de juego equitativo (ítem 2) fue sencillo explicar el fallo en establecer el premio por aplicar comparación aditiva de las probabilidades (B1). La argumentación de errores en la tarea de significado frecuencial (ítem 3) fue también buena para todos los ejemplos de respuestas de alumnos. En la tarea de comparación de probabilidades con el significado clásico (ítem 4) fue más fácil explicar la respuesta por uso de estrategia univariada (D2), aunque su proporción no fue sobresaliente.

Fue, por el contrario difícil explicar el fallo del niño A4 (dificultad de enumeración), identificar el sesgo de equiprobabilidad en el alumno A2, por el cual no se identifica al suceso más probable, y la enumeración incompleta (A3). En el segundo ítem, fueron difíciles explicar la condición innecesaria, de la respuesta parcialmente correcta (B3), el premio incorrecto, asignado de forma arbitraria (B2), y la ausencia de asignación, por falta de comprensión del concepto de juego equitativo (B4). En la tarea de significado clásico (ítem 4), fue más difícil explicar el error de razonamiento proporcional insuficiente (D4) que la falta de correspondencia con el enunciado (D1).

Respecto al desempeño conjunto en las dos tareas hay mayor variación, pues las respuestas correctas no requieren una justificación y llegan al 90% mientras en las incorrectas tenemos desde el 9,6%.

La tarea referida al sesgo de equiprobabilidad (ítem 1) presenta más variación que las otras en el reconocimiento de los errores, pues los fallos en razonamiento combinatorio fueron desigualmente reconocidos en las cuatro respuestas. Algo parecido ocurre en el ítem 2, con un rango de variación un poco menor; algunos fallos en la asignación del premio que hace equitativo el juego se reconocen mejor que otros, en particular es bajo el reconocimiento de imponer una condición innecesaria.

El reconocimiento de los tres tipos de error en la tarea de significado frecuencial (ítem 3) fue aceptable, con pequeñas diferencias entre el sesgo de equiprobabilidad (C4) y la ausencia de variabilidad (C3). La respuesta debido a alternancia en los resultados (C1) causó mayor confusión; en todo caso, más de la mitad de los grupos dieron una explicación válida al fallo del niño.

En la tarea de significado clásico (ítem 4), el desempeño fue aceptable en la falta de correspondencia con el enunciado (D1) y en el reconocimiento de la comparación de probabilidades con estrategia univariada (D2). El reconocimiento del razonamiento proporcional insuficiente (D4) fue bajo.

6.9. CONCLUSIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD Y SU DESARROLLO

A lo largo de este capítulo se ha presentado el Estudio 3, dirigido a la evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar probabilidad de los profesores, como consecuencia de las actividades formativas realizadas. Más concretamente, se evalúa el desarrollo del conocimiento matemático común y ampliado; su conocimiento especializado del contenido y su conocimiento del contenido y los estudiantes

Para finalizar el capítulo, presentamos nuestras conclusiones sobre dichos componentes del conocimiento de los futuros profesores participantes, analizando también las hipótesis que se formularon al comienzo del capítulo.

6.9.1. DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO COMÚN Y AMPLIADO DE LA PROBABILIDAD

En el Cuestionario 2 se propuso a los futuros profesores cuatro de los ítems que se habían resuelto previamente en el Cuestionario 1, así como la evaluación de respuestas de niños a los mismos, con el fin de analizar el desarrollo de su conocimiento matemático común y ampliado respecto a la probabilidad, se planteó la hipótesis siguiente:

H3.1: Se espera que la actividad de resolución y discusión colectiva del cuestionario y posteriores actividades de simulación contribuya a mejorar el conocimiento común y ampliado de los futuros profesores participantes en el estudio, que se hará visible en la identificación de las respuestas correctas a algunas preguntas del Cuestionario 1.

Observamos que esta hipótesis se ha confirmado en nuestro trabajo; teniendo en cuenta la alta proporción de acierto en la identificación de respuestas correctas e incorrectas, en los ejemplos dados por los niños ficticios en los cuatro ítems propuestos. Dichos ítems tienen como contenidos principales los siguientes:

- Ítem 1: Experimento compuesto, comparación de probabilidades, sesgo de equiprobabilidad, enumeración sistemática. Forma parte del conocimiento ampliado del contenido. Por la presencia de sesgos lo consideramos como parte del significado subjetivo. En este ítem que sólo el 40 % de futuros profesores respondieron correctamente la primera parte y el 27% los dos apartados en el Estudio 2, el 90 % de participantes en el Estudio 3 ha sido capaz de identificar la respuesta correcta.

- Ítem 2: Juego equitativo, esperanza matemática, experimento compuesto y cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos compuestos (significado clásico). La primera parte del ítem se consideró parte del conocimiento común, mientras que la segunda incluye conocimiento ampliado sobre la probabilidad. En el Estudio 1, aunque el 90% diferenció el juego no equitativo en la primera parte, sólo el 40% fue capaz de determinar la apuesta para convertirlo en no equitativo. En el Estudio 2 el 85 % es capaz de identificar cuál es la apuesta correcta.

- Ítem 3: Probabilidad frecuencial, muestreo, estimación, variabilidad en el muestreo. Forma parte del conocimiento común y ampliado del contenido. En el Estudio 1, el 34% de participantes da un valor adecuado de la esperanza matemática y sólo el 24% una serie de resultados con variabilidad adecuada. En el Estudio 2 el 82% identifica la respuesta correcta (con ambas características) al problema.

- Ítem 4: Comparación de probabilidades en contextos de urna. Significado clásico, proporcionalidad. Forma parte del conocimiento común del contenido. En este ítem hubo menos variación pues ya en la primera evaluación el 76% dio una respuesta correcta; se eligió porque pocos daban una composición de urna proporcional; en la segunda evaluación el 87% identifican como correcta dicha composición.

Deducimos que, aunque son pocos los ítems propuestos en este segundo cuestionario, se ha hecho evidente el avance en el conocimiento, aunque es más difícil separar el conocimiento común del ampliado. No obstante se han dado los dos, como se ha descrito a lo largo de este capítulo.

El pequeño número de ítems tampoco nos permite una evaluación completa de la evolución de los diferentes significados de la probabilidad, pero si algunos indicios. En cuanto al significado clásico, en el ítem 4 se reconoció como respuesta correcta la composición proporcional. En el ítem 2 una alta proporción de grupos de futuros profesores son capaces de determinar la ganancia para convertir el juego en equitativo. En cuanto al conocimiento del significado frecuencial, se manifiesta en la proporción de grupos de futuros profesores que es capaz de reconocer la variabilidad adecuada en secuencias cortas de ensayos en el ítem 3, así como la cercanía entre el valor esperado y observado de la probabilidad y la necesaria variación de un ensayo a otro. Finalmente, en cuanto al significado subjetivo, en el problema 1 (sobre sesgo de equiprobabilidad) los grupos de futuros profesores muestran una buena comprensión del experimento compuesto y de la enumeración de resultados.

6.9.2. CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE LA PROBABILIDAD

También se pidió a los futuros profesores listar los objetos matemáticos implícitos en la solución correcta de cada uno de los cuatro problemas, como se había hecho en clase en otras prácticas. Esto se hace para responder a la hipótesis siguiente:

H3.2: Se espera observar en los participantes un conocimiento especializado de la probabilidad moderado en relación con cuatro contenidos seleccionados.

Las respuestas obtenidas indican que los futuros profesores muestran conocimiento especializado del contenido aceptable pues se identificaron y clasificaron correctamente muchos de los objetos matemáticos identificados en el análisis a priori; especialmente en lo que respecta a los ítems correspondientes al significado clásico (2 y 4) y menos en los otros dos. Suponemos que las actividades formativas realizadas contribuyeron a desarrollar este conocimiento, pero aún así se debe mejorar pues el número de objetos citados por cada grupo fue pequeño.

Los resultados en este apartado corroboran la investigación de Chick y Pierce (2008), cuyos profesores no hicieron un uso adecuado de los recursos proporcionados por el investigador al planificar lecciones de estadística y probabilidad, pues fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada.

Asimismo, coinciden con los de Mohamed (2012), quien considera que el conocimiento especializado del contenido de los futuros profesores en su estudio es insuficiente, con respecto a los conceptos de espacio muestral y juego equitativo. Los resultados son también mejores que los de Ortiz, Batanero y Contreras (2012) en una actividad similar donde proponen a grupos de futuros profesores de educación primaria identificar los objetos matemáticos en otras tareas de probabilidad. La diferencia con este último trabajo es que el número de objetos correctamente identificados es algo mayor y apenas aparecen objetos no necesitados en la solución del problema.

Puesto que los estudiantes de los dos estudios anteriores no realizaron previamente la actividad de discusión de las soluciones al problema, ni se apoyaron en simulación, experimentación o análisis de espacios muestrales, efectuada por nuestros participantes, deducimos que esta actividad fue productiva para desarrollar algo su conocimiento especializado del contenido.

Será importante buscar formas alternativas de desarrollar este conocimiento especializado, pues su carencia podría dificultar algunas de las actividades que realiza el profesor, como se concluye de investigaciones previas con profesores en ejercicio (Watson, 2001; Stohl, 2005; Watson, Callinghan y Donne, 2008).

6.9.3. CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y LOS ESTUDIANTES

La segunda hipótesis se estudia mediante la evaluación y los razonamientos sobre las causas de error que los futuros profesores realizaron en la parte final de los ítems.

H3.3: Se espera observar en los participantes un conocimiento de la probabilidad y el estudiante aceptable con respecto a los cuatro contenidos seleccionados.

Esta hipótesis también se confirma pues la mayoría de grupos de futuros profesores en nuestro estudio fueron capaces de reconocer las respuestas correctas e incorrectas, mostrando mejores resultados que estudios previos con profesores en ejercicio (Watson, 2001; Stohl, 2005) o en formación (Carter, 2008; Mohamed, 2012).

En concreto, los futuros profesores muestran conocimiento del contenido y los estudiantes aceptable para el ítem relacionado con significado frecuencial, e insuficiente para los ítems referidos a sesgo de equiprobabilidad, juego equitativo y significado clásico; contrario a nuestras hipótesis iniciales. Sin embargo, sugerimos fortalecer su capacidad de argumentación y su conocimiento de fuentes de error en relación con los contenidos aquí evaluados.

Estos resultados son consistentes con el estudio de Mohamed (2012), quién observó un alto porcentaje de acierto al discriminar respuestas correctas y erradas, que el autor atribuye a un buen nivel de conocimiento común del contenido, teniendo en cuenta que muchos de estos futuros profesores previamente resolvieron en forma correcta los problemas. En nuestro estudio, consideramos que el éxito en la identificación idónea de respuestas es producto del aprendizaje logrado con las actividades de simulación posteriores a la solución del Cuestionario 1, dado que, en algunos de estos ítems, el porcentaje de acierto en la evaluación inicial fue bajo.

En todo caso, sería necesario mejorar la formación en este punto, dándoles a conocer los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles mediante una adecuada transposición didáctica. Respecto a la metodología, para llevar a cabo esta formación, se sugiere proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales contextualizadas en su futura labor profesional, como se ha realizado en este trabajo. La resolución previa de los problemas y discusión colectiva de las soluciones apoyada en la simulación servirá para confrontarlos con sus propios sesgos e intuiciones incorrectas. Para prepararlos en la componente didáctica, serán de gran ayuda situaciones relacionadas con la docencia, como las usadas en este trabajo, pues de acuerdo a Llinares (2009) estas tareas tienen en cuenta los contextos en que el futuro maestro ha de aplicar su conocimiento en la práctica de enseñar matemáticas.

CAPITULO 7.

CONCLUSIONES

7.1. INTRODUCCIÓN

Como se indicó en la Sección 1.7, la investigación se organizó para ser desarrollada a través de etapas secuenciales, que derivaron en tres estudios (descritos en los Capítulos 2, 5 y 6). Cada estudio atendió a un objetivo específico de los planteados en la Sección 1.5 y por ello tiene un cuerpo propio; si bien hay dependencia entre ellos, Más concretamente, el Estudio 1 sentó algunas bases que se utilizaron en los Estudios 2 y 3, y el Estudio 3 utiliza algunos resultados observados en el Estudio 2.

Finalizada la Memoria, en este capítulo exponemos las conclusiones alcanzadas sobre cada uno de los objetivos e hipótesis generales fijados en el Capítulo 1 para nuestra investigación. Asimismo describimos las principales aportaciones a la didáctica de la probabilidad, las limitaciones del estudio y sugerimos posibles líneas de continuidad de esta investigación. Dichos objetivos e hipótesis generales son más amplios que los específicos propuestos para cada uno de los estudios; por tanto las conclusiones que ahora exponemos son más generales que las presentadas al finalizar cada capítulo que se referían sólo a las hipótesis particulares de cada estudio.

7.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general planteado en este trabajo fue *evaluar y desarrollar algunos componentes de los conocimientos matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores en formación de educación primaria en España*.

Al plantear este objetivo y a lo largo del trabajo este conocimiento se interpreta de acuerdo al marco teórico propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008) y teniendo en cuenta la reinterpretación y ampliación del mismo realizada por Godino (2009; 2011). Este autor reinterpreta estos componentes del conocimiento del profesor desde el enfoque ontosemiótico, y ofrece sugerencias sobre criterios de evaluación del mismo.

Este objetivo se cumplió a lo largo de la investigación, en particular a través de los Estudios 2 y 3 centrados en la evaluación y desarrollo del conocimiento sobre probabilidad de los futuros profesores participantes. Concretamente, para una selección de contenidos de probabilidad relevantes para su enseñanza en educación primaria, se evaluaron cuatro de los componentes del conocimiento del profesor en nuestro modelo: el conocimiento común y ampliado de la probabilidad, el conocimiento especializado de la probabilidad y el conocimiento de la probabilidad y los estudiantes.

Asimismo, consideramos que se desarrollaron estos cuatro componentes con la actividad formativa descrita en el Capítulo 4, si bien solo observamos de forma indirecta el desarrollo del conocimiento común y ampliado de la probabilidad en el trabajo con cuatro tareas específicas, como se describió en el Capítulo 6.

A continuación recordamos los objetivos específicos planteados en la Sección 1.5 y presentamos las conclusiones derivadas de cada uno de ellos, la cuales nos permitieron cumplir con el anterior objetivo general.

O1. Analizar los significados de la probabilidad presentados en los documentos curriculares y en los textos de educación primaria españoles.

Este objetivo se cumplió a través del Estudio 1, descrito en el Capítulo 2, que estuvo apoyado en nuestro análisis teórico previo de los significados de la probabilidad (Sección 1.4), que partiendo de los trabajos de Batanero (2005), Batanero y Díaz (2007), y otros citados en dicha sección, nos lleva a identificar las configuraciones de objetos matemáticos ligados a los diferentes significados.

El análisis semiótico detallado de los documentos curriculares y libros de texto y la comparación con las citadas configuraciones de objetos matemáticos nos permitió identifican cuáles de dichos objetos matemáticos son sugeridos para cada ciclo y significado de la probabilidad en las directrices curriculares de educación primaria para la probabilidad (MEC, 2006; Consejería de Educación, 2007). Asimismo pudimos destacar y comparar su presencia en dos series completas de libros de texto para esta etapa educativa.

Nuestro análisis pone de manifiesto los objetos matemáticos que, explícita o implícitamente se recomiendan en los documentos curriculares o se incluyen en las actividades de los libros de texto. Dichos objetos matemáticos deben formar parte del conocimiento común del contenido para la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. Por otro lado, esta identificación de los objetos matemáticos presentes en el currículo para cada significado de la probabilidad nos permitió fijar de modo más preciso el significado institucional de referencia en nuestro trabajo, lo cual sirvió para fundamentar la construcción de nuestros cuestionarios y planificar el desarrollo de la actividad formativa prevista.

Además, identificamos fortalezas y debilidades en las actividades propuestas en estos libros de texto, información que puede ser de interés a profesores y formadores de profesores, por cuanto les alerta sobre posibles razonamientos errados, heurísticas y sesgos que se estén promoviendo en los niños, de forma indirecta e inconsciente.

Por otra parte, el resultado del análisis da elementos para mejorar el currículo de probabilidad en la educación primaria, ya que hemos puesto de manifiesto la transversalidad de algunos objetos matemáticos presentes en los tres ciclos formativos y su progresión en el tiempo. En el análisis de libros de texto, también hemos indicado que algunas actividades de contenido estadístico pueden vincularse con el significado frecuencial de la probabilidad y hemos puesto de manifiesto situaciones que pueden ser desarrolladas con diferentes significados de la probabilidad, en particular situaciones propias del significado subjetivo que son tratadas con el significado intuitivo.

Algunos resultados parciales del análisis curricular han sido aceptados para publicación: En Gómez y Contreras (2013) se analiza el estudio del currículo; en Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) lo referente al lenguaje; y en Gómez, Ortiz y Gea (en prensa) presentamos los resultados sobre los conceptos y propiedades en los libros de texto.

O2. Evaluar y desarrollar el conocimiento matemático común y ampliado de la probabilidad en una muestra de futuros profesores de educación primaria.

Para lograr este objetivo, se desarrolló el Estudio 2, descrito en el Capítulo 5 en el cuál, en primer lugar se construyó el Cuestionario 1, siguiendo las definiciones de componentes del conocimiento matemático para la enseñanza del modelo de Ball y colaboradores con la reinterpretación de Godino (2009; 2011), analizadas en el Capítulo 4.

La construcción del cuestionario ha seguido un proceso metodológico riguroso, basado en las normas metodológicas de APA, AERA y NCME (1999). Como se describió en la Sección 5.4, la definición semántica de la variable objeto de medición parte del estudio previo de los significados de la probabilidad pretendido en el currículo español para educación primaria, obtenidos del Estudio 1 (Sección 2.11), y del análisis curricular para la formación de futuros profesores para educación primaria en la Universidad de Granada (Sección 4.4).

También nos apoyamos en el análisis de las investigaciones previas (Capítulos 3 y 4) que nos permitieron identificad algunos ítems y respuestas de niños que se utilizarían o adaptarían para el instrumento. En el Capítulo 5 se describe con detalle la metodología y se justifica la validez de contenido del cuestionario, información que es completada con el estudio de fiabilidad y generalizabilidad.

Al igual que en investigaciones previas (analizadas en el Capítulo 4) en nuestra muestra observamos una alta proporción de futuros profesores de educación primaria con bajos conocimientos en probabilidad y una presencia importante de heurísticas y sesgos, como se describió en el Capítulo 5. Un aporte de nuestro estudio, que lo distingue de anteriores, es que hemos contemplado los diversos significados de la probabilidad presentes en el currículo, encontrando que en nuestra muestra hay mejor comprensión de objetos ligados al significado clásico, un poco menos de objetos referidos al significado frecuencial y es baja la comprensión del significado subjetivo.

Hemos también observado de manera indirecta en el Estudio 3 (Capítulo 6) el desarrollo del conocimiento matemático común y ampliado de la probabilidad en una sub-muestra de futuros profesores participantes en el estudio con respecto a cuatro preguntas incluidas en el Cuestionario 1. Consideramos que los futuros profesores desarrollan este conocimiento cuando, tras completar el cuestionario, participan en la discusión de posibles soluciones (correctas y erradas), atienden a la explicación del formador para llegar a la respuesta correcta y vuelven a resolver las tareas con ayuda de diagramas en árbol o con actividades de simulación.

Algunos resultados parciales del Estudio 2 han sido aceptados para publicación (Batanero, Gómez, Serrano, y Contreras, 2012; Batanero, Gómez, Serrano, y Contreras, 2013; Gómez, Serrano, Batanero, y Contreras, 2013; Batanero, Gómez, Contreras, y

Gea, 2014).

O3. Evaluar, en una muestra de futuros profesores de educación primaria, algunos componentes de los conocimientos didácticos para enseñar probabilidad, respecto a una selección de objetos incluidos en el currículo de primaria.

Para tratar de cumplir este objetivo se desarrolla el Estudio 3, descrito en el Capítulo 6; además, la discusión de los resultados, también, constituye un ejercicio dirigido a desarrollar el conocimiento didáctico de la probabilidad en los futuros profesores.

Al igual que en el Estudio 2, hemos construido el Cuestionario 2 siguiendo la metodología de Godino (2009, 2011), las definiciones de componentes del conocimiento matemático para la enseñanza del modelo de Ball y colaboradores y las orientaciones metodológicas de APA, AERA y NCME (1999). La definición de los contenidos a evaluar, en este caso (Sección 6.3), parte de los resultados observados en el Estudio 1 y de los hallazgos reportados en investigaciones previas, descritas en el Capítulo 4. También en este caso se justifica la validez de contenido, aunque no se hace un estudio de fiabilidad o generalizabilidad, pues la muestra de ítems y de estudiantes es pequeña.

Como resultado de la evaluación observamos que una alta proporción de grupos participantes en el Estudio 3 muestra conocimiento del contenido y los estudiantes aceptable para el nivel de formación al que impartirán la enseñanza en su futuro ejercicio profesional. La identificación de respuestas correctas, parcialmente correctas y erróneas es satisfactoria con relación a cuatro contenidos: sesgo de equiprobabilidad en experimento compuesto, juego equitativo, probabilidad simple con el significado frecuencial y comparación de probabilidades con el significado clásico. Sin embargo, la explicación satisfactoria de fuentes de error para estos mismos contenidos fue pobre; posiblemente por la necesidad de desarrollar más la capacidad de argumentación de estos estudiantes.

Suponemos que los participantes en las discusiones de posibles respuestas al Cuestionario 1 desarrollaron algún conocimiento del contenido y los estudiantes, puesto que durante la discusión surgen tanto respuestas correctas como erróneas y se exponen las intuiciones y estrategias empleadas por ellos mismos para llegar a éstas. Esta actividad les permite reconocer posibles situaciones que podrían darse durante su ejercicio profesional, ya que algunos de ellos mostraron razonamientos similares a los de niños de primaria.

Sugerimos a los formadores de profesores la realización de actividades donde, primero, el futuro profesor (de forma individual o en parejas) se enfrente a identificar respuestas correctas y erróneas de niños en edad escolar y a identificar las posibles intuiciones o estrategias que conllevan a las respuestas erróneas, similares al formato usado en el Cuestionario 2. Seguidamente, se discutan las soluciones aportadas por los futuros profesores con la orientación del formador para desarrollar más profundamente su conocimiento del contenido y los estudiantes. Consideramos que la discusión posterior a la realización de la tarea promueve el desarrollo de conocimiento del contenido y los estudiantes.

Respecto a la identificación de objetos matemáticos en la tarea, los resultados fueron mejores que los obtenidos en investigaciones previas como la de Mohamed

(2012), pero aún han de mejorarse. De forma análoga, sugerimos a los formadores de profesores la realización de actividades donde, primero, el futuro profesor (de forma individual o en parejas) reconozca los objetos matemáticos involucrados en la resolución de una tarea y, posteriormente, ellos discutan sus soluciones con la orientación del formador para ampliar su competencia en el análisis matemático de estas tareas. Esta metodología promueve el desarrollo del conocimiento especializado del contenido.

De este estudio se ha derivado la siguiente publicación: Gómez, Batanero, y Contreras (en prensa) donde se resumen los resultados referidos a la probabilidad frecuencial.

7.3. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

También en el Capítulo 1 se plantearon algunas hipótesis generales que pasamos a discutir.

H1: Se esperaba mostrar en el análisis de libros de texto que sus contenidos no reflejasen de forma adecuada los contenidos curriculares del Decreto de Enseñanza Mínimas, en el sentido de que no se considerase la probabilidad en todos los cursos de la educación primaria. También se esperaba que el desarrollo de los diferentes significados de la probabilidad fuese desigual; en particular que se presentasen más contenidos referidos a los significados intuitivo y clásico, menos al frecuencial y ninguno al subjetivo y al axiomático.

En el Capítulo 2 observamos que esta hipótesis se confirmó en forma general en nuestro trabajo. Respecto a la primera parte de la hipótesis, observamos que la probabilidad forma parte de los contenidos de los libros de matemáticas en los tres ciclos, pero no en todos los cursos; sino que generalmente está presente en 2°, 4° y 6° curso.

Es de notar que los libros de texto también incluyen algunos contenidos no sugeridos en el Decreto de Enseñanzas Mínimas; en particular los ejercicios usan las nociones de juego equitativo y experimento compuesto, junto con algunas de sus propiedades y procedimientos, así como los conceptos de dependencia e independencia. Estos contenidos no se incluyen en las orientaciones curriculares y, excepto el de juego equitativo, conocido al niño por su experiencia con juegos, podrían ser demasiado abstractos para las edades de los niños.

En cuanto al desarrollo de los diferentes significados de la probabilidad en las series de libros de texto, notamos que todos los objetos matemáticos básicos del significado intuitivo están presentes en los tres ciclos y se desarrollan progresivamente. Asimismo todos los objetos matemáticos básicos del significado clásico están presentes en los dos últimos ciclos, con mayor intensidad en el segundo ciclo, aunque con poca formalidad, como es adecuado a la edad de los niños.

Por el contrario, los objetos matemáticos básicos del significado frecuencial solo están presentes en una de las series, igualmente en forma intuitiva, pero en forma no completa.

En particular, echamos en falta contenidos o actividades relacionados con la simulación, que está sugerida tanto por el Real Decreto como por la Consejería de Educación. Además, este contenido permite reforzar el componente tecnológico de la enseñanza, tan importante hoy en todas las áreas de matemáticas.

Si bien algunas situaciones involucran objetos matemáticos ligados al significado subjetivo, éste significado queda implícito en ellas, no se desarrolla. Más aún, en estos libros de texto estas situaciones son tratadas a la luz de los otros significados (por ejemplo el clásico). Esta relación entre los dos significados puede facilitar su articulación entre significados; pero en la forma que se presenta, en ocasiones puede promover el desarrollo de obstáculos de aprendizaje, como el sesgo de equiprobabilidad.

Como era de esperar a este nivel de formación, se omite la mención de contenidos propios del significado axiomático; aunque algunos objetos se consideran implícitamente por su correspondencia con objetos de otros significados (por ejemplo, el concepto de espacio muestral), su definición o enunciación no se hace formalmente. No obstante, pensamos que ello es adecuado para la edad de estos niños.

> *H2: En el estudio de evaluación que se analiza en el Capítulo 5, se esperaba detectar en una proporción importante de futuros profesores con dificultades relacionadas con el conocimiento de probabilidad (común y ampliado) ya descritas por diversos autores: falta de percepción de la independencia, incapacidad para discriminar si algunos juegos son equitativos y para comparar probabilidades (en problemas correspondientes al nivel de operaciones formales), sesgo de equiprobabilidad y de representatividad; incorrecta interpretación de la probabilidad frecuencial e incorrecta restricción del espacio muestral en problemas de probabilidad subjetiva.*

En el Capítulo 5 observamos que esta hipótesis se confirmó parcialmente en las respuestas de los participantes a los doce ítems propuestos en nuestro Cuestionario 1, como se describe a continuación.

La falta de percepción de la independencia se observó en la baja proporción de respuesta correcta y de argumentación válida en los ítems que involucran los conceptos de dependencia, independencia y experimento compuesto (3, 4, 6 y 8). También se refleja en los fallos en la percepción de aleatoriedad en secuencias de ensayos repetidos en los ítems 10 y 12.

La capacidad para discriminar si algunos juegos son equitativos y para comparar probabilidades se evalúo mediante los ítems 2 y 6, observando buenas intuiciones en los participantes y el uso de estrategias poco formales. En cuanto a la comparación de probabilidades la mayoría de participantes simplificaron el problema pues su estrategia de su solución fue la igualdad de la composición de los dispositivos. Muy pocos participantes emplearon razonamiento proporcional, proponiendo una composición diferente de las dos urnas, Además, para resolver el problema algunos utilizaron estrategias univariadas y otros no reconocieron la desigualdad inicial de probabilidades en las urnas.

En cuanto a la identificación de un juego no equitativo, los resultados fueron muy buenos, pues los estudiantes reconocieron la no equitatividad del juego, basados en intuiciones correctas. Sin embargo, la asignación de un valor de apuesta que hiciera equitativo el juego tuvo resultados apenas aceptables, pues hubo errores en la asignación de dicho valor debido a fallos en razonamiento proporcional inverso o incluso en creencias incorrectas sobre el concepto de juego equitativo; también se observó casos de no respuesta.

El sesgo de equiprobabilidad y la heurística de representatividad se evaluaron con los ítems 8 y 11, que mostraron bajas proporciones de respuesta correcta, indicando una presencia importante de estas concepciones erradas en nuestra muestra de participantes, en ocasiones mezcladas con otros fallos. Como se describió en el Capítulo 5, estas concepciones erradas también se observaron en otros ítems; el sesgo de equiprobabilidad se identificó en los argumentos de las respuestas en los ítems 2, 3, 4 y 6ª, así como en las estrategias usadas en los ítems 5 y 6b; la heurística de representatividad estuvo presente en las estrategias usadas en el ítem 5.

La interpretación de la probabilidad frecuencial se evalúo con el ítem 12, e indirectamente con los ítems 5, 9 y 11. Los resultados indican que, en situaciones sencillas, la mayoría de participantes llegan a resultados correctos por el uso de estrategias aritméticas, aunque pocos dan interpretaciones satisfactorias desde el punto de vista probabilístico. En situaciones un poco más complejas, los fallos de interpretación se deben principalmente a la presencia de concepciones erradas, heurísticas y sesgos, como el de equiprobabilidad, la insensibilidad al tamaño de la muestra o el enfoque en el resultado.

La capacidad de los participantes para restringir el espacio muestral en problemas de probabilidad subjetiva se evalúo en el ítem 7, concluyendo que hay dificultades para realizar este procedimiento. Un 24% de los futuros profesores no respondieron o utilizaron una estrategia confusa; 37% de los evaluados utilizó como estrategia la enumeración del espacio muestral restringido del experimento compuesto, pero pocos lo hicieron con éxito, pues la mayoría no tuvieron en cuenta el orden o tuvieron fallos de razonamiento combinatorio.

H3: Se espera que la actividad de resolución y discusión colectiva del cuestionario y posteriores actividades de simulación contribuya a mejorar el conocimiento común y ampliado de los futuros profesores participantes en el estudio, que se hará visible en algunas preguntas del cuestionario que se analiza en el Capítulo 6.

Como ya se indicó en el Capítulo 6, el progreso en el conocimiento incluido en los cuatro ítems seleccionados fue visible en la identificación de las respuestas correctas e incorrectas en el Estudio 3 que ha sido generalizada; cuando en el Estudio 2 en los tres primeros ítems la mayoría de las respuestas fue incorrecta y en el último únicamente se llegó a una respuesta de distribución equiprobable de bolas y no a una respuesta proporcional.

También fue visible la evolución del conocimiento matemático en la desaparición de muchos de los sesgos presentes en la primera resolución de los ítems e incluso en su reconocimiento, en las respuestas de los niños, por parte de los futuros profesores. Todo ello indica, el aprendizaje logrado por parte de los futuros profesores, mediante la metodología propuesta, que se describió con detalle en el Capítulo 5.

H4: Se espera observar un conocimiento especializado del contenido y *conocimiento del contenido y el estudiante moderado en los participantes, a pesar de las citadas actividades de discusión del primer cuestionario y de simulación*

También en el Capítulo 6 confirmamos un mejor desempeño en los componentes de conocimiento didáctico cuando se muestra suficiencia en cuanto al conocimiento común o ampliado del contenido, que en otros casos, Nuestros hallazgos son similares a los de Carter (2008) y Mohr (2008) con respecto al conocimiento del contenido y la enseñanza en futuros profesores de matemáticas para educación secundaria en Estados Unidos.

Sin embargo, un alto nivel de conocimiento común o ampliado de la probabilidad, declarado en una evaluación, no garantiza que se tendrá ese mismo nivel en los componentes de conocimiento didáctico. En el contexto de sus investigaciones, Carter (2008) concluye que hay una brecha entre la comprensión y la explicación de un concepto y Mohr (2008) encuentra que una proporción menor de lo esperada para futuros profesores tienen la argumentación necesaria para la enseñanza de los temas de probabilidad y estadística.

En cuanto a que el desarrollo de conocimiento común o ampliado del contenido no es suficiente para garantizar el desarrollo de los componentes de conocimiento didáctico. Por tanto es importante dar instrucción específica sobre didáctica de la probabilidad a los futuros profesores.

7.4. APORTACIONES Y LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

El trabajo realizado presenta una serie de aportaciones de interés para la didáctica de la probabilidad y la formación de profesores, a continuación resumimos las principales.

Aportaciones en la investigación curricular

Nuestro estudio curricular ha sido de carácter local, pues nos hemos centrado en el caso español. Aún así, su impacto puede ser más amplio, teniendo en cuenta que, como indican Jones, Langrall y Mooney (2007), en los últimos años, los currículos de muchos países introducen la probabilidad en edades más tempranas, por las necesidades actuales en la formación de un ciudadano.

Por ello, los contenidos y competencias esperadas en educación primaria son similares en países orientales y occidentales, aunque hay diferencias sobre hasta dónde llegar en su enseñanza. En particular para los últimos cursos de educación secundaria se observa mayor variabilidad que en la primaria. Este alto nivel de acuerdo sobre qué probabilidad enseñar en la educación primaria tiende a la conformación de un currículo internacional por lo que el significado de referencia construido para este trabajo puede servir de base en el análisis de otras directrices curriculares. Este aporte también genera una línea de continuidad en la investigación como describiremos en la siguiente sección.

Asimismo los resultados de este análisis curricular sirven de referencia para el ejercicio profesional de profesores, futuros profesores y formadores de profesores.

Aportaciones sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores

Hill, Sleep, Lewis y Ball (2007) sugirieron que los investigadores interesados en el desarrollo del conocimiento del profesor en relación a temas matemáticos específicos deben diseñar sus propios instrumentos. Según los autores, estas evaluaciones son un significante progreso en la comprensión del conocimiento del profesor aunque están lejos de ser perfectas.

El constructo de MKT es aún emergente, y no se puede esperar que un instrumento capture las habilidades de razonamiento ni el conocimiento que poseen los profesores sin una mejor demarcación teórica de este dominio; además la enseñanza de cualquier contenido supone juicios profesionales complejos con que no se pueden recoger en un cuestionario. Sin embargo, estos constituyen un paso, que se irá completando con pruebas de validez de contenido, como las utilizadas en nuestro trabajo.

En este sentido nuestros cuestionarios suponen una contribución, aunque los ítems no sean originales, sino tomados o adaptados de investigaciones previas. En la mayoría de estos ítems se confirmaron los hallazgos publicados en investigaciones previas; en otros casos se aportan resultados originales, debido a la modificación del ítem o a que no se usaron con futuros profesores. Además aportamos en cuanto a identificar nuevos conflictos semióticos o explicar en forma alternativas conflictos ya descritos en la comprensión de la probabilidad.

Nuestra evaluación de algunos aspectos del conocimiento didáctico en el Estudio 3 proporciona resultados originales, pues hay muy pocas investigaciones referidas a los dos componentes de conocimiento evaluados. Aunque las tareas presentadas fueron muy limitadas, los resultados son importantes, en cuanto muestran las necesidades formativas de los futuros profesores en didáctica de la probabilidad.

La formación de profesores debería incluir actividades para el desarrollo del conocimiento del contenido y los estudiantes, dándoles a conocer, con una adecuada transposición didáctica, los resultados de investigaciones sobre razonamiento probabilístico en niños, como las resumidas en el Capítulo 3. Entre ellas resaltamos las referidas al cambio en las intuiciones debido a la instrucción, a los problemas para distinguir sucesos simples y compuestos (Fischbein, Nello y Marino, 1991), a errores de niños al desarrollar tareas (Fischbein y Gazit, 1984).

Aportaciones para la práctica docente

Asimismo proporcionamos material didáctico que puede ser utilizado por formadores de profesores en sus clases para la enseñanza de la probabilidad o de la didáctica de la probabilidad. Los Cuestionarios 1 y 2 (Anexos 1 y 3) pueden ser aplicados directamente, o ligeramente modificados, a nuevos grupos de profesores en formación; y la discusión se puede apoyar en las actividades descritas en el Anexo 2 o con las soluciones dadas en el Anexo 4.

Otro material de apoyo es la descripción detallada del significado de la probabilidad pretendido en el currículo español para educación primaria (sintetizado en las Tablas 2.16 y 2.17) pues pone de manifiesto algunos contenidos de probabilidad que no aparecen explícitos en la normativa. Este análisis curricular también puede ser útil para los mismos profesores, esta descomposición detallada puede facilitar la organización de actividades formativas sobre probabilidad acordes con los requerimientos vigentes.

Por otra parte, el análisis de los libros de texto proporciona un documento de referencia para los profesores en ejercicio que puede facilitar la elección de actividades complementarias que subsanen las deficiencias identificadas, el reconocimiento de contenidos probabilísticos implícitos en la enseñanza de los contenidos sugeridos y la articulación de la probabilidad con otros bloques de contenido.

Limitaciones del estudio

Como todo trabajo empírico, esta Tesis tiene sus limitaciones. En cada uno de los estudios realizados el tamaño de la muestra ha sido razonable para los propósitos de la investigación pero pequeños para realizar estudios de características psicométricas, como validez de criterio o de constructo; no obstante hemos dado algunas indicaciones de validez de contenido para los dos cuestionarios y de fiabilidad y generalizabilidad del primero. Además al tratarse de muestras intencionales los resultados de los contrastes estadísticos se deben interpretar con precaución, siempre referidos a los contextos utilizados en esta investigación.

Asimismo el contexto geográfico ha sido limitado, sería necesario completar nuestros estudios con nuevas muestras en diferentes contextos que permitiesen ver si se confirman nuestros resultados.

Por otro lado, los datos en los estudios de evaluación (2 y 3) se toman a partir de cuestionarios escritos, sin tener una interacción directa con los participantes; en consecuencia, no pueden describirse de una forma completa la complejidad y riqueza de los conocimientos de los futuros profesores. Los hallazgos podrían complementarse con entrevistas en profundidad a los futuros profesores que presentan desempeños de interés, como puntuaciones extremas (muy altas o muy bajas), con la finalidad de explicar con mayor detalle las causas de este resultado.

Finalmente, la investigación se ha centrado en cuatro de los seis componentes del modelo de conocimiento matemático para la enseñanza, y con un pequeño peso en el componente didáctico, por tanto nuestras propuestas para continuidad de la investigación se orientan hacia estas líneas para complementar la información sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria.

7.5. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Como consecuencia de las limitaciones señaladas en nuestra investigación, surgen nuevas líneas de trabajo para continuar el análisis de la formación de profesores para enseñar probabilidad en la educación primaria.

A nivel curricular

La idea de un currículo internacional, común a nivel de países o comunidades, está vigente; sin embargo no hay unicidad en el significado institucional de currículo, por ahora se enfocan en aspectos comunes a los currículos de muchos países. Los pros y contras de la globalización ligados a la desigualdad económica entre países y en su interior, llevan a concluir que es “esencial que los países conserven la libertad de decidir a qué edades los tópicos sean introducidos a los estudiantes pues esto variará mucho de acuerdo con circunstancias locales y ambientales” (Cai y Houson, 2013, p. 970).

La comparación de análisis curriculares similares al nuestro en otros países dejaría ver el nivel de coincidencia y de diferencia real entre los currículos pretendidos en cuanto a la probabilidad. Aunque se trate de diferentes contextos y lenguaje verbal, la descomposición en situaciones problema, lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos implícitos y explícitos en los documentos curriculares desvela elementos propios de significados de la probabilidad reconocidos a nivel internacional, que seguramente están presentes en los currículos de la mayoría de países.

Aprovechando el trabajo de análisis de libros de texto, realizado en el Capítulo 2, sería necesario realizar evaluaciones de su idoneidad didáctica, para complementar el trabajo presentado en el Estudio 1. También se podría continuar la investigación ampliando la muestra de libros de texto, por ejemplo incluyendo los usados en otras comunidades autónomas para establecer similitudes y diferencias, o incluir los usados en educación secundaria y bachillerato para establecer la articulación o consistencia en la continuidad de los contenidos.

A nivel de formación de profesores

Otra línea de investigación es la de evaluación y desarrollo de los conocimientos didácticos de los profesores, que se estudia de forma limitada en el Estudio 3 y que se revela claramente insuficiente en nuestros resultados. El éxito de las propuestas curriculares, descritas en la Sección 2.3, dependerá de la formación de los profesores que han de llevarla a cabo. Desafortunadamente, nuestro trabajo ha mostrado que dicha formación es insuficiente para el tema de probabilidad.

En otra dirección, el análisis expuesto en el Capítulo 2 proporciona situaciones didácticas que se pueden adaptar para proponer nuevas actividades de formación de profesores con metodologías similares a las implementadas en nuestra investigación

A nivel del conocimiento matemático para enseñar probabilidad

Los estudios de evaluación realizados sobre el conocimiento matemático de los futuros profesores para enseñar la probabilidad podrían complementarse con nuevas tareas, pues, como se ha indicado, la investigación previa es muy escasa. Sería posible ampliar el rango de problemas planteados, cubriendo algunos de los contenidos que no incluimos en nuestro cuestionario como el concepto de simulación.

Esta evaluación y desarrollo se puede completar con el estudio de los dos componentes del modelo de conocimiento matemático para la enseñanza que no se trataron en esta investigación: el conocimiento del currículum y el conocimiento de la probabilidad y la enseñanza en educación primaria.

También se puede completar con el estudio de los mismos componentes para otros contenidos de la probabilidad con la metodología descrita en el Estudio 3, de modo que se amplíe la información con respecto al conocimiento del contenido y los estudiantes y al conocimiento especializado del contenido. En cuanto a contenidos de conocimiento común para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria se podrían utilizar las respuestas relacionadas con los ítems del Cuestionario 1 sobre la enumeración del espacio muestral, la probabilidad compuesta en experimentos dependientes o independientes. En cuanto a contenidos de conocimiento ampliado para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria se podrían utilizar las respuestas relacionadas con los ítems del Cuestionario 1 sobre probabilidad condicional, muestreo (estimación de proporciones y totales), percepción de aleatoriedad, heurística de representatividad, distribución binomial y enfoque en el resultado.

Otra posible línea de investigación es evaluar los componentes didácticos del modelo MKT en profesores de educación primaria en ejercicio, para confirmar si los resultados se replican o si éstos muestran mejores desempeños que nuestros futuros profesores, debido a su mayor conocimiento disciplinar o a su experiencia en el ejercicio docente. En esta línea de trabajo también hay pocos antecedentes (Haller, 1997; Dugdale, 2001; Stohl, 2005; Lee y Hollebrands, 2008, 2011; Watson, Callingham y Donne, 2008; Callingham y Watson, 2011), referidos a otros contenidos de la probabilidad y algunos con el uso de simulación, como se resumió en el Capítulo 4; entre sus conclusiones, invitan a seguir investigando en este tema teniendo en cuenta las limitaciones de sus estudios y la importancia de perfeccionar la medición.

También se podrían evaluar los diferentes componentes del modelo en futuros profesores de secundaria, para confirmar si éstos muestran mejores desempeños en el conocimiento didáctico que nuestros futuros profesores, debido a su mayor conocimiento de matemática.

REFERENCIAS

American Psychological Association, American Educational Research Association y National Council on Measurement in Education (1999). *Standards for educational and psychological testing*. Washington, DC: Autor

Amir, G., y Williams, J. (1994). The influence of children's culture on their probabilistic thinking. En J.P. Pontes y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 24-31). Lisboa: Universidad de Lisboa.

ANECA – Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (2005). *Libro blanco del título de Grado en Maestro en Educación Primaria*. Vol. 1. Madrid, España: Autor.

ANECA (2010). Título: Grado en Maestro en Educación Primaria: Universidad de Granada: Autor. Disponible en: secretariageneral.ugr.es/

Aspinwall, L., y Tarr, J. E. (2001). Middle school students' understanding of the role sample size plays in experimental probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 229-245.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Azcárate, P., y Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 591-619). Madrid: Síntesis.

Azcárate, P., y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Trabajo presentado en *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Oldenburg, Alemania. Disponible en: www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar* [CD-ROM]. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C. (2011). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. Conferencia en la *CIAEM XIII*, Recife.

Batanero, C. (2014). Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. Disponible en: www.springerreference.com/docs/html/chapterdbid/313307.html.

Batanero, C., Biehler, R., Engel, J., Maxara, C., y Vogel, M. (2005). Simulation as a tool to bridge teachers' probabilistic and pedagogical knowledge. Trabajo presentado en el *ICMI Study 15. Professional development of mathematics teachers*. Dortmund, Alemania.

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.

Batanero, C., Cañizares, M. J., y Godino, J. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. [CD-ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., y Díaz, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. En A. Contreras (Ed.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 13–36). Jaén: Universidad de Jaén.

Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education.* (pp. 107-127). New York: Springer.

Batanero, C., y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, *3*(1), 3-13. Disponible en: chjs.soche.cl.

Batanero, C., y Godino, J. D. (2004). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada; Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12.* Disponible en: www.amstat.org/publications/jse/.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Gea, M. (2014). Assessing and developing prospective teachers' understanding of random sequences. En U. Sproesser, S. Wessolowski, y C. Wörn (Eds.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt – Didaktische Perspektiven zur anwendungsbezogenen Mathematik* (pp. 1-11). Heidelberg: Springer.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., y Contreras, J. M. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de educación primaria. *Redimat 1*(3), 222-245.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., y Contreras, J. M. (2013). Reconocimiento de la aleatoriedad por futuros profesores españoles de educación primaria. *Actas de Simposio de matemáticas y educación matemática. III Congreso internacional de matemáticas asistida por computador* [CD-ROM]. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Batanero, C., y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(5), 558-567.

Begg, A., y Edwards, R. (1999, Diciembre). Teachers' ideas about teaching statistics. Trabajo presentado en el *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne, Australia.

Bellhouse, D. R. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review, 68*(2), 123-136.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa: Guía práctica*. Barcelona: CEAC.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 5-27.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Burgess, T. A. (2011). Teacher knowledge of and for statistical investigations. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 259-270). New York: Springer.

Cai, J., y Howson, G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.) *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 949-974). New York: Springer.

Callingham, R., y Watson, J. (2011). Measuring levels of statistical pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 283-293). New York: Springer.

Canada, D. L. (2008). Conceptions of distribution held by middle school students and preservice teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Cardano, G. (1961). *The book on games of chances.* New York: Holt, Rinehart y Winston. (Trabajo original: Liber de Ludo Aleae, en *Opera Omnia*, Vol.1, publicado en 1663).

Cardeñoso, J. M., Azcárate, P., y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal, 4*(2), 59-81.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education, 7*(3), 243–262.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Chick, H. L., y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. On line: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía*.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Contreras J. M., Batanero, C., Díaz, C., y Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. Trabajo presentado en *Seventh Conference of European Research in Mathematics Education, CERME 7*, Rzeszow, Polonia.

Cook, T. D. y Reichardt, C. S. (2000). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Paideia.

Cooney, T. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 608-636.

Corbalán, F., y Sanz, G. (2010). *La conquista del azar: la teoría de probabilidades.* Barcelona: RBA Libros.

Cordero, F., y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*7-38. (1), Departamento de Didáctica de la Matemática (2011a) Guía docente de la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria". Granada: Autor. Disponible en: grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/estudios.

Departamento de Didáctica de la Matemática (2011b), Guía docente de la asignatura "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas". Granada: Autor. Disponible en: grados.ugr.es/primaria/pages/infoacademica/estudios.

Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa.* Lérida: Sociedad de Estadística e Investigación Operativa. [CD- ROM].

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools, 17*(1/2), 173-182.

Eichler, A. (2008). Teachers' classroom practice and students' learning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE.www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 175-186). New York: Springer.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. En M. Camaño, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 121-140). Tenerife: SEIEM.

Estrada, A., Batanero, C., y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 263-274.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292–297). Canada: International Statistical Institute.

Falk, R., Falk, R., y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 181-204.

Falk, R. y Konold, C. (1997). Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment. *Psychological Review, 104*: 301-318.

Falk, R., y Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: Adjusting probabilities. *Developmental Psychology, 34*(6), 1340-1357.

Feller, W. (1983) *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. México, D.F.: Limusa.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante. XVIII* (1 y 2), 161-183.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 1-24.

Fischbein, E., y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 5, 193-198.

Fischbein, E., Nello, M. S., y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probability judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 523–549.

Fischbein, E., Pampu, I., y Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *British Journal of Educational Psychology, 40*(3), 261-270.

Fishbein, E., y Schnarch, D. (1996). Intuitions and schemata in probabilistic thinking. En Puig, L. y Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 353-360). Universidad de Valencia.

de Finetti, B. (1937). La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'Institute Henri Poincaré, 7,* 1-68.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82,* 97–124.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Alexandría: American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70* (1), 1-25.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.

Garfield, J. B., y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Godino, J. D. (1996). Mathematical objects: their meanings and understanting. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the international group tor the Psychology of Mathematics Education*. (vol. 2, pp. 417-424). Valencia: Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Reunión de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* (pp. 25-45). Guimaraes (Portugal).

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C., y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2012). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento ea instrução matemática. *Acta Scientiae, 10* (2), 7-37.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M.R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R., y Wilhelmi, M. R. (2011). Models for statistical pedagogical knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 271-282). New York: Springer.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. En *Actas VI Jornadas de educación matemática región de Murcia* (pp. 25-49). Murcia: Centro de profesores y recursos de Lorca, Mar Menor, Murcia I y Murcia II.

Gómez, E. (2011). *Bases para la definición semántica del conocimiento matemático para enseñar probabilidad del profesor de secundaria*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada.

Gómez, E., Batanero, C., y Contreras, J. M. (En prensa). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema.*

Gómez, E., y Contreras, J. M. (2013). Significados de la probabilidad en el currículo español para la educación primaria. *Actas de las I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada: SEIEM.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35*, 75-91.

Gómez, E., Ortiz, J. J., y Gea, M. (En prensa). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*.

Gómez, E., Serrano, L., Batanero, C., y Contreras, J. M. (Mayo, 2013) Estudio de la evaluación de la comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores. Trabajo presentado en *XVI Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Palma: JAEM.

Gonzato, M., Godino, J. D., y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática, 23,* (3), 5-37.

Gras, R., y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 49-95.

Green, D. R. (1983a). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Green, D. R. (1983b). From thumbtacks to inference. *School Science and Mathematics, 83*(7), 541-551.

Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320-328). Dunedin: Universidad de Otago.

Groth, R. E. (2008). Navigating layers of uncertainty in teaching statistics through case discussion. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. On line:www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Hacking, I. (1995) *El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística*. Barcelona: Gedisa.

Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers.* Tesis Doctoral. Universidad de Minnesota, Estados Unidos.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 344-369.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Schilling, S. G., y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, *105*(1), 11-30.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

Huerta, M. P. (2009). On conditional probability problem solving research—structures and context. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 163–194.

Huerta, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. E.J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives* (pp. 613- 639). Springer.

Huerta, M. P., y Lonjedo, M. A. (2003). La resolución de problemas de probabilidad condicional. En E. Castro y cols. (Eds.) *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. *Comunicaciones de los grupos de trabajo*. Granada: Universidad de Granada. On line: www.uv.es/lonjedo/documentos/SEIEM_2003.pdf

Huygens, C. (1998). *Du calcul dans les jeux de hazard.*. In Ouvres completes (V. 14, pp., 1888-1950). La Haye (Original work Ratiociniis in Aleae Ludo, published 1657).

Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent*. París: Presses Universitaires de France.

Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (v.2, pp. 909-955). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., y Tarr, J. E. (1999). Understanding students' probabilistic reasoning. En L. V. Stiff, y F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12, National Council of Teachers of Mathematics' 1999 yearbook* (pp. 146–155). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Kahneman, D., Slovic, P., y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristic and biases*. New York: Cambridge University Press.

Kolmogorov, A. (1956). *Foundations of the theory of probability*. New York: Chelsea (trabajo original publicado en 1933).

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, *6*, 59-98.

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidos.

Langer, E. J. (1982). The illusion of control. En D. Kahneman, P. Slovic, y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristic and biases* (pp. 231-238). New York: Cambridge University Press.

Langrall, C. W., y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 95-119). New York: Springer.

Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (trabajo original publicado en 1814).

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Lee, H. S., Angotti, R. L., y Tarr, J. E. (2010). Making comparisons between observed data and expected outcomes: students' informal hypothesis testing with probability simulation tools. *Statistics Education Research Journal*, *9*(1), 68-96. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/serj.

Lee, H. S., y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Lee, H. S., y Hollebrands, K. (2011). Characterizing and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 359-369). New York: Springer.

Leibniz, G. W. (1995). L'estime des apparences. En M. Parmentier (Ed.), *21 manuscrits sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie*. Paris: Vrin (Original work published 1676).

León, O. G., y Montero, I. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación*. Madrid: McGraw-Hill

Loeve, M. (1976). *Teoría de la probabilidad.* Madrid: Editorial Tecnos.

Lonjedo, M. A., y Huerta, M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 203-212). Córdoba: SEIEM.

Lonjedo, M. A., y Huerta, M. P. (2007). Análisis del comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas isomorfos de probabilidad condicional. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI. Once Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 273-282). Badajoz: SEIEM.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht: Kluwer.

Llinares, S. (1998). La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula*, *10,* 153-179.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *51*, 92-101.

Martínez Arias, R. (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos.* Madrid: Síntesis.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilities: analyse des arguments utilizes par les élèves de clase seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *5*(2), 187-214.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes.* Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II, Francia.

Mayén, S. A. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. España: Ministerio de Educación y Cultura.

Messick, S. (1998). Test validity: A matter of consequence. *Social Indicators Research*, *45*, 35-44.

Mises, R. von (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid: Espasa Calpe (Trabajo original publicado en 1928).

Millman, J., y Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335 – 366). London*:* Macmillan.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Mohr, M. J. (2008) Mathematics knowledge for teaching: The case of preservice teachers. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Moivre de, A. (1967). *The doctrine of chances*. New York: Chelsea Publishing (Trabajo original publicado en 1718).

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education, 21,* 509-523.

Nickerson, R. S. (2002). The production and perception of randomness. *Psychological Review, 109,* 330-357.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

O'Halloran, K. L. (1998). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education, 10*(3), 359–388.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO, 5*, 37-55.

Orden, A. de la (2007). El nuevo horizonte de la investigación pedagógica. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *9*(1). Disponible en: medicina.iztacala.unam.mx/medicina/Art2.pdf.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Ortiz, J., Batanero, C., y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa 15* (1), 63-91

Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y N. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: M.E.C., y Morata.

Pareja, (2011). *Probabilidad*. En I. Segovia y L. Rico (Eds.), Matemáticas para maestros de Educación Primaria (pp. 427-450). Madrid: Pirámide, D. L.

Pascal, B. (1963). Traité du triangle arithmétique et traités connexes. En *Oeuvres Complètes* (pp. 50-100). París: Seuil. (Trabajo original publicado en 1654).

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Polaki, M. V. (2002). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 4*, 285-314.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 602-625.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? En G. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School* (pp. 171-189). New York: Springer.

Ramsey, F. P. (1926). Truth and probability. En F. P. Ramsey (1931), *The foundations of mathematics and other logical essays* (Ch. VII, pp.156-198). Londres: Kegan, Paul.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process, *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 343-362.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Sáenz, C. (1998) Teaching probability for the conceptual change. *Educational studies in mathematics, 35*(3), 233-254.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 389-404). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santisteban, C. (2009). *Principios de psicometría*. Madrid: Síntesis.

Schilling, M. F. (1990). The longest run of heads. *The College Mathematics Journal*, *21*(3), 196-207.

Schoenfeld, A. H., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2005). Randomness in textbooks: the influence of the deterministic thinking. *Proceedings of CERME 4.*

Serradó, A., Azcárate, P., y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brasil: International Statistical Institute e IASE. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Serrano, L, Ortiz, J. J., y Rodríguez, J. D. (2009) La simulación como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad. En L. Serrano, (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 157-178). Universidad de Granada.

Shaughnessy, J. M., y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth*

International Conference on the Teaching of Statistics, Cape Town, South Africa [CD-ROM]. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Shulman, L. S. (1986a). Paradigm and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Witrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 3-36). New York: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4 - 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: ISI.

Stohl, H. (2005). Facilitating students’ problem solving: Prospective teachers’ learning trajectory in technological contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 223-254.

Stuart, A., y Ord, J. K. (1994). *Kendall´s advanced theory of statistics, volume 1: Distribution theory*. London: Arnold.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J. M., y Thames, M. H. (2009). Designing and using tasks to teach mathematical knowledge for teaching. En D. Mewborn y H. S. Lee (Eds.), *Inquiry into mathematics teacher education: Monograph of the Association of Mathematics Teacher Education* (pp. 7-23) San Diego, CA: Association of Mathematics Teacher Education

Tarr, J. E., Lee, H. S., y Rider, R. (2006). When data and chance collide: Drawing inferences from empirical data. En G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance: 2006 yearbook of the NCTM* (pp. 139-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l’analyse de conceptions d’étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad de Rennes I, Francia.

Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Psychology of Mathematics Education Conference* (v4, pp. 337-344). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heuristics and biases. *Science.185*, 1124-1131.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). New York: Cambridge University Press.

Veel, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics. En F. Christie (Ed.), *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social processes* (pp. 185–216). London: Continuum.

Viseu, F., y Ponte, J. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC's. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12*(3), 383-413.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4,* 305-337.

Watson, J. M., Callingham, R. A., y Donne, J. M. (2008). Establishing PCK for teaching statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Disponible en: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 221-248.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada: Universidad de Granada.

Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8-13.

ANEXO 1

MATERIAL ENTREGADO PARA LA REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA 1

PRÁCTICA 1: ANÁLISIS DE UN CUESTIONARIO SOBRE PROBABILIDAD Y RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Objetivos:

1. Adquirir competencias en el análisis de cuestionarios de evaluación.
2. Adquirir competencias en la identificación de intuiciones incorrectas y posibles errores que cometen los alumnos al resolver problemas de probabilidades y su relación con el razonamiento proporcional e idea de fracción
3. Percibir el papel que juega el error como fuente de aprendizaje.
4. Identificar en los Currículos oficiales el papel que se le otorga a la probabilidad

Contenidos:

<u>Teóricos:</u>

- Errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje
- Estrategias e intuiciones en los problemas de comparación de probabilidades
- Etapas en el desarrollo de la capacidad de comparar fracciones y probabilidades
- Didáctica de la probabilidad: currículo, materiales, evaluación

<u>Matemáticos:</u>

- Fracciones, proporcionalidad, probabilidad, asignación de probabilidades usando la regla de Laplace, asignación frecuencial, juegos equitativos, esperanza matemática, enumeración de posibilidades

Trabajo individual:

1. Completar el cuestionario incluido como Anexo 1. Leer con detalle las preguntas y responderlas
2. Leer los documentos de estudio

Documentos de consulta y estudio:

Documentos de estudio

Godino (Dir.) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. (Fotocopias, Facultad),

1. Dificultades, errores y obstáculos (en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) (pp.73-76).

2. Didáctica de la Probabilidad (pp. 427-439).

CUESTIONARIO 1. PARTE 1 (PRIMERA SESIÓN)

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA. Curso 2011-2012

Práctica. *Análisis de un cuestionario de probabilidad y posibles respuestas de los estudiantes.*

Nombre: Grupo:

Resuelve los siguientes problemas, explicitando y justificando todos los pasos, cuando se pida:

Ítem 1. Supongamos que tres niños quieren jugar por turnos con un juego de consola. Los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (los llamaremos A, B y C). Sortean el orden en que van a jugar y obtienen el siguiente resultado BCA

a. Escribe a continuación todas las formas diferentes en que podrían ordenarse los niños para jugar por turno a la consola

b. ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar?

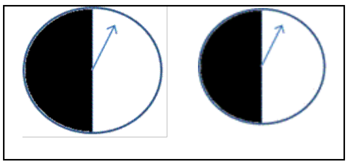
c. Si quiere jugar un cuarto niño ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar los cuatro niños?

Ítem 2. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra? ¿Por qué?

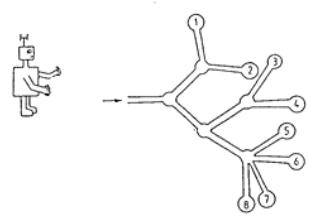
Ítem 3. En una feria hay un juego. El jugador tiene que girar una vez cada una de las dos ruletas que aparecen en el dibujo. Gana un premio si las flechas de las dos ruletas caen en la zona negra

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador gane?

b. ¿Por qué?



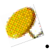
Ítem 4. Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino como por otro (Pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo).



a. ¿En qué trampa ó trampas tiene el robot más probabilidades de acabar?

b. ¿Por qué?

c. ¿En qué trampa o trampas tiene menos posibilidades de acabar?

Ítem 5. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños más repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Ítem 6. Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos.

- Miguel gana un euro si el producto es par
- Si el producto es impar Luis gana un euro

a. ¿Te parece que el juego es equitativo? ¿por qué?

b. Si Miguel gana 1 euro cuando el producto de los números de los dos dados es par, ¿Cuántos euros debiera ganar Luis, cuando el producto es impar, para que el juego sea equitativo?

CUESTIONARIO 1. PARTE 2 (SEGUNDA SESIÓN)

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA.
Curso 2011-2012

Practica. *Análisis de un cuestionario de probabilidad y posibles respuestas de los estudiantes.*

Nombre: Grupo:

Resuelve los siguientes problemas, explicitando y justificando todos los pasos, cuando se pida:

Ítem 7. Hemos lanzado un dado rojo y otro azul y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro)

Ítem 8. Cuando lanzamos tres dados simultáneamente

a. ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra? Marca la respuesta correcta:

- Obtener un 5, un 2 y un 3_____
- Obtener dos veces un 5 y una vez el 3____
- Obtener tres veces el 5____
- Todos estos resultados son igualmente probables____

b. ¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos? ¿Cuál o cuáles?

Ítem 9. En una alberca hay peces, pero su dueño no sabe cuántos. Toma 200 peces y les pone una marca; los devuelve a la alberca, donde se mezclan con el resto. Al día siguiente, el dueño toma 250 peces de la alberca, y encuentra que 25 de ellos están marcados y el resto no.

a. ¿Cuál es el número aproximado de peces en la alberca?

b. Si el dueño saca ahora 100 peces más de la alberca, ¿cuántos aproximadamente estarán marcados?

Ítem 10. El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas una moneda 150 veces, y que apuntaran cada vez si salía cara ó cruz. Por cada “cara” se ha apuntado un 1, y por cada “cruz” un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
010100111001101011001011001011001001011101100110 11
01010010110010101100010011010110011101110101100011

Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
11100000001000101001000000100011000101000000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda, sino que inventó los resultados

a. ¿Qué niña ha hecho trampas?

b. ¿Por qué crees que ha sido ella?

Ítem 11. En la maternidad de una ciudad realizan un estudio para ver el número de recién nacidos que son hombres o mujeres.

a. Marca la respuesta que consideres correcta:

- Es más probable que entre los próximos diez nacimientos ocho o más sean hombres____
- Es más probable que entre los próximos cien nacimientos ochenta o más sean hombres____
- Las dos cosas anteriores son igual de probables_____

Razona tu respuesta:

b. Marca la respuesta que consideres correcta para los siguientes diez nacimientos

- la fracción de chicos será mayor o igual a 7/10_____
- la fracción de chicos será menor o igual a 3/10______
- la fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10_____
- las tres cosas son igual de probables____

Razona tu respuesta:

Ítem 12. El Centro Meteorológico de Santiago de Compostela da una predicción de 70% de posibilidades de lluvia para el año 2013.

a. Si la predicción es buena, ¿cuántos días, aproximadamente, esperas que llueva durante ese año?

b. Supongamos que este Centro Meteorológico informa que esta semana hay un 80% de posibilidades de lluvia en Santiago, pero el Lunes no llueve ¿Piensas que su predicción es todavía válida? ¿Por qué?

c. ¿Y si no llueve ni el Lunes ni el Martes?

ANEXO 2

RESOLUCIÓN EN EL AULA DEL CUESTIONARIO 1

Como se describió en el Capítulo 4, una vez aplicado el Cuestionario 1, se destinaron dos sesiones adicionales de seminario a la discusión de las respuestas dadas por los futuros profesores a cada ítem del cuestionario completado, ayudada por experimentos o simulaciones. La discusión se realiza en grupos de 20 alumnos, trabajando en grupos de 4 alumnos. La finalidad fue resaltar los errores y concepciones erróneas que los participantes mostraron en sus respuestas.

En nuestra experiencia, se usaron materiales manipulativos o diagramas para debatir las soluciones en algunos ítems. Para la mayoría de los ítems hemos utilizado herramientas de libre acceso en la web, que permiten simular cada una de las situaciones propuestas en los ítems del cuestionario. El proceso seguido fue idéntico para todos los ítems:

- En primer lugar, el formador de profesores solicita a los participantes sus soluciones al ítem y la justificación de la solución.
- En caso de acuerdo (porque se acepte la solución correcta) se pasa a otro ítem.
- Generalmente no hubo acuerdo, porque algunos alumnos aportaron soluciones o razonamientos erróneos. En este caso, cada grupo defiende su solución; el formador de profesores presenta la actividad complementaria de simulación que es realizada en los pequeños grupos.
- Luego de un tiempo, cada grupo comenta sus impresiones sobre la actividad y se vuelve a preguntar por la solución correcta, que, generalmente se ha descubierto con la ayuda de la simulación.
- El formador de profesores deja como actividad extra-escolar el estudio del documento con las soluciones a los problemas, la lectura del apartado sobre Didáctica de la Probabilidad del libro de Batanero y Godino (2004) y, si se desea, la repetición de las actividades de simulación.

A continuación describimos el análisis, la experimentación o la simulación asociada a cada ítem.

Ítem 1. Supongamos que tres niños quieren jugar por turnos con un juego. Los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (los llamaremos A, B y C). Sortean el orden en que van a jugar y obtienen el siguiente resultado BCA

Escribe a continuación todas las formas diferentes en que podrían ordenarse los niños para jugar por turno a la consola ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar? ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar si quiere jugar un cuarto niño?

Análisis del espacio muestral

En este ítem se utilizó la pizarra para escribir posibles ordenaciones. Se comenzó con el caso de las permutaciones de tres elementos: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, concluyendo que hay seis posibilidades.

Seguidamente se discute el caso de un cuarto niño: el profesor ayuda a descubrir que se puede poner en 1ª, 2ª, 3ª o 4ª posición. Rápidamente algunos grupos deducen que para cada ordenación anterior hay 4 posibilidades; en total 6x4=24. También reconocen como respuestas erróneas no usar un método sistemático de enumeración y en consecuencia no listar todos los casos o repetir casos.

Ítem 2. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra? ¿Por qué?

Experimentación con material manipulativo

Se proporcionó a los grupos de participantes fichas de dos colores en número suficiente para reconstruir la composición inicial de las cajas, según el enunciado del problema.

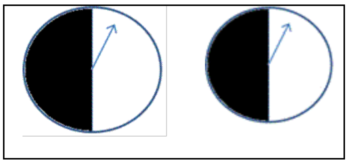
Se recordó que la probabilidad depende de la relación de colores dentro de cada caja. Notando que en total hay 8 blancas y 12 negras, la proporción blancas/negras en el conjunto completo es 2/3, por tanto la respuesta no es única y basta poner esta proporción en cada caja. Los participantes mediante ensayo y error encontraron dos posibles respuestas (Figura A2.1): una con cajas proporcionales, Pablo con 2 blancas y 3 negras, Miguel con 6 blancas y 9 negras; y otra con cajas idénticas, Pablo con 4 blancas y 6 negras, igual que Miguel.

Figura A2.1. Respuestas encontradas para el ítem 2

Ítem 3. En una feria hay un juego. El jugador tiene que girar una vez cada una de las dos ruletas que aparecen en el dibujo. Gana un premio si las flechas de las dos ruletas caen en la zona negra.

a.¿Cuál es la probabilidad de que un jugador gane?

b. ¿Por qué?



Análisis del espacio muestral

Para este problema se utilizó la enumeración del espacio muestral de posibilidades por medio del diagrama en árbol de la Figura A2.2.

El diagrama se construye colectivamente paso a paso, considerando las probabilidades en cada uno de ellos. Los grupos de futuros profesores concluyen rápidamente que La solución es ¼ porque la probabilidad de obtener negro en cada ruleta es ½ y los sucesos son independientes. Multiplicando la probabilidad de obtener negro en cada ruleta obtenemos ½x½=¼.

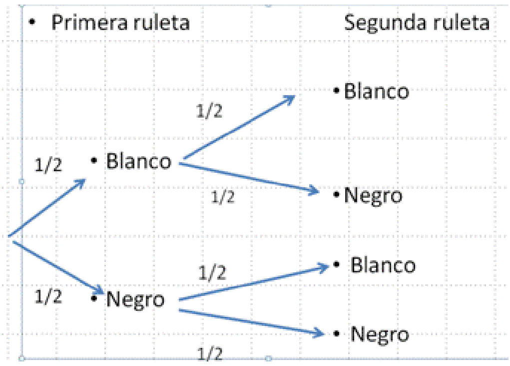


Figura A2.2. Diagrama en árbol para el ítem 3

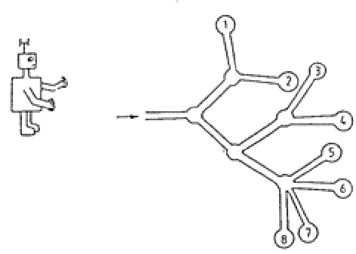
También reconocen los siguientes errores**:**

- Considerar que son equiprobables ganar y perder, en consecuencia contestar que la probabilidad de ganar es ½.
- Aplicar la suma de probabilidades, en vez del producto, y contestar que la probabilidad es ½+½=1.

Ítem 4. Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino como por otro (Pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo).

a.¿En qué trampa ó trampas tiene el robot más probabilidades de acabar? ¿O todas las trampas son igual de probables?

b.¿Por qué?



Análisis del espacio muestral

Para este ítem se presentó el diagrama en árbol de la Figura A2.3, que muestra el espacio muestral y la probabilidad de cada resultado. El diagrama se construyó paso a paso, razonando las probabilidades intermedias por medio de su conocimiento de fracciones. Por ejemplo, que la mitad de las veces el robot va a derecha e izquierda en el primer cruce y la mitad de esta mitad (que sería la cuarta parte) va a las trampas 1 y 2.

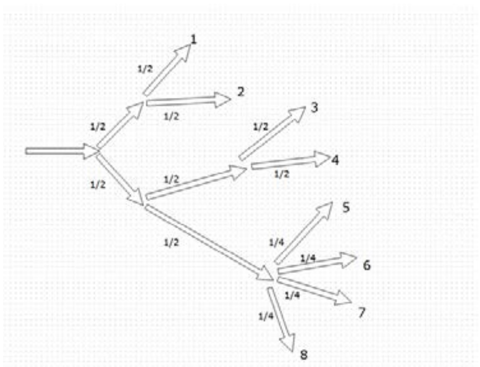
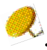


Figura A2.3. Diagrama en árbol para el ítem 4

Los alumnos concluyen que las trampas que tienen más probabilidad son la 1 y 2, y las más difíciles las 5 a 8. La razón es que para llegar a las primeras sólo se requiere dos bifurcaciones (probabilidad ¼), para las 3 y 4, tres (probabilidad 1/8) y para las 5 a 8 tres (probabilidad 1/16). También se reconocen las siguientes dificultades:

- Pensar que todas las trampas tienen igual probabilidad; sesgo de equiprobabilidad.
- Fallo al aplicar la regla de multiplicación de probabilidades.

Ítem 5. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños más repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Experimentación con materiales manipulativos

Se proporcionó a los grupos de estudiantes cajas de 100 chinchetas, animándolos a realizar el experimento. Una vez que cada grupo repitió el experimento varias veces y recogió datos sobre el número de chinchetas con la punta hacia arriba, se reúnen todos los datos de los diferentes grupos, observándose los valores obtenidos. Se concluye que en la experiencia se debieran obtener resultados parecidos a los dados en el ítem, que reflejen a la vez la probabilidad y la variabilidad, por ejemplo:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 67	Punta arriba: 70	Punta arriba: 65	Punta arriba: 68
Punta abajo: 33	Punta abajo: 30	Punta abajo: 35	Punta abajo: 32

También se observa que cualquier combinación parecida a la anterior sería válida, pues al ser un fenómeno aleatorio, los resultados pueden variar. Sin embargo, no se deben apartar excesivamente de lo esperado. Queda claro que los sucesos no son equiprobables; y que la proporción de chinchetas con la punta hacia arriba es alrededor de un tercio. Además se reconocieron errores dados en sus propias respuestas, como los siguientes:

- Pensar que la siguiente vez se va a equilibrar respondiendo, por ejemplo "arriba 32 y abajo 68". La cabeza de la chincheta pesa más, luego caerán más hacia arriba.
- Pensar que nunca se puede estar seguro, al ser un experimento aleatorio. Se respondería "no se puede saber" o "nunca es posible".
- Esperar 50 y 50, es decir, sesgo de "equiprobabilidad" al considerar todos los resultados equiprobables.

Ítem 6. Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos.

- Miguel gana un peso si el producto es par
- Si el producto es impar Luis gana un peso

a. ¿Te parece que el juego es equitativo? ¿Por qué?

b. Si Miguel gana 1 euro cuando el producto de los números de los dos dados es par, ¿Cuántos euros debiera ganar Luis, cuando el producto es impar para que el juego sea equitativo? ¿Por qué?

Experiencia de simulación

Para resolver el problema se utilizó el applet que simula el producto de dos dados, disponible en www.to14.com/game.php?id=4d486a28a2c5b, proporcionando el listado de los resultados en cada ensayo, junto con su producto, como se muestra en la Figura A2.4.

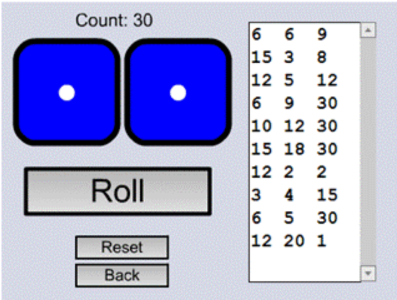


Figura A2.4. Resultado de 30 simulaciones para el ítem 6

Los futuros profesores notaron rápidamente que con más frecuencia aparecía un producto par que uno impar; algunos grupos de estudiantes razonaron que el producto par por par es par y par por impar es par; luego el único caso de producto impar es cuando los dos dados son impares.

Como continuaba la dificultad de calcular la probabilidad exacta se propuso la enumeración del espacio muestral, como se muestra en la siguiente tabla, que también presenta la probabilidad de obtener par (impar) en el producto de los dos dados:

Producto	Casos posibles	Número de casos	Probabilidad	Gana
Impar	11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55	9	1/4	Luis
Par	12, 14, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 32, 34, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 54, 54, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66	27	3/4	Miguel

Los grupos llegan al listado de todos los casos con ayuda del formador. Se concluye que el juego no es equitativo, pues la probabilidad de ganar Miguel es 3 veces la probabilidad de ganar Luis. Esto quiere decir que, a la larga, por cada vez que gane Luis, Miguel ganará aproximadamente 3 veces.

También se acepta que para que el juego sea equitativo a la larga han de ganar el mismo dinero. Por tanto, si Miguel recibe 1 euro cada vez que gana, Luis debiera recibir 3 cada vez que gana. Entre las posibles dificultades se listan las siguientes:

- Falta de razonamiento proporcional inverso.
- No se comprende bien la idea de juego equitativo.
- No se concibe la convergencia a la larga y se fijan sólo en el resultado del experimento.
- Fallo en la idea de esperanza.
- Fallo en razonamiento combinatorio.

Ítem 7. Hemos lanzado un dado rojo y otro azul y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro).

Análisis del espacio muestral

Se proporciona a los grupos de estudiantes dados de dos colores (rojo y azul) y se les pide formar todos los casos posibles para que el producto de un dado rojo y otro azul sea 12, obteniéndose rápidamente la solución de la Figura A2.5.

Figura A2.5. Espacio muestral restringido en el ítem 7

Se hace observar que hay cuatro casos posibles para que al lanzar dos dados el producto sea 12: (6,2), (2,6), (4,3), (3,4), donde el primer elemento del par es el dado rojo y el segundo el dado azul. A continuación se estudia la condición (que un dado sea el 6); sería el espacio muestral restringido, y se indican los casos favorables al suceso condicionado (6,2), (2,6). Aplicando la regla de Laplace; P= casos favorables/casos posibles=2/4=1/2. Algunos grupos de estudiantes reconocen los siguientes errores cometidos en sus soluciones:

- Aplicar la regla de Laplace separada para cada experimento, respondiendo por ejemplo $\frac{1}{6}$x$\frac{1}{6}$.
- Responder $\frac{2}{36}$ que sería la probabilidad de obtener un producto igual a 12 y que alguno de los números sea un 6, es decir, calcular la probabilidad compuesta en vez de la conjunta.

Ítem 8. Cuando lanzamos tres dados simultáneamente

a. ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra? Marca la respuesta correcta:

- Obtener un 5, un 2 y un 3_____
- Obtener dos veces un 5 y una vez el 3____
- Obtener tres veces el 5____
- Todos estos resultados son igualmente probables____

b. ¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos? ¿Cuál o cuáles?

Experiencia de simulación y experimentación con material manipulativo

El lanzamiento de tres dados se simuló con el Applet “dice.xls” realizada en Microsoft Excel, que muestra la tripleta obtenida en un lanzamiento de tres dados equilibrados (Figura A2.6). Los dados se diferencian por color para que los futuros profesores entiendan la necesidad de tener en cuenta el orden de resultados. Los estudiantes también pudieron hacer simulaciones físicas con los dados previamente proporcionados por el formador.

La simulación se repitió varias veces y los futuros profesores llevaban el registro de si se trataba de tres resultados diferentes, si se repetía alguno o si eran los tres iguales. Después de un número grande de ejecuciones los futuros profesores observaron que es menos frecuente la aparición de tres números iguales y más frecuente la de tres diferentes. También se reconoce el error de considerar todos los casos equiprobables, al no ser capaz de listar sistemáticamente todos los casos diferentes para cada suceso o no comprender la importancia del orden en este experimento.

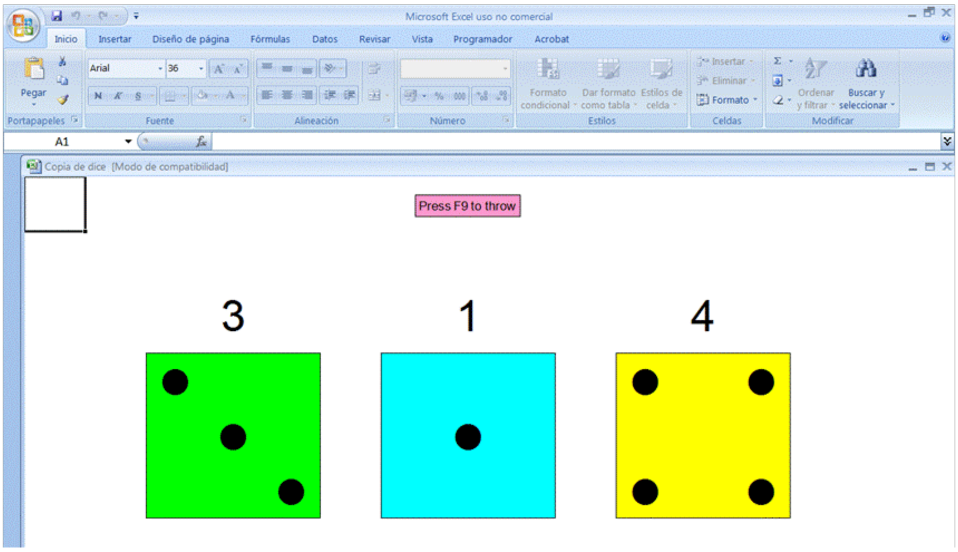


Figura A2.6. Resultado de una simulación para el ítem 8

Ítem 9. En una alberca hay peces, pero su dueño no sabe cuántos. Toma 200 peces y les pone una marca; los devuelve a la alberca, donde se mezclan con el resto. Al día siguiente, el dueño toma 250 peces de la alberca, y encuentra que 25 de ellos están marcados y el resto no.

a. ¿Cuál es el número aproximado de peces en la alberca?

b. Si el dueño saca ahora 100 peces más de la alberca, ¿cuántos aproximadamente estarán marcados?

Experiencia de simulación

Es un problema sencillo que sirve de base para la técnica de estimación a través del muestreo de captura y recaptura utilizado en poblaciones móviles como animales en reservas no confinadas o sin una persona encargada de su cuidado o vigilancia. Para ayudar en su solución se utilizó el applet deflightline.highline.edu/jbetzzall/BI100/animations/capture_recapture.html.

En este applet aparece un cierto número de mariposas que se marcan al pulsar el ratón; a continuación se sueltan y se vuelve a tomar una muestra con mariposas marcadas y sin marcar, y finalmente se proporciona la estimación del tamaño de la población, como se presenta en la secuencia de la Figura A2.7.

Colectivamente se trabajó con este applet siguiendo la secuencia indicada; antes del paso final (estimación del tamaño de la población) se pedía a los grupos realizar el cálculo con ayuda de la calculadora. Después de varias repeticiones se pide la solución al problema. Se concluye fácilmente que si entre 250 peces hay 25 marcados la proporción de marcados en el total de peces es 1/10. Como se echaron 200 marcados a la alberca, hay que esperar aproximadamente 2000 peces en total.

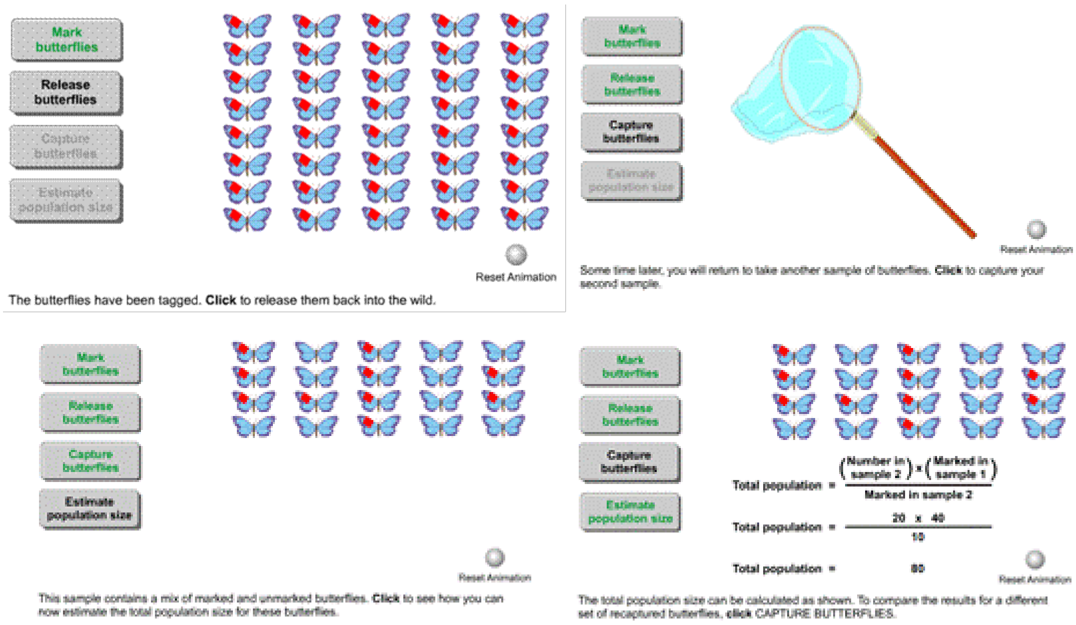


Figura A2.7. Simulación de una secuencia de muestreo de captura-recaptura para el ítem 9

También se reconocen los siguientes errores en las respuestas al cuestionario:

- Errores al calcular el total de peces, por ejemplo, decir que hay 2200 peces (sumar el 10% al total, en vez de considerar los marcados como parte del total).
- Considerar que no es posible predecir el número de peces.
- Dar una cantidad que no tenga en cuenta la proporción de peces marcados en la muestra.
- Usar operaciones aditivas o multiplicativas entre los datos proporcionados en el enunciado, asumiendo esos conjuntos como particiones, sin tener en cuenta que se trata de muestras.

Ítem 10. El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas una moneda 150 veces, y que apuntaran cada vez si salía cara ó cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
01010011100110101100101100101100100101110110011011
01010010110010101100010011010110011101110101100011

Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
11100000001000101001000000100011000101000000000011001
00000001111100001101010010010011111101001100011000

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda, sino que inventó los resultados

a. ¿Qué niña ha hecho trampas?

b. ¿Por qué crees que ha sido ella?

Experiencia de simulación:

Se comienza justificando a los estudiantes que hay que hacer la hipótesis de que la moneda es equilibrada y por tanto, la probabilidad de cara es igual a la de cruz. A continuación se sugiere estudiar las implicaciones de esta hipótesis: ¿Qué resultados se esperarían si la hipótesis fuese cierta?

Para proporcionar a los estudiantes experiencias en la simulación de esta situación se utilizó un applet disponible en www.socr.ucla.edu/htmls/SOCR_Experiments.html que simula experimentos binomiales, recordando que una serie de 150 lanzamientos de monedas equilibradas es equivalente a un experimento binomial con probabilidad ½ y n=150. Este applet (Figura A2.8) permite variar los valores n y p en dicha distribución. Una vez fijados los que nos interesan se muestra una secuencia completa de resultados del lanzamiento de la moneda equilibrada con la longitud dada. Los resultados caras y cruces se diferencian con una letra y con colores; esto facilita la identificación de rachas; además el applet recuenta los resultados.

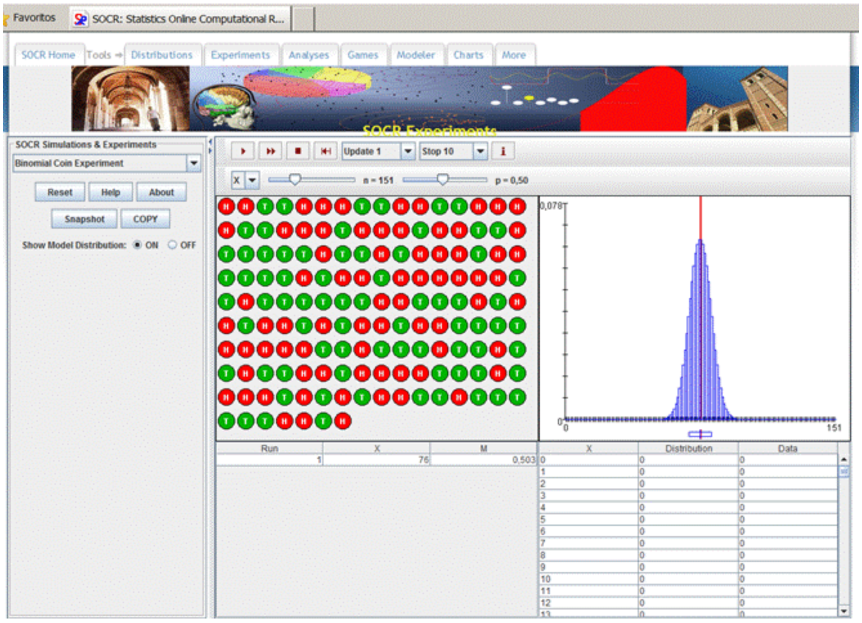


Figura A2.8. Primera simulación de 150 lanzamientos para el ítem 10

En dos ventanas complementarias se representan numérica y gráficamente la distribución B (n,p) para los valores dados. En cada una se muestran la distribución teórica y los resultados empíricos cuando se repite muchas veces el experimento, es decir, cuando se obtienen muchas secuencias aleatorias similares. La repetición del experimento se puede hacer en forma lenta (una secuencia de 150 lanzamientos cada vez) o rápida (por ejemplo, de 10 en 10 secuencias de 150 lanzamientos cada una).

En el aula el formador de profesores ejecutó este programa en varias fases, después de haber pedido las soluciones a la actividad y las opiniones de los futuros profesores sobre las longitudes de rachas previsibles en el experimento. Para cada ejecución del programa con n=150 se observó tanto la frecuencia de caras y de cruces como la longitud de rachas (fijándose en el tamaño de las que se veían muy largas). Después de unas pocas repeticiones lentas se hicieron repeticiones de un gran número de experimentos. Los alumnos reconocieron en cada repetición que es más frecuente la existencia de rachas largas que lo esperado intuitivamente, y reconocieron las siguientes respuestas erróneas:

- Pensar que las rachas largas son sospechosas, es decir, pensar que no puede haber rachas largas.
- Pensar que las dos niñas hacen trampas puesto que no se obtiene exactamente 75 y 75.
- Pensar que al ser un experimento aleatorio no se puede deducir cuál de las dos niñas tiene mayor probabilidad de hacer trampas.

Ítem 11. En la maternidad de una ciudad realizan un estudio para ver el número de recién nacidos que son hombres o mujeres.

a. Marca la respuesta que consideres correcta:

- Es más probable que entre los próximos diez nacimientos ocho o más sean hombres____
- Es más probable que entre los próximos cien nacimientos ochenta o más sean hombres____
- Las dos cosas anteriores son igual de probables_____

Razona tu respuesta:

Experiencia de simulación

El formador de profesores comienza preguntando a los participantes su experiencia sobre el número de niños y niñas en su familia; en grupos medianos de personas o en grupos más grandes (por ejemplo una ciudad). Se reconoce que al ser el experimento aleatorio no se puede saber con seguridad la respuesta al problema.

Se continúa razonando que experimento aleatorio del sexo observado en el nacimiento de bebes en un hospital es equivalente al lanzamiento de monedas equilibradas. El formador de profesores propone simular las dos situaciones del hospital grande y pequeño con el applet disponible en statweb.calpoly.edu/bchance/applets/BinomDist3/BinomDist.html (Figura A2.9).

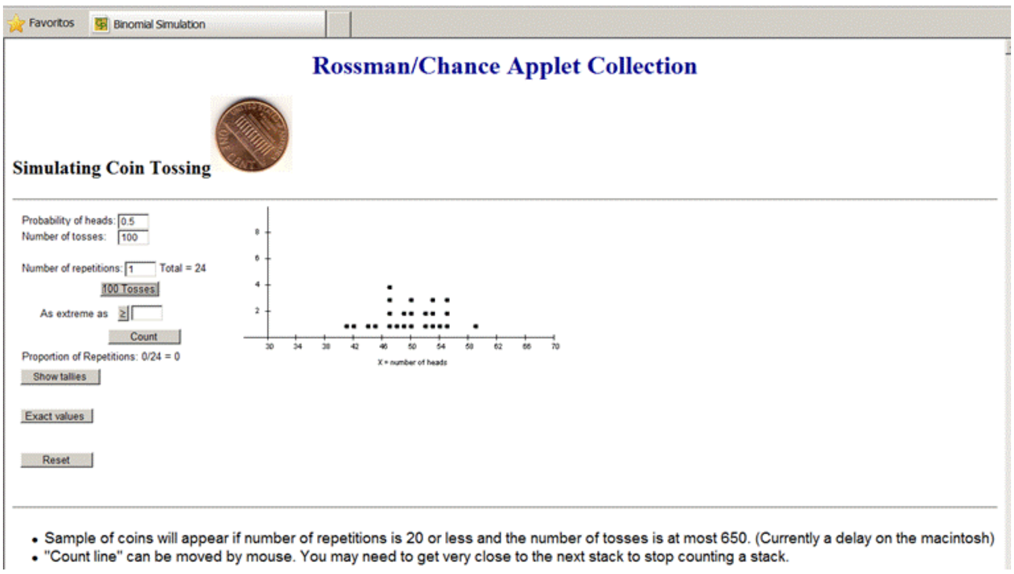


Figura A2.9. Resultado de una simulación para el ítem 11

También en este caso podemos variar el número de lanzamientos de la moneda (nacimientos) y la probabilidad de cara (de hombre). Se realizan varias repeticiones del experimento con n=10 y n=100. El applet representa los resultados en un diagrama de puntos.

La experiencia con la simulación lleva a los participantes a reconocer que es más probable que entre los próximos diez nacimientos ocho o más sean hombres. Como sabemos aproximadamente 50% de los nacimientos son hombres; esto quiere decir que en 10 nacimientos hay que esperar 5 hombres y en 100, 50 hombres. También reconocen que este número puede oscilar un poco, debido al carácter aleatorio del fenómeno, pero sin embargo no oscilará demasiado. Por ello es más fácil obtener 8 de 10 (8 se aparta poco de 5) que 80 de 100 (80 se aparta demasiado de 50). Además, las muestras grandes son más fiables que las pequeñas, por ello hay que esperar que el número de niños se acerque más al 50% en una muestra grande que en una pequeña.

Se reconoce el principal error en este ítem: Los estudiantes podrían fijarse sólo en el valor 80% que es el mismo para las dos muestras y pensar que los dos resultados son igual de probables. No tendrían en cuenta el tamaño de la muestra que es otro dato del problema.

b. Marca la respuesta que consideres correcta para los siguientes diez nacimientos

- la fracción de chicos será mayor o igual a 7/10_____
- la fracción de chicos será menor o igual a 3/10______
- la fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10_____
- las tres cosas son igual de probables____

Razona tu respuesta:

Experiencia de simulación

Se utilizó la simulación del experimento anterior cuando n=10; fijando la atención en la comparación de la frecuencia con que se producen más de 6 caras, menos de 4, o entre 4 y 6. La representación de los resultados con gráficos de puntos facilita identificar qué intervalo tiene frecuencia más alta en cada ejecución del experimento, y la repetición sucesiva de éste hace que los futuros profesores concluyan que el intervalo central es el más probable.

También se reconoce el error de pensar que todos los casos son equiprobables por tener escasa percepción de los valores esperados y de la oscilación de las frecuencias relativas.

Ítem 12. El Centro Meteorológico de Santiago de Compostela da una predicción de 70% de posibilidades de lluvia para el año 2013.

a. Si la predicción es buena ¿cuántos días, aproximadamente esperas que llueva durante ese año?

b. Supongamos que este Centro Meteorológico informa que esta semana hay un 80% de posibilidades de lluvia en Santiago, pero el Lunes no llueve ¿Piensas que su predicción es todavía válida? ¿Por qué?

c. ¿Y si no llueve ni el Lunes ni el Martes?

Interpretación de la predicción

El formador de profesores comienza razonando con los futuros profesores el interés de saber responder este tipo de problemas. Las predicciones meteorológicas se presentan a diario por diferentes medio de comunicación y en algunos casos dan la información en forma frecuencial. Para motivar el interés de los futuros profesores por el problema se presentó el mapa de probabilidades de precipitación de un día (Figura A2.10), emitido por la Agencia

Española de Meteorología (AEMET, ver www.aemet.es/es/eltiempo/prediccion/precipitacion). Dicho mapa es incluso de lectura más compleja que el problema, pues no sólo da los datos mediante porcentajes, sino que usa colores que se deben interpretar para leer los porcentajes.

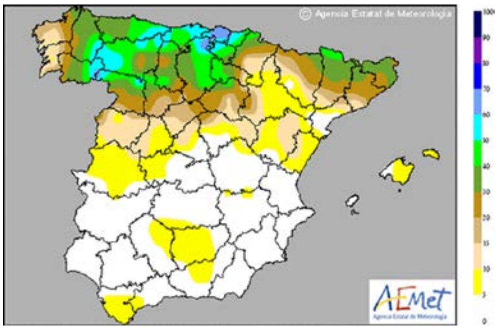


Figura A2.10. Predicciones de lluvia en un día particular, según web de AEMET

Después de varias actividades de lectura del mapa y de interpretación de los porcentajes de lluvia, se llega a resolver el problema propuesto. Los futuros profesores concluyen que es de esperar alrededor del 70% de días de lluvia; como un año tiene 365 días, calculando el 70% de 365 se obtiene 255,5; es de esperar alrededor de 255 o 256 días de lluvia.

También se concluye que al ser un fenómeno aleatorio esta cantidad puede oscilar un poco por arriba o por abajo. Si en una semana la probabilidad de lluvia es el 80%, como el 80% de 7 es 5,6 hay que esperar unos 6 días de lluvia. No sería extraño entonces que el lunes no llueva y la predicción es válida.

Por la misma razón, al ser un fenómeno aleatorio el número de días de lluvia puede oscilar un poco y además el valor que obtuvimos está entre 5 y 6; no sería raro que no lloviese ni el lunes ni el martes. Como posibles errores se reconocen los siguientes:

- Algunos estudiantes confunden los sucesos muy probables con los seguros; llegan a pensar que si se da una probabilidad de lluvia del 80% para una semana, debe llover todos los días y encontrarían muy raro que no llueva ni lunes ni martes.
- Otros creen que el meteorólogo se equivocó o bien que cambió algo (por ejemplo vino un frente de aire que se llevó las nubes) buscando una explicación causal a la falta de lluvia.

ANEXO 3

MATERIAL ENTREGADO PARA LA REALIZACIÓN DE LA PRÁCTICA 2

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA. Curso 2011-2012

Practica. *Análisis de un cuestionario de probabilidad y posibles respuestas de los estudiantes.*

Nombre: Grupo:

A continuación presentamos algunas de las preguntas del cuestionario sobre probabilidad, junto con algunas de las respuestas obtenidas en las mismas. Para cada una de las preguntas:

1. Señala cuál o cuáles de las respuestas son correctas
2. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
3. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea

Ítem 1. ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra al lanzar tres veces un dado? Marca la respuesta correcta:

- Obtener un 5, un 2 y un 3_____
- Obtener dos veces un 5 y una vez el 3____
- Obtener tres veces el 5____
- Todos estos resultados son igualmente probables____

¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos? ¿Cuál o cuáles?

Respuestas de los alumnos

A1. “*Todos son igualmente probables; es un juego de azar, no se puede predecir*”

A2. “*Es más difícil obtener tres veces el 5; los otros dos resultados tienen la misma probabilidad*”

A3. “*Es más fácil obtener un 5, un 2 y un 3, porque tienes tres casos diferentes: 523, 325 y 532*”

A4: “*Es más difícil obtener tres veces el 5; para los otros resultados tienes más casos y para este solo 1*”

A5. “*Es más difícil obtener tres veces el 5, porque sólo tienes un resultado; para dos veces el 5 y una el tres tienes tres resultados (553, 535, 355); para el 5, 2, 3 tienes 6 resultados (523, 532, 325, 352, 235, 253)*”.

Ítem 2. Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos.

- Miguel gana un euro si el producto es par
- Si el producto es impar Luis gana un euro

¿Te parece que el juego es equitativo? ¿Por qué? ¿Cuánto tendría que ganar Luis si Miguel gana 1 euro, para que el juego sea equitativo?

Respuestas de los alumnos

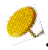
B1. "Miguel tiene 2 posibilidades de ganar más que Luis; considero que sea justo que Luis gane 2 euros"

B2. "(Luis debe ganar) 6 euros para que sea justo porque tiene menos posibilidades»,

B3. "Si a Luis le diesen 3 euros estaría equilibrado, porque por cada vez que le toque a Miguel le dan un euro; pero sólo si le dan a Luis tres oportunidades, ya que Miguel tiene tres veces más oportunidades de ganar"

B4. "El juego no es justo porque Miguel tiene muchas más oportunidades; aunque le des más dinero a Luis cuando gane, sigue sin ser justo, porque tiene menos posibilidades de ganar"

B5. "Para que el juego sea justo Luis tiene que ganar 3 euros."

Ítem 3. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños más repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Respuestas de los alumnos

	Daniel	Martín	Diana	María
C1	Punta arriba: 32	Punta arriba: 70	Punta arriba: 35	Punta arriba: 65
	Punta abajo: 68	Punta abajo: 30	Punta abajo: 65	Punta abajo: 35

	Daniel	Martín	Diana	María
C2	Punta arriba: 67	Punta arriba: 68	Punta arriba: 70	Punta arriba: 71
	Punta abajo: 33	Punta abajo: 32	Punta abajo: 30	Punta abajo: 29

	Daniel	Martín	Diana	María
C3	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68
	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32

	Daniel	Martín	Diana	María
C4	Punta arriba: 50	Punta arriba: 51	Punta arriba: 48	Punta arriba: 53
	Punta abajo: 50	Punta abajo: 49	Punta abajo: 52	Punta abajo: 47

Ítem 4. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra?

Respuestas de los alumnos

D1. *Se puede añadir a la caja de Miguel 2 bolas blancas y 2 negras sin cambiar la de Pablo*

D2. *Se puede pasar 1 bola blanca de la caja de Pablo a la de Miguel*

D3. *Hay en total 8 bolas blancas y 12 negras entre las dos cajas. Las bolas están en razón 8/12, es decir 2 blancas por cada 3 negras. Si dejamos en la caja de Pablo 2 blancas y 3 negras, tenemos que pasar 3 blancas y 4 negras a la de Miguel; entonces Miguel tendrá 6 blancas y 9 negras; sus bolas también están en razón 6/9=2/3 y tienen la misma probabilidad*

D4. *Pasando 1 bola blanca y 1 negra de la caja de Miguel a la de Pablo*

ANEXO 4

MATERIAL ENTREGADO AL FINALIZAR LAS SESIONES

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA. Curso 2011-2012

Práctica. *Análisis de un cuestionario de probabilidad y posibles respuestas de los estudiantes*

Ítem 1. Supongamos que tres niños quieren jugar por turnos con un juego. Los niños se llaman Andrés, Benito y Carlos (los llamaremos A, B y C). Sortean el orden en que van a jugar y obtienen el siguiente resultado

BCA

Escribe a continuación todas las formas diferentes en que podrían ordenarse los niños para jugar por turno a la consola ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar? ¿En cuántas formas diferentes se podrían ordenar si quiere jugar un cuarto niño?

Solución: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, seis posibilidades. Si llega un cuarto niño más se puede poner en 1ª, 2ª, 3ª o 4ª posición. Por tanto para cada ordenación anterior hay 4 posibilidades; en total 6x4=24.

Conocimientos: Razonamiento combinatorio, enumeración sistemática, multiplicación, generalización.

Posibles dificultades/errores: no usar un método sistemático de enumeración y en consecuencia no listar todos los casos o repetir casos.

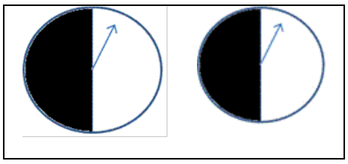
Ítem 2. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra? ¿Por qué?

Solución: En total tengo 8 bolas blancas y 12 negras, es decir, están en proporción 2/3. Basta poner esta proporción en cada caja. Por ejemplo, en la primera 6b y 9 n y en la segunda 2b y 3 n. He pasado 1 bola blanca y 2 negras de la caja de Miguel a la de Pablo.

Conocimientos: Probabilidad, proporcionalidad, fracciones equivalentes, razonamiento combinatorio

Posibles dificultades/errores: El alumno podría tratar por ensayo y error, pero si no sigue un procedimiento sistemático le puede costar trabajo encontrar la solución.

<u>Ítem 3.</u> En una feria hay un juego. El jugador tiene que girar una vez cada una de las dos ruletas que aparecen en el dibujo. Gana un premio si las flechas de las dos ruletas caen en la zona negra



a. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador gane?

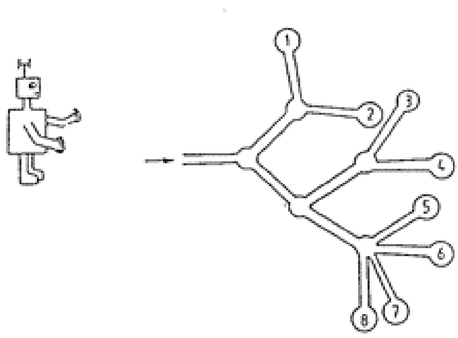
b. ¿Por qué?

Solución: La solución es ¼ porque la probabilidad de obtener negro en cada ruleta es ½ y los sucesos son independientes. Multiplicando la probabilidad de obtener negro en cada ruleta obtenemos 1/2x1/2=1/4.

Conocimientos: Experimento compuesto, sucesos independientes; regla del producto de probabilidades; Probabilidad geométrica; sector circular, proporcionalidad.

Posibles dificultades/errores: Se podría considerar que son equiprobables ganar y perder, contestando que la probabilidad de ganar es ½; se podría aplicar la suma de probabilidades, en vez del producto y contestar que la probabilidad es ½+1/2=1

<u>Ítem 4.</u> Un robot es colocado ante un laberinto que empieza a explorar. En cada cruce el robot tiene tantas probabilidades de irse por un camino como por otro (Pero nunca vuelve por el camino que vino). Hay 8 trampas al final de los 8 caminos (ver el dibujo).



a. ¿En qué trampa ó trampas tiene el robot más probabilidades de acabar?, ¿O todas las trampas son igual de probables?

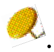
b. ¿Por qué?

Solución: Las trampas que tienen más probabilidad son la 1 y 2 y las más difíciles las 5 a 8. La razón es que para llegar a las primeras sólo se requiere dos bifurcaciones (probabilidad ¼), para las 3 y 4, tres (probabilidad 1/8) y para las 5 a 8 tres (probabilidad 1/16).

Conocimientos: Se usan los conceptos de experimento compuesto, probabilidad compuesta, regla de multiplicación de probabilidades.

Posibles dificultades/errores

- Pensar que todas las trampas tienen igual probabilidad; sesgo de equiprobabilidad
- Fallo al aplicar la regla de multiplicación de probabilidades.

<u>Ítem 5.</u> Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños más repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Solución: Se espera que se escriban resultados parecidos a los obtenidos, que reflejen a la vez la probabilidad y la variabilidad, por ejemplo

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 67	Punta arriba: 70	Punta arriba: 65	Punta arriba: 68
Punta abajo: 33	Punta abajo: 30	Punta abajo: 35	Punta abajo: 32

Cualquier combinación parecida a la anterior sería válida, pues al ser un fenómeno aleatorio, los resultados pueden variar. Sin embargo, no se deben apartar excesivamente de lo esperado.

Conocimientos: Se usan los conceptos de experimento, resultado, probabilidad (acepción frecuencial), frecuencia relativa, variabilidad.

Posibles dificultades/errores

- Pensar que la siguiente vez se va a equilibrar respondiendo, por ejemplo “arriba 32 y abajo 68”. La cabeza de la chincheta pesa más, luego caerán más hacia arriba.
- Pensar que nunca se puede estar seguro, al ser un experimento aleatorio. Se respondería “no se puede saber” o “nunca es posible”.
- Esperar 50 y 50, es decir, sesgo de “equiprobabilidad” al considerar todos los resultados equiprobables.

<u>Ítem 6.</u> Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos.

- Miguel gana un peso si el producto es par
- Si el producto es impar Luis gana un peso

a. ¿Te parece que el juego es equitativo? ¿Por qué?

b. Si Miguel gana 1 euro cuando el producto de los números de los dos dados es par, ¿Cuántos euros debiera ganar Luis, cuando el producto es impar para que el juego sea equitativo? ¿Por qué?

Solución: En primer lugar calculamos todos los productos posibles y los casos posibles para cada producto, por medio de una tabla, viendo quién gana en cada caso

Producto	Casos posibles	Número de casos	Probabilidad	Gana
Impar	11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55	9	1/4	Luis
Par	12, 14, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26,32,34, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 54, 54, 56, 61, 62, 63, 64, 65,66	27	3/4	Miguel
Total		36		

El juego no es equitativo, pues la probabilidad de ganar Miguel es 3 veces la probabilidad de ganar Luis. Esto quiere decir que, a la larga, por cada vez que gane Luis, Miguel ganará aproximadamente 3 veces.

Para que el juego sea equitativo a la larga han de ganar el mismo dinero. Por tanto, si cada vez que gana Miguel recibe 1 euro, Luis debiera recibir 3 cada vez que gana.

Conocimientos: casos favorables y posibles, idea intuitiva de convergencia, juego equitativo, valor esperado, proporcionalidad inversa, variable aleatoria, razonamiento combinatorio elemental (para deducir todos los casos)

Posibles dificultades/errores: falta de razonamiento proporcional inverso; no se comprende bien la idea de juego equitativo, no se concibe la convergencia a la larga y se fijan sólo en el resultado del experimento, fallo en la idea de esperanza; fallo en razonamiento combinatorio.

<u>Ítem 7.</u> Hemos lanzado un dado rojo y otro azul y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que alguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro)

Solución: Hay cuatro casos posibles para que al lanzar dos dados el producto sea 12: (6,2), (2,6), (4,3), (3,4). Como ninguno de los dos números puede ser seis quedan dos casos favorables (4,3), (3,4). Aplicando la regla de Laplace; P= casos favorables/casos posibles=2/4=1/2.

Conocimientos: Experimento aleatorio compuesto, casos favorables y posibles. Probabilidad condicionada (se pone una condición), regla de Laplace

Posibles dificultades/errores. Los alumnos pueden aplicar la regla de Laplace separada para cada experimento, respondiendo por ejemplo $\frac{5}{6}x\frac{5}{6}$; o responder $\frac{2}{36}$ que sería la probabilidad de obtener un producto igual a 12 y que alguno de los números sea un 6, es decir, calcular la probabilidad compuesta en vez de la conjunta.

<u>Ítem 8.</u> Cuando lanzamos tres dados simultáneamente

a. ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra? Marca la respuesta correcta:

- Obtener un 5, un 2 y un 3_____
- Obtener dos veces un 5 y una vez el 3____
- Obtener tres veces el 5____
- Todos estos resultados son igualmente probables____

b. ¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos? ¿Cuál o cuáles?

Solución: El más fácil que ocurra es un 5, un 2 y un 3 porque tenemos 6 casos favorables: 523; 532, 235, 253, 325, 352; lo más difícil obtener tres veces el 5 (un solo caso 555).

Conocimientos: Experimento compuesto, enumeración sistemática de posibilidades; regla de Laplace

Posibles dificultades/errores: se pueden considerar todos los casos equiprobables, al no ser capaz de listar sistemáticamente todos los casos diferentes para cada suceso.

<u>Ítem 9.</u> En una alberca hay peces, pero su dueño no sabe cuántos. Toma 200 peces y les pone una marca; los devuelve a la alberca, donde se mezclan con el resto. Al día siguiente, el dueño toma 250 peces de la alberca, y encuentra que 25 de ellos están marcados y el resto no.

a. ¿Cuál es el número aproximado de peces en la alberca?
b. Si el dueño saca ahora 100 peces más de la alberca, ¿cuántos aproximadamente estarán marcados?

Solución: Si entre 250 peces hay 25 marcados la proporción de marcados en el total de peces es 1/10. Como se echaron 200 marcados a la alberca, hay que esperar aproximadamente 2000 peces en total.

Conocimientos: Muestreo, estimación a partir del muestreo, proporcionalidad.

Posibles dificultades/errores: Errores al calcular el total de peces, por ejemplo, decir que hay 2200 peces (sumar el 10% al total, en vez de considerar los marcados como parte del total); considerar que no es posible predecir el número de peces; dar una cantidad que no tenga en cuenta la proporción de peces marcados en la muestra.

<u>Ítem 10.</u> El profesor pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas una moneda 150 veces, y que apuntaran cada vez si salía cara ó cruz. Por cada "cara" se ha apuntado un 1, y por cada "cruz" un 0. Aquí están los dos grupos de resultados:

Clara: 01011001100101011011010001110001101101010110010001
010100111001101011001011001011001001011101100110111
01010010110010101100010011010110011101110101100011

Luisa: 10011101111010011100100111001000111011111101010101
111000000100010100100000100011000101000000000011001
00000001111110000110101001001001111110100110001100 0

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda, sino que inventó los resultados ¿Qué niña ha hecho trampas? ¿Por qué crees que ha sido ella?

Solución: Al ser un fenómeno aleatorio, cualquiera de los dos resultados podría ocurrir; Lo importante en este problema, más que la solución es la estrategia.

Una de las estrategias que pueden seguir los estudiantes para resolver el problema anterior, es contar el número de caras de cada una de las secuencias y comparar con el número esperado (75 caras si consideramos que la moneda está bien equilibrada). Este sería el modelo o hipótesis nula y habría que comprobar si los datos observados (las secuencias de Clara y Luisa) se acercan a los patrones esperados bajo esta hipótesis. Nosotros hemos realizado este recuento, presentando los resultados en la Tabla 1. Observamos que ningunas de las dos secuencias tiene una frecuencia de caras y cruces exactamente igual a la esperada (teórica), pero, de todos modos, si se hubiese obtenido exactamente la frecuencia teórica, nos hubiese resultado sospechoso. Esperamos que la frecuencia observada (de Clara y Luisa) se asemeje a la teórica, pero no demasiado. Intuitivamente parece que Luisa se aparta demasiado y, por tanto, hizo trampas.

Tabla 1. *Resultados teóricos y observados en el ítem 10*

	Cara	Cruz
Clara	72	78
Luisa	67	83
Teórica	75	75

Sin embargo, el resultado de Clara es más “sospechoso” pues nunca tiene rachas de más de tres símbolos iguales. Otra estrategia correcta es fijarse en las rachas.

Conocimientos: Experimento aleatorio, propiedades de la aleatoriedad, rachas, frecuencias de resultados

Posibles dificultades/errores: Se podría pensar que las rachas largas son sospechosas, es decir, pensar que no puede haber rachas largas; se podría pensar que las dos niñas hacen trampas puesto que no se obtiene exactamente 75 y 75.

<u>Ítem 11.</u> En la maternidad de una ciudad realizan un estudio para ver el número de recién nacidos que son hombres o mujeres.

a. Marca la respuesta que consideres correcta:

- Es más probable que entre los próximos diez nacimientos ocho o más sean hombres____
- Es más probable que entre los próximos cien nacimientos ochenta o más sean hombres____

- Las dos cosas anteriores son igual de probables_____

Razona tu respuesta:

Solución: Es más probable que entre los próximos diez nacimientos ocho o más sean hombres. Como sabemos aproximadamente 50% de los nacimientos son hombres; esto quiere decir que en 10 nacimientos hay que esperar 5 hombres y en 100, 50 hombres. También sabemos que este número puede oscilar un poco, debido al carácter aleatorio del fenómeno, pero sin embargo no oscilará demasiado. Por ello es más fácil obtener 8 de 10 (8 se aparta poco de 5) que 80 de 100 (80 se aparta demasiado de 50). Además, las muestras grandes son más fiables que las pequeñas, por ello hay que esperar que el número de niños se acerque más al 50% en una muestra grande que en una pequeña.

Conocimientos: Probabilidad, valor esperado, interpretación frecuencial de la probabilidad, muestreo, fiabilidad de las muestras dependiendo de su tamaño, proporcionalidad

Posibles dificultades/errores: Los estudiantes podrían fijarse sólo en el valor 80% que es el mismo para las dos muestras y pensar que los dos resultados son igual de probables. No tendrían en cuenta el tamaño de la muestra que es otro dato del problema.

b. Marca la respuesta que consideres correcta para los siguientes diez nacimientos

- la fracción de chicos será mayor o igual a 7/10_____
- la fracción de chicos será menor o igual a 3/10______
- la fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10_____
- las tres cosas son igual de probables____

Razona tu respuesta:

Solución: Lo más probable es que la fracción de chicos esté comprendida entre 4/10 y 6/10 porque el número esperado de chicos en 10 nacimientos es 5 y sabemos que el resultado estará cerca de esto, aunque puede cambiar un poco. Pero es más fácil que cambie poco (por tanto esté entre 4 y 6) que cambie mucho (más de 7 o menos de 3.

Conocimientos: Experimento aleatorio; valor esperado, frecuencia relativa, oscilación de la frecuencia relativa, interpretación frecuencial de la probabilidad.

Posibles dificultades/errores: Se podría pensar que todos los casos son equiprobables por tener escasa percepción de los valores esperados y la oscilación de las frecuencias relativas.

Ítem 12. El Centro Meteorológico de Santiago de Compostela da una predicción de 70% de posibilidades de lluvia para el año 2013. Si la predicción es buena ¿cuántos días, aproximadamente esperas que llueva durante ese año? Supongamos que este Centro Meteorológico informa que esta semana hay un 80% de posibilidades de lluvia en Santiago, pero el Lunes no llueve ¿Piensas que su predicción es todavía válida? ¿Por qué? ¿Y si no llueve ni el Lunes ni el Martes?

Solución: Es de esperar alrededor del 70% de días de lluvia; como un año tiene 365 días, calculando el 70% de 365 se obtiene 255,5; es de esperar alrededor de 255 o 256 días de lluvia. Al ser un fenómeno aleatorio esta cantidad puede oscilar un poco por arriba o por abajo. Si en una semana la probabilidad de lluvia es el 80%, como el 80% de 7 es 5,6 hay que esperar unos 6 días de lluvia. No sería extraño entonces que el lunes no llueva y la predicción es válida. Al ser un fenómeno aleatorio el número de días de lluvia puede oscilar un poco y además el valor que obtuvimos está entre 5 y 6; no sería raro que no lloviese ni el lunes ni el martes.

Conocimientos: Experimento aleatorio, probabilidad, valor esperado, variabilidad de la frecuencia relativa, interpretación de probabilidades frecuenciales.

Posibles dificultades/errores: Algunos estudiantes confunden los sucesos muy probables con los seguros; podrían pensar que si se da una probabilidad de lluvia del 80% para una semana, debe llover todos los días y encontrarían muy raro que no llueva ni Lunes ni Martes. Los alumnos podrían pensar que el meteorólogo se equivocó o bien que cambió algo (por ejemplo vino un frente de aire que se llevó las nubes) buscando una explicación causal a la falta de lluvia. Estos estudiantes tienen dificultad para interpretar una probabilidad frecuencial.

Análisis de respuestas de estudiantes

Ítem 1. ¿Cuál de estos resultados es más fácil que ocurra? Marca la respuesta correcta:

- Obtener un 5, un 2 y un 3_____
- Obtener dos veces un 5 y una vez el 3____
- Obtener tres veces el 5____
- Todos estos resultados son igualmente probables____

¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos? ¿Cuál o cuáles?

Respuestas de los alumnos

A1. *"Todos son igualmente probables; es un juego de azar, no se puede predecir"*

A2. *"Es más difícil obtener tres veces el 5; los otros dos resultados tienen la misma probabilidad"*

A3. "*Es más fácil obtener un 5, un 2 y un 3, porque tienes tres casos diferentes: 523, 325 y 532"*

A4: *"Es más difícil obtener tres veces el 5; para los otros resultados tienes más casos y para este solo 1"*

A5. "*Es más difícil obtener tres veces el 5, porque sólo tienes un resultado; para dos veces el 5 y una el tres tienes tres resultados (553, 535, 355); para el 5, 2, 3 tienes 6 resultados (523, 532, 325, 352, 235, 253)"*.

- La respuesta A1 es incorrecta; aunque en un juego de azar no se puede predecir el resultado exacto que ocurrirá, si se puede decir cuál es más probable.
- La primera parte de la respuesta A2 es correcta; la segunda es incorrecta pues el primer resultado es más probable. El alumno tiene dificultad para enumerar todos los casos favorables.
- La respuesta A3 es correcta pero incompleta pues le falta la segunda parte.
- Igual que la anterior es correcta pero incompleta.
- Respuesta correcta.

Ítem 2. Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos.

- Miguel gana un euro si el producto es par
- Si el producto es impar Luis gana un euro

¿Te parece que el juego es equitativo? ¿Por qué? ¿Cuánto tendría que ganar Luis si Miguel gana 1 euro, para que el juego sea equitativo?

Respuestas de los alumnos

B1. “Miguel tiene 2 posibilidades de ganar más que Luis; considero que sea justo que Luis gane 2 euros”

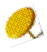
B2. “(Luis debe ganar) 6 euros para que sea justo porque tiene menos posibilidades»,

B3. “Si a Luis le diesen 3 euros estaría equilibrado, porque por cada vez que le toque a Miguel le dan un euro; pero sólo si le dan a Luis tres oportunidades, ya que Miguel tiene tres veces más oportunidades de ganar”

B4. “El juego no es justo porque Miguel tiene muchas más oportunidades; aunque le des más dinero a Luis cuando gane, sigue sin ser justo, porque tiene menos posibilidades de ganar”

B5. “Para que el juego sea justo Luis tiene que ganar 3 euros.”

- La respuestas B1 es incorrecta, aunque el alumno ha estimado bien las probabilidades de cada jugador (Miguel tiene dos veces más que Luis); pero la comparación que hace de probabilidades es aditiva y no multiplicativa y consecuentemente establece un premio incorrecto.
- La respuesta B2 es incorrecta; el alumno observa que un jugador tiene más probabilidades que el otro, pero no cuantifica correctamente las probabilidades; falla por tanto al establecer el valor del premio.
- El alumno B3 muestra haber calculado correctamente las probabilidades y también un buen razonamiento proporcional al haber calculado correctamente el premio para que el juego sea equitativo. Pero añade una condición innecesaria; que se de tres oportunidades a Luis.
- El alumno B4 muestra poco razonamiento en probabilidad (no es capaz de calcular las probabilidades); tampoco comprende la idea de juego equitativo; piensa que aunque se cambie la cantidad de dinero que gana cada jugador seguiría sin ser equitativo.
- El alumno B5 da una solución correcta; muestra buen razonamiento probabilístico e idea clara del juego equitativo, así como razonamiento proporcional.

Ítem 3. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo .

Supongamos que el profesor pide a 4 niños más repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Respuestas de los alumnos

	Daniel	Martín	Diana	María
C1	Punta arriba: 32	Punta arriba: 70	Punta arriba: 35	Punta arriba: 65
	Punta abajo: 68	Punta abajo: 30	Punta abajo: 65	Punta abajo: 35

	Daniel	Martín	Diana	María
C2	Punta arriba: 67	Punta arriba: 68	Punta arriba: 70	Punta arriba: 71
	Punta abajo: 33	Punta abajo: 32	Punta abajo: 30	Punta abajo: 29

	Daniel	Martín	Diana	María
C3	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68
	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32

	Daniel	Martín	Diana	María
C4	Punta arriba: 50	Punta arriba: 51	Punta arriba: 48	Punta arriba: 53
	Punta abajo: 50	Punta abajo: 49	Punta abajo: 52	Punta abajo: 47

- El alumno C1 no comprende la probabilidad frecuencial. Así, da valores alrededor de los obtenidos por el profesor; pero intercambia los correspondientes a punta hacia arriba y hacia abajo; parece esperar que se equilibren los resultados en los sucesivos lanzamientos; no comprende que si la probabilidad de caer hacia arriba es mayor casi siempre caerán más con la punta hacia arriba.
- El alumno C2 da una posible respuesta correcta. Tiene en cuenta los valores esperados (parecidos a los que obtuvo el profesor) y también la variabilidad de un fenómeno aleatorio (no siempre saldrán exactamente los mismos resultados).
- El alumno C3 comprende la idea de valor esperado (la probabilidad teórica será parecida a lo que obtuvo el profesor), pero no tiene en cuenta la variabilidad de un fenómeno aleatorio y repite exactamente cuatro veces los mismos resultados.
- El alumno C4 no tiene en cuenta los datos dados por el profesor y considera igualmente probables los dos sucesos; por ello da valores sobre el 50%; tiene en cuenta la variabilidad aleatoria.

Ítem 4. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra?

Respuestas de los alumnos

D1. *Se puede añadir a la caja de Miguel 2 bolas blancas y 2 negras sin cambiar la de Pablo*

D2. *Se puede pasar 1 bola blanca de la caja de Pablo a la de Miguel*

D3. *Hay en total 8 bolas blancas y 12 negras entre las dos cajas. Las bolas están en razón 8/12, es decir 2 blancas por cada 3 negras. Si dejamos en la caja de Pablo 2 blancas y 3 negras, tenemos que pasar 3 blancas y 4 negras a la de Miguel; entonces Miguel tendrá 6 blancas y 9 negras; sus bolas también están en razón 6/9=2/3 y tienen la misma probabilidad*

D4. *Pasando 1 bola blanca y 2 negras de la caja de Miguel a la de Pablo*

-La estrategia del alumno D1 lleva a tener dos cajas exactamente iguales; pero no corresponde al enunciado del problema.

- El alumno D2 solo tiene en cuenta los casos favorables; por eso piensa que igualando los casos favorables las probabilidades serían iguales

- La respuesta del alumno D3 es correcta; muestra un buen razonamiento proporcional

- La respuesta D4 también es correcta

REFLEXIÓN:

1) Indica algunas dificultades que pueden tener los niños en la comprensión de las fracciones y razonamiento proporcional y cómo ello puede dificultar el trabajo con la probabilidad en los ítems propuestos.

Algunos posibles fallos de los niños en la comparación de fracciones, además de los citados en los ejemplos son los siguientes:

- No comprender la fracción como parte de un todo (por ser pequeños); esto le impide comprender la regla de Laplace
- No comprender la fracción como parte de un todo en un conjunto discreto; esto les dificultará resolver problemas en contexto de bolas en urnas
- Confundir una fracción con su inversa: por ejemplo 1/7 se confunde con 7/1; les dificultará el comparar dos probabilidades
- El conocimiento de los naturales puede ser un obstáculo para el dominio de los números racionales; por ejemplo, algunos niños pueden afirmar que 1/3 < 1/5 explicando que 3 <5. Les dificulta la comparación de probabilidades cuando los casos favorables son iguales
- Si los niños están en una etapa del desarrollo del razonamiento proporcional y el profesor les propone un problema de probabilidad que involucre fracciones de una etapa superior, no los podrá resolver. Por ejemplo si a un niño en la etapa IIA les propones un problema de la etapa III-

2) Indicar algunas intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad

En el cuestionario y respuestas a los ítems han aparecido varias intuiciones incorrectas:

- Relacionadas con la independencia de los ensayos, como esperar que se han salido varias caras seguidas en una moneda hay más probabilidad de obtener una cruz (falacia del jugador), creencia en que los números aleatorios han de ser necesariamente desordenado
- Relacionadas con la asignación de probabilidades: como considerar todos los sucesos equiprobables (sesgo de equiprobabilidad)
- Relacionadas con la falta de capacidad combinatoria: como no considerar el orden al lanzar dos dados o no ser capaz de enumerar todos los caminos en una serie de canales o todos los sucesos que dan una diferencia en los puntos de dos datos o las permutaciones de orden de tres niños
- Relacionadas con la idea de juego equitativo: como no tener en cuenta el valor del premio

- Falta de comprensión del comportamiento de la frecuencia en series largas y cortas de ensayos (ejemplo de las chinchetas, pronóstico del tiempo y sexo de recién nacidos). Se espera una convergencia en series pequeñas de ensayos.

3) Elaborar una lista de los materiales que han aparecido en el cuestionario y se pueden utilizar para trabajar con la probabilidad, además de las bolas en urnas y los dados.

- Habría muchos materiales posibles, como monedas, fichas de dos colores (un color en cada cara) bolas coloreadas en urnas, dados cúbicos o usando cualquier otro poliedro regular, dados sesgados, ruletas con áreas iguales o desiguales, bifurcación por canales, aparato de Galton, etc.
- Se pueden usar muchos tipos de juegos como dominó, echar a suertes, lotería, etc.

4) Plantea una actividad que sirva para explicar a los niños por qué el juego descrito en el ítem 4 no es equitativo.

- Se podría organizar por parejas una experiencia donde los niños jugasen cada uno 10 veces, tomando un niño de la pareja el papel de Luis y otro el de Miguel. El profesor daría una ficha a los niños para que anotasen los resultados como la siguiente y calculasen cuantas veces habían ganado cada uno de los jugadores

Resultado	Diferencia	Recuento	Frecuencia
	0		
	1		
	2		
	3		
	4		
	5		

Al final los juegos el profesor acumularía los resultados de toda la clase en la pizarra para ver la frecuencia de cada una de las diferencias y determinar en forma experimental la probabilidad (frecuencial) de ganar cada jugador. Se haría una discusión sobre si el juego es justo y por qué

Finalmente los alumnos en grupos tratarían de completar todos los casos posibles para cada diferencia, calculando el número de casos que lleva a una posible diferencia y su probabilidad, así como la probabilidad de ganar Luis y Miguel con un esquema similar al siguiente:

Producto	Casos posibles	Número de casos	Probabilidad	Gana
Impar	11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55	9	1/4	Luis
Par	12, 14, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26,32,34, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 54, 54, 56, 61, 62, 63, 64, 65,66	27	3/4	Miguel
Total		36		