ANILLOS CON MODULOS PLANOS LIBRES DE TORSION

por

José Gómez Torrecillas

Tesis doctoral

ANILLOS CON MODULOS PLANOS LIBRES DE TORSION

por

José Gómez Torrecillas

Tesis doctoral

ANILLOS CON MODULOS PLANOS LIBRES DE TORSION

Tesis doctoral realizada por
José Gómez Torrecillas
bajo la dirección del
Prof. Dr. Blas Torrecillas Jover
(Universidad de Granada).

Esta tesis fue defendida el día 24 de abril de 1992
en el Campus Universitario de Almería (Universidad de Granada)
ante el siguiente Tribunal

Prof. Dr. José Luis Gómez Pardo (Universidad de Santiago)
Prof. Dr. Antonio Rodríguez Garzón (Universidad de Granada)
Prof. Dr. José Luis García Hernández (Universidad de Murcia)
Prof. Dr. Fred Van Oystaeyen (Universidad de Amberes)
Prof. Dr. Constantin Năstăsescu (Universidad de Bucarest).

obteniendo la calificación de APTO CUM LAUDE

INDICE

PROLOGO

PROLOGO

Sea R un anillo asociativo con elemento unidad. La categoría R-Mod de todos los R-módulos a la izquierda presenta una asimetría notable: Aunque todo R-módulo puede ser encajado en un R-módulo inyectivo y puede ser obtenido como imagen epimórfica de un módulo proyectivo, los problemas de existencia de módulos inyectivos o proyectivos minimales con respecto de tales propiedades recibieron soluciones dispares. Mientras que Eckman y Schopf [ES] demostraron en 1953 la existencia de una envolvente inyectiva para cualquier módulo, el concepto dual de cubierta proyectiva propuesto por Bass [Bs] en 1959 se encontró con el escollo de que los únicos $\mathbb{Z}$-módulos que poseen una cubierta proyectiva (trivial, por cierto) eran los libres. De hecho, en palabras de Bass "...projective covers seldom exist." El mismo autor caracterizó, en su bello "Theorem P", qué anillos se encuentran en el citado "rara vez". Estos son los anillos perfectos (a la izquierda). Como consecuencia, colegimos que los módulos proyectivos son demasiado sencillos para cubrir minimalmente a todos los demás módulos cuando el anillo no es perfecto.

Podemos considerar que la búsqueda de otro tipo de cubiertas fue iniciada por Enochs [E1] en 1963 cuando demostró que todo módulo sobre un dominio conmutativo tiene una cubierta libre de torsión. El concepto de cubierta libre de torsión fue utilizado posteriormente por E. Matlis [M, Theorem 4] para caracterizar los dominios conmutativos noetherianos locales con dimensión de Krull 1.

En 1965 Banaschewski [B] propuso una demostración alternativa del Teorema de existencia de cubiertas libres de torsión de Enochs utilizando una construcción de tales cubiertas que llamaremos "construcción de Banaschewski". El carácter funtorial de tal construcción permitió demostrar en el mismo trabajo la existencia de cubiertas asociadas a un monomorfismo de anillos $\rho:R\longrightarrow S$. En este caso, la clase de R-módulos recubridora era la de aquellos R-módulos a la izquierda que se encajan como R-submódulos de algún S-módulo a la izquierda. En el caso de que ρ sea el monomorfismo canónico $\rho:R\longrightarrow Q_{\tau}(R)$ para una teoría de torsión hereditaria perfecta y fiel τ sobre R-Mod, la construcción de Banaschewski demuestra la existencia de cubiertas τ-libres de torsión.

La idea de tomar como clase recubridora a la clase de los módulos τ-libres de torsión con respecto de una teoría de torsión τ hereditaria y fiel sobre R-Mod aparece en el importante artículo [T1] publicado por M.L. Teply en 1969. En la segunda sección de tal trabajo aparece demostrada [T1, Theorem 2.4] la existencia de cubiertas τ-libres de torsión para anillos τ-noetherianos. J. Golan y M.L. Teply volvieron sobre el tema en 1973. En [GIT] los citados autores exponen un estudio de las propiedades de las cubiertas τ-libres de torsión y muestran algunas condiciones suficientes para la existencia de tales cubiertas. También [GIT, Theorem 3.13] demostraron que si τ es exacta entonces todo módulo tiene una cubierta τ-libre de torsión si y sólo si τ es perfecta. El mejor resultado sobre existencia de cubiertas τ-libres de torsión de que se dispone fue descubierto por Teply en 1975 [T2], y establece que si τ es de tipo finito, entonces todo módulo tiene una cubierta τ-libre de torsión.

Entre tanto, T. Cheatham [Ch] demostró que un anillo no singular a la izquierda tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita si y sólo si todo módulo tiene una cubierta no-singular.

Una caracterización de los anillos noetherianos en términos del concepto de cubierta fue demostrada en 1981. Nos referimos al trabajo de Enochs [E4], en el que se propone el concepto de cubierta inyectiva. El "Theorem 2.1" demostrado allí afirma que un anillo R es noetheriano a la izquierda si y sólo si todo R-módulo a la izquierda tiene una cubierta inyectiva. En el mismo artículo fue propuesto el estudio de las cubiertas planas. Como para un dominio de Prüfer los módulos libres de torsión y los módulos planos coinciden, se deduce que todo módulo sobre un dominio de Prüfer (como, por ejemplo, $\mathbb{Z}$) tiene una cubierta plana. Sin embargo, el problema de existencia de cubiertas planas permanece abierto en general, incluso para el caso de un dominio conmutativo cualquiera. En este contexto, cabe destacar que en 1984 E. Enochs [E5] obtuvo la existencia de cubiertas planas para ciertos módulos sobre anillos conmutativos noetherianos. Como aplicación, la estructura de todo módulo cotorsión y plano sobre un anillo conmutativo noetheriano fue desentrañada [E5, Theorem].

Enochs volvió sobre el problema de la existencia de las cubiertas planas en 1989, con una idea interesante, expuesta en

[E2]. Sobre un dominio conmutativo, los módulos libres de torsión son exactamente los submódulos de los módulos planos. La propuesta de Enochs es que esta última clase podría ser una buena generalización del concepto de módulo libre de torsión para anillos generales. La conexión con el problema de existencia de cubiertas planas que es la siguiente: Si el anillo R es coherente a la derecha, entonces todo R-módulo a la izquierda tiene una cubierta por submódulos de módulos planos si y sólo si todo R-módulo a la izquierda inyectivo posee una cubierta plana [E2, Theorem 2.1]. Como consecuencia [E2, Remark] todo módulo sobre un anillo conmutativo noetheriano tiene una cubierta por submódulos de módulos planos. Sin embargo, el problema de existencia de cubiertas por submódulos de módulos planos permanece asímismo sin resolver.

En 1984, B. Torrecillas [To1] estudió las propiedades de las cubiertas τ-inyectivas y τ-inyectivas τ-libres de torsión (o fielmente τ-inyectivas) para τ una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod. En el citado trabajo se obtuvo [To1 Corollary 2.10] la existencia de una cubierta fielmente τ-inyectiva para todo módulo en el caso de ser τ perfecta.

Como hemos visto, diversas clases recubridoras de R-módulos han sido propuestas en las tres últimas décadas. De hecho, el concepto de cubierta, al ser categórico, puede ser concebido con respecto de cualquier clase de módulos estable por isomorfismos. De hecho, esta idea fue sugerida por Enochs en [E4] y, posteriormente, en [E2].

El objetivo principal del Capítulo I es buscar condiciones sobre el anillo R que aseguren la existencia de cubiertas por submódulos de módulos planos para todos los R-módulos a la izquierda y deducir de aquí la existencia de cubiertas planas para los módulos inyectivos.

En la Sección 1.1. establecemos el concepto de $\mathcal{F}$-cubierta y $\mathcal{F}$-precubierta para $\mathcal{F}$ una clase de módulos cerrada por isomorfismos y demostramos algunos resultados sobre $\mathcal{F}$-cubiertas que nos serán útiles a lo largo del Capítulo I.

La Sección 1.2 está dedicada a analizar la construcción que permitió a Banaschewski obtener la existencia de cubiertas τ-libres de torsión para τ una teoría de torsión perfecta y fiel. Nosotros investigamos la viabilidad de esta construcción tomando como base un R-preanillo $\rho:R\longrightarrow X$ en lugar del morfismo de anillos canónico λ_τ desde R hasta su localizado $Q_\tau(R)$ considerado en [B]. El concepto y la terminología de R-preanillo provienen de [K]. A partir de ρ es posible definir una clase de R-módulos a la izquierda $\mathcal{F}(\rho)$ de manera que la existencia de $\mathcal{F}(\rho)$-cubiertas está garantizada (Teorema 1.2.3.). Este resultado será utilizado en la Sección 1.3. para mostrar condiciones suficientes para la existencia de cubiertas por submódulos de planos (Proposición 1.3.2., Teorema 1.3.3. y Corolario 1.3.4.). Estudiamos la relación entre los conceptos de λ_τ-cubierta y cubierta τ-libre de torsión, y obtenemos una caracterización de las teorías de torsión perfectas en términos de la relación entre estos dos tipos de cubiertas (Teorema 1.2.5.). Una de las condiciones en esta caracterización es que las cubiertas τ-libres de torsión existan y sean λ_τ-cubiertas, lo que nos lleva a preguntarnos bajo qué condiciones una cubierta τ-libre de torsión es una λ_τ-cubierta. Hemos descubierto que una condición suficiente es que τ sea "nice" (Proposición 1.2.6.). El concepto de teoría de torsión nice fue introducido por Lambek [L1] y es una generalización estricta del concepto de teoría de torsión exacta (ver Ejemplo 1.2.9.). Sin embargo, una teoría de torsión fiel nice y de tipo finito es perfecta (Teorema 1.2.8.). Este último resultado mejora [S1, Proposition 3.4] y [GIT, Theorem 3.12].

Para describir el contenido de la Sección 1.3, denotemos por $\mathcal{F}_0^R$ (o $\mathcal{F}_0$, si no hay ambigüedad en la determinación del anillo R) la clase de todos aquellos R-módulos a la izquierda que son isomorfos a un submódulo de un R-módulo a la izquierda plano. Enochs relacionó, para el caso de anillos coherentes a la derecha, la existencia de $\mathcal{F}_0$-cubiertas ("cubiertas por submódulos de planos") y la existencia de cubiertas planas para módulos inyectivos. Sin embargo, como hemos indicado anteriormente, el problema de la existencia de cubiertas por submódulos de módulos planos permanece abierto. El mismo Enochs presenta como condición suficiente para la existencia de cubiertas por submódulos de planos que el anillo sea conmutativo y noetheriano. Como tendremos ocasión de mostrar en esta memoria, nuestro trabajo de investigación ha permitido ampliar drásticamente la clase de los anillos para la que es conocida la existencia de cubiertas por submódulos de planos.

La estrategia para atacar el problema de la existencia de

$\mathcal{F}_0$-cubiertas fue inquirir en qué situaciones otros tipos de cubiertas, para las cuales se tiene garantía de existencia, podían ser reconocidas como cubiertas por submódulos de planos (o $\mathcal{F}_0$-cubiertas). La primera idea en este sentido nos fue sugerida por el estudio de la construcción de Banaschewski de las cubiertas τ-libres de torsión en el caso de ser τ perfecta, como hemos descrito anteriormente. Usando el concepto de ρ-cubierta, donde ρ es un preanillo, algunas condiciones suficientes para la existencia de $\mathcal{F}_0$-cubiertas (Proposición 1.3.2., Teorema 1.3.3. y Corolario 1.3.4.) son obtenidas. Uno de estos resultados (Teorema 1.3.3.) asegura que sobre un anillo conmutativo coherente todo módulo tiene una $\mathcal{F}_0$-cubierta, con lo que todo módulo inyectivo tiene una cubierta plana.

La segunda idea tiene como punto de partida el Teorema de Teply [T2], que afirma que todo módulo tiene una cubierta τ-libre de torsión si τ es de tipo finito. Situémonos con Enochs en la opinión de que el concepto de submódulo de módulo plano sobre un anillo general puede ser una generalización natural del concepto de módulo libre de torsión sobre un dominio conmutativo. Una pregunta inevitable se nos planteó en este momento: ¿Cuándo es *realmente* $\mathcal{F}_0$ una clase libre de torsión? O en otras palabras, ¿para qué anillos existe una teoría de torsión hereditaria τ_0 sobre R-Mod de manera que los R-módulos τ_0-libres de torsión son exactamente los submódulos de los R-módulos planos?. Por brevedad, diremos que un anillo es FTF a la izquierda si existe esta teoría de torsión τ_0. Poco después descubrimos que si R es un anillo FTF a la izquierda entonces τ_0 es de tipo finito (Proposición 1.3.6.).

Como consecuencia, podemos aplicar [T2] a un anillo FTF a la izquierda para obtener que todo módulo tiene una cubierta por submódulos de planos (de hecho, su cubierta τ_0-libre de torsión) y todo módulo inyectivo tiene una cubierta plana (Teorema 1.3.7.).

El siguiente paso es, obviamente, buscar anillos FTF a la izquierda. Los resultados en este sentido están contenidos principalmente el la Capítulo II. Algunas técnicas graduadas pueden ser utilizadas para la construcción de anillos FTF (Capítulo III).

Opinamos que el concepto de anillo FTF a la izquierda tiene interés en sí mismo, aparte de la conexión con el problema de la existencia de cubiertas planas explicada anteriormente. El Capítulo II está dedicado a exponer los resultados obtenidos sobre anillos FTF y la relación de esta clase con otras clases de anillos que aparecen en la literatura.

Antes de proseguir conviene quizás observar que es posible considerar asímismo anillos FTF a la derecha, con notación $\mathcal{F}'_0$ y τ'_0. Cuando un anillo sea FTF a la izquierda y a la derecha, diremos que es FTF.

Dos de los tipos de anillos asociativos con elemento identidad más importantes, aparte de los anillos semisimples artinianos, son los anillos regulares Von Neumann y los anillos quasi-Frobenius (QF). Una cualidad común de la categoría R-Mod de los R-módulos (a la izquierda, digamos) sobre un anillo regular o

QF R es el buen comportamiento de los módulos planos. Esta afirmación encuentra apoyo en los trabajos de Colby [C] y Jain [J], en los que se propone como generalización de ambos tipos de anillo el concepto de anillo IF (a la izquierda). Concretamente, un anillo se dice IF a la izquierda si la envolvente inyectiva de cada módulo a la izquierda plano sigue siendo un módulo a la izquierda plano. Si R denota un anillo y $\mathcal{F}_0$ es la clase de los R-módulos a la izquierda que son (salvo isomorfismos) submódulos de módulos a la izquierda planos, es inmediato comprobar que R es IF a la izquierda si y sólo si R-Mod = $\mathcal{F}_0$. Observemos que esto significa que todo anillo IF a la izquierda es FTF a la izquierda. Aunque desde el punto de vista de las cubiertas por submódulos de planos estos ejemplos no tienen interés (la $\mathcal{F}_0$-cubierta de cualquier módulo es la identidad), nos proporciona una primera referencia sobre la situación del concepto de anillo FTF. Existe, por otra parte, un tipo de anillos bien conocido para los que $\mathcal{F}_0$ mantiene un comportamiento excelente. Concretamente, nos referimos a los anillos de Goldie semiprimos (y, en particular, a los dominios de integridad conmutativos). Para tales anillos, la clase $\mathcal{F}_0$ se reconoce como la clase de los R-módulos a la izquierda libres de torsión y, por tanto, estos anillos son FTF a la izquierda.

De manera que el concepto de anillo FTF a la izquierda generaliza, simultáneamente, los conceptos de anillo QF, anillo regular Von Neumann y anillo semiprimo Goldie (a ambos lados). Es por ello que un motivo central de nuestro interés en el estudio de los anillos FTF es la investigación de las similitudes entre las categorías de módulos sobre anillos IF y anillos de Goldie semiprimos. Dos ideas sustentan fundamentalmente tal interés:

De una parte, el estudio de las propiedades de clausura de la clase de los módulos planos bajo construcciones en la categoría R-Mod ha sido esencial en la estructuración y clarificación de resultados a propósito de ciertos tipos de anillos que aparecen en un lugar preferente en la moderna Teoría de Anillos. Así, los anillos coherentes a la derecha son exactamente aquellos para los cuales cualquier producto directo de módulos a la izquierda planos sigue siendo un módulo plano; y el concepto de anillo hereditario se encuentra indisolublemente unido a la propiedad de que submódulos de módulos planos sean planos. Dado que las cualidades de los módulos inyectivos reflejan a menudo propiedades de estructura del anillo, parece no carente de interés detener la atención sobre los anillos para los cuales la planitud se preserve por envolventes inyectivas. Desde luego, esto ocurre para los anillos IF a la izquierda y esta propiedad jugó un papel esencial en la obtención de resultados estructurales para los anillos IF (ver por ejemplo, [C, Theorems 1 & 2]).

De otra parte, mirando a nuestro otro modelo de anillo FTF a la izquierda, los anillos de Goldie semiprimos poseen la característica de ser subanillos, de una manera impecable, de anillos artinianos semisimples. De hecho, como es bien conocido, el concepto de anillo de Goldie semiprimo es la respuesta al problema de caracterizar los órdenes en anillos artinianos semisimples.

Estos dos parámetros guían nuestra investigación sobre los anillos FTF. Para expresarlo brevemente, un anillo para el que el concepto de submódulo de módulo plano sea válido como noción de módulo libre de torsión debe presentar propiedades estructurales interesantes y debe poseer anillos de cocientes sencillos.

Hemos encontrado algunos antecedentes históricos (aparte de los citados antes) de investigación de este tipo de propiedades. Así, Cheatham y Enochs [CE] caracterizaron los anillos para los cuales la clase de los módulos a la izquierda planos constituye una clase libre de torsión para una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod. En nuestra nomenclatura, su objeto de estudio eran los anillos FTF a la izquierda con dimensión global débil menor o igual que 1. En aquel trabajo se obtuvo, por ejemplo, que estos anillos son los anillos semihereditarios no singulares con dimensión de Goldie finita R cuyo anillo maximal de cocientes a la izquierda (que es semisimple artiniano) es plano como R-módulo a la izquierda. Posteriormente, (ver [CE] y [E3]) fue obtenido que un anillo noetheriano conmutativo R es FTF si y sólo si R_P es Gorenstein para cada primo minimal P.

De otro lado, durante las décadas de los 60 y 70 se dedicó un importante esfuerzo al estudio de los anillos QF-3, noción ésta proveniente del concepto de álgebra QF-3, que fue propuesto por Thrall [Th] como generalización de las álgebras quasi-Frobenius. Desde nuestra perspectiva es de reseñar que en [CR1, Th. 1.3 & 1.2] fueron caracterizados aquellos anillos perfectos a la izquierda para los que la envolvente inyectiva de cada módulo a la izquierda proyectivo es proyectivo. Apoyándonos en esta caracterización y resultados de Tachikawa [T1] y de Colby y Rutter [CR1] (o bien de Gómez Pardo junto con Rodríguez González [GR]), es posible demostrar que para anillos perfectos los conceptos de anillo QF-3 y FTF coinciden (Teorema 2.4.3.). De esta manera, el concepto de anillo FTF a la izquierda aparece asímismo como generalización del de álgebra QF-3.

El Capítulo II está dedicado al estudio de los anillos FTF. Comienza con una Sección dedicada a exponer las propiedades generales de los módulos τ_0-torsión y τ_0-libres de torsión (Proposiciones 2.1.5., 2.1.6., Corolario 2.1.7.) y del filtro $\mathcal{L}(\tau_0)$ (Proposiciones 2.1.5., 2.1.8.) para un anillo FTF a la izquierda.

La idea que subyace en la Sección 2.2 es la siguiente. Si R es FTF a la izqierda entonces R es τ_0-libre de torsión. De otra parte, una de las teorías de torsión más importantes que es posible considerar sobre un anillo general es la de Lambek, λ, para la cual R es también λ-libre de torsión. Nos parece interesante conocer la posible relación entre las clases $\mathcal{F}_0$ y la clase $\mathcal{F}(\lambda)$ de los módulos λ-libres de torsión. De hecho, el primer Teorema de tal sección caracteriza (Teorema 2.2.4.) aquellos anillos para los cuales $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\lambda)$ (o, en otras palabras, un módulo es submódulo de un plano si y sólo si es $E({}_RR)$-torsionless). Esta caracterización proporciona una clase de anillos FTF a la izquierda, a saber, aquellos anillos para los que $E({}_RR)$ es π-plano y λ es de tipo finito. Este resultado tiene una consecuencia inmediata: Un anillo noetheriano es FTF a la izquierda si y sólo si $E({}_RR)$ es plano (Corolario 2.2.7.). Este resultado será mejorado posteriormente en varias direcciones (ver, por ejemplo, Corolario 2.2.11. o Teorema 2.2.19.). Prosigue la Sección 2.2 con el establecimiento de los resultados necesarios para demostrar el Teorema 2.2.19., en el que se caracterizan los anillos FTF a la izquierda τ_0-artinianos. Esta caracterización permitirá relacionar el concepto de anillo FTF con diferentes generalizaciones del concepto de álgebra QF-3 en la Sección 2.4 y es fundamental en la Sección 2.5.

El Ejemplo 2.2.21. muestra un anillo FTF a la derecha con C.C.D. sobre anuladores a la derecha pero que no es τ'_0-artiniano. La Sección 2.2. concluye identificando (Teorema 2.2.24.) qué propiedad es necesaria para obtener la equivalencia entre ambas condidiones de cadena sobre un anillo FTF. Para ello, demostramos previamente una caracterización de los módulos τ-artinianos con respecto de una teoría de torsión τ que tiene interés independiente (Proposición 2.2.23.).

La Sección 2.3 está dedicada fundamentalmente a demostrar que si R es FTF a la izquierda entonces $Q_{\tau_0}(R)$ es FTF a la izquierda (Teorema 2.3.4.). A partir de este resultado se caracterizan por medio del concepto de anillo FTF aquellos anillos que tienen un anillo maximal de cocientes bilátero QF (Teorema 2.3.10).

El objetivo de la Sección 2.4 es analizar la relación entre el concepto de anillo FTF y varias de las diferentes nociones de anillo QF-3 consideradas por diferentes autores. De ellas, quizás la más extendida hasta ahora ha sido la siguiente: Un anillo se dirá QF-3 a la izquierda cuando posea un módulo a la izquierda fiel minimal (ver Sección 2.4 para la definición concreta). Como se indicó anteriormente, sobre anillos perfectos, los conceptos de anillo FTF y QF-3 coinciden (Teorema 2.4.3.). A partir de aquí, deducimos (Teorema 2.4.7.) que sobre un anillo artiniano a la izquierda coinciden las nociones de anillo QF-3 a la izquierda, QF-3 a la derecha, FTF a la izquierda y FTF a la derecha.

Otros autores han propuesto diferentes generalizaciones del concepto de álgebra QF-3, originario de Thrall [Th]. Entre ellas, las más interesantes parecen las debidas a Morita [Mo1] y a Sumioka [Su1], [Su2]. Dado que en todos los casos los autores dieron el nombre de anillos QF-3 a sus objetos de estudio, nosotros hemos introducido una nomenclatura que permite referirnos a los distintos tipos de anillo QF-3 sin producir confusión. De esta manera, llamaremos anillo Morita-QF-3 (o MQF-3) a la izquierda a aquel anillo R para el cual $E({}_RR)$ es plano. Un anillo Sumioka-QF-3 (o SQF-3) a la izquierda R es aquel para el que todo submódulo finitamente generado de $E({}_RR)$ es un módulo torsionless. Bajo este punto de vista, el resultado principal de la Sección 2.2. (Teorema 2.2.19.) puede reinterpretarse como la equivalencia de los conceptos de anillo MQF-3 a la izquierda, MQF-3 a la derecha, SQF-3 a la izquierda, SQF-3 a la derecha, FTF a la izquierda y FTF a la derecha para anillos con C.C.D. sobre ideales a la izquierda racionalmente cerrados (ver Teorema 2.4.9. y Corolario 2.4.10).

En la Sección 2.5. establecemos una caracterización de los anillos SQF-3 a la izquierda que tienen un anillo clásico de fracciones a la izquierda QF (Teorema 2.5.1.). Como consecuencia, obtenemos una caracterización de los anillos QF dentro de la clase de los anillos QF-3 (Corolario 2.5.2.).

La última parte de esta Memoria está dedicada a los anillos graduados. Investigamos algunas categorías cocientes de categorías que se construyen a partir de un anillo graduado por un grupo G y aplicamos los resultados obtenidos, entre otras cosas, a desarrollar una Teoría de Clifford divisorial.

La Teoría de Clifford es la parte de la teoría de representación de un grupo finito G que describe las propiedades de las representaciones irreducibles de G inducidas de un subgrupo normal H de G. Sea K un cuerpo y G un grupo finito cuyo orden no es divisible por la característica de K. Es bien conocido que las álgebras de grupo KG y KH son semisimples artinianas. Si ρ es una representación de H asociada a un KH-módulo simple (irreducible) L, entonces la representación inducida ρ^G de G viene asociada al KG-módulo $L^G = KG \otimes_{KH} L$, que es un KG-módulo semisimple de longitud finita. La Teoría de Clifford clásica nos da una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismos de los KG-módulos simples contenidos en L^G y las clases de Δ-módulos simples, donde $\Delta = \mathrm{End}_{KG}(L^G)$.

En 1980 E.Dade caracterizó aquellos anillos R graduados por un grupo G con elemento neutro e de manera que el funtor inducción

$R\otimes_{R_e}-$ y el funtor restricción a la componente de grado e establecen una equivalencia entre las categorías R_e-Mod y R-gr [D1, Theorem 2.8]. Como aplicación de tal teorema (que nosotros solemos llamar "el Teorema de Dade") obtuvo la teoría clásica y la teoría estable de Clifford [Cl] de una manera natural, por medio de la utilización tan sólo de funtores $\otimes$ y Hom. Como indica Dade explícitamente en [D1], la utilización del concepto general de anillo graduado por un grupo y de la categoría R-gr de todos los R-módulos a la izquierda graduados supone un cambio de punto de vista. La nueva perspectiva categórica propuesta en [D1] ha llevado a extender la teoría de Clifford estable a otros contextos, que parece muy prolijo describir aquí (ver [D2], [D3], [GN], [NT], [GT4], [NVO3]).

En [AGT] (ver también [AGT3]) introdujimos la noción de anillo τ-fuertemente graduado, donde τ es una teoría de torsión hereditaria sobre R_e-Mod y R es un anillo graduado conmutativo. Los anillos τ-fuertemente graduados eran caracterizados precisamente por la existencia de una equivalencia de categorías entre $R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}(\tau)$ y cierta categoría cociente de R-gr. En [AGT1] fue utilizada esta equivalencia para demostrar la igualdad de las dimensiones débiles relativas de un módulo graduado y de su componente de grado e. En [AGT3] nos propusimos extender la igualdad demostrada por Jategaonkar [Jt] $\kappa\text{-K-dim}(R) = 1 + \kappa\text{-K-dim}(R/I)$ para I un ideal invertible incluido en el radical de Jacobson de un anillo notheriano R, donde κ es una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod al caso de ser I un ideal κ-invertible contenido en el radical de Jacobson relativo a κ para

R κ-noetheriano. Para demostrar tal igualdad en este caso más general recurrimos al anillo de Rees generalizado construido a partir de I que, en este caso, no era fuertemente graduado. Sin embargo, propusimos un concepto de anillo τ-fuertemente graduado, donde τ es una teoría de torsión hereditaria sobre R_e-Mod de manera que el Teorema fundamental de Dade sigue siendo válido, en el sentido de que se establecía una equivalencia de categorías entre categorías cocientes de R_e-Mod y R-gr adecuadas.

Para establecer el Teorema de Dade para categorías cocientes [AGT3, Theorem 1.1] hubimos de inducir una teoría de torsión sobre R-gr a partir de τ. Tal inducción se hizo "ad hoc" con el objetivo de demostrar [AGT3, Theorem 3.6].

El Capítulo III está dedicado a profundizar y clarificar el concepto de anillo τ-fuertemente graduado, obteniendo como aplicaciones de tal estudio una caracterización de los anillos FTF graduados por un grupo localmente finito y la extensión de la Teoría de Clifford estable para un objeto simple de una categoría cociente de R_e-Mod.

En la Sección 3.1. explicamos dos maneras canónicas de inducir una teoría de torsión hereditaria sobre R-gr a partir de una teoría de torsión hereditaria τ sobre R_e-Mod. Demostraremos (Proposición 3.1.1.) que por uno de estos dos caminos se obtiene una equivalencia entre la categoría $R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}(\tau)$ y cierta categoría cociente $R\text{-gr}/\mathcal{T}(\tau^{gr})$, generalizando [N1, Theorem 3.1]. El problema en este caso es que la teoría de torsión inducida τ^{gr} no es rígida. La otra opción permite construir una teoría de torsión rígida τ^{rig} sobre R-gr, pero se pierde la equivalencia de categorías cocientes. El Teorema 3.1.4., que generaliza [D1, Theorem 2.8] y mejora [AGT3, Theorem 1.1], muestra cuándo es compatible la existencia de la equivalencia de categorías deseada con la rigidez de la teoría de torsión inducida en R-gr. Los anillos que verifican el Teorema 3.1.4. se llamarán anillos τ-fuertemente graduados. El resto de la Sección 3.1. está dedicado al estudio de los anillos τ-fuertemente graduados, especialmente con el objetivo de obtener los resultados técnicos necesarios para las otras dos secciones.

El objetivo fundamental de la Sección 3.2. es demostrar que si R es un anillo fuertemente graduado por un grupo localmente finito G entonces R es FTF a la izquierda si y sólo si R_e es FTF a la izquierda (Teorema 3.2.6.). Este resultado permite construir nuevos ejemplos de anillos FTF. Así, tomado cualquier anillo FTF a la izquierda A y G un grupo localmente finito, el anillo de grupo AG es FTF a la izquierda.

En la Sección 3.3. mostramos algunas aplicaciones del Teorema 3.2.6. Entre ellas, se obtiene una extensión (Teorema 3.3.1.) de [C, Theorem 3] para el caso de anillos fuertemente graduados. Algunas otras caracterizaciones de este tipo son demostradas.

La Sección 3.4. prepara algunas herramientas para el desarrollo posterior de la Teoría de Clifford relativa. La idea fundamental es que los resultados expuestos en [Na] para el caso de categorías de módulos admiten una versión para categorías cocientes. El teorema principal de la Sección es el Teorema 3.4.7.

La Sección 3.5. está dedicada a la extensión de la Teoría de Clifford estable expuesta en [D1] para anillos fuertemente graduados al caso de anillos τ-fuertemente graduados. El Teorema 3.5.11. generaliza [D1, Theorem 8.2.] para un objeto simple en una categoría cociente de R_e-Mod.

Es de justicia expresar mi agradecimento al profesor Dr. Blas Torrecillas Jover, de quien he aprendido más de lo reflejado en esta Memoria. Quiero también hacer mención del apoyo que he recibido del Departamento de Matemática Aplicada, al cual estoy adscrito; y los esfuerzos invertidos en mi formación como algebrista por el Departamento de Algebra. No quiero ocultar mi gratitud hacia la sociedad almeriense, andaluza y española, representadas por sus instituciones, que me permiten dedicarme libremente a la investigación pura, sin pedir a cambio en exceso.

PRELIMINARES Y NOTACION

CAPITULO 0
NOTACION Y PRELIMINARES

0.1. TEORÍAS DE TORSIÓN EN CATEGORÍAS DE GROTHENDIECK.

Sea **C** una categoría de Grothendieck. Una teoría de torsión sobre **C** es un par $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$, donde $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ son clases de objetos de **C** verificando las siguientes condiciones [S1, VI.2]

(T1) Hom(T,F) = 0 para todo T en $\mathcal{T}$ y todo F en $\mathcal{F}$.

(T2) Si Hom(C,F) = 0 para todo F en $\mathcal{F}$, entonces C está en $\mathcal{T}$.

(T3) Si Hom(T,C) = 0 para todo T en $\mathcal{T}$, entonces C está en $\mathcal{F}$.

Los objetos en $\mathcal{T}$ son llamados <u>objetos τ-torsión</u>, y la clase $\mathcal{T}$ será denotada frecuentemente por $\mathcal{T}(\tau)$. Los objetos en $\mathcal{F}$ son llamados <u>objetos τ-libres de torsión</u>, y la clase $\mathcal{F}$ será denotada usualmente por $\mathcal{F}(\tau)$. Observemos que los axiomas (T1), (T2) y (T3) entrañan que las clases $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ se determinan mutuamente mediante la condición de ortogonalidad (T1).

Existen varias maneras equivalentes de introducir el concepto de teoría de torsión sobre una categoría de Grothendieck, que recordamos seguidamente, ya que nos serán útiles a lo largo de esta memoria.

Proposición 0.1.1. *Un par $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ de clases de objetos en una categoría de Grothendieck* **C** *es una teoría de torsión sobre* **C** *si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

(1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$;

(2) si T es un objeto en $\mathcal{T}$, entonces cualquier objeto cociente de T está en $\mathcal{T}$;

(3) si F es un objeto en $\mathcal{F}$, entonces cualquier subobjeto de F está en $\mathcal{F}$;

(4) para cada objeto C de **C** *existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow C \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

con T en $\mathcal{T}$ y F en $\mathcal{F}$.

La condición (2) en la anterior proposición se menciona en forma abreviada diciendo que $\mathcal{T}$ es <u>estable bajo cocientes.</u> Análogamente, las condiciones (3) se resume mediante la expresión "$\mathcal{F}$ es estable bajo subobjetos". Tanto la clase τ-torsión $\mathcal{T}(\tau)$ como la clase τ-libre de torsión $\mathcal{F}(\tau)$ para una teoría de torsión τ sobre **C** son <u>estables bajo extensiones.</u> Esto quiere decir que dada cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow C \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

con X, Y τ-torsión (resp. τ-libres de torsión), se tiene necesariamente que C es τ-torsión (resp. τ-libre de torsión). Es más, esta condición forma parte de un juego de propiedades que caracterizan intrínsecamente cuándo una clase de objetos en **C** constituyen la clase τ-torsión (o τ-libre de torsión) para una teoría de torsión τ sobre **C**. Concretamente, se tienen los siguientes resultados [S1, VI.2.1 y VI.2.2].

Proposición 0.1.2. *Una clase de objetos $\mathcal{T}$ es la clase τ-torsión para alguna teoría de torsión τ si y sólo si $\mathcal{T}$ es estable bajo cocientes, coproductos y extensiones.*

Proposición 0.1.3. *Una clase de objetos $\mathcal{F}$ es la clase τ-libre de torsión para alguna teoría de torsión τ si y sólo si $\mathcal{F}$ es estable bajo subobjetos, productos y extensiones.*

Una teoría de torsión τ se dice hereditaria cuando $\mathcal{T}(\tau)$ es estable bajo subobjetos. Equivalentemente, τ es hereditaria cuando y sólo cuando $\mathcal{F}(\tau)$ es estable bajo envolventes inyectivas [S1, VI.3.2]. Parte de nuestro trabajo se fundamenta firmemente en el concepto de clase de objetos τ-libre de torsión para una teoría de torsión hereditaria sobre **C**. Es por ello que resaltamos la siguente definición, que nos permitirá predicar cómodamente tal propiedad de una clase de objetos.

Definición. Diremos que una clase de objetos $\mathcal{F}$ en una categoría de Grothendiek **C** es una clase libre de torsión cuando exista una teoría de torsión hereditaria τ sobre **C** de manera que $\mathcal{F}$ sea la clase de los objetos τ-libres de torsión.

Para cada objeto C existe un mayor subobjeto de C con la propiedad de ser τ-torsión. Este subobjeto de C será denotado por $\tau(C)$ y lo llamaremos *subobjeto τ-torsión de C*. Es posible demostrar [S1, Capítulo VI, §2] que la asignación $C \longmapsto \tau(C)$ define un subfuntor

$$\tau : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

del funtor identidad sobre $\mathbf{C}$ verificando las dos siguientes condiciones

(R1) $\tau(\tau(C)) = C$ para todo objeto C en $\mathbf{C}$.

(R2) $\tau(C/\tau(C)) = 0$ para todo objeto C en $\mathbf{C}$.

Estas propiedades de τ se resumen diciendo que τ es un *radical idempotente* sobre $\mathbf{C}$.

La teoría de torsión τ se puede reconstruir a partir del radical idempotente τ, ya que se tiene

(I) $\mathcal{T}(\tau) = \{ C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \mid \tau(C) = C \}$

(II) $\mathcal{F}(\tau) = \{ C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \mid \tau(C) = 0 \}$

De hecho, para cada radical idempotente τ sobre $\mathbf{C}$, las clases $\mathcal{T}(\tau)$ y $\mathcal{F}(\tau)$ construidas en (I) y (II) constituyen una teoría de torsión sobre $\mathbf{C}$. Además, esta correspondencia entre teorías de torsión y radicales idempotentes es biunívoca [S1, Proposition VI.2.3]. Esto justifica que nuestra notación confunda deliberadamente teorías de torsión y radicales idempotentes.

Por último, recordemos que una teoría de torsión τ es hereditaria si y sólo si el radical idempotente τ asociado es exacto a la izquierda, es decir, $\tau(S) = S \cap \tau(C)$ para cada objeto C y cada subobjeto suyo S [S1, Proposition VI.3.1].

Si $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión hereditaria sobre **C**, entonces $\mathcal{T}$ es una subcategoría localizante de **C**. De hecho, como toda teoría de torsión hereditaria está determinada por su clase torsión, deducimos que es enteramente equivalente considerar subcategorías localizantes y teorías de torsión sobre **C** (ver [AN] y [S1]). De esta manera, si $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión hereditaria sobre **C**, podemos definir la categoría cociente $\mathbf{C}/\mathcal{T}$, que es asímismo una categoría de Grothendieck. Denotaremos por $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}:\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}/\mathcal{T}$, $\mathbf{S}_{\mathcal{T}}:\mathbf{C}/\mathcal{T}\longrightarrow\mathbf{C}$ los funtores canónicos. Es bien conocido que $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}$ es exacto y que $\mathbf{S}_{\mathcal{T}}$ es adjunto a la derecha de $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}$, por lo que es exacto a la izquierda. Si $\phi:\mathbf{T}_{\mathcal{T}}\circ\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\longrightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{C}/\mathcal{T}}$ y $\psi:\mathrm{id}_{\mathbf{C}}\longrightarrow\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\circ\mathbf{T}_{\mathcal{T}}$ son las transformaciones naturales asociadas a la adjunción, entonces ϕ es un isomorfismo. Además, si $C \in \mathbf{C}$, entonces $\mathrm{Ker}(\psi_M)$ y $\mathrm{Coker}(\psi_M)$ son objetos τ-torsión de **C**.

Un objeto M de **C** tal que $\psi_M:M\longrightarrow\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\circ\mathbf{T}_{\mathcal{T}}(M)$ es un isomorfismo se llamará un objeto <u>τ-cerrado.</u> Los objetos τ-cerrados pueden reconocerse dentro de la categoría **C** como aquellos objetos que son τ-libres de torsión y <u>τ-inyectivos</u> en el sentido de que son inyectivos con respecto de los monomorfismos en **C** con conúcleo τ-torsión.

Dado un objeto M de **C** y un subobjeto N de M, diremos que N es <u>τ-denso en</u> M cuando M/N sea τ-torsión. Diremos que N es τ-<u>cerrado en</u> M cuando M/N sea τ-libre de torsión.

Si τ, κ son teorías de torsión hereditarias sobre **C**, diremos que τ es menor o igual que κ, lo cual indicaremos con $\tau \leq \kappa$, siempre que $\mathcal{T}(\tau) \subseteq \mathcal{T}(\kappa)$ o, equivalentemente, $\mathcal{F}(\kappa) \subseteq \mathcal{F}(\tau)$.

0.2. Teorías de torsión en categorías de módulos (graduados).

A lo largo de esta memoria, consideraremos anillos R asociativos con elemento identidad. Denotaremos por R-Mod la categoría de Grothendieck de todos los R-módulos (unitales) a la izquierda, y por Mod-R la categoría de los R-módulos a la derecha. Dado un R-módulo M, la condición de ser R-módulo a la izquierda será a veces indicada poniendo ${}_RM$, y análogo significado habrá de asignarse a la notación M_R. Por $E({}_RM)$, denotaremos una envolvente inyectiva del R-módulo a la izquierda M.

Si X es un subconjunto de R, $\ell(X)$ denotará el anulador a la izquierda de X. Análogamente, $r(X)$ denotará el anulador a la derecha de X.

Aunque no aparecerá hasta el Capítulo III, haremos uso del concepto de anillo graduado por un grupo G, y trabajaremos con teorías de torsión sobre categorías de módulos graduados. Como las particularidades estas teorías de torsión guardan un gran paralelismo con las teorías de torsión sobre R-Mod, haremos, en beneficio de la brevedad, la introducción de los conceptos graduados y no graduados simultáneamente. Para ello, seguiremos fundamentalmente las ideas de [NVO1] (ver también [D1]).

Un anillo R se dirá graduado por un grupo G cuando exista una descomposición de R como suma directa de subgrupos aditivos de R, $R = \oplus_{g\in G} R_g$ de manera que $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ para cualesquiera g, h $\in$ G. A los elementos del conjunto $\bigcup\{R_g : g\in G\}$ se les llama elementos homogéneos de R, y los elementos de R_g serán llamados elementos de grado g de R (así, R_g se denominará componente de grado g de R).

Si denotamos por e el elemento neutro del grupo G, es inmediato que el elemento unidad 1 del anillo R pertenece a la componente de grado e de R. De esta manera, es fácil ver que R_e es un subanillo de R y que R es un R_e-bimódulo.

Fijada una graduación $R = \oplus_{g\in G} R_g$ para el anillo R, podemos construir la categoría R-gr de todos los R-módulos a la izquierda graduados (por G). Un objeto de R-gr es un R-módulo a la izquierda M junto con una descomposición de M como suma directa interna de subgrupos $M = \oplus_{g\in G} M_g$ satisfaciendo que $R_g M_h \subseteq M_{gh}$ cualesquiera sean g, h $\in$ G. Diremos entonces que M es un R-módulo a la izquierda graduado. Si M y N son R-módulos a la izquierda graduados, diremos que un homomorfismo de R-módulos a la izquierda

$f:M \longrightarrow N$ es <u>graduado</u> <u>de</u> <u>grado</u> g siempre que $f(M_h) \subseteq N_{hg}$ para todo $h \in G$. El conjunto de todos los homomorfismos graduados de grado g entre M y N será denotado por $HOM_R(M,N)_g$ y es un subgrupo aditivo de $Hom_R(M,N)$. Es claro que $\{ HOM_R(M,N)_g : g \in G\}$ es una familia independiente de subgrupos de $Hom_R(M,N)$, por lo que podemos considerar el subgrupo de $Hom_R(M,N)$ dado por su suma directa $HOM_R(M,N) = \oplus_{g \in G} HOM_R(M,N)_g$, que es un grupo abeliado graduado por G. Los homomorfismos en la categoría R-gr vienen dados por $Hom_{R-gr}(M,N) = HOM_R(M,N)_e$.

Si M es un R-módulo a la izquierda graduado, podemos definir para cada $g \in G$ la <u>g-suspensión</u> de M como el R-módulo graduado $M(g)$ cuyo módulo subyacente es el mismo M pero considerando la graduación $M(g)_h = M_{hg}$ para todo $h \in G$. Con esta notación, se tiene que $HOM_R(M,N)_g = Hom_{R-gr}(M,N(g)) = Hom_{R-gr}(M(g^{-1}),N)$.

Los subobjetos en la categoría R-gr del R-módulo a la izquierda graduado (con la graduación canónica) R se llamarán <u>ideales</u> <u>a</u> <u>la</u> <u>izquierda</u> homogéneos de R. Muchos autores llaman a estos ideales, ideales a la izquierda graduados, pero nosotros preferimos el anterior nombre, puesto que un ideal a la izquierda puede admitir distintas graduaciones (de hecho, si admite una, admite al menos tantas como elementos tenga G).

Dado que la categoría R-gr es una categoría de Grothendieck, tiene sentido considerar teorías de torsión sobre R-gr. Las teorías de torsión hereditarias sobre R-gr más extensamente estudiadas y utilizadas son las rígidas, según la siguiente definición.

Definición. Una teoría de torsión hereditaria κ sobre R-gr se dirá rígida cuando un R-módulo a la izquierda graduado M es κ-torsión si y sólo si M(g) es κ-torsión para todo $g \in G$.

Las teorías de torsión hereditarias rígidas sobre R-gr están totalmente determinadas por ciertos conjuntos de ideales a la izquierda homogéneos. Cocretamente, si $\mathcal{L}(\kappa)$ denota el conjunto de los ideales a la izquierda homogéneos I de R tales que R/I es un R-módulo a la izquierda graduado κ-torsión para una teoría de torsión hereditaria rígida κ sobre R-Mod, entonces $\mathcal{L}(\kappa)$ verifica las siguientes condiciones [NV01, pág 132 y ss]:

G.1. Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\kappa)$ e I es un ideal a la izquierda homogéneo de R tal que $\mathfrak{a} \subseteq I$, entonces $I \in \mathcal{L}(\kappa)$.

G.2. Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{L}(\kappa)$, entonces $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in \mathcal{L}(\kappa)$.

G.3. Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\kappa)$ entonces $(\mathfrak{a}:x) \in \mathcal{L}(\kappa)$ para todo elemento homogéneo x de R.

G.4. Si $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\kappa)$ y $(\mathfrak{a}:x) \in \mathcal{L}(\kappa)$ para todo $x \in I$ homogéneo, entonces $I \in \mathcal{L}(\kappa)$.

La teoría de torsión hereditaria rígida κ puede reconstruirse a partir de $\mathcal{L}(\kappa)$ sin más que definir [NR, pág 816]

$$\mathcal{T}(\kappa) = \{ X \in R\text{-gr} \mid \ell(x) \in \mathcal{L}(\kappa)\ \forall\ x \in X \text{ homogéneo}\}$$

De hecho, cualquier conjunto de ideales a la izquierda homogéneos de R verificando las condiciones G.i, i = 1, 2, 3, 4; define una teoría de torsión hereditaria rígida sobre R-gr mediante el anterior procedimiento para obtener los objetos torsión. Un conjunto de ideales a la izquierda de este tipo se llama un filtro graduado (o topología de Gabriel graduada) y los hechos anteriormente expuestos pueden resumirse diciendo que existe una correspondencia biunívoca entre teorías de torsión hereditarias rígidas sobre R-gr y filtros graduados (ver [NVO] o [NR]).

Dado cualquier anillo R, podemos graduar R por el grupo trivial G = {e} poniendo $R_e = R$. En tal caso, todo R-módulo a la izquierda es graduado (tiene una única graduación posible) por lo que R-gr = R-Mod. Además, cualquier teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod es trivialmente rígida. Por tanto, las teorías de torsión hereditarias sobre R-Mod están asímismo determinadas por filtros (o topologías de Gabriel) de ideales a la izquierda (homogéneos siempre) verificando las propiedades G.i con i = 1, 2, 3, 4.

Sin embargo, cuando R esté graduado no trivialmente, podemos considerar tanto teorías de torsión hereditarias sobre R-gr como sobre R-Mod. Aunque se trata de categorías diferentes, existen algunas relaciones entre las teorías de torsión rígidas sobre R-gr y ciertas teorías de torsión sobre R-Mod, llamadas teorías de torsión graduadas. Hemos considerado conveniente presentar este análisis en el Capítulo III.

Aunque la construcción del anillo de cocientes con respecto de una teoría de torsión rígida es posible en el caso graduado, recordaremos tan sólo brevemente tal construcción en el caso no graduado, ya que sólo haremos uso de esta localización en el presente trabajo. La idea fundamental es que el objeto de cocientes $T_{\mathcal{T}}(R)$ con respecto de una teoría de torsión hereditaria τ sobre R-Mod puede ser construido a partir del filtro $\mathcal{L}(\tau)$ y tiene de manera natural estructura de anillo. El hecho básico es que la categoría cociente R-Mod/$\mathcal{T}$ es equivalente a cierta subcategoría plena de R-Mod. Recordaremos la construcción de esta última siguiendo [S1, Chapter IX]. Si M es un R-módulo a la izquierda entonces definimos $Q_\tau(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\mathcal{L}(\tau)} \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{a}, M/\tau(M))$. Es posible dotar [S1, Ch. IX, §1] a $Q_\tau(R)$ de estructura de anillo de manera que $Q_\tau(M)$ es un $Q_\tau(R)$-módulo a la izquierda. Además, existe un homomorfismo de anillos $\lambda_\tau: R \longrightarrow Q_\tau(R)$ de modo que $Q_\tau(M)$ puede ser considerado asímismo como un R-módulo a la izquierda. Esta construcción es funtorial y, en realidad, proporciona un funtor Q_τ:R-Mod$\longrightarrow Q_\tau(R)$-Mod. La subcategoría plena de $Q_\tau(R)$-Mod cuyos objetos son los $Q_\tau(R)$-módulos de la forma $Q_\tau(M)$ para algún M $\in$ R-Mod es equivalente a la categoría cociente R-Mod/$\mathcal{T}$. A su vez, esta categoría es equivalente a la subcategoría plena de R-Mod de todos los R-módulos a la izquierda τ-cerrados. En resumen, podemos considerar un diagrama funtorial

$$\begin{tikzcd} R\text{-Mod} \arrow[rr, shift left, "Q_\tau"] \arrow[dr, shift left, "T_{\mathcal{T}}"] & & Q_\tau(R)\text{-Mod} \arrow[ll, shift left, "U"] \\ & R\text{-Mod}/\mathcal{T} \arrow[ul, shift left, "S_{\mathcal{T}}"] \arrow[ur, "S'_{\mathcal{T}}"'] & \end{tikzcd}$$

donde U es el funtor restricción de escalares y $\mathbf{S}'_{\mathcal{T}}$ es un funtor fiel y pleno. Estos funtores satisfacen que $\mathbf{S}'_{\mathcal{T}}\ \mathbf{T}_{\mathcal{T}} = Q_\tau$ y que $U\ \mathbf{S}'_{\mathcal{T}} = \mathbf{S}_{\mathcal{T}}$.

Usaremos también la siguiente notación. Si N es un submódulo de un R-módulo a la izquierda M, definimos la τ-clausura de N en M como el R-submódulo $Cl^M_\tau(N)$ de M determinado por la condición $Cl^M_\tau(N)/N = \tau(M/N)$. Recordemos que si $M = E({}_RN)$ entonces $Cl^M_\tau(N)$ es τ-inyectivo y, en caso de ser además N τ-libre de torsión, $Cl^M_\tau(N) \cong Q_\tau(N)$.

La siguiente caracterización de las clases de R-módulos a la izquierda libres de torsión será de utilidad posteriormente.

Proposición 0.2.1. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de R-módulos a la izquierda estable bajo isomorfismos. $\mathcal{F}$ es una clase libre de torsión si y sólo si es estable bajo submódulos, productos directos y envolventes inyectivas.*

Demostración: [Gl, Proposition 1.10] □

Como referencias básicas utilizaremos los libros [NV01],

[S1], [Rw], [G1].

CUBIERTAS LIBRES DE TORSION
Y POR SUBMODULOS DE MODULOS PLANOS

CAPITULO I

CUBIERTAS LIBRES DE TORSION

Y CUBIERTAS POR SUBMODULOS DE PLANOS

1.1. ALGUNOS RESULTADOS GENERALES.

Denotaremos por $\mathcal{F}$ una clase de R-módulos a la izquierda cerrada bajo isomorfismos. Siguiendo [E2] definimos una $\mathcal{F}$-precubierta de un R-módulo a la izquierda M como un homomorfismo de R-módulos a la izquierda $\phi:F \longrightarrow M$, donde $F \in \mathcal{F}$, satisfaciendo la siguiente propiedad

(I) Para cualquier otro homomorfismo $f:G \longrightarrow M$ con $G \in \mathcal{F}$, existe un homomorfismo $g:G \longrightarrow F$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ F \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd}$$

conmuta.

Una $\mathcal{F}$-precubierta $\phi:F \longrightarrow M$ se dirá una una $\mathcal{F}$-cubierta si verifica

(II) Cualquier homomorfismo $f:F \longrightarrow F$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \overset{f}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ F & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

es necesariamente un isomorfismo.

Observaciones 1.1.1. (1) La $\mathcal{F}$-cubierta de un R-módulo a la izquierda M, si existe, es única salvo isomorfismos.

(2) Muchos autores suponen que las cubiertas y las precubiertas son epimorfismos. Es fácil ver que si R está en la clase $\mathcal{F}$, entonces cualquier $\mathcal{F}$-precubierta es un epimorfismo.

Si consideramos $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\tau)$, la clase de todos los R-módulos a la izquierda τ-libres de torsión para τ una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod, utilizaremos la expresión (pre)cubierta τ-libre de torsión para referirnos a una $\mathcal{F}(\tau)$-(pre)cubierta. Hemos de tener, no obstante, cierto cuidado con esta expresión puesto que el concepto de cubierta libre de torsión con respecto de una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod propuesto por M.L. Teply en [T1] difiere ligeramente de la noción anteriormente establecida.

En primer lugar, una precubierta en el sentido de Teply (ver también [GIT] y [T2]) es, por definición, un epimorfismo. Como hemos indicado en la Observación 1.1.1., si la teoría de torsión τ es fiel, es decir, si ${}_RR \in \mathcal{F}(\tau)$, entonces una $\mathcal{F}(\tau)$-precubierta en nuestro sentido ha de ser necesariamente un epimorfismo. De esta manera, para el caso de teorías de torsión fieles, ambos conceptos de precubierta libre de torsión coinciden.

Esto nos hace pensar que el concepto de precubierta τ-libre de torsión introducido en esta tesis no presenta una desviación relevante del originariamente propuesto por Teply. De hecho, en palabras de Golan y Teply [GlT, pág 240] "...in studying torsion-free covers, it is reasonable to limit ourselves to faithful torsion theories." La razón de esta afirmación es que si R posee una precubierta libre de torsión en el sentido de [T1] y [GlT], entonces la teoría de torsión ha de ser necesariamente fiel [GlT, Lemma 2.1].

En segundo lugar, la condición (II) que define en nuestro caso cuándo una $\mathcal{F}(\tau)$-precubierta es una $\mathcal{F}(\tau)$-cubierta es en aparencia distinta de la condición (*) propuesta en [T1] para las cubiertas libres de torsión. Concretamente, si $\phi:F \longrightarrow M$ es una $\mathcal{F}(\tau)$-precubierta la citada condición es la siguiente

(*) Si $K \subseteq Ker\phi$ y $F/K \in \mathcal{F}(\tau)$, entonces $K = 0$.

Realmente, no existe diferencia entre la condición (II) y la condición (*), como se deduce de la Proposición 1.1.2., ya que la clase $\mathcal{F}(\tau)$ satisface las condiciones (a) y (b) allí enunciadas. Como conclusión, nuestro concepto de cubierta τ-libre de torsión coincide plenamente con la noción originariamente propuesta en [T1] para teorías de torsión fieles.

Proposición 1.1.2. *Sea $\phi:F \longrightarrow M$ una $\mathcal{F}$-precubierta.*

(1) Si ϕ es una $\mathcal{F}$-cubierta entonces para cada $C \subseteq Ker\phi$ con $F/C \in \mathcal{F}$ se sigue que $C = 0$.

(2) Supongamos que $\mathcal{F}$ satisface las dos siguientes

condiciones:

(a) $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos

(b) Si $\{M_i: i\in I\}$ es una cadena de submódulos de un R-módulo a la izquierda M con $M_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup \{M_i: i\in I\} \in \mathcal{F}$.

Si para cada $C \in Ker\phi$ con $F/C \in \mathcal{F}$ se sigue que $C = 0$, entonces ϕ es una $\mathcal{F}$-cubierta de M.

Demostración. (1) Supongamos que $C \subseteq \mathrm{Ker} f$ es tal que $F/C \in \mathcal{F}$. Si denotamos por $\pi:F\longrightarrow F/C$ la proyección canónica, entonces ϕ se factoriza a través de π, esto es, existe $\psi:F/C\longrightarrow M$ de manera que $\psi\circ\pi = \phi$. Dado que $F/C \in \mathcal{F}$, existe $g:F/C\longrightarrow F$ verificando $\phi\circ g = \psi$. De esta manera, $\phi\circ g\circ\pi = \psi\circ\pi = \phi$, lo que implica, ya que ϕ es una cubierta, que $g\circ\pi$ es un isomorfismo. De esta manera, π es un monomorfismo, lo cual no es posible salvo que $C = 0$.

(2) Supongamos que $\mathcal{F}$ satisface las condiciones (a) y (b) y que $\phi:F\longrightarrow M$ tiene la propiedad

(P) Para cada $C \subseteq \mathrm{Ker}\phi$ con $F/C \in \mathcal{F}$, entonces $C = 0$.

Para probar que $\phi:F \longrightarrow M$ es una $\mathcal{F}$-cubierta, usaremos un argumento similar al expuesto en [To1, Proposition 2.4] y [E1, Theorem 2]. Primero, observemos que todas las $\mathcal{F}$-precubiertas de un módulo fijo que poseen la propiedad (P) tienen la misma cardinalidad. De hecho, usando (P) podemos asegurar la existencia de un R-monomorfismo desde una $\mathcal{F}$-precubierta de un R-módulo M que tenga la propiedad (P) a cualquier otra $\mathcal{F}$-precubierta de M.

Sea X un conjunto que contenga los elementos de F tal que $\mathrm{Card}(X) > \mathrm{Card}(F)$. Sea Γ el conjunto de los pares (F_0,ϕ_0) donde F_0

es un R-módulo cuyos elementos están en X y ϕ_0 es un R-homomorfismo desde F_0 hasta M que es una $\mathcal{F}$-precubierta de M con la propiedad (P). Ordenamos parcialmente Γ haciendo que $(F_0,\phi_0) \leq (F_1,\phi_1)$ si y sólo si F_0 es un R-submódulo de F_1 y $\phi_0 = \phi_{1|F_0}$. Este conjunto es no vacío, ya que $(F,\phi) \in \Gamma$. Sea $C = \{ (F_i,\phi_i) \}$ una cadena en Γ. Consideremos (F^*,ϕ^*), donde $F^* = \bigcup F_i$ y $\phi^*: F^* \longrightarrow M$ es el único homomorfismo tal que $\phi^*_{|F_i} = \phi_i$ para todo índice i. Claramente ϕ^* satisface la propiedad de factorización y, por hipótesis, $F^* = \bigcup F_i$ está en la clase $\mathcal{F}$. Así, $\phi^*:F^* \longrightarrow M$ es una $\mathcal{F}$-precubierta de M. Vamos a probar que satisface la propiedad (P). Sea N un R-módulo contenido en Ker ϕ^* tal que $F^*/N \in \mathcal{F}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo para cada índice i:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_i \cap N & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & F_i/(F_i \cap N) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & F^* & \longrightarrow & F^*/N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Dado que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, $F_i/(F_i \cap N) \in \mathcal{F}$. Pero $F_i \cap N \subseteq$ Ker ϕ_i y ϕ_i es una $\mathcal{F}$-precubierta de M con la propiedad (P). De esta manera, $F_i \cap N = 0$. Esto es válido para cada índice i, por lo que tenemos que $(F^*,\phi^*) \in \Gamma$. Así (F^*,ϕ^*) es una cota superior de C y podemos aplicar el Lema de Zorn para obtener la existencia de un elemento maximal de Γ. Denotemos esta $\mathcal{F}$-precubierta por (F^*,ϕ^*).

Usando el mismo argumento de [E1, Theorem 2] podemos probar que para cualquier $(F',\phi') \in \Gamma$ y cualquier R-homomorfismo $f:F^* \longrightarrow F'$ tal que $\phi' f = \phi^*$ se sigue que f es un isomorfismo. Tomando $(F',\phi') = (F^*,\phi^*)$ aseguramos que ϕ^* es una $\mathcal{F}$-cubierta de M y tomando $(F',\phi') = (F,\phi)$ tenemos que F es isomorfo a F' a través de un isomorfismo f tal que $\phi f = \phi^*$. De esta manera (F,ϕ) es una $\mathcal{F}$-cubierta de M. □

Proposición 1.1.3. *Una $\mathcal{F}$-precubierta de un R-módulo M, $\phi:F \longrightarrow M$, es una $\mathcal{F}$-cubierta si y sólo si para cualquier otra $\mathcal{F}$-precubierta de M, $\psi:G \longrightarrow M$, y cualquier homomorfismo $f:F \longrightarrow G$ satisfaciendo que $\psi f = \phi$ se sigue que f es mono y que $G = \mathrm{Im}\, f \oplus C$, donde $C \subseteq \mathrm{Ker}\, \psi$.*

Demostración. Supongamos que ϕ es una $\mathcal{F}$-cubierta, $\psi:G \longrightarrow M$ una $\mathcal{F}$-precubieta y $f:F \longrightarrow G$ un homomorfismo satisfaciendo $\psi f = \phi$. Entonces existe $g:G \longrightarrow F$ tal que $\phi g = \psi$. Así, $\phi = \psi f = \phi(gf)$. De modo que gf es un isomorfismo. Tomando $C = \mathrm{Ker}\, g$, se tiene que $G = \mathrm{Im}\, f \oplus C$ y $C \subseteq \mathrm{Ker}\, \psi$.

Recíprocamente, si $f:F \longrightarrow F$ satisface $\phi f = \phi$ entonces por hipótesis $F = \mathrm{Im}\, f \oplus C$, donde $C \subseteq \mathrm{Ker}\, \phi$ y f es un monomorfismo. Ahora, llamando g a la composición $F \longrightarrow F/C \cong \mathrm{Im} f \subseteq F$, g verifica $\psi g = \psi$, con lo que g ha de ser mono y $C = 0$. □

1.2. La construcción de Banaschewski y las cubiertas libres de torsión.

Sea X un R-bimódulo y $\rho:R \longrightarrow X$ un homomorfismo de R-bimódulos. Supongamos que el homomorfismo canónico $\rho^*:\mathrm{Hom}_R(X_R,X_R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,X_R)$ es sobreyectivo. Siguiendo la terminología de Knigth [K], diremos que $\rho:R \longrightarrow X$ es un R-<u>preanillo</u>. Por ejemplo, cualquier homomorfismo de anillos $\rho:R\longrightarrow S$ es un R-preanillo. En efecto, considerando la estructura de R-bimódulo sobre S inducida por el homomorfismo de anillos $\rho:R\longrightarrow S$, dado un R-homomorfismo $f:R_R\longrightarrow S_R$ definimos el R-homomorfimso $\mu_{f(1)}:S_R\longrightarrow S_R$ dado por $\mu_{f(1)}(s) = f(1)s$, para cada $s \in S$. Es rutinario comprobar que $\mu_{f(1)}\circ\rho = f$, con lo que ρ^* es sobreyectiva.

La justificación de la utilización de R-preanillos más generales que los homomorfismos de anillos puede encontrarse en la demostración del Corolario 1.3.4. en donde se usa la envolvente inyectiva de R como R-preanillo para R un anillo conmutativo para extender un resultado de Enochs.

Para cada R-módulo a la izquierda M denotaremos por $\theta_M:M\longrightarrow X\otimes_R M$ el homomorfismo canónico de R-módulos a la izquierda definido por $\theta_M(m) = \rho(1) \otimes m$, para cada $m \in M$. Sea $\mathcal{F}(\rho)$ la clase de los R-módulos a la izquierda para los cuales θ_M es una aplicación inyectiva.

Lema 1.2.1. *$\mathcal{F}(\rho)$ es cerrada bajo isomorfismos, submódulos, límites directos y productos directos.*

Demostración: Es evidente que $\mathcal{F}(\rho)$ es cerrada bajo isomorfismos.

Supongamos que $M \in \mathcal{F}(\rho)$ y N es un submódulo de M. Consideremos el diagrama conmutativo de aplicaciones

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\theta_N"] \arrow[d, "\iota"] & X\otimes_R N \arrow[d, "X\otimes\iota"] \\ M \arrow[r, "\theta_M"] & X\otimes_R M \end{tikzcd}$$

donde ι es la inclusión $N \leq M$. Es claro que $\theta_M \circ \iota = (X\otimes\iota)\circ\theta_N$ es un monomorfismo por serlo θ_M e ι. Como consecuencia, θ_N es un monomorfismo, lo que significa que $N \in \mathcal{F}(\rho)$.

Consideremos ahora $M = \varinjlim M_i$, donde cada $M_i \in \mathcal{F}(\rho)$. Dado que el funtor $X\otimes_R -$ conmuta con límites directos, se tiene un diagrama conmutativo de morfismos de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, equal] & X\otimes_R M \\ M \arrow[r, "\varinjlim \theta_{M_i}"] & \varinjlim X\otimes_R M_i \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

donde ι es un isomorfismo. Como cada θ_{M_i} es un monomorfismo, $\varinjlim \theta_{M_i}$ es un monomorfismo, de donde se sigue que θ_M es mono. Así, $M \in \mathcal{F}(\rho)$.

Consideremos por último una familia $\{M_i : i\in I\}$ de R-módulos con $M_i \in \mathcal{F}(\rho)$ para todo $i \in I$ y denotemos por $\prod M_i$ al producto directo de los módulos de la familia $\{M_i : i\in I\}$. De nuevo tenemos un diagrama conmutativo de morfismos de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} \prod M_i \arrow[r, "\prod \theta_{M_i}"] \arrow[d, equal] & \prod (X\otimes_R M_i) \\ \prod M_i \arrow[r, "\theta_{\pi M_i}"] & X\otimes_R \prod M_i \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

donde ι es el homomorfismo canónicamente definido. Como cada θ_{M_i} es un monomorfismo se sigue inmediatamente que lo es $\prod \theta_{M_i}$, lo que implica que $\theta_{\pi M_i}$ es un monomorfismo. De esta forma obtenemos que $\prod M_i \in \mathcal{F}(\rho)$. □

Cuando $\rho:R \longrightarrow S$ es un homomorfismo de anillos, $\mathcal{F}(\rho)$ resulta ser exactamente la clase de aquellos R-módulos a la izquierda que son isomorfos a un R-submódulo de un S-módulo a la izquierda. En efecto, dado que $S\otimes_R M$ es un S-módulo a la izquierda, es claro que si θ_M es un monomorfismo, entonces $M \in \mathcal{F}(\rho)$. Recíprocamente, supongamos que existe un monomorfismo de R-módulos $f:M \longrightarrow X$, donde X es un S-módulo a la izquierda. Construimos en tal caso el diagrama conmutativo de R-homomorfismos

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta_M} & S\otimes_R M \\ \Big\downarrow f & & \Big\downarrow 1_S\otimes f \\ X & \xrightarrow{\theta_X} & S\otimes_R X \end{array}$$

Observemos que la aplicación

$$\pi_X : S\otimes_R X \longrightarrow X$$

definida sobre generadores por

$$\pi_X(s\otimes x) = sx, \text{ para todo } s \in S,\ x \in X$$

es S-lineal. En particular, es un homomorfismo de R-módulos a la izquierda y es evidente que $\pi_X \circ \theta_X = Id_X$. Por tanto, θ_X es un monomorfismo de R-módulos, lo que entraña, en vista del diagrama de homomorfismos anterior, que θ_M es un monomorfismo de R-módulos. Las cubiertas relativas a la clase de los R-submódulos de S-módulos a la izquierda fueron investigadas por Banaschewski para ρ un monomorfismo de anillos [B] y más recientemente han sido objeto de un trabajo de Matlis [M2]. La existencia de estas cubiertas probada en aquel artículo puede ser fácilmente generalizada para un R-preanillo, como veremos seguidamente.

Usaremos el término <u>ρ-(pre)cubierta</u> para denotar una $\mathcal{F}(\rho)$-(pre)cubierta.

Lema 1.2.2. *Sea M un R-módulo a la izquierda y $e_M : Hom_R(X,M) \longrightarrow M$ el R-homomomorfismo de evaluación definido por $e_M(f) = f(\rho(1))$. Entonces:*

(i) $Hom_R(X,M) \in \mathcal{F}(\rho)$

(ii) e_M es una ρ-precubierta de M si y solo si para cada $A \in \mathcal{F}(\rho)$ la aplicación $(\theta_A)^*:Hom_R(X\otimes_R A,M) \longrightarrow Hom_R(A,M)$ es sobreyectiva.

Demostración: (i) Consideremos el diagrama conmutativo deR-homomorfismos canónicos

$$\begin{tikzcd}
Hom_R({}_RX,M) \arrow[r, "\theta_H"] \arrow[dr] & X\otimes_R Hom_R({}_RX,M) \arrow[r] & Hom_R(Hom_R(X_R,X_R),M)) \\
& Hom_R(Hom_R(R,X_R),M) \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

donde H =$Hom_R({}_RX,M)$. El homomorfismo punteado es un monomorfismo porque ρ^* es un epimorfismo. Además, la flecha $Hom_R({}_RX,M) \longrightarrow Hom_R(Hom_R(R,X_R)$ es un isomorfismo ya que viene inducida por el isomorfismo $Hom_R(R,X_R) \cong {}_RX$. De este modo, θ_H es un monomorfismo, y $H = Hom_R({}_RX,M) \in \mathcal{F}(\rho)$.

(ii) Esto es inmediato después de observar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(A,Hom_R(X,M)) \arrow[r, "(e_M)^*"] \arrow[d] & Hom_R(A,M) \arrow[d] \\
Hom_R(X\otimes_R A, M) \arrow[r, "(\theta A)^*_A"] & Hom_R(A,M)
\end{tikzcd}$$

□

Teorema 1.2.3. *Sea ρ un preanillo. Para cada R-módulo a la izquierda M existe una ρ-cubierta de M.*

Demostración: Usando el Lema 1.2.2. tenemos que

$$e_{E(M)}:\mathrm{Hom}_R(X,E(M)) \longrightarrow E(M)$$

es una ρ-precubierta de E(M).

Tomamos

$$F = \{f \in \mathrm{Hom}_R(X,E(M)) \mid f(1) \in M\},$$

entonces es fácil ver que

$$e_{E(M)}|_F:F \longrightarrow M$$

es una ρ-precubierta. Las proposiciones 1.1.3. y [E2, Proposition 2.2] y el Lema 1.2.1. garantizan que M tiene una ρ-cubierta que es un sumando directo de F. □

Sea τ una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod. Las cubiertas τ-libres de torsión han sido estudiadas por varios autores. (ver, por ejemplo, [E1], [B], [T1] and [GIT]). La clase de los módulos τ-libres de torsión está siempre contenida en $\mathcal{F}(\lambda_\tau)$, donde $\lambda_\tau:R \longrightarrow Q_\tau(R)$ es el homomorfismo canónico de anillos desde R hasta su localización según τ, $Q_\tau(R)$. Podemos esperar algunas relaciones entre los conceptos de λ_τ-cubierta y cubierta τ-libre de torsión. Así por ejemplo, cuando τ es perfecta, ambos conceptos coinciden ya que $\mathcal{F}(\lambda_\tau) = \mathcal{F}(\tau) = \{$módulos τ-libres de torsión$\}$. Este hecho fue esencialmente observado por Banaschewski para teorías de torsión fieles en [B]. Nosotros hemos investigado en qué casos las cubiertas τ-libres de torsión son λ_τ-cubiertas.

Una consecuencia del Lema 1.2.2. es que si M es τ-inyectivo entonces e_M: $Hom_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una λ_τ-precubierta. El siguiente resultado fue parcialmente demostrado en [GIT, Prop.3.1] para τ una teoría de torsión fiel.

Llamaremos cubierta fielmente τ-inyectiva a una cubierta con respecto de la clase de los R-módulos τ-cerrados (es decir, τ-inyectivos y τ-libres de torsión).

Proposición 1.2.4. *Sea M un R-módulo a la izquierda τ-inyectivo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) e_M:$Hom_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una cubierta τ-libre de torsión.

(ii) Existe una cubierta τ-libre de torsión de M que es una λ_τ-cubierta de M.

(iii) El homomorfismo e_M:$Hom_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ se factoriza a través de un R-módulo a la izquierda τ-libre de torsión.

(iv) $Hom_R(Q_\tau(R),M)$ es τ-libre de torsión.

(v) e_M:$Hom_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una cubierta fielmente τ-inyectiva.

Demostración: Primeramente probaremos la siguiente

Afirmación : Si X es un $Q_\tau(R)$-módulo y K es un R-submódulo τ-cerrado de X entonces K es un $Q_\tau(R)$-submódulo de X. Para probar esta afirmación, tomemos $x = \sum q_i k_i \in Q_\tau(R)K$. Entonces $I = \bigcap$

$(\lambda_\tau(R):q_1) \in \mathcal{L}_\tau$. Es claro que $Ix \subseteq K$. Ya que K es supuesto τ-cerrado en X se sigue que $x \in K$. Esto concluye la prueba de la afirmación.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por el Teorema 1.2.3. podemos encontrar una λ_τ-cubierta de M, $\phi: X \longrightarrow M$. Dado que $e_M: \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una λ_τ-precubierta de M, existe un homomorfismo $f: X \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ tal que $e_M f = \phi$. Entonces, por la Proposición 1.1.3., $\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) = \mathrm{Im}\, f \oplus C$, $X \cong \mathrm{Im} f$ y $C \subseteq \mathrm{Ker}\, e_M$. Resulta que C es τ-cerrado en $\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ y, dado que $e_M: \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una cubierta τ-libre de torsión, deducimos que $C = 0$. Así, $e_M: \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una λ_τ-cubierta de M.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $\phi: F \longrightarrow M$ una cubierta τ-libre de torsión de M que es una λ_τ-cubierta. Como $e_M: \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una λ_τ-precubierta de M, encontramos un homomorfismo $f: F \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ tal que $e_M f = \phi$. Por la Proposición 1.1.3. $\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) = \mathrm{Im} f \oplus C$, $C \subseteq \mathrm{Ker} e_M$ y $F \cong \mathrm{Im}\, f$. En esta situación no es difícil ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \arrow[d, "e_M"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
M & \mathrm{Im} f \arrow[l, "e_M|_{\mathrm{Im} f}"]
\end{tikzcd}$$

donde π es la proyección canónica. Esta es la factorización deseada.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supongamos que F' es un R-módulo τ-libre de torsión tal que existe un diagrama conmutativo como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \arrow[d, "e_M"'] \arrow[dr, dashed, "\phi"] & \\
M & F' \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

Por la afirmación antes probada, Kerϕ es un $Q_\tau(R)$-submódulo de $\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$. Consideremos f en Ker$\phi$ y q en $Q_\tau(R)$. Entonces $f(q) = (q.f)(1) = e_M(q.f) = \psi\phi(q.f) = 0$ ya que $q.f \in \mathrm{Ker}\phi$. De esta manera, Kerϕ = 0 y así $\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ es un R-módulo τ-libre de torsión.

(iv)⇒(i) La hipótesis asegura que e_M es una precubierta τ-libre de torsión. Además, si K es cualquier submódulo τ-cerrado de $\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ contenido en Ker(e_M) la afirmación da otra vez que K = 0 (ver [GIT, Proposition 3.1]). Podemos concluir de esto que e_M es una cubierta τ-libre de torsión de M.

(i)⇔(v) Esto se prueba como en [Tol, Proposition 2.13]. □

Teorema 1.2.5. *Para cualquier anillo R y cualquier teoría de torsión τ sobre R-Mod las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) τ es perfecta.

(ii) Cualquier R-módulo a la izquierda inyectivo (τ-inyectivo) tiene una cubierta τ-libre de torsión que es una λ_τ-cubierta.

(iii) Para cualquier R-módulo a la izquierda inyectivo (τ-inyectivo) M, e_M:$\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ es una cubierta τ-libre de torsión.

(iv) Para cualquier R-módulo a la izquierda inyectivo (τ-inyectivo) M, $Hom_R(Q_\tau(R),M)$ es τ-libre de torsión.

(v) Para cualquier R-módulo a la izquierda inyectivo (τ-inyectivo) M, $e_M:Hom_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow M$ se factoriza a través de un R-módulo τ-libre de torsión.

(vi) Cualquier R-módulo a la izquierda posee una cubierta τ-libre de torsión que es una λ_τ-cubierta.

Demostración: Por la Proposición 1.2.4., se sigue que (ii), (iii), (iv) y (v) son equivalentes.

(vi) $\Rightarrow$ (ii) Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea X un $Q_\tau(R)$-módulo. Es claro que la identidad 1_X es una λ_τ-cubierta. Por hipótesis existe una cubierta τ-libre de torsión de E(X), $\phi:F \longrightarrow E(X)$ que es una λ_τ-cubierta. Entonces $\phi|_{\phi^{-1}(X)}:\phi^{-1}(X) \longrightarrow X$ es una λ_τ-precubierta de X. Por la Proposición 1.1.3. tenemos que X es isomorfo a un submódulo de F. De esta manera X es τ-libre de torsión con lo que τ es perfecta.

(i) $\Rightarrow$ (vi) Cuando τ es perfecta, la clase $\mathcal{F}(\lambda_\tau)$ coincide con la clase de los R-módulos τ-libres de torsión. El resultado se sigue ahora aplicando el Teorema 1.2.3. □

Los anteriores resultados sugieren una pregunta: ¿Cuándo es una cubierta τ-libre de torsión una λ_τ-cubierta? El siguiente resultado proporciona una condición suficiente. Para ello necesitamos un concepto introducido por Lambek, ver [L1]. Diremos que una teoría de torsión hereditaria τ sobre R-Mod es "nice" si satisface que para cualquier R-submódulo τ-cerrado X de $Q_\tau(R)$, el R-módulo cociente $Q_\tau(R)/X$ es τ-inyectivo. Recordemos que τ se dice <u>exacta</u> cuando el funtor Q_τ:R-Mod$\longrightarrow Q_\tau(R)$-Mod es exacto. Claramente cualquier teoría de torsión exacta es nice. Al final de esta Sección mostraremos un ejemplo de teoría de torsión nice que no es exacta.

Proposición 1.2.6. *Sea τ una teoría de torsión nice. Entonces, si M es un módulo τ-inyectivo, cualquier cubierta τ-libre de torsión de M es una λ_τ-cubierta de M.*

Demostración: Sea ϕ:F $\longrightarrow$ M una cubierta τ-libre de torsión. Para cada f $\in \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ existe un R-homomorfismo $g:Q_\tau(R) \longrightarrow F$ tal que ϕg = f. Afirmamos que g es único con esta propiedad. Sea g' otro levantamiento de f, es decir, $\phi g'$ = f. Entonces $\phi(g-g') = 0$. Así, Im(g-g') $\subseteq$ Ker ϕ. Como τ es nice, se sigue que Im(g-g') es τ-inyectivo. Así, F/Im(g-g') es τ-libre de torsión. Entonces Im(g-g') = 0 y g = g'.

Definimos $\psi:\mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M) \longrightarrow F$ por $\psi(f)=g(1)$, donde f $\in \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ y g $\in \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),F)$ es tal que ϕg = f. Comprobemos que ψ es un homomorfismo de R-módulos a la izquierda. Si r $\in$ R, f $\in \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),M)$ y g $\in \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),F)$ es tal que ϕg = f, entonces rg $\in \mathrm{Hom}_R(Q_\tau(R),F)$ verifica que $\phi\circ(rg) = r(\phi g) = rf$. Por tanto, $\psi(rf) = (rg)(1) = g(r) = rg(1) = r\psi(f)$, con lo que ψ es R-lineal. Un argumento similar prueba que ψ es aditiva.

Comprobemos asímismo que $\phi\psi=e_M$. En efecto, dado f $\in$

$Hom_R(Q_\tau(R),M)$, sea $g \in Hom_R(Q_\tau(R),F)$ tal que $\phi g = f$. Entonces $\phi\psi(f) = \phi(g(1)) = (\phi g)(1) = f(1) = e_M(f)$.

Se sigue de la Proposición 1.2.4. que ϕ: $F \longrightarrow M$ es una λ_τ-cubierta de M. □

Corolario 1.2.7. *Si τ es exacta entonces cualquier cubierta τ-libre de torsión de un módulo τ-inyectivo M es una λ_τ-cubierta de M.* □

Recordemos que τ es de <u>tipo finito</u> cuando el filtro $\mathcal{L}(\tau)$ de los ideales a la izquierda τ-densos en R contiene un conjunto cofinal de ideales a la izquierda finitamente generados.

Teorema 1.2.8. *Sea τ una teoría de torsión hereditaria y fiel. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) τ es perfecta.

(ii) τ es exacta y de tipo finito.

(iii) τ es nice y de tipo finito.

(iv) Cualquier módulo tiene una cubierta τ-libre de torsión y τ es nice.

Demostración: (i)⇔(ii) Ver [GIT, Theorem 3.13].

(ii) ⇒ (iii) Obvio.

(iii) ⇒ (iv) Si τ es de tipo finito entonces, por [T2], existe una cubierta τ-libre de torsión de cada módulo.

(iv) ⇒ (i) Aplíquense el Teorema 1.2.5. y la Proposición 1.2.6. □

Seguidamente mostramos por medio de un ejemplo que no toda teoría de torsión nice es exacta.

Ejemplo 1.2.9. Consideremos $R = \begin{pmatrix} D & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ y $L = \begin{pmatrix} D & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde D es un dominio de valoración maximal y Q es su cuerpo de fracciones. Entonces $\mathcal{L}_\tau = \{L, R\}$ es un filtro idempotente para una teoría de torsión hereditaria fiel τ sobre R-Mod.

Usando [Go, Theorem 4.3] se sigue que si τ es exacta, entonces L es proyectivo como R-módulo a la izquierda. Si L es proyectivo como R-módulo a la izquierda, entonces $P = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es proyectivo como R-módulo a la izquierda, por ser R-sumando directo de L. Si llamamos $I = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, resulta que P es un R/I-módulo a la izquierda. Además, $R/I \otimes_R P \cong {}_{R/I}P$ es un R/I-módulo proyectivo. Ahora bien, $R/I \cong D$ como anillos y, bajo este isomorfismo, ${}_{R/I}P \cong {}_DQ$. De esta forma, Q es proyectivo como D-módulo, lo cual no es posible salvo que $D = Q$.

De esta manera, si suponemos que D no es un cuerpo, podemos asegurar que τ no es una teoría de torsión exacta sobre R-Mod. Nuestro objetivo es probar que τ es nice, para lo cual comenzaremos calculando los R-submódulos τ-cerrados de $Q_\tau(R)$.

Es bien conocido que

$$E({}_RR) = \begin{pmatrix} Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}$$

y que

$$Q_\tau(R) = \{ x \in E({}_RR) \mid Lx \subseteq R \}$$

Un fácil cálculo proporciona que $Q_\tau(R) = R$. Es rutinario también comprobar que un ideal a la izquierda E de R es τ-cerrado en R si y sólo si es de alguno de los siguientes dos tipos:

(1) $E = \begin{pmatrix} \alpha & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, donde α es un ideal de D.

(2) $E = \begin{pmatrix} & P & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, donde P es un D-submódulo de D⊕Q.

Vamos a probar que R/E es, en ambos casos, τ-inyectivo.

Caso (1):

Sea $f: L \longrightarrow R/E$ cualquier R-homomorfismo. Si $\alpha = 0$, entonces E es un sumando directo de R y, en particular, es τ-cerrado en R. En caso contrario, tómese un elemento a no nulo en α. Entonces, dado $q \in Q$,

$$f\begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & q/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 & q/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

Definimos $\bar{f}: R \longrightarrow R/E$ por

$$\bar{f}\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando (*) es rutinario comprobar que $\bar{f}$ es R-lineal. Además, es claro que $\bar{f}$ extiende a f.

Caso (2):

Dado $\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & r \end{pmatrix} \in R$, representaremos a su clase en R/E mediante la notación $\begin{bmatrix} d & q \\ 0 & r \end{bmatrix}$. Sea $\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L$ y escribamos

$$f\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \qquad (**)$$

En tal caso,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Lo que significa forzosamente que $z = 0$. Definimos ahora

$$f_*: D\oplus Q \longrightarrow (D\oplus Q)/P$$

por $f_*(d,q) = (x,y)+P$, donde (x,y) están definidos por (**). Es claro que f es una aplicación bien definida y que es D-lineal.

Como D es un dominio de valoración maximal se tiene, por [M1, Theorem 51] que $\mathrm{Ext}_D^1(D\oplus Q,P) = 0$. Esto implica que existe $f^*:Q \longrightarrow D\oplus Q$ tal que $f_*(0,q) = f^*(q)+P$. Dado que $\mathrm{Hom}_D(Q,D) = 0$, tenemos que existe $\beta \in Q$ tal que $f^*(q) = (0,\beta q)$, para todo $q \in Q$. De esta forma, $f_*(0,q) = (0, \beta q)+P$, para todo $q \in Q$. Definimos

$$\bar{f}:R \longrightarrow R/E$$

por

$$\bar{f}\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta r \end{bmatrix}$$

Comprobemos que $\bar{f}$ es R-lineal. En efecto, de una parte

$$\bar{f}\left(\begin{pmatrix} c & p \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & r \end{pmatrix}\right) = \bar{f}\begin{pmatrix} cd & cq+pr \\ 0 & sr \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} cd & cq \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & pr \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta sr \end{bmatrix} = f\begin{pmatrix} cd & cq \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} f^*(pr) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta sr \end{bmatrix} =$$
$$f\begin{pmatrix} cd & cq \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta pr \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta sr \end{bmatrix} = f\begin{pmatrix} cd & cq \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta pr \\ 0 & \beta sr \end{bmatrix},$$

y, de otro lado,

$$\begin{pmatrix} c & p \\ 0 & s \end{pmatrix}\bar{f}\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & p \\ 0 & s \end{pmatrix}\left\{f\begin{pmatrix} d & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta r \end{bmatrix}\right\} =$$
$$f\begin{pmatrix} cd & cq \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta pr \\ 0 & \beta sr \end{bmatrix}.$$

Además, es evidente que $\bar{f}$ extiende a f. □

1.3. Submódulos de módulos planos.

Para un dominio de integridad conmutativo, la clase de los submódulos de módulos planos es exactamente la clase de los módulos libres de torsión. En este caso, la existencia de cubiertas libres de torsión fue probada por Enochs [E1] quien propuso en [E2] considerar la clase de los submódulos de módulos planos como una generalización natural de la clase de los módulos libres de torsión para el estudio de la existencia de cubiertas en anillos generales (ver también [M2]). En esta sección daremos algunas condiciones suficientes para la existencia de cubiertas por submódulos de módulos planos, entre ellas la condición de ser la clase de los submódulos de módulos planos realmente una clase libre de torsión (ver Teorema 1.3.g.).

Sea R un anillo asociativo con elemento identidad. Dados dos R-módulos a la izquierda N y M, diremos que N se encaja en M cuando exista un monomorfismo de R-módulos $f:N \rightarrowtail M$, es decir, existe un submódulo de M isomorfo a N. Denotaremos por $\mathcal{F}_0^R$ (o por $\mathcal{F}_0$, si no existe riesgo de confusión) la clase de aquellos R-módulos a la izquierda que se encajan en algún R-módulo a la izquierda plano. Es decir, ${}_RM \in \mathcal{F}_0^R$ si y sólo si existe un R-módulo a la izquierda plano ${}_RP$ y un monomorfismo $f:M \rightarrowtail P$. Usualmente, $\mathcal{F}_0^R$ será nombrada como la clase de los submódulos de R-módulos a la izquierda planos o, más brevemente, la clase de los submódulos de módulos planos. Por definición, $\mathcal{F}_0^R$ es estable por submódulos. A lo largo de esta sección, $\mathcal{F}_0^R$ será denotada por $\mathcal{F}_0$ y utilizaremos la notación $\mathcal{F}'_0$ para designar la clase de los R-módulos a la derecha que se encajan en R-módulos a la derecha planos.

Si ρ: R $\longrightarrow$ X es un R-preanillo, con ρ inyectiva, es fácil probar que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(\rho)$. En efecto, dado $M \in \mathcal{F}_0$, existe un

R-monomorfismo $f:M \longrightarrow P$, para algún R-módulo a la izquierda plano P. Podemos construir el siguiente diagrama conmutativo de R-homomorfismos

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_M"] & P \arrow[d, "\theta_P"] \\ X\otimes_R M \arrow[r, "X\otimes f"] & X\otimes_R P \end{tikzcd}$$

Como P es plano, tenemos que θ_P es un monomorfismo, por lo que $(X\otimes f)\circ\theta_M = \theta_P\circ f$ es inyectivo. De aquí deducimos inmediatamente que θ_M es un monomorfismo, esto es, $M \in \mathcal{F}(\rho)$. Esta inclusión puede ser utilizada para demostrar la existencia de cubiertas por submódulos de módulos planos a partir de la existencia de ρ-cubiertas en algunos casos. Matlis [M2, Proposition 6.11] ensayó este método en el caso conmutativo para obtener $\mathcal{F}_0$-cubiertas para módulos sobre ciertos anillos conmutativos. De otra parte, Enochs [E2] probó que sobre un anillo conmutativo noetheriano todo módulo posee una cubierta por submódulos de módulos planos. Usando la idea anteriormente apuntada, vamos a generalizar ambos resultados. Para ello, recordemos que un R-módulo a la derecha M se dice <u>FP-inyectivo</u> cuando $\mathrm{Ext}^1_R(P,M) = 0$ para cualquier R-módulo a la derecha finitamente presentado P. Recordemos asímismo que M_R se dice χ_0-inyectivo si satisface el criterio de Baer para ideales a la derecha finitamente generados. Para un anillo coherente a la derecha, M_R es FP-inyectivo si y sólo si M_R es χ_0-inyectivo [S2, Lemma 3.1].

Lema 1.3.1. *Sea R un anillo coherente a la derecha y $\rho:R \longrightarrow X$ un*

R-preanillo inyectivo. $\mathrm{Hom}_R({}_RX, E)$ es plano para cada R-módulo a la izquierda inyectivo E si y sólo si X es FP-inyectivo a la derecha.

Demostración: Sea I un ideal a la derecha de R finitamente generado y E un R-módulo a la izquierda inyectivo. Consideremos el diagrama conmutativo de homomorfismos canónicos de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccc}
I\otimes_R \mathrm{Hom}_R({}_RX, E)) & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(I, X_R), E) \\
\downarrow \phi & & \downarrow \psi \\
R\otimes_R \mathrm{Hom}_R({}_RX, E) & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R, X_R), E)
\end{array}$$

Es evidente que β es un isomorfismo de grupos abelianos. Como R es coherente a la derecha, I es finitamente presentado, lo que implica que α es asímismo biyectiva.

Supongamos que X_R es FP-inyectivo. Entonces $\mathrm{Hom}_R(R,X_R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I,X_R)$ es un epimorfismo, lo que implica que ψ es un monomorfismo. De esta manera, ϕ ha de ser un monomorfismo, deduciéndose de aquí que $\mathrm{Hom}_R({}_RX,E)$ es plano.

Recíprocamente, si $\mathrm{Hom}_R({}_RX,E)$ es plano para cada R-módulo a la izquierda inyectivo E, entonces ϕ es un monomorfismo, de donde deducimos que ψ es inyectivo para cualquier ideal a la derecha finitamente generado I. Tomando E un cogenerador inyectivo de R-Mod, deducimos que $\mathrm{Hom}_R(R,X_R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I,X_R)$ es un epimorfismo cualquiera sea I finitamente generado, es decir, X_R χ_0-inyectivo. Pero como R es coherente a la derecha, X_R es FP-inyectivo. □

Proposición 1.3.2. *Si R es un anillo coherente a la derecha y existe un R-preanillo ρ: $R \longrightarrow X$ con ρ inyectivo y X FP-inyectivo a la derecha, entonces cada R-módulo a la izquierda tiene una cubierta por submódulos de módulos planos. Además, todo R-módulo a la izquierda inyectivo tiene una cubierta plana.*

Demostración. Observemos primeramente que para cada R-módulo a la izquierda E, $e_E:\mathrm{Hom}_R({}_RX, E) \longrightarrow E$ es una ρ-precubierta por el Lema 1.2.2. Por el Teorema 1.2.3. y la Proposición 1.1.3. existe una ρ-cubierta $\phi:F \longrightarrow E$ tal que F es isomorfo a un sumando directo de $\mathrm{Hom}_R({}_RX,E)$. Como $\mathrm{Hom}_R({}_RX,E)$ es plano por el Lema 1.3.1., F es plano. Ahora bien, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(\rho)$, lo que implica inmediatamente que $\phi:F \longrightarrow E$ es una $\mathcal{F}_0$-cubierta y, en particular, es una cubierta plana.

Si M es cualquier R-módulo a la izquierda y consideramos E = E(M), acabamos de probar que existe una ρ-cubierta $\phi:F \longrightarrow E(M)$ con F plano. No es difícil probar que, tomando $G = \phi^{-1}(M)$, se tiene que $\phi:G \longrightarrow M$ es una ρ-precubierta. Ahora podemos argumentar como antes para obtener que M tiene una cubierta por submódulos de módulos planos. □

En [E2] Enochs probó que sobre un anillo conmutativo noetheriano todo módulo tiene una cubierta por submódulos de módulos planos. Por otra parte, Matlis [M2, Proposition 6.11] demostró que sobre un anillo conmutativo coherente que posea una localización perfecta IF, todo módulo tiene una cubierta por submódulos de módulos planos. El siguiente Corolario (y, de hecho, la Proposición 1.3.2.), generaliza ambos resultados.

Corolario 1.3.3. *Si R es un anillo conmutativo y coherente, entonces todo R-módulo posee una cubierta por submódulos de módulos planos y todo R-módulo inyectivo tiene una cubierta plana.*

Demostración: Aplicar la Proposición 1.3.2. al R-preanillo $R \subseteq E(R)$ ■

Como aplicación no conmutativa de la Proposición 1.3.2., obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.3.4. *Si R es un anillo coherente a la derecha y no-singular a la derecha, entonces cualquier R-módulo a la izquierda tiene una cubierta por submódulos de módulos planos y todo R-módulo a la izquierda inyectivo tiene una cubierta plana.*

Demostración: Aplicar la Proposición 1.3.2. al homomorfismo de anillos $R \longrightarrow Q$, donde Q es el anillo maximal de cocientes a la derecha de M. □

Si R es un dominio conmutativo, es fácil comprobar que $\mathcal{F}_0$ es precisamente la clase de los R-módulos libres de torsión en el sentido usual. Es posibe que este hecho llevara a pensar a E. Enochs [E2] que el concepto de submódulo de módulo plano es "una generalización natural de la noción de [módulo] libre de torsión". Por otra parte, es ampliamente admitido que los módulos libres de torsión para una teoría de torsión hereditaria τ para un anillo cualquiera son una generalización razonable del concepto de módulo libre de torsión sobre un dominio. Llevando estas ideas a sus últimas consecuencias, planteamos el estudio de aquellos anillos R para los cuales $\mathcal{F}_0$ constituye la clase de los módulos τ_0-libres de torsión para alguna teoría de torsión τ_0 sobre R-Mod.

Por otra parte, Teply y Golan [T1],[T2],[GlT], investigaron condiciones suficientes sobre una teoría de torsión hereditaria τ sobre R-Mod con el objeto de asegurar que todo R-módulo a la izquierda posea una cubierta τ-libre de torsión. La condición más general encontrada es que τ sea de tipo finito. Existen varias condiciones reseñables que caracterizan que τ sea de tipo finito. En la siguiente proposición recogemos las que nos serán de utilidad.

Proposición 1.3.5. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una teoría de torsión hereditaria τ sobre R-Mod.*

(i) τ es de tipo finito.

(ii) $\tau(\varinjlim_{i\in I} M_i) = \varinjlim_{i\in I} \tau(M_i)$ para todo sistema dirigido de R-módulos a la izquierda $\{M_i, \psi_{ij}\}_{i,j\in I}$.

(iii) Todo límite directo de R-módulos a la izquierda τ-libres de torsión es un R-módulo a la izquierda τ-libre de torsión.

Demostración: Ver [S1, Proposition XIII.1.2 and Exercise XIII.3] □

La estrategia es usar el resultado de existencia de cubiertas libres de torsión de Teply para obtener la existencia de cubiertas por submódulos de módulos planos sobre anillos para los cuales $\mathcal{F}_0$ es una clase libre de torsión.

Definición. Diremos que un anillo R es <u>FTF a la izquierda</u> cuando exista una teoría de torsión hereditaria τ_0 sobre R-Mod de manera que $\mathcal{F}_0$ es la clase de los R-módulos a la izquierda τ_0-libres de torsión.

Proposición 1.3.6. *Si R es un anillo FTF a izquierda, entonces τ_0 es de tipo finito.*

Demostración: Por la Proposición 1.3.5. es suficiente con probar que para cualquier sistema dirigido $\{X_i, \varphi_{ij}\}_{i\in I}$ de R-módulos en $\mathcal{F}_0$, el límite directo $\varinjlim_{i\in I} X_i$ permanece en $\mathcal{F}_0$. Para probar esto, adaptamos y simplificamos en este caso parte de la demostración [E2, Th. 2.1].

Sea

$$F = \prod \{E(X_i)\colon i\in I\}$$

el producto directo de las envolventes inyectivas de los módulos X_i. Dado que $\mathcal{F}_0$ es estable bajo envolventes inyectivas y productos directos, resulta que F es plano. Para cada $i \in I$, consideremos

$$F_i = F^{\mathrm{Hom}_R(X_i,F)}$$

el producto directo indicado por $\mathrm{Hom}_R(X_i, F)$ de copias de F.

De nuevo tenemos que F_i es plano para cada $i \in I$. Definimos

$$\iota_i \colon X_i \longrightarrow F_i$$

llevando cada $x \in X_i$ sobre la aplicación

$$\iota_i(x) \colon \mathrm{Hom}_R(X_i, F) \longrightarrow F$$

definida por $\iota_i(x)(g) = g(x)$. Esta aplicación ι_i es un monomorfismo de R-módulos. En efecto, la R-linealidad es clara y, para comprobar que es inyectiva, tomemos $x \in X_i$ tal que $\iota_i(x) = 0$. Esto significa que $g(x) = 0$ para cualquier R-homomorfismo $g \colon X_i \longrightarrow F$. En particular, x es anulado por la inclusión canónica $X_i \rightarrowtail F$, con lo que $x = 0$.

Por otra parte, denotemos por Π^i_g la g-ésima proyección canónica de F_i sobre F, donde $g \in \mathrm{Hom}_R(X_i, F)$.

Apoyándonos en lo anterior, estamos preparados para definir $\rho_{ij} \colon F^i \longrightarrow F^j$ para cada i, j con $i \leq j$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\iota\iota_i} & F^i \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi\iota_i\psi_j} & & \downarrow{\scriptstyle \rho\iota_i\psi_j} \\ X_j & \xrightarrow{\iota\psi_j} & F^j \end{array}$$

Para ello, tomemos $k \in F_i = F^{\mathrm{Hom}_R(X_i, F)}$ y definamos

$$\rho_{ij}(k) \colon \mathrm{Hom}_R(X_j, F) \longrightarrow F$$

dado por

$$\rho_{ij}(k)(g) = k(\,\Pi^j_g \circ \iota_j \circ \varphi_{ij})$$

para cada $g \in \mathrm{Hom}_R(X_j, F)$. Es rutinario comprobar que ρ_{ij} es una aplicación R-lineal. Comprobemos que $\rho_{jl} \circ \rho_{ij} = \rho_{il}$ siempre que $i \leq j \leq l$. Para ello, tomamos $k \in F_i$, $g \in \mathrm{Hom}_R(X_l, F)$ y hacemos el siguiente cálculo:

$$\left[(\rho_{jl} \circ \rho_{ij})(k)\right](g) = \left[(\rho_{jl}(\rho_{ij}(k))\right](g) = \rho_{ij}(k)\ (\Pi^l_g \circ \iota_j \circ \varphi_{jl})$$

Si llamamos $h = \Pi^l_g \circ \iota_j \circ \varphi_{jl}$, tenemos que

$$\rho_{ij}(k)\ (\Pi^l_g \circ \iota_j \circ \varphi_{jl}) = \rho_{ij}(k)\ (h) = k(\Pi^j_h \circ \iota_j \circ \varphi_{ij})$$

Por otra parte,

$$\rho_{il}(k)(g) = k(\Pi^l_g \circ \iota_l \circ \varphi_{il})$$

Comprobemos que $\Pi^j_h \circ \iota_j \circ \varphi_{ij} = \Pi^l_g \circ \iota_l \circ \varphi_{il}$. Para ello, tomamos $x \in X_i$ y le aplicamos ambos morfismos.

$$(\Pi^l_g \circ \iota_l \circ \varphi_{il})(x) = \Pi^l_g(\iota_l(\varphi_{il}(x)) = \iota_l(\varphi_{il}(x))(g) = g(\varphi_{il}(x));$$

$$(\Pi^j_h \circ \iota_j \circ \varphi_{ij})(x) = \Pi^j_h(\iota_j(\varphi_{ij}(x)) = \iota_j(\varphi_{ij}(x))(h) = h(\varphi_{ij}(x)) =$$

$$(\Pi^l_g \circ \iota_j \circ \varphi_{jl})(\varphi_{ij}(x)) = \Pi^l_g(\iota_j(\varphi_{jl}(\varphi_{ij}(x))) = \Pi^l_g(\iota_j(\varphi_{il}(x)) =$$

$$\iota_j(\varphi_{il}(x))(g) = g(\varphi_{il}(x))$$

De manera análoga se prueba que $\rho_{ij} \circ \iota_i = \iota_j \circ \varphi_{ij}$ para cualesquiera $i \leq j$ en I. En efecto, si $x \in X_i$ y $g \in \mathrm{Hom}_R(X_j, F)$ tenemos

$$(\rho_{ij} \circ \iota_j)(x)(g) = (\rho_{ij}(\iota_j(x))(g) = \iota_j(x)(\Pi^j_g \circ \iota_j \circ \varphi_{ij}) =$$

$$(\Pi^j_g \circ \iota_j \circ \varphi_{ij})(x) = g(\varphi_{ij}(x)) = \iota_j(\varphi_{ij}(x))(g) = (\iota_j \circ \varphi_{ij})(x)(g)$$

Estos ρ_{ij} permiten construir límite directo $\varinjlim_{i \in I} F_i$ y los monomorfismos $\iota_i : X_i \longrightarrow F_i$ inducen un monomorfismo desde $\varinjlim_{i \in I} X_i$ hasta $\varinjlim_{i \in I} F_i$. Esto significa que $\varinjlim_{i \in I} X_i \in \mathcal{F}_0$ ya que $\varinjlim_{i \in I} F_i$ es plano por ser límite directo de R-módulos planos. □

Teorema 1.3.7. *Si R es un anillo FTF a la izquierda, entonces todo R-módulo a la izquierda posee una cubierta por submódulos de módulos planos y todo R-módulo a la izquierda inyectivo posee una cubierta plana.*

Demostración: Por la Proposición 1.3.6., τ_0 es de tipo finito. Por [T2], todo R-módulo a la izquierda posee una cubierta τ_0-libre de torsión. De este modo, todo R-módulo a la izquierda posee una cubierta por submódulos de módulos planos. Además, según [GIT, Proposition 2.4.], la cubierta τ_0-libre de torsión de un R-módulo a la izquierda inyectivo es inyectiva. Ahora bien, si un R-módulo inyectivo se encaja en un R-módulo plano, ha de ser un sumando directo suyo, por lo que es plano asímismo. □

Desde luego, el anterior teorema asegura que si R es un dominio conmutativo, todo R-módulo tiene una cubierta por submódulos de módulos planos. Ahora bien, aparte de los dominios conmutativos, ¿existen otras clases de anillos FTF a la izquierda?. El Capítulo 2 está dedicado a responder a esta pregunta. En tal capítulo realizamos un estudio de los anillos FTF a la izquierda que proporcionará, como es natural, ejemplos de anillos FTF a la izquierda. Como adelanto, las clases de anillos FTF a la izquierda que hemos identificado incluyen los anillos semiprimos Goldie (a ambos lados); más generalmente, los órdenes biláteros en anillos QF, los anillos QF-3 semiprimarios, los anillos QF-3' con C.C.A. sobre anuladores a la izquierda o los anillos coherentes con $E({}_RR)$ plana. Para todos estos tipos de anillos, el Teorema 1.3.7. garantiza que todo R-módulo a la izquierda inyectivo tiene una cubierta plana y todo R-módulo a la izquierda tiene una cubierta por submódulos de módulos planos.

ANILLOS FTF Y LOCALIZACION

Capítulo 2. Anillos FTF y Localización.

2.1. Propiedades generales.

Al final del Capítulo 1 introdujimos el concepto de anillo FTF ("flat are torsionfree") a la izquierda. Concretamente, un anillo R se dice que es FTF a la izquierda cuando la clase $\mathcal{F}_0$ de los submódulos de R-módulos a la izquierda planos es la clase de los R-módulos τ_0-libres de torsión para alguna teoría de torsión hereditaria τ_0 sobre R-Mod. Análogamente tenemos el concepto de anillo FTF a la derecha con notación $\mathcal{F}'_0$ para la clase de los submódulos de R-módulos a la derecha planos y τ'_0 para la teoría de torsión hereditaria sobre Mod-R para la cual $\mathcal{F}'_0$ constituye la clase de los R-módulos a la derecha τ'_0-libres de torsión. Un anillo se dirá FTF cuando sea FTF a la izquierda y a la derecha.

Primeros ejemplos 2.1.1. Los ejemplos triviales se obtienen para anillos que verifiquen $\mathcal{F}_0$ = R-Mod. Un anillo R satisface que $\mathcal{F}_0$ = R-Mod si y sólo si cada R-módulo a la izquierda inyectivo es plano. Estos son los <u>anillos IF a la izquierda</u>, que fueron investigados por Jain [J] y Colby [C]. De esta manera, todo anillo IF a la izquierda es FTF a la izquierda con τ_0 trivial. Dado que los anillos QF y regulares (Von Neumann) son IF a la izquierda, estos proporcionan ejemplos de anillos FTF a la izquierda. En el presente Capítulo mostraremos que ciertos anillos FTF a la izquierda tienen anillos de cocientes IF o QF (Proposición 2.3.5. y Teorema 2.3.10.).

Por otra parte un anillo conmutativo noetheriano R es FTF si y sólo si R_P es Gorenstein para todo ideal primo minimal P [CE, E3].

El siguiente lema proporciona una caracterización de los anillos FTF a la izquierda que será de utilidad en el desarrollo posterior.

Proposición 2.1.2. *R es FTF a la izquierda si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones:*

(1) Si P es un R-módulo a la izquierda plano, entonces $E({}_RP)$ es plano.

(2) Si $\{P_i : i \in I\}$ es una familia de R-módulos a la izquierda inyectivos y planos, entonces $P = \prod \{P_i : i \in I\}$ es un R-módulo a la izquierda plano.

Demostración: Supongamos que R es FTF a la izquierda. Si ${}_RP$ es plano, entonces P es τ_0-libre de torsión y, por tanto, $E({}_RP)$ es τ_0-libre de torsión. Por tanto, existe un monomorfismo de R-módulos $f:E({}_RP)\longrightarrow F$, donde F es un R-módulo a la izquierda plano. Por ser $E({}_RP)$ inyectivo, f escinde y, por tanto, $E({}_RP)$ es isomorfo a un sumando directo de F. Esto implica que $E({}_RP)$ es plano, con lo que obtenemos la condición 1.

Para una familia $\{P_i : i \in I\}$ de R-módulos a la izquierda inyectivos y planos, tenemos inmediatamente que $P = \prod \{P_i : i \in I\}$ es injectivo y τ_0-libre de torsión. Como ${}_RP$ es inyectivo, es posible razonar como antes y deducir que ${}_RP$ es plano, con lo que obtenemos (2).

Recíprocamente, supongamos que (1) y (2) son ciertas. Como $\mathcal{F}_0$ es estable por submódulos, sólo hemos de comprobar que $\mathcal{F}_0$ es cerrada bajo productos directos y envolventes inyectivas (Proposición 0.2.a). En efecto, si $M \in \mathcal{F}_0$, existe ${}_RP$ plano tal que $M \rightarrowtail P$. Tomando envolventes inyectivas, tenemos que $E({}_RM)$ es isomorfo a un sumando directo de $E({}_RP)$. Dado que, según (1), $E({}_RP)$ es plano, obtenemos inmediatamente que $E({}_RM)$ es plano. En particular, $E({}_RM) \in \mathcal{F}_0$. Así, $\mathcal{F}_0$ es estable por envolventes inyectivas.

Dada $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R-módulos a la izquierda en $\mathcal{F}_0$, tenemos un monomorfismo

$$\prod\{M_i : i \in I\} \rightarrowtail \prod\{E(M_i) : i \in I\}$$

Hemos comprobado antes que $E(M_i)$ es plano para cada $i \in I$. Según (2), esto implica que $\prod\{E(M_i) : i \in I\}$ es plano. Por tanto, $\prod\{M_i : i \in I\} \in \mathcal{F}_0$, lo que prueba que $\mathcal{F}_0$ es estable por productos directos. Esto concluye la prueba. □

La siguiente Proposición es útil a la hora de proporcionar algunos ejemplos de anillos FTF y en la demostración de algunos resultados.

Proposición 2.1.3. *Consideremos $\rho:R\longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos inyectivo tal que ${}_RS$ y S_R sean módulos planos. Si S es un anillo IF a la izquierda entonces R es un anillo FTF a la izquierda.*

Demostración: La estrategia será demostrar que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\rho)$ y probar que ésta última es una clase libre de torsión. Recordemos de la Sección 1.2. que $\mathcal{F}(\rho)$ es la clase de aquellos R-módulos a la izquierda que son isomorfos a un R-submódulo de un S-módulo a la izquierda y que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(\rho)$. Comencemos por probar la inclusión contraria. Para ello basta claramente con demostrar que todo S-módulo a la izquierda se encaja como R-módulo a la izquierda en un R-módulo a la izquierda plano. Como R es IF, dado $M \in$ S-Mod, $E({}_SM)$ es un S-módulo a la izquierda plano. Por [Lz, Théorème 1.2] $E({}_SM)$ es límite directo de S-módulos a la izquierda libres de rango finito. Dado que ${}_RS$ es plano, cada uno de estos S-módulos libres es plano. De aquí que ${}_RE({}_SM)$ sea límite directo de R-módulos a la izquierda planos, lo que implica que ${}_RE({}_SM)$ es plano. Como ${}_RM$ se encaja en ${}_RE({}_SM)$, concluimos que ${}_RM \in \mathcal{F}_0$.

Probaremos seguidamente que $\mathcal{F}(\rho)$ es cerrada bajo envolventes inyectivas. Dado $M \in \mathcal{F}(\rho)$, existe un monomorfismo de R-módulos a la izquierda $M \rightarrowtail N$, donde N es un S-módulo a la izquierda. Podemos considerar que ${}_SN$ es inyectivo, ya que en caso contrario, N puede ser sustituido por su envolvente inyectiva en

S-Mod. Como el funtor $S\otimes_R -$ es exacto y es adjunto a la izquierda del funtor restricción de escalares, se sigue que éste último preserva objetos inyectivos. Por tanto, ${}_RN$ es inyectivo. Pero entonces ${}_RN$ contiene una envolvente inyectiva $E({}_RM)$ de ${}_RM$, por lo que $E({}_RM) \in \mathcal{F}(\rho)$.

De esta manera, $\mathcal{F}(\rho)$ es estable bajo submódulos, productos directos (Lema 1.2.1.) y envolventes inyectivas, así que es una clase libre de torsión sobre R-Mod. Pero $\mathcal{F}(\rho) = \mathcal{F}_0$, de donde concluimos que R es FTF a la izquierda. □

Ejemplos 2.1.4. Desde luego, la manera más inmediata de obtener anillos FTF a partir de la Proposición 2.1.3. es considerar órdenes biláteros en anillos semisimples artinianos. Concretamente, si R es un anillo semiprimo y de Goldie a ambos lados, entonces es un orden bilátero en un anillo semisimple artiniano Q. Dado que Q es un anillo clásico de cocientes de R tanto a la izquierda como a la derecha, se sigue que Q_R y ${}_RQ$ son R-módulos planos. Aplicando la Proposición 2.1.3. obtenemos que R es FTF.

Más en general, podemos apoyarnos en los resultados de Cateforis [Ca1] para obtener ejemplos no semiprimos de anillos FTF. Concretamente, según [Ca1, Theorem 2.3] un anillo R tiene un anillo maximal de cocientes bilátero semisimple artiniano Q si y sólo si R es no singular a la izquierda, tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita y $E({}_RR)$ es plano. Por simetría de la primera condición, un anillo R satisfaciendo estas condiciones ha de tener

Q_R y $_RQ$ planos. En resumen, si $Z_l(R) = 0$, $\dim(_RR) < \infty$ y $E(_RR)$ es plano entonces R es FTF. A propósito de estos anillos, probaremos más tarde que son exactamente aquellos para los cuales un módulo se encaja en un plano si y sólo si es no singular (ver Corolario 2.2.5.).

Con el objeto de ilustrar concretamente la anterior discusión, tenemos el siguiente ejemplo de anillo FTF,

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

que tiene como anillo de maximal de cocientes bilátero al anillo $M_2(\mathbb{Q})$ de todas las matrices 2x2 con coeficientes racionales.

Por último queremos hacer notar sobre este último anillo que es un ejemplo sencillo de anillo FTF que no es IF ni un orden en un anillo semisimple artiniano.

Es oportuno recordar alguna terminología a propósito de las condiciones de finitud sobre R-módulos relativas a una teoría de torsión hereditaria τ sobre R-Mod. Concretamente, un R-módulo a la izquierda M se dice <u>τ-finitamente generado</u> si contiene un submódulo N finitamente generado tal que M/N es τ-torsión. Un R-módulo M finitamente generado se dice <u>τ-finitamente presentado</u> si admite una presentación libre cuyo núcleo es τ-finitamente generado.

Como se demostró en la Proposición 1.3.6., si R es un anillo FTF a la izquierda entonces τ_0 es una teoría de torsión de tipo finito. Este hecho permite disponer de una descripción del filtro $\mathcal{L}(\tau_0)$ de los ideales a la izquierda de R τ_0-densos en R en términos de anuladores. Esta descripción es crucial en la prueba de los principales resultados expuestos en esta memoria sobre anillos FTF a la izquierda. Para establecerla, nos apoyaremos en el hecho de que la τ_0-torsión de un R-módulo τ_0-finitamente presentado puede expresarse en función de las formas R-lineales sobre tal módulo. Este último hecho será también pieza de valor en el desarrollo posterior de nuestro estudio de los anillos FTF a la izquierda.

Proposición 2.1.5. *Sea R un anillo FTF a la izquierda. Las siguientes afirmaciones son satisfechas:*

(1) Para cada R-módulo a la izquierda P τ_0-finitamente presentado se tiene que

$$\tau_0(P) = Ker\ f_1 \cap \cdots \cap Ker\ f_m \text{ para ciertos } f_i \in Hom_R(P, R).$$

(2) $\mathcal{L}(\tau_0)$ es el conjunto de los ideales a la izquierda I de R tales que existe un ideal a la izquierda finitamente generado I_0 de I verificando que $Hom_R(R/I_0,R) = 0$. Esto es,

$$\mathcal{L}(\tau_0) = \{I \leq {}_RR : r(I_0) = 0 \text{ para algún } I_0 \leq I,\ I_0 \text{ fin. gen.}\}$$

Demostración: (1) Lo probaremos primero en el caso de que P sea un R-módulo a la izquierda finitamente presentado. Como R es τ_0-libre de torsión podemos afirmar que cada R-homomorfismo f desde P hasta R se anula sobre $\tau_0(P)$. Esto muestra claramente que

$$\tau_0(P) \subseteq \bigcap \{Ker f:\ f \in Hom_R(P,R)\}. \qquad (*)$$

Para probar la inclusión el el otro sentido, consideremos el

R-homomorfismo compuesto

$$P \xrightarrow{\iota_1} E(P) \xrightarrow{\pi} E(P)/\tau_0(E(P)) \xrightarrow{\iota_2} E\left(E(P)/\tau_0(E(P))\right) = X$$

donde ι_1 e ι_2 denotan monomorfismos. Como X es plano y P es finitamente presentado, existe un R-módulo a la izquierda libre de tipo finito F y morfismos $u \in \mathrm{Hom}_R(P,F)$ y $v \in \mathrm{Hom}_R(F, X)$ tales que $\iota_2\pi\iota_1 = vu$ (ver [C, pág 241]). De esta manera,

$$\mathrm{Ker}\ u \subseteq \mathrm{Ker}\ vu = \mathrm{Ker}\ \iota_2\pi\iota_1 = \mathrm{Ker}\ \pi\iota_1 = \tau_0(P).$$

Podemos considerar $F = R \oplus \ldots \oplus R$ (m veces) y, en tal caso, denotemos por π_i la i-ésima proyección canónica desde F sobre R. Tomemos $f_i = \pi_i u$ para $i = 1,\ldots,m$. Es fácil comprobar que

$$\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ f_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ f_m.$$

Esto, junto con (*), nos permite obtener

$$\tau_0(P) = \mathrm{Ker}\ f_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ f_m.$$

Ahora supongamos que P es τ_0-finitamente presentado. Entonces existe una suceción exacta corta de R-módulos a la izquierda

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

donde F es libre de tipo finito y K es τ_0-finitamente generado. Esto quiere decir que existe un submódulo $K_0 \subseteq K$ con K_0 finitamente generado y tal que K/K_0 es τ_0-torsión. Como F/K_0 es finitamente presentado, la primera parte de esta demostración nos permite asegurar que existen $g_1,\ldots,g_m \in \mathrm{Hom}_R(F/K_0, R)$ tales que

$$\tau_0(F/K_0) = \mathrm{Ker}\ g_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ g_m.$$

Consideremos ahora el epimorfismo $p: F/K_0 \twoheadrightarrow F/K \cong P$ cuyo núcleo K/K_0 es τ_0-torsión. Como R es τ_0-libre de torsión, $g_{i|K/K_0} = 0$ para cada $i = 1,\ldots,m$. De esta manera, los homomorfismos $g_1,\ldots,g_m$

inducen homomorfismos $f_1,\dots,f_m \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$. Es claro que

$$\tau_0(P) \subseteq \mathrm{Ker}\, f_1 \cap\dots\cap \mathrm{Ker}\, f_m.$$

Además, si $x \in \mathrm{Ker}\, f_1 \cap\dots\cap \mathrm{Ker}\, f_m$, consideremos $y \in F/K_0$ tal que $p(y) = x$. Para cada $i = 1,\dots,m$ tenemos que $g_i(y) = (f_i \circ p)(y) = f_i(x) = 0$. Por tanto, $y \in \mathrm{Ker}\, g_1 \cap\dots\cap \mathrm{Ker}\, g_m = \tau_0(F/K_0)$. Pero $p(\tau_0(F/K_0)) \subseteq \tau_0(P)$, por lo que $x = p(y) \in \tau_0(P)$. De esta manera obtenemos la igualdad

$$\tau_0(P) = \mathrm{Ker}\, f_1 \cap\dots\cap \mathrm{Ker}\, f_m.$$

(2) Supongamos que $I \in \mathcal{L}(\tau_0)$. Como τ_0 es de tipo finito (Proposición 1.3.6.), existe un ideal a izquierda finitamente generado $I_0 \in \mathcal{L}(\tau_0)$ y contenido en I. Así que R/I_0 es τ_0-torsión. Como R es τ_0-libre de torsión, $\mathrm{Hom}_R(R/I_0, R) = 0$. Recíprocamente, supongamos que I contiene un ideal a la izquierda I_0 finitamente generado tal que $\mathrm{Hom}_R(R/I_0, R) = 0$. Como R/I_0 es finitamente presentado, existen, por la parte (1), homomorfismos $f_1,\dots,f_m \in \mathrm{Hom}_R(R/I_0, R)$ tales que $\tau_0(R/I_0) = \mathrm{Ker}\, f_1 \cap\dots\cap \mathrm{Ker}\, f_m$. Pero $f_i = 0$ para cada $i = 1,\dots,m$, de donde $\tau_0(R/I_0) = R/I_0$, esto es, $I_0 \in \mathcal{L}(\tau_0)$. Dado que $I_0 \subseteq I$, se sigue que $I \in \mathcal{L}(\tau_0)$. □

El anterior resultado tiene una primera consecuencia interesante. Existe un resultado de Gentile y Levy que afirma que los R-módulos a la izquierda finitamente generados y libres de torsión sobre un anillo semiprimo Goldie (a ambos lados) se encajan en R-módulos a la izquierda libres de rango finito (ver, por ejemplo, [GdW, Proposition 6.19]). Bajo este punto de vista, los R-módulos τ_0-libres de torsión τ_0-finitamente presentados sobre un anillo FTF a la izquierda mantienen idéntica propiedad, como muestra la siguiente

Proposición 2.1.6. *Sea R un anillo FTF izquierda. Entonces cualquier submódulo τ_0-finitamente presentado de un R-módulo izquierda plano se encaja en un R-módulo a la izquierda libre de rango finito.*

Demostración: Si P es un submódulo τ_0-finitamente presentado de un R-módulo izquierda plano, entonces P es τ_0-libre de torsión. Por ser P τ_0-finitamente presentado concluimos de la Proposición 2.1.5. que P se encaja en un R-módulo izquierda libre de rango finito. □

Uno de los resultados más útiles sobre R-módulos planos es la caracterización de Lazard [Lz, Théorème 1.2] que reconoce los módulos planos como los límites directos de módulos libres de rango finito. Para un anillo FTF a la izquierda disponemos de una descripción análoga para los submódulos de los módulos planos, como refleja el siguiente

Corolario 2.1.7. *Sea R un anillo FTF a la izquierda y M un R-módulo a la izquierda. Entonces M es un submódulo de un módulo plano si y sólo si $M = \varinjlim_{i\in I} M_i$, para $\{M_i, \psi_{ij}\}$ un sistema dirigido de R-módulos a la izquierda de manera que M_i se encaja en un R-módulo a la izquierda libre de tipo finito.*

Demostración: Sea $M \in \mathcal{F}_0$. Existe un sistema dirigido $\{P_i, \phi_{ij}\}$ de R-módulos a la izquierda finitamente presentados P_i de manera que $M = \varinjlim_{i \in I} P_i$. Para cada $i \in I$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tau_0(P_i) \xrightarrow{\iota_i} P_i \xrightarrow{\pi_i} M_i \longrightarrow 0$$

donde M_i es τ_0-libre de torsión. Por [Jo, Lemma 2.4], M_i es τ_0-finitamente presentado. La Proposición 2.1.6. nos asegura que M_i se encaja en un R-módulo a la izquierda libre finitamente generado. Dado que para cualesquiera $i, j \in I$ con $i \leq j$ se tiene que $\phi_{ij}(\tau_0(P_i)) \subseteq \tau_0(P_j)$, podemos inducir $\psi_{ij}: M_i \longrightarrow M_j$ de manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau_0(P_i) \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\phi_{ij}"'] & P_i \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "\phi_{ij}"'] & M_i \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{ij}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau_0(P_j) \arrow[r, "\iota_j"] & P_j \arrow[r, "\pi_j"] & M_j \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Esto permite construir, tomando límites directos, una sucesión exacta corta de R-módulos a la izquierda

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} \tau_0(P_i) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} \varinjlim_{i \in I} M_i \longrightarrow 0$$

Dado que τ_0 es de tipo finito (Proposición 1.3.6.), podemos aplicar la Proposición 1.3.5. y obtener que $\varinjlim_{i \in I} \tau_0(P_i) = \tau_0(M) = 0$. De modo que π es un isomorfismo, lo que acaba la prueba del Corolario. □

Los anteriores resultados, aparte del valor estético que puedan poseer, permiten calcular la clausura de cualquier ideal a la izquierda τ_0-finitamente generado de un anillo FTF a la izquierda R. Mirado desde un punto de vista algo distinto, lo que sugiere el la Proposición demostrada más abajo es un buen comportamiento de la operación "doble anulador" sobre los ideales a la izquierda de un anillo FTF a la izquierda. Tal bondad permite abrigar esperanzas sobre la posibilidad de conocer algo mejor la estructura de los anillos FTF a la izquierda. Esta expectación es sugerida por el hecho de que una cualidad de los anillos QF es que la operación "doble anulador" resulta ser la identidad sobre el retículo de los ideales a la izquierda.

Proposición 2.1.8. *Sea R un anillo FTF a la izquierda e I un ideal a la izquierda τ_0-finitamente generado. Entonces*

$$Cl^R_{\tau_0}(I) = \ell r(I)$$

Demostración: Por la Proposición 2.1.5. tenemos que

$$Cl^R_{\tau_0}(I)/I = \tau_0(R/I) = \mathrm{Ker} f_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker} f_n$$

para ciertos homomorfismos $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}_R(R/I, R)$. Tomando $x_i = f_i(1+I)$ para cada $i = 1,\ldots,n$ es claro que $x_i \in r(I)$ para $i = 1,\ldots,n$. De hecho, para cada $i = 1,\ldots,n$, el morfismo $f_i : R/I \longrightarrow R$ está definido como multiplicación a la derecha por x_i del siguiente modo: $f_i(r+I) = rx_i$ para todo $r \in R$. Esto significa que $\mathrm{Ker} f_i = \ell(x_i)+I/I$. Pero, dado que $x_i \in r(I)$, resulta que $I \subseteq \ell r(I) \subseteq \ell(x_i)$, con lo que concluimos que $\mathrm{Ker} f_i = \ell(x_i)/I$. De esta manera $\ell r(I) \subseteq \ell(\{x_1,\ldots,x_n\}) = \ell(x_1) \cap \ldots \cap \ell(x_n) = Cl^R_{\tau_0}(I)$. Para probar la inclusión en el sentido inverso, tómese $x \in Cl^R_{\tau_0}(I)$. Existe un ideal a la izquierda τ_0-denso en R de manera que $Dx \subseteq I$. Esto implica que $Dx\mathcal{r}(I) = 0$. Como R es τ_0-libre de torsión, tenemos que $x\mathcal{r}(I) = 0$, esto es, $x \in \ell\mathcal{r}(I)$. □

2.2. Anillos FTF con condiciones de finitud

Comenzaremos esta Sección 2.2. con la observación de que todo anillos FTF a la izquierda tiene cierta condición de finitud. Para expresar formalmente esta condición, necesitamos recordar algunas definiciones.

Sea τ una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod. Siguiendo a M. F. Jones [Jo], diremos que R es τ-coherente si cada ideal a la izquierda finitamente generado es τ-finitamente presentado. Análogo concepto se tiene para teorías de torsión sobre Mod-R. Recordemos [CR2] que un R-módulo a la izquierda M se dice π-plano si todo producto directo de copias de M es un R-módulo plano.

De otra parte, si F es un R-módulo a la izquierda plano, entonces podemos definir una teoría de torsión hereditaria $\kappa = \mathrm{Ker}(-\otimes_R F)$ sobre Mod-R cuyos módulos a la derecha κ-torsión son aquellos que son anulados por el funtor exacto $-\otimes_R F$. Según [Jo, Corollary 3.5], R es κ-coherente si y sólo si F es π-plano. Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. *Si R es un anillo FTF a la izquierda y* κ =

$Ker(-\otimes_R E({}_R R))$, entonces R es κ-coherente. □

Una de las teorías de torsión más estudiadas y útiles es la llamada teoría de torsión de Lambek, λ, que proporciona un concepto razonable de R-módulo libre de torsión para anillos generales, a saber, el de módulo $E({}_R R)$-torsionless. Para ser más precisos, un R-módulo a la izquierda M se dice $E({}_R R)$-torsionless cuando exista un monomorfismo desde M hasta un producto directo de copias de $E({}_R R)$. En otras palabras, M es $E({}_R R)$-torsionless si y sólo si está cogenerado por $E({}_R R)$. De esta manera, la clase de los R-módulos a la izquierda $E({}_R R)$-torsionless la clase de los R-módulos λ-libres de torsión. Recordemos también que $Q_\lambda(R)$ es precisamente el anillo maximal de cocientes a la izquierda de R.

Dado que nosotros hemos propuesto la clase $\mathcal{F}_0$ como clase de módulos libres de torsión, no podemos dejar de comparar ambos conceptos. Este es el objeto de los próximos resultados.

Lema 2.2.2. *Si R es un anillo de manera que λ es de tipo finito entonces $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(\lambda)$.*

Demostración: Es evidente que basta con demostrar que todo R-módulo a la izquierda plano es λ-libre de torsión. Pero, según [Lz, Théorème 1.2], todo R-módulo a la izquierda plano es límite directo de R-módulos libres finitamente generados. En particular, todo R-módulo a la izquierda plano es límite directo de R-módulos a la izquierda λ-libres de torsión. Dado que λ es de tipo finito,

$\mathcal{F}(\lambda)$ es estable bajo límites directos (Proposición 1.3.5.), lo que, junto con lo anterior, implica que todo R-módulo plano a la izquierda sea λ-libre de torsión. □

Lema 2.2.3. *Si R es un anillo FTF a la izquierda, entonces $\mathcal{F}(\lambda) \subseteq \mathcal{F}_0$.*

Demostración: Si R es un anillo FTF a la izquierda, entonces R es τ_0-libre de torsión. Esto significa que todo R-módulo a la izquierda $E({}_RR)$-torsionless es τ_0-libre de torsión. Así, $\mathcal{F}(\lambda) \subseteq \mathcal{F}_0$. □

Los anteriores dos lemas muestran que si R es un anillo FTF a la izquierda y λ es de tipo finito, entonces $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\lambda)$. El siguiente resultado completa una caracterización de los anillos para los cuales un R-módulo a la izquierda es un submódulo de un R-módulo plano si y sólo si es $E({}_RR)$-torsionless.

Teorema 2.2.4. *Para un anillo R, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) R es FTF a la izquierda y λ es de tipo finito.

(ii) $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\lambda)$; es decir, los submódulos de módulos planos y los R-módulos $E({}_RR)$-torsionless son los mismos.

(iii) $E({}_RR)$ es π-plano y λ es de tipo finito.

En caso de que se verifiquen (i)-(iii), $\tau_0 = \lambda$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii) Esto es una consecuencia de los lemas 2.2.2. y 2.2.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) y (i) Consideremos $E({}_RR)^I$ un producto directo arbitrario de copias de $E({}_RR)$. Es evidente que $E({}_RR)^I$ es $E({}_RR)$-torsionless. Como $\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{F}_0$, esto implica que existe un R-módulo a la izquierda plano y un monomorfismo

$$f\colon E({}_RR)^I \longrightarrow P$$

Pero $E({}_RR)^I$ es inyectivo, de modo que f es una escisión. Esto significa que $E({}_RR)^I$ es isomorfo a un sumando directo de P. Como P es plano, deducimos que $E({}_RR)^I$ también lo es. De esta manera se concluye que $E({}_RR)$ es π-plano.

Por otra parte, la igualdad $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\lambda)$ implica que R es un anillo FTF a la izquierda con $\tau_0 = \lambda$. Según la Proposición 1.3.6., τ_0 es de tipo finito, lo que, en este caso, asegura que λ es de tipo finito. Esto nos da (i) y (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Por el Lema 2.2.2. tenemos la inclusión $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(\lambda)$. Por tanto, sólo tenemos que razonar que $\mathcal{F}(\lambda) \subseteq \mathcal{F}_0$. Pero esto es claro considerando que $E({}_RR)$ es π-plano ya que, en este caso, cada R-módulo a la izquierda $E({}_RR)$-torsionless es un submódulo de un R-módulo plano. □

Una caracterización análoga puede ser obtenida para aquellos anillos cuyos módulos no singulares son exactamente los submódulos de módulos planos. Denotaremos por $\mathcal{N}$ la clase de todos los R-módulos a la izquierda no singulares. Recordemos que un R-módulo a la izquierda M tiene dimensión de Goldie finita si no contiene sumas directas internas con un número de sumandos no triviales infinito.

Corolario 2.2.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(i) $\mathcal{N} = \mathcal{F}_0$*, es decir, un R-módulo a la izquierda es no singular si y sólo si se encaja en un R-módulo a la izquierda plano.*

(ii) R es no singular a la izquierda, R tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita y $E({}_R R)$ *es plano.*

(iii) R tiene un anillo maximal de cocientes bilátero que es semisimple artiniano.

Demostración: En principio, la equivalencia entre (ii) y (iii) es [Cal, Theorem 2.3].

(iii) $\Rightarrow$ (i) Como R es no singular a la izquierda y tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita, es bien conocido que λ es de tipo finito y que $\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{N}$. Además, $E({}_R R) = Q^l_{max}(R) = Q$ es un anillo regular Von Neumann. Según el Teorema 2.2.4. para obtener que $\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{F}_0$ sólo nos resta demostrar que cualquier producto directo de copias de Q es plano como R-módulo a la izquierda. Sea P un tal producto. Como Q es regular, ${}_Q P$ es plano. Pero entonces ${}_R P$ es plano por ser ${}_R Q$ plano.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Si $\mathcal{N} = \mathcal{F}_0$ es inmediato que R es no singular a la izquierda. Pero entonces $\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{N}$, con lo que el Teorema 2.2.4. asegura que $E({}_R R)$ es plano y λ es de tipo finito. Y para un anillo no singular a la izquierda, esto implica que R tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita. □

Observación 2.2.6. Existen anillos FTF a la izquierda para los cuales $\tau_0 \neq \lambda$. Por ejemplo, considérese cualquier anillo regular Von Neumann no auto-inyectivo a la izquierda. Para conocer ejemplos propios, consultar el Ejemplo 2.3.9.

El Teorema 2.2.4. permite mostrar otra clase de anillos FTF, que son los anillos noetherianos con envolvente inyectiva plana. El resultado concreto es el siguiente Corolario. De todas formas, tal resultado será sensiblemente mejorado en varias direcciones posteriormente (ver Corolario 2.2.11., Teorema 2.2.19.).

Corolario 2.2.7. *Si R es un anillo noetheriano (a ambos lados) tal que* $E({}_RR)$ *es un R-módulo a la izquierda plano, entonces R es un anillo FTF a la izquierda.*

Demostración: Como R es noetheriano a la izquierda, toda teoría de torsión sobre R-Mod es de tipo finito; en particular, lo es λ. Además, como R es noetheriano a la derecha, todo producto directo de copias de un R-módulo a la izquierda plano es un módulo plano. Aplicando esto a $E({}_RR)$, obtenemos que $E({}_RR)$ es π-plano. El Corolario se sigue ahora del Teorema 2.2.4. □

Nos disponemos ahora a caracterizar una nutrida clase de anillos FTF, que incluye a la descrita en el Corolario 2.2.7. Para ello, probaremos primeramente que los anillos FTF a la izquierda son, bajo cierta condición de finitud, anillos FTF a la derecha. Recordemos que un anillo que sea simultáneamente FTF a la izquierda y a la derecha se llamará anillo FTF.

Lema 2.2.8. *Supongamos que $E = E({}_R R)$ es plano y que $E^+ = Hom_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo a la derecha π-plano. Entonces R es FTF a la derecha y un R-módulo a la derecha M es τ'_0-torsión si y sólo si $M \otimes_R E = 0$.*

Demostración: Como $E = E({}_R R)$ es plano la clase de R-módulos a la derecha

$$\mathcal{T} = \{M \in \text{Mod-R}: M\otimes_R E = 0\}$$

es una clase de torsión. Esto es, existe una teoría de torsión hereditaria κ sobre Mod-R tal que $\mathcal{T}$ es la clase de los R-módulos a la derecha que son κ-torsión. Afirmamos que

$$\mathcal{F}'_0 = \{M \in \text{Mod-R}: M \text{ es } \kappa\text{-libre de torsión}\}.$$

Consideremos un R-módulo a la derecha plano M y construyamos el siguiente diagrama conmutativo morfismos de grupos abelianos:

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_R R & \xrightarrow{\alpha} & M\otimes_R E \\ \gamma\uparrow & & \uparrow\delta \\ \kappa(M)\otimes_R R & \xrightarrow{\beta} & \kappa(M)\otimes_R E \end{array}$$

Como M es plano, resulta que α es un monomorfismo. De este modo, $\alpha\gamma = \delta\beta$ es un monomorfismo. Por tanto, β resulta ser un monomorfismo. Ahora bien, κ(M) es κ-torsión, lo que significa que $\kappa(M)\otimes_R E = 0$. Así, $\kappa(M) \cong \kappa(M)\otimes_R R = 0$, es decir, M es κ-libre de torsión. De aquí es inmediato que

$$\mathcal{F}'_0 \subseteq \{M \in \text{Mod-}R\text{: } M \text{ es } \kappa\text{-libre de torsión}\}.$$

Para demostrar la inclusión en el otro sentido, observemos que un R-módulo a la derecha M es κ-torsión si y sólo si $(M \otimes_R E)^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$. Este último grupo abeliano es canónicamente isomorfo a $\mathrm{Hom}_R(M, E^+)$, por lo que M es κ-torsión si y sólo si $\mathrm{Hom}_R(M, E^+) = 0$. Dado que $E^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo a la derecha inyectivo por ser ${}_RE$ plano, la discusión precedente muestra que E^+ es un cogenerador inyectivo para κ. Así, los R-módulos a la derecha κ-libres de torsión no son sino los submódulos de productos directos de copias de E^+. Pero, por hipótesis, cualquier producto directo de copias de E^+ da un R-módulo a la derecha plano. Por tanto, todo R-módulo a la derecha κ-libre de torsión es submódulo de un R-módulo a la derecha plano. Esto proporciona la igualdad

$$\mathcal{F}'_0 = \{M \in \text{Mod-}R\text{: } M \text{ es } \kappa\text{-libre de torsión}\}.$$

Hemos obtenido, por tanto, que $\mathcal{F}'_0$ es la clase de los R-módulos a la derecha κ-libres de torsión. De aquí resulta que R es FTF a la derecha con $\tau'_0 = \kappa$. □

Proposición 2.2.9. *R es FTF a la izquierda y τ_0-coherente si y sólo si R es FTF a la derecha y τ'_0-coherente.*

Demostración: Necesitamos probar tan sólo la implicación en un sentido. Supongamos que R es un anillo FTF a la izquierda τ_0-coherente. En particular, $E = E({}_RR)$ es un R-módulo a la izquierda plano. Aplicando [Jo, Theorem 3.3], $E^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo a la derecha π-plano. Por el Lema 2.2.8., R es FTF a la derecha y

$$\mathcal{T}(\tau'_0) = \{ M \in \text{Mod-}R \mid M \otimes_R E = 0\}$$

La demostración concluye después de observar que E es un R-módulo a la izquierda π-plano, de modo que podemos aplicar [Jo, Corollary 3.5] para asegurar que R es τ'_0-coherente. □

Corolario 2.2.10. *Si R es un anillo λ-coherente y $E({}_RR)$ es un R-módulo a la izquierda plano, entonces R es un anillo FTF a la derecha. Además, R es FTF a la izquierda si y sólo si $E({}_RR)$ es Π-plano si y sólo si R es τ'_0-coherente.*

Demostración: Por ser R λ-coherente, podemos aplicar [Jo, Theorem 3.3] para obtener que E^+ es π-plano como R-módulo a la derecha, donde $E = E({}_RR)$. El Lema 2.2.8. asegura de nuevo que R es FTF a la derecha con

$$\mathcal{T}(\tau'_0) = \{ M \in \text{Mod-}R \mid M \otimes_R E = 0\}$$

Si R es FTF a la izquierda, entonces $E({}_RR)$ es π-plano inmediatamente. Si $E = E({}_RR)$ es π-plano, [Jo, Corollary 3.5] asegura que R es τ'_0-coherente. Y si R es τ'_0-coherente etonces la Proposición 2.2.9. nos asegura que R es FTF a la izquierda. □

El siguiente resultado mejora el Corolario 2.2.7. La equivalencia entre las condiciones (i) y (iv) en el Corolario 2.2.11. ha sido observada también recientemente en [Ho2].

Corolario 2.2.11. *Si R es un anillo coherente a la izquierda y a la derecha, entonces son equivalentes:*

(i) $E({}_RR)$ es plano.

(ii) R es FTF a la izquierda.

(iii) R es FTF a la derecha.

(iv) $E(R_R)$ es plano.

Demostración: Es consecuencia directa del Corolario 2.2.10. □

Nos disponemos ahora a ofrecer caracterizaciones de los anillos FTF a la izquierda τ_0-noetherianos y τ_0-artinianos.

Proposición 2.2.12. *Sea R un anillo tal que $E({}_RR)$ es plano. Para cada R-módulo a la izquierda λ-finitamente presentado P se verifica que*

$$\lambda(P) = \bigcap \{Kerf:\ f \in Hom_R(P,R)\}$$

Equivalentemente, $P/\lambda(P)$ es torsionless.

Demostración: Lo probaremos para el caso de ser P finitamente presentado. El caso λ-finitamente presentado se deduce del anterior de manera análoga a como se hizo en la Proposición 2.1.5.(1). Como R es λ-libre de torsión, deducimos inmediatamente la inclusión $\lambda(P) \subseteq \bigcap \{\mathrm{Ker} f:\ f \in \mathrm{Hom}_R(P,R)\}$. Para demostrar la otra inclusión, consideremos $x \in P$ con $x \notin \lambda(P)$. Existe $f \in \mathrm{Hom}_R(P,E({}_RR))$ tal que $f(x) \neq 0$. Por [Lz, Théorème 1.2] existen un

R-módulo a la izquierda libre finitamente generado F, $v \in \mathrm{Hom}_R(P,F)$, $w \in \mathrm{Hom}_R(F,E(_R R))$ tales que $f = wv$. Es claro que $v(x) \neq 0$. Por tanto, $x \notin \mathrm{Ker} v$, lo que implica que $x \notin \bigcap \{\mathrm{Ker} f\colon f \in \mathrm{Hom}_R(P,R)\}$. De esta manera concluimos que la inclusión $\lambda(P) \subseteq \bigcap \{\mathrm{Ker} f\colon f \in \mathrm{Hom}_R(P,R)\}$ es también válida. □

La condición de ser $E(_R R)$ π-plano aparece en varios resultados (por ejemplo, Teorema 2.2.4., Corolario 2.2.10. y Teorema 2.2.15.). Por otra parte, los anillos para los cuales $E(_R R)$ es plano han sido objeto de algunos trabajos de investigación ([Mo1], [Ho1], [Ho2], [CE]). De hecho, en la Sección 2.4. dedicaremos alguna atención a estos anillos. Parece, pues, interesante buscar condiciones que caractericen, en el supuesto de que $E(_R R)$ sea plano, cuándo es $E(_R R)$ π-plano. De hecho, Colby y Rutter dedicaron un artículo a estudiar esta cuestión sobre para un módulo plano cualquiera (ver también [Jo]). Nosotros hemos encontrado una caracterización distinta de las allí propuestas para el caso que nos ocupa, que pasamos a enunciar y demostrar seguidamente.

Proposición 2.2.13. *Sea R un anillo tal que $E = E(_R R)$ es plano y consideremos $S = \mathrm{End}_R(E)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $E(_R R)$ es π-plano.

(ii) $\mathrm{Hom}_R(P,E)$ es un S-módulo a la derecha finitamente generado para cada R-módulo a la izquierda finitamente presentado P.

(iii) Si P es un R-módulo a la izquierda finitamente presentado, $\lambda(P) = Kerf_1 \cap \ldots \cap Kerf_n$ para ciertos $f_1,\ldots,f_n \in Hom_R(P,R)$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (iii) Sea ${}_RP$ finitamente presentado. Tenemos un monomorfismo $f:P/\lambda(P) \rightarrowtail E^I$ para cierto conjunto I. Sea $g:P \longrightarrow E^I$ el morfismo obtenido por composición de f con la proyección canónica $p:P \twoheadrightarrow P/\lambda(P)$. Por [Lz, Théorème 1.2] g factoriza a través de un R-módulo a la izquierda libre finitamente generado F. Como F es λ-libre de torsión, f factoriza asímismo a través de F. Como consecuencia, existe un monomorfismo $h:P/\lambda(P) \rightarrowtail F$. A partir de esto es fácil deducir que $\lambda(P) = \mathrm{Ker}h = \mathrm{Ker}f_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}f_n$ para ciertos $f_1,\ldots,f_n \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Si P es cualquier R-módulo a la izquierda finitamente presentado, es claro el isomorfismo de S-módulos a la derecha $\mathrm{Hom}_R(P/\lambda(P),E) \cong \mathrm{Hom}_R(P,E)$. Probaremos, por tanto, que $\mathrm{Hom}_R(P/\lambda(P),E)_S$ es finitamente generado. Según (iii), es posible encontrar un monomorfismo $f:P/\lambda(P) \rightarrowtail F$, donde F es un R-módulo a la izquierda libre finitamente generado. Sea E(F) una envolvente inyectiva de ${}_RF$. Es claro que existe un monomorfismo $g:P/\lambda(P) \rightarrowtail E(F)$. Como E es inyectivo, $g^*:\mathrm{Hom}_R(E(F),E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P/\lambda(P),E)$ es un epimorfismo de S-módulos a la derecha. Pero E(F) es isomorfo como R-módulo a la izquierda a una suma directa finita de copias de E. Esto implica que $\mathrm{Hom}_R(E(F),E)$ es un S-módulo a la derecha libre y finitamente generado. Como consecuencia, $\mathrm{Hom}_R(P/\lambda(P),E)_S$ es finitamente generado.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por [CR, Theorem 1.3] es suficiente con que probemos que para cada R-módulo a la izquierda finitamente presentado P existe un submódulo B finitamente generado del R-módulo a la derecha $Hom_R(P,R)$ tal que $Hom_R(P,R)/B \otimes_R E = 0$. Para aplicar este criterio de π-planitud para E, vamos a demostrar que $Hom_R(P,R)\otimes_R E$ es un S-módulo a la derecha finitamente generado y, a partir de aquí, podemos concluir de manera análoga a como se hace en [Jo, Proposition 3.8]. Pero, dado que ${}_RE$ es plano, existe un isomorfismo canónico $(Hom_R(P,R)\otimes_R E)_S \cong Hom_R(P,E)_S$ con lo que $(Hom_R(P,R)\otimes_R E)_S$ resulta ser finitamente generado. □

Proposición 2.2.14. *Sea R un anillo tal que $E({}_RR)$ es plano. R es λ-noetheriano si y sólo si tiene condición de cadena ascendente sobre anuladores a la izquierda.*

Demostración: Es claro que si R es λ-noetheriano entonces R tiene C.C.A. sobre anuladores a la izquierda.

Recíprocamente, vamos a demostrar que si R no es λ-noetheriano, entonces existe una cadena estrictamente creciente de anuladores a la izquierda. Sea

$$I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$$

una cadena estrictamente creciente de ideales a la izquierda λ-cerrados. Tomemos, para cada número natural i, $x_{i+1} \in I_{i+1} \setminus I_i$ y construyamos $C_n = Cl_\lambda^R(Rx_1+\ldots+Rx_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (bien entendido que $x_1 \in I_1$). Es claro que $C_n \subseteq C_{n+1}$ para cada número natural n. Además, si $C_n = C_{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_{n+1} \in C_{n+1} = C_n \subseteq$

I_n, lo cual es contradictorio con la elección de x_{n+1}. Consideremos $P_n = R/(Rx_1+\ldots+Rx_n)$. Es claro que $\lambda(P_n) = C_n/(Rx_1+\ldots+Rx_n)$ y que $P_n/\lambda(P_n) \cong R/C_n$. Según la Proposición 2.2.12., R/C_n es torsionless, lo que significa que C_n es el anulador a la izquierda de un subconjunto de R. De esta manera hemos obtenido una cadena estrictamente creciente de anuladores a la izquierda

$$C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n \subset \ldots$$

lo cual contradice la C.C.A. sobre anuladores a la izquierda sobre R. □

Teorema 2.2.15. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) R es un anillo FTF a la izquierda τ_0-noetheriano.

(ii) $E({}_RR)$ es π-plano y R satisface la C.C.A. sobre anuladores a la izquierda.

(iii) Todo R-módulo a la izquierda finitamente generado y $E({}_RR)$-torsionless se encaja en un R-módulo a la izquierda libre y R verifica la C.C.A. sobre anuladores a la izquierda.

En caso de satisfacerse las condiciones anteriores, $\tau_0 = \lambda$; es decir, $\mathcal{F}_0$ es la clase de los R-módulos a la izquierda $E({}_RR)$-torsionless. Por tanto, R tiene C.C.A. sobre ideales a la izquierda racionalmente cerrados.

Demostración: (i) ⇒ (ii) Evidente.

(ii) ⇒ (i) Por la Proposición 2.2.14., R es λ-noetheriano. El

Teorema 2.2.4. asegura que R es FTF a la izquierda y que $\tau_0 = \lambda$. Así, R es τ_0-noetheriano.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Es claro que R satisface la C.C.A. sobre anuladores a la izquierda. Sea M un R-módulo a la izquierda finitamente generado y $E({}_RR)$-torsionless. Entonces M es τ_0-libre de torsión. Además, como R es τ_0-noetheriano M resulta ser τ_0-finitamente presentado. Por la Proposición 2.1.6., M se encaja en un R-módulo libre.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Por [Ru, Lemma 2] tenemos que $E({}_RR)$ es un R-módulo a la izquierda π-plano. □

Observación 2.2.16. Supongamos que R verifica las condiciones equivalentes del Teorema 2.2.15. y sea M un submódulo de un R-módulo a la izquierda plano. Entonces M es τ_0-libre de torsión y es unión de sus submódulos finitamente generados. De esta manera, M es unión dirigida de R-módulos a la izquierda τ_0-libres de torsión y finitamente generados. Como R es τ_0-noetheriano, cada uno de estos R-módulos finitamente generados es τ_0-finitamente presentado. Según la Proposición 2.1.6. cada uno de estos submódulos de M se encaja en un R-módulo a la izquierda libre de rango finito. Hemos obtenido, por tanto, que M es unión dirigida de submódulos de módulos libres de rango finito. Recíprocamente, por ser τ_0 de tipo finito, un R-módulo a la izquierda que sea unión dirigida de submódulos de R-módulos libres de rango finito es τ_0-libre de torsión. Por tanto, podemos asegurar que los submódulos de R-módulos a la izquierda planos son exactamente las uniones dirigidas de submódulos de R-módulos a la izquierda libres de rango finito.

Corolario 2.2.17. *Si R es un anillo FTF a la izquierda y τ_0-noetheriano entonces un ideal a la izquierda I de R es denso si y sólo si $r(I) = 0$.*

Demostración: Por el Teorema 2.2.15., $\tau_0 = \lambda$ y, por tanto, los ideales a la izquierda densos son precisamente los ideales a la izquierda τ_0-densos. De esta manera, I es denso si y sólo si $Cl^R_{\tau_0}(I) = R$. Como R es τ_0-noetheriano, I es τ_0-finitamente generado. Así, según la Proposición 2.1.8., $Cl^R_{\tau_0}(I) = \ell r(I)$. Por tanto, I es denso si y sólo si $\ell r(I) = R$ si y sólo si $r(I) = 0$. □

Lema 2.2.18. *Si todo submódulo cíclico de $E({}_RR)$ es torsionless, entonces todo ideal a la izquierda racionalmente cerrado es un anulador a la izquierda.*

Demostración: Dado un ideal a la izquierda I racionalmente cerrado, se tiene que R/I es $E({}_RR)$-torsionless. Por tanto, existe un monomorfismo $f:R/I \longrightarrow E({}_RR)^C$, para algún conjunto C. Sea, para cada $c \in C$, $f_c:R/I \longrightarrow E({}_RR)$ la composición de f con la c-ésima proyección canónica desde $E({}_RR)^C$ sobre $E({}_RR)$ y denotemos por I_c/I el núcleo de f_c. Es claro que $I = \bigcap \{I_c : c \in C\}$. Ahora bien, R/I_c es isomorfo a un submódulo cíclico de $E({}_RR)$. De esta manera, R/I_c es torsionless. Esto implica que I_c es un anulador a la izquierda para cada $c \in C$. Como $I = \bigcap \{I_c : c \in C\}$, tenemos que I ha de ser necesariamente anulador a la izquierda de un subconjunto de R. □

Teorema 2.2.19. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.*

(i) Cualquier submódulo finitamente generado de $E(_RR)$ es torsionless y R satisface la C.C.D. sobre anuladores a la izquierda.

(ii) $E(_RR)$ es plano y R verifica la C.C.D. sobre ideales a la izquierda racionalmente cerrados.

(iii) R es FTF y es tanto τ_0-noetheriano como τ'_0-noetheriano.

(iv) R es FTF y es tanto τ_0-artiniano como τ'_0-artiniano.

(v) R es un anillo FTF a la izquierda τ_0-artiniano.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Por el Lema 2.2.18., R verifica la C.C.D. sobre ideales a la izquierda racionalmente cerrados. Esto es, R es λ-artiniano. Para obtener que $E(_RR)$ es plano, usaremos [Ru, Lemma 2]. Si M es un submódulo finitamente generado de $E(_RR)$, entonces M es λ-libre de torsión y es λ-artiniano. Además, M es torsionless. Usando el mismo argumento que en [Ma, pág. 382], obtenemos que M se encaja en un R-módulo a la izquierda libre. Con esto, $E(_RR)$ ha de ser plano.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como R es λ-artiniano, R debe ser λ-noetheriano según [MiT, Theorem 1.4] y, por tanto, R es λ-coherente. Por el Corolario 2.2.10., R es FTF a la derecha. R tiene C.C.D. sobre anuladores a la izquierda ya que cada anulador a la izquierda es un ideal a la izquierda racionalmente cerrado. De aquí, R tiene C.C.A. sobre anuladores a la derecha. La versión "a derechas" del Teorema 2.2.15. nos asegura que R es τ'_0-noetheriano. De aquí, R es τ'_0-coherente lo que implica, según el Corolario 2.2.10. que R es FTF a la izquierda. Como R es λ-noetheriano, tiene C.C.A. sobre anuladores a la izquierda y el Teorema 2.2.15. afirma que R es τ_0-noetheriano.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como R satisface la C.C.D. sobre anuladores a la izquierda por ser τ'_0-noetheriano, nos basta con probar que un anillo FTF a la izquierda con C.C.D. sobre anuladores a la izquierda y τ_0-noetheriano ha de ser por fuerza τ_0-artiniano. Supongamos que R es un anillo con C.C.D. sobre anuladores a la izquierda τ_0-noetheriano. Consideremos una cadena descendente de ideales a la izquierda τ_0-cerrados en R

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

Dado que R es τ_0-noetheriano, todo ideal a la izquierda de R es τ_0-finitamente generado. Podemos deducir, por tanto, de la Proposición 2.1.8. que cada eslabón de la cadena descendente

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

es un anulador a la izquierda. Como R verifica C.C.D. sobre anuladores a la izquierda, esta cadena debe pararse. Hemos probado de esta manera que R es τ_0-artiniano.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Trivial.

(v) $\Rightarrow$ (i) Observemos que, por ser R τ_0-artiniano, R sastisface la C.C.A. sobre anuladores a la izquierda. Además, por [MiT, Theorem 1.4], R es τ_0-noetheriano. El Teorema 2.2.15. muestra ahora que todo submódulo finitamente generado de $E({}_RR)$ es torsionless. □

Observación 2.2.20. Por el Teorema 2.2.15. tenemos que para un anillo FTF a la izquierda es equivalente tener C.C.A. sobre anuladores a la izquierda y ser τ_0-noetheriano. Esto nos llevó a plantearnos la siguiente cuestión: Si R es un anillo FTF a la izquierda con C.C.D. sobre anuladores a la izquierda, ¿es R τ_0-artiniano? La respuesta a esta pregunta es negativa, para lo cual construiremos un ejemplo. Dado que utilizaremos el Corolario 2.2.10., el ejemplo que obtendremos será el de un anillo FTF a la derecha con C.C.D. sobre anuladores a la derecha que no es τ'_0-artiniano, si bien es verdad que podríamos haber utilizado la versión "a derechas" de tal Corolario y trabajar sobre R^{op}.

Ejemplo 2.2.21. Consideremos A un dominio de Ore a ambos lados de manera que exista un A-módulo a la izquierda S inyectivo, simple e isomorfo a R/Ra, para cierto $A \in A$. Además supondremos que A es noetheriano a la izquierda y que no es un anillo de división. Para la existencia de tal anillo, remitimos a [Cz] o [T3]. Consideremos el anillo

$$R = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde $C = \mathrm{End}_A({}_AS)$. Dado que A es noetheriano a la izquierda, ${}_AS$ es finitamente generado y C es un anillo de división, es fácil deducir que R es un anillo noetheriano a la izquierda. Utilizando la argumentación desarrollada en [Ta2, Example, Pág 78] es posible demostrar que

$$E({}_RR) = \begin{pmatrix} D & S \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde D es el anillo de división de fracciones de A. Observemos que $E({}_RR)$ se puede descomponer como suma directa de R-submódulos a la izquierda

$$E({}_RR) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Queremos demostrar que $E({}_RR)$ es plano. Para ello denotemos por

$$I = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Es claro que I es un ideal de R que es sumando directo de R como ideal a la izquierda. Por tanto, ${}_RI$ es proyectivo. De aquí, para obtener que $E({}_RR)$ es plano, es suficiente con comprobar que

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es plano como R-módulo a la izquierda. Como $IM = 0$, resulta que M es un R/I-módulo a la izquierda. Ahora bien, R/I es claramente isomorfo, como anillo, a A y, teniendo en cuenta tal isomorfismo, M es isomorfo al A-módulo a la izquierda D. Como A es un dominio de Ore a la izquierda y a la derecha, podemos asegurar que ${}_AD$ es plano. De este modo M es un R/I-módulo a la izquierda plano. Observemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cualesquiera sean $s \in S$ y $c \in C$. Por [S1, XI.3.13] tenemos que M es plano como R-módulo a la izquierda. De esta manera, $E({}_RR)$ es plano lo que, junto al hecho de ser R noetheriano a la izquierda, permite aplicar el Corolario 2.2.10. para obtener que R es FTF a la derecha. Nuestro objetivo es demostrar que R no es

τ'_0-noetheriano. Recordemos que $S \cong A/Aa$, para cierto $a \in A$. Desde luego, no hay pérdida de generalidad por suponer que tal isomorfismo es la identidad. Sea, para cada número natural n,

$$I_n = \begin{pmatrix} Aa^n & S \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Dado que A es un dominio de integridad que no es anillo de división, Aa^n contiene estrictamente a Aa^{n+1}, de manera que

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_{n+1} \supset \dots$$

es una cadena estrictamente decreciente de ideales a la izquierda de R. En lo que sigue vamos a demostrar que $\ell r(I_n) = I_n$ para todo número natural n.

Es rutinario comprobar que

$$r(I_n) = \begin{pmatrix} 0 & X^n+Aa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $X^n = \{ b \in A \mid a^n b \subseteq Aa \}$ y $X^n+Aa = \{ b+Aa \in A/Aa \mid b \in X^n \}$. Observemos que $X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq \dots$. Con esta notación no es difícil obtener que

$$\ell r(I_n) = \begin{pmatrix} Y^n & S \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde $Y^n = \{ x \in A \mid xX^n \subseteq Aa\}$. Vamos a probar por inducción sobre n que $Y^n = Aa^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que, en cualquier caso, $Aa^n \subseteq Y^n \subseteq Aa$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $x \in Y^n$ entonces $xX^n \subseteq Aa$. Como $1 \in X^n$, obtenemos que $x \in Aa$. En particular, tomando $n = 1$, se tiene que $Aa = Y^1$. Si $n > 1$, consideremos el isomorfismo de A-módulos a la izquierda ϕ: $Aa^{n-1}/Aa^n \longrightarrow A/Aa$ definido por $\phi(ba^{n-1}+Aa^n) = b+Aa$, para cada $b \in A$. Que ϕ está bien definido es consecuencia de ser A un dominio. En efecto, si $ba^{n-1} \in Aa^n$ entonces $ba^{n-1} = ca^n$ para algún $c \in A$, lo que implica que $b = ca$.

Como $A/Aa = S$ es inyectivo como A-módulo a la izquierda, existe $\psi: A/Aa^n \longrightarrow A/Aa$ tal que $\psi|_{Aa^{n-1}/Aa^n} = \phi$. Sea $y \in A$ tal que $\psi(1+Aa^n) = y + Aa$. Observemos que $y \in X^n$. En efecto, $a^n y + Aa = a^n(y+Aa) = a^n\psi(1+Aa^n) = \psi\ (a^n+Aa^n) = 0+Aa$, por lo que $a^n y \in Aa$. Consideremos ahora $x \in Y^n$. Como $xX^n \subseteq Aa$ tenemos que $xy \in Aa$, o sea, $xy+Aa = Aa$. Pero $xy+Aa = \psi(x+Aa^n)$, por lo que obtenemos que $xy+Aa \in \mathrm{Ker}\psi$. Por otra parte, dado que $X^{n-1} \subseteq X^n$, tenemos que $xX^{n-1} \subseteq xX^n \subseteq Aa$. Por hipótesis de inducción, $Y^{n-1} = Aa^{n-1}$, por lo que, según lo anterior, $x \in Aa^{n-1}$. De este modo, $x+Aa^n \in \mathrm{Ker}\psi \cap (Aa^{n-1}/Aa^n) = \mathrm{Ker}\phi = 0$. Esto es, $x \in Aa^n$. De esta manera concluimos que $Y^n \subseteq Aa^n$ lo que, junto con el hecho antes observado de que $Aa^n \subseteq Y^n$, nos permite concluir que $Aa^n = Y^n$.

De esta manera, $\ell r(I_n) = I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que la cadena de ideales a la izquierda

$$I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$$

es estrictamente decreciente, se sigue de aquí que la cadena de anuladores a la derecha

$$r(I_1) \subset \ldots \subset r(I_n) \subset \ldots$$

es estrictamente creciente. Esto significa que R no es τ'_0-noetheriano y, por tanto, tampoco puede ser τ'_0-artiniano. Sin embargo, al ser R noetheriano a la izquierda, R satisface la C.C.D. sobre anuladores a la derecha.

Por último observemos dos consecuencias curiosas de las propiedades deducidas para R. Primero, A no puede ser conmutativo ya que, si lo fuese, es fácil comprobar que $\ell r(I_n) = I_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en contradicción con lo demostrado. De esta manera, podemos asegurar que si A es un dominio de integridad noetheriano y conmutativo y existe un A-módulo simple e inyectivo, entonces A ha de ser un cuerpo. Por otra parte, si se tuviera que S_C tiene dimensión finita como C-espacio vectorial, entonces R sería noetheriano a la derecha y, por tanto, tendría C.C.D. sobre anuladores a la izquierda. Así que $\dim_C(S_C) = \infty$.

Hemos visto por medio del anterior ejemplo que un anillo FTF a la izquierda con C.C.D. sobre anuladores a la izquierda no tiene que ser necesariamente τ_0-artiniano (el ejemplo es R^{op}). El siguiente resultado que pretendemos demostrar proporciona una condición necesaria y suficiente para que tal equivalencia sea posible (Teorema 2.2.24.). Para construir la prueba de tal resultado, necesitamos establecer previamente una nueva caracterización de los R-módulos τ-artinianos para una teoría de torsión hereditaria τ sobre R-Mod que pensamos tiene interés por sí misma (Proposición 2.2.23.).

Lema 2.2.22. *Sea*

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$$

una cadena estrictamente descendente de submódulos de un R-módulo a la izquierda M. Supongamos que M/C tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita, donde $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. *Entonces existen números naturales* $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ *y una cadena estrictamente descendente*

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$$

de submódulos principales de M tales que $M_i \le C_{n_i}$ pero $M_i \not\le C_{n_{i+1}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demostración: Para cada $i \in \mathbb{N}$ escribimos $\bar{C}_i = C_i/C$. Tenemos una cadena estrictamente descendente

$$\bar{C}_1 \supset \bar{C}_2 \supset \ldots \supset \bar{C}_n \supset \ldots$$

de submódulos de $\bar{M} = M/C$ con $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{C}_i = 0$. Afirmamos que existe un número natural n_1 tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, $\bar{C}_n$ es esencial en $\bar{C}_{n_1}$. De hecho, vamos a probar que si la anterior afirmación no es cierta, entonces existe una familia linealmente independiente $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de submódulos no nulos de $\bar{M}$. Procedemos inductivamente como sigue: Sea $r_2 \ge 1$ tal que $\bar{C}_{r_2}$ no es esencial en $\bar{C}_1$, es decir, existe un submódulo no nulo $B_1 \le \bar{C}_1$ tal que $B_1 \cap \bar{C}_{r_2} = 0$. Supongamos como hipótesis de inducción que existen números naturales $1 = r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ y submódulos no nulos $B_1, \ldots, B_{n-1}$ de $\bar{M}$ tales que $B_i \le \bar{C}_{r_i}$ para $i=1,\ldots,n-1$ y $B_i \cap \bar{C}_{r_{i+1}} = 0$ para $i = 1,\ldots,n-1$. Dado que suponemos que la afirmación no es cierta, existe $r_{n+1} > r_n$ tal que $\bar{C}_{r_{n+1}}$ no es esencial en $\bar{C}_{r_{n+1}}$. Esto nos permite escoger un submódulo no nulo $B_n \le \bar{C}_n$ tal que $B_n \cap \bar{C}_{n+1} = 0$. Para tener que $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es independiente, es suficiente con mostrar que $\{B_1, \ldots, B_n\}$ es independiente para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Para ello, sea $x_1 + \ldots + x_n = 0$ con $x_i \in B_i$,donde $i=1,\ldots n$. De aquí, $x_1 = -x_2 - \ldots - x_n$. Pero $x_1 \in B_1$ y $x_2, \ldots, x_n \in \bar{C}_{r_2}$. Esto implica que $x_1 \in B_1 \cap \bar{C}_{r_2} = 0$. Es posible argumentar del mismo modo sobre la igualdad $x_2+\ldots+x_n = 0$ y obtener que $x_2 = 0$; y así sucesivamente. Tras n-1 pasos probamos que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

La afirmación que acabamos de probar puede ser reescrita diciendo que en la cadena

$$\bar{C}_{n_1+1} \supset \bar{C}_{n_1+2} \supset\ldots\supset \bar{C}_{n_1+n} \supset\ldots$$

todas y cada una de las inclusiones son esenciales.

Ahora estamos preparados para construir la cadena

$$M_1 \supset M_2 \supset\ldots\supset M_n \supset\ldots$$

Primero, observemos que $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{p+i}$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Dado que $C \nleq C_{n_1}$, es posible escoger un submódulo principal M_1 de C_{n_1} tal que $C \nleq M_1 + C$, o sea, $\bar{M}_1 = (M_1+C)/C \neq 0$. Afirmamos que existe $n_2 > n_1$ tal que $(M_1+C) \cap C_{n_2} \nleq M_1+C$. De lo contrario, para cada $n > n_1$ deberíamos tener la igualdad

$$(M_1+C) \cap C_n = M_1+C,$$

es decir, $M_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{n_1+i} = C$. Esto contradice la elección de M_1. Además, $\bar{C}_{n_2}$ es esencial en $\bar{C}_{n_1}$ y $\bar{M}_1 \neq 0$. De modo que $\bar{M}_1 \cap \bar{C}_{n_2} \neq 0$, lo que implica que

$$C \nleq (M_1+C) \cap C_{n_2}.$$

Por la ley modular,

$$C \nleq (M_1+C) \cap C_{n_2} = (M_1 \cap C_{n_2}) + C.$$

De esta forma podemos elegir un submódulo principal $M_2 \subseteq M_1 \cap C_{n_2}$ con $C \nleq M_2+C$. Observemos que

$$C \nleq M_2+C \subseteq (M_1 \cap C_{n_2}) + C = (M_1+C) \cap C_{n_2} \nleq M_1+C$$

y que $M_1 \nleq C_{n_2}$.

Supongamos inductivamente que existen números naturales $n_1 <\ldots< n_r$ y submódulos principales de M, $M_1,\ldots,M_r$ verificando

(a) $M_i \subseteq C_{n_i}$ para $i = 1,\ldots,r$;

(b) $C \nsubseteq M_r+C \nsubseteq \ldots\ldots \nsubseteq M_1+C$

(c) $M_i \nsubseteq C_{n_{i+1}}$ para $i = 1,\ldots,r$.

Como en el primer paso de la inducción, esiste un número natural $n_{r+1} > n_r$ tal que $(M_r+C) \cap C_{n_{r+1}} \nsubseteq M_r + C$. Como $\bar{C}_{n_{r+1}}$ es esencial en $\bar{C}_{n_r}$, tenemos que $C \nsubseteq (M_r+C) \cap C_{n_{r+1}}$ y la ley modular asegura la existencia de un submódulo principal $M_{r+1} \subseteq M_r \cap C_{n_{r+1}}$ con $C \nsubseteq C + M_{r+1}$.

De esta forma hemos obtenido una cadena estrictamente descendente de submódulos de M

$$M_1 + C \supset M_2 + C \supset\ldots\supset M_n + C \supset\ldots$$

con M_i principal y $M_{i+1} \subseteq M_i \cap C_{n_{i+1}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De manera que debemos tener que $M_{i+1} \nsubseteq M_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y esto proporciona la deseada cadena estrictamente descendente de submódulos principales de M

$$M_1 \supset M_2 \supset\ldots\supset M_n \supset\ldots \qquad \square$$

Proposición 2.2.23. *Sea τ una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod. Un R-módulo a la izquierda M es τ-artiniano si y sólo si las siguientes condiciones (a) y (b) son satisfechas:*

(a) Para cualquier cadena descendente de submódulos principales de M

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$$

existe un número natural n_0 *tal que para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq n_0$, M_n/M_{n+1} *es* τ*-torsión.*

(b) Toda imagen homomórfica y τ*-libre de torsión de M tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita.*

Demostración: Si M es τ-artiniano, la condición (a) se sigue inmediatamente. Además, cualquier imagen homomórfica τ-libre de torsión de M es τ-artiniana y es fácil mostrar que un R-módulo a la izquierda τ-libre de torsión y τ-artiniano tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita. Esto da la condición (b).

Recíprocamente, supongamos que M satisface las condiciones (a) y (b) pero no es τ-artiniano. Entonces existe una cadena estrictamente descendente de submódulos τ-cerrados de M

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$$

Es claro que $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ es un submódulo τ-cerrado de M, esto es, M/C es τ-libre de torsión. Así, por la condición (b), M/C tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita. Aplicando el Lema 2.2.22. encontramos números naturales $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ y una cadena estrictamente descendente de submódulos principales de M

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$$

tales que $M_i \subseteq C_{n_i}$ pero $M_i \nsubseteq C_{n_{i+1}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por (a), existe un número natural n_0 tal que para cualquier $i \geq n_0$, M_i/M_{i+1} es τ-torsión. Esto implica que para $i \geq n_0$

$$M_i \subseteq Cl_{\tau}^{M}(M_{i+1}) \subseteq C_{n_{i+1}},$$

una contradicción □

Teorema 2.2.24. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) R es FTF a la izquierda, R satisface la C.C.D. sobre anuladores a la izquierda y cualquier R-módulo a la izquierda cíclico y E($_R$R)-torsionless tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita.

(ii) E($_R$R) es plano, R satisface la C.C.D. sobre anuladores a la izquierda y cualquier R-módulo a la izquierda cíclico y E($_R$R)-torsionless tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita.

(iii) R es un anillo FTF a la izquierda τ_0-artiniano.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (ii). Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Probaremos que R es λ-artiniano, para λ la teoría de torsión de Lambek sobre R-Mod. Para ello, usaremos la Proposición 2.2.23. Evidentemente, la condición (b) en tal Proposición para $\tau = \lambda$ está contenida en (ii), de modo que sólo tenemos que comprobar que R satisface la condición (a) para λ. Sea

$$Ra_1 \supseteq Ra_2 \supseteq \ldots \supseteq Ra_n \supseteq \ldots$$

una cadena descendente de ideales a la izquierda. Entonces $\lambda(R/Ra_i) = Cl_\lambda^R(Ra_i)/Ra_i$. Por 2.2.12., $(R/Ra_i)/\lambda(R/Ra_i)$ es torsionless. Pero $(R/Ra_i)/\lambda(R/Ra_i) \cong R/Cl_\lambda^R(Ra_i)$. De esta manera $R/Cl_\lambda^R(Ra_i)$ es torsionless con lo que $Cl_\lambda^R(Ra_i)$ es un anulador a la izquierda para cada i. De esta manera la cadena de ideales a la izquierda

$$Cl_\lambda^R(Ra_1) \supseteq Cl_\lambda^R(Ra_2) \supseteq \ldots \supseteq Cl_\lambda^R(Ra_n) \supseteq \ldots$$

es una cadena descendente de anuladores a la izquierda y, por tanto, debe pararse. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier número natural $n \geq n_0$, $Cl_\lambda^R(Ra_n) = Cl_\lambda^R(Ra_{n+1})$, esto es, Ra_n/Ra_{n+1} es λ-torsión. Por la Proposición 2.2.23. obtenemos que R es λ-artiniano. Aplicando el Teorema 2.2.19. deducimos que anillo FTF a la izquierda τ_0-artiniano. □

(iii) ⇒ (i) Esto es claro. □

Corolario 2.2.25. *Sea R un anillo con dimensión de Krull a la izquierda. Entonces R es FTF y τ_0-artiniano si y sólo si $E(_RR)$ es plano y R tiene la C.C.D. sobre anuladores a la izquierda.*

Demostración: Aplicación directa del Teorema 2.2.24. □

2.3. EL LOCALIZADO DE UN ANILLO FTF A LA IZQUIERDA.

El objetivo central de esta Sección es demostrar que si R es un anillo FTF a la izquierda, entonces $Q_{\tau_0}(R)$ es asímismo un anillo FTF a la izquierda. Para establecer la anterior afirmación es conveniente disponer de alguna información sobre el comportamiento de los submódulos de módulos planos bajo extensión y restricción de escalares con respecto de un homormorfismo inyectivo de anillos. De otra parte, este estudio será útil en posteriores secciones.

En esta sección denotaremos por $\rho:S\longrightarrow T$ un monomorfismo de anillos asociativos con unidad. En la Sección 1.2. habíamos observado que la clase de los S-módulos a la izquierda que son isomorfos como S-módulos a algún S-submódulo de un T-módulo a la izquierda coincdide con $\mathcal{F}(\rho)$. Recordemos que si

$$\theta_M:M\longrightarrow T\otimes_S M$$

está definido por

$$\theta_M(x) = 1\otimes x, \text{ para todo } x \in M,$$

y todo S-módulo a la izquierda M, entonces $M \in \mathcal{F}(\rho)$ si y sólo si θ_M es un monomorfismo de S-módulos. Por otra parte, podemos considerar la clase de los S-módulos a la izquierda de se encajan en S-módulos a la izquierda planos. Esta clase será denotada por $\mathcal{F}_0^S$. La clase análoga en T-Mod será denotada por $\mathcal{F}_0^T$. El siguiente lema recoge las relaciones básicas etre estas clases. Advertimos que la clase $\mathcal{F}_0^T$, aún siendo por definición una clase de T-módulos a la izquierda, será considerada en ocasiones como una clase de S-módulos a la izquierda, por restricción de escalares.

Lema 2.3.1. *(1)* $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(\rho)$.

(2) Si $M \in$ *S-Mod es S-plano entonces* $T\otimes_S M$ *es T-plano.*

(3) Supongamos que T_S *es plano. Si* $M \in \mathcal{F}_0$ *entonces* $T\otimes_S M \in \mathcal{F}_0^T$.

(4) Supongamos que ${}_ST$ *es plano. Si* $M \in$ *T-Mod es T-plano entonces* ${}_SM$ *es S-plano.*

(5) Supongamos que ${}_ST$ *es plano. Entonces* $\mathcal{F}_0^T \subseteq \mathcal{F}_0$.

(6) Supongamos que ${}_ST$ *y* T_S *son planos. Un S-módulo a la izquierda* M *está en la clase* $\mathcal{F}_0$ *si y sólo si es isomorfo a un S-submódulo de un T-módulo plano.*

Demostración: (1) Se demostró en la Sección 1.3.

(2) Esto es bien conocido.

(3) Supongamos que T_S es plano y sea $M \in \mathcal{F}_0$. Entonces existe un monomorfismo de S-módulos $M \rightarrowtail P$, donde ${}_SP$ es plano. Aplicando el funtor exacto $T\otimes_S-$ obtenemos un monomorfismo de T-módulos a la izquierda desde $T\otimes_S M$ hasta el T-módulo plano $T\otimes_S P$.

(4) Sea ${}_TM$ plano. Para cada monomorfismo de S-módulos a la izquierda $f:N \rightarrowtail L$ se tiene, por ser ${}_ST$ plano, el monomorfismo de T-módulos a la derecha $f\otimes T:N\otimes_S T \rightarrowtail L\otimes_S T$. Dado que ${}_TM$ es plano, obtenemos el monomorfsimo de grupos abelianos

$$f\otimes T\otimes M:N\otimes_S T\otimes_T M \rightarrowtail L\otimes_S T\otimes_T M.$$

Como $T\otimes_T M$ es naturalmente isomorfo a ${}_TM$, se sigue que el morfismo de grupos abelianos $f\otimes M:N\otimes_S M \rightarrowtail L\otimes_S M$ es inyectivo. De aquí, M es plano como S-módulo a la izquierda.

(5) Es una consecuencia inmediata de (4).

(6) Sea $M \in \mathcal{F}_0$. Por (3), $T \otimes_S M \in \mathcal{F}_0^T$ y, según (1), M se encaja como S-módulo en $T \otimes_S M$. Esto prueba que M es isomorfo a un S-submódulo de un T-módulo plano.

El recíproco es consecuencia de (4) □

Seguidamente vamos a demostrar que si R es un anillo FTF a la izquierda, entonces $Q_{\tau_0}(R)$ es también un anillo FTF a la izquierda. Para ello, necesitaremos el siguiente lema, que pensamos debe ser conocido, pero del que no disponemos de referencia precisa.

Lema 2.3.2. *Sea τ una teoría de torsión hereditaria y fiel sobre R-Mod, Q un anillo tal que $R \subseteq Q$ y Q/R es τ-torsión y M un Q-módulo a la izquierda que es τ-libre de torsión considerado como R-módulo a la izquierda. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados:*

(1) M es inyectivo como Q-módulo a la izquierda si y sólo si M es inyectivo como R-módulo a la izquierda.

Si M es $\aleph_0$-inyectivo como Q-módulo, entonces es $\aleph_0$-inyectivo como R-módulo.

(2) Si ${}_QM \longrightarrow {}_QN$ es una extensión esencial de Q-módulos, entonces ${}_RM \longrightarrow {}_RN$ es una extensión esencial de R-módulos a la izquierda.

(3) La estructura de R-módulo a la izquierda inducida sobre la envolvente inyectiva $E({}_QM)$ del Q-módulo a la izquierda M

proporciona una envolvente inyectiva del R-módulo a la izquierda ${}_R M$.

Demostración: (1) Comprobemos primeramente que si ${}_Q M$ es inyectivo entonces ${}_R M$ es inyectivo. Para ello utilizaremos el criterio de Baer. Así, consideremos cualquier ideal a la izquierda I de R y cualquier R-homomorfismo $f:I \longrightarrow M$. Es claro que $QI \subseteq Q$ es un ideal a la izquierda de Q. Definimos $f^Q:QI \longrightarrow M$ como sigue

$$f^Q(\sum_{i=1}^{n} q_i r_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i f(r_i)$$

para cualesquiera $q_i \in Q$ y $r_i \in I$, $i = 1,\dots,n$.

Primeramente, hemos de demostrar que f^Q está bien definida. Para ello tomemos $\sum_{i=1}^{n} q_i r_i = \sum_{j=1}^{m} p_j s_j \in QI$, con q_i, $p_j \in Q$ y r_i, $s_j \in I$ para $i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,m$. Queremos ver que

$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(r_i) = \sum_{j=1}^{m} p_j f(s_j)$$

Sea D un ideal a la izquierda del filtro $\mathcal{L}(\tau)$ tal que $Dq_i \subseteq R$ y $Dp_j \subseteq R$ para $i=1,\dots,n$ y $j=1,\dots,m$. Afirmamos que

$$D(\sum_{i=1}^{n} q_i f(r_i) - \sum_{j=1}^{m} p_j f(s_j)) = 0$$

En efecto, dado $d \in D$, tenemos

$$\begin{gathered} d(\sum_{i=1}^{n} q_i f(r_i) - \sum_{j=1}^{m} p_j f(s_j)) = \\ \sum_{i=1}^{n} dq_i f(r_i) - \sum_{j=1}^{m} dp_j f(s_j)) = \\ \sum_{i=1}^{n} f(dq_i r_i) - \sum_{j=1}^{m} f(dp_j s_j) = \\ f(d(\sum_{i=1}^{n} q_i r_i - \sum_{j=1}^{m} p_j s_j)) = f(0) = 0 \end{gathered}$$

De modo que $D(\sum_{i=1}^{n} q_i f(r_i) - \sum_{j=1}^{m} p_j f(s_j)) = 0$. Como M es τ-libre de torsión se tiene que $\sum_{i=1}^{n} q_i f(r_i) - \sum_{j=1}^{m} p_j f(s_j) = 0$, como se quería. Es muy fácil probar que la aplicación f^Q es un homomorfismo de Q-módulos a la izquierda.

Recordemos que M es un Q-módulo inyectivo. De este modo, ha de existir una aplicación Q-lineal

$$\bar{f}^Q : Q \longrightarrow M$$

que extienda a f^Q. Sea

$$\bar{f} : R \longrightarrow M$$

la restricción de $\bar{f}^Q$ a R. $\bar{f}$ es R-lineal por ser $\bar{f}^Q$ Q-lineal. Es inmediato comprobar que $\bar{f}$ es una extensión de f. Con esto concluimos que $_R M$ es inyectivo.

En el caso de ser M $\aleph_0$-inyectivo como Q-módulo se razona como antes considerando que si I es un ideal a la izquierda de R finitamente generado, entonces QI es un ideal a la izquierda de Q finitamente generado.

Supongamos ahora que M es inyectivo como R-módulo a la izquierda y sea $f : X \longrightarrow M$ un Q-homomorfismo, donde X es cualquier ideal a la izquierda de Q. En particular,

$$f : X \longrightarrow M$$

es un homomorfismo de R-módulos a la izquierda. Ya que M es un R-módulo inyectivo, existe un morfismo de R-módulos a la izquierda

$$\bar{f} : Q \longrightarrow M$$

que extiende a f. Comprobemos que este R-homomorfismo es Q-lineal. Para ello, sea $q \in Q$ y tomemos $D \in \mathcal{L}(\tau)$ de manera que $Dq \subseteq R$. Es fácil comprobar que $D(q\bar{f}(q') - \bar{f}(qq')) = 0$ para cualquier $q' \in Q$. Pero M es τ-libre de torsión, lo que nos asegura que $q\bar{f}(q') - \bar{f}(qq') = 0$.

(2) Sea $_Q M \rightarrowtail {_Q N}$ una extensión esencial de Q-módulos. Esto

significa que, dado $0 \neq x \in N$, existe $q \in Q$ de manera que $0 \neq qx \in M$. Sea $D \in \mathcal{L}(\tau)$ tal que $Dq \subseteq R$. Dado que M es τ-libre de torsión, se tiene que $Dqx \neq 0$. De aquí, existe $d \in D$ tal que $dqx \neq 0$. Observemos que $dq \in R$ y esto prueba que la extensión es esencial cuando se considera en R-Mod.

(3) Esto es una consecuencia de (1) y (2) junto con el hecho de que la envolvente inyectiva de un módulo es cualquier extensión esencial inyectiva suya. □

Proposición 2.3.3. *Sea R un anillo FTF a la izquierda y $Q = Q_{\tau_0}(R)$. Todo Q-módulo a la izquierda plano es τ_0-libre de torsión como R-módulo a la izquierda.*

Demostración: Sea ${}_QM$ un Q-módulo a la izquierda plano. Por el Teorema de Lazard [Lz, Théorème 1.2] ${}_QM \cong \varinjlim_{i \in I} F_i$, donde $\{F_i, \psi_{ij}\}_{i,j \in I}$ es un sistema dirigido de Q-módulos a la izquierda libres de rango finito. El funtor restricción de escalares tiene como adjunto a la derecha al funtor coinducción $\mathrm{Hom}_R(Q,-)$ y es exacto, por lo que conmuta con límites directos. Por tanto, podemos concluir que ${}_RM \cong \varinjlim_{i \in I} F_i$, donde cada F_i es un R-módulo a la izquierda isomorfo a una suma directa finita de copias de ${}_RQ$. Pero cada uno de estos R-módulos es τ_0-libre de torsión. Como τ_0 es de tipo finito y hemos visto que ${}_RM$ es límite directo de R-módulos a la izquierda τ_0-libres de torsión, resulta que ${}_RM$ es τ_0-libre de torsión (Proposición 1.3.6.). □

Con los anteriores resultados estamos preparados para demostrar que si R es un anillo FTF a la izquierda entonces $Q_{\tau_0}(R)$ también es un anillo FTF a la izquierda. Para establecer un enunciado de este hecho que optimice la información recogida, vamos a recordar algunos hechos a propósito de la inducción de teorías de torsión mediante un homomorfismo de anillos. Concretamente, si $S \longrightarrow T$ es un homomorfismo de anillos y τ es una teoría de torsión hereditaria sobre S-Mod, es posible inducir una teoría de torsión hereditaria $\bar{\tau}$ sobre T-Mod estableciendo por definición que un T-módulo a la izquierda ${}_TM$ es $\bar{\tau}$-torsión si y sólo si ${}_SM$ es τ-torsión. La misma idea no funciona en general si la inducción se hace mediante los módulos libres de torsión. Así, si consideramos la clase **F** de aquellos T-módulos a la izquierda que son τ-libres de torsión considerados como S-módulos a la izquierda, **F** no es necesariamente una clase libre de torsión para teoría de torsión hereditaria alguna sobre T-Mod. La relación general de que se dispone es que $\mathbf{F} \subseteq \mathcal{F}(\bar{\tau})$ (ver [Lo, Lemma 2.1.]). Sin embargo, Louden [Lo, Theorem 2.5] encontró condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la igualdad $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\bar{\tau})$. Entre estas condiciones se encuentra la siguiente:

(B) Para cada S-módulo a la izquierda τ-torsión M, el S-módulo a la izquierda $T \otimes_S M$ es τ-torsión.

Una teoría de torsión satisfaciendo la condición (B) se dirá <u>compatible con el morfismo de anillos</u> $S \longrightarrow T$ (En la terminología original de Louden, la teoría de torsión se decía T-buena.).

Si R es un anillo FTF a la izquierda y $Q = Q_{\tau_0}(R)$, denotaremos, de acuerdo con lo anterior, por $\bar{\tau}_0$ a la teoría de torsión hereditaria sobre Q-Mod inducida por el monomorfismo de anillos canónico $R \longrightarrow Q$.

Teorema 2.3.4. *Si R es un anillo FTF a la izquierda entonces $Q = Q_{\tau_0}(R)$ es un anillo FTF a la izquierda. En tal caso, $\tau_0^Q = \bar{\tau}_0$.*

Demostración: Llamemos $Q = Q_{\tau_0}(R)$. Según la Proposición 2.1.2., hemos de probar que si ${}_QM$ es un Q-módulo a la izquierda plano entonces $E({}_QM)$ es asímismo plano y que para cualquier familia $\{{}_QE_i : i \in I\}$ de Q-módulos a la izquierda planos e inyectivos, el producto directo $\Pi\{{}_QE_i : i \in I\}$ es un Q-módulo a la izquierda plano. Procedemos inmediatamente a mostrar pruebas de estos hechos.

(a) Sea M un Q-módulo a la izquierda plano. Según el Lema 2.3.2. ${}_RM$ es τ_0-libre de torsión. Por el Lema 2.3.1.(2) $E({}_RM) = {}_RE({}_QM)$. Esto implica que ${}_RE({}_QM)$ es plano. Por el Lema 2.3.1.(2), $Q \otimes_R E({}_QM)$ es un Q-módulo a la izquierda plano. Además, tenemos R-monomorfismo canónico

$$E({}_QM) \rightarrowtail\xrightarrow{\theta} Q \otimes_R E({}_QM)$$

dado por $\theta(x) = 1 \otimes x$, para todo $x \in E({}_QM)$. En realidad, θ es Q-lineal. Para ello basta con observar que, según la Proposición

2.3.3., $Q\otimes_R E({}_QM)$ es τ_0-libre de torsión como R-módulo a la izquierda. Dado que $E({}_QM)$ es inyectivo, se tiene que θ escinde, por lo que $E({}_QM)$ es isomorfo como Q-módulo a la izquierda a un sumando directo del Q-módulo a la izquierda plano $Q\otimes_R E({}_QM)$. Así, $E({}_QM)$ es plano.

(b) Sea $\{{}_QE_i : i \in I\}$ una familia de Q-módulos a la izquierda planos e inyectivos y sea $E = \Pi\{{}_QE_i : i \in I\}$. Por el Lema 2.3.2.(1) y la Proposición 2.3.3., ${}_RE_i$ es un R-módulo plano e inyectivo para cada $i \in I$. De este modo, E resulta ser un R-módulo a la izquierda plano e inyectivo. Tenemos un monomorfismo de R-módulos a la izquierda $E \rightarrowtail Q\otimes_R E$. Como $Q\otimes_R E$ es plano como Q-módulo a la izquierda, $Q\otimes_R E$ debe ser, según la Proposición 2.3.3., τ_0-libre de torsión. Por tanto, $E \rightarrowtail Q\otimes_R E$ es un monomorfismo de Q-módulos a la izquierda, con lo que concluimos que E es un Q-módulo a la izquierda plano.

Para demostrar que $\tau_0^Q = \bar{\tau}_0$ observemos primero que la teoría de torsión τ_0 es compatible con el morfismo de anillos $R \longrightarrow Q$ [Gl, Proposition 47.4]. De esta manera, de acuerdo con la discusión que antecede al enunciado de este Teorema, $\mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$ coincide con la clase de todos aquellos Q-módulos a la izquierda que son τ_0-libres de torsión considerados como R-módulos a la izquierda. Es decir,

$$\mathcal{F}(\bar{\tau}_0) = \{{}_QM \mid {}_RM \in \mathcal{F}_0\} \qquad (*)$$

Esto, combinado con la Proposición 2.3.3., implica que

$$\mathcal{F}_0^Q \subseteq \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$$

Si M es un Q-módulo a la izquierda $\bar{\tau}_0$-libre de torsión, entonces, según (*), ${}_RM \in \mathcal{F}_0$. En tal caso podemos deducir como en

(a) que $E({}_QM)$ es un Q-módulo a la izquierda plano. En particular, M es τ_0^Q-libre de torsión. De esta manera, podemos afirmar que $\mathcal{F}_0^Q = \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$. Pero dado que toda teoría de torsión está unívocamente determinada por su clase libre de torsión, podemos concluir que $\tau_0^Q = \bar{\tau}_0$, con lo que la prueba del Teorema queda completa. □

Proposición 2.3.5. *Sea R un anillo FTF a la izquierda. Entonces $Q_{\tau_0}(R)$ es un anillo IF a la izquierda si y sólo si τ_0 es nice (o perfecta).*

Demostración: Supongamos que $Q_{\tau_0}(R) = Q$ es un anillo IF a la izquierda. Cualquier Q-módulo a la izquierda se encaja en un Q-módulo a la izquierda plano. Según la Proposición 2.3.5., esto significa que todo Q-módulo a la izquierda es τ_0-libre de torsión como R-módulo a la izquierda. Pero esto significa que τ_0 es perfecta [Gl, Proposition 45.1]. En particular, τ_0 es nice (Teorema 1.2.8.).

Recíprocamente, si τ_0 es nice entonces es perfecta por la Proposición 1.3.6. y el Teorema 1.2.8. De esta manera, dado M cualquier Q-módulo a la izquierda, podemos asegurar que M es τ_0-libre de torsión [Gl, Proposition 45.1]. Pero esto implica que M debe ser isomorfo a un submódulo de un Q-módulo plano por el Teorema 2.3.4. Así, cada Q-módulo a la izquierda se encaja en un Q-módulo plano. Esto es, Q es un anillo IF a la izquierda. □

Observación 2.3.6. Hemos visto en el Teorema 2.3.4. que si R es

FTF a la izquierda entonces $Q_{\tau_0}(R)$ es asímismo FTF a la izquierda. Nos proponemos demostrar que, aún en el caso de que τ_0 sea perfecta y R conmutativo, $Q_{\tau_0}(R)$ no coincide necesariamente con $Q^l_{max}(R)$. Para desarrollar un ejemplo en apoyo de tal afirmación, necesitamos establecer previamente un par de resultados previos.

Lema 2.3.7. *Si τ es una teoría de torsión hereditaria de tipo finito entonces todo R-módulo a la izquierda τ-libre de torsión y $\aleph_0$-inyectivo es τ-inyectivo.*

Demostración: Sea M un R-módulo a la izquierda τ-libre de torsión y $\aleph_0$-inyectivo y consideremos $I \in \mathcal{L}(\tau)$ y $f:I \longrightarrow R$ un homomorfismo de R-módulos a la izquierda. Siendo τ de tipo finito, existe un ideal a la izquierda finitamente generado J contenido en I de manera que I/J es τ-torsión. Como M es $\aleph_0$-inyectivo, la restricción $f_{|J}$ de f a J se extiende a un homomorfismo $g:R \longrightarrow M$. Para concluir basta con observar que $g_{|I}-f$ es nula sobre J lo que, por ser M τ-libre de torsión y J τ-denso en I, implica que $g_{|I} = f$. □

Proposición 2.3.8. *Consideremos un homomorfismo inyectivo de anillos $\rho:R \longrightarrow S$ tal que $_RS$ y S_R son R-módulos planos y S es un anillo IF. Entonces R es un anillo FTF. Además, si S/R es τ_0-torsión, entonces y $S = Q_{\tau_0}(R)$ y τ_0 es perfecta.*

Demostración. R es FTF por la Proposición 2.1.3. Dado que suponemos que S es IF se sigue de [C, Theorem 1] que S es auto-$\aleph_0$-inyectivo a la izquierda. Según el Lema 2.3.3., ${}_R S$ es $\aleph_0$-inyectivo y por el Lema 2.3.7. ${}_R S$ resulta ser τ_0-inyectivo. Como $S \subseteq Q_{\tau_0}(R)$ S/R es τ_0-torsión, la única salida posible es aceptar que $S = Q_{\tau_0}(R)$. La perfección de τ_0 viene ahora asegurada por la Proposición 2.3.5. □

Ejemplo 2.3.9. Sea D un dominio de integridad conmutativo y K su cuerpo de fracciones. Consideremos Ω un conjunto infinito. Denotaremos por D^{Ω} (resp. por K^{Ω}) al anillo producto directo indicado en Ω de copias de D (resp. de K). Defininos el subanillo R de D^{Ω} consistente en todas aquellas aplicaciones $r:\Omega \longrightarrow D$ cuya imagen Im r es un subconjunto finito de D. Análogamente definimos S es subanillo de K^{Ω} cuyos elementos son las aplicaciones $s:\Omega \longrightarrow K$ con imagen finita. Es evidente que $R \subseteq S$. Nuestro primer objetivo es demostrar que R es un anillo FTF. Esto lo haremos en varios pasos.

Paso 1. Sea F un D-módulo libre de rango finito y definamos ${}^{\Omega}F$ como el conjunto de las aplicaciones $x:\Omega \longrightarrow F$ cuya imagen es finita. ${}^{\Omega}F$ puede ser dotado de estructura de R-módulo del siguiente modo: Si $x \in {}^{\Omega}F$ y $r \in R$, definimos $rx:\Omega \longrightarrow F$ por medio de la regla $(rx)(\omega) = r(\omega)x(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Vamos a demostrar seguidamente que ${}^{\Omega}F$ es un R-módulo libre de rango finito. Para ello, consideremos una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de F. Definimos $f_k:\Omega \longrightarrow F$ por $f_k(\omega) = e_k$ para todo $\omega \in \Omega$ y para cada $k = 1,\dots,n$. En primer lugar comprobaremos que $\{f_1,\dots,f_n\} \subseteq {}^{\Omega}F$ es un conjunto linealmente independiente. Si $r_1f_1+\dots+r_nf_n = 0$ para ciertos $r_1,\dots,r_n \in R$ entonces, dado $\omega \in \Omega$ cualquiera, $0 = (r_1f_1+\dots+r_nf_n)(\omega) = r_1(\omega)f_1(\omega)+\dots+r_n(\omega)f_n(\omega) = r_1(\omega)e_1+\dots+r_n(\omega)e_n$. De aquí, $r_k(\omega) = 0$ para cualquier $\omega \in \Omega$, es decir, $r_k = 0$ para cada $k =1,\dots,n$.

Seguidamente demostraremos que el conjunto linealmente independiente $\{f_1,\dots,f_n\}$ es un conjunto de generadores de ${}^{\Omega}F$. Dado $x \in {}^{\Omega}F$ con $\mathrm{Im}\ x = \{y_1,\dots,y_m\} \subseteq F$, podemos escribir $x = x_1+\dots+x_m$, donde

$$x_k(\omega) = \begin{cases} y_k, & \text{si } x(\omega) = y_k \\ 0, & \text{si } x(\omega) \neq y_k \end{cases}$$

con lo que no hay pérdida de generalidad si suponemos que $\mathrm{Im}\ x \subseteq \{0,y\}$ para algún $y \in F$. Podemos expresar $y = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$, para coeficientes $d_1,\dots,d_k \in D$. En tal caso consideramos $r_k \in R$ para cada $k = 1,\dots,n$ definido por

$$r_k(\omega) = \begin{cases} d_k, & \text{si } x(\omega) = y \\ 0, & \text{si } x(\omega) \neq y \end{cases}$$

Es claro que $\sum_{k=1}^{n} r_kf_k = x$, con lo que concluimos que $\{f_1,\dots,f_n\}$ es una base de ${}^{\Omega}F$ sobre R.

<u>Paso 2</u>. Afirmamos que ${}_RS$ es plano. Para ello utilizaremos que ${}_DK$ es plano. Por el Teorema de Lazard [Lz, Théorème 1.2], $K = \varinjlim_{i\in I} F_i$, donde $\{F_i, \psi_{ij}\}$ es un sistema dirigido de D-módulos libres de rango finito indicado por un conjunto dirigido I. Denotaremos por $\psi_i:F_i \longrightarrow K$ al D-homomorfismo canónico para cada $i \in I$. Hemos mostrado en el paso 1 que ${}^{\Omega}F_i$ es un R-módulo libre para cada $i \in I$. Si definimos $\phi_{ij}:{}^{\Omega}F_i \longrightarrow {}^{\Omega}F_j$ para $i\leq j$ mediante la asignación $\phi_{ij}(x) = \psi_{ij}\circ x$ para cada $x \in {}^{\Omega}F_i$ obtenemos aplicaciones que

verifican que para $i \leq j \leq k$, $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$. Además es fácil comprobar que estas aplicaciones preservan la suma. De hecho, son homomorfismos de R-módulos. Comprobamos a continuación la R-linealidad. Dado $x \in {}^{\Omega}F_i$, $r \in R$ y $\omega \in \Omega$, se tiene

$$\phi_{ij}(rx)\,(\omega) = (\psi_{ij} \circ rx)(\omega) = \psi_{ij}(r(\omega)x(\omega)) = r(\omega)\psi_{ij}(x(\omega)) =$$
$$r(\omega)(\psi_{ij} \circ x)(\omega) = r(\omega)(\phi_{ij}(x))(\omega) = (r\phi_{ij}(x))(\omega)$$

de donde $\phi_{ij}(rx) = r\phi_{ij}(x)$.

De esta manera $\{{}^{\Omega}F_i, \phi_{ij}\}$ constituye un sistema dirigido de R-módulos, lo que permite considerar el R-módulo $\varinjlim_{i \in I} {}^{\Omega}F_i$. Denotemos, para cada $i \in I$, por $\phi_i : {}^{\Omega}F_i \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} {}^{\Omega}F_i$ el R-homomorfismo canónico. Seguidamente definimos para cada $i \in I$ un R-homomorfismo $\varepsilon_i : {}^{\Omega}F_i \longrightarrow S$ mediante la fórmula $\varepsilon_i(x) = \psi_i \circ x$, para cada $x \in {}^{\Omega}F_i$. Para $i \leq j$ y $x \in {}^{\Omega}F_i$ tenemos

$$(\varepsilon_j \circ \phi_{ij})\,(x) = \varepsilon_j(\phi_{ij}(x)) = \varepsilon_j(\psi_{ij} \circ x) = \psi_j \circ \psi_{ij} \circ x = \psi_i \circ x = \varepsilon_i(x)$$

lo que muestra que $\varepsilon_j \circ \phi_{ij} = \varepsilon_i$. Esto permite definir un R-homomorfismo $\varepsilon : \varinjlim_{i \in I} {}^{\Omega}F_i \longrightarrow S$ que satisface $\varepsilon \circ \phi_i = \varepsilon_i$ para cada $i \in I$. La idea ahora es demostrar que ε es un isomorfismo.

Dado $x \in \varinjlim_{i \in I} {}^{\Omega}F_i$ con $\varepsilon(x) = 0$, existe $x_i \in {}^{\Omega}F_i$ de manera que $x = \phi_i(x_i)$ para algún $i \in I$. Así,

$$0 = \varepsilon(x) = \varepsilon(\phi_i(x_i)) = \varepsilon_i(x_i) = \psi_i \circ x_i$$

Dado $\omega \in \Omega$, tenemos $0 = (\psi_i \circ x_i)(\omega) = \psi_i(x_i(\omega))$. Ahora bien, Im x_i es un subconjunto finito de F_i, digamos $\{y_1,\ldots,y_n\}$. Para cada $k = 1,\ldots,n$, existe $j_k \geq i$ tal que $\psi_{ij_k}(y_k) = 0$. Como I es dirigido, es posible encontrar $j \geq j_k$ para $k = 1,\ldots,n$. Sea $\omega \in \Omega$ cualesquiera. Existe $k = 1,\ldots,n$ tal que $x_i(\omega) = y_k$. De aquí,

$$\psi_{ij}(x_i(\omega)) = \psi_{ij}(y_k) = (\psi_{j_k j}\circ\psi_{ij_k})(y_k) = 0$$

lo que implica que

$$\phi_i(x_i) = (\phi_j\circ\phi_{ij})(x_i) = \phi_j(\phi_{ij}(x_i)) = \phi_j(\psi_{ij}\circ x_i) = \phi_j(0) = 0$$

De esta forma, $x = \phi_i(x_i) = 0$, y $\mathrm{Ker}\ \varepsilon = 0$, o sea, ε es un monomorfismo de R-módulos.

Para comprobar que ε es sobreyectiva, consideremos $s \in S$ cualquiera. Como en el paso 1, es posible suponer sin pérdida de generalidad que $\mathrm{Im}\ s \subseteq \{0,k\}$ para algún $k \in K$. Como $K = \varinjlim_{i\in I} F_i$, existe $a_i \in F_i$ tal que $k = \psi_i(a_i)$ para algún $i \in I$. Definimos $x_i:\Omega \longrightarrow F_i$ por la regla

$$x_i(\omega) = \begin{cases} a_i, \text{ si } s(\omega) = k \\ 0, \text{ si } s(\omega) \neq k \end{cases}$$

Es claro que $x_i \in {}^{\Omega}F_i$, por lo que $\phi_i(x_i) \in \varinjlim_{i\in I} {}^{\Omega}F_i$. Pero

$$\varepsilon(\phi_i(x_i)) = \varepsilon_i(x_i) = \psi_i\circ x_i = s.$$

Con lo cual concluimos que $\varepsilon:\varinjlim_{i\in I} {}^{\Omega}F_i \longrightarrow S$ es un isomorfismo. Como cada ${}^{\Omega}F_i$ es libre según el paso 1, el Teorema de Lazard nos asegura que S es plano como R-módulo.

<u>Paso</u> <u>3</u>. S es un anillo regular Von Neumann. En efecto, dado $x \in S$ no nulo, definimos $a:\Omega \longrightarrow K$ por

$$a(\omega) = \begin{cases} 1/x(\omega)\ , \text{ si } x(\omega) \neq 0 \\ 0, \text{ si } x(\omega) = 0 \end{cases}$$

Claramente, $a \in S$ y $axa = a$.

<u>Paso</u> <u>4</u>. Por la Proposición 2.3.8., R es un anillo FTF. Probaremos seguidamente que S/R es τ_0-torsión. Dado $s \in S$, $\mathrm{Im}\ s = \{k_1,\dots,k_n\} \subseteq K$. Como K es el cuerpo de fracciones de D, existe $d \in D$ no nulo tal que $\{dk_1,\dots,dk_n\} \subseteq D$. Sea $r:\Omega \longrightarrow D$ definido por $r(\omega) = d$

para todo $\omega \in \Omega$. Es claro que $r \in D$ y que $rs \in R$. Pero, además, $ann_R(d) = 0$, lo que implica, según la Proposición 2.1.5., que $Rd \in \mathcal{L}(\tau_0)$. Así concluimos que R es τ_0-denso en S, es decir, S/R es τ_0-torsión. Según la Proposición 2.3.8., $S = Q_{\tau_0}(R)$ y τ_0 es perfecta.

<u>Paso</u> <u>5</u>. $Q^1_{max}(R) = K^{\Omega}$. En efecto, dado que K^{Ω} es un anillo regular autoinyectivo, para obtener que $Q^1_{max}(R) = K^{\Omega}$ basta con que demostremos, según [Gd, Proposition 2.11], que R es esencial en K^{Ω}. Dado $x \in K^{\Omega}$ no nulo, escogemos $\omega_0 \in \Omega$ tal que $x(\omega_0) \neq 0$. Entonces existe $d \in D$ tal que $0 \neq dx(\omega_0) \in D$. Definimos $r:\Omega \longrightarrow D$ como

$$r(\omega) = \begin{cases} d, \text{ si } \omega = \omega_0 \\ 0, \text{ si } \omega \neq \omega_0 \end{cases}$$

Es claro que $r \in R$, $rx \in R$ y $rx \neq 0$.

<u>Conclusión</u>. Si tomamos D un dominio con infinitos elementos y que no coincida con su cuerpo de fracciones K, es claro que $R \neq S \neq K^{\Omega}$. En tal caso, R es un ejemplo de anillo FTF conmutativo para el que τ_0 es perfecta y verificando que $Q_{\tau_0}(R) \neq Q_{max}(R)$. Además, $Q_{max}(R)$ es asímismo un anillo FTF (de hecho, regular). Por supuesto, $\tau_0 \neq \lambda$. □

Teorema 2.3.10. *Un anillo R tiene un anillo maximal de cocientes bilátero y QF si y sólo si R es FTF a la izquierda, τ_0 es nice (o perfecta) y R es τ_0-artiniano.*

Demostración: Supongamos que Q es un anillo maximal de cocientes bilátero y QF de R. Según [St, Proposition XI.3.4], tanto Q_R como $_RQ$ son R-módulos planos. Por la Proposición 2.3.8., R es FTF. Como Q es artiniano, R tiene C.C.A. sobre anuladores a la izquierda y anuladores a la derecha. Por el Teorema 2.2.15., R es tanto τ_0-noetheriano como τ'_0-noetheriano. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 2.2.19. para obtener que R es τ_0-artiniano. Además, $\tau_0 = \lambda$, con lo que $Q = Q_{\tau_0}(R)$. Pero entonces la Proposición 2.3.8. nos asegura que τ_0 es perfecta.

Recíprocamente, supongamos que R es FTF a la izquierda con τ_0 nice y R τ_0-artiniano. Por la Proposición 2.3.5., $Q = Q_{\tau_0}(R)$ es un anillo IF a la izquierda. Pero como τ_0 es perfecta (Proposición 1.3.6. y Teorema 1.2.8.) y R es τ_0-artiniano, Q debe ser artiniano a la izquierda. En particular, R es perfecto a la derecha, por lo que, según [C], Q es QF. Notemos que, por ser R τ_0-artiniano, $\tau_0 = \lambda$. Así, Q es el anillo maximal de cocientes a la izquierda de R. Además, al ser R FTF τ'_0-artiniano y τ_0-artiniano, se sigue del Teorema 2.2.19. y de [Ta2, Proposition 4.6] que Q es asímismo el anillo maximal de cocientes a la derecha de R □

2.4. Anillos FTF y anillos QF-3.

Uno de los aspectos fundamentales del concepto de anillo FTF a la izquierda es que la envolvente inyectiva de cada módulo plano resulta ser un módulo plano. En particular, $E(_RR)$ es un R-módulo a la izquierda plano. Esta última propiedad mereció la atención de K. Morita quien, en 1973, propuso estudiar los anillos R para los cuales $E({}_RR)$ es plana bajo el nombre de anillos QF-3 a la izquierda, sugiriendo que esta noción era más apropiada para anillos noetherianos que la clásica. Dado que nosotros usaremos elnombre "anillo QF-3" en un sentido diferente, proponemos la siguiente definición:

Definición: Diremos que un anillo R es Morita-QF-3 (o MQF-3, brevemente) a la izquierda cuando $E({}_RR)$ es un R-módulo a la izquierda plano.

Esta última definición es una de las muchas que se propusieron en los años 60 y 70 como generalizaciones del concepto de álgebra QF-3, introducido por Thrall en 1948. A su vez, la noción de álgebra QF-3 es una extensión del concepto de álgebra quasi-Frobenius. De hecho, casi cada una de las condiciones que caracterizan a las álgebras QF-3 ha dado lugar a un concepto de anillo general QF-3. Existe una literatura extensa para cada aproximación. En la actualidad, dos décadas más tarde, y a raíz de los trabajos de Ringel-Tachikawa y Colby-Rutter, una de las nociones más extendidas es, de hecho, la propuesta por Thrall.

Definición Diremos que un anillo R es QF-3 a la izquierda cuando exista un R-módulo a la izquierda fiel minimal W en el sentido de que W es isomorfo a un sumando directo de cualquier otro R-módulo a la izquierda fiel. Si R es un anillo QF-3 a la izquierda y a la derecha, diremos simplemente que R es un anillo QF-3.

Por supuesto, todo anillo QF es QF-3.

Sin embargo, el concepto de anillo MQF-3 se ha revelado interesante en el contexto del estudio de los módulos reflexivos y la dualidad ([Mo1], [Ho1], [Ho2], [E3]). Otra de las generalizaciones de álgebra QF-3, con conexiones también con los módulos reflexivos, es la propuesta por Sumioka en [S1] (ver también [S2]). Reproducimos a continuación su definición.

Definición. Un anillo R se dirá Sumioka-QF-3 (o, brevemente, SQF-3) a la izquierda cuando todo submódulo finitamente generado de $E({}_RR)$ es torsionless.

Volviendo a los anillos FTF a la izquierda, y dado que éstos generalizan el concepto de anillo QF al igual que los anillos QF-3 a la izquierda, encontramos oportuno buscar algunas relaciones entre ambas nociones. En primer lugar, un anillo artiniano a la izquierda es QF-3 a la izquierda si y sólo si $E({}_RR)$ es un R-módulo a la izquierda proyectivo o equivalentemente, $E({}_RR)$ es plano. De aquí la propuesta de definición de anillo QF-3 a la izquierda de Morita. El estudio de los anillos QF-3 artinianos se trasladó seguidamente a la investigación de los anillos QF-3 semiprimarios (ver [CR1], [CR3] y [Ta1]). Usando básicamente los resultados allí demostrados y nuestros resultados sobre anillos

FTF, vamos a relacionar los conceptos de anillo QF-3 y FTF en el contexto de generalizaciones de anillos artinianos.

Proposición 2.4.1. *Si R es un anillo perfecto a la izquierda y FTF a la izquierda entonces R es semiprimario y QF-3.*

Demostración: Si P es cualquier R-módulo a la izquierda proyectivo, entonces $E({}_RP)$ es plano según la Proposición 2.1.2. Por [Bs, Theorem P], $E({}_RP)$ es proyectivo. De esta manera todo R-módulo a la izquierda proyectivo tiene envolvente inyectiva proyectiva. Según [CR1, Theorem 1.3 and Theorem 1.2] R es semiprimario y contiene un ideal a la izquierda fiel e inyectivo y un ideal a la derecha fiel e inyectivo. En vista de [Ta1, Proposition 3.1], R es QF-3. □

Proposición 2.4.2. *Si R es un anillo perfecto y QF-3, entonces R es FTF y semiprimario. Además, R es τ_0-artiniano.*

Demostración: Según [CR1, Theorem 1.3], R contiene un ideal a la izquierda fiel I, $\sum$-inyectivo y π-proyectivo. De esta manera, $E({}_RR)$ se encaja en un producto directo de copias de I. En particular, $E({}_RR)$ es π-proyectivo. Además, la teoría de torsión de Lambek a la izquierda sobre R-Mod, λ, está cogenerada por I. Como I es $\sum$-inyectivo, esto significa, por [T1, Theorem 1.2] que R es λ-noetheriano, es decir, R verifica la C.C.A. sobre ideales a la izquierda racionalmente cerrados. Según el Teorema 2.2.15. y la

Proposición 2.2.9. R es un anillo FTF y τ_0-noetheriano. Por último, la Proposición 2.4.1. asegura que R es semi-primario.

Como la anterior prueba es simétrica, R es también τ'_0-noetheriano. El Teorema 2.2.19. nos permite concluir que R es τ_0-artiniano. □

Teorema 2.4.3. *Sea R un anillo perfecto. R es FTF si y sólo si R es QF-3. En tal caso, R es semiprimario.*

Demostración: Combinar las Proposiciones 2.4.1. y 2.4.2. □

Sin ánimo de exhaustividad nos hemos preguntado si esta equivalencia entre los conceptos de anillo FTF y QF-3 se sigue manteniendo para generalizaciones más débiles de anillo artiniano, tales como anillo perfecto a un sólo lado o anillo semiperfecto. También nos hemos planteado si es posible obtener versiones "a un sólo lado" del Teorema 2.4.3., en el sentido de sustituir QF-3 por QF-3 a la izquierda y FTF por FTF a la izquierda. Hemos obtenido una respuesta negativa en casi todas las tentativas, como veremos un poco más adelante mediante una serie de ejemplos.

Antes de mostrar los citados ejemplos, es conveniente recordar que Osofsky [O] descubrió que existen anillos R autoinyectivos y cogeneradores que no son QF. Estos son los llamados anillos pseudo-Frobenuis. Concretamente, un anillo R se dirá PF (pseudo-Frobenius) a la izquierda si y sólo si R es un cogenerador inyectivo de R-Mod. Además, todo anillo PF a la izquierda es semiperfecto [Fl, Proposition 24.32] y QF-3 a la izquierda [Ta2, Proposition 4.7].

Ejemplo 2.4.4. Existen anillos PF conmutativos que no son FTF. Como consecuencia, existen anillos semiperfectos y QF-3 que no son FTF a la izquierda ni a la derecha. El ejemplo que vamos a mostrar se debe a Levy [Le]. Seguiremos la exposición de Faith [Fl, Example 24.35]. Sea R el anillo de todas las series de potencias formales con coeficientes reales en una variable x indicadas por la familia W de todos los conjuntos bien ordenados de números reales no negativos. Es decir, un elemento r de R tiene la forma $\sum_{i\in W} a_i x^i$, con $a_i \in \mathbb{R}$. Los ideales finitamente generados de R son principales de la forma Rx^a, para algún $a \in W$, y los ideales no finitamente generados de R son de la forma

$$(x^{>a}) = \{\, ux^b \mid b>a \text{ y } u \text{ una unidad de } R\}$$

Todo anillo de la forma R/I con I un ideal no nulo de R es PF. Tomemos $I = (x^{>1})$ y vamos a demostrar que R/I no es FTF. Razonaremos por reducción al absurdo. Si R/I fuese FTF, entonces cualquier producto directo de copias de R/I sería un R/I-módulo inyectivo y τ_0-libre de torsión y, por tanto, plano. Esto significa que R/I ha de ser coherente. Según el Teorema de Chase [Cs] el anulador de cualquier elemento de R/I ha de ser un ideal finitamente generado. Tomamos $x+I \in R/I$. Vamos a comprobar que $((x^{>0})+I)/I$ es exactamente el anulador de $x+I$. Claramente $(x^{>0})x \subseteq (x^{>1}) = I$, con lo que $((x^{>0})+I)/I \subseteq \mathrm{ann}_{R/I}(x+I)$. Pero $(x^{>0})$ es el único ideal maximal de R, por lo que $((x^{>0})+I)/I$ es el único ideal maximal de R/I. De esta manera, si $((x^{>0})+I)/I \neq \mathrm{ann}_{R/I}(x+I)$ entonces $\mathrm{ann}_{R/I}(x+I) = R/I$. Pero esto implica que $x+I = 0$, o sea, $x \in I = (x^{>1})$, lo cual no es cierto. Así, $\mathrm{ann}_{R/I}(x+I) = ((x^{>0})+I)/I$. Como hemos deducido que R/I es coherente del hecho de ser R/I FTF, $((x^{>0})+I)/I$ ha de ser finitamente generado, es decir, ha de ser de la forma J+I/I para algún ideal finitamente generado J de R. Así, ha de existir $a \in W$ tal que $Rx^a+(x^{>1}) = (x^{>0})+(x^{>1}) = (x^{>0})$. Pero si tomamos $0<b< \min \{a,1\}$ es claro que $x^b \in (x^{>0})$ y $x \notin Rx^a+(x^{>1})$, lo cual es una contradicción. Esto nos obliga a admitir que R/I no puede ser FTF. □

Ejemplo 2.4.5. Existen anillos semiperfectos FTF que no son QF-3 a la derecha ni a la izquierda. De nuevo, el ejemplo es conmutativo. De hecho, cualquier dominio conmutativo local es semiperfecto, ya que los únicos idempotentes son el 0 y el 1, que se levantan obviamente módulo el ideal maximal. Además sabemos que todo dominio conmutativo es FTF. Sin embargo, salvo en el caso de los cuerpos, el único ideal inyectivo que contiene un dominio es el ideal 0, que no es fiel. Por tanto, los dominios no son anillos QF-3. □

Ejemplo 2.4.6. Existen anillos semiprimarios y QF-3 a la izquierda que no son FTF a la izquierda ni a la derecha. Un ejemplo lo proporciona el siguiente anillo, propuesto por Harada [H]: Sea

$$R = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ M^{*} & D' & 0 \\ D & M & D \end{pmatrix}$$

donde D y D' son anillos de división, M es un D-D'-bimódulo tal que $\dim_D M = \infty$ y $M^{*} = \mathrm{Hom}_D(M,D)$. Entonces R es un anillo semiprimario QF-3 a la izquierda pero no es QF-3 a la derecha (ver [H] o [CR3]). Si R fuese FTF a la izquierda o a la derecha, entonces la Proposición 2.4.1. aseguraría que R es QF-3 a la derecha, y entraríamos en contradicción. □

En contraste con el ejemplo 2.4.6., un anillo artiniano a la izquierda que sea QF-3 a la izquierda ha de ser necesariamente FTF, como muestra la siguiente

Teorema 2.4.7. *Sea R un anillo artiniano a la izquierda. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) R es QF-3 a la izquierda.

(ii) R es QF-3 a la derecha.

(iii) R es FTF a la izquierda.

(iv) R es FTF a la derecha.

Demostración: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Es bien conocido (ver [Ful, Theorem 31.6]) que un anillo artiniano a la izquierda es QF-3 a la izquierda si y sólo si es QF-3 a la derecha.

(i) $\Rightarrow$ (iii) $\wedge$ (iv) Como (i) es equivalente a (ii), la Proposición 2.4.2. permite deducir que R es FTF.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Esto es consecuencia de la Proposición 2.4.2. □

Observación 2.4.8. Hemos visto que para un anillo artiniano a la izquierda los conceptos de anillo FTF y anillo QF-3 coinciden. En el caso noetheriano, esto no ocurre (por ejemplo, tómese un dominio de integridad conmutativo y noetheriano, que es FTF pero no QF-3). Sin embargo, la situación vuelve a ser similar a la del caso artiniano si consideramos algunas generalizaciones de anillo QF-3 y condiciones de cadena sobre anuladores.

Teorema 2.4.9. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(i) R es SQF-3 a la izquierda y verifica C.C.D. sobre anuladores a la izquierda.

(ii) R es MQF-3 a la izquierda y verifica C.C.D. y C.C.A. sobre anuladores a la izquierda.

(iii) R es FTF a la izquierda y τ_0-artiniano.

(i') R es SQF-3 a la derecha y verifica C.C.D. sobre anuladores a la derecha.

(ii') R es MQF-3 a la derecha y verifica C.C.D. y C.C.A. sobre anuladores a la derecha.

(iii') R es FTF a la derecha y τ'_0-artiniano.

Demostración: Dado que la equivalencia entre (i) y (i') se tiene por el Teorema 2.2.19., hemos de justificar tan sólo la equivalencia entre (i), (ii) y (iii). La equivalencia entre (i) y

(iii) está también contenida en el Teorema 2.2.19.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Como R es FTF a la izquierda, $E({}_R R)$ ha de ser plano, esto es, R es MQF-3 a la izquierda. Si R es, además, τ_0-artiniano entonces es asímismo τ_0-noetheriano, por lo que R tiene C.C.D. y C.C.A. sobre anuladores a la izquierda.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos que R es MQF-3 a la izquierda satisfaciendo C.C.A. sobre anuladores a la izquierda. Por la Proposición 2.2.14., R es λ-noetheriano. El Corolario 2.2.10 asegura ahora que R es FTF a la derecha. Pero R tiene C.C.A. sobre anuladores a la derecha lo que implica, según el Teorema 2.2.15., que R es τ'_0-noetheriano. La Proposición 2.2.9. muestra que R es FTF a la izquierda. Como R es λ-noetheriano, concluimos que R es τ_0-noetheriano. Según el Teorema 2.2.19., R es τ_0-artiniano. □

Corolario 2.4.10. *Sea R un anillo verificando la C.C.D. sobre ideales a la izquierda racionalmente cerrados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) R es MQF-3 a la izquierda.

(i') R es MQF-3 a la derecha.

(ii) R es SQF-3 a la izquierda.

(ii') R es SQF-3 a la derecha.

(iii) R es FTF.

Observación 2.4.11. Los anillos caracterizados en el anterior Teorema no son sino los anillos que poseen un anillo maximal de cocientes bilátero semiprimario y QF-3 [Ma1, Theorem 2]. A partir de los resultados expuestos en esta Memoria y de algunos hechos conocidos sobre teorías de torsión previamente al artículo antes citado de Masaike, es posible dar una prueba de [Ma1, Theorem 2], como refleja el siguiente Teorema junto con el Teorema 2.2.19. Hemos de observar, no obstante, que la caracterización de Masaike de los anillos cuyo anillo maximal de cocientes a la izquierda está contenido en su anillo maximal de cocientes a la derecha (ver [Ta2, Proposition 4.6] juega un papel relevante en nuestra prueba.

Teorema 2.4.12. *R es un anillo FTF a la izquierda τ_0-artiniano si y sólo si R posee un anillo maximal de cocientes bilátero semiprimario y QF-3.*

Demostración: Supongamos que R es FTF a la izquierda y τ_0-artiniano. Por el Teorema 2.3.4. $Q = Q_{\tau_0}(R)$ es FTF a la izquierda y τ_0^Q-artiniano. Por [N2, Corollaire 2.10], Q es semiprimario. La Proposición 2.4.1. nos asegura ahora que Q es QF-3. Por otra parte, según el Teorema 2.2.15., $\tau_0 = \lambda$, por lo que $Q = Q^l_{max}(R)$. Por último, el Teorema 2.2.19., combinado con la caracterización de Masaike de los anillos cuyo anillo maximal de cocientes a la izquierda es un anillo maximal de cocientes a la derecha [Ta2, Proposition 4.6] nos asegura que Q es un anillo maximal de cocientes bilátero de R.

Supongamos ahora que R tiene un anillo maximal de cocientes bilátero Q que es semi-primario y QF-3. Por la Proposición 2.4.2., Q es FTF y τ_0-artiniano. En particular, R tiene C.C.D. sobre anuladores a la izquierda. Ahora bien, $E({}_QQ)$ es plano. Como Q es semiprimario, $E({}_QQ)$ proyectivo. Esto, junto con [Ta2, Proposition 4.6], nos asegura que R es SQF-3 a la izquierda. Así, por el Teorema 2.4.9., R es FTF a la izquierda y τ_0-artiniano. □

Cheatham e Enochs [CE] probaron que un anillo conmutativo noetheriano tiene un anillo maximal de cocientes QF si y sólo si R es MQF-3. Como consecuencia de los Teoremas 2.4.12. y 2.4.9., mejoramos tal resultado.

Teorema 2.4.13. *Sea R un anillo conmutativo. $Q_{max}(R)$ es QF si y sólo si R es MQF-3 y tiene C.C.A. sobre anuladores.*

Demostración: Si $Q_{max}(R)$ es QF, el Teorema 2.4.12. asegura que R es FTF y τ_0-artiniano. En particular, R es MQF-3 y tiene C.C.A. sobre anuladores.

Recíprocamente, si R es MQF-3 y tiene C.C.A. sobre anuladores, entonces R es FTF y τ_0-artiniano (Teorema 2.4.9.). Por el Teorema 2.4.12., $Q_{max}(R)$ es semiprimario y QF-3. Pero es fácil comprobar que un anillo conmutativo QF-3 es necesariamente PF. Y un anillo PF y semiprimario es QF. □

Observaciones 2.4.14. (1) A partir del Teorema 2.4.9., es claro que en el Teorema 2.4.13. podemos sustituir MQF-3 por SQF-3.

(2) Recordemos [Ta2] que un anillo R se dice que es QF-3' a la izquierda si $E({}_RR)$ es torsionless. Evidentemente, todo anillo

SQF-3 a la izquierda es QF-3' a la izquierda. J.L. Gómez Pardo y N. Rodríguez González demostraron [GR, Corollary 8] que un anillo R es QF-3' a la izquierda con C.C.D. sobre anuladores a la izquierda si y sólo si $E({}_R R)$ es π-proyectivo. Es fácil deducir que estos son precisamente aquellos anillos para los cuales la clase de los submódulos de R-módulos a la izquierda proyectivos forman una clase libre de torsión. Desde esta perspectiva, la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iii) del Teorema 2.4.9. puede considerarse como una extensión de [GR, Corollary 8], donde se sustituye QF-3' por SQF-3.

2.5. Un teorema sobre localización clásica.

Los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo permiten establecer una caracterización de los anillos SQF-3 a la izquierda que son órdenes a la izquierda en anillos QF.

Teorema 2.5.1. *Sea R un anillo SQF-3 a la izquierda. Entonces R tiene un anillo clásico de cocientes a la izquierda quasi-Frobenius si y sólo si las siguientes condiciones son satisfechas:*

(1) R verifica la C.C.D. sobre anuladores a la izquierda.

(2) Si I es un ideal a la izquierda de R finitamente generado tal que $r(I) = 0$, entonces I contiene un elemento regular.

Demostración: Supongamos que R tiene un anillo clásico de cocientes a la izquierda Q que es quasi-Frobenius. La inclusión de anillos R$\longrightarrow$Q es un epimorfismo de anillos con Q plano como R-módulo a la derecha. Como R es SQF-3, obtenemos por [Ta2, Proposición 4.6] que el anillo maximal de cocientes a la izquierda de R está contenido en el anillo maximal de cocientes a la derecha Q' de R. Dado que Q es autoinyectivo a la izquierda, ha de ser necesariamente el anillo maximal de cocientes a la izquierda de R y, por tanto, Q $\subseteq$ Q'. Pero Q es asímismo autoinyectivo a la derecha, por lo que Q = Q'. Por el Teorema 2.3.10., R es un anillo FTF a la izquierda τ_0-artiniano con τ_0 perfecta. De esta manera, es claro que R tiene C.C.D. sobre anuladores a la izquierda, con lo que hemos probado la condición (1). Para demostrar la condición (2), consideremos un ideal a la izquierda I de R finitamente generado y verificando $r(I) = 0$. La Proposición 2.1.5.(2) asegura que I es τ_0-denso en R. Dado que τ_0 es perfecta, tenemos que QI = I. Así, $1 = \sum_{i=1}^{n} r_i^{-1} y_i$ para r_i elementos regulares de R, $y_i \in I$. Es claro que, si ponemos $r_1 = s_1$, entonces $r_1 = x_1 + q_2^1 x_2 + \ldots + q_n^1 x_n$, para ciertos elementos $q_2^1, \ldots, q_n^1 \in Q$. Como Q es el anillo clásico de fracciones a la izquierda de R, existe un elemento regular r_2 en R tal que $q_2^1 = (r_2)^{-1} t_2$, para algún t_2 en R. De esta manera, $r_2 r_1 = r_2 x_1 + t_2 x_2 + q_3^2 x_3 + \ldots + q_n^2 x_n$, para ciertos elementos $q_3^2, \ldots, q_n^2 \in Q$. Podemos repetir este argumento hasta obtener elementos regulares $r_n, \ldots, r_1$ en R y $t_n, \ldots, t_2$ en R tales que $r = r_n \ldots r_1 = r_n \ldots r_2 x_1 + r_n \ldots r_3 t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n$. Así, r es un elemento regular de R contenido en I.

Recíprocamente, supongamos que R satisface la C.C.D. sobre anuladores a la derecha y que todo ideal a la izquierda I de R finitamente generado tal que $r(I) = 0$ contiene un elemento regular. Como R es SQF-3, el Teorema 2.2.19. asegura que R es FTF a la izquierda y τ_0-artiniano. Sea $Q = Q_{\tau_0}(R)$. Por ser R τ_0-artiniano, Q es el anillo maximal de cocientes a la izquierda de R, ya que $\tau_0 = \lambda$. Con la finalidad de probar que τ_0 es perfecta, consideremos I un ideal a la izquierda τ_0-denso en R. Por la Proposición 2.1.5.(2), $r(I_0) = 0$ para algún ideal a la izquierda I_0 finitamente generado y contenido en I. De esta manera I_0 (y, por tanto, I) contiene un elemento regular r. Dado que r es regular, $Qr \cong Q$, de donde Qr es τ_0-inyectivo y τ_0-libre de torsión. Pero $r(Rr) = 0$, lo que implica, según la Proposición 2.1.5.(2), que Rr es τ_0-denso en R. Pero entonces Qr es τ_0-denso en Q. Dado que Q/Qr ha de ser τ_0-libre de torsión, ya que Q y Qr son τ_0-inyectivos y τ_0-libres de torsión, se sigue que $Qr = Q$. Pero esto da que $QI = Q$. Usando [AM, Theorem 1.10] obtenemos que τ_0 es perfecta. De la Teorema 2.3.10. obtenemos que Q es un anillo maximal de cocientes bilátero de R y Q es QF.

Vamos a mostrar que Q es un anillo clásico de cocientes a la izquierda de R. Para cada $q \in Q$ existe un ideal a la izquierda I denso en R tal que $Iq \subseteq R$. Dado que $r(I) = 0$, R contiene un elemento regular r. Así, $rq \in R$ para $r \in R$ regular. Para terminar la prueba, sólo tenemos que comprobar que cada elemento regular de R es invertible en Q. Si r es regular entonces $r(Rr) = 0$ y $l(rR) = 0$. Como R es FTF a la izquierda y τ_0-artiniano, tenemos por el

Teorema 2.2.19. que R es FTF y tanto τ_0-noetheriano como τ'_0-noetheriano. El Corolario 2.2.17. muestra que Rr y rR son densos. De esta manera, Qr = Q y rQ = Q, ya que λ y λ' son perfectas. Esto completa la prueba. □

Corolario 2.5.2. *Supongamos que R es un anillo QF-3. Las siguientes conciciones son equivalentes*

(i) R es quasi-Frobenius.

(ii) R tiene un anillo clásico de cocientes a la izquierda quasi-Frobenius.

(iii) R tiene la C.C.D. sobre anuladores a la derecha y cualquier ideal finitamente generado I con anulador a la derecha cero contiene un elemento regular.

Demostración: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Se sigue del Teorema 2.5.1.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Claro.

(ii) $\wedge$ (iii) $\Rightarrow$ (i) Como R es QF-3 a la izquierda, es SQF-3 a la izquierda y la prueba del Teorema 2.5.1. permite afirmar que Q es un anillo maximal de cocientes bilátero de R, que R es FTF, y que tanto τ_0 como τ'_0 son perfectas. Como R es QF-3 a la derecha, existe un ideal a la derecha inyectivo y fiel I. De esta manera, $r(RI) = 0$, por lo que RI es un ideal a la izquierda τ_0-denso (Corolario 2.2.17.). Como en la prueba del Teorema 2.5.1., RI contiene un elemento regular r. De esta manera, RI es asímismo un ideal a la derecha τ_0-denso. De esta forma, como τ'_0 es perfecta, obtenemos que RIQ = Q. Dado que I_R es inyectivo, IQ = I, por lo que RI = Q. Esto implica que R = Q. □

Observación 2.5.3. Desde luego, todo anillo QF-3 a la izquierda es SQF-3 a la izquierda. El Corolario 2.5.2. muestra que si R es también QF-3 a la derecha, entonces R no puede tener una localización clásica propia QF. De otra parte, si R es QF-3 a la izquierda y no-singular a la izquierda, la existencia de un anillo clásico de cocientes a la izquierda QF fuerza que R es QF-3 derecha (para ello, combinar el Teorema 2.5.1. con [Ba, Theorem 2.8]) y, por tanto, R es QF. No hemos sido capaces de encontrar un ejemplo de un anillo QF-3 a la izquierda con un anillo clásico de cocientes propio y QF.

Los anillos FPF a la izquierda fueron definidos [FP] como los anillos para los cuales todo módulo a la izquierda fiel y finitemente generado es un generador. Son conocidos algunos resultados sobre localización clásica para estos anillos. Por ejemplo, un anillo Goldie a la izquierda y FPF a la izquierda con C.C.A. sobre anuladores a la derecha tiene un anillo clásico de fracciones a la izquierda QF [Ft, Corollary 4.7]. El Corolario 2.5.4. mejora ligeramente este resultado. De hecho, sustituimos la condición de ser R Goldie a la izquierda por la hipótesis de ser R un anillo con dimensión de Goldie a la izquierda finita.

Corolario 2.5.4. *Sea R un anillo FPF a la izquierda. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) R tiene un anillo clásico de fracciones a la izquierda QF.

(ii) R satisface la C.C.A. sobre anuladores a la derecha y tiene dimensión de Goldie a la izquierda finita.

Demostración: Si R tiene un anillo clásico de fracciones a la izquierda QF, es claro que R satisface (i) y (ii).

Recíprocamente, supongamos R es FPF a la izquierda y verifica las condiciones (i) y (ii). Por [Ft, Corollary 2.9], todo submódulo finitamente generado de $E({}_RR)$ es torsionless. Esto significa que R es SQF-3 a la izquierda satisfaciendo C.C.D. sobre anuladores a la izquierda. Por el Teorena 2.4.9., R es FTF a la izquierda y es τ_0-artiniano. En particular, R es Goldie a la izquierda y podemos aplicar [Ft, Corollary 4.7] para obtener que R tiene un anillo clásico de fracciones a la izquierda QF. □

SOBRE UN TEOREMA DE DADE. APLICACIONES

CAPITULO III

SOBRE UN TEOREMA DE DADE. APLICACIONES

3.1. ANILLOS τ-FUERTEMENTE GRADUADOS

Consideremos $R = \oplus_{g\in G} R_g$ un anillo graduado por un grupo G cuyo elemento neutro denotamos por e. Dado X un R-módulo a izquierda graduado por G, observemos que X_e es un R_e-bisubmódulo de X. En realidad, las anteriores consideraciones pueden resumirse diciendo que tenemos un funtor covariante

$$(-)_e : R\text{-gr} \longrightarrow R_e\text{-Mod} \qquad (1)$$

que sobre morfismos graduados actua por restricción del morfismo a la componente de grado e. Es evidente que $(-)_e$ es exacto. El funtor $(-)_e$ tiene un adjunto a la izquierda que llamaremos funtor inducción

$$\mathrm{Ind}: R_e\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-gr} \qquad (2)$$

y que construimos a continuación siguiendo [NVO1]. Para cada R_e-módulo izquierda A podemos dotar de una G-graduación al R-módulo izquierda $R\otimes_{R_e} A$ poniendo $(R\otimes_{R_e} A)_g = R_g \otimes_{R_e} A$ para cada elemento g de G. Dado que $R = \oplus_{g\in G} R_g$ como R_e-bisubmódulo se obtiene inmediatamente que $R\otimes_{R_e} A = \oplus_{g\in G}(R_g \otimes_{R_e} A)$, lo que da la estructura graduada a $R\otimes_{R_e} A$. Dado un morfismo de R_e-módulos a la izquierda $f:A \longrightarrow B$ definimos $\mathrm{Ind}(f):\mathrm{Ind}(A) \longrightarrow \mathrm{Ind}(B)$ como sigue:

Ind(A) es el R-módulo a la izquierda $R\otimes_{R_e} A$ con la graduación antes descrita e Ind(f) es el morfismo canónico de R-módulos a la izquierda $R\otimes_{R_e} f: R\otimes_{R_e} A \longrightarrow R\otimes_{R_e} B$, que resulta ser de grado e. De esta manera obtenemos una adjunción:

$$\begin{array}{c} R_e\text{-Mod} \\ \mathrm{Ind}\Big\downarrow \Big\uparrow (-)_e \\ R\text{-gr} \end{array} \qquad (3)$$

cuya unidad es el isomorfismo $A \longrightarrow \mathrm{Ind}(A)_e$ para cada $A \in R_e$-Mod y cuya counidad viene dada por el morfismo canónico $\mathrm{Ind}(X_e) \longrightarrow X$ que hace corresponder a $r\otimes x \longmapsto rx$ para $r \in R$ y $x \in X_e$.

Consideremos ahora una teoría de torsión hereditaria $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ sobre R_e-Mod. Entonces $\mathcal{T}$ es una subcategoría localizante de R_e-Mod. Utilizaremos la notación $T_{\mathcal{T}}: R_e\text{-Mod} \longrightarrow R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}$ para designar la categoría cociente de R_e-Mod construida a partir de $\mathcal{T}$ y el funtor exacto canónicamente asociado a esta construcción. Este funtor tiene un adjunto a la izquierda que denotaremos por $S_{\mathcal{T}}$. Es posible definir fácilmente una subcategoría localizante $\mathcal{T}$-gr de R-gr a partir de $\mathcal{T}$. De hecho, basta con considerar la subcategoría plena de R-gr cuyos objetos se describen como

$$\mathcal{T}\text{-gr} = \{X \in R\text{-gr} \mid X_e \in \mathcal{T}\} \qquad (4)$$

Por supuesto, $\mathcal{T}$-gr determina una teoría de torsión $\tau^{gr} = (\mathcal{T}\text{-gr}, \mathcal{F}\text{-gr})$ sobre la categoría de Grothendieck R-gr.

En el siguiente diagrama de funtores

$$
\begin{tikzcd}
R\text{-gr} \arrow[r, shift right, "(-)_e"'] \arrow[d, shift right, "T_{\mathcal{T}\text{-gr}}"'] & R_e\text{-Mod} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Ind}"'] \arrow[d, shift right, "T_{\mathcal{T}}"'] \\
R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr} \arrow[u, shift right, "S_{\mathcal{T}\text{-gr}}"'] \arrow[r, shift right, "{[-]_e}"'] & R_e\text{-Mod}/\mathcal{T} \arrow[u, shift right, "S_{\mathcal{T}}"'] \arrow[l, shift right, "\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}}"']
\end{tikzcd}
$$

la notación graduada ha de entenderse por analogía con la introducida anteriormente para $\mathcal{T}$. Tenemos definidos dos nuevos funtores $\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}} = T_{\mathcal{T}\text{-gr}} \circ \mathrm{Ind} \circ S_{\mathcal{T}}$ y $[-]_e = T_{\mathcal{T}} \circ (-)_e \circ S_{\mathcal{T}\text{-gr}}$. El siguiente resultado asegura que estos funtores no solo están en adjunción, sino que constituyen una equivalencia de categorías.

Proposición 3.1.1. *Los funtores $[-]_e : R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr} \longrightarrow R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}$ e $\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}} : R_e\text{-Mod}/\mathcal{T} \longrightarrow R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr}$ establecen una equivalencia entre las categorías cocientes $R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr}$ y $R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}$.*

Demostración: Si partimos de un objeto A de R_e-Mod/$\mathcal{T}$, tenemos una sucesión exacta en R-gr

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \mathrm{Ind}(S_{\mathcal{T}}A) \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}} T_{\mathcal{T}\text{-gr}} \mathrm{Ind}(S_{\mathcal{T}}A) \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

con X e Y τ^{gr}-torsión. Aplicando el funtor exacto $(-)_e$ obtenemos la sucesión exacta en R_e-Mod

$$0 \longrightarrow X_e \longrightarrow \mathrm{Ind}(S_{\mathcal{T}}A)_e \longrightarrow (S_{\mathcal{T}\text{-gr}} T_{\mathcal{T}\text{-gr}} \mathrm{Ind}(S_{\mathcal{T}}A))_e \longrightarrow Y_e \longrightarrow 0$$

con X_e e Y_e τ-torsión. Por tanto, al aplicar $T_{\mathcal{T}}$ a la anterior sucesión queda un isomorfismo canónico en R_e-Mod/$\mathcal{T}$ entre sus dos puntos medios. Teniendo en cuenta esto, obtenemos los isomorfismos naturales

$$A \cong T_{\mathcal{T}} S_{\mathcal{T}} A \cong T_{\mathcal{T}} \mathrm{Ind}(S_{\mathcal{T}}A)_e \cong T_{\mathcal{T}} \, (S_{\mathcal{T}\text{-gr}} T_{\mathcal{T}\text{-gr}} \mathrm{Ind}(S_{\mathcal{T}}A))_e = [\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}}(A)]_e$$

De esta manera queda construido un isomorfismo natural entre los funtores $Id_{R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}}$ y $[-]_e \circ Ind_{\mathcal{T}}$. Consideremos ahora un objeto X de R-gr/$\mathcal{T}$-gr. Afirmamos que el R_e-módulo a la izquierda $(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$ es τ-cerrado. Para probar la veracidad de tal afirmación, observaremos primero que $(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$ es τ-libre de torsión. En efecto, si $T = \tau(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$, entonces RT es un submódulo graduado τ^{gr}-torsión de $S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$. Como $S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$ es τ^{gr}-libre de torsión, RT = 0 y esto implica que T = 0. Así, $(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$ es τ-libre de torsión. Seguidamente comprobaremos que $(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$ es τ-inyectivo, lo que concluirá la prueba de nuestra afirmación. Para ello consideremos un monomorfismo en R_e-Mod, $A \longrightarrow B$ cuyo conúcleo C sea τ-torsión y una aplicación R_e-lineal $f: A \longrightarrow (S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$. Razonaremos de manera análoga a como se hizo en [NR, Proposition 2.1]. Es claro que el monomorfismo $A \longrightarrow B$ induce un R-homomorfismo graduado con núcleo y conúcleo τ^{gr}-torsión, $Ind(A) \longrightarrow Ind(B)$. Por otra parte, dado que $Ind(A) = R \otimes_{R_e} A$ y que $S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$ es un R-módulo izquierda, el R_e-homomorfismo $f: A \longrightarrow (S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$ se extiende a un R-homomorfismo $\tilde{f}: R \otimes_{R_e} A \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$ definido por $\tilde{f}(r \otimes a) = rf(a)$. Es muy fácil comprobar que $\tilde{f}$ es un morfismo de grado e y, por tanto, podemos considerar $\tilde{f}: Ind(S_{\mathcal{T}}A) \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$ como un morfismo en la categoría R-gr. Dado que $S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$ es τ^{gr}-cerrado y que $Ind(A) \longrightarrow Ind(B)$ tiene núcleo y conúcleo τ^{gr}-torsión, obtenemos un R-homomorfismo de grado e $g: Ind(B) \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$ haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Ind(A) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & Ind(B) \arrow[dl, dotted, "g"] \\ S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X & \end{tikzcd}$$

Aplicando ahora el funtor $(-)_e$ no hay problema en comprobar que g_e extiende a f.

Una vez probado que $(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$ es τ-cerrado podemos definir un isomorfismo natural entre los funtores $\mathrm{Id}_{R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr}}$ e $\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}}\circ[-]_e$ como sigue:

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}}([X]_e) = T_{\mathcal{T}\text{-gr}}(R\otimes_{R_e} S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) \cong$$

$$T_{\mathcal{T}\text{-gr}}(R\otimes_{R_e}(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) \cong T_{\mathcal{T}\text{-gr}}S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X \cong X,$$

donde el penúltimo isomorfismo ocurre porque el R-homomorfismo canónico $R\otimes_{R_e}(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X$ tiene núcleo y conúcleo τ^{gr}-torsión. □

Obsevación 3.1.2. Cuando tomamos en R_e-Mod la subcategoría localizante $\mathcal{T} = \{0\}$ correspondiente a la teoría de torsión trivial, podemos inducir en R-gr la subcategoría localizante

$$\mathcal{Z} = \{X \in R\text{-gr} \mid X_e = 0\}$$

La proposición 3.1.1. significa entonces que la categoría R_e-Mod puede ser reconocida como una categoría cociente de R-gr, como reseña el siguiente corolario, que fue demostrado por primera vez por C. Năstăsescu [N1, Theorem 3.1.].

Corolario 3.1.3. *Para un anillo graduado cualquiera R por un grupo G, los funtores* $[-]_e: R\text{-gr}/\mathcal{Z} \longrightarrow R_e\text{-Mod}$ *e* $\mathrm{Ind}_{\mathcal{Z}}: R_e\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-gr}/\mathcal{Z}$ *establecen una equivalencia de categorías.* □

Como consecuencia del anterior Corolario, R es fuertemente graduado si y sólo si $\mathcal{Z} = \{0\}$. Esto es tanto como decir que la subcategoría localizante $\mathcal{Z}$ de R-gr define una teoría de torsión rígida en R-gr.

Nuestro siguiente objetivo es caracterizar aquellas teorías de torsión τ sobre R_e-Mod para las cuales τ^{gr} es rígida. Esto nos llevará al final de la sección a proponer un concepto relativo de anillo fuertemente graduado que funciona, en muchos aspectos y especialmente en el categórico, de manera análoga al concepto de anillo fuertemente graduado introducido por E. C. Dade en [D1]. Este concepto de anillo fuertemente graduado relativo fue introducido por M.J. Asensio, B. Torrecillas y el autor en [AGT1] y [AGT2] para relacionar las dimensiones plana y de Krull relativas graduadas y no graduadas. Asímismo, aparece en la Tesis Doctoral de M.J. Asensio [A]. Posteriormente, hemos profundizado en tal concepto y hemos mejorado nuestro conocimiento de los anillos τ-fuertemente graduados.

Observemos primeramente que siempre es posible construir a partir de la teoría de torsión hereditaria τ sobre R_e-Mod una teoría de torsión rígida τ^{rig} sobre R-gr de manera natural. Para ello hacemos la siguiente construcción funtorial. Todo R-módulo graduado se descompone, cuando es considerado como R_e-módulo a la izquierda, como suma directa de R_e-submódulos $\underline{X} = \oplus_{g\in G} X_g$ y cualquier morfismo en R-gr, $f:X\longrightarrow Y$, es, tras olvidar la estructura R-lineal, un morfismo de R_e-módulos a la izquierda $\underline{f}:\underline{X}\longrightarrow \underline{Y}$ tal que lleva la g-ésima componente X_g of $\underline{X}$ en la g-ésima componente Y_g de $\underline{Y}$. Esta construcción define un funtor exacto

$$\underline{(\ )}:R\text{-gr}\longrightarrow R_e\text{-Mod}.$$

que permite inducir la teoría de torsión rígida τ^{rig} considerando la subcategoría plena $\mathcal{T}$-rig de R-gr cuyos objetos vienen descritos como sigue

$$\mathcal{T}\text{-rig} = \{X \in R\text{-gr} \mid \underline{X} \text{ es } \tau\text{-torsión}\} = \{X \in R\text{-gr} \mid \underline{X} \in \mathcal{T}\}$$

La exactitud de (_) permite asegurar que $\mathcal{T}$-rig es una subcategoría localizante de R-gr y, por tanto, define una teoría de torsión $\tau^{rig} = (\mathcal{T}\text{-rig}, \mathcal{F}\text{-rig})$ sobre R-gr. Es evidente que $\mathcal{T}\text{-rig} \subseteq \mathcal{T}\text{-gr}$ y, por tanto, $\tau^{rig} \leq \tau^{gr}$. De hecho, τ^{rig} es la mayor de entre todas las teorías de torsión rígidas más pequeñas que τ^{gr}. Para comprobar esto, supongamos que $\kappa \leq \tau^{gr}$ es una teoría de torsión rígida. Hemos de probar que todo R-módulo graduado κ-torsión es τ^{rig}-torsión. Si $X \in$ R-gr es κ-torsión, entonces $X(g)$ es κ-torsión para todo $g \in G$. Como $\kappa \leq \tau^{gr}$, $X(g)$ es τ^{gr}-torsión para todo $g \in G$. De esta manera, $X_g = X(g)_e$ es τ-torsión para todo $g \in G$. Pero esto implica que $\underline{X} = \oplus_{g\in G} X_g$ es τ-torsión. Así, X es τ^{rig}-torsión.

Como antes, la adjunción (3) permite definir funtores entre las categorías cocientes construidas a partir de $\mathcal{T}$ y de $\mathcal{T}$-rig según el siguiente diagrama funtorial

$$\begin{tikzcd}
R\text{-gr} \arrow[d, shift right, "T_{\mathcal{T}\text{-rig}}"'] \arrow[r, shift right, "(-)_e"'] & R_e\text{-Mod} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Ind}"'] \arrow[d, shift right, "T_{\mathcal{T}}"'] \\
R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-rig} \arrow[u, shift right, "S_{\mathcal{T}\text{-rig}}"'] \arrow[r, shift right, "r[-]_e"'] & R_e\text{-Mod}/\mathcal{T} \arrow[l, shift right, "r\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}}"'] \arrow[u, shift right, "S_{\mathcal{T}}"']
\end{tikzcd}$$

donde $r\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}} = T_{\mathcal{T}\text{-rig}} \circ \mathrm{Ind} \circ S_{\mathcal{T}}$ y $r[-]_e = T_{\mathcal{T}} \circ (-)_e \circ S_{\mathcal{T}\text{-rig}}$. En vista del satisfactorio resultado obtenido en la Proposición 3.1.1., una cuestión natural es preguntarse si los funtores

$$\begin{tikzcd}
R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-rig} \arrow[r, shift right, "r[-]_e"'] & R_e\text{-Mod}/\mathcal{T} \arrow[l, shift right, "r\mathrm{Ind}_{\mathcal{T}}"']
\end{tikzcd}$$

establecen una equivalencia de categorías. El siguiente resultado responde a esta pregunta.

Teorema 3.1.4. *Sea $R = \oplus_{g \in G} R_g$ un anillo graduado por un grupo G y sea $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ una teoría de torsión sobre R_e-Mod. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Los funtores

$$\text{R-gr}/\mathcal{T}\text{-rig} \underset{r[-]_e}{\overset{\text{rInd}_{\mathcal{T}}}{\rightleftarrows}} R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}$$

establecen una equivalencia de categorías.

(ii) $\tau^{rig} = \tau^{gr}$, esto es, τ^{gr} es una teoría de torsión rígida sobre R-gr.

(iii) Las dos siguientes condiciones son satisfechas:

(a) R_hR_g es τ-denso en R_{hg} para todo $g,h \in G$.

(b) Para cada R_e-módulo izquierda de τ-torsión A, $R\otimes_{R_e} A$ es τ-torsión.

Demostración: (i)⇒(ii) Sea X un R-módulo izquierda graduado τ^{gr}-torsión. Hemos de probar que X es τ^{rig}-torsión. Por definición de τ^{gr}, tenemos que X_e es τ-torsión. Consideremos la sucesión exacta en R-gr

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-rig}}T_{\mathcal{T}\text{-rig}}X \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

donde K y C son τ^{rig}-torsión. Si aplicamos el funtor exacto $(-)_e$ obtenemos una sucesión exacta en R_e-Mod

$$0 \longrightarrow K_e \longrightarrow X_e \longrightarrow (S_{\mathcal{T}\text{-rig}}T_{\mathcal{T}\text{-rig}}X)_e \longrightarrow C_e \longrightarrow 0,$$

con K_e y C_e R_e-módulos τ-torsión. Sabemos que

$$T_{\mathcal{T}}X_e \cong T_{\mathcal{T}}(S_{\mathcal{T}\text{-rig}}T_{\mathcal{T}\text{-rig}}X)_e$$

pero, dado que X_e es τ-torsión, resulta que $r[T_{\mathcal{T}\text{-rig}}X]_e = 0$. Siendo $r[-]_e$ una equivalencia de categorías, deducimos que $T_{\mathcal{T}\text{-rig}}X$

$= 0$ y esto no ocurre a no ser que X sea τ^{rig}-torsión.

(ii)⇒(i) Aplíquese la Proposición 3.1.1.

(ii)⇒(iii) Comprobemos primeramente la condición (b). Dado un R_e-módulo a la izquierda τ-torsión A, es claro que $R\otimes_{R_e} A$ es τ^{gr}-torsión. Esto significa que $R\otimes_{R_e} A$ es τ^{rig}-torsión, es decir, que $R\otimes_{R_e} A$ es τ-torsión como R_e-módulo a izquierda.

Para comprobar la condición (a), consideremos el morfismo de R-módulos graduados

$$R\otimes_{R_e} R_h \longrightarrow R(h) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

cuyo conúcleo denotamos por C. Obtenemos la sucesión exacta en R_e-Mod

$$(R\otimes_{R_e} R_h)_e \longrightarrow R(h)_e \longrightarrow C_e \longrightarrow 0, \qquad (3)$$

Dado que $(R\otimes_{R_e} R_h)_e \cong R_h = R(h)_e$, obtenemos que $C_e = 0$. Esto significa que C es τ^{gr}-torsión. Pero $\tau^{gr} = \tau^{rig}$, con lo que C es τ^{rig}-torsión. Esto permite deducir fácilmente la condición (a).

(iii)⇒(ii) Supongamos que X es un R-módulo a la izquierda graduado τ^{gr}-torsión. Entonces X_e es τ-torsión y las condiciones (a) y (b) permiten asegurar que el morfismo canónico en R_e-mod, $\phi:R_g\otimes_{R_e} X_e \longrightarrow X_g$ satisface que $\mathrm{Im}\phi$ y $\mathrm{coKer}\phi$ son R_e-módulos a la izquierda τ-torsión para cualquier $g \in G$. De aquí, obtenemos que X_g es τ-torsión para todo g en G, lo que significa que $\underline{X}$ es τ-torsión. □

En este momento es oportuno hacer algunos comentarios a propósito de las condiciones (a) y (b) establecidas en la parte (iii) del Teorema 3.1.4., así como de la naturaleza de la teoría de torsión rígida $\tau^g = \tau^{gr} = \tau^{rig}$ inducida por una teoría de torsión τ satisfaciendo las condiciones equivalentes del Teorema. Una condición muy similar a nuestra condición (a), y que, de hecho, la implica, fue introducida por F. Van Oystaeyen en [VO1]. Siguiendo su nomenclatura, a lo largo de este trabajo diremos que el anillo R es $\underline{\tau}$-divisorialmente graduado cuando se verifique la citada condición, es decir, R_gR_h es τ-denso en R_{gh} para cualesquiera g, h $\in$ G. De otra parte, la condición (b) también ha sido objeto de estudio. Concretamente, para un anillo fuertemente graduado R, las teorías de torsión rígidas sobre R-gr se corresponden biunívocamente con las teorías de torsión sobre R_e-Mod verificando (b) [NVO1]. Siguiendo [NVO1] diremos que una teoría de torsión τ sobre R_e-Mod es G-estable cuando para cada R_e-módulo a izquierda A τ-torsión, el R_e-módulo $R\otimes_{R_e} A$ es τ-torsión. Si el anillo R verifica las condiciones equivalentes del Teorema 3.1.4. para una teoría de torsión τ sobre R_e-Mod diremos que R es $\underline{\tau}$-fuertemente graduado. De esta manera, un anillo τ-fuertemente graduado no es sino un anillo τ-divisorialmente graduado para una teoría de torsión G-estable τ sobre R_e-Mod. Por simplicidad, como hemos sugerido más arriba, denotaremos por τ^g = $(\mathcal{T}^g,\mathcal{F}^g)$ a la teoría de torsión rígida $\tau^{gr} = \tau^{rig}$ en el caso de un anillo τ-fuertemente graduado R.

Considerando la inclusión $R_e \longrightarrow R$ como un morfismo de anillos, es posible inducir canónicamente una teoría de torsión hereditaria $\bar{\tau}$ sobre R-Mod a partir de cualquier teoría de torsión τ sobre R_e-Mod. Concretamente, como en construcciones anteriores, se usa un funtor exacto para definir $\bar{\tau}$ a partir de τ. En este caso el funtor es el restricción de escalares

$$U: R\text{-Mod} \longrightarrow R_e\text{-Mod}.$$

Así, $\bar{\tau} = (\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{F}})$ viene determinada por la subcategoría localizante de R-Mod

$$\bar{\mathcal{T}} = \{ X \in R\text{-Mod} \mid UX \text{ es } \tau\text{-torsión}\} = \{ X \in R\text{-Mod} \mid UX \in \mathcal{T}\}$$

Por último, tenemos otro funtor olvido relevante

$$V: R\text{-gr} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

que asocia a cada R-módulo a la izquierda graduado X el R-módulo subyacente VX tras olvidar la graduación. Es claro que $U \circ V = (\_)$.

Si consideramos ahora una teoría de torsión hereditaria $\sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{G})$ sobre R-Mod, el funtor exacto V permite definir una teoría de torsión hereditaria $gr(\sigma) = (gr(\mathcal{S}), gr(\mathcal{G}))$ sobre R-gr sin más que definir

$$gr(\mathcal{S}) = \{ X \in R\text{-gr} \mid VX \text{ es } \sigma\text{-torsión} \} = \{ X \in R\text{-gr} \mid VX \in \mathcal{S} \}$$

que, evidentemente, es rígida. Por tanto, está determinada por un filtro graduado $\mathcal{L}(gr(\sigma))$. Pero, de otra parte, σ está determinada por un filtro $\mathcal{L}(\sigma)$. A partir de la definición de $gr(\sigma)$ es sencillo deducir que $\mathcal{L}(gr(\sigma)) \subseteq \mathcal{L}(\sigma)$. En cierto sentido, la relación más estrecha posible entre estos filtros sería que $\mathcal{L}(gr(\sigma))$ fuese un conjunto cofinal de $\mathcal{L}(\sigma)$, ya que, en tal caso, $\mathcal{L}(gr(\sigma))$ (y, a la postre, $gr(\sigma)$) determinaría $\mathcal{L}(\sigma)$ de una manera sencilla. Las teorías de torsión hereditarias σ sobre R-Mod con esta propiedad han sido estudiadas con anterioridad. La definición original es la siguiente.

Definición. Una teoría de torsión hereditaria σ sobre R-Mod se dice que es <u>graduada</u> cuando $\mathcal{L}(\sigma)$ contiene un conjunto cofinal de ideales homogéneos.

Lema 3.1.5. *σ es graduada si y sólo si $\mathcal{L}(gr(\sigma))$ es un conjunto cofinal de $\mathcal{L}(\sigma)$.*

Demostración: Si σ es graduada, consideremos $\mathcal{L}$ un conjunto cofinal de ideales a la izquierda homogéneos de $\mathcal{L}(\sigma)$. Para $I \in \mathcal{L}$, se tinene que R/I es σ-torsión, ya que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\sigma)$. Pero R/I es un R-módulo a la izquierda graduado canónicamente lo que implica que R/I es gr(σ)-torsión. De aquí, $I \in \mathcal{L}(gr(\sigma))$, por definición de este último filtro. Hemos obtenido por tanto que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(gr(\sigma))$. Pero en vista de esta inclusión, si $\mathcal{L}$ es un subconjunto cofinal de $\mathcal{L}(\sigma)$, también ha de serlo $\mathcal{L}(gr(\sigma))$.

El recíproco es evidente. □

Recordemos ahora la estrecha relación existente entre teorías de torsión rígidas sobre R-gr y teorías de torsión graduadas sobre R-Mod. Según [NVO1, Lemma II.9.5 and Theorem II.9.6], la correspondencia $\sigma \longrightarrow gr(\sigma)$ establece una biyección entre teorías de torsión graduadas sobre R-Mod y teorías de torsión rígidas sobre R-gr. Como consecuencia de esta biyección y de [NR, Proposition 1.1], deducimos la siguiente caracterización de las teorías de torsión graduadas, que de seguro es conocida, aunque no haya aparecido enunciada definidamente, al menos hasta donde el autor conoce.

Proposición 3.1.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes* *para una teoría de torsión hereditaria σ sobre R-Mod*

(i) σ es graduada

(ii) $\mathcal{T}(\sigma)$ es la menor subcategoría localizante de R-Mod que contiene a $\mathcal{T}(gr(\sigma))$

(iii) $\mathcal{L}(\sigma)$ es el menor filtro que contiene a $\mathcal{L}(gr(\sigma))$.

Demostración: (i) $\Rightarrow$ (iii) Es fácil argumentar que $\mathcal{L}(\sigma)$ es el menor filtro que contiene a un subconjunto cofinal suyo cualquiera. Por el Lema 3.1.5., $\mathcal{L}(\mathrm{gr}(\sigma))$ es un conjunto cofinal de $\mathcal{L}(\sigma)$. Para obtener (iii) no resta sino completar el silogismo.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sea $\mathcal{S}$ una subcategoría localizante de R-Mod que contenga a $\mathcal{T}(\mathrm{gr}(\sigma))$ y sea μ la teoría de torsión asociada a $\mathcal{S}$. En particular, $\mathcal{L}(\mathrm{gr}(\sigma)) \subseteq \mathcal{L}(\mu)$. Pero entonces $\mathcal{L}(\sigma) \subseteq \mathcal{L}(\mu)$, lo que implica que $\mathcal{T}(\sigma) \subseteq \mathcal{T}(\mu) = \mathcal{S}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Según [NR, Proposition 1.1], la teoría de torsión graduada correspondiente a la teoría de torsión rígida $\mathrm{gr}(\sigma)$ satisface que su clase torsión es la menor subcategoría localizante de R-Mod que contiene a $\mathcal{T}(\mathrm{gr}(\sigma))$. Como una teoría de torsión está determinada por su clase torsión, hemos de admitir que σ es graduada. □

Proposición 3.1.7. *Sea τ una teoría de torsión sobre R_e-Mod. Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) $gr(\bar{\tau}) = \tau^{\mathrm{rig}}$.

(2) Si τ es G-estable, entonces $\bar{\tau}$ es graduada.

(3) Si R es τ-fuertemente graduado entonces

$$\mathcal{L}(\bar{\tau}) = \{I \leq {}_R R \mid R_e \cap I \in \mathcal{L}(\tau)\}.$$

Demostración: (1) Dado $X \in R\text{-gr}$, X es $gr(\bar{\tau})$-torsión si y sólo si VX es $\bar{\tau}$-torsión si y sólo si UVX es τ-torsión. Pero $UVX = \underline{X}$, lo que asegura que X es $gr(\bar{\tau})$-torsión si y sólo si X es τ^{rig}-torsión. Por tanto, $gr(\bar{\tau}) = \tau^{rig}$.

(2) Vamos a demostrar seguidamente que $\mathcal{T}(\bar{\tau})$ es la menor subcategoría localizante de R-Mod que contiene a $\mathcal{T}(gr(\bar{\tau}))$. En efecto, si consideramos $\mathcal{S}$ una subcategoría localizante de R-Mod tal que $\mathcal{T}(gr(\bar{\tau})) \subseteq \mathcal{S}$, y X es un R-módulo a la izquierda $\bar{\tau}$-torsión, afirmamos que $X \in \mathcal{S}$. Para comprobar tal afirmación observemos que ${}_{R_e}X$ es τ-torsión lo que, junto con el hecho de ser τ G-estable, implica que $R\otimes_{R_e} X$ es τ-torsión. De esta forma, $\mathrm{Ind}({}_{R_e}X)$ es $gr(\bar{\tau})$-torsión. Esto implica que $R\otimes_{R_e} X \in \mathcal{S}$. Ahora bien, tenemos un epimorfismo de R-módulos a la izquierda

$$R\otimes_{R_e} X \longrightarrow X$$

definido canónicamente aplicando cada $r\otimes x$ sobre rx, para $r \in R$ y $x \in M$. Como $\mathcal{S}$ es estable bajo imágenes epimórficas, deducimos de aquí que $X \in \mathcal{S}$.

(3) Supongamos que R es τ-fuertemente graduado. Entonces $\bar{\tau}$ es graduada por (2). Por el Lema 3.1.5.,

$$\mathcal{L}(gr(\bar{\tau})) = \{I \leq {}_R R,\ I = \oplus_{g\in G} I_g \mid R/I \text{ es } gr(\bar{\tau})\text{-torsión}\}$$

es un conjunto cofinal para $\mathcal{L}(\bar{\tau})$. Pero $gr(\bar{\tau}) = \tau^{rig} = \tau^{gr}$, lo que implica que

$$\mathcal{L}(gr(\bar{\tau})) = \mathcal{L}(\tau^{rig}) = \{I \leq {}_R R,\ I = \oplus_{g\in G} I_g \mid I_e \in \mathcal{L}(\tau)\ \}.$$

De esta manera, un ideal a la izquierda I de R está en el filtro $\mathcal{L}(\bar{\tau})$ si y sólo si contiene un ideal homogéneo J tal que $J_e \in \mathcal{L}(\tau)$.

Pero $J_e \subseteq I \cap R_e$, lo que nos asegura que $I \cap R_e \in \mathcal{L}(\tau)$. De esta manera,

$$\mathcal{L}(\bar{\tau}) \subseteq \{I \leq {}_R R \mid R_e \cap I \in \mathcal{L}(\tau)\}.$$

Para comprobar la inclusión contraria, tómese un ideal a izquierda I de R tal que $R_e \cap I \in \mathcal{L}(\tau)$. Entonces $R(R_e \cap I) \subseteq I$. Como $R(R_e \cap I)$ es homogéneo y su parte de grado e es $R_e \cap I$, deducimos que $R(R_e \cap I) \in \mathcal{L}(\tau^{rig})$. Esto nos permite concluir que I $\in \mathcal{L}(\bar{\tau})$, ya que $\mathcal{L}(\tau^{rig})$ es una base de filtro para $\mathcal{L}(\bar{\tau})$. □

Nos disponemos ahora a estudiar el comportamiento de la coinducción de módulos graduados a partir de R_e-módulos con respecto de categorías cocientes. Recordemos [N1] que el funtor

$$(-)_e : R_e\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-gr}$$

tiene un adjunto a la derecha llamado funtor coinducción. Para esta adjunción seguiremos la notación recogida en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{c} R\text{-gr} \\ {\scriptstyle (-)_e}\downarrow \;\; \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Coind}} \\ R_e\text{-Mod} \end{array} \qquad (4)$$

Recordaremos brevemente la definición de Coind. Para un R_e-módulo a la izquierda M podemos construir a partir de la estructura de R_e-R-bimódulo de R el R-módulo a la izquierda $\mathrm{Hom}_{R_e}(R,M)$. Para cada $g \in G$ sea

$$\mathrm{Hom}_{R_e}(R,M)_g = \{f \in \mathrm{Hom}_{R_e}(R,M) \mid f(R_h) = 0 \text{ para todo } h \in G,\ h \neq g\}$$

y definamos

$$\mathrm{Coind}(M) = \sum_{g \in G} \mathrm{Hom}_{R_e}(R,M)_g .$$

Es claro que $\mathrm{Coind}(M)_e$ es naturalmente isomorfo como R_e-módulo a la izquierda a $\mathrm{Hom}_{R_e}(R_e,M)$ y este último R_e-módulo a la izquierda es naturalmente isomorfo a M. De esta manera tenemos un isomorfismo natural

$$\mathrm{Coind}(M)_e \cong M$$

que proporciona la counidad de la adjunción (4).

La unidad de la adjunción (4) viene dada del siguiente modo. Si X es un R-módulo a la izquierda graduado, se tiene un homomorfismo de R-módulos a la izquierda

$$u:X \longrightarrow \mathrm{Coind}(X_e)$$

dado porque a $x = \sum_{g\in G} x_g \in X$ y a $r = \sum_{g\in G} r_g \in R$ se le hace corresponder

$$u(x)(r) = \sum_{g\in G} r_{g^{-1}}\, x_g \in X_e.$$

Volviendo a nuestra teoría de torsión hereditaria $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ sobre R_e-Mod, tenemos el siguiente diagrama de funtores

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
R\text{-gr} \arrow[r, shift right, "(-)_e"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}"'] & R_e\text{-Mod} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Coind}"'] \arrow[d, shift right, "\mathbf{T}_{\mathcal{T}}"'] \\
R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr} \arrow[r, shift right, "{[-]_e}"'] \arrow[u, shift right, "\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}"'] & R_e\text{-Mod}/\mathcal{T} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}"'] \arrow[u, shift right, "\mathbf{S}_{\mathcal{T}}"']
\end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}} = \mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}} \circ \mathrm{Coind} \circ \mathbf{S}_{\mathcal{T}}$.

Proposición 3.1.8. *Los funtores $[-]_e:R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr} \longrightarrow R_e\text{-Mod}$ y $\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}:R_e\text{-Mod}/\mathcal{T} \longrightarrow R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr}$ definen una equivalencia de categorías entre las categorías cocientes $R\text{-gr}/\mathcal{T}\text{-gr}$ y $R_e\text{-Mod}/\mathcal{T}$.*

Demostración: Sea A un objeto de R_e-Mod/$\mathcal{T}$. Por definición,

$$[\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}(A)]_e = T_{\mathcal{T}}\left(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}T_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}}A)\right)_e$$

Tenemos el morfismo canónico en R-gr con núcleo y conúcleo τ^{gr}-torsión

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}}A) \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}}T_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}}A) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

que da, al aplicarle el funtor exacto $(-)_e$, la sucesión exacta en R_e-Mod

$$0 \longrightarrow K_e \longrightarrow \mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}}A)_e \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}}T_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}}A)_e \longrightarrow C_e \longrightarrow 0$$

con K_e y C_e τ-torsión. Observemos además que existe un isomorfismo canónico

$$\mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}}A)_e \cong S_{\mathcal{T}}A$$

De este modo obtenemos una sucesión exacta en R_e-Mod

$$0 \longrightarrow K_e \longrightarrow (S_{\mathcal{T}}A) \longrightarrow S_{\mathcal{T}\text{-gr}}T_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}}A)_e \longrightarrow C_e \longrightarrow 0$$

Al aplicarle a esta sucesión el funtor $T_{\mathcal{T}}$, obtenemos el isomorfismo natural

$$T_{\mathcal{T}}S_{\mathcal{T}}A \cong T_{\mathcal{T}}\left(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}T_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}(S_{\mathcal{T}})\right)_e = [\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}(A)]_e$$

Dado que $A \cong T_{\mathcal{T}}S_{\mathcal{T}}A$ naturalmente, concluimos la existencia de un isomorfismo natural

$$A \cong [\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}(A)]_e$$

para cada objeto A de R_e-Mod/$\mathcal{T}$.

Observemos ahora que, dado X un objeto de R-gr/$\mathcal{T}$-gr se tiene

$$\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}([X]_e) = T_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}\ S_{\mathcal{T}}\ (T_{\mathcal{T}}(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e)$$

Tal y como se demostró en la prueba de la Proposición 3.1.1., el homomorfismo canónico

$$(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e \longrightarrow S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}((S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e)$$

es un isomorfismo por ser $(S_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e$ τ-cerrado. Por tanto, aplicando el funtor $\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}$ a tal isomorfismo, obtenemos el isomorfismo canónico

$$\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) \cong \mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e)$$

y aplicando ahora $\mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}$ obtenemos

$$\mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) \cong \mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) = \mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}([X]_e)$$

Ahora bien, la counidad de la adjunción (4) proporciona un morfismo de R-módulos a la izquierda graduados con núcleo K y conúcleo C

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X \longrightarrow \mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) \longrightarrow C \longrightarrow 0 \qquad (5)$$

Al transformar la sucesión exacta anterior por el funtor $(-)_e$ se obtiene una sucesión exacta en R_e-Mod

$$0 \longrightarrow K_e \longrightarrow (\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e \longrightarrow \big(\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e)\big)_e \longrightarrow C_e \longrightarrow 0$$

Pero es morfismo

$$(\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e \longrightarrow \big(\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e)\big)_e$$

es un isomorfismo. De esta manera, $K_e = 0$ y $C_e = 0$. En particular, K_e y C_e son τ-torsión, lo que implica que K y C son τ^{gr}-torsión. Así, al aplicar el funtor $\mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}$ a la sucesión (5) se obtiene un isomorfismo canónico

$$\mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X \cong \mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e)$$

Con toda la anterior información podemos concluir que

$$X \cong \mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X \cong \mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) \cong$$
$$\mathbf{T}_{\mathcal{T}\text{-gr}}\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}((\mathbf{S}_{\mathcal{T}\text{-gr}}X)_e) = \mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}([X]_e)$$

Con esto concluimos que $[-]_e$ y $\mathrm{Coind}_{\mathcal{T}}$ establecen la equivalencia de categorías enunciada. □

3.2. ANILLOS FTF A LA IZQUIERDA FUERTEMENTE GRADUADOS

Sea $R = \oplus_{g\in G} R_g$ un anillo fuertemente graduado por un grupo G. La clase de los submódulos de R-módulos a la izquierda planos será denotada en lo que sigue por $\mathcal{F}_0^R$ y reservarmos la notación $\mathcal{F}_0$ para la clase de los submódulos de R_e-módulos a la izquierda planos. Si el anillo R es FTF a la izquierda, denotaremos por τ_0^R la teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod para la cual $\mathcal{F}_0^R$ es la clase de los R-módulos a la izquierda τ_0^R-libres de torsión. Cuando R_e sea FTF a la izquierda, la notación correspondiente será τ_0.

Proposición 3.2.1. *Se R es un anillo FTF a la izquierda, entonces R_e es un anillo FTF a la izquierda.*

Demostración: Probaremos en primer lugar que $\mathcal{F}_0$ es la clase de los R_e-módulos τ_0-libres de torsión para alguna teoría de torsión sobre R_e-Mod y después demostraremos que τ_0 es necesariamente hereditaria. Observemos que $\mathcal{F}_0$ es cerrada bajo submódulos. Vamos a probar que $\mathcal{F}_0$ es estable por extensiones y productos directos

Consideremos una sucesión exacta de R_e-módulos a la izquierda

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

con N, L $\in \mathcal{F}_0$. Ya que R_{R_e} es plano, la siguiente sucesión de R-módulos a la izquierda es exacta

$$0 \longrightarrow R \otimes_{R_e} N \longrightarrow R \otimes_{R_e} M \longrightarrow R \otimes_{R_e} L \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Por el Lema 2.3.1.(3), $R \otimes_{R_e} N$, $R \otimes_{R_e} L \in \mathcal{F}_0^R$. De esta manera, (1) es una sucesión exacta de R-módulos a la izquierda con extremos

τ_0^R-libres de torsión y esto implica que $R \otimes_{R_e} M$ es τ_0^R-libre de torsión, esto es, $R \otimes_{R_e} M \in \mathcal{F}_0^R$. Por el Lema 2.3.1.(6), $R \otimes_{R_e} M \in \mathcal{F}_0$. Dado que la inclusión $R_e \subseteq R$ es un monomorfismo escindido de R_e-bimódulos, se tiene que la aplicación

$$\theta_M : M \longrightarrow R \otimes_{R_e} M$$

definida por $\theta_M(m) = 1 \otimes m$ para cada $m \in M$, es un monomorfismo de R_e-módulos la izquierda. Así, ${}_{R_e}M \in \mathcal{F}_0$ y esto prueba que $\mathcal{F}_0$ es cerrada bajo extensiones.

Seguidamente, probaremos que $\mathcal{F}_0$ es estable por productos directos. Sea $\{M_i : i \in I\}$ una familia de R_e-módulos en $\mathcal{F}_0$ y escribimos

$$M = \prod\{M_i : i \in I\}.$$

De acuerdo con el Lema 2.3.1., $R \otimes_{R_e} M_i \in \mathcal{F}_0^R$ para todo $i \in I$. Como R es FTF a la izquierda, $\mathcal{F}_0^R$ es estable por productos directos y tenemos que

$$\prod\{R \otimes_{R_e} M_i : i \in I\} \in \mathcal{F}_0^R.$$

De nuevo el Lema 2.3.1. asegura que

$$\prod\{R \otimes_{R_e} M_i : i \in I\} \in \mathcal{F}_0.$$

Pero existe un monomorfismo obvio de R_e-módulos a la izquierda

$$\prod\{M_i : i \in I\} \rightarrowtail \prod\{R \otimes_{R_e} M_i : i \in I\}$$

que muestra que $\prod\{M_i : i \in I\} \in \mathcal{F}_0$. De esta manera $\mathcal{F}_0$ es cerrada bajo productos directos y, así, es la clase de los R_e-módulos τ_0-libres de torsión para alguna teoría de torsión τ_0 (en este momento, posiblemente no hereditaria) sobre R_e-Mod.

Para terminar, demostraremos que τ_0 es de hecho hereditaria, esto es, la clase de los R_e-módulos τ_0-torsión es estable bajo submódulos. Para ello, consideremos un R_e-módulo a la izquierda M τ_0-torsión y N un submódulo de M. Afirmamos que $R \otimes_{R_e} M$ es un R-módulo a la izquierda τ_0^R-torsión. Para comprobar esta afirmación, es suficiente con mostrar que $\mathrm{Hom}_R(R \otimes_{R_e} M, P) = 0$ para todo R-módulo a la izquierda plano P. Pero

$$\mathrm{Hom}_R(R \otimes_{R_e} M, P) \cong \mathrm{Hom}_{R_e}(M, {}_{R_e}P) = 0,$$

ya que ${}_{R_e}P$ es plano (Lema 2.3.1.(6)) y, así, τ_0-libre de torsión. Ahora estamos preparados para probar que $N \subseteq M$ es τ_0-torsión como R_e-módulo a la izquierda. Comprobaremos que $\mathrm{Hom}_{R_e}(N,F) = 0$ para todo R_e-módulo a la izquierda plano F. Como R es fuertemente graduado, se tiene un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_{R_e}(N,F) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(R \otimes_{R_e} N, R \otimes_{R_e} F)$$

Por otra parte, ya que R_{R_e} es plano, existe un monomorfismo de R-módulos a la izquierda

$$R \otimes_{R_e} N \rightarrowtail R \otimes_{R_e} M.$$

Así, $R \otimes_{R_e} N$ es τ_0^R-torsión. De acuerdo con el Lema 2.3.1.(1), R $\otimes_{R_e} F$ es un R-módulo a la izquierda plano. De esta manera

$$\mathrm{Hom}_R(R \otimes_{R_e} N, R \otimes_{R_e} F) = 0.$$

Como

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-gr}}(R \otimes_{R_e} N, R \otimes_{R_e} F) \subseteq \mathrm{Hom}_R(R \otimes_{R_e} N, R \otimes_{R_e} F)$$

obtenemos $\mathrm{Hom}_{R_e}(N,F) = 0$. □

En lo que sigue intentaremos una aproximación al recíproco de la Proposición 3.2.1. Si R_e es un anillo FTF a la izquierda, entonces la inclusión $R_e \rightarrowtail R$ nos permite la construcción de una teoría de torsión hereditaria $\bar{\tau}_0$ sobre R-Mod cuya clase torsión $\mathcal{T}(\bar{\tau}_0)$ consiste en aquellos R-módulos a la izquierda que son τ_0-torsión consideraros como R_e-módulos. Recordemos de la Sección 3.1 que el funtor exacto

$$(\_): R\text{-gr} \longrightarrow R_e\text{-Mod}.$$

que descompone cada R-módulo a la izquierda graduado X como suma directa $\underline{X} = \oplus_{g\in G} X_g$ de R_e-módulos permite inducir una teoría de torsión rígida τ_0^g sobre R-gr a partir de τ_0 considerando como clase torsión

$$\mathcal{T}(\tau_0^g) = \{X \in R\text{-gr} \mid \underline{X} \text{ es } \tau_0\text{-torsión}\}$$

Los siguientes resultados dan alguna información sobre $\bar{\tau}_0$.

Proposición 3.2.2. *Supongamos que R_e es un anillo FTF a la izquierda y sea $\bar{\tau}_0$ la teoría de torsión inducida por τ_0 en R-Mod. Las siguientes condiciones son satisfechas.*

(1) R es τ_0-fuertemente graduado.

(2) $\bar{\tau}_0$ es una teoría de torsión graduada.

(3) La topología de Gabriel $\mathcal{L}(\bar{\tau}_0)$ asociada a $\bar{\tau}_0$ es

$$\mathcal{L}(\bar{\tau}_0) = \{\ I \leq_R R \mid \exists\ x_1,\dots,x_n \in I\cap R_e\ ,\ con\ r_{R_e}(\{x_1,\dots,x_n\}) = 0\ \}$$

(4) Un R-módulo a la izquierda M es $\bar{\tau}_0$- libre de torsión si y sólo si ${}_{R_e}M \in \mathcal{F}_0$.

Demostración: (1) Es suficiente con probar que para cualquier ideal a la izquierda $\mathfrak{a}$ en el filtro $\mathcal{L}(\tau_0)$, y para cada $g \in G$, el R_e-módulo a la izquierda $R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}$ es τ_0-torsión. Como τ_0 es de tipo finito (Proposición 1.3.6.), $\mathfrak{a}$ contiene un ideal a la izquierda finitamente generado $\mathfrak{a}_0$ que es τ_0-denso en R_e. Probaremos que $R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}_0$ es τ_0-torsión y, de esta manera, $R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}$ es τ_0-torsión por ser una imagen epimórfica de $R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}_0$. Observemos que

$$R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}_0 \cong R_g/R_g\mathfrak{a}_0.$$

Como R_g es proyectivo y finitamente generado como R_e-módulo a la izquierda y $\mathfrak{a}_0$ es finitamente generado, se sigue que $R_g/R_g\mathfrak{a}_0$ es un R_e-módulo a la izquierda finitamente presentado. Según la Proposición 2.1.5., $R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}_0$ es τ_0-torsión si y sólo si

$$\mathrm{Hom}_{R_e}(R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}_0, R_e) = 0.$$

Pero

$$\mathrm{Hom}_{R_e}(R_g \otimes_{R_e} R_e/\mathfrak{a}_0 , R_e) \cong \mathrm{Hom}_{R_e}(R_e/\mathfrak{a}_0 , \mathrm{Hom}_{R_e}(R_g, R_e)) = 0,$$

porque $\mathrm{Hom}_{R_e}(R_g, R_e)$ es un R_e-módulo a la izquierda plano (de hecho, es proyectivo).

(2) Por la Proposición 3.1.7.

(3) Como R es τ_0-fuertemente graduado podemos aplicar la proposición 3.1.7.(2), para obtener que

$$\mathcal{L}(\tau_0^g) = \{ I \leq {}_R R \mid I \cap R_e \in \mathcal{L}(\tau_0) \}$$

Ahora, aplíquese la Proposición 2.1.5.

(4) Por [NR, Proposition 2.1.] □

Conocemos por la Proposición 3.2.1. que si R es un anillo FTF a la izquierda entonces R_e es un anillo FTF a la izquierda. El siguiente resultado analiza las relaciones entre las teorías de torsión $\bar{\tau}_0$ y τ_0^R sobre R-Mod. Por $\mathcal{H}$ denotaremos el conjunto de todos los ideales homogéneos de R.

Propocición 3.2.3. *Si R es un anillo FTF a la izquierda los siguientes enunciados son ciertos:*

(1) $\mathcal{L}(\bar{\tau}_0) \subseteq \mathcal{L}(\tau_0^R)$

(2) $\mathcal{L}(\tau_0^g) = \mathcal{L}(\tau_0^R) \cap \mathcal{H}$.

De esta manera, $\tau_0^R = \bar{\tau}_0$ *si y sólo si* τ_0^R *es graduada.*

Demostración: (1) Sea $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\bar{\tau}_0)$. Para probar que $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\tau_0^R)$ es suficiente con encontrar un ideal a la izquierda finitamente generado $\mathfrak{a}_0$ contenido en $\mathfrak{a}$ tal que $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}_0, R) = 0$ (Proposición 2.1.3.(2)). Como $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\bar{\tau}_0)$, existe (Proposition 3.2.2.(3)) un ideal a la izquierda finitamente generado c de R_e tal que $c \subseteq \mathfrak{a} \cap R_e$ y $\mathrm{Hom}_{R_e}(R_e/c, R_e) = 0$. Sea $\mathfrak{a}_0 = Rc$. Es claro que $\mathfrak{a}_0$ es un ideal a la izquierda finitamente generado de R contenido en $\mathfrak{a}$. Observemos que $\mathfrak{a}_0$ es un ideal a la izquierda homogéneo de R. Consideremos $f \in \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}_0,R)$. Como $R/\mathfrak{a}$ es graduado y finitamente generado, $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a},R) = \mathrm{HOM}_R(R/\mathfrak{a},R)$ [D1], esto es, f puede expresarse como una suma de aplicaciones R-lineales graduadas. De esta manera, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es graduada. Equivalentemente, f puede ser considerada como un morfismo en la categoría R-gr desde $R/\mathfrak{a}$ hasta $R(g)$ para algún $g \in G$. Si denotamos por f_1 a la restricción de f a la parte de grado e de $R/\mathfrak{a}$, es claro que f_1 es un R_e-homomorfismo desde R_e/c hasta R_g. Dado que R_g es proyectivo como R_e-módulo y R_e/c es τ_0-torsión, se sigue que $f_1 = 0$. Esto asegura que $\mathrm{Im}\, f \cap R_g = 0$. Pero R es fuertemente graduado, así, Im f debe ser cero.

(2) Observemos que, por la Proposición 3.2.2.(2) y la parte (1) de esta proposición, $\mathcal{L}(\tau_0^g) = \mathcal{L}(\bar{\tau}_0) \cap \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}(\tau_0^R) \cap \mathcal{H}$. Resta por probar que $\mathcal{L}(\tau_0^R) \cap \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}(\tau_0^g)$. Dado $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\tau_0^R) \cap \mathcal{H}$, sea $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}$ un ideal a la izquierda finitamente generado satisfaciendo $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}_0, R) = 0$. Consideremos $a_1,\ldots,a_n$ un conjunto de generadores de $\mathfrak{a}_0$. Para cada $i = 1,\ldots,n$, existe una descomposición $a_i = \sum_{g\in G} a_{ig}$, donde a_{ig} es la g-ésima componente homogénea de a_i. Definamos $\bar{\mathfrak{a}}_0$ como el ideal a la izquierda homogéneo generado por el conjunto de elementos homogéneos $\{a_{ig}:i=1,\ldots n,\ g \in G\}$. Como $\mathfrak{a}_0 \subseteq \bar{\mathfrak{a}}_0$, es claro que $\mathrm{Hom}_R(R/\bar{\mathfrak{a}}_0, R) = 0$ y, en particular, $\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(R/\bar{\mathfrak{a}}_0, R) = 0$. Así, $\mathrm{Hom}_{R_e}(R_e/\bar{\mathfrak{a}}_0 \cap R_e, R_e) = 0$. Equivalentememte, $r_{R_e}(\bar{\mathfrak{a}}_0 \cap R_e) = 0$. En vista de la Proposición 3.2.2.(3), si probamos que $\bar{\mathfrak{a}}_0 \cap R_e$ es un ideal a la izquierda finitamente generado de R_e, entonces $\bar{\mathfrak{a}}_0$ está en $\mathcal{L}(\tau_0^g)$ y, así, $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\tau_0^g)$. Teniendo en cuenta que $\bar{\mathfrak{a}}_0$ es un ideal a la izquierda homogéneo y finitamente generado, existe un R-módulo a la izquierda libre graduado F y un epimorfismo de R-módulos graduados desde F sobre $\bar{\mathfrak{a}}_0$. Tomando en este epimorfismo componentes de grado e, obtenemos un epimorfismo de R_e-módulos desde F_e sobre $\bar{\mathfrak{a}}_0 \cap R_e$. Pero $F_e \cong R_{g_1} \oplus\ldots\oplus R_{g_n}$ como R_e-módulos a la izquierda para ciertos $g_1,\ldots, g_n \in G$. De esta forma, F_e es un R_e-módulo a la izquierda finitamente generado y proyectivo. Esto implica claramente que $\bar{\mathfrak{a}}_0 \cap R_e$ es finitamente generado como R_e-módulo a la izquierda. De modo que hemos obtenido que $\mathfrak{a} \in \mathcal{L}(\bar{\tau}_0)$. □

Nuestro próximo objetivo es probar el recíproco de la

Proposición 3.2.1. para anillos fuertemente graduados por grupos localmente finitos. Por un grupo localmente finito entenderemos un grupo G satisfaciendo que todos sus subgrupos finitamente generados son finitos.

Lema 3.2.4. *Sea R un anillo y $\{R_i : i \in I\}$ una familia dirigida de subanillos de R tal que $R = \bigcup \{R_i : i \in I\}$. Sea M un R-módulo a la izquierda tal que ${}_{R_i}M$ es plano como R_i-módulo para todo $i \in I$. Entonces ${}_RM$ es un R-módulo a la izquierda plano.*

Demostración: Para demostrar que ${}_RM$ es plano, utilizaremos [S1, Proposition 10.7]. Sea $\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0$ con $b_k \in R$, $x_k \in M$. Como $R = \bigcup\{R_i : i \in I\}$, existe $i \in I$ tal que $b_k \in R_i$ para $k = 1,\dots,n$. Pero ${}_{R_i}M$ es plano, por lo que existen $u_1,\dots,u_m \in M$ y $a_{kj} \in R_i$ ($k = 1,\dots,n$; $j = 1,\dots,m$) tales que $\sum_{k=1}^{n} b_k a_{kj} = 0$ para $j = 1,\dots,m$ y $x_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} u_j$ para $k = 1,\dots,n$. Como $R_i \subseteq R$, las anteriores igualdades implican que ${}_RM$ es plano. □

Teorema 3.2.5. *Supongamos que R es un anillo fuertemente graduado por un grupo localmente finito G. Entonces R es FTF a la izquierda si y sólo si R_e es FTF a la izquierda. Además, en tal caso, $\tau_0^R = \bar{\tau}_0$.*

Demostración: De acuerdo con la Proposición 3.2.1. necesitamos probar tan sólo que si R_e es FTF a la izquierda entonces R es FTF a la izquierda.

Supongamos que R_e es FTF a la izquierda, esto es, $\mathcal{F}_0$ es la clase de los R-módulos a la izquierda τ_0-libres de torsión para una teoría de torsión hereditaria τ_0 sobre R_e-Mod. Esta teoría de torsión induce canónicamente una teoría de torsión hereditaria $\bar{\tau}_0$ sobre R-Mod. Por la Proposición 3.2.2.(4) $\mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$ consiste precisamente en aquellos R-módulos a la izquierda M tales que ${}_{R_e}M \in \mathcal{F}_0$. Este hecho, junto con el Lema 2.3.1.(5), da $\mathcal{F}_0^R \subseteq \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$ sin hipótesis sobre el grupo G. Probaremos la igualdad en el caso en que G sea localmente finito.

En un primer paso, supondremos que G es finito. Dado $M \in \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$, la Proposición 3.2.2.(4) dice que ${}_{R_e}M \in \mathcal{F}_0$. Así, existe un R-módulo a la izquierda plano P y un monomorfismo de R_e-módulos a la izquierda $M \rightarrowtail P$. Tensorizando por el R_e-módulo a la derecha plano R_{R_e}, obtenemos un monomorfismo de R-módulos a la izquierda $R \otimes_{R_e} M \rightarrowtail R \otimes_{R_e} P$. Es claro que $R \otimes_{R_e} P$ es plano como R-módulo a la izquierda. Para concluir que ${}_R M \in \mathcal{F}_0^R$ vamos a mostrar un monomorfismo de R-módulos a la izquierda desde M hasta $R \otimes_{R_e} M$. Como R es fuertemente graduado, $R_g R_{g^{-1}} = R_e$ para todo $g \in G$. Para cada $g \in G$, existe una descomposición $1 = \sum_{i=1}^{n(g)} r(g)_i s(g^{-1})_i$, donde $r(g)_i \in R_g$ y $s(g^{-1})_i \in R_{g^{-1}}$ para cada $i = 1,\ldots,n(g)$. Definimos $\phi: M \longrightarrow R \otimes_{R_e} M$ por $\phi(m) = \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n(g)} r(g)_i \otimes s(g^{-1})_i m$. De una forma análoga a como se hizo en [N1, Lemma 2.1] puede probarse que ϕ es R-lineal. Es fácil ver que ϕ es inyectiva. De esta manera, ϕ es un monomorfismo de R-módulos desde M hasta $R \otimes_{R_e} M$ y esto implica que $M \in \mathcal{F}_0^R$. De esta manera, en el caso de ser G finito, $\mathcal{F}_0^R = \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$, esto es, la clase $\mathcal{F}_0^R$ es la clase de todos los

R-módulos a la izquierda $\bar{\tau}_0$-libres de torsión y R resulta ser FTF a la izquierda.

Para trabajar en el caso de ser G localmente finito, introducimos alguna notación. Sea H un subgrupo finito de G y pongamos $R_H = \oplus_{h\in H} R_h$. Es claro que R_H es un subanillo de R y que R_H es H-fuertemente graduado. Denotemos por τ_0^H la teoría de torsión hereditaria inducida por τ_0 en R_H-Mod cuya clase torsión consta de aquellos R_H-módulos a la izquierda que son τ_0-torsión como R_e-módulos. Como H es finito, el anterior argumento asegura que la clase de los R_H-módulos a la izquierda τ_0^H-libres de torsión es precisamente la clase $\mathcal{F}_0^H$ de los submódulos de R_H-módulos a la izquierda planos. Por otra parte, la Proposición 3.2.2.(4) dice que un R_H-módulo a la izquierda M es libre de τ_0^H-torsión si y sólo si ${}_{R_e}M \in \mathcal{F}_0$. Tras todas estas observaciones, estamos preparados para terminar la prueba. Como en el caso finito, necesitamos tan sólo comprobar que $\mathcal{F}(\bar{\tau}_0) \subseteq \mathcal{F}_0^R$. Para $M \in \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$, sea $E = E({}_RM)$ su envolvente inyectiva en R-Mod. Es inmediato que $E \in \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$. Por la Proposición 3.2.2.(4), ${}_{R_e}E \in \mathcal{F}_0$. Pero esto implica que ${}_{R_H}E \in \mathcal{F}_0^H$ para todo subgrupo finito H de G. Como R es un R_H-módulo a la derecha proyectivo, se sigue que ${}_{R_H}E$ es inyectivo como R_H-módulo y, de esta manera, ${}_{R_H}E$ es un R_H-módulo plano. Como G es localmente finito, tenemos que $R = \bigcup \{R_H$: H es un subgrupo finito de G}. Así, el Lema 3.2.4. se aplica y ${}_RE$ es un R-módulo a la izquierda plano. Hemos probado que M se encaja en un R-módulo a la izquierda plano, a saber, su envolvente inyectiva. Esto da la igualdad $\mathcal{F}_0^R = \mathcal{F}(\bar{\tau}_0)$, que finaliza la prueba. □

3.3. APLICACIONES.

Recordemos que un anillo R se dice que es IF a la izquierda si todo R-módulo a la izquierda inyectivo es plano o, en nuestra notación, si $\mathcal{F}_0^R$ = R-Mod. Colby [C, Theorem 3] probó que un anillo de grupo AG es IF a la izquierda si y sólo si A es IF a la izquierda y G es localmente finito. Como una consecuencia del Teorema 3.2.5., extendemos este resultado al caso de anillos fuertemente graduados generales.

Teorema 3.3.1. *Sea R un anillo fuertemente graduado por un grupo localmente finito G. R es un anillo IF a la izquierda si y sólo si R_e es un anillo IF a la izquierda.* □

En [C, Proposition 5] se probó que un anillo IF a la izquierda con dimensión débil finita es regular. Combinando este resultado con el Teorema 3.3.1., obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2. *Sea R un anillo fuertemente graduado por un grupo G localmente finito. R es regular si y sólo si R_e es regular y R tiene dimensión débil finita.* □

C. Năstăsescu probó que si R es un anillo fuertemente graduado por un grupo finito G, entonces R_e tiene un anillo maximal de cocientes a la izquierda QF si y sólo si R tiene un anillo maximal de cocientes a la izquierda QF [N3, Theorem 5.1 and Corollary 2.10]. Vamos a obtener un resultado análogo para anillos maximales de cocientes biláteros y QF. Este resultado será deducido del Teorema 3.2.5. junto con el Teorema 2.3.10.

Teorema 3.3.3. *Sea R un anillo fuertemente graduado por un grupo finito G. R tiene un anillo maximal de cocientes bilátero QF si y sólo si R_e tiene un anillo maximal de cocientes bilátero QF.*

Demostración: Por el Teorema 2.3.10. y el Teorema 3.2.5. podemos suponer que tanto R_e como R son anillos FTF a la izquierda y que $\tau_0^R = \bar{\tau}_0$. Por [NR, Proposition 2.2] y la Proposición 3.2.2., R_e es τ_0-artiniano si y sólo si R es $\bar{\tau}_0$-artiniano. De nuevo por el Teorema 2.3.10., tenemos tan sólo que demostrar que τ_0 es perfecta si y sólo si $\bar{\tau}_0$ es perfecta. Sea $Q_e = Q_{\tau_0}(R)$ y $Q = Q_{\bar{\tau}_0}(R)$. Como $\mathcal{T}(\tau_0) \subseteq \mathcal{T}(\lambda)$, R_e es λ-artiniano. De esta forma, λ es de tipo finito y, por el Teorema 2.2.d., $\tau_0 = \lambda$. Un argumento análogo puede ser construido para τ_0^R. Esto da que Q_e es el anillo maximal de cocientes a la izquierda de R_e y que Q es el anillo maximal de cocientes a la izquierda de R. Por [N, Theorem 5.1], existe un monomorfismo de anillos $Q_e \longrightarrow Q$, tal que el siguiente diagrama de morfismos de anillos conmuta

$$\begin{array}{ccc} R_e & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_e & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Supongamos que τ_0 es perfecta y sea M un Q-módulo a la izquierda. Por [Gl, Proposition 45.1], M es τ_0-libre de torsión como Q_e-módulo a la izquierda. La Proposición 3.2.2.(4) nos da que M es $\bar{\tau}_0$-libre de torsión y, de nuevo por [Gl, Proposition 45.1], $\bar{\tau}_0$ es perfecta.

Recíprocamente, supongamos que $\bar{\tau}_0$ es perfecta y consideremos un Q_e-módulo a la izquierda M. Entoonces $Q\otimes_{Q_e} M$ un Q-módulo a la izquierda y se sigue de [Gl, Proposition 45.1] que es $\bar{\tau}_0$-libre de torsión. La Proposición 3.2.2. asegura que $Q\otimes_{Q_e} M$ es τ_0-libre de torsión. Por [N1, Theorem 5.1] Q_e es un sumando directo de Q como Q_e-módulo. De esta manera tenemos un Q_e-monomorfismo $\theta: M \longrightarrow Q\otimes_{Q_e} M$ dado por $\theta(x) = 1\otimes x$ para todo $x \in M$.

□

Como una consecuencia del Teorema 3.3.3. y la Proposición 3.2.2., obtenemos el siguiente resultado conocido ([N, Corollary 2.10]).

Corolario 3.3.4. *Supongamos que R es fuertemente graduado por un grupo finito G. Entonces R es QF si y sólo si R_e es QF.* □

Algunos otros resultados de este tipo pueden ser deducidos del Teorema 3.3.3. y caracterizaciones de distintos tipos de anillos FTF como las que aparecen en el Capítulo 2. Así por ejemplo se tiene los siguientes resultados.

Teorema 3.3.5. *Sea R un anillo fuertemente graduado por un grupo finito G. Entonces R tiene un anillo maximal de cocientes bilátero* *semiprimario y QF-3 si y sólo si* R_e *lo tiene.*

Demostración: Se sigue, como en el Teorema 3.3.3., teniendo en cuenta que los anillos FTF a la izquierda τ_0-artinianos son exactamente aquellos anillos que poseen un anillo maximal de cocientes bilátero y QF-3, según se demostró en el Teorema 2.4.12. □

Teorema 3.3.6. *Supongamos que R está fuertemente graduado por un grupo finito G. Entonces R es semiprimario y QF-3 si y sólo si* R_e *es semiprimario y QF-3.*

Demostración: Combinar el Teorema 3.3.5. con el Teorema 3.2.5., el Teorema 2.4.12. y el Teorema 2.3.4. □

3.4. OBJETOS ESTÁTICOS EN CATEGORÍAS COCIENTES.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías de Grothendieck y consideremos dos funtores aditivos F y G, de manera que F es un adjunto a la izquierda de G.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[d, shift right, "F"'] \\ \mathcal{A} \arrow[u, shift right, "G"'] \end{tikzcd} \qquad (1)$$

En [Na] fue usada la adjunción $M\otimes_S - \dashv \mathrm{Hom}_R(M,-)$ definida por un R-módulo a la izquierda M y $S = \mathrm{End}_R(M)$, para establecer una equivalencia de categorías entre ciertas subcategorías de R-Mod y S-Mod mediante la restricción de los funtores $M\otimes_S -$ y $\mathrm{Hom}_R(M,-)$. El objetivo de esta sección es transportar esta construcción a una categoría cociente de $\mathcal{A}$.

Si $\tau = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es una teoría de torsión sobre $\mathcal{A}$ podemos inducir una subcategoría $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}$ tomando

$$\mathcal{S} = \{Y\in\mathcal{B} \mid F(Y) \text{ es } \tau\text{-torsión}\}.$$

Es evidente que $\mathcal{S}$ es estable bajo imágenes homomórficas y sumas directas ya que F es exacto a la derecha y preserva sumas directas. Para comprobar que $\mathcal{S}$ es cerrada por extensiones, consideremos una sucesión exacta en $\mathcal{B}$

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

donde $X, Z \in \mathcal{S}$. Aplicando F, obtenemos una sucesión exacta en $\mathcal{A}$,

$$F(X) \xrightarrow{f} F(Y) \xrightarrow{g} F(Z) \longrightarrow 0$$

con F(X) y F(Z) τ-torsión. Construimos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, g \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(Z) \longrightarrow 0.$$

Dado que $\mathrm{Ker} g = \mathrm{Im} f$ y que F(X) es τ-torsión se sigue que Kerg es τ-torsión y, de esta manera, F(Y) resulta ser τ-torsión. Esto muestra que $Y \in \mathcal{S}$. Si queremos que $\mathcal{S}$ sea una subcategoría localizante de $\mathcal{B}$, F debe satisfacer cierta propiedad de exactitud, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.4.1. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos categorías de Grothendieck. Consideremos la siguiente situación de adjunción*

$$\begin{array}{c} \mathcal{B} \\ F\Big\downarrow \Big\uparrow G \\ \mathcal{A} \end{array}$$

Sea $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ una teoría de torsión sobre $\mathcal{A}$ y

$$\mathcal{S} = \{Y \in \mathcal{B} \mid F(Y) \text{ es } \tau\text{-torsión}\}$$

la subcategoría de $\mathcal{B}$ inducida. La clase $\mathcal{S}$ es una clase de torsión para una teoría de torsión $\sigma = (\mathcal{S},\mathcal{E})$ sobre $\mathcal{B}$ siempre que para todo monomorfismo $f:X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{B}$, $Ker(F(f))$ sea τ-torsión.

Demostración: Para cada monomorfismo en $\mathcal{B}$, $f:X \longrightarrow Y$, tenemos la suceción exacta

$$0 \longrightarrow Ker(F(f)) \longrightarrow F(X) \longrightarrow Im(F(f)) \longrightarrow 0.$$

Si FY es τ-torsión entonces Im(F(f)) es τ-torsión. Así F(X) es τ-torsión si suponemos que Ker(F(f)) es τ-torsión. □

Definición. Diremos que un funtor F es τ-exacto cuando verifica que Ker(F(f)) es τ-torsión para cada monomorfismo f en $\mathcal{B}$.

A lo largo de esta sección supondremos que el funtor F es τ-exacto. Recordemos que es posible definir categorías cocientes $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ y $\mathcal{B}/\mathcal{S}$. Denotaremos por $T_{\mathcal{T}}:\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{T}$ y $S_{\mathcal{T}}:\mathcal{A}/\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ (resp. $T_{\mathcal{S}}:\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{S}$ $S_{\mathcal{S}}:\mathcal{B}/\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{B}$) los funtores canónicos. Tenemos transformaciones naturales $\Phi_{\mathcal{T}}:T_{\mathcal{T}}S_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathrm{id}$ y $\Psi_{\mathcal{T}}:\mathrm{id} \longrightarrow S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}$ tales que $\Phi_{\mathcal{T}}$ es un isomorfismo natural; y para cada objeto X de $\mathcal{A}$ el morfismo $(\Psi_{\mathcal{T}})_X:X \longrightarrow S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(X)$ tiene núcleo y conúcleo τ-torsión. Usaremos análogas notaciones para $\mathcal{B}$ y $\mathcal{S}$. La adjunción (1) induce funtores

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[d, shift right, "T_{\mathcal{T}}"'] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "T_{\mathcal{S}}"'] \\
\mathcal{A}/\mathcal{T} \arrow[u, shift right, "S_{\mathcal{T}}"'] \arrow[r, shift left, "K"] & \mathcal{B}/\mathcal{S} \arrow[u, shift right, "S_{\mathcal{S}}"'] \arrow[l, shift left, "H"]
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

definidos como $K = T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}(-)$ y $H = T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}(-)$.

Existen transformaciones naturales $\chi:HK \longrightarrow \mathrm{id}$ y $\upsilon:\mathrm{id} \longrightarrow KH$ descritas como sigue: Para cada objeto Y en $\mathcal{B}/\mathcal{S}$ existe un $\mathcal{B}$-morfismo natural $u_{S_{\mathcal{S}}Y}:S_{\mathcal{S}}Y \longrightarrow GFS_{\mathcal{S}}Y$, donde u denota la unidad de la adjunción $F \dashv G$. Aplicando $T_{\mathcal{S}}$ y componiendo con $(\Phi_{\mathcal{S}})_Y^{-1}$ obtenemos un morfismo natural en $\mathcal{B}/\mathcal{S}$,

$$T_{\mathcal{S}}(u_{S_{\mathcal{S}}Y})\circ(\Phi_{\mathcal{S}})_Y^{-1}:Y \longrightarrow T_{\mathcal{S}}S_{\mathcal{S}}Y \longrightarrow T_{\mathcal{S}}GFS_{\mathcal{S}}Y.$$

Por otra parte, el morfismo natural en $\mathcal{A}$

$$(\Psi_{\mathcal{T}})_{FS_{\mathcal{S}}Y}:FS_{\mathcal{S}}Y \longrightarrow S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}Y$$

permite considerar un morfismo natural en $\mathcal{B}$

$$G((\Psi_{\mathcal{T}})_{FS_{\mathcal{S}}Y}):GFS_{\mathcal{S}}Y \longrightarrow GS_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}Y$$

Aplicando de nuevo $T_{\mathcal{S}}$ y componiendo el homomorfismo natural en $\mathcal{B}/\mathcal{S}$

$$\upsilon_Y:Y \longrightarrow T_{\mathcal{S}}S_{\mathcal{S}}Y \longrightarrow T_{\mathcal{S}}GFS_{\mathcal{S}}Y \longrightarrow T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}Y = KHY$$

definido por

$$\upsilon_Y = T_{\mathcal{S}}\circ G((\Psi_{\mathcal{T}})_{FS_{\mathcal{S}}Y})\circ T_{\mathcal{S}}(u_{S_{\mathcal{S}}Y})\circ(\Phi_{\mathcal{S}})_Y^{-1}$$

Por otra parte, dado un objeto X de $\mathcal{A}/\mathcal{T}$, podemos usar el morfismo natural en $\mathcal{B}$,

$$(\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}:GS_{\mathcal{T}}X \longrightarrow S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X$$

con núcleo y conúcleo σ-torsión para definir el morfismo canónico

$$F((\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}):FGS_{\mathcal{T}}X \longrightarrow FS_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X.$$

Aplicando $T_{\mathcal{T}}$, obtenemos un morfismo natural en $\mathcal{A}/\mathcal{T}$

$$T_{\mathcal{T}}F((\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}):T_{\mathcal{T}}FGS_{\mathcal{T}}X \longrightarrow T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X$$

Vamos a demostrar seguidamente que $T_{\mathcal{T}}F((\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X})$ es un isomorfismo. Para ello consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} GS_{\mathcal{T}}X \xrightarrow{f} S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X \xrightarrow{h} C \longrightarrow 0$$

donde $f = (\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}$, K es el núcleo de f y C es el conúcleo de f. A partir de esta sucesión, podemos construir dos sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{g} GS_{\mathcal{T}}X \xrightarrow{e} Z \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{m} S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X \xrightarrow{h} C \longrightarrow 0$$

donde e es un epimorfismo, m es un monomorfismo y f = me. Si aplicamos a la primera de estas dos sucesiones F, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker(Fg) \longrightarrow FK \xrightarrow{Fg} FGS_{\mathcal{T}}X \xrightarrow{Fe} FZ \longrightarrow 0$$

donde tanto Ker(Fg) como FK son objetos en $\mathcal{T}$. Esto significa que si aplicamos $T_{\mathcal{T}}$ al morfismo Fe, obtenemos un isomorfismo

$$T_{\mathcal{T}}Fe:T_{\mathcal{T}}FGS_{\mathcal{T}}X \cong T_{\mathcal{T}}FZ$$

Análogamente, aplicando F a la segunda de las sucesiones consideradas, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Ker(Fm) \longrightarrow FZ \xrightarrow{Fm} FS_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X \xrightarrow{Fh} FC \longrightarrow 0$$

con Ker(Fm) y FC objetos τ-torsión. Esto permite asegurar que

$$T_{\mathcal{T}}Fm:T_{\mathcal{T}}FZ \xrightarrow{Fm} T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X$$

es un isomorfismo. Por tanto,

$$T_{\mathcal{T}}F((\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}) = T_{\mathcal{T}}Ff = T_{\mathcal{T}}F(me) = T_{\mathcal{T}}FmT_{\mathcal{T}}Fe$$

es un isomorfismo.

El morfismo canónico en $\mathcal{A}$ (donde c denota la counidad de la adjunción $F \dashv G$)

$$c_{S_{\mathcal{T}}X}:FGS_{\mathcal{T}}X \longrightarrow S_{\mathcal{T}}X$$

permite definir un morfismo natural en $\mathcal{A}/\mathcal{T}$

$$T_{\mathcal{T}}c_{S_{\mathcal{T}}X}:T_{\mathcal{T}}FGS_{\mathcal{T}}X \longrightarrow T_{\mathcal{T}}S_{\mathcal{T}}X.$$

De esta manera conseguimos un morfismo natural en $\mathcal{A}/\mathcal{T}$

$$\chi_X:HKX = T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}X \cong T_{\mathcal{T}}FGS_{\mathcal{T}}X \longrightarrow T_{\mathcal{T}}S_{\mathcal{T}}X \longrightarrow X$$

definido por

$$\chi_X = (\Phi_{\mathcal{T}})_X \circ T_{\mathcal{T}}c_{S_{\mathcal{T}}X} \circ (T_{\mathcal{T}}F((\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}))^{-1}$$

Estamos ya preparados para definir subcategorías plenas de $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ y $\mathcal{B}/\mathcal{S}$ equivalentes por restricción de K y H.

Definición. Un objeto X de $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ se dirá F-estático siempre que la trasformación natrual $\chi_X:HKX \longrightarrow X$ sea un isomorfismo. La categoría de todos los objetos F-estáticos de $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ será denotada por $\mathcal{A}/\mathcal{T}_F$. Esta subcategoría plena de $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ es una categoría aditiva ya que $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ lo es y los funtores H y K son aditivos. Un objeto Y de $\mathcal{B}/\mathcal{S}$ se dice F-co-estático si $\upsilon_Y:Y \longrightarrow KHY$ es un isomorfismo. La categoría de todos los objetos F-co-estáticos será denotada por $\mathcal{B}/\mathcal{S}^F$, la cual resulta ser una subcategoría plena aditiva de $\mathcal{B}/\mathcal{S}$.

Observación 3.4.2. Sea X un objeto de $\mathcal{A}/\mathcal{T}$. Tenemos que $\chi_X = (\Phi_{\mathcal{T}})_X \circ T_{\mathcal{T}}c_{S_{\mathcal{T}}X} \circ (T_{\mathcal{T}}F((\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}))^{-1}$. Ahora bien, $(T_{\mathcal{T}}F((\Psi_{\mathcal{S}})_{GS_{\mathcal{T}}X}))^{-1}$ y

$(\Phi_{\mathcal{T}})_X$ son isomorfismos, por lo que χ_X es un isomorfismo si y sólo si $T_{\mathcal{T}}c_{S_{\mathcal{T}}X}$ es un isomorfismo. Es decir, X es F-estático si y sólo si $T_{\mathcal{T}}c_{S_{\mathcal{T}}X}: T_{\mathcal{T}}FGS_{\mathcal{T}}X \longrightarrow T_{\mathcal{T}}S_{\mathcal{T}}X$ es un isomorfismo.

Tenemos inmediatamente el siguiente resultado, que extiende [Na, Theorem 2.5].

Teorema 3.4.3. *Las restricciones de los funtores aditivos*

$$K = T_{\mathcal{S}}GS_{\mathcal{T}}(-): \mathcal{A}/\mathcal{T}_F \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{S}^F$$

y

$$H = T_{\mathcal{T}}FS_{\mathcal{S}}(-): \mathcal{B}/\mathcal{S}^F \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{T}_F$$

constituyen una equivalencia entre las categorías $\mathcal{A}/\mathcal{T}_F$ y $\mathcal{B}/\mathcal{S}^F$. □

Como es usual, diremos que un objeto X <u>divide</u> a un objeto U si existe un objeto X' en $\mathcal{A}$ y un isomorfismo $U \cong X \oplus X'$. Cuando X divide a una suma directa finita de copias de U, diremos que X <u>divide</u> <u>débilmente</u> a U.

Es claro que los funtores K y H preservan sumas directas finitas. De esta manera, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.4.4. *Las subcategorías $\mathcal{A}/\mathcal{T}_F$ y $\mathcal{B}/\mathcal{S}^F$ son cerradas bajo sumas directas finitas y sumandos directos.* □

Supongamos que M es un objeto τ-cerrado de $\mathcal{A}$ y consideremos el anillo $S = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$. Podemos tomar en el anterior esquema el funtor $G = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,\_)$ y sabemos por [P, Corollary 7.3] que existe un funtor adjunto a la izquierda $F:S\text{-Mod}\longrightarrow\mathcal{A}$ de G, satisfaciendo $F(S) = M$ y cuya counidad $c_M:FGM = M\longrightarrow M$ es la identidad sobre M. Supondremos que F es τ-exacto. A partir de este momento, y mientras no se advierta lo contrario, queda fijada la anterior situación. En este caso, a los objetos de $\mathcal{A}$ F-estáticos los llamaremos M-estáticos y los objetos de $\mathcal{B}$ = S-Mod G-co-estáticos serán denominados M-co-estáticos.

Lema 3.4.5. $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}M$ *es M-estático y* $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}S$ *es M-co-estático.*

Demostración: Según la Observación 3.4.2., para demostrar que $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}M$ es F-estático si y sólo si $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}c_{\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}M}:\mathbf{T}_{\mathcal{T}}FG\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}M\longrightarrow \mathbf{T}_{\mathcal{T}}\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}M$ es un isomorfismo. Para demostrar esto, consideremos que $(\psi_{\mathcal{T}})_M\circ c_M = (\psi_{\mathcal{T}})_M$ tiene núcleo y conúcleo τ-torsión. De esta manera, $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}((\psi_{\mathcal{T}})_M\circ c_M)$ es un isomorfismo. Pero por la naturalidad de c se tiene que $(\psi_{\mathcal{T}})_M\circ c_M = c_{\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}M}\circ FG(\psi_{\mathcal{T}})_M$. Esto implica que $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}(c_{\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}}\circ FG(\psi_{\mathcal{T}})_M) = \mathbf{T}_{\mathcal{T}}((\psi_{\mathcal{T}})_M\circ c_M)$ es un isomorfismo. Pero $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}(c_{\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}}\circ FG(\psi_{\mathcal{T}})_M) = \mathbf{T}_{\mathcal{T}}(c_{\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}})\circ \mathbf{T}_{\mathcal{T}}(FG(\psi_{\mathcal{T}})_M)$ y $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}(FG(\psi_{\mathcal{T}})_M)$ es un isomorfismo. De aquí, $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}(c_{\mathbf{S}_{\mathcal{T}}\mathbf{T}_{\mathcal{T}}})$ es un isomorfimo. Con ello concluimos que $\mathbf{T}_{\mathcal{T}}M$ es M-estático. Como $S = G(M)$, se sigue inmediatamente que $\mathbf{T}_{\mathcal{S}}S$ es M-co-estático. □

Como $\sigma = (\mathcal{S},\mathcal{E})$ es una teoría de torsión hereditaria en la categoría de módulos S-Mod, podemos considerar el filtro de ideales a la izquierda de S $\mathcal{L}(\sigma)$ que determina a σ y podemos construir la S-álgebra $Q_\sigma(S)$. Recordemos que es posible establecer ciertas relaciones entre las categorías S-Mod/$\mathcal{S}$ y $Q_\sigma(S)$-Mod. Como se observó en el Capítulo 0, si $U: Q_\sigma(S)\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$ es el funtor restricción de escalares entonces existe un funtor pleno y fiel $S'_{\mathcal{S}}: S\text{-Mod}/\mathcal{S} \longrightarrow Q_\sigma(S)\text{-Mod}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S\text{-Mod} \arrow[rr, shift left, "Q_\sigma"] \arrow[dr, shift right, "T_{\mathcal{S}}"'] & & Q_\sigma(S)\text{-Mod} \arrow[ll, shift left, "U"] \\
& S\text{-Mod}/\mathcal{S} \arrow[ul, shift right, "S_{\mathcal{S}}"'] \arrow[ur, "S'_{\mathcal{S}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Además, $S'_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}S$ es isomorfo a $Q_\sigma(S)$. Esto permite deducir que la restricción de $S'_{\mathcal{S}}$ a la subcategoría plena de S-Mod/$\mathcal{S}$ de los objetos que dividen débilmente a $T_{\mathcal{S}}S$ y la subcategoría plena de $Q_\sigma(S)$-Mod cuyos objetos son todos los $Q_\sigma(S)$-módulos a la izquierda proyectivos de tipo finito. Esta última subcategoría de $Q_\sigma(S)$-Mod será denotada por $(Q_\sigma(S)|$ weak $Q_\sigma(S))$. A partir de este momento, ambas categorías serán identificadas mediante la restricción de $S'_{\mathcal{S}}$. La subcategoría plena de $\mathcal{A}/\mathcal{T}_M$ cuyos objetos son precisamente los objetos de $\mathcal{A}/\mathcal{T}$ que dividen débilmente a $T_{\mathcal{T}}M$ será denotada por $(\mathcal{A}/\mathcal{T}|$ weak M). Como consecuencia del anterior desarrollo, deducimos el siguiente resultado, que generaliza [Na, Theorem 3.7]

Corolario 3.4.6. *Las restricciones de los funtores aditivos*

$$K = T_{\mathcal{S}}(GS_{\mathcal{T}}(-)): (\mathcal{A}/\mathcal{T}|\text{weak } M) \longrightarrow (Q_\sigma(S)|\text{ weak } Q_\sigma(S))$$

y

$$H = T_{\mathcal{T}}(FS_{\mathcal{S}}(-)): (Q_\sigma(S)|\text{ weak } Q_\sigma(S)) \longrightarrow (\mathcal{A}/\mathcal{T}|\text{weak } M)$$

forman una equivalencia entre las categorías $(\mathcal{A}/\mathcal{T}|$weak $M)$ y

$(Q_\sigma(S)|$ *weak* $Q_\sigma(S))$.

Los anteriores resultados se pueden especializar para el caso de categorías de módulos. Concretamente, tomamos $\mathcal{A}$ = R-Mod, M un R-módulo a la izquierda cualquiera y la adjunción

$$\begin{tikzcd} \text{S-Mod} \arrow[d, shift right, "M\otimes_S -"'] \\ \text{R-Mod} \arrow[u, shift right, "\mathrm{Hom}_R(M,-)"'] \end{tikzcd}$$

donde $S = \mathrm{End}_R(M)$. Si $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ es una teoría de torsión hereditaria sobre R-Mod, supondremos que el funtor $M\otimes_S-$ es τ-exacto. Esto quiere decir que para cada monomorfismo de S-módulos a la izquierda $f:X\longrightarrow Y$, $\mathrm{Ker}(M\otimes_S f) \subseteq M\otimes_S X$ es τ-torsión. En estas condiciones, según la Proposición 3.4.1., es posible inducir una teoría de torsión $\sigma = (\mathcal{S},\mathcal{E})$ sobre S-Mod considerando

$$\mathcal{S} = \{ X \in \text{S-Mod} \mid M\otimes_S X \in \mathcal{T} \}$$

En el caso absoluto, bajo la condición de ser M finitamente generado como R-módulo a la izquierda, es fácil probar [Na, Theorem 3.7] que existe una equivalencia entre la categoría de los R-módulos a la izquierda que dividen a M y la categoría de todos los S-módulos a la izquierda proyectivos. En nuestra situación cociente, necesitaremos para obtener un resultado análogo que la teoría de torsión τ sea de tipo finito además de la condición de finitud sobre M. Cuando τ es de tipo finito, el funtor $T_{\mathcal{T}}:\text{R-Mod}\longrightarrow\text{R-Mod}/\mathcal{T}$ preserva sumas finitas arbitrarias. De esta manera tiene sentido considerar la subcategoría plena $(\text{R-Mod}/\mathcal{T} \mid M)$ de $\text{R-Mod}/\mathcal{T}$ cuyos objetos son los objetos que dividen a alguna suma directa de copias de $T_{\mathcal{T}}M$. La categoría de todos los $Q_{\sigma}(S)$-módulos a la izquierda proyectivos será denotada por $(Q_{\sigma}(S)|Q_{\sigma}(S))$.

Teorema 3.4.7. *Supongamos que la teoría de torsión $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ sobre R-Mod es de tipo finito y sea M un R-módulo a la izquierda τ-finitamente generado. Las restricciones de los funtores aditivos*

$$K = T_{\mathcal{S}}(Hom_R(M,S_{\mathcal{T}}(-)): (R\text{-}Mod/\mathcal{T}|\ M) \longrightarrow (Q_{\sigma}(S)|Q_{\sigma}(S))$$

y

$$H = T_{\mathcal{T}}(M\otimes_S S_{\mathcal{S}}(-)): (Q_{\sigma}(S)|\ Q_{\sigma}(S)) \longrightarrow (R\text{-}Mod/\mathcal{T}|\ M)$$

forman una equivalencia entre las categorías $(R\text{-}Mod/\mathcal{T}|\ M)$ y $(Q_{\sigma}(S)|Q_{\sigma}(S))$.

Demostración: Necesitamos tan sólo probar que K y H preservan sumas directas y que están bien definidos. Primero, afirmamos que σ es de tipo finito. Una vez probada esta afirmación, $T_{\mathcal{S}}$ preserva sumas directas por [Si, Proposition XIII.2.1] y entonces K preserva sumas directas. Además, el hecho de ser σ de tipo finito implica que cualquier $Q_{\sigma}(S)$-módulo a la izquierda proyectivo es σ-cerrado. Dado que $S'_{\mathcal{S}}$ es pleno y fiel, $(Q_{\sigma}(S)|Q_{\sigma}(S))$ puede ser identificada con la subcategoría plena de $S\text{-}Mod/\mathcal{S}$ cuyos objetos son aquellos que dividen alguna suma directa de copias de $T_{\mathcal{S}}S$. Esto muestra que K está bien definido. Argumentos análogos dan que H preserva sumas directas y que está bien definido. De esta manera, la prueba estará completa si probamos la afirmación de que σ es de tipo finito. Para ello, observemos que el filtro asociado a σ es

$$\mathcal{L}(\sigma) = \{I \leq_S S\colon M/MI \text{ es } \tau\text{-torsion}\}.$$

Tomemos I un ideal a la izquierda de S en $\mathcal{L}(\sigma)$ y sean $m_1,\ldots,m_n$ en M tales que $N = Rm_1+\ldots+Rm_n$ es τ-denso en M. Para cada $i = 1,\ldots,n$ existe un ideal a la izquierda finitamente generado $\mathfrak{a}_i$ de R en $\mathcal{L}(\tau)$ tal que $\mathfrak{a}_i m_i \subseteq MI$. Es rutinario probar que $\mathfrak{a}_1 m_1+\ldots+\mathfrak{a}_n m_n$ es τ-denso en N. Como N es τ-denso en M esto implica que $\mathfrak{a}_1 m_1+\ldots+\mathfrak{a}_n m_n$ es τ-denso en M. Ahora, para cada $i=1,\ldots,n$ el ideal a la izquierda $\mathfrak{a}_i$ puede ser expresado como $\mathfrak{a}_i = \sum_{j\in A_i} Ra_{ij}$, para ciertos a_{ij} en R y A_i un conjunto de índices finito. Así, $\mathfrak{a}_1 m_1+\ldots+\mathfrak{a}_n m_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in A_i} Ra_{ij}m_i \subseteq MI$. Para cada $i =1,\ldots,n$ y para cada $j \in A_i$, existe $f_{ij} \in I$ tal que $a_{ij}m_i \in Imf_{ij}$. Esto implica que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in A_i} Imf_{ij} = M\{f_{ij}\}$ es τ-denso en M. Así, el ideal a la izquierda de S, I_0, generado por los f_{ij} verifica que MI_0 es τ-denso en M. Luego I_0 está en $\mathcal{L}(\sigma)$ y esto muestra que σ es de tipo finito. □

3.5. Teoría de Clifford divisorial.

En esta sección la notación será levemente modificada con respecto de la sección anterior. Así, $R = \oplus_{g\in G} R_g$ denotará un anillo G-graduado por un grupo arbitrario G con elemento neutro e y $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ será una teoría de torsión hereditaria sobre R_e-Mod. Recordemos de la Sección 3.1. que τ induce una teoría de torsión rígida $\tau^{rig} = (\mathcal{T}\text{-rig}, \mathcal{F}\text{-rig})$ sobre R-gr tal que un R-módulo a la izquierda graduado X es τ^{rig}-torsión si y sólo si $\underline{X} = \oplus_{g\in G} X_g$ es τ-torsión como R_e-módulo a la izquierda. De otra parte, el funtor $(-)_e$: R-gr$\longrightarrow R_e$-Mod permite definir otra teoría de torsión $\tau^{gr} = (\mathcal{T}\text{-gr}, \mathcal{F}\text{-gr})$ sobre R-gr cuyos objetos τ^{gr}-torsión son aquellos R-módulos a la izquierda graduados X tales que X_e es τ-torsión. La igualdad $\tau^{rig} = \tau^{gr}$ fue caracterizada en el Teorema 3.1.4. y en tal caso el anillo R se dice que es τ-fuertemente graduado. A partir de ahora, supondremos que R es un anillo τ-fuertemente graduado y usaremos la notación común τ^{g} para denotar a la teoría de torsión rígida $\tau^{gr} = \tau^{rig}$ sobre R-gr.

Por otra parte, la inclusión $R_e \longrightarrow R$ permite definir canónicamente una teoría de torsión hereditaria $\bar{\tau}$ sobre R-Mod cuyos objetos $\bar{\tau}$-torsión son aquellos R-módulos a la izquierda que son τ-torsión considerados como R_e-módulos a la izquierda por restricción de escalares. Como demostramos en la Proposición 3.1.7., $\bar{\tau}$ se corresponde con τ^{g} mediante la biyección que relaciona teorías de torsión hereditarias graduadas sobre R-Mod y teorías de torsión rígidas sobre R-gr, de manera que $\bar{\tau}$ es una teoría de torsión graduada sobre R-Mod.

Si R es un anillo τ-fuertemente graduado, entonces R_{R_e} tiene una cierta propiedad de planitud relativa a τ.

Proposición 3.5.1. *Sea $R = \oplus_{g\in G} R_g$ un anillo τ-fuertemente graduado. Para cada sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$ en R_e-Mod con K τ-torsión, el núcleo del morfismo canónico $R\otimes_{R_e} L \longrightarrow R\otimes_{R_e} N$*

es τ-torsión.

Demostración: Consideremos la sucesión exacta en R-gr

$$R\otimes_{R_e} K \longrightarrow R\otimes_{R_e} L \longrightarrow R\otimes_{R_e} N \longrightarrow 0$$

El núcleo del morfismo $R\otimes_{R_e} L \longrightarrow R\otimes_{R_e} N$ es una image epimórfica de $R\otimes_{R_e} K$. Pero por el Teorema 3.1.4., $R\otimes_{R_e} K$ es τ-torsión, con lo que concluye la prueba ya que cualquier imagen epimórfica de un R_e-módulo a la izquierda τ-torsión es τ-torsión. □

Para un R-módulo a la izquierda graduado M, consideremos el anillo $S = END_R(M)$ consistente en los endomorfismos graduados de M. S está canónicamenmte G-graduado. [D1, Sections 3 and 4] poniendo

$$S_g = \{f \in END_R(M) \colon f(M_h) \subseteq M_{gh} \text{ for all } h \in G\}.$$

De este modo $S_e = End_{R\text{-}gr}(M,M)$. Antes de probar los resultados principales sobre equivalencia entre ciertas categorías construidas a partir del módulo M y la teoría de torsión τ, necesitamos algunos resultados técnicos. Estos hechos serán establecidos en los siguientes lemas.

Lema 3.5.2. *Sea R un anillo τ-fuertemente graduado y M un R-módulo a la izquierda graduado y τ^g-libre de torsión. La aplicación*

$$\rho : End_{R\text{-}gr}(M) \longrightarrow End_{R_e}(M_e)$$

dada por $\rho(f) = f_e$ para cada $f \in End_{R\text{-}gr}(M)$ es un isomorfismo de anillos.

Demostración: Es claro que ρ es un homomorfismo de anillos. Probaremos que tiene núcleo trivial y que es sobreyectivo. Observemos que

$$\operatorname{Ker} \rho = \{f \in \operatorname{End}_{R\text{-gr}}(M) : f_e = 0\}$$

Dado $f \in \operatorname{End}_{R\text{-gr}}(M)$, es claro que $f_e = 0$ si y sólo si $(\operatorname{Im} f)_e = 0$. Por el Teorema 3.1.4., Im f es un R-módulo a la izquierda graduado τ^g-torsión. Dado que Im f $\subseteq$ M y que M es τ^g-libre de torsión, Im f = 0, es decir, f = 0. Esto prueba que Ker ρ = 0.

Para probar que ρ es sobreyectiva, tomemos $f \in \operatorname{End}_{R_e}(M_e)$. Construimos el morfismo de R-módulos a la izquierda graduados

$$R \otimes_{R_e} f : R \otimes_{R_e} M_e \longrightarrow R \otimes_{R_e} M_e$$

Consideremos el morfismo canónico de R-módulos a la izquierda graduados

$$\zeta : R \otimes_{R_e} M_e \longrightarrow M$$

Dado que ζ_e es un isomorfismo, se sigue del Teorema 3.1.4. que ζ tiene núcleo y conúcleo τ^g-torsión. Esto implica que

$$\zeta \circ (R \otimes_{R_e} f) : R \otimes_{R_e} M_e \longrightarrow M$$

anula a Kerζ, ya que M es τ^g-libre de torsión. Pero esto implica que existe un morfismo de R-módulos a la izquierda graduados $\bar{f} : M \longrightarrow M$ tal que

$$\bar{f} \circ \zeta = \zeta \circ (R \otimes_{R_e} f)$$

Se comprueba inmediatamente que $\bar{f}_e = f$. Así, ρ es sobreyectivo. □

Supongamos que M es un R-módulo a la izquierda graduado y τ^g-libre de torsión sobre un anillo τ-fuertememte graduado R. Si el R_e-módulo a la izquierda M_e es τ-plano, la teoría de torsión $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ sobre R_e-Mod induce (ver Sección 3.4.) una teoría de torisón hereditaria $\sigma = (\mathcal{S},\mathcal{E})$ sobre la categoría de módulos a la izquierda sobre el anillo $End_{R_e}(M_e)$. Por el Lema 3.5.4. es posible identificar $End_{R_e}(M_e)$ con S_e y, de esta manera, M_e puede ser considerado como un R_e-S_e-bimódulo. De modo que, salvo identificación, podemos reescribir

$$\mathcal{S} = \mathcal{T}(\sigma) = \{ B \in S_e\text{-Mod}: M_e \otimes_{S_e} B \text{ es } \tau\text{-torsión}\}$$

En este punto, podemos inducir teorías de torsión sobre S-Mod canónicamente de dos formas. La primera idea es usar el funtor restricción de escalares mediante la inclusión $S_e \longrightarrow S$ para definir teoría de torsión hereditaria $\bar{\sigma} = (\bar{\mathcal{S}},\bar{\mathcal{E}})$ sobre S-Mod. Los S-módulos a la izquierda son aquellos S-módulos a la izquierda que son σ-torsión considerados como S_e-módulos. La segunda posibilidad es definir una subcategoría $\mathcal{P}$ de S-Mod usando el funtor $M\otimes_S -$. Así, un S-módulo a la izquierda Y estará en $\mathcal{P}$ si y sólo si $M\otimes_S Y$ es $\bar{\tau}$-torsión. Nuestro objetivo es probar que, en los casos que nos interesa, $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{S}}$.

Dade, en [D1, Theorem 4.6], caracterizó en términos del módulo graduado M cuando $S = END_R(M)$ es fuertemente graduado. Concretamente, demostró que S es fuertemente graduado si y sólo si M es <u>débilmente</u> <u>G-invariante</u>, esto es, M es isomorfo débilmente a todas y cada una de sus suspensiones M(g). No es difícil probar que un R-módulo a la izquierda débilmente G-invariante con M_e τ-libre de torsión debe ser τ^g-libre de torsión.

Lema 3.5.3. *Sea M un R-módulo a la izquierda graduado débilmente G-invariante con M_e τ-plano y τ-libre de torsión. Supongamos que R* *es τ-fuertemente graduado. Las clases de S-módulos a la izquierda*

$$\bar{\mathcal{S}} = \{Y \in S\text{-}Mod:\ {}_{S_e}Y \text{ es } \sigma\text{-torsión}\}$$

y

$$\mathcal{P} = \{Y \in S\text{-}Mod:\ M\otimes_S Y \text{ es } \bar{\tau}\text{-torsión}\}$$

coinciden.

Demostración: Consideremos los siguientes cálculos. Dado Y un S-módulo a la izquierda, Y es $\bar{\sigma}$-torsion si y sólo si ${}_{S_e}Y$ es σ-torsión si y sólo si $M_e\otimes_{S_e} Y$ es τ-torsión. Pero, dado que S es fuertemente graduado, $M_e\otimes_{S_e} Y \cong M_e\otimes_{S_e} S\otimes_S Y \cong M\otimes_S Y$. Así, Y es $\bar{\sigma}$-torsión si y sólo si $M\otimes_S Y$ es $\bar{\tau}$-torsión. □

Lema 3.5.4. *Sea M un R-módulo a la izquierda graduado débilmente G-estable tal que M_e es τ-plano y τ-libre de torsión. Si R es τ-fuertemente graduado, entonces el anillo fuertemente graduado S es σ-fuertemente graduado.*

Demostración: Dado B en S_e-Mod, $S\otimes_{S_e} B$ es σ-torsión si y sólo si $M_e\otimes_{S_e} S\otimes_{S_e} B$ es τ-torsión si y sólo si $M\otimes_{S_e} B$ es τ-torsión. Pero $M\otimes_{S_e} B$ es un R-módulo a la izquierda graduado definiendo $(M\otimes_{S_e} B)_g = M_g\otimes_{S_e} B$ para cada g en el grupo G. Así, $M\otimes_{S_e} B$ es τ-torsión si y sólo si $M\otimes_{S_e} B$ es τ^g-torsión y, por el Teorema 3.1.4., esto ocurre si y sólo si $(M\otimes_{S_e} B)_e = M_e\otimes_{S_e} B$ es τ-torsión si y sólo si B es σ-torsión. De esta manera, B es σ-torsión si y sólo si $S\otimes_{S_e} B$ es

σ-torsión y podemos usar el Teorema 3.1.4. para obtener que S es un anillo σ-fuertemente graduado. □

Como en la Sección 3.4., tenemos funtores

$$\text{R-Mod}/\bar{\mathcal{T}} \underset{\bar{G}}{\overset{\bar{F}}{\rightleftarrows}} \text{S-Mod}/\bar{\mathcal{S}} \qquad (3)$$

definidos como $\bar{F} = T_{\bar{\mathcal{S}}}\ \mathrm{Hom}_R(M, S_{\bar{\mathcal{S}}}(-))$ y $\bar{G} = T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{T}}}(-))$, donde R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$ es la categoría cociente de R-Mod construida a partir de $\bar{\tau} = (\bar{\mathcal{T}},\bar{\mathcal{F}})$ y S-Mod/$\bar{\mathcal{S}}$ es la categoría cociente de S-Mod definida por $\bar{\mathcal{S}}$ y $T_{\bar{\mathcal{S}}}$, $S_{\bar{\mathcal{S}}}$, $T_{\bar{\mathcal{T}}}$, $S_{\bar{\mathcal{T}}}$ denotan los funtores canónicos. Para cada objeto X en R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$ podemos considerar $S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ como un R_e-módulo a la izquierda y es natural preguntarse si ${}_{R_e}S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ es τ-cerrado, es decir, si $S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ es isomorfo a $S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ como R_e-módulo a la izquierda.

Lema 3.5.5. *Si R es τ-fuertemente graduado y X es un objeto de R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$, entonces $S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ es isomorfo a $S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ como R_e-módulo a la izquierda.*

Demostración: La demostración de este hecho sigue un argumento similar al expuesto en [NR, Proposition 2.1]. □

En este caso, S es σ-fuertemente graduado por el Lema 3.5.4. y así tenemos que cada objeto de S-Mod/$\bar{\mathcal{S}}$-Mod puede ser considerado en S_e-Mod/$\mathcal{S}$ vía el funtor $T_{\mathcal{S}}S_{\bar{\mathcal{S}}}$. Estamos preparados para establecer, por restricción de los funtores $\bar{F}$ y $\bar{G}$ una equivalencia entre ciertas subcategorías de R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$ y S-Mod/$\bar{\mathcal{S}}$.

Teorema 3.5.6. *Consideremos R un anillo τ-fuertemente graduado y M un R-módulo a la izquierda graduado débilmente G-invariante tal que M_e es un R_e-S_e-bimódulo τ-plano y τ-libre de torsión. Sean*

$$R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest.}M_e} = \{X \in R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid T_{\mathcal{T}} S_{\bar{\mathcal{T}}} X \text{ es } M_e\text{-estático}\}$$

y

$$S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}^{\mathrm{rest.}M_e} = \{Y \in S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}} \mid T_{\mathcal{S}} S_{\bar{\mathcal{S}}} Y \text{ es } M_e\text{-co-estático}\}$$

Las restricciones de los funtores

$$\bar{F}: R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest.}M_e} \longrightarrow S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}^{\mathrm{rest.}M_e}$$

y

$$\bar{G}: S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}^{\mathrm{rest.}M_e} \longrightarrow R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest.}M_e}$$

establecen una equivalencia entre las subcategorías plenas $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest.}M_e}$ de $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}$ y $S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}^{\mathrm{rest.}M_e}$ de $S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}$.

Demostración: Necesitamos probar que la restricción de

$$\bar{F}: R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest.}M_e} \longrightarrow S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{S}}^{\mathrm{rest.}M_e}$$

y

$$\bar{G}: S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{S}}^{\mathrm{rest.}M_e} \longrightarrow R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest.}M_e}$$

están bien definidos. Para ello, tomemos $X \in R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest.}M_e}$ y observemos que

$$T_{\bar{\mathcal{S}}} \operatorname{Hom}_R(M, S_{\bar{\mathcal{T}}} X) \cong T_{\bar{\mathcal{S}}} \operatorname{Hom}_R(S_{\bar{\mathcal{T}}} T_{\bar{\mathcal{T}}} M, S_{\bar{\mathcal{T}}} X) \cong$$

$$T_{\bar{\mathcal{S}}} \operatorname{Hom}_R(S_{\bar{\mathcal{T}}} T_{\bar{\mathcal{T}}} (R \otimes_{R_e} M_e), S_{\bar{\mathcal{T}}} X) \cong T_{\bar{\mathcal{S}}} \operatorname{Hom}_R(R \otimes_{R_e} M_e, S_{\bar{\mathcal{T}}} X),$$

donde el segundo isomorfismo está dado por el Teorema 3.1.4. Tenemos una sucesión exacta en S-Mod

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R \otimes_{R_e} M_e, S_{\bar{\mathcal{T}}} X) \longrightarrow S_{\bar{\mathcal{S}}} T_{\bar{\mathcal{S}}} \operatorname{Hom}_R(R \otimes_{R_e} M_e, S_{\bar{\mathcal{T}}} X) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

donde T y C son S-módulos a la izquierda $\bar{\sigma}$-torsión. Si consideramos esta sucesión en S_e-Mod, entonces

$$S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}\mathrm{Hom}_R(R\otimes_{R_e}M_e,S_{\bar{\mathcal{T}}}X) \cong S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}S_{\bar{\mathcal{S}}}\ T_{\bar{\mathcal{S}}}\ \mathrm{Hom}_R(R\otimes_{R_e}M_e,S_{\bar{\mathcal{T}}}\ X),$$

De este modo se tiene

$$S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}S_{\bar{\mathcal{S}}}\ T_{\bar{\mathcal{S}}}\ \mathrm{Hom}_R(M,S_{\bar{\mathcal{T}}}\ X) \cong S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}\mathrm{Hom}_R(R\otimes_{R_e}M_e,S_{\bar{\mathcal{T}}}\ X) \cong$$

$$S_{\mathcal{S}}T_{\mathcal{S}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}\ X).$$

Dado que $X \in R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest}.M_e}$, $T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ es M_e-estático por definición. Así, $T_{\mathcal{S}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X)$ es M_e-co-estático por el Teorema 3.4.3. Tras los anteriores cálculos,

$$T_{\mathcal{S}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X) \cong T_{\mathcal{S}}S_{\bar{\mathcal{S}}}T_{\bar{\mathcal{S}}}\mathrm{Hom}_R(M,S_{\bar{\mathcal{T}}}X) = T_{\mathcal{S}}S_{\bar{\mathcal{S}}}\bar{F}X,$$

y tenemos que $T_{\mathcal{S}}S_{\bar{\mathcal{S}}}\bar{F}X$ es M_e-co-estático, esto es, $\bar{F}X \in R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest}.M_e}$.

De manera análoga, para cada $Y \in S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{S}}^{\mathrm{rest}.M_e}$, $\bar{G}Y \in R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest}.M_e}$. Concretamente, tenemos una sucesión exacta en R-Mod

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{S}}}Y \longrightarrow S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{S}}}Y) \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

con T y C $\bar{\tau}$-torsión. Como en el anterior argumento, podemos deducir que

$$S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{S}}}Y) \cong S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{S}}}Y)$$

como R_e-módulos. La afirmación se sigue como en el anterior argumento después de observar que $M \cong M_e\otimes_{S_e}S$ ya que S es fuertemente graduado.

Ahora, probemos que $\bar{F}$ y $\bar{G}$ dan una equivalencia. Para $X \in R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\mathrm{rest}.M_e}$,

$$S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}\bar{G}\bar{F}X = S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{S}}}T_{\bar{\mathcal{S}}}\mathrm{Hom}_R(M,S_{\bar{\mathcal{T}}}X)) \cong$$

$$S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(M_e\otimes_{S_e} S\otimes_S S_{\bar{\mathcal{F}}}T_{\bar{\mathcal{F}}}\mathrm{Hom}_R(M,S_{\bar{\mathcal{T}}}X)) \cong$$

$$S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(M_e\otimes_{S_e} S_{\bar{\mathcal{F}}}T_{\bar{\mathcal{F}}}\mathrm{Hom}_R(M,S_{\bar{\mathcal{T}}}X)) \cong$$

$$S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(M_e\otimes_{S_e} S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}T_{\bar{\mathcal{F}}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M,S_{\bar{\mathcal{T}}}X)) \cong$$

$$S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(M_e\otimes_{S_e} S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X)) \cong S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X.$$

Como $S_{\bar{\mathcal{T}}}$ lleva objetos desde R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$ hasta R_e-módulos τ-cerrados, podemos deducir que $S_{\bar{\mathcal{T}}}\bar{G}\bar{F}X \cong S_{\bar{\mathcal{T}}}X$. Como $S_{\bar{\mathcal{T}}}$ es pleno y fiel, se sigue que $\bar{G}\bar{F}X \cong X$.

Dado $Y \in$ S-Mod/$\bar{\mathcal{F}}^{\mathrm{rest.M}_e}$,

$$S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}\bar{F}\bar{G}Y = S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}T_{\bar{\mathcal{F}}}\mathrm{Hom}_R(M,S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{F}}}Y))\cong$$

$$S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}T_{\bar{\mathcal{F}}}\mathrm{Hom}_R(S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(R\otimes_{R_e} M_e),S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{F}}}Y))\cong$$

$$S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}T_{\bar{\mathcal{F}}}\mathrm{Hom}_R(R\otimes_{R_e} M_e,S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{F}}}Y)) \cong$$

$$S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}T_{\bar{\mathcal{T}}}(M\otimes_S S_{\bar{\mathcal{F}}}Y)) \cong$$

$$S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(M_e\otimes_{S_e} S\otimes_S S_{\bar{\mathcal{F}}}Y)) \cong$$

$$S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}(M_e\otimes_{S_e} S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}Y)) \cong S_{\mathcal{F}}T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}Y.$$

Podemos deducir de nuevo de aquí que $\bar{F}\bar{G}Y \cong Y$. □

Con el objeto de extender [D1, Theorem 7.4], denotaremos por (R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$|weak M_e) la subcategoría plena de R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$ cuyos objetos son los objetos tales que $T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ divide débilmente a $T_{\mathcal{T}}M_e$. Si la teoría de torsión hereditaria $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ es de tipo finito, entonces R-Mod/$\mathcal{T}$ es cerrada bajo sumas directas. Así, tiene sentido considerar (R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$|M_e), la categoría de todos los objetos S de R-Mod/$\bar{\mathcal{T}}$ tales que $T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X$ divida a $T_{\mathcal{T}}M_e$. Análogamente, (S-Mod/$\bar{\mathcal{F}}$|weak S_e) denota la subcategoría plena de S-Mod/$\bar{\mathcal{F}}$ cuyos objetos Y satisfacen que $T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}Y$ divide débilmente a $T_{\mathcal{F}}S_e$. Como se probó en el Teorema 3.4.7., σ es de tipo finito si τ es de tipo finito y M_e es τ-finitamente generado y podemos definir la categoría $(S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{F}}|S_e)$ cuyos objetos Y vefifican que $T_{\mathcal{F}}S_{\bar{\mathcal{F}}}Y$ divide a $T_{\mathcal{F}}S_e$. Recordemos de la Sección 3.1 que denotamos por $S'_{\bar{\mathcal{F}}}:S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{F}} \longrightarrow Q_{\bar{\sigma}}(S)\text{-Mod}$ el funtor canónco que asocia unívocamente un $Q_{\bar{\sigma}}(S)$-módulo a la izquierda a cada objeto de $S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{F}}$. Análogamente, tenemos es funtor fiel y pleno $S'_{\mathcal{F}}:S_e\text{-Mod}/\mathcal{F} \longrightarrow Q_{\sigma}(S_e)\text{-Mod}$. Primero, subrayamos el siguiente resultado, que es consecuencia de ser los funtores $\bar{F}$ Y $\bar{G}$ aditivos.

Proposición 3.5.7. *Las subcategorías* $R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\text{rest}.M_e}$ *y* $S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{F}}^{\text{rest}.M_e}$ *son cerradas bajo sumas directas finitas y sumandos directos.* □

Lema 3.5.8. *Si R es τ-fuertemente graduado, τ es de tipo finito y M es un R-módulo a la izquierda graduado tal que M_e es τ-finitamente generado, entonces $\bar{\tau}$ es de tipo finito y M es $\bar{\tau}$-finitamente generado.*

Demostración: Sea I un ideal a la izquierda en el filtro idempotente $\mathcal{L}(\bar{\tau})$. Por la Proposición 3.1.7. $R_e \cap I$ es un ideal a la izquierda de R_e que pertenece a $\mathcal{L}(\tau)$. Como τ es de tipo finito, $R_e \cap I$ contiene un miembro finitamente generado J de $\mathcal{L}(\tau)$. Pero RJ es un ideal a la izquierda finitamente generado de R y así, deducimos que $\bar{\tau}$ es de tipo finito, ya que $RJ \in \mathcal{L}(\bar{\tau})$. Ahora supongamos que M es un R-módulo a la izquierda graduado tal que M_e es τ-finitamente generado. Así, M_e contiene un submódulo finitamente generado y τ-denso A. Consideremos la sucesión exacta de R-módulos a la izquierda

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow R\otimes_{R_e} A \longrightarrow R\otimes_{R_e} M_e \longrightarrow R\otimes_{R_e} M_e/A \longrightarrow 0 \quad (3)$$

Dado que R es τ-fuertemente graduado, podemos asegurar por la Proposción 3.5.1. y el Teorema 3.1.4. que (3) tiene puntos extremos τ-torsión o, equivalentemente, $\bar{\tau}$-torsión. Esto significa que la imagen finitamente generada de $R\otimes_{R_e} A$ en $R\otimes_{R_e} M_e$ es $\bar{\tau}$-densa. Un argumento análogo muestra que la imagen canónca de $R\otimes_{R_e} M_e$ en M es $\bar{\tau}$-densa. Componiendo estos morfismos canónicos obtenemos que la imagen de $R\otimes_{R_e} A$ en M es $\bar{\tau}$-densa y finitamente generada. □

Teorema 3.5.9. *Consideremos una teoría de torsión τ sobre R_e-Mod tal que R es τ-fuertemente graduado. Sea M un R-módulo a la izquierda graduado débilmente G-invariante tal que el R_e-S_e-bimódulo M_e sea τ-plano y τ-libre de torsión. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(I) Las restricciones de los funtores

$$\bar{F}:(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}\,|\,weak\ M_e) \longrightarrow (S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}\,|\,weak\ S_e)$$

y

$$\bar{G}:(S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}\,|\,weak\ S_e) \longrightarrow (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}\,|\,weak\ M_e)$$

establecen una equivalencia entre las subcategorías plenas $(R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}\,|\,\text{weak } M_e)$ *de* $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}$ *y* $(S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{S}}\,|\,\text{weak } S_e)$ *de* $S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}$.

(II) Si $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ es de tipo finito y M_e es τ-finitamente generado, entonces las restricciones de los funtores

$$\bar{F}:(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}\,|\ M_e) \longrightarrow (S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{S}}\,|\ S_e)$$

y

$$\bar{G}:(S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{P}}\mid S_e) \longrightarrow (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}\mid M_e)$$

establecen una equivalencia entre las subcategorías plenas $(R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}\mid M_e)$ *de* $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}$ *y* $(S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{P}}\mid S_e)$ *de* $S\text{-}Mod/\bar{\mathcal{P}}$.

Demostración: Necesitamos comprobar que si X es un objeto de $(R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}\mid \text{weak } M_e)$ entonces $\bar{F}X$ es un objeto en $(S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{P}}\mid \text{weak } S_e)$ y que si Y es un objeto en $(S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{P}}\mid \text{weak } S_e)$ entonces $\bar{G}Y$ está en $(R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}\mid \text{weak } M_e)$. Para ello, tomemos X en $(R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}\mid \text{weak } M_e)$. Existe un monomorfismo escincido en $R\text{-Mod}/\mathcal{T}$, $T_{\mathcal{C}}S_{\bar{\mathcal{C}}}X \longrightarrow (T_{\mathcal{C}}M_e)^n$. Ahora calculemos

$$\begin{gathered} S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}S_{\bar{\mathcal{P}}}\bar{F}X = S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}S_{\bar{\mathcal{P}}}T_{\bar{\mathcal{P}}}\mathrm{Hom}_R(M,\ S_{\bar{\mathcal{T}}}X) \cong \\ S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}S_{\bar{\mathcal{P}}}T_{\bar{\mathcal{P}}}\mathrm{Hom}_R(M_e \otimes_{S_e} S,\ S_{\bar{\mathcal{T}}}X) \cong S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,\ S_{\bar{\mathcal{T}}}X) \cong \\ S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,\ S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X) \end{gathered}$$

y observemos que si aplicamos el funtor $S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,\ S_{\mathcal{T}}(-))$ al morfismo $T_{\mathcal{T}}S_{\bar{\mathcal{T}}}X \longrightarrow (T_{\mathcal{T}}M_e)^n$ entonces obtenemos un monomorfismo escindido de S_e-módulos a la izquierda

$$\begin{gathered} S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,\ S_{\mathcal{T}}(T_{\mathcal{T}}M_e)^n) \cong (S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,\ S_{\mathcal{T}}T_{\mathcal{T}}M_e))^n \cong \\ (S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{R_e}(M_e,\ M_e))^n \cong (S_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}}S_e)^n \end{gathered}$$

Dado que $S_{\mathcal{P}}$ refleja monomorfismos escindidos, concluimos que $T_{\mathcal{P}}S_{\bar{\mathcal{P}}}\bar{F}X$ divide débilmente $T_{\mathcal{P}}S_e$. Siguiendo un argumento similar es posible probar que $\bar{G}Y \in (R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}\mid \text{weak } M_e)$ siempre que $Y \in (S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{P}}\mid \text{weak } S_e)$. La parte (I) se sigue de la Proposición 3.5.7. y del Teorema 3.5.6.

(II) Por el Lema 3.5.8., si $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ es de tipo finito y M_e es τ-finitamente generado, entonces $\bar{\tau} = (\bar{\mathcal{T}},\bar{\mathcal{F}})$ es de tipo finito y M es $\bar{\tau}$-finitamente generado. De esta manera las categorías

$R\text{-Mod}/\bar{\mathcal{T}}_{\text{rest.}M_e}$ y $S\text{-Mod}/\bar{\mathcal{G}}^{\text{rest.}M_e}$ tienen sumas directas arbitrarias que son preservadas por los funtores $\bar{F}$, $\bar{G}$, $T_{\mathcal{T}}$, $T_{\mathcal{G}}$, $T_{\bar{\mathcal{T}}}$ $S_{\bar{\mathcal{G}}}$. Utilizando estos hechos, es posible probar la parte (II) de manera similar a como se ha hecho con la parte (I) □

Recordemos que tenemos un homomorfismo canónico de anillos $Q_\sigma(S_e) \longrightarrow Q_{\bar{\sigma}}(S)$ ya que $(S_{\bar{\mathcal{G}}}T_{\bar{\mathcal{G}}}S)_e$ es isomorfo a $S_{\mathcal{G}}T_{\mathcal{G}}S_e$ siempre que S sea σ-fuertemente graduado. Por $(Q_{\bar{\sigma}}(S)\,|\,\text{weak } Q_\sigma(S_e))$ denotaremos la categoría de todos los $Q_{\bar{\sigma}}(S)$-módulos a la izquierda que son proyectivos de tipo finito considerados como $Q_\sigma(S_e)$-módulos.

Sea Y un $Q_{\bar{\sigma}}(S)$-módulo a la izquierda tal que existe un isomorfismo de $Q_\sigma(S_e)$-módulos a la izquierda $f: Y \oplus C \longrightarrow Z$, donde Z es un S_e-módulo a la izquierda σ-cerrado. Supongamos que G es finito. Siguiendo [NRVO, Theorem 3.1], el funtor olvido $V: S\text{-gr} \longrightarrow S\text{-Mod}$ tiene un adjunto a la derecha $\_[G]: S\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-gr}$ que construye para el S-módulo a la izquierda Y el S-módulo a la izquierda G-graduado $Y[G] = \oplus_{g\in G}\, {}^{g}Y$, donde ${}^{g}Y$ denota una copia del grupo abeliano Y. Si ${}^{g}y$ denota la imagen natural de un elemento y de Y en el subgrupo ${}^{g}Y$ de Y[G] entonces la estructura de S-módulo a la izquierda graduado en Y[G] está dada estableciendo que $(s_h\, {}^{g}y) = {}^{hg}(s_h y)$ para $s_h \in S_h$, y $g,h \in G$. Tenemos [NRVO, Remark 3.2.1] un S-homomorfismo canónico $\alpha: Y \longrightarrow V(Y[G])$ que es realmente una aplicación inyectiva. Es evidente que $Y[G]_e \cong Y$ como S_e-módulos a la izquierda.y tenemos que Y is σ-cerrado ya que es un sumando directo del S_e-módulo a la izquierda σ-cerrado Z. Por [NR, Proposition 2.1] esto implica que V(Y[G]) es $\bar{\sigma}$-cerrado y, de esta forma, Y es $\bar{\sigma}$-libre de torsión. Ahora tenemos un monomorfsimo canónico de S (o $Q_{\bar\sigma}(S)$)-módulos $Y \longrightarrow Q_{\bar\sigma}(Y)$ que extendemos trivialmente a un monomorfismo de $S_e$módulos a la izquierda $g:Y\otimes C \longrightarrow Q_{\bar\sigma}(Y)\otimes C$. Como el conúcleo de g es $\bar\sigma$-torsión, el isomorfismo f se extiende de manera única a un isomorfismo $\bar f:Q_{\bar\sigma}(Y)\otimes C \longrightarrow Z$. Esto implica que g es un isomorfismo. Así, $Y \cong Q_{\bar\sigma}(Y)$ y tenemos que Y es $\bar\sigma$-cerrado. Tomando Z un $Q_\sigma(S_e)$-módulo a la izquierda libre (de rango finito, si σ no es de tipo finito), es posible deducir el siguiente resultado.

Teorema 3.5.10. *Sea R un anillo τ-fuertemente graduado por un grupo finito G, donde τ es una teoría de torsión hereditaria sobre R_e-Mod y sea M un R-módulo a la izquierda graduado G-invariante tal que el R_e-S_e-bimódulo M_e es τ-plano y τ-libre de torsión. Las siguientes condiciones se verifican.*

(I) La restricción de los funtores

$$\bar F:(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid weak\ M_e) \longrightarrow (Q_{\bar\sigma}(S) \mid weak\ Q_\sigma(S_e))$$

y

$$\bar G : (Q_{\bar\sigma}(S) \mid weak\ Q_\sigma(S_e)) \longrightarrow (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid weak\ M_e)$$

establecen una equivalencia entre las subcategorías plenas $(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid \text{weak } M_e)$ *de* $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}$ *y* $(Q_{\bar\sigma}(S) \mid weak\ Q_\sigma(S_e))$ *de* $Q_{\bar\sigma}(S)\text{-}Mod$.

(II) Si $\tau = (\mathcal{T},\mathcal{F})$ es de tipo finito y M_e es τ-finitamente generado, entonces la restricción de los funtores

$$\bar F:(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid M_e) \longrightarrow (Q_{\bar\sigma}(S) \mid Q_\sigma(S_e))$$

y

$$\bar G: (Q_{\bar\sigma}(S) \mid Q_\sigma(S_e)) \longrightarrow (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid M_e)$$

establecen una equivalencia entre las subcategorías plenas

$(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}\ |\ M_e)$ de $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}$ y $(Q_{\bar{\sigma}}(S)|\ Q_{\sigma}(S_e))$ de $Q_{\bar{\sigma}}(S)$-Mod. □

Sea M un R-módulo a la izquierda graduado y G-invariante con M_e τ-libre de torsión. Supongamos que M_e es τ-cocrítico y τ-inyectivo, con lo que $T_{\mathcal{T}}M_e$ es un objeto simple en R_e-Mod/$\mathcal{T}$. No es difícil de ver que $S_e = End_{R_e}(M_e)$ es un anillo de división y que S es un producto cruzado. Así, M_e es plano como S_e-módulo a la derecha. Como S_e es un anillo de división, la subcategoría localizante de S_e-Mod, $\mathcal{S} = \{ A \in S_e\text{-Mod}: M_e \otimes_{R_e} A = 0\} = \{0\}$. De esta manera, tenemos que la subcategoría $\bar{\mathcal{S}}$ es trivial asímismo. Además, todo S_e-módulo a la izquierda es libre y, por tanto, $(S|S_e)$ = S-Mod y $(S|\text{weak } S_e)$ es la categoría de aquellos S-módulos a la izquierda que son finitamente generados como S_e-módulos a la izquierda. En este último caso, para G finito, es posible probar que un S-módulo a la izquierda es finitamente generado como S-módulo si y sólo si es finitamente generado como S_e-módulo a la izquierda. Esto ocurre porque S es fuertemente graduado y, así, S es un S_e-módulo proyectivo de tipo finito. Como un corolario del Teorema 3.5.9., tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5.11. *Sea R un anillo τ-fuertemente graduado por un grupo G, donde τ es una teoría de torsión sobre R_e-Mod. Sea M un R-módulo a la izquierda graduado débilmente G-invariante tal que M_e es τ-cocrítico y τ-inyectivo. Los siguientes hechos se verifican.*

(I) Si τ es de tipo finito, entonces la restricción de los

funtores

$$Hom_R(M, S_{\bar{\mathcal{T}}}(-)) : (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid M_e) \longrightarrow S\text{-}Mod$$

y

$$T_{\bar{\mathcal{T}}}(M \otimes_S -) : S\text{-}Mod \longrightarrow (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid M_e)$$

establecen una equivalencia entre la subcategoría plena $(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid M_e)$ *de* $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}$ *y la categoría S-Mod.*

(II) Si el grupo G es finito, entonces la restricción de los funtores

$$Hom_R(M, S_{\bar{\mathcal{T}}}(-)) : (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid \text{weak } M_e) \longrightarrow S\text{-}mod$$

y

$$T_{\bar{\mathcal{T}}}(M \otimes_S -) : S\text{-}mod \longrightarrow (R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid \text{weak } M_e)$$

establecen una equivalencia de categorías entre la subcategoría plena $(R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}} \mid \text{weak } M_e)$ *de* $R\text{-}Mod/\bar{\mathcal{T}}$ *y la categoría S-mod de todos los S-módulos a la izquierda finitamente generados.* □

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

[AGT1] M.J. Asensio, J. Gómez, B.Torrecillas, Relative homological dimensions of divisorially graded rings, preprint.

[AGT2] M.J. Asensio, J. Gómez, B. Torrecillas, Anillos κ-divisorialmente graduados, Actas XV Jornadas Luso-Espanholas de Matemática (1990), vol 1, 107-112.

[AGT3] M.J. Asensio, J. Gómez, B. Torrecillas, Krull dimensions of divisorially graded rings, Comm. in Algebra, 19 (1991), 3447-3464.

[AM] E. P. Armendariz and G.R. McDonald, Maximal Quotient rings, Canad. J. Math, 24 (1972), 835-850.

[AN] T. Albu and C. Năstăsescu, Relative finiteness in theory, Monographs and Textbooks, vol 84, New York, 1984.

[B] B. Banaschewski, On covering of modules, Math. Nacht. 31 (1966), 57-71.

[Bs] H. Bass, Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 466-488.

[Ca] V. C. Cateforis, Twosided semisimple maximal quotient ring. Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970) 339-349.

[Cs] S.U. Chase, Direct products of modules, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 457-473.

[Ch1] T. Cheatham, Direct sums of torsion-free covers, Can. J. Math. 25 (1973), 1002-1005.

[Ch2] T. Cheatham, The quotient field as a torsion-free covering module, Israel J. Math. 33 (1979), 172-176.

[Ch3] T. Cheatham, Finite dimensional torsion free covers, Pacific J. Math. 39 (1971), 113-118.

[CEJ] T. Cheatham, E.E. Enochs and O.M.G. Jenda, The structure of injective covers of special modules, Israel J. Math. 63 (1988), 237-242.

[CE] T. Cheatham and E. Enochs, Injective hulls of flat modules. Comm. Algebra 8 (1980) 1989-1995.

[Cl] E. Cline, Stable Clifford Theory, J. Algebra 22 (1972), 350-364.

[C] R.R. Colby, Rings which have flat injective Modules. J. Algebra 35 (1975) 239-252.

[CR1] R.R. Colby and E.A. Rutter, Generalizations of QF-3 algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 371-386.

[CR2] R.R. Colby and E.A. Rutter, π-flat and π-projective modules. Arch. Math. 22 (1971) 246-251.

[CR3] R.R. Colby and E.A. Rutter, Semi-primary QF-3 rings, Nagoya Math. J. 32 (1968), 253-258.

[CR4] R.R. Colby and E.A. Rutter, QF-3 rings with zero singular ideal, Pacific. J. Math. 28 (1969), 303-308.

[D1] E. Dade, Group graded rings and modules, Math. Z. 174 (1980), 241-262.

[D2] E. C. Dade, Clifford theory for group-graded rings, J. Reine Angew. Math. 369 (1986), 40-86.

[D3] E. C. Dade, Clifford theory for group-graded rings, II, J. Reine Angew. Math. 387 (1988), 148-181.

[E1] E. Enochs, Torsionfree covering modules, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963) 884-889 .

[E2] E. Enochs, Covers by flat modules and submodules of flat modules. J. Pure Appl. Algebra 57 (1989) 33-38.

[E3] E. Enochs, Remarks on commutative noetherian rings whose flat modules have flat injective envelopes, Portugal. Math. 45 (1988), 151-156.

[E4] E.E. Enochs, Injective and flat covers, envelopes and resolvents, Israel J. Math. 39 (1981), 189-209.

[F1] C. Faith, Algebra II. Ring Theory, Springer, 1976.

[Fu1] K.R. Fuller, Artinian rings, Notas de Matemática vol.2, Univ. Murcia, 1989.

[Fu2] K.R. Fuller, On indecomposable injectives over artinian rings, Pacific J. Math. 29 (1969), 115-135.

[Gb] P. Gabriel, Des Catégories Abeliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 323-448

[GlT] J. Golan and M. Teply, Torsionfree covers, Israel J. Math.

15 (1973) 237-259.

[Go] O. Goldman, Rings and modules of quotients, J. Algebra, 13 (1969), 10-47.

[GN] J.L. Gómez Pardo y C. Năstăsescu, Relative projectivity, graded Clifford theory and applications, por aparecer en J. Algebra.

[GR] J. L. Gómez Pardo y N. Rodríguez González, QF-3 rings and torsion theories, J. Austral. Math. Soc. 46 (1989), 251-261.

[GN] J.L. Gómez Pardo, C. Năstăsescu, Relative projectivity, graded Clifford theory and applications, to appear J. Algebra.

[GP1] J.L. Gómez Pardo, Embedding cyclic and torsion-free modules in free modules, Arch. Math.

[G] J. Gómez Torrecillas, Técnicas para el estudio de los módulos no-singulares, Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, 1989, vol 1, 57-62.

[GT1] J. Gómez y B. Torrecillas, Torsionfree covers and covers by submodules of flat modules, Comm. Algebra 19 (1991), 803-827.

[GT2] J. Gómez y B. Torrecillas, Corrigendum to the paper "Torsionfree covers and covers...", por aparecer en Comm. Algebra.

[GT3] J. Gómez y B. Torrecillas, Strongly Graded Left FTF rings, por aparecer en Pub. Mat. U.A.B.

[GT4] J. Gómez y B. Torrecillas, Stable Clifford Theory for Divisorially Graded Rings, Actas Contacto Italo-Belga de Algebra, 1991.

[GT5] J. Gómez y B. Torrecillas, Les anneaux FTF gradués, Actes de 5^{eme} Journées Franco-Belges d'Algèbre, 1991.

[GT6] J. Gómez y B. Torrecillas, Flat torsionfree modules and QF-3 rings, preprint.

[GT7] J. Gómez y B. Torrecillas, Quasi-Frobenius quotient rings, Extracta Mathematicae 6 (1991), 4-7.

[Gd1] K.R. Goodearl, Ring Theory,

[GdW] K.R. Goodearl & R.B. Warfield, Jr., An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1989.

[H] M. Harada, QF-3 and semi-primary PP-rings II, Osaka J. Math. 3 (1966), 21-27.

[Ho1] M. Hoshino, On dominant dimension of noetherian rings, Osaka J. Math. 26 (1989), 275-280.

[Ho2] M. Hoshino, Localization in abelian categories and double dual functors, Arch. Math. 57 (1991), 345-351.

[J] S. Jain, Flat and FP-injectivity, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 437-442.

[K] J.T. Knight, On epimorphism on non-commutative rings. Proc. Camb. Phil. Soc. 68 (1970)

[L1] J. Lambek, Bicommutators of nice injectives, J. Algebra 21 (1972) 60-73.

[Lz1] D. Lazard, Autour de la platitud, Bull. Soc. math. France 97 (1968), 81-128.

[Lz2] D. Lazard, Sur les modules plats. C.R. Acad. Sci. Paris 258 (1964) 6313-6316.

[Le] I.S. Levy, Commutative rings whose homomorphic images are self-injectives, Pac. J. Math. 18 (1966) 149-153.

[Lo] K. Louden, Torsion theories and ring extensions, Comm. Algebra 4 (1976), 503-532.

[Ma1] K. Masaike, Semi-primary QF-3 quotients rings. Comm. Algebra 11 (1983) 377-389.

[Ma2] K. Masaike, Duality for quotient modules and a characterization of reflexive modules, J. Pure Appl. Algebra

[M1] E. Matlis, Torsion-free modules, Univ. of Chicago Press,1972.

[M2] E. Matlis, Some properties of commutative ring extensions, Illinois, J, Math. 31 (1987) 374-418.

[MiT] R. W. Miller and M.L. Teply. Torsionfree injective modules. Pacific J. Math. 83 (1979) 207-219.

[Mo1] K. Morita, Noetherian QF-3 rings and two-sided quasi-Frobenius maximal quotient rings, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 837-840.

[Na] S.K. Nauman, Static modules and stable Clifford theory, J. Algebra 128 (1990), 497-509.

[N1] C. Năstăsescu, Some Constructions over Graded Rings, J. Algebra 120 (1989), 119-138.

[N2] C. Năstăsescu, Conditions de finitude pour les modules II, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 25 (1980), 615-630.

[N3] C. Năstăsescu, Strongly graded rings of finite groups, Comm. Algebra 11 (1980)

[NR] C. Năstăsescu, N. Rodinò, Localization on graded modules, relative Maschke's theorem and applications, Comm. in Algebra 18 (1990) 811-832.

[NT] C. Năstăsescu y B. Torrecillas, Relative graded Clifford theory, preprint.

[NRVO] C. Năstăsescu, S. Raianu and F. Van Oystaeyen, Modules Graded by G-Sets, Math. Z. 203 (1990), 605-627.

[NVO1] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, Graded Ring Theory, Noth Holland, Amsterdam, 1982

[NVO2] C. Năstăsescu , F. Van Oystaeyen, Clifford theory for Subgroup of Grading Groups, preprint.

[NVO3] C. Năstăsescu, F. Van Oystaeyen, Clifford Theory for subgroups of grading groups, preprint.

[O] B.L. Osofsky, A generalization of quasi-Frobenius rings, J. Algebra 4, 373-387.

[Ro] Rotman, An introduction to homological algebra.

[Rw] L. Rowen, Ring Theory, vol I, Academic Press, London, 1988.

[Rb] A. Rubin, On exact localizations, Pacific J. Math. 49 (1973) 473-481.

[R] E. A. Rutter, A characterization of QF-3 rings, Pacific J. Math. 51 (1974) 533-536.

[S1] B. Stenström, Rings of Quotients (Springer, Berlin, 1975).

[S2] B. Stenstrom, Coherent rings and FP-injective modules, J. London Math. Soc. 2 (1970), 323-329.

[Su1] T. Sumioka, On non-singular QF-3' rings with injective dimension ≤ 1, Osaka J. Math. 15 (1978), 1-11.

[Su2] T. Sumioka, On QF-3 and 1-Gorenstein rings, Osaka J. Math. 16 (1979), 395-403.

[Ta1] H. Tachikawa, On left QF-3 rings, Pacific J. Math. 32 (1970), 255-268.

[Ta2] H. Tachikawa, Quasi-Frobenius rings and generalizations, Lecture Notes in Mathematics, vol. 351, Springer, Berlin, 1973.

[T1] M.L. Teply, Torsionfree injective modules, Pacific J. Math. 31 (1969) 441-453.

[T2] M.L. Teply, Torsionfree covers II. Israel J. Math. 23 (1976) 132-136

[Th] R. M. Thrall, Some generalizations of quasi-Frobenuis algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 173-183.

[To1] B. Torrecillas, $\mathcal{T}$-torsionfree $\mathcal{T}$-injective covers, Comm. in Algebra 12 (1984) 2707-2726.

[VO1] F. Van Oystaeyen, On Clifford systems and generalized crossed products, J. Algebra 87 (1984), 396-415.

[V1] W.V. Vasconcelos, Flat modules over conmutative noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 137-143.