UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

CONTRIBUCION AL ESTUDIO, DE LOS PROBLEMAS DE REGULARIDAD Y DE LAS DIFUSIONES EN ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS HILBERTIANAS.

Memoria que, para optar al grado de Doctor, presenta el licenciado en Ciencias Matematicas: Dª Josefa Linares Perez

V°B°

Director de la Memoria:

Prof. Dr. D. Ramon Gutierrez Jaimez.

Realizado el acto público de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 19 de Junio de 1982, en la Universidad de Granada, ante el Tribunal formado por:

Presidente: Dr. Don Rafael Infante Macías

Vocales: Dr. Don Paul André Meyer
Dr. Don Miguel San Miguel Marco
Dr. Don Antonio Pascual Acosta

Secretario: Dr. Don Ramon Gutierrez Jaimez

obtuvo la Calificación de

SOBRESALIENTE CUM LAUDE

INTRODUCCION

La teoria de ecuaciones integro-estocasticas ha tenido un gran avance, por su importancia en las aplicaciones. Su primera aparición (1930) se debe a Uhlenbeck y Ornstein, en el estudio de la teoria dinamica del movimiento Browniano. La cuestión del significado matematico de las ecuaciones estocasticas y de sus soluciones (1941-1942) se debe a Doob y K. Ito, que introducen la noción de integral estocastica, generalizando el resultado obtenido por Wiener. Esta definición de integrales estocasticas, generalmente conocidas como integrales Ito, ha sido adoptada por muchos autores, como la base para el estudio de ecuaciones integrales ó diferenciales estocasticas y sus ramificaciones. Citamos de entre ellos a Cabaña (1966), Daletskii (1967) y C. Fernandez Vivas-R. Gutierrez Jaimez (1975), que dan versiones mas generales de la integral de Ito y estudian la ecuación integro-estocastica asociada; del proceso solución de dicha ecuaciones, vamos a realizar un analisis detallado, a lo largo de este trabajo, contribuyendo con ciertos resultados relativos al caracter markoviano fuerte y regularidades de las soluciones, asi como su relación con la teoria de difusiones.

Los objetivos que pretendemos alcanzar en esta memoria son los siguientes:

Presentar un analisis detallado de las ecuaciones integro-estocasticas, analizadas por los autores anteriormente citados, que nos sirva de fundamento solido para el desarrollo posterior.

La propiedad de Markov fuerte, tiene gran importancia para cualquier proceso estocastico; salvo en el caso de la ecuación de Ito clásica que se conoce el caracter felleriano del proceso solución, no ha sido abordado este problema para las soluciones de las ecuaciones que estamos estudiando; este sera pues nuestro objetivo, demostrar que dichos procesos solución verifican la propiedad de Markov fuerte.

Yor (en su tesis, capitulo III-B) realiza el estudio de las regularidades de la solución de la ecuación estocastica en un espacio de Hilbert, cuya integral estocastica, que define previamente, es la de un proceso operador valuado con respecto a un movimiento Browniano (N); como caso particular obtendriamos los mismos resultados para el proceso solución de la ecuación de Ito clâsica, pero no podremos generalizarlos para las ecuaciones estudiadas por Cabaña y C. fernandez Vivas-R. Gutierre Jaimez estudiaremos pues la variación de la solución de dichas ecuaciones, cuando varian las condiciones iniciales y los coeficientes de la ecuación, cuestión no analizada para ecuaciones en las que la integral estocastica tiene como proceso integrador el operador de Wiener.

Por ultimo, pretendemos obtener la relación del proceso solución, de la ecuación estudiada por Cabaña, con la teoria de difusiones, resultado que sera de gran importancia para muchas aplicaciones y ejemplos concretos, y que solo se ha estudiado para la ecuación de Ito clásica.

En el capitulo 1, se comienza definiendo las integrales estocasticas de Ito, de Cabaña, de Daletskii y de Ito generalizada, que serviran para formular las correspondientes ecuaciones integrales estocasticas asociadas. A continuación pasamos a investigar condiciones que garanticen la existencia y unicidad del proceso solución de tales ecuaciones. Se efectuara un analisis detallado (salvo en el caso de la ecuación de Ito clásica) de las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad, pues algunos de sus pasos seran utilizados en capitulos posteriores y deberemos hacer referencia al desarrollo que en este tema realicemos, ya que en los libros solo suele encontrarse un breve esquema de demostración.

En el capitulo 2, se pasa a estudiar el caracter markoviano fuerte de los procesos solución de las ecuaciones integrales estocasticas analizadas anteriormente. Inicialmente, se daran una serie de definiciones y propiedades basicas que seran fundamentales para una mejor comprensión del tema. Ya es conocido que la solución de la ecuación de Ito clásica, es un proceso Feller, completaremos este aspecto demostrando el caracter markoviano fuerte. Este mismo estudio se realizara para las otras tres ecuaciones integrales estocasticas, viendo ademas en el caso de la ecuación en espacios de Hilbert separables, algunas propiedades importantes del operador de transición asociado a su proceso solución.

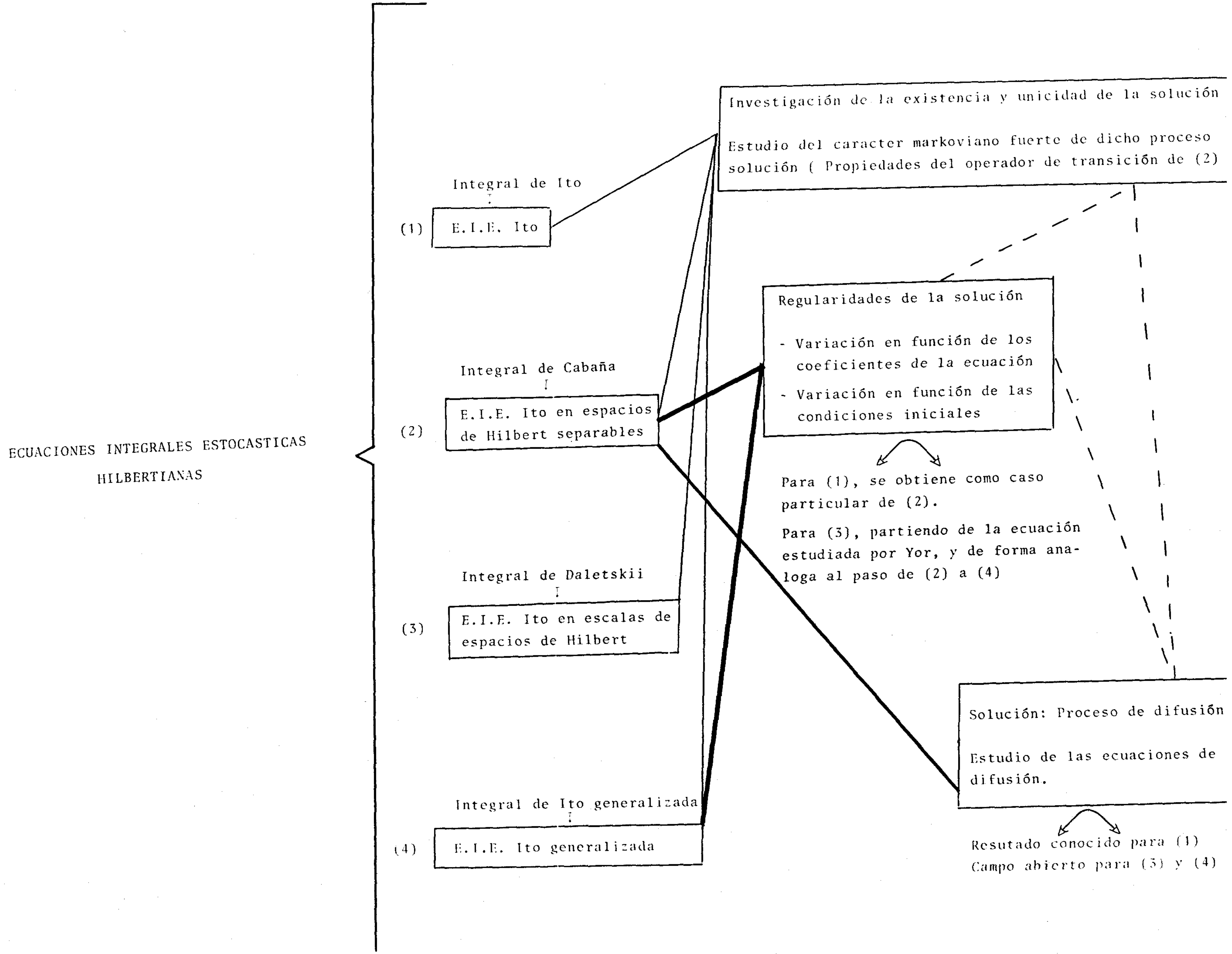
En el capitulo 3, trataremos una importante cuestión, aun no abordada para las ecuaciones cuyas integrales estocasticas tienen como proceso integrador el operador de Wiener: "Las regularidades del proceso solución". Realizaremos este estudio en dos partes; en primer lugar, veremos la variación de la solución en función de los coeficientes de la ecuación, y en segundo lugar, dicha variación en función de las condiciones iniciales. Como aplicación de los resultados que obtendremos en la primera parte, se demostrara que se puede aproximar la solución general de la correspondiente ecuación integral estocástica, mediante las soluciones de las ecuaciones en dimensión finita; los resultados de la segunda parte se utilizaran para estudiar la derivabilidad de la aplicación que a cada x, le asocia el proceso solución de la ecuación integral estocastica con valor inicial dicho punto x.
El estudio de las regularidades del proceso solución, solo lo haremos para la E.I.E. Ito en espacios de Hilbert separables y para la E.I.E. Ito generalizada con objeto de no extendernos demasiado, y, ya que para la E.I.E. de Ito clásica resultaria como caso particular de estas, (ó de la estudiada por Yor) y para la E.I.E. Ito en escalas de espacios de Hilbert, se obtendria partiendo de la de Yor y teniendo en cuenta el desarrollo que en este tema realizaremos.

En el capitulo 4, nos centraremos en el proceso solución de la ecuación de Ito en espacios de Hilbert separables. Dicha solución, como hemos probado en el capitulo 2, es un proceso de Markov fuerte; demostraremos en este tema que es también un proceso de difusión y estudiaremos las ecuaciones asociadas a su densidad de transición "Ecuaciones de difusión".

Previamente definiremos el concepto de C-difusión y demostraremos una acotación (fundamental en el desarrollo posterior) para la solución de la ecuación integral estocastica en espacios de Hilbert separables, que estamos estudiando.

El trabajo, se finaliza con un Apendice en el que, a titulo de ilustración, se expone un ejemplo de aplicación de la teoria del Capitulo 4, obteniendo una generalización del proceso logaritmico-normal, en un espacio de Hilbert separable.

Las lineas generales de nuestro trabajo, quedan esquematizadas del siguiente modo:


ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS HILBERTIANAS
Integral de Ito
(1) E.I.E. Ito
Integral de Cabaña
(2) E.I.E. Ito en espacios de Hilbert separables
Integral de Daletskii
(3) E.I.E. Ito en escalas de espacios de Hilbert
Integral de Ito generalizada
(4) E.I.E. Ito generalizada
Investigación de la existencia y unicidad de la solución
Estudio del caracter markoviano fuerte de dicho proceso solución (Propiedades del operador de transición de (2)
Regularidades de la solución
- Variación en función de los coeficientes de la ecuación
- Variación en función de las condiciones iniciales
Para (1), se obtiene como caso particular de (2).
Para (3), partiendo de la ecuación estudiada por Yor, y de forma analoga al paso de (2) a (4)
Solución: Proceso de difusión
Estudio de las ecuaciones de difusión.
Resutado conocido para (1)
Campo abierto para (3) y (4)

Como problemas abiertos que a lo largo de esta Memoria han quedado sin abordar, podemos señalar los siguientes:

(a) El estudio de las propiedades de regularidad, en el caso de Ecuaciones Diferenciales Estocasticas constituidas con otros tipos de integrales estocasticas, tanto hilbertianas, como generalizadas de Ito en otros sentidos (las de McShane; Young, etc.)

(b) La extensión a procesos multiparametricos, de la integración de Cabaña, linea ya comenzada muy recientemente, para tipos mas simples.

(c) La investigación de Difusiones asociadas a otros tipos de Ecuaciones estocasticas no consideradas en esta Memoria, y sus aplicaciones a modelización.

(d) Los problemas de Control estocastico, para las ecuaciones de Cabaña y Daletskii, asi como la interpretación y estudio de los modelos log-normales de Difusión con factores exogenos, caso aqui no abordado, como caso particular de aquellos.

AGRADECIMIENTOS

A Dr. D. Ramon Gutierrez Jaimez, director de esta memoria.

INDICE

CAPITULO 1: ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS ASOCIADAS CON PROCESOS MARKOVIANOS

1.1: Introducción

1.2: Integración estocastica

A) Integral estocastica de Ito

B) Integral estocastica de Cabaña

C) Integral estocastica de Daletskii

D) Integral estocastica generalizada

1.3: Existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones integrales estocasticas

A) E.I.E. Ito

B) E.I.E. Ito en espacios de Hilbert separables

C) E.I.E. Ito en escalas de espacios de Hilbert

D) E.I.E. Ito generalizada

CAPITULO 1

ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS ASOCIADAS CON PROCESOS MARKOVIANOS

1.1 INTRODUCCION

Consideremos la ecuacion integral estocastica Ito:

$$X(t,\omega) = X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t} a(\tau,X)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau,X)\, dW(\tau,\omega)$$

donde $a(t,X)$ y $b(t,X)$ son funciones a las que hay que exigir ciertas condiciones, $X(t,\omega)$ es un proceso estocastico real y $W(t,\omega)$ un proceso de Wiener.

La segunda integral no puede interpretarse como una integral Stieltjes, puesto que la función integrando es un proceso Wiener, y se sabe que las realizaciones de tal proceso son de variación no acotada con probabilidad uno (las trayectorias de un proceso de Wiener no son diferenciables en casi todo punto)

Por tanto, para estudiar las soluciones de la ecuación anterior, hay que definir en primer lugar la integral estocastica que aparece en ella.

El concepto de integral estocastica, tuvo su origen en articulos fisicos. Wiener fue el primero en dar un tratamiento riguroso del movimiento Brownniano. En la formulación de dicho fenomeno, Wiener establecio una integral de la forma:

$$\int_a^b f(t)\ dW(t,\omega)$$

donde f(t) es una función deterministica de t, y $W(t,\omega)$ es un proceso Wiener (proceso estocastico del movimiento Brownniano)

Pero para estudiar las ecuaciones integrales estocasticas Ito, es necesario generalizar la integral Wiener, considerando integrandos aleatorios $f(t,\omega)$, esta idea la llevo a cabo el matematico Ito, con la definición de su integral:

$$\int_a^b f(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

donde tanto el integrando como el integrador son procesos estocasticos reales.

A partir de Ito, diversos autores han dado versiones cada vez mas generales de su integral, mediante un debilitamiento progresivo de las propiedades estocasticas del proceso integrador. Asi se han ido considerando como integradores: Procesos Wiener; Operadores de Wiener; Martingalas... , en domonios de integración cada vez mas amplios: Espacio real; Espacios de Hilbert; Escalas de Hilbert....

En el apartado 1.2 estudiaremos, ademas de la integral estocastica de Ito, las siguientes integrales (generalización de la de Ito) :

Integral estocastica de Cabaña.

Integral estocastica de Daletskii.

Integral estocastica generalizada.

Definidas las anteriores integrales, el paso inmediato es investigar condiciones que garanticen la existencia de un unico proceso solución, para las ecuaciones integrales estocasticas Ito correspondientes, asi como su continuidad, medibilidad, etc. Esto sera estudiado en el punto 1.3, donde enunciaremos los teoremas de existencia y unicidad, realizando (salvo en el caso de la ecuación de Ito clásica) una demostración detallada de dichos teoremas, ya que algunos pasos de estas demostraciones, seran posteriormente utilizados, y solo suele encontrarse un breve esquema de ellas.

El objeto de este primer capitulo, es presentar un fundamento solido de las generalizaciones de la ecuación integral estocastica Ito clasica, tanto de sus definiciones, como de lo concerniente a la existencia, unicidad y continuidad del proceso solución, ya que en capitulos posteriores estudiaremos cuestiones, aun no abordadas, relativas a la solución de tales ecuaciones integrales estocasticas.

1.2 INTEGRACION ESTOCASTICA

En este apartado, vamos a dar una exposición detallada de las definiciones de las siguientes integrales estocasticas:

Integral estocastica de Ito:

$$\int_a^b f(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

donde $f(t,\omega)$ es una función aleatoria real-valuada y $W(t,\omega)$ un proceso Wiener real.

Integral estocastica de Cabaña:

$$\int_\Theta b(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

donde $W(t,\omega)$ es un operador de Wiener y $b(t,\omega)$ un proceso estocastico valuado en un espacio de Hilbert.

Integral estocastica de Daletskii:

$$\int_\Theta B(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

donde $W(t,\omega)$ es un proceso Wiener Hilbert-valuado y $B(t,\omega)$ un proceso operador-valuado en una escala de espacios de Hilbert.

Desde el punto de vista del proceso integrador, la integral de Cabaña es mas general que la de Daletskii; pero esta tiene la ventaja sobre la primera, de utilizar una escala de Hilbert

En efecto, el estudio de las ecuaciones integrales estocasticas en escalas de espacios de Hilbert, conduce a resultados ma generales que los obtenidos al considerar un solo espacio Hilbertiano.

Esta observacion nos lleva al estudio de:

Integral estocastica generalizada:

$$\int_{\Theta} B(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

donde tanto el proceso integrando, como el integrador son operador-valuados en escalas de espacios de Hilbert.

A) INTEGRAL ESTOCASTICA DE ITO

Sea $\{ W(t,\omega) \; ; \; t \geq 0 \}$ un proceso Wiener real y sea $\{ f(t,\omega) \; ; \; t \geq 0 \}$ una función aleatoria real - valuada.
La dependencia de W y f es "no anticipativa" es decir $f(t,\omega)$ depende como maximo de los valores presentes y pasados de $W(\tau,\omega)$ $\tau \leq t$ pero no de los valores $W(\tau,\omega)$ $\tau > t$
Para definir este tipo de dependencia, introducimos una familia $\{ \mathcal{F}_t \; ; \; t \geq 0 \}$ de σ-algebras con las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ para $t_1 < t_2$

2. $W(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$ - medible, para cada t fijo.

3. Para $t_1 > t_2 \geq t$, los incrementos $W(t_1,\omega) - W(t_2,\omega)$ son independientes de $\mathcal{F}_t$.

4. Para cada t fijo, la variable aleatoria $f(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-medible

Supondremos que $f(t,\omega)$ es una función aleatoria medible y que

$$\mu \{\omega : \int_0^T |f(t,\omega)|^2 \, dt < \infty \} = 1 \qquad \text{donde } T < \infty$$

El conjunto de todas las funciones $f(t,\omega)$ que satisfacen esta ultima propiedad, lo representaremos por $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}_t)$

Para definir la integral estocastica de Ito

$$\int_a^b f(t,\omega) \, dW(t,\omega)$$

se procede como en el caso de integrales no estocasticas: en primer lugar, se define para funciones simples ó de salto, y despues utilizando argumentos de completitud, obtendremos la integral es-

tocastica Ito, para toda función $f(t,\omega)$ perteneciente a M_2, que sea limite de sucesiones de funciones simples.
Tendremos por tanto que demostrar (una vez que se defina una función simple) que cualquier $f \in M_2$ puede aproximarse, en el sentido apropiado por una sucesión de funciones de salto

Una función $f(t,\omega)$ se dice que es "simple ó de salto", si existe una partición de $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \qquad \text{tal que}$$

$$f(t,\omega) = f(t_i,\omega) \qquad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

Notemos que los puntos t_i son independientes de ω

El siguiente lema, cuya demostración puede verse en {2} muestra que $\forall f \in M_2$, ó sea, para toda función de cuadrado integrable en $[0,T]$, existe una sucesión de funciones simples $f_n \in M_2$ que aproximan f en media cuadratica.

" $\forall f \in M_2$, existe una sucesión de funciones simples $f_n \in M_2$ tal que

$$\mu \{ \omega : \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2 \, dt = 0 \} = 1 \quad "$$

Por tanto, las funciones simples son densas en M_2, en el sentido de la L_2-convergencia.

La integral estocastica de una función simple $f(t,\omega)$ se define como la suma Riemann - Stieltjes ordinaria:

$$\int_a^b f(t,\omega) \, dW(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n} f(t,\omega) \, [W(t_{k+1},\omega) - W(t_k,\omega)]$$

Se demuestra que la sucesión de integrales

$$\int_a^b f_n(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

sucesión de sumas Riemann - Stieltjes, converge en probabilidad a un limite (univocamente definido salvo conjuntos de probabilidad nula).

Este limite:

$$\int_a^b f(t,\omega)\ dW(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t,\omega)\ dW(t,\omega) \quad \text{(en probabilidad)}$$

es la integral estocastica de Ito, del proceso $f(t,\omega) \in M_2$, respecto del proceso de Wiener $W(t,\omega)$, y puede interpretarse como un funcional lineal, definido en M_2

(Este limite es independiente de la sucesión de funciones simples que se haya tomado en M_2)

Para las aplicaciones de la integral de Ito, en la formulación de las ecuaciones integrales estocasticas, necesitamos considerar la integral como una función del limite superior

$$g(t,\omega) = \int_a^t f(\tau,\omega)\ dW(\tau,\omega)$$

Como $\forall t$ esta integral esta univocamente determinada, excepto en un conjunto nulo, podemos suponer que $g(t,\omega)$ es una función aleatoria separable.

Se demuestra que el proceso $g(t,\omega)$ es una martingala y que es continuo.

Es tambien posible definir la integral estocastica Ito para funciones aleatorias con valores en R^n :
Sean $W_1(t,\omega),\ldots, W_n(t,\omega)$, n procesos Wiener reales, mutuamente independientes. Supongamos que existe una sucesión de σ-algebras $\{ \mathcal{F}_t : t\geq 0 \}$, respecto de la cual los procesos $W_i(t,\omega)$ son medibles y tienen los incrementos independientes. Entonces puede definirse la integral de Ito

$$\int_a^b f(t,\omega)\, dW_i(t,\omega)$$

para todo $i = 1,\ldots, n$; y cualquier función $f(t,\omega)$ con valores en R^n , siempre que sus componentes $f_i(t,\omega)$ sean de cuadrado integrable en todo intervalo finito, $\forall i = 1,\ldots, n$

El calculo integral estocastico, basado en una integral tipo Ito, no puede ser integramente compatible con el calculo integral clásico, basado en una integral ordinaria.
La teoria de ecuaciones estocasticas Ito es consistente consigo misma, y no es una extensión de la teoria clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones integrales.

B) INTEGRAL ESTOCASTICA DE CABAÑA

Sean H y G dos espacios de Hilbert, con productos escalares (,) y < , > respectivamente; y sean $\tilde{H} = L_2(\Omega,H)$ y $\tilde{G} = L_2(\Omega,G)$, los espacios hilbertianos de las variables aleatorias de cuadrado integrable con valores en H y G.

Consideremos el espacio medible $(\Theta,\mathcal{T})$, donde Θ es un espacio parametrico de la forma $[0,T)$ con $T \leq \infty$, y $\mathcal{T}$ es el σ - algebra de conjuntos, generada sobre Θ.

Sea $W(t,\omega)$ un operador Wiener, es decir, una aplicación de Θ en $L_2(\Omega, \mathcal{L}(H,G))$. Para cada t fijo, $W(t,\omega)$ es un operador aleatorio que transforma variables aleatorias de $\tilde{H}$ en variables aleatorias de $\tilde{G}$.

Sea $x(t,\omega)$ una función aleatoria de Θ en $\tilde{H}$, que hace corresponder a cada valor parametrico una variable aleatoria de cuadrado integrable y hilbertiana.
Diremos que $x(t,\omega) \in \tilde{H}$ tiene la propiedad (P) con respecto al operador W, si dados t, t_1, t_2 con $t \leq t_1 \leq t_2$; $W(t_2,\omega)-W(t_1,\omega)$ y $x(t,\omega)$ son independientes

Sean I_i sub-intervalos de Θ, i=1,...,n escribiremos $I_j \leq I_i$, para indicar que ningun punto de I_j es mayor que cualquier punto de I_i, y sea $f_i \in \tilde{H}$. Entonces $W(I_i,\omega)f_i$, representa una variable aleatoria de $\tilde{G}$ (operador aleatorio aplicado a una variable aleatoria de $\tilde{H}$).

Representamos por

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} W(I_i,\omega)\ f_i \in \tilde{G}$$

donde los terminos de la suma verifican: " $\chi_{I_j} f_i$ tienen la propiedad (P) con respecto a W para cada $I_j \leq I_i$ " y definimos:

$$\phi_0(x)(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \int_{I_i} (f_i,x)_{\tilde{H}}\ dv(t)$$

siendo v(t) una medida definida en $\mathcal{T}$, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Cabaña demuestra que existe un único elemento $\psi(x) \in \tilde{G}$ tal que

$$< \xi,\ \psi(x) >_{\tilde{G}} = \phi_0(x)(\xi) \qquad (1)$$

La aplicación $\psi : x \longrightarrow \psi(x)$ es lineal y acotada.

Este único elemento $\psi(x)$ define la integral estocastica de $x(t,\omega)$ respecto del operador de Wiener $W(t,\omega)$

$$\psi(x) = \int_{\Theta} x(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

que es la integral estocastica de Cabaña, donde $\psi(x)$ viene dado por la relación (1).

C) INTEGRAL ESTOCASTICA DE DALETSKII

Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar (,); y T un operador definido positivo, auto-adjunto, no acotado y tal que $\|T^{-1}\| \leq 1$

Designamos por H_α el dominio de T^α $(\alpha>0)$; y $H_{-\alpha} = H_\alpha^*$ al dual de H (conjunto de los funcionales lineales y continuos definidos en H)

H_α es denso en H y es un espacio de Hilbert completo con la norma:

$$\|x\|_\alpha = \|T^\alpha x\| \qquad x \in H_\alpha$$

Definimos un " sistema ó escala de espacios hilbertianos " como una familia uniparametrica de espacios de Hilbert

$$\{ H_\alpha;\ \alpha \in (-\infty,\infty) \} \quad \text{con } H_0 = H \text{ tal que:}$$

(i) $H_\alpha \subset H_\beta$, $-\infty < \beta < \alpha < \infty$ y $\|x\|_\alpha \geq \|x\|_\beta$ $\quad x \in H_\alpha$

(ii) $H_{-\alpha} = H_\alpha^*$

Sea $B(t,\omega)$ una función aleatoria con valores en $\mathcal{L}(H_{-1},H_\alpha)$; es decir, para cada t fijo, $B(t,\omega)$ es un operador aleatorio de H_{-1} en H_α ; y sea $W(t,\omega)$ un proceso de Wiener con valores en H_{-1}.

Introducimos una familia de σ-algebras $\{\mathcal{F}_t;\ t \in \Theta\}$ de subconjuntos de Ω, respecto de la cual los procesos $B(t,\omega)$ y $W(t,\omega)$ satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Para cada t fijo, $W(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$ - medible.

(b) Para cada t fijo, $B(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$ - medible.

(c) Los incrementos de $W(t,\omega)$ correspondientes a intervalos disjuntos son independientes de $B(t,\omega)$.

(d)

$$\int_{t_0}^{T} E\{ \|B(\tau,\omega)\|^2_{(H_{-1},H_\alpha)} \} d\tau =$$

$$\int_{t_0}^{T} E\{ \|T^\alpha B(\tau,\omega)T\|^2 \} d\tau < \infty$$

Bajo estas condiciones, Daletskii ha considerado la integral estocastica de $B(t,\omega)$ respecto del proceso de Wiener $W(t,\omega)$ con valores en H_{-1}

$$I(B) = \int_{t_0}^{T} B(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

definiendola mediante la relación

$$(I(B),y) = I(B^*(t,\omega)y)$$

es decir:

$$y\left(\int_{t_0}^{T} B(t,\omega)\ dW(t,\omega)\right) = \int_{t_0}^{T} B^*(t,\omega)y\ dW(t,\omega) \qquad \forall y \in H_\alpha^*$$

donde $B^*(t,\omega)$ representa la aplicación adjunta de $B(t,\omega)$.

Propiedades

La integral estocastica de Daletskii verifica:

(1) $E\{ I(B) \} = 0$

(2) $E\{ \|I(B)\|^2_\alpha \} \leq \int_{t_0}^{T} E\{ \sigma^2(T^\alpha B(\tau,\omega))\} d\tau$

donde σ representa la norma Hilbert-Schmid

D) INTEGRAL ESTOCASTICA GENERALIZADA

Sean H y G dos espacios de Hilbert, y sean T y L dos operadores auto-adjuntos, definidos en H y G respectivamente. H_α y G_α representan los dominios de T^α y L^α ($\alpha>0$)

Sean $\{ H_\alpha, \alpha \in (-\infty,\infty) \}$ y $\{ G_\alpha, \alpha \in (-\infty,\infty) \}$ dos escalas de espacios de Hilbert (cuya definición hemos visto en el apartado anterior)

Sea $W(t,\omega):\Theta \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{L}(H_\alpha,G_\alpha))$ un operador de Wiener con valores en $\mathcal{L}(H_\alpha,G_\alpha)$, es decir, para cada valor parametrico fijo $t\in\Theta$; $W(t, \ )$ es un operador aleatorio de cuadrado integrable. Si ademas fijamos ω entonces $W(t,\omega)$ representa un operador de H_α en G_α . Sea $W^*(t,\omega)$ la aplicación adjunta de $W(t,\omega)$

$$\left.\begin{array}{l} W(t,\omega): H_\alpha \longrightarrow G_\alpha \\ W^*(t,\omega): G_{-\alpha} \longrightarrow H_{-\alpha} \end{array}\right. \qquad t,\omega \text{ fijos}$$

Sea $B(t,\omega)$ un proceso estocastico, con valores en el espacio de operadores $\mathcal{L}(G_{-1},H_\alpha)$. Fijado t, $B(t, \ )$ representa un operador aleatorio (variable aleatoria con valores en $\mathcal{L}(G_{-1},H_\alpha)$). Fijados t y ω, $B(t,\omega)$ representa un operador de G_{-1} en H_α. Sea $B^*(t,\omega)$ la aplicación adjunta de $B(t,\omega)$

$$\left.\begin{array}{l} B(t,\omega): G_{-1} \longrightarrow H_\alpha \\ B^*(t,\omega): H_{-\alpha} \longrightarrow G_1 \subset G \end{array}\right. \qquad t,\omega \text{ fijos}$$

Introducimos una sucesión expansiva de σ- algebras $\{ \mathcal{F}_t : t\in\Theta \}$ de subconjuntos de Ω, respecto de la cual los proce sos $B(t,\omega)$ y $W(t,\omega)$ satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Para cada t fijo, $W(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-medible.

(b) Para cada t fijo, $B(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-medible.

(c) Los incrementos de $W(t,\omega)$ correspondientes a intervalos disjuntos, son independientes de $B(t,\omega)$.

(d) $E\{ \|B(t,\omega)\|^2_{(G_{-1},H_\alpha)} \} = E\{ \|JT^\alpha B(t,\omega)L\|^2_G \} < \infty$

para cualquier $J: H \longrightarrow G$

Bajo las hipotesis anteriores, podemos introducir, la integral estocastica del proceso operador valuado $B(t,\omega)$ con respecto al operador de Wiener $W(t,\omega)$

$$I(B) = \int_\Theta B(t,\omega)\, dW(t,\omega)$$

definiendola mediante la siguiente relación

$$< I(B),z > = I(BB^*W^*z)$$

es decir:

$$< \int_\Theta B(t,\omega)\, dW(t,\omega) \;,\; z > = \int_\Theta B(t,\omega)B^*(t,\omega)W^*(t,\omega)z\, dW(t,\omega)$$

Como particularización de esta integral, cuando $H = G$ se obtiene la integral de Daletskii, porque entonces $B(t,\omega) \in \mathcal{L}(H_{-1},H_\alpha)$ y $W^*(t,\omega)$ aplica $H_{-\alpha}$ en si mismo, con lo cual

$$< I(B),z > = I(BB^*z) \qquad \forall\, z \in H_{-\alpha}$$

que es la integral de Daletskii.

A continuación demostraremos una importante propiedad que sera fundamental en la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones integrales estocasticas de Ito generalizadas.

" La norma de la integral estocastica $\int_{\Theta} B(t,\omega)\ dW(t,\omega)$ es ≤ 1 "

En efecto, para todo funcional lineal $z \in G_{-\alpha}$

$$\left\| \int_{\Theta} B(t,\omega)\ dW(t,\omega) \right\| = \operatorname*{Sup}_{\|z\|=1} \left| < \int_{\Theta} B(t,\omega)\ dW(t,\omega)\ ,\ z > \right|$$

$$= \operatorname*{Sup}_{\|z\|=1} \left| \int_{\Theta} B(t,\omega) B^{*}(t,\omega) W^{*}(t,\omega) z\ dW(t,\omega) \right|$$

Como $z \in G_{-\alpha}$, se tiene que $W^{*}(t,\omega)z$ es un funcional lineal en $H_{-\alpha}$, y por tanto

$B(t,\omega)B^{*}(t,\omega)W^{*}(t,\omega)z \in H_{\alpha}$

Luego, la integral que aparece en el ultimo valor absoluto, es del tipo Cabaña y como la norma de dicha integral es ≤ 1, se obtiene el resultado deseado.

1.3 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS (E.I.E.)

A) E.I.E. ITO

Una ecuación integral estocastica Ito es de la forma:

$$(1) \qquad X(t,\omega) = X(t_0,\omega)+\int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\ d\tau+\int_{t_0}^{t} b(\tau,X(\tau,\omega)\ dW(\tau,\omega)$$

donde $X(t,\omega)$ es un proceso estocastico real, $X(t_0,\omega)$ es una variable aleatoria (t_0 fijo), a y b son funciones que verifican ciertas condiciones que veremos mas adelante y $W(t,\omega)$ es un proceso Wiener real.

La importancia de la ecuación integral estocastica Ito se debe a que:

(i) Una gran clase de procesos de Markov en R^n, puede representarse como solución de tales ecuaciones.

(ii) Sirven como modelos para procesos fisicos y sistemas de control estocasticos.

(iii) Son de gran utilidad en el estudio probabilistico de las ecuaciones en derivadas parciales.

Una vez que se ha dado significado a la " integral estocastica de Ito "

$$\int_{t_0}^{T} b(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

el siguiente paso es investigar condiciones que garanticen la

existencia de un único proceso solución de la E.I.E. Ito
Para que las integrales que aparecen en dicha ecuación esten bien definidas, es necesario introducir una familia de σ-algebras $\mathcal{F}_t$. Donde $\mathcal{F}_t$ es la σ-algebra minimal respecto de la cual $X_0(\omega) = X(t_0,\omega)$ y $W(\tau,\omega)-W(t_0,\omega)$, $\tau \in [t_0,t]$ son medibles.

Antes de abordar el problema de existencia y unicidad, definimos que entendemos por solución de la E.I.E. Ito:
" Una función aleatoria { $X(t,\omega)$: $t \in [t_0,T]$ } es solución de la ecuación (1) si:
(a) $X(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-medible.
(b) Las integrales de la ecuación (1) existen.
(c) La ecuación (1) es cierta para cada $t \in [t_0,T]$ c.s.

Solo veremos lo concerniente a las soluciones continuas de la ecuación integral Ito, ya que es facil probar que:
" Si { $Y(t,\omega)$ } es una función aleatoria equivalente a la solución { $X(t,\omega)$ } de la ecuación (1), entonces { $Y(t,\omega)$ } es también una solución de la ecuación (1) "
Puesto que el lado derecho de la ecuación (1) (equivalente al izquierdo) es continuo c.s., tendremos que :
" Para cualquier solucion de la ecuación integral Ito, existe una solución continua, equivalente "

Pasamos ya a enunciar el teorema de existencia y unicidad , para la E.I.E. Ito.

TEOREMA

Sean $a(t,x)$ y $b(t,x)$, $t \in [t_0,T]$, $x \in R$, funciones medibles Borel, verificando las siguientes condiciones, para alguna constante k:

a.- (C. de Lipschitz uniforme)

$$\forall x,y \in R, \quad |a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)| \leq k|x-y|$$

b.- (C. de Growth)

$$\forall x \in R, \quad |a(t,x)|^2+|b(t,x)|^2 \leq k^2(1+|x|^2)$$

Entonces, existe una solución de la ecuación (1), y es única en el sentido siguiente:

Si $X_1(t,\omega)$ y $X_2(t,\omega)$ son dos soluciones continuas (para una condición inicial fija $X_0(\omega)$) de la ecuación (1), entonces:

$$\mu \{ \omega: \sup_{t\in[t_0,T]} |X_1(t,\omega)-X_2(t,\omega)|=0 \} = 1$$

<u>Demostración</u>

Puede verse con detalle en {2} ó {36}

B) E.I.E. ITO EN ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES

Definida la " integral estocastica de Cabaña ", vamos a abordar el problema de la existencia y unicidad de solucion de la siguiente ecuación integral estocastica Ito:

$$(2) \qquad X(t,\omega) = X_0(\omega)+\int_0^t a(\tau,X(\tau,\omega))\ dv(\tau)+\int_0^t b(\tau,X(\tau,\omega))\ dW(\tau,\omega)$$

donde $W(t,\omega)$ es un operador de Wiener, $X(t,\omega)$ una función aleatoria, v una medida finita en $\mathcal{T}$, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y a, b son funciones que verifican ciertas condiciones que veremos mas adelante.

Antes de pasar a investigar las condiciones que garanticen la existencia y unicidad del proceso solución, vamos a introducir algunos espacios de funciones que seran utilizados mas adelante.

Para cualquier función aleatoria $\tilde{G}$-valuada $X(t)$ con dominio Θ, definimos:

$$|||X||| = \sup_{t\in\Theta} [X(t)]_2$$

donde $[\ ]_2$ representa la norma del espacio $\tilde{G} = L_2(\Omega,G)$

Sea $L_\infty(\tilde{G})$ el espacio de las funciones aleatorias $X:\Theta\longrightarrow\tilde{G}$ que verifican: $|||X||| < \infty$

$L_\infty(\tilde{G})$ es un espacio de Banach con la norma $|||\ \ |||$

Y sea $C(\tilde{G})\subset L_\infty(\tilde{G})$ el sub-espacio de todas las funciones aleatorias continuas

TEOREMA

Sean las funciones $a(t,X):\Theta\times\tilde{G}\longrightarrow\tilde{G}$ y $b(t,X):\Theta\times\tilde{G}\longrightarrow\tilde{H}$ verificando:

(a) Para cualquier función medible $X:\Theta\longrightarrow\tilde{G}$; $a(t,X)$ y $b(t,X)$ son medibles.

(b) Existe una constante M tal que para casi todo $t\in\Theta$ y $X\in\tilde{G}$

$$[a(t,X)]_2^2 \leq M^2(1+[X]_2^2)$$

$$[b(t,X)]_2^2 \leq M^2(1+[X]_2^2)$$

(c) Existe una constante L tal que para casi todo $t\in\Theta$ y $X_1,X_2\in\tilde{G}$

$$[a(t,X_2)-a(t,X_1)]_2 < L[X_2-X_1]_2$$

$$[b(t,X_2)-b(t,X_1)]_2 < L[X_2-X_1]_2$$

Entonces, existe una única función aleatoria continua

$X:\Theta\longrightarrow\tilde{G}$

que verifica la ecuación (2) , $\forall t\in\Theta$, con $X_0\in\tilde{G}$

Demostración

Definimos un operador T en $C(\tilde{G})$, como sigue:

$$T(X) = X_0+\int_0^t a(\tau,X(\tau))\,dv(\tau)+\int_0^t b(\tau,X(\tau))\,dW(\tau)$$

Vamos a probar que bajo las hipotesis del teorema, se verifica:

I.- T aplica $C(\tilde{G})$ en si mismo.

II.- T es continuo.

III.- T^n es una contracción, para algun n.

Demostrado esto, deducimos por el teorema de Hans, que T tiene un único punto fijo en $C(\tilde{G})$, con lo cual, nuestro teorema quedara probado.

I.- T aplica $C(\tilde{G})$ en si mismo

Tenemos que probar que si $X \in C(\tilde{G})$ entonces $TX \in C(\tilde{G})$ es decir que TX es continuo y que $|||TX||| < \infty$; ó lo que es igual que TX es continuo y que $TX \in L_\infty(\tilde{G})$

(i) $TX \in L_\infty(\tilde{G})$

Las condiciones (a) y(b) implican:

$$|||a(t,X)|||^2 = \sup_{t\in\Theta} [a(t,X)]_2^2 \leq M^2(1 + \sup_{t\in\Theta} [X]_2^2) = M^2(1 + |||X|||^2)$$

Analogamente

$$|||b(t,X)|||^2 \leq M^2(1 + |||X|||^2)$$

Por la desigualdad de Schwarz y las condiciones anteriores tenemos:

$$\left[\int_0^t a(\tau,X)\, dv(\tau)\right]_2^2 \leq v(0,t) \int_0^t [a(\tau,X)]_2^2\, dv(\tau) \leq$$

$$\leq v^2(0,t)\, [a(\tau,X)]_2^2 \leq v^2(\Theta)[a(\tau,X)]_2^2$$

De donde

$$|||\int_0^t a(\tau,X)\, dv(\tau)|||^2 \leq v^2(\Theta)\, |||a(t,X)|||^2 \leq v^2(\Theta)M^2(1 + |||X|||^2)$$

Por la desigualdad de Schwarz y puesto que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1 , obtenemos:

$$\left[\int_0^t b(\tau,X)\, dW(\tau,\omega)\right]_2^2 \leq \int_0^t [b(\tau,X)]_2^2\, dv(\tau) \leq$$

$$\leq v(0,t)\, [b(\tau,X)]_2^2 \leq v(\Theta)\, [b(\tau,X)]_2^2$$

De donde

$$|||\int_0^t b(\tau,X)\ dW(\tau,\omega)\ |||^2 \leq v(\Theta)\ |||\ b(t,X)\ |||^2 \leq v(\Theta)M^2(1+|||\ X\ |||^2)$$

Luego, basandonos en las desigualdades anteriores deducimos que:

$$|||\ TX - X_0\ |||^2 = |||\int_0^t a(\tau,X)\ dv(\tau) + \int_0^t b(\tau,X)\ dW(\tau,\omega)\ |||^2 \leq$$

$$\leq 2|||\int_0^t a(\tau,X)\ dv(\tau)\ |||^2 + 2|||\int_0^t b(\tau,X)\ dW(\tau)\ |||^2$$

$$\leq 2\{\ v(\Theta) + 1\ \}\ v(\Theta)\ M^2(1+|||\ X\ |||^2)$$

Es decir

$TX \in L_\infty(\tilde{G})$ como queriamos ver.

(ii) $TX: \Theta \longrightarrow \tilde{G}$ es continuo

En efecto, razonando igual que en el punto (i), obtenemos:

$$[TX(t)-TX(t')]_2^2 \leq 2[\int_t^{t'} a(\tau,X)\ dv(\tau)]_2^2 + 2[\int_t^{t'} b(\tau,X)\ dW(\tau)]_2^2$$

$$< v^2(t,t')M^2(1+[X]_2^2) + v(t,t')M^2(1+[X]_2^2)$$

$$= [v(t,t') + 1]\ v(t,t')M^2(1+[X]_2^2)$$

La continuidad se deduce de la hipotesis de que v es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

II.- T es continuo.

En efecto, aplicamos el operador T a dos elementos $X_1, X_2 \in C(\tilde{G})$

$$TX_1 = X_0 + \int_0^t a(\tau,X_1)\ dv(\tau) + \int_0^t b(\tau,X_1)\ dW(\tau)$$

$$TX_2 = X_0 + \int_0^t a(\tau,X_2)\ dv(\tau) + \int_0^t b(\tau,X_2)\ dW(\tau)$$

Calculamos:

$$[TX_2-TX_1]_2^2 = [\int_0^t [a(\tau,X_2)-a(\tau,X_1)]\, dv(\tau) + \int_0^t [b(\tau,X_2)-b(\tau,X_1)]\, dW]_2^2$$

$$\leq \{[\int_0^t [a(\tau,X_2)-a(\tau,X_1)]\, dv]_2 + [\int_0^t [b(\tau,X_2)-b(\tau,X_1)]\, dW]_2\}^2$$

$$\leq 2[\int_0^t [a(\tau,X_2)-a(\tau,X_1)]\, dv]_2^2 + 2[\int_0^t [b(\tau,X_2)-b(\tau,X_1)]\, dW]_2^2$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1 ,obtenemos:

$$\leq 2v(\Theta)\int_0^t [a(\tau,X_2)-a(\tau,X_1)]_2^2\ dv + 2\int_0^t [b(\tau,X_2)-b(\tau,X_1)]_2^2\ dv$$

Por la condición (c) de las hipotesis del teorema:

$$\leq 2v(\Theta)L^2\int_0^t [X_2-X_1]_2^2\ dv + 2L^2\int_0^t [X_2-X_1]_2^2\ dv$$

$$= 2\{v(\Theta) + 1\}L^2\int_0^t [X_2-X_1]_2^2\ dv$$

$$= 2L^2\{v(\Theta) + 1\}\ v(0,t)\ [X_2-X_1]_2^2$$

Luego:

$$|||TX_2-TX_1|||^2 \leq 2L^2\{v(\Theta) + 1\}\, v(\Theta)\, |||X_2-X_1|||^2$$

de donde se deduce la continuidad de T.

III.- T^n es contractivo para algun n.

Dados $X_1, X_2 \in C(\tilde{G})$, notaremos

$$\Delta_k(t) = T^kX_2 - T^kX_1$$

$$\Delta a_k(t) = a(t,T^kX_2) - a(t,T^kX_1)$$

$$\Delta b_k(t) = b(t,T^kX_2) - b(t,T^kX_1)$$

La condición (b) de las hipotesis del teorema implica:

$$[\Delta a_k(t)]_2 \leq L\ [\Delta_k(t)]_2$$

$$[\Delta b_k(t)]_2 \leq L\ [\Delta_k(t)]_2$$

Por tanto

$$[\Delta_k(t)]_2^2 = [\int_0^t \Delta a_{k-1}(\tau)\, dv(\tau) + \int_0^t \Delta b_{k-1}(\tau)\, dW(\tau)]_2^2$$

$$\leq 2[\int_0^t \Delta a_{k-1}(\tau)\, dv(\tau)]_2^2 + 2[\int_0^t \Delta b_{k-1}(\tau)\, dW(\tau)]_2^2$$

$$\leq 2v(\Theta)L^2\int_0^t [\Delta_{k-1}(\tau)]_2^2\, dv(\tau) + 2L^2\int_0^t [\Delta_{k-1}(\tau)]_2^2\, dv(\tau)$$

$$= 2\{v(\Theta) + 1\}L^2 \int_0^t [\Delta_{k-1}(\tau)]_2^2\, dv(\tau)$$

(Notemos que para k=1, se obtiene el resultado del apartado II.-)

Haciendo $H = 2\{v(\Theta) + 1\}L^2$ y dando valores a $k = 1,2, \ldots$ nos queda:

$$[\Delta_1(t)]_2^2 \leq H\ [\Delta_0(t)]_2^2 \int_0^t dv(\tau_1)$$

$$[\Delta_2(t)]_2^2 \leq H^2\ [\Delta_0(t)]_2^2 \int_0^t dv(\tau_1) \int_0^{\tau_1} dv(\tau_2)$$

$$[\Delta_k(t)]_2^2 \leq H^k\ [\Delta_0(t)]_2^2 \int_0^t dv(\tau_1) \quad \ldots \int_0^{\tau_{k-1}} dv(\tau_k)$$

La integral iterada del lado derecho de la desigualdad anterior vale:

$$(k!)^{-1} \int_0^t dv(\tau) = (k!)^{-1}\ v^k(0,t)$$

puesto que v es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Por tanto, tenemos que:

$$|||\ \Delta_k(t)\ |||^2 \leq (k!)^{-1}\ \{\ Hv(\Theta)\ \}^k\ |||\ \Delta_0(t)\ |||^2$$

Dado $\alpha \in (0,1)$, podemos tomar un n suficientemente grande para que se verifique:

$$(n!)^{-1}\ \{\ Hv(\Theta)\ \}^n \leq \alpha^2$$

De donde

$$|||\ T^n X_2 - T^n X_1\ ||| = |||\ \Delta_n\ ||| \leq \alpha |||\ \Delta_0\ ||| = \alpha |||\ X_2 - X_1\ |||$$

Es decir, T^n es una contracción.

Por el teorema de Hans, esto implica la existencia de una única solución $X(t,\omega)$ de la ecuación (2), en $C(\tilde{G})$.

C) E.I.E. ITO EN ESCALAS DE ESPACIOS DE HILBERT

Sea H un espacio de Hilbert y σ_2 la clase de operadores Hilbert-Schmidt en H.
Sea T un operador definido positivo, auto-adjunto, no acotado en H, verificando $\|T^{-1}\| \leq 1$. H_α es el dominio de T^α ($\alpha>0$) ; H_α es denso en H, y es un espacio de Hilbert completo, con la norma

$$\|X\|_\alpha = \|T^\alpha X\| \qquad X \in H_\alpha$$

Analogamente se define $H_{-\alpha}$; H_α y $H_{-\alpha}$ son conjugados en el sentido de sus productos escalares.
Sea $\{ H_\alpha \, ; \alpha \in (-\infty,\infty) \}$ con $H_0 = H$ una escala de espacios de Hilbert (cuya definición ya hemos dado anteriormente).

Vamos a estudiar la ecuación integral estocastica Ito:

$$(3) \qquad X(t,\omega) = X_0(\omega)+\int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau+\int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

donde $a(t,X) \in H_\alpha$; $B(t,X)$ es una función operador-valuada y $W(t,\omega)$ es un proceso de Wiener con valores en H_{-1}.

Analizada la integral estocastica

$$\int_{t_0}^{t} B(\tau,\omega)\, dW(\tau,\omega) \qquad \text{" Integral estocastica de Daletskii "}$$

la E.I.E. Ito (3) esta bien definida, y podemos considerar el problema de la existencia y unicidad de su solución.

En primer lugar, introducimos algunos espacios de funciones que seran utilizados en el teorema de existencia y unicidad.

χ_α^p : espacio de funciones H_α - valuadas, $\mathcal{F}_t$ - medibles ; es un espacio de Banach con la norma:

$$|||X|||^p = \sup_{t\in[t_0,T]} E\|X(t,\omega)\|_\alpha^p$$

$C_\alpha(H_\alpha)$: espacio de funciones continuas definidas en H_α , y con rango H_α .

$C_{0,\alpha}(H_\alpha)$: espacio de funciones operador-valuadas, definidas en H_α , con rango $\mathcal{L}(H,H_\alpha)$ y continuas.

Necesitamos tambien la siguiente definición:

" Una función valuada en un espacio de Banach $\xi(t,X)$, $t\in[t_0,T]$ $X\in H_\alpha$, se dice que tiene la propiedad (L) si:

(i) $\|\xi(t,X)\| \leq C_1 + C_2\|X\|_\alpha$

(ii) $\|\xi(t,X_1) - \xi(t,X_2)\| \leq C_2\|X_1 - X_2\|_\alpha$ $X_1,X_2\in H_\alpha$; C_1,C_2 ctes "

TEOREMA

Consideremos el operador:

$$SX(t,\omega) = \phi(t)+\int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

(a) Si $\phi(t)\in\chi_\alpha^{2m}$ y las funciones $a(t,X)$ y $T^\alpha B(t,X)$ tienen la propiedad (L) en los espacios H_α y $\sigma_2(H)$ respectivamente. Entonces el operador S es continuo en χ_α^{2m} , y para algun n, S^n es una contracción en χ_α^2 .

(b) Si $\phi(t)\in\chi_\alpha^2$ y las funciones $a(t,X)\in C_\alpha(H_\alpha)$ y $B(t,X)\in C_{0,\alpha}(H_\alpha)$ tienen la propiedad (L). Entonces la E.I,E. Ito:

$$X(t,\omega) = \phi(t) + \int_{t_0}^{t} a(\tau, X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau, X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

donde $\phi(t) = X_0$ es una función continua, independiente de $W(t,\omega)$; tiene una única solución continua, que es $\mathcal{F}_t$-medible, $\forall t \in [t_0, T]$

Demostración

(a) Los pasos que seguiremos en la demostración de este apartado son:

I.- S aplica X_α^{2m} en si mismo.

II.- S es continuo en X_α^{2m} .

III.- S^n es contractivo para algun n, en X_α^2 .

I.- $S(X_\alpha^{2m}) \subset X_\alpha^{2m}$.

En primer lugar, notemos que la función $SX(t,\omega)$ es $\mathcal{F}_t$-medible.

$$\| SX - \phi(t) \|_\alpha^{2m} = \| \int_{t_0}^{t} a(\tau, X)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau, X)\, dW(\tau) \|_\alpha^{2m}$$

$$\leq \{ \| \int_{t_0}^{t} a(\tau, X)\, d\tau \|_\alpha + \| \int_{t_0}^{t} B(\tau, X)\, dW(\tau) \|_\alpha \}^{2m}$$

$$\leq 2^{2m-1} \| \int_{t_0}^{t} a(\tau, X)\, d\tau \|_\alpha^{2m} + 2^{2m-1} \| \int_{t_0}^{t} B(\tau, X)\, dW(\tau) \|_\alpha^{2m}$$

Tomando esperanzas:

$$E\| SX - \phi(t) \|_\alpha^{2m} \leq 2^{2m-1} E \| \int_{t_0}^{t} a(\tau, X)\, d\tau \|_\alpha^{2m} + 2^{2m-1} E \| \int_{t_0}^{t} B(\tau, X)\, dW \|_\alpha^{2m}$$

Calculamos por separado los dos terminos que aparecen en el segundo miembro de la desigualdad anterior:

(1º) $$E\left\|\int_{t_0}^{t} a(\tau,X)\, d\tau\right\|_\alpha^{2m} \leq E\{\ (T-t_0)^{2m-1} \int_{t_0}^{t} \|a(\tau,X)\|_\alpha^{2m}\, d\tau\ \}$$

Acotación obtenida, aplicando la desigualdad de Schwarz; a continuación utilizaremos el apartado (i) de la propiedad (L)

$$\leq E\{\ (T-t_0)^{2m-1} \int_{t_0}^{t} [C_1 + C_2\|X(\tau,\omega)\|_\alpha]^{2m}\, d\tau\ \}$$

$$= E\{[2(T-t_0)]^{2m-1}\ [C_1^{2m}(T-t_0) + C_2^{2m} \int_{t_0}^{t} \|X(\tau,\omega)\|_\alpha^{2m}\, d\tau\ ]\ \}$$

$$= [2(T-t_0)]^{2m-1} \left\{ C_1^{2m}(T-t_0) + C_2^{2m} \int_{t_0}^{t} E\{\|X(\tau,\omega)\|_\alpha^{2m}\}\, d\tau \right\}$$

(2º) $$E\left\|\int_{t_0}^{t} B(\tau,X)\, dW(\tau)\right\|_\alpha^{2m} \leq (T-t_0)^{m-1}\left(\frac{m(2m-1)}{2}\right)^m \int_{t_0}^{t} E\sigma^{2m}(T^\alpha B(\tau,X))d\tau$$

La desigualdad anterior, se obtiene aplicando las propiedades de la integral estocastica de Daletskii (σ representa la norma de Hilbert-Schmid).

Por el apartado (i) de la propiedad (L), obtenemos:

$$\leq (T-t_0)^{m-1}\left(\frac{m(2m-1)}{2}\right)^m \int_{t_0}^{t} E\{\ C_1 + C_2\|X(\tau,\omega)\|_\alpha\ \}^{2m}\, d\tau$$

$$\leq (T-t_0)^{m-1}\left(\frac{m(2m-1)}{2}\right)^m \int_{t_0}^{t} 2^{2m-1}\{C_1^{2m} + C_2^{2m}\ E\|X(\tau,\omega)\|_\alpha^{2m}\}\, d\tau$$

$$\leq 2^{2m-1}(T-t_0)^{m-1}\left(\frac{m(2m-1)}{2}\right)^m \left\{ C_1^{2m}(T-t_0) + C_2^{2m}\int_{t_0}^{t} E\|X(\tau,\omega)\|_\alpha^{2m}\, d\tau \right\}$$

Llamando:

$$C_3 = [2(T-t_0)]^{2m-1} \quad ; \quad C_4 = [2(T-t_0)]^{m-1}[m(2m-1)]^m$$

y sustituyendo, se tiene:

$$E\{\|SX-\phi(t)\|_\alpha^{2m}\} \leq 2^{2m-1}(C_3+C_4)\left\{C_1^{2m}(T-t_0)+C_2^{2m}\int_{t_0}^{t} E\|X(\tau,\omega)\|_\alpha^{2m}\, d\tau\right\}$$

Tomando el superior de las esperanzas:

$$|||SX-\phi(t)|||^{2m} \leq 2^{2m-1}(C_3+C_4)\left\{C_1^{2m} + C_2^{2m}|||X|||^{2m}\right\}(T-t_0)$$

Por tanto, si $X\in X_\alpha^{2m}$, entonces $SX\in X_\alpha^{2m}$; es decir, S aplica X_α^{2m} en si mismo.

II.- S es continuo.

En efecto, aplicamos el operador S a dos elementos $X_1,X_2\in X_\alpha^{2m}$, y calculamos:

$$E\|SX_2-SX_1\|_\alpha^{2m} = E\left\|\int_{t_0}^{t}[a(\tau,X_2)-a(\tau,X_1)]d\tau + \int_{t_0}^{t}[B(\tau,X_2)-B(\tau,X_1)]dW\right\|_\alpha^{2m}$$

$$\leq 2^{2m-1}E\left\{\left\|\int_{t_0}^{t}[a(\tau,X_2)-a(\tau,X_1)]d\tau\right\|_\alpha^{2m} + \right.$$

$$\left. + \left\|\int_{t_0}^{t}[B(\tau,X_2)-B(\tau,X_1)]dW\right\|_\alpha^{2m}\right\}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y las propiedades de la integral de Daletskii:

$$\leq C_3\int_{t_0}^{t} E\{\|a(\tau,X_2)-a(\tau,X_1)\|_\alpha^{2m}\}\, d\tau +$$

$$+ C_4\int_{t_0}^{t} E\{\sigma^{2m}[T^\alpha B(\tau,X_2)-T^\alpha B(\tau,X_1)]\}\, d\tau$$

Utilizando el apartado (ii) de la propiedad (L)

$$\leq C_3 C_2^{2m} \int_{t_0}^{t} E\{\| X_2 - X_1 \|_\alpha^{2m}\}\, d\tau + C_4 C_2^{2m} \int_{t_0}^{t} E\{\| X_2 - X_1 \|_\alpha^{2m}\}\, d\tau$$

$$= C_2^{2m} (C_3 + C_4) \int_{t_0}^{t} E\{\| X_2 - X_1 \|_\alpha^{2m}\}\, d\tau$$

Tomando el superior de las esperanzas:

$$|||\, SX_2 - SX_1 \,|||^{2m} \leq C_2^{2m} (C_3 + C_4)\ (T - t_0)\ |||\, X_2 - X_1 \,|||^{2m}$$

de donde se deduce la continuidad de S.

III.- S^n es contractivo para algun n, en X_α^2 .

Para probar esto, debemos ver que:

$$|||\, S^n X_2 - S^n X_1 \,||| < K |||\, X_2 - X_1 \,||| \quad ; \quad K < 1$$

Utilizando la definición de norma en X_α^2 , y de forma analoga a lo realizado en el apartado II.- anterior, tendremos:

$$|||\, SX_2 - SX_1 \,||| \leq 2C_2^2\ (T - t_0 + 1)\ (T - t_0)\ |||\, X_2 - X_1 \,|||$$

Observando que:

$$S^2 X(t,\omega) = S[SX(t,\omega)] = \phi(t) + \int_{t_0}^{t} a(\tau, SX)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau, SX)\, dW(\tau)$$

Entonces, tendremos:

$$E\{\| S^2 X_2 - S^2 X_1 \|_\alpha^2\} \leq 2C_2^2\ (T - t_0 + 1) \int_{t_0}^{t} E\{\| SX_2 - SX_1 \|_\alpha^2\}\, d\tau$$

$$\leq [2C_2^2\ (T - t_0 + 1)]^2 \int_{t_0}^{t} (\tau - t_0)\ E\{\| X_2 - X_1 \|_\alpha^2\}\, d\tau$$

Tomando superiores

$$|||\, S^2 X_2 - S^2 X_1 \,||| \leq \frac{1}{2} [2C_2^2\ (T - t_0 + 1)]^2\ (T - t_0)^2\ |||\, X_2 - X_1 \,|||^2$$

Por un proceso de inducción, obtenemos:

$$|||\, S^n X_2 - S^n X_1 \,|||^2 \leq \frac{[2C_2^2\ (T-t_0+1)]^n}{n}\ (T-t_0)^n\ |||\, X_2 - X_1 \,|||^2$$

Llamando $K = (n!)^{-1}[2C_2^2\ (T-t_0+1)\ (T-t_0)]^n$ y eligiendo un n suficientemente grande, se puede conseguir que $K < 1$.
Por tanto, S^n es una contracción.

(b) Puesto que S^n es una contracción, el teorema de Hans afirma la existencia de un unico elemento $X \in \chi_\alpha^2$, tal que:

$S^n X = X$

Pero $S^n SX = S^{n+1} X = X$; por tanto $SX = X$.
Luego podemos concluir que $X = X(t,\omega) \in \chi_\alpha^2$ es la unica solución de nuestra ecuación integral estocastica.

Por otra parte, como por hipotesis $a(t,X) \in C_\alpha(H_\alpha)$; $B(t,X) \in C_{0,\alpha}(H_\alpha)$ y $\phi(t)$ es continua; la continuidad de la solución $X(t,\omega)$ se deduce trivialmente de la continuidad del segundo miembro de la ecuación integral estocastica.

c.q.d.

D) E.I.E. ITO GENERALIZADA

Sean H y G dos espacios de Hilbert; sean T y L operadores auto-adjuntos definidos en H y G respectivamente. Por H_α y G_α representamos los dominios de T^α y L^α $(\alpha > 0)$.
Sean $\{ H_\alpha \ ; \ \alpha \in (-\infty,\infty) \}$ y $\{ G_\alpha \ ; \ \alpha \in (-\infty,\infty) \}$ dos escalas de espacios de Hilbert.

Consideremos la siguiente ecuación integral estocastica:

$$(4) \qquad X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

donde $W(t,\omega)$ y $B(t,X)$ son procesos operador valuados en escalas de espacios de Hilbert; denominada " Ecuación de Ito generalizada " .

Analizada la " integral de Ito generalizada "

$$\int_{t_0}^{t} B(\tau,\omega)\, dW(\tau,\omega) \qquad \begin{array}{l} B: \Theta\times\Omega \longrightarrow \mathcal{L}(H_{-1},G_\alpha) \\ W: \Theta \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{L}(G_\alpha,H_\alpha)) \end{array}$$

la ecuación anterior (4) esta bien definida, y podemos pasar a estudiar el problema de la existencia y unicidad del proceso solución, asi como su continuidad, medibilidad ...

Acontinuación, introducimos algunos espacios de funciones que seran utilizados en el teorema de existencia y unicidad. X^2_α representara el espacio de todos los procesos de segundo orden valuados en H_α , es decir: el espacio de todas las aplicaciones

$$X(t,\omega):\ \Theta \times \Omega \longrightarrow H_\alpha$$

tales que; fijado $t\in\Theta$, $X(t,\omega)$ es una variable aleatoria de cuadrado integrable con valores en H_α .

X_α^2 es un espacio de Banach separable con la norma siguiente:

$$|||\, X(t,\omega)\, |||^2 = \sup_{t\in[t_0,t_1]} E\{\| X(t,\omega)\|^2\} \qquad [t_0,t_1] \in \Theta$$

C_α representara el espacio de todas las funciones continuas con dominio y rango H_α .

$C_{-1,\alpha}$ representara el espacio de todos los procesos continuos , operador-valuados con dominio H_α y rango $\mathcal{L}(H_{-1},G_\alpha)$.

TEOREMA

Consideremos el operador:

$$TX(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

donde $X(0,\omega)$ es una variable aleatoria continua perteneciente a X_α^2, $a(t,X) \in C_\alpha$ y $B(t,X) \in C_{-1,\alpha}$.

Supondremos que las funciones $a(t,X)$ y $B(t,X)$ satisfacen las siguientes condiciones:

(a) Para cada t fijo, son funciones medibles de X.

(b) Son uniformemente Lipschitzianas: $\exists L > 0$ tal que

$$\| a(t,X_2) - a(t,X_1)\| \leq L \|X_2 - X_1\|$$

$$\| B(t,X_2) - B(t,X_1)\| \leq L \|X_2 - X_1\|$$

(c) M 0 tal que

$$\| a(t,X)\|^2 \leq M^2 (1 + \|X\|^2)$$

$$\| B(t,X)\|^2 \leq M^2 (1 + \|X\|^2)$$

Entonces la ecuación integral estocastica Ito generalizada

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

admite un proceso solución único, continuo y medible $\forall\ t\in[t_0,t_1]$.

Demostración

Probaremos los siguientes apartados:

(1º) T aplica X_α^2 en si mismo.

(2º) T es continuo.

(3º) T^n es contractivo para algun n.

Demostrados estos puntos, deducimos por el teorema de Hans, que T tiene un único punto fijo, y con ello el teorema quedara probado.

(1º) T aplica X_α^2 en si mismo.

Aplicando la desigualdad de Schwarz y la condición (c) de la hipotesis del teorema, se tiene:

$$\left\|\int_{t_0}^{t} a(\tau,X)\ d\tau\right\|^2 \leq (t-t_0)\int_{t_0}^{t} \|a(\tau,X)\|^2\ d\tau \leq (t-t_0)^2\|a(\tau,X)\|^2$$

$$\leq (t-t_0)^2M^2(1+\|X\|^2) \leq (t_1-t_0)^2M^2(1+\|X\|^2)$$

Teniendo tambien en cuenta que la norma de la integral estocastica generalizada es ≤ 1, obtenemos:

$$\left\|\int_{t_0}^{t} B(\tau,X)\ dW(\tau,\omega)\right\|^2 \leq \int_{t_0}^{t} \|B(\tau,X)\|^2\ d\tau \leq (t-t_0)\|B(\tau,X)\|^2 \leq$$

$$\leq (t_1-t_0)M^2(1+\|X\|^2)$$

Basandonos en lo anterior y en que $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ deducimos que:

$$\|TX(t,\omega)\|^2 \leq \left\{\|X(0,\omega)\| + \left\|\int_{t_0}^{t} a(\tau,X)\ d\tau\right\| + \left\|\int_{t_0}^{t} B(\tau,X)\ dW(\tau)\right\|\right\}^2 \leq$$

$$\leq 3\|X(0,\omega)\|^2 + 3\left\|\int_{t_0}^{t} a(\tau,X)\ d\tau\right\|^2 + 3\left\|\int_{t_0}^{t} B(\tau,X)\ dW(\tau)\right\|^2 \leq$$

$$\leq 3\|X(0,\omega)\|^2 + 3(t_1-t_0)^2M^2(1 + \|X\|^2) + 3(t_1-t_0)M^2(1 + \|X\|^2) \leq$$

$$= 3\|X(0,\omega)\|^2 + 3\Big((t_1-t_0) + 1\Big)\ (t_1-t_0)M^2(1 + \|X(t,\omega)\|^2)$$

Tomando esperanzas:

$$E\{\|TX(t,\omega)\|^2\} \leq 3E\{\|X(0,\omega)\|^2\} +$$
$$+ 3\Big((t_1-t_0) + 1\Big)\ (t_1-t_0)M^2[1 + E\{\|X(t,\omega)\|^2\}]$$

Por hipotesis, $X(0,\omega)$ es una variable aleatoria de cuadrado integrable; por tanto, si $X(t,\omega)$ es de segundo orden, tambien lo sera $TX(t,\omega)$; es decir, T aplica X_α^2 en si mismo.

(2º) T es continuo.

En efecto, aplicando el operador T a dos elementos $X_1, X_2 \in X_\alpha^2$; y calculando:

$$\|TX_1-TX_2\|^2 \leq 2\left\|\int_{t_0}^{t}[a(\tau,X_1)-a(\tau,X_2)]\,d\tau\right\|^2 + 2\left\|\int_{t_0}^{t}[B(\tau,X_1)-B(\tau,X_2)]\,dW\right\|^2$$

$$\leq 2(t_1-t_0)\int_{t_0}^{t}\|a(\tau,X_1)-a(\tau,X_2)\|^2\ d\tau\ +$$

$$+ 2\int_{t_0}^{t}\|B(\tau,X_1)-B(\tau,X_2)\|^2\ d\tau$$

Por la condición (b) de las hipotesis del teorema, se verifica:

$$\leq 2(t_1-t_0)L^2\int_{t_0}^{t}\|X_1-X_2\|^2\ d\tau + 2L^2\int_{t_0}^{t}\|X_1-X_2\|^2\ d\tau\ =$$

$$= 2\Big((t_1-t_0) + 1\Big) L^2 \int_{t_0}^{t} \|X_1-X_2\|^2 \, d\tau \leq$$

$$\leq 2L^2\Big((t_1-t_0) + 1\Big) (t_1-t_0) \|X_2-X_1\|^2$$

Tomando el superior de las esperanzas:

$$|||TX_1-TX_2|||^2 = \sup_t E\{\|TX_1-TX_2\|^2 \leq$$

$$\leq 2L^2\Big((t_1-t_0) + 1\Big) (t_1-t_0) \; |||X_1-X_2|||^2$$

de donde se deduce la continuidadde T.

(3º) T^n es contractivo para algun n.

Observemos que:

$$T^2X(t,\omega) = T\big(TX(t,\omega)\big) = X(0,\omega) + \int_{t_0}^{t} a(\tau,TX)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,TX)\, dW(\tau)$$

Luego:

$$\|T^2X_1-T^2X_2\|^2 \leq 2\Big\|\int_{t_0}^{t}\Big(a(\tau,TX_1)-a(\tau,TX_2)\Big)d\tau\Big\|^2 +$$

$$+ 2\Big\|\int_{t_0}^{t}\Big(B(\tau,TX_1)-B(\tau,TX_2)\Big)dW(\tau)\Big\|^2 \leq$$

$$\leq 2\Big((t_1-t_0) + 1\Big)L^2 \int_{t_0}^{t} \|TX_1-TX_2\|^2 \, d\tau \leq$$

$$\leq 2\Big((t_1-t_0) + 1\Big)L^2\int_{t_0}^{t} 2\Big((t_1-t_0) + 1\Big)L^2(\tau-t_0)\|X_1-X_2\|^2 \, d\tau$$

$$\leq 2\Big\{\Big((t_1-t_0) + 1\Big)L^2\Big\}^2 \frac{(t-t_0)^2}{2} \|X_1-X_2\|^2$$

Analogamente

$$\|T^3X_1-T^3X_2\|^2 \leq 2\Big((t_1-t_0)+1\Big)L^2\int_{t_0}^{t}\|T^2X_1-T^2X_2\|^2\,d\tau =$$

$$= 2\Big\{\Big((t_1-t_0)+1\Big)L^2\Big\}^3\,\frac{(t-t_0)^3}{3}\,\|X_1-X_2\|^2$$

En general, por un razonamiento de inducción, se obtiene:

$$\|T^nX_1-T^nX_2\|^2 \leq 2\Big\{\Big((t_1-t_0)+1\Big)L^2\Big\}^n\,\frac{(t-t_0)^n}{n}\,\|X_1-X_2\|^2$$

Tomando el superior de las esperanzas

$$|||T^nX_1-T^nX_2|||^2 \leq 2\Big\{\Big((t_1-t_0)+1\Big)L^2\Big\}^n\,\frac{(t_1-t_0)^n}{n}\,|||X_1-X_2|||^2$$

Llamando $K = (n!)^{-1}\,2L^2\Big((t_1-t_0)+1\Big)(t_1-t_0)^n$, podemos elegir un n suficientemente grande, de forma que se consiga que $K<1$.

Por tanto, T es una contracción.

Por otra parte, las hipotesis de continuidad y medibilidad de las funciones $X(0,\omega)$, $a(t,X)$ y $B(t,X)$ implican la continuidad y medibilidad del segundo miembro de la ecuación integral. Luego, el proceso solución es continuo y medible $\forall\, t \in t_0,t_1$, con lo cual el teorema queda demostrado.

c.q.d.

CAPITULO 2: ESTUDIO DEL CARACTER MARKOVIANO FUERTE DEL PROCESO SOLUCION DE LAS E.I.E.

CAPITULO 2

ESTUDIO DEL CARACTER MARKOVIANO FUERTE DEL PROCESO SOLUCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS

2.1 INTRODUCCION

El objeto de este capitulo, es realizar un estudio del caracter markoviano fuerte de los procesos solución de las ecuaciones integrales estocasticas Ito, que han sido analizadas en el Capitulo 1.

En este primer punto 2.1 , ademas de un esquema general de lo que consta el capitulo, daremos una serie de definiciones y propiedades basicas, que ayudaran a tener una mayor compresión del tema, ya que seran el fundamento para el desarrollo de los restantes apartados.

Ya ha sido demostrado el caracter felleriano de la solución de la ecuación de Ito clásica, {2} , en el punto 2.2 , realizaremos esta demostración con detalle y completaremos este aspecto, viendo que dicho proceso solución tambien es fuertemente markoviano.

Para la ecuación integral estocastica Ito en espacios de Hilbert separables, aun no ha sido abordada esta cuestión, demostraremos en el apartado 2.3 , que tambien en este caso, el proceso solución tiene la propiedad de Markov fuerte; viendo ademas algunas propiedades del operador transición asociado al proceso solución.

En los apartados 2.4 y 2.5 , se analizara el caracter fuertemente markoviano del proceso solución de la ecuación integral estocastica Ito en escalas de espacios de Hilbert y la E.I.E. Ito generalizada, respectivamente, quedando asi completado el objetivo de este capitulo.

Exponemos a continuación, como deciamos anteriormente, las definiciones y propiedades que emplearemos a lo largo de este capitulo. (Para mas detalle sobre ellas, hacemos referencia a {11} y {30})

DEFINICION 2.1.1

Consideremos un espacio de estados arbitrario $(E,\mathcal{B})$. La función $P(t,x,A)$ ($t \leq 0$; $x \in E$; $A \in \mathcal{B}$) se denomina " <u>Función de transición</u> " , si se verifican las condiciones siguientes:

1.- Para t, x fijos; $P(t,x,A)$ es una medida en el σ-algebra $\mathcal{B}$.

2.- Para t, A fijos; $P(t,x,A)$ es una función $\mathcal{B}$-medible de x.

3.- $P(t,x,E) \leq 1$

4.- $P(0,x,E-x) = 0$

5.- $P(s+t,x,A) = \int_E P(s,x,dy)\, P(t,y,A)$ $\qquad (s , t \leq 0)$

Diremos que la función de transición $P(t,x,A)$ es " normal " si $P(0,x,E) = 1$, $\forall x \in E$; y diremos que es " conservativa " si $P(t,x,E) = 1$, $\forall x \in E$, $\forall t \leq 0$.

DEFINICION 2.1.2

Sea C el espacio de Banach, consistente en todas las funciones medibles, continuas y acotadas, sobre el espacio medible topologico ($E, \mathcal{C}, \mathcal{B}$) , donde es una topologia sobre ($E, \mathcal{B}$).

Diremos que la función $P(t,x,A)$ es una " Transición Felleriana " , si para cualquier $f \in C$, el operador transición

$$T_t\, f(x) = \int_E P(t,x,dy)\, f(y)$$

es continuo.

En otras palabras, $P(t,x,A)$ es una función Feller, si el semigrupo $\{T_t\}$ aplica $C = C(E, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ en si mismo.

DEFINICION 2.1.3

Una transición $P(t,x,A)$, definida sobre el espacio de estados topologico ($E, \mathcal{C}, \mathcal{B}$) se dice " Estocasticamente continua " si verifica:

$$\lim_{t \to 0} P(t,x,U) = 1 \quad ; \quad \forall\ U \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \quad y \quad \forall x \in U$$

LEMA 2.1.4

Si la función P(t,x,A) es estocasticamente continua entonces, para cada $f \in C = C(\ E, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ y para cada $x \in E$

$$(*) \quad \lim_{t \to 0} T_t\ f(x) = f(x)$$

Si para cada $f \in C$ y cada $x \in E$, se verifica (*), entonces, la función de transición es estocasticamente continua.

DEFINICION 2.1.5

Un proceso markoviano X se dice: " Normal " , " Conservativo " , " Felleriano " ó " Estocasticamente continuo " si su transición correspondiente es normal , conservativa , felleriana ó estocasticamente continua , respectivamente.

PROCESO FUERTEMENTE MARKOVIANO

El principio markoviano, esta referido a instantes de tiempo t no aleatorios. Si dicho principio, permanece valido aun en el caso de la aleatoriedad de ciertos instantes, entonces - se dice que el proceso es fuertemente markoviano
Esta idea intuitiva, queda precisada a continuación mediante la noción de instante markoviano.

DEFINICION 2.1.6

Sea $X = (\ X_t,\ \xi,\ \mu_t,\ P_x\ )$ un proceso de Markov.
La función real

$$\tau(\omega)\ :\ \Omega \longrightarrow R$$

se denomina " Instante markoviano " si verifica:

(a).- $0 \leq \tau(\omega) \leq \xi(\omega) \qquad \omega \in \Omega$

DEFINICION 2.1.7.

Un proceso markoviano $X = (X_t, \xi, \mu_t, P_x)$ en el espacio de estados $(E,\mathcal{B})$, se dice " <u>Fuertemente markoviano</u> " si para cualquier instante de markov τ ,

$$P_x (X_{\tau+T} \; A / \mu_\tau) = P(t,X_\tau,A)$$

Se demuestra el siguiente criterio, para la propiedad de markov fuerte:

PROPOSICION 2.1.8

" Todo proceso felleriano, continuo a la derecha, es fuertemente markoviano "

A continuación, exponemos una versión del Lema de Cronwall, que sera fundamental para las demostraciones posteriores.

LEMA 2.1.9

Sea $f : R^+ \longrightarrow R^+$, tal que $f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)\, ds$

Entonces, $\forall t$: $f(t) \leq a\, e^{bt}$.

Este lema, sigue siendo valido para una medida v que sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, observación que hacemos para cuando sea necesario emplearlo en el apartado 2.3 (alli volveremos a enunciarlo, bajo esta forma) ya que la integral de Cabaña y por tanto la ecuación integral estocastica Ito en espacios de Hilbert separables, se define en terminos de tal medida.

2.2 CARACTER MARKOVIANO FUERTE DE LA SOLUCION DE LA ECUACION INTEGRAL ESTOCASTICA ITO

2.2.1 Introducción

Sabemos que el proceso solución $\{ X(t,\omega);\ t\in[0,T) \}$ de la ecuación integral estocastica Ito:

$$(1) \qquad X(t,\omega) = \xi + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

es un proceso de Markov, con función de transición:

$$P(t,\xi,B) = P\{ X(t,\omega)\in B \,/\, X(0,\omega) = \xi \}$$

al cual se le denomina, " Proceso Ito "

2.2.2 " El proceso Ito es un proceso Feller "

Para demostrar esto, tomaremos el semi-grupo $\{T_t\}$ asociado a la función de transición del proceso, y comprobaremos su continuidad.

(A).- Definimos el semi-grupo de operadores $\{T_t\}$ como sigue:

$$T_t f(\xi) = \int_{\mathcal{X}} P(t,\xi,dy)\, f(y) = E\{f(X(t,\omega)) \,/\, X(0,\omega) = \xi\}$$

$$= E\{ f(X_\xi(t,\omega)) \}$$

Siendo $\mathcal{X}$ el espacio de las funciones aleatorias medibles y acotadas, el cual es un espacio de Banach separable, con la norma:

$$\|X(t,\omega)\|^2 = \sup_{t\in[t_0,T]} E\{\ |X(t,\omega)|^2\ \}$$

Y f es una función perteneciente a C (espacio de funciones continuas sobre ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$))

(B).- Tomemos una sucesión (ξ_n) convergente en norma a ξ , es decir $\|\xi_n - \xi\| \longrightarrow 0$.

Vamos a demostrar que $X_{\xi_n}(t,\omega) \longrightarrow X_\xi(t,\omega)$ en probabilidad cuando $\|\xi_n - \xi\| \longrightarrow 0$

En efecto; bastara con probar que la siguiente acotación es cierta:

$$P\{\ |X_{\xi_n}(t,\omega) - X_\xi(t,\omega)| > \varepsilon\ \} \leq \frac{H}{\varepsilon^2} \|\xi_n - \xi\|^2$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y las propiedades de la integral estocastica de Ito, se tiene que:

$$E|X_{\xi_n}(t)-X_\xi(t)|^2 \leq 3|\xi_n-\xi|^2 + 3(T-t_0)\int_{t_0}^{t} E|a(\tau,X_{\xi_n})-a(\tau,X_\xi)|^2\, d\tau +$$

$$+ 3\int_{t_0}^{t} E|b(\tau,X_{\xi_n})-b(\tau,X_\xi)|^2\, d\tau \leq$$

Por las hipotesis del teorema de existencia y unicidad

$$\leq 3|\xi_n-\xi|^2 + 3k^2[1+(T-t_0)]\int_{t_0}^{t} E|X_{\xi_n}-X_\xi|^2\, d\tau$$

Utilizando el Lema 2.1.9 , donde

$$a = 3|\xi_n-\xi|^2 \qquad y \qquad b = 3k^2[1+(T-t_0)]$$

Obtenemos:

$$E|X_{\xi_n}(t)-X_\xi(t)|^2 \leq 3|\xi_n-\xi|^2\, e^{3k^2[1+(T-t_0)](t-t_0)}$$

Llamando $H = 3\, e^{3k^2[1+(T-t_0)](T-t_0)}$ y tomando el superior de las esperanzas:

$$\sup_t E\{\ |X_{\xi_n}(t,\omega)-X_\xi(t,\omega)|^2\ \} \leq H\,\|\xi_n-\xi\|^2$$

Utilizando la desigualdad de Tchebychev, obtenemos:

$$P\{\ |X_{\xi_n}(t,\omega)-X_\xi(t,\omega)|>\varepsilon\ \} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\ E\{\ |X_{\xi_n}(t,\omega)-X_\xi(t,\omega)|^2\ \} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\ \sup_t E\{\ |X_{\xi_n}(t,\omega)-X_\xi(t,\omega)|^2\ \} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\ H\,\|\xi_n-\xi\|^2$$

Por tanto; cuando $\|\xi_n-\xi\| \longrightarrow 0$, entonces

$X_{\xi_n}(t,\omega) \longrightarrow X_\xi(t,\omega)$ en probabilidad.

(C).- Sea $f\in C$, por la continuidad de f , se tiene:

$f[X_{\xi_n}(t,\omega)] \longrightarrow f[X_\xi(t,\omega)]$ en probabilidad.

(D).- Por la definición de T_t , dada en (A) :

$$T_t f(\xi_n) = Ef[X_{\xi_n}(t,\omega)] \longrightarrow Ef[X_\xi(t,\omega)] = T_t f(\xi)$$

Luego el semi-grupo $\{T_t\}$ aplica C en si mismo, lo cual expresa el caracter felleriano del proceso Ito.

2.2.3 " El proceso Ito es fuertemente markoviano "

Como consecuencia del apartado anterior, y utilizando la propiedad de que todo proceso Feller continuo a la derecon demostrar la continuidad a la derecha del proceso $X(t,\omega)$; entendiendo dicha continuidad en el siguiente sentido:

" Para cada $\omega\in\Omega$, $X(t,\omega)$ es continuo a la derecha en t , con la topologia inducida por la norma $\| \ \|$).

$$E|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)|^2 \leq 2E\left|\int_t^{t+h} a(\tau,X)\, d\tau\right|^2 + 2E\left|\int_t^{t+h} b(\tau,X)\, dW(\tau,\omega)\right|^2$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz, las propiedades de la integral estocastica de Ito y las hipotesis del teorema de existencia y unicidad.

$$\leq 2hE\int_t^{t+h} |a(\tau,X)|^2\, d\tau + 2E\int_t^{t+h} |b(\tau,X)|^2\, d\tau$$

$$\leq 2h^2k^2\ (1+E|X|^2) + 2hk^2\ (1+E|X|^2)$$

$$= 2hk^2\ (h+1)\ (1+E|X|^2)$$

Tomando superiores:

$$\|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)\|^2 \leq 2hk^2\ (h+1)\ (1+\|X\|^2)$$

Haciendo $h \longrightarrow 0$, se tiene el resultado deseado.

c.q.d.

2.3 CARACTER MARKOVIANO FUERTE DE LA SOLUCION DE LA E.I.E. ITO EN ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES.

2.3.1 Introducción

Sean H y G dos espacios de Hilbert separables, y sean $\tilde{H}$ y $\tilde{G}$ los espacios de variables aleatorias de cuadrado integrable, con valores en H y G respectivamente.

Dado un operador Brownniano $W: \Theta \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{L}(H,G))$ y un proceso $b: \Theta \longrightarrow \tilde{G}$ tal que

$$\int_{\Theta} E\| b(t,\omega) \|^2 \, dv(t) < \infty$$

donde v es una medida finita en el intervalo $\Theta = [0,T)$; $(T \leq \infty)$ se define la " Integral estocastica de Cabaña " (ver capitulo 1)

$$\int_{\Theta} b(t,\omega) \, dW(t,\omega)$$

El paso siguiente fue estudiar la ecuación integral estocastica:

$$(2) \qquad X(t) = X_0 + \int_0^t a(\tau, X(\tau)) \, dv(\tau) + \int_0^t b(\tau, X(\tau)) \, dW(\tau)$$

Obteniendo (teorema de existencia y unicidad) que bajo ciertas condiciones, existe un único proceso continuo $X: \Theta \longrightarrow \tilde{G}$ que verifica la ecuación (2) , $\forall t \in \Theta$

A continuación, vamos a demostrar el caracter fuertemente markoviano de dicho proceso solución; haremos este estudio de la siguiente forma:

Probaremos el carecter Felleriano del proceso y aplicaremos el siguiente resultado (Dynkin, pagina 99):

" Todo proceso Felleriano continuo a la derecha, es fuertemente markoviano "

Por ultimo, vamos a enunciar y demostrar algunas propiedades del operador de transición T_t asociado al proceso solución de la ecuación (2).

2.3.2 Estudio del caracter markoviano fuerte.

Como deciamos anteriormente, realizaremos este estudio en dos partes:

(A) " El proceso solución de la ecuación (2) es un proceso felleriano "

(A.1) Dotamos al espacio de estados $(G,\mathcal{B})$ de una topologia (sistema de abiertos) y obtenemos un espacio medible topologico $(G,\mathcal{C},\mathcal{B})$, al que podemos asociar el espacio de Banach $C = C(G,\mathcal{C},\mathcal{B})$ consistente en todas las funciones medibles, continuas y acotadas con la norma:

$$\|f\| = \sup_{x\in G} |f(x)|$$

La solución de la ecuación (2) sera un proceso Feller, si su transición correspondiente $P(t,x,A)$ es felleriana; es decir, si para cualquier $f\in C$, la función

(A.2) El operador de transición estara definido por:

$$T_t f(x) = \int_\Omega f(X_t(\omega))\ P_x(d\omega) = E\ \{\ f(X_t(\omega))\ /\ X_0(\omega) = x\ \}$$

$$= E_x\ \{\ f(X_t(\omega))\ \} = Ef(X_t^x(\omega))$$

donde X_t^x es la solución de la ecuación:

$$X_t^x = x + \int_0^t a(\tau, X_\tau^x)\ d\tau + \int_0^t b(\tau, X_\tau^x)\ dW_\tau$$

Tomemos una sucesión $\{x_n\}$ convergente en norma a x , es decir $|||\, x_n - x\, ||| \longrightarrow 0$. Vamos a demostrar que X_t^x converge en probabilidad a X_t^x .

$$\left(P(\ \| X_t^{x_n} - X_t^x \| > \varepsilon\ ) \longrightarrow 0 \quad , \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty \right)$$

Recordemos que la norma de un proceso con valores en un espacio de Hilbert, se define como

$$|||\, X\, ||| = \sup_t \| X(t) \|_{\tilde{H}} = \sup_t E\| X(t,\omega)\|_H$$

(a).-

$$E\| X_t^{x_n} - X_t^x \|^2 \leq E\| x_n - x + \int_0^t [a(\tau, X_\tau^{x_n}) - a(\tau, X_\tau^x)] \quad dv(\tau) +$$

$$+ \int_0^t [b(\tau, X_\tau^{x_n}) - b(\tau, X_\tau^x)] \quad dW_\tau \|^2 \leq$$

$$\leq 3\| x_n - x\|^2 + 3E\left\| \int_0^t [a(\tau, X_\tau^{x_n}) - a(\tau, X_\tau^x)]\ dv(\tau) \right\|^2$$

$$+ 3E\left\| \int_0^t [b(\tau, X_\tau^{x_n}) - b(\tau, X_\tau^x)]\ dW_\tau \right\|^2$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1 , obtenemos:

$$\leq 3\|x_n - x\|^2 + 3v(\Theta) \int_0^t E\|a(\tau, X_\tau^{x_n}) - a(\tau, X_\tau^x)\|^2 \, dv(\tau) +$$

$$+ 3\int_0^t E\|b(\tau, X_\tau^{x_n}) - b(\tau, X_\tau^x)\|^2 \, dv(\tau)$$

Por las hipotesis del teorema de existencia y unicidad:

$$\leq 3\|x_n - x\|^2 + 3L^2 v(\Theta) \int_0^t E\|X_\tau^{x_n} - X_\tau^x\|^2 \, dv(\tau) +$$

$$+ 3L^2 \int_0^t E\|X_\tau^{x_n} - X_\tau^x\|^2 \, dv(\tau)$$

$$= 3\|x_n - x\|^2 + 3L^2 \left[v(\Theta) + 1\right] \int_0^t E\|X_\tau^{x_n} - X_\tau^x\|^2 \, dv(\tau)$$

Aplicando el Lema 2.1.9 , que con la observación que realizamos en el apartado 2.1 , seria:

LEMA

Sea $f: R_+ \longrightarrow R_+$ tal que $f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)\, dv(s)$

donde v es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Entonces:

$$\forall t , \quad f(t) \leq a \, e^{bv(0,t)}$$

Obtenemos:

$$E\|X_t^{x_n} - X_t^x\|^2 \leq 3 \, e^{3L^2\left[v(\Theta)+1\right] v(0,t)} \|x_n - x\|^2$$

Tomando superiores

$$\sup_t E\|X_t^{x_n} - X_t^x\|^2 \leq 3 \, e^{3L^2\left[v(\Theta)+1\right] v(\Theta)} |||x_n - x|||^2$$

(b).- Aplicando la desigualdad de Tchebychev

$$P\left(\|X_t^{x_n} - X_t^x\| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\|X_t^{x_n} - X_t^x\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sup_t E\|X_t^{x_n} - X_t^x\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} 3 e^{3L^2[v(\Theta)+1]} v(\Theta) ||| x_n - x |||^2$$

Llamando $K = 3 e^{3L^2[v(\Theta)+1]} v(\Theta)$

Obtenemos:

$$P\left(\|X_t^{x_n} - X_t^x\| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} K ||| x_n - x |||^2$$

Luego: $X_t^{x_n} \longrightarrow X_t^x$ (en probabilidad) ,

cuando $||| x_n - x ||| \longrightarrow 0$

(A.3) La continuidad de f implica que:

$f(X_t^{x_n}) \longrightarrow f(X_t^x)$ en probabilidad.

(A.4) Por la definición de T_t dada en (A.2) se tiene que:

$$T_t f(x_n) = E f(X_t^{x_n}) \longrightarrow E f(X_t^x) = T_t f(x)$$

Luego el operador de transición T_t es continuo, lo cual prueba el caracter felleriano del proceso solución.

(B) " El proceso solución de la ecuación (2) es continuo a la derecha "

Un proceso X se dice continuo a la derecha, si para cada $\omega\in\Omega$, $X_t(\omega)$ es continuo a la derecha en t, para $t\in\Theta$ y respecto a la topologia apropiada (en este caso la inducida por la norma $|||\ |||$).

Consideremos las siguientes trayectorias de la ecuación (2), con $t\leq t'$

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\tau,X)\ dv(\tau) + \int_0^t b(\tau,X)\ dW_\tau$$

$$X_{t'} = X_0 + \int_0^{t'} a(\tau,X)\ dv(\tau) + \int_0^{t'} b(\tau,X)\ dW_\tau$$

$$\|X_t - X_{t'}\|^2 = \|\int_t^{t'} a(\tau,X)\ dv(\tau) + \int_t^{t'} b(\tau,X)\ dW_\tau\|^2 \leq$$

$$\leq 2\ \|\int_t^{t'} a(\tau,X)\ dv(\tau)\|^2 + 2\ \|\int_t^{t'} b(\tau,X)\ dW_\tau\|^2$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1 , obtenemos:

$$\leq 2v(t,t')\int_t^{t'} \|a(\tau,X)\|^2\ dv(\tau) + 2\int_t^{t'} \|b(\tau,X)\|^2\ dv(\tau)$$

$$\leq 2v^2(t,t')\ \|a(\tau,X)\|^2 + 2v(t,t')\ \|b(\tau,X)\|^2$$

Por las hipotesis del teorema de existencia y unicidad:

$$\leq 2v^2(t,t')M^2\ (1 + \|X\|^2) + 2v(t,t')M^2\ (1 + \|X\|^2)$$

$$= 2\ [v(t,t') + 1]v(t,t')M^2\ (1 + \|X\|^2)$$

La continuidad se deduce de la hipotesis de que v es absolutamente continua, bastara hacer $t \longrightarrow t'$.

De los apartados (A) y (B), aplicando la proposición 2.1.8 , obtenemos automaticamente que el proceso solución de la ecuación integral estocastica (2) es fuertemente markoviano.

2.3.3 Propiedades del operador de transición

A continuación, vamos a demostrar algunas propiedades del operador de transición T_t asociado al proceso solución de la ecuación (2).

Recordemos que la relación definidora de dicho operador es:

$$T_t\, f(x) = \int_G P(t,x,dy)\, f(y) = \int_\Omega f(X_t(\omega))\, P_x(d\omega) =$$

$$= E\, f(X_t^x(\omega))$$

PROPOSICION

(i) (T_t) es un semigrupo tal que $T_t[U(G)] \subset U(G)$

$U(G)$ = Funciones uniformemente continuas y acotadas en G

(ii) $\forall f \in U(G)$; $\|T_t f - f\|_{U(G)} \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow 0$

(iii) $\forall f$ acotada tal que $\lim_{\|y\|\to\infty} f(y) = 0$; $\lim_{\|y\|\to\infty} T_t f(y) = 0$

Demostración

(i) (T_t) es un semigrupo si $\forall t \leq 0$, $\forall s \leq 0$; $T_{t+s} = T_t \cdot T_s$

En efecto:

$$T_{t+s} f(x) = \int_G P(t+s,x,dy)\, f(y) = \int_G \left(\int_G P(t,x,dz) P(s,z,dy) \right) f(y)$$

$$= \int_G P(s,x,dz) \left(\int_G P(s,z,dy)\, f(y) \right) =$$

$$= \int_G P(t,x,dz)\ T_t f(z) = T_t . T_s f(x)$$

Veamos ahora que el semigrupo (T_t) aplica U(G) en si mismo.

Sea $f \in U(G)$

_ $|T_t f(x)| = |E\ f(X_t^x)| = |\int_G P(t,x,dy)\ f(y)| \leq$

$$\leq \sup_{y \in G} |f(y)| \int_G P(t,x,dy) = \|f\|$$

Por lo tanto $T_t f$ es acotada.

Tambien queda demostrado que T_t es una contracción, ya que:

$$\|T_t f\| = \sup_{x \in G} |T_t f(x)| \leq \|f\|$$

_ Veamos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, tal que $\|x-y\| < \delta$ implica que $|T_t f(x) - T_t f(y)| < \varepsilon$

$$|T_t f(x) - T_t f(y)| \leq \sup_{\|x-y\| \leq r} |f(x)-f(y)| + 2\|f\| P\{|X_t^x - X_t^y| > r\}$$

Aplicando la desigualdad de Tchebychev

$$\leq \sup_{\|x-y\| \leq r} |f(x)-f(y)| + 2\|f\| \frac{1}{r^2}\ E\|X_t^x - X_t^y\|^2$$

Anteriormente hemos demostrado que existe una constante K(t) tal que:

$$E\|X_t^x - X_t^y\|^2 \leq K(t)\ \|x-y\|^2$$

Teniendo en cuenta este resultado y que $f \in U(G)$, deducimos la continuidad uniforme de $T_t f$.

Luego $T_t f \in U(G)$; con lo cual queda demostrado que T_t aplica U(G) en si mismo.

(ii) $\forall f \in U(G)$; $\|T_t f - f\|_{U(G)} \longrightarrow 0$, cuando $t \longrightarrow 0$

Sea $\varepsilon_r(x)$ un r-entorno del punto x, es decir: el conjunto $\{ y : \|y-x\|<r \}$.

$$T_t f(x) - f(x) = \int_{\varepsilon_r(x)} P(t,x,dy)\left[f(x)-f(y)\right] + f(x)\left[P(t,x,\varepsilon_r(x)-1\right] +$$

$$+ \int_{G-\varepsilon_r} P(t,x,dy)\ f(y)$$

De donde:

$$|T_t f(x) - f(x)| \leq \sup_{y/\|y-x\|<r} |f(y)-f(x)| + 2\|f\| P\{ \|X_t^x - x\| \geq r \}$$

Aplicando la desigualdad de Tchebychev

$$\leq \sup_{y/\|y-x\|<r} |f(y)-f(x)| + 2\|f\| \frac{1}{r^2} E\{ \|X_t^x - x\|^2 \}$$

Mayorando la esperanza que aparece en la anterior desigualdad.

$$E\|X_t^x - x\|^2 = E\| \int_0^t a(\tau, X_\tau^x)\ dv(\tau) + \int_0^t b(\tau, X_\tau^x)\ dW(\tau) \|^2$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1 , obtenemos:

$$\leq 2v(0,t)\int_0^t E\|a(\tau,X_\tau^x)\|^2\ dv(\tau) + 2\int_0^t E\|b(\tau,X_\tau^x)\|^2\ dv(\tau)$$

Por las hipotesis del teorema de existencia y unicidad:

$$\leq 2v^2(0,t)M^2\ (1 + \|X_t^x\|^2) + 2v(0,t)M^2\ (1 + \|X_t^x\|^2)$$

$$= 2\left[v(0,t) + 1\right]v(0,t)M^2\ (1 + \|X_t^x\|^2)$$

Sustituyendo esta acotación obtenida, y tomando superiores se tiene:

$$\|T_t f - f\| = \sup_{x\in G} |T_t f(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x} \sup_{\{y/\|y-x\|<r\}} |f(y)-f(x)| + \frac{4\|f\|}{r^2} [v(0,t)+1]M^2(1+\|X_t^x\|^2)$$

Teniendo en cuenta que v es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y que $f\in U(G)$, obtendremos el resultado deseado:

$$\|T_t f - f\| \longrightarrow 0 \qquad \text{si} \quad t \longrightarrow 0$$

(iii) $\forall f$ acotada, tal que $\lim_{\|y\|\to\infty} f(y) = 0$; $\lim_{\|y\|\to\infty} T_t f(y) = 0$

En efecto:

$$|T_t f(x)| = \left| \int_{\varepsilon_r(x)} P(t,x,dy)\ f(y) + \int_{G-\varepsilon_r} P(t,x,dy)\ f(y) \right|$$

$$\leq \sup_{y/\|y-x\|<r} |f(y)| + \|f\|\ P\{ \|X_t^x - x\| \geq r \}$$

$$\leq \sup_{y/\|y-x\|<r} |f(y)| + 2\|f\| \frac{1}{r^2} [v(0,t)+1]\, v(0,t) M^2 (1+\|X_t^x$$

de donde se obtiene el resultado deseado, ya que para "r" fijo:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \{ \sup_{y/\|y-x\|<r} |f(y)| \} = 0$$

c.q.d.

COROLARIO

El proceso solución de la ecuación (2), es estocásticamente continuo.

<u>Demostración</u>

Se deduce del Lema 2.1.4 y de la proposición anterior, punto (ii).

2.4 CARACTER MARKOVIANO FUERTE DE LA SOLUCION DE LA E.I.E. ITO EN ESCALAS DE ESPACIOS DE HILBERT

2.4.1 Introducción

En el capitulo 1, hemos considerado la ecuación integral estocastica:

$$(3) \qquad X(t,\omega) = X_0(\omega) + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\,d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\,dW(\tau,\omega)$$

donde $W(t,\omega)$ es un proceso Wiener y $B(t,X)$ un proceso operador valuado en una escala de espacios de Hilbert $\{ H_\alpha \;;\; \alpha\in(-\infty,\infty) \}$. Para que esta ecuación estuviese bien definida, previamente dabamos significado a la integral

$$\int_\Theta B(t,\omega)\,dW(t,\omega)$$

" Integral estocastica de Daletskii " . Pasando a continuación a estudiar el problema de la existencia y unicidad del proceso solución y obteniendo el siguiente resultado:

Bajo ciertas Hipotesis (dadas en el teorema de existencia y unicidad) la ecuación (3) tiene una unica solución continua en X_α^2 .

(Por X_α^2 representamos el espacio de los procesos de segundo orden valuados en H_α ; es un espacio de Banach separable con la norma:

$$|||X(t,\omega)|||^2 = \sup_{t\in[t_0,T)} E\{ \|X(t,\omega)\|^2 \} \qquad)$$

2.4.2 Estudio del caracter Felleriano.

Vamos a demostrar que el proceso solución de la ecuación (3) es un proceso Feller; para lo cual, tendremos que tomar el semi-grupo $\{T_t\}$ asociado a la función de transición $P(t,x,A)$ del proceso y comprobar su continuidad. Es decir, hemos de demostrar que para cualquier $f \in C$ (espacio de las funciones medibles, continuas y acotadas sobre $(X_\alpha^2, \mathcal{B})$) el operador de transición

$$T_t\, f(y) = \int_{X_\alpha^2} f(x)\; P(t,y,dx) \qquad \text{es continuo.}$$

(A).- Veamos como esta definido el semi-grupo de operadores $\{T_t\}$: $f(x)$ es una función medible sobre el espacio de estados $(X_\alpha^2, \mathcal{B})$ entonces $f(X(t,\cdot))$ es una función sobre Ω ; la integral de esta función con respecto a la medida P , sera el valor de la función " transformada " :

$$T_t\, f(y) = \int_\Omega f(x)\; P(t,y,dx) = E\{\, f(X(t,\omega)) \;/\; X(0,\omega) = y \,\}$$

$$= E\{\, f(X_y(t,\omega)) \,\}$$

(B).- Demostraremos ahora que $X_{y_n}(t,\omega)$ converge en probabilidad a $X_y(t,\omega)$ cuando $y_n \longrightarrow y$ $\quad (\; |||y_n - y||| \longrightarrow 0 \;)$.
En efecto:

$$E\|X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)\|^2 \leq 3\|y_n - y\|^2 + 3E\left\|\int_{t_0}^{t} [a(\tau,X_{y_n}) - a(\tau,X_y)]\; d\tau\right\|^2 +$$

$$+\; 3E\left\|\int_{t_0}^{t} [B(\tau,X_{y_n}) - B(\tau,X_y)]\; dW(\tau)\right\|^2 \leq$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y las propiedades de la integral estocastica de Daletskii, se obtiene:

$$\leq 3\|y_n - y\|^2 + 3(t-t_0)\int_{t_0}^{t} E\|a(\tau, X_{y_n}) - a(\tau, X_y)\|^2 \, d\tau +$$

$$+ 3\int_{t_0}^{t} E\{\ \sigma^2[T^\alpha B(\tau, X_{y_n}) - T^\alpha B(\tau, X_y)]\ \}\, d\tau$$

Por el punto (ii) de la propiedad L (enunciada en el capitulo 1 antes del teorema de existencia y unicidad)

$$\leq 3\|y_n - y\|^2 + 3C_2^2\ [(T-t_0)+1]\int_{t_0}^{t} E\|X_{y_n}(\tau) - X_y(\tau)\|^2 \, d\tau$$

Aplicando el Lema 2.1.9 a la función

$$g(t) = E\|X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)\|^2$$

se verifica que:

$$E\|X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)\|^2 \leq 3\|y_n - y\|^2\ e^{3C_2^2[(T-t_0)+1](t-t_0)}$$

Tomando superiores

$$|||X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)|||^2 = \sup_t E\{\ \|X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)\|^2\ \} \leq$$

$$\leq 3\ e^{3C_2^2[(T-t_0)+1](T-t_0)}\ |||y_n - y|||^2$$

Llamando $K = 3\ e^{3C_2^2[(T-t_0)+1](T-t_0)}$ y aplicando la desigualdad de Tchebychev:

$$P\{\ \|X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)\| > \varepsilon\ \} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\|X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sup_t E\|X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\ K\ |||y_n - y|||^2$$

Por tanto si $|||y_n - y||| \longrightarrow 0$ se tiene que

$P\{ ||X_{y_n}(t,\omega) - X_y(t,\omega)|| > \varepsilon \} \longrightarrow 0$; lo cual por definición es la convergencia en probabilidad de $X_{y_n}(t,\omega)$ hacia $X_y(t,\omega)$.

(C).- Por hipotesis $f \in C$, espacio de las funciones medibles, continuas y acotadas sobre $(X^2_\alpha, \mathcal{B})$; luego la continuidad de f implica que:

$$f[X_{y_n}(t,\omega)] \longrightarrow f[X_y(t,\omega)] \quad \text{en probabilidad.}$$

(D).- Por la definición de T_t tenemos que se verifica

$$T_t f(y_n) = Ef[X_{y_n}(t,\omega)] \longrightarrow Ef[X_y(t,\omega)] = T_t f(y)$$

Por tanto, el semi-grupo $\{T_t\}$ aplica C en si mismo, lo cual expresa el caracter felleriano del proceso.

c.q.d.

2.4.3 <u>Estudio del caracter fuertemente markoviano</u>

Como consecuencia del resultado anterior, demostraremos que:

" El proceso solución de la ecuación (3) es fuertemente markoviano " .

Bastara con probar la continuidad a la derecha del proceso basandonos, como en anteriores apartados en el Lema 2.1.8 (Todo proceso Feller continuo a la derecha, es fuertemente markoviano)

En efecto:

$$E||X(t+h,\omega) - X(t,\omega)||^2 \leq 2E||\int_t^{t+h} a(\tau,X)d\tau||^2 + 2E||\int_t^{t+h} B(\tau,X)dW||^2$$

Aplicando las propiedades de la integral estocastica de Daletskii y las hipotesis del teorema de existencia y unicidad:

$$\leq 2Eh\int_t^{t+h} \| a(\tau,X)\|^2 \, d\tau + 2\int_t^{t+h} E\sigma^2 [T^{\alpha} B(\tau,X)] \, d\tau \leq$$

$$\leq 2Eh\int_t^{t+h} [C_1 + C_2 \| X \|]^2 \, d\tau + 2\int_t^{t+h} E[C_1 + C_2 \| X \|]^2 \, d\tau \leq$$

$$\leq 2h[2C_1^2 h + 2C_2^2 \int_t^{t+h} E\| X \|^2 \, d\tau] + 2[2C_1^2 h + 2C_2^2 \int_t^{t+h} E\| X \|^2 \, d\tau]$$

$$= 2^2 (h+1) [C_1^2 h + C_2^2 \int_t^{t+h} E\| X \|^2 \, d\tau]$$

Tomando el superior

$$|||X(t+h,\omega) - X(t,\omega)|||^2 \leq 4(h+1)[C_1^2 + C_2^2 |||X|||^2]h$$

Haciendo $h \longrightarrow 0$, obtenemos el resultado deseado.

2.5 CARACTER FUERTEMENTE MARKOVIANO DE LA SOLUCION DE LA E.I.E. ITO GENERALIZADA

2.5.1 Introducción

En el apartado 1.3, D) del capitulo 1, hemos considerado la ecuación integral estocastica:

$$(4) \quad X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

donde $W(t,\omega) : \Theta \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{L}(G_\alpha,H_\alpha))$ es un operador de Wiener y $B(t,X)$ un proceso operador valuado en una escala de espacios de Hilbert.

Definida la " integral estocastica generalizada "

$$\int_{\Theta} B(t,\omega)\, dW(t,\omega)$$

la ecuación anterior tenia sentido, y podiamos pasar a estudiar el problema de la existencia y unicidad de su solución, obteniendo el siguiente resultado:

Bajo las hipotesis del teorema de existencia y unicidad la ecuación (4) tiene un unico proceso solución , continuo en χ_α^2 .

Siendo χ_α^2 un espacio de Banach separable, con la norma:

$$|||X(t,\omega)|||^2 = \operatorname*{Sup}_t E\{ \|X(t,\omega)\|^2 \}$$

consistente en todos los procesos de segundo orden valuados en H_α

A continuación vamos a estudiar el caracter fuertemen te markoviano del proceso solución de la ecuación (4); haremos este estudio en dos partes, en primer lugar demostraremos que la solución es un proceso feller y en segundo lugar por aplicación del Lema 2.1.9 , deduciremos el caracter fuertemente markoviano.

2.5.2 Estudio del caracter felleriano.

(A).- Dotamos al espacio de estados ($\chi^2_\alpha, \mathcal{B}$) de una topologia, consistente en un sistema de abiertos, con lo cual obtenemos un espacio medible topologico ($\chi^2_\alpha, \mathcal{C}, \mathcal{B}$), al que le asociamos el espacio de Banach $C = C(\chi^2_\alpha, \mathcal{C}, \mathcal{B})$ formado por todas las funciones medibles, continuas y acotadas sobre ($\chi^2_\alpha, \mathcal{B}$).

La solución de la ecuación integral estocastica (4) , sera un proceso feller, si su transición correspondiente $P(t,x,A)$ es felleriana; es decir, si para cualquier $f \in C$, el operador de transición

$$T_t\, f(x) = \int_{\chi^2_\alpha} P(t,x,dy)\; f(y)$$

es continuo.

(B).- Veamos como esta definido el semi-grupo de operadores $\{T_t\}$:

$$T_t\, f(x) = \int_\Omega P(t,x,dy)\; f(y) = E\{\; f(X(t,\omega)) \;/\; X(0,\omega) = x\;\}$$

$$= E\{\; f(X^x(t,\omega))\;\}$$

(C).- Demostramos ahora, que $X^{x_n}(t,\omega)$ converge en probabilidad a $X^x(t,\omega)$, cuando x_n converge en norma a x.

$$E\| X^{x_n}(t,\omega)-X^x(t,\omega)\|^2 = E\| x_n - x + \int_{t_0}^{t}[a(\tau,X^{x_n})-a(\tau,X^x)]\, d\tau \; +$$
$$+ \int_{t_0}^{t}[B(\tau,X^{x_n})-B(\tau,X^x)]\, dW(\tau,\omega)\; \|^2$$

Utilizando la siguiente desigualdad: $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ se obtiene que

$$\leq 3\|x_n-x\|^2 + 3E\|\int_{t_0}^{t}[a(\tau,X^{x_n})-a(\tau,X^x)]\, d\tau\;\|^2$$
$$+ 3E\|\int_{t_0}^{t}[B(\tau,X^{x_n})-B(\tau,X^x)]\, dW(\tau,\omega)\;\|^2$$

Por la desigualdad de Schwarz y la propiedad de la integral estocastica generalizada de que su norma es ≤ 1 , es verifica:

$$\leq 3\|x_n-x\|^2 + 3E\int_{t_0}^{t}\| a(\tau,X^{x_n})-a(\tau,X^x)\|^2 d\tau (t-t_0)$$
$$+ 3E\int_{t_0}^{t}\| B(\tau,X^{x_n})-B(\tau,X^x)\|^2\, d\tau$$

Aplicando las hipotesis del teorema de existencia y unicidad

$$\leq 3\|x_n-x\|^2 + 3(t-t_0)L^2\int_{t_0}^{t} E\| X^{x_n}-X^x\|^2\, d\tau \; +$$
$$+ 3L^2\int_{t_0}^{t} E\| X^{x_n}-X^x\|^2\, d\tau$$
$$\leq 3\|x_n-x\|^2 + 3L^2[(t_1-t_0)+1]\int_{t_0}^{t} E\| X^{x_n}-X^x\|^2\, d\tau$$

Aplicando el lema 2.1.9 , donde:

$$f(t) = E\| X^{x_n}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \|^2$$

$$a = 3\| x_n - x \|^2$$

$$b = 3L^2[(t_1-t_0)+1]$$

Tendremos que se verifica:

$$E\| X^{x_n}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \|^2 \leq 3\, e^{3L^2[(t_1-t_0)+1](t-t_0)} \| x_n - x \|^2$$

Tomando superiores

$$\sup_{t\in[t_0,t_1]} E\| X^{x_n}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \|^2 \leq 3\, e^{3L^2[(t_1-t_0)+1](t_1-t_0)} ||| x_n - x |||^2$$

Llamando $K = 3\, e^{3L^2[(t_1-t_0)+1](t_1-t_0)}$ y aplicando la desigualdad de Tchebychev, obtenemos

$$\begin{aligned} P\{ \| X^{x_n}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \| > \varepsilon \} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\| X^{x_n}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sup_t E\| X^{x_n}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} K\, ||| x_n - x |||^2 \end{aligned}$$

Por tanto, si $||| x_n - x ||| \longrightarrow 0$ entonces

$$P\{ \| X^{x_n}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \| > \varepsilon \} \longrightarrow 0$$

Luego $X^{x_n}(t,\omega) \longrightarrow X^x(t,\omega)$ en probabilidad.

(D).- La continuidad de f implica que:

$$f[X^{x_n}(t,\omega)] \longrightarrow f[X^x(t,\omega)] \quad \text{en probabilidad.}$$

(E).- Por la definición de T_t , dada en 2.5.2 (B).- , tenemos que se verifica:

$$T_t f(x_n) = E\{f(X^{x_n}(t,\omega)\} \longrightarrow E\{f(X^x(t,\omega)\} = T_t f(x)$$

Por tanto, el semi-grupo $\{T_t\}$ aplica C en si mismo, lo cual expresa el caracter felleriano del proceso.

2.5.3 <u>Estudio del caracter markoviano fuerte.</u>

Como consecuencia del resultado anterior, demostraremos que: " El proceso solución de la ecuación (4), es fuermente markoviano ".

Basandonos en el Lema 2.1.8 , bastara con probar la continuidad a la derecha del proceso, entendiendo dicha continuidad en el siguiente sentido: Para cada $\omega\in\Omega$, $X(t,\omega)$ es continuo a la derecha en t , para cada $t\in\Theta$.

$$E\|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)\|^2 \leq 2E\left\|\int_t^{t+h} a(\tau,X)\, d\tau\right\|^2 + 2E\left\|\int_t^{t+h} B(\tau,X)\, dW\right\|^2 \leq$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz, las propiedades de la integral estocastica generalizada y las hipotesis del teorema de existencia y unicidad, tenemos que:

$$\leq 2hE\int_t^{t+h} \|a(\tau,X)\|^2\, d\tau + 2E\int_t^{t+h} \|B(\tau,X)\|^2\, d\tau \leq$$

$$\leq 2hE\int_t^{t+h} M^2(1+\|X\|^2)\, d\tau + 2E\int_t^{t+h} M^2(1+\|X\|^2)\, d\tau \leq$$

$$\leq 2h^2M^2\ (1+E\|X\|^2) + 2hM^2\ (1+E\|X\|^2)$$

$$= 2M^2h(h+1)\ (1+E\|X\|^2)$$

Tomando el superior de las esperanzas:

$$|||X(t+h,\omega)-X(t,\omega)|||^2 = \operatorname*{Sup}_t E\|X(t+h,\omega)-X(t,\omega)\|^2 \leq$$

$$\leq 2M^2h\ (h+1)\ (1+|||X|||^2)$$

Bastara hacer $h \longrightarrow 0$, para obtener el resultado deseado.

CAPITULO 3: REGULARIDADES DE LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS

3.1: Regularidades de la solución de la E.I.E. Ito en espacios de Hilbert separables.

A.- Variación de la solución en función de los coeficientes de la ecuación.

B.- Variación de la solución en función de las condiciones iniciales.

3.2: Regularidades de la solución de la E.I.E. Ito generalizada.

A.- Variación de la solución en función de los coeficientes de la ecuación.

B.- Variación de la solución en función de las condiciones iniciales.

CAPITULO 3

REGULARIDADES DE LA SOLUCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES ESTOCASTICAS

3.1 REGULARIDADES DE LA SOLUCION DE LA E.I.E. ITO EN ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES

Sean H y G dos espacios de Hilbert separables (con norma $\| \|$) y sean $\tilde{H} = L_2(\Omega,H)$, $\tilde{G} = L_2(\Omega,G)$ los espacios de Hilbert de las variables aleatorias de cuadrado integrable, con valores en H y G respectivamente. (con norma $[\ ]_2 = E\| \|$)

Consideremos el espacio medible $(\Theta,\mathcal{T})$, donde Θ es un intervalo de la forma $[0,T)$ con $T \leq \infty$ y $\mathcal{T}$ es el σ-algebra de conjuntos generada sobre Θ .

Sea $W(t,\omega)$ un operador de Wiener, es decir, una aplicación de Θ en $L_2(\Omega, \mathcal{L}(H,G))$; y sea $X(t,\omega):\Theta \longrightarrow G$ una función aleatoria.
Definimos:

$$|||X||| = \operatorname*{Sup}_t [X(t)]_2 = \operatorname*{Sup}_t E\|X(t,\omega)\|$$

Sea $L_\infty(\tilde{G})$ el espacio de las funciones aleatorias $\tilde{G}$-valuadas, tal que $\| \|_\infty < \infty$; y sea $C(\tilde{G}) \subset L_\infty(\tilde{G})$ el subespacio de las funciones aleatorias continuas.

Consideremos la ecuación integral estocastica:

$$(2) \qquad X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(\tau,X(\tau))\, dv(\tau) + \int_0^t b(\tau,X(\tau))\, dW(\tau)$$

donde:

- $a(t,X): \Theta \times \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}$

- $b(t,X): \Theta \times \tilde{G} \longrightarrow \tilde{H}$

- v es una medida finita, absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

- $\int_0^t b(\tau,\omega)\, dW(\tau,\omega)$ es la integral estocastica de Cabaña, cuya definición puede verse en el Capitulo 1.

Cuando "a" y "b" cumplan las hipotesis del teorema de existencia y unicidad, diremos que verifican la condición (α), es decir:

Para cualquier función medible $X:\Theta \longrightarrow \tilde{G}$, $a(t,X)$ y $b(t,X)$ son medibles

(α) $\quad \exists M$, tal que $\forall t \leq T$

$$\|a(t,X)\|^2 \leq M^2 \ (1 + \|X\|^2)$$
$$\|b(t,X)\|^2 \leq M^2 \ (1 + \|X\|^2)$$

$\exists L$, tal que $\forall t \leq T$

$$\|a(t,X_1)-a(t,X_2)\| \leq L\ \|X_1-X_2\|$$
$$\|b(t,X_1)-b(t,X_2)\| \leq L\ \|X_1-X_2\|$$

A continuación, vamos a estudiar las regularidades del proceso solución de la ecuación (2). En primer lugar veremos la variación en función de los coeficientes y despues la variación en función de las condiciones iniciales

YOR ha realizado este estudio (en el capitulo III-B de su tesis) considerando en la ecuación , la integral estocastica de un proceso $\sigma_2(H)$- valuado con respecto a un movimiento Browniano (N) construido sobre H (H espacio de Hilbert real separable).

No podemos generalizar de una manera automática, los resultados obtenidos por YOR y asegurar que son ciertos para - la solución de la ecuación (2), ya que aunque en la integral de Cabaña, el espacio de integración sigue siendo un espacio de Hilbert separable, el prodeso integrador es un operador - Wiener.

Por tanto, teniendo en cuenta la definición y propiedades de la integral de Cabaña, deberemos demostrar, bajo las- hipotesis requeridas en nuestro caso, los teoremas relativos a las regularidades de la solución de la ecuación (2).

A.- VARIACION DE LA SOLUCION EN FUNCION DE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION

Consideremos las ecuaciones:

$$(E_\lambda) \quad X(t) = X_\lambda^0 + \int_0^t a_\lambda\ (\tau, X(\tau))\ dv(\tau) +$$

$$+ \int_0^t b_\lambda\ (\tau, X(\tau))\ dW$$

$\lambda \in \Lambda$ espacio topológico.

Supondremos que a_λ y b_λ verifican la condición (α) con- las constantes M y L independientes de λ.

TEOREMA 1.-

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$, Si se verifican las condiciones anteriores y además:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} a_\lambda(t,x) = a_{\lambda_0}(t,x) \quad (\text{en } \tilde{G})$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} b_\lambda(t,x) = b_{\lambda_0}(t,x) \quad (\text{en } \tilde{H})$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} X^0_\lambda = X^0_{\lambda_0} \quad (\text{en } C(\tilde{G}))$$

Entonces la ecuación (E_λ) admite una solución unica, continua $X_\lambda(t)$, tal que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} X_\lambda(t) = X_{\lambda_0}(t)$$

Demostración

Definimos el operador T_λ en $C(\tilde{G})$ como sigue:

$$T_\lambda X = X^0_\lambda + \int_0^t a_\lambda(\tau,X(\tau))\, dv(\tau) +$$

$$+ \int_0^t b_\lambda(\tau,X(\tau))\, dW$$

Tendremos que ver que se puede aplicar el teorema de contracción de Hans, cuando los coeficientes dependen continuamente del parámetro λ; y que la aplicación

$$\Lambda \longrightarrow C(\tilde{G})$$

$$\lambda \longrightarrow T_\lambda X$$

es continua en λ_0

(a) Para probar la primera parte, habra que demostrar que:

1. T_λ aplica $C(\tilde{G})$ en si mismo

2. T_λ es continuo en $C(\tilde{G})$

3. T_λ^n es contractivo para algún n

Esto es inmediato, por el teorema de existencia y unicidad la demostración sería análoga a la de dicho teorema, valiendo las mismas mayoraciones, ya que por hipotesis a_λ y b_λ verifican la condición (α) con las constantes M y L independientes de λ.

(b) Demostraremos ahora, la continuidad $\lambda \longrightarrow T_\lambda X$ en λ_0

$$|||\, T_\lambda X(t) - T_{\lambda_0} X(t)\,|||^2 = \sup_t E\{ \| T_\lambda X(t) - T_{\lambda_0} X(t) \|^2 \} =$$

$$= \sup_t E \left\{ \| X_\lambda^0 - X_{\lambda_0}^0 + \int_0^t [a_\lambda(\tau,X(\tau)) - a_{\lambda_0}(\tau,X(\tau))]\, dv(\tau) \right.$$

$$\left. + \int_0^t [\, b_\lambda(\tau,X(\tau)) - b_{\lambda_0}(\tau,X(\tau))\,]\, dW \, \|^2 \right\}$$

$$\leq \sup E \{ 3 \, \| X_\lambda^0 - X_{\lambda_0}^0 \|^2 +$$

$$+ 3 \left\| \int_0^t [a_\lambda(\tau,X(\tau)) - a_{\lambda_0}(\tau,X(\tau))]\, dv(\tau) \right\|^2$$

$$+ 3 \left\| \int_0^t [b_\lambda(\tau,X(\tau)) - b_{\lambda_0}(\tau,X(\tau))]\, dW \right\|^2 \}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1 obtenemos:

$$\leq 3 \{ \sup_t E \| X_\lambda^0 - X_{\lambda_0}^0 \|^2 +$$

$$+ v(\Theta) . E \int_0^t \| a_\lambda (\tau, X(\tau)) - a_{\lambda_0}(\tau, X(\tau)) \|^2 dv(\tau) +$$

$$+ E \int_0^t \| b_\lambda(\tau, X(\tau)) - b_{\lambda_0}(\tau, X(\tau)) \|^2 dv(\tau) \}$$

El primer termino $\||| X_\lambda^0 - X_{\lambda_0}^0 \|||^2$ tiende a 0 por hipotesis, cuando $\lambda \to \lambda_0$.

En los otros dos terminos podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue :

$$\| a_\lambda(\tau, X(\tau)) \|^2 \leq M^2 (1 + \| X(\tau) \|^2) \quad \text{que es integrable}$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} a_\lambda(\tau, X(\tau)) = a_{\lambda_0} (\tau, X(\tau)) \quad \text{luego}$$

$$\int_0^t \| a_\lambda (\tau, X(\tau)) - a_{\lambda_0} (\tau, X(\tau)) \|^2 dv(\tau) \longrightarrow 0$$

$$\| b_\lambda(\tau, X(\tau)) \|^2 \leq M^2 (1 + \| X(\tau) \|^2) \quad \text{que es integrable}$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} b_\lambda(\tau, X(\tau)) = b_{\lambda_0} (\tau, X(\tau)) \quad \text{luego}$$

$$\int_0^t \| b_\lambda(\tau, X(\tau)) - b_{\lambda_0} (\tau, X(\tau)) \|^2 dv(\tau) \longrightarrow 0$$

con lo cual queda probada la continuidad de

$\lambda \longrightarrow T_\lambda X$ en λ_0

APLICACION

Se puede utilizar el teorema anterior, para aproximar la solución general de la ecuación (2), mediante las soluciones de las ecuaciones integrales estocasticas en dimensión finita.

TEOREMA 2.-

Consideremos la ecuación (2), con "a" y "b" verificando la condición (α). Sea (g_n) una base ortonormal de G y

$G_n = (g_1 \ldots g_n)$ el espacio engendrado por $g_1, g_2 \ldots g_n$, notaremos por P_n, a la proyección ortogonal asociada a la base

$$(P_n x = \sum_{i=0}^{n} g_i (x, g_i))$$

Analogamente definimos (h_n), H_n y Q_n.

Entonces la ecuación

$$X^n(t) = P_n X^0 + \int_0^t P_n \, a(\tau, X(\tau)) \, dv(\tau) +$$

$$+ \int_0^t Q_n \, b(\tau, X(\tau)) \, dW$$

admite una solución unica, que converge en $C(\tilde{G})$ a X(t), solución de la ecuación (2).

Demostración

Veamos que se verifican las hipotesis del teorema 1, con lo cual aplicando dicho teorema obtenemos el resultado deseado.

Tendremos que probar que

(a) $P_n\ a$ y $Q_n\ b$ verifican la condición (α)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n\ a(x) = a(x)$; $\lim\limits_{n\to\infty} P_n X^0 = X^0$

$\lim\limits_{n\to\infty} Q_n\ b(x) = b(x)$

El apartado (b) es inmediato, luego nos limitamos a demostrar (a)

$$\| P_n\ a(t,X) \|^2 < \| a(t,X) \|^2 \leq M^2 (1 + \|X\|^2)$$

$$\forall\ X \in \tilde{G}$$

$$\| Q_n\ b(t,X) \|^2 < \| b(t,X) \|^2 \leq M^2 (1 + \|X\|^2)$$

$$\| P_n\ a(t,X_1) - P_n a(t,X_2) \| < \| a(t,X_1) - a(t,X_2) \| \leq L \| X_1 - X_2 \|$$

$$\| Q_n\ b(t,X_1) - Q_n b(t,X_2) \| < \| b(t,X_1) - b(t,X_2) \| \leq L \| X_1 - X_2 \|$$

$$\forall\ X_1,\ X_2 \in \tilde{G}$$

c.q.d.

B.- VARIACION DE LA SOLUCION EN FUNCION DE LAS CONDICIONES INICIALES

Consideremos la ecuación integral estocastica (2), con- "a" y "b" verificando la condición (α).

Vamos a estudiar la aplicación $F : C(\tilde{G}) \longrightarrow C(\tilde{G})$

$$X^0 \longrightarrow X(t)$$

donde $X(t)$ es la solución de la ecuación (2).
Para simplificar los calculos y notaciones, nos limitaremos al caso en que $X^0(\omega) = x \in G$; es decir, estudiaremos

$$\psi : G \longrightarrow C(\tilde{G})$$

$$x \longrightarrow X^x(t)$$

De forma análoga a como en el apartado anterior utilizabamos el teorema de contracción de Hans, el estudio que ahora nos proponemos, parece ser posible, por medio de la aplicación del teorema de la función implicita. No obstante, en el caso particular que hemos expuesto antes, el lema siguiente (versión del lema de Gronwall) nos permite un estudio mas rapido.

LEMA

Sea $f: R_+ \longrightarrow R_+$ tal que $f(t) \leq a + b \int_0^t f(s)\, dv(s)$.

Sea v una medida finita, absolutamente continua con respecto a la medida Lebesgue. Entonces:

$$\forall t \, , \quad f(t) \leq a \, . \, e^{b \, . \, v(0,t)}$$

TEOREMA 3.-

Sea la ecuación

$$X^x(t) = x + \int_0^t a(\tau, X^x(\tau))\, dv(\tau) + \int_0^t b(\tau, X^x(\tau))\, dW$$

donde "a" y "b" verifican la condición (α).

Sea $x \in G$, $y \in G$. Entonces:

$\forall\ t > 0$, la solución $X^x(t)$ de la ecuación anterior, pertenece a $\tilde{C}(G)$, y además, existe una constante $g(T)$ tal que;

$$\forall\ t \leq T \qquad |||X^{x+y}(t) - X^x(t)|||^2 \leq g(T)\ \|y\|^2$$

Demostración

La primera parte, es consecuencia inmediata del teorema de existencia y unicidad (Cap. 1), en el caso particular que estamos estudiando de que $X^0(\omega) = x$

La segunda parte la deducimos del lema anterior, y de las acotaciones siguientes:

$$E\{\|X^{x+y}(t) - X^x(t)\|^2\} =$$

$$E\{\|y + \int_0^t [a(\tau, X^{x+y}(\tau)) - a(\tau, X^x(\tau))]\,dv(\tau)$$

$$+ \int_0^t [b(\tau, X^{x+y}(\tau)) - b(\tau, X^x(\tau))]\,dW\|^2\}$$

$$\leq 3E\ \{\|y\|^2 + \|\int_0^t [a(\tau, X^{x+y}(\tau)) - a(\tau, X^x(\tau))]\,dv(\tau)\|^2$$

$$+ \|\int_0^t [b(\tau, X^{x+y}(\tau)) - b(\tau, X^x(\tau))]\,dW\|^2\}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz,y que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1, tenemos:

$$\leq 3\{\|y\|^2 + v(0,t)\ E\int_0^t \|a(\tau, X^{x+y}(\tau)) -$$

$$a(\tau, X^x(\tau))\|^2\,dv(\tau) +$$

$$+ E\int_0^t \|b(\tau, X^{x+y}(\tau)) - b(\tau, X^x(\tau))\|^2\,dv(\tau)\}$$

Por la condición (α) :

$$\leq 3 \{ \| y \|^2 + v(0,t)\, L^2 \int_0^t E \| X^{x+y}(\tau) - X^x(\tau) \|^2 dv(\tau)$$

$$+ L^2 \int_0^t E \| X^{x+y}(\tau) - X^x(\tau) \|^2 dv(\tau) \}$$

$$\leq 3 \{ \| y \|^2 + L^2 (1 + v(0,T)) \int_0^t E \| X^{x+y}(\tau) -$$

$$- X^x(\tau) \|^2 dv(\tau) \}$$

Llamando $f(t) = E \{ \| X^{x+y}(t) - X^x(t) \|^2 \}$ y aplicando el Lema anterior, obtenemos

$$E \{ \| X^{x+y}(t) - X^x(t) \|^2 \} \leq 3 \| y \|^2 . e^{3L^2 (1+v(0,T)).v(o,t)}$$

Tomando el superior de las esperanzas quedará:

$$|||\, X^{x+y}(t) - X^x(t) \,|||^2 \leq 3 \| y \|^2 . e^{3L^2 (1+v(0,T)) v(0,T)}$$

Luego si hacemos $g(T) = 3 . e^{3L^2 (1+v(0,T)) v(0,T)}$ se obtiene el resultado deseado

$$|||\, X^{x+y}(t) - X^x(t) \,|||^2 \leq g(T) . \| y \|^2$$

c.q.d.

APLICACION

Vamos a estudiar (utilizando los mismos metodos) la derivabilidad de :

$$\psi : G \longrightarrow C(\tilde{G})$$

$$x \longrightarrow X^x(t) = X_t^x$$

Utilizando la siguiente notación:

$$a(\tau, X^x(\tau)) = a(X_\tau^x)$$

$$b(\tau, X^x(\tau)) = b(X_\tau^x)$$

TEOREMA 4.-

Supongamos que "a" y "b" son dos veces derivables y con derivadas acotadas, y que verifican la condición (α).

Entonces ψ es continuamente derivable y la derivada

$\psi'(x) \in L\ (G,\ C(\tilde{G}))$, está dada por la solución de:

$$(E_k') : \xi_t = k + \int_0^t [a'(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ dv(\tau) + $$

$$+ \int_0^t [b'(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ dW$$

es decir, $\psi'(x)\ k = \xi_t$

Demostración

(a) Veamos que la ecuación (E_k') es del mismo tipo que la ecuación (2) y que se verifican las hipotesis del teorema de existencia y unicidad (condición (α)) con lo cual dicha ecuación tendrá una solución unica en $C(\tilde{G})$.

Hacemos

$$a_1 \ (y, s, \omega) = a' \ (X_s^x(\omega)) \ y$$

$$b_1 \ (y, s, \omega) = b' \ (X_s^x(\omega)) \ y$$

a_1, b_1 dependen de y, s, ω. Podemos generalizar facilmente el teorma de existencia y unicidad para este caso.

Por otra parte, a_1, b_1 verifican trivialmente la condición (α) ya que las aplicaciones

$$\left.\begin{array}{l} y \longrightarrow a_1(y) \\ y \longrightarrow b_1(y) \end{array}\right. \quad \text{soñ lineales}$$

y a', b' están acotadas por hipotesis.

Por tanto, $\forall$ $k \in G$, la ecuación (E_k') admite una unica solución ξ_t, dicha solución que pertenece a $C(\tilde{G})$ depende linealmente de k. Se notará

$$\xi_t = \xi_t^k$$

(b) Veamos, en segundo lugar, que la derivada $\psi'(x)$ está dada por la solución de la ecuación (E_k'); es decir que

$$\psi'(x) \ k = \xi_t^k$$

Habrá que demostrar que :

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \xi_t^h + \varepsilon(h) \ . \ \| h \| \quad \text{con } \varepsilon(h) \longrightarrow 0$$

para $\| h \| \longrightarrow 0$

En efecto se tiene:

$$\rho_t(h) = [\psi(x+h) - \psi(x) - \xi_t^h]_2^2 =$$

$$= E \{ \| X_t^{x+h} - X_t^x - \xi_t^h \|^2 \} =$$

$$=E\{ \| x+h + \int_0^t a(X_\tau^{x+h})\, dv(\tau) + \int_0^t b(X_\tau^{x+h})\, dW -$$

$$- x - \int_0^t a(X_\tau^x)\, dv(\tau) - \int_0^t b(X_\tau^x)\, dW -$$

$$- h - \int_0^t a'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h\, dv(\tau) - \int_0^t b'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h\, dW \|^2\}$$

$$\leq 2E \{ \| \int_0^t [a(X_\tau^{x+h}) - a(X_\tau^x) - a'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h]\, dv(\tau) \|^2$$

$$+ \| \int_0^t [b(X_\tau^{x+h}) - b(X_\tau^x) - b'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h]\, dW \|^2\}$$

$$\leq 2\, v(\Theta)\, E \int_0^t \| a(X_\tau^{x+h}) - a(X_\tau^x) - a'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h \|^2\, dv(\tau) +$$

$$+ 2\, E \int_0^t \| b(X_\tau^{x+h}) - b(X_\tau^x) - b'(X_\tau^x)\xi_\tau^h \|^2\, dv(\tau)$$

Las dos integrales asi obtenidas, presentan las mismas dificultades y las acotaciones que se obtengan para una de ellas serán iguales para la otra ; por tanto nos limitaremos al estudio (por ejemplo) de la segunda.

Aplicamos a "b" la formula de Taylor, hasta el orden 2 con

$$B'' = \sup_{x \in G} \| b''(x) \| ; \qquad B' = \sup_{x \in G} \| b'(x) \|$$

$$\Big(b(X_\tau^{x+h}) - b(X_\tau^x) = b'(X_\tau^x) \, (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x) +$$

$$+ \frac{1}{2} b''(X_\tau^x) \, (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \, , \, X_\tau^{x+h} - X_\tau^x) + \varepsilon(\;\;) \Big)$$

Luego:

$$2E \int_0^t \| b(X_\tau^{x+h}) - b(X_\tau^x) - b'(X_\tau^x) \, \xi_\tau^h \|^2 \, dv(\tau) \leq$$

$$\leq \quad 4 \, E \int_0^t \| b'(X_\tau^x) \, (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h) \|^2 \, dv(\tau) +$$

$$+ 4 \, E \int_0^t B''^2 \, \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \, dv(\tau)$$

$$\leq \quad 4 \, B''^2 \, E \int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \, dv(\tau) +$$

$$+ 4 \, B'^2 \int_0^t \rho_\tau(h) \, dv(\tau)$$

Realizando iguales acotaciones para la primera integral, obtenemos;

$$\rho_t(h) \leq K_1 \, (A''^2 + B''^2) \int_0^t E \, \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \, dv(\tau) +$$

$$+ K_2 \, (A'^2 + B'^2) \int_0^t \rho_\tau(h) \, dv(\tau)$$

Por una demostración análoga a la del teorema 3.- obtenemos

$$E \; \{ \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \} \leq \text{cte} \; \|h\|^4$$

Luego: $$\rho_t(h) \leq C_1 \; \|h\|^4 + C_2 \int_0^t \rho_\tau(h) \, dv(\tau)$$

Segun el Lema anteriormente enunciado

$$\rho_t(h) \leq C_1 \; \|h\|^4 \, . \, e^{C_2 \, v(0,t)}$$

es decir

$$\rho_t(h) \leq \Gamma(T) \; \|h\|^4 \qquad (t \leq T)$$

Luego $\rho_t(h) \longrightarrow 0$ cuando $\|h\| \longrightarrow 0$ como que-riamos probar.

(c) Veamos por ultimo, la continuidad de

$$\psi' : G \longrightarrow \mathcal{L}(G, C(\tilde{G}))$$

Notaremos

$$\psi' \, (x + h) k = \xi_{x+h,t}^k$$

$$\psi' \, (x) \, k = \xi_{x,t}^k$$

$\forall \; t \leq T, \quad k \in G$

$$E \, \| \xi_{x+h,t}^k - \xi_{x,t}^k \|^2 \leq \|h\|^2 \; \|k\|^2 \; \Gamma_1 \; (T)$$

Mayoración que se obtiene al aplicar la formula de Taylor a a' y b', hasta el orden 1 y como consecuencia de los teoremas anteriores.

TEOREMA 5.-

Supongamos que "a" y "b" satisfacen la condición (α) y que son tres veces derivables, con derivadas acotadas.

Entonces, ψ es de clase C^2 y la derivada

$$\psi''(x) \in \mathcal{L}\,(G, \mathcal{L}\,(G, C(\tilde{G})))$$

está dada por la solución de

$$(E_k'') : \eta_t = \int_0^t [a''(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ \xi_\tau\ dv(\tau) +$$

$$+ \int_0^t [b''(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ \xi_\tau\ dW +$$

$$+ \int_0^t a'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ dv(\tau) + \int_0^t b'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ dW$$

es decir

$$\eta_t = (\psi''(x)\ .\ k)\ k \qquad \text{con} \quad \xi_t = \psi'(x)\ k$$

Demostración

(a) Veamos en primer lugar, que la ecuación (E_k'') es del tipo de las ya estudiadas, con lo cual aplicando el teorema de existencia y unicidad, podremos concluir que tiene una unica solución.

Hacemos

$$X^0 = \phi(t) = \int_0^t [a''(X_\tau^x)\xi_\tau]\ \xi_\tau\ \ dv(\tau) + \int_0^t [b''(X_\tau^x)\xi_\tau]\ \xi_\tau dW$$

$$a_1\ (y,s,\omega) = a'\ (X_s^x(\omega))y\ ;\quad b_1\ (y,\ s,\ \omega) = b'(X_s^x\ (\omega))\ y$$

a_1, b_1 verifican la condición (α) por las mismas razones que en el teorema anterior.

Por tanto para $\phi(t) \in C(\tilde{G})$, la ecuación (E''_k) admite una unica solución η_t en $C(\tilde{G})$.

Consideremos la ecuación $(E''_{h,k})$

$$\eta_t = \int_0^t [a''(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h]\ \xi_\tau^k\ dv(\tau) + \int_0^t [b''(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h]\ \xi_\tau^k\ dW$$

$$+ \int_0^t a'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ dv(\tau) + \int_0^t b'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ dW$$

Por la unicidad de la solución en $C(\tilde{G})$, (η_t) dependerá bilinealmente de h y k; notaremos por $\eta_t^{h,h}$, a la solución de (E''_h).

(b) Veamos en segundo lugar, que la derivada $\psi''(x)$ está dada por la solución de la ecuación (E''_k) ; es decir, que

$$(\psi''(x)\ k)\ k = \eta_t^{k,k}$$

Habrá que probar que:

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \xi_t^h + \frac{1}{2}\ \eta_t^{h,h} + \varepsilon(h)\ \|h\|^2; \quad \text{con } \varepsilon(h) \longrightarrow 0$$

$$(\|h\| \longrightarrow 0)$$

$$\theta_t(h) = [\ \psi(x+h) - \psi(x) - \xi_t^h - \frac{1}{2}\ \eta_t^{h,h}]_2^2 =$$

$$= E\ \{ \|\ X_t^{x+h} - X_t^x - \xi_t^h - \frac{1}{2}\ \eta_t^{h,h}\ \|^2\ \}$$

Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que a≡0, pues los calculos son identicos en "a" y "b".
Después de esta consideración

$$\theta_t(h) = E \{ \| x+h + \int_0^t b(X_\tau^{x+h})\, dW - x - \int_0^t b(X_\tau^x)\, dW$$

$$- h - \int_0^h b'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h\, dW - \frac{1}{2}\int_0^t [b''(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h]\, \xi_\tau^h\, dW$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t b'(X_\tau^x)\, \eta_\tau^{h,h}\, dW \|^2 \}$$

Teniendo en cuenta que la norma de la integral de Cabaña es ≤ 1, se tiene:

$$\leq E \{ \int_0^t \| b(X_\tau^{x+h}) - b(X_\tau^x) - b'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h - \frac{1}{2} b'(X_\tau^x)\, \eta^{h,h}$$

$$-\frac{1}{2} \quad [b''(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h]\, \xi_\tau^h \|^2 \,.\, dv(\tau) \}$$

Utilizaremos la formula de Taylor aplicada a "b", hasta el orden 3:

$$\Big(b(X_\tau^{x+h}) = b(X_\tau^x) + b'(X_\tau^x)\, (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x) + \frac{1}{2} b''(X_\tau^x)(X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{6} b'''(X_\tau^x)\, (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(3)} + \varepsilon(\ )\Big)$$

Notaremos

$$B^{(i)} = \sup_{x \in G} \| b^{(i)}(x) \| \qquad 1 \leq i \leq 3$$

$$\theta_t(h) \leq 3\,E\int_0^t \| b'(X_\tau^x)\ \ [X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h - \frac{1}{2}\,\eta_\tau^{h,h}] \|^2\, dv(\tau)$$

$$+ \frac{3}{4}\,E\int_0^t \| b''(X_\tau^x)\ \ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(2)} - b''(X_\tau^x)\ \ (\xi_\tau^h)^{(2)} \|^2\, dv(\tau)$$

$$+ \frac{3}{36}E\int_0^t \| b'''(X_\tau^x)\ \ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(3)} \|^2\, dv(\tau)$$

Desarrollando lo que aparece dentro de la norma, en la integral del segundo termino

$$b''(X_\tau^x)\ \ (X_\tau^{x+h} - X^x)^{(2)} - b''(X_\tau^x)\ \ (\xi_\tau^h)^{(2)} =$$

$$= b''(X_\tau^x)(X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h)(X_\tau^{x+h} - X_\tau^x) + b''(X_\tau^x)\,\xi_\tau^h\ \ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h)$$

Sustituyendo y mayorando, obtenemos

$$\theta_t(h) \leq 3B'^2\int_0^t \theta_\tau(h)\, dv(\tau)\ +$$

$$+ C_1\ E\int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2\ \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^2\, dv(\tau)$$

$$+ C_2\ E\int_0^t \| \xi_\tau^h \|^2\ \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2\, dv(\tau)$$

$$+ C_3\ E\int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^6\, dv(\tau)$$

Aplicamos al desigualdad de Hölder (p=q=2) a las integrales del segundo y tercer termino, obtenemos las siguientes mayoraciones.

$$E\int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2\ \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^2\, dv(\tau) \leq$$

$$\leq \{ E \int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^4 dv(\tau) \}^{\frac{1}{2}} \{E \int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 dv(\tau)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$E \int_0^t \| \xi_\tau^h \|^2 \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2 dv(\tau) \leq$$

$$\leq \{E \int_0^t \| \xi_\tau^h \|^4 dv(\tau) \}^{\frac{1}{2}} \{E \int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^4 dv(\tau) \}^{\frac{1}{2}}$$

Por una demostración análoga a la realizada en el teorema 4 podemos mayorar

$$E \int_0^t \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^4 dv(\tau)$$

utilizando para ello que $E \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \leq \text{cte} \| h \|^4$

resultado que obteniamos del teorema 3 (como haciamos notar, anteriormente).

La acotación que se consigue es: $\text{Kte} \| h \|^8$

Por otra parte, si aplicamos el resultado deducido del teorema 3 a

$$E \| \xi_\tau^h \|^4$$

y a

$$E \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^6$$

obtendremos lo siguiente:

$$\theta_t(h) \leq 3B'^2 \int_0^t \theta_\tau(h) dv(\tau) + C(T) \| h \|^6$$

De donde, utilizando el lema que antes enunciamos

$$\theta_t(h) \leq C(T) \| h \|^6 e^{3B'^2} v(0,t)$$

$$\leq C(T) \| h \|^6 e^{3B'^2} v(0,T)$$

$$= C_0(T) \| h \|^6$$

Luego $\theta_t(h) \longrightarrow 0$ si $\| h \| \longrightarrow 0$

c.q.d.

(c) Veamos por ultimo, la continuidad de

$$\psi'' : G \longrightarrow L\ (G,\ L(G,C(\tilde{G})))$$

Se deduce de forma inmediata, al aplicar la formula de Taylor a b", hasta el orden 1, y como consecuencia de los teoremas anteriores.

3.2 REGULARIDADES DE LA SOLUCION DE LA E.I.E. ITO GENERALIZADA

Sean H y G dos espacios de Hilbert, y sean T y L operadores auto - adjuntos definidos en H y G respectivamente, por H_α y G_α representamos los dominios de T^α y L^α $(\alpha>0)$

Sean $\{ H_\alpha ; \alpha\in(-\infty,\infty) \}$ $\{ G_\alpha ; \alpha\in(-\infty,\infty) \}$ dos escalas de espacios de Hilbert.

Estudiada la integral estocastica generalizada:

$$\int_\Theta B(t,\omega)\, dW(t,\omega)$$

donde $B(t,\omega)$ es un proceso operador - valuado en una escala de espacios de Hilbert , y $W(t,\omega)$ es un operador de Wiener valuado en escalas de Hilbert. El paso siguiente fué estudiar el problema de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación integral estocastica de Ito generalizada:

$$(4)\quad X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau \; + \\ + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

donde:

$$X(t,\omega) : \Theta \times \Omega \longrightarrow H_\alpha$$

$$a(t,X) : \Theta \times H_\alpha \longrightarrow H_\alpha$$

$$B(t,X) : \Theta \times H_\alpha \longrightarrow \mathcal{L}(H_{-1},G_\alpha)$$

$$W(t,\omega) : \Theta \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{L}(G_\alpha,H_\alpha)) \quad \text{Operador Wiener}$$

Obteniendo que bajo ciertas hipotesis, dadas en el teorema de existencia y unicidad, la ecuación integral estocastica Ito generalizada, admite un unico proceso solución $X(t,\omega)$ continuo y medible, en X_{α}^{2}, $\forall t\in[t_0,t_1]$ donde $[t_0,t_1]\subset\Theta$

X_{α}^{2} es el espacio de los procesos de segundo orden, valuados en H_{α} ; es un espacio de Banach separable con la norma:

$$|||X(t,\omega)|||^2 = \sup_{t\in[t_0,t_1]} E\{\|X(t,\omega)\|^2\}$$

A continuación, vamos a estudiar las regularidades de dicho proceso solución.

En primer lugar, veremos la variación de la solución en función de los coeficientes de la ecuación, y como aplicación de este apartado, demostraremos que se puede aproximar la solución general de la ecuación (4) mediante las soluciones de las ecuaciones integrales en dimensión finita.

En segundo lugar, veremos dicha variación en función de las condiciones iniciales, aplicando este resultado al estudio de la derivabilidad de la aplicación:

$$\psi : x \longrightarrow X^{x}(t,\omega)$$

A.- VARIACION DE LA SOLUCION EN FUNCION DE LOS COEFICIENTES DE LA ECUACION

Consideremos las ecuaciones

$$(E_\lambda) \ : \quad X(t) = X_\lambda^0 + \int_{t_0}^{t} a_\lambda(\tau, X(\tau))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B_\lambda(\tau, X(\tau))\, dW(\tau,\omega)$$

$$\lambda \in \Lambda \qquad \text{espacio topológico}$$

Supondremos que a_λ y B_λ verifican las condiciones a.- b.- y c.- del teorema de existencia y unicidad (Capitulo 1) con las constantes L y M independientes de λ.

TEOREMA 1.-

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$, si se verifican las condiciones anteriores y además:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} a_\lambda(\tau, X) = a_{\lambda_0}(\tau, X) \qquad (\text{en } H_\alpha)$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} B_\lambda(\tau, X) = B_{\lambda_0}(\tau, X) \qquad (\text{en } \mathcal{L}(H_{-1}, G_\alpha))$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} X_\lambda^0 = X_{\lambda_0}^0 \qquad (\text{en } X_\alpha^2)$$

Entonces la ecuación (E_λ) admite un unica solución continua $X_\lambda(t,\omega)$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} X_\lambda(t,\omega) = X_{\lambda_0}(t,\omega)$$

Demostración

Definimos el operador T_λ en X^2_α como sigue:

$$T_\lambda X = X^0_\lambda + \int_{t_0}^{t} a_\lambda(\tau, X(\tau))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B_\lambda(\tau, X(\tau))\, dW(\tau,\omega)$$

Tendremos que ver que se puede aplicar el teorema de contracción de Hans, cuando los coeficientes dependen continuamente del parámetro λ; y que la aplicación

$$\Lambda \longrightarrow X^2_\alpha$$

$$\lambda \longrightarrow T_\lambda X$$

es continua en λ_0.

(a) La primera parte es inmediata por el teorema de existencia y unicidad, ya que por hipotesis se verifican las mismas condiciones, la demostración sería análoga a la realizada en dicho teorema, valiendo las mayoraciones allí obtenidas, ya que hemos supuesto que M y L son independientes de λ.

(b) Demostremos, en segundo lugar, la continuidad $\lambda \longrightarrow T_\lambda X$ en λ_0

$$|||T_\lambda X(t,\omega) - T_{\lambda_0} X(t,\omega)|||^2 = \sup_{t\in[t_0,t_1]} E\{\|T_\lambda X(t,\omega) - T_{\lambda_0} X(t,\omega)\|^2\} =$$

$$= \sup_t E\{\|X^0_\lambda - X^0_{\lambda_0} + \int_{t_0}^{t} [a_\lambda(\tau,X(\tau)) - a_{\lambda_0}(\tau,X(\tau))]\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [B_\lambda(\tau,X(\tau)) - B_{\lambda_0}(\tau, X(\tau))]\, dW(\tau,\omega)\|^2\}$$

$$\leq \operatorname{Sup}_t E \{3 \| X_\lambda^0 - X_{\lambda_0}^0 \|^2 + 3 \| \int_{t_0}^{t} [a_\lambda(\tau,X(\tau)) - a_{\lambda_0}(\tau,X(\tau))] \, d\tau \|^2$$

$$+ 3 \| \int_{t_0}^{t} [B_\lambda(\tau,X(\tau)) - B_{\lambda_0}(\tau,X(\tau))] \, dW \|^2 \}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz y que la norma de la integral generalizada es ≤ 1, obtenemos:

$$\leq 3 \{\operatorname{Sup}_t \; E \| X_\lambda^0 - X_{\lambda_0}^0 \|^2 + (t_1 - t_0) \int_{t_0}^{t_1} \| a_\lambda(\tau,X(\tau)) - a_{\lambda_0}(\tau,X(\tau)) \|^2 d$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \| B_\lambda(\tau,X(\tau)) - B_{\lambda_0}(\tau,X(\tau)) \|^2 \, d\tau \}$$

El primer termino $\||X_\lambda^0 - X_{\lambda_0}^0\||^2$ tiende a 0 por hipotesis, cuando $\lambda \longrightarrow \lambda_0$.

En los otros dos terminos, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

$$\| a_\lambda(\tau,X(\tau)) \|^2 \leq M^2 \; (1 + \| X(\tau) \|^2) \quad \text{que es integrable}$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} a_\lambda(\tau,X(\tau)) = a_{\lambda_0}(\tau,X(\tau)) \qquad \text{luego}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \| a_\lambda(\tau,X(\tau)) - a_{\lambda_0}(\tau,X(\tau)) \|^2 \, d\tau \longrightarrow 0$$

$$\| B_\lambda(\tau,X(\tau)) \|^2 \leq M^2 \; (1 + \| X(\tau) \|^2) \quad \text{que es integrable}$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} B_\lambda(\tau,X(\tau)) = B_{\lambda_0}(\tau,X(\tau)) \qquad \text{luego}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \| B_\lambda(\tau,X(\tau)) - B_{\lambda_0}(\tau,X(\tau)) \|^2 \, d\tau \longrightarrow 0$$

Con lo cual queda probada la continuidad de

$$\lambda \longrightarrow T_\lambda X \quad \text{en } \lambda_0$$

c.q.d.

APLICACION

Se puede utilizar el teorema anterior, para aproximar la solución general de la ecuación (4) mediante las soluciones de las ecuaciones integrales estocasticas en dimensión finita.

Sea (h_n^α) una base ortonormal en H_α y $H_{n,\alpha} = (h_1^\alpha \ldots h_n^\alpha)$ el espacio engendrado por $h_1^\alpha \ldots h_n^\alpha$, notaremos por $P_{n,\alpha}$, a la proyección ortogonal asociada a la base

$$(P_{n,\alpha} X = \sum_{i=1}^{n} h_i^\alpha \, (X, h_i^\alpha))$$

Analogamente definimos (g_n^α) , $G_{n,\alpha}$ y $Q_{n,\alpha}$

TEOREMA 2.-

Consideremos la ecuación (4) con "a" y "B" verificando las hipotesis del teorema de existencia y unicidad.
Entonces la ecuación:

$$X^n(t,\omega) = P_{n,\alpha} X^0 + \int_{t_0}^{t} P_{n,\alpha} a(\tau, X(\tau)) \, d\tau + \int_{t_0}^{t} P_{n,-1} \, B(\tau, X(\tau)) \, Q_{n,\alpha} \, dW$$

admite una solución unica continua que converge en X_α^2 a $X(t,\omega)$ solución de la ecuación (4).

Demostración

Veamos que se verifican las hipotesis del teorema 1, con lo cual aplicando dicho teorema, obtenemos el resultado deseado.

Tendremos que probar que:

(a) $P_{n,\alpha}\, a$ y $P_{n,-1}\, B\, Q_{n,\alpha}$ verifican las condiciones a.- b.- y c.- del Teorema de existencia y unicidad.

(b) $\lim_{n\to\infty} P_{n,\alpha} a(\tau,x) = a(\tau,x)$

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,-1}\, B(\tau,x)\, Q_{n,\alpha} = B(\tau,x)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,\alpha}\, X^0 = X^0$$

El apartado (b) es inmediato, nos limitamos por tanto a demostrar (a).

$$\| P_{n,\alpha}\, a(t,x) \|^2 < \| a(t,x) \|^2 \leq M^2 (1+\| x \|^2)$$

$$\| P_{n,-1}\, B(t,x)\, Q_{n,\alpha} \|^2 < \|B(t,x)\|^2 \leq M^2 (1+\| x \|^2)$$

$$\| P_{n,\alpha} a(t,x_1) - P_{n,\alpha} a(t,x_2) \| < \| a(t,x_1)-a(t,x_2)\| \leq L\|x_1-x_2\|$$

$$\| P_{n,-1} B(t,x_1)\, Q_{n,\alpha} - P_{n,-1}\, B(t,x_2) Q_{n,\alpha}\| < \|B(t,x_1)-B(t,x_2)\| \leq L\|x_1-x_2\|$$

c.q.d.

B.- VARIACION DE LA SOLUCION EN FUNCION DE LAS CONDICIONES INICIALES

Consideremos la ecuación integral estocastica (4), con- "a" y "B" verificando las hipotesis del teorema de existencia y unicidad.

Vamos a estudiar la aplicación $F : X_\alpha^2 \longrightarrow X_\alpha^2$

$$X(0,\omega) \longrightarrow X(t,\omega)$$

donde $X(t,\omega)$ es la solución de la ecuación (4)

Para simplificar los calculos y notaciones nos limitaremos al caso en que $X(0,\omega) = x \in H_\alpha$; es decir, estudiaremos

$$\psi : H_\alpha \longrightarrow X_\alpha^2$$

$$x \longrightarrow X^x(t,\omega)$$

El problema que hemos planteado, parece ser posible, por medio de la aplicación del teorema de la función implicita (de forma análoga a como en el apartado anterior utilizamos el teorema de contracción de Hans). No obstante, en el caso particular expuesto anteriormente, el lema siguiente, nos permite un estudio mas rapido.

LEMA.-

Sea $f : R_+ \longrightarrow R_+$ tal que $f(t) \leq a + b \int_0^t f(s)\, ds$

Entonces: $\forall\, t$, $f(t) \leq a \,.\, e^{b\,.\,t}$

Demostración

J. Nevev : "Notes sur I'intégrale stochastique"
Cours de 3éme cycle (2éme semestre 1972)

Es un caso particular del lema de Gronwall .

TEOREMA 3.-

Consideremos la ecuación

$$X^x(t,\omega) = x + \int_{t_0}^{t} a(\tau,X^x(\tau))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(\tau,X^x(\tau))\, dW(\tau,\omega)$$

donde "a" y "B" verifican las hipotesis del teorema de existencia y unicidad.
Sean $x \in H_\alpha$, $y \in H_\alpha$. Entonces:
$\forall\ t > t_0$ la solución $X^x(t,\omega)$ de la ecuación anterior pertenece a X_α^2 , y además, existe una constante K, tal que:

$$\forall\ t \leq t_1 \qquad |||\, X^{x+y}(t,\omega) - X^x(t,\omega)\, |||^2 \leq K\ \| y \|^2$$

Demostración

La primera parte, es consecuencia inmediata del teorema de existencia y unicidad en el caso particular que estamos estudiando, de que $X(0,\omega) = x$

La segunda parte, la deducimos del teorema anterior, y de las acotaciones siguientes:

$$E\,\{\, \| X^{x+y}(t,\omega) - X^x(t,\omega) \|^2 \,\} = E\{\| y + \int_{t_0}^{t} [a(\tau,X^{x+y}(\tau)) - a(\tau,X^x(\tau))]\, d\tau$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [B(\tau,X^{x+y}(\tau)) - B(\tau,X^x(\tau))]\ dW \,\|^2 \,\}$$

$$\leq 3E\,\{\| y \|^2 + \| \int_{t_0}^{t} [a(\tau,X^{x+y}(\tau)) - a(\tau,X^x(\tau))]\ d\tau \,\|^2 +$$

$$+ \| \int_{t_0}^{t} [B(\tau,X^{x+y}(\tau)) - B(\tau,X^x(\tau))]\ dW \,\|^2 \,\}$$

$$\leq 3 \; \{ \|y\|^2 + (t-t_0) \; E \int_{t_0}^{t} \| a(\tau, X^{x+y}(\tau)) - a(\tau, X^{x}(\tau)) \|^2 \, d\tau$$

$$+ E \int_{t_0}^{t} \| B(\tau, X^{x+y}(\tau)) - B(\tau, X^{x}(\tau)) \|^2 \, d\tau \; \}$$

$$\leq 3 \; \{ \|y\|^2 + (t-t_0) \; L^2 \int_{t_0}^{t} E \; \| X^{x+y}(\tau) - X^{x}(\tau) \|^2 \, d\tau \; +$$

$$+ L^2 \int_{t_0}^{t} E \; \| X^{x+y}(\tau) - X^{x}(\tau) \|^2 \, d\tau \; \}$$

$$\leq 3 \; \{ \|y\|^2 + L^2 \; [(t_1-t_0) + 1] \int_{t_0}^{t} E \; \| X^{x+y}(\tau) - X^{x}(\tau) \|^2 \, d\tau \; \}$$

Llamando $\quad f(t) = E \{ \| X^{x+y}(t) - X^{x}(t) \|^2 \}$

$$a = 3 \; \|y\|^2$$

$$b = 3 \, L^2 \; [(t_1-t_0) + 1]$$

y aplicando el lema anterior, obtenemos

$$E \{ \| X^{x+y}(t) - X^{x}(t) \|^2 \} \leq 3 \; \|y\|^2 \; e^{3L^2 [(t_1-t_0)+1] \; (t-t_0)}$$

Tomando superiores:

$$\| X^{x+y}(t,\omega) - X^{x}(t,\omega) \|^2 \leq 3 \, \|y\|^2 \; e^{3L^2 [(t_1-t_0)+1] \; (t_1-t_0)}$$

Luego si hacemos $\quad K = 3e^{3L^2 [(t_1-t_0)+1] \; (t_1-t_0)}$

se obtiene el resultado deseado:

$$\| X^{x+y}(t,\omega) - X^{x}(t,\omega) \|^2 \leq K \; \|y\|^2$$

c.q.d.

NOTA : Bajo las mismas condiciones, una demostración análoga nos conduce al siguiente resultado:

$$|||\, X^{x+y}(t,\omega) - X^{x}(t,\omega)\, |||^{2m} \leq Km \;\| y \|^{2m}$$

APLICACION

Vamos a estudiar, (utilizando los mismos metodos) la derivabilidad de:

$$\psi : H_\alpha \longrightarrow X_\alpha^2$$

$$x \longrightarrow X^x(t,\omega) = X_t^x$$

Notación abreviada:

$$a(\tau,\, X^x(\tau)) = a(X_\tau^x)$$

$$B(\tau,\, X^x(\tau)) = B(X_\tau^x)$$

TEOREMA 4.-

Supongamos que "a" y "B" verifican las hipotesis del teorema de existencia y unicidad, y que son dos veces derivables, con derivadas acotadas.

Entonces ψ es continuamente derivable, y la derivada

$$\psi'(x) \in \mathcal{L}\,(H_\alpha,\, X_\alpha^2)$$

está dada por la solución de:

$$(E_k') \;:\; \xi_t = k + \int_{t_0}^{t} [a'(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ d\tau + \int_{t_0}^{t} [B'(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ dW$$

es decir: $\psi'(x)\,k = \xi_t$

Demostración

(a) Veamos, en primer lugar, que la ecuación (E'_k) es del mismo tipo que la ecuación (4), y que se verifican las hipotesis del teorema de existencia y unicidad, con lo cual dicha ecuación tendrá una unica solución continua en X^2_α.

Hacemos

$$a_1(y,s,\omega) = a'(X^x_s(\omega))\ y$$

$$B_1(y,s,\omega) = B'(X^x_s(\omega))\ y$$

a_1 y B_1 dependen de y, s, ω; podemos generalizar facilmente el teorema de existencia y unicidad para este caso.

Por otra parte, a_1 y B_1 verifican las condiciones a.- b.- y c.- del teorema , trivialmente, ya que las aplicaciones

$$\left.\begin{array}{l} y \longrightarrow a_1(y) \\ y \longrightarrow B_1(y) \end{array}\right. \quad \text{son lineales}$$

y a' B' están acotadas por hipotesis.
Por tanto, $\forall\ k \in H_\alpha$, la ecuación (E'_k) admite una unica solución ξ_t, dicha solución que pertenece a X^2_α depende linealmente de k.
Se notará $\xi_t = \xi^k_t$

(b) Veamos, en segundo lugar, que la derivada $\psi'(x)$ está dada por la solución de la ecuación (E'_k); es décir, que;

$$\psi'(x)\ k = \xi^k_t$$

Habra que demostrar que:

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \xi^k_t + \varepsilon(h)\ .\ \|h\|$$

$$\text{con } \varepsilon(h) \longrightarrow 0 \quad (\|h\| \longrightarrow 0)$$

$$\theta_t(h) = E \| \psi(x+h) - \psi(x) - \xi_t^h \|^2 =$$

$$= E \{ \| X_t^{x+h} - X_t^x - \xi_t^h \|^2 \} =$$

$$= E \{ \| x+h + \int_{t_0}^{t} a(X_\tau^{x+h}) \, d\tau + \int_{t_0}^{t} B(X_\tau^{x+h}) \, dW -$$

$$- x - \int_{t_0}^{t} a(X_\tau^x) \, d\tau - \int_{t_0}^{t} B(X_\tau^x) \, dW -$$

$$- h - \int_{t_0}^{t} a'(X_\tau^x) \, \xi_\tau^h \, d\tau - \int_{t_0}^{t} B'(X_\tau^x) \, \xi_\tau^h \, dW \|^2 \}$$

$$\leq 2E \{ \| \int_{t_0}^{t} [a(X_\tau^{x+h}) - a(X_\tau^x) - a'(X_\tau^x) \, \xi_\tau^h] d\tau \|^2$$

$$+ \| \int_{t_0}^{t} [B(X_\tau^{x+h}) - B(X_\tau^x) - B'(X_\tau^x) \, \xi_\tau^h] dW \|^2 \}$$

$$\leq 2(t-t_0) \, E \int_{t_0}^{t} \| a(X_\tau^{x+h}) - a(X_\tau^x) - a'(X_\tau^x) \, \xi_\tau^h \|^2 \, d\tau$$

$$+ 2E \int_{t_0}^{t} \| B(X_\tau^{x+h}) - B(X_\tau^x) - B'(X_\tau^x) \, \xi_\tau^h \|^2 \, d\tau$$

Las dos integrales así obtenidas, presentan las mismas dificultades; las acotaciones que se obtengan para una de ellas, serán iguales para la otra, por tanto nos limitaremos al estudio (por ejemplo) de la segunda.

(*) Aplicamos a B la formula de Taylor para aplicaciones, hasta el segundo orden

$$B(X_\tau^{x+h}) - B(X_\tau^x) = B'(X_\tau^x)(X_\tau^{x+h} - X_\tau^x) + \frac{1}{2} B''(X_\tau^x)(X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(2)} + \varepsilon(h)$$

Hacemos

$$\beta' = \operatorname*{Sup}_{x \in H_\alpha} \| B'(x) \| \quad ; \quad \beta'' = \operatorname*{Sup}_{x \in H_\alpha} \| B''(x) \|$$

$$2E \int_{t_0}^{t} \| B(X_\tau^{x+h}) - B(X_\tau^x) - B'(X_\tau^x)\, \xi_\tau^h \|^2 \, d\tau \leq$$

$$\leq 4E \int_{t_0}^{t} \| B'(X_\tau^x) \, (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h) \|^2 \, d\tau$$

$$+ 2E \int_{t_0}^{t} \beta''^2 \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \, d\tau$$

$$\leq 4\beta'^2 \int_{t_0}^{t} \theta(h) \, d\tau + 4\beta''^2 \int_{t_0}^{t} E\| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \, d\tau \quad (*)$$

Realizando acotaciones análogas para la primera integral obtenemos:

$$\theta_t(h) \leq K_1(\alpha''^2+\beta''^2) \int_{t_0}^{t} E \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \, d\tau + K_2(\alpha'^2+\beta'^2) \int_{t_0}^{t} \theta_\tau(h) d\tau$$

Aplicando la nota del teorema 3.- a

$$E \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4$$

obtenemos

$$\theta_t(h) \leq C_1 \| h \|^4 + C_2 \int_{t_0}^{t} \theta_\tau(h) \, d\tau$$

y segun el lema anteriormente enunciado

$$\theta_t(h) \leq C_1 \| h \|^4 \cdot e^{C_2(t-t_0)} \leq C_1 \cdot e^{C_2(t_1-t_0)} \cdot \| h \|^4$$

luego $\quad \theta_t(h) \longrightarrow 0 \quad$ cuando $\| h \| \longrightarrow 0$

c.q.d.

(c) Veamos, por ultimo, la continuidad de

$$\psi' : H_\alpha \longrightarrow \mathcal{L}(H_\alpha, X_\alpha^2)$$

Notaremos $\psi'(x+h)\, k = \xi^k_{x+h,t}$

$$\psi'(x)\, k = \xi^k_{x,t}$$

Aplicando la formula de Taylor a a' y B' hasta el primer orden, y como consecuencia de los teoremas anteriores, obtenemos la siguiente acotación

$$E\{\| \xi^k_{x+h,t} - \xi^k_{x,t} \|^2\} \leq \|h\|^2 \ \|k\|^2 \ \Gamma_1$$

de donde se deduce la continuidad.

c.q.d.

TEOREMA 5.-

Supongamos que "a" y "B" satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, y que son tres veces derivables con derivadas acotadas.

Entonces, ψ es de clase C^2 y la derivada

$$\psi''(x) \in \mathcal{L}(H_\alpha, \mathcal{L}(H_\alpha, X_\alpha^2))$$

está dada por la solución de:

$$(E_K'') \quad \eta_t = \int_{t_0}^{t} [a''(X_\tau^x)\xi_\tau]\ \xi_\tau d\tau + \int_{t_0}^{t} [B''(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ \xi_\tau\ dW$$

$$+ \int_{t_0}^{t} a'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ d\tau + \int_{t_0}^{t} B'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ dW$$

es decir $\eta_t = (\psi''(x)\ .\ k)\ k$ con $\xi_t = \psi'(x)\, k$

Demostración

(a) Veamos, en primer lugar, que la ecuación (E''_k) es del tipo de las ya estudiadas, con lo cual, aplicando el teorema de existencia y unicidad, podemos concluir que tiene una única solución.

Hacemos

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} [a''(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\, \xi_\tau\ d\tau + \int_{t_0}^{t} [B''(X_\tau^x)\ \xi_\tau]\ \xi_\tau\ dW$$

$$\left.\begin{aligned} a_1(y,s,\omega) &= a'(X_s^x(\omega))y \\ B_1(y,s,\omega) &= B'(X_s^x(\omega))y \end{aligned}\right|$$

Verifican las condiciones a.- b.- c.- por las mismas razones del teorema anterior.

Por tanto para $\phi(t) \in X_\alpha^2$, la ecuación

$$\eta_t = \phi(t) + \int_{t_0}^{t} a_1(y,\tau,\omega)\ d\tau + \int_{t_0}^{t} B_1(y,\tau,\omega)\ dW(\tau,\omega)$$

admite una unica solución η_t en X_α^2

Consideremos la ecuación $(E''_{h,k})$

$$\eta_t = \int_{t_0}^{t} [a''(X_\tau^x)\ \ \xi_\tau^h\ ]\ \xi_\tau^k\ d\tau + \int_{t_0}^{t} [B''(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h\ ]\ \xi_\tau^k\ \ dW$$

$$+ \int_{t_0}^{t} a'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ d\tau + \int_{t_0}^{t} B'(X_\tau^x)\ \eta_\tau\ dW$$

Por la unicidad de la solución en X_α^2, (η_t) dependerá bilinealmente de h y k; notaremos por $\eta_t^{h,h}$, a la solución de (E''_h)

(b) Veamos en segundo lugar, que la derivada $\psi''(x)$ está dada por la solución de la ecuación (E_h''), es decir

$$(\psi''(x)h)\ h = \eta_t^{h,h}$$

Habra que probar que

$$\psi(x+h) = \psi(x) + \xi_t^h + \frac{1}{2}\,\eta_t^{h,h} + \varepsilon(h)\ \|h\|^2$$

con $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$

$(\|h\| \longrightarrow 0)$

$$\gamma_t(h) = E\,\|\,\psi(x+h) - \psi(x) - \xi_t^h - \frac{1}{2}\,\eta_t^{h,h}\,\|^2 =$$

$$= E\,\{\ \|X_t^{x+h} - X_t^x - \xi_t^h - \frac{1}{2}\,\eta_t^{h,h}\,\|^2\ \}$$

Podemos suponer sin perdida de generalidad, que $a \equiv 0$, pues los calculos son identicos en "a" y "B".
Despues de esta consideración

$$\gamma_t(h) = E\,\{\ \|x+h + \int_{t_0}^{t} B(X_\tau^{x+h})\,dW - x - \int_{t_0}^{t} B(X_\tau^x)\,dW$$

$$- h - \int_{t_0}^{t} B'(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h\,dW - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} [B''(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h\,]\,\xi_\tau^h\ dW$$

$$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} B'(X_\tau^x)\ \eta_\tau^{h,h}\ dW\ \|^2\ \}$$

$$\leq E\,\{\int_{t_0}^{t} \|\,B(X_\tau^{x+h}) - B(X_\tau^x) - B'(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h - \frac{1}{2}\,B'(X_\tau^x)\ \eta_\tau^{h,h}$$

$$- \frac{1}{2}\,[\,B''(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h\,]\quad \xi_\tau^h\,\|^2$$

Utilizando la formula de Taylor, aplicada a B, hasta el orden 3

$$B(X_\tau^{x+h}) = B(X_\tau^x) + b'(X_\tau^x)\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x) + \frac{1}{2} B''(X_\tau^x)(X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{6}\ B'''(X_\tau^x)\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(3)} + \varepsilon(\quad)$$

Y notando $\quad \beta^{(i)} = \sup_{x \in H_\alpha} \| B^{(i)}(x) \| \qquad 1 \leq i \leq 3$

$$\gamma_t(h) \leq 3E \int_{t_0}^{t} \| B'(X_\tau^x)\ [X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h - \frac{1}{2}\ \eta_\tau^{h,h}] \|^{2}\ d\tau$$

$$+ \frac{3}{4}E \int_{t_0}^{t} \| B''(X_\tau^x)\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(2)} - B''(X_\tau^x)\ (\xi_\tau^h)^{(2)} \|^2\ d\tau$$

$$+ \frac{3}{36}E \int_{t_0}^{t} \| B'''(X_\tau^x)\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(3)} \|^2\ d\tau$$

Lo que aparece dentro de la norma en la integral del segundo termino, lo desarrollamos de la forma:

$$B''(X_\tau^x)\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x)^{(2)} - B''(X_\tau^x)\ (\xi_\tau^h)^{(2)} =$$

$$= B''(X_\tau^x)\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h)\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x) + B''(X_\tau^x)\ \xi_\tau^h\ (X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h)$$

Por tanto:

$$\gamma_t(h) \leq 3\,\beta'^2 \int_{t_0}^{t} \gamma_\tau(h)\ d\tau +$$

$$+ C_1\ E \int_{t_0}^{t} \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2 \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^2\ d\tau +$$

$$+ C_2 \; E \int_{t_0}^{t} \| \xi_\tau^h \|^2 \; \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2 \, d\tau +$$

$$+ C_3 \; E \int_{t_0}^{t} \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^6 \, d\tau$$

Aplicando la desigualdad de Holder (p=q=2) a las integrales del segundo y tercer termino, obtenemos las siguientes mayoraciones:

$$E \int_{t_0}^{t} \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2 \; . \; \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^2 \, d\tau \leq$$

$$\{ E \int_{t_0}^{t} \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^4 \, d\tau \}^{1/2} \; .$$

$$\cdot \; \{ E \int_{t_0}^{t} \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x \|^4 \, d\tau \}^{1/2}$$

$$E \int_{t_0}^{t} \| \xi_\tau^h \|^2 \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^2 \, d\tau \leq$$

$$\{ E \int_{t_0}^{t} \| \xi_\tau^h \|^4 \, d\tau \}^{1/2} \; .$$

$$\cdot \; \{ E \int_{t_0}^{t} \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^4 \, d\tau \}^{1/2}$$

Repitiendo los calculos del teorema 4, podemos mayorar

$E \int_{t_0}^{t} \| X_\tau^{x+h} - X_\tau^x - \xi_\tau^h \|^4 \, d\tau$, haciendo uso tambien de la nota

del teorema 3, la mayoración que se obtiene es cte $\| h \|^8$

Por ultimo si aplicamos reiteradamente dicha nota a X_t^x y una vez a ξ_τ^h, obtenemos:

$$\gamma_t(h) \leq H \|h\|^6 + 3\beta'^2 \int_{t_0}^{t} \gamma_\tau(h)\, d\tau$$

de donde utilizando el lema

$$\gamma_t(h) \leq H \|h\|^6 \; e^{3\beta'^2(t-t_0)} \leq H\, e^{3\beta'^2(t_1-t_0)} \; \|h\|^6$$

$$\gamma_t(h) \leq H_0 \|h\|^6$$

Por tanto $\gamma_t(h) \longrightarrow 0$ cuando $\|h\| \longrightarrow 0$

c.q.d.

(c) Veamos, por ultimo, la continuidad de

$$\psi'' : H_\alpha \longrightarrow L(H_\alpha, L(H_\alpha, X_\alpha^2))$$

Como en el teorema anterior, se obtiene aplicando la formula de Taylor hasta el primer orden, a B".

CAPITULO 4: PROCESO DE DIFUSION, SOLUCION DE LA E.I.E. ITO EN ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES.

4.1: Introducción.

4.2: Acotación para el proceso $X_{t_0}^{x}(t)$.

4.3: Proceso de difusión, solución de la E.I.E. Ito en espacios de Hilbert separables.

4.4: Ecuaciones de difusión.

A) Ecuación atrasada.

B) Ecuación adelantada.

CAPITULO 4

PROCESO DE DIFUSION, SOLUCION DE LA E.I.E. ITO EN ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES.

4.1 INTRODUCCION.

La integral estocastica de un proceso Hilbert - valuado con respecto a operadores Brownianos (integral estocastica de Cabaña)

$$\int_{\Theta} b(t,\omega)\ dW(t,\omega)$$

fue definida en el capitulo 1, y se demostro que bajo las hipotesis convenientes, la correspondiente E.I.E. Ito

$$(1)\quad X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(\tau,X(\tau,\omega))\ d\tau + \int_0^t b(\tau,X(\tau,\omega))\ dW(\tau,\omega)$$

tiene una unica solución continua.

En {5} se da una nueva definición de operador Browniano; la integral estocastica respecto de él, se define en el mismo sentido y la ecuación integral estocastica Ito correspondiente, puede considerarse como anteriormente.

Posteriormente, en el capitulo 2, hemos demostrado que la solución de la ecuación (1) es un proceso Feller y por tanto markoviano, mas aun, estudiamos el caracter fuertemente markoviano del proceso $X(t,\omega)$, cuyas probabilidades de transición estaban definidas por:

$$P(t_0,x,t,A) = P\{X(t)\in A \ / \ X(t_0) = x\} = P\{X_{t_0}^x(t)\in A\}$$

donde $X_{t_0}^x(t)$ es la solución de la ecuación:

$$(2) \quad X_{t_0}^x(t) = x + \int_{t_0}^{t} a(\tau, X_{t_0}^x(\tau))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau, X_{t_0}^x(\tau))\, dW(\tau)$$

Es conocido, que el proceso solución de la ecuación de Ito clásica es una difusión, intuitivamente es esperable que la solución de las extensiones de la E.I.E. Ito, que han sido estudiadas en el primer capitulo, tambien sean un proceso de difusión, generalizado en algun sentido; abordaremos esta cuestión para la ecuación integral estocastica Ito en espacios de Hilbert separables.

En el apartado 4.2 , demostraremos una acotación para el proceso $X_{t_0}^x(t)$ que constituira el punto de partida para el desarrollo posterior, nos basaremos para ello en algunas propiedades de la integral de Cabaña, que previamente habremos expuesto.

En 4.3, usando una construcción similar al modelo clásico, llegaremos al concepto de C-difusión. La generalización de la definición de proceso de difusión, habra de hacerse en las condiciones donde intervengan directamente los elementos Hilbertianos, asi como el operador de Wiener (respecto del cual esta definida la integral de Cabaña), para que se tenga una total analogia con la teoria clásica de difusiones.
Dada esta definición, demostraremos que el proceso solución de la E.I.E. Ito en espacios de Hilbert separables es una C-difusión.

Por ultimo, en el apartado 4.4 , estudiaremos las ecuaciones atrasadas y adelantadas de Kolmogorov (ecuaciones de Fokker-Planck) que verifica el proceso de difusión. Con lo cual tendremos probado que el proceso solución de la ecuación (1) es aquel que tiene por transición, la unica solución de dichas ecuaciones.

(Sin perdida de generalidad, ver {5} , a lo largo de este capitulo supondremos que la medida v respecto de la cual se define el operador de Wiener, y por tanto la integral de Cabaña, es la medida de Lebesgue.)

4.2 ACOTACION PARA EL PROCESO $X_{t_0}^{x}(t)$.

4.2.1.- La definición y propiedades de la integral estocastica de Cabaña, pueden verse con detalle en {4} ó {5} ; aqui nos limitaremos a recordar las que seran utilizadas en desarrollos posteriores

PROPOSICION 1.-

$$E \int_{\Theta} b(t,\omega)\, dW(t,\omega) = 0$$

Demostración.
Hacemos referencia a {4}, Teorema 5.1 (iii) .

Como consecuencia de la nueva definición de operador Browniano, en {5} pagina 261, se obtuvo:

$$E\left\| \int_{\Delta} b\, dW \right\|^4 \leq q\, E\|b\|^4\, \mu^2(\Delta)$$

A continuación (sin basarnos en dicha definición) vamos a demostrar una propiedad equivalente, en los terminos que sera utilizada mas adelante.

PROPOSICION 2.-

Sea $b(t,\omega)$ un proceso Hilbert-valuado, y $W(t,\omega)$ un operador de Wiener, supongamos que

$$\int_{\Theta} \|b(\tau,\omega)\|^4\, d\tau < \infty$$

Entonces $\forall\ [a,b] \subset \Theta$, se verifica que:

$$E\left\| \int_a^b b(\tau,\omega)\ dW(\tau,\omega) \right\|^4 \leq 36(b-a) \int_a^b E\| b(\tau,\omega) \|^4\ d\tau$$

<u>Demostración</u>.

Aplicamos la formula de Ito generalizada ({5}, pagina 262) a las siguientes funciones:

$$\sigma(t) = \int_a^b b(\tau)\ dW(\tau)$$

$$\Phi(x) = \|x\|^4 = (x,x)^2$$

La expresión que adopta dicha formula de Ito en este caso es:

$$\Phi(\sigma(t)) = \int_a^b (\ D\Phi(\sigma(\tau))\ ,\ b(\tau)\ dW(\tau)\ ) \ +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_a^b (\ D^2\Phi(\sigma(\tau))b(\tau)\ dW(\tau)\ ,\ b(\tau)\ dW(\tau)\ )$$

Teniendo en cuenta los siguientes calculos:

$$D\Phi(x) = 4(x,x)x.$$

$$D^2\Phi(x)h = 4.2(x,x)^0 x(x,h) + 4(x,x)h.$$

$$(\ D^2\Phi(x)h\ ,\ h\ ) = 8(x,h)^2 + 4\|x\|^2\|h\|^2 \leq$$

$$\leq 8\|x\|^2\|h\|^2 + 4\|x\|^2\|h\|^2 = 12\|x\|^2\|h\|^2$$

Tomando esperanzas y aplicando la proposición 1, tendremos:

$$E\left\| \int_a^b b\ dW \right\|^4 = \frac{1}{2} E\int_a^b (\ D^2\Phi(\sigma(\tau))\ b(\tau)\ dW(\tau)\ ,\ b(\tau)\ dW(\tau)\ )$$

$$\leq \frac{12}{2} E\int_a^b \|\sigma(\tau)\|^2\ \|b(\tau)\ dW(\tau)\|^2$$

$$= 6\int_a^b E\left\| \int_a^\tau b(s)\; dW(s) \right\|^2 \|b(\tau)\|^2 \, d\tau$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, con $p = q = 2$

$$\leq 6\left\{\int_a^b E\left\| \int_a^\tau b(s)\; dW(s) \right\|^4 d\tau\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b E\|b(\tau)\|^4 \, d\tau\right\}^{1/2}$$

Por la desigualdad de Schwarz y teniendo en cuenta que

$$E\left\| \int_a^\tau b(s)\; dW(s) \right\|^4$$

es una función creciente en τ, se desprende que:

$$E\left\| \int_a^b b(\tau)\; dW(\tau) \right\|^4 \leq 6\left\{(b-a)E\left\| \int_a^b b(\tau)\; dW(\tau) \right\|^4\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_a^b E\|b(\tau)\|^4 \, d\tau\right\}^{1/2}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(E\left\| \int_a^b b(\tau)\; dW(\tau) \right\|^4\right)^2 \leq 36(b-a)\int_a^b E\|b(\tau)\|^4 \, d\tau \left(E\left\| \int_a^b b(\tau)\; dW(\tau) \right\|^4\right)$$

de donde obtenemos el resultado deseado:

$$E\left\| \int_a^b b(\tau,\omega)\; dW(\tau,\omega) \right\|^4 \leq 36(b-a) \int_a^b E\|b(\tau,\omega)\|^4 \, d\tau$$

c.q.d.

4.2.2.- En este apartado demostraremos una importante acotación para el proceso $X_{t_0}^{x}(t)$ que constituira el punto de arranque para el desarrollo que haremos a continuación.

En la demostración, utilizaremos la proposición 2 y la siguiente versión del Lema de Gronwall (que ya ha sido aplicada en capitulos anteriores).

LEMA

Sea $f: R_+ \longrightarrow R_+$ tal que $f(t) \leq a + b\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$

Entonces $\forall t$, $f(t) \leq a\, e^{b(t-t_0)}$

TEOREMA

Sea $X_{t_0}^{x}(t)$ el proceso solución de la ecuación (2) , donde las funciones a(t,X) y b(t,X) verifican las hipotesis del teorema de existencia y unicidad.

Entonces, existe una constante K, tal que:

$$E\|X_{t_0}^{x}(t) - x\|^4 \leq K\,(t-t_0)^2\,(1 + \|x\|^4)$$

Demostración.

Partiendo de la ecuación (2) y sumando y restando los terminos apropiados, tenemos:

$$E\|X_{t_0}^{x}(t)-x\|^4 = E\left\|\int_{t_0}^{t} a(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))\, d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))\, dW(\tau)\right\|^4$$

$$= E\left\|\int_{t_0}^{t}[a(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-a(\tau,x)]\, d\tau + \int_{t_0}^{t} a(\tau,x)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t}[b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-b(\tau,x)]\, dW(\tau) + \int_{t_0}^{t} b(\tau,x)\, dW(\tau)\right\|^4$$

Utilizando que $(x+y+z+k)^n \leq 4^{n-1}(x^n+y^n+z^n+k^n)$ obtenemos:

$$\leq 4^3\left\{E\left\|\int_{t_0}^{t}[a(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-a(\tau,x)]\, d\tau\right\|^4 + \right.$$

$$+ E\left\|\int_{t_0}^{t} [b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-b(\tau,x)]\,dW(\tau)\right\|^4 +$$

$$+ E\left\|\int_{t_0}^{t} a(\tau,x)\,d\tau\right\|^4 + E\left\|\int_{t_0}^{t} b(\tau,x)\,dW(\tau)\right\|^4 \Big\}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz, asi como la obtenida en la proposición 2.- , se tiene que:

$$\leq 4^3 \Big\{ (t-t_0)^3\, E\int_{t_0}^{t} \|a(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-a(\tau,x)\|^4\,d\tau +$$

$$+ 36(t-t_0)\, E\int_{t_0}^{t} \|b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-b(\tau,x)\|^4\,d\tau +$$

$$+ (t-t_0)^3\, E\int_{t_0}^{t} \|a(\tau,x)\|^4\,d\tau + 36(t-t_0)E\int_{t_0}^{t} \|b(\tau,x)\|^4\,d\tau \Big\}$$

Aplicando las hipotesis del teorema de existencia y unicidad

$$\leq 4^3 \Big\{ (t-t_0)^3\, E\int_{t_0}^{t} L^4\|X_{t_0}^{x}(\tau)-x\|^4\,d\tau +$$

$$+ 36\,(t-t_0)\, E\int_{t_0}^{t} L^4\|X_{t_0}^{x}(\tau)-x\|^4\,d\tau +$$

$$+ (t-t_0)^3\, E\int_{t_0}^{t} [M^2(1+\|x\|^2)]^2\,d\tau +$$

$$+ 36(t-t_0)\, E\int_{t_0}^{t} [M^2(1+\|x\|^2)]^2\,d\tau \Big\}$$

$$\leq 4^3[(T-t_0)^2 + 36]\, L^4(t-t_0) \int_{t_0}^{t} E\|X_{t_0}^{x}(\tau)-x\|^4\,d\tau +$$

$$+ 4^3[(T-t_0)^2 + 36]\, 2M^4(t-t_0)^2\,(1 + \|x\|^4)$$

$$= C_1(t-t_0) \int_{t_0}^{t} E\|X_{t_0}^{x}(\tau)-x\|^4\,d\tau + C_2(t-t_0)^2\,(1+\|x\|^4)$$

Llamando $g(t) = E\|X_{t_0}^x(t)-x\|^4$ y dividiendo por $(t-t_0)^2$ queda:

$$\frac{g(t)}{(t-t_0)^2} \leq C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{g(\tau)}{(\tau-t_0)^2}\, d\tau + C_2(1 + \|x\|^4)$$

Aplicando el lema anteriormente enunciado, para

$$f(t) = \frac{g(t)}{(t-t_0)^2}$$

$$a = C_2(1 + \|x\|^4)$$

$$b = C_1$$

se obtiene que:

$$f(t) \leq C_2(1 + \|x\|^4)\, e^{C_1(t-t_0)} \leq C_2(1 + \|x\|^4)\, e^{C_1(T-t_0)}$$

Por tanto,

$$E\|X_{t_0}^x(t)-x\|^4 \leq (t-t_0)^2\, C_2(1 + \|x\|^4)\, e^{C_1(T-t_0)}$$

Llamando $K = C_2\, e^{C_1(T-t_0)}$, obtenemos la acotación deseada:

$$E\|X_{t_0}^x(t) - x\|^4 \leq K\, (t-t_0)^2\, (1 + \|x\|^4)$$

c.q.d.

4.3 PROCESO DE DIFUSION, SOLUCION DE LA E.I.E. ITO EN ESPACIOS DE HILBERT SEPARABLES.

Definición 4.3.1

Un proceso de Markov G-valuado (G espacio de Hilbert separable), se denomina C-difusión, si su función de transición $P(t_0,x,t,A)$ verifica las siguientes propiedades:

1) Para todo $\varepsilon > 0$, $t\in[0,T)$ y $x\in G$

$$\int_{\|y-x\|>\varepsilon} P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0)$$

2) Existe una función G-valuada $a(t,x)$, tal que $\forall\varepsilon>0$, $t\in[0,T)$ y $x\in G$

$$\int_{\|y-x\|\leq\varepsilon} (y-x)\; P(t_0,x,t,dy) = a(t,x)(t-t_0) + O(t-t_0)$$

3) Existe una función H-valuada $b(t,x)$, tal que $\forall\varepsilon>0$, $t\in[0,T)$ y $x\in G$

$$\int_{\|y-x\|\leq\varepsilon} (y-x)^{(2)}\, P(t_0,x,t,dy) = E(\; W(\Delta)b(t,x)\;)^{(2)} + O(t-t_0)$$

donde $W: \Theta \longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{L}(H,G))$ es un operador de Wiener y $W(\Delta) = W(t,\omega) - W(t_0,\omega)$

4) Los momentos, analogos a los anteriores, de orden tres ó mayor de tres son $O(t-t_0)$.

(En el capitulo 3, cuando utilizamos la formula de Taylor para aplicaciones, ya empleamos la notación anterior $(g)^{(i)}$, recordemos que para $g \in G$, dicha expresión representa un elemento de $G \times G \times \overset{(i)}{\cdots} \times G$)

Nota 4.3.2

Para que $X(t,\omega)$ sea una C-difusión, en virtud de la siguiente desigualdad ({1} , pagina 40)

$$(*) \quad \int_{\|y-x\|>\varepsilon} \|y-x\|^k \, P(t_0,x,t,dy) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta-k}} \int \|y-x\|^{2+\delta} \, P(t_0,x,t,dy)$$

$k = 0,\ 1,\ 2 \quad ; \quad \delta > 0$

es suficiente con que demostremos, que la función de transición verifica:

1*) Para algun $\delta > 0$

$$\int \|y-x\|^{2+\delta} \, P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0)$$

2*) Existe $a(t,x)$ tal que $\forall\ t,\ x$

$$\int (y-x) \, P(t_0,x,t,dy) = a(t,x)(t-t_0) + O(t-t_0)$$

3*) Existe $b(t,x)$ tal que $\forall\ t,\ x$

$$\int (y-x)^{(2)} \, P(t_0,x,t,dy) = E(\ W(\Delta)b(t,x)\ )^{(2)} + O(t-t_0)$$

En efecto, en este caso

$$\int_{\|y-x\|>\varepsilon} P(t_0,x,t,dy) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta}} \int \|y-x\|^{2+\delta} \, P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0)$$

$$\Big\|\int_{\|y-x\|>\varepsilon} (y-x) \, P(t_0,x,t,dy)\Big\| \leq \frac{1}{\varepsilon^{1+\delta}} \int \|y-x\|^{2+\delta} P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0)$$

$$\Big\|\int_{\|y-x\|>\varepsilon} (y-x)^{(2)} P(t_0,x,t,dy)\Big\| \leq \frac{1}{\varepsilon^{\delta}} \int \|y-x\|^{2+\delta} \, P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0)$$

Pasamos a continuación, a demostrar que el proceso solución de la ecuación integral estocastica Ito en espacios de Hilbert separables es una C-difusión.

TEOREMA 4.3.3

Sean las funciones a(t,x) y b(t,x) continuas respecto a t, y verificando las hipotesis del teorema de existencia y unicidad. (capitulo 1, apartado 1.3, B))

Entonces el proceso de Markov $X(t,\omega)$, unica solución de la E.I.E. Ito en espacios de Hilbert separables:

$$(1) \quad X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(\tau,X(\tau,\omega))\, d\tau + \int_0^t b(\tau,X(\tau,\omega))\, dW(\tau,\omega)$$

es una C-difusión.

Demostración.

En virtud de la definición 4.3.1 y de la nota 4.3.2 dividimos la demostración en los siguientes apartados:

$$(i) \quad \int_{\|y-x\|>\varepsilon} P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0)$$

La probabilidad de transición del proceso X(t) esta definida por

$$P(t_0,x,t,A) = P\{\ X(t)\ A\ /\ X(t_0) = x\ \} = P\{\ X^x_{t_0}(t)\ A\ \}$$

coincide pues con la distribución de $X^x_{t_0}(t)$, tendremos por tanto que

$$\int \|y-x\|^4\ P(t_0,x,t,dy) = E\|X^x_{t_0}(t)-x\|^4$$

De la acotación obtenida para el proceso $X^x_{t_0}(t)$

$$E\|X_{t_0}^x(t)-x\|^4 \leq K\ (t-t_0)^2\ (\ 1+\|x\|^4\ ) = O(t-t_0)$$

utilizando la desigualdad (*) para $k = 0$ y $\delta = 2$, deducimos el resultado deseado:

$$\int_{\|y-x\|>\varepsilon} P(t_0,x,t,dy) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2+2}} \int \|y-x\|^4\ P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0)$$

(ii) $$\int_{\|y-x\|\leq\varepsilon} (y-x)\ P(t_0,x,t,dy) = a(t,x)(t-t_0) + O(t-t_0)$$

Partiendo de la ecuación (2), y usando la proposición 1, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int(y-x)\ P(t_0,x,t,dy) &= E[X_{t_0}^x(t)-x] = \\ &= E\{\int_{t_0}^t a(\tau,X_{t_0}^x(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau,X_{t_0}^x(\tau))dW(\tau)\ \} \\ &= E\{\int_{t_0}^t a(\tau,X_{t_0}^x(\tau))\ d\tau\ \} = \\ &= E\int_{t_0}^t [a(\tau,X_{t_0}^x(\tau))-a(\tau,x)]d\tau + a(t,x)(t-t_0) + \\ &\quad + \int_{t_0}^t [a(\tau,x)-a(t,x)]\ d\tau\end{aligned}$$

La continuidad de $a(t,x)$ implica que la segunda integral que aparece en el ultimo miembro anterior, es $O(t-t_0)$; tendremos que ver que tambien la primera integral es $O(t-t_0)$.

En efecto,

$$\|\int_{t_0}^t E[a(\tau,X_{t_0}^x(\tau))-a(\tau,x)]d\tau\| \leq \int_{t_0}^t E\|a(\tau,X_{t_0}^x(\tau))-a(\tau,x)\|\ d\tau \leq$$

Aplicando las hipotesis del teorema de existencia y unicidad

$$\leq L \int_{t_0}^{t} E\| X_{t_0}^{x}(\tau)-x\| \, d\tau \leq$$

$$\leq L(t-t_0)^{3/4} \left\{ \int_{t_0}^{t} E\| X_{t_0}^{x}(\tau)-x\|^4 \, d\tau \right\}^{1/4}$$

$$\leq L(t-t_0)^{3/4} \left\{ \int_{t_0}^{t} K(\tau-t_0)^2 \, (1 + \|x\|^4) \, d\tau \right\}^{1/4}$$

$$\leq L(t-t_0)^{3/4} \{ K_0(t-t_0)^3 \, (1 + \|x\|^4) \}^{1/4} = O(t-t_0)$$

La ultima parte se ha obtenido, aplicando la desigualdad de Höl-der y la acotación del proceso $X_{t_0}^{x}(t)$.

(iii) $$\int_{\|y-x\|\leq\varepsilon} (y-x)^{(2)} P(t_0,x,t,dy) = E(W(\Delta)b(t,x))^{(2)} + O(t-t_0)$$

Teniendo en cuenta el apartado anterior, y la definición de la ecuación (2), se obtiene:

$$\int (y-x)^{(2)} P(t_0,x,t,dy) = E(X_{t_0}^{x}(t)-x)^{(2)} =$$

$$= E\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau,X_{t_0}^{x}) \, d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau,X_{t_0}^{x}) \, dW(\tau) \right)^{(2)} =$$

$$= E\left(\int_{t_0}^{t} b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau)) \, dW(\tau) \right)^{(2)} + O(t-t_0)$$

De forma analoga al desarrollo de la demostración del punto (ii), sumando y restando los terminos apropiados

$$= E\left(\int_{t_0}^{t} [b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-b(\tau,x)] \, dW(\tau) \right)^{(2)} +$$

$$+ E\left(\int_{t_0}^{t} [b(\tau,x)-b(t,x)]dW(\tau) \right)^{(2)} + E\left(\int_{t_0}^{t} b(t,x)\ dW(\tau) \right)^{(2)}$$

La segunda integral es $O(t-t_0)$, por la continuidad de $b(t,x)$; para la primera integral, utilizando las propiedades de la integral estocastica de Cabaña, obtenemos:

$$\left\| E\left(\int_{t_0}^{t} [b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-b(\tau,x)]dW(\tau) \right)^{(2)}\right\| \leq E\int_{t_0}^{t} \|b(\tau,X_{t_0}^{x}(\tau))-b(\tau,x)\|^2 d\tau$$

Aplicando las hipotesis del teorema de existencia y unicidad, y la desigualdad de Hölder

$$\leq L^2 \int_{t_0}^{t} E\|X_{t_0}^{x}(\tau)-x\|^2\ d\tau \leq$$

$$\leq L^2(t-t_0)^{1/2} \left\{ \int_{t_0}^{t} E\|X_{t_0}^{x}(\tau)-x\|^4\ d\tau \right\}^{1/2}$$

$$\leq L^2(t-t_0)^{1/2} \left\{ \int_{t_0}^{t} K(\tau-t_0)^2\ (\ 1 + \|x\|^4\ )\ d\tau \right\}^{1/2}$$

$$\leq L^2(t-t_0)^{1/2}\ \{\ K_0(t-t_0)^3\ (\ 1 + \|x\|^4\ )\ \}^{1/2} = O(t-t_0)$$

La ultima parte resulta, aplicando la acotación obtenida para el proceso $X_{t_0}^{x}(t)$.

Por tanto, sustituyendo nos queda:

$$\int (y-x)^{(2)}\ P(t_0,x,t,dy) = E\left(\int_{t_0}^{t} b(t,x)\ dW(\tau,\omega) \right)^{(2)} + O(t-t_0)$$

$$= E\left(\ b(t,x) \int_{t_0}^{t} dW(\tau,\omega) \right)^{(2)} + O(t-t_0)$$

$$= E\left(\ b(t,x)\left[W(t,\omega)-W(t_0,\omega)\right] \right)^{(2)} + O(t-t_0)$$

$$= E\left(\ W(\Delta)b(t,x) \right)^{(2)} + O(t-t_0)$$

(iv) $$\int_{\|y-x\|\leq\varepsilon} (y-x)^{(j)}\, P(t_0,x,t,dy) = O(t-t_0) \qquad j = 3,4,\ldots$$

Es inmediato, por la demostración de los apartados anteriores. En efecto, para j = 3

$$\int (y-x)^{(3)}\, P(t_0,x,t,dy) = E(\, X^x_{t_0}(t)-x\,)^{(3)}$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz

$$E\|X^x_{t_0}(t)-x\|^3 \leq \{E\|X^x_{t_0}(t)-x\|^4\}^{1/2}\ \{E\|X^x_{t_0}(t)-x\|^2\}^{1/2}$$

Utilizando en el primer factor la acotación de $X^x_{t_0}(t)$, y en el segundo el resultado obtenido en el punto (iii)

$$\leq \{\ K(t-t_0)^2\ (\ 1 + \|x\|^4\ )\ \}^{1/2}\ .$$

$$.\left\{\ E\left\|\ \int_{t_0}^{t} b(t,x)\ dW(\tau)\ \right\|^2 + O(t-t_0)\ \right\}^{1/2}$$

Por las propiedades de la integral estocastica de Cabaña

$$\leq \{\ K(t-t_0)^2\ (\ 1 + \|x\|^4\ )\ \}^{1/2}.$$

$$.\{\ \|b(t,x)\|^2\ (t-t_0) + O(t-t_0)\ \}^{1/2} = O(t-t_0)$$

Analogamente, se obtiene el mismo resultado para $j > 3$.

c.q.d.

Nota 4.3.4

Yor en {37}, estudia la siguiente ecuación integral estocastica:

$$X_t = \phi(t) + \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s + \int_0^t b(s,X_s)\, ds = E(\phi,\sigma,b)$$

donde:

H es un espacio de Hilbert real, separable.

$\phi(t)$ es un proceso adaptado, con valores en H.

σ es un proceso estocastico $\sigma_2(H)$-valuado ($\sigma_2(H)$ espacio de operadores Hilbert-Schmidt de H en H).

B_s es un movimiento Browniano (N) definido sobre H, con valores en el espacio de Banach V.

b es un proceso estocastico Hilbert valuado.

Podemos definir de forma analoga el concepto de Y-difusión, teniendo en cuenta que la condición 3) en este caso seria la siguiente:

3') Existe un proceso $\sigma_2(H)$-valuado $\sigma(t,x)$, tal que:

$$\int_{\|y-x\|\leq\varepsilon} (y-x)^{(2)}\, P(t_0,x,t,dy) = E(\ \sigma(t,x)W(\Delta)\ )^{(2)}$$

y se demuestra, de igual manera que en el teorema 4.3.3 , que el proceso solución de la ecuación $E(\phi,\sigma,b)$ es una Y-difusión.

Las mismas consideraciones podemos hacer para la ecuación integral estocastica estudiada por Curtain (ver {7}). En dicha ecuación σ es un proceso $\mathcal{L}(K,H)$-valuado y W es un operador Wiener definido sobre H. ({7} , definición 2.1).

4.4 ECUACIONES DE DIFUSION.

En el apartado anterior, hemos demostrado que la solución de la ecuación integral estocastica Ito en espacios de Hilbert separables, es un proceso de difusión; la densidad de transición de dicho proceso puede obtenerse, resolviendo una cualquiera de las dos ecuaciones diferenciales parciales que vamos a estudiar a continuación. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones atrasada y adelantada de Kolmogorov ó alternativamente, ecuaciones de difusión. La ecuación adelantada tambien suele llamarse, ecuación de Fokker-Planck.

Antes de comenzar el estudio de las ecuaciones de difusión, vamos a ver una serie de propiedades, fundamentales para el desarrollo posterior.

PROPOSICION 4.4.1

Sea $(H,\langle,\rangle)$ un espacio de Hilbert real ó complejo con una base ortonormal $(e_i)_{i=1}^{\infty}$.

Sea $x \in H$, y consideremos $x_i = \langle x, e_i \rangle$ $i=1,2,\ldots$ Entonces

1.- $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2$

2.- x se representa de forma unica como la suma infinita

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, e_i$$

<u>Demostración</u>

Ver {17} , proposición 1.13.6 , pagina 67 .

NOTA 4.4.2

Sea $W: \Theta \longrightarrow L_2(\Omega,\mathcal{L}(H,G))$ un operador de Wiener (H, G espacios de Hilbert separables) y sea $b(t,x)\in H$. Entonces $W(t,\omega)b(t,x)$ es un proceso Wiener G-valuado (un elemento de G) podemos aplicar la proposición anterior a este elemento, ya que cualquier espacio de Hilbert separable tiene una base.
Por tanto, si $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de G, tendremos:

$$W(t,\omega)b(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle W(t,\omega)b(t,x),e_i\rangle\, e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t)\, e_i$$

LEMA 4.4.3

Sea γ un operador Browniano de H en K (H y K espacios de Hilbert separables) con dominio J, y sean $h\in H$, $k\in K$ dos puntos cualesquiera, entonces:

$$\beta(\Delta) = (\gamma(\Delta)h\ ,\ k)_K$$

es una variable aleatoria gaussiana, centrada, para cada intervalo $\Delta\subset J$, continua casi seguro como función de los puntos extremos de Δ.
Ademas, si (k_i) es una base ortonormal de K , y

$$\beta_i(\Delta) = (\gamma(\Delta)h\ ,\ k_i)_K \qquad , \text{ entonces:}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} E\{\ |\beta_i(\Delta)|^2\ \} = \|h\|_H^2\ \mu(\Delta)$$

<u>Demostración</u>

Ver {4} , Lema 4.1 , pagina 615

NOTA 4.4.4

Sea $W(\Delta) = W(t) - W(t_0)$, segun la nota 4.4.2 , se verifica que

$$W(\Delta)b = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(\Delta)\ e_i$$

donde $\beta_i(\Delta) = \langle W(\Delta)b\ ,\ e_i \rangle$ y (e_i) es una base ortonormal de G.

Aplicando el Lema anterior, resulta:

$$\sum_{i=1}^{\infty} E|\beta_i(\Delta)|^2 \doteq \|b(t,x)\|^2\ (t-t_0)$$

(Teniendo en cuenta , que en este caso μ es la medida de Lebesgue, como ya indicamos en la introducción)

A) ECUACION ATRASADA

Sea $X(t,\omega)$ el proceso de Markov, solución de la ecuación (1), supongamos que su densidad de transición $p(t_0,x,t,y)$ existe y que para $t-t_0>0$, $p(t_0,x,t,y)$ es medible, continua y acotada en x , t y t_0.

Supongamos tambien, que para cada (t,y) , $p(t_0,x,t,y)$ es una vez diferenciable en t_0, y tres veces diferenciable en x; y que las derivadas son continuas y acotadas en (t_0,x).

Bajo estas hipotesis, vamos a demostrar que $p(t_0,x,t,y)$ para $0<t_0<t$, satisface:

$$-\frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) = \left\langle \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y)\ ,\ a(t_0,x) \right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\|b(t_0,x)\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)e_i\ ,\ e_i \right\rangle$$

Esta es la ecuación atrasada de Kolmogorov, para la densidad de transición del proceso solución de la ecuación integral estocastica Ito en espacios de Hilbert separables.

Demostración.

Puesto que $p(t_0,x,t,y)$ es medible en todos sus argumentos; se verifica la ecuacíón de Chapman-Kolmogorov para la densidad de transición:

$$p(t_0,x,t,y) = \int p(t_0,x,t_0+h,z)\ p(t_0+h,z,t,y)\ dz$$

y teniendo en cuenta que $p(t_0,x,t,y)$ es una densidad de probabilidad

$$\int p(t_0,x,t_0+h,z)\ dz = 1$$

Por tanto podemos escribir:

$$(+) \quad p(t_0+h,x,t,y) - p(t_0,x,t,y) =$$

$$= \int p(t_0,x,t_0+h,z) \left\{ p(t_0+h,x,t,y)-p(t_0+h,z,t,y) \right\}\ dz$$

Aplicando el teorema de Taylor escalar-valuado ({17} , teorema 2.11.2 , pagina 167) a $p(t_0,x,t,y)$, se obtiene:

$$p(t_0+h,z,t,y) = p(t_0+h,x,t,y) + \frac{\partial p}{\partial x}(t_0+h,x,t,y)\ (z-x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)\ (z-x)^{(2)} +$$

$$+ \frac{1}{6}\ \frac{\partial^3 p}{\partial z^3}(t_0+h,z,t,y) \Big|_{z=\theta} (z-x)^{(3)}$$

para $\|\theta-x\| < \|z-x\|$

Sustituyendo en (+) el desarrollo de Taylor, para cada $\varepsilon > 0$, se verificara:

$$p(t_0+h,x,t,y) - p(t_0,x,t,y) =$$

$$= \int_{\|z-x\|>\varepsilon} p(t_0,x,t_0+h,z)\, p(t_0+h,z,t,y)\, dz$$

$$- \int_{\|z-x\|\leq\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x}(t_0+h,x,t,y)\, (z-x)\, p(t_0,x,t_0+h,z)\, dz$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\|z-x\|\leq\varepsilon} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)\, (z-x)^{(2)}\, p(t_0,x,t_0+h,z)\, dz$$

$$- \frac{1}{6} \int_{\|z-x\|\leq\varepsilon} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3}(t_0+h,z,t,y)\Big|_{z=\theta} (z-x)^{(3)}\, p(t_0,x,t_0+h,z)\, dz$$

Aplicando las propiedades de la definición de C-difusión, se tienen las siguientes relaciones:

— $$\int_{\|z-x\|>\varepsilon} |p(t_0,z,t,y)|\, p(t_0,x,t_0+h,z)\, dz \leq$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{z} |p(t_0,z,t,y)| \int_{\|z-x\|>\varepsilon} P(t_0,x,t_0+h,dz) = O(h)$$

— $$\int_{\|z-x\|\leq\varepsilon} (z-x)\, P(t_0,x,t_0+h,dz) = a(t_0+h,x).h + O(h)$$

— $$\int_{\|z-x\|\leq\varepsilon} (z-x)^{(2)}\, P(t_0,x,t_0+h,dz) = E(\, W(\Delta) b(t_0+h,x)\,)^{(2)} + O(h)$$

con $W(\Delta) = W(t_0+h)-W(t_0)$

$$- \int_{\|z-x\|\leq\varepsilon} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3}(t_0+h,z,t,y)\Big|_{z=\theta} (z-x)^{(3)}\, p(t_0,x,t_0+h,z)\, dz \leq$$

$$\leq \operatorname{Sup}_z \left|\frac{\partial^3 p}{\partial z^3}(t_0+h,z,t,y)\right| \int_{\|z-x\|\leq\varepsilon} (z-x)^{(3)}\, P(t_0,x,t_0+h,dz) = O(h)$$

Dividiendo por h, reagrupando terminos y teniendo en cuenta las relaciones anteriores

$$\left|\frac{p(t_0+h,x,t,y)-p(t_0,x,t,y)}{h} + \frac{1}{h} < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0+h,x,t,y) \ , \ a(t_0+h,x)h >\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{1}{h}\, E< \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)W(\Delta)b(t_0+h,x) \ , \ W(\Delta)b(t_0+h,x) > \right| \leq$$

$$\leq O(h)$$

Calculamos por separado el tercer termino de la desigualdad anterior; utilizando la nota 4.4.2, se obtiene:

$$E< \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)W(\Delta)b(t_0+h,x) \ , \ W(\Delta)b(t_0+h,x) > =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} E< \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)\beta_i(\Delta)e_i \ , \ \beta_i(\Delta)e_i > =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} E\{ \ |\beta_i(\Delta)|^2 < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)e_i \ , \ e_i > \}$$

Por la nota 4.4.4 , y teniendo en cuenta que (e_i) es una base ortonormal

$$= \|b(t_0+h,x)\|^2 . h \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)e_i \ , \ e_i >$$

Sustituyendo de nuevo en la expresión y simplificando:

$$\left| \frac{p(t_0+h,x,t,y)-p(t_0,x,t,y)}{h} + < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0+h,x,t,y) \;,\; a(t_0+h,x) > + \frac{1}{2} \| b(t_0+h,x) \|^2 \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0+h,x,t,y)e_i \;,\; e_i > \right| \leq O(h)$$

haciendo $h \longrightarrow 0$, se obtiene la ecuación deseada:

$$- \frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) = < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) \;,\; a(t_0,x) > + \frac{1}{2} \| b(t_0,x) \|^2 \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)e_i \;,\; e_i >$$

Nota A.1)

Ya hemos dicho, que la solución de las ecuaciones integrales estocasticas, estudiadas por Yor y por Curtain (Nota 4.3.4) es tambien un proceso de difusión (generalizado). Una demostración analoga a la que acabamos de realizar, nos conduciria a las siguientes ecuaciones atrasadas para las transiciones de los correspondientes procesos solución:

YOR

$$- \frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) = < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) \;,\; b(t_0,x) > + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)\sigma(t_0,x)e_i \;,\; \sigma(t_0,x)e_i >$$

Es decir:

$$- \frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) = < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) \ , \ b(t_0,x) > +$$

$$+ \frac{1}{2} \ \text{Traza} \ \sigma^*(t_0,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)\sigma(t_0,x)$$

CURTAIN

$$- \frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) = < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) \ , \ b(t_0,x) > +$$

$$+ \frac{1}{2} \ \text{Traza} \ \sigma S \sigma^* \ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)$$

donde S es el operador compacto, positivo, acotado, de clase de traza, de la definición 2.1, (iii) (ver {7}).

Nota A.2)

Es importante comprobar que la teoria clasica de difusiones, se conserva como caso particular. Es decir: sabemos que las E.I.E. Ito que hemos estudiado, incluyen a la ecuación de Ito vectorial (y por tanto en R), tendremos que ver que las ecuaciones atrasadas obtenidas anteriormente, tambien tienen como caso particular, la ecuación atrasada multidimensional ({36} , pagina 176).

En efecto, si por ejemplo en la ecuación integral estocastica estudiada por Yor, el espacio de Hilbert H es R^n , tendremos que se verifica la siguiente ecuación atrasada:

$$-\frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) = \sum_i b_i(t_0,x)\frac{\partial p}{\partial x_i}(t_0,x,t,y) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}(t_0,x)\frac{\partial p}{\partial x_i \partial x_j}(t_0,x,t,y)$$

donde $\sigma(t_0,x)\sigma(t_0,x)^T = A(t_0,x) = (\ A_{ij}(t_0,x)\ )$

B) ECUACION ADELANTADA

Sea $X(t,\omega)$ el proceso de Markov, solución de la ecuación (1), y sea $p(t_0,x,t,y)$ su densidad de transición. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

- $p(t_0,x,t,y)$ es dos veces diferenciable en "y" , y una vez diferenciable en t; y que las derivadas son continuas en (t,y)
- $\|b(t,y)\|^2$ es dos veces continuamente diferenciable en y.
- $a(t,y)$ es una vez continuamente diferenciable en y.

Entonces, bajo estas hipotesis, vamos a demostrar que $p(t_0,x,t,y)$ verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t_0,x,t,y) = -<\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ p(t_0,x,t,y)a(t,y)> +$$

$$+\frac{1}{2}<\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ ,\ p(t_0,x,t,y)\|b(t,y)\|^2>$$

(En el desarrollo de la demostración, aclararemos la notación de la ecuación anterior)

Esta es la ecuación adelantada de Kolmogorov ó ecuación de Fokker-Planck para la densidad de transición del proceso solución de la ecuación integral estocastica Ito en espacios de Hilbert separables.

Demostración.

Tomemos una función tres veces continuamente diferenciable $g(z)$ que se anula fuera de un intervalo finito.

De la ecuación de Chapman-Kolmogorov para la densidad de transición, deducimos: .

$$\int p(t_0,x,t+h,z)\ g(z)\ dz =$$

$$\int p(t_0,x,t,y)\left[\int p(t,y,t+h,z)\ g(z)\ dz\right] dy$$

Por tanto,

$$\int [p(t_0,x,t+h,z)-p(t_0,x,t,z)]\ g(z)\ dz =$$

$$\int p(t_0,x,t,y)\left[\int p(t,y,t+h,z)\,[g(z)-g(y)]\ dz\right] dy$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad anterior por h, y haciendo $h \longrightarrow 0$, obtenemos:

En el lado izquierdo; es correcto tomar este limite, ya que $\frac{\partial p}{\partial t}$ hemos supuesto que es continua, y $g(z)$ es diferenciable en cero solo en un intervalo finito; la expresión que resulta al tomar el limite es:

$$\int \frac{\partial p}{\partial t}(t_0,x,t,z)\ g(z)\ dz$$

Para el lado derecho, vamos a demostrar que:

$$\lim_{h\to 0} \int p(t_0,x,t,y)\left\{\frac{1}{h}\int p(t,y,t+h,z)[g(z)-g(y)]\right\}dy =$$

$$= \int p(t_0,x,t,y)\left\{\sum_{i=1}^{\infty} < a(t,y)\ ,\ e_i > \frac{\partial g(y)}{\partial y}(e_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,||b(t,y)||^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}(e_i,e_i)\right\} dy$$

Aplicando el mismo razonamiento, que el realizado en la demostración de la ecuación atrasada, es suficiente con que probemos que en la expresión anterior, el limite puede pasar dentro del signo integral, para $h\to 0$.

Ya hemos visto anteriormente que la distribución de $X_t^x(t+h)$, coincide con la transición de probabilidad $P(t,x,t+h,A)$ del proceso $X(t)$, luego:

$$\int p(t,y,t+h,z)[g(z)-g(y)]\,dz = E\,g(X_t^y(t+h)) - g(y)$$

aplicando la formula de Ito generalizada {5}, obtenemos que:

$$E\,g(X_t^y(t+h)) - g(y) = O(h)$$

Por tanto para alguna constante $C>0$

$$\left|\frac{1}{h}\int p(t,y,t+h,z)[g(z)-g(y)]\,dz\right| \le C$$

y por el teorema de Lebesgue, es posible pasar el limite dentro del signo integral.

Por tanto, tenemos demostrado que:

$$\int \frac{\partial p}{\partial t}(t_0,x,t,z)g(z)\ dz =$$

$$\int p(t_0,x,t,z) \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial g(z)}{\partial z}(e_i) < a(t,z)\ ,\ e_i > + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \|b(t,z)\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}(e_i,e_i) \right\} dz$$

Aplicando la formula de integración por partes (Teorema 2 de Kuo, {27}) , con las transformaciones convenientes para que se ajuste a nuestros datos, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int \frac{\partial g(z)}{\partial z}(e_i) < p(t_0,x,t,z)a(t,z)\ ,\ e_i > \ dz\ =$$

$$= - \sum_{i=1}^{\infty} \int g(z) < \frac{\partial}{\partial z}(\ p(t_0,x,t,z)a(t,z)\ )e_i\ ,\ e_i >$$

que abreviadamente representaremos por

$$- \int g(z) < \frac{\partial}{\partial z}\ ,\ p(t_0,x,t,z)a(t,z) > dz$$

De forma analoga, aplicando reiteradamente dicha formula de integración por partes, se llega al siguiente resultado:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int p(t_0,x,t,z)\ \|b(t,z)\|^2\ \frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2}(e_i,e_i)\ dz\ =$$

$$= \int g(z) < \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ ,\ p(t_0,x,t,z)\|b(t,z)\|^2 > dz$$

Luego:

$$\int \{ \frac{\partial p}{\partial t}(t_0,x,t,z) + < \frac{\partial}{\partial z} , p(t_0,x,t,z)a(t,z) > -$$

$$- \frac{1}{2} < \frac{\partial^2}{\partial z^2} , p(t_0,x,t,z)\|b(t,z)\|^2 > \} g(z)\ dz = 0$$

Puesto que lo que aparece dentro de la llave, es continuo y g(z) es una función tres veces continuamente diferenciable arbitraria, que se anula fuera de un intervalo finito, el integrando en la expresión anterior es igual a cero, es decir:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t_0,x,t,z) = - < \frac{\partial}{\partial z} , p(t_0,x,t,z)a(t,z) > +$$

$$+ \frac{1}{2} < \frac{\partial^2}{\partial z^2} , p(t_0,x,t,z)\|b(t,z)\|^2 >$$

Entendiendo que los productos escalares , en la ecuación anterior son notaciones abreviadas, como en el desarrollo de la demostración hemos notado.

REFERENCIAS

{1} ARNOLD, L.

"Stochastic Differential Equations: Theory and Applications"

Yohn Wiley & Sons, New York, 1974

{2} BHARUCHA-REID, A. T.

"Random Integral Equations"

Academic Press, New York, 1972

{3} BROCKETT, R. W.

"Parametrically Stochastic Linear Differential Equations"

Harvard Univ. Cambridge, Mass., U.S.A. North-Holland Publ. Company, 1975

{4} CABAÑA, E. M.

"Stochastic Integration in separable Hilbert spaces"

Publ. Inst. Math. Montevideo 4, 1966, (49-80)

{5} CABAÑA, E. M.

"On Stochastic Differentials in Hilbert spaces"
Proc. Amer. Math. Soc. 20, 1969, (259-265)

{6} CHOW, PAO-LIU

"Stochastic Partial Differential Equations in Turbulence Related Problems"
Probabilistic Analysis and related Topics. Vol. I
Edited by A. T. Bharucha-Reid, Academic Press, New-York, San Francisco, London, 1978

{7} CURTAIN, R. F., and FALB, P. L.

"Ito's Lemma in Infinite Dimensions"
Journal of Math. Analysis and Applications. Vol. 31, 1970, (434-448)

{8} CURTAIN, R. F.

"Estimation and Stochastic Control for Linear Infinite-Dimensional Systems"
Probabilistic Analysis and related Topics. Vol. I.
Edited by A. T. Bharucha-Reid, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978

{9} DALETSKII, YU. L., and FOMIN, S. V.

"Generalized Measures in Hilbert space and Kolmogorov's Forwar Equation"
Soviet Math. Dokl. 13, 1972, (993-997)

{10} DAWSON, D. A.

"Generalized Stochastic Integrals and Equations"
American Math. Society, 1970, (473-506)

{11} DYNKIN, E. B.

"Markov Processes" Volumen I y II
Springer-Verlag, Berlin y New York, 1965

{12} FERNANDEZ VIVAS, C.

"Sobre una generalización del concepto de integral estocastica respecto de operadores de Wiener"
R.A.M.E., Sevilla, 1974

{13} FERNANDEZ VIVAS, C.

"Aportaciones a la teoria de ecuaciones integrales estocasticas"
Tesis, Universidad de Granada, 1975

{14} FERNANDEZ VIVAS, C.

"Sobre el caracter felleriano de la solución de la ecuación de Ito generalizada"
Trabajos de estadistica e I. O. Volumen XXVI, Madrid 1975

{15} FERNANDEZ VIVAS, C.

"Sobre la existencia de operadores de difusión asociados a un tipo especial de ecuaciones integro-estocasticas"
Cuadernos del departamento de estadistica matematica

Serie A. Probabilidad n°4, 1977, Facultad de ciencias matematicas. Universidad de Granada, (36-47)

{16} FERNANDEZ VIVAS, C.
"Procesos de difusión generalizados sobre la frontera de una región abierta"
Universidad de Granada, 1976

{17} FIELD, M. J.
"Differential Calculus and its Applications"
Van Nostrand Reinhold Company Limited, New York, 1976

{18} GIHMAN, I. I. y SKOROHOD
"Stochastic Differential Equations"
Springer-Verlag, Berlin and New York, 1972

{19} HIDA, T.
"Analysis of Brownian Functionals"
Nagoya Univ. Nagoya. Japan. North-Holland Publ. Company, 1975

{20} HITSUDA, M. y WATANABE, H.
"On Stochastic Integrals with Respect to an Infinite Number of Brownian Motions and its Applications"
Proc. of Intern. Symp. S.D.E. Edited by Kiyosi Ito
Kyoto, 1976, (57-74)

{21} ITO, K.

"On a formula concerning stochastic Differentials"
Nagoya Math. J. 3, 1951, (55-65)

{22} ITO, K. and McKEAN, H. P.

"Diffusion Processes and Their Sample Paths"
Springer-Verlag, Berlin and New York, 1965

{23} KANNAN, D.

"An operator-valued Stochastic Integral, II"
Ann. Inst. Henri Poincare Vol. VIII, n°1, 1972, (9-32)

{24} KANNAN, D.

"An operator-valued Stochastic Integral, III"
Ann. Inst. Henri Poincare Vol. VIII, n°3, 1972, (217-228)

{25} KANNAN, D.

"Random Integrodifferential Equations"
Probabilistic Analysis and related Topics Vol. I.
Edited by A. T. Bharucha-Reid, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978

{26} KOLMOGOROV, A. N. y FOMIN, S. V.

"Elementos de la teoria de funciones y del analisis funcional"
Editorial Mir Moscu, 1975

{27} KUO, H. H.

"Integration by parts for abstract Wiener measures"
Duke Math. J. 41, 1974, (373-379)

{28} KUO, H. H.

"Gaussian Measures in Banach spaces, Lecture Notes"
Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975

{29} LE BRETON, A.

"On continuous and discrete sampling for parameter estimation in diffusion type processes"
Univ. of Grenoble, Grenoble, France. North- Holland Publ. Company 1975

{30} LOEVE, M.

"Teoria de la probabilidad"
Editorial Tecnos S.A., 1976

{31} MEYER, P. A.

"Probability and Potential"
Ginn (Blaisdell), Boston, Massachusetts, 1966

{32} MEYER, P. A.

"Introduction au calcul Differentiel Stochastique"
Seminario impartido en la Universidad de Granada, 1975

{33} MEYER, P. A.

"Notes sur les integrales Stochastiques. I.- Inte-

grales Hilbertiennes"
Université de Strasbourg. Seminaire de Probabilités
Edited by A. Dold and B. Eckmann. Springer-Verlag ,
Berlin. Heidelberg. New York, 1977, (446-462)

{34} SCHAEFER, H. H.
"Espacios vectoriales topologicos"
Editorial Teide, S.A., 1974

{35} WEIDMANN, J.
"Linear operators in Hilbert spaces"
Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980

{36} WONG, E.
"Stochastic processes in information and dynamical systems"
McGraw-Hill Book Company, New York, 1971

{37} YOR, M. M.
"Les integrales Stochastiques Hilbertiennes". "Le probleme des martingales dans un espace de Hilbert"
Thése, Universite de Paris, 1973

{38} YOSIDA, K.
"Functional Analysis"
Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975

APENDICE

Como complemento ilustrativo a la teoria expuesta en el Capitulo 4 , presentamos en este apendice el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Sea $X(t,\omega) : \Theta\times\Omega \longrightarrow G$ un proceso estocastico y $W(t,\omega)$ un operador de Wiener con valores en $\sigma_2(G)$ (espacio de operadores Hilbert-Schmidt sobre G).
Consideremos la ecuación integral estocastica Hilbert-valuada:

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + a\int_0^t X(\tau,\omega)\, d\tau + b\int_0^t X(\tau,\omega)\, dW(\tau,\omega)$$

donde a y b son constantes reales.

Determinar la densidad de transición $p(t_0,x,t,y)$ de la anterior ecuación integral estocastica Ito con valores en el espacio de Hilbert separable G.

<u>Solución</u>

Consideremos la E.I.E. Ito:

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(\tau,X(\tau,\omega))\,d\tau + \int_0^t b(\tau,X(\tau,\omega))\,dW(\tau,\omega)$$

donde $X(t,\omega): \Theta\times\Omega \longrightarrow G$; $W(t,\omega)$ es un operador de Wiener con valores en $\sigma_2(G)$ y $a(t,X)$, $b(t,X)$ son funciones aleatorias G-valuadas, verificando las condiciones necesarias para que la ecuación anterior tenga un unico proceso solución $X(t,\omega)$.

Bajo estas hipotesis, sabemos que la solución $X(t,\omega)$ es un proceso de difusión, cuya densidad de transición es la solución unica de las ecuaciones de difusíón.

En nuestro ejemplo, $a(t,x) = a.x$ y $b(t,x) = b.x$, son funciones independientes de t, vamos a escribir para este caso las ecuaciones de difusión, y demostraremos que la función de densidad que las satisface, esta dada por:

$$(*)\quad p(t_0,x,t,y) = \frac{1}{\|y\|\sqrt{2\pi\gamma(t-t_0)}} \exp\left\{- \frac{1}{2\gamma(t-t_0)} \cdot \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right]^2\right\}$$

donde $\gamma = b^2$ y $\beta = a - \frac{b^2}{2}$

Ecuación atrasada.

En nuestro ejemplo, esta ecuación es de la forma :

$$- \frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) = a < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) , x > + \frac{1}{2} b^2 \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)e_i , e_i >

Comprobamos que la función de densidad $p(t_0,x,t,y)$, definida por (*), verifica la ecuación anterior.

(a) $\boxed{\frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y)}$

$$\frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) =$$

$$= \frac{1}{2(t-t_0)} \frac{1}{\|y\|\sqrt{2\pi\gamma(t-t_0)}} \exp\left\{- \frac{1}{2\gamma(t-t_0)}\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right]^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{\|y\|\sqrt{2\pi\gamma(t-t_0)}} \exp\left\{- \frac{1}{2\gamma(t-t_0)}\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right]^2\right\} \cdot$$

$$\cdot \left[- \frac{1}{2\gamma(t-t_0)^2}\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\gamma(t-t_0)} \, 2\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right] \beta \right]$$

Dividiendo por $p(t_0,x,t,y)$, nos queda:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t_0}(t_0,x,t,y) =$$

$$= \frac{1}{2(t-t_0)} - \frac{1}{2\gamma(t-t_0)^2}\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right]^2$$

$$- \frac{\beta}{\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right]$$

(b) $\boxed{a < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) \, , \, x >}$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) =$$

$$= \frac{1}{\|y\|\sqrt{2\pi\gamma(t-t_0)}} \exp\left\{- \frac{1}{2\gamma(t-t_0)}\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right]^2\right\} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{2\gamma(t-t_0)} \; 2\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right] \frac{<x,\cdot>}{\|x\|^2} \right]$$

Dividiendo por $p(t_0,x,t,y)$

$$\frac{1}{p}\;\frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) =$$

$$= \frac{1}{\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right] \frac{<x,\cdot>}{\|x\|^2}$$

De donde,

$$\frac{1}{p}\; a < \frac{\partial p}{\partial x}(t_0,x,t,y) \; , \; x > =$$

$$= \frac{a}{\gamma(t-t_0)}\left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right] \frac{<x,x>}{\|x\|^2} =$$

$$= \frac{a}{\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right]$$

(c) $\boxed{\frac{1}{2} \; b^2 \; \|x\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y) e_i \; , \; e_i >}$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y) \; h =$$

$$= \frac{1}{\|y\|\sqrt{2\pi\gamma(t-t_0)}} \exp\left\{- \frac{1}{2\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\right]^2 \right\} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\gamma^2(t-t_0)^2} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right]^2 \frac{<x,h>}{\|x\|^2}\,\frac{<x,\cdot>}{\|x\|^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{\|y\|\sqrt{2\pi\gamma(t-t_0)}} \exp\left\{- \frac{1}{2\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right]^2 \right\} \cdot$$

$$\cdot \left[- \frac{1}{\gamma(t-t_0)} \frac{<x,\cdot>}{\|x\|^2} \frac{<x,h>}{\|x\|^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right] \frac{<\cdot,h>\|x\|^2 - <x,h>2<x,\cdot>}{\|x\|^4} \right]$$

Dividimos por $p(t_0,x,t,y)$, y calculamos:

$$\frac{1}{p} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)h \ , \ h > =$$

$$= \frac{1}{\gamma^2(t-t_0)^2} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right]^2 \frac{<x,h>^2}{\|x\|^4}$$

$$- \frac{1}{\gamma(t-t_0)} \frac{<x,h>^2}{\|x\|^4}$$

$$+ \frac{1}{\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right] \frac{<h,h>\|x\|^2 - 2<x,h>^2}{\|x\|^4}$$

Luego obtenemos que:

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)e_i \ , \ e_i > =$$

$$= \frac{1}{\gamma^2(t-t_0)^2} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right]^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<x,e_i>^2}{\|x\|^4}$$

$$- \frac{1}{\gamma(t-t_0)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<x,e_i>^2}{\|x\|^4}$$

$$+ \frac{1}{\gamma(t-t_0)} \left[\ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0) \right] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|e_i\|^2\|x\|^2 - 2<x,e_i>^2}{\|x\|^4}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{p}\,\frac{b^2}{2}\,\|x\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} < \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t_0,x,t,y)e_i \ ,\ e_i > =$$

$$= \frac{b^2}{2\gamma^2(t-t_0)}\left[\ \ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\ \right]^2$$

$$- \frac{b^2}{2\gamma(t-t_0)} - \frac{b^2}{2\gamma(t-t_0)}\left[\ \ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\ \right]$$

Calculamos (b) + (c) sustituyendo γ y β por sus valores

$$(b)+(c) = \frac{a}{b^2(t-t_0)}\left[\ \ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\ \right]$$

$$+ \frac{b^2}{2b^4(t-t_0)^2}\left[\ \ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\ \right]^2$$

$$- \frac{b^2}{2b^2(t-t_0)} - \frac{b^2}{2b^2(t-t_0)}\left[\ \ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\ \right]$$

$$= \left(\ a - \frac{1}{2}\ \right)\frac{1}{(t-t_0)}\left[\ \ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\ \right]$$

$$- \frac{1}{2(t-t_0)} + \frac{1}{2b^2(t-t_0)^2}\left[\ \ln\|y\| - \ln\|x\| - \beta(t-t_0)\ \right]^2$$

Sustituyendo en (a) los valores de γ y β , vemos que coincide con la expresión anterior, salvo en el signo; por tanto tenemos que:

$$(a) + (b) + (c) = 0$$

es decir $-(a) = (b) + (c)$; luego $p(t_0,x,t,y)$ verifica la ecuación atrasada, como queriamos comprobar.

Ecuación adelantada.

De forma analoga se demuestra que la densidad de transición $p(t_0,x,t,y)$ definida por (*) satisface la ecuación adelantada y por tanto dicha transición es la función de densidad del proceso solución de la ecuación integral estocastica Ito, de la que partimos:

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + a\int_0^t X(\tau,\omega)\, d\tau + b\int_0^t X(\tau,\omega)\, dW(\tau,\omega)$$