Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

COHOMOLOGIA DE HACES

M.ª PILAR CARRASCO CARRASCO

Departamento de Algebra y Fundamentos

GRANADA, 1983

MEMORIA DE LICENCIATURA

COHOMOLOGIA DE HACES

Por

M.P. Carrasco Carrasco

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada, Mayo 1983

COHOMOLOGIA DE HACES

Memoria de LICENCIATURA presentada para aspirar al grado de LICENCIADO en Ciencias, especialidad de MATEMATICAS.

DIRECTOR:
Prof. Dr. D. A. MARTINEZ CEGARRA

ASPIRANTE:
Mª PILAR CARRASCO CARRASCO

INDICE

INTRODUCCION

5.- COHOMOLOGIA EN UN ESPACIO TOPOLOGICO

6.- COHOMOLOGIA DE ZARISKI

INTRODUCCION

La Geometría Algebraica es una de las áres de la matemática principalmente beneficiada por la tendencia, iniciada desde comienzos del presente siglo, de abstraer y comparar estructuras subyacentes a diversas teorías. Su relación con la teoría de funciones analíticas, por una parte, y con el álgebra y teoría de números por otra, son puestas de manifiesto, dando lugar a numerosos yfructíferos nuevos puntos de vista. Así, por ejemplo, son sustanciales los avances en la geometría sobre una variedad algebraica mediante la aplicación de métodos trascendentes y de Geometría Diferencial, sobre todo en el marco de la toría de Hodge y de las Variedades Kählerianas (22 , (I), Capítulo 7), en tanto que por obra de Lefschetz se pusieron en evidencia las profundas raices topológicas de diversos aspectos geométricos.

La falta de conexión entre las teorías algebraicas vigentes, hasta los años cincuenta, y los nuevos puntos de vista, se resolvió mediante la introducción de un nuevo instrumento: La Teoría de Haces; desarrollada inicialmente por H. Cartan, para su aplicación a los espacios analíticos. Esta teoría aplicada a las variedades algebraicas, venía a posibilitar su estudio cohomológico y la utilización de técnicas, hasta el momento privativas de la topología algebraica, apoyándose, claro está, en la topología (de Zariski) asociada a la varedad algebraica.

Serre ([34]) introduce los haces en Geometría Algebraica e inagura un nuevo punto de vista: "Una variedad algebraica sobre K es un espacio topológico, dotado de un haz de gérmenes de funciones sobre X con valores dentro de K, donde K es un cuerpo". Así mismo introduce la cohomología de una variedad con coeficientes en un haz.

La revolución iniciada por Serre no tardó en cuajar, modificandose todo el panorama en base a la teoría de esquemas: Los anillos de funciones racionales son sustituidos por anillos arbitrarios y los puntos de las variedades algebraicas lo son por ideales del espectro del anillo, mostrándose los elementos del anillo como funciones sobre el espectro; se introduce la topología de Zariski y un haz de anillos, de forma que sus fibras constituyen los gérmenes de los elementos del anillo; esto es: Un esquema afín. Un Esquema será un espacio topológico anillado (esto es, un espacio dotado de un haz de anillos cuyas fibras son anillos locales), que es localmente isomorfo a esquemas afines.

De esta manera Serre y Grothendieck inician, sobre todo a partir de la publicación de la monumental obr "E.G.A." ([12]), un camino que ha conseguido reescribir los fundamentos de la Geometría Algebraica en términos de esquemas y cohomología, con el impresionante record de resolver diversos y numerosos problemas clásicos, con sus nuevas técnicas, en corto espacio de tiempo.

El nivel de abstracción, aun, no se mostraría suficiente con ésto. Cuando una variedad está definida sobre los complejos, los grupos de cohomología obtenidos en base a la topología compleja reflejan la estructura de la variedad mucho mas fuertemente que los definidos en base a la topología de Zariski. Entonces para un esquema arbitrario, se buscan otras topologías que reemplacen a la topología compleja, surgiendo como eficaz sustitutivo la topología Etale; y por un planteamiento del mismo tipo surgen diversas topologías sobre esquemas (plana , étale y separada,...), cada una de ellas introduccinedo invariantes cohomológicos peculiares. Estas topologías y las correspondientes teorías de cohomlogía sobre las respectivas categorías de haces, aparecen asociadas a clases de "morfismos" de correcto funcionamiento frente a cambios de base. (Que originan teoremas de comparación por sucesiones espectrales).

Dado el actual avance de la teoría de categorías y del álgebra homológica, es natural unificar y dar un tratamiento homogéneo y actualizado a las diferentes topologías y teorías de cohomología asociadas. De esta forma se ha de conseguir la obtención de muy diversos teoremas y resultados, hoy dispersos por la amplia bibliografía sobre el tema, de una manera elegante y económica. Se ha de intentar, también, desde un marco de referencia suficientemente amplio y elevado, la visualización de las comparaciones y puntos de contacto entre las diferentes teorías cohomológicas, no siempre puestos de relieve por la falta de esa "teoría general". Este es el objeto del presente trabajo.

Las notaciones empleadas, se ha procurado que respeten las más arraigadas en la literatura, intentendo hacerlas compatibles con el lenguage categórico utilizado; en cualquier caso, son aclaradas internamente aquellas de uso no estandar.

Quiero expresar, por último, mi agradecimiento al Prof. Dr. D. A. Martínez Cegarra, por su orientación y ayuda para la realización de este trabajo; al manifestar éste lo hago extensivo a todos los profesores de Departamento.

1. CATEGORIAS TOPOLOGICAS

1.1 HACES Y PREHACES SOBRE CATEGORIAS TOPOLOGICAS

En una categoría T, dados morfismos $U_i \longrightarrow V$ $i=1,2$, notaremos $U_1 \times_V U_2$ al correspondiente producto fibrado; si existe.

(1.1.1) DEFINICION

Una Topología de Grothendieck en una categoría T, es una clase τ de familias $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I}$, de morfismos en T, llamados recubrimientos, satisfacciendo

(i) Si f es un isomorfismo, entonces $\{f\} \in \tau$

(ii) Si $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I} \in \tau$ y $\{V_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} U_i\}_{j \in J_i} \in \tau$, para cada i,

entonces la familia $\{V_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i,j}$ está en τ

(iii) Si $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I} \in \tau$ y $V \longrightarrow U$ es un morfismo arbitrario

en T, entonces $U_i \times_U V$ existe y $\{U_i \times_U V \longrightarrow V\} \in \tau$

Si τ es una topología de Grothendieck en T, al par (T, τ) lo llamaremos una categoría topológica.

(1.1.2) DEFINICION

Dadas categorías T,C, definimos la categoría de prehaces sobre T con valores en C, como la categoría de funtores C^{T°. Los objetos de esta categoría los llamaremos prehaces, y a sus morfismos, morfismos de prehaces.

(1.1.3) DEFINICION

Si $(T\ \tau)$ es una categoría topológica, y C es una categoría completa definimos la categoría de haces sobre $(T\ \tau)$, con valores en C, como la subcategoría plena de la categoría de prehaces C^{T°, cuyos objetos son aquellos prehaces F, tales que si $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i\in I} \in T$, entonces la sucesión

$$F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

es exacta, en el sentido de que el morfismo $F(U) \longrightarrow \prod_i F(U_i)$ sea el igualador de los morfismos $\prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$.

El caso mas interesante es tomar C= grupos abelianos, que notaremos Ab; nos centraremos en lo que sigue, en el estudio de prehaces y haces con valores en Ab.

(1.1.4) PROPOSICION

Para cualquier categoría T, la categoría de prehaces Ab^{T^o}, es una categoría abeliana AB5, con generadores. Así tiene suficientes inyectivos.

DEMOSTRACION

Que es AB5 se deduce, obviamente, de que Ab lo es; que tiene suficientes inyectivos se sigue de (|37| Corolario 2.9.5. pág 133).

Utilizaremos, también, el siguiente hecho:

(1.1.5) PROPOSICION

Si T es una subcategoría de Giraud de una categoría abeliana AB5, entonces T es también una categoría abeliana AB5.

DEMOSTRACION

Es elemental.

Probaremos que la categoría de haces sobre una categoría topológica (T T) con valores en Ab, que notaremos S(T T), es una subcategoría de Giraud de la categoría de prehaces Ab^{T^o}; esto es, se tiene una situación de adjunción:

$$\begin{tikzcd} Ab^{T^o} \arrow[d, shift right, "s"'] \\ S(T\ T) \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

donde i es el funtor inclusión, y s es un funtor exacto.

(1.1.6) Definimos un funtor $+ : Ab^{T^o} \longrightarrow Ab^{T^o}$ como sigue: Sea U un objeto de T, denotamos por J_U la categoría de recubrimientos $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ de U en T , donde los morfismos vienen definidos como sigue: Si $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ y $\{U'_j \longrightarrow U\}_{j\in J}$ son dos de tales recubrimientos, un morfismo

$$f : \{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I} \longrightarrow \{U'_j \longrightarrow U\}_{j\in J}$$

es una aplicación $\varsigma : I \longrightarrow J$, y para cada $i \in J$, un morfismo $f_i : U_i \longrightarrow U'_{\varsigma(i)}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr] & & U'_{\varsigma(i)} \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Un prehaz $P \in Ab^{T^o}$, induce un funtor $P_U : J_U \longrightarrow Ab$ por:

$$P_U(\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}) = Ig(\prod_i P(U_i) \underset{p}{\overset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} P(U_i \underset{U}{\times} U_j)) =$$

$$= Ker(\prod_i P(U_i) \xrightarrow{q-p} \prod_{i,j} P(U_i \underset{U}{\times} U_j))$$

Nótese que para $h : V \longrightarrow U$ un morfismo en T, obtenemos un funtor $J(h) : J_U \longrightarrow J_V$ por $J(h)(\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}) = \{U_i \underset{U}{\times} V \longrightarrow V\}_{i\in I}$

Además, ya que el diagrama

$$\begin{tikzcd} (U_i \underset{U}{\times} V) \underset{V}{\times} (U_k \underset{U}{\times} V) \simeq U_i \underset{U}{\times} U_k \underset{U}{\times} V \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & U_i \underset{U}{\times} V \arrow[d] \\ U_i \underset{U}{\times} U_k \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U_i \end{tikzcd}$$

es conmutativo, también lo será

$$\begin{tikzcd} \prod_i P(U_i \underset{U}{\times} V) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j} P(U_i \underset{U}{\times} U_j \underset{U}{\times} V) \\ \prod_i P(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u] & \prod_{i,j} P(U_i \underset{U}{\times} U_j) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

y por tanto estará definido el morfismo:

$$\mathrm{Ker}(\prod_i P(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} P(U_i \underset{U}{\times} U_j)) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Ker}(\prod_i P(U_i \underset{U}{\times} V) \longrightarrow \prod_{i,j} P(U_i \underset{U}{\times} U_j \underset{U}{\times} V))$$

o lo que es lo mismo, un morfismo de $P_U(\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I})$ a $P_V \circ J(h)$ ($\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$). Tenemos ,así, definido un morfismo de funtores: $P_U \longrightarrow P_V \circ J(h)$; obtenemos, por tanto, un morfismo $\varinjlim P_U \longrightarrow \varinjlim P_V$.

Definimos el $+$: $Ab^{T^\circ} \longrightarrow Ab^{T^\circ}$ como $+(P)= P^+$,para $P \in Ab^{T^\circ}$,y tal que $P^+(U)= \varinjlim P_U$, para U un objeto de T. Por lo visto anteriormente, P^+ es un prehaz sobre T con valores en Ab, y por tanto el funtor + está bien definido.

Para cada $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in J_U$, existe una aplicación canónica $P(U) \longrightarrow P_U(\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I})$, dada a partir de la aplicación $P(U) \longrightarrow \prod_i P(U_i)$; como el límite directo del funtor costante $J_U \longrightarrow Ab$ con valor $P(U)$, es canónicamente isomorfo a $P(U)$, obtenemos un morfismo funtorial canónico $P \longrightarrow P^+$. Si $F \in S(T\ \ )$, entonces $F^+(U)= \varinjlim F_U= F(U)$, puesto que $F_U(\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I})= F(U)$, por ser F un haz; luego $F^+ \longrightarrow F$ es biyectiva.

Podemos deducir, entonces, que para cualquier prehaz P, cualquier aplicación de P en un haz debe factorizar a traves de P^+.

(1.1.7) TEOREMA. (Teorema de existencia del funtor adjunto)

Dada $(T\ \ T)$ una categoría topológica, la categoría $S(T\ \ T)$ es una subcategoría reflexiva de Ab^{T°.

DEMOSTRACION

Tenemos que ver que existe un funtor s: $Ab^{T^\circ} \longrightarrow S(T\ \ T)$, que es adjunto a idquierda al funtor inclusión.

Ya que $S(T\ \ T)$ es una subcategoría de Ab^{T°, las propiedades de adjunción pueden establecerse como sigue: Existe un homomorfismo funtorial $P \longrightarrow s(P)$, que tiene la siguiente propiedad universal; todo morfismo $P \longrightarrow F$; con F un haz, se factoriza de forma única a traves de s(P).

Definimos s por: $s(P)= +(P^+)= P^{++}$.

Puesto que existe un homomorfismo funtorial $P \longrightarrow P^+$, obtenemos un homomorfismo funtoral $P \longrightarrow s(P)$; ya que todo morfismo de P en un haz factoriza a traves de P^+, también lo hará, y además de forma única, a través de $P \longrightarrow s(P)$.

El teorema estará probado si vemos que $s(P)$ es un haz.

En principio veamos que el prehaz P^+ satisface la siguiente propiedad:

" Para todo $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I} \in T$, $P^+(U) \longrightarrow \prod_i P^+(U_i)$ esinyectivo "

En efecto, sean $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in P^+(U)$, y supongamos que tienen la misma imagen en $P^+(U_i)$, para todo i.

Podemos representas $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ por elementos $a_1, a_2 \in \operatorname{Ker}(\prod_k P(V_k) \longrightarrow \prod_{k,r} P(V_k \times_U V_r))$, para algún $\{V_k \longrightarrow U\}_{k\in K} \in T$. Ahora las imágenes de $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ en $P^+(U_i)$ están ,entonces representadas por las imágenes de a_1, a_2 en $\operatorname{Ker}(\prod_k P(U_i \times_U V_k) \longrightarrow \prod_{k,r} P(U_i \times_U V_k \times_U V_r))$.

Ya que $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ tienen la misma imagen en $P^+(U_i)$, existe un recubrimiento más fino $\{W_{i,j} \longrightarrow U_i\}_{j\in J}$ tal que las imágenes de a_1, a_2 en $\prod_j P(W_{i,j})$ son iguales. Haciendo variar i, la familia $\{W_{i,j} \longrightarrow U\}_{i,j}$ y es un refinamiento de $\{V_k \longrightarrow U\}_{k\in K}$. Ya que $a_1 = a_2$ en $\prod_{i,j} P(W_{ij})$, entonces $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$.

Sea, ahora, un prehaz P verificando que para todo $\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I} \in T$, $P(U) \longrightarrow \prod_i P(U_i)$ es inyectivo, entonces P^+ Es un haz; en consecuencia por lo visto anteriormente $s(P) \in S(T_T)$ y el teorema estará demostrado.

En efecto, sea $\{V_k \longrightarrow U\}_{k\in K} \xrightarrow{f} \{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ un morfismo en J_U, entonces la aplicación inducida por f:

$\operatorname{Ker}(\prod_i P(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j)) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\prod_k P(V_k) \longrightarrow \prod_{k,h} P(V_k \times_U V_h))$, es inyectiva; veamos esto último:

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & V_k \times_U U_i \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ V_k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & U_i \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Fijando i, $\{V_k \underset{U}{\times} U_i \longrightarrow U_i\}_{k\in K} \in T$, y por tanto $\prod_i P(U_i) \longrightarrow$ $\prod_{i,k} P(V_k \underset{U}{\times} U_i)$ es inyectiva.

Por otra parte $\{V_k \underset{U}{\times} U_i \longrightarrow U\}_{k,i} \in T$, combinando obtenemos que la aplicación

$$\mathrm{Ker}(\prod_i P(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} P(U_i \underset{U}{\times} U_j)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\prod_{k,i} P(V_k \underset{U}{\times} U_i) \longrightarrow \dots)$$

inducida por p_2 es inyectiva. Pero esta aplicación es única y es por tanto la misma que la inducida por fP_1, y puesto que la inducida por p_1 es inyectiva, por el mismo razonamiento, la aplicación inducida por f es mónica.

Ahora sea $\{V_i \longrightarrow U\}_{i\in I} \in T$ y $\bar{a} \in \mathrm{Ker}(\prod_i P^+(V_i) \longrightarrow \prod_{i,j} P^+(V_i \underset{U}{\times} V_j))$ para ver que P^+ es un haz, tenemos que demostrar que $\bar{a}$ es la imagen de algún elemento de $P^+(U)$.

Elegimos para cada i una familia $\{W_{i,k} \longrightarrow V_i\}_{k\in K} \in T$;con $a_i \in$ $\mathrm{Ker}(\prod_k P(W_{ik}) \longrightarrow \dots)$ representando la i-ésima componente ,$\bar{a}_i$, de $\bar{a}$.

Consideremos el diagrama (en el cual todos los cuadrados son cartesianos):

$$\begin{tikzcd}
W_{ik} \underset{U}{\times} W_{j,h} \arrow[r] \arrow[d] & W_{ik} \underset{U}{\times} V_j \arrow[r] \arrow[d] & W_{ik} \arrow[d] \\
V_i \underset{U}{\times} W_{jh} \arrow[r] \arrow[d] & V_i \underset{U}{\times} V_j \arrow[r] \arrow[d] & V_i \arrow[d] \\
W_{jh} \arrow[r] & V_j \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

entonces a_i induce, por extensión base, un elemento $a^1_{ij} \in \mathrm{Ker}(\prod_k P(W_{ik} \underset{U}{\times} V_j)$ $\longrightarrow \prod_{k,r} P(W_{ik} \underset{U}{\times} V_j \underset{V_i \underset{U}{\times} V_j}{\times} W_{ir} \underset{U}{\times} V_j))$, y a_j induce un elemento $a^2_{ij} \in$

$$\mathrm{Ker}(\prod_h P(V_i \underset{U}{\times} W_{jh}) \longrightarrow \prod_{h,t} P(V_i \underset{U}{\times} W_{jh} \underset{V_i \underset{U}{\times} V_j}{\times} V_i \underset{U}{\times} W_{jt})).$$

Como $\bar{a}$ es del núcleo, a^1_{ij}, a^2_{ij} reprsentan el mismo elemento de $P^+(V_i \underset{U}{\times} V_j)$. Por tanto, " $a^1_{ij} = a^2_{ij}$" en algún recubrimiento de $V_i \underset{U}{\times} V_j$; el cual será un refinamiento común de $\{W_{ik} \underset{U}{\times} V_j \longrightarrow V_i \underset{U}{\times} V_j\}_{k\in K}$ y de

$\{V_i \underset{U}{\times} W_{jh} \longrightarrow V_i \underset{U}{\times} V_j\}_{h\in K}$. Ya que todo morfismo en $J_{V_i \underset{U}{\times} V_j}$ induce uno mónico, esto debe ser cierto en cualquier refinamiento común, y por tanto " $a^1_{ij} = a^2_{ij}$ " en $\prod_{h,k} P(W_{ik} \underset{U}{\times} W_{jh})$.

Esto muestra que $a \in \mathrm{Ker}(\prod_{ik} P(W_{ik}) \longrightarrow \prod_{ikjh} P(W_{ik} \underset{U}{\times} W_{jh}))$, de donde $\bar{a} \in P^+(U)$ c.q.d.

(1.1.8) PROPOSICION

El funtor s: $Ab^{T^o} \longrightarrow S(T_T)$ es exacto.

DEMOSTRACION

Por ser s adjunto a idquierda al funtor inclusión, es exacto a derecha.

El funtor +: $Ab^{T^o} \longrightarrow Ab^{T^o}$ es exacto a idquierda, pues viene definido en términos de núcleos, productos y límites directos que son exactos a izquierda en Ab^{T^o} al ser esta categoría AB5.

Asi el funtor i°s: $Ab^{T^o} \longrightarrow Ab^{T^o}$ es también exacto a idquierda, y como i es exacto a idquierda,pleno y fiel entonces s es exacto a idquierda.

Como consecuencia de (1.1.5) tenemos:

(1.1.9) COROLARIO

La categoría $S(T^{T})$ es abeliana, AB5 con suficientes inyectivos.

Notemos que al ser el funtor s exacto, el funtor i preserva objetos inyectivos, por tanto todo haz inyectivo lo es en la categoría de prehaces.

1.2 MORFISMOS ENTRE CATEGORIAS TOPOLOGICAS

(1.2.1) Si T y T' son catgorías y f: $T \longrightarrow T'$ es un funtor, entonces f induce un funtor f^*: $Ab^{T'^o} \longrightarrow Ab^{T^o}$ dado por: $f^*(P) = P°f$.

Por (|37| Teorema 1.8.6, pág 49), el funtor f^* tiene un adjunto a idquierda: La extensión de Kan de f; explicitamente éste vendría dado por:

$$(f_*P)(U) = \varinjlim_{(V,\phi)\in I^f_U} P(V)_f$$

donde I_U^f es la categoría de objetos (V, ϕ), tal que $V \in Obj(T)$ y $\phi \in Hom_{T'}(U; f(V))$; y de morfismos:

$$Hom((V_1, \phi), (V_2, \psi)) = \{ \varsigma \in Hom(V_1, V_2) / f(\varsigma)\phi = \psi \}$$

(1.2.2.) PROPOSICION

Si F es un prehaz sobre una categoría T, con valores en Ab, inyectivo entonces F(U) es un grupo abeliano inyectivo para cada objeto U de T.

DEMOSTRACION

Sea U un objeto de T, denotamos por $\{U\}$ la categoría discreta donde $Obj\{U\} = \{U\}$ y $Morf\{U\} = \{1_U\}$. Sea $i: U \longrightarrow T$ el funtor inclusión.

Un prehaz sobre $\{U\}$ es justamente un grupo abeliano, y para $F \in Ab^{T^o}$, $i^*(F) \simeq F(U)$.

Por otra parte, dados (U, ϕ), $(U, \psi) \in I_V^i$, $Hom((U, \phi), (U, \psi)) = \emptyset$ a no ser que $\phi \equiv \psi$, en cuyo caso dicho conjunto es $\{1_U\}$. En otras palabras I_V^i es la categoría discreta sobre el conjunto Hom(V,U).

Así si A es un grupo abeliano, entonces $(i_*A)(V) = \bigoplus_{Hom(V,U)} A$, luego i_* es exacto.

Por ser i_* exacto i^* lleva inyectivos en inyectivos, luego $i^*(F) = F(U)$ es un grupo abeliano inyectivo si F es un prehaz inyectivo.

(1.2.3) DEFINICION

Sean $(T, \mathcal{T})$ y (T', Ω) dos categorías topológicas.

Un morfismo $f: (T, \mathcal{T}) \longrightarrow (T', \Omega)$ entre estas dos categorías topológicas, es un funtor $f: T \longrightarrow T'$ satisfacciendo:

Si $\{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in \mathcal{T}$ y $V \longrightarrow U$ es un morfismo en T, entonces

(i) $\{f(U_i) \longrightarrow f(U)\}_{i \in I} \in \Omega$

(ii) $f(U_i \times_U V) \simeq f(U_i) \times_{f(U)} f(V)$; para todo i.

(1.2.4) Si $f: (T, \mathcal{T}) \longrightarrow (T', \Omega)$ es un morfismo entre categorías topológicas, y $F' \in S(T', \Omega)$, entonces $f^*(F') = F' \circ f$ es un haz sobre $(T, \mathcal{T})$, es decir, $f^*(F') \in S(T, \mathcal{T})$.

Obtenemos un funtor, que notaremos igual, $f^*: S(T', \mathcal{T}) \longrightarrow S(T, \Omega)$

definido por: $f^* = f^{*\circ} i = s^\circ f^{*\circ} i'$. Donde i' es la inclusión de $S(T', \Omega)$ en $Ab^{T'^\circ}$ y s el funtor adjunto al funtor i: $Ab^{T^\circ} \longrightarrow S(T, \mathcal{T})$.

Este funtor es exacto a idquierda por ser $f^*: Ab^{T'^\circ} \longrightarrow Ab^{T^\circ}$ exacto e i' exacto a idquierda.

El funtor f^* tiene un adjunto a izquierda, que también notaremos por $f_*: S(T, \mathcal{T}) \longrightarrow S(T', \Omega)$, definido como la composición de los siguientes funtores:

$$\begin{tikzcd} S(T, \mathcal{T}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "i"'] & S(T', \Omega) \\ Ab^{T^\circ} \arrow[r, "f_*"] & Ab^{T'^\circ} \arrow[u, "s'"'] \end{tikzcd}$$

(1.2.4) PROPOSICION

Sea $f: (T, \mathcal{T}) \longrightarrow (T', \Omega)$ un morfismo de categorías topológicas. Si $f_*: Ab^{T^\circ} \longrightarrow Ab^{T'^\circ}$ lleva haces en haces, entonces $sf_*(P) = f_*s(P)$ para todo prehaz P sobre T

DEMOSTRACION

Sea $P \in Ab^{T^\circ}$ y $F' \in S(T', \Omega)$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{S(T', \Omega)}(f_*s(P), F') \simeq \mathrm{Hom}_{S(T,T)}(s(P), f^*(F')) \simeq \mathrm{Hom}_{Ab^{T^\circ}}(P, f^*(F')) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{Ab^{T'^\circ}}(f_*(P), F') \simeq \mathrm{Hom}_{S(T', \Omega)}(sf_*(P), F')$$

Por tanto $f_*s(P) = sf_*(P)$ para todo P de Ab^{T°.

1.3 CATEGORIA TOPOLOGICA ASOCIADA A UN ESPACIO TOPOLOGICO. FIBRAS.

(1.3.1) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Este puede mirarse como una categoría topológica, que denotaremos $(\overline{X}, \overline{\mathcal{T}})$, cuya categoría está formada por loa abiertos de X como objetos, y las inclusiones como morfismos; la topología de Grothendieck tiene por recubrimientos las familias de recubrimientos por abiertos de la topología .

De hecho podemos definir un funtor T de la categoría de espacios topológicos a la categoría de categorías topológicas, de forma que

$(X, T) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{T})$. Si $f\colon (X, T) \longrightarrow (Y, \Omega)$ es una aplicación continua de espacios topológicos, le asociamos $T(f)\colon (\bar{Y}, \bar{\Omega}) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{T})$ de forma que $T(f)(V) = f^{-1}(V)$, para V un abierto de Y.

El proceso es claramente funtorial, así como que T es un funtor fiel.

(1.3.2) DEFINICION

Dado un espacio topológico (X, T), definimos la categoría de prehaces (haces), con valores en Ab o en la categoría de anillos, sobre él, como la categoría de prehaces (haces), con valores en Ab o en anillos, sobre la categoría topológica $(\bar{X}, \bar{T})$ asociada a (X, T).

(1.3.3) PROPOSICION

Sea (X, T) un espacio topológico noetheriano. Un prehaz $F \in Ab^{\bar{X}^{\circ}}$ es un haz si y sólo si para todo abierto U de X y para todo recubrimiento $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ dinito de U, la sucesión $F(U) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} F(U_i) \longrightarrow \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)$ es exacta.

DEMOSTRACION

"Sólo si" se sigue de la definición de haz.

Para el recíproco, sea $U \subseteq X$ un abierto y sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento cualquiera de U. Ya que (X, T) es noetheriano, U también lo es, y por tanto U es compacto.

Luego dado $\{U_i\}_{i \in I}$, recubrimiento de U, podemos encontrar un subrecubrimiento finito: $\{U_j\}_{j \in J}$, J finito. Entonces, por hipótesis, la sucesión

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow \prod_{j \in J} F(U_j) \longrightarrow \prod_{j,j'} F(U_j \cap U_{j'})$$

es exacta. Tenemos que ver que lo es la sucesión:

$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F(U_i) \longrightarrow \prod_{j,j'} F(U_i \cap U_{i'})$$

Sea $s \in F(U)$ un elemento tal que $F(U_i \longrightarrow U)(s) = 0$ para todo $i \in I$, entonces $F(U_j \longrightarrow U)(s) = 0$ para todo $j \in J$, y puesto que (*) es exacta, ha de ser $s=0$.

Sea $s_i \in F(U_i)$, $i \in I$, elementos tales que $F(U_i \cap U_{i'} \longrightarrow U_i)(s_i) = F(U_i \cap U_{i'} \longrightarrow U_{i'})(s_{i'})$, para todo $i, i' \in I$; Consideramos la familia finita $\{s_j \in F(U_j)\}_{j \in J}$, entonces $F(U_j \cap U_{j'} \longrightarrow U_j)(s_j) = F(U_j \cap U_{j'} \longrightarrow U_{j'})(s_{j'})$

entonces, por ser (*) exacta, existe $s \in F(U)$ tal que $F(U_j \longrightarrow U)(s)=s_j$, para todo $j \in J$.

Veamos que $F(U_i \longrightarrow U)(s)=s_i$ para todo $i \in I$; con lo cual estaría todo demostrado.

Sea $i \in I-J$ fijo, y consideremos el recubrimiento de U_i: $\{U_i \cap U_j\}_{j \in J}$. Entonces, la sucesión $0 \longrightarrow F(U_i) \longrightarrow \prod_{j \in J} F(U_i \cap U_j) \longrightarrow \prod_{jj'} F(U_i \cap U_j \cap U_{j'})$ es exacta, por hipótesis.

Consideramos el elemento $F(U_i \longrightarrow U)(s)-s_i \in F(U_i)$, entonces

$F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_i)(F(U_i \longrightarrow U)(s)-s_i)=$

$= F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_i) \circ F(U_i \longrightarrow U)(s) - F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_i)(s_i)=$

$= F(U_i \cap U_j \longrightarrow U)(s) - F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_i)(s_i)$

Pero $F(U_i \cap U_j \longrightarrow U)(s) = F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_j) \circ F(U_j \longrightarrow U)(s)=$

$= F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_j)(s_j)$, luego

$F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_i)(F(U_i \longrightarrow U)(s)-s_i)=$

$= F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_j)(s_j) - F(U_i \cap U_j \longrightarrow U_i)(s_i)=0$, por hipótesis.

Por tanto, como ello es cierto para todo $j \in J$, $F(U_i \longrightarrow U)(s)-s_i=0$, ó bien $F(U_i \longrightarrow U)(s)= s_i$ c.q.d.

(1.3.4) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $(F_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un sistema directo de haces, indizado por un conjunto dirigido Λ. Notemos que el haz $\varinjlim F_\alpha$ coincide con la hacificación del prehaz $\varinjlim F_\alpha$ en $Ab^{\bar{X}^\circ}$.

Se verifica que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico noetheriano, el prehaz límite directo es ya un haz.

En efecto, sea $U \in X$ un abierto y $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento finito de U. Entonces para todo $\alpha \in \Lambda$, tenemos la sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow F_\alpha(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} F_\alpha(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} F_\alpha(U_i \cap U_j).$$

Ya que $\varinjlim$ es un funtor exacto en Ab, obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \varinjlim F_\alpha(U) \longrightarrow \varinjlim\left(\prod_i F_\alpha(U_i)\right) \longrightarrow \varinjlim\left(\prod_{ij} F_\alpha(U_i \cap U_j)\right).$$

Pero como el recubrimiento es finito, podemos conmutar productos con límites directos, y obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \varinjlim F_\alpha(U) \longrightarrow \prod_i (\varinjlim F_\alpha(U_i)) \longrightarrow \prod_{ij}(\varinjlim F_\alpha(U_i \cap U_j)).$$

Por tanto, apoyandonos en (1.3.3), el prehaz $\varinjlim F_\alpha$ es un haz. c.q.d.

(1.3.5) DEFINICION

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio un espacio topológico, y sea $F \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$. Decimos que F es finitamente generado si existe un entero $m > 0$ tal que para todo abierto $U \subseteq X$, $F(U)$ puede generarse por m elementos.

(1.3.6) PROPOSICION

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $F \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$. Entonces F es un límite directo de haces finitamente generados.

DEMOSTRACION

En efecto, sea $B = \bigcup_{U \subseteq X} F(U)$ y sea A la familia de todos los subconjuntos finitos de B. Para cada $a \in A$, sea F_a el subhaz de F generado por las secciones de a (sobre varios conjuntos abiertos). Entonces A es un conjunto dirigido, y $\varinjlim_{a} F_a = F$, c.q.d.

(1.3.7.) DEFINICION

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y p un punto de X. Consideramos la subcategoría topológica de $(\bar{X}, \mathcal{T})$: $(\bar{X}_p, \bar{\mathcal{T}}_p)$, donde $\bar{X}_p$ es la subcategoría plena de $\bar{X}$ cuyos objetos son los abiertos que contienen a p; y $\bar{\mathcal{T}}_p$ está formada por los recubrimientos de estos abiertos.

Dado un prehaz F, con valores en Ab o en anillos, sobre X, éste nos define, por restricción, un prehaz sobre $(\bar{X}_p, \bar{\mathcal{T}}_p)$ con valores en Ab o en anillos, respectivamente.

Definimos entonces, la <u>fibra de F en p</u>, que notaremos F_p, por:

$$F_p = \operatorname{Colím} F|\bar{X}_p$$

(1.3.8) Si $f: F' \longrightarrow F$ es un morfismo de prehaces con valores en Ab o en anillos, sobre X, este determina, por restricción, un morfismo $f|\bar{X}_p: F'|\bar{X}_p \longrightarrow F|\bar{X}_p$, que inducirá de forma natural, por paso a colímites, un morfismo entre las fibras: $f_p: F'_p \longrightarrow F_p$.

(1.3.9) Sea f: $(X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \Omega)$ una aplicación continua de espacios topológicos. Según (1.3.1), tendremos el correspondiente morfismo entre las categorías topológicas asociadas: $T(f)\colon (\bar{Y}, \bar{\mathcal{T}}) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{\pi})$; este a su vez inducirá funtores $T(f)^*$, que notaremos f_*, y $T(f)_*$, que notaremos f^*, entre las correspondientes categorías de prehaces.

Si $F \in Ab^{\bar{X}^{o}}$ y $p \in X$, se tiene el diagrama conmutativo de funtores:

$$\begin{tikzcd}
(\bar{Y}_{f(p)}, \bar{\Omega}_{f(p)}) \arrow[rr] \arrow[drr, "f_*F"'] & & (\bar{X}_p, \bar{\mathcal{T}}_p) \arrow[d, "F"] \\
& & Ab
\end{tikzcd}$$

que induce, de forma natural, por paso a colímites, un morfismo:
$f_p\colon (f_*F)_{f(p)} \longrightarrow F_p$.

El proceso es claramente funtorial, teniéndose que $(gof)_p = g_{f(p)} o f_p$, para g,f aplicaciones continuas entre espacios topológicos de composición definida.

(1.3.10) LEMA

Sea F un haz sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, si $F_p=0$ para todo p de X, entonces F=0.

DEMOSTRACION

Veamos que $F(U)=0$ para todo abierto $U \subseteq X$.

Sea $s \in F(U)$, ya que $F_p=0$ para todo p de U, la clase de s en F_p, que notaremos por s_p, será cero para todo $p \in U$.

Pero si $s_p=0$, existirá un abierto U_p tal que $p \in U_p \subset U$, y tal que $F(U_p \longrightarrow U)(s)=0$.

Haciendo lo mismo para cada p de U, obtenemos un recubrimiento $\{U_p \longrightarrow U\}_{p \in U} \in \bar{\mathcal{T}}$, de U , verificándose que $F(U_p \longrightarrow U)(s)=0$ para cada p. Por ser F un haz, esto implica que s=0.

Como ello es cierto para todo s F(U), entonces F(U)=0. Por tanto F=0.

(1.3.11) PROPOSICION

Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión de haces, con valores en Ab, sobre un espacio topológico (X, τ).

Son equivalentes:

(i) la sucesión es exacta

(ii) la sucesión $0 \longrightarrow F'_p \longrightarrow F_p \longrightarrow F''_p \longrightarrow 0$ es exacta, para todo $p \in X$.

DEMOSTRACION

(i) $\Rightarrow$ (ii) Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea N el haz núcleo del morfismo $F' \longrightarrow F$, y G el haz conúcleo del morfismo $F \longrightarrow F''$. Tenemos entoces la sucesión

$N \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow G$, y por tanto para cada $p \in X$, la sucesión

$N_p \longrightarrow F'_p \longrightarrow F_p \longrightarrow F''_p \longrightarrow G_p$.

Pero, por hipótesis, $N_p = G_p = 0$ para todo $p \in X$, por tanto $N=G=0$. Luego

$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es exacta en los extremos.

Por un razonamiento análogo, la sucesión es también exacta en el centro, y por tanto es una sucesión exacta corta, c.q.d.

(1.3.12) PROPOSICION

Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto cualquiera suyo. Sea $j:(Y,\tau|Y) \longrightarrow (X, \tau)$ la inclusión, y sea $F \in S(\bar{Y}, \overline{\tau|Y})$.Entonces,

$$(j_*F)_p = \begin{cases} F_p & \text{si } p \in Y \\ 0 & \text{si } p \in X-Ad(Y) \end{cases}$$

donde Ad(Y)= adherencia de Y.

DEMOSTRACION

Sea $p \in X$, $(j_*F)_p = \varinjlim_{p \in U} (j_*F)(U) = \varinjlim_{p \in U} F(U \cap Y)$.

Si $p \in Y$, el conjunto $\{U \cap Y \ / \ p \in U\}$ recorre todos los entornos de p en $(Y, \tau|Y)$, y así $(j_*F)_p = F_p$.

Si $p \in X-Ad(Y)$, entonces $p \notin Ad(Y)$ y por tanto existirá un abierto U con $p \in U$, y tal que $U \cap Y = \emptyset$. Así $F(U \cap Y)=0$, y $F_p = \varinjlim_{p \in U} F(U \cap Y) = F(\emptyset)=0$.

(1.3.13) COROLARIO

Sea (X, T) un espacio topológico y sea Y un subconjunto cerrado suyo. Sea $j: (Y, T|Y) \longrightarrow (X, T)$ la inclusión. Entonces el funtor $j_*: S(\bar{Y}, \overline{T|Y}) \longrightarrow (\bar{X}, \bar{T})$ es exacto.

DEMOSTRACION

Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en $S(\bar{Y}, \overline{T|Y})$, para ver que $0 \longrightarrow j_*F' \longrightarrow j_*F \longrightarrow j_*F'' \longrightarrow 0$ es exacta, por (1.3.11), basta ver que para cada $p \in X$, la sucesión $0 \longrightarrow (j_*F')_p \longrightarrow (j_*F)_p \longrightarrow (j_*F'')_p \longrightarrow 0$ es exacta.

Pero, por (1.3.12), si $p \in Y$ $(j_*F')_p = F'_p$, $(j_*F)_p = F_p$ y $(j_*F'')_p = F''_p$, y entonces la sucesión es exacta por serlo $0 \longrightarrow F'_p \longrightarrow F_p \longrightarrow F''_p \longrightarrow 0$. Si $p \notin Y = Ad(Y)$, entoces $(j_*F')_p = (j_*F)_p = (j_*F'')_p = 0$, y por tanto la sucesión es ,trivialmente, exacta.

(1.3.14) PROPOSICION

Sea (X, T) un espacio topológico, y sea $F \in Ab^{\bar{X}^\circ}$. Entonces $F_p = (sF)_p$, donde s es el funtor hacificación, definido en (1.1.7).

DEMOSTRACION

Sea $p \in X$, y sea $u_p: \{p\} \longrightarrow X$ la inclusión. Consideremos el funtor $u_p^*: Ab^{\bar{X}^\circ} \longrightarrow Ab^{\bar{p}^\circ}$; puesto que $Ab^{\bar{p}^\circ} \simeq S(\bar{p}, \overline{T|p})$, entonces u_p^* lleva haces en haces y por tanto, por (1.2.4), para todo $F \in Ab^{\bar{X}^\circ}$ se tiene que $su_p^* F \simeq u_p^* sF$.

Pero, según (1.2.1), $(u_p^*F)(p) = \varinjlim_{(U,\phi) \in I_p^{T(u_p)}} F(U)$. Pero si $(U, \phi) \in I_p^{T(u_p)}$ entonces $U \subseteq X$ es un abierto y $\phi: \{p\} \longrightarrow U \cap p$ es un morfismo en $\bar{p}$, o lo que es lo mismo, U es un abierto que contiene a p.

Así, $(u_p^*F)(p) = \varinjlim_{p \in U} F(U) = F_p$.

Por tanto, tenemos:

$F_p = (u_p^*F)(p) = (su_p^*F)(p) = (u_p^*sF)(p) = (sF)_p$, c.q.d.

(1.3.15) DEFINICION

Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $U\subseteq X$ un abierto, sea $F\in S(\bar{U},\overline{\tau|U})$. Definimos el haz extensión de F por cero fuera de U, que notaremospor $j_!(F)$, como la hacificación del prehaz dado por:

$$V \longmapsto \begin{cases} F(V), \text{ si } V\subseteq U \\ 0 \text{ , en cualquie otro caso.} \end{cases}$$

$j\colon U \longrightarrow X$ es la inclusión.

(1.3.16) PROPOSICION

Sea (X,τ) un espacio topológico y $U\subseteq X$ un abierto suyo, sea $j\colon (U,\tau|U) \longrightarrow (X,\tau)$ el morfismo inclusión. Consideremos el funtor $j^*\colon S(\bar{X},\bar{\tau}) \longrightarrow S(\bar{U},\overline{\tau|U})$.

Existe una situación de adjunción:

$$\begin{tikzcd} S(\bar{U},\overline{\tau|U}) \arrow[d, shift right, "j_!"'] \\ S(\bar{X},\bar{\tau}) \arrow[u, shift right, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACION

En principio veamos que el funtor $j^*\colon Ab^{\bar{X}^\circ} \longrightarrow Ab^{\bar{U}^\circ}$, lleva haces en haces. En efecto, sea $F\in Ab^{\bar{X}^\circ}$ y sea $V\subseteq U$ un abierto, entonces , por (1.2.1) y ya que $j^*=T(j)_*$ (1.3.9), $(j^*F)(V)= \varinjlim_{(W,\phi)\in I_V^{T(j)}} F(W)$.

Pero si $(W,\phi)\in I_V^{T(j)}$, entonces $W\subseteq X$ es un abierto y $\phi\colon V \longrightarrow W\cap U$ es un morfismo en $\bar{U}$, es decir, $V\subseteq W$ y ϕ es el morfismo inclusión. Por tanto $(V,1_V)\in I_V^{T(j)}$ y es, además, un objeto inicial de la categoría.

Así $(j^*F)(V)=F(V)$, y por tanto si F es un haz, también lo es j^*F; y ya que $(j^*F)(V)=F(V)$, para todo $V\subseteq U$, notaremos j^*F por $F|U$.

Llamemos $P_j\colon Ab^{\bar{U}^\circ} \longrightarrow Ab^{\bar{X}^\circ}$ al funtor tal que si $F\in Ab^{\bar{U}^\circ}$, entonces $P_j(F)$ viene definido por: $P_j(F)(V)=F(V)$, si $V\subseteq U$ y $P_j(F)(V)=0$, en cualquier otro caso, para V un abierto de X.

Veamos que tenemos, entonces, la siguiente situación de adjunción:

$$\begin{tikzcd} Ab^{\bar{U}^{\circ}} \arrow[d, shift right, "P_j"'] \\ Ab^{\bar{X}^{\circ}} \arrow[u, shift right, "|U"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $F \in Ab^{\bar{U}^{\circ}}$ y $G \in Ab^{\bar{X}^{\circ}}$, tenemos que demostrar que

$$\mathrm{Hom}(P_j F, G) \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(F, G|U) \quad (\simeq)$$

Sea $\tau \in \mathrm{Hom}(P_j F, G)$, definimos $p(\tau)$ como $p(\tau)_V = \tau_V : F(V) \longrightarrow G(V)$, para $V \subseteq U$.

Sea $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, G|U)$, definimos $q(\sigma)$ como $q(\sigma)_V = \sigma_V$: $F(V) \longrightarrow G(V)$, si $V \subseteq U$; y $q(\sigma)_V = 0$, en cualquier otro caso.

Trivialmente, estas aplicaciones son inversas una de la otra, y por tanto tenemos el isomorfismo.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & Ab^{\bar{U}^{\circ}} \arrow[dl, shift right, "s_U"'] \arrow[d, shift right, "P_j"'] \\ S(\bar{U}, \overline{T|U}) \arrow[ur, shift right, "i_U"'] \arrow[dr, shift left, "j_!"] & Ab^{\bar{X}^{\circ}} \arrow[u, shift right, "|U"'] \arrow[d, shift right, "s_X"'] \\ & S(\bar{X}, \bar{T}) \arrow[ul, shift left, "|U"] \arrow[u, shift right, "i_X"'] \end{tikzcd}$$

Sea $F \in S(\bar{U}, \overline{T|U})$ y $G \in S(\bar{X}, \bar{T})$, entonces:

$$\mathrm{Hom}_{S(\bar{U}, \overline{T|U})}(F, G|U) = \mathrm{Hom}_{S(\bar{U}, \overline{T|U})}(F, \mathrm{so}\ |U \mathrm{o} i_X(G)) \simeq \mathrm{Hom}_{Ab^{\bar{U}^{\circ}}}(i_U F, |U \mathrm{o} i_X(G))$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{Ab^{\bar{X}^{\circ}}}(P_j \mathrm{o} i_U F, i_X G) \simeq \mathrm{Hom}_{S(\bar{X}, \bar{T})}(sP_j i_U F, G) = \mathrm{Hom}_{S(\bar{X}, \bar{T})}(j_! F, G)$$

Por tanto el funtor $j_!$ es adjunto a idquierda al funtor $j^* = |U$, c.q.d.

(1.3.16) PROPOSICION

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea U X un abierto.Sea F $S(\bar{U}, \overline{T|U})$ entonces:

$$(j_! F)_p = \begin{cases} F_p, & \text{si } p \in U \\ 0, & \text{si } p \notin U \end{cases}$$

DEMOSTRACION

Por (1.3.14), $(j_! F)_p = (P_j F)_p$, entonces ya que $(P_j F)_p = \varinjlim_{p \in V} P_j F(V)$, tenemos:

Si $p \in U$, $\varinjlim_{p \in V} P_j F(V) = \varinjlim_{p \in V \subseteq U} F(V) = F_p$.

Si $p \notin U$, para todo abierto $V \subseteq X$ tal que $p \in V$, V no está contenido en U, y por tanto $P_j F(V) = 0$; luego $F_p = \varinjlim_{p \in V} P_j F(V) = 0$, c.q.d.

(1.3.17) COROLARIO

El funtor $j_! : S(\bar{U}, \overline{T|U}) \longrightarrow S(\bar{X}, \bar{T})$ es exacto.

DEMOSTRACION

Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en $S(\bar{U}, \overline{T|U})$. Por (1.3.11), para ver que

$$0 \longrightarrow j_! F' \longrightarrow j_! F \longrightarrow j_! F'' \longrightarrow 0$$

es exacta en $S(\bar{X}, \bar{T})$, basta demostrarlo sobre las fibras.

Si $p \in U$, por (1.3.16), $(j_! F')_p = F'_p$, $(j_! F)_p = F_p$ y $(j_! F'')_p = F''_p$; por tanto, $0 \longrightarrow (j_! F')_p \longrightarrow (j_! F)_p \longrightarrow (j_! F'')_p \longrightarrow 0$ es exacta por serlo la sucesión $0 \longrightarrow F'_p \longrightarrow F_p \longrightarrow F''_p \longrightarrow 0$.

Si $p \notin U$, entonces $(j_! F')_p = (j_! F)_p = (j_! F'')_p = 0$, y por tanto la sucesión es, trivialmente, exacta.

(1.3.18) PROPOSICION

Sea $J \in S(\bar{X}, \bar{T})$ un haz inyectivo, entonces $J|U \in S(\bar{U}, \overline{T|U})$ es inyectivo.

DEMOSTRACION

Ya que el funtor $j_!$ es exacto, (1.3.17), el funtor j^* tiene un adjunto a idquierda exacto, y por tanto $|U = j^*$ preserva inyectivos.

2. ESQUEMAS Y HACES DE MODULOS=

2.1 ESQUEMAS AFINES.

(2.1.1) DEFINICION

Un espacio anillado es un par (X,Θ_X) consistente en un espacio topológico X, y un haz de anillos Θ_X sobre X.

Un morfismo de espacios anillados de (X,Θ_X) a (Y,Θ_Y) es un par $(f,f^{\#})$, donde $f\colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y $f^{\#}\colon \Theta_Y \longrightarrow f_*\Theta_X$ es un morfismo de haces de anillos sobre Y; (f_* es el funtor definido en (1.3.9).

A la categoría cuyos objetos son los espacios anillados, y cuyos morfismos son los morfismos de espacios anillados,la llamaremos categoría de espacios anillados.

(2.1.2) DEFINICION

Un espacio anillado (X,Θ_X) es un espacio localmente anillado, si para cada punto $p \in X$, la fibra de Θ_X en p: $\Theta_{X,p}$ es un anillo local.

Un morfismo de espacios localmente anillados es un morfismo de espacios anillados, $(f,f^{\#})\colon (X,\Theta_X) \longrightarrow (Y,\Theta_Y)$, tal que para cada punto $p \in X$ el morfismo inducido:

$$\begin{tikzcd}
\Theta_{Y,f(p)} \arrow[rr, "f^{\#}_p"] \arrow[dr] & & \Theta_{X,p} \\
& (f_*\Theta_X)_{f(p)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

que es la composición del morfismo de haces $f^{\#}$, (1.3.8), seguido del morfismo inducido por la aplicación continua f,(1.3.9), es un morfismo local de anillos locales; esto es, la imagen inversa por el morfismo $f^{\#}_p$ del ideal máximal de $\Theta_{X,p}$, es el ideal máximal de $\Theta_{Y,f(p)}$.

Notaremos por $\mathcal{L}$, a la categoría de espacios localmente anillados.

(2.1.3) Dado un anillo conmutativo y unitario A, denotaremos (A,T_A) a la categoría topológica correspondiente al espacio topológico (Spec(A),Zariski)

Definimos un haz, con valores en la categoría de anillos, sobre Spec(A) como sigue:

(2.1.4) DEFINICION

Dado un anillo conmutativo y unitario A, a cada abierto $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ le asociamos el anillo $\theta_A(U)$ consistente en el conjunto de las aplicaciones $s: U \longrightarrow \bigsqcup_{P \in U} A_P$, tal que $s(P) \in A_P$ para todo $P \in U$, y tal que para cada $P \in U$, existe un entorno V de P contenido en U, y existen elementos $a, f \in A$, de forma que para cada $Q \in V$, y $s(Q) = \frac{a}{f}$ en A_Q.

Es claro que la suma y producto de dos aplicaciones de esta forma, es una aplicación de tal forma; el elemento unidad es el que lleva cada $P \in U$ en el uno de A_P. Así $\theta_A(U)$ es un anillo conmutativo con elemento unidad.

Si $V \subseteq U$, existe un obvio morfismo restricción $\theta_A(U) \longrightarrow \theta_A(V)$, y θ_A es un haz sobre Spec(A).

(2.1.5) PROPOSICION

Sea A un anillo conmutativo.

(a) Para cualquier $P \in \mathrm{Spec}(A)$, la fibra de θ_A en P: $\theta_{A,P}$, es isomorfa al anillo local A_P.

(b) Para cada elemento $f \in A$, considerando el abierto básico $D(f) = \mathrm{Spec}(A) - V(f)$, se verifica que el anillo $\theta_A(D(f))$ es isomorfo al anillo localizado A_f.

DEMOSTRACION

(|17|, proposición 2.2, pág 71).

(2.1.6) Como consecuencia de (2.1.5 (a)), para cada anillo conmutativo y unitario, $(\mathrm{Spec}(A), \theta_A)$ es un espacio localmente anillado. Esto nos premite definir un funtor:

$$H: \text{Anillos} \longrightarrow \mathcal{L}$$

dado por: $H(A) = (\mathrm{Spec}(A), \theta_A)$. Si $f: A \longrightarrow B$ es un morfismo de anillos, este nos define un morfismo de espacios localmente anillados

$$H(\pounds)=(f,f^{\#}): (\mathrm{Spec}(B),\theta_B) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A),\ \theta_A)$$

donde $f: \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es la aplicación continua dada por: $f(Q)= \pounds^{-1}(Q)$, y $f^{\#}: \theta_A \longrightarrow f_*\theta_B$ viene definido como sigue:

Dado $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ abierto $f^{\#}_U: \theta_A(U) \longrightarrow f_*\theta_B(U) = \theta_B(f^{-1}(U))$, entonces si $s \in \theta_A(U)$, s será una aplicación $s: U \longrightarrow \bigsqcup_{P\in U} A_P$, y $f^{\#}_U(s)$ ha de ser una aplicación $f^{-1}(U) \longrightarrow \bigsqcup_{Q\in f^{-1}(U)} B_Q$.

Si $Q \in f^{-1}(U)$ entonces $f(Q) \in U$, o lo que es lo mismo, $\pounds^{-1}(Q) \in U$. Definimos entonces $f^{\#}_U(s)(Q)= \pounds_Q(s(\pounds^{-1}(Q)))$, donde $\pounds_Q: A_{\pounds^{-1}(Q)} \longrightarrow B_Q$ es el homomorfismo local de anillos locales inducido por $\pounds: A \longrightarrow B$.

Ya que $f^{\#}_Q: \theta_{A,f(Q)} \longrightarrow \theta_{B,Q}$ coincide con $\pounds_Q$, pues por (2.1.5(a)) $\theta_{A,f(Q)}= A_{\pounds^{-1}(Q)}$ y $\theta_{B,Q}= B_Q$, entonces es un homomorfismo local de anillos locales, y por tanto $(f,f^{\#})$ es un morfismo de espacios localmente anillados.

(2.1.7) PROPOSICION

El funtor H es pleno

DEMOSTRACION

Para demostrarlo veamos que si A y B son anillos conmutativos con elemento unidad, y $(f,f^{\#}): (\mathrm{Spec}(B),\theta_B) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A),\ \theta_A)$ es un morfismo de espacios localmente anillados, entonces existe un morfismo de anillos $\pounds: A \longrightarrow B$ tal que $H(\pounds)= (f,f^{\#})$.

A partir del morfismo de haces de anillos sobre Spec(A): $f^{\#}: \theta_A \longrightarrow f_*\theta_B$, obtenemos el morfismo de anillos $f^{\#}_{\mathrm{Spec}(A)}= \pounds: A \longrightarrow B$ ya que, por (2.1.5(b)), $\theta_A(\mathrm{Spec}(A)) \simeq A$ y $f_*\theta_B(\mathrm{Spec}(A))= \theta_B(f^{-1}(\mathrm{Spec}(A)))= O_B(\mathrm{Spec}(B)) \simeq B$. Veamos que £ es el morfismo de anillos que buscamos.

En efecto, para cada $Q \in \mathrm{Spec}(B)$, el morfismo $f^{\#}_Q: \theta_{A,f(Q)} \longrightarrow \theta_{B,Q}$ debe ser compatible con £ y con los morfismos de localización, esto es, el siguiente diagrama ha de ser conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pounds} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f(Q)} & \xrightarrow{f^{\#}_Q} & B_Q \end{array}$$

Puesto que $f^{\#}_Q$ es un homomorfismo local de anillos locales, entonces $\pounds^{-1}(Q)= f(Q)$, lo que muestra que f coincide con la inducida por £.Ahora es inmediato que $f^{\#}$ es también la inducida por £.

(2.1.8) DEFINICION

A la subcategoría plena de la categoría de espacios localmente anillados, de la forma H(A), para A un anillo conmutativo y unitario, la llamaremos la categoría de esquemas afines.

2.2 ESQUEMAS

(2.2.1) DEFINICION

Un esquema es un espacio localmente anillado (X,θ_X), en el que cada punto tiene un entorno U tal que el espacio topológico U junto con el haz restringido $\theta_X|U$, es un esquema afín.

Un morfismo de esquemas es un morfismo como espacios localmente anillados.

Definimos la categoría de esquemas como la subcategoría plena de la categpría de espacios localmente anillados, cuyos objetos son los esquemas.

Veamos que en la categoría de esquemas existen productos fibrados. para ello necesitamos los siguientes lemas:

(2.2.2) LEMA

Sea (X, T) un espacio topológico y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X.

Supongamos dado, para cada $i \in I$, un haz $F_i \in S(\bar{U}_i, \overline{T|U_i})$ y, para cada $i,j \in I$, isomorfismos $\pounds_{ij}: F_i|U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} F_j|U_i \cap U_j$, de forma que,para cada

$i,j,k \in I$, $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$, y $f_{ii} = 1$ para todo $i \in I$.

Entonces existe un ùnico haz $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$ unto con isomorfismos $\rho_i : F|U_i \xrightarrow{\sim} F_i$ tal que, para cada $i,j \in I$, $\rho_j = f_{ij} \circ \rho_i$ sobre $U_i \cap U_j$.

DEMOSTRACION

Sea $B = \{ U \subseteq X /\ U$ es abierto y existe $i \in I$ con $U \subseteq U_i \}$. Como $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de X entonces B es una base de la topología de X. Definimos un funtor $G: B \longrightarrow Ab$ como sigue: Para $U \in B$ sea U_i tal que $U \subseteq U_i$, entonces $G(U) = F_i(U)$.

G está bien definido, pues si $U \subseteq U_j$ entonces $U \subseteq U_i \cap U_j$ y $F_i(U) \overset{f_{ij}}{\cong} F_j(U)$

Sea, ahora, $V \subseteq U$ y sea U_i tal que $V \subseteq U \subseteq U_i$; si no existe j tal que $V \subset U_j \subset U \subset U_i$ entonces definimos $G(V \longrightarrow U) = g_V^U = f_{iV}^U = F_i(V \longrightarrow U)$; si existe j tal que $V \subset U_j \subset U \subset U_i$ entonces definimos $g_V^U = f_{ij} \circ f_{iV}^U$.

Veamos que G es un funtor: Evidentemente $G(1_U) = 1_{G(U)}$. Sea entonces $W \subset V \subset U$, y consideremos el caso más general en que $W \subseteq U_k$, $V \subseteq U_j$ y $U \subseteq U_i$. Entonces $g_W^U = f_{ik} \circ f_{iW}^U$. Ya que $W \subseteq U_i \cap U_j \cap U_k$ entonces $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ sobre W, por hipótesis, y por tanto tendremos:

$$g_W^U = f_{jk} \circ f_{ij} \circ f_{iW}^U = f_{jk} \circ f_{ij} \circ f_{iW}^V \circ f_{iV}^U = f_{jk} \circ f_{jW}^V \circ f_{ij} \circ f_{iV}^U =$$
$$= g_W^V \circ g_V^U .$$

Además G verifica: (1) Si $\{U_j\}_{j \in J} \subset B$ es un recubrimiento de $U \in B$ y $s \in G(U)$ es tal que $g_{U_j}^U(s) = 0$ para todo $j \in J$, entonces $s = 0$.

(2) Si $s_j \in G(U_j)$, $j \in J$, son tales que $g_{U_j \cap U_{j'}}^{U_j}(s_j) = g_{U_j \cap U_{j'}}^{U_{j'}}(s_{j'})$, para cualesquiera $j,j' \in J$, entonces existe $s \in G(U)$ tal que $g_{U_j}^U(s) = s_j$, para todo $j \in J$.

Estas dos propiedades se demuestran fácilmente, sin más que tener en en cuenta que los F_i son haces.

Definimos un prehaz, con valores en Ab, sobre X, como sigue: Dado $U \subseteq X$ un abierto

$$F(U) = \varprojlim_{\substack{V \subseteq U \\ V \in B}} G(V)$$

y si $W \subseteq U$, entonces $F(U) \longrightarrow F(W)$ será el único morfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[rr, dash] \arrow[dr] & & F(W) \arrow[dl] \\ & G(V) & \end{tikzcd}$$

para $V \subseteq W \subseteq U$.

Se demuestra, fácilmente, que F es un haz, basándose en que G verifica (1) y (2). Veamos que existen isomorfismos $\rho_i : F|U_i \longrightarrow F_i$.

Sea $U \subseteq U_i$, entonces $U \in B$ y por tanto $F|U_i(U)=F(U)=G(U)=F_i(U)$; luego $(\rho_i)_U = 1_{F_i(U)}$.

Si existe $j \in I$ tal que $U \subseteq U_j$, entonces $F|U_i(U)=F_j(U) \overset{\text{£}_{ij}^{-1}}{\simeq} F_i(U)$; luego $(\rho_i)_U = \text{£}_{ij}^{-1}$.

Trivialmente, $\rho_j = \text{£}_{ij} \circ \rho_i$ sobre $U_i \cap U_j$, c.q.d.

(2.2.3) LEMA

Sea $\{(X_i, \theta_i)\}_{i \in I}$ una familia de esquemas. Para cada $i \neq j$ supongamos dado un subconjunto abierto $U_{ij} \subseteq X_i$, y consideremos sobre el la estructura de esquema $\theta_i|U_{ij}$. Supongamos, también, que para cada $i \neq j$ existe un isomorfismo de esquemas $\text{£}_{ij} : (U_{ij}, \theta_i|U_{ij}) \longrightarrow (U_{ji}, \theta_j|U_{ji})$ de forma que:

(1) $\text{£}_{ji} = \text{£}_{ij}^{-1}$, para todo i,j.

(2) $\text{£}_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ y $\text{£}_{ik} = \text{£}_{jk} \circ \text{£}_{ij}$ sobre $U_{ij} \cap U_{ik}$ para todo i,j,k.

Entonces existe un esquema (X, θ_X), junto con morfismos $\psi_i : (X_i, \theta_i) \longrightarrow (X, \theta_X)$, para todo i, tal que:

(1) ψ_i es un isomorfismo de X_i en un subconjunto abierto de X con la estructura de esquema restringida.

(2) $X = \bigcup_i \psi_i(X_i)$.

(3) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$.

(4) $\psi_i = \psi_j \circ \pounds_{ij}$ sobre U_{ij} .

En el caso en que los U_{ij} sean vacios, entonces $X = \coprod X_i$.

DEMOSTRACION

Consideremos la unión disjunta de los espacios topológicos $X_i : \bigcup_i X_i$, y en ella definimos una relación de equivalencia tal que $x_i \sim \pounds_{ij}(x_i)$.

Llamamos $X = \bigcup_i X_i/\sim$, y definimos $\psi_i : X_i \longrightarrow X$ como la composición $X_i \longrightarrow \bigcup_i X_i \longrightarrow X$. En X consideramos la topología final para los morfismos $\{ \psi_i : X_i \longrightarrow X \}$.

Veamos (3), es decir, $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$.

En efecto, si $x \in \psi_i(U_{ij})$, entonces existe $y \in U_{ij}$ tal que $\psi_i(y) = x$. Sea $z = \pounds_{ij}(y) \in U_{ji}$, entonces $\psi_j(z) = \psi_j \circ \pounds_{ij}(y) = x$, ya que $y \sim \pounds_{ij}(y)$. Así $x \in \psi_j(X_j)$ y por tanto $x \in \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$.

Sea, ahora, $x \in \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$, entonces $x = \psi_i(y)$, para $y \in X_i$, y $x = \psi_j(z)$, para $z \in X_j$, de donde $\psi_i(y) = \psi_j(z)$ y por tanto $y \sim z$, es decir, $z = \pounds_{ij}(y)$ con lo que $y \in U_{ij}$ y concluimos con $x \in \psi_i(U_{ij})$.

Ya que (3) es cierto, trivialmente se deduce que $\psi_i = \psi_j \circ \pounds_{ij}$ sobre U_{ij}; que es (4).

Los morfismos ψ_i son monomorfismos, ya que si $\psi_i(x_i) = \psi_i(x_i')$ entonces $x_i \sim x_i'$ lo que implica que $x_i = x_i'$ ya que $x_i, x_i' \in X_i$ y teniendo en cuenta la definición de la relación de equivalencia.

Por tanto ψ_i es un isomorfismo de X_i sobre su imagen $Y_i = \psi_i(X_i)$. Sobre cada Y_i consideramos la estructura de esquema $\Theta_{Y_i} = (\psi_i)_*(\Theta_i)$. Tenemos entonces que cada Y_i es un abierto de X ya que los morfismos ψ_i son abiertos ; además $\{ Y_i \}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de X y sobre cada uno de ellos tenemos definido un haz con valores en la categoría de anillos tal que :

$$\mathcal{O}_{Y_i}|Y_i \cap Y_j \overset{l_{ij}}{\simeq} \mathcal{O}_{Y_j}|Y_i \cap Y_j$$

y verificándose que, para cada i,j,k, $l_{ik} = l_{jk} \circ l_{ij}$ sobre $Y_i \cap Y_j \cap Y_k$.

Veamos esto último. Ya que $Y_i \cap Y_j = \psi_i(U_{ij})$ y $U_{ij} \simeq U_{ji}$, entonces:

$$\mathcal{O}_{Y_i}|Y_i \cap Y_j = (\psi_i)_*(\mathcal{O}_i)|\psi_i(U_{ij}) = (\psi_i)_*(\mathcal{O}_i|U_{ij}) = (\psi_j \circ f_{ij})_*(\mathcal{O}_i|U_{ij}) =$$

$$= (\psi_j)_*(f_{ij})_*(\mathcal{O}_i|U_{ij}) \simeq (\psi_j)_*(\mathcal{O}_j|U_{ji}) = (\psi_j)_*(\mathcal{O}_j)|Y_i \cap Y_j = \mathcal{O}_{Y_j}|Y_i \cap Y_j.$$

Además ya que $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ sobre $U_{ij} \cap U_{ik}$, entonces $l_{ik} = l_{jk} \circ l_{ij}$ sobre $Y_i \cap Y_j \cap Y_k = \psi_i(U_{ij} \cap U_{ik})$.

Entonces, por (2.2.2), podemos definir un haz de anillos $\mathcal{O}_X$ sobre X junto con isomorfismos $l_i: \mathcal{O}_X|Y_i \longrightarrow (\psi_i)_*(\mathcal{O}_i)$ tal que $l_j = l_{ij} \circ l_i$.

Entonces $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema y $\psi_i: (X_i,\mathcal{O}_i) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_X)$ es un morfismo de esquemas tal que $(X_i,\mathcal{O}_i) \simeq (Y_i, \mathcal{O}_X|Y_i)$, para todo $i \in I$.

A este esquema $(X;\mathcal{O}_X)$ lo llamaremos esquema unión de los esquemas $\{(X_i,\mathcal{O}_i)\}_{i \in I}$, vía los isomorfismos f_{ij}.

(2.2.4) TEOREMA

En la categoría de esquemas existen productos fibrados. Esta categoría tiene, además, objeto final.

DEMOSTRACION

Veamos primero que existen productos fibrados. La idea es construir el producto para esquemas afines y entonces unir. Procedemos en cinco pasos.

Paso 1:

Supongamos que X = Spec(A), Y = Spec(B) y S = Spec(R), con X e Y esquemas sobre S. Entonces , por ser X e Y esquemas sobre S, A y B son R- álgebras pues los morfismos Spec(A) $\longrightarrow$ Spec(R) y Spec(B) $\longrightarrow$ Spec(R) definen morfismos R $\longrightarrow$ A y R $\longrightarrow$ B (ver (2.1.7)).

Veamos, entonces, que $X \underset{S}{\times} Y = \mathrm{Spec}(A \underset{R}{\otimes} B)$.

En efecto, en principio los morfismos $A \longrightarrow A \underset{R}{\otimes} B$, $B \longrightarrow A \underset{R}{\otimes} B$, definen morfismos de esquemas: $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \xrightarrow{p_1} \operatorname{Spec}(A)$ y $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \xrightarrow{p_2} \operatorname{Spec}(B)$, que serán las proyecciones.

Sea (Z,Θ_Z) un esquema cualquiera, ya que para cualquier anillo C, $\operatorname{Hom}_{\text{Esquemas}}(Z, \operatorname{Spec}(C)) \simeq \operatorname{Hom}_{\text{Anillos}}(C,\Theta_Z(Z))$, entonces dar un morfismo de Z a $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ es lo mismo que dar un morfismo de anillos de $A \otimes_R B$ en $\Theta_Z(Z)$, y esto a su vez es lo mismo que dar morfismos de A y B en $\Theta_Z(Z)$ tal que el cuadrado siguiente sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & \Theta_Z(Z)
\end{tikzcd}$$

Por tanto dar un morfismo de Z en $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ es lo mismo que dar morfismos de Z en Spec(A) y en Spec(B) tal que

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(B) \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}(A) \arrow[r] & \operatorname{Spec}(R)
\end{tikzcd}$$

Luego $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B) = X \times_S Y$.

<u>Paso 2</u>

Sean X e Y esquemas sobre un esquema S. Si $U \subseteq X$ es un subconjunto abierto y si $X \times_S Y$ existe, entonces $p_1^{-1}(U) = U \times_S Y \subseteq X \times_S Y$. Donde $p_1 : X \times_S Y \longrightarrow X$ es la primera proyección.

En efecto, en principio consideramos en U la estructura de esquema inducida: $(U,\Theta_X|U)$, que es evidentemente un esquema sobre S: $(U,\Theta_X|U) \xrightarrow{i} (X,\Theta_X) \longrightarrow (S,\Theta_S)$.

Consideremos entonces la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & p_1^{-1}(U) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
U \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

Entonces
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

es conmutativo; y por tanto existe un único $r: Z \longrightarrow X \underset{S}{\times} Y$ tal que $p_1 o\ r = i\ o\ f$ y $p_2 o\ r = g$.

Ya que $f(Z) \subseteq U$ entonces $p_1 r(Z) \subseteq f(Z) \subseteq U$ de donde $r(Z) \subseteq p_1^{-1}(U)$. Luego $r: Z \longrightarrow p_1^{-1}(U)$ es tal que $p_1 r = f$ y $p_2 r = g$ y además es único. Por tanto $p_1^{-1}(U) = U \underset{S}{\times} Y$.

Paso 3

Supongamos dados X e Y esquemas sobre S, y sea $\{X_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos de X, tal que , para cada i, $X_i \underset{S}{\times} Y$ existe. Entonces $X \underset{S}{\times} Y$ existe.

Sea $X_{ij} = X_i \cap X_j$ que será un abierto contenido en X_i, y por tanto, por el paso 2, $p_i^{-1}(X_i \cap X_j) = U_{ij} = X_{ij} \underset{S}{\times} Y$, donde $p_i: X_i \underset{S}{\times} Y \longrightarrow X_i$ es la proyección.

De igual forma, $p_j^{-1}(X_i \cap X_j) = U_{ji} = X_{ij} \underset{S}{\times} Y$, donde p_j es la proyección de $X_j \underset{S}{\times} Y$ en X_j.

Considerando el diagrama:
$$\begin{tikzcd} U_{ij} = X_{ij} \underset{S}{\times} Y \arrow[r, dashed, "f_{ij}"] \arrow[dr, "p_i"'] & U_{ji} = X_{ij} \underset{S}{\times} Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_j"] & Y \arrow[d] \\ & X_{ij} \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

entonces existe un único $f_{ij}: U_{ij} \longrightarrow U_{ji}$, que conmuta con todas las proyecciones. De la misma forma existe un único $f_{ji}: U_{ji} \longrightarrow U_{ij}$ que conmuta con todas las proyecciones. Entonces f_{ij} es un isomorfismo con inversa $f_{ij}^{-1} = f_{ji}$.

Estos isomorfismos verifican: $f_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{ik}$. En efecto,

$U_{ij} \cap U_{ik} = p_i^{-1}(X_{ij}) \cap p_i^{-1}(X_{ik}) = p_i^{-1}(X_{ij} \cap X_{ik}) = p_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)$

$U_{ji} \cap U_{jk} = p_j^{-1}(X_{ij}) \cap p_j^{-1}(X_{jk}) = p_j^{-1}(X_{ij} \cap X_{jk}) = p_j^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)$.

Entonces, $\pounds_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = (X_i \cap X_j \cap X_k) \times_S Y \simeq U_{ji} \cap U_{jk}$.

Además $\pounds_{ik} = \pounds_{jk} \circ \pounds_{ij}$ sobre $U_{ij} \cap U_{ik}$. Por tanto, por (2.2.3), podemos unir los esquemas $X_i \times_S Y$ vía los isomorfismos $\pounds_{ij}$, y obtenemos un esquema $X \times_S Y$ tal que $X_i \times_S Y$ es isomorfo a un subconjunto abierto de $X \times_S Y$.

Veamos que $X \times_S Y$ es el producto. Definimos $p_1 : X \times_S Y \longrightarrow X$ como la unión de los morfismos $X_i \times_S Y \xrightarrow{p_i} X_i \xrightarrow{f_i} X$, donde f_i es la inclusión; y $p_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y$ como la unión de los morfismos $X_i \times_S Y \xrightarrow{p_2} Y$.(*)

Sea Z un esquema cualquiera y $f: Z \longrightarrow X$, $g: Z \longrightarrow Y$ morfismos tales que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Sea $Z_i = f^{-1}(X_i)$, que es un abierto en Z. Entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd} Z_i \arrow[r, "g|Z_i"] \arrow[d, "f|Z_i"'] & Y \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y por tanto existe un único $r_i : Z_i \longrightarrow X_i \times_S Y$ tal que $p_i r_i = f|Z_i$ y $p_2 r_i = g|Z_i$. ya que $Z_i \cap Z_j = f^{-1}(X_i \cap X_j) = f^{-1}(X_{ij})$, entonces $r_i|Z_i \cap Z_j = r_j|Z_i \cap Z_j$; luego podemos unir los morfismos r_i, y obtenemos un morfismo $r: Z \longrightarrow X \times_S Y$ tal que $p_1 r = f$ y $p_2 r = g$. La unicidad de r es clara por la unicidad de los r_i.

(*) Al igual que hemos unido haces y esquemas podemos unir morfismos, esto es , si (X, θ_X) e (Y, θ_Y) son esquemas, dar un morfismo $f: X \longrightarrow Y$ es equivalente a dar un recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de X junto con morfismos $f_i : (U_i, \theta_X|U_i) \longrightarrow (Y, \theta_Y)$ tal que $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$, para todo i,j.

Paso 4

Sabemos, por el paso 1, que si X,Y y S son esquemas afines entonces $X \times_S Y$ existe. Si S e Y son afines y X es cualquiera, entonces recubrimos X por abiertos afines $\{U_i\}_{i \in I}$. Por el paso 1, $U_i \times_S Y$ existe para todo i y por tanto, por el paso 3, existe $X \times_S Y$.

Sea S afín y X e Y cualesquiera. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos afines de X, y $\{V_j\}_{j \in J}$ un recubrimiento por abiertos afines de Y. Sea $j \in J$ fijo pero arbitrario, entonces para cada $i \in I$ existe $U_i \times_S V_j$ y por tanto, por el paso 3, existe $X \times_S V_j$. Como es cierto para cada $j \in J$, de nuevo por el paso 3, existe $X \times_S Y$.

Paso 5

Por último sean X,Y y S esquemas arbitrarios y sea $q\colon X \longrightarrow S$ y $r\colon Y \longrightarrow S$.

Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos afines de S y $X_i = q^{-1}(S_i)$ $Y_i = r^{-1}(S_i)$. Entonces, por el paso 4, existe $X_i \times_{S_i} Y_i$. Pero

$X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y_i$, como fácilmente se puede ver. Entonces ya que $\{X_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de X, por el paso 3, existe $X \times_S Y_i$ para todo $i \in I$. Como, también $\{Y_j\}_{j \in J}$ es un recubrimiento por abiertos de Y, de nuevo por el paso 3, existe $X \times_S Y$, c.q.d.

Veamos, ahora, que $(\mathrm{Spec}(Z), \mathcal{O}_Z)$ es un objeto final en la categoría de esquemas. Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un esquema cualquiera, y $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}_{i \in I}$ un recubrimiento por abiertos afines de X. Ya que Z es un objeto inicial en la categoría de anillos, tenemos entonces definido un morfismo $Z \longrightarrow A_i$ para todo $i \in I$, que dará lugar a un morfismo $f_i\colon \mathrm{Spec}(A_i)=U_i \longrightarrow \mathrm{Spec}(Z)$.

Ya que $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$ entonces podemos unir los morfismo y obtenemos un único morfismo $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(Z),\mathcal{O}_Z)$.

(2.2.5) DEFINICIONES

Un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ es <u>conexo</u> si X es un espacio topológico conexo. Es <u>irreducible</u> si X es irreducible.

Un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ es <u>reducido</u> si para cada conjunto abierto U de X el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ no tiene elementos nilpotentes. Es <u>íntegro</u> si $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio de integridad.

Un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ es <u>localmente noetheriano</u> si X puede recubrirse por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que cada eaquema $(U_i,\mathcal{O}_X|U_i) \cong (\mathrm{Spec}(A_i), \mathcal{O}_{A_i})$ donde A_i es un anillo noetheriano.

Un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ es <u>noetheriano</u> si es localmente noetheriano y X es compacto. Si $(X,\mathcal{O}_X)$ es noetheriano entonces X es un espacio topológico noetheriano, pero no inversamente.

Notemos que la última definición no requiere que cada subconjunto abierto U de X que sea afín, sea el espectro de un anillo noetheriano.

Amenudo encontraremos situaciones similares en definiciones propias de un esquema o de un morfismo de esquemas; así daremos la demostración de la naturaleza local de la propiedad de noetheriano para ilustrar este tipo de situación.

(2.2.6) PROPOSICION

Un eaquema $(X,\mathcal{O}_X)$ es localment noetheriano si y sólo si para cada subconjunto abierto afín U = Dpec(A), de X, A es un anillo noetheriano. En particular, un esquema afín $(\mathrm{Spec}(A),\mathcal{O}_A)$ es un esquema noetheriano si y sólo si el anillo A es noetheriano.

DEMOSTRACION

La suficiencia es trivial. Veamos la necesidad.

Tenemos que ver que si $(X,\mathcal{O}_X)$ es un esquema localmente noetheriano,y si U =Spec(A) es un abierto afín de X, entonces A es un anillo noetheriano.

Primero notemos que si B es un anillo noetheriano, así lo es cualquier localización suya: B_f. Luego, ya que los subconjuntos abiertos $D(f) \cong \mathrm{Spec}(B_f)$ forman una base para la topología de Spec(B) y ya que

$(X,\mathcal{O}_X)$ es localmente noetheriano, entonces X tiene una base de topología consistente en abiertos afines que son espectros de anillos noetherianos.

En particular, nuestro conjunto abierto U = Spec(A) puede recubrirse por abiertos afines que son espectros de anillos noetherianos.

Así nos hemos reducido a probar el siguiente enunciado:

" Sea (Spec(A), $\mathcal{O}_A$) un esquema afín tal que Spec(A) puede recubrirse por subconjuntos abiertos afines que son espectros de anillos noetherianos.

Entonces A es noetheriano."

En efecto, sea U = Spec(B) un subconjunto abierto afín de Spec(A), con B noetheriano. Entonces existe $f \in A$ tal que $D(f) \subseteq U$. Sea $\bar{f}$ la imagen de f en B, entonces $A_f \cong B_{\bar{f}}$ y por tanto A_f es noetheriano.

Así, podemos recubrir Spec(A) por subconjuntos abiertos afines $D(f) \cong \mathrm{Spec}(A_f)$, con A_f noetheriano. Ya que Spec(A) es compacto podemos recubrirlo por un número finito de tales abiertos.

Tenemos, entonces, un anillo A y un número finito de elementos de A que generan el ideal unidad, y tal que cada localización A_{f_i} es noetheriano entonces A es noetheriano; c.q.d.

(2.2.7) DEFINICION

Un <u>subesquema abierto</u> de un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$, es un esquema $(U,\mathcal{O}_U)$, donde U es un subconjunto abierto de X y $\mathcal{O}_U$ es isomorfo a $\mathcal{O}_X|U$. Una <u>inmersión abierta</u> es un morfismo de esquemas $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ que induce un isomorfismo de $(X,\mathcal{O}_X)$ en un subesquema abierto de Y.

Un <u>subesquema cerrado</u> de un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$, es un esquema $(Y,\mathcal{O}_Y)$ junto con un morfismo $i\colon Y \longrightarrow X$, tal que Y es un subconjunto cerrado de X, i es el morfismo inclusión y el morfismo inducido $i^{\#}\colon \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y$, de haces sobre X, es sobreyectivo. Una <u>inmersión cerrada</u> es un morfismo de esquemas $f\colon (Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_X)$ que induce un isomorfismo de $(Y,\mathcal{O}_Y)$ en un subesquema cerrado de $(X,\mathcal{O}_X)$.

(2.2.8) Sea $(X,\mathcal{O}_X)$ un esquema, y sea Y un subconjunto cerrado de X. En general Y tendrá muchas estructuras posibles de subesquema cerrado; sin embargo, existe una que es "más pequeña" que cualquier otra, llamada la estructura de <u>subesquema cerrado inducida reducida</u>.

Si $(X,\theta_X) = (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$, entonces sea $P \subseteq A$ el ideal obtenido al intersecar todos los ideales primos que están en Y. Este es el mayor ideal para el cual $V(P)= Y$.

Consideramos el esquema $(\mathrm{Spec}(A/P), \theta_{A/P})$. El homomorfismo de anillos $A \longrightarrow A/P$ induce un homomorfismo de esquemas $(f,f^{\#})$:
$(f,f^{\#})$: $(\mathrm{Spec}(A/P),\theta_{A/P}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$; este morfismo es una inmersión cerrada ya que f es un homeomorfismo de Spec(A/P) sobre V(P) = Y; y el morfismo $f^{\#}$ es sobreyectiva por serlo sobre las fibras, como fácilmente se puede comprobar.

Entonces $f_*\theta_{A/P}= \theta_Y$ es la estructura de subesquema cerrado inducida reducida sobre Y.

Si (X,θ_X) es cualquier esquema, la estructura de subesquema cerrado inducida reducida sobre Y, O_Y, será tal que para cada abierto afín de X, U , $\theta_Y|Y\cap U$ sea precisamente la estructura de subesquema cerrado inducida reducida , definida para el caso afín, sobre $Y \cap U$ considerado como un subconjunto cerrado de U.

2.3 HACES DE MODULOS

(2.3.1) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un espacio anillado. Un <u>haz de θ_X- módulos</u> (o simplemente <u>un θ_X- módulo</u>) es un haz F sobre X tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, el grupo F(U) es un $\theta_X(U)$- módulo, y para cada inclusión de conjuntos abiertos $V \subseteq U$, el homomorfismo $F(U) \longrightarrow F(V)$ es compatible con la ectructura de módulo vía el homomorfismo de anillos $\theta_X(U) \longrightarrow \theta_X(V)$.

Un morfismo $F \longrightarrow G$ de θ_X- módulos es un morfismo de haces tal que para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, $F(U) \longrightarrow G(U)$ es un morfismo de $\theta_X(U)$- módulos.

Dado (X,θ_X) un espacio anillado, denotaremos la categoría de

θ_X- módulos por : $_{\theta_X} M$.

(2.3.2) DEFINICION

Sea (X, θ_X) un espacio anillado. Un θ_X- módulo F es libre si es isomorfo a una suma directa de copias de θ_X. Es localmente libre si X puede recubrirse por conjuntos abiertos U para los que $F|U$ es un $0_X|U$- módulo libre.

En el último caso, el rango de F sobre tal conjunto abierto es el número de copias de la estructura haz necesitada (finito o infinito). Si X es conexo, el rango de un haz localmente libre es el mismo en cualquier abierto.

Un haz localmente libre de rango uno se llama , también, un haz invertible.

(2.3.3) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un espacio anillado. Si F y G son dos θ_X- módulos, el prehaz:

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}_{0_X|U}(F|U, G|U)$$

es un haz, que se llamará el haz Hom y será denotado por $\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(F,G)$. Este haz es , también un θ_X- módulo.

Definimos el producto tensorial de F y G: $F \otimes_{\theta_X} G$, como el haz asociado al prehaz: $U \longmapsto F(U) \otimes_{0_X(U)} G(U)$. Es también un θ_X- módulo.

(2.3.4) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un espacio anillado y sea E un 0_X- módulo localmente libre de rango finito. Definimos el dual de E, denotado por $\tilde{E}$ como el θ_X- módulo $\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(E,\theta_X)$.

Se verifica, entonces:

(a) $(\tilde{E})^{\sim} \simeq E$.

(b) Para cualquier θ_X- módulo F, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(E,F) \simeq \tilde{E} \otimes_{\theta_X} F$.

(c) Para cualesquiera θ_X- módulos F,G, $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(E \otimes F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\theta_X}(F, \underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(E,G))$.

DEMOSTRACION

(a) Ya que la cuestión es local, podemos suponer que $E = \theta_X^n$. Entonces $\tilde{E} = \underline{Hom}_{\theta_X}(\theta_X^n, \theta_X) = \underline{Hom}_{\theta_X}(\theta_X, \theta_X)^n \simeq \theta_X^n$. Por tanto, $(\tilde{E})^{\sim} = \underline{Hom}_{\theta_X}(E, \theta_X) = \underline{Hom}_{\theta_X}(\theta_X^n, \theta_X) \simeq \theta_X^n = E$.

(b) Como la cuestión es local, podemos suponer que $E = \theta_X^n$; pero puesto que $\underline{Hom}_{\theta_X}(\theta_X^n, F) \simeq F^n$, podemos reducirnos al caso en que $E = \theta_X$ y este es trivial.

(c) De igual forma que en los casos anteriores, podemos suponer que $E = \theta_X^n$, con lo cual $E \otimes F \simeq F^n$ y $\underline{Hom}_{\theta_X}(\theta_X^n, G) \simeq G^n$. Entonces tenemos que ver que

$\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F^n, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\theta_X}(F, G^n)$.

Si $f: F^n \longrightarrow G$ definimos $\bar{f}: F \longrightarrow G^n$ tal que para cada $U \subseteq X$ $\bar{f}_U: F(U) \longrightarrow G(U)^n$ está dada por: $\bar{f}_U(s) = (f_U(s,0,..,0), \ldots\ldots, f_U(0,..,s))$. Si $\bar{f} = 0$ entonces $\bar{f}_U(s) = 0$ para todo $s \in F(U)$, y por tanto $f_U = 0$ ya que $f_U(s_1, \ldots, s_n) = f_U(s_1,0,..,0) \;\ldots\ldots\; f_U(0,\ldots,0,s_n)$. Así $f = 0$ y por tanto la aplicación definida es mónica.

Además, dado $g = (g_1, \ldots, g_n): F \longrightarrow G^n$, definimos $\tilde{g}: F^n \longrightarrow G$ tal que para cada $U \subseteq X$, $\tilde{g}_U: F(U)^n \longrightarrow G(U)$ está dada por: $\tilde{g}_U(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(s_i)$. Se verifica que $\bar{\tilde{g}} = g$, y por tanto la aplicación definida es sobreyectiva.

Notemos que si E es localmente libre de rango 1, $\tilde{E} \otimes E \simeq \theta_X$; de ahí el nombre de θ_X- módulo invertible.

(2.3.5) Sea $(f, f^{\#}): (X, \theta_X) \longrightarrow (Y, \theta_Y)$ un morfismo de espacios anillados. Si F es un θ_X- módulo, entonces $f_* F$ es un $f_* \theta_X$- módulo, donde $f_* F$ y $f_* \theta_X$ están definidos como en (1.3.9).

Pero ya que tenemos un morfismo $f^{\#}: \theta_Y \longrightarrow f_* \theta_X$ de haces de anillos sobre Y éste da a $f_* F$ una estructura de 0_Y- módulo.

Si G es un 0_Y- módulo, entonces $f^* G$ es un $f^* \theta_Y$- módulo, donde $f^* G$ y $f^* 0_Y$ están definidos como en (1.3.9).

Dado $f^{\#}: \theta_Y \longrightarrow f_* \theta_X$, y teniendo en cuenta que f_* y f^* son funtores adjuntos obtenemos un morfismo $f^*\theta_Y \longrightarrow \theta_X$ de haces de anillos sobre X. El haz asociado al prehaz producto tensorial $f^*G \underset{f^*\theta_Y}{\otimes} \theta_X$ es un θ_X- módulo, que notaremos también por f^*G.

Entonces se verifica que f^* es adjunto a idquierda al funtor f_*, es decir, se tiene una situación de adjunción:

$$\begin{tikzcd} {}_{0_Y}M \arrow[d, shift right, "f^*"'] \\ {}_{0_X}M \arrow[u, shift right, "f_*"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, tenemos que ver que para cada θ_Y- módulo G y para cada θ_X- módulo F, se verifica:

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\theta_X}(s(f^*G \underset{f^*\theta_Y}{\otimes} \theta_X),F) \simeq \mathrm{Hom}_{\theta_Y}(G,f_*F).$$

En principio, dado (X,θ_X) un espacio anillado, definimos un prehaz de θ_X- módulos F como un prehaz de grupos abelianos sobre X tal que para cada abierto $U\subseteq X$, $F(U)$ es un $\theta_X(U)$- módulo. Un morfismo de prehaces de θ_X- módulos es un morfismo de prehaces.

Notaremos la categoría de prehaces de θ_X- módulos por ${}_{\theta_X}PM$. Evidentemente la categoría de θ_X- módulos es una subcategoría plena de la categoría de prehaces de θ_X- módulos. Ya que la hacificación de un prehaz de θ_X- módulos es un θ_X- módulo, entonces tenemos la adjunción:

$$\begin{tikzcd} {}_{0_X}PM \arrow[d, shift right, "s"'] \\ {}_{0_X}M \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

Veamos ahora el isomorfismo (*), teniendo en cuenta la anterior adjunción; se verifica:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_X}(s(f^*G \underset{f^*\theta_Y}{\otimes} \theta_X),F) \simeq \mathrm{Hom}_{{}_{\theta_X}PM}(f^*G \underset{f^*\theta_Y}{\otimes} \theta_X, F).$$

Por otra ya que para cada $U\subseteq X$, se verifica:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_X(U)}((f^*G)(U) \underset{(f^*\theta_Y)(U)}{\otimes} \theta_X(U), F(U)) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{f^*\theta_Y(U)}(f^*G(U), F(U))$$

pues el funtor cambio de anillo, vía $f_*\theta_Y(U) \longrightarrow \theta_X(U)$, tiene por adjunto a derecha el funtor producto tensorial, $- \underset{f_*\theta_Y(U)}{\otimes} \theta_X(U)$, entonces:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_X}{}_{PM}(f^*G \underset{f^*\theta_Y}{\otimes} \theta_X, F) \simeq \mathrm{Hom}_{f^*\theta_Y}{}_{PM}(f^*G, F) \simeq \mathrm{Hom}_{f^*\theta_Y}(f^*G, F).$$

Pero ya que f_* y f^* son funtores adjuntos, se verificará:

$$\mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\bar{T})}(f^*G, F) \simeq \mathrm{Hom}_{S(\bar{Y},\bar{T}')}(G, f_*F).$$

Sea, entonces, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{f^*\theta_Y}(f^*G, F)$, teniendo en cuenta el último isomorfismo obtenemos un morfismo $\lambda': G \longrightarrow f_*F$ de haces de grupos abelianos sobre Y. Veamos que λ' es un morfismo de θ_Y- módulos, con lo que tenemos demostrado (*).

Sea $V \subseteq Y$ un abierto de Y, entonces $f^{-1}(V) \subseteq X$ es un abierto de X y por tanto $\lambda_{f^{-1}(V)}: f^*G(f^{-1}(V)) \longrightarrow F(f^{-1}(V))$ es un morfismo de $(f^*\theta_Y)(f^{-1}(V))$- módulos.

Por otra parte, considerando el morfismo $\gamma: G \longrightarrow f_*f^*G$ obtenido a partir de la unidad de la adjunción

$$\begin{array}{c} S(\bar{Y},\bar{T}') \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow \uparrow{\scriptstyle f_*} \\ S(\bar{X},\bar{T}) \end{array}$$

y dotando a f_*f^*G estructura de θ_Y- módulo vía el morfismo $\mu: \theta_Y \longrightarrow f_*f^*\theta_Y$, se demuestra, mediante un proceso fácil, que γ es un morfismo de θ_Y- módulos. Entonces $\gamma_V: G(V) \longrightarrow (f^*G)(f^{-1}(V))$ es un morfismo de $\theta_Y(V)$- módulos y por tanto $\lambda'_V: G(V) \longrightarrow f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$ es un morfismo de $\theta_Y(V)$- módulos, teniendo en cuenta que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G(V) \arrow[d, "\gamma_V"'] \arrow[dr, "\lambda'_V"] & \\ f^*G(f^{-1}(V)) \arrow[r, "\lambda_{f^{-1}(V)}"'] & F(f^{-1}(V)) \end{tikzcd}$$

(2.3.6) Sea (X,θ_X) un espacio anillado. Definimos sobre X un haz de anillos θ_Z que será la hacificación del prehaz de anillos constante e igual a $\mathbb{Z}$. Entonces (X,θ_Z) es , también un espacio anillado y tenemos definido un morfismo canónico:

$$(1_X,\rho): (X,\theta_X) \longrightarrow (X,\theta_Z)$$

y por lo tanto, tenemos estlablecida una situación de adjunción:

$$\begin{tikzcd} {}_{0_Z}M \arrow[d, shift right, "1_X^*"'] \\ {}_{0_X}M \arrow[u, shift right, "1_{X*}"'] \end{tikzcd}$$

Pero ya que todo haz de grupos abelianos sobre X, es un θ_Z- módulo, entonces ${}_{\theta_Z}M \cong S(\bar{X},\bar{T})$.

Por otra parte, dado $F \in {}_{\theta_X}M$, $(1_{X*})(F) = F$, luego 1_{X*} no es más que el funtor de olvido que notaremos por Γ.

Por último, dado $G \in S(\bar{X},\bar{T})$, $1_X^*(G) = s(F \otimes_{\theta_Z} \theta_X)$, siendo s el funtor hacificación. Notaremos por T al funtor 1_X^* , y tenemos por tanto una situación de adjunción entre la categoría de θ_X- módulos y la categoría de haces de grupos abelianos sobre X, es decir:

$$\begin{tikzcd} S(\bar{X},\bar{T}) \arrow[d, shift right, "T"'] \\ {}_{0_X}M \arrow[u, shift right, "\Gamma"'] \end{tikzcd}$$

(2.3.7) Sea (X,θ_X) un espacio anillado, definimos un funtor $\mathrm{Hom}(\theta_X,-)$ como sigue

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\theta_X,-): S(\bar{X},\bar{T}) &\longrightarrow {}_{\theta_X}M \\ F &\longmapsto \mathrm{Hom}(\theta_X, F) \end{aligned}$$

de forma que $\mathrm{Hom}(\theta_X,F)(U) = \mathrm{Hom}(\theta_X(U),F(U))$. Ya que para cada $U \subseteq X$ $\mathrm{Hom}(\theta_X(U),F(U))$ es un $\theta_X(U)$- módulo , entonces $\mathrm{Hom}(\theta_X,F)$ es un θ_X- módulo.

(2.3.8) PROPOSICION

Existe una situación de adjunción:

$$\begin{array}{c} {}_{\theta_X}M \\ \Gamma \big\downarrow \ \big\uparrow \mathrm{Hom}(\theta_X,-) \\ S(\bar{X},\bar{T}) \end{array}$$

donde Γ es el funtor definido en (2.3.6).

DEMOSTRACION

Tenemos que ver que si $G \in {}_{0_X}M$ y $F \in S(\bar{X},\bar{T})$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\bar{T})}(\Gamma(G),F) \simeq \mathrm{Hom}_{{}_{\theta_X}M}(G,\mathrm{Hom}(\theta_X,F))$$

o bien

$$\mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\bar{T})}(G,F) \simeq \mathrm{Hom}_{{}_{\theta_X}M}(G,\mathrm{Hom}(\theta_X,F)).$$

Definimos λ: $\mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\bar{T})}(G,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}_{\theta_X}M}(G,\mathrm{Hom}(\theta_X,F))$ como sigue: Si f es un elemento de $\mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\bar{T})}(G,F)$ entonces $\lambda(f)$ es tal que si $U \subseteq X$ $(\lambda(f))_U(s)\colon \theta_X(U) \longrightarrow F(U)$ está dada por $(\lambda(f))_U(s)(a) = f_U(as)$, para $s \in G(U)$ y para $a \in \theta_X(U)$.

Veamos que λ es un isomorfismo. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\bar{T})}(G,F)$ un elemento tal que $\lambda(f) = 0$, entonces $\lambda(f)_U = 0$, para todo $U \subseteq X$, y por tanto $\lambda(f)_U(s) = 0$, para todo $s \in G(U)$; en particular $\lambda(f)_U(s)(1) = 0$, es decir, $f_U(s) = 0$, para todo $s \in G(U)$, y por tanto $f_U = 0$. Como se verifica para cada $U \subseteq X$, entonces ha de ser $f = 0$.

Sea $f \in \mathrm{Hom}_{{}_{\theta_X}M}(G,\mathrm{Hom}(\theta_X,F))$, definimos $g\colon G \longrightarrow F$ como sigue: Si $U \subseteq X$ es abierto, $g_U\colon G(U) \longrightarrow F(U)$ viene dado por $g_U(s) = (f_U(s))(1)$, para todo $s \in G(U)$.

En principio, g_U es un morfismo de grupos abelianos, como fácilmente se puede comprobar; veamos que $\lambda(g) = f$. Sea $U \subseteq X$, tenemos que ver que para cada $s \in G(U)$, $(\lambda(g))_U(s) = f_U(s)$. Sea a $\theta_X(U)$, $(\lambda(g))_U(s)(a) = g_U(as) = f_U(as)(1) = [af_U(s)](1) = f_U(s)(a)$, para cada $a \in 0_X(U)$.

Así $(\lambda(g))_U = f_U$, para cada abierto $U \subseteq X$, y por tanto $\lambda(g) = f$, c.q.d.

(2.3.9) COROLARIO

Sea (X,θ_X) un espacio anillado. La categoría de θ_X- módulos es una categoría de Grothendieck, y por tanto tiene suficientes inyectivos.

DEMOSTRACION

En principio veamos que es una categoría abeliana. Para ello notemos que el núcleo, conúcleo e imagen de un morfismo de θ_X- módulos, calculado en la categoría de haces, es de nuevo un θ_X- módulo. Cualquier suma directa, producto directo y límite directo de θ_X- módulos, calculados en la categoría de haces, resultan ser θ_X- módulos. Una sucesión de θ_X- módulos y morfismos de θ_X- módulos es exacta si lo es como sucesión de haces.

Así ${}_{\theta_X}M$ es abeliana y puesto que $\varinjlim$ es exacto en $S(\bar{X},\bar{T})$, también lo es en ${}_{\theta_X}M$. Luego ${}_{\theta_X}M$ es abeliana y AB5.

Por otra parte, θ_X es un generador en ${}_{\theta_X}M$, y así esta categoría es abeliana AB5 con generador , es decir , ${}_{\theta_X}M$ es una categoría de Grothendieck; c.q.d.

2.4 HACES COHERENTES Y CUASI-COHERENTES

(2.4.1) DEFINICION

Sea A un anillo, y M un A-módulo. Definimos el haz asociado a M sobre Spec(A), denotado por $M^\bullet$, como sigue: Para cada conjunto abierto $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, $M^\bullet(U)$ será el conjunto de funciones $s: U \longrightarrow \bigcup_{P\in U} M_P$, tal que para cada $P \in U$, $s(P) \in M_P$, y tal que para $P \in U$, existe un entorno V de P, contenido en U, y elementos $m \in M$, $f \in A$ de forma que para cada $Q \in V$, $f \notin Q$ y $s(Q) = \frac{m}{f}$ en M_Q.

$M^\bullet$ es un haz con las aplicaciones restricción obvias. Se verifica :

([17] , Proposición 5.1, pág 110)

(a) M es un θ_A-módulo

(b) Para cada $P \in \mathrm{Spec}(A)$, $(M^\bullet)_P \cong M_P$

(c) Para cada $f \in A$, el A_f-módulo $M^\bullet(D(f))$ es isomorfo a M_f.

(2.4.2) PROPOSICION

Sean A y B anillos, y $\rho: A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Sea $(f,f^{\#})$ el correspondiente morfismo de esquemas $(f,f^{\#})$: $(\mathrm{Spec}(B),\theta_B) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$.

Entonces:

(a) La aplicación $M \longrightarrow M^\bullet$ es un funtor exacto fiel y pleno de la categoría de A-módulos a la categoría de θ_A- módulos.

(b) Si M y N son A-módulos, entonces $(M \otimes_A N)^\bullet \simeq M^\bullet \otimes_{\theta_A} N^\bullet$.

(c) Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de A-módulos, esntonces $(\oplus M_i)^\bullet \simeq \oplus M_i^\bullet$.

(d) Para cualquier B-módulo N, $(f_* N^\bullet) \simeq {}_A N^\bullet$, donde ${}_A N$ es N considerado como A-módulo vía $\rho: A \longrightarrow B$.

(e) Para cualquier A-módulo M, $(f^* M^\bullet) \simeq (M \otimes_A B)^\bullet$.

DEMOSTRACION

([17] , Proposición 5.2, pág 110).

(2.4.3) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un esquema. Un θ_X- módulo F es <u>cuasi-coherente</u> si X puede recubrirse por subconjuntos abiertos afines $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, tal que para cada i existe un A_i-módulo M_i con $F \mid U_i \simeq M_i^\bullet$ sobre $\mathrm{Spec}(A_i)$.

Decimos que F es <u>coherente</u> si además cada M_i es un A_i-módulo finitamente generado.

(2.4.4) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema. Un θ_X- módulo es cuasi-coherente si y sólo si para cada subconjunto abierto afín de X, $U = \mathrm{Spec}(A)$, existe un A-módulo M tal que $F \mid U \simeq M^\bullet$ sobre $\mathrm{Spec}(A)$.

Si (X,θ_X) es noetheriano, F es coherente si y sólo si lo mismo es cierto con la condición de que M sea un A-módulo finitamente generado.

DEMOSTRACION

([17] , Proposición 5.4, pág 113)

(2.4.5) COROLARIO

Sea A un anillo. El funtor $M \longmapsto M^{\bullet}$ da una equivalencia de categorías entre la categoría de A-módulos y la categoría de θ_A- módulos cuasi-coherentes. Su inverso es el funtor $F \longmapsto F(\mathrm{Spec}(A))$.

Si A es noetheriano, el mismo funtor también da una equivalencia entre la categoría de A-módulos finitamente generados y la categoría de θ_A- módulos coherentes.

DEMOSTRACION

Notemos por ${}_{\theta_A}M_{CH}$ a la categoría de θ_A- módulos cuasi-coherentes.

Consideremos los funtores:

$$\begin{aligned} \nu : {}_{\theta_A}M &\longrightarrow {}_{\theta_A}M_{CH} \\ M &\longmapsto M^{\bullet} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu' : {}_{\theta_A}M_{CH} &\longmapsto {}_{\theta_A}M \\ F &\longmapsto F(\mathrm{Spec}(A)). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.4.2(a)), únicamente tenemos que ver que $\nu'\nu = 1_{{}_{\theta_A}M}$ y $\nu\nu' = 1_{{}_{\theta_A}M_{CH}}$.

La primera igualdad es inmediata, apoyándonos en (2.4.1(c)). Sea, entonces, F un θ_A- módulo cuasi-coherente, por (2.4.4), debe existir un A-módulo M tal que $F|\mathrm{Spec}(A) = F \simeq M^{\bullet}$. Por tanto $\nu'(F) = F(\mathrm{Spec}(A)) = M^{\bullet}(\mathrm{Spec}(A)) \simeq M$. Por tanto $\nu\nu'(F) = \nu(M) = M^{\bullet} \simeq F$, luego $\nu\nu' = 1_{{}_{\theta_A}M_{CH}}$.

(2.4.6) COROLARIO

Sea $(\mathrm{Spec}(A), \theta_A)$ un esquema afín. El funtor ν', que notaremos $\Gamma(\mathrm{Spec}(A),-)$ es exacto.

DEMOSTRACION

En efecto, sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en ${}_{\theta_A}M_{CH}$. Por (2.4.5), $F' \simeq \Gamma(\mathrm{Spec}(A),F')^{\bullet} = (M')^{\bullet}$, $F \simeq \Gamma(\mathrm{Spec}(A),F)^{\bullet} = M^{\bullet}$ y $F'' \simeq \Gamma(\mathrm{Spec}(A),F'')^{\bullet} = (M'')^{\bullet}$

Así $0 \longrightarrow M'^{\bullet} \longrightarrow M^{\bullet} \longrightarrow M''^{\bullet} \longrightarrow 0$ es exacta y por tanto para cada $P \in \mathrm{Spec}(A)$, $0 \longrightarrow (M'^{\bullet})_P \longrightarrow (M^{\bullet})_P \longrightarrow (M''^{\bullet})_P \longrightarrow 0$ es exacta; pero ya que $(M'^{\bullet})_P = M'_P$, $(M^{\bullet})_P = M_P$ y $(M''^{\bullet})_P = M''_P$, entonces $0 \longrightarrow M'_P \longrightarrow M_P \longrightarrow M''_P \longrightarrow 0$ es exacta para todo $P \in \mathrm{Spec}(A)$, lo que nos asegura que $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es exacta. Es decir, $0 \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}(A),F') \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}(A),F) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}(A),F'') \longrightarrow 0$ es exacta que es lo que queriamos demostrar.

(2.4.7) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema, y sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de θ_X- módulos.

Si cualesquiera dos de ellos son cuasi-coherentes, entonces también lo es el tercero.

DEMOSTRACION

En efecto, supongamos que F' y F son cuasi-coherentes. Ya que la cuestión es local, podemos asumir que $(X,\theta_X) = (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$.

Si F' y F son cuasi-coherentes, entonces $F' = M'^{\bullet}$ y $F = M^{\bullet}$ con M' y M A-módulos. Dado $\rho: F' \longrightarrow F$ obtenemos un morfismo $\rho_{\mathrm{Spec}(A)}: M' \longrightarrow M$, que dará lugar a la sucesión exacta :

$$M' \xrightarrow{\rho_{\mathrm{Spec}(A)}} M \longrightarrow \mathrm{Coker}(\rho_{\mathrm{Spec}(A)}) \longrightarrow 0$$

Puesto que el funtor $M \longmapsto M^{\bullet}$ es un funtor fiel pleno y exacto, obtenemos el diagrama de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
M'^{\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & M^{\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & (\mathrm{Coker}\,\rho_{\mathrm{Spec}(A)})^{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
F' \arrow[r] & F \arrow[r] & F'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de donde $F'' \simeq (\mathrm{Coker}\,\rho_{\mathrm{Spec}(A)})^{\bullet}$ y por tanto F'' es cuasi-coherente.

De la misma forma se demuestra que si F y F'' son cuasi-coherentes, entonces F' es cuasi-coherente.

Supongamos, ahora, que F' y F'' son cuasi-coherentes. Sean $M = F(X)$, $M' = F'(X)$ y $M'' = F''(X)$. Entonces tenemos la sucesión exacta corta de A-módulos

$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$, (vease

Aplicamos , ahora, el funtor $\tilde{}$, y obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{M'} & \longrightarrow & \tilde{M} & \longrightarrow & \tilde{M''} & \longrightarrow & 0 \\ & & \simeq\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de donde deducimos que $\tilde{M} \simeq F$ y por tanto F es cuasi-coherente.

(2.4.8) PROPOSICION

Sea $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas, se verifica:

(a) Si G es un θ_Y- módulo cuasi-coherente, entonces f^*G es un θ_X- módulo cuasi-coherente.

(b) Si ambos esquemas son noetherianos y G es coherente entonces f^*G también lo es

(c) Asumimos o que (X,θ_X) es noetheriano o que X es compacto y la intersección de dos abiertos afines es afín. Entonces si F es un θ_X- módulo cuasi-coherente, f_*F es un θ_Y- módulo cuasi-coherente.

DEMOSTRACION

(a) La cuestión es local sobre X y sobre Y, así podemos asumir que ambos son esquemas afines y entonces el resultado se sigue de (2.4.2(e)) y (2.4.5).

(b) En el caso noetheriano, la misma demostración sirve para haces coherentes.

(c) Aquí la cuestión es local sólo sobre Y, así podemos asumir que (Y,θ_Y) es afín. Entonces ya que X es compacto (bajo cualquiera de las hipótesis), podemos recubrirlo por un número finito de abiertos afines $\{U_i\}_{i\in I}$.

En el caso en que X sea noetheriano , $U_i \cap U_j$ es, al menos, compacto y podemos recubrirlo por un número finito de abiertos afines $\{U_{ijk}\}$. En el segundo caso $U_i \cap U_j$ es de nuevo afín.

Sea V un abierto de Y; dar un elemento de $F(f^{-1}(V))$ es lo mismo que dar elementos $s_i \in F(f^{-1}(V) \cap U_i)$ tal que

$F(f^{-1}(V)\cap U_{ijk} \longrightarrow f^{-1}(V)\cap U_i)(s_i) = F(f^{-1}(V)\cap U_{ijk} \longrightarrow f^{-1}(V)\cap U_j)(s_j)$, para todo i, j y k.

Por tanto tenemos la sucesion exacta de θ_Y- módulos:

$$0 \longrightarrow f_* F \longrightarrow \bigoplus_i f_*(F|U_i) \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} f_*(F|U_{ijk})$$

donde, por abuso de notación, denotamos también por f los morfismos inducidos $U_i \longrightarrow Y$, $U_{ijk} \longrightarrow Y$. Ahora, $f_*(F|U_i)$ y $f_*(F|U_{ijk})$ son cuasi-coherentes por (2.4.2(d)). Así f_*F es cuasi-coherente por (2.4.7).

Como una primera aplicación de estos conceptos veamos el haz de ideales de un subesquema cerrado.

(2.4.9) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un esquema. Un haz de ideales sobre X es un θ_X- módulo J tal que para cada $U \subseteq X$, J(U) es un ideal de $\theta_X(U)$.

(2.4.10) DEFINICION

Sea (Y,θ_Y) un subesquema cerrado de (X,θ_X) y sea i: $Y \longrightarrow X$ el morfismo inclusión. Definimos el haz ideal de Y, denotado por J_Y, como el núcleo del morfismo $i^*: \theta_X \longrightarrow i_*\theta_Y$, que será un θ_X- módulo.

(2.4.11) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema. Para cualquier subesquema cerrado (Y,θ_Y) de $(X,0_X)$, el correspondiente haz de ideales J_Y es un haz de ideales cuasi-coherente. Si (X,θ_X) es noetheriano es coherente.

Inversamente, cualquier haz de ideales cuasi-coherente sobre X es el haz de ideales de un subesquema cerrado de (X,θ_X) y además éste está determinado de forma única.

DEMOSTRACION

Sea (Y,θ_Y) un subesquema cerrado de (X,θ_X), y consideremos el morfismo inclusión $i: Y \longrightarrow X$ que será una inmersión cerrada.

En principio, si $U \subseteq X$ es un abierto afín, $i^{-1}(U)$ es un subesquema cerrado de U, y por ser éste afín, $Y \cap U$ es afín. Luego $Y \cap U = i^{-1}(U)$ es compacto.

Consideremos el morfismo diagonal $\Delta : Y \longrightarrow Y \times_X Y$ que es, trivialmente, una inmersión cerrada. Sean U_i y U_j dos abiertos afines de Y y supongamos que X es afín, entonces $U_i \times_X U_j$ es un abierto afín de $Y \times_X Y$ y además se verifica que $\Delta^{-1}(U_i \times_X U_j) = U_i \cap U_j$.

Luego $\Delta | U_i \cap U_j$ es una inmersión cerrada y por tanto $U_i \cap U_j$ es afín.

Como queremos ver que $i_* \theta_Y$ es un θ_X- módulo cuasi-coherente, podemos suponer que (X,θ_X) es afín, y teniendo en cuenta lo anterior, y (2.4.8(c)), $i_* \theta_Y$ es un θ_X- módulo cuasi-coherente.

Luego J_Y, que es el núcleo de un morfismo de θ_X- módulos cuasi-coherentes, es un θ_X- módulo cuasi-coherente.

Si (X,θ_X) es noetheriano, entonces para cualquier abierto afín $U = \mathrm{Spec}(A)$ de X, el anillo A es noetheriano y por tanto el ideal $I = J_Y | U(U)$ es finitamente generado, así J_Y es coherente.

Inversamente, dado un esquema $(X,0_X)$ y un haz de ideales cuasi-coherente J, sea Y el soporte del haz cocient $0_X/J$, es decir, $Y = \{ p \in X / (0_X/J)_p \neq 0 \}$. Entonces Y es un subconjunto cerrado de X, e $(Y,\theta_X/Y)$ es el único subesquema cerrado de (X,θ_X) con ideal haz J.

La unicidad es clara, veamos que, en efecto, es un subesquema cerrado. Ya que es una cuestión local , podemos asumir que (X,θ_X) es afín e igual a $(\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$.

Puesto que J es un haz de ideales cuasi-coherente, entonces $J = Q^{\bullet}$ para algún ideal $Q \subseteq A$. Así $\theta_X/J \simeq (A/Q)^{\bullet}$, luego $(Y,\theta_X/J) \simeq (\mathrm{Spec}(A/Q),\theta_{A/Q})$ y es un subesquema cerrado de (X,θ_X); c.q.d.

(2.4.12) COROLARIO

Sea $(\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$ un esquema afín. Existe una correspondencia uno a uno entre los ideales P de A y los subesquemas cerrados de $(\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$, dada por:

$$P \longmapsto \mathrm{Imag}\,(\mathrm{Spec}(A/P),\ \theta_{A/P}) \text{ en } (\mathrm{Spec}(A),\theta_A).$$

2.5 ESQUEMAS PROYECTIVOS

(2.5.1) Sea S un anillo graduado: $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$, denotaremos por S_+ al ideal $\bigoplus_{d>0} S_d$.

Definimos el conjunto Proj(S) como el conjunto de todos los ideales primos homogéneos de S que no contienen a todo S_+.

Si A es un ideal homogéneo de S, definimos el subconjunto de Proj(S), V(A), como: $V(A) = \{P \in \mathrm{Proj}(S) \,/\, A \subseteq P\}$.

Se verifica que $V(AB) = V(A) \cup V(B)$, para A yB ideales homogéneos de S, y $V(\sum_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} V(A_i)$ para $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de ideales homogéneos de S.

Podemos definir una topología sobre Proj(S) tomando por subconjuntos cerrados los de la forma V(A).

Dado $P \in \mathrm{Proj}(S)$, notaremos por $S_{(P)}$ al anillo consistente en los elementos de grado cero de $T^{-1}S$, donde T es el sistema multiplicativo consistente en todos los elementos homogéneos de S que no están en P.

(2.5.2) DEFINICION

Definimos un haz de anillos θ_S sobre Proj(S) como sigue: Para cada subconjunto abierto $U \subseteq \mathrm{Proj}(S)$, $\theta_S(U)$ será el conjunto de funciones $s\colon U \longrightarrow \coprod_{P\in U} S_{(P)}$, tal que, para cada $P \in U$, $s(P) \in S_{(P)}$, y tal que, para cada $P \in U$, existe un entorno V de P, contenido en U, y elementos homogéneos $a, f \in S$ del mismi grado, de forma que para cada $Q \in V$, $f \notin Q$ y $s(Q) = \frac{a}{f}$ en $S_{(Q)}$.

Si $V \subseteq U$ existe un obvio morfismo de restricción $\theta_S(U) \longrightarrow \theta_S(V)$. Así θ_S es un haz de anillos sobre Proj(S).

(2.5.3) PROPOSICION

Sea S un anillo graduado, entonces se verifica:

(a) Para cualquie $P \in Proj(S)$, la fibra $(\theta_S)_P$ es isomorfa al anillo local $S_{(P)}$.

(b) Para cualquier $f \in S_+$ homogéneo, sea $D_+(f) = \{P \in Proj(S) \ / \ f \notin P\}$. Entonces $D_+(f)$ es abierto en Proj(S). Por otra parte, estos conjuntos abiertos recubren a Proj(S), y para cada tal conjunto abierto tenemos un isomorfismo de espacios localmente anillados:

$$(D_+(f) \ , \ \theta_S | D_+(f)) \simeq (\ Spec(S_{(f)}) \ , \ \theta_{S_{(f)}} \ )$$

donde $S_{(f)}$ es el subanillo de S_f consistente en los elementos de grado cero del anillo S_f.

(c) $(Proj(S), \theta_S)$ es un esquema.

DEMOSTRACION

([17] , Proposicion 25, pág 76)

De igual forma que en el caso afín, podemos definir un funtor de la categoría de S-módulos graduados en la categoría de θ_S- módulos cuasi-coherentes. De la siguiente forma:

(2.5.4) DEFINICION

Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado. Definimos el θ_S- módulo asociado a M, que notaremos por $M^{\bullet}$, como sigue:

Para cualquier subconjunto abierto $U \subseteq Proj(S)$, $M^{\bullet}(U)$ es el conjunto de aplicaciones $s: U \longrightarrow \bigcup_{P \in U} M_{(P)}$ ($M_{(P)}$ está definido de forma análoga a $S_{(P)}$), tal que $s(P) \in M_{(P)}$, para todo $P \in U$; y tal que para cada $P \in U$ existe un entorno V de P, contenido en U, y elementos homogéneos del mismo grado $m \in M$ y $f \in S$, de forma que para cada $Q \in V$, $f \notin Q$ y $s(Q) = \frac{m}{f}$ en $M_{(Q)}$.

(2.5.5) PROPOSICION

Sea S un anillo graduado y M un S-módulo graduado. Entonces se verifica:

(a) Para cada $P \in \mathrm{Proj}(S)$, $(M^{\bullet})_P \simeq M_{(P)}$.

(b) Para cada $f \in S_+$ homogéneo, $M^{\bullet} D_+(f) \simeq (M_{(f)})^{\bullet}$, vía el isomorfismo de $D_+(f)$ con $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$. ($M_{(f)}$ está definido de forma análoga a $S_{(f)}$).

(c) $M^{\bullet}$ es un θ_S- módulo cuasi-coherente. Si S es noetheriano y M es finitamente generado entonces $M^{\bullet}$ es coherente.

DEMOSTRACION

([17] , Proposicion 5.11, pág 116)

(2.5.6) DEFINICION

Sea S un anillo graduado. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ definimos el θ_S- módulo $0_S(n)$ como $S(n)^{\bullet}$. Para cualquier θ_S- módulo F , denotamos por $F(n)$ al θ_S- módulo $F \underset{\theta_S}{\otimes} \theta_S(n)$.

(2.5.7) PROPOSICION

Sea S un anillo graduado. Suponemos que S está generado por S_1 como S_0- álgebra. Entonces se verifica:

(a) $\theta_S(n)$ es un θ_S- módulo invertible.

(b) Para cualquier S-módulo graduado M , $M^{\bullet}(n) \simeq (M(n))^{\bullet}$. En particular, $\theta_S(n) \underset{\theta_S}{\otimes} \theta_S(m) \simeq \theta_S(n+m)$.

(c) Sea T otro anillo graduado, generado por T_1 como T_0- álgebra. Sea $\rho: S \longrightarrow T$ un morfismo preservando grados. Sea $U = \{P \in \mathrm{Proj}(S) \ / \ \rho(S_+) \nsubseteq P\}$ y $f: (U, \theta_T|U) \longrightarrow (\mathrm{Proj}(S), \theta_S)$ el morfismo determinado por ρ.

Entonces $f^*(\theta_S(n)) \simeq \theta_T(n)|U$ y $f_*(\theta_T(n)|U) \simeq f_*(\theta_U)(n)$.

DEMOSTRACION

(a) Sea $f \in S_1$ y consideremos $\theta_S(n)|D_+(f) \simeq (S(n)_{(f)})^{\bullet}$, por (2.5.5(b)), sobre $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$. Veamos que es libre de rango 1.

$S_{(f)}$ = elementos de grado cero de S_f

$S(n)_{(f)}$ = elementos de grado n de S_f

Obtenemos un isomorfismo de uno a otro, enviando s $S_{(f)}$ a $f^n s \in S(n)_{(f)}$. Esto tiene sentido para todo $n \in \mathbb{Z}$, ya que f es invertible en $S_{(f)}$. Luego $S(n)_{(f)}$ es un $S_{(f)}$- módulo de rango 1, y por tanto $\mathcal{O}_S(n)|D_+(f)$ es libre de rango 1.

Como S está generado por S_1 como S_0-álgebra, Proj(S) está recubierto por conjuntos abiertos $D_+(f)$ para $f \in S_1$. Por tanto $\mathcal{O}_S(n)$ es invertible.

(b) Se sigue del hecho de que $(M \otimes_S N)^\sim \simeq M^\sim \otimes_{\mathcal{O}_S} N^\sim$ para cualesquiera S-módulos graduados M y N, supuesto que S está generado por S_1 como S_0- álgebra.

En efecto, para cualquier $f \in S_1$, $(M \otimes_S N)_{(f)} = M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$ ya que el primero consiste en los elementos de $(M \otimes_S N)_f \simeq M_f \otimes_{S_f} N_f$ y los elementos de grado cero de $M_f \otimes_{S_f} N_f$ son los elementos de $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$; y puesto que S está generado por S_1 como S_0- álgebra se verifica que $(M \otimes_S N)^\sim \simeq M^\sim \otimes_{\mathcal{O}_S} N^\sim$.

(c) Más generalmente, se verifica que para cualquier S-módulo graduado M $f^*(M^\sim) = (M \otimes_S T)^\sim|U$, y para cualquier T-módulo graduada N, $f_*(N^\sim|U) = ({}_S N)^\sim$. Por otra parte el $\mathcal{O}_S$- módulo T no es más que $f_*(\mathcal{O}_U)$.

Las demostraciones son fáciles utilizando (2.4.2(d),(e)).

(2.5.8) Notemos que $\mathcal{O}_S(n) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(-n) \simeq \mathcal{O}_S$, y puesto que $\mathcal{O}_S(n)$ es invertible, entonces $(\mathcal{O}_S(n))^\sim = \mathcal{O}_S(-n)$ y $(\mathcal{O}_S(-n))^\sim = \mathcal{O}_S(n)$, donde $\mathcal{O}_S(n)^\sim$ y $\mathcal{O}_S(-n)^\sim$ son los $\mathcal{O}_S$- módulos definidos en (2.3.4).

Por tanto, $\mathcal{O}_S(n) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_S(-n), \mathcal{O}_S)$ y $\mathcal{O}_S(-n) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_S(n), \mathcal{O}_S)$.

(2.5.9) DEFINICION

Sea S un anillo graduado, y sea F un $\mathcal{O}_S$- módulo.

Definimos el <u>S-módulo graduado asociado a F</u>, como el grupo:

$$\Gamma_*(F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F(n)(\mathrm{Proj}(S))$$

A este grupo le damos una estructura de S-módulo como sigue: Si $s \in S_d$, entonces s determina de forma natural un elemento $s \in \mathcal{O}_S(d)(\mathrm{Proj}(S))$. Para cualquier $t \in F(n)(\mathrm{Proj}(S))$ definimos s.t en $F(n+d)(\mathrm{Proj}(S))$ considerando el producto tensorial y usando el isomorfismo $F(n) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(d) \simeq F(n+d)$.

(2.5.10) PROPOSICION

Sea A un anillo, sea $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, $r \geq 1$, y sea $X = \mathrm{Proj}(S)$. Entonces $\Gamma_*(\theta_S) \simeq S$.

DEMOSTRACION

Recubrimos X por los conjuntos abiertos $D_+(x_i)$. Entonces dar un elemento $t \in \theta_X(n)(X)$ es lo mismo que dar secciones $t_i \in \theta_X(n)(D_+(x_i))$, para cada i, que coincidan sobre las intersecciones $D_+(x_i x_j)$. Pero ya que $\theta_X(n)(D_+(x_i)) = S(n)_{(x_i)}$, entonces t_i es un elemento homogéneo de grado n de S_{x_i}, y su restricción a $D_+(x_i x_j)$ es justamente la imagen de dicho elemento en $S_{x_i x_j}$.

Entonces $\Gamma_*(\theta_X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \theta_X(n)(X)$ puede identificarse con el conjunto de las (r+1)-uplas $(t_0, \ldots, t_r)$ tal que $t_i \in S_{x_i}$ para todo i, y tal que, para cada i,j las imágenes de t_i y t_j en $S_{x_i x_j}$ son las mismas.

Ya que los x_i no son divisores de cero en S, los morfismos de localización $S \longrightarrow S_{x_i}$ y $S_{x_i} \longrightarrow S_{x_i x_j}$ son todos inyectivos, y estos anillos son todos subanillos de $S' = S_{x_0 \ldots x_r}$. Por tanto $\Gamma_*(0_X)$ es la $\bigcap_{i=1}^{r} S_{x_i}$ tomada en S'.

Ahora, cualquier elemento homogéneo de S' puede escribirse de forma única como un producto $x_0^{i} \ldots x_r^{i} f(x_0 \ldots x_r)$, donde $i_j \in \mathbb{Z}$ y f es un polinomio homogéneo no divisible por cualquier x_i. Este elemento estará en S_{x_i} si y sólo si $i_j \geq 0$, para $j \neq i$. Entonces $\bigcap_{i=1}^{r} S_{x_i}$ es, exactamente S.

Si S es un anillo graduado que no es un anillo de polinomios, entonces este resultado no es cierto en general.

(2.5.11) LEMA

Sea (X, θ_X) un esquema y sea L un θ_X- módulo invertible. Sea $f \in L(X)$, sea X_f el conjunto abierto de puntos $x \in X$ tal que $f_x \notin m_x L_x$, donde m_x es el ideal maximal de $0_{X,x}$.

Cosideremos un 0_X- módulo cuasi-coherente F; entonces se verifica:

(a) Supongamos que X es compacto, y sea $s \in F(X)$ un elemento tal que $F(X_f \longrightarrow X)(s) = 0$. Entonces existe un $n>0$ tal que $f^n s = 0$ considerado como elemento de $F \otimes L^{\otimes n}(X)$

(b) Supongamos que X tiene un recubrimiento por abiertos afines $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que $L|U_i$ es libre, para todo $i \in I$, y tal que $U_i \cap U_j$ es compacto para todo i,j. Entonces dado un elemento $t \in F(X_f)$ existe un $n>0$ y existe $a \in F \otimes L^{\otimes n}(X)$ que se aplica en $f^n t \in F \otimes L^{\otimes n}(X_f)$.

DEMOSTRACION

(a) Recubrimos X por un número finito de abiertos afines, $U = \mathrm{Spec}(A)$, tal que $L|U$ es libre. Sea $\Psi : L|U \simeq \mathcal{O}_X|U$ el isomorfismo. Ya que F es cuasi-coherente, existe un A-módulo M tal que $F|U \simeq M^\bullet$.

Dado $s \in F(X)$, sea $s_U = F(U \longrightarrow X)(s) \in F(U) = M$.

Dado $f \in L(X)$, sea $f_U = L(U \longrightarrow X)(f) \in L|U(U)$ y sea $g = \Psi_U(f) \in A$.

Entonces $X_f \cap U = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \ / \ (f_U)_P \notin m_P L_P\} = \{P \in \mathrm{Spec}(A) \ / \ g \notin m_P A_P\} =$
$= \{P \in \mathrm{Spec}(A) \ / \ g \notin P\} = D(g)$.

Si $F(X_f \longrightarrow X)(s) = 0$ entonces $F(X_f \cap U \longrightarrow X)(s_U) = 0$, y por tanto existirá un $n>0$ tal que $g^n s_U = 0$ en M.

Usando el isomorfismo $1_d \times \Psi^n : (F \otimes L^{\otimes n}) \simeq F|U$, concluimos que $f_U^n s_U = 0$ en $(F \otimes L^{\otimes n})(U)$. Ya que el recubrimiento es finito podemos tomar n independientemente de U, y por ser $F \otimes L^{\otimes n}$ un haz, $f^n s = 0$ en $F \otimes L^{\otimes n}(X)$.

(b) Sea $\Psi_i : L|U_i \simeq \mathcal{O}_X|U_i$ y llamemos $g_i = (\Psi_i)_{U_i}(L(U_i \longrightarrow X)(f_i)) \simeq L(U_i) \simeq \mathcal{O}_X(U_i)$.

Entonces si $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, $g_i \in A_i$.

Puesto que F es cuasi-coherente, $F|U_i \simeq M_i^\bullet$ para algún A_i-módulo M_i, y ello para todo i. Sea $t_i = F(X_f \cap U_i \longrightarrow X_f)(t) \in F(X_f \cap U_i) \simeq M_i^\bullet(D(g_i)) = (M_i)_{g_i}$, entonces existe un n tal que $t_i = \dfrac{m_i}{g_i^n}$, con $m_i \in M_i = F(U_i)$; es decir, existe $n>0$ y existe $m_i \in F(U_i)$ tal que m_i se restringe en $g_i^n t_i$. Usando el isomorfismo $1_d \times \Psi_i^n : (F \otimes L^{\otimes n})|U_i \simeq F|U_i$, existe $n>0$ y existe $m_i \in (F \otimes L^{\otimes n})(U_i)$ tal que m_i se aplica en $f^n t \in (F \otimes L^{\otimes n})(X_f)$. Este n lo podemos elegir independientemente de i por estar considerando un número finito.

Ya que m_i y m_j coinciden sobre $U_i \cap U_j \cap X_f$, y ya que $U_i \cap U_j$ es compacto, existirá un $m>0$, que podemos elegir independientemente de i y de j, tal que $f^m m_i$ y $f^m m_j$ coinciden sobre $(F \otimes L^{\otimes n})(U_i \cap U_j)$.

Entonces la familia $f^m m_i \in (F \otimes L^{\otimes n})(U_i \cap U_j)$ determina un elemento $a \in (F \otimes L^{\otimes n})(X)$ que se aplica en $f^{n+m} t \in (F \otimes L^{\otimes n})(X_f)$.

(2.5.12) PROPOSICION

Sea S un anillo graduado que sea finitamente generado por S_1 como S_0-álgebra Sea $X = \mathrm{Proj}(S)$ y sea F un θ_X- módulo cuasi-coherente. Entonces existe un isomorfismo natural $\beta : \Gamma_*(F)^{\bullet} \longrightarrow F$.

DEMOSTRACION

Primero definimos el morfismo β para cualquier θ_X- módulo F. Sea $f \in S_1$, ya que $\Gamma_*(F)$ es cuasi-coherente, para definir β es suficiente dar la imagen de un elemento de $\Gamma_*(F)^{\bullet}(D_+(f)) = (\Gamma_*(F))_{(f)}$. Este elemento vendrá representado por una fracción $\frac{m}{f^d}$, para algún $d \geqslant 0$, donde $m \in F(d)(X)$. Considerando $f^{-d} \in 0_X(-d)(D_+(f)) = S(-d)_{(f)}$, entonces el producto $m \otimes f^{-d} \in F(D_+(f))$ ya que $F \simeq F(d) \underset{\theta_S}{\otimes} \theta_S(-d)$. Esto define β.

Ahora sea F cuasi-coherente. Para demostrar que β es un isomorfismo tenemos que identificar el módulo $(\Gamma_*(F))_{(f)}$ con $F(D_+(f))$

Aplicamos (2.5.11) considerando $f \in L(X)$, con $L = \theta_X(1)$. Ya que S está finitamente generado por S_1 como S_0- álgebra, encontramos un número finito de elementos $f_0, \ldots, f_r \in S_1$ tal que $D_+(f_0), \ldots, D_+(f_r)$ recubren X. Puesto que $D_+(f_i) \cap D_+(f_j)$ es afín entonces es cuasi-compacto, para todo i, j. Además $L|D_+(f_i)$ es libre para todo i.

Estamos, pues, en las hipótesis de (2.5.11(b)), y por tanto podemos asegurar que $F(D_+(f_i)) \simeq (\Gamma_*(F))_{(f_i)}$ para todo i; c.q.d.

(2.5.13) DEFINICION

Dado un anillo A, definimos el <u>n-espacio proyectivo sobre A</u>, $(P_A^n, \theta_{P_A^n})$, como $(\mathrm{Proj}(A[x_0,\dots,x_n]), \theta_{A[x_0,\dots,x_n]})$. Notemos que si $A \longrightarrow B$ es un morfismo de anillos y $(\mathrm{Spec}(B),\theta_B) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$ el correspondiente morfismo de esquemas afines, entonces $P^n_B \simeq P^n_A \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$. En particular $P^n_A \simeq P^n_Z \times_{\mathrm{Spec}(Z)} \mathrm{Spec}(A)$.

(2.5.14) DEFINICION

Si (Y,θ_Y) es un esquema, definimos el <u>n-espacio proyectivo sobreY</u> , $(P^n_Y, \theta_{P^n_Y})$, como el esquema $(P^n_Z \times_{\mathrm{Spec}(Z)} Y, \theta_{P^n_Z \times_{\mathrm{Spec}(Z)} Y})$.

(2.5.15) DEFINICION

Un morfismo $f\colon (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ se dice que es un morfismo <u>proyectivo</u> si factoriza en una inmersión cerrada, $i\colon X \longrightarrow P^n_Y$ para algún n, seguido de la proyección $P^n_Y \longrightarrow Y$.

Un morfismo $f\colon (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es <u>cuasi-proyectivo</u> si factoriza en una inmersión abierta, $j\colon X \longrightarrow X'$, seguida de un morfismo proyectivo $g\colon X' \longrightarrow Y$.

Si $f\colon (X,\theta_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$ es un morfismo proyectivo diremos que (X,θ_X) es un esquema proyectivo sobre el anillo A.

(2.5.16) PROPOSICION

Sea A un anillo. Entonces:

(a) Si (Y,θ_Y) es un subesquema cerrado de P^r_A, para algún r, entonces existe un ideal homogéneo $I \subseteq S = A[x_0,\dots,x_r]$ tal que Y es el subesquema cerrado determinado por I, es decir, $Y = \mathrm{Proj}(A[x_0,\dots,x_r]/I)$.

(b) Un esquema (Y,θ_Y) sobre Spec(A) es proyectivo si y sólo si es isomorfo a Proj(S) para algún anillo graduado S, donde $S_0 = A$ y S está finitamente generado por S_1 como S_0- álgebra.

DEMOSTRACION

(a) Sea J_Y el ideal haz de Y sobre $X = P^r_A$. Entonces $J_Y \hookrightarrow \theta_X$ de donde

$J_Y(n) \hookrightarrow 0_X(n)$ para todo $n \geqslant 0$, por tanto $\Gamma_*(J_Y)$ es un submódulo de $\Gamma_*(0_X)$. Pero por (2.5.10), $\Gamma_*(0_X) \simeq S$ y por tanto $\Gamma_*(J_Y)$ es un ideal homogéneo de S, que lo llamaremos I. Ahora I determina un subesquema cerrado de X: $Proj(A[x_0,..,x_r]/I)$, cuyo ideal haz será $I^{\sim}$.

Ya que J_Y es cuasi-coherente, (2.4.11), entonces $J_Y \simeq \Gamma_*(J_Y)^{\sim}$, por (2.5.12) y por tanto $J_Y \simeq I^{\sim}$, de donde $Y \simeq Proj(A[x_0,...,x_r]/I)$.

(b) Si Y es un esquema proyectivo sobre A entonces es isomorfo a un subesquema cerrado de P^r_A, para algún r, por definición.

Por (a), $Y \simeq Proj(A[x_0,....,x_r]/I)$, y podemos tomar $I \subset (A[x_0,...,x_r])_+ = \bigoplus_{d>0} (A[x_0,...,x_r])_d$. Así $(A[x_0,...,x_r])_0 \simeq A$, y por tanto $S = A[x_0,...,x_r]/I$ está finitamente generado por S_1 como A-álgebra.

Inversamente, si $Y = Proj(S)$ con $S_0 = A$ y S finitamente generado por S_1 como A-álgebra, entonces $S = A[x_0,...,x_r]/I$, y por tanto (Y,θ_Y) es un subesquema cerrado de P^r_A, luego es proyectivo sobre A.

(2.5.17) DEFINICION

Para cualquier esquema (Y,θ_Y), definimos el <u>haz alabeado sobre P^r_Y, $\theta_Y(1)$</u>, como $g^*(\theta_{P^r_Z}(1))$, donde $g: (P^r_Y,\theta_{P^r_Y}) \longrightarrow (P^r_Z,\theta_{P^r_Z})$ es la proyección.

Notemos que si $(Y,\theta_Y) = (Spec(A),\theta_A)$, entonces $\theta_{Spec(A)}(1) = \theta_{P^r_A}(1)$.

(2.5.18) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un esquema sobre (Y,θ_Y). Un θ_X- módulo L diremos que es <u>muy amplio relativo a Y</u>, si existe una inmersión $i: X \longrightarrow P^r_Y$, para algún r, tal que $i^*(\theta_{P^r_Y}(1)) \simeq L$.

Decimos que $i: (X,\theta_X) \longrightarrow (Z,\theta_Z)$ es una inmersión, si es un isomorfismo de X en un subesquema abierto de un subesquema cerrado de Z.

(2.5.19) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un esquema y F un θ_X- módulo. Decimos que <u>F está generado por secciones globales</u>, si existe una familia de elementos de F(X), $\{s_i\}_{i\in I}$, tal que para cada $x\in X$, $\{(s_i)_x\}_{i\in I}$ generan F_x como $\theta_{X,x}$- módulo.

Notemos que F está generado por secciones globales si y sólo si F puede escribirse como un cociente de un θ_X- módulo libre. En efecto, los generadores definen un morfismo de θ_X- módulos $\bigoplus_{i\in I} \theta_X \longrightarrow F$, e inversamente.

(2.5.20) Cualquier θ_A- módulo cuasi-coherente sobre un esquema afín, $(Spec(A),\theta_A)$, está generado por secciones globales. En efecto, si $F\simeq M^{\bullet}$, para algún A-módulo M, cualquier conjunto de generadores de M como A-módulo será una familia de elementos generadora.

Si $X = Proj(S)$, para algún anillo graduado S que esté generado por S_1 como S_0-álgebra, entonces los elementos de S_1 nos dan elementos de $\theta_X(1)(Proj(S)$ que generan $\theta_X(1)$.

(2.5.21) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A. Sea $\theta_X(1)$ un θ_X- módulo invertible muy amplio relativo a Spec(A), y sea F un θ_X- módulo coherente.

Entonces existe un entero n_0 tal que para todo $n\geq n_0$, el 0_X- módulo $F(n) =$ $= F \otimes_{\theta_X} i^*(\theta_{P^r_A}(n))$, puede generarse por un número finito de secciones globales.

DEMOSTRACION

Por ser (X,θ_X) un esquema proyectivo sobre A, y por (2.5.16(b)), $X = Proj(S)$ con S un anillo graduado tal que $S_0 = A$ y está finitamente generado por S_1 como A-álgebra, es decir, $S = A[x_0,\dots,x_r]/I$, para algún ideal homogéneo I.

Entonces si $i: X \longrightarrow P^r_A$ es una inmersión cerrada, existente por ser X proyectivo sobre A, tenemos: $\theta_X(1) = \theta_S(1)$ e $i^*(\theta_{P^r_A}(1)) = \theta_S(1)$.

Además, por ser F coherente, y por (2.5.12), $F \simeq \Gamma_*(F)^{\bullet} = M^{\bullet}$, con lo cual $F(n) = M^{\bullet}(n) \simeq (M(n))^{\bullet} = (M \otimes_S S(n))^{\bullet}$, por (2.5.7(b)).

Entonces, por (2.5.7(c)), $i_*(F(n)) = i_*(M(n)^{\bullet}) = ({}_{A[x_0,..,x_r]}M(n))^{\bullet} =$

$= ({}_{A[x_0,..,x_r]}M \otimes_{A[x_0,..,x_r]} A[x_0,..,x_r](n))^{\bullet} = (i_*M^{\bullet})(n) = (i_*F)(n).$

Luego F(n) está generado por secciones globales si y sólo si lo está $i_*(F(n))$. Así, nos podemos reducir al caso en que $X = P^r_A$.

Recubrimos X por los conjuntos abiertos $D_+(x_i)$, $i = 1,\dots,r$. Ya que F es coherente, para cada i, existe un módulo finitamente generado M_i sobre $B_i = A[x_0/x_i,\dots,x_r/x_i] \simeq A[x_0,\dots,x_r]_{(x_i)} = \theta_{P^r_A}(D_+(x_i))$, tal que $F|D_+(x_i) \simeq M_i^{\bullet}$.

Para cada i, tomamos un número finito de elementos $s_{ij} \in M_i$ que generen este módulo. Por (2.5.11), existe un entero n y existe $t_{ij} \in F(n)(X)$ tal que t_{ij} se aplica en $x_i^n s_{ij}$. Como es usual, tomamos n independientemente de i y de j.

Ahora, $F(n)\, D_+(x_i) = M_i'^{\bullet}$, donde M_i' es un B_i-módulo finitamente generado. Ya que las aplicaciones $x_i^n : F \longrightarrow F(n)$ inducen isomorfismos de M_i a M_i', entonces los elementos $x_i^n s_{ij}$ generan M_i' y por tanto los elementos $t_{ij} \in F(n)(X)$ generan F(n).

(2.5.22) COROLARIO

Sea (X,θ_X) un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A. Entonces cualquier θ_X- módulo coherente F , puede escribirse como un cociente de un θ_X- módulo E, donde E es una suma directa finita de θ_X- módulos de la forma $\theta_X(n)$, para varios enteros n.

DEMOSTRACION

Por (2.5.21), existe un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, F(n) puede generarse por un número finito de secciones globales.

Entonces tenemos el morfismo sobreyectivo de θ_X- módulos $\bigoplus_{i=1}^{N} \theta_X \longrightarrow F(n) \longrightarrow 0.$

Tensorizando por $\theta_X(-n)$, obtenemos el morfismo sobreyentivo de θ_X- módulos $\bigoplus_{i=1}^{N} \theta_X(-n) \longrightarrow F \longrightarrow 0$, como queriamos demostrar.

2.6 DIFERENCIALES

(2.6.1) Pasemos a definir el haz de diferenciales relativo de un esquema $(X,\mathcal{O}_X)$ sobre un esquema $(Y,\mathcal{O}_Y)$. En principio, veamos la teoría algebraica de diferenciales de Käler.

(2.6.2) DEFINICION

Sea A un anillo, B una A-álgebra y M un B-módulo. Una <u>A-derivación</u> de B en M es una aplicación $d: B \longrightarrow M$ tal que :

(1) d es aditiva

(2) $d(bb') = bdb' + b'db$, para todo $b.b' \in B$.

(3) $da = 0$, para todo $a \in A$.

Definimos el <u>módulo de formas diferenciales relativo, de B sobre A</u> como un B-módulo $\Omega_{B/A}$, junto con una A-derivación $d: B \longrightarrow \Omega_{B/A}$, que satisface la siguiente propiedad universal:

Para cualquier B-módulo M y para cualquier A-derivación $d': B \longrightarrow M$, existe un único morfismo de B-módulos $f: \Omega_{B/A} \longrightarrow M$ tal que $d' = f\circ d$.

Una forma de construir tal módulo , es tomar el B-módulo libre F generado por los símbolos $\{db / b \in B\}$, y tomar el cociente por el submódulo generado por todas las expresiones de la forma: (1) $d(b+b')-db-db'$, para $b,b' \in B$; (2) $d(bb')-bdb'-b'db$, para $b,b' \in B$; (3) da, para $a \in A$.

La derivación $d: B \longrightarrow \Omega_{B/A}$ estará definida por $b \longrightarrow db$.

Luego $\Omega_{B/A}$ existe, y además , por definición ($\Omega_{B/A}$,d) es único salvo isomorfismo.

(2.6.3) Sea $f: (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ un morfismo de esquemas, y consideremos el morfismo diagonal $\Delta: X \longrightarrow X \times_Y X$; ya que $p_i \circ \Delta = 1_X$, donde p_i $i = 1,2$, son las proyecciones, entonces Δ es un homeomorfismo de X en su imagen $\Delta(X)$.

Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X por abiertos afines; para cada $i \in I$, sea W_i un abierto afín de Y tal que $f(U_i) \subseteq W_i$. Entonces $U_i \times_{W_i} U_i$ es un abierto afín de

$X \times_Y X$, y $\Delta(X) \cap U_i \times_{W_i} U_i$ es la imagen de $\Delta_i : U_i \longrightarrow U_i \times_{W_i} U_i$. Pero si $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ y $W_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, Δ_i es el morfismo definido por el morfismo de anillos $A_i \otimes_{B_i} A_i \longrightarrow A_i$ dado por $a \otimes a' \longrightarrow aa'$, que es sobreyectivo y por tanto Δ_i es una inmersión cerrada.

Así $\Delta(X) \cap (U_i \times_{W_i} U_i)$ es cerrado en $U_i \times_{W_i} U_i$; como además $\Delta(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \times_{W_i} U_i$, entonces $\Delta(X)$ es un subesquema localmente cerrado de $X \times_Y X$, es decir, es un subesquema cerrado de un subesquema abierto de $X \times_Y X$.

(2.6.4) DEFINICION

Sea $f: (X, \theta_X) \longrightarrow (Y, \theta_Y)$ un morfismo de esquemas, y consideremos el morfismo diagonal $\Delta: X \longrightarrow X \times_Y X$. Sea J el haz de ideales de $\Delta(X)$ en W, donde (W, θ_W) es un subesquema abierto de $X \times_Y X$ tal que $\Delta(X)$ es un subeaquema cerrado de él.

Definimos el <u>haz de diferenciales relativo, de X sobre Y</u>, como $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(J/J^2)$, que constituye un θ_X- módulo.

(2.6.5) Si $i: \Delta(X) \longrightarrow W$ es la inclusión, J es el núcleo de $i: \theta_W \longrightarrow i_* \theta_{\Delta(X)}$, luego J es un haz de ideales sobre W y además tiene una estructura natural de $\theta_{\Delta(X)}$- módulo, por tanto J/J^2 es un $\theta_{\Delta(X)}$- módulo.

Luego $\Delta^*(J/J^2) = \Omega_{X/Y}$ es un θ_X- módulo.

Por (2.4.11), J es un θ_W- módulo cuasi-coherente, así también lo es J/J^2, luego, por (2.4.8(a)), $\Omega_{X/Y}$ es un θ_X- módulo cuasi-coherente.

(2.6.6) Sea $f: (X, \theta_X) \longrightarrow (Y, \theta_Y)$ un morfismo de esquemas. Sea $U = \mathrm{Spec}(A)$ un abierto afín de Y y $V = \mathrm{Spec}(B)$ un abierto afín de X tales que $f(V) \subseteq U$. Entonces $V \times_U V$ es un abierto afín de $X \times_Y X$ isomorfo a $\mathrm{Spec}(B \otimes_A B)$.

Por otra parte $\Delta(X) \cap V \times_U V$ es un subesquema cerrado de $V \times_U V$, definido por el núcleo del morfismo diagonal : $I \longrightarrow B \otimes_A B \longrightarrow B$. Luego $J \approx I^\bullet$ y por tanto $J/J^2 \approx (I/I^2)^\bullet$.

Así, $\Omega_{V/U} = \Delta^*(J/J^2) = \Delta^*((I/I^2)^\bullet) = (I/I^2)^\bullet = (\Omega_{B/A})^\bullet$.

El último isomorfismo puede verse en ([25] , pág 182).

Por tanto nuestra definición de haz de diferenciales de X sobre Y es compatible, en el caso afín, con los módulos de diferenciales definidos anteriormente. vía el funtor • .

Esto también nos muestra que se podría haber definido $\Omega_{X/Y}$ a partir de recubrimientos de X e Y por abiertos afines V y U, en las mismas condiciones que antes, y uniendo los correspondientes haces $(\Omega_{B/A})^\bullet$. Con todo ello podemos asegurar que la definición de $\Omega_{X/Y}$ es independiente de esquema (W,θ_W) elegido.

En vista de lo anterior podemos trasladar los resultados algebraicos de ([25] , Capítulo 1, págs 180 - 190) y obtenemos los siguientes resultados:

(2.6.7) PROPOSICION

Sea $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas, sea $g: (Y',\theta_{Y'}) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ otro morfismo, y sea $f': X' = X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ el inducido.

Entonces $\Omega_{X'/Y'} \simeq g'^*(\Omega_{X/Y})$, donde $g': X' \longrightarrow X$ es la primera proyección.

DEMOSTRACION

Se sigue de ([25], pág 186).

(2.6.8) PROPOSICION

Sean $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ y $g: (Y,\theta_Y) \longrightarrow (Z,\theta_Z)$ morfismos de esquemas. Entonces existe una sucesión exacta de θ_X- módulos:

$$f^*(\Omega_{Y/Z}) \longrightarrow \Omega_{X/Z} \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0$$

DEMOSTRACION

Se sigue de ([25] , Teorema 57, pág 186)

(2.6.9) PROPOSICION

Sea $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas y sea (Z,θ_Z) un subesquema cerrado de (X,θ_X) , con ideal haz J, Entonces existe una sucesión exacta de θ_Z- módulos:

$$J/J^2 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \otimes \theta_Z \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACION

Se sigue de ([25] , Teorema 58, pág 187).

(2.6.10) TEOREMA

Sea A un anillo. Notemos por $(Y,\theta_Y) = (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$ y por $(X,\theta_X) = (P^n_A,\theta_{P^n_A})$.

Entonces existe una sucesión exacta de θ_X- módulos :

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow (\theta_X(-1))^{n+1} \longrightarrow \theta_X \longrightarrow 0.$$

(El exponente n+1, quiere decir una suma directa n+1 vez de $\theta_X(-1)$).

DEMOSTRACION

Notemos por $S = A[x_0,\dots,x_n]$ y sea E el S-módulo graduado $S(-1)^{n+1}$. Entonces se verifica que $(S(-1)^{n+1})^{\bullet} \simeq \theta_X(-1)^{n+1}$.

En efecto, por (2.5.12), $\theta_X(-1)^{n+1} \simeq (\Gamma_*((\theta_X(-1))^{n+1}))^{\bullet}$ donde

$\Gamma_*(\theta_X(-1)^{n+1}) = \bigoplus_{p\in Z}(\theta_X(-1)^{n+1})(p)(X)$.

Pero $\theta_X(-1)^{n+1}(p) = \theta_X(-1)^{n+1} \underset{\theta_X}{\otimes} \theta_X(p) \simeq (\theta_X(-1) \underset{\theta_X}{\otimes} \theta_X(p))^{n+1} = \theta_X(-1+p)^{n+1}$.

Por tanto $(\theta_X(-1+p)^{n+1})(X) = (\theta_X(-1+p)(X))^{n+1} = (S(-1+p)^{\bullet}(X))^{n+1} =$

$$= ((S(-1)^{n+1})^{\bullet}(p))(X).$$

Luego $\theta_X(-1)^{n+1} \simeq (S(-1)^{n+1})^{\bullet}$.

Sea $e_0,\dots,e_n$, una base en grado 1 de E. Definimos el homomorfismo de S-módulos graduados:

$$\begin{aligned} E = S(-1)^{n+1} &\longrightarrow S = A[x_0,\dots,x_r] \\ e_i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

sea M el núcleo. Entonces la sucesión exacta de S-módulos graduados $0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow S$, da lugar a la sucesión exacta corta de θ_X- módulos

$$0 \longrightarrow M^{\bullet} \longrightarrow \theta_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \theta_X \longrightarrow 0.$$

Notemos que aunque $E \longrightarrow S$ no es sobreyectiva, si lo es en grados $\geqslant 1$, con la correspondiente aplicación de haces es sobre, ya que para todo $P \in \mathrm{Proj}(S)$, $(0_X(-1)^{n+1})_P \longrightarrow \theta_{X,P}$ es sobre.

Veamos que $M\bullet \simeq \Omega_{X/Y}$ con lo que tendremos lo que queriamos.

Notemos que dado x_i, $E_{x_i} \longrightarrow S_{x_i}$ es un morfismo sobreyectivo de S_{x_i} - módulos libres, por tanto M_{x_i} es libre de rango n, generado por los elementos de la forma $\{ e_j - (\frac{x_j}{x_i}) e_i \ / \ i \neq j \}$.

Sea $U_i = D_+(x_i)$, entonces $M\bullet | U_i$ es un 0_{U_i}- módulo libre generado por los elementos de la forma $\frac{1}{x_i} e_j - \frac{x_j}{x_i^2} e_i$, para $j \neq i$ (tenemos que añadir $\frac{1}{x_i}$, para asegurarnos que tenemos elementos de grado cero en M_{x_i}).

Definimos una aplicación $\rho_i : \Omega_{X/Y}|U_i \longrightarrow M\bullet|U_i$ como sigue: Ya que $U_i \simeq \mathrm{Spec}(A[x_0/x_i, \ldots, x_n/x_i])$, entonces $\Omega_{X/Y}|U_i$ es el 0_{U_i}- módulo libre generado por $d(x_0/x_i), \ldots, d(x_n/x_i)$ (*); Así, $\rho_i(d(x_j/x_i)) = (x_i e_j - x_j e_i) / x_i^2$, entonces ρ_i es un isomorfismo.

Veamos que $\rho_i | U_i \cap U_j = \rho_j | U_i \cap U_j$, con lo cual podemos unir los isomorfismos ρ_i, y definir un isomorfismo $\rho : \Omega_{X/Y} \longrightarrow M$.

Sobbre $U_i \cap U_j$ tenemos que para todo k, $x_k/x_i = (x_k/x_j)(x_j/x_i)$, por tanto en $\Omega_{X/Y}|U_i \cap U_j$ se verifica:

$$d(x_k/x_i) - x_k/x_j \cdot d(x_j/x_i) = (x_j/x_i)\, d(x_k/x_j).$$

Aplicamos ρ_i al lado izquierdo y tenemos:

$$1/x_i^2(x_i e_k - x_k e_i) - (x_k/x_j)(1/x_i^2)(x_i e_j - x_j e_i) = (1/x_i x_j)(x_j e_k - x_k e_j).$$

Aplicamos ρ_j al lado derecho y obtenemos:

$$(x_j/x_i)(1/x_j^2)(x_j e_k - x_k e_j) = (1/x_i x_j)(x_j e_k - x_k e_j).$$

Luego $\rho_i | U_i \cap U_j = \rho_j | U_i \cap U_j$.

(*) Más en general, se verifica que si $X = \mathrm{Spec}(A[x_1, \ldots, x_n])$, entonces $\Omega_{X/\mathrm{Spec}(A)}$ es el θ_X- módulo libre de rango n generado por las secciones globales $dx_1, \ldots, dx_n$.

(2.6.11) Sea (X,θ_X) un espacio anillado y F un θ_X- módulo, Definimos el <u>álgebra exterior de F</u>, como el θ_X- módulo obtenido como la hacificación del pre-haz : $U \longrightarrow \Lambda(U) = \Lambda(F(U))$, que notaremos $\Lambda(F)$. Sus componentes en grado n son θ_X- módulos, que notaremos $\Lambda^n(F)$.

Supongamos que (X,θ_X) es un esquema, entonces se verifica:

(a) Si F es localmente libre de rango n, entonces $\Lambda^r(F)$ es localmente libre de rango $\binom{n}{r}$.

(b) Si F es localmente libre de rango n, entonces la aplicacipn

$$\Lambda^r(F) \otimes_{\theta_X} \Lambda^{n-r}(F) \longrightarrow \Lambda^n(F)$$

es un apareamiento perfecto para cualquier r; es decir, induce isomorfismos de $\Lambda^r(F)$ en $(\Lambda^{n-r}(F))^\sim \otimes_{\theta_X} \Lambda^n(F)$.

(c) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de θ_X- módulos localmente libres de rangos n',n,n'', respectivamente, entonces:

$\Lambda^n(F) \approx \Lambda^{n'}(F') \otimes_{0_X} \Lambda^{n''}(F'')$.

(2.6.12) DEFINICION

Sea K un cuerpo, y consideremos $(P^n_K, \theta_{P^n_K})$, definimos el haz canónico sobre P^n_K, $W_{P^n_K}$, como $\Lambda^n(\Omega_{P^n_K/K})$.

Ya que $\Omega_{P^n_K/K}$ es localmente libre de rango n, pues $(\Omega_{P^n_K/K})|D_+(x_i)$ es el $0_{D_+(x_i)}$- módulo libre generado por $d(x_0/x_i), \ldots\ldots, d(x_n/x_i)$ para todo $i=0,\ldots\ldots,n$, entonces $\Lambda^n(\Omega_{P^n_K/K}) = W_{P^n_K}$ es localmente libre de rango 1.

(2.6.13) PROPOSICION

Sea K un cuerpo, y notemos por $X = P^n_K$. Entonces $W_X = \theta_X(-n-1)$.

DEMOSTRACION

Consideremos la sucesión exacta corta,(2.6.10)

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/K} \longrightarrow \theta_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \theta_X \longrightarrow 0$$

Por (2.6.11(c)), $\bigwedge^{n+1}(\theta_X(-1)^{n+1}) \simeq \theta_X \underset{\theta_X}{\otimes} \bigwedge^n(\Omega_{X/K})$, es decir, $W_X \simeq \bigwedge^{n+1}(0_X(-1)^{n+1})$.

Por otra parte considerando la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \theta_X(-1) \longrightarrow \theta_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \theta_X(-1)^n \longrightarrow 0$$

y aplicando de nuevo (2.6.11(c)), obtenemos que $\bigwedge^{n+1}(\theta_X(-1)^{n+1}) \simeq \theta_X(-1) \underset{\theta_X}{\otimes} \bigwedge^n(\theta_X(-1)^n)$. Pero, por el mismo procedimiento, $\bigwedge^n(\theta_X(-1)^n) \simeq \theta_X(-1) \underset{\theta_X}{\otimes} \bigwedge^{n-1}(0_X(-1)^{n-1})$. Continuando así sucesivamente, obtenemos $W_X = \bigwedge^{n+1}(\theta_X(-1)^{n+1}) \simeq \theta_X(-1) \underset{\theta_X}{\otimes} \overset{n+1}{\cdots\cdots\cdots} \underset{\theta_X}{\otimes} \theta_X(-1) \simeq \theta_X(-n-1)$, c.q.d.

3. TOPOLOGIAS DE GROTHENDIECK SOBRE ESQUEMAS

3.1 MORFISMOS DE ESQUEMAS

(3.1.1) <u>Morfismos localmente de tipo finito</u>

Un morfismo de esquemas $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es localmente de tipo finito, si existe un recubrimiento de Y por subconjuntos abiertos afines $\{V_i\}_{i\in I}$, $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, tal que para cada $i\in I$, $f^{-1}(V_i)$ puede recubrirse por subconjuntos abiertos afines $\{U_{ij}\}$, $U_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$, de forma que cada A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente generada. (Notemos que A_{ij} es una B_i-álgebra según (2.1.7).

Esta definicion es equivalente a que para cada subconjunto abierto afín, $V = \mathrm{Spec}(B)$, de Y, $f^{-1}(V)$ puede recubrirse por subconjuntos abiertos afines $U_j = \mathrm{Spec}(A_j)$, donde cada A_j es una B-álgebra finitamente generada.

Notemos por I_1 a la clase de morfismos localmente de tipo finito.

(3.1.2) <u>Morfismos de tipo finito</u>

Un morfismo de esquemas $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es de tipo finito, si para cada subconjunto abierto af'in, $V = \mathrm{Spec}(B)$, de Y, $f^{-1}(V)$ puede recubrirse por un número finito de subconjuntos abiertos afines de X, $U_1,\dots,U_n$, $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, donde cada A_i es una B-álgebra finitamente generada.

Notaremos por I_2 a la clase de morfismos de tipo finito.

(3.1.3) <u>Morfismos finitos</u>

Un morfismo de esquemas $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es finito si para cada subconjunto abierto afín, $V = \mathrm{Spec}(B)$, de Y, $f^{-1}(V) = U$, donde U es un subconjumto abierto afín de X, $U = \mathrm{Spec}(A)$, donde A es una B-álgebra que es finita como B-módulo.

Notaremos por I_3 a la clase de morfismos finitos.

(3.1.4) Morfismos cuasi-compactos

Un morfismo de esquemas f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es cuasi-compacto si para cada subconjunto abierto afín de Y, V = Spec(B), $f^{-1}(V)$ es compacto.

Notaremos por I_4 a la clase de morfismos cuasi-compactos.

(3.1.5) Morfismos cuasi-finitos

Un morfismo de esquemas f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es cuasi-finito si es de tipo finito y para cada $p \in Y$, $f^{-1}(p)$ es finito.

Notaremos por I_5 a la clase de morfismos cuasi-finitos.

(3.1.6) Morfismos separados

Un morfismo de esquemas f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es separado si el morfismo diagonal $\Delta: (X,\theta_X) \longrightarrow (X \times_Y X, \theta_{X \times_Y X})$ es una inmersión cerrada.

Vease (2.2.7) para la definición de inmesión cerrada.

Notaremos por I_6 a la clase de morfismos separados.

(3.1.7) Morfismos propios

Un morfismo de esquemas f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es propio si es separado, de tipo finito y universalmente cerrado. Donde un morfismo de esquemas f es universalmente cerrado si es cerrado como morfismo de espacios topológicos, y para cualquier morfismo g: $(Y',\theta_{Y'}) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$, el morfismo inducido $f': (X \times_Y Y', \theta_{X \times_Y Y'}) \longrightarrow (Y',\theta_{Y'})$ es cerrado.

Notaremos por I_7 a la clase de morfismos propios.

(3.1.8) Morfismos planos

Un morfismo de esquemas f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es plano si para todos los puntos $p \in X$, el morfismo inducido, $\theta_{Y,f(p)} \longrightarrow \theta_{X,p}$, es un morfismo plano, esto es, $\theta_{X,p}$ es plano como $\theta_{Y,f(p)}$-módulo.

Equivalentemente, f es plano si para cualesquiera U y V, abiertos afines de X e Y, respectivamente, tal que $f(U)\subseteq V$, el morfismo $\theta_Y(V) \longrightarrow \theta_X(U)$ es plano.

Veamos esta última equivalencia: Supongamos que $U = \mathrm{Spec}(B)$ y $V = \mathrm{Spec}(A)$, y sea $g\colon \theta_Y(V) = A \longrightarrow \theta_X(U) = B$. Entonces g es plano si y sólo si, para cada $P \in \mathrm{Spec}(B)$, $g_P\colon A_{g^{-1}(P)} \longrightarrow B_P$ es plano.

Pero si $P \in \mathrm{Spec}(B) = V$, entonces $f(P) \in \mathrm{Spec}(A) = U$ y por tanto $\theta_{Y,f(P)} \longrightarrow \theta_{X,P}$ es plano; pero como $\theta_{Y,f(P)} = A_{g^{-1}(P)}$ y $\theta_{X,P} = B_P$ entonces g_P es plano, para todo $P \in \mathrm{Spec}(B)$, luego g es plano.

Supongamos, ahora, que para cualesquiera U y V abiertos afines de X e Y tales que $f(U) \subseteq V$, el morfismo $\theta_Y(V) \longrightarrow \theta_X(U)$ es plano.

Sea $p \in X$, entonces siempre podremos encontrar abiertos afines U de X, V de Y de forma que $p \in U$ y $f(U) \subseteq V$. En estas condiciones $\theta_Y(V) \longrightarrow \theta_X(U)$ es plano, o bien, $g\colon A \longrightarrow B$ es plano, supuesto $V = \mathrm{Spec}(A)$ y $U = \mathrm{Spec}(B)$. Entonces si $Q \in \mathrm{Spec}(B)$ se identifica con $p \in U$, el morfismo $A_{g^{-1}(Q)} \longrightarrow B_Q$ es plano, $\theta_{Y,f(p)} \longrightarrow \theta_{X,p}$ es plano.

Notaremos por I_8 a la clase de morfismos planos.

(3.1.9) Morfismos fielmente planos

Un morfismo de esquemas $f\colon (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es fielmente plano si es plano y f es sobreyectiva.

Notaremos por I_9 a la clase de morfismos fielmente planos.

(3.1.10) Morfismos no ramificados

Un morfismo de esquemas $f\colon (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es no ramificado si es localmente de tipo finito y para cada $p \in X$, con $f(p) = q$, el extendido $m_q\theta_{X,p}$ por el morfismo $\theta_{Y,f(p)} \longrightarrow \theta_{X,p}$, es m_p. Además $K(p)$ es una extensión separable finita de $K(q)$. Donde $K(q)$ es el cuerpo residual del anillo local $0_{Y,q}$ y m_q su ideal máximal.

Notaremos por I_{10} a la clase de morfismos no ramificados.

(3.1.11) Morfismos étale

Un morfismo de esquemas $f\colon (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ es étale si es plano y no ramificado.

Notaremos por I_{11} a la clase de morfismos étale.

(3.1.12) Notaremos por I_{12}, I_{13} a las clases de morfismos que son inmersiones abiertas e inmersiones cerradas, respectivamente. (2.2.7).

3.2 CATEGORIAS TOPOLOGICAS ASOCIADAS A LAS CLASES DE MORFISMOS DE ESQUEMAS

(3.2.1) Sea $g\colon (S,\theta_S) \longrightarrow (S',\theta_{S'})$ un morfismo de esquemas. Consideramos la coma-categoría (Sch,S) de morfismos a S, y la coma-categoría (Sch,S') de morfismos a S'.

El morfismo g define un funtor entre estas dos categorías que llamaremos el funtor cambio de base, y que está definido como sigue:

$$\begin{aligned} g'\colon (Sch,S) &\longrightarrow (Sch,S') \\ X \longrightarrow S &\longmapsto X_{S'} \longrightarrow S' \end{aligned}$$

donde $X_{S'} = X \underset{S}{\times} S'$.

Dado $f\colon X^1 \longrightarrow X^2$ un morfismo en (Sch,S), consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X^2_{S'} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X^2 \arrow[dd] \\
X^1_{S'} \arrow[ur, dashed, "f_{S'}"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & X^1 \arrow[ur, "f"'] \arrow[dr] & \\
& S' \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

Los morfismos $X^1_{S'} \longrightarrow S'$ y $X^2_{S'} \longrightarrow X^2$ definen un único morfismo $f_{S'}\colon X^1_{S'} \longrightarrow X^2_{S'}$, que es un morfismo en (Sch,S'). Definimos, entonces, $g'(f) = f_{S'}$.

(3.2.2) DEFINICION

Sea $f\colon (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas y sea $y \in Y$. Sea $K(y)$ el cuerpo residual de $\theta_{Y.y}$ y sea $(\mathrm{Spec}(K(y)), \theta_{K(y)}) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ el morfismo natural existente.

Definimos la <u>fibra de f en el punto y</u>, como el esquema $(X \times_Y \mathrm{Spec}(K(y)), \theta_{X \times_Y \mathrm{Spec}(K(y))})$. Se verifica que $X \times_Y \mathrm{Spec}(K(y)) \approx f^{-1}(y)$ como espacios topológicos.

(3.2.3) TEOREMA

En cada una de las clases I_i, definidas en 3.1, se verifican las tres siguientes propiedades:

(i) Todo isomorfismo está en I_i.

(ii) El compuesto de dos morfismos de I_i está en I_i.

(iii) Cualquier cambio de base de un morfismo de I_i está en I_i.

DEMOSTRACION

Ya que (i) es trivial en cada una de las clase I_i, pasemos a demostrar (ii) y (iii)

(ii) Veamoslo en la clase de morfismos separados, I_6, y en la clase de morfismos propios, I_7; pues en el resto de las clases es trivial.

En principio, se verifica el siguiente resultado: Sean $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ morfismos de esquemas, (donde omitimos la estructura haz para mayor comodidad), sea $(X \times_Y X, p,q)$ el producto de $f\colon X \longrightarrow Y$ por si mismo. Si denotamos por $j = (p,q)\colon X \times_Y X \longrightarrow X \times_Z X$, el morfismo inducido por p y q, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta X/Y"] \arrow[rr, bend left, "\Delta X/Z"] \arrow[dr, "f"'] & X \times_Y X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "fop"] & X \times_Z X \arrow[d, "f \times_Z f"] \\
& Y \arrow[r, "\Delta Y/Z"] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

Además, $(X \underset{Y}{\times} X, j, fop)$ es el producto de $\Delta_{Y/Z}: Y \longrightarrow Y \underset{Z}{\times} Y$ y $f \underset{Z}{\times} f: X \underset{Z}{\times} X \longrightarrow Y \underset{Z}{\times} Y$.

La demostración la omitimos pues es bastante fácil, no hay más que jugar con la propiedad universal del producto fibrado.

Teniendo en cuenta ésto, si los morfismos f y g son separados así lo es gof, ya que por se f separado, $\Delta_{X/Y}$ es una inmersión cerrada, y por serlo g, $\Delta_{Y/Z}$ es también una inmersión cerrada. Puesto que $j = (\Delta_{Y/Z})_{X \underset{Z}{\times} X}$, j es también una inmersión cerrada, pues como veremos en (iii), cualquier cambio de base de una inmersión cerrada es una inmersión cerrada.

Por tanto, como $\Delta_{X/Z} = jo\, \Delta_{X/Y}$, entonces $\Delta_{X/Z}$ es una inmersión cerrada y gof es un morfismo separado.

Supongamos, ahora, que f y g son morfismos propios, entonces gof es separado, localmente de tipo finito y además cerrado , pues la composición de dos morfismos cerrados es cerrada.

Nos falta ver que si $Z' \longrightarrow Z$ es cualquier morfismo de esquemas, entonces el morfismo $(gof)_{Z'}: X_{Z'} \longrightarrow Z'$, obtenido por cambio de base, es cerrado. Pero considerando el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X_{Y_{Z'}} \arrow[r] \arrow[d, "f_{Y_{Z'}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y_{Z'} \arrow[r] \arrow[d, "g_{Z'}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
Z' \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

se verifica que $X_{Z'} \simeq X_{Y_{Z'}}$ y $(gof)_{Z'} = g_{Z'} o f_{Y_{Z'}}$. Como f y g son universalmente cerrados, $g_{Z'}$ y $f_{Y_{Z'}}$ son cerrados, por tanto $(gof)_{Z'}$ es cerrado, luego gof es propio.

(iii) Es suficiente demcstrar que si $f\colon X \longrightarrow S$ es un morfismo que está en I_i entonces $f_{S'}\colon X_{S'} \longrightarrow S'$ está en I_i, donde $f_{S'}$ es el morfismo obtenido por extensión base de f a partir de $g\colon S' \longrightarrow S$, es decir, tal que el siguiente cuadrado es cartesiano:

$$\begin{tikzcd} X_{S'} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_{S'}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

Morfismos localmente de tipo finito :

Sea $x' \in X_{S'}$ y sean $x = p(x')$ y $s' = f_{S'}(x')$. Sea $s = (f \circ p)(x') = (g \circ f_{S'})(x')$.

Ya que f es localmente de tipo finito, sea $V = \operatorname{Spec}(A)$ un entorno afín de $s \in S$ tal que existe un entorno abierto afín de $x \in X$, $U = \operatorname{Spec}(C)$, con C una A-álgebra finitamente generada. Sea $V' = \operatorname{Spec}(B)$ un entorno abierto afín de $s' \in S'$ tal que $s' \in V' \subseteq g^{-1}(V)$.

Entonces $p^{-1}(U) \cap f_{S'}^{-1}(V') = U \times_V V' = \operatorname{Spec}(C \otimes_A B)$, es un entorno abierto afín de $x' \in X_{S'}$, y puesto que C es una A-álgebra finitamente generada, $C \otimes_A B$ es una B-álgebra finitamente generada. Ya que $p^{-1}(U) \cap f_{S'}^{-1}(V') \subseteq f_{S'}^{-1}(V')$, tenemos demostrado que $f_{S'}$ es localmente de tipo finito.

Morfismos de tipo finito :

Se puede ver, fácilmente, que un morfismo es de tipo finito si y sólo si es localmente de tipo finito y cuasi-compacto.

Entonces (iii) se verifica para morfismos de tipo finito, por verificarse para morfismos localmente de tipo finito y para morfismos cuasi-compactos, como veremos posteriormente.

Morfismos finitos :

Sea $U' \subseteq S'$ un abierto afín, y para cada $s' \in U'$, sea $V = \operatorname{Spec}(A)$ un entorno abierto afín de $g(s')$ en S. Sea $W = \operatorname{Spec}(C)$ un entorno abierto afín de s' contenido en $U' \subseteq g^{-1}(V)$. Será suficiente demostrar que $f_{S'}^{-1}(W)$ es afín.

Ya que f es finito, $f^{-1}(V) = U = \operatorname{Spec}(B)$, con B una A-álgebra que es finita como A-módulo. Entonces $f_{S'}^{-1}(W) = U \times_V W = \operatorname{Spec}(C \otimes_A B)$, y puesto que B es una

A-álgebra que es finita como A-módulo, entonces $C \otimes_A B$ es una C-álgebra finita como C-módulo. Así $f_{S'}$ es un morfismo finito.

Morfismos cuasi-compactos :

Sea U' un abierto afín de S' y para cada $s' \in U'$, sea V un entorno abierto afín de g(s') en S. Sea W un entorno abierto afín de s' contenido en $U' \cap g^{-1}(V)$. Será suficiente demostrar que $f_{S'}^{-1}(W)$ es compacto.

Ya que f es cuasi-compacto, $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, donde cada U_i es un abierto afín Entonces $f_{S'}^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times_V W$, y puesto que $U_i \times_V V$ es afín, para todo $i = 1,\dots,n$, y por tanto compacto, $f_{S'}^{-1}(W)$ es compacto.

Morfismos cuasi-finitos:

Ya que cualquier cambio de base de un morfismo de tipo finito es de tipo finito, únicamente tenemos que ver que $f_{S'}$ tiene fibras finitas.

Sea $z' \in S'$ y sea $z = g(z')$, entonces el morfismo $\theta_{S,z} \longrightarrow \theta_{S',z'}$ da lugar a un morfismo entre los cuerpos residuales: $K(z) \longrightarrow K(z')$.

Por (3.2.2), tenemos: $f_{S'}^{-1}(z') \approx X_{S'} \times_{S'} \operatorname{Spec}(K(z')) = (X \times_S S') \times_{S'} \operatorname{Spec}(K(z'))$
$\approx X \times_S \operatorname{Spec}(K(z')) \approx (X \times_S \operatorname{Spec}(K(z)) \times_{\operatorname{Spec}(K(z'))} \operatorname{Spec}(K(z')) \approx$
$\approx f^{-1}(z) \times_{\operatorname{Spec}(K(z))} \operatorname{Spec}(K(z'))$.

Ya que f es cuasi-finito, $f^{-1}(z)$ es finito y entonces $f_{S'}^{-1}(z')$ es finito.

Morfismos separados :

Identificamos $X_{S'} \times_{S'} X_{S'}$ con $(X \times_S X) \times_S S'$. Se verifica que

$(\Delta_{X/Y})_{S'} = \Delta_{X_{S'}/S'} : X_{S'} \longrightarrow X_{S'} \times_{S'} X_{S'}$, como se puede demostrar fácilmente. Con lo que si f es separado, $\Delta_{X/Y}$ es una inmersión cerrada, y como veremos posteriormente, $(\Delta_{X/Y})_{S'}$ es también una inmersión cerrada. Por tanto $f_{S'}$ es un morfismo separado.

Morfismos propios :

Por lo visto anteriormente, $f_{S'}$ es separado y de tipo finito. Además por ser f propio, $f_{S'}$ es cerrado. Sea, ahora, $Z \longrightarrow S'$ cualquier morfismo 'de esquemas. Tenemos que ver que $(f_{S'})_Z : (X_{S'})_Z \longrightarrow Z$ es cerrado.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
(X_{S'})_Z & \longrightarrow & X_{S'} & \longrightarrow & X \\
{\scriptstyle (f_{S'})_Z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{S'}} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
Z & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S
\end{array}$$

Sabemos que al ser los dos cuadrados cartesianos, también lo es el grande, por tanto, $(X_{S'})_Z = X_Z$ y $(f_{S'})_Z = f_Z$ luego $(f_{S'})_Z$ es cerrado.

Morfismos planos :

Sea $x' \in X_{S'}$ y sean $y' = f_{S'}(x')$, $x = p(x')$. Sea $y = (fop)(x') = (gof_{S'})(x')$.

Sea $V = \mathrm{Spec}(A)$ un entorno abierto afín de y en S y $U = \mathrm{Spec}(B)$ un entorno abierto afín de x en X, tal que $U \subseteq f^{-1}(V)$. Por ser f un morfismo plano, el morfismo de anillos inducido, $A \longrightarrow B$, es plano.

Sea $W = \mathrm{Spec}(C)$ un entorno afín de y' en S' tal que $W \subseteq g^{-1}(V)$. Entonces $U \times_V W \simeq \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$ es un entorno afín de x' en $X_{S'}$ y $f_{S'}(U \times_V W) \subseteq W$. El morfismo inducido $C \longrightarrow B \otimes_A C$ es plano, por serlo $A \longrightarrow B$ y ya que para cualquier C-módulo M, $(B \otimes_A C) \otimes_C M \simeq B \otimes_A M$. Por tanto $f_{S'}$ es plano.

Morfismos fielmente planos:

Por lo visto anteriormente, $f_{S'}$ es plano; por ser el cuadrado cartesiano y f sobreyectiva, $f_{S'}$ también lo es. Por tanto $f_{S'}$ es un morfismo fielmente plano.

Morfismos no ramificados :

Nos basamos en un resultado de ([26] , Proposición 3.2, pág 21), concretamente en el siguiente resultado: " Sea $f: X \longrightarrow S$ un morfismo de esquemas localmente de tipo finito. f es no ramificado si y sólo si para todos los morfismos $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow S$, con K un cuerpo separablemente cerrado, el morfismo $X \times_S \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ es no ramificado ".

Sea entonces un morfismo $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow S'$, con K separablemente cerrado. Considerando el morfismo $\mathrm{Spec}(K) \longrightarrow S' \longrightarrow S$ y puesto que f es no ramificado, el morfismo $X \times_S \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ es no ramificado.

Entonces, $X_{S'} \times_{S'} \mathrm{Spec}(K) \simeq (X \times_S S') \times_{S'} \mathrm{Spec}(K) \simeq X \times_S \mathrm{Spec}(K)$, y por tanto el morfismo $X_{S'} \times_{S'} \mathrm{Spec}(K) \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$ es no ramificado.

Así, ya que $f_{S'}$ es localmente de tipo finito por lo visto anteriormente, $f_{S'}$ es no ramificado.

Morfismos étale:

Como hemos visto (iii) es cierto para morfismos planos y no ramificados, por tanto también será cierto para morfismos étale.

Inmersiones abiertas:

Si f es una inmersión abierta, entonces $X_{S'} = g^{-1}(f(X))$, luego $f_{S'}$ es también una inmersión abierta.

Inmersiones cerradas:

En principio, veamos que el resultado es cierto para el caso de considerar esquemas afines: Suponemos que $f\colon \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es una inmersión cerrada y $g\colon \mathrm{Spec}(C) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es un morfismo cualquiera; tenemos que ver que $f'\colon \mathrm{Spec}(B \otimes_A C) \longrightarrow \mathrm{Spec}(C)$ es también una inmersión cerrada.

Supongamos que f y g vienen definidos por los morfismos de anillos $\rho\colon A \longrightarrow B$ y $\psi\colon A \longrightarrow C$, respectivamente; entonces f' es el morfismo definido por el morfismo de anillos $\rho \otimes_A 1_C\colon C \longrightarrow B \otimes_A C$, identificando C con $A \otimes_A C$

Por ser f una inmersión cerrada, $f\colon \theta_A \longrightarrow f_* \theta_B$ es sobreyectivo, por tanto $f_A \equiv \rho\colon A \longrightarrow B$ es sobreyectivo, luego $\rho \otimes_A 1_C$ es sobreyectivo y así f' es una inmersión cerrada, vease (2.2.8).

Pasemos a demostrarlo para esquemas cualesquiera. Es fácil demostrar que un morfismo $f\colon X \longrightarrow S$ es una inmersión cerrada si y sólo si para todo recubrimiento por abiertos afines, $\{V_i\}_{i\in I}$, de S, los morfismos $f|U_i\colon U_i \longrightarrow V_i$, $i\in I$, son inmersiones cerradas, donde $U_i = f^{-1}(V_i)$.

Luego para ver que $f_{S'}\colon X_{S'} \longrightarrow S'$ es una inmersión cerrada partimos de un recubrimiento $\{V_i'\}_{i\in I}$, de S' por abiertos afines: $V_i' = \mathrm{Spec}(C_i)$.

Para cada $i\in I$, existe un abierto afín $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ en S tal que $g(V_i') = V_i$. Puesto que f es una inmersión cerrada, $f^{-1}(V_i) = U_i$ es afín (2.2.8), suponemos que $U_i \simeq \mathrm{Spec}(B_i)$ y $f|U_i : \mathrm{Spec}(B_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_i)$ es una inmersión cerrada.

Como $f_{S'}^{-1}(V_i') = U_i \underset{V_i}{\times} V_i' \simeq \mathrm{Spec}(B_i \underset{A_i}{\otimes} C_i)$, entonces $f_{S'}|U_i \underset{V_i}{\times} V_i'$ es una inmersión cerrada, para todo $i \in I$, luego $f_{S'}$ es una inmersión cerrada.

(3.2.4) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un esquema. Para cada una de las clases I_i, $i = 1,\ldots,13$, consideramos la subcategoría plena de la coma-categoría de morfismos a (X,θ_X), (Sch,X), cuyos objetos son los morfismos a X que están en I_i. Notaremos a cada una de estas categorías por $(I_i)_X$.

Si notamos por $I_{i_1,\ldots,i_k} = I_{i_1} \cap \ldots\ldots \cap I_{i_k}$, consideraremos también las categorías $(I_{i_1,\ldots,i_k})_X$, definidas de igual forma.

(3.2.5) PROPOSICION

En cada una de las categorías $(I_i)_X$, así como en $(I_{i_1,\ldots,i_k})_X$, existen productos finitos.

DEMOSTRACION

En efecto, si $Y_1 \longrightarrow X$ e $Y_2 \longrightarrow X$ son dos elementos de $(I_i)_X$, definimos su producto como $Y_1 \underset{X}{\times} Y_2 \longrightarrow X$, que es un elemento de $(I_i)_X$ por (3.2.3(iii)). De igual forma se define en las categorías $(I_{i_1,\ldots,i_k})_X$.

(3.2.6) DEFINICION

En cada categoría $(I_i)_X$, definimos una topología de Grothendieck τ_i, como sigue:

Para cualquier objeto $Y \longrightarrow X$ de $(I_i)_X$, consideramos las familias de morfismos en $(I_i)_X$, $\{\phi_k : U_k \longrightarrow Y\}_{k\in K}$, con $\phi_k \in I_i$ para todo $k \in K$, y tales que $Y = \bigcup_k \phi_k(U_k)$.

τ_i será el conjunto de todas las familias $\{\phi_k : U_k \longrightarrow Y\}$, definidas.

Por el teorema (3.2.3), se deduce inmediatamente que τ_i es una topología de

Grothendieck, y tenemos, pues, las categorías topológicas $((I_i)_X, T_i)$, $i=1,\dots,13$.

De igual forma definimos las categorías topológicas $((I_{i_1 \dots i_k})_X, T_{i_1 \dots i_k})$, para $i_1,\dots,i_k$ $1,\dots,13$.

Si $I_{i_1 \dots i_k} \subseteq I_{j_1 \dots j_h}$, podemos considerar, entonces, la categoría topológica $((I_{j_1 \dots j_h})_X, T_{i_1 \dots i_k})$.

Para el caso en que $i = 12$, es decir la clase de inmersiones abiertas, notaremos $((I_{12})_X, T_{12})$ por (Zar/X, Zar(X)) y la llamaremos <u>categoría topológica de Zariski</u> .

Si consideramos la clase $I_2 \cap I_{11} = I_{2,11}$, es decir, la clase de morfismos étale de tipo finito , notaremos $((I_{2,11})_X, T_{2,11})$ por (étf/X, (étf)(X)) y la llamaremos <u>categoría topológica étale y de tipo finito</u> .

Por último, considerando las clases I_1 e $I_{1,8} = I_1 \cap I_8$, es decir, las clases de morfismos localmente de tipo finito, y de morfismos localmente de tipo finito y planos, respectivamente, ya que $I_{1,8} \subseteq I_1$, podemos considerar la categoría topológica $((I_1)_X, T_{1,8})$ que notaremos por (lf/X, Plf(X)) y la llamaremos <u>categoría topológica plana y localmente de tipo finito</u>.

(3.2.7) LEMA

Sea $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas, entonces $\Delta_{X/Y}: X \longrightarrow X \times_Y X$ es un morfismo localmente de tipo finito.

DEMOSTRACION

Por (2.6.3), $\Delta_{X/Y}(X)$ es un subesquema cerrado de un subesquema abierto W de $X \times_Y X$. Entonces para $x \in X$ existe un entorno afín de f(x), $V \subseteq X \times_Y X$, y un entorno abierto afín de x, $U \subseteq X$, tal que $f|U: U \longrightarrow V$ es una inmersión cerrada. Si U = Spec(A) y V = Spec(B), del hecho de que $f|U$ sea una inmersión cerrada deducimos que A es un anillo cociente de B y por tanto una B-álgebra de tipo finito.

Así $\Delta_{X/Y}$ es localmente de tipo finito.

(3.2.8) LEMA

Sea f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo localmente de tipo finito. Si f es no ramificado entonces $\Delta_{X/Y}$ es una inmersión abierta.

DEMOSTRACION

Veamos primero que si f es no ramificado entonces $\Omega_{X/Y}$ es cero, donde $\Omega_{X/Y}$ está definido en (2.6.4).

Para ello veamos que $(\Omega_{X/Y})_x = 0$, para todo $x \in X$. Ya que si $U = \mathrm{Spec}(B)$ es un entorno abierto afín de x y $V = \mathrm{Spec}(A)$ es un entorno abierto afín de f(x) tal que $f(U) \subseteq V$, entonces $(\Omega_{X/Y})_x = (\Omega_{B/A})_x$, podemos reducirnos al caso en que $X = \mathrm{Spec}(B)$ e $Y = \mathrm{Spec}(A)$ sean afines; así mismo podemos reducirnos al caso en que $A \longrightarrow B$ sea un morfismo local de anillos locales. Por el lema de Nakayama, podemos reducirnos al caso en que A y B son cuerpos, y puesto que f es no ramificado, entonces B será una extensión separable finita de A; es un hecho estandar que ésto implica que $\Omega_{B/A} = 0$.

Sabemos que $\Delta_{X/Y}: X \longrightarrow X \times_Y X$ nos da un homeomorfismo de X en un subésquema de un subesquema abierto V de $X \times_Y X$, es decir $\Delta_{X/Y}: X \longrightarrow V$ es una inmersión cerrada. Sea I el haz de ideales sobre V definiendo X. Entonces I/I^2, considerado como θ_X- módulo, es isomorfo a $\Omega_{X/Y}$, y por tanto es cero.

Usando el lema de Nakayama, esto implica que $I_x = 0$, para todo $x \in X$, es decir, $I = 0$ sobre algún subconjunto abierto ,U , de V conteniendo a X. Luego $(X,0_X) \simeq (U,0_U)$ es un subesquema abierto de $X \times_Y X$ y por tanto $\Delta_{X/Y}$ es una inmersión abierta.

(3.2.9) LEMA

En las clases de morfismos: I_1, I_3, I_6, I_7, I_{10}, I_{11}, I_{12}, I_{13}, se verifica la siguiente propiedad:

" Sea $Y_1 \xrightarrow{f} Y_2 \xrightarrow{g} X$. Si $gof \in I_i$ y $g \in I_i$, entonces $f \in I_i$ ".

DEMOSTRACION

<u>Morfismos localmente de tipo finito :</u>

En este caso se verifica una propiedad más fuerte: " Si $gof \in I_i$ entonces $f \in I_i$"

En efecto, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[d, dashed, "\Gamma_f"'] \arrow[drr, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "1_{Y_1}"'] & & \\ Y_1 \times_X Y_2 \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "q"] & & Y_2 \arrow[d, "g"] \\ Y_1 \arrow[rr, "gof"] & & X \end{tikzcd}$$

Entonces $f = p o \Gamma_f$. Ya que gof es localmente de tipo finito, por (3.2.3(iii)) p es localmente de tipo finito. Por otra parte el siguiente cuadrado es cartesiano:

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d, "f"'] & Y_1 \times_X Y_2 \arrow[d, "f \times_X 1_{Y_2}"] \\ Y_2 \arrow[r, "\Delta_{Y_2/X}"] & Y_2 \times_X Y_2 \end{tikzcd}$$

y $\Delta_{Y_2/X}$ es localmente de tipo finito por (3.2.7), así por (3.2.3(iii)) Γ_f es localmente de tipo finito y por tanto, por (3.2.3(ii)) $f = p o \Gamma_f$ es localmente de tipo finito.

Morfismos finitos :

Expresamos $f = p o \Gamma_f$. El morfismo p es finito por serlo gof y por (3.2.3(iii)) Si g es finito entonces g es propio, por (3.3.3(i)) posterior, y entonces $\Delta_{Y_2/X}$ es una inmersión cerrada y por tanto es finita, por (3.3.2(iv)) posterior, así Γ_f es finito y $f = p o \Gamma_f$ es finito.

Morfismos separados :

Expresamos $f = p o \Gamma_f$. p es separado por serlo gof y por (3.2.3(iii)). Si g es separado entonces $\Delta_{Y_2/X}$ es una inmersión cerrada y, por (3.3.2(v)), es un morfismo separado; así Γ_f es separado y por tanto f es también separado.

Morfismos propios:

En este caso se verifica una propiedad más fuerte: " Si gof es propio y g es separado entonces f es propio. "

En efecto, expresamos $f = p o \Gamma_f$. p es propio por serlo gof. Si g es separado entonces $\Delta_{Y_2/X}$ es una inmersión cerrada y, por (3.3.2(vi)), es una inmersión cerrada; así Γ_f es propio y por tanto f es, también, propio.

Morfismos no ramificados :

Expresamos $f = p \circ \Gamma_f$. El morfismo p es no ramificado por serlo gof. Si g es no ramificado entonces, por (3.2.8), $\Delta_{Y_2/X}$ es una inmersión abierta, y , por (3.3.1(iv)) posterio, es no ramificado; así Γ_f es no ramificado y por tanto f es no ramificado.

Morfismos étale:

En este caso se verifica que si gof es étale y g es no ramificado entonces f es étale. Es una consecuencia inmediata del caso anterior.

Inmersiones abiertas :

Si gof es una inmersión abierta entonces $(Y_1, \theta_{Y_1}) \simeq (V, \theta_V)$, para V un abierto de X. A su vez, por ser g una inmersión abierta, $(Y_2, \theta_{Y_2}) \simeq (U, \theta_U)$, para U un abierto de X.

Puesto que $\mathrm{Imag}(gof) \subseteq \mathrm{Imag}(g)$, entonces $V \subseteq U$ y (V, θ_V) es un subeaquema abierto de (U, θ_U).

Por tanto f es una inmersión abierta.

Inmersiones cerradas :

Expresamos $f = p \circ \Gamma_f$. El morfismo p es una inmersión cerrada por serlo gof. Si g es una inmersión cerrada, por (3.3.2(v)) postrior, g es un morfismo separado y por tanto $\Delta_{Y_2/X}$ es una inmersión cerrada; así Γ_f es una inmersión cerrada , luego f es tambien una inmersión cerrada.

(3.2.10) TEOREMA

En las categorías $(I_i)_X$, con $i \in \{1,3,6,7,10,11,12,13\}$, así como en las categorías $(I_{i_1 \ldots i_k})_X$, con $i_1, \ldots, i_k \subset \{1,3,6,7,10,11,12,13\}$, existen límites finitos.

DEMOSTRACION

Para demostrarlo veamos que en cada una de ellas existen productos finitos y el igualador de dos morfismos cualesquiera.

Por (3.2.5), existen productos finitos en cada una de ellas.

Sean $f_1, f_2 : U' \rightrightarrows U$ en $(I_i)_X$, entonces por (3.2.9), $f_1, f_2 \in I_i$.

Consideremos los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
U' \arrow[d, dashed, "\Gamma_{f_1}"'] \arrow[dr, "1_{U'}"] \arrow[dd, bend right=60, "f_1"'] & \\
U' \times_X U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & U' \arrow[d] \\
U \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U' \arrow[d, dashed, "\Gamma_{f_2}"'] \arrow[dr, "1_{U'}"] \arrow[dd, bend right=60, "f_2"'] & \\
U' \times_X U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & U' \arrow[d] \\
U \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
$$

Ya que Γ_{f_1} y Γ_{f_2} son morfismos en $(I_i)_X$, entonces, por (3.2.9), pertenecen a I_i; ya que el cuadrado:

$$
\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & U' \arrow[d, "\Gamma_{f_2}"] \\
U' \arrow[r, "\Gamma_{f_1}"] & U' \times_X U
\end{tikzcd}
$$

es cartesiano, entonces, por (3.2.3(iii)), $f \in I_i$, con lo que $U_0 \longrightarrow X \in (I_i)_X$.

Además $U_0 \xrightarrow{f} U'$ es el igualador de los morfismos f_1, f_2.

En efecto, en principio $f_1 o f = f_2 o f$, pues $\Gamma_{f_1} o f = \Gamma_{f_2} o f$ con lo que

$f_1 o f = q o \Gamma_{f_1} o f = q o \Gamma_{f_2} o f = f_2 o f$.

Sea $g: W \longrightarrow U'$ un morfismo tal que $f_1 o g = f_2 o g$. Entonces $\Gamma_{f_1} o g = \Gamma_{f_2} o g$

ya que $p o \Gamma_{f_1} o g = g = p o \Gamma_{f_2} o g$ y $q o \Gamma_{f_1} o g = f_1 o g = f_2 o g = q o \Gamma_{f_2} o g$.

Así existe un único morfismo $\lambda: W \longrightarrow U_0$ tal que $f o \lambda = g$.

3.3 ALGUNAS RELACIONES ENTRE LOS TIPOS DE MORFISMOS

(3.3.1) TEOREMA

Una inmersión abierta es:

(i) Localmente de tipo finito

(ii) Separada

(iii) Plana

(iv) No ramificada

(v) Étale

DEMOSTRACION

(i) Trivial

(ii) Si $f: X \longrightarrow Y$ es una inmersión abierta, entonces $X \times_Y X \simeq X$ y por tanto $\Delta_{X/Y}: X \longrightarrow X \times_Y X$ es un isomorfismo, en particular una inmersión cerrada. Por tanto f es un morfismo separado.

(iii) Sea $f: X \longrightarrow Y$ una inmersión abierta y sea x X, entonces $\theta_{X,x} \simeq \theta_{Y,f(x)}$ y por tanto el morfismo $\theta_{Y,f(x)} \longrightarrow \theta_{X,x}$ es plano. Así f es un morfismo plano.

(iv) Sea $f: X \longrightarrow Y$ una inmersión abierta, entonces, por (i), f es localmente de tipo finito.

Por otra parte, dado $x \in X$, sea $y = f(x) \in Y$, entonces, como $\theta_{X,x} \simeq \theta_{Y,f(x)}$, $K(x) \simeq K(f(x))$ y por tanto $K(f(x))$ es una extensión separable finita de $K(x)$. Así f es no ramificado.

(v) Es consecuencia inmediata de (iii) y (iv).

(3.3.2) TEOREMA

Una inmersión cerrada es:

(i) Localmente de tipo finito

(ii) Cuasi-compacta

(iii) Cuasi-finita

(iv) Finita

(v) Separada

(vi) Propia

DEMOSTRACION

(i) y (ii) son triviales.

(iii) Ya que todo morfismo localmente de tipo finito y cuasi-compacto es de tipo finito , toda inmersión cerrada es de tipo finito. Como además toda inmersión tiene fibras finitas, trivialmente, entonces toda inmersión cerrada es cuasi-finita.

(iv) Sea $f\colon Y \longrightarrow X$ una inmersión cerrada. Sea $U \subseteq X$ un abierto afín, entonces $f\colon f^{-1}(U) \longrightarrow U$ es también una inmersión cerrada, y puesto que U es afín $f^{-1}(U)$ es afín; además si $U = \operatorname{Spec}(A)$ entonces $f^{-1}(U) = \operatorname{Spec}(A/Q)$ para cierto ideal $Q \subset A$, con lo que A/Q es una A-álgebra finitamente generada como A-módulo. Deducimos por tanto que f es un morfismo finito.

(v) Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada, entonces $X \underset{Y}{\times} X \simeq X \underset{X}{\times} X \simeq X$, y por tanto $\Delta_{X/Y}$ es un isomorfismo y en particular una inmersión cerrada; luego f es separado.

(vi) Trivial

(3.3.3) TEOREMA

(i) Un morfismo finito es propio

(ii) Un morfismo $f\colon Y \longrightarrow X$, propio y cuasi-finito es finito; supuesto X un espacio topológico compacto.

DEMOSTRACION

(i) Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ un morfismo finito, para ver que f es propio tenemos que demostrar que es separado, de tipo finito y universalmente cerrado.

Evidentemente f es de tipo finito por ser finito. Por otra parte, para cualquier recubrimiento por abiertos afines de X, $\{U_i\}_{i \in I}$, el morfismo $f\colon f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ es un morfismo separado por ser un morfismo de esquemas afines (si $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec}(B_i)$ y $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$, el morfismo diagonal viene definido a partir del morfismo de anillos $\delta\colon B_i \underset{A_i}{\otimes} B_i \longrightarrow B_i$ dado por $b_i \otimes b_i' \longrightarrow b_i b_i'$. Este morfismo es sobreyectivo, y por tanto $B_i \simeq B_i \underset{A_i}{\otimes} B_i \,/\, \operatorname{Ker}(\delta)$ y así , por (2.4.12), $f^{-1}(U_i) = \operatorname{Spec}(B_i)$ es un subesquema cerrado de $\operatorname{Spec}(B_i \underset{A_i}{\otimes} B_i)$)

Ya que $\Delta_{X/Y}|f^{-1}(U_i) = \Delta_{f^{-1}(U_i)/U_i}$, entonces $\Delta_{X/Y}$ es una inmersión cerrada, y por tanto f es un morfismo separado.

Puesto que cualquier cambio de base de un morfismo finito es finito, (3.2.3(iii)), para demostrar que los morfismos finitos son cerrados , es suficiente demostrar que son cerrados. Pero, por (3.3.2(iv)) y por (3.2.3(ii)), es suficiente demostrar que aplican el espacio total en un conjunto cerrado.

Teniendo en cuenta que un subconjunto Z de un espacio topológico W es cerrado si y sólo si W puede recubrirse por abiertos, $\{U_i\}$, tal que $Z \cap U_i$ es cerrado en U_i, para todo i; puesto que f es finito, podemos suponer que es afín y viene definido por el morfismo de anillos $g: A \longrightarrow B$, donde B es una A-álgebra finita como A-módulo.

Sea $J = Ker(g)$, entonces f factoriza en: $Spec(B) \longrightarrow Spec(A/J) \longrightarrow Spec(A)$. La primera es sobreyectiva , pues B es entero sobre A/J, y la segunda es una inmersión cerrada; así f(Y) es cerrado en X, c.q.d.

(ii) Nos basamos en el siguiente resultado: " Si X es compacto, entonces cualquier morfismo cuasi-finito y separado, $f: Y \longrightarrow X$ se factoriza como : $Y \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} X$, donde f' es una inmersión abierta y g es finito." Vease ([26] , Teorema 1.8, pág 6).

Sea $f: Y \longrightarrow X$ un morfismo propio y cuai-finito. Factorizamos f como: $f = gof'$, donde g es un morfismo finito y f' es una inmersión abierta.

Por (i), g es propio y por tanto separado. Puesto que f es propio, por (3.2.9), f' es propio, es decir f' es una inmersión con imagen cerrada, por tanto f' es una inmersión cerrada. Entonces , por (3.3.2(iv)), f' es finito.

Luego $f = gof'$, es composición de morfismos finitos y por tanto es finito.

(3.3.4) TEOREMA

Cualquier morfismo plano localmente de tipo finito es abierto.

DEMOSTRACION

Nos basamos en el siguiente resultado ,([26] , Lema 2.13, pág 14),:

" Sea $f: Y \longrightarrow X$ de tipo finito. Para todos los pares (Z,U), donde Z es un subconjunto cerrado irreducible de Y y U es un subconjunto abierto tal que $Y\cap U \neq \emptyset$, existe un subconjunto abierto de X, V, tal que $\emptyset \neq V\cap \overline{f(Z)} \subset f(U\cap Z)$."

Sea entonces, $f: Y \longrightarrow X$ un morfismo plano y localmente de tipo finito. Por (3.2.3(ii)) y teniendo en cuenta que toda inmersión abierta ea plana y localmente de tipo finito (3.3.1(i),(iii)), para ver que f es abierto es suficiente ver que $f(Y)$ es abierto en X.

Podemos asumir que X es compacto. Sea $W = X-f(Y)$ y sean $Z_1,\dots,Z_n$, las componentes irreducibles de $\overline{W}$. Sea z_j el punto genérico de Z_j, es decir, $\overline{z_j} = Z_j$. (Este punto genérico existe por ser X un esquema y es único por ser Z_j irreducible)

Si $z_j \in f(Y)$, $z_j = f(y)$, entonces el lema anterior aplicado a $(\overline{y}, Y)$ nos dice que existe un abierto U de X tal que $z_j \in U\cap Z_j \subset f(U)$. Pero entonces $z_j \in U\cap (X- \bigcup_{i\neq j} Z_i) \subset f(Y)$, y como U y $X- \bigcup_{i\neq j} Z_i$ son abiertos, ésto nos quiere decir que $z_j \notin \overline{W}$, lo cual es una contradicción.

Así $z_j \in W$ y por tanto $Z_j \subset W$; luego $\overline{W} = \bigcup_j Z_j \subset W$, de donde W es cerrado en X y por tanto $f(Y)$ es abierto en X.

(3.3.5) PROPOSICION

Sean J_1 y J_2 dos clases de morfismos de esquemas del tipo a las definidas en 3.1. Supongamos además que $J_1 \subset J_2$; considerando, entonces, los morfismos de categorías topológicas:

$$((J_1)_X, \tau_1) \xrightarrow{\quad f \quad} ((J_2)_X, \tau_1) \xrightarrow{\quad g \quad} ((J_2)_X, \tau_2)$$

donde $f(Y \longrightarrow X) = Y \longrightarrow X$ y $g(Z \longrightarrow X) = Z \longrightarrow X$, se verifica:

(i) El funtor $f^*: S((J_2)_X, \tau_1) \longrightarrow S((J_1)_X, \tau_1)$ es exacto. Además

$F \simeq f^* f_* F$, para todo $F \in S((J_1)_X, \tau_1)$

(ii) El funtor $f_*: S((J_1)_X, \tau_1) \longrightarrow S((J_2)_X, \tau_1)$ es pleno y fiel.

(iii) Supongamos que para cada $U \longrightarrow X \in (J_2)_X$ y para cada recubrimiento $\{\lambda_i : U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_2$, de $U \longrightarrow X$, existe un recubrimiento, $\{\mu_j : V_j \longrightarrow U\}_{j \in J}$ en $\mathcal{T}_1$ que lo refina; en el sentido de que existe una aplicación $\tau: J \longrightarrow I$ y para cada $j \in J$, existe un morfismo $\phi_j : V_j \longrightarrow U_{\tau(j)}$ de forma que $\lambda_{\tau(j)} \circ \phi_j = \mu_j$.

Entonces, en estas condiciones, el funtor $g^*: S((J_2)_X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow S((J_2)_X, \mathcal{T}_1)$ es exacto.

(iv) Si para cada $U \longrightarrow X \in (J_1)_X$ y para cada recubrimiento de $U \longrightarrow X$ en $\mathcal{T}_1$ existe un recubrimiento en $\mathcal{T}_2$ de $U \longrightarrow X$, que lo refina, entonces el funtor $(gof)^*: S((J_2)_X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow S((J_1)_X, \mathcal{T}_1)$ es exacto.

DEMOSTRACION

(i) Sea $F \in S((J_2)_X, \mathcal{T}_1)$ y sea $Y \longrightarrow X \in (J_1)_X$, entonces $(f^*F)(Y \longrightarrow X) = F(f(Y \longrightarrow X)) = F(Y \longrightarrow X)$. Por tanto la exactitud de f^* es obvia, teniendo en cuenta que las topologías coinciden en ambas categorías topológicas.

Consideremos el funtor $f_*: (Ab)^{(J_1)^o_X} \longrightarrow (Ab)^{(J_2)^o_X}$. Sea $F \in (Ab)^{(J_1)^o_X}$ y sea $U \longrightarrow X \in (J_2)_X$, entonces por (1.2.1), $(f_*F)(U \longrightarrow X) = \varinjlim_{(Y,\phi)} F(Y)$, con $(Y,\phi) \in I^f_U$. Si tomamos $U \longrightarrow X \in (J_1)_X$, entonces $(U, 1_U)$ es un elemento inicial de I^f_U y por tanto $(f_*F)(U \longrightarrow X) = F(U \longrightarrow X)$.

Por (1.2.4), el funtor f_* sobre haces se obtenía como la composición: $f_* = sof_*oi$, donde s es el funtor hacificación e i es el funtor inclusión.

Sea $F \in S((J_1)_X, \mathcal{T}_1)$, veamos que f_*F coincide con F sobre los objetos $U \longrightarrow X \in (J_1)_X$. En efecto:

$$(f_*F)(U \longrightarrow X) = ((sof_*oi)F)(U \longrightarrow X) = ((sof_*)F)(U \longrightarrow X) = (s(f_*F))(U \longrightarrow X) =$$

$$= \varinjlim_{J_U} \operatorname{Ker}(\prod_i (f_*F)^+(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} (f_*F)^+(U_i \times_U U_j))$$

Por otra parte

$$(f_*F)^+(U_i \longrightarrow X) = \varinjlim_{J_{U_i}} \operatorname{Ker}(\prod_j (f_*F)(U_{ij}) \longrightarrow \prod_{j,k} (f_*F)(U_{ij} \times_{U_i} U_{ik}))$$

Como cada $U_{ij} \longrightarrow X \in (J_1)_X$, entonces $(f_* F)(U_{ij} \longrightarrow X) = F(U_{ij} \longrightarrow X)$, para todo j, y por tanto, por ser F un haz, $(f_* F)^{F}(U_i \longrightarrow X) = F(U_i \longrightarrow X)$. De la misma manera, $s(f_* F)(U \longrightarrow X) = F(U \longrightarrow X)$.

Entonces para ver que $F = f^* f_* F$, veamos que coinciden sobre los objetos $U \longrightarrow X$ de $(J_1)_X$:

$(f^* f_* F)(U \longrightarrow X) = (f_* F)(U \longrightarrow X) = F(U \longrightarrow X)$; c.q.d.

(ii) Es una consecuencia inmediata de (i)

(iii) Sea $F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta en $S((J_2)_X, \tau_2)$, tenemos que ver que $f^* F \longrightarrow f^* F'' \longrightarrow 0$ es exacta en $S((J_2)_X, \tau_1)$.

Sea $U \longrightarrow X \in (J_2)_X$ y sea $s \in (f^* F'')(U \longrightarrow X) = F''(U \longrightarrow X)$, entonces existe un recubrimiento de $U \longrightarrow X, \{\lambda_i : U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in \tau_2$, tal que $F''(\lambda_i)(s)$ está en la imagen del morfismo $F(U_i \longrightarrow X) \longrightarrow F''(U_i \longrightarrow X)$, y ello para cada $i \in I$.

Sea $\{\mu_j : V_j \longrightarrow U\}_{j \in J} \in \tau_1$, un recubrimiento de $U \longrightarrow X$ en τ_1 que refina al anterior. Fijemos un $j \in J$, y consideremos el triángulo:

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[dr, "\mu_j"'] & & U_{\tau(j)} \arrow[dl, "\lambda_{\tau(j)}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd} F(V_j) \arrow[r] \arrow[d, "F(\phi_{(j)})"'] & F''(V_j) \arrow[d, "F''(\phi_{(j)})"] \\ F(U_{\tau(j)}) \arrow[r] & F''(U_{\tau(j)}) \end{tikzcd}$$

conmuta, con lo que, ya que $(f^* F)(V_j \longrightarrow X) = F(V_j \longrightarrow X)$ y de igual forma para F'', entonces $(f^* F'')(V_j \longrightarrow U)(s)$ está en la imagen de $(f^* F)(V_j) \longrightarrow (f^* F'')(V_j)$.

Como ello es cierto para cada $j \in J$, entonces $f^* F \longrightarrow f^* F'' \longrightarrow 0$ es exacta, y por tanto f^* es exacto a derecha; como es exacto a idquierda por poseer un adjunto a idquierda, entonces es exacto.

(iv) Puesto que $(gof)^* = f^* o g^*$, y f^* es exacto por (i), y g^* es exacto por verificarse las hipótesis de (iii), entonces $(gof)^*$ es exacto.

(3.3.6) Por (3.3.1), sabemos que $I_{12} \subset I_i$, para $i \in \{1,6,8,10,11\}$, así tenemos definidos morfismos:

$$(Zar/X, Zar(X)) \xrightarrow{f_i} ((I_i)_X, Zar(X))$$

para cada $i \in \{1,6,8,10,11\}$.

Además, por (3.3.5(i)), f_i^* es exacto para cada i.

(3.3.7) Consideremos la clase de morfismos $I_{2,11} = I_2 \cap I_{11}$, es decir, morfismos étale y de tipo finito; y la clase I_{11} de morfismos étale. Ya que $I_{2,11} \subset I_{11}$, entonces podemos considerar el morfismo:

$$h: ((I_{2,11})_X, \tau_{2,11}) \longrightarrow ((I_{11})_X, \tau_{11})$$

Sea $U \longrightarrow X \in (I_{2,11})_X$ y sea $\{\lambda_i : U_i \longrightarrow U\}_{i \in I} \in \tau_{11}$, es decir, cada λ_i es étale, en particular localmente de tipo finito, y por tanto existe un recubrimiento por abiertos afines, $\{W_k\}_{k \in K}$, de U tal que $U_i = \lambda_i^{-1}(U) = \bigcup_k \lambda_i^{-1}(W_k) = \bigcup_k (\bigcup_h W_{kh}^i)$, donde W_{kh}^i es un abierto afín de U_i, para cada k, y para cada h.

Entonces el morfismo $W_{kh}^i \longrightarrow U_i \longrightarrow U$ es étale y de tipo finito, y por tanto $\{W_{kh}^i \longrightarrow U\} \in \tau_{2,11}$ y además es un refinamiento del recubrimiento de partida.

Así , por (3.3.5(iv)), h^* es exacto, ya que lo podemos expresar como $h = gof$, donde $f: ((I_{2,11})_X, \tau_{2,11}) \longrightarrow ((I_{11})_X, \tau_{2,11})$ y $g: ((I_{11})_X, \tau_{2,11}) \longrightarrow ((I_{11})_X, \tau_{11})$.

4. COHOMOLOGIA EN CATEGORIAS TOPOLOGICAS

4.1 COHOMOLOGIA DE HACES

(4.1.1) DEFINICION

Sea (T,τ) una categoría topológica. Sea U T y consideremos el funtor

$$\begin{aligned} \Gamma(U,-): S(T,\tau) &\longrightarrow Ab \\ F &\longmapsto \Gamma(U,F) = F(U) \end{aligned}$$

Este funtor es exacto a idquierda, pues es la composición:

$$S(T,\tau) \xrightarrow{i} Ab^{T^{o}} \xrightarrow{\Gamma(U,-)} Ab$$

ya que $\Gamma(U,-) : Ab^{T^{o}} \longrightarrow Ab$ es exacto, y el funtor inclusión, i, es exacto a idquierda. Por tanto $\Gamma(U,-)$ es aditivo y como $S(T,\tau)$ es una categoría de Grothendieck con suficientes inyectivos, podemos considerar sus funtores derivados a derecha, que notaremos por: $R^{q}(\Gamma(U,-)) = H^{q}_{T}(U,-)$.

(4.1.2) DEFINICION

Sea $F \in S(T,\tau)$. Para cada $q \geq 0$, consideramos el funtor:

$$\begin{aligned} H^{q}_{T}(-,F): T^{o} &\longrightarrow Ab \\ U &\longmapsto H^{q}_{T}(-,F)(U) = H^{q}_{T}(U,F) \end{aligned}$$

$H^{q}_{T}(-,F) \in Ab^{T^{o}}$, para todo $q \geq 0$.

(4.1.3) PROPOSICION

(i) $H^{0}_{T}(-,F) \cong F$

(ii) Si F es inyectivo, entonces $H^{q}_{T}(-,F) = 0$, para todo $q > 0$.

(iii) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces, entonces existe una sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow H^{1}_{T}(-,F') \longrightarrow H^{1}_{T}(-,F) \longrightarrow H^{1}_{T}(-,F'') \longrightarrow \ldots\ldots$$

DEMOSTRACION

(i) Ya que $\Gamma(U,-)$ es exacto a idquierda, entonces $H^{0}_{T}(U,F) = \Gamma(U,F) = F(U)$, para todo $U \in T$, por tanto $H^{0}_{T}(-,F) \cong F$.

(ii) Si F es inyectivo, entonces $H^q_T(U,F) = 0$ para todo $q > 0$ y para todo $U \in T$, por tanto $H^q_T(-,F) = 0$, para todo $q > 0$.

(iii) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces, para cada $U \in T$, obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow F'(U) \longrightarrow F(U) \longrightarrow F''(U) \longrightarrow H^1_T(U,F') \longrightarrow H^1_T(U,F) \;\ldots\ldots$$

y por tanto la sucesión exacta larga deseada.

(4.1.4) DEFINICION

Consideremos el funtor $i: S(T,\mathcal{T}) \longrightarrow Ab^{T^o}$. Este funtor es exacto a idquierda y por tanto aditivo; podemos considerar, pues, sus funtores derivados a derecha, que notaremos por: $R^q(i) = \mathcal{H}^q(-)$.

Así para $F \in S(T,\mathcal{T})$, $\mathcal{H}^q(F)$ es un prehaz para $q > 0$, y $\mathcal{H}^0(F) \equiv F$ considerado como prehaz.

(4.1.5) PROPOSICION

(i) Si F es inyectivo, entonces $\mathcal{H}^q(F) = 0$ para todo $q > 0$.

(ii) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces, entonces existe una sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow \mathcal{H}^1(F') \longrightarrow \mathcal{H}^1(F) \longrightarrow \mathcal{H}^1(F'') \ldots\ldots\ldots$$

DEMOSTRACION

Ambas propiedades se verifican por ser los funtores derivados a derecha de i.

(4.1.6) COROLARIO

$\mathcal{H}^q(-) \equiv H^q_T(-,-)$ para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

En efecto, por (4.1.3) y (4.1.5), los funtores $\mathcal{H}^q(-)$, $q \geq 0$, y $H^q_T(-,-)$, $q \geq 0$, son ambos los satélites del funtor $i: S(T,\mathcal{T}) \longrightarrow Ab^{T^o}$ y por tanto, por

$$, \mathcal{H}^q(-) = H^q_T(-,-) \text{ para todo } q \geq 0.$$

(4.1.7) PROPOSICION

Sea $F \in S(T,\mathcal{T})$, entonces $s(H^q_T(-,F)) = 0$ para todo $q > 0$; donde s es el funtor hacificación definido en (1.1.7).

DEMOSTRACION

Por (4.1.6), veamos que $s(\mathcal{H}^q(F)) = 0$, para todo $q > 0$.

Consideremos los funtores:

$$s: Ab^{T^o} \longrightarrow S(T,\mathcal{T})$$

$$i: S(T,\mathcal{T}) \longrightarrow Ab^{T^o}$$

$s \circ i = 1_{S(T,\mathcal{T})}$, s es exacto luego sus funtores derivados a derecha se anulan, e i es exacto a idquierda y lleva inyectivos en s-acíclicos trivialmente. Entonces, por ([18], Teorema 9.3, pág 299), obtenemos la correspondiente sucesión espectral de Grothendieck:

$$R^p s[R^q(i)(F)] \Longrightarrow R^{p+q}(1_{S(T,\mathcal{T})})(F)$$

Ya que $1_{S(T,\mathcal{T})}$ es exacto, $R^n(1_{S(T,\mathcal{T})})(F) = 0$ para todo $n > 0$; de igual forma por ser s exacto $R^p s[R^q(i)(F)] = 0$ para todo $p > 0$.

Luego $R^0 s[R^q(i)(F)] = 0$ para todo $q > 0$. Es decir $s(\mathcal{H}^q(F)) = 0$ para todo $q > 0$.

(4.1.8) DEFINICION

Sea $(T,\mathcal{T})$ una categoría topológica. Sea $F \in S(T,\mathcal{T})$. Diremos que F es un haz <u>flasgo</u> si $H^q_T(U,F) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $U \in T$.

(4.1.9) LEMA

Sea $F: \bar{A} \longrightarrow \bar{B}$ un funtor exacto a idquierda. Suponemos que $\bar{A}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $\bar{B}$ una categoría abeliana.

Sea A un objeto de $\bar{A}$ y

$$(*) \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow J^0 \xrightarrow{d^0} J^1 \xrightarrow{d^1} J^2 \ldots\ldots$$

una resolución de A tal que $R^i F(J^q) = 0$, para todo $i > 0$ y para todo $q \geq 0$. (Decimos que $J^\cdot$ es una resolución de A F-acíclica).

Entonces, para cada $i \geq 0$, existe un isomorfismo natural : $R^i F(A) \simeq H^i(F(J^\cdot))$.

DEMOSTRACION

Ya que F es un funtor exacto a idquierda, $R^0F(A) = F(A)$ y por la misma razón aplicando F a ($*$), obtenemos: $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(J^0) \longrightarrow F(J^1) \ldots\ldots$, con lo que $F(A) \simeq H^0(F(J^\bullet))$.

Sea
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & J^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[dr, "\lambda^0"'] & J^1 \arrow[r, "d^1"] & J^2 \ldots\ldots\ldots \\ & & K^0 \arrow[u, "\lambda^1"'] & \end{tikzcd}$$

y consideremos la sucesión exacta corta $A \longrightarrow J^0 \xrightarrow{\lambda^0} K^0$. Entonces obtenemos la sucesión exacta larga:

(1) $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(J^0) \xrightarrow{F(\lambda^0)} F(K^0) \longrightarrow R^1F(A) \longrightarrow 0\ldots\ldots\ldots$

de donde $R^1F(A) \simeq F(K^0)/\mathrm{Imag}(F(\lambda^0))$. Pero por otra parte consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(J^0) \arrow[r, "F(d^0)"] & F(J^1) \arrow[r, "F(d^1)"] & F(J^2)\ldots\ldots\ldots \\ F(K^0) \arrow[ur, "F(\lambda^1)"'] & & \end{tikzcd}$$

entonces $H^1(F(J^\bullet)) = (\mathrm{Ker}F(d^1))/(\mathrm{Imag}F(d^0)) = (\mathrm{Ker}F(d^1))/(\mathrm{Imag}F(\lambda^0)) =$ $= F(K^0)/(\mathrm{Imag}F(\lambda^0))$; donde hemos utilizado que $\mathrm{Ker}F(d^1) = F(K^0)$, lo cual es cierto ya que F es exacto a idquierda y por tanto $F(\lambda^1)$ es mónica.

Obtenemos pues: $H^1(F(J^\bullet)) \simeq R^1F(A)$.

De la sucesión (1) obtenemos, además, que $R^nF(A) \simeq R^{n-1}F(K^0)$, para todo $n \geq 2$

Como
$$\begin{tikzcd} K^0 \arrow[r] \arrow[dr] & J^1 \arrow[r] & J^2\ldots\ldots\ldots \\ & K^1 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

es también una resolución de K^0, se verificara, por el mismo procedimiento, que $R^nF(K^0) \simeq R^{n-1}F(K^1)$ para todo $n \geq 2$; o lo que es lo mismo, $R^{n-1}F(K^0) \simeq R^{n-2}F(K^1)$ para todo $n \geq 3$. Por tanto $R^nF(A) \simeq R^{n-2}F(K^1)$ para todo $n \geq 3$.

Continuando el proceso, obtenemos que $R^nF(A) \simeq R^1F(K^{n-2})$ para todo $n \geq 2$. Entonces considerando la resolución de K^{n-2}:

$$0 \longrightarrow K^{n-2} \longrightarrow J^{n-1} \longrightarrow J^{n} \ldots\ldots$$

obtenemos que $R^1F(K^{n-2}) \simeq H^1F(J^{n-1} \longrightarrow J^n \ldots\ldots) \simeq H^n(F(J^{\cdot}))$.

Por tanto, $R^nF(A) \simeq H^n(F(J^{\cdot}))$ para todo $n \geq 0$.

(4.1.10) LEMA

Sea $F: \bar{A} \longrightarrow \bar{B}$ un funtor exacto a idquierda, con $\bar{A}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos y $\bar{B}$ una categoría abeliana.

Sea $\pounds$ $\bar{A}$ una clase de objetos de $\bar{A}$ satisfacciendo:

(a) Para todo $A \in \bar{A}$ existe $0 \longrightarrow A \longrightarrow L$ exacta, con $L \in \pounds$

(b) Si $0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow A \longrightarrow 0$ es exacta en $\bar{A}$ y $L, L' \in \pounds$, entonces $A \in \pounds$ y $F(0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow A \longrightarrow 0)$ es exacta en $\bar{B}$.

(c) Si $A \oplus A' \in \pounds$. entonces $A \in \pounds$.

Entonces todos los inyectivos están en $\pounds$ y $R^qF(L) = 0$ para todo $q > 0$ y para todo $L \in \pounds$.

Por tanto, por (4.1.9), resoluciones de $\pounds$ pueden usarse para calcular los funtores R^qF.

DEMOSTRACION

Ver ([9], Lema (3.3.1), pág 158)

(4.1.11) PROPOSICION

Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de haces entonces:

(i) Si F' es flasgo, la sucesión es exacta considerándola como sucesión de pre-haces.

(ii) Si F' y F son flasgos, entonces F'' es flasgo.

(iii) Si $F \oplus G$ es flasgo entonces F es flasgo.

(iv) Todo haz inyectivo es flasgo.

DEMOSTRACION

(i) A partir de la sucesión exacta corta, y para cada $U \in T$, obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow F'(U) \longrightarrow F(U) \longrightarrow F''(U) \longrightarrow H^1_T(U,F') \ldots\ldots$$

Por ser F' flasgo, $H^1_T(U,F') = 0$ para todo $U \in T$, y por tanto para cada $U \in T$ tenemos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow F'(U) \longrightarrow F(U) \longrightarrow F''(U) \longrightarrow 0$; y esto es lo mismo que decir que $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de prehaces.

(ii) A partir de la sucesión exacta corta, y para cada $U \in T$, obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow F'(U) \longrightarrow F(U) \longrightarrow F''(U) \longrightarrow H^1_T(U,F') \longrightarrow H^1_T(U,F) \longrightarrow H^1_T(U,F'')\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow H^n_T(U,F) \longrightarrow H^n_T(U,F'') \longrightarrow H^{n+1}_T(U,F')\ldots\ldots\ldots$$

Puesto que F' y F son flasgos, entonces $H^n_T(U,F') = 0 = H^n_T(U,F)$, para todo $n > 0$ y para todo $U \in T$; por tanto $H^n_T(U,F'') = 0$, para todo $n > 0$ y para todo $U \in T$, es decir, F'' es flasgo.

(iii) Es consecuencia inmediata de que cohomología conmuta con sumas directas finitas.

(iv) Trivial.

(4.1.12) COROLARIO

Resoluciones flasgas pueden usarse para calcular los funtores derivados: $H^n_T(U,-)$ y $\mathcal{H}^n(-)$.

DEMOSTRACION

Sea $\mathcal{L}$ la clase de todos los haces flasgos. Por (4.1.11), $\mathcal{L}$ verifica las hipótesis de (4.1.10), y por tanto el corolario es cierto.

4.2 COHOMOLOGIA DE CECH

(4.2.1) Sea $(T,\mathcal{T})$ una categoría topológica. Sea $U \in T$ y sea $\mathcal{U} = \{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$ un recubrimiento de U. Para cada (p+1)-upla $(i_0,\ldots,i_p)$, con $i_j \in I$, escribimos

$$U_{i_0} \times_U \ldots\ldots \times_U U_{i_p} = U_{i_0 \ldots i_p}.$$

Sea $F \in Ab^{T^o}$. La proyección canónica:

$$p_{ij}: U_{i_0 \dots i_p} \longrightarrow U_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p} = U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_{j-1}} \times_U U_{i_{j+1}} \times \dots \times_U U_{i_p}$$

induce un morfismo $F(p_{ij}): F(U_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p}) \longrightarrow F(U_{i_0 \dots i_p})$.

Definimos un complejo de grupos abelianos: $C^{\cdot}(\mathfrak{U},F) = \{ C^p(\mathfrak{U},F), d^p \}_{p \geq 0}$, donde $C^p(\mathfrak{U},F) = \prod_{I^{p+1}} F(U_{i_0 \dots i_p})$ y el poerador borde

$$d^p: C^p(\mathfrak{U},F) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{U},F)$$

viene dado por: Si $s = (s_{i_0 \dots \dots i_p}) \in C^p(\mathfrak{U},F)$, entonces

$$(d^p s)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j F(p_{ij})(s_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p})$$

(4.2.2) DEFINICION

Para $\mathfrak{U} \in T$ y $F \in Ab^{T^o}$, los grupos de cohomología del complejo $C^{\cdot}(\mathfrak{U},F)$ se llaman: <u>Grupos de cohomología de Čech de F con respecto al recubrimiento $\mathfrak{U}$ de U</u>, que notaremos: $\check{H}^q(\mathfrak{U},F)$.

(4,2,3) TEOREMA

Si F es un prehaz inyectivo, entonces $H^p(\mathfrak{U},F) = 0$ para todo $p > 0$.

DEMOSTRACION

Tenemos que demostrar que el complejo de cocadenas

$$(*) \quad \prod_i F(U_i) \longrightarrow \prod_{i_0,i_1} F(U_{i_0 i_1}) \longrightarrow \prod_{i_0,i_1,i_2} F(U_{i_0 i_1 i_2}) \dots\dots\dots$$

es exacto.

Recalquemos que dado X un objeto de T, existe un prehaz $Z_X = i_*(Z) \in Ab^{T^o}$ (donde $i: \{X\} \longrightarrow T$ es el funtor inclusión, y $\{X\}$ la categoría definida en (1.2.2)), dado por $Z_X(V) = (i_* Z)(V) = \bigoplus_{Hom(V,X)} Z$.

Además, por ser i_* adjunto a idquierda de i^*, entonces, para cada $F \in Ab^{T^o}$, $Hom(i_* Z, F) \simeq Hom(Z, i^* F) = Hom(Z, F(X)) \simeq F(X)$.

Entonces el complejo ($*$) podemos escribirlo por:

$$\prod \mathrm{Hom}(Z_{U_i},F) \longrightarrow \prod \mathrm{Hom}(Z_{U_{i_0 i_1}},F) \longrightarrow \prod F(Z_{U_{i_0 i_1 i_2}},F)\ldots\ldots$$

o bien

$$\mathrm{Hom}(\oplus Z_{U_i},F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\oplus Z_{U_{i_0 i_1}},F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\oplus Z_{U_{i_0 i_1 i_2}},F)\ldots\ldots$$

Ya que F es inyectivo, la exactitud de esta última sucesión, queda demostrada si vemos que la sucesión:

$$\oplus Z_{U_i} \longrightarrow \oplus Z_{U_{i_0 i_1}} \longrightarrow \oplus Z_{U_{i_0 i_1 i_2}} \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$$

es exacta en Ab^{T^o}, esto es, si para todo $V \in T$, la sucesión siguiente es exacta:

$$\oplus Z_{U_i}(V) \longrightarrow \oplus Z_{U_{i_0 i_1}}(V) \longrightarrow \oplus Z_{U_{i_0 i_1 i_2}}(V) \ldots\ldots$$

Para cualquier $\phi \in \mathrm{Hon}(V,U)$, notaremos por $\mathrm{Hom}_{\phi}(U,U_{\alpha})$ como el conjunto de morfismo $\psi: V \longrightarrow U$ tal que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & U \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

es conmutativo

Entonces :

$$\mathrm{Hom}(V, U_{i_0 i_1 \ldots}) = \bigcup_{\mathrm{Hom}(V,U)} \mathrm{Hom}_{\phi}(V, U_{i_0 i_1 \ldots}) =$$

$$= \bigcup_{\mathrm{Hom}(V,U)} (\mathrm{Hom}_{\phi}(V,U_{i_0}) \times \mathrm{Hom}_{\phi}(V,U_{i_1}) \times \ldots\ldots)$$

Escribimos por $S(\phi) = \bigcup_i \mathrm{Hom}_{\phi}(V,U_i)$ (unión disjunta). Entonces

$$\bigcup_{i_0 \ldots i_p} \mathrm{Hom}(V,U_{i_0 \ldots i_p}) = \bigcup_{\mathrm{Hom}(V,U)} (S(\phi) \times \ldots\ldots \times S(\phi))$$

($(p+1)$ copias de $S(\phi)$), y $\oplus Z_{U_{i_0 \ldots i_p}}(V)$ es el grupo abeliano libre sobre $\bigcup_{\mathrm{Hom}(V,U)} (S(\phi) \times \ldots \times S(\phi))$. Por tanto el complejo puede escribirse por:

$$\bigoplus_{\mathrm{Hom}(V,U)} \left(\bigoplus_{S(\phi)} Z \longrightarrow \bigoplus_{S(\phi)\times S(\phi)} Z \longrightarrow \ldots\ldots\ldots \right)$$

que es exacto por serlo:

$$\bigoplus_{S(\phi)} Z \longrightarrow \bigoplus_{S(\phi)\times S(\phi)} Z \longrightarrow \ldots\ldots$$

Este último complejo es exacto, pues existe una contracción homotópica dada por:

$$(k^p(m))_{i_0\dots i_{p-1}} = m_{1 i_0 \dots i_{p-1}}$$

donde 1 es un elemento fijo de $S(\phi)$ y $m = (m_{i_0\dots i_p}) \in \bigoplus_{S(\phi)^{p+1}} Z$.

(4.2.4) PROPOSICION

Sea (T, τ) una categoría topológica. Sea $U \in T$ y $\mathcal{U} = \{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I} \in \tau$, un recubrimiento de U. Entonces tenemos definidos funtores:

$$\check{H}^q(\mathcal{U},F) : Ab^{T^o} \longrightarrow Ab$$
$$F \longmapsto \check{H}^q(\mathcal{U},F)$$

para cada $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

En efecto, únicamente tenemos que ver que si $F' \longrightarrow F$ es un morfismo en Ab^{T^o}, entonces tenemos definido un morfismo $\check{H}^q(\mathcal{U},F') \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U},F)$, para todo $q \geq 0$.

Pero dado $F' \longrightarrow F$, obtenemos un morfismo $F'(U_{i_0\dots i_p}) \longrightarrow F(U_{i_0\dots i_p})$, para cada (p+1)-upla , tal que el siguient diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F'(p_{ij}) : F'(U_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_p}) \arrow[r] \arrow[d] & F'(U_{i_0\dots i_p}) \arrow[d] \\
F(p_{ij}) : F(U_{i_0\dots\hat{i}_j\dots i_p}) \arrow[r] & F(U_{i_0\dots i_p})
\end{tikzcd}$$

Con lo que, para cada $p \geq 0$, obtenemos un morfismo $C^p(\mathcal{U},F') \longrightarrow C^p(\mathcal{U},F)$ de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
C^p(\mathcal{U},F') \arrow[r] \arrow[d, "d'^p"'] & C^p(\mathcal{U},F) \arrow[d, "d^p"] \\
C^{p+1}(\mathcal{U},F) \arrow[r] & C^{p+1}(\mathcal{U},F)
\end{tikzcd}$$

Es decir, tenemos un morfismo entre los complejos $C^{\cdot}(\mathcal{U},F') \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U},F)$, y por tanto un morfismo entre los grupos de cohomología, c.q.d.

(4.2.5) PROPOSICION

Los funtores $\check{H}^q(\mathcal{U},-)$ asocian sucesiones exactas largas a sucesiones exactas cortas.

DEMOSTRACION

En efecto, dada la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$, la sucesión $0 \longrightarrow C^p(\mathcal{U},F') \longrightarrow C^p(\mathcal{U},F) \longrightarrow C^p(\mathcal{U},F'') \longrightarrow 0$ es exacta, por ser producto de sucesiones exactas de grupos abelianos. Como esto es cierto para cada $p \geq 0$, obtenemos una sucesión exacta corta de complejos:

$0 \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U},F') \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U},F) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U},F'') \longrightarrow 0$, y por tanto la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U},F') \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U},F) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U},F'') \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{U},F') \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{U},F) \ldots\ldots$$

En particular, el funtor $\check{H}^0(\mathcal{U},-)$ es exacto a idquierda.

(4.2.6) COROLARIO

Los funtores $\check{H}^q(\mathcal{U},-)$ son los funtores derivados a derecha del funtor:

$$\check{H}^o(\mathcal{U},-): Ab^{T^o} \longrightarrow Ab.$$

DEMOSTRACION

En efecto, $\check{H}^0(\mathcal{U},-)$ es un funtor exacto a idquierda y por tanto aditivo, luego podemos considerar sus funtores derivados a derecha.

Por (4.2.3), si F es un prehaz inyectivo, entonces $\check{H}^q(\mathcal{U},F) = 0$, para $q > 0$.

Por (4.2.5), si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de prehaces, obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U},F') \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U},F) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U},F'') \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{U},F') \ldots\ldots\ldots$$

Por tanto, por la propiedad universal de los funtores derivados, se verificará que $R^q(\check{H}^0(\mathcal{U},-)) \simeq \check{H}^q(\mathcal{U},-)$ para todo $q \geq 0$.

(4.2.7) Sea $(T,\mathcal{T})$ una categoría topológica y sea $U \in T$. Consideremos la categoría J_U definida en (1.1.6); sea f: $U' = \{U'_j \longrightarrow U\}_{j\in J} \longrightarrow U=\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$ un morfismo en J_U; f viene dada por una aplicación $\tau: J \longrightarrow I$ y para cada $j \in J$ un morfismo $f_j: U'_j \longrightarrow U_{\tau(j)}$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} U'_j \arrow[rr, "f_j"] \arrow[dr] & & U_{\tau(j)} \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

La aplicación τ induce aplicaciones $\tau^p: C^p(U,F) \longrightarrow C^p(U',F)$, para F un prehaz, como sigue: Si $s = (s_{i_0 \dots i_p}) \in C^p(U,F)$ entonces

$$(\tau^p s)_{j_0\dots j_p} = F(f_{j_0} \times \dots\dots \times f_{j_p} : U'_{j_0\dots j_p} \longrightarrow U_{\tau(j_0)\dots\ \tau(j_p)})(s_{\tau(j_0)\dots(j_p)}).$$

Estos morfismos τ^p conmutan con los operadores borde y por tanto inducen morfismos sobre cohomología: $\bar{f}_q: \check{H}(U,F) \longrightarrow H^q(U',F)$

(4.2.8) PROPOSICION

Sean f y g dos morfismos en J_U de $U' = \{U'_j \longrightarrow U\}_{j\in J}$ en $U=\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$. Entonces $\bar{f}_q = \bar{g}_q$, para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

Supongamos que f viene dado por $\tau: J \longrightarrow I$ y $f_j: U'_j \longrightarrow U_{\tau(j)}$, y g viene dado por $\tau': J \longrightarrow I$ y $g_j: U'_j \longrightarrow U_{\tau'(j)}$.

Para $s \in C^p(U,F)$ definimos

$$(k^p s)_{j_0\dots j_{p-1}} = \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r F(f_{j_0} \times\dots\times f_{j_r} \times g_{j_r} \times\dots\times g_{j_{p-1}})(s_{\tau(j_0)\dots\tau(j_r)\tau'(j_r)\dots\tau'(j_{p-1})})$$

es decir $k^p: C^p(U,F) \longrightarrow C^p(U',F)$ es un morfismo tal que

$$d^{p-1}k^p + k^{p+1}d^p = \tau'^p - \tau^p$$

Luego $\bar{f}_q - \bar{g}_q = 0$, para todo $q \geq 0$, y por tanto $\bar{f}_q = \bar{g}_q$, para todo $q \geq 0$.

(4.2.9) Sea $(T,\mathcal{T})$ una categoría topológica y sea $U \in T$. En J_U definimos la siguiente relación binaria:

$\mathfrak{U}' \leq \mathfrak{U}$ si existe f: $\mathfrak{U}' \longrightarrow \mathfrak{U}$ en J_U. Con esta relación binaria J_U es un conjunto preordenado.

Sea F un prehaz, consideramos la categoría cuyos objetos son $\{\check{H}^p(\mathfrak{U},F)\}_{\mathfrak{U}\in J_U}$ y cuyos morfismos están definidos como sigue: Si $\mathfrak{U}' \leq \mathfrak{U}$, entonces $\check{H}^q(\mathfrak{U},F) \longrightarrow \check{H}^q(\mathfrak{U}',F)$ es el único morfismo inducido por cualquiera de los morfismo de $\mathfrak{U}'$ en $\mathfrak{U}$ en J_U.

(4.2.10) DEFINICION

Sea (T,τ) una categoría topológica y sea $U \in T$. Sea $F \in Ab^{T^o}$. Definimos

$$\check{H}^q(U,F) = \varinjlim_{J_U} \check{H}^q(\mathfrak{U},F)$$

para cada $q \geq 0$. A estos grupos, los llamaremos los <u>grupos de cohomología de Čech de F sobre U</u>.

(4.2.11) Sea $F \in Ab^{T^o}$ y sea $U \in T$. Ya que $\check{H}^0(\mathfrak{U},F) = \mathrm{Ker}(\prod_i F(U_i) \longrightarrow \prod_{i_0 i_1} F(U_{i_0 i_1}))$, existe una aplicación canónica $F(U) \longrightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U},F)$ para todo recubrimiento $\mathfrak{U}$ de U, Por tanto tenemos definida una aplicación canónica $F(U) \longrightarrow \check{H}^0(U,F)$.

Si $F \in S(T,\tau)$, entonces $F(U) = \check{H}^0(\mathfrak{U},F)$, para todo $\mathfrak{U} \in J_U$, por definición de haz, y por tanto $F(U) = \check{H}^0(U,F)$.

Más en general, se verifica que $\check{H}^0(U,F) = F^+(U)$ pues ambos están definidos de igual forma, vease (1.1.6).

(4.2.12) DEFINICION

Sea F un prehaz y $q \geq 0$, definimos el funtor

$$\check{H}^q(-,F) \equiv \underline{\check{H}}^q(F): T^o \longrightarrow Ab$$
$$U \longmapsto \underline{\check{H}}^q(F)(U) = \check{H}^q(U,F)$$

Entonces $\underline{\check{H}}^q(F)$ es un prehaz sobre T. Además, por (4.2.11), tenemos definida un morfismo de prehaces $F \longrightarrow \underline{\check{H}}^0(F)$ que es un isomorfismo si $F \in S(T,\tau)$.

(4.2.13) Sea F un prehaz inyectivo. Entonces, por (4.2.3), $\check{H}^q(\mathfrak{U},F) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo recubrimiento $\mathcal{U}$ de U. Por tanto $\check{H}^q(U,F) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $U \in T$; de donde $\check{H}^q(-,F) = 0$, para todo $q > 0$.

Por otra parte, si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de prehaces, para cada $\mathcal{U} \in J_U$ obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots\cdots \check{H}^n(\mathcal{U},F') \longrightarrow \check{H}^n(\mathcal{U},F) \longrightarrow \check{H}^n(\mathcal{U},F'') \longrightarrow \cdots\cdots$$

La exactitud se conserva si pasamos al límite directo, con lo que obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots\cdots \check{H}^n(U,F') \longrightarrow \check{H}^n(U,F) \longrightarrow \check{H}^n(U,F'') \longrightarrow \cdots\cdots$$

Como esta sucesión es exacta para cada $U \in T$, tenemos la sucesión exacta larga de prehaces

$$\cdots\cdots \check{H}^n(-,F') \longrightarrow \check{H}^n(-,F) \longrightarrow \check{H}^n(-,F'') \longrightarrow \cdots\cdots$$

De forma inmediata, obtenemos los dos siguientes corolarios:

(4.2.14) COROLARIO

Sea $U \in T$, y consideremos los funtores

$$\check{H}^q(U,-) : Ab^{T^o} \longrightarrow Ab$$

con $q \geq 0$. Estos funtores son los funtores derivados a derecha del funtor $\check{H}^0(U,-)$.

(4.2.15) COROLARIO

Consideremos los funtores

$$\begin{aligned} \check{H}^q(-,-):\ Ab^{T^o} &\longrightarrow Ab^{T^o} \\ F &\longmapsto \check{H}^q(-,F) \end{aligned}$$

con $q \geq 0$. Estos funtores son los funtores derivados a derecha del funtor $\check{H}^0(-,-)$

(4.2.16) Sea $U \in T$ y consideremos los funtores $\check{H}^q(U,-)$, $q \quad 0$, sobre la categoría de haces, $S(T,\tau)$.

Ya que si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta en $S(T,\tau)$ que no lo es considerada como sucesión de prehaces, el morfismo $C^{\cdot}(\mathcal{U},F) \longrightarrow C^{\cdot}(\mathcal{U},F)$ no tiene por qué ser épico, entonces los funtores $\check{H}^q(U,-)$

no asocian aucesiones exactas largas a sucesines exactas cortas de haces. Por tanto no son los funtores derivados de $\check{H}^0(U,-) \equiv \Gamma(U,-)$ sobre $S(T,\mathcal{T})$

(4.2.17) PROPOSICION

Los funtores $\check{H}^q(U,-)$, $q \geqslant 0$, coinciden con los funtores $H^q_T(U,-)$, $q \geqslant 0$, definidos en (4.1.1), si y sólo si a cada sucesión exacta corta de haces hay asociada una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Cech.

DEMOSTRACION

La necesidad es obvia. Veamos la suficiencia:

Ya que $H^0_T(U,F) = \check{H}^0(U,F) = \Gamma(U,F)$ sobre $S(T,\mathcal{T})$, la suficiencia se sigue de (4.2.3) y del hecho de que un haz inyectivo es inyectivo como prehaz ,(1.1).

(4.2.18) PROPOSICION

Sea $U \in T$ y sea $\mathcal{U} = \{U_i \longrightarrow U\}_{i \in I}$ un recubrimiento de U. Sea $F \in S(T,\mathcal{T})$.

Existen sucesines espectrales:

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}_T(F)$$

$$\check{H}^p(U,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}_T(F)$$

DEMOSTRACION

Veamos que $\check{H}^0(\mathcal{U},-)oi \equiv \Gamma(U,-)$. En efecto, $(\check{H}^0(\mathcal{U},-)oi)(F) = \check{H}^0(\mathcal{U},F) =$ $= \mathrm{Ker}(\prod_i F(U_i) \longrightarrow \prod_{i_0,i_1} F(U_{i_0 i_1})) = F(U) = \Gamma(U,F)$. Por ser F un haz.

Por otra parte, si F es inyectivo i(F) es inyectivo y en consecuencia $R^q(\check{H}^0(\mathcal{U},-))(i(F)) = \check{H}^q(\mathcal{U},i(F)) = 0$, para todo $q > 0$. Por tanto el funtor i lleva inyectivos en $\check{H}^0(\mathcal{U},-)$-acíclicos.

Puesto que $\check{H}^0(\mathcal{U},-)$ e i son exactos a idquierda entonces, por ([18], Teorema 9.3, pág 299), obtenemos la primera sucesión espectral.

De forma análoga se obtiene la segunda sucesión espectral.

(4.2.19) COROLARIO

Existe una sucesión espectral de prehaces:

$$\check{H}^p(-,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow \check{H}_T^{p+q}(-,F) = \mathcal{H}^{p+q}(F)$$

DEMOSTRACION

Basta hacer variar U en la segunda sucesión espectral de (4.2.18)

(4.2.20) LEMA

Sea $F \in S(T,\mathcal{T})$, entonces $\check{H}^0(U,\mathcal{H}^q(F)) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $U \in T$.

DEMOSTRACION

Puesto que $\check{H}^0(-,\mathcal{H}^q(F)) = (\mathcal{H}^q(F))^+$, por (4.2.11), y este último es nulo para todo $q > 0$, al ser un subprehaz de $s(\mathcal{H}^q(F))$ que es nulo según (4.1.7), entonces $\check{H}^0(-,\mathcal{H}^q(F))(U) = \check{H}^0(U,\mathcal{H}^q(F)) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $U \in T$.

(4.2.21) TEOREMA

Para cualquier haz $F \in S(T,\mathcal{T})$ y cualquier $U \in T$, se verifica

$$\check{H}^1(U,F) \simeq H_T^1(U,F)$$

y existe un monomorfismo: $0 \longrightarrow \check{H}^2(U,F) \longrightarrow H_T^2(U,F)$

DEMOSTRACION

Consideremos la sucesión espectral:

$$\check{H}^p(U,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H_T^{p+q}(U,F)$$

Por (4.2.20) y teniendo en cuenta ([4], Teorema 5.12, pág 328), tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \check{H}^1(U,F) \longrightarrow H_T^1(U,F) \longrightarrow \check{H}^0(U,\mathcal{H}^1(F)) \longrightarrow \check{H}^2(U,F) \longrightarrow H_T^2(U,F)$$

de nuevo, por (4.2.20), $\check{H}^0(U,\mathcal{H}^1(F)) = 0$, de donde obtenemos lo pedido.

(4.2,22) PROPOSICION

Sea $F \in S(T,\mathcal{T})$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) F es flasgo

(b) $\check{H}^q(\mathcal{U},F) = 0$, para todo $q > 0$, para cualquier recubrimiento $\mathcal{U}$ de U, y para todo $U \in T$.

(c) $\check{H}^q(U,F) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $U \in T$.

DEMOSTRACION

(a) $\Rightarrow$ (b)

Si F es flasgo entonces $\mathcal{H}^q(F) = 0$, para todo $q > 0$, y por tanto la primera sucesión espectral de (4.2.18), nos da isomorfismos: $\check{H}^p(\mathcal{U},F) \simeq H^p_T(U,F) = 0$, para todo $p > 0$, para cualquier $\mathcal{U}$ de U, y para todo $U \in T$.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Trivial

(c) $\Rightarrow$ (a)

La hipótesis nos dice que $\check{H}^q(-,F) = 0$, para todo $q > 0$, y por tanto por (4.2.21), $H^1_T(-,F) = \mathcal{H}^1(F) = 0$.

Procedemos por inducción sobre q. Usando la sucesión espectral

$$\check{H}^p(-,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q}(F)$$

tenemos: (1) $\check{H}^2(-,\mathcal{H}^0(F)) = \check{H}^2(-,F) = 0$, por hipótesis.

(2) $\check{H}^1(-,\mathcal{H}^1(F)) = 0$, pues $\mathcal{H}^1(F) = 0$.

(3) $\check{H}^0(-,\mathcal{H}^2(F)) = 0$, por (4.2.20)

Puesto que $\check{H}^p(-,\mathcal{H}^q(F)) = 0$, para todo $p > 0$ y para $0 < q < 1$, entonces, utilizando ([4], Teorema 5.12, pág 328), tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \check{H}^2(-,F) \longrightarrow \mathcal{H}^2(F) \longrightarrow \check{H}^0(-,\mathcal{H}^2(F)) \longrightarrow \check{H}^3(-,F) \longrightarrow \mathcal{H}^3(F)$$

Entonces, por (1), (2) y (3), obtenemos que $\mathcal{H}^2(F) = 0$.

Asumimos ahora que $\mathcal{H}^i(F) = 0$ para $i < q$. Entonces los mismos argumentos muestran que $\check{H}^i(-,\mathcal{H}^j(F)) = 0$, para todo i, j, con $i+j \leq q$; esto de nuevo implica que $\mathcal{H}^q(F) = 0$.

Luego $H^q_T(U,F) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $U \in T$. Por tanto F es flasgo.

(4.2.23) TEOREMA

Sea f: $(T, \tau) \longrightarrow (T', \tau')$ un morfismo de categorías topológicas. Consideremos el funtor $f^*: S(T', \tau') \longrightarrow S(T, \tau)$. Sean $F' \in S(T', \tau')$, U un objeto de T y $\mathcal{U}$ un recubrimiento de U. Entonces

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, f^*F') \simeq \check{H}^q(f(\mathcal{U}), F')$$

DEMOSTRACION

Supongamos que $\mathfrak{U}=\{U_i \longrightarrow U\}_{i\in I}$. Sabemos, por (1.2.3), que por ser f un morfismo de categorías topológicas, $f(\mathfrak{U})=\{f(U_i) \longrightarrow f(U)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de f(U); además $f(U)_{i_0\ldots i_p} = f(U_{i_0\ldots i_p})$.

Con lo cual, puesto que $f^*F'(U) = F'(f(U))$, entonces $C^p(\mathfrak{U},f^*F') = C^p(f(\mathfrak{U}),F')$, y por tanto los complejos $C^{\cdot}(\mathfrak{U},f^*F')$ y $C^{\cdot}(f(\mathfrak{U}),F')$ son iguales, de donde se sigue el resultado pedido.

(4.2.24) COROLARIO

Sea $f\colon (T,\tau) \longrightarrow (T',\tau')$ un morfismo de categorías topológicas. El funtor $f^*\colon S(T',\tau') \longrightarrow S(T,\tau)$ lleva haces flasgos en haces flasgos.

DEMOSTRACION

Sea $F'\in S(T',\tau')$ un haz flasgo, para ver que f^*F' es flasgo utilizamos (4.2.22(b)).

Sea, entonces $U\in T$ y $\mathfrak{U}$ un recubrimiento de U arbitrario. Entonces, por (4.2.23), $\check{H}^q(\mathfrak{U},f^*F')\simeq \check{H}^q(f(\mathfrak{U}),F')$ para todo $q\geq 0$.

Puesto que F' es flasgo, $\check{H}^q(f(\mathfrak{U}),F') = 0$ para todo $q>0$, por tanto $\check{H}^q(\mathfrak{U},f^*F') = 0$ para todo $q>0$. Luego f^*F' es flasgo.

4.3 IMAGENES DIRECTAS SUPERIORES DE HACES, R^nf^*.

(4.3.1) DEFINICION

Sea $f\colon (T,\tau) \longrightarrow (T',\tau')$ un morfismo de categorías topológicas, y consideremos el funtor $f^*\colon S(T',\tau') \longrightarrow S(T,\tau)$.

Ya que $S(T',\tau')$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos, y f^* es un funtor exacto a idquierda y por tanto aditivo, podemos considerar sus funtores derivados a derecha.

Sea $F'\in S(T',\tau')$, a los haces $R^qf^*(F')$, $q\geq 0$, los llamaremos <u>imágenes directas superiores de F'</u>.

(4.3.2) Los funtores $R^q f^*$ pueden describirse como sigue: Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S(T',\mathcal{T}') \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "i"'] & S(T,\mathcal{T}) \\ Ab^{T'^{o}} \arrow[r, "f^*"] & Ab^{T^{o}} \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

donde s y f^* sobre prehaces, son funtores exactos. Entonces, si $F' \in S(T',\mathcal{T}')$, se tendrá: $R^q f^*(F') \simeq s(f^*(\mathcal{H}^q(F')))$.

Puesto que $(f^*(\mathcal{H}^q(F')))(U) = \mathcal{H}^q(F')(f(U)) = H^q_{T'}(f(U),F')$, entonces $R^q f^*(F')$ es el haz asociado al prehaz $U \longmapsto H^q_{T'}(f(U),F')$.

(4.3.3) PROPOSICION

Si $F' \in S(T',\mathcal{T}')$ es flasgo, entonces $R^q f^* F' = 0$ para todo $q > 0$. Por tanto resoluciones flasgas pueden utilizarse para calcular los funtores $R^q f^*$.

DEMOSTRACION

Por (4.3.2), $R^q f^*$ es el haz asociado al prehaz $U \longmapsto H^q_{T'}(f(U),F')$. Pero si F' es flasgo entonces $H^q_{T'}(f(U),F') = 0$ para todo $q > 0$; por tanto $R^q f^* F' = 0$, para todo $q > 0$, c.q.d.

(4.3.4) TEOREMA (Sucesiones espectrales de Leray)

(a) Si $f\colon (T,\mathcal{T}) \longrightarrow (T',\mathcal{T}')$ es un morfismo de categorías topológicas, existe una sucesión espectral:

$$H^p_T(U, R^q f^* F') \Longrightarrow H^{p+q}_{T'}(f(U),F')$$

con $F' \in S(T',\mathcal{T}')$ y $U \in T$.

(b) Sean $(T'',\mathcal{T}'') \xrightarrow{g} (T,\mathcal{T}) \xrightarrow{f} (T',\mathcal{T}')$ morfismos de categorías topológicas. Existe una sucesión espectral:

$$R^p g^*(R^q f^*(F')) \Longrightarrow R^{p+q}(f\circ g)^*(F')$$

con $F' \in S(T',\mathcal{T}')$.

DEMOSTRACION

(a) Consideremos los funtores:

$$f^{*}: S(T', \tau') \longrightarrow S(T, \tau)$$

$$\Gamma(U,-): S(T, \tau) \longrightarrow Ab$$

Ambos son exactos a idquierda, y, por (4.2.24), f^{*} lleva haces inyectivos en $\Gamma(U,-)$-acíclicos. Ya que $\Gamma(U,-)of^{*} = \Gamma(f(U),-)$, por ([18] , Teorema 9.3, pág 299), obtenemos la sucesión espectral deseada.

(b) Consideremos los funtores:

$$f^{*}: S(T', \tau') \longrightarrow S(T, \tau)$$

$$g^{*}: S(T, \tau) \longrightarrow S(T'', \tau'')$$

Ambos son exactos a idquierda. Si $F' \in S(T', \tau')$ es inyectivo, entonces, por (4.2.24), $f^{*}F'$ es flasgo y así, por (4.3.3), $R^{q}g^{*}(f^{*}F') = 0$ para todo $q > 0$.

Luego f^{*} lleva inyectivos en g^{*}-acíclicos. Aplicando de nuevo ([18] , Teorema 9.3, pág 299), y ya que $g^{*}of^{*} = (fog)^{*}$, obtenemos la sucesión espectral deseada.

(4.3.5) DEFINICION

Sea $F_{o} \in S(T, \tau)$ un haz fijo, y consideremos el funtor exacto a idquierda:

$$Hom(F_{o},-): S(T, \tau) \longrightarrow Ab$$

Sus funtores derivados a derecha los escribiremos por: $R^{q}Hom(F_{o},-) = Ext^{q}(F_{o},-)$.

(4.3.6) Por definición de los funtores Ext^{q}, una sucesión exacta corta, $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$, induce una sucesión exacta larga de Exts en la segunda variable. También induce una sucesión exacta larga de Exts en la primera variable, esto es, para un haz fijo F_{o} existe una sucesión exacta larga:

$$\ldots\ldots\ldots Ext^{q}(F',F_{o}) \longrightarrow Ext^{q+1}(F'',F_{o}) \longrightarrow Ext^{q+1}(F,F_{o}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(4.3.7) Como en cualquier categoría abeliana, los funtores $Ext^{q}(F,F')$ pueden interpretar como el grupo de extensiones de Yoneda. Esto es, el grupo de todas las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F_{q-1} \longrightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots F_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

módulo una cierta relación de equivalencia.

(4.3.8) TEOREMA

Sea $U \in T$ y consideremos el prehaz $Z_U = j_* Z$ para $j:\{U\} \longrightarrow T$ definido en (1.2.2). Entonces $\Gamma(U,-) \simeq \mathrm{Hom}(s(Z_U),-)$.

DEMOSTRACION

En efecto, teniendo en cuenta que s es adjunto a idquierda al funtor inclusión y j_* es adjunto a idquierda al funtor j^*, se verifica:

$\mathrm{Hom}(s(j_* Z),F) \simeq \mathrm{Hom}(j_* Z\ ,\ F) \simeq \mathrm{Hom}(Z, j^*F) \simeq \mathrm{Hom}(Z,F(U)) \simeq F(U) = \Gamma(U,F)$.

Como estos isomorfismos son ciertos para todo $F \in S(T,\mathcal{T})$, entonces el teorema es cierto.

Como consecuencia inmediata del teorema, tenemos el siguiente corolario:

(4.3.9) COROLARIO

Sea $(T,\mathcal{T})$ una categoría topológica y sea $U \in T$. Entonces:

$$H^q_T(U,-) \simeq \mathrm{Ext}^q(s(Z_U),-)$$

para todo $q \geqslant 0$.

5. COHOMOLOGIA EN UN ESPACIO TOPOLOGICO

5.1 HACES FUERTEMENTE FLASGOS Y COHOMOLOGIA

Sea (X,τ) un espacio topológico, y consideremos la categoría topológica asociada a él: $(\bar{X}, \bar{\tau})$, definida en (1.3.1)

(5.1.1) DEFINICION

Dado un espacio topológico (X,τ), un haz $F \in S(\bar{X}, \bar{\tau})$ es <u>fuertemente flasgo</u> si para cada inclusión de abiertos $U \subseteq V$, el morfismo $F(V) \longrightarrow F(U)$ es sobreyectivo.

(5.1.2) PROPOSICION

(i) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces sobre X, y F' es fuertemente flasgo, entonces dicha sucesión es exacta considerada como sucesión de prehaces.

(ii) Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de haces sobre X. Si F' y F son fuertemente flasgos, entonces F'' es fuertemente flasgo.

(iii) Sea $F \in S(\bar{X}, \bar{\tau})$. Definimos un nuevo haz G, llamado el haz de secciones discontinuas de F, como sigue: Para cada conjunto abierto $U \subseteq X$, $G(U)$ es el grupo abeliano de las aplicaciones $s: U \longrightarrow \bigcup_{p \in U} F_p$, tal que para cada $p \in U$, $s(p) \in F_p$.

Entonces G es un haz fuertemente flasgo y existe un morfismo inyectivo de F en G.

(iv) Todo haz inyectivo es fuertemente flasgo

DEMOSTRACION

(i) Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de haces y sea $U \subseteq X$ un abierto.

Puesto que el funtor i: $S(\bar{X}, \bar{T}) \longrightarrow Ab^{T^o}$ es exacto a idquierda, entonces la sucesión $0 \longrightarrow F'(U) \longrightarrow F(U) \longrightarrow F''(U)$ es exacta, para cada abierto $U \subsetneq X$. Por tanto, únicamente hemos de ver que g_U: $F(U) \longrightarrow F''(U)$ es sobreyectiva, para cada abierto $U \subsetneq X$. Sea $s'' \in F''(U)$, definimos un conjunto M por:

$$M = \{ (t,W) \ / \ W \text{ es un abierto contenido en } U, \ t \in F(W) \text{ y } g_W(t) = F''(W \longrightarrow U)(s'') \}$$

En principio $M \neq \emptyset$. En efecto, dado $x \in U$, tenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow F'_x \xrightarrow{f_x} F_x \xrightarrow{g_x} F''_x \longrightarrow 0.$$

Sea $s''_x \in F''_x$, la clase de s'' en F''_x, entonces existe $t'_x \in F_x$ tal que $g_x(t'_x) = s''_x$. Supongamos que t'_x viene representada por un elemento $t' \in F(V)$ con $x \in V$.

Ya que $g_x(t'_x) = (g_V(t'))_x$, entonces existira un abierto $W \subset V \cap U$ tal que $F''(W \longrightarrow U)(g_V(t')) = F''(W \longrightarrow U)(s'')$.

Pero dado $W \longrightarrow U$, obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[r] \arrow[d, "g_V"'] & F(W) \arrow[d, "g_W"] \\
F''(V) \arrow[r] & F''(W)
\end{tikzcd}$$

con lo cual $F''(W \longrightarrow V)(g_V(t')) = g_W(F(W \longrightarrow V)(t'))$.

Llamando $t = F(W \longrightarrow V)(t')$, entonces $t \in F(W)$ y $g_W(t) = F''(W \longrightarrow U)(s'')$, es decir $(t,W) \in M$ y por tanto $M \neq \emptyset$.

Definimos en M una relación de orden como sigue:

$$(t,W) \leq (t',W') \iff W \subset W' \text{ y } F(W \longrightarrow W')(t') = t$$

Es fácil ver que con está relación de orden, M es un conjunto inductivo y por el lema de Zorn existe un elemento máximal: (s^*, W^*).

Si $W^* = U$ entonces estaría todo demostrado.

Supongamos que $W^* \neq U$ y sea $x \in U - W^*$, por el mismo razonamiento que antes encontramos un elemento (s_x, U_x) de M, con $x \in U_x$.

Sea $B = W^* \cap U_x$. Ya que $g_{W^*}(s^*) = F''(W^* \longrightarrow U)(s'')$ y $g_{U_x}(s^*) = F''(U_x \rightarrow U)(s'')$, entonces $g_B(F(B \longrightarrow W^*)(s^*) - F(B \longrightarrow U_x)(s_x)) = 0$, y por tanto como la sucesión

$0 \longrightarrow F'(B) \xrightarrow{f_B} F(B) \xrightarrow{g_B} F''(B)$ es exacta, existe $t \in F'(B)$ tal que $f_B(t) = F(B \longrightarrow W^*)(s^*) - F(B \longrightarrow U_x)(s_x)$.

Ahora, como F' es fuertemente flasgo el morfismo $F'(U) \longrightarrow F'(B)$ es sobre, luego existe $t' \in F'(U)$ tal que $F'(B \longrightarrow U)(t') = t$.

Sea $t^* = f_U(t') \in F(U)$, entonces $F(B \longrightarrow U_x)(s_x + F(U_x \longrightarrow U)(t^*)) = F(B \longrightarrow W^*)(s^*)$. Llamando $W = W^* \cup U_x$, $\{W^*, U_x\}$ es un recubrimiento de W y $s^* \in F(W^*)$, $s_x + F(U_x \longrightarrow U)(t^*) \in F(U_x)$, son dos elementos tales que sobre la intersección coinciden, con lo que por ser F un haz, existe $s \in F(W)$ tal que $F(U_x \longrightarrow W)(s) = s_x + F(U_x \longrightarrow U)(t^*)$ y $F(W^* \longrightarrow W)(s) = s^*$.

Como además, también es cierto que $g_W(s) = F(W \longrightarrow U)(s'')$, entonces (s,W) es un elemento de M y por lo visto anteriormente $(s^*,W^*) \leq (s,W)$ lo que contradice la máximalidad de (s^*,W^*).

Por tanto $W^* = U$ y así g_U es sobreyectiva.

(ii) Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de haces, con F' y F fuertemente flasgos. Sea $U \subsetneq V$ una inclusión de abiertos, por (i), tenemos el diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F'(V) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[r] \arrow[d] & F''(V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F'(U) \arrow[r] \arrow[d] & F(U) \arrow[r] \arrow[d] & F''(U) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Puesto que las dos primeras flechas verticales son sobreyectivas, al ser F' y F fuertemente flasgos, entonces también lo es la tercera, y por tanto F'' es fuertemente flasgo.

(iii) Se comprueba fácilmente que, en efecto, G es un haz. Sea $U \subsetneq V$ una inclusión de abiertos. Tenemos que ver que el morfismo $G(V) \longrightarrow G(U)$ es sobre. Sea $s \in G(U)$, entonces $s\colon U \longrightarrow \bigcup_{p \in U} F_p$ tal que $s(p) \in F_p$, para cada $p \in U$. Definimos $t \in G(V)$ como sigue: $t\colon V \longrightarrow \bigcup_{p \in V} F_p$ tal que $t(p) = s(p)$ si $p \in U$, y $t(p) = 0$ si $p \notin U$.

Entonces $G(U \longrightarrow V)(t) = s$, es decir el morfismo $G(V) \longrightarrow G(U)$ es sobreyectivo, y por tanto G es fuertemente flasgo.

Definimos un morfismo $f\colon F \longrightarrow G$ como sigue: Si $U \subseteq X$, $f_U\colon F(U) \longrightarrow G(U)$

viene dado por: Para $s \in F(U)$, $f_U(s): U \longrightarrow \bigcup_{p\in U} F_p$ es tal que $f_U(s)(p) = s_p$, para cada $p \in U$.

Si $f_U(s) = 0$ entonces $f_U(s)(p) = 0$ para todo $p \in U$, es decir, $s_p = 0$ para todo $p \in U$, lo que implica que $s = 0$.

Luego f_U es mónica para todo $U \subseteq X$, y por tanto $f: F \longrightarrow G$ es un monomorfismo.

(iv) Sea $s(Z) \in S(\bar{X}, \bar{T})$ la hacificación del prehaz constante e igual a Z. Consideremos el haz $j_!(s(Z)|U)$, donde $j_!$ es el funtor definido en (1.3.15), y j es la inclusión de U en X.

Sea $J \in S(\bar{X}, \bar{T})$ un haz inyectivo, y sea $V \subseteq U$ una inclusión de abiertos, entonces $0 \longrightarrow j_!(s(Z)|V) \longrightarrow j_!(s(Z)|U)$ es un monomorfismo de haces. Ya que J es inyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_{S(\bar{X}, \bar{T})}(j_!(s(Z)|U),J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S(\bar{X}, \bar{T})}(j_!(s(Z)|U),J) \longrightarrow 0$ es exacta.

Pero, por (1.3.16), y teniendo en cuenta que s es adjunto a idquierda al funtor inclusión, entonces:

$$\mathrm{Hom}_{S(\bar{X}, \bar{T})}(j_!(s(Z)|U),J) \simeq \mathrm{Hom}_{S(\bar{U},\overline{T\,U})}(s(Z)|U,J) \simeq \mathrm{Hom}_{Ab^{\bar{U}^o}}(Z|U,J|U) \simeq J(U).$$

Luego la sucesión $J(U) \longrightarrow J(V) \longrightarrow 0$ es exacta y por tanto J es fuertemente flasgo.

(5.1.3) PROPOSICION

Si $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$ es un haz fuertemente flasgo, entonces es flasgo. Veáse (4.1.8).

DEMOSTRACION

Sea $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$ un haz fuertemente flasgo. Embebemos F en un haz inyectivo J, sea G el cociente: $0 \longrightarrow F \longrightarrow J \longrightarrow G \longrightarrow 0$.

F es fuertemente flasgo, por hipótesis, J es fuertemente flasgo, por (5.1.2(iv)), por tanto, por (5.1.2(ii)), G es fuertemente flasgo.

Por otra parte , ya que J es inyectivo, entonces $H^q_{\bar{X}}(U,J) = 0$ para todo $q > 0$, y a partir de la anterior sucesión exacta corta, obtenemos la sucesión exacta larga en cohomología:

$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow J(U) \longrightarrow G(U) \longrightarrow H^1_{\bar{X}}(U,F) \longrightarrow H^1_{\bar{X}}(U,J) \longrightarrow H^1_{\bar{X}}(U,G)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots H^{n-1}_{\bar{X}}(U,G) \longrightarrow H^n_{\bar{X}}(U,F) \longrightarrow H^n_{\bar{X}}(U,J)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por (5.1.2(i)), para todo $U \subseteq X$, la sucesión $0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow J(U) \longrightarrow G(U) \longrightarrow 0$ es exacta, por tanto $H^1_{\bar{X}}(U,F) = 0$, para todo $U \subseteq X$.

De la sucesión exacta larga deducimos también que $H^n_{\bar{X}}(U,F) \simeq H^{n-1}_{\bar{X}}(U,G)$. Pero como G es también fuertemente flasgo, por inducción sobre n, obtenemos que $H^n_{\bar{X}}(U,F) = 0$, para todo $U \subseteq X$ y para todo $n > 0$. Por tanto F es flasgo.

(5.1.4) COROLARIO

Resoluciones fuertemente flasgas pueden utilizarse para calcular los funtores derivados: $H^n(U,-)$ y $\mathcal{H}^n(-)$.

DEMOSTRACION

En efecto. las proposiciones (5.1.2) y (5.1.3) nos aseguran que se verifican las condiciones del lema (4.1.10) para los funtores $\Gamma(U,-)$ e i: $S(\bar{X},\bar{\mathcal{T}}) \longrightarrow Ab^{\mathcal{T}^o}$, y por tanto se verifica el corolario.

Omitiremos, de ahora en adelante, la referencia al espacio topológico X en $H^n(U,-)$, por mayor comodidad.

(5.1.5) LEMA

Sobre un espacio topológico noetheriano un límite directo de haces fuertemente flasgos es fuertemente flasgo.

DEMOSTRACION

Sea $\{F_i\}_{i\in I}$, un sistema directo de haces fuertemente flasgos. Entonces para cualquier inclusión de abiertos $V \subseteq U$, y para cada $i \in I$, $F_i(U) \longrightarrow F_i(V)$ es sobreyectiva. Ya que $\varinjlim$ es un funtor exacto, el morfismo

$\varinjlim_{i\in I} F_i(U) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i(V)$ es también sobreyectivo.

Pero, por (1.3.4), se verifica que $\varinjlim_{i\in I} F_i(U) = (\varinjlim_{i\in I} F_i)(U)$, luego el morfismo $(\varinjlim_{i\in I} F_i)(U) \longrightarrow (\varinjlim_{i\in I} F_i)(V)$ es sobreyectivo. Así el haz $\varinjlim_{i\in I} F_i$ es fuertemente flasgo.

(5.1.6) PROPOSICION

Sea (X,τ) un espacio topológico noetheriano y sea $\{F_i\}_{i\in I}$, un sistema directo de haces. Entonces existen isomorfismos naturales, para cada $q\geqslant 0$ y para cada $U\subseteq X$ abierto:

$$\varinjlim_{i\in I} H^q(U,F_i) \xrightarrow{\cong} H^q(U,\varinjlim_{i\in I} F_i)$$

DEMOSTRACION

Para cada $i\in I$, tenemos una aplicación natural $F_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} F_i$, que induce un morfismo en cohomología: $H^q(U,F_i)\longrightarrow H^q(U,\varinjlim_{i\in I} F_i)$ para cada $q\geqslant 0$. Tomando el límite directo, obtenemos, para cada $q\geqslant 0$, un morfismo:

$$(\ast)\quad \varinjlim_{i\in I} H^q(U,F_i) \longrightarrow H^q(U,\varinjlim_{i\in I} F_i).$$

Por (1.3.4), para $q=0$ este morfismo es un isomorfismo. Para el caso general consideramos la categoría $\mathrm{Ind}_I(S(\bar{X},\bar{\tau}))$ consistente en todos los sistemas directos de objetos de $S(\bar{X},\bar{\tau})$ indizados por I. Esta categoría es una categoría abeliana.

Ya que $\varinjlim$ es un funtor exacto, las sucesiones de funtores $\{\varinjlim_{i\in I} H^q(U,-)\}_{q\geqslant 0}$ y $\{H^q(U,\varinjlim_{i\in I} -)\}_{q\geqslant 0}$ son conectadas. Los morfismos $(\ast)$ definen una transformación natural entre ambos funtores:

$$\varinjlim_{i\in I} H^q(U,-) \longrightarrow H^q(U,\varinjlim_{i\in I} -)$$

Estos funtores coinciden para $q=0$, así para probar que coinciden para todo q sera suficiente ver que para todo sistema directo $\{F_i\}_{i\in I}$, existe un sistema directo $\{R_i\}_{i\in I}$ y un monomorfismo $\{\tau_i\}_{i\in I}:\{F_i\}_{i\in I}\longrightarrow\{R_i\}_{i\in I}$ tal que $\varinjlim_{i\in I} H^q(U,R_i)=0=H^q(U,\varinjlim_{i\in I} R_i)$, para todo $q>0$. Vease ([9], Proposición 2.2.1, pág 141).

Sea entonces $\{F_i\}_{i\in I}\in \mathrm{Ind}_I(S(\bar{X},\bar{\tau}))$. Para cada $i\in I$, sea G_i el haz de secciones discontinuas de F_i, definido en (5.1.2(iii)). Entonces G_i es fuertemente flasgo y existe una inyección natural $F_i\longrightarrow G_i$. Ya que la construcción de los G_i es funtorial, entonces $\{G_i\}_{i\in I}$ es también un sistema directo y

$u:\{F_i\}_{i\in I} \longrightarrow \{G_i\}_{i\in I}$ es un monomorfismo en $\mathrm{Ind}_I\, S(\bar{X}, \bar{\tau})$. Como todos los G_i son fuertemente flasgos entonces, por (5.1.3), $H^q(U,G_i) = 0$ para todo $q>0$ y para todo $U\subseteq X$. Entonces $\varinjlim_{i\in I} H^q(U,G_i) = 0$.

Por último, ya que $\varinjlim_{i\in I} G_i$ es fuertemente flasgo, por (5.1.5), entonces $H^q(U,\varinjlim_{i\in I} G_i) = 0$ para todo $q>0$ y para todo $U\subseteq X$, lo que acaba la demostración.

(5.1.7) PROPOSICION

Sea $f: (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ una aplicación continua de espacios topológicos, y sea $f_*: S(\bar{X}, \bar{\tau}) \longrightarrow S(\bar{Y}, \bar{\tau}')$ el funtor inducido por f, definido en (1.3.9).

Si $F\in S(\bar{X}, \bar{\tau})$ es fuertemente flasgo, entonces f_*F es fuertemente flasgo.

DEMOSTRACION

En efecto, sea $U'\subseteq V'$ una inclusión de abiertos de Y, entonces $f^{-1}(U')\subseteq f^{-1}(V')$ y puesto que F es fuertemente flasgo, el morfismo $F(f^{-1}(V')) \longrightarrow F(f^{-1}(U'))$ es sobreyectivo.

Pero $F(f^{-1}(V')) = (f_*F)(V')$ y de igual forma para U', entonces el morfismo $(f_*F)(V') \longrightarrow (f_*F)(U')$ es sobreyectivo y por tanto f_*F es fuertemente flasgo.

(5.1.8) PROPOSICION

Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $Y\subseteq X$ un subconjunto cerrado. Sea $j: (Y, \tau|Y) \longrightarrow (X,\tau)$ la inclusión.

Entonces $H^q(Y,F) \simeq H^q(X,j_*F)$, para todo $F\in S(\bar{Y}, \overline{\tau|Y})$ y para todo $q\geq 0$.

DEMOSTRACION

En principio, por ser Y cerrado el funtor j_* es exacto, (1.3.13).

Si $I^\cdot$ es una resolución fuertemente flasga de F, por (5.1.7) y por ser j_* exacto, $j_*(I^\cdot)$ es una resolución fuertemente flasga de j_*F. Puesto que $\Gamma(Y,I^r) = \Gamma(X,j_*I^r)$, para todo $r\geq 0$, entonces los grupos de cohomología han de coincidir, y por tanto $H^q(Y,F) \simeq H^q(X,j_*F)$, para todo $q\geq 0$.

(5.1.9) PROPOSICION

Sea (X,T) un espacio topológico y sea $U \subseteq X$ un abierto. Entonces $H^q(U,F) \approx H^q(U,F|U)$, para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

Notemos, primero, que estamos considerando los funtores derivados de los funtores: $\Gamma(U,-): S(\bar{X}, \bar{T}) \longrightarrow Ab$ y $\Gamma(U,-): S(\bar{U}, \overline{T|U}) \longrightarrow Ab$, respectivamente.

Sea $0 \longrightarrow F \longrightarrow J^\cdot$ una resolución inyectiva de F en $S(\bar{X}, \bar{T})$, entonces $H^q(U,F) = H^q(0 \longrightarrow J_0(U) \longrightarrow J_1(U) \longrightarrow \ldots\ldots)$.

Por otra parte, por (1.3.18), $J^\cdot|U$ es una resokución inyectiva de $F|U$ y entonces $H^q(U,F|U) = H^q(0 \longrightarrow (J_0|U)(U) \longrightarrow (J_1|U)(U) \longrightarrow \ldots\ldots) =$
$= H^q(0 \longrightarrow J_0(U) \longrightarrow J_1(U) \longrightarrow \ldots\ldots)$.

Por tanto $H^q(U,F) \approx H^q(U,F|U)$, para todo $q \geq 0$.

(5.1.10) Notemos que de forma mucho más obvia, también se tiene que $\check{H}^q(\mathcal{U},F) \approx$
$\approx \check{H}^q(\mathcal{U}, F|U)$, para $\mathcal{U}$ un recubrimiento de U.

5.2 TEOREMAS DE COMPARACION

(5.2.1) Sea (X,T) un espacio topológico y $\mathcal{U}$ un recubrimiento de X. Por (4.2.18), para $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$, tenemos las sucesiones espectrales:

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,F)$$

$$\check{H}^p(X, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,F)$$

(5.2.2) De igual forma que para una categoría topológica cualquiera, puesto que $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(F)) = 0$ para todo $q > 0$ y para todo recubrimiento $\mathcal{U}$ de X, obtenemos, para cada $p \geq 0$, un morfismo natural, funtorial en F:

$$\check{H}^p(\mathcal{U},F) \longrightarrow H^p(X,F)$$

de forma que para $p = 0,1$ es un isomorfismo y para $p = 2$ es un monomorfismo.

Tenemos también, para cada $p \geq 0$, un morfismo natural, funtorial en F

$$\check{H}^p(X,F) \longrightarrow H^p(X,F)$$

tal que para $p = 0,1$ es un isomorfismo y para $p = 2$ es un monomorfismo.

(5.2.3) LEMA

Sea (X,T) un espacio topológico paracompacto y Haussdorff. Sea $F \in Ab^{\bar{X}^{o}}$ un prehaz tal que $s(F) = 0$, entonces $\check{H}^p(X,F) = 0$, para todo $p \geq 0$.

DEMOSTRACION

$\check{H}^p(X,F) = \varinjlim \check{H}^p(\mathcal{U},F)$, donde el límite recorre todos los recubrimientos por abiertos de X.

Puesto que X es paracompacto, si $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de X, existe un recubrimiento $\mathcal{V}$ de X, más fino que $\mathcal{U}$, y tal que es localmente finito.

Si $\mathcal{V}$ es más fino que $\mathcal{U}$, entonces, para cada $p \geq 0$, existe un morfismo $\check{H}^p(\mathcal{V},F) \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{U},F)$. Por tanto el conjunto $\{\check{H}^p(\mathcal{V},F)\}_{\mathcal{V}}$ con $\mathcal{V}$ recubrimiento localmente finito, es un sistema directo inicial en el sistema directo $\{\check{H}^p(\mathcal{U},F)\}_{\mathcal{U}}$. Luego podemos restringirnos a los recubrimientos localmente finito de X, y $\check{H}^p(X,F) = \varinjlim \check{H}^p(\mathcal{U},F)$, donde el límite recorre todos los recubrimientos localmente finitos de X.

Sea, entonces, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento localmente finito de X. Por ser X paracompacto y Haussdorff, existe un recubrimiento de X, $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$, para todo $i \in I$.

Para cada $x \in X$, sea W_x un entorno abierto de x tal que $W_x \cap U_i = \emptyset$, para casi todo i, que existe por ser $\mathcal{U}$ un recubrimiento localmente finito.

Se verifican las siguientes propiedades:

(a) Si $x \in U_i$ entonces $W_x \subset U_i$.

En efecto, ya que W_x es un entorno de x contenido en $\bigcap_{x \in U_i} U_i$

(b) Si $x \in V_i$ entonces $W_x \subset V_i$.

En efecto, siempre se puede suponer que $W_x \subset \bigcap_{x \in V_i} V_i \subset \bigcap_{x \in U_i} U_i$.

(c) Si $W_x \cap V_i \neq \emptyset$, entonces $x \in U_i$.

En efecto, si $x \notin U_i$, entonces $W_x \cap U_i = \emptyset$, y por tanto $W_x \cap V_i = \emptyset$.

(d) Si $x \in U_{i_0 .. i_p}$ y $t \in F(U_{i_0 .. i_p})$, entonces $F(W_x \longrightarrow U_{i_0 .. i_p})(t) = 0$.

En efecto, ya que $s(F) = 0$, entonces $(sF)_x = F_x = 0$ y por tanto $t_x = 0$; existirá entonces un entorno abierto de x, V, tal que $F(V \cap U_{i_0 .. i_p} \longrightarrow U_{i_0 .. i_p})(t) = 0$.

Si V no fuera W_x, entonces tomaríamos como W_x la intersección, y por tanto se verifica (d).

Sea $\mathcal{W} = \{W_x\}_{x \in X}$, que es un recubrimiento de X localmente finito. Además $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{U}$, en el sentido de que es menos fino que $\mathcal{U}$. Tenemos entonces definida una aplicación, para cada $p \geqslant 0$:

$$C^p(\mathcal{U},F) \xrightarrow{\rho^*} C^p(\mathcal{W},F)$$

Sea $t \in C^p(\mathcal{U},F)$, entonces $\rho^*(t) = 0$. En efecto, supongamos que $t = (t_{i_0 .. i_p})_{i_0 .. i_p}$, tal que $t_{i_0 .. i_p} \in F(U_{i_0 .. i_p})$, entonces $\rho^*(t) = (F(W_{i_0 .. i_p} \longrightarrow U_{i_0 .. i_p})(t_{i_0 .. i_p}))$. Supuesto que $W_{i_0 .. i_p} \subset U_{i_0 .. i_p}$, y donde

$W_{i_0 .. i_p} = W_{x_{i_0}} \cap \ldots\ldots \cap W_{x_{i_p}} \neq \emptyset$, entonces $W_{x_{i_0}} \cap U_{i_k} \neq \emptyset$, para todo $k = 0,..,p$,

y entonces por (c), $x_{i_0} \in U_{i_k}$ para todo $k = 0,..,p$; por tanto $x_{i_0} \in U_{i_0 .. i_p}$ y por (a), deducimos que $W_{x_{i_0}} \subset U_{i_0 .. i_p}$, con lo que por (d) implica que

$F(W_{x_{i_0}} \longrightarrow U_{i_0 .. i_p})(t_{i_0 .. i_p}) = 0$, y así $F(W_{i_0 .. i_p} \longrightarrow U_{i_0 .. i_p})(t_{i_0 .. i_p}) = 0$. Concluimos, entonces, en que $\rho^*(t) = 0$.

Si $\bar{t}$ es la clase de t en $\check{H}^p(\mathcal{U},F)$, entonces existe un recubrimiento de X, $\mathcal{W}$, tal que $\bar{t}$ es cero en $\check{H}^p(\mathcal{W},F)$, por tanto $\bar{t}$ será cero en el límite directo. Puesto que esto es cierto para todo $\mathcal{U}$ y para todo $\bar{t}$, entonces $\check{H}^p(X,F) = 0$, para todo $p \geqslant 0$.

(5.2.4) TEOREMA (El Teorema del isomorfismo)

Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico paracompacto y Haussdorff, entonces $\check{H}^p(X,F) \simeq H^p(X,F)$, para todo $p \geqslant 0$ y para todo $F \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$.

DEMOSTRACION

Dado $F \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$, consideremos el prehaz $\mathcal{H}^q(F)$. Entonces, por (4.1.7), $s(\mathcal{H}^q(F)) = 0$ para todo $q > 0$, y por (5.2.3), $\check{H}^p(X,\mathcal{H}^q(F)) = 0$ para todo $q > 0$ y $p \geqslant 0$

Consideremos la sucesión espectral:

$$\check{H}^p(X,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,F)$$

Puesto que $\check{H}^p(X,\mathcal{H}^q(F)) = 0$, para todo $q > 0$ y $p \geq 0$, por ([4] , Teorema 5.12, pág 328), los morfismos

$$\check{H}^p(X,F) \longrightarrow H^p(X,F)$$

definidos en (5.2.2), son isomorfismos, para todo $p \geq 0$, c.q.d.

(5.2.5) COROLARIO

Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico paracompacto y Haussdorff, entonces a cada sucesión exacta corta de haces sobre X, hay asociada una sucesión exacta larga de grupos de cohomología de Cech.

DEMOSTRACION

Es consecuencia de (5.2.4) y (4.2.17).

(5.2.6) PROPOSICION

Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, sea $F \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$ y sea $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de X. Supongamos que para cada intersección finita, $V = U_{i_0} \cap \ldots\ldots \cap U_{i_p}$, de abiertos del recubrimiento, y para cualquier $k > 0$, $H^k(V,F|V) = 0$.

Entonces, para todo $p \geq 0$, los morfismos

$$\check{H}^p(\mathcal{U},F) \longrightarrow H^p(X,F)$$

dados en (5.2.2), son isomorfismos.

DEMOSTRACION

Consideremos la sucesión espectral:

$$\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,F)$$

Veamos que en las condiciones en que estamos se verifica que $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(F)) = 0$ para todo $q > 0$ y $p \geq 0$, con lo que tendremos los isomorfismos que queriamos.

En efecto, $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(F)) = H^p(C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(F)))$; pero

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(F)) = \prod_{I^p} \mathcal{H}^q(F)(U_{i_0 \ldots i_p})$$

Puesto que $\mathcal{H}^q(F)(U_{i_0 \ldots i_p}) = H^q(U_{i_0} \ldots\ldots U_{i_p}, F | U_{i_0} \ldots\ldots U_{i_p}) = 0$, por hipótesis, entonces $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(F)) = 0$, para cada $p \geq 0$, y entonces $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(F)) = 0$, para cada $p \geq 0$ y $q > 0$, c.q.d.

(5.2.7) PROPOSICION

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una base para la topología de X. Sea $F \in S(\bar{X}, \bar{\tau})$ y supongamos que para todo subconjunto finito, $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de $\mathcal{U}$, $\check{H}^q(U_1 \ldots U_n, F) = 0$, para todo $q > 0$.

Entonces $H^q(U_1 \ldots U_n, F) = 0$ para todo $q > 0$. Además para todo abierto $V \subseteq X$, los morfismos $\check{H}^q(V, F) \longrightarrow H^q(V, F)$ son isomorfismos para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

Ya que $\mathcal{U}$ es una base para la topología de X, entonces $\check{H}^q(V, F) = \varinjlim \check{H}^q(\mathcal{V}, F)$, donde el límite directo recorre todos los recubrimientos $\mathcal{V}$ de V contenidos en $\mathcal{U}$.

Si demostramos que $H^q(U_1 \ldots U_n, F) = 0$ para todo $q > 0$ y para todo $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$, en particular $H^q(V_1 \ldots V_n, F) = 0$, para todo $q > 0$, para todo $\{V_1, \ldots, V_n\} \subset \mathcal{V}$ y para todo recubrimiento $\mathcal{V}$ de V, con lo cual, por (5.2.6), se tendrá que $\check{H}^q(\mathcal{V}, F) = H^q(V, F)$ para todo $\mathcal{V}$, y por tanto $\check{H}^q(V, F) \approx H^q(V, F)$, para todo $q \geq 0$.

Luego es suficiente demostrar que $H^q(U_1 \ldots U_n, F) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo $\{U_1, \ldots, U_n\}$.

Lo vemos por inducción sobre n tal que $H^q(U_1 \ldots U_n, F) = 0$, para $0 \lneq q \leq n$ y para todo $\{U_1, \ldots, U_n\}$.

Si $n = 0$ es trivial.

Sea $n \geq 1$ y supongámoslo cierto para n-1. Sea $\mathcal{R}$ un recubrimiento de $\{U_1 \ldots U_n\}$ tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$. Consideremos el complejo $C^\cdot(\mathcal{R}, \mathcal{H}^q(F))$, este complejo es cero para $q < n$, ya que $C^p(\mathcal{R}, \mathcal{H}^q(F)) = \prod_{I^p} \mathcal{H}^q(F)(U_1 \ldots U_p) = \prod_{I^p} H^q(U_1 \ldots U_p, F) = 0$ para $q < n$ por hipótesis de inducción, y para todo $p \geq 0$

Entonces $\check{H}^p(\mathcal{R}, \mathcal{H}^q(F)) = 0$, para $q < n$ y para todo p, por tanto $\check{H}^p(U_1 \ldots U_n, \mathcal{H}^q(F)) = 0$, para $q < n$ y para todo p. Entonces considerando la sucesión espectral:

$$\check{H}^p(U_1 \,..\, U_n, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(U_1 \,..\, U_n, F)$$

y por ([4], Teorema 5.12, pág 328), tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \check{H}^n(U_1 \,..\, U_n, F) \longrightarrow H^n(U_1 \,..\, U_n, F) \longrightarrow \check{H}^0(U_1 \,..\, U_n, \mathcal{H}^n(F)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \check{H}^{n+1}(U_1 \,..\, U_n, F) \longrightarrow H^{n+1}(U_1 \,..\, U_n, F).$$

Ya que $\check{H}^n(U_1 \,..\, U_n, F) = 0$, por hipótesis, y $\check{H}^0(U_1 \,..\, U_n, \mathcal{H}^n(F)) = 0$, por (5.2.2), entonces $H^n(U_1 \,..\, U_n, F) = 0$.

Este mismo teorema nos asegura que en las condiciones en que estamos, se verifica que $H^q(U_1 \,..\, U_n, F) \simeq \check{H}^q(U_1 \,..\, U_n, F)$, para todo $q < n$; por tanto $H^q(U_1 \,..\, U_n, F) = 0$ para $0 < q \leq n$.

El resultado anterior, lo utilizaremos posteriormente cuando consideremos un esquema (X, θ_X) noetheriano y separado, y la categoría topológica de Zariski asociada a él.

(5.2.8) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $F_o \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$ un haz fijo. Podemos considerar el funtor exacto a idquierda:

$$\underline{\mathrm{Hom}}\,(F_o, -) : S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}}) \longrightarrow S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$$
$$F \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}\,(F_o, F)$$

donde $\underline{\mathrm{Hom}}\,(F_o, F)$ es el haz definido en (2.3.3).

A sus funtores derivados a idquierda los notaremos por: $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F_o, -)$, $q \geq 0$.

(5.2.9) TEOREMA

Sean $F_1, F_2 \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$. $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F_1, F_2)$ es el haz asociado al prehaz dodo por:

$$U \longmapsto \mathrm{Ext}^q(F_1|U, F_2|U)$$

DEMOSTRACION

(a) Ambos haces coinciden para $p = 0$.

(b) Si F_2 es inyectivo entonces $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F_1, F_2) = 0$ por definición. Por (1.3.18), $F_2|U$ es inyectivo y por tanto $\mathrm{Ext}^q(F_1|U, F_2|U) = 0$ para todo $q > 0$

(c) Ambos funtores asocian sucesiones exactas largas a sucesiones exactas cortas en la segunda variable. En el primer caso por la definición de dichos funtores y en el segundo se sigue del hecho de que el funtor hacificación es exacto.

Estas tres propiedades aseguran que ambos funtores son los satélites del funtor $\underline{\mathrm{Hom}}(F_1,-)$, y por tanto han de coincidir.

(5.2.10) TEOREMA

Si F_2 es inyectivo entonces $\underline{\mathrm{Hom}}(F_1,F_2)$ es fuertemente flasgo.

DEMOSTRACION

Veamos que si $U \subset X$ es abierto, entonces $\underline{\mathrm{Hom}}(F_1,F_2)(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(F_1,F_2)(X)$ es un morfismo sobreyectivo, o bien, que el morfismo

$\mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\,\bar{T})}(F_1,F_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{S(\bar{U},\,\overline{T|U})}(F_1|U,F_2|U)$ es sobreyectivo.

Consideremos un morfismo $F_1|U \longrightarrow F_2|U$, aplicando el funtor $j_!$ obtenemos un morfismo $j_!(F_1|U) \longrightarrow j_!(F_2|U)$. Puesto que $j_!(F_2|U)$ es un subhaz de F_2, componiendo obtenemos un morfismo $j_!(F_1|U) \longrightarrow F_2$.

Tenemos entonces la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} j_!(F_1|U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_1 \arrow[dl, dashed] \\ & F_2 & \end{tikzcd}$$

Puesto que F_2 es inyectivo, existe un único morfismo de F_1 en F_2 que hace conmutar el diagrama y que se aplica en el morfismo $F_1|U \longrightarrow F_2|U$, de partida; por tanto $\underline{\mathrm{Hom}}(F_1,F_2)$ es fuertemente flasgo.

(5.2.11) TEOREMA

Para cualesquiera haces $F_1,F_2 \in S(\bar{X},\,\bar{T})$, existe una sucesión espectral:

$$H^p(X,\underline{\mathrm{Ext}}^q(F_1,F_2)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(F_1,F_2)$$

DEMOSTRACION

Consideremos los funtores exactos a idquierda: $\underline{\mathrm{Hom}}(F_1,-)$ y $\Gamma(X,-)$. Por (5.2.10), $\underline{\mathrm{Hom}}(F_1,-)$ lleva inyectivos en $\Gamma(X,-)$-acíclicos, así por ([18] , Teorema 9.3, pág 299), y teniendo en cuenta que

$\Gamma(X,-)\circ \underline{Hom}(F_1,-) = Hom(F_1,-)$, obtenemos la sucesión espectral deseada.

(5.2.12) PROPOSICION

Sea $f:(X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau')$ una aplicación continua de espacios topológicos. Consideremos los funtores derivados del funtor $f_*: S(\bar{X},\bar{\tau}) \longrightarrow S(\bar{Y},\overline{\tau'})$.

Entonces si $V \subseteq Y$ es cualquier subconjunto abierto de Y, se verifica:

$$(R^q f_*(F))|V = R^q f'_*(F|f^{-1}(V))$$

donde $f': f^{-1}(V) \longrightarrow V$ es el morfismo restricción.

DEMOSTRACION

Sabemos, por (4.3.2), que $R^q f_* F$ es el haz asociado al prehaz: $W \longrightarrow H(f^{-1}(W),F|f^{-1}(W))$.

Entonces $R^q f'(F|f^{-1}(V))$ es el haz asociado al prehaz:

$$W \longrightarrow H^q(f'^{-1}(W),(F|f^{-1}(V))|f'^{-1}(W))$$

para $W \subseteq V$. Pero $f'^{-1}(W) = f^{-1}(W)$ y $(F|f^{-1}(V))|f'^{-1}(W) = F|f^{-1}(W)$, luego $R^q f'_*(F|f^{-1}(V))$ es el haz asociado al prehaz $W \longrightarrow H^q(f^{-1}(W),F|f^{-1}(W))$, para $W \subseteq V$.

Por tanto $(R^q f_*(F))|V = R^q f'_*(F|f^{-1}(V))$.

5.3 COHOMOLOGIA LOCAL

(5.3.1) Sea (X,τ) un espacio topológico y Z un subespacio localmente cerrado de X (recalq uemos que un subespacio Z de X es localmente cerrado si es la intersección de un abierto y un cerrado).

Sea $F \in S(\bar{X},\bar{\tau})$. Elegimos un subconjunto abierto $V \subseteq X$ tal que $Z \subseteq V$ y Z es cerrado en V, lo cual es posible por ser Z localmente cerrado en X.

Sea $\Gamma_Z(X,F)$ el subgrupo de $F(V)$ consistente en todos aquellos elementos cuyo soporte está contenido en Z.

Dado $s \in F(V)$, definimos el soporte de s, que notaremos por $Sop(s)$, como: $Sop(s) = \{p \in V \ / \ s_p \neq 0\}$, donde s_p es la clase de s en F_p.

Se puede demostrar, fácilmente, que $\Gamma_Z(X,F)$ es independiente del subconjunto V elegido.

(5.3.2) PROPOSICION

El funtor dado por:

$$\Gamma_Z(X,-):\ S(\bar{X},\ \bar{\ }) \longrightarrow Ab$$
$$F \longmapsto \Gamma_Z(X,F)$$

es exacto a idquierda.

DEMOSTRACION

Sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de haces. Sea $V \subseteq X$ un subconjunto cerrado, tal que $Z \subseteq V$ y Z es cerrado en V. Entonces la sucesión de grupos abelianos $0 \longrightarrow F'(V) \longrightarrow F(V) \longrightarrow F''(V)$ es exacta, y puesto que $\Gamma_Z(X,F)$ es un subgrupo de $F(V)$, entonces la sucesión $0 \longrightarrow \Gamma_Z(X,F') \longrightarrow \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_Z(X,F'')$ es exacta y por tanto el funtor $\Gamma_Z(X,-)$ es exacto a idquierda.

(5.3.3) DEFINICION

Sea (X,τ) un espacio topológico y $Z \subseteq X$ un subespacio localmente cerrado. Sea $F \in S(\bar{X},\ \bar{\tau})$.

Llamaremos al grupo $\Gamma_Z(X,F)$ el <u>grupo de secciones de F con soporte en Z</u>.

(5.3.4) Notemos que si Z es un subespacio cerrado de X, entonces $\Gamma_Z(X,F) = \{s \in F(X)\ /\ Sop(s) \subset Z\}$, y si Z es abierto entonces $\Gamma_Z(X,F) = F(Z)$.

(5.3.5) Sea $F \in S(\bar{X},\ \bar{\tau})$, $Z \subseteq X$ un subespacio localmente cerrado de X; sea $V \subseteq X$ un abierto tal que $Z \subseteq V$ y Z es cerrado en V.

Si $U \subseteq X$ es un abierto, el morfismo $F(V) \longrightarrow F(V \cap U)$ induce un morfismo $\Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z\cap U}(U,F|U)$. (Notemos que $\Gamma_Z(X,F) = \Gamma_Z(V,F/V)$).

Así podemos considerar el prehaz:

$$U \longmapsto \Gamma_{Z\cap U}(U,F|U)$$

Este prehaz es un haz, como se puede ver de forma inmediata. Lo notaremos por $\Gamma_Z(-,F)$.

El funtor:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_Z(-,-): S(\bar{X}, \bar{T}) & \longrightarrow & S(\bar{X}, \bar{T}) \\ F & \longmapsto & \Gamma_Z(-,F) \end{array}$$

es también exacto a idquierda.

(5.3.6) DEFINICION

Sea (X,T) un espacio topológico, Z un subespacio localmente cerrado de X y $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$. Los funtores derivados a derecha de los funtores: $\Gamma_Z(X,-)$ y $\Gamma_Z(-,-)$, los denotaremos por : $H^p_Z(X,-)$ y $\underline{H}^p_Z(-)$, rexpectivamente.

Así para $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$, a los grupos $H^p_Z(X,F)$, $p \geqslant 0$, los llamaremos los <u>grupos de cohomología de X con coeficientes en F y soporte en Z</u>.

A los haces $\underline{H}^p_Z(F)$, $p \geqslant 0$, los llamaremos: <u>Haces de cohomología de X con coeficientes en F y soporte en Z</u>.

(5.3.7) PROPOSICION

Sea $Z \subsetneq X$ un subespacio localmente cerrado. Entonces:

(a) Para cualquier $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$, $\Gamma_Z(X,F) = H^0_Z(X,F)$ y $\Gamma_Z(-,F) = \underline{H}^0_Z(F)$.

(b) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces entonces existen sucesiones exactas largas:

$$0 \longrightarrow H^0_Z(X,F') \longrightarrow H^0_Z(X,F) \longrightarrow H^0_Z(X,F'') \longrightarrow H^1_Z(X,F') \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 \longrightarrow \underline{H}^0_Z(F') \longrightarrow \underline{H}^0_Z(F) \longrightarrow \underline{H}^0_Z(F'') \longrightarrow \underline{H}^1_Z(F') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(c) Si F es un haz inyectivo, entonces $H^p_Z(X,F) = 0$, para cada $p > 0$, y $\underline{H}^p_Z(F) = 0$, para cada $p > 0$.

DEMOSTRACION

Estas propiedades se siguen de la definición de $H^p_Z(X,-)$ y $\underline{H}^p_Z(-)$.

(5.3.8) PROPOSICION

Sea Z un subespacio localmente cerrado de X y $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$. Para cada $p \geqslant 0$, $\underline{H}^p_Z(F)$ es el haz asociado al prehaz dado por: $U \longrightarrow H^p_{Z \cap U}(U, F|U)$.

DEMOSTRACION

Sea $\underline{H}'^{p}_{Z}(F)$ el haz asociado al prehaz anterior. Consideremos las familias de funtores: $\{ \underline{H}^{p}_{Z}(-)\}_{p\geq 0}$ y $\{ \underline{H}'^{p}_{Z}(-)\}_{p\geq 0}$. Ambas verifican las siguientes propiedades:

(a) Para p = 0, $\underline{H}'^{0}_{Z}(F) = \underline{H}^{0}_{Z}(F) = \Gamma_{Z}(-,F)$.

(b) Si F es inyectivo entonces $\underline{H}^{p}_{Z}(F) = 0$ para todo $p > 0$. Por otra parte $F|U$ es inyectivo y entonces $H^{p}_{Z\cap U}(U,F|U) = 0$, para todo $p > 0$, y por tanto $\underline{H}'^{p}_{Z}(F) = 0$ para todo $p > 0$.

(c) Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de haces, entonces para cada $U \subseteq X$ abierto, tenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow H^{0}_{Z\cap U}(U,F'|U) \longrightarrow H^{0}_{Z\cap U}(U,F|U) \longrightarrow H^{0}_{Z\cap U}(U,F''|U) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

y por tanto una sucesión exacta larga de los correspondientes prehaces. Como el funtor hacificación es exacto, obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \underline{H}'^{0}_{Z}(F') \longrightarrow \underline{H}'^{0}_{Z}(F) \longrightarrow \underline{H}'^{0}_{Z}(F'') \longrightarrow \underline{H}'^{1}_{Z}(F') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

También tenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \underline{H}^{0}_{Z}(F') \longrightarrow \underline{H}^{0}_{Z}(F) \longrightarrow \underline{H}^{0}_{Z}(F'') \longrightarrow \underline{H}^{1}_{Z}(F') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por tanto como estas tres propiedades caracterizan a los funtores derivados a derecha del funtor $\Gamma_{Z}(-,-)$, entonces $\underline{H}^{p}_{Z}(F) = \underline{H}'^{p}_{Z}(F)$, para todo $p \geq 0$, y para todo $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$.

(5.3.9) PROPOSICION (Fórmula de Escisión)

Sea Z un subespacio localmente cerrado de X y sea V un abierto de X tal que $Z \subseteq V \subseteq X$.

Entonces, para todo $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$, $H^{p}_{Z}(X,F) = H^{p}_{Z}(V,F|V)$, para cada $p \geq 0$.

DEMOSTRACION

$\{ H^{p}_{Z}(X,-)\}_{p\geq 0}$ son los funtores derivados del funtor $\Gamma_{Z}(X,-)\colon S(\bar{X}, \bar{T}) \longrightarrow Ab$,

y $\{ H^{p}_{Z}(V,-)\}_{p\geq 0}$ son los funtores derivados del funtor $\Gamma_{Z}(V,-)\colon S(\bar{V}, \overline{T|V}) \longrightarrow Ab$.

Sea $0 \longrightarrow F \longrightarrow J^{\cdot}$ una resolución inyectiva de F, entonces $H^p_Z(X,F) =$
$H^p(\Gamma_Z(X,J^0) \longrightarrow \Gamma_Z(X,J^1) \longrightarrow \ldots\ldots\ldots)$.

Ya que $0 \longrightarrow F|U \longrightarrow (J^{\cdot})|U$ es también una resolución inyectiva de $F|U$, entonces $H^p_Z(V,F\ U) = H^p(\Gamma_Z(V,J^0|V) \longrightarrow \Gamma_Z(V,J^1|V)\ldots\ldots)$.

Pero como $\Gamma_Z(X,J^i) = \Gamma_Z(V,J^i|V)$ por estar Z contenido en V, entonces el resultado se sigue trivialmente.

(5.3.10) LEMA

Si F es fuertemente flasgo, entonces $\Gamma_Z(-,F)$ es fuertemente flasgo.

DEMOSTRACION

Remplazando X por un subconjunto abierto V que contenga a Z como cerrado, y teniendo en cuente (5.3.10), podemos suponer que Z es cerrado en X.

Tenemos que demostrar que si $U \subseteq X$ es abierto, el morfismo

$$\Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z\cap U}(U,F|U)$$

es sobreyectivo.

Sea $t \in \Gamma_{Z\cap U}(U,F|U)$, entonces $t \in F(U)$ y $\mathrm{Sop}(t) \subseteq Z\cap U$; en consecuencia $F(U-(Z\cap U) \longrightarrow U)(t) = 0 = F(U-(Z\cap U) \longrightarrow X-Z)(t)$.

Por ser F un haz, existirá $t' \in F((X-Z)\cup U)$ tal que $F(U \longrightarrow (X-Z)\cup U)(t') = t$, y $F((X-Z) \longrightarrow (X-Z)\cup U)(t') = 0$.

Como F es fuertemente flasgo, el morfismo $F(X) \longrightarrow F(U\cup(X-Z))$ es sobreyectivo, y por tanto existirá un $t'' \in F(X)$ tal que $F(U\cup(X-Z) \longrightarrow X)(t'') = t'$

Entonces $F(U \longrightarrow X)(t'') = F((X-Z) \longrightarrow U\cup(X-Z)) \circ F((X-Z)\cup U \longrightarrow X)(t'') =$
$= F((X-Z) \longrightarrow (X-Z)\cup U)(t') = 0$.

Por tanto $t'' \in F(X)$ y $\mathrm{Sop}(t'') \subset Z$, es decir $t'' \in \Gamma_Z(X,F)$ y además se aplica en t. Luego $\Gamma_Z(-,F)$ es fuertemente flasgo.

(5.3.11) PROPOSICION

Sea Z un subespacio localmente cerrado de X y $F \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$. Existe una sucesión espectral:

$$H^p(X,\underline{H}^q_Z(F)) \Longrightarrow H^{p+q}_Z(X,F)$$

DEMOSTRACION

Consideremos los funtores exactos a idquierda: $\Gamma_Z(-,-)$ y $\Gamma(X,-)$. Por (5.3.10), $\Gamma_Z(-,-)$ lleva inyectivos en $\Gamma(X,-)$-acíclicos, entonces teniendo en cuenta que $\Gamma(X,-) \circ \Gamma_Z(-,-) = \Gamma_Z(X,-)$, por ([18], Teorema 9.3, pág 299), obtenemos la sucesión espectral deseada.

(5.3.12) PROPOSICION

Sea Z un subespacio localmente cerrado de X. Sea $Z' \subseteq Z$ un cerrado y sea $Z'' = Z - Z'$. Entonces para todo $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$ existe una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z'}(X,F) \longrightarrow \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(X,F)$$

Por otra parte, si F es fuertemente flasgo, podemos poner un cero a la derecha.

DEMOSTRACION

Por (5.3.9), podemos suponer que Z es cerrado en X.

Entonces $\Gamma_{Z'}(X,F) = \{ t \in F(X) \ / \ Sop(t) \subseteq Z' \} \subset \{ t \in F(X) \ / \ Sop(t) \subset Z \} = \Gamma_Z(X,F)$. Sea $V = X - Z'$; V es abierto y $Z'' = Z \cap V$, es decir, Z'' es cerrado en V. Entonces $\Gamma_{Z''}(X,F) = \{ t \in F(V) \ / \ Sop(t) \subseteq Z'' \}$, y el morfismo $\phi : F(X) \longrightarrow F(V)$, induce un morfismo $\phi_Z : \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(X,F)$.

Si $\phi_Z(t) = 0$, ya que $Sop(t) \subseteq Z$, entonces $Sop(t) \subseteq Z'$ de donde $t \in \Gamma_{Z'}(X,F)$, y por tanto la sucesión es exacta.

Ahora, si F es fuertemente flasgo, entonces $F(X) \longrightarrow F(V)$ es sobreyectivo, por tanto si $t'' \in \Gamma_{Z''}(X,F)$ entonces existirá $t \in F(X)$ tal que $F(V \longrightarrow X)(t) = t''$. Pero puesto que $V = X - Z'$ y $Sop(t'') \subseteq Z \cap V = Z \cap (X - Z')$, entonces $Sop(t) \subseteq Z - Z'$, y por tanto $t \in \Gamma_Z(X,F)$ y así ϕ_Z es sobreyectiva.

(5.3.13) PROPOSICION

Sean Z, Z' y Z'' como en (5.3.12), y sea $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$. Entonces existen sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z'}(X,F) \longrightarrow \Gamma_Z(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(X,F) \longrightarrow H^1_{Z'}(X,F) \longrightarrow H^1_Z(X,F) \ldots\ldots$$

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z'}(-,F) \longrightarrow \Gamma_Z(-,F) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(-,F) \longrightarrow \underline{H}^1_{Z'}(F) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

DEMOSTRACION

Ya que la sucesión de funtores:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z'}(X,-) \longrightarrow \Gamma_{Z}(X,-) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(X,-) \longrightarrow 0$$

es exacta en inyectivos, la primera sucesión exacta larga se sigue de

De igual forma, la sucesión de funtores:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z'}(-,-) \longrightarrow \Gamma_{Z}(-,-) \longrightarrow \Gamma_{Z''}(-,-) \longrightarrow 0$$

es exacta en inyectivos, y por tanto la segunda sucesión exacta larga se sigue de

(5.3.14) COROLARIO

Sea Z un subconjunto cerrado de X y $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$. Existen sucesiones exactas:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z}(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X-Z,F|X-Z) \longrightarrow H^1_Z(X,F) \longrightarrow H^1(X,F) \ldots.$$

y

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z}(-,F) \longrightarrow F \longrightarrow j_*(F|X-Z) \longrightarrow \underline{H}^1_Z(F) \longrightarrow 0$$

Además, $\underline{H}^{p+1}_Z(F) \simeq R^p j_*(F|X-Z)$, para cada $p > 0$, donde $j\colon X-Z \longrightarrow X$ es la inclusión.

DEMOSTRACION

En la proposición (5.3.13), consideramos el caso particular en que $Z = X$, $Z' = Z$ y $Z'' = X-Z$. Entonces tenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z}(X,F) \longrightarrow \Gamma_{X}(X,F) \longrightarrow \Gamma_{X-Z}(X,F) \longrightarrow H^1_Z(X,F) \longrightarrow H^1_X(X,F) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1_X(X-Z,F) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pero el funtor $\Gamma_X(X,-) = \Gamma(X,-)$, y por tanto $H^q_X(X,-) = H^q(X,-)$, para todo q; y el funtor $\Gamma_{X-Z}(X,-) = \Gamma(X-Z,-)$, y por tanto $H^q_{X-Z}(X,-) = H^q(X-Z,-)$, para todo $q \geq 0$. Así, sustituyendo obtenemos la primera sucesión exacta larga.

Tenemos también la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z}(-,F) \longrightarrow \Gamma_{X}(-,F) \longrightarrow \Gamma_{X-Z}(-,F) \longrightarrow \underline{H}^1_Z(F) \longrightarrow \underline{H}^1_X(F) \longrightarrow \underline{H}^1_{X-Z}(F) \ldots$$

Pero $\Gamma_X(-,F) = F$ y el funtor $\Gamma_X(-,-)$ es exacto y por tanto $\underline{H}^q_X(F) = 0$, para todo $q > 0$.

Además $\Gamma_{X-Z}(-,F) = j_*(F|X-Z)$, ya que

$\Gamma_{X-Z}(-,F)(U) = \Gamma_{(X-Z)\cap U}(U,F|U) = \Gamma((X-Z)\cap U) = j_*(F|X-Z)(U)$; por tanto $\underline{H}^q_{X-Z}(F) = R^q j_*(F|X-Z)$, para todo $q \geq 0$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior y sustituyendo, obtenemos la sucesión exacta y los isomorfismos pedidos.

(5.3.15) PROPOSICION. (Sucesión de Mayer-Vietoris)

Sean Y_1 e Y_2 dos subconjuntos cerrados de X y $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$. Existe una sucesión exacta larga:

$$\ldots\ldots H^q_{Y_1\cap Y_2}(X,F) \longrightarrow H^q_{Y_1}(X,F)\oplus H^q_{Y_2}(X,F) \longrightarrow H^q_{Y_1\cup Y_2}(X,F) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{q+1}_{Y_1\cap Y_2}(X,F) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

DEMOSTRACION

En principio, veamos que se verifican las igualdades:

$$\Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,F) = \Gamma_{Y_1}(X,F)\cap \Gamma_{Y_2}(X,F)$$
$$\Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,F) = \Gamma_{Y_1}(X,F) + \Gamma_{Y_2}(X,F)$$

En efecto, si $s \in \Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,F)$, entonces $s \in F(X)$ y $\mathrm{Sop}(s) \subseteq Y_1\cap Y_2$, por tanto $s \in \Gamma_{Y_1}(X,F)\cap \Gamma_{Y_2}(X,F)$.

Si $s \in \Gamma_{Y_1}(X,F)\cap \Gamma_{Y_2}(X,F)$, entonces $s \in F(X)$ y $\mathrm{Sop}(s) \subset Y_1 \cap Y_2$, por tanto $s \in \Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,F)$. De la misma forma se demuestra la otra igualdad.

Tenemos la sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$\Gamma_{Y_1}(X,F)\cap \Gamma_{Y_2}(X,F) \rightarrowtail \Gamma_{Y_1}(X,F)\oplus\Gamma_{Y_2}(X,F) \twoheadrightarrow \Gamma_{Y_1}(X,F)+\Gamma_{Y_2}(X,F)$$

o bien la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y_1\cap Y_2}(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Y_1}(X,F)\oplus\Gamma_{Y_2}(X,F) \longrightarrow \Gamma_{Y_1\cup Y_2}(X,F) \longrightarrow 0$$

Como esta sucesión exacta corta existe para todo $F \in S(\bar{X}, \bar{\tau})$, tenemos entonces la sucesión exacta corta de funtores:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y_1 \cap Y_2}(X,-) \longrightarrow \Gamma_{Y_1}(X,-) \oplus \Gamma_{Y_2}(X,-) \longrightarrow \Gamma_{Y_1 \cup Y_2}(X,-) \longrightarrow 0$$

que dará lugar a una sucesión exacta larga en cohomología; teniendo en cuenta que cohomología conmuta con sumas directas finitas, obtenemos entonces la sucesión exacta larga deseada.

(5.3.16) PROPOSICION

Sea $F \in S(\bar{X}, \bar{\tau})$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) F es fuertemente flasgo.

(ii) Para todo subespacio localmente cerrado de X, Y, y para todo $q > 0$, se tiene que $H^q_Y(X,F) = 0$ y $\underline{H}^q_Y(F) = 0$.

(iii) Para todo subespacio cerrado de X, Y, se tiene que $H^1_Y(X,F) = 0$.

DEMOSTRACION

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supongamos que F es fuertemente flasgo y sea $Y \subseteq X$ localmente cerrado. Sea V un abierto de X tal que $Y \subseteq V$ e Y es cerrado en V. Entonces $F|V$ es fuertemente flasgo, como fácilmente se puede comprobar. Así por la fórmula de escisión, (5.3.9), podemos suponer que $V = X$, es decir, que Y es cerrado en X.

Consideremos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \Gamma_Y(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X-Y,F|X-Y) \longrightarrow H^1_Y(X,F) \longrightarrow H^1(X,F) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X-Y,F|X-Y) \longrightarrow H^2_Y(X,F) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Puesto que F es fuertemente flasgo y $F|X-Y$ también, entonces $H^q(X,F) = 0 = H^q(X-Y,F|X-Y)$ para todo $q > 0$, por tanto $H^q_Y(X,F) = 0$ para todo $q \geq 2$. Por otra parte, ya que F es fuertemente flasgo, el morfismo $F(X) \longrightarrow F(X-Y)$ es sobreyectivo, y por tanto $H^1_Y(X,F) = 0$.

Sea, ahora, U un abierto de X, entonces $F|U$ es fuertemente flasgo y por tanto $H^q_{Y\cap U}(U,F|U) = 0$ para todo $q > 0$. Pasando a haces asociados, y teniendo en cuenta (5.3.8), se verifica que $\underline{H}^q_Y(F) = 0$ para todo $q > 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Trivial.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Para ver que F es fuertemente flasgo, es suficiente ver que si U es un abierto de X, entonces $F(X) \longrightarrow F(U)$ es sobreyectivo.

Sea $Y = X-U$ que es cerrado en X, y entonces por hipótesis $H^1_Y(X,F) = 0$. Considerando la sucesión esacta larga de (5.3.14), obtenemos la sucesión exacta: $0 \longrightarrow \Gamma_Y(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X-Y, F|X-Y) \longrightarrow 0$. Por tanto el morfismo $F(X) \longrightarrow F(X-Y) = F(U)$ es sobreyectivo, c.q.d.

5.4 TEOREMA DE ANULACION DE GROTHENDIECK

(5.4.1) PROPOSICION

Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico noetheriano y Z un subespacio localmente cerrado suyo. Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ un sistema directo de haces . Entonces los morfismos naturales:

$$\varinjlim_{i\in I} H^q_Z(X,F_i) \longrightarrow H^q_Z(X,\varinjlim_{i\in I} F_i)$$

son isomorfismos, para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

Es idéntica a la hecha en (5.1.6), sin más que tener en cuenta que si G es un haz fuertemente flasgo entonces $H^q_Z(X,G) = 0$ para todo $q > 0$, vease (5.3.16).

(5.4.2) PROPOSICION

Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, sea Z un subespacio localmente cerrado suyo, y sea Y un subconjunto cerrado.

Sea $j\colon (Y, \mathcal{T}|Y) \longrightarrow (X,\mathcal{T})$ la inclusión. Entonces $H^q_{Z\cap Y}(Y,F) \simeq H^q_Z(X,j_*F)$, para todo $q \geq 0$, y para todo $F \in S(\bar{Y}, \overline{\mathcal{T}|Y})$.

DEMOSTRACION

Sea $I^\cdot$ una resolución fuertemente flasga de F. Por (1.3.13) y por (5.1.7), $j_*(I^\cdot)$ es una resolución fuertemente flasga de j_*F.

Por otra parte se verifica que $\Gamma_{Z\cap Y}(Y, I^\Gamma) = \Gamma_Z(X, j_* I^\Gamma)$. En efecto, sea V un abierto de X tal que $Z \subseteq V$ y Z es cerrado en V, entonces $Z\cap Y \subseteq V \cap Y$ y $Z \cap Y$ es es cerrado en $V \cap Y$. Entonces tenemos:

$$\Gamma_{Z\cap Y}(Y, I^r) = \{ s \in I^r(V\ \ Y) \ / \ \mathrm{Sop}(s) \subseteq Z\cap Y \} = \{ s \in I^r(V\ \ Y) \ / \ \mathrm{Sop}(s) \subseteq Z \} =$$

$$= \{ s \in j_* I^r(V) \ / \ \mathrm{Sop}(s) \subseteq Z \} = \Gamma_Z(X, j_* I^r).$$

Luego como $\Gamma_{Z\cap Y}(Y, I^r) = \Gamma_Z(X, j_* I^r)$ para cada r, entonces los grupos de cohomología han de coincidir, y por tanto tenemos lo pedido.

(5.4.3) PROPOSICION

Sea (X, τ) un espacio topológico noetherisno y $Z \subseteq X$ un subespacio localmente cerrado.

Entonces $H^q_Z(X,-) = 0$ para todo $q > n$, si y sólo si $H^q_Z(X, \mathbb{Z}_U) = 0$, para todo $q > n$ y para todo $U \subseteq X$.

Denotamos por $\mathbb{Z}_U$ a $j_!((\mathbb{Z})\ U)$, donde $J_!$ es el funtor definido en (1.3.15) y j es la inclusión de U en X.

DEMOSTRACION

$\Longleftarrow$) Trivial.

$\Longrightarrow$) Sea $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$, por (1.3.6), $F = \varinjlim_{i\in I} F_i$, con F_i finitamente generado para todo $i \in I$, y puesto que $H^q_Z(X,F) = H^q_Z(X, \varinjlim_{i\in I} F_i) = \varinjlim_{i\in I} H^q_Z(X,F_i)$, será suficiente probar que $H^q_Z(X,F) = 0$, para todo $q > n$, en el supuesto de que F es finitamente generado.

Supongamos que F está generado por m secciones, $s_1, \ldots, s_m$, y hacemos inducción sobre m. Supongamos que $m = 1$, entonces F es monógeno generado por una sección $s \in F(U)$, para algún abierto $U \subseteq X$; en tal caso F es un cociente del haz $\mathbb{Z}_U$ y tendremos la sucesión exacta corta: $0 \longrightarrow R \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow F \longrightarrow 0$ que induce la sucesión exacta larga:

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \ H^q_Z(X,\mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^q_Z(X,F) \longrightarrow H^{q+1}_Z(X,R) \longrightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots$$

como $H^q_Z(X, \mathbb{Z}_U) = 0$, para todo $q > n$, será suficiente probar que $H^q_Z(X,R) = 0$ para todo $q > n$. Para cada $x \in U$, la fibra $R_x = n_x \mathbb{Z}$, para algún cierto entero positivo n_x; supuesto que $R \neq 0$, en caso contrario la situación es obvia, sea $d_x = \min_{x\in U} n_x$, existirá $V \subseteq U$, $V \neq \emptyset$, tal que $R|V = (s(d_x Z))|V = (sZ)|V$, y en consecuencia $R_V \cong Z_V$; se tiene entonces la sucesión exacta corta:

$0 \longrightarrow Z_V \longrightarrow R \longrightarrow R/Z_V \longrightarrow 0$, que, de nuevo, induce la sucesión exacta larga:

$$\cdots\cdots\cdots H^q_Z(X, Z_V) \longrightarrow H^q_Z(X,R) \longrightarrow H^q_Z(X,R/Z_V) \cdots\cdots\cdots$$

como $H^q_Z(X, Z_V) = 0$ para todo $q > n$, es suficiente probar que $H^q_Z(X,R/Z_V) = 0$ para todo $q > n$. Ahora bien, si llamamos $Y = U \cap (X-V)$, Y es en subconjunto localmente cerado de X y es inmediato observar que $R/Z_V \cong Z_Y = i_*((sZ)|Y)$, donde $i\ Y \longrightarrow X$ es la inclusión, ya que ambos tienen fibras idénticas; se tiene además la sucesión exacta corat $0 \longrightarrow Z_V \longrightarrow Z_W \longrightarrow Z_Y \longrightarrow 0$, donde $W = U \cup V$, de la cual el resultado se sigue obviamente.

Supongamos que $m > 1$ y hagamos hipótesis de inducción. Sea F' el subhaz de F generado por $s_1, \ldots, s_{m-1}$; se tiene la sucesión exacta corta:

$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F/F' \longrightarrow 0$, donde F/F' es monógeno. Entonces $H^q_Z(X,F') = 0 = H^q_Z(X,F/F')$ para todo $q > n$, por el caso anteriormente discutido y por la hipótesis de inducción. La sucesión exacta larga en cohomología asociada a la anterior sucesión exacta corta nos permite concluir la demostración.

(5.4.4) LEMA

Sea (X,τ) un espacio topológico noetheriano. Si $H^q_{Z\cap Y}(Y,-) = 0$ para todo $q > n$ y para toda componente irreducible de X, entonces $H^q_Z(X,-) = 0$ para todo $q > n$.

DEMOSTRACION

Hacemos inducción sobre el número de componentes irreducibles de X; si es una, la cuestión es obvia. Sea entonces Y una componente irreducible de X y sea $U = X-Y$. Para cualquier haz F sobre X se tiene la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow F_U \longrightarrow F \longrightarrow F_Y \longrightarrow 0$$

donde $F_U = j_!(F|U)$ y $F_Y = i_*(F|Y)$, con $j\colon U \longrightarrow X$ e $i\colon Y \longrightarrow X$ las inclusiones. Esta sucesión exacta corta induce la sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots\cdots\cdots H^q_Z(X,F_U) \longrightarrow H^q_Z(X,F) \longrightarrow H^q_Z(X,F_Y) \longrightarrow \cdots\cdots\cdots$$

donde $H^q_Z(X,F_Y) = H^q_{Z\cap Y}(Y,F|Y)$ por (5.4.2), y nulo para todo $q > n$, por hipótesis; además F_U puede considerarse como un haz sobre Ad(U)= Adherencia de U, que tiene menos componentes irreducibles que X y por hipótesis de inducción $H^q_Z(X,F_U) = 0$ para todo $q > n$, de donde $H^q_Z(X,F) = 0$ para todo $q > n$.

(5.4.5) TEOREMA

Sea (X,T) un espacio topológico noetheriano de dimensión n, sea Z un subconjunto localmente cerrado de X, y sea $F \in S(\bar{X}, \bar{T})$. Entonces $H^q_Z(X,F) = 0$ y $\underline{H}^q_Z(F) = 0$ para todo $q > n$.

DEMOSTRACION

Por el lema (5.4.4), podemos suponer que X es irreducible. Hacemos la demostración por inducción sobre $n = \dim(X)$.

Si X es irreducible de dimensión cero, entonces puesto que cualquier subconjunto abierto de un irreducible es irreducible y la adherencia de un irreducible es irreducible, los únicos abiertos de X son X y el vacio; entonces $S(\bar{X}, \bar{T})$ coincide cpn Ab^{T^o} y en consecuencia el funtor $\Gamma_Z(X,-)$ es exacto y por tanto $H^q_Z(X,F) = 0$ para todo $q > 0$.

Supongamos que $\dim(X) = n \geq 1$ y que el teorema es cierto para n-1, por el lema (5.4.3), nos basta con ver que $H^q_Z(X, Z_U) = 0$ para todo $q > n$ y para todo abierto U de X.

Sea $Y = X-U$, tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Z_U \longrightarrow s(Z) \longrightarrow Z_Y \longrightarrow 0$$

Ahora, $\dim(Y) < \dim(X)$ ya que X es irreducible; por (5.4.3), $H^q_Z(X, Z_Y) = H^q_Z(Y,(sZ)|Y) = 0$ para todo $q > n$ por hipótesis de inducción. Por otra parte $s(Z)$ es un haz fuertemente flasgo y por tanto $H^q_Z(X,s(Z)) = 0$ para $q > 0$. Así de la sucesión exacta larga en cohomología $H^q_Z(X,Z_U) = 0$ para $q > n$.

Sea ahora U un abierto de X, entonces por ser X noetheriano, U también es noetheriano y $\dim(U) \leq \dim(X)$, por tanot $H^q_{Z\cap U}(U,F|U) = 0$ para $q > n$. Pasando a haces asociados, obtenemos que $\underline{H}^q_Z(F) = 0$ para todo $q > n$.

(5.4.6) TEOREMA. (Teorema de anulación de Grothendieck)

Sea (X,τ) un espacio topológico noetheriano de dimensión n, y sea $F \in S(\bar{X}, \bar{\tau})$. Entonces $H^q(X,F) = 0$ para todo $q > n$ y $\mathcal{H}^q(F) = 0$ para todo $q > n$.

DEMOSTRACION

Consideremos a X como subconjunto localmente cerrado de X. Entonces $\Gamma_X(X,-) = \Gamma(X,-)$ y $H^q_X(X,-) = H^q(X,-)$, por tanto, por (5.4.5), $H^q(X,F) = 0$ para todo $q > n$.

De igual forma $\mathcal{H}^q(F) = 0$ para todo $q > n$.

(5.4.7) PROPOSICION

Sea (X,τ) un espacio topológico paracompacto y Haussdorff. Si $\check{H}^q(X,F) = 0$ para todo $q > n$, entonces $H^q(X,F) = 0$ para todo $q > n$.

DEMOSTRACION

Es trivial teniendo en cuenta el teorema (5.2.4).

6. COHOMOLOGIA DE ZARISKI

6.1 COHOMOLOGIA DE UN ESQUEMA AFIN: TEOREMA DE SERRE

(6.1.1) Sea (X,θ_X) un esquema, ver (2.2.1), y consideremos la categoría topológica $(Zar/X, Zar(X))$ definida en (3.2.6). Siendo τ la topología en X, sea $(\bar{X}, \bar{\tau})$ la categoría topológica construida a partir del espacio topológico (X,τ), como en (1.3.1). Entonces ambas categorías topológicas son isomorfas.

En efecto, definimos un funtor $\mu : \bar{X} \longrightarrow Zar/X$ como:

$\mu(U) = i_U : (U,\theta_X|U) \longrightarrow (X,\theta_X)$, y $\mu(U \xrightarrow{j} V) = j:(U,\theta_X|U) \longrightarrow (V,\theta_X|V)$.

Y un funtor $\nu: Zar/X \longrightarrow \bar{X}$, como $\nu((Y,\theta_Y) \xrightarrow{f} (X,\theta_X)) = f(Y)$ (notemos que f es una inmersión abierta), y $\nu((Y,\theta_Y) \xrightarrow{h} (Z,\theta_Z)) = f(Y) \longrightarrow g(Z)$

$$\begin{tikzcd} (Y,\theta_Y) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & (Z,\theta_Z) \arrow[dl, "g"] \\ & (X,\theta_X) & \end{tikzcd}$$

Evidentemente, estos funtores son inversos el uno del otro. Se puede demostrar además que ambos funtores son morfismos de categorías topológicas, ver (1.2.3), y por tanto $(Zar/X, Zar(X)) \simeq (\bar{X}, \bar{\tau})$

(6.1.2) Hagamos notar que trabajaremos principalmente en la categoría ${}_{\theta_X}M$, que es la categoría de θ_X- módulos asociada al esquema (X,θ_X) definida en (2.3.1). Esta categoría tiene suficientes inyectivos (2.3.9); así podemos considerar los funtores derivados a derecha del funtor $\Gamma(X,-) : {}_{\theta_X}M \longrightarrow Ab$.

(6.1.3) LEMA

Todo θ_X- módulo inyectivo es fuertemente flasgo.

DEMOSTRACION

Es idéntica a la hecha en (5.1.2(iv)), teniendo en cuenta que $j_!((sZ)|U)$ es un θ_X- módulo.

(6.1.4) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema. Para cada θ_X- módulo F se verifica que $R^q(\Gamma(X,-))(F) = H^q(X,F)$ para todo $q \geq 0$, y donde $\Gamma(X,-) : {}_{\theta_X}M \longrightarrow Ab$ y $H^q(X,F)$ son los definidos en (4.1.1).

DEMOSTRACION

En efecto, notemos por $H'^q(X,-)$ a los funtores derivados a derecha del futor $\Gamma(X,-)$. Si F es un θ_X- módulo y $0 \longrightarrow F \longrightarrow J^{\cdot}$ es una resolución inyectiva de F en ${}_{\theta_X}M$, entonces $H'^q(X,F) = H^q(\Gamma(X,J^0) \longrightarrow \Gamma(X,J^1) \ldots\ldots\ldots)$.

Pero por (6.1.3), $0 \longrightarrow F \longrightarrow J^{\cdot}$ es una resolución fuertemente flasga de F y entonces $H^q(X,F) = H^q(\Gamma(X,J^0) \longrightarrow \Gamma(X,J^1) \ldots\ldots\ldots\ldots)$, según (5.1.4).

Así $H^q(X,F) = H'^q(X,F)$ para todo $q \geq 0$, y para todo θ_X- módulo F.

(6.1.5) Dado el esquema (X,θ_X), sea $A = \Gamma(X,\theta_X)$, entonces para cualquier θ_X- módulo F, $\Gamma(X,F)$ tiene estructura de A-módulo. En particular, ya que podemos calcular $H^q(X,F)$ usando resoluciones en ${}_{\theta_X}M$, entonces $H^q(X,F)$ es un A-módulo para todo $q \geq 0$.

(6.1.6) LEMA

Si J es un objeto inyectivo de ${}_{\theta_X}M$, entonces para cualquier abierto U de X, $J|U$ es un objeto inyectivo de ${}_{\theta_X|U}M$.

DEMOSTRACION

Es idéntica a la hecha en (1.3.18) sin más que tener en cuenta que si F es un $0_X|$ U-módulo entonces $j_!F$ es un θ_X- módulo.

(6.1.7) COROLARIO

Sea (X,θ_X) un esquema y sea U un abierto de X. Entonces $H^q(U,F) = H^q(U,F|U)$, para todo q 0.

Pasemos ahora a estudiar el caso en que consideremos un esquema afín noetheriano, es decir, un esquema $(X,\theta_X) = (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$ donde A es un anillo noetheriano, (2.2.6).

En principio, sea (X,θ_X) un esquema cualquiera y F un θ_X- módulo. Considerando a F como un haz, tendremos la cohomología de Čech: $\check{H}^q(\mathcal{U},F)$, como en (4.2.2), para $\mathcal{U}$ un recubrimiento de X.

(6.1.8) Si $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico, existe una versión hacificada del complejo de Cech.

Para cualquier conjunto abierto V de X, denotamos por $f: V \longrightarrow X$ el morfismo inclusión. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X y $F \in S(\bar{X}, \bar{\mathcal{T}})$. Construimos un complejo, $C^{\cdot}(\mathcal{U},F)$, de haces como sigue: $C^p(\mathcal{U},F) = \prod_{I^p} f_*(F|U_{i_0\ldots i_p})$, y definimos $d^p: C^p(\mathcal{U},F) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},F)$, de forma que d^p_U sea el morfismo d^p del complejo $C^{\cdot}(U|\mathcal{U},F)$, donde $U|\mathcal{U} = \{U_i \cap U\}_{i\in I}$.

Notemos que $\Gamma(X, C^{\cdot}(\mathcal{U},F)) = C^{\cdot}(\mathcal{U},F)$, que es el complejo de Čech definido en (4.2.1)

Si (X,θ_X) es un esquema y F un θ_X- módulo, entonces $f_*(F|U_{i_0\ldots i_p})$ es un θ_X-módulo, y así $C^{\cdot}(\mathcal{U},F)$ es una resolución de θ_X- módulos.

(6.1.9) LEMA

Sea (X,θ_X) un esquema, y F un θ_X- módulo. Entonces el complejo $C^{\cdot}(\mathcal{U},F)$ para $\mathcal{U}$ un recubrimiento de X, es una resolución de F. Es decir, existe un morfismo de θ_X- módulos $\varepsilon: F \longrightarrow C^0(\mathcal{U},F)$, tal que la sucesión de θ_X- módulos:

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varepsilon} C^0(\mathcal{U},F) \longrightarrow C^1(\mathcal{U},F) \longrightarrow \cdots\cdots\cdots$$

es exacta.

DEMOSTRACION

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Definimos $\varepsilon: F \longrightarrow C^0(\mathcal{U},F)$, tomando el producto de los morfismos naturales: $F \longrightarrow f_*(F|U_i)$ para $i\in I$. Entonces la exactitud se sigue de los axiomas de haz para F.

En efecto, sea V un abierto de X, entonces:

$$\varepsilon_V : F(V) \longrightarrow \prod_i f_*(F|U_i)(V) = \prod_i F(U_i \cap V)$$

es mónica, ya que $\{U_i \cap V\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de V. Por la misma razón, y ya que $C^1(U,F)(V) = \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j \cap V)$, la sucesión

$$0 \longrightarrow F(V) \longrightarrow C^0(U,F)(V) \longrightarrow C^1(U,F)(V)$$

es exacta.

Para mostrar la exactitud del complejo para $p \geq 1$, es suficiente verlo sobre las fibras. Sea $x \in X$, y supongamos que $x \in U_j$. Para cada $p \geq 1$ definimos un morfismo $k: C^p(U,F)_x \longrightarrow C^{p+1}(U,F)_x$ como sigue: Sea $t_x \in C^p(U,F)_x$, que vendrá representado por un $t \in C^p(U,F)(V)$, con $x \in V$ y $V \subseteq U_j$. Entonces $(k(t))_{i_0 \ldots i_{p-1}} = t_{ji_0 \ldots i_{p-1}}$; esto tiene sentido ya que $V \cap U_{i_0 \ldots i_{p-1}} = V \cap U_{ji_0 \ldots i_{p-1}}$

Entonces $k(t_x) = k(t)_x$. Se verifica que $(dok + kod)(t_x) = t_x$, para todo $p \geq 1$.

Así k es una homotopía para el complejo $C^{\cdot}(U,F)_x$, entre los morfismos identidad y cero. Por tanto $H^p(C^{\cdot}_x) = 0$ para todo $p \geq 1$ y para todo $x \in X$, y entonces $H^p(C^{\cdot}(U,F)) = 0$ para todo $p \geq 1$, luego el complejo $C^{\cdot}(U,F)$ es exacto.

(6.1.10) PROPOSICION

Sea $(\mathrm{Spec}(A), \theta_A)$ un esquema afín y F un θ_A- módulo cuasi-coherente. Sea $U = \{D(f_i)\}_{i\in I}$ un recubrimiento de Spec(A) por abiertos básicos. Entonces $\check{H}^p(U,F) = 0$ para todo $p > 0$.

DEMOSTRACION

Por (2.4.5), $F = M^{\bullet}$, donde $M = \Gamma(\mathrm{Spec}(A),F)$ es un A-módulo y $M^{\bullet}$ es el θ_A- módulo definido en (2.4.1). Consideremos la resolución $C^{\cdot}(U,M^{\bullet})$ de $M^{\bullet}$, entonces $\Gamma(\mathrm{Spec}(A), C^{\cdot}(U,M)) = C^{\cdot}(U,M)$; por otra parte si D(g) es un abierto básico, se tiene: $C^p(U,M^{\bullet})(D(g)) = \prod_{I^{p+1}} M^{\bullet}(D(f_{i_0}) \cap \ldots\ D(f_{i_p}) \cap D(g)) = \prod_{I^p} M^{\bullet}(D(f_{i_0} \ldots f_{i_p} g) =$

$= \prod_{I^p} M_{f_{i_0} \ldots f_{i_p} g} = (\prod_{I^p} M_{f_{i_0} \ldots f_{i_p}})_g$. Por tanto $C^p(U,M^{\bullet}) = (\prod_{I^{p+1}} M_{f_{i_0} \ldots f_{i_p}})^{\bullet}$, de donde $C^p(U,M^{\bullet})$ es cuasi-coherente.

Luego $0 \longrightarrow M^{\bullet} \longrightarrow C^{0}(\mathcal{U},M^{\bullet}) \longrightarrow C^{1}(\mathcal{U},M^{\bullet})$.........., es una sucesión exacta de haces cuasi-coherentes. Por (2.4.6), al aplicar el funtor $\Gamma(\mathrm{Spec}(A),-)$, obtenemos de nuevo una sucesión exacta, es decir, $C^{\cdot}(\mathcal{U},M)$ es un complejo exacto, y por tanto $\check{H}^{p}(\mathcal{U},M) = 0$ para todo $p > 0$.

(6.1.11) TEOREMA

Si X es un esquema afín y F un θ_X- módulo cuasi-coherente, entonces $H^{p}(X,F) = 0$, para todo $p > 0$.

DEMOSTRACION

Ya que los recubrimientos de X por abiertos básicos son cofinales en la clase de todos los recubrimientos por abiertos de X, entonces, por (6.1.10), se tiene para cada $p > 0$, $\check{H}^{p}(X,F) = \varinjlim \check{H}^{p}(\mathcal{U},F) = 0$,

Por otra parte, si $U = D(g)$ es un abierto básico, entonces $\check{H}^{p}(U,F|U) = 0$, para $q > 0$, ya que U es un abierto afín y $F|U$ es un θ_U- módulo cuasi-coherente, ver (2.4.8). Ya que $D(f_1) \cap \ldots \cap D(f_r) = D(f_1 \ldots f_r)$, estamos en las condiciones de (5.2.7), y así $\check{H}^{p}(V,F) \simeq H^{p}(V,F)$, para $p \geq 0$ y V un abierto de X.

En particular, $\check{H}^{p}(X,F) \simeq H^{p}(X,F)$ para $p > 0$, y entonces $H^{p}(X,F) = 0$ para todo $p > 0$.

(6.1.12) COROLARIO

Sea (X,θ_X) un esquema afín, y sea $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta de θ_X- módulos. Suponemos además que F' es cuasi-coherente, entonces la sucesión $0 \longrightarrow \Gamma(X,F') \longrightarrow \Gamma(X,F) \longrightarrow \Gamma(X,F'') \longrightarrow 0$ es exacta.

DEMOSTRACION

Por ser F' cuasi-coherente y por (6.1.11), $H^{p}(X,F') = 0$ para todo $p > 0$. Así obtenemos la sucesión exacta corta deseada a partir de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión exacta corta de partida.

(6.1.13) TEOREMA. (Teorema de Serre)

Sea (X,θ_X) un esquema noetheriano. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) (X,θ_X) es afín.

(ii) Existe un conjunto finito de elementos, $f_1,\dots,f_r \in A = \Gamma(X,0_X)$, tal que los subconjuntos abiertos $X_{f_i} = \{ x\in X \,/\, (f_i)_x \notin m_x \subset 0_{X,x} \}$, son afines. Además $f_1,\dots,f_r$ generan A.

(iii) $H^q(X,F) = 0$, para todo $q > 0$ y para todo θ_X- módulo cuasi-coherente.

(iv) $H^1(X,J) = 0$, para todos los haces de ideales coherentes.

DEMOSTRACION

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Es inmediato, basta tomar $f = 1 \in A$.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Es el teorema (6.1.11).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Es trivial

(iv) $\Longrightarrow$ (ii) Sea $p \in X$ un punto cerrado de X y sea U un entorno abierto afín de p. Sea $Y = X-U$ y consideremos los ideales haces $J_{Y\cup p}$ y J_Y de los conjuntos cerrados $Y\cup p$ e Y, respectivamente, vease (2.4.10). Entonces $J_{Y\cup p}$ es un subhaz de J_Y y sea $K(p) = J_Y/J_{Y\cup p}$. Este cociente es el dado por:

$$K(p)(U) = \begin{cases} 0_{X,p}/m_p & \text{si } p\in U \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que $J_{Y\cup p}$ es un haz de ideales coherente, (2.4.11), será $H^1(X,J_{Y\cup p}) = 0$ por hipótesis, y entonces $\Gamma(X,J_Y) \longrightarrow \Gamma(X,K(p)) \longrightarrow 0$ es exacta, así existe $f \in J_Y(X)$ que va al 1 de $K(p)(X) = 0_{X,p}/m_p$, es decir, $f_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m_p)$. Ya que J_Y es un subhaz de θ_X podemos considerar f un elemento de A; y como $f_p \notin m_p$, será $f \in X_f$. Además $X_f \subset U$, pues si $r\in Y = X-U$, entonces al ser $(J_Y)_r = 0$, será $f_r \in m_r$, o sea, $r \notin X_f$.

Por otra parte, como veremos después, $X_f = D(\bar{f})$ donde $\bar{f}$ es la imagen de f en $\theta_X(U)$, y por tanto ya que $D(\bar{f})$ es un abierto afín de (U,θ_U), entonces X_f es un abierto afín de (X,θ_X).

Así cada punto cerrado de X tiene un entorno afín abierto de la forma X_f. Entonces la familia de los X_f es un recubrimiento por abiertos afines, de X. En efecto, sea $x \in X$ y sea U un entorno abierto afín de x; supongamos que $U \overset{\phi}{\cong} \mathrm{Spec}(B)$, y sea Q la imagen de x, sea N un ideal máximal de B tal que $Q \subseteq N$.

Sea $y \in U$ un elemento que se aplica en N mediante ϕ ; entonces y es un punto cerrado de X, y por tanto tendrá un entorno afín de la forma X_f. Veamos que $x \in X_f$; ya que $y \in X_f$ entonces $f_y \notin m_y \subset 0_{X,y}$, como $0_{X,y} = B_N$, entonces si $f_y \notin m_y$, esto quiere decir que $f \notin N$ y por tanto que $f \notin Q$. Luego $f_x \notin m_x \subset 0_{X,x} = B_Q$.

Por la compacidad de X, podemos recubrirlo por un número finito de abiertos afines de la forma X_f, correspondientes a $f_1,\dots,f_r \in A$.

Finalmente veamos que $f_1,\dots,f_r$ generan A. Definimos un morfismo de θ_X- módulos $\alpha\colon \theta_X^r \longrightarrow \theta_X$ tal que para $U \subseteq X$, $\alpha_U\colon \theta_X^r(U) \longrightarrow \theta_X(U)$ está dada por: $\alpha_U(a_1,\dots,a_r) = \sum_{i=1}(f_i|U)a_i$. El morfismo α es sobreyectivo; en efecto, para ello veamos que para cada $x \in X$, α_x es sobre. $\alpha_x\colon \theta_{X,x}^r \longrightarrow \theta_{X,x}$, sea $a \in 0_{X,x}$, existirá un f_i tal que $x \in X_{f_i}$, entonces $(f_i)_x \notin m_x$ y por tanto $(f_i)_x$ es una unidad en $\theta_{X,x}$, así podemos expresar a por $a = (f_i)_x(f_i)_x^{-1}a$. Sea $(0,\dots,(f_i)_x,\dots 0) \in 0_{X,x}^r$, entonces $\alpha_x(0,\dots,(f_i)_x,\dots 0) = a$, y por tanto α_x es sobreyectivo.

Sea F el θ_X- módulo núcleo, y consideremos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow F \longrightarrow \theta_X^r \xrightarrow{\alpha} \theta_X \longrightarrow \theta$. Filtramos F como sigue:

$$F = F \cap \theta_X^r \supseteq F \cap \theta_X^{r-1} \supseteq \dots\dots\dots \supseteq F \cap \theta_X.$$

Ya que $F \cap \theta_X^j / F \cap \theta_X^{j-1}$ es isomorfo a un subhaz de $\theta_X^j/\theta_X^{j-1} = \theta_X$, entonces cada uno de los cocientes de la filtración es un haz de ideales coherente. Así usando nuestra hipótesis de inducción y la sucesión exacta larga en cohomología, deducimos que $H^1(X,F) = 0$. Pero entonces $\Gamma(X,\theta_X^r) \longrightarrow \Gamma(X,\theta_X)$ es sobreyectivo, lo que nos asegura que $f_1,\dots,f_r$ generan A.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Hacemos la demostración en varios pasos:

Paso 1:

Sea $f \in A$ y sea $U \subseteq X$ un abierto afín de X, entonces $X_f \cap U = D(\bar{f})$, donde $\bar{f} = \theta_X(U \longrightarrow X)(f)$.

En efecto, suponemos que $U = \mathrm{Spec}(B)$, entonces:

$$X_f \cap U = \{ P \in \mathrm{Spec}(B) \ / \ f_P \notin m_P \subseteq B_P \} = \{ P \in \mathrm{Spec}(B) \ / \ \bar{f}_P \notin P < B_P \} =$$

$$= \{ P \in \mathrm{Spec}(B) \ / \ \bar{f} \notin P \} = D(\bar{f})$$

En consecuencia X_f es un abierto de X, para todo $f \in A$

Paso 2:

El conjunto $\{ X_{f_i}, \ i = 1,\dots,r \}$ es un recubrimiento finito por abiertos afines de X, tal que $X_{f_i} \cap X_{f_j}$ es compacto para todo i, j.

En efecto, sea $x \in X$, y supongamos que $x \notin X_{f_i}$, para todo $i = 1,\dots,r$, entonces $(f_i)_x \in m_x$ para todo $i = 1,\dots,r$. Considerando el morfismo $A \longrightarrow \theta_{X,x}$ y puesto que $f_1,\dots,f_r$ generan A, entonces la imagen del 1 estará en m_x, es decir el uno de $\theta_{X,x}$ está en m_x, lo cual es una contradicción.

Así existe $i \in \{1,\dots,r\}$ tal que $x \in X_{f_i}$ y por tanto el conjunto de los X_{f_i}, $i = 1,\dots,r$, recubren X.

Sea ahora un i fijo, entonces $X_{f_j} \cap X_{f_i} = D(f_j | X_{f_i})$, para todo $j \neq i$, por el paso uno y ya que X_{f_i} es afín por hipótesis. Por tanto $X_{f_i} \cap X_{f_j}$ es compacto.

Paso 3 :

Sean $f, a \in A$, tales que $a \ X_f = \theta_X(X_f \longrightarrow X)(a) = 0$, entonces existe un entero $n > 0$ tal que $f^n a = 0$.

En efecto, consideremos el recubrimiento por abiertos afines $\{X_{f_i}, \ i = 1,\dots,r\}$. Si $a|X_f = 0$, entonces $a| X_f \cap X_{f_i} = \theta_X(X_f \cap X_{f_i} \longrightarrow X)(a) = 0$, para todo $i = 1,\dots,r$. Pero como $X_{f_i} \cap X_f = D(f|X_{f_i})$, entonces existe un $n_i > 0$ tal que $(f|X_{f_i})^{n_i} .a \ X_{f_i} = 0$. Sea n el máximo de los n_i, entonces $f^n | X_{f_i} \ a|X_{f_i} = 0$, para todo $i = 1,\dots,r$; y puesto que θ_X es un haz, entonces $f^n a = 0$.

Paso 4 :

Sea $f \in A$ y sea $b \in \theta_X(X_f)$, entonces existe un $n > 0$ y existe $a \in A$ tal que $a|X_f = f^n | X_f . b$.

En efecto, sea $U = \mathrm{Spec}(B)$ un abierto afín de X, entonces $U \cap X_f = D(f|U)$ y $\theta_X(U \cap X_f) = B_{f|U}$; puesto que $b| U \cap X_f \in B_{f|U}$ entonces $b| U \cap X_f = a_U/(f|U)^n$, para algún $n > 0$ y para algún $a_U \in B$, entonces $a_U | U \cap X_f = (f|U)^n | U \cap X_f \cdot b | U \cap X_f$.

Consideremos el recubrimiento $\{ X_{f_i}, i = 1,\dots,r \}$, para cada i, existe un $n_i > 0$ y existe $a_i \in \theta_X(X_{f_i})$ tal que $a_i | X_{f_i} \cap X_f = (f|X_{f_i})^{n_i} | X_{f_i} \cap X_f \cdot b | X_{f_i} \cap X_f$.

Elegimos un n que no dependa de i, se tiene entonces:

$$a_i | X_{f_i} \cap X_{f_j} \cap X_f = (a_i | X_{f_i} \cap X_f) | X_{f_i} \cap X_{f_j} \cap X_f = (a_j | X_{f_j} \cap X_f) | X_{f_i} \cap X_{f_j} \cap X_f = $$
$$= a_j | X_{f_i} \cap X_{f_j} \cap X_f .$$

Ya que $X_{f_i} \cap X_{f_j}$ es compacto, por el paso 2, existirá un $m>0$, que podemos elegirlo independientemente de i y de j, tal que:

$$f^m | X_{f_i} \cap X_{f_j} (a_i | X_{f_i} \cap X_{f_j} - a_j | X_{f_i} \cap X_{f_j}) = 0.$$

Así, considerando $\{ f^m | X_{f_i} \cdot a_i \in \theta_X(X_{f_i}) / i = 1,\dots,r \}$, determinan un $a \in A$ tal que $a | X_f = f^{n+m} | X_f \cdot b$.

Paso 5 :

Como consecuencia del paso 4 y del paso 3, se tiene que $\theta_X(X_f) \simeq A_f$, para todo $f \in A$.

En particular, $\theta_X(X_{f_i}) \simeq A_{f_i}$, para todo $i = 1,\dots,r$, y puesto que cada uno de ellos es afín, entonces $(X_{f_i}, \theta_X | X_{f_i}) \simeq (\mathrm{Spec}(A_{f_i}), \theta_{A_{f_i}})$. Vease (2.1.7).

Paso 6:

Definimos un morfismo $(X, \theta_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), \theta_A)$ como sigue: Sea $\{U_t = \mathrm{Spec}(B_t)\}_{t \in T}$ un recubrimiento por abiertos afines de X, y sea $\psi_t : A = \theta_X(X) \longrightarrow \theta_X(U_t) = B_t$; llamamos ρ_t al morfismo determinado por ψ_t entre los correspondientes esquemas afines, es decir, $\rho_t : U_t = \mathrm{Spec}(B_t) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. Veamos que $\rho_t | U_t \cap U_k = \rho_k | U_t \cap U_k$, para todo $t, k \in T$. En efecto, sea $\{V^i_{t,k}\}$ un recubrimiento por abiertos afines de $U_t \cap U_k$, entonces el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A = O_X(X) \arrow[r] \arrow[d] & B_k = O_X(U_k) \arrow[d] \\ B_t = O_X(U_t) \arrow[r] & O_X(V^i_{t,k}) \end{tikzcd}$$

entonces $\rho_t|V^i_{t,k} = \rho_k|V^i_{t,k}$ para todo i, y por tanto $\rho_t|U_t \cap U_k = \rho_k|U_t \cap U_k$ para todo t, $k \in T$; así los morfismos $\{\rho_t\}_{t\in T}$ determinan un morfismo $\rho: (X,\theta_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$ tal que $\rho|U_t = \rho_t$ para todo $t \in T$.

Veamos que ρ es un isomorfismo. Puesto que $f_1,\ldots,f_r$ generan A, y puesto que $(D(f_i),\theta_X|D(f_i)) \simeq (\mathrm{Spec}(A_{f_i}),\theta_{A_{f_i}})$, entonces $\{D(f_i),\ i = 1,\ldots,r\}$ es un recubrimiento afín finito de Spec(A).

Además $\rho^{-1}(D(f_i)) \simeq X_{f_i}$ y $(X_{f_i},\theta_X|X_{f_i}) \simeq (\mathrm{Spec}(A_{f_i}),\theta_{A_{f_i}})$; así $\rho|X_{f_i}$ es un isomorfismo para todo $i = 1,\ldots,r$. Si llamamos g_i al inverso de $\rho|X_{f_i}$, entonces se tiene que $g_i|D(f_i)\cap D(f_j) = g_j|D(f_i)\cap D(f_j)$, y por tanto dichos morfismos determinan un morfismo $g: (\mathrm{Spec}(A),\theta_A) \longrightarrow (X,\theta_X)$ que es el inverso de ρ. Así (X,θ_X) es un esquema afín.

(6.1.14) TEOREMA

Sea (X,θ_X) un esquema noetheriano y separado,(donde por separado queremoa decir que el morfismo $(X,\theta_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}),\theta_{\mathbb{Z}})$ definido en (2.2.4) es un morfismo separado). Sea $\mathfrak{U}$ un recubrimiento por abiertos afines de X y sea F un θ_X- módulo cuasi-coherente. Entonces para todo $p \geq 0$, losmorfismos definidos en (5.2.2), son isomorfismos.

DEMOSTRACION

En principio veamos que si (X,θ_X) es un esquema separado y si U,V son dos abiertos afines de X, entonces $U \cap V$ es también un abierto afín.

En efecto, por ser $(X,\theta_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}),\theta_{\mathbb{Z}})$ separado, entonces $\Delta_{X/\mathbb{Z}}$ es una inmersión cerrada. Como $U\cap V = (U \times_{\mathbb{Z}} V) \cap \Delta_{X/\mathbb{Z}}(X)$, entonces $U \cap V$ es un subesquema cerrado de $U \times_{\mathbb{Z}} V$ que es afín; así , por (2.4.12), $U \cap V$ es afín.

Sea $V = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$, entonces por ser (X,θ_X) separado, V es afín; además si F es cuasi-coherente , entonces $F|V$ es cuasi-coherente. Entonces, por (6.1.11), $H^q(V,F|V) = 0$ para todo $q > 0$.

Estamos entonces en las condiciones del teorema (5.2.6), que nos asegura el resultado.

(6.1.15) COROLARIO

Sea (X,θ_X) un esquema separado y F un θ_X- módulo cuasi-coherente. Entonces, para cada $p \geqslant 0$, existen isomorfismos naturales: $\check{H}^p(X,F) \simeq H^p(X,F)$.

DEMOSTRACION

En efecto, sea $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ la familia de todos los abiertos afines de X. Entonces $\mathcal{U}$ es una base para la topología de X; como para todo subconjunto finito de $\mathcal{U}$, $U_1,\ldots,U_n$, $H^q(U_1\cap\ldots\cap U_n, F|U_1\cap\ldots\cap U_n) = 0$ para $q>0$, por el mismo razonamiento hecho anteriormente, entonces utilizando el criterio de Cartan,(5.2.7),se sigue el resultado.

6.2 COHOMOLOGIA DE UN ESQUEMA PROYECTIVO

(6.2.1) TEOREMA

Sea A un anillo noetheriano y sea $X = P^r_A$ con $r \geqslant 1$, ver (2.5.13). Sea $S = A[x_0,\ldots x_r]$. Entonces:

(a) El morfismo natural $S \longrightarrow \Gamma_*(0_X) = \bigoplus_{n\in Z} H^0(X,\theta_X(n)$ es un isomorfismo de S-módulos graduados. Donde $\theta_X(n)$ es el θ_X- módulo definido en (2.5.6).

(b) $H^q(X,\theta_X(n)) = 0$, para $0<q<r$, para $q>r$ y para todo n .

(c) $H^r(X,0_X(-r-1)) \simeq A$ y $H^r(X,0_X(n)) = 0$ para todo n 0.

(d) La aplicación natural:

$$H^0(X,\theta_X(n)) \times H^r(X,\theta_X(-n-r-1)) \longrightarrow H^r(X,\theta_X(-r-1)) \simeq A$$

es un apareamiento perfecto de A-módulos libres finitamente generados, y ello para cada entero n.

DEMOSTRACION

Sea F el θ_X - módulo cuasi-coherente: $\bigoplus_{n\in Z} 0_X(n)$. Ya que cohomología conmuta con sumas directas sobre un espacio topológico noetheriano, (5.1.6), la cohomología de F será la suma directa de la cohomología de los haces $\theta_X(n)$. Así hallamos la cohomología de F sin perder de vista la graduación por n.

Nótese que los grupos de cohomología en cuestión, tienen una estructura natural de A-módulo, ya que $\Gamma(X,\theta_X) \simeq S_0 \simeq A$.

Para cada $i = 0,\ldots,r$, sea U_i el abierto $D_+(x_i)$, definido en (2.5.3(b)). Entonces, por (2.5.3(b)), cada U_i es un abierto afín de X y los U_i, $i = 0,\ldots,r$, recubren X. Por otra parte X es noetherano y separado.

En efecto, ya que $X = \mathrm{Proj}(A[x_0,\ldots,x_r])$ y puesto que $A[x_0,\ldots,x_r]$ es noetheriano al serlo A, entonces X es noetheriano.

Ya que $X = P^r_A = P^r_Z \times_{\mathrm{Spec}(Z)} \mathrm{Spec}(A)$, (2.5.13), y taniendo en cuenta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} P^r_A \arrow[r] \arrow[d] & P^r_Z \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(Z) \end{tikzcd}$$

Para ver que $P^r_A \longrightarrow \mathrm{Spec}(Z)$ es separado, por (3.2.3(ii)), es suficiente ver que lo son $P^r_A \longrightarrow P^r_Z$ y $P^r_Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(Z)$. Pero ya que todo morfismo de esquemas afines es separado, (veaso la demostración de (3.3.3)), entonces el morfismo $P^r_A \longrightarrow P^r_Z$ es separado, teniendo en cuenta (3,2,3(iii)). Se puede demostrar fácilmente que el morfismo $P^r_Z \longrightarrow \mathrm{Spec}(Z)$ es separado. Así $P^r_A \longrightarrow \mathrm{Spec}(Z)$ es separado.

Así estamos en las condicines del teorema (6.1.14), y entonces $H^q(X,F) \simeq \check{H}^q(U,F)$ para todo $q \geq 0$, y donde U es el recubrimiento por abiertos afines del que partimos.

Para cada conjunto de índices, $i_0,\ldots,i_p$, se tiene que $U_{i_0\ldots i_p} = D_+(x_{i_0}\ldots x_{i_p})$ así:

$$F(U_{i_0\ldots i_p}) = F(D_+(x_{i_0}\ldots x_{i_p})) = (\bigoplus_{n\in Z} O_X(n))(D_+(x_{i_0}\ldots x_{i_p})) =$$

$$= \bigoplus_{n\in Z} O_X(n)(D_+(x_{i_0}\ldots x_{i_p})) = \bigoplus_{n\in Z} S(n)_{x_{i_0}\ldots x_{i_p}} \simeq S_{x_{i_0}\ldots x_{i_p}}.$$

Por otra parte la graduación de Fse corresponde con la graduación natural de $S_{x_{i_0}\ldots x_{i_p}}$, bajo este isomorfismo. Así el complejo de Čech de F está dado por:

$$C^{\cdot}(U,F):\ \prod S_{x_{i_0}} \longrightarrow \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow S_{x_0\ldots x_r}$$

Ahora $H^0(X,F) = \bigoplus_{n\in Z} H^0(X,\theta_X(n))$, es el núcleo de la primera aplicación, que es precisamente S. Esto prueba (a).

Notemos que al ser $H^0(X,F) = S = \bigoplus_{n\in Z} H^0(X,\theta_X(n)) = \bigoplus_{n\in Z} S_n$, entonces $\underline{H^0(X,\theta_X(n)) = S_n \text{ si } n\geq 0, \text{ y } H^0(X,\theta_X(n)) = 0 \text{ si } n<0}$, así $\underline{H^0(X,\theta_X(n))}$ es un A-módulo libre finitamente generado, para cada entero n.

Consideremos, ahora, $H^r(X,F)$, que es el conúcleo de la última aplicación en el complejo de Čech: $d^{r-1}: \prod_k S_{x_0..\hat{x}_k..x_r} \longrightarrow S_{x_0....x_r}$.

$S_{x_0...x_r} = A[x_0,\dots,x_r,1/x_0,\dots,1/x_r]$, que puede considerarse como el A-módulo libre generado por $\{x_0^{n_0},\dots,x_r^{n_r} / n_i\in Z\}$.

La imagen de d^{r-1} es el submódulo libre generado por aquellos elementos básicos para los cuales al menos un $n_i \geq 0$.

Así $H^r(X,F)$ es el A-módulo libre con base $\{x_0^{l_0},\dots,x_r^{l_r} / l_i < 0\}$ para todo i .

Por otra parte, la graduación está dada por Σl_i, es decir,

$H^r(X,F) = \bigoplus_{n\in Z} H^r(X,\theta_X(n)) = \bigoplus_{n<0} \{x_0^{m_0}\dots\dots x_r^{m_r} / \Sigma m_i = n\}$

Luego para $n\geq 0$ $H^r(X,\theta_X(n)) = 0$ y además para todo entero n $H^r(X,\theta_X(n))$ es un A-módulo libre finitamente generado.

Para $n = -r-1$, tenemos que $H^r(X,\theta_X(-r-1) = <x_0^{m_0}\dots x_r^{m_r} / \Sigma m_i = -r-1>$

Pero si $\Sigma m_i = -r-1$, entonces $m_i = -1$ para $i = 0,\dots,r$, luego $H^r(X,\theta_X(-r-1))$ está generado por $x_0^{-1}\dots x_r^{-1}$, es decir es un A-módulo libre de rango 1, y por tanto $H^r(X,\theta_X(-r-1)) \simeq A$. Tenemos, entonces, probado (c).

Para probar (d), notemos que ya que para $n<0$, $H^0(X,\theta_X(n)) = 0$, por (a), y $H^r(X,\theta_X(-n-r-1)) = 0$, pues $-n-r-1 > -r-1$, entonces el apareamiento es perfecto trivialmente.

Para $n\geq 0$, $H^0(X,\theta_X(n)) \simeq S_n$, y por tanto tiene una base consistente en monomios de grado n, es decir, $\{x_0^{m_0}\dots x_r^{m_r} / m_i\geq 0 \text{ y } \Sigma m_i = n$. El apareamisto natural con $H^r(X,\theta_X(-n-r-1))$ en $H^r(X,\theta_X(-r-1))$ está determinado por:

$((x_0^{m_0}\dots x_r^{m_r}), (x_0^{l_0}\dots x_r^{l_r}) \longrightarrow x_0^{m_0+l_0}\dots x_r^{m_r+l_r}$, pues si $\Sigma m_i = n$ y $\Sigma l_i = -n-r-1$

entonces $\sum(m_i+l_i) = -r-1$, y el de la derecha es cero si algún $m_i+l_i \geq 0$.

Luego tenemos un apareamiento perfecto, bajo el cual la base dual de $\{x_0^{m_0}\ldots x_r^{m_r}\}$ es $\{x_0^{-m_0-1}\ldots x_r^{-m_r-1}\}$.

Nos queda probar (d). En principio, ya que $C^q(\mathfrak{U},F) = 0$ para $q > r$, entonces $H^q(X,F) = 0$ para $q > r$, y por tanto $H^q(X,\theta_X(n)) = 0$ para $q > r$ y para todo entero n.

Veamos que $H^q(X,\theta_X(n)) = 0$, para $0 < q < r$ y para todo entero n, y lo haremos por inducción sobre r. Si $r = 1$, no hay nada que probar, así sea $r > 1$.

Si localizamoa el complejo $C^{\cdot}(\mathfrak{U},F)$ con respecto a x_r, como S-módulos graduados, obtenemos el complejo de Cěch para el θ_{U_r}- módulo $F|U_r$, con respecto al recubrimiento afín: $\{U_i \cap U_r / i = 0,\ldots,r\}$. Puesto que U_r es también noetheriano y separado, por (6.1.14), este complejo nos da los grupos $H^q(U_r,F|U_r)$, para $q \geq 0$. Pero U_r es afín y $F|U_r$ es cuasi-coherente, así, por (6.1.15), $H^q(U_r,F|U_r) = 0$, para todo $q > 0$.

Luego la cohomología del complejo $C^{\cdot}(\mathfrak{U},F)_{x_r}$ es cero para $q > 0$, pero puesto que el funtor localización es exacto, entonces $H^q(X,F)_{x_r} = 0$ para $q > 0$. En otras palabras, cada elemento de $H^q(X,F)$, $q > 0$, es anulado por alguna potencia de x_r.

Para completar la demostración de (b), demostremos que, para $0 < q < r$, la multiplicación por x_r induce una aplicación biyectiva de $H^q(X,F)$ en si mismo; de donde se seguiría que este módulo es cero.

Consideramos la sucesión exacta de S-módulos graduados:

$$0 \longrightarrow S(-1) \xrightarrow{x_r} S \longrightarrow S/(x_r) \longrightarrow 0$$

que nos da la sucesión exacta de θ_X- módulos:

$$0 \longrightarrow \theta_X(-1) \longrightarrow \theta_X \longrightarrow \theta_H \longrightarrow 0$$

donde H es el hiperplano $x_r = 0$. Obtenemos, entonces tomando sumas directas:

$$0 \longrightarrow F(-1) \longrightarrow F \longrightarrow F_H \longrightarrow 0$$

donde $F_H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \theta_H(n)$. Esta sucesión exacta corta dará lugar a la sucesión exacta:

$$\cdots\cdots\cdots\; H^q(X,F(-1)) \longrightarrow H^q(X,F) \longrightarrow H^q(X,F_H) \cdots\cdots\cdots$$

Considerados como S-módulos graduados, $H^q(X,F(-1))$ es justamente $H^q(X,F)$ desplazado un lugar, y el morfismo $H^q(X,F(-1)) \longrightarrow H^q(X,F)$ es el producto por x_r.

Ahora $H \simeq P_A^{r-1}$ y $H^q(X,F_H) \simeq H^q(H,F_H)$, por (5.1.8), donde hemos identificado F_H con $i_*(\bigoplus_{n \in Z} 0_H(n))$, y donde $i: P_A^{r-1} \longrightarrow P_A^r$ es la inclusión.

Podemos, entonces, aplicar nuestra hipótesis de inducción a F_H y encontramos que $H^q(X,F_H) = 0$, para $0 < q < r-1$.

Por otra parte para $q = 0$, tenemos la sucesión exacta:

(1) $\quad 0 \longrightarrow H^0(X,F(-1)) \longrightarrow H^0(X,F) \longrightarrow H^0(X,F_H) \longrightarrow 0$

ya que $H^0(X,F_H) = S/(x_r)$ por (a). Al otro lado, tenemos la sucesión exacta:

(2) $\quad 0 \longrightarrow H^{r-1}(X,F_H) \xrightarrow{\ \delta\ } H^r(X,F(-1)) \xrightarrow{\ x_r\ } H^r(X,F) \longrightarrow 0$

En efecto, $H^r(X,F)$ es el A-módulo libre generado por los monomios negativos en $x_0 ,\dots, x_r$. Así, es claro que x_r es sobreyectiva, pues dado $x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r} \in H^r(X,F)$, considerando $x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r - 1} \in H^r(X,F(-1))$, su imagen por x_r es precisamente el elemento de partida.

Por otra parte, el núcleo de x_r es ek submómodulo libre generado por aquellos monomios negativos , tal que $l_r = -1$. Ya que $H^{r-1}(X,F_H)$ es el A-módulo libre con base consistente en los monomios negetivos en $x_0 ,\dots, x_r$, y δ es la división por x_r, entonces $\mathrm{Ker}(x_r) = \mathrm{Imag}(\delta)$, y la sucesión es exacta. En particular, δ es un monomorfismo. Tenemos entonces:

Si $1 < q < r-1$

$$H^{q-1}(X,F_H) \longrightarrow H^q(X,F(-1)) \longrightarrow H^q(X,F) \longrightarrow H^q(X,F_H) = 0$$

y entonces $H^q(X,F(-1)) \simeq H^q(X,F)$, y el isomosfismo es el producto por x_r.

Para $q = 1$, y teniendo en cuenta (1), tenemos:

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,F_H) \arrow[r] \arrow[dr] & H^1(X,F(-1)) \arrow[r] & H^1(X,F) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

y entonces $H^1(X,F(-1)) \simeq H^1(X,F)$, y el isomorfismo es el producto por x_r.

Para $q = r-1$, teniendo en cuenta (2) y la sucesión exacta larga en cohomología obtenemos que $H^{r-1}(X,F(-1)) \simeq H^r(X,F)$. Esto acaba la demostración.

(6.2.2) Se deduce del teorema (6.2.1) que $H^q(X,0_X(n))$ es un A-módulo finitamente generado, para todo $q \geq 0$ y para todo entero n.

En efecto, si $n \geq 0$, entonces $H^q(X,0_X(n)) = 0$ para $q > 0$, y $H^0(X,0_X(n)) = S_n$, que son A-módulos finitamente generados.

Si $n < 0$, entonces $H^q(X,0_X(n)) = 0$ para $0 \leq q < r$, y $H^q(X,0_X(n)) = 0$ para $q > r$; por otra parte $H^q(X,0_X(n))$ es el A-módulo libre generado por $\{ x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r} / \Sigma m_i < n \}$ y por tanto es finitamente generado.

(6.2.3) TEOREMA

Sea (X,θ_X) un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, (2.5.15), y sea $\theta_X(1)$ el 0_X- módulo invertible muy amplio relativo a Spec(A), (2.5.18). Sea F un θ_X- módulo coherente. entonces:

(a) Para cada $q \geq 0$, $H^q(X,F)$ es un A-módulo finitamente generado.

(b) Existe un entero n_0, que depende de F, tal que para cada $q > 0$ y para cada $n \geq n_0$, $H^q(X,F(n)) = 0$.

DEMOSTRACION

Ya que $\theta_X(1)$ es un θ_X- módulo muy amplio relativo a Spec(A), $\theta_X(1) = i^*(\theta_{P^r_A}(1))$, para $i: X \longrightarrow P^r_A$ una inmersión cerrada, que existe por ser X proyectivo sobre A. Si i es una inmersión cerrada, es también un morfismo prouectivo, y entonces si F es un 0_X- módulo coherente, $i_* F$ es un $0_{P^r_A}$-módulo coherente, como puede verse en (6.5.3) posterior, (téngase en cuenta que ambos son esquemas noetherianos P^r_A por ser A un anillo noetheriano, y X por ser isomorfo a un subesquema cerrado de P^r_A). Además, por (5.1.8), $H^q(X,F) \simeq H^q(P^r_A, i_* F)$, para todo $q \geq 0$.

Así podemos reducirnos al caso en que $X = P^r_A$. Para este caso (a) y(b) si $F = \theta_X(q)$ para q un entero, (6.2.1),(6.2.2), y por tanto también es cierto para una suma directa de tales θ_X- módulos.

Para probar el teorema para θ_X- módulos coherentes arbitrarios, usamos inducción descendente sobre q. Para $q > r$, $H^q(X,F) = 0$, ya que $C^q(\mathcal{U},F) = 0$ para $q > r$ tomando $\mathcal{U} = \{ U_i \ , \ i = 0,\ldots,r \}$, con $U_i = D_+(x_i)$.

En general, dado F un θ_X- módulo coherente, podemos escribirlo como un cociente de un θ_X- módulo E que es una suma directa finita de θ_X- módulos de la forma $\theta_X(p_i)$, para varios enteros p_i, ver (2.5.22). Sea R el núcleo, y consideremos la sucesión exacta corta: $0 \longrightarrow R \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$.

Entonces R es también un θ_X- módulo coherente, (2.4,7). Obtenemos una sucesión exacta de A-módulos:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\; H^q(X,E) \longrightarrow H^q(X,F) \longrightarrow H^{q+1}(X,R) \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$H^q(X,E)$ es un A-módulo finitamente generado, pues E es una suma directa finita de 0_X- módulos de la forma $0_X(p_i)$; $H^{q+1}(X,R)$ es un A-módulo finitamente generado por hipótesis de inducción. Así, puesto que A es noetheriano, $H^q(X,F)$ es también un A-módulo finitamente generado. Esto prueba (a).

Para probar (b), tenemos:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\; H^q(X,E(n)) \longrightarrow H^q(X,F(n)) \longrightarrow H^{q+1}(X,R(n)) \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

para $n \geqslant n_0$, suficientemente grande, $H^q(X,E(n)) = 0$ para todo $q > 0$, pues E es una suma directa finita de θ_X- módulos de la forma $\theta_X(p_i)$; $H^{q+1}(X,R(n)) = 0$ por hipótesis de inducción. Por tanto $H^q(X,F(n)) = 0$, para $q > 0$ y $n \geqslant n_0$.

Notemos que puesto que sólo tenemos un número finito de q, $0 < q < r$, se puede se puede determinar n_0 independientemente de q. Esto prueba (b).

(6.2.4) Como un caso especial de (a) del teorema anterior, vemos que para cualquier θ_X- módulo coherente, F, $\Gamma(X,F)$ es un A-módulo finitamente generado.

(6.2.5) PROPOSICION

Sea $(X,0_X)$ un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, y sea $F^1 \longrightarrow F^2 \ldots\ldots\ldots \longrightarrow F^r$, una sucesión exacta de θ_X- módulos coherentes. Entonces existe un $n_0 \gg 0$, tal que la sucesión:

$$\Gamma(X,F^1(n)) \longrightarrow \Gamma(X,F^2(n)) \ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow \Gamma(X,F^r(n))$$

es exacta para todo $n \geqslant n_0$.

DEMOSTRACION

Por obvia inducción, basta probarlo para $r = 3$, es decir, el caso en que

$0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^2 \longrightarrow F^3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta.

Por (6.2.3), existe un $n_0 \gg 0$, tal que $H^q(X,F^1(n)) = H^q(X,F^2(n)) = H^q(X,F^3(n)) = 0$, para todo $q > 0$.

Entonces considerando la sucesión exacta corta : $0 \longrightarrow F^1(n) \longrightarrow F^2(n) \longrightarrow F^3(n) \longrightarrow 0$ la sucesión exacta larga en cohomología, dará lugar a la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,F^1(n)) \longrightarrow \Gamma(X,F^2(n)) \longrightarrow \Gamma(X,F^3(n)) \longrightarrow 0.$$

6.3 FUNTORES EXTS.

(6.3.1) Sea (X,θ_X) un esquema y sea F un θ_X- módulo fijo. Consideramos los funtores:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F,-): {}_{\theta_X}M \longrightarrow Ab$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(F,-): {}_{\theta_X}M \longrightarrow {}_{\theta_X}M$$

Puesto que estos funtores son exactos a idquierda y por tanto aditivos, y ya que ${}_{\theta_X}M$ tiene suficientes inyectivos, podemos considerar sus funtores derivados a derecha, que notaremos por: $E^q_X(F,-)$ y $\underline{E}^q_X(F,-)$, respectivamente.

Puesto que, en general, $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F,F') \neq \mathrm{Hom}_{S(\bar{X},\bar{T})}(F,F')$ y $\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(F,F') \neq \underline{\mathrm{Hom}}_{S(\bar{X},\bar{T})}(F,F')$, estos funtores $E^q_X(F,-)$ y $\underline{E}^q_X(F,-)$ no coinciden con los funtores $\mathrm{Ext}^q(F,-)$ y $\underline{\mathrm{Ext}}^q(F,-)$, definidos en (4.3.5) y en (5.2.8). Sin embargo se verifican propiedades análogas:

(6.3.2) TEOREMA

$\underline{E}^q_X(F_1,F_2)$ es el haz asociado al prehaz: $U \longrightarrow E^q_U(F_1|U,F_2|U)$

DEMOSTRACION

Idéntica a la hecha en (5.2.9).

(6.3.4) LEMA

Si F_2 es un θ_X- módulo inyectivo, entonces $\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(F_1,F_2)$ es fuertemente flasgo.

DEMOSTRACION

Idéntica a la hecha en (5.2.10)

(6.3.5) TEOREMA

Para cualesquiera θ_X- módulos, F_1, F_2, existe una sucesión espectral:

$$H^p(X, \underline{E}^q_X(F_1, F_2)) \Longrightarrow E^{p+q}_X(F_1, F_2).$$

DEMOSTRACION

Consideramos los funtores exactos a idquierda: $\underline{Hom}_{\theta_X}(F_1, -)$ y $\Gamma(X,-)$.

Por (6.3.4), $\underline{Hom}_{\theta_X}(F_1, -)$ en $\Gamma(X,-)$-acíclicos, Entonces, por

([18], Teorema 9.3, pág 299), y teniendo en cuenta que

$\Gamma(X,-) \circ \underline{Hom}_{\theta_X}(F_1, -) = Hom_{\theta_X}(F_1, -)$, obtenemos la sucesión espectral deseada.

(6.3.6) PROPOSICION

Para cualquier θ_X- módulo G, se verifica:

(a) $\underline{E}^0_X(\theta_X, G) \simeq G$

(b) $\underline{E}^q_X(\theta_X . G) = 0$, para todo $q > 0$

(c) $E^q_X(\theta_X, G) \simeq H^q(X, G)$, para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

El funtor $\underline{Hom}_{\theta_X}(\theta_X, -) = 1_{\theta_X M}$, por tanto es exacto y sus funtores derivados son cero para $q > 0$. Esto prueba (a) y (b).

Por otra parte, $Hom_{\theta_X}(\theta_X, -) = \Gamma(X,-)$, y por tanto sus funtores derivados han de ser iguales. Esto prueba (c).

(6.3.7) PROPOSICION

Si $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$, es una sucesión exacta corta de θ_X-módulos, entonces para cualquier θ_X- módulo, tenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow Hom_{\theta_X}(F'',G) \longrightarrow Hom_{\theta_X}(F,G) \longrightarrow Hom_{\theta_X}(F',G) \longrightarrow E^1_X(F'',G) \ldots\ldots$$

y similarmente para los θ_X- modulos: $\underline{E}^q_X(-,G)$.

DEMOSTRACION

Para los E^q_X es la sucesión estandar.

Por otra parte, si U es un abierto de X, entonces la sucesión $0 \longrightarrow F'|U \longrightarrow F|U \longrightarrow F''|U \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta en la categoría de θ_U- módulos, y por tanto tendremos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow Hom_{0_U}(F''|U,G|U) \longrightarrow Hom_{0_U}(F|U,G|U) \longrightarrow Hom_{0_U}(F'|U,G|U) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow E^1_U(F''|U,G|U) \longrightarrow E^1_U(F|U,G|U) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por (6.3.2) y ya que el funtor hacificación es exacto, obtenemos la sucesión exacta larga para los $\underline{E}^q_X$.

(6.3.8) PROPOSICION

Supongamos que existe una sucesión exacta:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

de 0_X- módulos, donde los L_i son localmente libres de rango finito, (2.3.2), (en este caso decimos que $L^{\cdot}$ es una resolución localmente libre de F). Entonces, para cualquier θ_X- módulo G, se tiene:

$$\underline{E}^q_X(F,G) \simeq H^q(\underline{Hom}_{\theta_X}(L^{\cdot},G))$$

DEMOSTRACION

Consideremos las sucesines de funtores: $\left\{ \underline{E}^q_X(F,-)\right\}_{q\geq 0}$ y $\left\{H^q(\underline{Hom}_{\theta_X}(L^{\cdot},-))\right\}$ que son sucesiones conectadas de funtores de ${}_{\theta_X}M$ en ${}_{\theta_X}M$.

Para $q=0$, $\underline{E}^0_X(F,G) = \underline{Hom}_{\theta_X}(F,G)$ y $H^0(\underline{Hom}_{\theta_X}(L^{\cdot},G)) = \underline{Hom}_{\theta_X}(F,G)$, pues $\underline{Hom}_{\theta_X}(-,G)$ es contravariante y exacto a idquierda.

Si J es inyectivo, entonces $\underline{E}^q_X(F,J) = 0$ para $q>0$, por definición; y $H^q(\underline{Hom}_{\theta_X}(L^{\cdot},G)) = 0$ para $q>0$, pues el funtor $\underline{Hom}_{\theta_X}(-,J)$ es exacto.

Luego, para todo θ_X- módulo G existe un θ_X- módulo J y un monomorfismo u: $G \longrightarrow J$, tal que $\underline{E}_X^q(F,-)(u) = H^q(\underline{Hom}_{\theta_X}(L^\cdot,-))(u) = 0$, para todo $q > 0$. Entonces por ([37] Teorema 3.4.3, pág 179) obtenemos el resultado.

(6.3.9) LEMA

Si L es un θ_X- módulo localmente libre de rango finito, y J es inyectivo, entonces $L \otimes J$ es también inyectivo.

DEMOSTRACION

Debemos demostrar que el funtor $Hom_{\theta_X}(-,L\otimes J)$ es exacto. Consideremos el dual de L, $\overset{\vee}{L} = \underline{Hom}_{\theta_X}(L,\theta_X)$, se verifica que $Hom_{\theta_X}(F,L\otimes J) \simeq Hom_{\theta_X}(F\otimes \overset{\vee}{L},J)$, utilizando (2.3.4(b),(c)). Por tanto $Hom_{\theta_X}(-,L\otimes J) \simeq Hom_{\theta_X}(-\otimes \overset{\vee}{L},J)$.

Como L es localmente libre de rango finito, entonces $\overset{\vee}{L}$ es localmente libre de rango finito, y entonces $-\otimes \overset{\vee}{L}$ es exacto. Como J es inyectivo entonces $Hom_{\theta_X}(-\otimes\overset{\vee}{L},J)$ es exato y por tanto $Hom_{\theta_X}(-,L\otimes J)$ es exacto, de donde deducimos que $L\otimes J$ es inyectivo.

(6.3.10) PROPOSICION

Sea L un haz localmente libre de rango finito. Para cualesquiera F,G , θ_X- módulos, se verifica:

$$E_X^q(F\otimes L,G) \simeq E_X^q(F,\overset{\vee}{L}\otimes G)$$

y para los haces $\underline{E}_X^q$, se verifica:

$$\underline{E}_X^q(F\otimes L,G) \simeq \underline{E}_X^q(F,\overset{\vee}{L}\otimes G) \simeq \underline{E}_X^q(F,G)\otimes \overset{\vee}{L} .$$

DEMOSTRACION

Consideremos las sucesiones de funtores: $\{E_X^q(F\otimes L,-)\}_{q\geq 0}$ y $\{E_X^q(F,\overset{\vee}{L}\otimes -)\}_{q\geq 0}$ de ${}_{\theta_X}M$ en Ab. Puesto que $\overset{\vee}{L}\otimes -$ es exacto por ser $\overset{\vee}{L}$ loclamente libre, ambas son sucesiones conectadas de funtores. Para $q = 0$ coinciden. Si J es un θ_X- módulo inyectivo, entonces $E_X^q(F\otimes L,J) = E_X^q(F,\overset{\vee}{L}\otimes J) = 0$ para todo $q > 0$, en el segundo caso por (6.3.9). Luego, por ([37], Teorema 3.4.3,), han de coincidir.

Por (6.3.2), $\underline{E}^q_X(F,G)$ es el haz asociado al prehaz $U \longmapsto \underline{E}^q_U(F|U, G|U)$. Además si J es un θ_X- módulo inyectivo, entonces $J|U$ es un θ_U- módulo inyectivo; y si L es un θ_X- módulo localmente libre, entonces $L|U$ es un θ_U- módulo localmente libre. Teniendo en cuenta todo ello, deducimos el primer isomorfismo.

Para demostrar el segundo isomorfismo, consideramos las sucesiones de funtores: $\{\underline{E}^q_X(F, L^{\vee}\otimes -)\}_{q\geq 0}$ y $\{\underline{E}^q_X(F,-)\otimes L^{\vee}\}_{q\geq 0}$. Ya que $L^{\vee}\otimes -$ y $-\otimes L^{\vee}$ son exactos, ambas son sucesiones conectadas de funtores. Para q = 0 coinciden, pues $(\underline{Hom}_{\theta_X}(F, L^{\vee}\otimes G))_x \simeq (\underline{Hom}_{\theta_X}(F,G)\otimes L^{\vee})_x$, para todo $x\in X$. Para J inyectivo se tiene que $\underline{E}^q_X(F, L^{\vee}\otimes J) = \underline{E}^q_X(F,J)\otimes L^{\vee} = 0$, para todo $q>0$. Luego han de coincidir ambas sucesiones.

(6.3.11) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema noetheriano y F un θ_X- módulo coherente. Sea G un θ_X- módulo y x un punto de X. Entonces:

$$(\underline{E}^q_X(F,G))_x \simeq \mathrm{Ext}^q_{\theta_{X,x}}(F_x, G_x)$$

para cualquier $q\geq 0$, donde el lado de la derecha es el Ext sobre el anillo local $\theta_{X,x}$.

DEMOSTRACION

Nuestra cuestión es local, y puesto que $\underline{E}^q_X(F,G)|U \simeq \underline{E}^q_U(F|U, G|U)$, por (6.3.2), podemos suponer que X es un esquema afín.

Entonces, por (2.5.22), F posee una resolución localmente libre: $L^{\cdot} \longrightarrow F \longrightarrow 0$, la cual sobre las fibras nos da una resolución libre de F_x: $(L^{\cdot})_x \longrightarrow F_x \longrightarrow 0$. Entonces, por (6.3.8), $\underline{E}^q_X(F,G) = H^q(\underline{Hom}_{\theta_X}(L^{\cdot},G))$ y $\mathrm{Ext}^q_{\theta_{X,x}}(F_x,G_x) = H^q(\mathrm{Hom}_{\theta_{X,x}}((L^{\cdot})_x, G_x))$.

Ya que $(\underline{Hom}_{\theta_X}(L_i,G))_x = \mathrm{Hom}_{\theta_{X,x}}((L_i)_x, G_x)$, por ser L_i localmente libre, y puesto que el funtor fibra es exacto, obtenemos el isomorfismo.

(6.3.12) PROPOSICION

Sea A un anillo noetheriano y sea $X = \mathrm{Spec}(A)$. Sean M y N A-módulos, con M de tipo finito. Entonces existen isomorfismos naturales:

$$(\mathrm{Ext}^q_A(M,N))^{\bullet} \simeq \underline{E}^q_X(M^{\bullet},N^{\bullet})$$

DEMOSTRACION

Para $q = 0$, tenemos: $(\mathrm{Ext}^0_A(M,N))^{\bullet} = (\mathrm{Hom}_A(M,N))^{\bullet}$ y $\underline{E}^0_X(M^{\bullet},N^{\bullet}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(M^{\bullet},N^{\bullet})$.

Pero $(\mathrm{Hom}_A(M,N))^{\bullet} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(M^{\bullet},N^{\bullet})$, ya que si $P \in \mathrm{Spec}(A) = X$, entonces $((\mathrm{Hom}_A(M,N))^{\bullet})_P \simeq (\mathrm{Hom}_A(M,N))_P \simeq \mathrm{Hom}_{A_P}(M_P,N_P)$, por ser M de tipo finito; por otra parte $(\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(M^{\bullet},N^{\bullet}))_P \simeq \mathrm{Hom}_{\theta_{X,P}}((M^{\bullet})_P,(N^{\bullet})_P) \simeq \mathrm{Hom}_{A_P}(M_P,N_P)$.

Por otro lado, los funtores $\left\{ (\mathrm{Ext}^q_A(-,N))^{\bullet} \right\}_{q \geq 0}$ son los funtores derivados a derecha del funtor $(\mathrm{Hom}_A(-,N))^{\bullet}$, de la categoría de A-módulos finitamente generados en la categoría de θ_X- módulos.

En efesto, para $q = 0$ $(\mathrm{Ext}^0_A(-,N))^{\bullet} = (\mathrm{Hom}_A(-,N))^{\bullet}$.

Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de A-módulos finitamente generados, tenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'',N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M',N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M'',N) \ldots\ldots\ldots$$

y puesto que el funtor $\bullet$ es exacto, entonces tenemos:

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Hom}_A(M'',N))^{\bullet} \longrightarrow (\mathrm{Hom}_A(M,N))^{\bullet} \longrightarrow (\mathrm{Hom}_A(M',N))^{\bullet} \longrightarrow (\mathrm{Ext}^1_A(M'',N))^{\bullet} \ldots\ldots$$

tenemos también la sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Hom}_A(M'',N))^{\bullet} \longrightarrow (\mathrm{Hom}_A(M.N))^{\bullet} \longrightarrow (\mathrm{Hom}_A(M',N))^{\bullet} \longrightarrow R^1(\mathrm{Hom}_A(-,N)^{\bullet})(M) \ldots\ldots$$

Además, si M es un A-módulo finitamente generado proyectivo, entonces $R^q(\mathrm{Hom}_A(-,N)^{\bullet})(M) = 0$ para todo $q > 0$ por definición, y $(\mathrm{Ext}^q_A(M,N))^{\bullet} = 0$ para todo $q > 0$, pues el funtor $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ es exacto.

Por otra parte, la sucesión de funtores: $\left\{ \underline{E}^q_X((-)^{\bullet},N^{\bullet}) \right\}_{q \geq 0}$ es también una sucesión conestada de funtores de la categoría de A-módulos en la categoría de θ_X- módulos. Entonces existen morfismos canónicos: $(\mathrm{Ext}^q_A(M,N))^{\bullet} \longrightarrow \underline{E}^q_X(M^{\bullet},N^{\bullet})$, para cada $q \geq 0$, que inducen el isomorfismo existente para $q = 0$.

Ya que A es noetheriano y M es de tipo finito, M posee una resolución proyectiva de A-módulos libres finitamente generados. Luego para ver que los morfismos anteriores son isomorfismos, es suficiente demostrar que $\underline{E}^q_X(M\bullet,N\bullet) = 0$, para $q > 0$, cuando $M = A^r$, ya que entonces la sucesión conectada de funtores anterior será la asociada a los funtores derivados a derecha del funtor $Hom_A((-)\bullet,N\bullet)$.

Puesto que $\underline{E}^q_X$ conmuta con sumas directas finitas, es suficiente ver que $\underline{E}^q_X(A\bullet,N\bullet) = 0$ para $q>0$. Pero $A\bullet = \theta_X$ y por tanto, se sigue de (6.3.6(b)).

(6.3.13) COROLARIO

Sea $(X.\theta_X)$ un esquema, F y G θ_X- módulos cuasi-coherentes, entonces $\underline{E}^q_X(F,G)$ es un θ_X- módulo cuasi-coherente, para todo $q \geq 0$. Si el esquema es noetheriano y F, G son coherentes entonces $\underline{E}^q_X(F,G)$ es coherente.

DEMOSTRACION

Sea $U = Spec(A)$ un abierto afín de X, tal que $F|U \simeq M\bullet$ y $G|U \simeq N\bullet$, con M y N A-módulos.

Entonces, por (6.3.12), $\underline{E}^q_X(F,G)|U \simeq (Ext^q_A(M,N))\bullet$, para todo $q \geq 0$; y por tanto son cuasi-coherentes.

Si el esquema es noetheriano y F, G son coherentes, entonces podemos suponer que A es noetheriano y M,N son A-módulos finitamente generados.

En este caso, $Ext^q_A(M,N)$ es también finitamente generado, y por tanto $\underline{E}^q_X(F,G)$ es un θ_X- módulo coherente.

(6.3.14) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, sea $\theta_X(1)$ un θ_X- módulo invertible muy amplio relativo a $Spec(A)$. Sean F,G θ_X- módulos coherentes. Entonces existe un entero $n_0 \gg 0$, que depende de F y de G, tal que para cada $n \geq n_0$, tenemos:

$$E^q_A(F,G(n)) \simeq \Gamma(X, \underline{E}^q_X(F,G(n))$$

para cada $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

Para $q = 0$ es cierto para cualesquiera F,G y n. Si $F = \theta_X$, entonces

$E^q_X(F,G(n)) \simeq H^q(X,G(n))$, por (6.3.6(c)), así para $n \gg 0$ y $q > 0$, es cero por (6.2.3(b)). Por otro lado $\underline{E}^q_X(\theta_X,G(n)) = 0$ para $q > 0$, por (6.3.6(b)), luego el resultado es cierto para $F = \theta_X$.

Si F es un θ_X- módulo localmente libre, nos reducimos al caso anterior por (6.3.11). Finalmente si F es un θ_X- módulo coherente arbitrario, lo escribimos como un cociente de un θ_X- módulo localmente libre, E. Sea R el núcleo, y consideremos la sucesión exacta corta: $0 \longrightarrow R \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$.

Ya que E es localmente libre, por lo visto anteriormente, para $n \gg 0$ tenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\theta_X}(F,G(n)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\theta_X}(E,G(n)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\theta_X}(R,G(n)) \longrightarrow E^1_X(F,G(n)) \longrightarrow 0$$

e isomorfismos para todo $q > 0$, $E^q_X(R,G(n)) \simeq E^{q+1}_X(F,G(n))$.

De igual forma tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(F,G(n)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(E,G(n)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(R,G(n)) \longrightarrow \underline{E}^1_X(F,G(n)) \longrightarrow 0$$

e isomorfismos para todo $q > 0$, $\underline{E}^q_X(R,G(n)) \simeq \underline{E}^{q+1}_X(F,G(n))$.

Por (6.2.5), a partir de la segunda sucesión exacta corta obtenemos una sucesión exacta después de considerar un n aún mayor:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(F,G(n))) \longrightarrow \Gamma(X,\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(E,G(n))) \longrightarrow \Gamma(X,\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_X}(R,G(n)))$$
$$\longrightarrow \Gamma(X,\underline{E}^1_X(F,G(n))) \longrightarrow 0$$

y así, del caso $q = 0$ obtenemos el caso $q = 1$ para F. Pero como R es también coherente, por inducción obtenemos el resultado general.

6.4 TEOREMAS DE DUALIDAD

Sea $W = \Lambda^n(\Omega_{P^n_K/K})$ el haz canónico sobre P^n_K, (2.6.12).

(6.4.1) TEOREMA. (Dualidad para P^n_K)

Si K es un cuerpo, entonces:

(a) $H^n(P^n_K,W) \simeq K$

(b) Para cualquier $\theta_{P^n_K}$ - módulo coherente, F, el apareamiento natural:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_{P^n_K}}(F,W) \times H^n(P^n_K,F) \longrightarrow H^n(P^n_K,W) \simeq K$$

es un apareamisnto perfecto de K-espacios vectoriales finito dimensionales.

(c) Para cada $q \geqslant 0$, existe un isomorfismo natural:

$$E^q_{P^n_K}(F,W) \simeq H^{n-q}(P^n_K,F)^*$$

donde $*$, denota el espacio vectorial dual; para $q = 0$ el isomorfismo es el inducido por el apareamiento de (b).

DEMOSTRACION

(a) $W \simeq \theta_X(-n-1)$, por (2.6.13), denotando por X a P^n_K; el resultado se sigue entonces de (6.2.1(c)).

(b) Un morfismo de F a W induce una aplicación entre los grupos de cohomología $H^n(P^n_K,F) \longrightarrow H^n(P^n_K,W) \simeq K$, esto nos da el apareamiento.

Si $F = \theta_{P^n_K}(q)$, para algún entero q, entonces:

$\mathrm{Hom}_{\theta_{P^n_K}}(F,W) = \mathrm{Hom}_{\theta_{P^n_K}}(\theta_{P^n_K}, W(-q)) \simeq H^0(P^n_K,W(-q)) \simeq H^0(P^n_K,\theta_{P^n_K}(-q-n-1))$

donde nos hemos apoyado en (2.3.4). Como $H^n(P^n_K,\theta_{P^n_K}(q)) = H^n(P^n_K,\theta_{P^n_K}(-(-q-n-1)-n-1)$, entonces, para $F = \theta_{P^n_K}(q)$, el resultado se sigue de (6.2.1(d)).

Luego (b) es también cierto para una suma directa finita de $\theta_{P^n_K}$-módulos de la forma $\theta_{P^n_K}(q_i)$. Si F es un $\theta_{P^n_K}$-módulo coherente arbitrario, podemos escribirlo como un conúcleo: $E_1 \longrightarrow E_2 \twoheadrightarrow F$, donde cada E_i es una suma directa finita de $\theta_{P^n_K}$-módulos de la forma $\theta_{P^n_K}(q_i)$. Se tiene entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\theta_{P^n_K}}(F,W) & \xrightarrow{\simeq} & H^n(P^n_K,F)^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\theta_{P^n_K}}(E_1,W) & \xrightarrow{\simeq} & H^n(P^n_K,E_1)^* \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\theta_{P^n_K}}(E_2,W) & \longrightarrow & H^n(P^n_K,E_2)^*
\end{array}$$

de donde deducimos que $\mathrm{Hom}_{\theta_{P^n_K}}(F,W) \simeq H^n(P^n_K,F)^*$.

(c) Consideramos la sucesión de funtores: $\{E^q_X(-,W)\}_{q\geq 0}$ y $\{H^{n-q}(X,-)^*\}_{q\geq 0}$ donde notamos por X a P^n_K por mayor comodidad; ambas son sucesiones conectadas de funtores de la categoría de θ_X- módulos en la categoría de grupos abelianos. Para $q = 0$, coinciden por (b).

Por otra parte, por ser F coherente, podemos escribirlo como un cociente de un haz $E = \oplus\, 0_X(-q)$, suma directa finita, con $q \gg 0$. Entonces:
$E^q_X(E,W) = \oplus E^q_X(\theta_X(-q),W) = \oplus\, E^q_X(\theta_X,\theta_X(q) \oplus W) = \oplus E^q_X(\theta_X, W(q)) = \oplus H^q(X,W(q)) = 0$ para $q > 0$, por (6.2.1).

Por otro lado $H^{n-q}(X,E) = \oplus\, H^{n-q}(X,0_X(-q)) = 0$, para $q > 0$, por (6.2.1). Así para cada θ_X- módulo coherente F, existe un θ_X- módulo coherente E y un epimorfismo $u: E \longrightarrow F$ tal que $E^q_X(u,W) = 0$ para $q > 0$, y $H^{n-q}(X,u) = 0$ para $q > 0$; así por ([37], Teorema 3.4.3., pág 179), ambas sucesiones de funtores han de coincidir.

(6.4.2) DEFINICION

Sea (X,θ_X) un esquema propio de dimensión n sobre un cuerpo K, (en el sentido de que existe un morfismo $(X,\theta_X) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(K),\theta_K)$ que es propio,(3.1.7)).

Un θ_X- módulo dualizante para X, es un θ_X- módulo coherente W^0_X junto con un morfismo traza, $t: H^n(X,W^0_X) \longrightarrow K$, tal que para cualquier θ_X- módulo coherente F, el apareamiento natural:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F,W^0_X) \times H^n(X,F) \longrightarrow H^n(X,W^0_X)$$

seguido de t, nos da un isomorfismo, es decir $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F,W^0_X) \xrightarrow{\simeq} H^n(X,F)^*$.

(6.4.3) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema propio de dimensión n sobre un cuerpo K. Entonces un haz dualizante para X, si existe, es único. Más concretamente, si W^0_X es un haz dualizante con aplicación traza t, y si W',t' es otro, entonces existe un único morfismo $\beta: W^0 \longrightarrow W'$, tal que $t' \circ H^n(\beta) = t$.

Probaremos la existencia de haces dualizantes para esquemas proyectivos, para lo que damos algunos resultados preliminares.

(6.4.4) LEMA

Sea (X,θ_X) un subesquema cerrado de codimensión r, de $P = P^n_K$. Entonces $\underline{E}^q_P(\theta_X, W) = 0$, para todo $q < r$. Donde θ_X es considerado como θ_P- módulo identificándolo con $i_* 0_X$, para $i: X \longrightarrow P$ la inclusión.

DEMOSTRACION

Para cualquier q, el θ_P- módulo $F^q = \underline{E}^q_P(\theta_X, W)$ es coherente, por serlo ambos (6.3.13). Entonces existe un p, suficientemente grande, tal que $F^q(p)$ está generado por secciones globales, ver (2.5.21).

Por (6.3.10) y (6.3.14), tenemos: $\Gamma(P, F^q(p)) = \Gamma(P, \underline{E}^q_P(\theta_X, W) \otimes \theta_P(p)) =$

$= \Gamma(P, \underline{E}^q_P(\theta_X, W(p)) = E^q_P(\theta_X, W(p))$, para p suficientemente grande.

Pero por (6.3.15) y de nuevo utilizando (6.3.10), tenemos:
$E^q_P(\theta_X, W(p)) = E^q_P(\theta_X(-p), W) \simeq H^{n-q}(P, \theta_X(-p))^* \simeq H^{n-q}(X, \theta_X(-q))^*$, pues X es un subesquema cerrado de P, vease (5.1.8).

Pero si $q < r$, entonces $n-q > n-r = \dim(X)$, y X es noetheriano, luego aplicando (5.4.6), $H^{n-q}(X, \theta_X(-p)) = 0$, c.q.d.

(6.4.5) LEMA

Con las mismas hipótesis de (6.4.4), sea $W^0_X = \underline{E}^r_P(\theta_X, W)$, entonces para cualquier θ_X- módulo F, existe un isomorfismo natural:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F, W^0_X) \simeq E^r_P(F, W)$$

DEMOSTRACION

Sea $0 \longrightarrow W \longrightarrow J^{\cdot}$ una resolución inyectiva de W en ${}_{\theta_P}M$. Entonces $E^q_P(F,W)$ será el q-ésimo grupo de cohomología del complejo $\mathrm{Hom}_{\theta_P}(F, J^{\cdot})$.

Pero ya que F es un θ_X- módulo, cualquier morfismo de F en J^i factoriza a través de $I^i = \underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_P}(\theta_X, J^i)$. Así tenemos que $E^q_P(F,W) = H^q(\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F, I^{\cdot}))$.

Pero cada I^i es un θ_X- módulo inyectivo. En efecto, si G es un θ_X- módulo, entonces $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(G, I^i) = \mathrm{Hom}_{\theta_P}(G, J^i)$ y así $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(-, I^i)$ es exacto.

Por (6.4.4), sabemos que $\underline{E}_P^q(\theta_X, W) = 0$ para $q < r$, pero $\underline{E}_P^q(\theta_X, W) = H^q(\underline{\mathrm{Hom}}_{\theta_P}(\theta_X, J^\cdot))$, y entonces $H^q(I^\cdot) = 0$ para $q < r$. Luego el complejo $I^\cdot$ será exacto salvo en el r-ésimo paso. Ya que cada I^i es inyectivo, escinde salvo en el r-ésimo paso. Por tanto podemos escribir el complejo como una suma directa de dos complejos inyectivos, $I^\cdot = I_1^\cdot \oplus I_2^\cdot$, donde $I_1^\cdot$ está en los grados $0 \leq q \leq r$ y es exacto, e $I_2^\cdot$ está en los grados $q > r$.

Entonces $W_X^0 = \mathrm{Ker}(d^r : I_2^r \longrightarrow I_2^{r+1})$, y para cualquier θ_X- módulo F $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F, W_X^0) \simeq \underline{E}_P^r(F, W)$.

(También se sigue de la demostración que $E_P^q(F, W) = 0$ para $q < r$).

(6.4.6) PROPOSICION

Sea (X, θ_X) un esquema proyectivo sobre un cuerpo K. Entonces X tiene un haz dualizante.

DEMOSTRACION

Embebemos X en un subesquema cerrado de $P = P_K^N$, para algún N, sea r su codimensión y sea $W_X^0 = \underline{E}_P^r(\theta_X, W)$. Entonces por (6.4.5), tenemos que para todo θ_X- módulo F, $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F, W_X^0) \simeq E_P^r(F, W)$.

Por otro lado, para F coherente, el teorema de dualidad para P, nos da el isomorfismo: $E_P^r(F, W) \simeq H^{N-r}(P, F)^*$.

Pero $N-r = n = \dim(X)$, y $H^n(P, F) \simeq H^n(X, F)$, según (5.1.8); así para todo θ_X- módulo coherente F, obtenemos un isomorfismo natural:

$$\mathrm{Hom}_{\theta_X}(F, W_X^0) \simeq H^n(X, F)^*$$

En particular, tomando $F = W_X^0$, el elemento $1 \in \mathrm{Hom}_{\theta_X}(W_X^0, W_X^0)$, nos da un morfismo $t: H^n(X, W_X^0) \longrightarrow K$, que tomamos como aplicación traza.

Entonces, un haz dualizante para X es (W_X^0, t)

(6.4.7) DEFINICION

Un esquema (X,θ_X) es <u>Cohen-Macaulay</u>, si todos sus anillos locales son Cohen-Macaulay.

Obviamente P^n_K es Cohen-Macaulay, para cualquier n y K un cuerpo, ya que sus anillos locales son anillos locales regulares, y por tanto son Cohen-Macaulay.

(6.4.8) LEMA

Sea (X,θ_X) un esquema proyectivo de dimensión n, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. Suponemos, además, que (X,θ_X) es Cohen-Macaulay y equidimensional (es decir, todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión e igual a n).

Entonces para todo θ_X- módulo F localmente libre, $H^q(X,F(-p)) = 0$, para todo $q < n$, y p un entero suficientemente grande.

DEMOSTRACION

Embebemos X como un subesquema cerrado de $P = P^N_K$, para algún N. Sea $x \in X$ un punto cerrado, y sea $U = \mathrm{Spec}(A)$ un abierto afín de X que contenga a x. Puesto x es un punto cerrado en X, también lo es en U, y por tanto corresponderá a un ideal máximal $M \subsetneq A$.

Puesto que X es un subesquema cerrado de P^N_K, la inmersión cerrada $i: X \longrightarrow P^N_K$ es de tipo finito, y por tanto A es una K-álgebra finitamente generada.

Entonces por ([25], (14.H), pág 92), tendremos que $\mathrm{Alt}(M) + \dim(A/M) = \dim(A)$. Ya que $\mathrm{Alt}(M) = \dim(A_M) = \dim(0_{X,x})$, y $\dim(A/M) = 0$, entonces $\dim(0_{X,x}) = \dim(A) = n$, pues X es equidimensional.

Como X es Cohen-Macaulay, $0_{X,x}$ es Cohen-Macaulay, y por tanto $\mathrm{Prof}(0_{X,x}) = \dim(0_{X,x}) = n$.

Puesto que F es localmente libre, entonces $F_x = 0_{X,x}$, y por tanto $\dim(F_x) = \dim(0_{X,x}) = n$, y $\mathrm{Prof}(F_x) = \dim(F_x) = n$.

Por otra parte, puesto que P es también Cohen-Macaulay, entonces $\dim(0_{P,x}) = \dim(P) = N$, ya que x es también un punto cerrado en P.

Sea $i: X \longrightarrow P^N_K$ la inmersión cerrada, entonces $i^{\#}: \theta_P \longrightarrow i_* 0_X$ es sobre, y por tanto $i_x^{\#} : 0_{P,x} \longrightarrow \theta_{X,x}$ es sobre. Luego $\mathrm{Prof}_{\theta_{X,x}}(F_x) = \mathrm{Prof}_{\theta_{P,x}}(F_x)$.

Entonces por ([25], Ejercicio 4, pág 114),

$$dP_{\theta_{P,x}}(F_x) = \dim(\theta_{P,x}) - \mathrm{Prof}_{\theta_{P,x}}(F_x) = N-n$$

donde $dP_{\theta_{P,x}}(F_x)$ es la dimensión proyectiva de F_x como $\theta_{P,x}$-módulo.

Si x no es un punto cerrado de X, existe $y \in X$ punto cerrado, tal que $\theta_{X.x} = (\theta_{X,y})_Q$, con Q un ideal primo de $\theta_{X,y}$. Entonces ya que $F_x \simeq \theta_{X,x}$,

$dP_{\theta_{P,x}}(F_x) \leq dP_{\theta_{P,x}}(\theta_{X,x}) = dP_{\theta_{P,x}}((\theta_{X,y})_Q) \leq dP_{0_{P,x}}(0_{X,y}) = dP_{\theta_{P,y}}(F_y) = N-n$. Luego para todo $x \in X$, $dP_{\theta_{P,x}}(F_x) \leq N-n$, y por tanto $\mathrm{Ext}^q_{\theta_{P,x}}(F_x, G_x) = 0$ para todo $q > N-n$, y para todo G.

Ya que $(\underline{E}^q_P(F,G))_x \simeq \mathrm{Ext}^q_{\theta_{P,x}}(F_x, G_x)$, por (6.3.11), entonces $(\underline{E}^q_P(F,G))_x = 0$ para todo $x \in X$ y para todo G. Por tanto $\underline{E}^q_P(F,-) = 0$, para todo $q > N-n$.

Por otra parte, por (6.4.1), $H^q(X,F(-p)) = H^q(P,F(-p))$ es dual a $E_P^{N-q}(F(-p),W) = E_P^{N-q}(F,W(p))$, por (6.3.10).

Para $p \gg 0$, $E_P^{N-q}(F,W(p)) \simeq \Gamma(P, \underline{E}_P^{N-q}(F,W(p))$, por (6.3.14). Luego $E_P^{N-q}(F,W(p)) = 0$, para $N-q > N-n$, es decir, para $q < n$, y por tanto $H^q(P,F(-p)) = 0$, para $q < n$ y $p \gg 0$.

(6.4.9) TEOREMA. (Dualidad para un esquema proyectivo)

Sea (X,θ_X) un esquema proyectivo de dimensión n sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K. Suponemos, además, que X es Cohen-Macaulay y equidimensional. Sea W_X^0 el haz dualizante sobre X, y $\theta_X(1)$ un θ_X- módulo muy amplio relativo a Spec(K).

Entonces, para todo $q \geqslant 0$ y todo θ_X- módulo coherente F, existen isomorfismos naturales:

$$\theta^q : E_X^q(F, W_X^0) \longrightarrow H^{n-q}(X,F)^*$$

donde $\theta^0 = t$, si t es la aplicación traza del haz dualizante.

DEMOSTRACION

Por ser X un esquema proyectivo sobre K, existe una inmersión cerrada $i: X \longrightarrow P^N_K$, para algún N, y $\theta_X(1) = i^*(\theta_P(1))$. Como en (6.4.1(c)), podemos escribir F como un cociente de un haz $E = \bigoplus 0_X(-p)$, suma finita y $p \gg 0$.

Entonces $E^q_X(E, W^0_X) = E^q_X(\theta_X(-p), W^0_X) = \bigoplus H^q(X, W^0_X(p)) = 0$, para $q > 0$ y p suficientemente grande.

Así, ya que $\left\{ E^q_X(-, W^0_X)\right\}_{q \geq 0}$ son los satélites del funtor $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(-, W^0_X)$ y $\left\{ H^{n-q}(X,-)^*\right\}_{q\geq 0}$ es una sucesión conectada de funtores con $H^n(X,-)^* \overset{t^*}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\theta_X}(-, W^0_X)$, existirán morfismos naturales:

$$\theta^q : E^q_X(F, W^0_X) \longrightarrow H^{n-q}(X,F)^*$$

para todo F cuasi-coherente, y con $\theta^0 = t^*$

Pero $H^{n-q}(X,E) = \bigoplus H^{n-q}(X, 0_X(-p)) = 0$ para $q > 0$, por (6.4.8) (pues $n-q < n$), y $p \gg 0$.

Entonces los θ^q son isomorfismos para todo $q \geq 0$.

(6.4.10) COROLARIO

Sea (X, θ_X) un esquema proyectivo, Cohen-Macaulay de equidimensión n, sobre K. Entonces para cualquier θ_X- módulo localmente libre F, existen isomorfismos naturales:

$$H^q(X,F) \simeq H^{n-q}(X, F \otimes W^0_X)^*$$

para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACION

Por (6.3.6(c)), $H^{n-q}(X, F \otimes W^0_X)^* = E^{n-q}_X(\theta_X, F \otimes W^0_X)^* \simeq E^{n-q}(F \otimes \theta_X, W^0_X)^* \simeq$ $= E^{n-q}(F, W^0_X)^* \simeq H^q(X,F)$, que es lo que queriamos demostrar, y donde hemos utilizado, también, (6.3.10) y (6.4.9).

6.5 IMAGENES DIRECTAS SUPERIORES

(6.5.1) Sea f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas. Consideremos el funtor exacto a idquierda:

$$(1) \qquad f_*: {}_{\theta_X}M \longrightarrow {}_{\theta_Y}M$$

Puesto que ${}_{\theta_X}M$ tiene suficientes inyectivos, podemos considerar sus funtores derivados a derecha. Por otra parte, tenemos también los funtores derivados a derecha del funtor: $f_*: S(\bar{X},\bar{T}) \longrightarrow S(\bar{Y},\overline{T'})$.

Si notamos por $\{R'^q f_*\}_{q\geq 0}$ a los funtores derivados de (1), entonces para todo θ_X- módulo se verifica:

$$R'^q f_*(F) = R^q f_*(F)$$

para todo $q \geq 0$.

En efecto, si $0 \longrightarrow F \longrightarrow J^{\cdot}$ es una resolución inyectiva de F en ${}_{\theta_X}M$, entonces $R'^q f_*(F) = H^q(f_*J^0 \longrightarrow f_*J^1 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots)$. Pero para cada r, J^r es fuertemente flasgo, por (6.1.3), y ya que resoluciones fuertemente flasgas pueden utilizarse para calcular los funtores $R^q f_*$, entonces
$R^q f_*(F) = H^q(f_*J^0 \longrightarrow f_*J^1 \longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots)$, de donde tenemos la igualdad.

(6.5.2) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema noetheriano y sea f: $(X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas. Suponemos que $(Y,\theta_Y) = (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$.

Entonces para cualquier θ_X- módulo cuasi-coherente F, se verifica:

$$R^q f_*(F) \simeq (H^q(X,F))^{\cdot} .$$

DEMOSTRACION

Por ser X noetheriano y por (2.4.8(c)), $f_*(F)$ es un θ_Y- módulo cuasi-coherente, por tanto, ya que Y es afín, por (2.4.5), $f_*(F) \simeq \Gamma(Y,f_*(F))^{\cdot}$. Pero $\Gamma(Y,f_*(F)) = \Gamma(X,F)$, así $f_*(F) \simeq \Gamma(X,F)^{\cdot}$, y tenemos el isomorfismo para $q = 0$.

Consideramos entonces las sucesiones de funtores: $\{R^q f_*\}_{q\geq 0}$ y $\{H^q(X,-)^{\cdot}\}_{q\geq 0}$ de la categoría de θ_X-módulos cuasi-coherentes a la categoría de θ_Y-módulos cuasi-coherentes.

Para $q = 0$ coinciden y ambas son sucesiones conectadas de funtores, pues al ser Y afín, el funtor $\cdot$ es exacto, (2.4.2(a)).

Dado F un θ_X- módulo cuasi-coherente, puede embeberse en un θ_X- módulo fuertemente flasgo y cuasi-coherente, ([17] , Corolario 3.6, pág 215). Sea $u: F \longrightarrow G$ el embebimiento.

Si G es fuertemente flasgo, $R^q f_*(G) = 0 = H^q(X,G))\cdot$ para todo $q > 0$, es decir, $R^q f_*(u) = H^q(X,u)\cdot = 0$, para todo $q > 0$. Luego estas sucesiones han de coincidir.

(6.5.3) COROLARIO

Sea $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo de esquemas, con (X,θ_X) noetheriano. Entonces, para cualquier θ_X- módulo cuasi-coherente F, los θ_Y- módulos $R^q f_*(F)$ son cuasi-coherentes, y ello para todo $q \geqslant 0$.

DEMOSTRACION

Ya que la cuestión es local sobre Y, utilizando (6.5.2), tenemos lo pedido.

(6.5.4) TEOREMA

Sea $f: (X,\theta_X) \longrightarrow (Y,\theta_Y)$ un morfismo proyectivo entre esquemas noetherianos, sea $\theta_X(1)$ un θ_X- módulo invertible muy amplio relativo a Y, y sea F un θ_X- módulo cuasi-coherente. Entonces:

(a) Para todo $n \gg 0$, el morfismo natural $f^* f_*(F(n)) \longrightarrow F(n)$ es sobreyectivo.

(b) Para todo $q \geqslant 0$, $R^q f_*(F)$ es un θ_Y- módulo cuasi-coherente.

(c) Para $q > 0$ y $n \gg 0$, $R^q f_*(F(n)) = 0$.

DEMOSTRACION

$\theta_X(1) = i^*(\theta_Y(1))$, donde $i: X \longrightarrow P^r_Y$ es una inmersión abierta. Como Y es compacto y la cuestión es local sobre Y, podemos suponer que $(Y,\theta_Y) = (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$.

Tenemos entonces que X es un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A, entonces, por (2.5.21), existe un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$, F(n) puede generarse por un número finito de secciones globales.

Por (6.5.2), $R^q f_*(F) \simeq H^q(X,F)$ para $q \geq 0$, y por tanto $f_*(F(n)) \simeq H^0(X,F(n))^\bullet =$ $= \Gamma(X,F(n))^\bullet$.

Entonces (a) es lo mismo que decir que $F(n)$ está generado por secciones globales a partir de un n_0 en adelante, lo cual nos lo asegura (2.5.21); (b) es lo mismo que decir que $H^q(X,F)$ es un A-módulo finitamente generado, lo cual es cierto por (6.2.3(a)); y (c) dice que $H^q(X,F(n)) = 0$ para $n \gg 0$ y $q > 0$, lo cual es cierto por (6.2.3(b)).

6.6 COHOMOLOGIA LOCAL

(6.6.1) Sea (X,θ_X) un esquema y sea Y un subespacio localmente cerrado. Consideremos el funtor:

$$\Gamma_Y(X,-) : {}_{\theta_X}M \longrightarrow Ab$$

donde $\Gamma_Y(X,F)$ es el grupo abeliano definido en (5.3.1).

Si notamos por $\{H'^q_Y(X,-)\}_{q \geq 0}$ a sus funtores derivados a derecha, entonces para todo θ_X- módulo F se verifica:

$$H'^q_Y(X,F) \simeq H^q_Y(X,F)$$

para todo $q \geq 0$, y donde $H^q_Y(X,-)$ son los funtores definidos en (5.3.6).

En efecto, sea $0 \longrightarrow F \longrightarrow J^\cdot$ una resolución inyectiva de F en ${}_{\theta_X}M$, entonces $H'^q_Y(X,F) = H^q(\Gamma_Y(X,J^0) \longrightarrow \Gamma_Y(X,J^1) \longrightarrow \Gamma_Y(X,J^2) \ldots\ldots\ldots)$. Ya que todo θ_X- módulo inyectivo es fuertemente flasgo, (6.1.3), y puesto que $H^q_Y(X,F)$ puede calcularse utilizando resoluciones fuertemente flasgas, entonces $H^q_Y(X,F) = H^q(\Gamma_Y(X,J^0) \longrightarrow \Gamma_Y(X,J^1) \longrightarrow \Gamma_Y(X,J^2) \ldots\ldots)$, de donde se deduce la igualdad.

(6.6.2) Sea (X,θ_X) un esquema y sea Y un subespacio localmente cerrado de X. Sea F un θ_X- módulo, entonces el haz $\Gamma_Y(-,F)$ definido en (5.3.5) es también un θ_X-módulo.

En efecto, sea V un abierto de X tal que $Y \subseteq V$ e Y es cerrado en V. Entonces

$\Gamma_Y(-,F)(U) = \Gamma_{Y\cap U}(U,F|U) = \{ s\in F(U\cap V) \ / \ Sop(s)\subset Y\cap U \}$. Tenemos que ver tiene estructura de $\theta_X(U)$-módulo.

Si $s\in \Gamma_{Y\cap U}(U,F|U)$ y $a\in\theta_X(U)$, definimos $a.s = \theta_X(U \longrightarrow U\cap V)(a).s$, que está bien definido pues $F(U\cap V)$ es un $\theta_X(U\cap V)$-módulo.

Ya que $Sop(a.s) = \{ p\in U\cap V \ / \ (as)_p \neq 0 \} = \{ p\in U\cap V \ / \ a_p s_p \neq 0 \}$, entonces $Sop(as)\subset Sop(s)\subset Y\cap U$, y por tanto $as\in \Gamma_{Y\cap U}(U,F|U)$. Luego $\Gamma_Y(-,F)$ es un θ_X- módulo.

(6.6.3) Si consideramos el funtor:

$$\Gamma_Y(-,-): {}_{\theta_X}M \longrightarrow {}_{\theta_X}M$$
$$F \longmapsto \Gamma_Y(-,F)$$

entonces $(R^q\Gamma_Y(-,-))(F) = \underline{H}^q_Y(F)$ para todo $q\geqslant 0$. El razonamiento es análogo al hecho en (6.6.1).

(6.6.4) PROPOSICION

Sea (X,θ_X) un esquema localmente noetheriano y sea $Y = V-U$ un subconjunto localmente cerrado de X, donde U,V son abiertos de X. Sean $i\colon U \longrightarrow X$ y $j\colon V \longrightarrow X$ las inyecciones naturales.

Entonces si F es un θ_X- módulo cuasi-coherente, los θ_X- módulos $\underline{H}^q_Y(F)$ son también cuasi-coherentes, para todo $q\geqslant 0$.

DEMOSTRACION

Por (5.3.13), tenemos la sucesión exacta:

$$\cdots\cdots\cdots\cdot \ \underline{H}^q_U(F) \longrightarrow \underline{H}^q_Y(F) \longrightarrow \underline{H}^{q+1}_V(F) \longrightarrow \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ya que el núcleo y conúcleo de un morfismo de θ_X- módulos cuasi-coherentes son cuasi-coherentes, y puesto que cualquier extensión de un θ_X- módulo cuasi-coherente por otro cuasi-coherente es cuasi coherente, ver (2.4.7), será suficiente ver que los θ_X- módulos $\underline{H}^q_U(F)$ y $\underline{H}^q_V(F)$ son cuasi-coherentes.

Pero $\underline{H}^q_U(F) = R^{q-1}j_*(F|V)$, por (5.3.14). Puesto que $F|V$ es cuasi-coherente entoces $R^{q-1} j_*(F|V)$ es cuasi-coherente, así $\underline{H}^q_U(F)$ es cuasi-coherente. De la misma forma se demuestra que $\underline{H}^q_V(F)$ es cuasi-coherente.

(6.6.5) PROPOSICION

Sea $(X,\theta_X) = (\mathrm{Spec}(A),\theta_A)$ un esquema afín noetheriano, y sea Y un subconjunto cerrado de X. Entonces para cualquier θ_X- módulo cuasi-coherente F y para todo $q \geqslant 0$, $\underline{H}^q_Y(F) \simeq H^q_Y(X,F)^\bullet$.

Por otra parte, existe una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow H^0_Y(X,F) \longrightarrow H^0(X,F) \longrightarrow H^0(X-Y,F) \longrightarrow H^1_Y(X,F) \longrightarrow 0$$

e isomorfismos $H^q(X-Y,F) \simeq H^{q+1}_Y(X,F)$

DEMOSTRACION

Consideremos la sucesión espectral:

$$H^p(X,\underline{H}^q_Y(F)) \Longrightarrow H^{p+q}_Y(X,F)$$

Por (6.6.4), $\underline{H}^q_Y(F)$ es cuasi-coherente para todo $q \geqslant 0$, como X es afín , por (6.1.11), $H^p(X,\underline{H}^q_Y(F)) = 0$ para todo $p > 0$.

Luego $H^q_Y(X,F) \simeq H^0(X,\underline{H}^q_Y(F)) = \Gamma(X,\underline{H}^q_Y(F))$, y como $\underline{H}^q_Y(F)$ es cuasi-coherente, entonces $\underline{H}^q_Y(F) \simeq H^q_Y(X,F)^\bullet$, (2.4.5).

Teniendo en cuenta la sucesión exacta larga (5.3.14), y puesto que F es cuasi-coherente y (X,θ_X) es afín, entonces $H^q(X,F) = 0$ para todo $q>0$, de donde obtenemos la sucesión exacta y los isomorfismos requeridos.

(6.6.6) Veamos, por último, un teorema que relaciona los grupos de cohomología local con un límite directo de Exts.

Sea (X,θ_X) un esquema y sea Y un subespacio cerrado de X, sea F un θ_X- módulo cuasi-coherente.

Sea J el haz de ideales cuasi-coherente definiendo Y, y para cada $n \geqslant 1$, sea $\theta_n = \theta_X/J^n$. Entonces θ_n es un θ_X- módulo tal que $\mathrm{Sop}(\theta_n) \subset Y$, y para cada $n \geqslant 1$, existe una inyección natural:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\theta_X}(\theta_n,F) & \longrightarrow & \Gamma_Y(X,F) \\ f\colon \theta_n \longrightarrow F & \longmapsto & f_X(1) \end{array}$$

En principio, $\mathrm{Sop}(f_X(1)) \subset Y$, ya que si $p \in \mathrm{Sop}(f_X(1))$ entonces $(f_X(1))_p \neq 0$, es decir, $f_p(1_p) \neq 0$, y por tanto $0_{n,p} \neq 0$, de donde $p \in Y$.

Además este morfismo es mónico, pues si $f_X(1) = 0$ entonces $f_X = 0$ y por tanto $f = 0$.

Consideremos los funtores derivados a derecha del funtor $\mathrm{Hom}_{\theta_X}(\theta_n,-)$: $E^q_X(\theta_n,-)$, y por otro lado los funtores $H^q_Y(X,-)$. Para todo θ_X- módulo F y para $q = 0$, tenemos el monomorfismo anteriormente descrito, con lo cual, por la propiedad universal de los funtores derivados, obtenemos, para $q \geqslant 0$, morfismos: $E^q_X(\theta_n,F) \longrightarrow H^q_Y(X,F)$. Variando n, $\{E^q_X(\theta_n,F\}_n$, constituye un sistema directo, y puesto que tenemos para cada n un morfismo a $H^q_Y(X,F)$, obtenemos el morfismo:

$$\varinjlim_n E^q_X(\theta_n,F) \longrightarrow H^q_Y(X,F) \qquad (*)$$

para cada $q \geqslant 0$. Realizando estos morfismos localmente y pasando a haces asociados, obtenemos el morfismo de θ_X- módulos:

$$\varinjlim_n \underline{E}^q_X(\theta_n,F) \longrightarrow \underline{H}^q_Y(F) \qquad (\underline{*})$$

(6.6.7) TEOREMA

Si (X,θ_X) es un esquema localmente noetheriano y F un θ_X- módulo cuasi-coherente, entonces los morfismos ($\underline{*}$) son isomorfismos. Si (X,θ_X) es noetheriano entonces los morfismos ($*$) son isomorfismos.

DEMOSTRACION

Lo primero es local, así podemos suponer que X es el espectro de un anillo noetheriano A.

Entonces $J = I^\sim$, donde $Y = V(I)$. Si F es cuasi-coherente, entonces $F = N^\sim$, para algún A-módulo N.

Así debemos demostrar que el morfismo: $\varinjlim_n \underline{E}^q_X((A/I^n)^\sim, N^\sim) \longrightarrow \underline{H}^q_Y(N^\sim)$ es un isomorfismo, para cada $q \geq 0$.

Por (6.6.5), $\underline{H}^q_Y(N\bullet) \simeq (H^q_Y(X,N\bullet))\bullet$. Por otra parte, ya que $\underline{E}^q_X((A/I^n)\bullet, N\bullet) \simeq$ $\simeq (\mathrm{Ext}^q_A(A/I^n,N)\bullet$, por (6.3.12), y teniendo en cuenta que $\varinjlim$ conmuta con $\bullet$, nos reducimos a demostrar que el morfismo:

$$\varinjlim_n \mathrm{Ext}^q_A(A/I^n,N) \longrightarrow H^q_Y(X,N\bullet)$$

es un isomorfismo, para todo $q \geq 0$. Consideremos las sucesiones de funtores: $\left\{ \varinjlim_n \mathrm{Ext}^q_A(A/I^n,-)\right\}_{q\geq 0}$ y $\left\{ H^q_Y(X,(-)\bullet)\right\}_{q\geq 0}$, de la categoría de A-módulos en ella misma. Ya que los funtores $\varinjlim$ y $\bullet$ son exactos, ambas son sucesiones conectadas de funtores. Para $q > 0$ y N inyectivo, ambas se anulan, pues en ese caso $N\bullet$ es fuertemente flasgo, ver ([17], Proposición 3.4, pág 214).

Veamos que coinciden para $q = 0$, con lo cual ambas sucesiones serán los satélites del funtor $\Gamma_Y(X,(-)\bullet)$, y por tanto han de coincidir. Para $q = 0$, tenemos

$$\varinjlim_n \mathrm{Hom}_A(A/I^n,N) \longrightarrow \Gamma_Y(X,N\bullet)$$

Sabemos que $\Gamma_Y(X,N\bullet) = \{ n \in N \,/\, \mathrm{Sop}(n) \subset Y \}$. Y $\mathrm{Sop}(n) = \{ p \in X \,/\, n_p \neq 0 \} =$ $= \{ p \in X \,/\, n/1 \neq 0/1 \text{ en } N_p \}$. Entonces $\Gamma_Y(X,N\bullet)$ es el conjunto de elementos de N anulados por alguna potencia de I .

En efecto, sea $n \in \Gamma_Y(X,N\bullet)$, entonces $\mathrm{Sop}(n) \subset Y = V(I)$, lo que implica que para todo $p \in X-V(I)$, $n_p = 0$ en N_p , es decir, existe un $f \in p$ tal que $f^m n = 0$, para algún entero m. Ya que $p \in X-V(I) = \bigcup_i D(f_i)$, si $I = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$, entonces f ha de ser un f_i, o una combinación lineal de los f_i, es decir, $f \in I$.

Sea, ahora, $n \in N$ tal que existe $f \in I$ y existe un entero m, con $f^m n = 0$, entonces, para todo $p \in X-V(I)$, $n_p = 0$; pero si $f \in I$ entonces $X-V(f) \supset X-V(I) = X-Y$, luego $\mathrm{Sop}(n) \subset Y$.

Por tanto $\Gamma_Y(X,N\bullet)$ es el conjunto de elementos de N anulados por alguna potencia de I, que coincide con $\varinjlim_n \mathrm{Hom}_A(A/I^n,N)$, luego para $q = 0$ se verifica la igualdad.

Para demostrar la segunda afirmación, consideramos las sucesiones espectrales:

$$(5.3.11) \qquad H^p(X, \underline{H}^q_Y(F)) \Longrightarrow H^{p+q}_Y(X,F)$$

$$(6.3.5) \qquad H^p(X, \underline{E}^q_X(F,G)) \Longrightarrow E^{p+q}_X(F,G)$$

Teniendo en cuenta que el límite directo de sucesiones espectrales es, de nuevo una sucesión espectral, tenemos entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \varinjlim_n H^p(X, \underline{E}^q_X(\theta_n, F)) \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & H^p(X, \underline{H}^q_Y(F)) \arrow[d, Rightarrow] \\ \varinjlim_n E^{q+p}_X(\theta_n, F) \arrow[r] & H^{p+q}(X,F) \end{tikzcd}$$

Para demostrar que los morfismos inferiores son isomorfismos, será suficiente demostrar que los de arriba lo son.

Pero si X es noetheriano, por (5.1.6)

$$\varinjlim_n H^p(X, \underline{E}^q_X(\theta_n, F)) \simeq H^p(X, \varinjlim_n \underline{E}^q_X(\theta_n, F))$$

y como los morfismos ($\underline{*}$) son isomorfismos, entonces tenemos lo pedido.

BIBLIOGRAFIA BASICA

[1] ALTMAN, A.- KLEIMAN,S.

Introduction to Grothendieck Duality Theory. Lecture Notes in Math. 146. Springer (1970).

[2] ARTIN,M.

Grothendieck Topologies. Harvard Math. Dept. Lecture Notes (1962).

[3] ATIYAH, M.F. - MACDONALD, I.G.

Introducción al álgebra conmutativa. Editorial Reverté. (1973).

[4] CARTAN,H. - EILEMBERG,S.

Homological Algebra. Princenton Univ. Press. (1956)

[5] DELIGNE,P.

Cohomologie étale. S.G.A.4$\frac{1}{2}$.Lecture Notes in Math. 569. Springer (1977).

[6] FULTON,W.

Algebraic Curves. W.A. Benjamin, New York. (1969).

[7] GODEMENT,R.

Topologie Algébrique et théorie des Faisceaux. Hermann Paris. (1964)

[8] GOODMAN,J. - HARTSHORNE,R.

Schemes with finite dimensional cohomology groups. Amer. J. Math. 91, 258-266. (1969).

[9] GROTHENDIECK,A.

Sur quelques points d'algébre homologique. Tohoku Math. J. 9, 119-227. (1957).

[10] GROTHENDIECK,A.

Local cohomology. Lecture Notes in Math. 41. Springer.(1967).

[11] GROTHENDIECK,A. - DIEUDONNE,J.

Eléments de Géométri Algébrique.Springer. (1971).

[12] GROTHENDIECK,A. - DIEUDONNE,J.

Elements de Géométrie Algébrique.

E.G.A I. Le langage des schémas. Publ. Math. I.H.E.S. 4. (1960).

E.G.A.II. Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. Publ. Math. I.H.E.S. 8. (1961).

E.G.A.III. Etude cohomologique des faisceaux cohérents. Publ. Math. I.H.E.S. 11, 17. (1961), (1963).

E.G.A.IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas. Publ. Math. I.H.E.S. 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).

[13] GROTHENDIECK,A. y el

Séminaire de Géométrie Algébrique.

S.G.A.1. Revêtements étale et Groupe Fondemental. Lecture Notes in Math. 224. Springer. (1971).

S.G.A.2. Cohomologie locale des Faisceaux Cohérents et Théorèmes de Lefschets Locaux et Globaux. North-Holland. (1968).

S.G.A.3. (Con Demazure,M.) Schémas en Groupes, I,II,III.. Lecture Notes in Math. 151,152,153. Springer. (1970).

S.G.A.4. (Con Artin,L. y Verdier,J.L.) Théorie des Topos et cohomologie Etale des Schémas. Lecture Notes in Math. 269, 270, 305. Springer. (1972-1973).

[14] HARTSHORNE,R.

Cohomological dimension of algebraic varieties. Ann. of Math. 28, 403-450 (1968)

[15] HARTSHORNE,R.

Algebraic de Rham cohomology. Manuscripta Math. 7, 125-140. (1972).

[16] HARTSHORNE,R.

Cohomology with compact supports for coherent Sheaves on an Algebraic Variety. Math. Ann. 195, 199-207. (1972).

[17] HARTSHORNE,R.

Algebraic Geometry. Graduate Texts in Math. 52. Springer. (1977).

[18] HILTON,P.J. - STAMMBACH,U.

A course in homological Algebra. Graduate Texts in Math. 4. Springer, (1970).

[19] KEMPF,G.R.

Some elementary proofs of basic theorems in the cohomology of quasicoherent sheaves. Rocky Mountain J.Math. 3, 637-645. (1980).

[20] KLEIMAN, S.L.

On the vanishing of $H^n(X,F)$ for an n-dimensional variety. Proc. Amer. Math. Soc. 18, 940-944. (1967).

[21] LABORDA GONZALEZ, M.J.

Teoría de esquemas. Teoría local. Alxebra 15. Univ. de Santiago. (1974).

[22] LEVARO, K.A.

Projective quasi-coherent sheaves of modules. Pacific. J. Math. 2. 457-461. (1975).

[23] LITAKA, S.

Algebraic Geometry. Graduate Texts in Math. 76. Springer. (1982).

[24] MACDONALD, I.G.

Algebraic Geometry. W.A. Benjamin, I.N.C. (1968).

[25] MATSUMURA,H.

Conmutative Algebra. (Second Edition) W. A. Benjamin. I.N.C. (1980).

[26] MILNE, J.S.

Etale cohomology. Princenton University Press. (1980).

[27] MITCHEL, B.

Theory of Categories. Academic Press. New York and London. (1965).

[28] PESKINE,C.- SZPIRO,L.

Theorémes de finitude et de nullité en cohomologie de schémes. C.R. Acad. Sci. Paris. Sér A-B, 271, A1000-A1002. (1970).

[29] POPESCU,N.

Elements of the theory of sheaves. I,II,III,IV. Stud. Cerc. Math. 18, 267-296, 407-456, 547-583, 645-669. (1966).

[30] RODRIGUEZ GONZALEZ,N.

Teoria de esquemas. Teoría global. Alxebra 15. Univ. de Santiago. (1974).

[31] ROTMAN,J.J.

Notes on Homological Algebra. Van Nostrand 26. (1970).

[32] SABAC,M.

Injectives and projective objects in the category of coherent sheaves. Stud. Cerc. Math. 22, 1359-1363. (1970).

[33] SERRE,J.P.

Sur la cohomologie des variétès algébriques. J. de Math. et Appl. 36 1-16. (1957).

[34] SERRE, J.P.

Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. 61, 197-278. (1955).

[35] SATHZ, S.

The cohomological dimension of certain Grothendieck topologies. Ann. of Math. 83, 572-595. (1966).

[36] SPANIER,E.H.

Algebraic Topology. MacGraw-Hill. New-York. (1966).

[37] STROOKER,R.J.

Introduction to categories, homological algebra and sheaf cohomology. Cambridge University Press. (1978).

[38] SWAN,R.G.

The theory of sheaves. Chicago University Press. Chicago. (1964).

[39] TENNINSON, B.R.

Sheaf theory. Lecture Notes Series 20. Cambridge University Press. (1975).

[40] ZARISKI,O.

Algebraic Sheaf Theory. Bull. Amer. Math. Soc. 62. 117-141. (1956).

[41] ZARISKI,O. - SAMUEL,P.

Conmutative Algebra. (Vol I,II). Van Nostrand Princenton. (1958,1960).

BIBLIOGRAFIA AMPLIADA SOBRE COHOMOLOGIA DE HACES Y TRABAJOS RELACIONADOS CON EL TEMA.

1.- ALTMAN, A.B.- HOOBLER,R.T.- KLEIMAN,L.

A note on the base change map for cohomology. Compositio Math. 27, 25-38. (1973).

2.- ANDREOTI,A.- GRAUERT,H.

Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France 90, 193-295. (1962).

3.- ANGENIOL,B.

Théorème de finitude en cohomologie étale. Séminaire de géomètrie analytique 36-37, 152-162. Soc. Math. France, Paris. (1976).

4.- ANGHEL,C.

Epimophic families and the canonical topology. Stud. Cerc. Math. 19, 805-815. (1967).

5.- ARTIN,M.

The étale topology of schemes. Proc. Internant. Congr. Math. pp 45-46. "Mir" Moscow. (1968).

6.- ARTIN,M.-GROTHENDIECK,A.

Cohomologie étale des schémes. Mimeographed notes, I.H.E.S., Paris. (1963-1964).

7.- ARTIN,M.- MILNE,J.S.

Duality in the flat cohomology of curves. Invent. Math. 35, 111-129. (1976).

8.-BASMAKOU,M.

The cohomology of Abelian Varieties over a number field. Russ. Math. Surveys 6, 25-71. (1972).

9.- BERTHELOT,P.

Chomologie cristalline des schémas de caractéristique p > 0. Lecture Notes in Math. 407. Springer. (1974).

10.- BERTHELOT,P.- OGUS,A.

Notes on Crystalline Cohomology. Princenton Univ. Press. University of Tokyo Press. (1978).

11.- BIALYNICKI-BIRULA,A.

On fixed point schemes of actions of multiplicative and additive groups. Topology 12, 99-103. (1973).

12.- BREDON,G.

Sheaf Theory. McGraw-Hill, New-York. (1967).

13.- BREEN,L.

Extensions of abelian schemes and Eilemberg-Maclane algebra. Invent. Math 9, 15-44. (1969/70).

14.- BREEN,L.

Un Théorème d'annulation pour certains Ext^i de faisceaux abeliens. Ann. Soc. Ecole Norm. Sup. 3, 339-352. (1975).

15.- BRINZANESCU,U.- STOIA,M.

On the cohomology of projective Space. Stud. Cerc. Math. 4, 387-392. (1975).

16.- CHASE,S.- ROSENBERG,A.

Amitsur cohomology and the Brauer group. Men. Amer. Math. Soc. 52, 34-79. (1965).

17.- COHEN,H.

Un faisceau qui ne peut pas être de'tordo universellement. C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A-B 272, A799-A802. (1971).

18.- DEBREAMEAKER,R.

Cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupes croisés sur un site I,II. Acad. Roy Belg. Bull. ci. Sci. 10, 758-764, 765-772. (1977).

19.- DEBREAMEAKER,R.

Non abelian cohomology. Bull. Soc. Math. 1, 57-72. (1977).

20.- DEMAZURE,M.

Structures algébriques, cohomologie des groupes. Schémas en Groupes, S.G.A. Fasc. I, Expose I. (1963).

21.- DIERS,Y.

Un critére de représentabilité por sections continues de faisceaux. Publ. U.E.R. Math. Pures Appl. I.R.M.A. 2, nº 4, exp 5. (1980).

22.- DIEUDONNE,J.

Cours de géomètrie algébrique. (Vol. I,II). Presses Universitaires de France. (1974).

23.- DOLBEAULT,P.

Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes. C.R. Acad. Sci. Paris 236, 175-177. (1953).

24.- EFROYMSON,G.

Certain cohomology of finite and formal proup schemes. Trans. Amer. Math. Soc. 145, 309-332. (1969).

25.- FARY,I.

Cohomologie des variétés algébriques. Ann. of Math. 65, 21-73. (1957).

26.- FLEXER, MANGENEY,M.

Un critére de finitude du foncteur image directe. C.R. Acad. Sci. Paris A-B276, A53-A54. (1973).

27.- GAMST,J-HOECHMANN,K.

Products in Sheaf-Cohomology. Tohoku Math. J. 22, 143-162. (1970).

28.- GIRAUD,J.

Analysis situs. Reprinted in "Dix Exposes sur la cohomologie des schémas". North-Holland Amsterdam, pp 1-11. (1968).

29.- GOBLOT, R.

Catégories modulaires commutatives qui sont des catégories dex faisceaux quasi-cohérents sur un schéma. C.R. Acad. Sci. Paris A-B268, A92-A95. (1969).

30.- GOLDSTON,B.- MEWBORN,A.C.

A structure sheaf for a non commutative Noetherian ring. J.Algebra 1, 18-28. (1977).

31.- GOODMAN,J- LANDAMAN,A.

Varieties proper over affine schemes. Invent. Math. 20, 267-312. (1973).

32.- GRAUERT,H.

Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France 87, 341-350. (1959).

33.- GRILLET,P.

Directed colimits and sheaves in some non-abelian categories. Reports of the Midwest. Category Seminar, pp 36-39. Lecture Notes in Math. 195. Springer. (1971).

34.- GROTHENDIECK,A.

1.- Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents. Seminaire H. Cartan. Expose 2-9. (1956/57).

2.- Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Seminaire Bourbaki, nº: 149. Secr. Math. I.H.P. Paris. (1957).

3.- The cohomology theory of abstract algebraic varieties. Proc. Int. Cong. Math. Edinburgh, 103-118. (1958).

4.- Crystals and the de Rham cohomology of schemes . (Notes by I. Coates and O. Jussila), in "Dix Exposés sur la cohomologie des schémes". North-Holland, Amsterdam, 306-358. (1968).

35.- HARTSHORNE,R.

1.- Residues and duality. Lecture Noes in Math 20. Springer. (1966).

2.- Cojomology an non-complete algebraic varieties. Compositio Math. 23, 257-264. (1971).

3.- On the de Rham cohomology of algebraic varieties. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 45, 5-99. (1975).

36.- HARTSHORNE,R.- SPEISER,R.

Local cohomological dimension in characteristic p. Ann. of Math. 105, nº:1, 45-79. (1977).

37.- HOOBLER, R.T.

Cohomology in the finite topology and Brauer groups. Pacific. J. Math. 42. 667-679. (1972).

38.- HOOBLER,R.T.- MAGID,A.R.

Finite group scheme over fields. Proc. Amer. Math. Soc. 33, 310-312. (1972).

39.- ILLUSIE,L.

1.- Report on crystalline cohomology. Algebraic Geometry. Amer. Math. Soc. Providence. (1975).

2.- Cohomologie Cristalline. Séminaire Bourbaki. Exp nº:456, pp 53-60. Lecture Notes in Math 514. Springer. (1976).

3.- Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Sci. Ecole. Norm. 12, nº:4, 501-661. (1979).

40.- JOHNSTONE,P.

The associated sheaf functor in an elementary topos. J. Pure Appl. Algebra 4, 231-242. (1974).

41.- KALJULAID,U.

On the cohomological dimension of some quasi-projectives varieties. Izu. Akad. Nauk-Est. SSR, 18, 261-272. (1969).

42.- KLEIMAN,S.L.

Relative duality for quasicoherent sheaves. Compositio Math. 41, nº:1, 39-60 (1980).

43.- LANG,W.E.

Two theorems on the de Rham cohomology. Compositio Math. 40, nº:3, 417-423. (1980).

44.- LAUDAL,O.A.

Cohomology of various completions of quasicoherent sheaves on affines. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 69, 2614-2616. (1972).

45.- LORENZANI,M.- MASCHIETTI,A.

Quelques remarques sur la cohérence des faisceaux de cohomologie locale. C. R. Acad. Sci. Paris, A-B283, nº: 10. (1976).

46.- LØNSTED,K.

On the trivialization of line bundles over schemes. Compositio Math. 27, 217-221. (1973).

47.- MATSHUMURA,H.

Geometric structure of the cohomology rings in abstract algebraic geometry. Men. Coll. Sci. Univ. Kyoto. (A)32, 33-84. (1959).

48.- MAZUR,B.

1.- Local flat duality. Amer. J. Math. 92, 343-361. (1970).

2.- Notes on étale cohomology of number fields. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 6, 521-556. (1973).

49.- MILNE,J.S.

The homological dimension of commutative group schemes over a perfect field. J. Algebra 16, 436-441. (1970).

50.- MIYANISHI,M.

1.- On the cohomologies of commutative affine groups schemes. J. Math. Kyoto Univ. 8, 1-39. (1968).

2.- Quelques remarques sur la premiére cohomologie d'un préschéma affine en groupes commutatifs. Japan J. Math. 38, 51-60. (1969).

51.- MONSKY,P. - WASHNITZER,G.

Formal cohomology, I. Ann. of Math. 88, 181-217. (1968).

52.- MUNFORD,D.

Abelian varieties. Oxford University Press. (1974).

53.- NAKAI, Y.

A criterion of an ample sheaf on a projective scheme. Amer. J. Math. 85. 14-26. (1963).

54.- NAMIKAWA,Y.

An application of Seri-Grothendieck duality theorem to local cohomology. Proc. Japan Acad. 46, 483-486. (1970).

55.- NISHIDA,T.

On Sheaves with values in a category. Sci. Rep. Tokyo. Daigaku Sect. A-10, 146-153. (1969).

56.- OGUS, A.

Local cohomological dimension of algebraic varieties. Ann of Math. (2) 98, 327-365. (1973).

57.- ONZILOU,R.

Faisceaux additifs et applications catégoriques. Publ. Dép. Math. (Lyon) 3 fasc 3, 2-41. (1966).

58.- OORT,F.

Commutative group Schemes. Lecture Notes in Math. 15. Springer (1966).

59.- PESKINE,C.- SZPIRO,L.

Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la demostration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 42, 47-119. (1973).

60.- POPESCU,N.

1.- Les faisceaux d'une théorie. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B269, A380-A382. (1969).

2.- Sur les categories des (t,T)-faisceaux. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B269, A413-A415. (1969).

3.- Catégories des faisceaux. J. Algebra 18, 343-365. (1971).

61.- RADU,A.G.

1.- Category of Sheaves in epic topology, VII. Stud. Cerc. Mat. 21, 617-629. (1969).

2.- Sheaf theory in multiplicative additive topology, VI. Stud. Cerc. Mat. 21, 479-482. (1969).

3.- Quelques observations sur les sites. Rev. Roumanie Math. Pures Appl. 11, 1003-1008. (1966).

4.- Objects of finite presentation in the category of abelian presheaves. Stud. Crec. Mat. 19, 1449-1453. (1967).

5.- Sur les topos de Giraud-Grothendieck. Ann. Sci. Univ. Nat. Zaïre (Kinshasa), 2, 108-118. (1976).

62.- RAYNAUD,M.

1.- Théorèms de Lefschetz en cohomologie étale des faisceaux en groupes non nécessairement commutatifs. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B270, A773-A775. (1970).

2.- Théorèmes de Lefschetz en cohomologie des faisceaux cohérents et en cohomologie étale. Application an groupe fondamental. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 7. 29-52. (1974).

3.- Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérent et en cohomologie étale. Bull. Soc. Math. France Mèm. 41. Societé Mathématique de France. Paris. (1975).

63.- RIBENBORM,P. - SORANI,G.

Cohomology and homology of pairs of presheaves. Math. Scand. 22, 5-16. (1968/69).

64.- ROUX,A.

Object étale et faisceau. Publ. Dep. Math. (Lyon) 3, fasc:3, 42-56. (1966).

65.- SEMINAIRE CARTAN

Cohomologie des groupes, suites spectrales, faisceaux. Mimeo Notes, Secr. Math. Paris. (1950/51).

66.- SERRE, J.P.

1.- Cohomologie et géomètrie algébrique. Proc I.C.M. Vol. III, 515-520. (1954).

2.- Un Théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29, 9-26. (1955).

67.- SHATZ,S.

1.- Cohomology of artinian group schemes over local fields. Ann. of Math. 79, 411-449. (1964).

2.- Grothendieck topologies over complete local rings. Bull. Amer. Math. Soc. 72, 303-306. (1966).

68.- SPEISER,R.

1.- Cohomological dimension and abelian varieties. Amer. J. Math. 95, 1-34 (1973).

2.- Cohomological dimension of non-complete hypersurfaces. Invent. Math. 21, 143-150. (1973).

69.- SUCCI CRUCIANI,R.

Sheaves over a regular category. Rend. Mat. 13,nº:2, 187-198. (1980).

70.- SUOMINEN,K.

Duality for coherent sheaves on analytic manifolds. Ann. Acad. Sci. (A) 424, 1-19. (1968).

71.- TIERNEY,M.

Axiomatic sheaf theory: Some constructions and applications. Categories and commutative algebra, pp 249-326. (1973).

72.- ULMER,F.

On the existence and exactness of the associated sheaf functor. J. Pure. Appl. Algebra 3, 295-306.

73.- UMEMURA,H.

Dimension cohomologique des groupes algébriques commutatifs. Ann. Sci. Ecole Morm. Sup. 5, 265-276. (1972).

74.- VAN OSDOL,D.H.

Coalgebras, sheaves and cohomology. Proc. Amer. Math. Soc. 33, 257-263. (1972).

75.- VERDIER,J.L.

1.- Aduality theorem in the étale cohomology of schemes. Proc. Conf. Local fields, pp 184-198. Springer. (1967).

2.- Base change for twisted inverse image of coherent sheaves. Algebraic Geometry.(Internat. Colloq. Tata Inst. Fund. Res. Bombay 1968), pp 393-408. Oxford Univ. Press. London. (1969).

76.- VERRA,A.

Moduli iniettivi e fasci flasques su uno schema affine. Rend. Sem. Math. Univ. e Politec. Torino 33, 131-141. (1976).

77.- WATERHOUSE,W.C.

Introduction to affine group schemes. Graduate Texts in Math 66. Springer (1979).

78.- WATERHOUSE,W.C-WEISFEILER,B.

One-dimensional affine group-scheme. J. Algebra 66, nº:2, 550-568. (1980).

79.- WEINDENFELD,G.-WEINDENFELD,M.

Faisceaux et completions Universelles. Cahier Topologie Géom. Differentielle. 15, 83-108. (1974).

80.- YOMADA,H.

On formal schemes. Number theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Yasuro Akizuki. Pp 243-295. Kinokuniya Tokyo. (1973).

81.- ZISMAN,M.

Complexes de faisceaux porfaits. Symposia Mathematica, Vol. IV, pp 285-302. Academic Press London. (1970).

82.- " APPLICATIONS OF SHEAVES "

Lecture Notes in Math 753. Springer. (1979).